# ENCYKLOPÄDIE
DER
# MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

---

HERAUSGEGEBEN
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN,
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

---

ZWEITER BAND IN DREI TEILEN.
## ANALYSIS.

REDIGIERT VON
**H. BURKHARDT†**, (1898–1914) **W. WIRTINGER** IN WIEN (1905–1912)
UND
**R. FRICKE**
IN BRAUNSCHWEIG.

ERSTER TEIL.
ZWEITE HÄLFTE.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904—1916.

# Inhaltsverzeichnis zu Band II, 1. Teil, 2. Hälfte.

## A. Analysis der reellen Größen (Fortsetzung).

### 10. Theorie der Kugelfunktionen und der verwandten Funktionen, insbesondere der Laméschen und Besselschen (Theorie spezieller durch lineare Differentialgleichungen definierter Funktionen). Von A. Wangerin in Halle a. S.



a*

(Abgeschlossen im Juli 1904.)

## 11. Funktionaloperationen und -gleichungen. Von S. Pincherle in Bologna.

### Funktionaloperationen.



### Funktionalgleichungen.



(Abgeschlossen im Dezember 1905.)

## 12. Trigonometrische Reihen und Integrale (bis etwa 1850). Von H. Burkhardt † (in München).

### Theorie der trigonometrischen Reihen und Integrale.

#### I. Entwicklung analytischer Funktionen in trigonometrische Reihen.

## II. Entwicklung willkürlicher Funktionen in trigonometrische Reihen.



## III. Unharmonische trigonometrische Reihen.

## IV. Mehrfache trigonometrische Reihen.



## V. Das Fouriersche Integral.



## Anwendungen der trigonometrischen Reihen und Integrale.

## VI. Integration partieller Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

## VII. Integration partieller Differentialgleichungen mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen.



## VIII. Sonstige Anwendungen.



(Abgeschlossen im Mai 1914.)

# Übersicht
## über die in der vorliegenden zweiten Hälfte von Band II, Teil I zusammengefaßten Hefte und ihre Ausgabedaten.

# II A 11. FUNKTIONALOPERATIONEN UND -GLEICHUNGEN*)

VON

S. PINCHERLE
IN BOLOGNA.

## Inhaltsverzeichnis.

### Funktionaloperationen.



### Funktionalgleichungen.



---

*) Die in diesem Artikel auftretenden Variabeln können ebensowohl komplex als reell sein; er hätte daher auch in II B Platz finden können. Wir reihen ihn an dieser Stelle ein, um sein Erscheinen nicht noch länger hinausschieben zu müssen. Red.

---

# Litteratur.

## Lehrbücher.

*L. J. A. Arbogast,* Du calcul des dérivations, Strassb. 1800.
*R. Carmichael,* Treatise on the calculus of operations, Lond. 1855; deutsch von *C. H. Schnuse,* Braunschw. 1857.
*H. Schapira,* Theorie allgemeiner Kofunktionen, Leipz. 1892 (unvollendet).
*G. Oltramare,* Essai sur le calcul de généralisation, Genève 1896.
*S. Pincherle* e *U. Amaldi,* Le operazioni funzionali distributive, Bologna 1901.

## Monographien.

*G. Leibniz,* Symbolismus memorabilis, Miscell. Berol. 1710, p. 160.
*J. L. Lagrange,* Mém. sur une nouvelle espèce de calcul, Berl. nouv. mém. 3, 1772 (74), p. 185; Oeuvres 3, p. 441.
*A. M. de Lorgna,* Théorie d'une nouvelle espèce de calcul fini et infinitésimal, Turin mém. 4 (1787), p. 409.
*J. Ph. Gruson,* Le calcul d'exposition, Berl. nouv. mém. 1798/99.
*J. J. Français,* Mém. tendant à démontrer la légitimité de la séparation des échelles, Gerg. Ann. 3 (1812), p. 244.
*M. Servois,* Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel, ibid. 5 (1814), p. 93.
*Ch. Babbage,* On functional equations (Appendix von *W. Herschel*'s Collection of examples on the calculus of finite differences, Cambr. 1820; in der deutschen Übersetzung von *Schnuse* weggelassen).
*A. Cauchy,* Sur l'analogie des puissances et des differences. Exercices de Mathém. 2, Paris (1827), p. 159 (Oeuvres (2) 7, p. 198).
*J. Liouville,* Sur les dérivées à indices quelconques, J. éc. polyt. cah. 21 (1832), p. 71.
*R. Murphy*, On the theory of analytical operations, Lond. Phil. Trans. 1837, p. 179.
*G. Boole,* On a general method in analysis, ibid. 1844, p. 225.
*W. H. Russell,* On the calculus of symbols, ibid. 1861, p. 69; 1862, p. 223, 265; 1863, p. 517.
*W. Spottiswoode,* On the calculus of symbols, ibid. 1862, p. 99.

*Hj. Holmgren*, Om differentialkalkylen med indices af hvad natur som helst, Stockh. Handl. $5^{11}$, 1864/65.

*E. Schroeder*, Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen, Math. Ann. 2 (1870), p. 317.

— Über iterierte Funktionen, ibid. 3 (1871), p. 296.

*P. Gazzaniga*, Il calcolo dei simboli d'operazioni elementarmente esposto, Giorn. di mat. 20 (1880), p. 72.

*G. Koenigs*, Recherches sur les intégrales de certaines équations fonctionnelles, Ann. éc. norm. (3) 1 (1884), Suppl., p. 3.

— Nouvelles recherches sur les équations fonctionnelles, ibid. 2 (1885), p. 385.

*A. Grévy*, Étude sur les équations fonctionnelles, ibid. (3) 11 (1894), p. 249; auch Thèse Paris.

*S. Pincherle*, Mém. sur le calcul fonctionnel distributif, Math. Ann. 49 (1897), p. 325.

*C. Bourlet*, Sur les opérations en général et les équations différentielles linéaires d'ordre infini, Ann. éc. norm. (3) 14 (1897), p. 133.

— Sur certaines équations analogues aux différentielles, ibid. 16 (1899), p. 333.

*L. Leau*, Étude sur les équations fonctionnelles, Toulouse fac. ann. 11, 1897 p. E. 1; auch Thèse Paris 1897.

*V. Volterra*, Sull' inversione degli integrali definiti, Torino Atti 31 (1896), p. 231, 286, 389, 429.

— Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti, Ann. di mat. (2) 25 (1897). p. 139.

Die bereits in I E erwähnten zahlreichen Lehrbücher und Monographien über *Differenzenrechnung*, in denen oft ganze Kapitel dem Rechnen mit Symbolen oder einzelnen seiner Anwendungen gewidmet sind, sind hier nicht noch einmal aufgezählt.

Die Litteratur ist im allgemeinen in diesem Artikel bis Anfang 1902 berücksichtigt; nur in Nr. **31** bis 1905.

## Funktionaloperationen.

**1. Definition der Funktionalrechnung.** In der allgemeinen Theorie der Operationen hat man drei Arten von Elementen zu unterscheiden[1]): die *Objekte*, an denen man operiert; die *Operationen*, die man an diesen Objekten ausführt — man stellt sie durch Zeichen dar, die man *Operationssymbole* oder einfach *Symbole* nennt[2]) —; endlich die *Resultate*, die man durch Ausführungen der Operationen erhält. Sind die Objekte und die Resultate *Funktionen* von einer

1) *R. Murphy*, Lond. Phil. Trans. 1837, p. 179.

2) Seit *Leibniz* und *Lagrange*; *A. M. Lorgna* (Turin mém. 1787, p. 409) und *Lacroix* (Traité du calcul différentiel et du calcul intégral 3, Paris 1819, p. 28, 39, 546, 844, 963) sagen *„caractéristiques“*; *Arbogast* (Calcul des dérivations, Strassb. 1800) und *Français* (Gergonne Ann. 3 (1812), p. 244) *„échelles“*. Vgl. auch *Lacroix*, p. 970.

oder mehreren Veränderlichen, so heissen die Operationen *Funktionaloperationen;* der so entstehende Zweig der Analysis wird gewöhnlich als *Rechnen mit Symbolen* bezeichnet[3]), würde aber besser *Funktionalrechnung* heissen.

**2. Die Funktionalrechnung von Leibniz bis Lagrange.** Auf die frappierende Analogie zwischen der Regel zur Bildung der höheren Differentialquotienten eines Produkts zweier oder mehrerer Funktionen und der Regel zur Bildung der entsprechenden Potenzen eines Binoms oder Polynoms hat zuerst *Leibniz* in seinem Briefwechsel mit *Johann I. Bernoulli*[4]), dann in der Abhandlung „Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis in comparatione potentiarum et differentiarum“[5]) aufmerksam gemacht. Auf diese Bemerkung von *Leibniz* gründete *Lagrange*[6]) einen Algorithmus, in welchem das Differentialzeichen systematisch wie eine fiktive Grösse behandelt wird, auf die man die Regeln der gewöhnlichen Algebra anwendet, mit dem Vorbehalt, dass man dann in den Resultaten die $n^{\text{te}}$ Potenz von $du/dx$ durch $d^n u/dx^n$ ersetzt. Er erhält auch zum erstenmal die später in vielen Lehrbüchern der Infinitesimalrechnung reproduzierte symbolische Formel:

$$\Delta^\lambda u = \left(e^{h\frac{du}{dx}} - 1\right)^\lambda, \tag{1}$$

in der $\Delta u$ die Differenz $u(x+h) - u(x)$ bedeutet. Nach *Lagrange* ist dieser Algorithmus von vielen anderen Autoren wieder vorgenommen und weiter entwickelt worden, namentlich in der Absicht, eine Menge zu (1) mehr oder weniger analoger Formeln zu erhalten. Im folgenden sind die interessantesten davon besprochen, viele andere, ihres fast rein formellen Charakters wegen, beiseite gelassen[7]).

**3. Untersuchungen über das Rechnen mit Symbolen bis auf Servois.** Kaum waren die Analogien zwischen dem Rechnen mit Potenzexponenten und dem mit Differentiationsindices bemerkt, so beschäftigte man sich mit der Frage nach einem fundamentalen Prinzip, durch das man das Rechnen mit Symbolen rechtfertigen könne. Wenn man z. B. auf die Differentialien die Regeln des Rech-

3) *Leibniz,* Berol. Miscell. 1 (1710), p. 160.

4) Commercium philos. et math., Lausannae et Genevae 1745, epist. VI ad XVIII, passim. *Leibniz'* math. Schriften (1) 3, p. 175.

5) Berol. Miscell. 1 (1710), p. 160.

6) Berl. nouv. mém. 1772, p 185; Oeuvres 3, p. 441.

7) Unter den Anwendungen aus neuester Zeit sei erwähnt: *J. Fredholm,* Sur la méthode de prolongement analytique de Mittag-Leffler, Stockh. Förhandl. 1901, p. 203.

nens mit Potenzen anwendet: wodurch ist man berechtigt, die Resultate als zuverlässig hinzustellen? Schon *Johann I. Bernoulli* erkannte in einem Briefe an *Leibniz*[8]) an, dass die Analogie nicht zufällig sein könne: „haud dubie aliquid arcani subest“. *Lagrange*[6]) glaubte, das Prinzip müsse ziemlich versteckt liegen: „quoique le principe de cette analogie entre les puissances positives et les différentielles, et les négatives et les intégrales, ne soit pas évident par lui-même, cependant les conclusions qu'on en tire ne sont pas moins exactes, ainsi qu'on peut s'en convaincre à posteriori“. *P. S. Laplace*[9]) geht zum Beweis von (1) und anderen analogen Formeln davon aus, dass in der Entwicklung:

$$(2)\qquad \Delta^\lambda u = \frac{d^\lambda u}{du^\lambda} h^\lambda + A' \frac{d^{\lambda+1} u}{d x^{\lambda+1}} h^{\lambda+1} + A'' \frac{d^{\lambda+2} u}{d x^{\lambda+2}} h^{\lambda+2} + \cdots$$

die Koeffizienten $A', A'', \ldots$ nur von $\lambda$ und nicht von der Funktion $u$ abhängen; man kann sie also durch Spezialisierung dieser Funktion bestimmen. Setzt man speziell $u = e^x$, so erhält man wieder das Rechnen mit Potenzen; damit ist die von *Leibniz* bemerkte Analogie erklärt.

Andere Autoren, wie *A. M. Lorgna*[10]), *J. Ph. Gruson*[11]), *L. J. Arbogast*[12]), *J. F. Français*[13]) benutzen zur Rechtfertigung des Rechnens mit Symbolen Argumentationen, die unter verschiedenen Formen alle den Fehler aufweisen, dass die Symbole $d$, $\Delta$, $S$, $\Sigma$ bald wie Operationszeichen, bald wie wirkliche „*algebraische Grössen*“[14]) behandelt werden. Die beiden zuletzt Genannten bezeichnen ihre Methoden als „*séparation*“ oder „*détachement des échelles*“. Sie wollen „fonder le calcul différentiel sans autre métaphysique que celle de l'algèbre“[15]), d. h. auf eine rein algorithmische oder formelle Basis; damit verlangen sie freilich vom Operationskalkül mehr als er leisten kann. Ausserdem haben alle ihre Methoden etwas künstliches und daher unbefriedigendes an sich.

8) Commerc. philos. et mathem. epist. XVIII. Vgl. auch eine ganz ähnliche Äusserung von *Leibniz* selbst, math. Schriften (1) 3, p. 175.

9) Paris mém. div. sav. [étr.] 7 (1776); Oeuvres 8.

10) Turin mém. 1786/87, p. 409; vgl. *Brinkley*, Lond. Phil. Trans. 1807, p. 114.

11) Berl. nouv. mém. 1798/99.

12) Calcul des dérivations, Strassb. 1800; vgl. *A. Cayley*, Lond. Phil. Trans. 1861, p. 37 (Papers 4, p. 265).

13) Gergonne Ann. 3 (1812), p. 244.

14) Unter „quantités algébriques“ verstand man damals Buchstaben, die den Regeln des gewöhnlichen Rechnens folgen; diese Ausdrucksweise hat sich fast bis auf unsere Tage erhalten.

15) *Gruson*, Berlin nouv. mém. (1798).

**4. Prinzip des Rechnens mit Symbolen.** Ein wirklicher Fortschritt findet sich bei *Servois*[16]), der zuerst eingesehen hat: das fundamentale Prinzip des Rechnens mit Symbolen besteht in der *Erhaltung* gewisser Eigenschaften — *formaler Gesetze*, wie man jetzt sagt — der Operationen, auf die man dieses Rechnen anwendet. Er zeigt in der That, dass der Grund der von seinen Vorgängern konstatierten Analogien in den *kommutativen*, *distributiven* und *assoziativen* Eigenschaften der Operationssymbole $\Delta$, $d/dx$, $\Sigma$, $S$ liegt; man verdankt ihm auch die beiden ersten dieser Termini. Wie seine Vorgänger verwechselt er die Worte „Funktion“ und „Operation“, nicht ohne damit der Klarheit Eintrag zu thun. Wieder aufgenommen, systematischer geordnet und weiter entwickelt wurden seine Ideen von *R. Murphy*[17]), *G. Boole*[18]) und vielen anderen, namentlich englischen Mathematikern[19]); ihnen verdankt man die in den folgenden Nummern dargestellten Resultate.

**5. Elemente des Operationskalküls.** Seien $\alpha, \beta, \ldots$ Funktionen von einer oder mehreren Variabeln, $A, B, \ldots$ Symbole von *Operationen*, deren Anwendung auf die Funktionen $\alpha, \beta, \ldots$ als *Objekte* im allgemeinen neue Funktionen als *Resultate* liefert. Man hat zunächst zwischen *ein-* und *mehrdeutigen* Operationen zu unterscheiden, je nachdem das Resultat einzig ist oder nicht. Die folgenden Definitionen beziehen sich zunächst auf die ersteren, lassen sich aber unter geeigneten Einschränkungen auch auf die letzteren anwenden. Die *Gleichheit* $A = B$ ist definiert durch die Bedingung, dass die Anwendung von $A, B$ auf dieselben Objekte dieselben Resultate giebt; die *Summe*

16) Gergonne Ann. 5 (1814), p. 93.

17) Lond. Phil. Trans. 1837, p. 179.

18) Ibid. 1844, p. 225. Vgl. auch *Boole*'s Math. Analysis of logic, Cambr. 1847; Treatise on differential equations, London 1865, chap. 16.

19) Es ist ziemlich unmöglich, sie alle aufzuzählen; genannt seien noch: *D. F. Gregory*, Examples on the differential calculus, Cambr. 1841; *Ch. Hargreave,* On the solution of linear differential equations, Lond. Phil. Trans. 1848, p. 31; *B. Bronwin,* Lond. Phil. Trans. 1851, p. 461; *B. Tortolini,* Ann. di scienze mat. e fis., Roma 1853, p. 1; *Graves,* Dubl. Proc. 3 (1847), p. 536; *Carmichael,* Treatise on the calculus of operations, Lond. 1855; *Jellett,* Calculus of variations, Dublin 1850; *W. Spottiswoode,* Cambr. and Dubl. math. J. 8 (1853), p. 25; Lond. Phil. Trans. 1862, p. 99; *W. H. Russell,* Lond. Phil. Trans. 1861, p. 69; 1862, p. 253, 265; 1863, p. 517; *A. Cayley,* ibid. 1861, p. 37. Vgl. auch *F. Casorati,* Ann. di mat. (2) 10 (1880), p. 10; Linc. mem. (3) 5 (1880), p. 195; *P. Gazzaniga,* Giorn. di mat. 20 (1882), p. 72. — Die verschiedenen genannten Autoren gebrauchen sehr verschiedene Nomenklaturen und Bezeichnungen; in diesem Artikel ist eine gleichmässige Bezeichnung benutzt, die am einfachsten und rationellsten zu sein schien, übrigens von der von *Boole, Carmichael* und *Casorati* benutzten nicht wesentlich abweicht.

$A + B$ als diejenige Operation, deren Anwendung auf ein Objekt $\alpha$ als Resultat die Summe der Resultate der Anwendung von $A$ und von $B$ auf dasselbe Objekt ergiebt. Die so definierten Begriffe der Gleichheit und der Summe von Operationen haben dieselben wohlbekannten formalen Eigenschaften wie die Gleichheit und die Summe von Grössen. Man nennt ferner *Produkt* von $B$ mit $A$ und bezeichnet mit $AB$[20]) das Resultat, das man erhält, wenn man die Operation $A$ auf das Resultat von $B$ anwendet. Das Produkt $BA$ ist im allgemeinen von $AB$ verschieden; sind diese Produkte einander gleich, so ist die Multiplikation der Symbole $A$ und $B$ *kommutativ*. Die Operationen, die man gewöhnlich untersucht, geben $A(B\Gamma) = (AB)\Gamma$; das ist die *assoziative* Eigenschaft. Von Symbolen derart, dass die Gleichungen gelten:

(3) $$A(\alpha + \beta) = A(\alpha) + A(\beta)$$

und wenn $c$ irgend eine Zahl ist[21]):

(4) $$A(c\alpha) = cA(\alpha),$$

sagt man, sie haben die *distributive* Eigenschaft[22]); die Symbole und die durch sie bezeichneten Operationen heissen dann auch selbst distributiv.

Aus dem assoziativen Gesetz folgt das *Gesetz der Indices* (law of indices):

(5) $$A^m A^n = A^{m+n}.$$

Dieses Gesetz lässt sich auf negative und gebrochene Exponenten ausdehnen. Man bezeichnet mit dem Symbol 1 die *„identische"* Operation:

(6) $$1(\alpha) = \alpha$$

und mit $A^{-1}$ eine zu $A$ *„inverse"* Operation, d. h. eine von der Art, dass $AA^{-1}(\alpha) = \alpha$ ist für jedes Objekt $\alpha$, oder symbolisch:

(7) $$AA^{-1} = 1.$$

Hier und im folgenden bis Nr. **17** einschließlich soll *nur von distributiven* Operationen die Rede sein; sie haben sich zuerst dargeboten und sind für die Anwendungen die wichtigsten. Für eine solche Operation ist die inverse $A^{-1}$ bestimmt bis auf einen additiven Term

---

20) Mehrere Autoren, z. B. *C. Jordan*, Traité des substitutions, Paris 1870, bezeichnen dieses Produkt mit $BA$. Die Bezeichnung $AB \cdot \alpha$ für $A(B(\alpha))$ schliesst sich an die der Theorie der Funktionen an.

21) Nur wenn $c$ rational ist, ist (4) Folge von (3).

22) *Servois*, Gergonne Ann. 5 (1814), p. 248.

$A^{-1}(0)$; und wenn die Gleichung $A(\omega) = 0$ mehrere Lösungen $\omega_1$, $\omega_2, \ldots$ hat, so unterscheiden sich zwei verschiedene Werte von $A^{-1}$ voneinander durch ein willkürliches Element der linearen Mannigfaltigkeit $c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + \cdots$. Unter den verschiedenen Werten von $A^{-1}$ sind dann auch solche, die ebenfalls distributiv sind. Man kann Funktionen von einem oder mehreren distributiven Symbolen definieren, indem man mit rationalen ganzen Funktionen beginnt. Wenn die kommutative Eigenschaft besteht, sind die Regeln des Rechnens mit diesen Funktionen dieselben wie die der gewöhnlichen Algebra. Man geht dann zu gebrochenen Funktionen von einem oder mehreren Symbolen über, und man beweist[23]), dass diese ebenfalls distributive Operationen liefern. Das Symbol $B$ heisst *intermediär*[24]) zwischen $A$ und $\Gamma$, wenn $AB = B\Gamma$ ist; in modernerer, der Gruppentheorie (I A 6, Nr. 3) entlehnter Sprechweise sagt man, dass $\Gamma$ die *Transformierte* von $A$ vermittelst $B$ ist. Es ist dann $B$ auch intermediär zwischen $f(A)$ und $f(\Gamma)$, wenn $f$ das Zeichen einer rationalen Funktion ist. Man hat auch transzendente Funktionen von Symbolen und Entwicklungen in Reihen mit symbolischen Gliedern[25]) betrachtet; z. B.

$$e^A = \sum \frac{1}{n!} A^n. \tag{8}$$

Sind die Symbole $A, B$ kommutativ[26]), so hat diese Operation die Eigenschaft:

$$e^{A+B} = e^A e^B. \tag{9}$$

Die *Division* nicht kommutativer Symbole giebt Anlass zu zwei verschiedenen Fällen, je nachdem man von den beiden Faktoren eines Produkts den zur Rechten (inneren Divisor) oder den zur Linken (äusseren Divisor) sucht; für beide Fälle hat man die Verallgemeinerung der Formeln der Division der Polynome gegeben[27]).

**6. Einfache distributive Operationen.** Zu den einfachsten distributiven Symbolen gehören:

$D$, das Symbol der gewöhnlichen Differentiation;

$\Delta$, Symbol der endlichen Differenz:

$$\Delta\alpha(x) = \alpha(x+1) - \alpha(x); \tag{10}$$

---

23) *Murphy*, Lond. Phil. Trans. 1837, p. 182.

24) Ibid. p. 196.

25) Bei den meisten Autoren ohne jede Frage nach der Konvergenz.

26) *Murphy*, Lond. Phil. Trans. 1837, p. 198.

27) *Russell*, ibid. 1861—1863.

$\theta$, von den älteren Analysten[28]) „état varié" genannt, definiert durch:

(11) $$\theta\alpha(x) = \alpha(x+1).$$

Zwischen $\theta$ und $\Delta$ besteht die Relation:

(12) $$\theta = \Delta + 1.$$

Ferner ist:

(13) $$\theta^h\alpha(x) = \alpha(x+h)$$

für jedes $h$.

$S_\mu$, wo $\mu$ eine Funktion von $x$ ist, bedeutet die Operation der *Substitution*, die in einer gegebenen Funktion $x$ durch $\mu(x)$ ersetzt; man hat demnach:

(14) $$S_\mu\alpha(x) = \alpha(\mu(x)).$$

Neben diesen einfachen Operationen hat man die ganzen und gebrochenen rationalen Funktionen ihrer Symbole. Ist $f(D)$ eine rationale Funktion des Symbols $D$ und $f'$ die nach den gewöhnlichen Regeln gebildete Ableitung von $f$, so hat man[29]):

(15) $$f(D)(\alpha\beta) = \alpha f(D)\beta + D\alpha\cdot f'(D)\beta + \frac{1}{1\cdot 2}D^2\alpha\cdot f''(D)\beta + \cdots.$$

*B. Brisson*[30]) hat allgemeinere Funktionen $f(D, \Delta)$ der distributiven Symbole betrachtet und zur Integration linearer Differenzen- und Differenzialgleichungen verwendet. *A. Cauchy*[31]) hat diese Untersuchungen fortgeführt; er giebt eine grosse Anzahl Formeln, von denen viele dadurch erhalten werden, dass er an der Stelle der Funktion und ihrer Ableitungen ihre Ausdrücke durch bestimmte Integrale substituiert; so findet er zahlreiche Summenformeln von neuem, u. a. die bekannte von *Euler-Maclaurin* (I E, Nr. **11**). Erwähnenswert ist, dass er zuerst bemerkt, dass das Rechnen mit Symbolen auch zu unrichtigen Resultaten führen kann, wenn man die Funktionen von Symbolen $f(D, \Delta)$ in Reihen entwickelt; er giebt Grenzen für die Konvergenz solcher Reihen und Methoden zur Verifikation der auf symbolischem Wege

---

28) *Arbogast* u. a.

29) *Hargreave,* Lond. Phil. Trans. 1848. Für den Fall, dass $f$ eine ganze Funktion von $D$ ist, selbst für den Fall, dass sie die Variable noch in den Koeffizienten enthält, war diese Formel schon *J. d'Alembert* bekannt (Théorie des vents, Berl. mém. 1746; vgl. die allgemeine Formel Nr. **13**).

30) *Brisson* scheint seine Untersuchungen nicht selbst publiziert zu haben; sie werden von *Cauchy*[31]) zitiert.

31) Sur l'analogie des puissances et des différences, Exerc. de math. 2, Paris 1827, p. 159 (Oeuvres (2) 7, p. 198). Vgl. auch Par. C. R. 17, 1843, p. 377, 449 (Oeuvres (1) 8, p. 26, 28).

erhaltenen Resultate. Endlich dehnt er seine Überlegungen auch auf Funktionen von Symbolen $F(D_x, D_y, D_z, \ldots, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, \ldots)$ aus, die sich auf Funktionen von mehreren Variabeln anwenden lassen.

Einige der Resultate von Nr. 5, sowie die Formel (15) lassen sich auch auf solche Funktionen ausdehnen, die zu Koeffizienten nicht mehr Konstante haben, sondern Funktionen der Variabeln, die in die Objekte $\alpha, \beta, \ldots$ eingehen[32]).

**7. Ableitungen (Differentialquotienten) zu beliebigem Index.** An das besprochene Rechnen mit Symbolen schliesst sich eng das Rechnen mit Ableitungen zu beliebigem Index an. Die Idee, Ableitungen mit negativ ganzzahligem oder mit gebrochenem Index zu betrachten, geht mit den Anfängen der Differentialrechnung auf *Leibniz* selbst[33]) zurück. Unter den zahlreichen Versuchen, zu denen sie Veranlassung gegeben hat[34]), ist der von *J. Liouville*[35]) zu erwähnen: er geht wesentlich von der Hypothese aus, dass die Funktion $\alpha(x)$ eine Entwicklung in eine Reihe von Exponentialgrössen:

$$\alpha(x) = \sum_n c_n e^{a_n x} \tag{16}$$

zulässt, und definiert dann die Ableitung der beliebigen (rationalen oder irrationalen, reellen oder komplexen) Ordnung $s$ durch die Reihe:

$$D^s \alpha(x) = \sum_n c_n a_n^s e^{a_n x}. \tag{17}$$

Diese Definition erlaubt die Sätze des Rechnens mit Ableitungen leicht zu verallgemeinern; aber als allgemein kann sie nicht angesehen werden, da sie weder auf die etwaige Unmöglichkeit Rücksicht nimmt, eine vorgelegte Funktion $\alpha(x)$ in der Form (16) zu entwickeln, noch auf eine etwaige Divergenz der entstehenden

---

32) *Boole,* Treatise on differential equations, chap. 16.

33) Opera ed. *Dutens* 3, p. 105; Commercium philos. et math., passim.

34) Z. B. *L. Euler,* Petrop. Comm. 1730/31; *J. B. Fourier,* Théorie de la chaleur, Paris 1822, Nr. 422, p. 561; *Lacroix,* Traité de calcul différentiel 3 (1821), p. 409; *S. Spitzer,* Arch. Math. Phys. 32, p. 334; 33 (1859), p. 116; *Tardy,* Ann. di mat. 1 (1858); *S. Roberts,* Quart. J. 7, p. 316; 8, p. 52, 139 (1866—67); *C. W. Borchardt,* Berl. Ber. 1868; Bollet. Boncompagni 2, p. 277; *A. Genocchi,* Torino Atti 4 (1869), p. 263; Torino Mem. (2) 26 (1871), p. 61; *G. H. Halphen,* Bull. Soc. Math. 8 (1880), p. 62; *J. Hadamard,* J. de math. (4) 8 (1892), p. 171; *Ch. Bourlet,* Ann. éc. norm. (3) 14 (1897), p. 154; *Oltramare,* Essai sur le calcul de généralisation, Genève 1896. Ein Verzeichnis von zahlreichen Arbeiten über Ableitungen zu beliebigem Index, von *E. Wölffing,* findet sich im „Intermédiaire des mathématiciens" 6 (1899), p. 258. S. auch Interm. 12 (1905), p. 24; Encykl. II A 2, Nr. 48, 49.

35) J. éc. polyt. 13 (1832).

Reihen (17). *J. A. Serret*[36]) hat die *Liouville*'sche Theorie auf die Integration gewisser Differentialgleichungen angewandt. Eine Jugendarbeit von *B. Riemann*[37]) definiert als Ableitung $s^{\text{ter}}$ Ordnung einer Funktion $\alpha(x)$ den Koeffizienten von $h^s$ in der Entwicklung von $\alpha(x+h)$ in eine Reihe von Potenzen der Form $h^{t+n}$ ($t$ nicht ganzzahlig; $n = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, +\infty$) — abgesehen von einem von $t$ abhängigen, aber von $x$ und der Funktion $\alpha$ unabhängigen Faktor. Von dieser Definition aus kommt er zu der Darstellung dieser Ableitung durch das bestimmte Integral:

$$(18) \qquad D^s\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(m-s)} D^m \int^x (x-z)^{m-s-1} \alpha(z)\, dz$$

($m$ ganzzahlig); *Hj. Holmgrén*[38]) benutzt umgekehrt diese Darstellung als Ausgangspunkt, um in einer weitläufigen Abhandlung die Eigenschaften der Ableitungen zu beliebigem Index zu entwickeln. Unter neueren Anwendungen dieses Algorithmus sind zu erwähnen: der Zusammenhang zwischen der *Ordnung* einer Potenzreihe $\alpha(x) = \sum a_n x^n$, d. h. einer Zahl $w$ von der Art, dass $D^{-s}(x)$ auf ihrem Konvergenzkreis endlich, stetig und „à écart limité" ist für $s > w$, aber nicht für $s \leqq w$, und der Grenze $\lim\limits_{n=\infty} a_n$; andererseits der Zusammenhang zwischen der Ordnung und den Singularitäten von $\alpha(x)$ auf dem Konvergenzkreis[39]). Für eine analytische in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Funktion giebt *Bourlet*[40]) für die Ableitung der beliebigen Ordnung $s$ die Definition:

$$(19) \qquad D^s\alpha(x) = \frac{s}{\Gamma(1-s)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!\,(s-n)} D^n\alpha(x),$$

und *Pincherle*[41]) beweist, dass diese Reihe gerade die Bedingungen erfüllt, denen eine Funktionaloperation genügen muss, wenn sie die charakteristischen Eigenschaften der Ableitungen ganzzahliger Ordnung behalten soll.

**8. Die Generalisationsrechnung von Oltramare.** Von der Theorie der Ableitungen zu beliebigem Index im Sinne von *Liouville*[35]) stammt direkt die Methode von *G. Oltramare*, der ihr Urheber den Namen

36) Par. C. R. 17 (1843), p. 458.

37) Werke ed. *Dedekind* u. *Weber*, p. 331.

38) Stockh. Handl. $5^2$ (1866).

39) *Hadamard*, J. de math. (4) 8 (1892); La série de *Taylor* et son prolongement, Paris coll. scientia 1901, p. 44.

40) Ann. éc. norm. (3) 14 (1897), p. 154.

41) Bologna mem. (5) 9 (1902).

„Generalisationsrechnung“ gegeben hat[42]). Ist eine Funktion in eine Reihe von Exponentialgrössen entwickelt gegeben:

(20) $$\alpha(x) = \sum f(u) e^{ux},$$

so betrachtet er diese Funktion als Resultat einer auf $e^{ux}$ ausgeübten Operation $G$:

(21) $$G e^{ux} = \sum f(u) e^{ux} = \alpha(x).$$

Es folgt dann:

(22) $$G u^n e^{ux} = D^n \alpha(x)$$

und

(23) $$G f(u) e^{ux} = f(D) \{\alpha(x)\}$$ [43]);

man kann also durch dieses Hilfsmittel aus jeder Gleichung $f(u) = g(u)$ eine Funktionalrelation erhalten, indem man mit $e^{ux}$ multipliziert und dann beiderseits die Operation $G$ ausübt. *Oltramare* leitet so zahlreiche Formeln ab, doch nicht mit genügender Strenge, da namentlich die Vertauschbarkeit der Operation $G$ mit der Integration zwischen unendlichen Grenzen, von der er Gebrauch macht, nicht bewiesen ist. Nur durch genauere Bestimmung der Klasse von Funktionen, an der man operiert, kann man die meisten Resultate streng machen, ebenso wie die Methode von *Liouville* für die Ableitungen zu beliebigem Index. *L. Desaint*[44]) kündigt sowohl dieses Resultat an, als auch den Satz, dass jede in einem geschlossenen Bereich reguläre analytische Funktion sich immer durch eine abzählbare oder nicht abzählbare Summe von Exponentialgrössen darstellen lässt.

**9. Anwendungen des Rechnens mit Symbolen.** Sei $A$ eine distributive Operation und sei vorausgesetzt, dass es in einer gewissen Menge von Funktionen für jeden Wert der Konstante $a$ nur eine Funktion $\varepsilon(a)$ gebe, die der Gleichung:

(24) $$A(\varepsilon) = a\varepsilon$$

genügt. Sei dann die Funktionalgleichung mit konstanten Koeffizienten:

(25) $$f(A) \equiv a_0 A^n(\alpha) + a_1 A^{n-1}(\alpha) + \cdots + a_{n-1} A(\alpha) + a_n \alpha = 0$$

vorgelegt. Wenn die algebraische Gleichung:

(26) $$f(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

42) Sur la généralisation des identités, Genève mém. inst. nat. 16 (1886); Essai sur le calcul de généralisation, Genève 1896. Vgl. auch die Genfer Thesen von *Cailler*, recherches sur les équation partielles et sur qques. points du calcul de généralisation, 1887, u. von *D. Mirimanoff*, sur les bases du calcul de généralisation, 1900.

43) Vgl. *Cauchy*, Exercices de math. 2, Paris 1827, p. 161.

44) Par. C. R. 134 (1902), p. 1193.

die $n$ einfachen Wurzeln $a, b, c, \ldots, h$ hat, so ist die allgemeinste Lösung der Gleichung (25) die Funktion:

$$\omega = k_1 \varepsilon(a) + k_2 \varepsilon(b) + \cdots + k_n \varepsilon(h), \tag{27}$$

in der $k_1, k_2, \ldots, k_n$ willkürliche Konstante bedeuten. Sind die Wurzeln von (26) nicht alle einfach, ist z. B. $a$ eine $r$-fache Wurzel, so sind $r$ Glieder von $\omega$ zu ersetzen durch:

$$k_1 \varepsilon(a) + k_2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial a} + \cdots + k_r \frac{\partial^r \varepsilon}{\partial a^r}. \tag{28}$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung

$$f(A) \equiv a_0 A^n(\alpha) + a_1 A^{n-1}(\alpha) + \cdots + a_n \alpha = \varphi, \tag{29}$$

in der $\varphi$ eine gegebene Funktion bedeutet, ist:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{f'(a)}(A-a)^{-1}\{\varphi\} + \dfrac{1}{f'(b)}(A-b)^{-1}\{\varphi\} + \cdots \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{f'(h)}(A-h)^{-1}\{\varphi\}, \end{cases} \tag{30}$$

wenn die Wurzeln von (26) alle einfach sind. Der Fall mehrfacher Wurzeln bietet keine besondere Schwierigkeit; ebensowenig die Ausdehnung auf Funktionen von mehreren Variabeln.

Die vorhergehende Methode, in der Form mehr oder weniger modifiziert, führt zur Auflösung der homogenen und nicht homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (*Boole*, Treatise on diff. equat.); der Differenzengleichungen mit endlichen Koeffizienten (*Boole, Casorati*); der Gleichungen der Form (25), in denen $A$ die Operation $xD$ bedeutet — sie lassen sich durch die Substitution $x = e^t$ auf lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zurückführen — (*Boole, Carmichael*); derjenigen, in welchen $A = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ ist (*Spottiswoode*); derjenigen, in welchen $A$ die in Nr. 6 besprochene Operation $S_\mu$ der Substitution ist (*Lémeray*[45])). Sie lässt sich auch ausdehnen auf gewisse Klassen von Gleichungen mit variablen Koeffizienten (*Boole, Russell*) und von nicht linearen Gleichungen (*Hargreave*); auf Systeme simultaner Differentialgleichungen (*Carmichael*); auf die Auswertung bestimmter Integrale (*Bronwin, Russell*) u. s. w.[46]).

**10. Anwendungen auf Differentialgleichungen.** Der formale Teil der Theorie der linearen Differentialgleichungen vereinfacht sich in bemerkenswerter Weise durch den Gebrauch der symbolischen

45) Ibid. 125 (1897), p. 1160.

46) Die allgemeine Methode geben *Pincherle*, Torino Atti 30 (1895), p. 524; *Pincherle* e *Amaldi*, Le operazioni distributive, Bologna 1901.

Methoden[47]). Sei $F$ die linke Seite einer linearen Differentialgleichung; $F$ ist ein distributives Operationssymbol, das den Namen „linearer Differentialausdruck“ erhalten hat. Für diese Ausdrücke kann man eine Algebra geben, analog zu der der ganzen Polynome: Zerlegung in Faktoren, Teilbarkeit, Quotient zur rechten und zur linken; das Problem der Integration der Gleichung $F = 0$ lässt sich zurückführen auf das der Zerlegung von $F$ in ein — im allgemeinen nicht kommutatives — Produkt symbolischer Faktoren; die Kenntnis partikulärer Integrale von $F = 0$ erlaubt Faktoren von $F$ zu bestimmen und die Integration der Gleichung auf die einer Gleichung niedrigerer Ordnung zurückzuführen; dieselben Bemerkungen geben eine Methode zur Bestimmung der gemeinsamen Teiler zweier Formen und erlauben ihre Reduzibilität zu definieren. Endlich[48]) die Gleichung $F(\alpha) = \varphi$, in der $\alpha$ die unbekannte Funktion bedeutet, hat eine durch die Entwicklung:

$$\sum_{m=n}^{\infty} \lambda_m D^{-m} \varphi \tag{31}$$

darstellbare Lösung, in der $n$ die Ordnung von $F$ bedeutet und die Koeffizienten $\lambda_m$ durch eine $(n+1)$-gliedrige lineare Rekursionsformel verbunden sind.

Für die linearen Differenzengleichungen mit variablen Koeffizienten hat man ganz analoge Resultate[49]).

**11. Anwendungen auf Formen- und Zahlentheorie.** Die Prinzipien des Rechnens mit Symbolen lassen sich auch auf andere Gebiete anwenden. Sie bilden einen Teil der Gesetze, die das Rechnen mit invarianten Formen nach *Cayley*, *Aronhold* und *Clebsch* (I B 2, Nr. **12**, **13**) beherrschen. Sie können auch dazu dienen, gewisse Entwicklungen der analytischen Zahlentheorie (I C 3) in kondensierter Form darzustellen.

So lassen sich, wenn man übereinkommt, nach Ausführung der

47) *G. Libri*, J. f. Math. 10 (1836), p. 185; *A. Cauchy* (anciens) Exercices de math. 1, Paris (1826), p. 53; *E. Brassinne*, Note zum Cours d'analyse von *Ch. Sturm*, Paris 1868; *L. Thomé*, J. f. Math. 76 (1873), p. 273; *Vaschy*, J. éc. polyt. cah. 63 (1893), p. 39; *L. Heffter*, Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen, Leipz. 1894; *L. Schlesinger*, Handbuch der lin. Differentialgleich. 1, Leipz. 1895, Abschn. II; *A. R. Forsyth*, Theory of differ. equat. 1, Cambr. 1897; *Pincherle* e *Amaldi*, operaz. distrib. cap. XI.

48) Palermo Rendic., 11 apr. 1897.

49) *Libri*, J. f. Math. 10 (1836), p. 185; *Pincherle*, Bologna Mem. (5) 5 (1895), p. 87. Für Anwendungen des Gebrauches der Symbole in der Theorie der Differenzenausdrücke, s. u. a. *A. Guldberg*, Par. C. R. octobre 1897; Christiania Skrifter 1897, Nr. 10; *Thora Groth*, Nyt Tidskr. f. Math. 16, p. 1, Copenhagen 1905.

Rechnung die Exponenten von $a$, $b$, $c$ durch Indices zu ersetzen, die Polynome:

(32) $$a_0 + n a_1 x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

(33) $$b_0 c_n x^n + n b_1 c_{n-1} x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} b_2 c_{n-2} x^{n-2} y^2 + \cdots + b_n c_0 y^n,$$

bezw. schreiben:

$$(1 + ax)^n, \quad (cx + by)^n;$$

die Reihe:

(34) $$a_0 + a_1 x + \frac{a_2 x^2}{1 \cdot 2} + \cdots$$

kann geschrieben werden $e^{ax}$ u. s. w. u. s. w. Dabei findet man, wie *Boole* anmerkt „a connexion which in some instances involves far more than a merely formal analogy" (vgl. Nr. 4). Durch Differentiation des Polynoms:

$$\sum_k \binom{n}{k} b_k c_{n-k} x^{n-k} y^k$$

überzeugt man sich, dass sich seine partiellen Ableitungen durch

(35) $$nc(cx + by)^{n-1}, \quad nb(cx + by)^{n-1}$$

ausdrücken, mit anderen Worten: die Differentiation kann an dem symbolischen Ausdruck vollzogen werden. Die Identität:

(36) $$f(z + a + h) = f(z + h + a)$$

bleibt bestehen, wenn man nach Entwicklung beider Seiten nach Potenzen von $a$ diese Potenzen durch die Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ einer beliebigen Folge ersetzt; daraus entspringen zahlreiche Formeln[50]), die wir hier beiseite lassen, da sie dem Gebiete der Differenzenrechnung (I E) angehören. Erwähnt sei nur noch die symbolische Schreibweise der Rekursionsformel der *Bernoulli*'schen Zahlen[51]):

(37) $$(B + 1)^n - B^n = n.$$

*J. L. Jensen*[52]) hat neuerlich die symbolische Betrachtung der distributiven Operationen angewandt, um vielfache Formeln, im besonderen fast alle bekannten Identitäten zwischen Binomialkoeffizienten zu erhalten.

---

50) Z. B. die Summenformeln von *Euler* und von *Maclaurin*. Vgl. etwa *G. Boole*, Grundlehren der endlichen Differenzen und Summenrechnung, deutsch von *C. Schnuse*, Kap. VII und passim, Braunschweig 1867; *A. Markoff*, Differenzenrechnung, deutsch von *T. Friesendorff* und *E. Prümm*, Kap. VIII und IX, Leipzig 1896; *E. Cesàro*, Analisi algebrica, Torino 1894, § 41 ff. sowie Encykl. I E.

51) Vgl. Encykl. II A 3, Nr. 18. Zahlreiche analoge Formeln bei *E. Lucas*, Théorie des nombres, Paris 1891, chap. 13 und bei *Cesàro*, Analisi algebrica § 40.

52) Acta math. 26 (1902), p. 314.

**12. Vektorielle Interpretation in einem Raume von $n$ Dimensionen.** Bisher waren die Objekte der Operationen beliebige Funktionen, die Operationen selbst von gegebener Art. Betrachten wir jetzt *distributive* Operationen, deren Natur nicht von vornherein festgelegt ist, deren *Objekte* und *Resultate* einer bestimmten $n$-dimensionalen[53]) Mannigfaltigkeit:

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_n\alpha_n \tag{38}$$

angehören, wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $n$ linear unabhängige Elemente der Mannigfaltigkeit sind, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ willkürliche Konstante. Z. B. kann die Mannigfaltigkeit von einer linearen Klasse von Funktionen gebildet sein; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sind dann linear unabhängige Funktionen. Unter dieser Voraussetzung findet man, dass die distributiven Operationen nichts anderes sind, als die *Kollineationen*, die die gegebene Mannigfaltigkeit (einen $n$-dimensionalen Raum) in sich transformieren: die Zusammensetzung und Zerlegung der Operationssymbole fällt zusammen mit der Zusammensetzung und Zerlegung der Kollineationen (III A 6; C 8). Unter diesem Gesichtspunkt sind die elementaren Eigenschaften der distributiven Operationen von *E. Laguerre*[54]), von *G. Peano*[55]) und für $n = 3$ ausführlicher von *E. Carvallo*[56]) gegeben worden. Der letztere betrachtet die Elemente der gegebenen Mannigfaltigkeit als Vektoren (III B 3) in einem $n$-dimensionalen Raume. Ist $A$ eine gegebene Operation, so sind diejenigen Vektoren, für welche $A(\alpha) = 0$ ist, besonders wichtig; sie geben die „Extinktionsrichtungen"[57]) oder einfacher die Wurzeln von $A$. Eine Kollineation, die Wurzeln zulässt, ist *ausgeartet*, und man kann den Grad ihrer Ausartung definieren. Mehrere Wurzeln von $A$ definieren einen linearen Raum, dessen sämtliche Elemente Wurzeln von $A$ sind („Wurzelraum"). Jede Wurzel von $A$ ist zugleich Wurzel von $A^m$, aber nicht umgekehrt; eine Wurzel von $A^m$, die nicht zugleich Wurzel von $A^{m-1}$ ist („eigentliche Wurzel von $A^m$") hat besonderes Interesse. Die Wurzeln von $A - z$, d. h. diejenigen Vektoren $\alpha$, für für welche $A(\alpha) = z\alpha$ ist, sind die invarianten Elemente der Kollineation $A$; sie existieren nur für bestimmte Werte von $z$, nämlich

53) Einer $n$-dimensionalen, wenn man $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ als Vektoren ansieht einer $(n-1)$-dimensionalen, wenn man Homogeneität einführen will, d. h. wenn man $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ als Punkte ansieht und dabei $c\alpha_1$ als einen von $\alpha_1$ nicht verschiedenen Punkt betrachtet

54) J. éc. polyt. cah. 42 (1867), p. 215; Oeuvres 1, p. 221.

55) Calcolo geometrico, Torino 1888, cap. X.

56) Monatsh. f. Math. 2 (1891), p. 177, 225, 311.

57) Nach *Carvallo,* ibid. p. 195.

für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades, der *Fundamentalgleichung* (II B 4 und III C 8)[58]. Sind die Wurzeln der Fundamentalgleichung nicht alle einfach, so führt die Untersuchung der eigentlichen Wurzeln der Potenzen von $A - z$ zur Zerlegung von $A$ in einfachere Faktoren; man findet so durch eine synthetische Methode die von *Weierstrass* entwickelte Theorie der Elementarteiler der bilinearen Formen (I B 2, C 2) wieder. In dieser Theorie haben mehrere Autoren[59] von einer symbolischen Bezeichnung Gebrauch gemacht, die der im Operationskalkül verwendeten nahekommt.

**13. Interpretation in einem Raume von unendlich vielen Dimensionen.** Die Prinzipien des Rechnens mit Symbolen zusammen mit Überlegungen der Geometrie der linearen Räume geben der Theorie der distributiven Operationen einen hohen Grad von Klarheit und Einfachheit, soweit diese Operationen an den Elementen einer linearen Mannigfaltigkeit von endlicher Dimensionenzahl ausgeübt werden, mögen diese Elemente nun Funktionen sein oder nicht. Man kann sich fragen, ob sich diese Überlegungen auf alle Funktionen einer linearen Mannigfaltigkeit ausdehnen lassen, wenn die Anzahl der Dimensionen dieser Mannigfaltigkeit (abzählbar) unendlich ist. Die Frage ist zu bejahen: so kann man z. B. die Mannigfaltigkeit $S$ (*Funktionalraum*) der Potenzreihen $\alpha$ einer Variabeln $x$ ins Auge fassen und dann die Gesamtheit der distributiven Operationen untersuchen, die jedes Element dieser Mannigfaltigkeit in ein Element derselben Mannigfaltigkeit überführen[60]. Diese Operationen *bilden eine Gruppe*. Man kann für sie eine zur *Stetigkeit* analoge Eigenschaft definieren[61] und dann die Bedingungen ableiten, unter welchen die distributive Eigenschaft der Operation $A$ sich auf eine unendliche Reihe überträgt, d. h. unter welchen man *thatsächlich* hat:

$$A\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} A(\alpha_n), \tag{39}$$

---

58) *Pincherle*, Lomb. Rend. 29 (1896), p. 400; *Pincherle* e *Amaldi*, Operazioni, cap. III, IV.

59) *G. Frobenius*, Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, J. f. Math. 84 (1878), p. 1; *E. Study*, Monatsh. 2 (1891), p. 23; *Sforza*, Giorn. di mat. 34 (1896), p. 252 u. s. w.

60) *S. Pincherle*, Linc. Rend. (5) 4 (1895), p. 142; Math. Ann. 49 (1897), p. 349; *C. Bourlet*, Ann. éc. norm. (3) 14 (1897), p. 133. Bei *Bourlet* heissen die distributiven Operationen „*transmutations additives*“. Wegen der Ausdehnung auf Operationen an mehreren Funktionen oder an Funktionen von mehreren Veränderlichen vgl. man *B. Calò*, Linc. Rend. (5) $4^2$ (1895), p. 52.

61) *Bourlet*, Ann. éc. norm. (3) 14, § 1; *G. Hadamard*, Par. C. R., 9 février 1903.

wo $\sum \alpha_n$ eine in einem geeigneten Bereich der Variabeln konvergente Reihe bedeutet. Im Raume $S$ stellt jede Potenzreihe einen *Vektor* oder einen *Punkt* vor, ihre Koeffizienten sind die Koordinaten des Vektors oder Punktes[62]); die distributiven Operationen, die sich auf Potenzreihen anwenden lassen, sind die Kollineationen dieses Raumes. Diese Kollineationen können wie bei einer endlichen Anzahl von Dimensionen ausarten; nur hat man hier zwei Arten von Ausartungen zu unterscheiden: die Operation $A$ kann in der Mannigfaltigkeit Wurzeln zulassen: Ausartung *erster Art;* oder wenn $\alpha$ die Mannigfaltigkeit $S$ beschreibt, kann $A(\alpha)$ einen in $S$ enthaltenen, aber nicht mit ihr identischen Raum beschreiben, sodass die Gleichung $A(\alpha) = \varphi$ nicht für jedes $\varphi$ Lösungen in $S$ hat: Ausartung *zweiter Art*[63]). (Bei Kollineationen in Räumen von endlicher Dimensionenzahl ist jede dieser beiden Eigenschaften eine Folge der anderen.)

Die Gesamtheit derjenigen Elemente von $S$, die einer linearen Relation (mit endlicher oder unendlicher Gliederzahl) genügen, kann als eine *Ebene* von $S$ bezeichnet werden. Jeder Operation $A$, die die Elemente von $S$ transformiert, entspricht eine Operation $\bar{A}$, die die Ebenen so transformiert, dass dabei die Bedingung der Koinzidenz von Punkten und Ebenen erhalten bleibt, sie heisst die *Adjungierte* von $A$. Sind dann $\bar{B}$, $\bar{C}$ die Adjungierten von $B$, $C$, so gilt:

$$\text{wenn } A = BC, \text{ so ist } \bar{A} = \bar{C}\bar{B}.$$

Ist $A$ ein linearer Differentialausdruck (Nr. **10**), so ist $\bar{A}$ seine *Lagrange'sche* Adjungierte (II B 4). Zu einem linearen Ausdruck mit endlichen Differenzen erhält man die Adjungierte, indem man jeden Term $f_j(x)\,\alpha(x+j)$ für $j = 0, 1, 2, \ldots$ durch $f_j(x-j)\,\alpha(x-j)$ ersetzt[64]).

**14. Darstellung einer distributiven Operation durch eine Reihe.** Wendet man einen Differentialausdruck $n^{\text{ter}}$ Ordnung $F$ auf ein Produkt $\alpha\beta$ an, so erhält man unmittelbar die folgende Formel, ein Analogon zu der von *Taylor* für eine rationale ganze Funktion:

$$(40)\quad F(\alpha\beta) = F(\alpha)\beta + F'(\alpha)D\beta + \tfrac{1}{2}F''(\alpha)D^2\beta + \cdots + \tfrac{1}{n!}F^{(n)}_{(\alpha)}D^n\beta;$$

dabei werden $F', F'', \ldots$ erhalten, indem man in $F$ die gewöhnlichen Regeln der Differentiation in Bezug auf das Symbol $D$ anwendet, und

62) *T. Cazzaniga,* Torino Rend. 34 (1899), p. 510.

63) *Pincherle,* Lomb. Rend. 30 (1897), p. 103; *Pincherle* e *Amaldi,* cap. 16; *Hadamard,* Série de Taylor, p. 80.

64) *Pincherle,* Bologna Rend. 2 (1898), p. 130; *E. Bortolotti,* Linc. Rend. (5) $7^1$ (1898), p. 257; $7^2$, p. 46, p. 74.

können folglich als aufeinander folgende *Ableitungen* von $F$ bezeichnet werden[65]). Man hat:

$$(41)\qquad F'(\alpha) = F(\alpha x) - xF(\alpha).$$

Analog hat man, wenn $A$ das Symbol irgend einer distributiven Operation ist, die Operation:

$$(42)\qquad A'(\alpha) = A(x\alpha) - xA(\alpha)$$

*Funktionalableitung* von $A$ genannt. Bezeichnet man sie durch den Accent, so hat man die Identität[66]):

$$(43)\qquad (AB)' = A'B + AB'.$$

Entsprechend definiert man die successiven höheren Funktionalableitungen; man gelangt dann zu der Formel[67]):

$$(44)\qquad A(\alpha\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^{(n)}(\alpha) D^n \varphi,$$

die zum *Taylor*'schen Satz der Funktionentheorie analog ist. Betrachtet man in ihr $\alpha$ als ein festes, $\varphi$ als ein veränderliches Element, so hat man den Satz, dass im allgemeinen jede distributive Operation sich durch eine nach Potenzen des Ableitungssymbols $D$ geordnete unendliche Reihe darstellen lässt — ein Analogon zu der Darstellung jeder analytischen Funktion durch eine nach Potenzen der Variabeln fortschreitende Reihe. Was die Frage nach der effektiven Giltigkeit der Formel (44) betrifft, so findet man, dass sie immer einen *Funktionalkonvergenzbereich* hat, d. h. dass es immer eine lineare Mannigfaltigkeit von Funktionen $\varphi$ giebt, für die die rechte Seite von (44) konvergiert und die linke Seite wirklich darstellt.

Aus (44) folgt, dass das Problem der Aufsuchung der Wurzeln einer distributiven Operation und das ihrer Inversion sich zurückführen lassen auf das der Integration einer homogenen, bezw. nicht homogenen linearen Differentialgleichung von im allgemeinen unendlich hoher Ordnung. Gleichungen dieser Art weisen gewisse Analogien mit den Gleichungen endlicher Ordnung auf[68]); aber man hat von ihnen noch keine allgemeine Theorie.

Es ist bemerkenswert, dass die Konvergenz der Reihen (44) keineswegs eine Eigenschaft verlangt, die ein Analogon der Stetigkeit wäre. Dagegen ist die Betrachtung eines solchen Analogon erforderlich, wenn man z. B. als Mannigfaltigkeit der Objekte (als Funktionalraum) die

---

65) *D'Alembert,* Théorie des vents, Berlin mém. 1746.

66) *Pincherle,* Linc. Rend. (5) 4 (1895), p. 145; Math. Ann. 49 (1897), p. 353.

67) S. cit. [66]); *Bourlet,* Ann. éc. norm. (3) 14 (1897), § 5, p. 149.

68) *Bourlet,* ibid. § 11, p. 178 und 16 (1899), p. 333.

(nicht mehr abzählbare) Gesamtheit $F$ der reellen und stetigen Funktionen zwischen $a$ und $b$ betrachtet, um Darstellungen der Operationen durch Reihen zu erhalten. Ist $U$ eine distributive Operation, die ein Element $f$ von $F$ in eine bestimmte und endliche Zahl $c$ transformiert,

$$U(f) = c,$$

und konvergiert $U(f)$ gegen $U(f_1)$, wenn $f$ gegen $f_1$ gleichmässig konvergiert, so nennt man[69]) $U$ eine *Linearoperation.* Für solche Operationen kann man durch Gebrauch der *Fourier*'schen Reihe, für $U$ die Entwickelung

$$U(f) = \sum a_n U_n(f)$$

erhalten[70]), wo $U_n(f)$ die besondere Linearoperation ist:

$$U_n(f) = \int_0^\pi f(x) \cos nx dx$$

und

$$a_0 = \frac{1}{\pi} U(1), \quad a_n = \frac{2}{\pi} U(\cos nx).$$

**15. Darstellung einer Operation durch ein bestimmtes Integral.** Ist $\varphi$ eine analytische Funktion, so kann man in (44) $D^n\varphi$ ersetzen durch seinen Ausdruck vermittelst des *Cauchy*'schen Integrals:

$$(45) \qquad D^n \varphi(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{(l)} \frac{\varphi(y)\, dy}{(y-x)^{n+1}},$$

in dem $l$ eine geschlossene Kurve in einem Bereich bedeutet, in dem die Funktion $\varphi$ regulär ist. So erhält man zuerst für die Operation $A$, dann auch für allgemeinere Operationen, eine Darstellung der Form:

$$(46) \qquad A(\varphi) = \int_{(l)} \pi(x, y)\, \varphi(y)\, dy;$$

dabei bedeutet $\pi(x, y)$ eine Funktion von zwei Variabeln, die nur von der Natur der darzustellenden Operation abhängt, $\varphi$ dagegen ist eine Funktion, die in einem geeigneten Funktionalbereich willkürlich veränderlich ist, $l$ irgend ein Integrationsweg. Verschiedene Operationen haben sich in der Form (46) oder in der allgemeineren:

$$(47) \qquad A(\varphi) = \int^{(r)} \pi(x, y_1, y_2, \ldots, y_r)\, \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_r)\, dy_1\, dy_2 \ldots dy_r$$

dargeboten[71]); die wichtigsten werden in den folgenden Nummern

69) *G. Hadamard,* Par. C. R., 9 février 1903.

70) *M. Fréchet,* Trans. of the Amer. Math. Soc. 5 (1904), p. 493.

71) *A. Viterbi,* Ann. di mat. (2) 26 (1897), p. 261; 3 (1899), p. 299, betrachtet die durch Integrale dargestellten Funktionaloperationen als Elemente eines Kalküls, den er entwickelt.

angeführt. Das Problem der Bestimmung der Inversen zu einer in der Form (46) oder (47) dargestellten Operation ist identisch mit dem der *Umkehrung der bestimmten Integrale* (Nr. 28—31).

*Hadamard*[72]) hat bewiesen, dass die stetigen Linearoperationen $U(f)$ (Nr. **14**), die einer stetigen reellen, zwischen $a$ und $b$ gegebenen Funktion $f$ eine bestimmte Zahl zuordnen, immer Darstellung in Form des lim eines bestimmten Integrals besitzen; die Darstellung selbst lautet:

$$U(f) = \lim_{n=\infty} \int_a^b f(x) K_n(x) dx,$$

wo $K_n(x)$ wieder eine zwischen $a$ und $b$ stetige Funktion ist.

**16. Die Transformation von Laplace.** Unter den in der Form (46) auftretenden distributiven Operationen ist eine der wichtigsten die nach *Laplace* genannte Transformation, die durch:

$$(48)\qquad A(\varphi) = \int_{(l)} e^{xy} \varphi(y)\, dy$$

gegeben ist. Durch Einführung einer neuen Variabeln $t = e^y$ erhält man aus ihr:

$$(49)\qquad B(\varphi) = \int t^x \varphi(t)\, dt.$$

Die Inverse der *Laplace*'schen Transformation ist eine Transformation derselben Form[73]). Die zweite Form (49) ist zuerst betrachtet worden[74]); in ihr heisst $\varphi(t)$ „*fonction génératrice*", das Resultat $\alpha(x) = B(\varphi)$: „*fonction déterminante*". Die letztere ist für ganzzahlige $x$ der Koeffizient von $t^{-x-1}$ in der Potenzreihenentwicklung von $\varphi(t)$.[75]) Bei geeigneter Wahl des Integrationsweges hat die Operation $A$ die Eigenschaften[76]):

$$(50)\qquad DA\varphi(y) = A(y\varphi(y)), \quad xA\varphi(y) = -AD\varphi(y),$$

und die Operation $B$ die daraus folgenden

$$(51)\qquad B(t\varphi(t)) = \alpha(x-1), \quad B\left(t\frac{d\varphi}{dt}\right) = x\alpha(x).$$

72) Vgl. Fussnoten 69) und 70).

73) *Cauchy*, Exercices de Math. 2, Paris 1827, p. 157.

74) *P. S. de Laplace*, Théorie analytique des probabilités, Paris 1812 (Oeuvres 7, p. 85); *N. H. Abel*, Sur les fonctions génératrices (Oeuvres ed. *Sylow* et *Lie* 2, p. 67).

75) *Laplace*, Par. mém. 1779 (82); *Lacroix*, Traité du calcul différentiel etc. 2e éd. 3, Paris 1819, Ch. IV, p. 322, p. 573. Dieses zuerst von *Laplace* betrachtete Entsprechen ist in letzter Zeit von *Hadamard, Borel, Fabry, Le Roy* u. a. unter neuen Gesichtspunkten behandelt worden; vgl. II B 1, Nr. 35, 37.

76) *Abel*, Oeuvres 2, p. 68.

Die Eigenschaften (50) können zur Definitionen von $A$ dienen[77]); ihre wiederholte Benutzung führt zu zahlreichen Anwendungen. Die wichtigste ist die Transformation einer linearen Differentialgleichung mit rationalen ganzen Funktionen als Koeffizienten in eine andere, in der Ordnung der Ableitungen und Grad der Koeffizienten vertauscht sind, und die Ableitung des Integrals der einen aus dem der anderen. Was dieser Anwendung ein spezielles Interesse giebt, ist der Umstand, dass man auf diese Weise gewisse Klassen „irregulärer" Differentialgleichungen in „reguläre" transformieren kann, was einen Beitrag zur Integration der ersteren liefert[78]). Der einfachste Fall ist der, dass die irreguläre Differentialgleichung die nach *Laplace* benannte ist, d. h. die Gleichung beliebiger Ordnung mit Koeffizienten ersten Grades in $x$; ihre Transformierte ist von der ersten Ordnung, und die gegebene Gleichung lässt sich ebenfalls durch Quadraturen integrieren[79]). Zwischen einem linearen Differentialausdruck $F$, seiner *Laplace'schen* Transformierten $AFA^{-1} = F_1$ und seiner *Lagrange*-schen Adjungierten $\bar{F}$ [80]) besteht die Relation[80]):

$$\bar{F} = A\bar{F}_1 A^{-1}. \tag{52}$$

Eine andere Anwendung besteht in der Transformation einer Potenzreihe in einem linearen Differentialausdruck unendlich hoher Ordnung. Hierher gehört die Transformation einer Summe von Exponentialgrössen:

$$\sum_h c_h e^{\alpha_h x}$$

in einen Ausdruck der Form[81]):

$$\sum_h \sum_n \frac{c_h}{n!} a_h{}^n D^n \varphi = \sum_h c_h \varphi(x + a_h); \tag{53}$$

ferner die Transformation des Ausdrucks von *Legendre*:

$$e^{\alpha x} = 1 + \alpha x e^{\beta x} + \frac{\alpha(\alpha - 2\beta)}{1 \cdot 2} x^2 e^{2\beta x} + \cdots \tag{54}$$

---

77) *Pincherle*, Bologna mem. (10) 8 (1887); Ann. éc. norm. (3) 22 (1905), p. 9; *Amaldi*, Linc. Rend. (5) $7^2$ (1898), p. 117; *Pincherle* e *Amaldi*, cap. XIII.

78) Wegen der Anwendung der Transformation von *Laplace* auf die linearen Differentialgleichungen vgl. man namentlich *H. Poincaré*, Amer. J. of math. 7 (1885), p. 217 und Acta math. 8 (1886), p. 295; dann die Darstellungen von *L. Schlesinger*, Handbuch der lin. Differentialgl. 1, Leipz. 1895, Abschn. VII und von *E. Picard*, Traité d'analyse 3, Paris 1896, chap. XIV; ferner *J. Horn*, Math. Ann. 49 (1897), p. 453; weiteres vgl. II B.

79) *C. Jordan*, Cours d'analyse 3, Paris 1887, p. 253.

80) *Schlesinger*, Handbuch 1, p. 426.

81) *Abel*, Oeuvres 2, p. 170.

in die Reihe von *Abel*[82]):

$$(55)\quad \varphi(t+\alpha)=\varphi(t)+\alpha\varphi'(t+\beta)+\frac{\alpha\cdot(\alpha-2\beta)}{1\cdot 2}\varphi''(t+2\beta)+\cdots,$$

eine Verallgemeinerung der *Taylor*'schen Reihe.

Bei geeigneter Wahl des Integrationsweges transformiert die Operation von *Laplace* $x^n$ in $(-1)^n n!\,x^{-n-1}$ und umgekehrt; man kann also auf sie durch Einführung einer neuen Veränderlichen eine von *E. Borel*[83]) in die Theorie der Potenzreihen eingeführte Transformation zurückführen. Bei dieser wird nämlich in einer solchen Reihe $a_n$ durch $a_n/n!$ ersetzt, wodurch die Singularitäten der Funktion auf dem Konvergenzkreis ins Unendliche geworfen werden. *Borel*'s Theorie der sogenannten „sommation exponentielle"[84]), (durch welche einigen Klassen von divergenten Reihen eine analytische Bedeutung beigelegt werden kann) ist in mannigfaltiger Weise mit der Transformation von *Laplace* eng verwandt; wie von anderer Seite die von *H. Poincaré*[85]) ausgebaute Theorie der asymptotischen Reihen. Auch die von *G. Mittag-Leffler* eingeführte analytische Funktionaltransformation[86]), die

$$\sum a_n x^n$$

in

$$\sum \frac{a_n x^n}{\Gamma(na+1)}$$

transformiert, kann als eine Erweiterung der Transformation von *Laplace* betrachtet werden.

In der Form (49) führt die *Laplace*'sche Transformation die linearen Differentialgleichungen in lineare Differenzengleichungen über; daraus ergiebt sich die Integration der einen mit Hilfe der anderen und die Lösung der Differenzengleichungen durch bestimmte Integrale[87]). Endlich die Entwicklung einer Funktion in eine nach Faktoriellen fortschreitende Reihe[88]) lässt sich zurückführen auf die

82) ibid. und Oeuvres 1, p. 102. Vgl. auch *Halphen*, Paris soc. math. 10 (1882), p. 67; *V. Pareto*, J. f. Math. 110 (1892), p. 290.

83) Acta math. 21 (1897), p. 243.

84) Ann. éc. norm. $16^3$ (1899), p. 50.

85) Acta math. 8 (1896), p. 295.

86) Par. C. R. 136 (1902), p. 937; 137 (1903), p. 554; 138 (1904), p. 881, 941; Linc. rend. (5) 13 (1904), p. 3; Acta math. 29 (1905), p. 101.

87) *Laplace*, vgl. Fussnote 74), 75); *Pincherle*, Lomb. Rend. (2) 19 (1886); Acta 16 (1892), p. 341; *Hj. Mellin*, Acta math. 8 (1886), p. 79; 9 (1886), p. 137; 25 (1901), p. 139.

88) Dieses Problem ist neuerdings behandelt von *J. C. Kluyver*, Amsterd. nieuw arch. (2) 4 (1900); Paris C. R. 134 (1902), p. 587; *N. Nielsen*, Paris C. R.

„exponentielle Darstellung“ dieser Funktion (nach der Ausdrucksweise von *Desaint*[89]), d. h. auf die Bestimmung ihrer *Laplace*'schen Transformierten.

**17. Andere distributive Operationen.**

a) Unter den Funktionaloperationen, die sich durch bestimmte Integrale darstellen lassen, ist eine der am häufigsten benutzten die Transformation von *Heine*[90]) oder von *Euler*, nämlich:

$$A_s(\varphi) = \int\limits_{(l)} \frac{\varphi(y)\,dy}{(y-x)^s}, \tag{56}$$

unter $l$ einen passend gewählten Integrationsweg verstanden. Auch sie kann zum Übergang von einer linearen Differentialgleichung zu einer anderen dienen. Gehört die erste zur „*Fuchs*'schen Klasse“, so gilt für die zweite dasselbe. Aus der Gruppe der einen kann man die der anderen ableiten. Die charakteristischen Eigenschaften der Operation $A_s$ drücken sich aus durch die Gleichungen:

$$A_s D\varphi = DA_s\varphi, \quad DA_s'\varphi = sA_s\varphi, \tag{57}$$

in denen $A_s'$ die Funktionalableitung (Nr. 14) von $A_s$ bedeutet. Wie für die *Laplace*'sche Transformation (Nr. 16) gilt, wenn $\bar{F}$ die adjungierte und $F_1$ die *Euler*'sche Transformierte eines linearen Differentialausdrucks bedeutet, die Relation[91]):

$$\bar{F} = A_s \bar{F}_1 A_s^{-1}. \tag{58}$$

Auch ist:

$$A_s A_t = A_{s+t}; \tag{59}$$

die Transformationen $A_s$ bilden also eine eingliedrige kontinuierliche Gruppe im Sinne von *Lie* (II A 6, Nr. 2). Die Operation $A_s$ dient zur Integration der *Gauss*'schen hypergeometrischen Differentialgleichung durch Quadraturen[92]), denn sie transformiert sie in eine Gleichung 1. Ordnung; sie lässt sich auch auf die verallgemeinerte hypergeometrische Differentialgleichung von *Pochhammer* und auf deren

---

133 (1901), p. 1273; 134 (1902), p. 157; Ann. éc. norm. (3) 19 (1902), p. 409; Math. Ann. 59 (1904), p. 355; Kopenh. Skrift. (2) 2 (1904), p. 59.

89) Vgl. Fussnote 44).

90) J. f. Math. 60 (1862), p. 252; 61 (1863), p. 356; 62 (1863), p. 110; Handb. der Kugelfunktionen 1, 2. Aufl., Berl. 1881, III. Teil, namentlich p. 466 ff. Litteratur dieser Transformation bei *L. Schlesinger*, Handb. der lin. Diff.-Gl. 2, Leipzig 1897, p. XV—XVI; vgl. auch II B 4.

91) *Schlesinger* 2, p. 416; *Pincherle,* J. f. Math. 119 (1898), p. 347.

92) *C. Jordan,* Cours d'analyse 3, Paris 1887, p. 241. Vgl. *B. Riemann,* Nachträge, herausgegeben von *M. Noether* und *W. Wirtinger,* Leipzig 1902, p. 88.

Lösung durch bestimmte Integrale anwenden[93]); endlich auch auf die lineare Differentialgleichung von *Goursat*[94]).

b) Die durch:

$$A_\pi(\varphi) = \int\limits_{(l)} \pi(y-x)\,\varphi(y)\,dy \tag{60}$$

— $\pi$ das Zeichen irgend einer gegebenen Funktion, $\varphi$ das der willkürlichen Funktion, an der man operieren will — dargestellten Operationen bilden eine Gruppe von mit der Ableitung vertauschbaren Operationen[95]):

$$A_\pi D = D A_\pi. \tag{61}$$

Wendet man eine solche Operation auf eine Potenzreihe an, so erscheint sie als Verwandlung der Potenzen $x^n$ im Polynome $\alpha_n(x)$, die der Rekursionsformel:

$$\frac{d\alpha_n}{dx} = n\alpha_{n-1} \tag{62}$$

genügen. Diese Polynome haben sich zuerst *Halphen*[96]) dargeboten und sind dann von *P. Appell*[97]) untersucht worden; ihr allgemeiner Ausdruck ist:

$$\alpha_n(x) = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n, \tag{63}$$

wobei $a_0, a_1, \ldots, a_n$ willkürliche Konstante bedeuten. Die Inverse einer Operation $A_\pi$ ist eine Operation derselben Gruppe[97]).

c) Von speziellen distributiven Operationen sei die „interpolare Operation" erwähnt, die durch:

$$A_a(\varphi) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x-a} \tag{64}$$

definiert ist[98]). Die Operationen $A_a$, $A_b$ sind vertauschbar[99]). Bei Gebrauch dieser Operation kann man einen Ausdruck für das Restglied der *Newton*'schen Interpolationsformel geben[100]).

---

93) J. f. Math. 71 (1870), p. 316; 73 (1871), p. 69; Math. Ann. 35 (1890), p. 470.

94) Ann. éc. norm. (2) 12 (1883), p. 261, 495; *Pincherle,* Sulle funzioni ipergeometriche, cap. VII; Giorn. di mat. 32 (1894), p. 65.

95) *Pincherle,* Acta math. 10 (1886), p. 153; *T. Levi-Civita,* Lomb. Rend. 1895, p. 533.

96) Paris C. R. 93 (1881), p. 833.

97) Ann. éc. norm. (2) 9 (1880), p. 119.

98) Note von *G. Peano* zu *Genocchi* e *Peano,* Calcolo differenziale, Torino 1884, p. XX (p. 323 der deutschen Übersetz. von *Lüroth* u. *Schepp,* Leipz. 1899); *Jensen,* Kopenh. overs. 1894, p. 3.

99) *Jensen,* ebenda p. 3.

100) *Jensen,* ebenda p. 5.

d) Bei Untersuchung der Potenzreihenentwicklung der Wurzeln einer Gleichung:

$$y^n + \varphi_1(x)y^{n-1} + \varphi_2(x)y^{n-2} + \cdots + \varphi_n(x) = 0, \tag{65}$$

in der die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ selbst Potenzreihen sind, gebraucht *H. Schapira*[101]) zwei distributive Operationen, die er als „*Partialisieren*“ und „*Kompletieren*“ bezeichnet — sie beruhen auf der Ersetzung von $x$ durch $\varepsilon x$, unter $\varepsilon$ eine Wurzel der Einheit verstanden; und eine dritte, die er *Differentialsubstitution* nennt —; sie ist das Produkt aus der Operation $D$ in die Operation $\theta^h$ (Nr. 6).

**18. Nicht distributive Operationen.** Von allgemeinen Sätzen über nicht distributive Operationen oder Operationsgruppen kennt man nur wenige. *T. Levi-Civita*[102]) fragt nach denjenigen Gruppen von Operationen, die Funktionen[103]) eines und desselben Operationssymbols $A$ sind und die Eigenschaft haben, dass das Produkt $\Phi_1 \Phi_2$ sich als analytische Funktion von $\Phi_1(A)$, $\Phi_2(A)$ und $A$ ausdrücken lässt. Er löst die Frage mit Hilfe der allgemeinen Methoden der Theorie der kontinuierlichen Gruppen (II A 6) und findet, dass eine solche Relation nur möglich ist, wenn das zweite Glied die Form hat:

$$\lambda(\lambda^{-1}(\Phi_1) + \lambda^{-2}(\Phi_2)), \tag{66}$$

wo $\lambda$ eine willkürliche Funktion, $\lambda^{-1}$ ihre Inverse bedeutet; die Definitionsgleichungen der Gruppe (II A 6, Nr. 3) müssen die Form haben:

$$\sum_i p_i(A)\frac{d^i \lambda^{-1}\Phi}{dA^i} = 0. \tag{67}$$

*C. Bourlet*[104]) sucht die allgemeinsten Funktionaloperationen $A$ von der Art, dass

$$A(\pi(\alpha, \beta)) = f(A(\alpha), A(\beta)) \tag{68}$$

ist, wo $f$ eine beliebige Funktion bedeutet und $\pi$ eine symmetrische Funktion von der Art, dass auch $\pi(\pi(\alpha, \beta), \gamma)$, $\pi\{\pi(\pi(\alpha, \beta), \gamma), \delta\}$ u.s.w. symmetrisch sind[105]); durch Anwendung der Auflösung der *Abel*'schen Funktionalgleichung (Nr. 22) findet er, dass diese Operationen sich auf die distributiven zurückführen lassen.

---

101) Grundlagen zu einer Theorie allgemeiner Kofunktionen, Wien 1881; Theorie allgemeiner Kofunktionen, Leipzig 1892.

102) Sui gruppi di operazioni funzionali, Lomb. Rend. 28 (1895), p. 458.

103) Der Begriff „Funktion eines Symbols“ ist hier im allgemeinsten Sinne zu nehmen.

104) Paris C. R. 124 (1897), p. 348; Ann. éc. norm. (3) 14 (1897), p. 141.

105) *Bourlet* nennt solche Funktionen „indéfiniment symétriques“. Vgl. *Abel*, citate 162).

**19. Funktionen von Linien.** Die allgemeinste bis jetzt durchgeführte Untersuchung über nicht distributive Funktionaloperationen verdankt man *V. Volterra*[106]. Er betrachtet eine im reellen Intervall $a < x < b$ willkürlich gewählte Funktion von $x$, z. B. eine willkürliche Linie zwischen den durch $x = a$ und $x = b$ gezogenen Parallelen zur Ordinatenaxe; und eine Zahl $z$, die für jede dieser Linien einen bestimmten Wert annimmt; man hat dann das, was er eine *Funktion von Linien* nennt. Der Wert von $z$ hängt ab von der *Gesamtheit* der Werte, die die Funktion $y = \varphi(x)$ im gegebenen Intervall nach bestimmtem Gesetz annimmt; mit anderen Worten, diese Zahl ist das Resultat einer gewissen auf $\varphi(x)$ ausgeübten Funktionaloperation, was man durch:

(69) $$z = A(\varphi(x))$$

ausdrücken kann[107]. Solche Grössen, die von allen Werten einer Funktion in einem gegebenen Intervall abhängen, treten bei verschiedenen Anwendungen der Analysis auf die Physik, sowie in der Variationsrechnung (II A 9) auf.

Allgemeiner kann eine Zahl $z$ abhängen von den Werten einer oder mehrerer Funktionen beliebig vieler Variabeln $x$ und ausserdem noch von einer gewissen Anzahl anderer Variabeln $t$; das kann man ausdrücken durch:

(70) $$z = A(\varphi_1(x_1, x_2, \ldots), \varphi_2(x_1, x_2, \ldots), \ldots; t_1, t_2, \ldots).$$

Für den Fall (69) entwickelt *Volterra* eine Ausdehnung des Begriffes der *Stetigkeit* auf Funktionen von Linien: $z$ ist stetig, wenn man zu jeder gegebenen positiven Zahl $\varepsilon$ eine andere $\delta$ so bestimmen kann, dass für jede Variation $\psi(x)$ von $\varphi(x)$, die kleiner als $\delta$ ist, die zugehörige Variation von $z$ kleiner als $\varepsilon$ ausfällt. Dann definiert er die *Ableitung* von $A$: Sei $\theta(x)$ in einem in $(a \ldots b)$ enthaltenen Intervall $(m \ldots n)$ überall gleich bezeichnet und kleiner als $\varepsilon$; sei $\delta z$ die zur Variation $\theta$ von $\varphi$ gehörende Variation von $z$; sei $t_r$ ein innerer Punkt von $(m \ldots n)$: dann ist die Ableitung von $A$ der Grenzwert, dem das Verhältnis $\delta z : \int_m^n \psi(x)\,dx$ sich gleichmässig nähert, wenn $m \cdots n$ und $\theta$ gegen Null konvergieren, was auch die

106) Linc. Rend. (4) $3^2$ (1887), p. 97, 141, 153, 225, 274.

107) *Volterra* gebraucht die Bezeichnung:

$$z = z\left[\varphi\underset{b}{\overset{a}{(x)}}\right],$$

um die Abhängigkeit des $z$ von der im Intervall $a < x < b$ genommenen Funktion $\varphi(x)$ anzudeuten.

Funktion $\varphi$ sei — vorausgesetzt, dass dieser Grenzwert existiert. Man kann diese Ableitung mit:

$$z' = A'(\varphi;\, t_r) \tag{71}$$

bezeichnen. Indem *Volterra* entsprechend die höheren Ableitungen definiert und für jede die erforderlichen Voraussetzungen hinzufügt, erhält er die Formel:

$$\left\{\begin{aligned} A(\varphi+\psi) = A(\varphi) &+ \int_a^b A'(\varphi;\, t_1)\, \psi(t_1)\, dt_1 \\ &+ \frac{1}{2}\int_a^b\!\!\int_a^b A''(\varphi;\, t_1, t_2)\, \psi(t_1)\, \psi(t_2)\, dt_1\, dt_2 + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!}\int_a^{b\;(n)}\!\! A^{(n)}(\varphi;\, t_1, t_2, \ldots, t_n)\, \psi(t_1) \ldots \psi(t_n)\, dt_1 \ldots dt_n + \cdots \end{aligned}\right. \tag{72}$$

Die Terme dieser Entwicklung sind auf $\psi$ angewendete Funktionaloperationen; das erste Integral giebt eine distributive Operation; die folgenden geben Operationen, die sich der Addition gegenüber immer komplizierter verhalten[108]). — *Cornelia Fabbri* dehnt die Formel von *Volterra* auf Grössen aus, die von Funktionen mehrerer Variabeln abhängen[109]). — *C. Arzelà* untersucht die Funktionen von Linien in Hinsicht auf ihre Grenzwerte[110]). *M. Fréchet*[111]) erweitert den Satz von *Weierstrass* über das Maximum (Minimum) einer stetigen reellen Funktion auf stetige Funktionaloperationen.

## Funktionalgleichungen.

**20. Allgemeines über Funktionalgleichungen.** Man nennt *Funktionalgleichungen* diejenigen Gleichungen, die eine Eigenschaft einer oder mehrerer Funktionen ausdrücken und dadurch deren Form mehr oder weniger vollständig zu bestimmen erlauben. Zu ihnen gehören die gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, die Gleichungen mit endlichen (gewöhnlichen oder partiellen) und die mit gemischten Differenzen; da diese in besonderen Artikeln behandelt sind, sollen hier nur solche Funktionalgleichungen besprochen werden, die sich nicht unmittelbar auf eine von diesen Klassen zurückführen lassen.

---

108) *B. Calò*, Lincei Rend. (5) 4 (1895), p. 52.
109) Torino Atti 25 (1890), p. 432.
110) Bologna Mem. (5) 4 (1894).
111) Par. C. R., 21 novembre 1904.

Beispiele von solchen Gleichungen finden sich schon in den Werken von *d'Alembert, Euler* und *Lagrange*; *Monge*[112]) giebt für sie einige allgemeine Prinzipien, sowie Kunstgriffe zur Zurückführung mehrerer Klassen von solchen Gleichungen auf Differenzengleichungen. Erwähnt sei, dass *d'Alembert*[113]) das Problem der Zusammensetzung der Kräfte auf die Auflösung der Funktionalgleichung:

$$\varphi(x+a)+\varphi(x-a)=2\varphi(x)\varphi(a) \tag{73}$$

zurückführt, deren Lösung ist:

$$\varphi(x)=\tfrac{1}{2}(e^{kx}+e^{-kx}); \tag{74}$$

die speziellen Bedingungen des genannten Problems geben

$$\varphi(x)=\cos x.$$ [114])

*Laplace*[115]) führt dasselbe Problem auf die Lösung der Gleichung:

$$(\varphi(x))^2+\left(\varphi\left(\frac{a}{2}-x\right)\right)^2=1 \tag{75}$$

zurück, deren Integral ohne Schwierigkeit mit Hilfe einer willkürlichen Funktion $f(x)$ in der Form:

$$\varphi(x)=\sqrt{\frac{1}{2}+f(x)-f\left(\frac{a}{2}-x\right)} \tag{76}$$

enthalten wird. — *Ch. Babbage*[116]), der zahlreiche Beispiele von Funktionalgleichungen giebt, nennt *allgemeine Lösungen* diejenigen, die willkürliche Funktionen, *partikuläre* Lösungen diejenigen, die nur Konstante enthalten. Für mehrere Gleichungen kann man die allgemeine Lösung gewinnen, sobald man eine partikuläre kennt; so ist, wenn $\varphi(x)$ eine partikuläre Lösung der Gleichung $\psi(x)=\psi(ax)$ und $f$ eine willkürliche Funktion ist, $f(\varphi(x))$ die allgemeine Lösung. Entsprechend erhält man die allgemeine Lösung des Systems

$$\psi(x)=\psi(ax)=\psi(bx)=\psi(cx)$$

---

112) Paris mém. sav. [étr.] 7 (1773), p. 305. In demselben Bande, p. 37, ist auch eine Abhandlung von *Laplace*, (Oeuvres 8, p. 5), in der Funktionalgleichungen betrachtet sind, die sich auf gemischte Differential- und Differenzengleichungen zurückführen lassen.

113) Mém. sur les principes de la mécanique, 1769.

114) S. auch *Cauchy*, Anal. algébrique 1, Paris 1821, p. 113.

115) Mécanique céleste 1, Paris 1799 (1807), p. 5 (Oeuvres 1, p. 5). Über die Funktionalgleichung der Zusammensetzung der Kräfte vgl. *F. Siacci*, Napoli Rend. 1899, p. 34; *G. Hamel*, Math. Ann. 60 (1905), p. 459.

116) Lond. Phil. Trans. 1815/16; Appendix zu *W. J. Herschel*, Collection of examples on the calculus of finite differences, Cambr. 1820 (ein Auszug von *Gergonne*, Gerg. ann. 12 (1821), p. 73).

in der Form $\psi = f\varphi_2\varphi_1\varphi(x)$, wenn $f$ eine willkürliche Funktion und $\varphi$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ bezw. Lösungen der Gleichungen

$$\psi(x) = \psi(ax), \quad \psi\varphi(x) = \psi\varphi(bx), \quad \psi\varphi_1\varphi(x) = \psi\varphi_1\varphi(cx)$$

bedeuten. Ebenso hat man, wenn von der Gleichung:

$$F(x, \varphi(x), \psi(ax), \psi(bx), \ldots) = 0 \tag{77}$$

eine partikuläre Lösung $\varphi(x, a_1, a_2, \ldots)$ gegeben ist, in der $a_1, a_2, \ldots$ willkürliche Konstante sind, die allgemeine Lösung, indem man

$$\psi(x) = \varphi(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots) \tag{78}$$

setzt, unter $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ willkürliche Lösungen des Systems

$$\varphi(x) = \varphi(ax) = \varphi(bx) = \cdots \tag{79}$$

verstanden.

*S. D. Poisson*[117]) hat das Problem der Verteilung der statischen Elektrizität auf zwei sich gegenseitig influenzierende Kugeln auf die Lösung der Funktionalgleichung

$$f(x) = A - B\frac{b}{c-x} - \frac{ab}{c^2 - x^2 - cx} f\left(\frac{a^2(c-x)}{c^2 - x^2 - cx}\right),$$

die dann noch vielfach behandelt worden ist[118]), zurückgeführt.

**21. Die Gleichung von Babbage und ihre Anwendungen.** In Nr. 6 ist mit $S_\psi(\varphi)$ das Resultat der Substitution von $\psi(x)$ an Stelle von $x$ in die willkürliche Funktion $\varphi(x)$ bezeichnet. Man hat also $S_\psi(x) = \psi(x)$, $S_\psi^2(x) = \psi(\psi(x))$ u. s. w. Viele Autoren benutzen die Bezeichnung:

$$x = \psi_0(x),\ \psi(x) = \psi_1(x),\ \psi(\psi(x)) = \psi_2(x), \ldots, S_\psi^n(x) = \psi_n(x); \tag{80}$$

$S_\psi^n(x)$ heisst die $n^{\text{te}}$ *Iterierte* von $\psi(x)$. Man kann nach Funktionen fragen, deren $n^{\text{te}}$ Iterierte wieder die unabhängige Variable selbst ist; man erhält so die Gleichung von *Babbage*[119]):

$$\psi_n(x) = x \quad \text{oder symbolisch} \quad S_\psi^n = 1. \tag{81}$$

Z. B. genügen ihr die Funktionen $a - x$, $\frac{x}{ax-1}$ für $n = 2$; $\frac{2}{2-x}$ für $n = 4$; $\varepsilon x$ für irgend eine positive ganze Zahl $n$, wenn $\varepsilon$ eine $n^{\text{te}}$ Einheitswurzel bedeutet. Ist $\varphi$ eine partikuläre Lösung, so ist $f^{-1}\varphi f$ die allgemeine, unter $f$ eine willkürliche Funktion verstanden. *L. Leau*[120]) untersucht die Gleichung von *Babbage* für den Fall, dass

117) Paris Inst. (math.) 1811, p. 43.

118) S. z. B. *Kirchhoff*, Vorlesungen über Elektrizität und Magnetismus, Leipzig 1891, p. 66.

119) Gerg. ann. 16 (1821), p. 73; vgl. auch *Rausenberger*, Math. Ann. 18 (1881), p. 379 und Periodische Funktionen, Leipz. 1884, p. 162.

120) Par. soc. math. bull. 26 (1898), p. 5.

$\psi(x)$ eine eindeutige analytische Funktion in einem gegebenen Bereich sein soll. Die Gleichung[121]):

$$(82)\qquad F(x, \psi(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)) = 0$$

lässt sich soweit reduzieren, dass sie keine Iterierte mehr enthält, indem man successive $\psi = \varphi^{-1} f \varphi$ setzt, wo $f$ willkürlich und $x = \varphi^{-1}(z)$ ist. Diese Gleichung enthält als speziellen Fall die lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$(83)\qquad a_0 x + a_1 S_\psi(x) + \cdots + a_n S_\psi{}^n(x) = 0,$$

deren allgemeines Integral sich mit Hilfe des Integrals der Gleichung von *Babbage* leicht ausdrücken lässt[122]).

**22. Gleichungen von Abel und von Schroeder.** Die Gleichung von *Abel*[123]):

$$(84)\qquad \varphi(\alpha(x)) = \varphi(x) + c \quad \text{oder} \quad S_\alpha \varphi = \varphi + c$$

ist vielfach behandelt worden. Setzt man $x = \psi(y)$, $\alpha(x) = \psi(y+1)$, so gelangt man zu ihrer Lösung mit Hilfe der Differenzengleichung 1. Ordnung $\psi(y+1) = \alpha(\psi(y))$ (deren Lösung übrigens nicht leichter ist); die Funktion $\varphi$ ist dann gegeben durch die Differenz:

$$\varphi\psi(y+1) - \varphi\psi(y) = c.$$

*Abel* bemerkt: Kennt man eine partikuläre Lösung $\varphi(x)$ von (84), so ist die allgemeine $\varphi(x) + \omega(x)$, wo $\omega(x)$ in Bezug auf $S_\alpha$ *invariant*, d. h. $S_\alpha(\omega) = \omega$ ist[124]). Als Anwendung löst er die Gleichung $\varphi(x^n) = \varphi(x) + 1$, von der $\varphi(x) = \frac{\log\log x}{\log n}$ eine Lösung ist. Endlich führt er die allgemeinere Gleichung:

$$(85)\qquad F(x, \varphi(\alpha(x)), \varphi(\beta(x))) = 0$$

auf Differenzengleichungen zurück. *A. Korkine*[125]) nimmt bei der Integration der *Abel*'schen Gleichung an, $\alpha(x)$ und $\varphi(x)$ seien in Potenzreihen entwickelbar; er erhält dann formell die Entwicklungskoeffizienten von $\varphi(x)$ durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten.

Indem man $\varphi(x)$ durch $\log\varphi(x)$ ersetzt, erhält man aus der Gleichung (84) die folgende:

$$(86)\qquad \varphi(\alpha(x)) = c\varphi(x) \quad \text{oder} \quad S_\alpha\varphi = c\varphi,$$

---

121) *Babbage*; Fussnote 116); *O. Spiess,* Die Grundbegriffe der Iterationsrechnung, Diss., Basel 1902. Vgl. oben, Nr. 9.

122) *Léméray,* Par. C. R. 125 (1897), p. 524; Par. soc. math. bull. 26 (1898), p. 10.

123) Oeuvres 2, p. 36.

124) *Korkine* und *Koenigs,* die dieses Resultat ebenfalls aussprechen, erwähnen nicht, dass es schon von *Abel* gegeben war.

125) Darb. Bull. (2) 6 (1882), p. 235.

die nach *E. Schroeder*[126]) genannt wird; die Bestimmung und der Gültigkeitsbereich der Lösungen von (84) lassen sich aus denjenigen von (86) ableiten. Unter der Voraussetzung, $\alpha(x)$ sei regulär in einem Kreise von einem Radius $> 1$ um einen Wurzelpunkt $z$ der Gleichung $\alpha(x) - x = 0$, und es sei ferner:

$$\sum \frac{1}{n!} \left| \alpha^{(n)}(z) \right| < 1, \tag{87}$$

beweist *J. Farkas*[127]), dass die Gleichung (86) ein im Kreise vom Radius 1 um $z$ reguläres Integral hat. *Koenigs*[128]) bildet mit Hilfe eines Grenzwertes eine Lösung der Gleichung (86) und beweist ihre Gültigkeit; ihrer Darstellung (Nr. 24) sind noch einige allgemeine Sätze über Konvergenz der Iteration vorauszuschicken.

**23. Iterationsrechnung.** Ist $\alpha(x)$ eine gegebene Funktion und bildet man die Iterierten $S_\alpha(x), S_\alpha^2(x), \ldots, S_\alpha^r(x), \ldots$, so entsteht die Frage, ob der Fall eintreten kann, dass diese Folge für $r = \infty$ gegen einen Limes konvergiert, unabhängig von der Art, wie $r$ über alle Grenzen wächst. Dieses Problem hat sich *E. Schroeder*[129]) bei der Untersuchung eines Algorithmus dargeboten, den er *Eggers* zuschreibt und der dazu dient, die Wurzeln algebraischer oder transzendenter Gleichungen mit zunehmender Genauigkeit zu berechnen. Er beweist den fundamentalen Satz: *wenn* $S_\alpha^r$ einen Grenzwert $z$ hat, so ist dieser Grenzwert eine Wurzel der Gleichung $\alpha(x) - x = 0$. *Farkas*[130]) beweist weiter: Sei $\alpha(x)$ eine analytische Funktion von $x$, so beschaffen, dass, während $x$ einen Bereich $T$ beschreibt, der entsprechende von $\alpha(x)$ beschriebene Bereich $\alpha(T)$ ganz in $T$ liegt, selbst wenn sich $T$ auf einen Punkt zusammenzieht; dann haben die Iterierten einen von der Art, wie $r$ ins Unendliche wächst, unabhängigen Grenzwert. Ferner[131]): Wenn $\alpha(x)$ für reelle $x$ ebenfalls reell ist und mit $x$ zugleich wächst und wenn dabei für $p < x < q$ auch $p < \alpha(p) < \alpha(x) < \alpha(q) < q$ ist, so haben die Iterierten einen Grenzwert. *Koenigs*[132]) giebt die Umkehrung des Satzes von *Schroeder*, d. h.: Wenn $z$ ein nicht singulärer Punkt von $\alpha(x)$ und $\alpha(z) = z$ sowie $|\alpha'(z)| < 1$ ist, so ist $z$ Mittelpunkt eines Kreises, in dessen Innern

---

126) Math. Ann. 3 (1871), p. 296.
127) J. de math. (3) 10 (1884), p. 108.
128) Ann. éc. norm. (3) 1 (1884), Suppl. p. 3; 2 (1885), p. 385.
129) Math. Ann. 2 (1870), p. 349.
130) J. de math. (3) 10 (1884), p. 102.
131) Ibid. p. 103.
132) Darb. Bull. (2) 7 (1883), p. 314.

(88) $$\lim_{r=\infty} S_\alpha^{(r)}(x) = z$$

ist. Ist $\varphi(x)$ in $z$ regulär und $\varphi(z) = 0$, so kann man eine so grosse Zahl $h$ angeben, dass $\sum_{n=h}^{\infty} S_\alpha^{\,n}(\varphi)$ in diesem Kreis gleichmässig konvergiert und folglich (II B 1, Nr. 6) in ihm eine reguläre analytische Funktion darstellt[133]). Man hat auch den Fall betrachtet, dass die $S_\alpha^{\,r}$ eine endliche Zahl $k$ von Grenzpunkten (Häufungspunkten) haben; sie sind dann Wurzeln von $S_\alpha^{\,k}(x) = x$ und werden durch die Substitution $S$ zyklisch vertauscht. Auch dieser Satz lässt sich umkehren[134]).

Wenn $\alpha(x)$ eine rationale ganze Funktion von $x$ ist, hat die Gleichung:

$$\frac{S_\alpha^n(x) - x}{\alpha(x) - x} = 0,$$

solange die Koeffizienten von $\alpha(x)$ unbestimmt bleiben, die Eigenschaft, dass ihre Wurzeln in Systeme von je $n$ zerfallen, in der Weise, dass:

$$x_2 = \alpha(x_1),\ x_3 = \alpha(x_2), \ldots,\ x_n = \alpha(x_{n-1})$$

ist, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Wurzeln eines Systems sind[135]).

Die Iteration irrationaler Funktionen kann, wie gesagt, zur näherungsweisen Berechnung der Wurzeln einer Gleichung dienen, z. B. für die trinomische Gleichung

(89) $$x^n - x - a = 0$$

die Iteration von $\sqrt[n]{x + a}$; für

$$x^m - px^n + q = 0$$

die von[136]):

$$\sqrt[n]{\frac{q}{p - x^{m-n}}} \quad \text{oder} \quad \sqrt[m-n]{p - \frac{q}{x^n}}.$$

*E. Netto*[137]) untersucht die aus der Iteration von

(90) $$\sqrt[n]{x + a}$$

oder

(91) $$\sqrt[n]{ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots + c}$$

---

133) *G. Koenigs,* Ann. éc. norm. (2) 1 (1884), Suppl. p. 14.

134) *Koenigs,* Darb. Bull. (2) 7 (1883), p. 314; *F. Podetti,* Giorn. di mat. 35 (1897), p. 264.

135) *E. Netto,* Math. Ann. 29 (1887), p. 148.

136) *K. B. Hoffmann,* Arch. f. Math. 66 (1881), p. 38.

137) Math. Ann. 29 (1887), p. 141.

entstehenden Algorithmen und ihre Konvergenz; er bestimmt, welche Wurzeln von (1) durch den Grenzwert der Iteration von (2) geliefert wird, je nach der Wahl des Ausgangswertes $x_0$. *C. Isenkrahe* bemerkt[138]): wenn man $x$ irgendwie aus der Gleichung

$$(92) \qquad x^n - ax^{n-1} - bx^{n-2} - \cdots - c = 0$$

in der Form:

$$x = \alpha(x)$$

isoliert und dann von irgend einem (reellen oder komplexen) Werte $x_0$ aus die Iterierten $S_\alpha^{(n)}(x_0)$ bildet, so kann dieser Prozess gegen eine Wurzel $\xi$ von (4) konvergieren, wenn $|\alpha'(\xi)| < 1$ ist; ferner beweist er, dass die Iteration von

$$\frac{\alpha(x) - x\alpha'(x)}{1 - \alpha(x)}$$

gegen eine beliebige Wurzel von (4) konvergieren kann.

Die Iteration der Potenz $x^x$ untersuchen *Eisenstein*[139]) und *Seidel*[140]); die der Funktion $a/\log x$ und überhaupt von Funktionen der Form

$$f\left(\frac{a}{\varphi(x)}\right)$$

*A. Sommerfeld*[141]).

**24. Anwendung der Iterationsrechnung auf die Gleichung von Abel.** Sei $\lim\limits_{r=\infty} S_\alpha^{(r)}(x) = z$ in einem Kreise um $z$, in dem $\alpha(x)$ regulär und $|\alpha'(x)| < 1$ ist; dann ist:

$$(93) \qquad B(x) = \lim_{r=\infty} \frac{S_\alpha^{(r)}(x) - z}{(\alpha'(z))^r}$$

eine in der Umgebung von $z$ reguläre analytische Funktion; und wird $\alpha'(z) = a$ gesetzt, so genügt sie der Gleichung von *Schroeder* (Nr. 22) $S_\alpha\varphi = a\varphi$, die somit gelöst ist[142]). Jede andere in der Umgebung von $z$ reguläre Lösung dieser Gleichung unterscheidet sich nur durch einen konstanten Faktor von einer Potenz von $B(x)$. Aus der Lösung der Gleichung von *Schroeder* erhält man die Lösung $\log B(x)$ der Gleichung von *Abel*. Die Funktion $B(x)$ von *Koenigs* kann auch zur Integration anderer Gleichungen dienen[143]), wie $S_\varphi{}^r = S_\alpha$ und

138) Math. Ann. 31 (1888), p. 309; Progr. Trier 1897.

139) J. f. Math. 28, 1844, p. 49.

140) Münch. Abhandl. 11¹ (1872), p. 360.

141) Gött. Nachr. 1898.

142) *Koenigs*, Par. C. R. 99 (1884), p. 1016; Ann. éc. norm. (3) 1 (1884), Suppl. p. 19; 2 (1885), p. 385.

143) Ann. éc. norm. (3) 2 (1885), p. 385.

$S_\varphi S_\alpha = S_\alpha S_\varphi$, wo $\alpha$ gegeben und $\varphi$ gesucht ist. *A. Grévy*[144]) beweist die Existenz der Lösung der Gleichung (86) für $\alpha'(z) = 0$, *L. Leau*[145]) für $|\alpha'(z)| = 1$.

**25. Andere Anwendungen der Funktionen von Koenigs.** Man kann die Funktionen $B(x)$ auf die Theorie der linearen Differentialgleichungen $F(\varphi) = 0$ anwenden, die bei einer Transformation der Form $x = \lambda(t)$, $\varphi(x) = \psi(t)\mu(t)$ ungeändert bleiben; nur dass $t$ statt $x$, $\psi(t)$ statt $\varphi(x)$ vorkommt. Eine solche Gleichung hat mindestens ein Integral, das einer Funktionalgleichung von einer der von *Koenigs* untersuchten Formen genügt, und die Integration geschieht mit Hilfe der Funktionen $B(x)$.[146])

Eine andere Anwendung besteht in der Untersuchung der Gleichungen der Form:

$$\pi_0 \varphi + \pi_1 S_\alpha \varphi + \pi_2 S_\alpha^2 \varphi + \cdots + \pi_n S_\alpha^n \varphi = 0, \tag{94}$$

wenn nach Lösungen $\varphi(x)$ gefragt wird, die in der Umgebung eines Punktes $z = \lim\limits_{r=\infty} S_\alpha^r$ regulär sind. Dieses Problem[147]) bietet Analogien zur Theorie der linearen Differentialgleichungen dar: so ist z. B. die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwischen $n$ Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ eine lineare homogene Relation mit gegenüber $S_\alpha$ invarianten Koeffizienten bestehe, das Verschwinden der zur *Wronski*'schen analogen Determinante[148]):

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ S_\alpha\varphi_1 & S_\alpha\varphi_2 & \cdots & S_\alpha\varphi_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_\alpha^{n-1}\varphi_1 & S_\alpha^{n-1}\varphi_2 & \cdots & S_\alpha^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}; \tag{95}$$

daraus folgt, dass die Gleichung (94) nur $n$ im angegebenen Sinne linear unabhängige Lösungen haben kann. Die wirkliche Existenz von $n$ solchen Lösungen lässt sich mit Hilfe der Funktionen $B(x)$ durch eine Methode beweisen, die zu der der „fonctions majorantes" in der Theorie der linearen Differentialgleichungen (II B 7) analog

144) Paris Thèse 1894.

145) Paris Thèse 1897.

146) *P. Appell,* Par. C. R. 7 novembre 1881; Acta math. 15 (1891), p. 281.

147) *A. Grévy,* Ann. éc. norm. (3) 11 (1894), p. 249.

148) Wegen der Verallgemeinerung der *Wronski*'schen Determinante und wegen derjenigen Funktionalgleichungen, deren Theorie Analogien zu der der Differentialgleichungen darbietet, vgl. man *Pincherle,* Linc. Rend. (5) 6¹ (1897), p. 301; *E. Bortolotti,* ibid. 7¹, 1898, p. 45; *Bourlet,* Par. C. R. 124 (1897), p. 1431.

ist[149]). Eine schon erwähnte Untersuchung von *L. Leau*[150]) giebt Existenztheoreme für die regulären Lösungen von Systemen von Funktionalgleichungen, die zu den Systemen linearer Differentialgleichungen analog sind, z. B. das folgende: Seien $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ die unbekannten, $\alpha$ und die $\beta_{ij}$ gegebene Funktionen; man sucht von dem Gleichungssystem:

$$(96) \qquad \varphi_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} S_\alpha \varphi_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

die in der Umgebung einer Wurzel der Gleichung $\alpha(x) - x = 0$ regulären Lösungen und findet für sie Reihenentwicklungen, deren Konvergenz man durch die Bedingungen der „fonctions majorantes" beweist. Derselbe Autor untersucht auch den Fall, dass die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ und $\alpha$ eine beliebige Anzahl von Variabeln enthalten.

**26. Analytische Iteration.** Die Lösung des Problems der analytischen Iteration, d. h. die Bildung von $S_\alpha^r$ für beliebiges $r$, lässt sich auf die eben besprochenen Probleme zurückführen. Durch direkte Rechnung ist sie mühsam, selbst in den einfachsten Fällen, wie dem der linearen Funktion[151]):

$$(97) \qquad \alpha(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$[152])

Eine abgekürzte Methode geben *A. Cayley*[153]), dann *E. Schroeder*[154]) mit Hilfe der der Differenzenrechnung (I E) entlehnten Formel:

$$(98) \qquad S_\alpha^r = S^0 + r(S - S^0) + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}(S^2 - 2S + S^0) + \cdots.$$

Das Problem, $S_\alpha^r$ für ein beliebiges (nicht mehr notwendig ganzzahliges) $r$ zu definieren, ist unbestimmt, solange man nicht noch irgend welche weitere Bedingung hinzufügt, z. B. Konvergenzbedingungen, oder dass $S^r$ eine analytische Funktion von $r$ und $x$ sein soll. *E. Schroeder*[155]) bemerkt, dass man die Iterierten einer Funktion $\beta$ bilden kann, wenn $S_\beta = S_\psi S_\alpha S_\psi^{-1}$ ist und man die von $\alpha$ kennt; diese Bemerkung erlaubt die Iterierten zahlreicher Funktionen

149) *Grévy*, Paris Thèse 1894.

150) Paris Thèse 1897.

151) *E. Hoppe*, Zeitschr. Math. Phys. 5 (1860), p. 136; *J. A. Serret*, J. de math. 15 (1850), p. 156; Cours d'algèbre supérieure.

152) Die Iteration von solchen linearen Funktionen kommen in der Theorie der diskontinuierlichen Gruppen und der automorphen Funktionen häufig vor; so z. B. *F. Klein*, Ikosaeder, Leipzig 1884, passim., *Klein-Fricke*, Modulfunktionen 1, Leipzig 1890, 2. Abschn., Kap. I.

153) Papers 5, p. 466.

154) Math. Ann. 2 (1870), p. 317.

155) Ebenda 3 (1871), p. 300.

aus denjenigen der linearen Funktion (97) abzuleiten. Man kann die Iterierten von $\alpha$ auch in dem Falle bilden, dass man eine Funktion $\psi$ kennt, die ein Additionstheorem der Form $\psi(x+c)=\alpha(\psi(x))$ oder ein Multiplikationstheorem der Form $\psi(cx)=\alpha(\psi(x))$ hat. Mit Hilfe dieser Bemerkung führt *Schroeder* das Problem der Iteration auf die Auflösung der Gleichung (84) oder (86) zurück. *C. Formenti*[156]) leitet die Lösung des Problems der Iteration direkt aus der der Gleichung von *Abel* ab. *A. Korkine*[157]) und *J. Farkas*[158]) führen durch andere Methoden die Lösung des Problems der Iteration auf die der genannten Gleichungen zurück. Endlich *C. Bourlet*[159]) nimmt die Formel (98) für beliebiges $r$ in Anspruch und beweist: Wenn $\alpha(x)$ in der Umgebung eines Wurzelpunktes $z$ von $\alpha(x)-x=0$ regulär und $|\alpha'(z)|<1$ ist, so giebt diese Formel nicht nur formell, sondern thatsächlich die Entwicklung der Iterierten von $\alpha(x)$ als analytische Funktion von $x$ und $r$. Iteration von linearen Differentialausdrücken betrachtet *A. Gutzmer*[159b]).

**27. Verschiedene Funktionalgleichungen. Verallgemeinerung der Periodizität. Transcendentale Transcendenz.**

a) Ausser den bisher besprochenen Funktionalgleichungen sind noch viele andere gelegentlich aufgetreten oder Gegenstand von speziellen Untersuchungen gewesen. So bemerkt *N. H. Abel*[160]): Aus einer nicht kontradiktorischen Gleichung der Form:

$$V(x, y, \varphi(\alpha), f(\beta), F(\gamma), \ldots)=0, \tag{99}$$

in der $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ gegebene Funktionen von $x$ und $y$ sind, lassen sich die unbekannten Funktionen $\varphi, f, F, \ldots$ im allgemeinen alle bestimmen. Als Anwendung bestimmt er $\varphi$ in der Gleichung:

$$\varphi(\alpha)=V(x, y, \varphi(\beta), \varphi(\gamma)), \tag{100}$$

indem er zuerst $x$ und $y$ durch die Relation $\alpha(x, y)=$ const. verbindet und nach $x$ differentiiert, dann mit $\beta(x, y)=$ const. entsprechend verfährt und so das Problem auf die Integration einer Differentialgleichung 1. Ordnung zwischen $\varphi(\gamma)$ und $\gamma$ zurückführt.

Analog verfährt *H. W. Pexider*[161]) für die allgemeinere Funktionalgleichung

156) Lomb. Rend. (2) 8 (1875), p. 276.

157) Darb. Bull. (2) 6 (1882), p. 228.

158) J. de math. (3) 10 (1884), p. 104.

159) Toulouse Fac. ann. 12 (1898), p. C 1.

159b) Sitzungsber. der Böhm. Gesellschaft, Prag 1902.

160) Magazin for Naturvidenskaberne, Christiania 1823; Oeuvres ed. *Sylow* et *Lie* 1, p. 1.

161) Monatsh. Math. 14 (1902), p. 297.

(101) $$F(f_1(x_1),\ f_2(x_2), \cdots,\ f_n(x_n)) = 0,$$

wo $x_{k+1}, \cdots, x_n$ Funktionen der übrigen reellen oder komplexen unabhängige Variabeln $x_1, \cdots, x_k$ sind. Durch Differentiation von (1) nach den $x_1, \cdots, x_k$ hat man

(102) $$\frac{\partial F}{\partial f_i} f_i'(x_i) + \sum_{\nu=k+1}^{n} \frac{\partial F}{\partial f_\nu} f_\nu'(x_\nu) \frac{\partial x_\nu}{\partial x_i} = 0,$$

und durch passende Setzungen und unter Bedingungen, die wohl wesentliche Beschränkungen darstellen, kann man $f_{k+1}', f_{k+2}', \ldots, f_n'$ erhalten.

Ein anderes von *Abel*[162]) gestelltes Funktionalproblem ist die Aufsuchung solcher Funktionen $f$ von zwei Variabeln, dass $f(z, f(x,y))$ in $x, y, z$ symmetrisch ist; er findet: jeder solchen Funktion entspricht eine Funktion $\varphi(u)$ von der Art, dass identisch

$$\varphi(f(x,y)) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

ist. Diese von *Abel* angegebene Lösung ist die allgemeinste[163]), wenn $f(x, y)$ Ableitungen nach $x$ und $y$ haben soll.

Die Funktionalgleichung:

(103) $$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

definiert die Funktion $ax$, wenn $f(x)$ stetig[164]) sein, oder in jedem endlichen Intervall[165]), oder auch in einer willkürlichen kleinen Umgebung von $x = 0$[166]) eine obere Grenze haben soll, mag sie reell oder komplex sein; aber nicht, wenn ihre obere Schranke in jedem endlichen Intervall unendlich ist[167]).

*Cauchy*[168]) untersucht auch die einfachen Funktionalgleichungen

$$f(x+y) = f(x) f(y),$$
$$f(xy) = f(x) f(y),$$
$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

und findet, dass die reellen stetigen Funktionen, welche diese Gleichungen befriedigen, durch

162) J. f. Math. 1 (1826), p. 1; Oeuvres ed. *Sylow* et *Lie* 1, p. 61.

163) *P. Stäckel*, Zeitschr. Math. Phys. 42 (1897), p. 323.

164) *A. Cauchy*, Analyse algébrique, Paris 1821, p. 103 (Oeuvres (2) 3 (1897), p. 98, p. 220).

165) *G. Darboux*, Math. Ann. 17 (1880), p. 55; *C. Segre*, Torino atti 25 (1890), p. 192, 287.

166) *La Vallée-Poussin*, Cours d'analyse, 1903, p. 30.

167) *R. Volpi*, Giorn. di mat. 35 (1897), p. 104; *G. Hamel*, Math. Ann. 60 (1905), p. 459.

168) Vgl. Fussnote 164).

$$f(x) = a^x, \quad x^a, \quad a \log x$$

resp. gegeben sind. *H. W. Pexider*[169]) betrachtet die allgemeineren Funktionalgleichungen

$$f(x) + \varphi(y) = \psi(x + y),$$
$$f(x)\,\varphi(y) = \psi(x + y),$$
$$f(x)\,\varphi(y) = \psi(xy),$$
$$f(x) + \varphi(y) = \psi(xy)$$

und findet, dass man resp. hat

$$f(x) = ax + c, \quad ba^x, \quad bx^a, \quad a \log x + b;$$

und

$$\varphi(x) = ax + c', \quad b'a^x, \quad b'x^a, \quad a \log x + b'.$$

Ähnlich für komplexe stetige Funktionen einer reellen Variablen.

b) Die Funktionalgleichung:

$$(104) \qquad \varphi\,(\alpha(x)) = \varphi\,(x) \quad \text{oder} \quad S_\alpha \varphi = \varphi,$$

in der $\alpha$ gegeben ist, kann als *Definition der Periodizität im allgemeinsten Sinne des Wortes* angesehen werden[170]). Periodizität im engeren Sinne erhält man für $\alpha(x) = x + a$, wo $a$ eine Konstante bedeutet; für $\alpha(x) = ax$ erhält man eine Relation, auf die man die Theorie der doppeltperiodischen Funktionen stützen kann[171]), wie die Verwandlung von $x$ in $e^x$ sofort zeigt. Die Definition der doppelten Periodizität erster, zweiter und dritter Art (II B 3) besteht in nichts anderem als in einem System von zwei einfachen Funktionalgleichungen. Ein System von einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Gleichungen der Form:

$$(105) \qquad S_\alpha \varphi = \varphi, \quad S_\beta \varphi = \varphi, \quad \ldots$$

führt zu dem Schlusse, dass die Operationen $S_\alpha$, $S_\beta$, ... eine *Gruppe* bilden müssen; sind die Funktionen $\alpha$, $\beta$, ... linear, so kommt man auf die Theorie der gegenüber einer (diskontinuierlichen) Gruppe linearer Substitutionen invarianten Funktionen, d. h. der automorphen (*Fuchs*'schen) Funktionen von *Poincaré* und *Klein* (II B 4). Ihre Verallgemeinerung auf Funktionen von mehreren Variabeln, d. h. die

169) Monatshefte für Math. und Phys. 14 (1902), p. 293.

170) *O. Rausenberger,* Lehrbuch der Theorie der periodischen Funktionen, Leipz. 1884. Vgl. auch wegen einer Verallgemeinerung der Periodizität, die auch auf mehrdeutige Funktionen ausgedehnt wird, *E. Jaggi,* Nouv. ann. (4) 1 (1901), p. 146, 450, 529.

171) *S. Pincherle,* Giorn. di mat. 18 (1880), p. 92; *Rausenberger,* Lehrbuch, Abschn. VI; *A. R. Forsyth,* Theory of functions, Cambr. 1893, p. 586.

hyperfuchs'schen und hyperabel'schen Funktionen von *E. Picard*[172]), sind ebenfalls durch Funktionalgleichungen definiert. — Die allgemeine Periodizitätsgleichung (104) ist formell allgemein durch die Formel gelöst worden[173]):

$$(106) \qquad \varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_a^n f(x),$$

in der $f(x)$ eine willkürliche, in besonderen Fällen rationale Funktion bedeutet; in der Theorie der einfach und doppelt periodischen, überhaupt der automorphen Funktionen hat man zahlreiche Beispiele dafür, dass durch geeignete Wahl der Funktion $f(x)$ Konvergenz der Reihe erreicht und so eine effektive Lösung der vorgelegten Gleichung gewonnen werden kann.

c) Wichtige Klassen von Funktionen sind definiert durch ein *Additionstheorem*, das seinen Ausdruck in einer Funktionalgleichung findet. Dahin gehören die *Kreisfunktionen*: die Funktion *Cosinus* lässt sich bestimmen durch die Gleichung[114]):

$$(73) \qquad \varphi(x+a) + \varphi(x-a) = 2\varphi(x)\varphi(a),$$

mit Hinzufügung einer Nebenbedingung (vgl. Nr. **20**); die Funktion *Sinus* durch[174]):

$$(107) \qquad \varphi(2x)\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\varphi(x)\varphi\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

ebenfalls mit Nebenbedingungen; die Partialbruchzerlegung der Funktion *Kotangente* lässt sich ableiten aus ihrer Eigenschaft[175]):

$$(108) \quad \varphi(u)\varphi(v) + \varphi(v)\varphi(w) + \varphi(w)\varphi(u) = \pi^2 \quad \text{für} \quad u+v+w=0.$$

Die für diese Funktion benutzte Methode lässt sich[176]) auch anwenden zur Bestimmung der Partialbruchzerlegung der *Weierstrass*'schen Funktion $\zeta(x)$, die durch:

$$(109) \quad (\zeta(u)+\zeta(v)+\zeta(w))^2+\zeta'(u)+\zeta'(v)+\zeta'(w)=0 \quad \text{für} \quad u+v+w=0$$

definiert ist. *Weierstrass*[177]) hat seine Vorlesungen über elliptische Funktionen oft mit dem Satze begonnen: Eine analytische Funktion $\varphi(x)$ von der Art, dass:

---

172) Par. C. R. 1884, 1885, 1889; Ann. éc. norm. 1885; J. d. math. 1885; vgl. auch hierüber II B 4.

173) *P. Appell*, Par. C. R. 88 (1879), p 807, 1022.

174) *E. H. Moore*, Ann. of math. 9 (1895).

175) *F. Schottky*, J. f. Math. 110 (1892), p. 324.

176) Ebenda, p. 329.

177) *Weierstrass-Schwarz*, Formeln und Lehrsätze, Berlin 1893, p. 1; vgl. auch *Rausenberger*, Lehrbuch 170, p. 140. — Im übrigen vergleiche man wegen der Additionstheoreme der elliptischen und Abel'schen Funktionen die betr. Artikel von II B 3 und 5.

$$(110) \qquad F(\varphi(x), \varphi(y), \varphi(x+y)) = 0,$$

wo $F$ eine rationale Funktion bezeichnet, ist entweder algebraisch oder periodisch; *H. Petrini*[178]) beweist, dass dieser Satz auch noch gilt, wenn man $\varphi$ nicht als analytisch, sondern nur als in der Umgebung eines Punktes $x_0$ eindeutig und stetig voraussetzt.

Funktionalgleichungen können auch zur analytischen Fortsetzung einer zunächst nur in einem begrenzten Bereich definierten analytischen Funktion in einen grösseren Bereich dienen.

Sei noch die Funktionalgleichung erwähnt:

$$(111) \qquad \varphi(x+x', y+y', \ldots) \\ = \varphi(x, y, \ldots) + \varphi(x', y', \ldots) + f(x, y, \ldots; x', y', \ldots),$$

in der $f$ gegeben, $\varphi$ gesucht sei; ihre Lösung wird in der Form erhalten:

$$(112) \qquad \varphi(x, y) = c_1 x + c_2 y + \cdots + S,$$

wo $S$ eine Summe von Termen bedeutet, die man erhält, indem man in $f(x, y, \ldots; x', y', \ldots)$ der Reihe nach eine, zwei, ... Variabeln gleich Null setzt[180]).

*E. Picard*[181]) hat unendlich viele Systeme von $m$ eindeutigen analytischen Funktionen $f, \varphi, \ldots, \psi$ gefunden, die periodisch sind mit der Periode $\omega$, und die Funktionalgleichungen

$$(113) \qquad \begin{cases} f(x+\omega') = R_1(f(x), \varphi(x), \ldots, \psi(x)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(x+\omega') = R_m(f(x), \varphi(x), \ldots, \psi(x)) \end{cases}$$

befriedigen; hier ist $\omega : \omega'$ nicht reell, und $R_1, R_2, \ldots, R_m$ definiert eine birationale Substitution über $m$ Buchstaben. Eine geometrische Frage führt später *Picard*[182]) zur Betrachtung des Systems von Funktionalgleichungen

$$(114) \qquad \begin{cases} f(ax, by, \ldots, lz) = R_1(f, \varphi, \ldots, \psi) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(ax, by, \ldots, lz) = R_m(f, \varphi, \ldots, \psi); \end{cases}$$

das System kann durch in der Umgebung von $x = y = \cdots = z = 0$ reguläre und übrigens meromorphe Funktionen befriedigt werden. In beiden Fällen ist die Lösung durch successive Approximationen erhalten.

---

178) Stockh. Forhandl. 1901, p. 297.

179) Vgl. II B 1, Nr. 16.

180) *F. Severi*, Torino Atti 36 (1901), p. 76. *Severi* wendet diese Auflösung auf eine Frage der abzählenden Geometrie an.

181) Par. C. R. 117 (1893), p. 472, 603.

182) Par. C. *R.* 139 (1904), p. 6.

Endlich sei erwähnt, das *F. Pietzker*[183]) sich mit den allgemeinsten Verbindungen, die assoziativen Charakter haben und mit den sich daraus ergebenden Funktionalgleichungen beschäftigt.

d) Nur hingewiesen sei auf die Funktionalgleichung:

$$(115)\qquad \varphi(x+1)-\varphi(x)=G(x),$$

in der $G(x)$ eine ganze Funktion bedeutet[184]); dann auf die zur Definition der $\Gamma$-Funktion analogen Gleichungen:

$$(116)\qquad \varphi(x+1)-r(x)\varphi(x)=s(x),$$

in denen $r(x)$ und $s(x)$ rationale Funktionen bedeuten[185]); denn sie gehören in die Differenzenrechnung. Eine Verallgemeinerung dieser Differenzengleichungen bilden die Gleichungen der Form:

$$(117)\qquad \sum_\nu h_\nu \varphi(x+a_\nu)=f(x),$$

in der $f$ eine gegebene Funktion bezeichnet[186]); sie führen auf lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung (Nr. **14**) und lassen sich mit Hilfe der Transformation von *Laplace* (Nr. **16**) formell, unter geeigneten Voraussetzungen über die Funktion $f(x)$ auch effektiv, durch ein bestimmtes Integral lösen. Die $h_\nu$ können dabei Konstante oder rationale Funktionen von $x$ sein.

e) *O. Hölder*[187]) hat bewiesen, dass die $\Gamma$-Funktion, die die Funktionalgleichung

$$(118)\qquad f(x+1)=xf(x)$$

befriedigt, deswegen keiner algebraischen Differentialgleichung genügen kann; sie ist, nach *E. H. Moore*[188]), transcendental-transcendent. Ferner beweist *H. Tietzke*[189]), dass eine analytische Funktion, die eine Funktionalgleichung

$$(119)\qquad f(x)f(x+1)=f(x)+r(x),$$

die keine rationale Lösung hat, und wo $r(x)$ im Unendlich verschwindet, befriedigt, auch transcendental-transcendent ist. *Moore*[188])

183) Beiträge zur Funktionenlehre, Leipzig 1892.

184) *C. Guichard*, Ann. éc. norm. (3) 4 (1887), p. 361; *A. Hurwitz*, Acta math. 20 (1897), p. 285.

185) Namentlich *Hj. Mellin*, Acta math. 3 (1883), p. 322; 8 (1886), p. 37; 25 (1902), p. 139.

186) *G. H. Halphen*, Par. C. R. 93 (1881), p. 781; *S. Pincherle*, Bologna Mem. (4) 5 (1888) (zwei Abhandlungen, die erste betrifft den Fall, dass die Koeffizienten $h_\nu$ konstant, die zweite den, dass sie rationale Funktionen von $x$ sind); Rend. del circ. mat. di Palermo 18 (1904), p. 273.

187) Math. Ann. 28 (1886), p. 1.

188) Ibid. 48 (1897), p. 70.

189) Monatsh. Math. 16 (1905), p. 329.

hatte schon ein sehr allgemeines Theorem gegeben über transcendentale Transcendenz analytischer Funktionen, die einer Funktionalgleichung

$$f(G(x)) = Hf(x))$$

genügen, neben Bedingungen für $G$ und $H$.

**28. Integralgleichungen erster Art (Umkehrung der bestimmten Integrale); Allgemeines.** Das Problem der *Umkehrung der bestimmten Integrale* hat zum Gegenstand die Auflösung der Funktionalgleichung[190])

$$(120) \qquad \int_{(l)} \alpha(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x)$$

nach der unbekannten Funktion $\varphi(y)$; $f(x)$ ist eine gegebene Funktion, ebenso $\alpha(x, y)$; die letztere heisst *charakteristische Funktion* oder *Kern*. Diese Funktionen können analytisch sein oder nicht; die Integrationsgrenzen können reell sein oder $l$ kann eine offene oder geschlossene, endliche oder unendliche Linie in der Ebene der Variabeln $y$ bedeuten. Die Wichtigkeit des Problems (120) liegt einmal in seinen zahlreichen Anwendungen in der mathematischen Physik, dann darin, dass es äquivalent ist mit dem Problem der Entwicklung der gegebenen Funktion $f(x)$ in eine Reihe nach gegebenen Funktionen $\varpi_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; die charakteristische Funktion muss dann so gewählt werden, dass sie längs des Integrationsweges $l$ eine gleichmässig konvergente Entwicklung

$$(121) \qquad \alpha(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(y)\, \varpi_n(x)$$

zulässt, und die Bestimmung der Koeffizienten der Entwicklung von $f(x)$ ist mit der Bestimmung der Funktion $\varphi(y)$ äquivalent[191]).

Die Formel (120) ist eine Funktionalgleichung im engeren Sinne des Wortes, wenn $f(x)$ eine gegebene Funktion ist; ist $f$ innerhalb eines gewissen Funktionalbereiches willkürlich, so ist diese Formel die Definition der zu:

$$(46) \qquad A(\varphi) = \int_{(l)} \alpha(x, y)\, \varphi(y)\, dy$$

inversen Operation $A^{-1}$. Für diese Auffassung fällt das Problem der Umkehrung der bestimmten Integrale zusammen mit dem der Auf-

190) Für die Gleichung (112) hat *I. Fredholm* den Namen „*Abel'sche Funktionalgleichung*" vorgeschlagen, *D. Hilbert* nennt sie „*Integralgleichung erster Art*". Der Name Integralgleichung geht auf *P. du Bois-Reymond*, J. f. Math. 103 (1888), p. 228, zurück.

191) *U. Dini*, Ann. univ. Tosc. 17 (1880).

suchung der Inversen einer distributiven Operation, die in der Gestalt eines bestimmten Integrals gegeben ist (Nr. **15**). Das so formulierte Problem zerfällt in zwei: einmal handelt es sich um die formelle Bestimmung des Ausdrucks der Operation $A^{-1}$, im allgemeinen ebenfalls in der Gestalt eines bestimmten Integrals — was mit der Bestimmung von dessen charakteristischer Funktion äquivalent ist; dann muss festgestellt werden, in welchem Funktionalbereich für $f(x)$ diese Operation $A^{-1}$ Bedeutung hat. Die Frage kommt so zurück auf die Bestimmung einer Funktion $\beta(y, t)$ und eines Integrationsweges $l'$ von der Art, dass in einem passend gewählten Funktionalbereich für $f(x)$ die Gleichung gilt:

$$\int_{(l)}\int_{(l')} \alpha(x,y)\,\beta(y,t)\,f(t)\,dt\,dy = f(x). \tag{122}$$

Hat man mit analytischen Funktionen zu thun und sind die Voraussetzungen der *Cauchy*'schen Integralformel (II B 1, Nr. **4**) erfüllt, so reduziert sich das Problem noch auf die Bestimmung einer Funktion $\beta$ von der Art, dass die Gleichung gilt:

$$\int_{(l)} \alpha(x,y)\,\beta(y,t)\,dy = \frac{1}{t-x}. \tag{123}$$

Endlich kann man noch zwei Fälle des Problems (120) unterscheiden, je nachdem der Integrationsweg fest, d. h. von $x$ unabhängig ist (Nr. **29**) oder nicht (Nr. **30**).

**29. Umkehrung bestimmter Integrale mit festen Grenzen.** Für den Fall fester Grenzen ist das Problem (120) oder was dasselbe ist, das der Bestimmung der Funktionen $\beta(y, t)$ im allgemeinen nicht gelöst; doch kennt man die Lösung für eine Anzahl spezieller Fälle. Zunächst den Fall $\alpha(x, y) = e^{xy}$, den *N. H. Abel*[192]) behandelt hat; er findet, dass in besondern Fällen die Umkehrung durch ein Integral derselben Form geschieht[193]):

$$\varphi(y) = \int e^{-xy} f(x)\,dx.$$

Das *Fourier'sche Integral*[194]) giebt dieselbe Umkehrung in der Gestalt (122). Das Inversionsproblem lässt sich auch in dem Falle

192) Oeuvres 2, p. 69.

193) Das ist ein anderer Ausdruck für die in Nr. **16** schon zitierte Bemerkung, dass die Umkehrung einer *Laplace*'schen Transformation wieder eine *Laplace*'sche Transformation ist.

194) *J. Fourier,* Théorie analytique de la chaleur, Paris 1822, Nr. 342, p. 533; Nr. 360, p. 546 (Oeuvres 1, p. 387, 406); *C. Jordan,* Cours d'analyse 2, Paris 1894, p. 235. Für komplexe Variable vgl. *L. Kronecker,* Vorlesungen über Integrale, herausg. von *E. Netto,* Leipz. 1894, p. 222.

lösen, dass die charakteristische Funktion $y^{-x}$ ist. Dieser Fall, der übrigens von dem eben besprochenen sich nur durch Einführung einer neuen Variabeln unterscheidet[195]), ist für reelle Variabeln implicite von *P. S. de Laplace*[196]), für komplexe von *B. Riemann*[197]) behandelt worden; letzterer giebt als Lösung von:

$$f(x) = \int_0^\infty \varphi(y)\, y^{-x-1} dy \tag{124}$$

den Ausdruck:

$$2\pi i \varphi(y) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(x)\, y^x dx. \tag{125}$$

Dieselbe Umkehrung findet sich schon bei *R. Murphy*[198]), mit Anwendungen auf Fragen der mathematischen Physik, und später bei *J. C. Kluyver* und *N. Nielsen*[88]), die sie auf die Entwicklung einer gegebenen Funktion in eine nach Faktoriellen fortschreitende Reihe anwenden.

Einen speziellen Fall, der sich mit Hilfe elementarer Funktionen erledigen lässt, behandelt *H. Laurent*[199]), nämlich die Auflösung des Gleichungssystems:

$$\int_a^b \varphi(y)\, y^k dy = g_k \tag{126}$$

für den Fall, dass man dem $k$ nur eine endliche Zahl von Werten $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ beilegt. Dagegen bietet dieses Problem grosse Schwierigkeiten, aber auch viel mehr Interesse, wenn $k$ die Werte $0, 1, 2, \ldots, \infty$ durchläuft; es ist im allgemeinen nicht gelöst, aber wichtige Spezialfälle sind behandelt. Z. B. wenn $a = 0$, $b = \infty$ und die Zahlen $g_h$ alle positiv sind, ist die Funktion $\varphi(y)$ eindeutig bestimmt, wenn die aus den $g_h$ durch die Gleichungen:

$$a_n' = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \cdots & g_{n-1} \\ g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n-1} & g_{n-2} & \cdots & g_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad b_n = \begin{vmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_2 & g_3 & \cdots & g_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_n & g_{n+1} & \cdots & g_{2n-1} \end{vmatrix}, \tag{127}$$

$$a_{2n} = \frac{a_n'^2}{b_n b_{n-1}}, \quad a_{2n+1} = \frac{b_n^2}{a_n' a_{n+1}'} \tag{128}$$

abgeleiteten Zahlen $a_n$ positiv und so beschaffen sind, dass die Reihe

---

195) Es handelt sich dann um die in Nr. **16** mit $B$ bezeichnete Operation.

196) Vgl. Fussnote 74).

197) Über die Anzahl der Primzahlen, usw., Werke 1876, p. 140.

198) Cambr. Trans. 4 (1833), p. 358.

199) J. de math. (3) 4 (1878), p. 225.

$\sum a_n$ divergiert. Diese Theorie (*Problème des moments*), die man *Stieltjes*[200]) verdankt, ist neuerdings von *E. Borel*[201]) wieder aufgenommen und verallgemeinert worden.

Andere Fälle, in welchen das Problem (120) sich lösen lässt, sind von *S. Pincherle*[202]) behandelt worden. Zunächst der, dass $\alpha(x, y)$ eine Funktion der Differenz $y - x$ ist; in diesem Fall ist die Operation $A$ mit der Differentiation vertauschbar, und dasselbe gilt also auch von der inversen Operation $A^{-1}$, mit anderen Worten, $\beta(y, t)$ ist ebenfalls eine Funktion der Differenz $y - t$, und diese Funktion lässt sich bestimmen. In diesem Falle fällt das Problem (120) zusammen mit dem der Entwicklung von $f(x)$ nach den Ableitungen einer und derselben Funktion oder nach *Appell*'schen Polynomen (Nr. **17**b), je nachdem $\alpha(x, y)$ nach fallenden oder steigenden Potenzen von $y - x$ geordnet ist.

Dann der Fall[203]), dass die charakteristische Funktion einer Gleichung der Form genügt:

$$(129)\quad (a_m + b_m x)\frac{\partial^m \alpha}{\partial y^m} + (a_{m-1} + b_{m-1}x)\frac{\partial^{m-1}\alpha}{\partial y^{m-1}} + \cdots + (a_0 + b_0 x)\,\alpha = 0,$$

in der $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ gegebene Funktionen von $y$ bedeuten. In diesem Falle wird die Funktion $\beta(y, t)$ der Operation $A^{-1}$ folgendermassen erhalten: man multipliziere in (129) beiderseits mit $\sigma(t, y)$ und integriere längs $l$; integriert man partiell, bestimmt $\sigma$ als ein Integral der Gleichung:

$$(130)\qquad \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{\partial^k}{\partial y^k}\{(a_k + b_k t)\,\sigma(t, y)\} = k(t)$$

und wählt $k(t)$ und die in $\sigma$ noch willkürlichen Grössen so, dass die vor das Integralzeichen getretenen Bestandteile sich wegheben, so erhält man durch Subtraktion von (129) und (130) den Ausdruck (123) von $(t - x)^{-1}$. Damit ist das Problem gelöst, zugleich auch das der Entwicklung einer gegebenen Funktion nach Polynomen $\varpi_n(x)$, die einer linearen Rekursionsformel mit in $x$ linearen Koeffizienten genügen; und aus den Eigenschaften der Integrale von (129) ergiebt sich der Gültigkeitsbereich dieser Lösung. Als Spezialfall erhält man

200) Toulouse Fac. ann. 8 (1894), p. 793; 9 (1895), p. A 24.

201) Leçons sur les séries divergentes, Paris 1901, p. 61.

202) Acta math. 10 (1887), p. 153; Bologna Mem. (4) 7 (1886).

203) Ibid. 16 (1892), p. 341; Math. papers of the intern. Congress, Chicago 1896, p. 278.

die Konvergenzbedingungen der von *E. Heine*[204]) gegebenen Entwicklung einer analytischen Funktion nach *Legendre*'schen Polynomen.

Endlich ist das Problem (120) auch noch gelöst[205]) in dem Falle, dass die charakteristische Funktion einer partiellen Differentialgleichung der Form genügt:

$$\sum_{k=0}^{m}\left\{a_k(x)\frac{\partial^k\alpha}{\partial x^k}+b_k(y)\frac{\partial^k\alpha}{\partial y^k}\right\}=0. \tag{131}$$

**30. Umkehrung bestimmter Integrale mit veränderlichen Grenzen.** Der Fall des Problems (120), dass mindestens eine der Integrationsgrenzen mit $x$ veränderlich ist, hat sich zuerst *N. H. Abel*[206]) bei der Lösung einer Aufgabe über brachistochrone Bewegung dargeboten: er erhält die Umkehrung des Integrals:

$$f(x)=\int_0^x\frac{\varphi'(y)\,dy}{(y-x)^n}, \qquad (n<1) \tag{132}$$

durch die Formel:

$$\varphi(y)=\frac{\sin n\pi}{\pi}\,y^n\int_0^1\frac{f(ty)\,dt}{(t-1)^n}. \tag{133}$$

Zahlreiche Autoren, von *J. Liouville*[35]) bis *E. Beltrami*[207]), haben sich mit dieser Inversion beschäftigt und davon Anwendungen auf Fragen der mathematischen Physik und auf die Koeffizientenbestimmung der Entwicklung einer Funktion nach *Bessel*'schen und anderen Funktionen[208]) gegeben.

Ein allgemeinerer Fall ist von *N. Sonine*[209]) behandelt worden, nämlich der, dass die charakteristische Funktion von der Form

---

204) Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl., Berlin 1878; vgl. II B 1, Nr. 38.

205) *T. Levi-Civita,* Lomb. Rend. (2) 28 (1895), p. 533.

206) J. f. Math. 1 (1826), p. 153 (Oeuvres 1, p. 97 (vgl. auch p. 11)). *Abel* hatte die Formel schon 1823 gegeben; er war allem Anschein nach im Besitz der Lösung des Problems auch für den allgemeinen Fall. Vgl. die Bibliographie des Problems in der historischen Einleitung der Abhandlung von *V. Volterra,* Ann. di mat. (2) 25 (1897), p. 139.

207) Lomb. Rend. (2) 13 (1880), p. 327; Bologna Mem. (4) 1 (1879); 4 (1882); s. auch *E. Cesàro,* Bulletin de l'Acad. de Belgique 1902. In derselben Arbeitsrichtung liegt auch die Untersuchung von *E. Cesàro* über ein Problem der Wärmeleitung, Brux. Bull. 1902, p. 387.

208) *O. Schlömilch,* Zeitschr. Math. Phys. 2 (1857), p. 156; *Beltrami*[207]); *Dini*[191]).

209) Acta math. 4 (1884), p. 171.

$\alpha(x-y)$ ist; hier, wie für die Umkehrung der Integrale mit festen Grenzen (Nr. 29) ist die charakteristische Funktion der inversen Operation von derselben Form. *Sonine* beschränkt sich dabei auf analytische Funktionen; die Ausdehnung seiner Lösung auf nicht analytische Funktionen giebt *T. Levi-Civita*[210]).

Für den allgemeinen Fall ganz beliebiger charakteristischer Funktionen, die nur endlich und integrabel sein und eine integrable Ableitung nach $x$ haben müssen, ist das Problem von *V. Volterra* gelöst worden[211]); die Lösung beruht auf dem folgenden Prinzip: Ist $\sigma_0(x, y)$ eine endliche und integrable Funktion und berechnet man

$$(134)\qquad \sigma_i(x, y) = \int_x^y \sigma_{i-j}(x, t)\,\sigma_{j-1}(t, y)\,dt, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots; \\ j = 1, 2, \ldots, i \end{pmatrix}$$

so ist $\sigma_i$ vom Index $j$ unabhängig, und die Reihe:

$$(135)\qquad s_0(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i(x, y)$$

konvergiert gleichmässig und stellt eine integrable Funktion dar; verfährt man mit $s_0$ ebenso wie zuerst mit $\sigma_0$, so kommt man auf die ursprüngliche Funktion $\sigma_0$ zurück. Mit Hilfe dieses Prinzips erhält *Volterra* die Formel für die Lösung der Funktionalgleichung

$$(136)\qquad f(x) - f(a) = \int_a^x \varphi(y)\,\alpha(x, y)\,dy,$$

wenn $\alpha(x, y)$ für $x = y$ nicht null ist; und diese Lösung ist eindeutig bestimmt. Wenn $\alpha(x, y) = 0$ ist für $x = y$, lässt sich das Problem ebenfalls lösen, aber es kann dann unendlich viele Lösungen geben[212]). *E. Holmgren*[213]) zeigt, dass diese Lösungen eine lineare Mannigfaltigkeit bilden; was mit den Prinzipien der Umkehrung einer distributiven Operation (Nr. 5) in Übereinstimmung ist. —

---

210) Torino Atti 31 (1895), p. 25.

211) Linc. Transunti (3) 8 (1884), p. 315; Rend. (5) 5 (1896), p. 177; Torino Atti 31 (1896), p. 231, 286, 389, 429; Ann. di mat. (2) 25 (1897), p. 139. Der Verfasser erläutert die Möglichkeit der Lösung des Problems für diesen Fall durch die Analogie mit einem System linearer Gleichungen, in dem alle Elemente der Determinante auf der einen Seite der Hauptdiagonale null sind. Dadurch tritt eine Vereinfachung ein, die im Falle der Umkehrung bestimmter Integrale mit *festen* Grenzen (Nr. 29) nicht statt hat; wie weit in diesem Falle die Beziehung zwischen der Theorie der distributiven Operationen und der der unendlichen Determinanten (I A 3, Nr. 58) reicht, ist in Nr. 31 d) klargestellt.

212) Torino Atti 31 (1896), p. 389.

213) Ebenda 35 (1900), p. 392.

*Volterra* hat seine Methode auch auf Fälle angewendet, in welchen beide Grenzen des Integrals mit $x$ veränderlich sind[214]); z. B. erhält er die Lösung der Gleichung:

$$(137)\qquad f(x)-f(0)=\int_{ax}^{x}\varphi(y)\,\alpha(x,y)\,dy,\qquad (a>x>0).$$

Ausserdem giebt er die Lösung des Gleichungssystems[215]):

$$(138)\quad f_i(x)-f_i(a)=\int_a^x\sum_{h=1}^{n}\varphi_h(y)\,\alpha_{ih}(x,y)\,dy,\qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

für den Fall, dass die Determinante $|\alpha_{ih}(x,y)|$ von Null verschieden ist.

### 31. Integralgleichungen zweiter Art.

a) Ein besonderes Interesse knüpft sich neuerdings an die Gleichungen der Form:

$$(139)\qquad \varphi(x)-k\int_{(l)}\varphi(t)\,\alpha(x,t)\,dt=f(x),$$

die *D. Hilbert*[216]) Integralgleichungen zweiter Art nennt[217]), da sich Lösungen von Randwertaufgaben der mathematischen Physik auf sie zurückführen lassen. Diesen Zusammenhang hat *C. Neumann*[218]) bei Gelegenheit eines Problems betreffend das Potential einer Doppelschicht bemerkt, auf das dann *H. Poincaré*[219]) das „*Dirichlet*'sche Problem" zurückgeführt hat. *Neumann*'s Lösung einer Gleichung der Form (139) lässt sich symbolisch folgendermassen darstellen: Schreibt man die Gleichung:

$$(140)\qquad \varphi-kA(\varphi)=f,$$

so ist diese Lösung formal gegeben durch

---

214) Ann. di mat. (2) 25 (1897), p. 156.

215) Rend. Lincei (5) 5 (1896), p. 177.

216) Gött. Nachr. 1904, p. 49.

217) Die Lösung der Gleichung (120) scheint viel schwieriger zu sein, als die der Gleichung (139); die Bemerkung *Fredholm*'s, dass die erstere aus der letzteren erhalten werden könne, indem man nur $k=\infty$ zu setzen brauche, hat keinen praktischen Wert, da die letztere im allgemeinen eine „meromorphe" Funktion von $k$ ist und also für $k=\infty$ eine wesentliche Singularität aufweist. — Übrigens beziehen sich die folgenden Angaben hauptsächlich auf den Fall reeller $x$ und $t$, die dann unbeschadet der Allgemeinheit auf das Intervall $(0\ldots1)$ beschränkt werden können.

218) Leipz. Ber. 1870; Untersuchungen über das logarithmische u. *Newton*'sche Potential, Leipzig 1877, Kap. 5; Leipz. Abhandl. 13 (1887), p. 707.

219) Palermo Rend. 8 (1894), p. 57; Acta math. 20 (1897), p. 59—142.

(141) $$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} k^n A^n(f);$$

und wenn diese Reihe für geeignete Werte von $k$ konvergiert, so giebt sie für diese Werte die Lösung von (139). Aber im allgemeinen findet Konvergenz nur für hinlänglich kleine $k$ statt: *Poincaré*[220]) hat erst vorhergesehen, und *Fredholm* bewiesen, dass die Lösung von (139) eine *meromorphe* Funktion von $k$ — Quotient zweier ganzer transzendenter Funktionen — ist.

b) In einigen speziellen Fällen konvergiert allerdings die Reihe (141) für alle $k$ und stellt also eine ganze Funktion von $k$ vor: insbesondere, in dem Fall, wo die Variabeln reell sind und die Integrationsgrenzen in (139) von $x$ abhängen. Dieser Fall lässt sich zurückführen auf die Lösung der Gleichung:

(142) $$\varphi(x) - k\int_0^x \varphi(t)\,\alpha(x,t)\,dt = f(x), \qquad (0 \leqq x \leqq 1);$$

sie ist zuerst von *J. Le Roux*[221]) mit Hilfe der Methode der successiven Approximationen gelöst und fast gleichzeitig von *V. Volterra*[222]) — auch für den Fall, dass $\alpha(x, t)$ Singularitäten aufweist — diskutiert worden, der durch seine Untersuchungen über die Verallgemeinerung des *Abel*'schen Problems (Nr. **30**) auf sie geführt worden war. Bei *Volterra* tritt die Wichtigkeit der Funktion

(143) $$h(x) = \alpha(x, x)$$

hervor, die hier dieselbe Rolle spielt, wie die Determinante bei Systemen linearer Gleichungen; er zeigt, dass es nur eine Lösung giebt, wenn $h(x)$ im Integrationsintervall von Null verschieden ist, und dass die Lösungen, wenn $h(x)$ Null wird, von einer algebraischen Gleichung abhängen. Über die letztere fügt dann *E. Holmgren*[223]) noch einige Bemerkungen bei. Die Lösung von (142) durch successive Approximationen ist von *E. Picard*[224]) noch einfacher dargestellt worden; mit derselben Methode und mit Gebrauch von Hülfsfunktionen, die Integrale der linearen Differentialgleichung

$$f'(t) = \alpha(x, t)\,\varphi(t) + \cdots + \alpha_m(x, t)\,\frac{\partial^m \varphi}{\partial t^m}$$

sind, löst *P. Burgatti*[225]) die allgemeinere Gleichung:

---

220 Acta Math. 20 (1897), p. 118 u. f.

221) Ann. éc. norm. (3) 12 (1895), p. 244.

222) Torino Atti 31 (1896), p. 231, 286, 389, 429; Linc. Rend. (5) 5 (1896), p. 177; Ann. di mat. (2) 25 (1897), p. 139. Vgl. übrigens Nr. **30**.

223) Torino Atti 35 (1900), p. 384.

224) Paris C. R. 139 (1904), p. 245.

225) Linc. Rend. (5) 12 (1903), p. 443, 596.

$$(144)\quad f(x) = \varphi(x) + \int_a^x \left(\alpha(x,t)\varphi(t) + \alpha_1(x,t)\frac{d\varphi}{dt} + \cdots + a_m(x,t)\frac{d^m\varphi}{dt^m}\right)dt$$

nach der unbekannten Funktion $\varphi$ auf; *G. Fubini*[226]) löst dieselbe Gleichung mit einer anderen Methode, die sich auf die allgemeine Theorie der distributiven Operationen gründet.

c) Sind die Grenzen des Integrals von $x$ unabhängig, so lässt sich für reelle Variable die Gleichung (139) auf die Form bringen:

$$(145)\qquad \varphi(x) - k\int_0^1 \varphi(t)\,\alpha(x,t)\,dt = f(x);$$

die Funktionen $f(x)$ und $\alpha(x,t)$ sollen dabei im Intervall $(0\ldots 1)$ reell, endlich und stetig sein[227]). Auf Grund der Bemerkung, dass die meromorphe Lösung dieser Gleichung Quotient zweier ganzer transzendenter Funktionen ist, gelingt es *I. Fredholm*[228]) diese Transzendenten direkt zu erhalten. Er giebt die Lösung, wenn $\alpha(x,t)(x-t)^\nu$ für ein $\nu < 1$ endlich und integrabel ist, in der Form:

$$(146)\qquad \varphi(x) = f(x) + k\int_0^1 \frac{\Delta(k,x,t)}{\delta(k)} f(t)\,dt;$$

dabei ist:

$$(147)\qquad \delta(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k^n}{n!} \int_0^{1\,(n)} \alpha\begin{pmatrix} t_1 \ldots t_n \\ t_1 \ldots t_n \end{pmatrix} dt_1 \ldots dt_n,$$

$$(148)\quad \Delta(k,x,t) = \alpha(x,t) - k\int_0^1 \alpha\begin{pmatrix} x\,t_1 \\ t\,t_1 \end{pmatrix} dt_1 + \frac{k^2}{1\cdot 2}\int_0^1\!\!\int_0^1 \alpha\begin{pmatrix} x\,t_1\,t_2 \\ t\,t_1\,t_2 \end{pmatrix} dt_1\,dt_2 + \cdots,$$

und:

$$(149)\qquad \alpha\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ t_1 \ldots t_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha(x_1,t_1) & \alpha(x_1,t_2) & \ldots & \alpha(x_1,t_n) \\ \alpha(x_2,t_1) & \alpha(x_2,t_2) & \ldots & \alpha(x_2,t_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha(x_n,t_1) & \alpha(x_n,t_2) & \ldots & \alpha(x_n,t_n) \end{vmatrix}.$$

Der Nenner $\delta(k)$, der hier die Rolle der Determinante bei Systemen linearer Gleichungen spielt, ist von der Funktion $f(x)$ unabhängig. Die Konvergenz der Reihen für $\delta(k)$ und $\Delta(k,x,t)$ wird auf Grund

---

226) Acc. Napoli Rend. febbraio 1904.

227) *Fredholm* bemerkt Acta math. 27 (1903), p. 366, dass man die Gleichung (142) als speziellen Fall von (145) ansehen könne; man brauche nur anzunehmen, dass $\alpha(x,t)$ für $t > x$ gleich Null sei.

228) Stockh. Öfvers. 57 (1900), p. 39; Par. C. R. 134 (1902), p. 1561; Acta math. 27 (1903), p. 365.

eines Lemmas von *J. Hadamard*[229]) bewiesen. Für Werte von $k$, für die $\delta(k) \neq 0$ ist, giebt es nur diese eine Lösung; für eine $m$-fache Wurzel $\bar{k}$ von $k = 0$ giebt es unendlich viele Lösungen, die sich linear aus $m$ von ihnen ableiten. Sie lassen sich durch Quotienten von Reihen darstellen, die zu $\Delta(k, x, t)$ analog sind und von *Fredholm* als *Minoren* von $\delta(k)$ bezeichnet werden. — *G. Fubini*[230]) bedient sich der Methode von *Fredholm* zur Lösung von Funktionalgleichungen der Form (144), in denen die Grenzen der Quadratur von $x$ unabhängig sind.

Im komplexen Gebiet treten ganz andere Verhältnisse ein; in der That geht aus Bemerkungen von *S. Pincherle*[231]) hervor, dass in manchen Fällen die Gleichung

$$\varphi(x) = k\int_{(c)} \alpha(x, t)\,\varphi(t)\,dt \tag{150}$$

für jeden Wert von $k$ eine Lösung, und also die entsprechende Gleichung (139) für jeden Wert von $k$ eine unendliche lineare Mannigfaltigkeit von Lösungen haben kann.

d) *Fredholm*'s Methode hat ihre Wurzel in einem elementaren algebraischen Problem[232]). *O. D. Kellogg*[233]) teilt auf Anregung von *D. Hilbert* das Intervall von 0 bis 1 in $n$ gleiche Teile, substituiert $f\left(\frac{h}{n}\right)$ für $f(x)$, $\varphi\left(\frac{i}{n}\right)$ für $\varphi(\alpha)$, $\alpha\left(\frac{h}{n}, \frac{i}{n}\right)$ für $\alpha(x, t)$ und ersetzt das Integral durch eine endliche Summe. So erhält er ein gewöhnliches System von $n$ linearen Gleichungen mit $n$ Unbekannten, das sich durch Determinanten lösen lässt: der Übergang zu $n = \infty$ lässt die Form der *Fredholm*'schen Lösung augenfällig werden. Die strenge Durchführung des Grenzüberganges von dem algebraischen zum transzendenten Problem giebt *Hilbert* selbst[234]), speziell für den besonders interessanten Fall, dass die Funktion $\alpha(x, t)$, die er Kern nennt, in $x$ und $t$ symmetrisch ist. Mit Hilfe des Grenzüberganges und nach vorgängigem Beweis der Konvergenz der Entwicklungen $\delta(k)$ und $\Delta(k, x, t)$ erhält er die Formel (146).

Das in der Gleichung (139) enthaltene Problem — $\alpha(x, t)$ symmetrisch — lässt sich auch als transzendente Verallgemeinerung des

229) Darb. Bull. (2) 17 1893, p. 240.

230) Catania Accad. Gioenia boll. 1905, fasc. 83.

231) Math. Ann. 49 (1897), p. 325.

232) Er sagt (Par. C. R., 27 janvier 1902): „la théorie de l'équation (139) est un cas limite de la théorie des équations linéaires". Dasselbe hatte *Volterra*, Torino Atti 31 (1896), p. 235 für den Fall b) schon bemerkt; vgl. Fussnote 211)

233) Diss. Gött. 1902.

234) Gött. Nachr. 1904, p. 57.

Problems der orthogonalen Transformation einer quadratischen Form in eine Summe von Quadraten (I B 2, Nr. 3) ansehen[235]). Für diesen Gesichtspunkt haben fundamentale Wichtigkeit die (nach steigendem absoluten Betrag geordneten) Wurzeln $k_1, k_2, \ldots$ der Gleichung $\delta(x) = 0$; *Hilbert* nennt sie *„die zum Kern $\alpha(x, t)$ gehörigen Eigenwerte“*. Jeder einfachen Wurzel $k_i$ entspricht eine bis auf einen konstanten Faktor bestimmte Lösung der Funktionalgleichung:

$$(150) \qquad \varphi(x) = k \int_0^1 \alpha(x, t)\, \varphi(t)\, dt,$$

jeder $m$-fachen Wurzel $m$ linear-unabhängige Lösungen, *„die zu dem Eigenwerte $k_i$ gehörigen Eigenfunktionen“*. In der allgemeinen Theorie der distributiven Operationen nach *Pincherle* erscheinen diese Eigenfunktionen als *Invarianten*[236]) der durch die Quadratur gegebenen Operation $A(\varphi)$. Ist der Kern symmetrisch, so sind die Eigenwerte alle reell[237]); zu jedem Kern existiert mindestens ein Eigenwert und folglich auch mindestens eine Eigenfunktion[238]). Durch geeignete Wahl des noch willkürlichen konstanten Faktors, bezw. durch geeignete Auswahl unter den zu einem mehrfachen Eigenwert gehörenden lassen sich die Eigenfunktionen „normieren“; bezeichnet man dann mit $\psi_i(x)$ die $i^{\text{te}}$ normierte Eigenfunktion, so gelten die Relationen:

$$(151) \qquad \int_0^1 \psi_i(x)\, \psi_j(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i \gtrless j, \\ 1 & \;\text{„}\; i = j. \end{cases}$$

Damit gelangt man zu *Hilbert*'s fundamentaler Formel[239]):

$$(152) \quad \int_0^1\!\!\int_0^1 \alpha(x,t)\, p(x)\, q(t)\, dx\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} \int_0^1 \psi(x)\, p(x)\, dx \int_0^1 \psi(x)\, q(x)\, dx,$$

in der $p(x)$, $q(x)$ beliebige stetige Funktionen bedeuten können; die Reihe rechts konvergiert unbedingt und gleichmässig für alle Funktionen $p(x)$, $q(x)$, für die die Integrale:

$$(153) \qquad \int_0^1 p^2(x)\, dx, \quad \int_0^1 q^2(x)\, dx$$

eine endliche Grenze nicht überschreiten. Für $p(x) = q(x)$ erhält man die transzendente Verallgemeinerung der erwähnten Transformation der quadratischen Formen.

235) Ebenda, p. 62.

236) Vgl. *Pincherle* e *Amaldi*, p. 35.

237) *Hilbert*, Gött. Nachr. 1904, p. 63.

238) „Fundamentaltheorem“ nach *E. Schmidt*, Diss. Gött. 1905.

239) Gött. Nachr. 1904, p. 70.

Die Zahl der Wurzeln von $\delta(k)$ ist im allgemeinen unendlich[240]); sie ist dann und nur dann gleich einer endlichen Zahl $m$, wenn der Kern von der Form ist:

$$(154) \qquad \alpha(x, t) = \sum_{n=1}^{m} \varphi_n(x) \chi_n(t).$$

Die Bedingungen dafür, dass eine Funktion von zwei Variabeln sich auf diese Form bringen lässt, giebt *K. Stephanos*[241]). Für einen symmetrischen Kern ist $\varphi_n(x) = \chi_n(x)$.

Die zu einem Kern $\alpha(x, t)$ gehörigen Eigenfunktionen sind zugleich auch Eigenfunktionen der „iterierten Kerne"[242]):

$$(155) \qquad \alpha_\nu(x, t) = \int_0^1 \alpha(x, u) \alpha_{\nu-1}(u, t)\, du \qquad [\alpha_1(x, t) = \alpha(x, t)].$$

e) Die Eigenschaften (151) der „normierten Eigenfunktionen" führen zur Entwicklung einer im Intervall $(0 \ldots 1)$ willkürlich gegebenen stetigen Funktion in eine nach solchen Funktionen fortschreitende Reihe[243]). Will man bei solchen Entwicklungen auch den Fall mehrfacher Wurzeln von $\delta(k)$ mit einbeziehen, so ist es zweckmässig, ein *„vollständiges normiertes* Orthogonalsystem des Kernes $\alpha(x, t)$"[244]) einzuführen, d. h. ein System von Eigenfunktionen, die die Relationen (151) erfüllen und dabei so gewählt sind, dass jede beliebige Eigenfunktion sich linear, homogen und mit konstanten Koeffizienten durch eine endliche Anzahl von Funktionen des Systems ausdrücken lässt. „Sei dann $f(x)$ eine stetige Funktion, die sich auf die Form bringen lässt:

$$(156) \qquad f(x) = \int_0^1 \alpha(x, t)\, p(t)\, dt,$$

in der $p(t)$ eine stetige Funktion bedeutet; jede solche Funktion lässt sich entwickeln in eine absolut und gleichmässig konvergente Reihe der Form:

$$(157) \qquad f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \psi_\nu(x), \quad c_\nu = \int_0^1 \psi_\nu(t) f(t)\, dt,$$

wenn $\psi_1, \psi_2, \ldots$ die Funktionen eines vollständigen normierten Orthogonalsystems sind." Dieser Satz rührt von *Hilbert*[245]) her; eine

240) Ebenda, p. 72.

241) Palermo Rend. 18 (1904), p. 360.

242) *E. Schmidt,* Diss. Gött. § 6.

243) *Hilbert,* Gött. Nachr. 1904, p. 71.

244) *Schmidt,* Diss. Gött. § 5.

245) Gött. Nachr. 1904, p. 75.

von ihm noch beigefügte Stetigkeitsbedingung hat *E. Schmidt*[246]) als überflüssig erkannt. Der Kern heisst *geschlossen* (*Hilbert*), wenn der Gleichung:

$$\int_0^1 \alpha(x, t)\, \varphi(t)\, dt = 0 \tag{158}$$

durch keine stetige Funktion $\varphi(t)$ genügt werden kann; für einen solchen Kern gilt der Satz: Ist $f(x)$ stetig und konvergiert die Entwicklung:

$$\sum c_\nu \psi_\nu(x), \qquad c_\nu = \int_0^1 \psi_\nu(t) f(t)\, dt \tag{159}$$

gleichmässig, so stellt sie notwendig die Funktion $f(x)$ dar.

Den Fall eines unsymmetrischen Kerns führt *Schmidt*[247]) auf den eines symmetrischen durch die Bemerkung zurück, dass

$$\bar{\alpha}(x, t) = \int_0^1 \alpha(x, u)\, \alpha(t, u)\, du \tag{160}$$

eine symmetrische Funktion von $x$ und $t$ ist.

Auf die Verwandtschaft einiger der angeführten Sätze mit neuen Resultaten von *W. Stekloff*[248]) sei hingewiesen.

f) Die vorangehende Theorie erlaubt Fragen der Maxima und Minima von Doppelintegralen[249]):

$$J(\varphi) = \int_0^1\!\!\int_0^1 \alpha(x, t)\, \varphi(x)\, \varphi(t)\, dt\, dx \tag{161}$$

zu behandeln. Ist der Kern *definit*, d. h. ist das Integral (161) positiv für jede stetige Funktion $\varphi$, und ist:

$$\int_0^1 \varphi^2(x)\, dx = 1, \tag{162}$$

so hat das Integral $J$ kein Minimum; sein Maximum ist $k_1^{-1}$ und tritt für $\varphi(x) = \psi_1(x)$ ein; im Bereich derjenigen Funktionen $\varphi$, die ausserdem den Bedingungen:

$$\int_0^1 \varphi(x)\, \psi_n(x)\, dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, m-1) \tag{163}$$

genügen, ist das Maximum $k_m^{-1}$ und tritt für $\varphi(x) = \psi_m(x)$ ein.

---

246) Diss. Gött. § 9 u. Einleitung p. III.

247) Ebenda § 12.

248) Toulouse Fac. ann. (2) 6 (1905). Vgl. *Poincaré*, Acta 20 (1897), p. 118 u. f.

249) *Hilbert*, Gött. Nachr. 1904, p. 78.

g) Die bisher festgehaltene Bedingung, dass $\alpha(x, t)$ endlich und stetig sein soll, lässt sich durch eine weniger einschränkende ersetzen[250]). Ist $\alpha(x, t)$ längs einer Linie $x = \chi(t)$ der Ebene $(x, t)$ unstetig oder unendlich, doch so, dass

$$(x - \chi(t))^{\varrho}\, \alpha(x, t)$$

für ein $\varrho < \frac{1}{2}$ stetig bleibt, so bleiben die bisherigen Resultate gültig. Auch für die unter den Integralzeichen auftretenden Funktionen sind solche Singularitäten von der Ordnung $< \frac{1}{2}$ zulässig.

h) Wie schon erwähnt, reichen die auf die Gleichung (139) sich beziehenden Überlegungen nicht aus zur Auflösung der Gleichung (120), also zur Umkehrung eines bestimmten Integrals. Die Bemerkung, dass $f(x)$ notwendig eine rationale ganze Funktion wird, sobald $\alpha(x, t)$ eine solche Funktion $\alpha$ von $x$ ist, reicht schon aus, um erkennen zu lassen, dass in diesem Falle überhaupt die Natur von $f(x)$ von der von $\alpha(x, t)$ abhängt. Für Gleichungen dieser Art, die in der Potentialtheorie auftreten, sind die von *Kellogg*[251]) citierten Auflösungsformeln *Hilbert*'s zu erwähnen:

$$(164) \quad \begin{cases} \varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t) \operatorname{cotg} \pi(x-t)\, dt + \int_0^1 \varphi(t)\, dt, \\ f(x) = -\displaystyle\int_0^1 \varphi(t) \operatorname{cotg} \pi(x-t)\, dt + \int_0^1 f(t)\, dt, \end{cases}$$

in denen für die Integrale ihre Hauptwerte im Sinne von *Cauchy* zu nehmen sind; jede von ihnen ist die Auflösung der anderen. Übrigens sollen die Anwendungen der Theorie der Integralgleichungen auf gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, sowie auf die des Potentials und anderer Differentialgleichungen der mathematischen Physik in II A 12 b besprochen werden[252]); hier seien nur noch zwei Anwendungen auf funktionentheoretische Probleme erwähnt. *Hilbert*[253]) behandelt das Problem: In einem einfach zusammenhängenden, von einer Kurve $c$ begrenzten Bereich eine analytische Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ so zu bestimmen, dass der reelle und der imaginäre Bestandteil auf $c$ als Funktionen der Bogenlänge dieser Kurve eine Gleichung der Form erfüllen:

---

250) Ebenda Abschn. VI. Die einschlägigen Überlegungen von *Kellogg* (Diss.) sind (nach *Hilbert*, loc. cit., p. 84) nicht streng.

251) Diss. Gött. § 6.

252) Vgl. eine zweite Mitteilung *Hilbert*'s in Gött. Nachr. 1904, p. 213.

253) Heidelb. intern. Kongr. 1904, p. 231; einfacher und vollständiger Gött. Nachr. 1905, p. 307.

$$(165) \qquad a(s)u(s) + b(s)v(s) + c(s) = 0,$$

in der $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$ gegebene stetige und differentiierbare Funktionen bedeuten. *Kellogg*[254]) behandelt das *Riemann*'sche Problem: $n$ bis auf gegebene Punkte reguläre analytische Funktionen zu finden, die sich nach einer Gruppe linearer Substitutionen transformieren, wenn die Variable geschlossene Kurven in ihrer Ebene durchläuft.

i) Alle diese Sätze gelten mutatis mutandis auch für *Integralgleichungen zweiter Art mit mehreren Variablen*[255])

$$(166) \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) - k \int^{(n)} \varphi(t_1, \dots, t_n)\, \alpha(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)\, dt_1 \dots dt_n = f(x_1, \dots, x_n).$$

**32. Symbolische Gleichungen.** Ebenso wie eine *Funktion* durch eine oder mehrere Eigenschaften bestimmt werden kann, die sich durch eine oder mehrere Funktionalgleichungen ausdrücken lassen, ebenso kann man eine *Operation* durch Eigenschaften bestimmen, die sich durch Gleichungen zwischen Operationssymbolen ausdrücken. So kann die Transformation von *Laplace* durch die beiden Gleichungen (50) definiert werden; ist $D$ das Symbol der Ableitung und $M$ das der Multiplikation mit $x$, so lauten diese beiden Gleichungen:

$$(167) \qquad DA = AM, \quad MA = -AD.$$

Auch die Gleichung von *Babbage* (81) und die von *Léméray* (83) sind symbolische Gleichungen. Eine Theorie solcher Gleichungen — sie würde mit der Theorie der Differentialgleichungen Berührungspunkte darbieten — steht noch aus. Erwähnt seien nur noch die Gleichungen der Form[256]):

$$(168) \qquad \lambda_0 A + \lambda_1 A' + \lambda_2 A'' + \cdots + \lambda_n A^{(n)} = 0,$$

in der $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ gegebene Funktionen einer Variabeln $x$, $A$ die zu bestimmende Operation, $A', A'', \dots$ ihre Funktionalableitungen (Nr. **14**) bedeuten; ihre allgemeine Lösung ist eine lineare Kombination der Substitution $S$ (Nr. **16**) und der Produkte $SD, SD^2, \dots$ mit willkürlichen Funktionen von $u$ als Koeffizienten.

254) Math. Ann. 60 (1905), p. 424. Vgl. übrigens auch hierzu die eben genannte Note *Hilbert*'s.

255) *Volterra,* Ann. di mat. (2) 25 (1897), p. 151; *Hilbert,* Götting. Nachrichten (1904), p. 52.

256) *Pincherle* e *Amaldi,* cap. VII, p. 144.

(Abgeschlossen im Dezember 1905.)

(166) $[illegible] = 0$.

Ist $s(x)$, $\varphi(x)$ gegeben, so [illegible] Funktionen [illegible] Problem [illegible] zu finden, die sich [illegible] Transformationen [illegible], wenn die Variable [illegible] durchläuft.

3) Alle diese Sätze gelten mutatis mutandis auch für Funktionalgleichungen [illegible].

(167) [illegible]

22. Symbolische Gleichungen. Ebenso wie eine Funktion durch eine oder [illegible] definiert werden kann, die sich durch eine oder mehrere Funktionalgleichungen [illegible], kann man auch Operationen durch Gleichungen bestimmen, die sich durch Gleichungen zwischen Operationssymbolen [illegible]. So kann die Transformation von Laplace durch die beiden Gleichungen (161) definiert werden; ist $D$ das Symbol der Ableitung und $M$ das der Multiplikation mit $x$, so lauten diese beiden Gleichungen:

(167) $[illegible] = [illegible] M, \quad [illegible] = -[illegible]$.

Auch die Gleichung von Laplace (81) und die von [illegible] sind symbolische Gleichungen. Eine Theorie solcher Gleichungen — die sich mit der Theorie der Differentialgleichungen [illegible] — ist nicht [illegible]. Erwähnt seien nur [illegible] Gleichungen der Form[illegible]

(168) [illegible]

in [illegible] Funktionen einer Variablen $x$, [illegible] Operation [illegible] Funktionaloperationen (Nr. 14) bedeutet; ihre allgemeine Lösung ist eine lineare Kombination [illegible] (Nr. 16) und [illegible] mit willkürlichen Funktionen von $x$ als Koeffizienten.

[illegible]) [illegible] p. 334 [illegible]

[illegible]) [illegible] Ann. di mat. (2) 25 (1897), p. 263; Hilbert, Götting. Nachrichten (1900) [illegible]

[illegible]) Pincherle, [illegible] XII, p. 344.

Abgeschlossen im Dezember [illegible].

# II A 12. TRIGONOMETRISCHE REIHEN UND INTEGRALE
## BIS ETWA 1850*).

VON

H. BURKHARDT

IN MÜNCHEN.**)

## Inhaltsübersicht.

### Theorie der trigonometrischen Reihen und Integrale.



---

*) Um den Abschluß des Halbbandes nicht noch weiter zu verzögern, wird hier abgebrochen; die Fortsetzung soll im Ergänzungsband erscheinen.

**) Mit Beiträgen von *L. Berwald, A. Rosenthal* und *R. Kleeberg* in München.

### II. Entwicklung willkürlicher Funktionen in trigonometrische Reihen.



### III. Unharmonische trigonometrische Reihen.



### IV. Mehrfache trigonometrische Reihen.

# Literatur.

Außer den bereits bei II A 7c (p. 505) und bei II A 10 (p. 697/698) aufgeführten Werken von *Fourier, Poisson, Lamé, Riemann-Hattendorff* (neue Bearbeitung von *H. Weber*, Braunschweig 1900, neue Aufl. 1910), Lord *Rayleigh, Pockels, Poincaré, Heine, F. Neumann, Byerly, Frischauf, Thomson & Tait, Fricke, C. Neumann, Bôcher* sind für diesen Artikel noch zu nennen:


*S. D. Poisson*, Mécanique, 2me éd. Paris 1833, 3me éd. revue par J. G. Garnier, Brux. 1838 (deutsch von *M. A. Stern*, Berlin 1835/36, und von *A. Pfannstiel*, Braunschweig 1888).

*A. de Morgan*, The differential and integral calculus, Lond. 1836/41 als Bestandteil der „Library of useful knowledge" heftweise erschienen. Als Anhang sind die schon 1832 veröffentlichten „elementary illustrations of the diff. and int. calc." beigefügt.

*P. Kelland*, Theory of heat, Cambr. und London 1837.

*O. Schlomilch*, Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale, Jena 1843.

*O. Schlömilch*, Analytische Studien 2, Leipzig 1848.

*M. Ohm*, Die Auswertungsmethoden bestimmter Integrale und die Theorie der Reihen und der Integrale des Fourier, Nürnberg 1852. (System der Math., 9. Bd.)

*G. Lamé*, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, Paris 1852, zweite kaum veränderte Aufl. 1866.

—, Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications, Paris 1859.

*E. Mathieu*, Cours de physique mathématique, Paris 1873.

*U. Dini*, Serie di Fourier ed altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale, Pisa 1880.

*A. Dronke* (nach *A. Beer* und *J. Plücker*), Einleitung in die analytische Theorie der Wärmeverbreitung, Leipzig 1882.

*O. Beau*, Untersuchungen auf dem Gebiete der trigonometrischen Reihen und der Fourierschen Integrale, Diss. Leipzig 1883, 2. Aufl. Halle 1885.

*J. Boussinesq*, Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, Lille 1885.

*H. Resal*, Traité de physique mathématique, Paris 1887/88.

*A. Vaschy*, Traité d'électricité et de magnétisme, Paris 1890.

*V. v. Lang*, Theoretische Physik, 2. Aufl., Braunschweig 1891.

*E. d'Amicis*, Introduzione alla teoria della trasmissione del calore, Torino 1891.

*E. P. Manning*, On the representation of a function by a trigonometric series, Diss. Baltimore 1894.

*H. v. Helmholtz*, Vorlesungen über die mathematischen Prinzipien der Akustik, herausgegeben von *A. König* und *C. Runge*, Leipzig 1898.

—, Vorlesungen über die Theorie der Wärme, herausgegeben von *Fr. Richarz*, Leipzig 1903.

*J. Boussinesq*, Theorie analytique de la chaleur, Paris 1901/03.

*E. T. Whittaker*, A course of modern analysis, Cambr. 1902.

*M. Bôcher*, Introduction to the theory of Fourier's series, Cambr. (Mass.) 1906.

*H. Lebesgue*, Leçons sur les séries trigonométriques, Paris 1906.

*H. S. Carslaw*, Introduction to the theory of Fourier's series and integrals and the mathematical theory of the conduction of heat, London 1906.

*E. W. Hobson,* The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, Cambr. 1907.

*J. Thomae,* Vorlesungen über bestimmte Integrale und Fouriersche Reihen, Leipzig 1908.

Mehr oder weniger ausführliche Darstellungen der Theorie finden sich natürlich auch in vielen Lehrbüchern der Integralrechnung oder der Theorie der bestimmten Integrale.

---

Von *historischen Darstellungen* der Entwicklung dieser Theorie ist vor allem die von *B. Riemann*[1]) zu nennen, die später vielfach unbesehen mehr oder weniger ausführlich reproduziert worden ist. Sie gibt in der Tat eine sachgemäße Darstellung und Kritik derjenigen Untersuchungen, die Riemann bekannt waren, ist aber namentlich in bezug auf die Entwicklung analytischer Funktionen sehr unvollständig[2]). Man darf wohl aus der Einleitung und aus einer Briefstelle[3]) schließen, daß sie auf mündlichen Mitteilungen Dirichlets beruht, also die Auffassungen wiedergibt, die dieser von seinem Pariser Aufenthalt mitgebracht hatte. Daß in ihr Poisson und Cauchy gegen Fourier so sehr zurücktreten, würde sich dann daraus erklären, daß letzterer, aber nicht die beiden ersteren persönlich zugänglich waren.

Eine Fortsetzung für die Zeit bis 1880 findet sich in der Darstellung von *A. Sachse*[4]); sie sollte übrigens nicht, wie es häufig geschieht, ohne gleichzeitige Erwähnung der Gegenschrift von *P. du Bois-Reymond*[5]) genannt werden.

*R. Reiff*[6]) bringt Angaben über die Entwicklung analytischer Funktionen in trigonometrische Reihen und bezeichnet namentlich die Stellung der betr. Untersuchungen innerhalb der damaligen Diskussionen über die Zulässigkeit der Verwendung divergenter Reihen. Auch finden sich bei ihm ausführlichere Mitteilungen als bei Riemann über die von Fourier selbst angewendeten Schlußweisen[7]). Endlich be-

---

1) Habilitationsschrift, Göttingen 1854, zuerst publiziert Gött. Abhandl. 13 (1867); jetzt Werke 2. Aufl., p. 227.

2) Auch daß die Koeffizientenbestimmung durch bestimmte Integrale schon bei Euler ganz explizite steht, findet sich bei Riemann nicht, während doch schon Jacobi (J. f. Math. 2 (1827), p. 2) darauf aufmerksam gemacht hatte und Fourier selbst es Paris mém. 8 (1825[29]) Oeuvres 2, p. 174 erwähnt.

3) Werke 2. Aufl., p. 546.

4) Diss. Gött. (1879); veränderter Abdruck Zeitschr. Math. Phys. 25 (1880), Suppl. p. 229, franz. Darb. bull. (2) 4 (1880), p. 43, 83.

5) Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen, eine Entgegnung, Tübingen o. J. [1880]; Replik von *Sachse,* Gött. Anz. 1880, p. 980.

6) Geschichte der unendlichen Reihen, Tübingen 1889, p. 125.

7) p. 182.

spricht er noch die Verwendung der trigonometrischen Reihen zur Abschätzung des Restes der Euler-Maclaurinschen Summenformel[8]).

*A. Gibson*[9]) bringt noch einige englische Literatur bei; auch kommt bei ihm Fourier mathematisch besser zu seinem Recht; weniger Poisson und Cauchy.

Die Abhandlungen von *A. Lesky*[10]) über die Geschichte des Problems der Saitenschwingungen berücksichtigen zwar in erster Linie Experimentelles, bringen aber doch auch einige Notizen mathematischer Art aus sonst wenig bekannten Schriften bei; doch wäre mathematisch mancherlei einzuwenden.

Eine Note von *A. F. van der Heyden*[11]) macht selbst keinen Anspruch darauf, Neues beizubringen.

Eine Literaturzusammenstellung (von 1820—1882, ohne Anspruch auf Vollständigkeit) findet sich bei *B. Weinstein*[12]).

## Theorie der trigonometrischen Reihen und Integrale.

### I. Entwicklung analytischer Funktionen in trigonometrische Reihen.

**1. Erster Ausgangspunkt: Rekurrierende Reihen.** In diesem Artikel sind vor allem die Reihen zu besprechen, die nach den Kosinus oder Sinus der Vielfachen eines Winkels fortschreiten, also Reihen der Form[13]):

$$(1)\quad \begin{aligned} &\tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \cdots + A_n \cos nx + \cdots \\ &\qquad + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \cdots + B_n \sin nx + \cdots, \end{aligned}$$

mit von $x$ unabhängigen Koeffizienten $A_n$, $B_n$. Solche Reihen sind, soviel ich sehe, zuerst als „rekurrierende" Reihen aufgetreten, d. h. als Entwicklungen rationaler Funktionen einer (von $x$ unabhängigen) Veränderlichen $r$ nach deren Potenzen. Entwicklungen dieser Art können dadurch bewerkstelligt werden, daß man die zu entwickelnde rationale Funktion in Partialbrüche zerlegt und jeden von diesen für sich entwickelt; will man dabei den Gebrauch komplexer Größen vermeiden, so hat man vor allem die Entwicklung von Brüchen zu untersuchen, deren Nenner $1 - 2r\cos x + r^2$ oder eine Potenz dieser Größe ist. So gelangt *L. Euler*[14]) zu den Entwicklungen:

8) p. 193.

9) Edinb. math. proc. 11 (1892/93), p. 137.

10) Progr. Realsch. Graz 1893 und 1896.

11) Durham proc. (2) 4 (1905).

12) In seiner Übersetzung von *Fourier*'s théorie, Berlin 1884, p. 460.

13) Das absolute Glied nicht mit $A_0$, sondern mit $1/2 A_0$ zu bezeichnen, ist für spätere Formeln bequem.

14) Introductio in analysin infinitorum, 1, Laus. 1748, § 218.

$$(2)\qquad \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}=1+r\cos x+r^2\cos 2x+\cdots,$$

$$(3)\qquad \frac{r\sin x}{1-2r\cos x+r^2}=r\sin x+r^2\sin 2x+\cdots;$$

dann auch zu den allgemeineren Summenformeln[15]):

$$(4)\ \cos a+r\cos(a+x)+r^2\cos(a+2x)+\cdots=\frac{\cos a-r\cos(a-x)}{1-2r\cos x+r^2},$$

$$(5)\ \sin a+r\sin(a+x)+r^2\sin(a+2x)+\cdots=\frac{\sin a-r\sin(a-x)}{1-2r\cos x+r^2}.$$

**2. Zweiter Ausgangspunkt: Auffassung von Reihen, die nach Potenzen einer komplexen Variablen fortschreiten, als Entwicklungen nach den Kosinus und Sinus der Vielfachen des Arcus dieser Variablen.** Zu dieser Auffassung gelangt man, wenn man sich die in Nr. 1 besprochenen Entwicklungen durch den Gebrauch komplexer Größen erleichtert. So hat *Euler*[16]) die Summen der Reihen

$$(6)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{n}r^n\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}nx$$

aus der Entwicklung von

$$\frac{1}{2}\,\frac{f-ig}{(1-r(\cos x+i\sin x))^k}$$

nach Potenzen von

$$(7)\qquad z=r(\cos x+i\sin x)$$

erhalten. Allgemein formuliert erscheint dann in späteren Abhandlungen Eulers[17]) der Satz, daß man die Summen der Reihen

$$(8)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n\cos nx,\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n r^n\sin nx$$

---

15) Ib. § 258, 260. — *R. Lobatto* (Recherches sur qq. séries trigonométriques, Delft 1827, p. 27) leitet (4) und (5) aus (2) und (3) her.

16) Ib. § 219.

17) Petrop. n. comm. 5 (1754/55[60]), p. 200; ib. 18 (1773), p. 32; auch in der nachgelassenen Abhandlung von 1776, Petrop. n. acta 7 (1789[93]), p. 87. Das Verfahren setzt voraus, daß die Zulässigkeit der Übertragung der Sätze über Potenzreihenentwicklungen von reellen auf komplexe Variable bereits bewiesen und die Bedeutung der Funktion $f(z)$ für komplexe Argumente bereits definiert ist; um beides macht sich Euler keine Sorge. *A. C. Michelsen* wirft diese Fragen in einer Note zu seiner Übersetzung von Eulers introductio auf (1, Berlin 1788, p. 516), zunächst für die logarithmische Reihe; seine Beantwortung setzt freilich eine andere Definition des Logarithmus einer komplexen Variabeln als die gewöhnliche voraus. — Eine Andeutung des Verfahrens kann man mit *G. Eneström* (Encycl. éd. franç. II 5, p. 87, Note 13) bereits in einem Briefe *Eulers* an Nikolaus II. Bernoulli von 1742 (op. post. 1, Petrop. 1862, p. 529) finden.

aus der als bekannt vorausgesetzten Summe der Reihe

$$(9) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$$

dadurch erhalten kann, daß man in ihr die Substitution (7) vornimmt und dann Reelles und Imaginäres voneinander trennt. So erhält er aus der Entwicklung:

$$(10) \qquad \frac{z^m}{1-z} = z^m + z^{m+1} + z^{m+2} + \cdots$$

die Reihen[18]):

$$(11) \quad \frac{\cos mx - r\cos(m-1)x}{1-2r\cos x + r^2} = \cos mx + r\cos(m+1)x + r^2\cos(m+2)x + \cdots,$$

$$(12) \quad \frac{\sin mx - r\sin(m-1)x}{1-2r\cos x + r^2} = \sin mx + r\sin(m+1)x + r^2\sin(m+2)x + \cdots;$$

speziell[19]) für $m = 1$ wieder die Reihen (2) und (3), die erstere in der Form:

$$(13) \quad \frac{\cos x - r}{1-2r\cos x + r^2} = \cos x + r\cos 2x + r^2\cos 3x + \cdots;$$

später noch[20]) aus der von $-\log(1-z)$:

$$(14) \quad -\frac{1}{2}\log(1-2r\cos x + r^2) = r\cos x + \frac{r^2}{2}\cos 2x + \frac{r^3}{3}\cos 3x + \cdots,$$

$$(15) \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin x}{1-r\cos x} = r\sin x + \frac{r^2}{2}\sin 2x + \frac{r^3}{3}\sin 3x + \cdots.$$

Natürlich ist die Einsetzung von $e^{ix}$ für $r$ in eine nach Potenzen von $r$ fortschreitende Reihe nur zulässig, wenn diese letztere für $r = 1$ noch konvergiert. So erhält z. B. *G. Frullani*[21]) durch diese

18) Petrop. n. comm. 5, p. 202.

19) Petrop. n. comm. 5, p. 202; 18, p. 34.

20) Petrop. n. comm. 18, p. 35. Die Reihe (14) mit Hilfe der Differentialgleichung, der sie als Funktion von $r$ genügt, Petersb. mém. 5 (1812[15]), p. 65 (von 1780); die Reihen (14) und (15) durch die im Text besprochene Methode bei *Littrow* (Petersb. mém. 7 (1815/16[20]), p. 81), bei *Stein* (Ann. de math. 13 (1823), p. 113) und bei *Querret* (ib. p. 379); durch Integration aus (13) auch bei *S. D. Poisson* (J. éc. polyt. cah. 17 (1815), p. 618), bei *Clausen* (J. f. Math. 4 (1829), p. 283). Inst. calc. int. 1, Petrop. 1768, § 145 = opera (1) 11, p. 84 erhält Euler aus (2) durch Integration nach $r$ eine Entwicklung, die eine Kombination von (14) und (15) vorstellt. — *J. A. Grunert* (Arch. Math. Phys. 3 (1843), p. 353) leitet die Gleichung (15) ab, indem er den arctg nach Potenzen seines Arguments entwickelt, diese nach Potenzen von $r$, und dann die Ausdrücke der Sinus der Vielfachen von $x$ durch die Funktionen von $x$ selbst benutzt.

21) Mem. soc. ital. 18 (1820), p. 478 (von 1818). Er kommt dadurch sogar zu Zweifeln an der Allgemeingültigkeit des Satzes von der Darstellung der Koeffizienten einer trigonometrischen Reihe durch bestimmte Integrale. Später, ib. 20 (1828), p. 702 (von 1830) bemerkt Frullani, daß der Fehlschluß in der Diver-

Substitution aus der Entwicklung von

$$\frac{2r}{\alpha + 2r + \alpha r^2}$$

nach steigenden Potenzen von $r$ ein von (3) abweichendes Resultat.

Eulers Verfahren[17]) zur Auffindung der Summen von trigonometrischen Reihen ist dann noch öfter von neuem gefunden und dargestellt worden: so von *J. Landen*[22]), von *J. Fr. Pfaff*[23]), von *Querret*[24]), von *S. D. Poisson*[25]), von *H. Vernier*[26]), von *M. Ohm*[27]), von *R. Lobatto*[28]), von *Clausen*[29]), von *v. Schmidten*[30]), von *Chr. Jürgensen*[31]) und noch spät von *Ligowski*[32]). In etwas anderer Fassung erscheint es bei *A. J. Lexell*[33]), indem dieser zunächst $e^{xi/2}$ einführt.

Seine Begründung findet dieses Verfahren erst durch *A. Cauchy*, der die Frage der Konvergenz von Reihen mit komplexen Gliedern zuerst diskutiert und namentlich bereits den Satz vom Konvergenzkreis einer Reihe, die nach Potenzen einer komplexen Variabeln mit

---

genz der benutzten Reihe liegt, doch ohne davon zu reden, daß er ihn früher selbst begangen hatte. — Ricerche sopra le serie, Firenze 1816, p. 34 hatte Frullani die Koeffizienten dieser Entwicklung durch Integration der partiellen Differentialgleichung bestimmt, der sie genügen.

22) Math. memoirs 1, London 1780, p. 69 („a new method of obtaining the sums of certain series"). Sein Interesse ist übrigens hauptsächlich auf die numerischen Reihen gerichtet, die man bei Einsetzen spezieller Werte für das Argument erhält. Von Landen hat wohl *E. Waring* das Verfahren übernommen (meditationes analyticae ed. 2ª, Cantabr. 1785, p. 698); sowie der Verfasser des Artikels über trigonometrische Reihen in den mem. of the analytical society, Cambr. 1813, p. 33.

23) Versuch einer neuen Summationsmethode, Berlin 1788, p. 74. Auch er scheint (vgl. p. 80) das Verfahren für neu zu halten.

24) Ann. de math. 13 (1822/23), p. 107, 368. Merkwürdig ist, daß er zwar voraussieht, es würden gegen die Einführung komplexer Argumente in trigonometrische Funktionen Einwände erhoben werden, aber die Einführung solcher Argumente in die Integraldarstellung der zyklometrischen Funktionen als selbstverständlich behandelt.

25) J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 481.

26) Ann. de math. 15 (1825), p. 171.

27) Pétersb. mém. prés. 1 (1831), p. 118 (von 1825); Auszug bull. Férussac 15 (1831), p. 226.

28) Recherches sur la sommation de qq. séries trig., Delft 1827, p. 1; vgl. auch das Referat bull. Férussac 11, p. 183 und *Lobattos* eigene Angabe J. f. Math. 11 (1834), p. 169.

29) J. f. Math. 4 (1829), p. 281.

30) J. f. Math. 5 (1830), p. 390.

31) Ib. 11 (1834), p. 140.

32) Arch. Math. Phys. 56 (1874), p. 331.

33) Petrop. n. comm. 18 (1773), p. 53.

positiven ganzzahligen Exponenten fortschreitet, — wenn auch nicht in dieser geometrischen Ausdrucksweise — bereits aufgestellt hat.[34])

Andererseits hat *N. H. Abel*[35]) für die Reihen (14) und (15) direkt gezeigt, daß sie für $r = 1$ noch konvergieren, außer für $x =$ einem ganzzahligen Vielfachen von $2\pi$.

**3. Dritter Ausgangspunkt: Umsetzung von Reihen, die nach den Potenzen von $\cos x$ fortschreiten, in solche, die nach den Kosinus der Vielfachen von $x$ geordnet sind.** Zu derartigen Umsetzungen gab zuerst die astronomische Störungstheorie Veranlassung, die im einfachsten Fall, wenn nämlich die Exzentrizitäten und die Neigungen vernachlässigt werden, die Berechnung von Integralen der Form

$$(16) \qquad \int (1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)^{-s} dx$$

verlangt. Hier kann der Integrand

$$(17) \qquad (1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2)^{-s},$$

der, wenn

$$(18) \qquad \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} = \mathfrak{n}, \quad \alpha = \frac{\mathfrak{n}}{1+\sqrt{1-\mathfrak{n}^2}} = \frac{1-\sqrt{1-\mathfrak{n}^2}}{\mathfrak{n}}$$

gesetzt wird, auch

$$(1 + \alpha^2)^{-s}(1 - \mathfrak{n} \cos x)^{-s}$$

geschrieben werden kann, nach Potenzen von $\mathfrak{n}$ oder von $\alpha$ entwickelt werden; die Koeffizienten dieser Entwicklungen werden ganze rationale Funktionen von $\cos x$ und sind behufs der Integration in lineare Funktionen der Kosinus der Vielfachen von $x$ umzusetzen. So verfahren — um nur zwei Beispiele zu nennen — noch *Th. Simpson*[36]) und *J. de Lalande*[37]). Auf diese Weise war es in der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts gelungen, eine Anzahl Störungsprobleme mit der dem damaligen Stande der Beobachtungskunst entsprechenden Genauigkeit zu erledigen. Aber für die großen gegenseitigen Störungen

---

34) Analyse algébrique, Paris 1821 = Oeuvres (2)3, p. 235. Cauchy führt die Reihen (2), (3), (14), (15) als Beispiele an (p. 233, 255). Die Anwendung auf die Reihen (2), (3) auch exerc. d'anal. 4, 1847, p. 229. Vgl. übrigens Nr. 35.

35) J. f. Math. 1 (1826) = Oeuvres 1, p. 237, 247. Vgl. dazu Note 219.

36) Miscellaneous tracts on some subjects in mechanics, physical astronomy and speculative math., London 1757, p. 176.

37) Paris hist. 1758[63], mém. 15. Auch Astronomie 2, Paris 1764, p. 1280, 1383 und 2me éd. 3 (1771), p. 469, 582 gibt er zunächst dieses Verfahren. — *A. Meyer* (Brux. mém. 21, 1848, p. 5, 9) erhält aus der Vergleichung der so gefundenen Entwicklungen von $(1 + \mathfrak{n} \cos x)^{-1}$ und von $\log (1 + \mathfrak{n} \cos x)$ mit den durch die Methode von Nr. 2 erhaltenen die Entwicklungen der Potenzen von $\alpha$ und der Produkte dieser Potenzen mit $1 : \sqrt{1 - \mathfrak{n}^2}$ nach Potenzen von $\mathfrak{n}$.

von Jupiter und Saturn kommen so große Werte von $\alpha$ bzw. $\mathfrak{n}$ in Betracht, daß die Anzahl der erforderlichen Reihenglieder die Durchführung der Rechnung auf diesem Wege verbot. Da aber die Glieder mit $\cos nx$ bei der Integration den Nenner $n$, bei einer im weiteren Verlauf der Störungsrechnungen erforderlichen zweiten Integration sogar den Nenner $n^2$ erhalten, so erkannte *L. Euler*[38]), daß man nur die Glieder mit kleinen Werten von $n$ zu berücksichtigen brauche, und daß es daher zweckmäßiger sei, die Entwicklung überhaupt nach den Kosinus der Vielfachen von $x$ zu ordnen.

Es bedeutet dem gegenüber in theoretischer Beziehung einen Rückschritt, wenn *Chr. Gudermann*[39]) dieses Verfahren zur Integration einer Funktion von $\cos x$ wegen der eventuellen Schwierigkeit der Ableitung einer solchen Entwicklung wieder verwirft und zur Entwicklung nach Potenzen von $\sin x$ zurückkehrt.

**4. Divergente trigonometrische Reihen.** Bei den besprochenen Entwicklungen hat sich Euler um die Frage der Konvergenz und um etwaige Grenzen des Gültigkeitsbereichs kaum gekümmert. Er glaubte ja überhaupt auch einer divergenten Reihe eine bestimmte Summe zuschreiben zu können[40]); namentlich verstand er unter einer Gleichung der Form

$$\frac{g(r)}{h(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n, \tag{19}$$

in der $g$, $h$ rationale ganze Funktionen (oder selbst schon unendliche nach Potenzen von $r$ fortschreitende Reihen) bedeuten, nichts anderes als: die (im letzteren Fall formal vorzunehmende) Entwicklung von

---

38) Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter, Paris 1749 (gehört eigentlich zum 6. Bd. des „recueil des pièces qui ont remporté les prix" der Pariser Akademie, fehlt aber meist, da es bei einem andern Verleger erschienen ist). Daß der Gedanke Euler allein angehört, erkennen *J. d'Alembert* (recherches sur diff. points du système du monde 2, Paris 1754, p. 81) und *A. Clairaut* (Paris mém. 1754 [59], p. 545) ausdrücklich an. Euler fand die Aufgabe zuerst so schwer, daß er zweifelte, ob ihm eine Lösung gelingen werde (Brief an Goldbach von 1746, correspondance math. et phys. publiée par P. H. Fuß 1, St. Petersburg 1843, p. 388). Wegen weiterer Untersuchungen über dieses Problem vgl. Nr. 9.

39) J. f. Math. 14 (1835), p. 182; 15 (1836) p. 100.

40) Vgl. I A 3, *Pringsheim* Nr. 39, p. 105. Eulers Auffassung findet sich bereits in einem Briefe an Nikolaus I. Bernoulli von 1744 (opera postuma 1, Petersb. 1762, p. 538) und in einem an Goldbach von 1745 (Corresp. math. phys. éd. *P. H. Fuß,* 1, St. Petersburg 1843, p. 324) formuliert; sie liegt auch seiner Behandlung der rekurrierenden Reihen im 4. und 14. Kapitel seiner introductio in analysin infinitorum, Laus. 1748, zugrunde.

$$(20)\qquad g(r) - h(r)\sum_{n=0}^{N} a_n r^n$$

enthält nur Glieder mit höheren Potenzen von $r$ als $r^N$. Er schrieb dann auch derjenigen Reihe, die aus (19) durch Einsetzen eines speziellen Wertes $r_0$ von $r$ hervorgeht, den Wert $g(r_0)/h(r_0)$ zu, selbst wenn die $a$ noch eine von $r$ unabhängige Variable $x$ enthalten, und glaubte sogar die so gefundenen Reihen nach diesem $x$ gliedweise differentiieren und integrieren zu können. Analog kann dann auch eine Gleichung der Form

$$(21)\qquad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} nx$$

($\varphi(x)$, $\psi(x)$ endliche oder auch selbst schon unendliche Reihen) so verstanden werden: in der Entwicklung von

$$(22)\qquad \varphi(x) - \psi(x)\sum_{n=0}^{N} a_n \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} nx$$

kommen, nachdem die Produkte trigonometrischer Funktionen durch Summen ersetzt sind und umgeordnet ist, nur Glieder mit höheren Vielfachen von $x$ als $Nx$ vor[41]).

So ist Euler z. B. zu den Gleichungen (vgl. (4) und (5)):

$$(23)\qquad \cos a + \cos(a+x) + \cos(a+2x) + \cdots = -\frac{\sin\left(a - \frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}},$$

$$(24)\qquad \sin a + \sin(a+x) + \sin(a+2x) + \cdots = \frac{\cos\left(a - \frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$$

zuerst von der ersten Auffassung aus gelangt und hat sie dann durch die zweite verifiziert[42]). Speziell für $a = 0$ erhält er die Gleichungen[43]):

---

41) Auf dieser Auffassung beruhen bereits die Rechnungen Eulers introd., 1748, § 258 und Petrop. n. comm. 5 (1754/55[60]), p. 190; deutlicher ib. 18 (1773), p. 31, institut. calc. integr. § 272 und Petrop. acta $1_2$ (1777[80]) = instit. calc. int. 4 (1794), suppl. 3, § 122, sowie in den nachgelassenen Abhandlungen von 1772, opusc. analyt. 1, Petrop. 1783, p. 168, und von 1776, Petrop. n. acta 7 (1789[93]), p. 92. Ausdrücklich formuliert erscheint sie bei *S. F. Lacroix,* traité des différences et des séries, Paris 1800, p. 149; traité de calc. diff. et int., 2me éd. 3, Paris 1819, p. 160, 619; auch bei *G. S. Klügel,* math. Wörterbuch 2, Leipzig 1805, p. 588. Auch *J. Littrow* stützt sich auf sie, Petersb. mém. 7 (1815/6[20]), p. 132.

42) Introd. § 258, 260.

43) Petrop. n. comm. 5, p. 202.

$$(25)\qquad 1 \pm \cos x + \cos 2x \pm \cos 3x + \pm + \cdots = \frac{1}{2},$$

$$(26)\qquad \sin x \pm \sin 2x + \sin 3x \pm + \pm \cdots = \begin{cases} \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} \\ \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} \end{cases}$$

von denen die erste sonst auch wohl in der Form

$$(27)\qquad \tfrac{1}{2} \pm \cos x + \cos 2x \pm \cos 3x + \pm + \cdots = 0$$

erscheint[44]); und aus ihnen gewinnt er durch Differentiation nach $x$ Reihen, bei denen die Koeffizienten mit wachsendem Index sogar über jede Grenze wachsen[45]).

Derartige trigonometrische Reihen treten dann in der Literatur bis gegen das Jahr 1860 immer wieder auf, so bei *J. L. Lagrange*[46]), *G. Fontana*[47]), *J. Fr. Pfaff*[48]), *Tralles*[49]), *J. Littrow*[50]), *S. D. Poisson*[51]), *Br. Mollweide*[52]), *J. A. Eytelwein*[53]), *R. Lobatto*[54]), *R. Murphy*[55]), *Barfuß*[56]), *G. Plana*[57]), *Donkin*[58]). Zwar hat schon *J. d'Alembert*[59]) gegen ihren Gebrauch Protest erhoben, die prinzipielle Verwerfung alles Rechnens mit divergenten Reihen hat aber erst *A. L. Cauchy*[60]) begründet; ihm schließen sich *N. H. Abel*[61]) und *Poinsot*[62]) an. *M. Ohm* hat sie früher[63])

44) So bei *Euler* selbst, institutiones calculi differentialis, Laus. 1755, § 92 und opuscula anal. 1, Petrop. 1783, p. 168, wo sie durch Differentiation aus (110) erhalten wird.

45) Petrop. n. comm. 5, p. 203.

46) Taur. misc. 1 (1759); 2 (1760/61) = Oeuvres 1, p. 102, 323.

47) Mem. soc. ital. 2 (1784), p. 424.

48) Versuch einer neuen Summationsmethode, Berlin 1788, p. 16, 81.

49) Berlin Abhandl. 1812/13[16], p. 232 (von 1810).

50) Petersb. mém. 7 (1815/16[20]), p. 115, 122.

51) J. Éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 312, 313.

52) *Klügels* math. Wörterbuch 4, Leipzig 1823, p. 581.

53) Grundlehren der höheren Analysis, Berlin 1824, 1, p. 451; 2, p. 635; trotz seiner Mahnung zur Vorsicht beim Gebrauch divergenter Reihen, 1, p. 425.

54) Recherches p. 3, 4.

55) Cambr. trans. $5_3$ (1835), p. 367, 379, 380.

56) Arch. Math. Phys. 4 (1844), p. 229; 5 (1844), p. 156; 7 (1846), p. 8.

57) Torino mem. (2) 14 (1854), p. 40, 53; (von 1851); 16 (1857), p. 98; 18 (1859), p. 501.

58) Quart. j. of math. 3 (1860), p. 2.

59) Opuscules mathématiques 1, Paris 1761, p. 65.

60) Vgl. seine programmatische Erklärung in der Vorrede der analyse algébrique, Paris 1821 = oeuvres (2) 3, p. II.

61) J. Math. 1 (1826) = Oeuvres 1, p. 219. Vgl. auch seine Briefe an Holmboe und an Hansteen aus demselben Jahre, Oeuvres 2, p. 256, 263. Der erste dieser Briefe zeigt, daß auf Abels Entscheidung die in Nr. 5 zu besprechen-

angegeben, indem er damals noch jede Reihe als konvergent ansah, die nicht das ist, was man jetzt „eigentlich divergent" nennt; später[64]) verwirft er ihren Gebrauch.

*J. F. Français*[65]) erhält divergente trigonometrische Reihen durch skrupellose Benutzung der „Methode der Trennung der Operations- und Quantitätssymbole" (vgl. II A 11, *Pincherle*, Nr. 2, p. 765.)

*A. de Morgan*[66]) stützt die Gleichungen (25), (26) durch seine Auffassung der den Zeichen sin $\infty$, cos $\infty$ beizulegenden Werte (Nr. 30).

Bemerkenswert ist übrigens, daß auch *C. F. Gauß*[67]) sich der Reihe (139) ohne weitere Erläuterung bedient, obwohl deren Konvergenz damals weder bewiesen war, noch mit damals bekannten Hilfsmitteln bewiesen werden konnte.

Mit der ersten Eulerschen Auffassung kommt es auch im wesentlichen überein, wenn *S. D. Poisson* in vielen Fällen, in denen eigentlich die Richtigkeit einer Gleichung der Form

$$(28)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$$

zu beweisen wäre, statt dessen nur beweist, daß

$$(29)\qquad \lim_{r=1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = S$$

ist[68]) und namentlich auch von divergenten trigonometrischen Reihen in diesem Sinne Gebrauch macht[69]), obwohl er sonst die Benutzung

---

den Diskussionen über die Entwicklungen der Potenzen von cos $x$ und die dabei infolge des Gebrauchs divergenter Reihen auftretenden Paradoxa von wesentlichem Einfluß gewesen sind.

62) Recherches sur l'analyse des sections angulaires, Paris 1825, p. 70.

63) Petersb. mém. 1 (1831), p. 123 (von 1825).

64) Geist der math. Analysis 2, Erl. 1846, p. 146; System der Mathematik 8, Nürnberg 1851, p. 101; ebenso *O. Schlömilch,* Arch. Math. Phys. 1843, p. 275; Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale, Jena 1843, p. 10.

65) Ann. de math. 3 (1812), p. 252.

66) The differential and integral calculus, Lond. 1836/41, p. 606.

67) Gött. comm. rec. 1812 = Werke 3, p. 156. Das Wort Konvergenz gebraucht übrigens *Gauß* bekanntlich noch im alten Sinne, in dem es sich nur auf die unbegrenzte Abnahme der Reihenglieder, nicht auf die Existenz eines Grenzwertes für die Reihensumme bezog.

68) So zuerst J. Éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 422; 19 (1823), p. 409; zuletzt théorie de la chaleur, Paris 1835, p. 187. Vgl. im übrigen Nr. 34.

69) Z. B. J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 65, 439; conn. des temps pour 1826[23], p. 252; bull. Férussac 4 (1825), p. 348; traité de mécanique 1, 2me éd., Paris 1833, p. 638.

divergenter Reihen prinzipiell verwirft und auch mit den Widersprüchen, auf die sie führen kann, wohl bekannt ist[70]). Er behauptet übrigens[71]), bei den hier betrachteten Reihen komme man i. allg., d. h. abgesehen von isolierten Werten der Variabeln, zu demselben Grenzwert $S$, wenn man vor Hinzufügung der Faktoren $r^n$ noch Nullen einschiebe; er verifiziert das an dem Beispiel

$$1 + \cos x + 0 + \cos 2x + \cos 3x + 0 + \cos 4x + \cdots,$$

gibt aber keinen allgemeinen Beweis.

*Poissons* Auffassung hat bei einer Reihe von Autoren Anklang gefunden; so bei *J. Liouville*[72]). Bei anderen Autoren ist diese Auffassung auf Widerspruch gestoßen: so erklären schon *J. Ivory*[73]) und ein mit *Disjota*[74]) zeichnender Autor den Schluß von (29) auf (28) nur für erlaubt, wenn die Konvergenz der letzteren Reihe bereits feststehe.

Eine andere Auffassung dieser Reihen entwickelt *D. Bernoulli*[75]), anknüpfend an bekannte Spekulationen von Leibniz über die Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + - + \cdots$: wenn allgemein für ein bestimmtes $p$ und jedes $n$

$$a_{n+p} = a_n$$

und außerdem

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{p-1} = 0$$

sei, so habe man als Summe der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ das arithmetische Mittel aus den Werten

$$(30) \qquad a_0,\ a_0 + a_1,\ a_0 + a_1 + a_2, \ldots,\ a_0 + a_1 + \cdots + a_{p-1}$$

zu betrachten. Bei den Reihen (25) und (26) ist die Voraussetzung erfüllt, wenn $x$ zu $\pi$ kommensurabel, aber nicht gleich einem ganzzahligen

70) Vgl. namentlich j. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 503.

71) Ib. p. 429.

72) J. f. Math. 13 (1835), p. 225.

73) Phil. mag. 67 (1826), p. 35; (2) 2 (1827), p. 17.

74) Ib. (3) 9 (1836), p. 85.

75) Petrop. n. comm. 16 (1771), p. 76; 17 (1772), p. 3; 18 (1773), p. 3. Er berichtet, er sei seit 40 Jahren im Besitze dieses Prinzips. Euler meint (ib. 18, p. 29), man könne sich dabei beruhigen; auch *A. J. Lexell* stimmt zu (ib. 18, p. 40), obwohl er die Summen solcher Reihen an und für sich als unbestimmt erklärt, und meint, die Ausdehnung auf zu $\pi$ inkommensurable Werte von $x$ werde keine Schwierigkeiten bieten. — Noch *A. de Morgan* (Cambr. trans. $8_2$ (1844), p. 191) glaubt in diesem Satz einen Spezialfall eines „durch Induktion gewonnenen allgemeinen Prinzips" sehen zu dürfen, daß man nämlich überhaupt jeden unbestimmten Ausdruck durch das arithmetische Mittel seiner sämtlichen möglichen Werte zu ersetzen habe.

Vielfachen von $\pi$ ist; er verifiziert an einer Reihe von Beispielen, daß dann seine Auffassung in der Tat dasselbe Resultat gibt wie die Eulers. Daß das allgemein gilt, hat erst *J. L. Lagrange* gezeigt[76]). Verallgemeinerungen dieser Auffassung haben *G. S. Klügel*[77]), *Ch. Hutton*[78]) und *J. Prehn*[79]) zu geben versucht, doch entbehren sie der Präzision; diese hat erst *G. Frobenius*[80]) durch den Beweis des Satzes erreicht: wenn

$$\lim_{N=\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_N}{N} \tag{31}$$

existiert und gleich $M$ ist, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ für $r < 1$, und es ist $\lim_{r=1} \sum a_n r^n = M$.

Gelegentlich erscheint in der älteren Literatur auch die merkwürdige Auffassung: wenn man für die Summe der $N$ ersten Glieder einer Reihe einen geschlossenen Ausdruck erhalten habe, brauche man, um die Summe der unendlichen Reihe zu erhalten, aus jenem nur einfach „alles was noch von der Gliederzahl $N$ abhängt" wegzulassen; so bei *G. S. Klügel*[81]), *A. Cagnoli*[82]), *J. Littrow*[83]).

Eine neue Förderung erfuhr das Rechnen mit divergenten Reihen überhaupt und damit auch insbesondere die Verwendung divergenter trigonometrischer Reihen durch die zu Beginn des 19. Jahrhunderts von der sog. neuen Cambridger Schule entwickelte formale Auffassung der Algebra: daß sie nichts anderes sei als die Lehre von den Folgerungen, die aus bestimmten als fundamental angenommenen Verknüpfungsgesetzen gezogen werden können; wobei man sich nicht darum zu kümmern brauche, ob den Operationen und ihren „Trägern" irgend welche konkrete Bedeutung zukomme. Aus dieser Auffassung hat schon der Begründer dieser Schule, *R. Woodhouse*, die Folgerung

---

76) Paris hist. 3, an IX, p. 8 (nicht in den Oeuvres); weniger einfach *S. D. Poisson*, J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 426, *J. Fr. Raabe* (J. f. Math. 15 (1836), p. 356, 358; Differential- und Integralrechnung 1, Zürich 1839, p. 313; die Jacob-Bernoullische Funktion, Zürich 1848, p. 6) und *J. R. Young* (phil. mag. (3) 27 (1845), p. 438).

77) Math. Wörterbuch 2, Leipzig 1805, p. 532. Ihm schließt sich *C. Br. Mollweide* an, ib. 4 (1823), p. 581.

78) Tracts on math. and philos. subjects, London 1812, p. 176 (von 1780?).

79) J. f. Math. 41 (1851), p. 5, 43.

80) Ib. 89 (1880), p. 262.

81) Analytische Trigonometrie, Braunschweig 1770, p. 42.

82) Mem. soc. ital. 7 (1794), p. 21; trigonometria piana e sferica, 2. ed., p. 117 der franz. Übersetzung von *A. N. Chompré*, Paris 1808.

83) Petersb. mém. 7 (1815/16[20]), p. 123.

gezogen[84]), daß Gleichungen wie

$$(1-r)^{-1} = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$$

allgemein richtig seien, gleichgültig ob die Reihe rechts konvergiere oder nicht. In schärferer Formulierung und ausführlicher begründet erscheint diese Auffassung dann bei *G. Peacock*[85]). Er weiß zwar[86]), daß Gleichungen wie (111) oder (410) nur für bestimmte Intervalle richtig seien, hilft sich aber mit der Ausrede, das Permanenzprinzip gelte eben nur „within the limits of continuity" [87]).

Später ist übrigens auch in England der Gebrauch der Reihen (25), (26) vielfach verworfen worden: so schon von *J. Challis*[88]) und später von *R. Moon*[89]) mit der Motivierung, daß das Restglied, das hinzuzufügen ist, wenn man die Reihe mit dem $n$ten Glied abbricht, mit wachsendem $n$ nicht[90]) gegen null konvergiert; von *J. R. Young*[91]) mit der eigentümlichen Motivierung, die Ableitung von (25) aus (111) durch Differentiation sei deswegen nicht zulässig, weil die Formel

$$\frac{d \sin nx}{dx} = n \cos nx$$

für $n = \infty$ nicht mehr gelte. Auch *G. G. Stokes* will die Benutzung

---

84) The principles of analytical calculation, Cambr. 1803, p. 13, 153. Er schreibt dabei dem Gleichheitszeichen eine erweiterte Bedeutung zu: es diene nur dazu, den zu entwickelnden Ausdruck mit dem Resultat einer an ihm vorzunehmenden Operation zu verbinden. Das Bedürfnis nach einem Beweise dafür, daß bei solchen Erweiterungen der Bedeutung eines Zeichens die für seine ursprüngliche Bedeutung geltenden Gesetze bestehen bleiben, empfindet er wohl an anderen Stellen, hier aber gar nicht; daß derartige Beweise für diese Auffassung der Algebra unerläßlich sind, scheint in England zuerst *Ph. Kelland* betont zu haben, principles of demonstrative mathematics, Edinb. 1843, p. 110, 112, 115, 118.

Eigentümlich ist, daß *H. Breen,* treatise on the summation of series, Belfast 1827, zwar unbedenklich mit divergenten Reihen rechnet (z. B. p. 23, 66) und auch die hier in Rede stehenden Reihen ohne weiteres angibt (p. 83), in einer nachträglich angefügten Note (p. 8) aber, unter Berufung auf *Lacroix,* bemerkt „the continuing the series to infinity does not cause it to approach to a limiting state".

85) Brit. assoc. rep. 3 (1833), p. 205, 239, 269, 282.

86) p. 252.

87) p. 261. Daß er mit dieser Einschränkung sein ganzes Gebäude umwirft, entgeht ihm, weil er sich im Grunde doch nur für algebraische Funktionen und ihre Entwicklung in Potenzreihen interessiert.

88) Cambr. trans. $3_1$ (1830), p. 270.

89) Phil. mag. (3) 26, 1845, p. 490.

90) Wie man früher zuweilen geglaubt hatte; vgl. die unter Nr. **30** besprochene Diskussion.

91) Dubl. proc. 3 (1846), p. 36. Später (Cambr. trans. $8_4$, 1847, p. 437) scheint er sich der Auffassung von *Challis* und *Moon* anzuschließen.

solcher Reihen nur zulassen[92], wenn man sie ausdrücklich als Abkürzungen für die Grenzwerte der Reihen (2) und (3) auffasse. Er hält es auch[93] für durchaus möglich, daß einer und derselben divergenten Reihe verschiedene Werte zuzuschreiben seien, je nachdem man sie als Grenzfall einer oder einer andern konvergenten Reihe auffasse; meint aber, daraus könne kein Fehler entspringen, wenn man nur konsequent verfahre und innerhalb einer und derselben Rechnung immer nur dieselben Konvergenzfaktoren benutze.

**5. Entwicklung der Potenzen von cos $x$ und sin $x$ nach den Cosinus oder Sinus der Vielfachen von $x$.** *L. Euler*[94]) und *Th. Simpson*[95]) gewinnen die Gleichung

$$(32)\quad 2^{m-1}\cos^m x = \cos mx + \binom{m}{1}\cos(m-2)x + \binom{m}{2}\cos(m-4)x + \cdots$$

zunächst für die kleinsten positiven Werte von $m$ durch wiederholte Verwandlung von Produkten trigonometrischer Funktionen in Summen und lesen daraus auch das allgemeine Gesetz ab[96]). Sie verifizieren dann ihre allgemeine Gültigkeit mit Hilfe der Darstellung trigonometrischer Funktionen reellen durch Exponentialfunktionen komplexen Arguments[97]). Euler nimmt sie auch gleich für negative[98]) und für

---

92) Cambr. trans. $8_5$ (1847), p. 536 (von 1847) = papers 1, p. 240.

93) Cambr. trans. $8_5$, p. 539 = papers 1, p. 246.

94) Introductio 1, p. 220. Er hat auch entsprechende Formeln für $\sin^m x$, wobei aber vier verschiedene Fälle, je nach dem Werte von $m$ (mod 4), zu unterscheiden sind, so daß er diese Formeln wohl auf negative Werte von $m$ übertragen kann, von der Übertragung auf gebrochene Werte aber zu schweigen vorzieht. Ebenso *E. Waring,* meditationes analyticae, p. 656 der 2. Aufl. von 1785. — *J. de Lalande* (astronomie 2, Paris 1764, p. 1453) hat ebenfalls die Formeln bis $m = 4$; er meint, das genüge „pour faire appercevoir la loi", und überdies brauche man die weiteren Formeln selten. In der 2. Aufl. (3, 1771, p. 670) fügt er noch eine Verweisung auf Euler bei. Die ausgerechneten Koeffizienten bis $m = 13$ bei *Jeaurat,* Paris mém. prés. 4 (1763), p. 528.

95) Miscellaneous tracts on some subjects in mechanics, physical astronomy and speculative mathematics, London 1757, p. 76.

96) Beweis der Gültigkeit für beliebige positive ganze $m$ bei *G. S. Klügel,* analytische Trigonometrie, Braunschweig 1770, p. 120. *Querret* (Gergonne ann. 13 (1822/23), p. 367) gewinnt sie als Spezialfälle aus den allgemeinen Ausdrücken der Produkte beliebig vieler Cosinus oder Sinus durch Summen.

97) Simpson tracts, p. 77; Euler Petrop. n. comm. 5 (1754/55[60]), p. 167. Ebenso *Lexell,* ib. 18 (1773), p. 55; *Prony,* j. éc. polyt. cah. 3, an III, p. 249; *Lacroix,* traité[11]) 1 (1797), p. 69? (2me éd. 1810, p. 87); *A. Cagnoli,* trigonometria, p. 113 der 2. franz. Ausg. von 1808; *Garnier,* analyse algébrique, 2me éd. Paris 1814, p. 459; *Cauchy,* Analyse algébrique, Paris 1821 = Oeuvres (2) 3, p. 201. Die Symbolik, deren sich *Tralles* Berlin. Abh. 1812/13[16], p. 225 (von 1810) zur

gebrochene Werte von $m$[99]) in Anspruch, was freilich vielfach zu divergenten Reihen führt. Für ganzzahlige Werte des Exponenten führt er sie auch in die Gestalt über[100]):

$$(33)\qquad 2^{2\mu-1}\cos^{2\mu}x=\frac{1}{2}\binom{2\mu}{\mu}+\sum_{n=1}^{\mu}\binom{2\mu}{\mu-n}\cos 2nx,$$

$$(34)\qquad 2^{2\mu-2}\cos^{2\mu-1}x=\sum_{n=1}^{\mu}\binom{2\mu-1}{\mu-n}\cos(2n-1)x,$$

$$(35)\qquad 2^{2\mu-1}\sin^{2\mu}x=\frac{1}{2}\binom{2\mu}{\mu}+\sum_{n=1}^{\mu}(-1)^n\binom{2\mu}{\mu-n}\cos 2nx,$$

$$(36)\qquad 2^{2\mu-2}\sin^{2\mu-1}x=\sum_{n=1}^{\mu}(-1)^{n-1}\binom{2\mu-1}{\mu-n}\sin(2n-1)x.$$

Endlich gibt er noch Rekursionsformeln für die Koeffizienten der Entwicklung von $\cos^m x\sin^p x$, für ganzzahlige $m, p$[101]). Andererseits kommt er in einer nachgelassenen Abhandlung, indem er in der Binomialentwicklung von $(1+z)^m$ das $z=(\cos x+i\sin x)$ setzt, zu den Formeln[102]):

$$(37)\qquad \begin{cases} 2^m\cos^m\frac{x}{2}\cos\frac{mx}{2}=\sum_n\binom{m}{n}\cos nx, \\ 2^m\sin^m\frac{x}{2}\sin\frac{mx}{2}=\sum_n\binom{m}{n}\sin nx, \end{cases}$$

die er ebenfalls ausdrücklich für beliebige $m$ in Anspruch nimmt.

---

Ableitung der Formeln bedient, kommt auf einen versteckten Gebrauch komplexer Größen hinaus; ebenso die von *W. W.*, Cambr. math. j. $4_4$ (1844), p. 176.

98) Petrop. n. comm. 5, p. 169. Die Formeln für $m=-1$ erhält er ib. p. 203 auch, indem er in den Gleichungen (23), (24) $a$ durch $x$ und $x$ durch $2x$ ersetzt.

99) p. 170. p. 188 hat er auch Reihen für Produkte von Potenzen von $\cos x$ und $\sin x$.

100) p. 170, 174 (ebenso *Lexell*, ib. 18, p. 56). Der Beweis, daß diese Gleichungen für jedes positive ganzzahlige $m$ gelten, durch den Schluß von $m$ auf $m+1$ bei *G. S. Klügel*, math. Wörterbuch 2, Leipzig 1805, p. 583 und bei *J. Ph. Wolfers*, Arch. Math. 24 (1855), p. 303. Klügel hat auch den entsprechenden Schluß für negative ganzzahlige $m$, nachdem er den Fall $m=-1$ wie Euler behandelt hat.

101) p. 177.

102) Petrop. n. acta 7 (1789[93]), p. 91, 97 (von 1776); die entsprechenden Reihen mit abwechselnden Vorzeichen, Petersb. mém. 5 (1812[15]), p. 59 (von

*A. J. Lexell*[103]) gewinnt zunächst die endlichen Summen

$$(38)\qquad \sum_{n=0}^{N}(n+1)\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(\alpha+nx),$$

indem er sie durch Multiplikation mit $2\sin\frac{x}{2}$ und Umformung der Produkte trigonometrischer Funktionen in Summen auf die Summen II A 9a, (4), p. 645 zurückführt; durch Wiederholung desselben Verfahrens dann auch

$$(39)\qquad \sum_{n=0}^{N}\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(\alpha+nx).$$

Für $\alpha=x$, $N=\infty$ erhält er so die [übrigens divergenten] Spezialfälle der Reihen (32) für $m=-2$ und $m=-3$.

*J. L. Lagrange*[104]) geht, um die Gleichung (32) zu erhalten, davon aus, daß die Funktion $y=\cos^m x$ der Differentialgleichung

$$(40)\qquad y'\cos x+my\sin x=0$$

genügt; er setzt dann für sie eine Entwicklung nach den Cosinus der Vielfachen von $x$ an und erhält für deren Koeffizienten eine Rekursionsformel; den dabei zunächst unbestimmt bleibenden ersten Koeffizienten bestimmt er durch Benutzung eines speziellen Wertes von $x$. Auch er nimmt die Formeln ausdrücklich für beliebige Werte von $m$ in Anspruch.

*A. Cagnoli*[105]) drückt zunächst $\cos^m x$ durch $\cos mx$ und niedrigere Potenzen von $\cos x$ aus und setzt dann sukzessive ein; nachdem er so die Anfangsglieder der Reihe (32), sowie der entsprechenden Reihen für $\sin^m x$ berechnet hat, glaubt er das allgemeine Gesetz ablesen zu können.

Auf die bei diesen Entwicklungen auftretenden Schwierigkeiten hat zuerst *S. D. Poisson* aufmerksam gemacht[106]). Indem er nämlich,

---

1780). In unbequemerer Formulierung bei *J. Landen*, math. mem. 1 (1780), p. 87, der auch durch Integration weitere Reihen erhält, die sich aber nicht mehr durch „elementare" Funktionen ausdrücken lassen.

103) Petrop. n. comm. 18 (1773), p. 67.

104) Leçons sur le calcul des fonctions, 1801 (Oeuvres 10, p. 138). Die gliedweise Differentiation, deren sich *Lagrange* hier bedient, ist nicht ohne weiteres zulässig; das bemerkt bereits *O. Bonnet*, Brux. mém. cour. in 4°, 23 (1844/50), p. 25.

105) Mem. soc. ital. 7 (1794), p. 16. Später (trigonometria piana e sferica, 2da ed., Bologna 1804; p. 112 der franz. Übersetzung von *N. M. Chompré*, Paris 1808) erklärt er das selbst für umständlich und bedient sich der Exponentialfunktionen komplexen Arguments.

106) Corresp. éc. polyt. 2 (1811), p. 212?· klarer die Darstellung bei *Lacroix*, traité 3, 2me éd. Paris 1819, p. 605.

um das Binomialtheorem anzuwenden, die Funktion $\cos x$ auf die beiden Formen

$$\tfrac{1}{2} e^{-ix}(1 + e^{2ix}), \quad \tfrac{1}{2} e^{ix}(1 + e^{-2ix})$$

bringt, erhält er für $2^m \cos^m x$ das eine Mal $X + Yi$, das andere Mal $X - Yi$, wo

$$(41) \begin{cases} X = \cos mx + \binom{m}{1} \cos(m-2)x + \binom{m}{2} \cos(m-4)x + + + \cdots, \\ Y = \sin mx + \binom{m}{1} \sin(m-2)x + \binom{m}{2} \cos(m-4)x + + + \cdots. \end{cases}$$

Für ganzzahlige Werte von $m$ löst sich diese Schwierigkeit dadurch, daß sich $Y \equiv 0$ ergibt; für andere meint er, die beiden Formeln stellten zwei verschiedene Werte der vieldeutigen Potenz dar und Eulers Gleichung (32) sei also dann falsch. Man werde aber alle Werte der vieldeutigen $m^{\text{ten}}$ Potenz erhalten können, wenn man rechts $x$ durch $x + 2r\pi$ ersetze, unter $r$ eine beliebige ganze Zahl verstanden. *Lacroix*[107]) fügt noch die Frage hinzu, wieso die lineare Differentialgleichung erster Ordnung (40) zwei wesentlich verschiedene Integrale $X$ und $Y$ haben könne. *Deflers*[108]) und *G. Plana*[109]) bemühen sich [durch Rechnen mit divergenten Reihen] zu zeigen, daß $Y$ in der Tat in allen Fällen $\equiv 0$ sein müsse — während doch schon *Poisson* gezeigt hatte, daß das für $x = \pi$, $m = \frac{1}{2}$ sicher nicht der Fall ist[110]); *M. Pagani*[111]) und *M. Ohm*[112]) dagegen meinen, $Y$ werde sich von $X$ nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. *A. L. Crelle*[113]) führt die Bemerkung von Poisson, betr. die Ersetzung von $x$ durch $x + 2r\pi$,

---

107) p. 617. Er steht dicht vor der Schlußfolgerung: also darf man mit divergenten Reihen nicht rechnen, kann sich aber doch nicht entschließen, sie zu ziehen.

108) Mitgeteilt von Lacroix, ib. p. 620. Die Benutzung divergenter Reihen monieren *M. Ohm,* Aufsätze aus dem Gebiete der höheren Mathematik, Berlin 1823, p. 43; *E. E. Kummer,* Preisschrift, Halle 1832, p. 2 und *A. Genocchi,* ann. sci. mat. fis. 8 (1857), p. 411.

109) ann. de math. 11, 1820/21, p. 84. Den Fall $x = \pi$ schließt er aus.

110) *Lacroix,* p. 623, fragt, wie dieser Widerspruch zu heben sei, kann aber keine Antwort geben.

111) ann. de math. 13 (1822/23), p. 96. Sein eigener späterer Versuch zur Bestimmung dieses Faktors (bull. Férussac 5 (1826), p. 9) beruht auf Poinsots Formeln (44), (45) schreibt diesen aber irrtümlicherweise Gültigkeit für alle Intervalle zu, in denen $\cos x > 0$, bzw. $< 0$ ist.

112) Aufsätze aus dem Gebiete der höheren Mathematik, Berlin 1823, p. 15.

113) ann. de math. 13 (1822/23), p. 218; ausführlicher in einer Note zu seiner Übersetzung von „Lagranges mathematischen Werken“ 2, Berlin 1823, p. 321; für beliebige gebrochene $m$ Versuch einer Theorie der analytischen Fakultäten, Berlin 1823, p. 321?

näher aus: zur Bestimmung der Zusammengehörigkeit der verschiedenen Werte von $r$ zu den verschiedenen Werten der $m^{\text{ten}}$ Potenz genüge es, einen speziellen Wert von $x$, etwa $x = 0$ oder $x = \pi$ zu benutzen. So erhalte man z. B. für $m = \frac{1}{k}$:

$$(42)\quad \begin{cases} X_r(0) = 2^m \cos \frac{2r\pi}{k}, & Y_r(0) = 2^m \sin \frac{2r\pi}{k}, \\ X_r(\pi) = 2^m \cos \frac{(2r+1)\pi}{k}, & Y_r(\pi) = 2^m \sin \frac{(2r+1)\pi}{k}. \end{cases}$$

Damit sei zugleich die Frage beantwortet, unter welchen Umständen $Y$ oder auch $X$ wirklich gleich 0 sei. *M. Ohm*[114]) gibt als den allgemeinen Ausdruck der Potenz:

$$(43)\qquad (2\cos x)^m = (X + iY)(\cos 2mk\pi + i \sin 2mk\pi).$$

Dann bespricht er die Summen (37)[115]) und bestimmt die Werte, die in ihnen der Potenz beizulegen seien, für die verschiedenen möglichen Intervalle; dadurch gelangt er dann auch zu einer vollständigen Bestimmung von $X$ und $Y$[116]).

*Poinsot*[117]) berichtigt zunächst die Schlußweise von Lagrange dahin, daß aus ihr nicht die Gleichung (32), sondern

$$(44)\qquad (2\cos x)^m = 1^m X \text{ oder } \frac{(-1)^m X}{\cos m\pi}$$

folge. Rechts könne man noch $x$ durch $x + 2r\pi$ ersetzen; wenn $m$ ein Bruch vom Nenner $q$ sei, erhalte man so rechts scheinbar $q^2$ Werte, links nur $q$; diese Schwierigkeit sei dahin zu lösen, daß man, wenn man $x$ durch $x + 2r\pi$ ersetze, auch in dem zutretenden Faktor das 0 oder $\pi$ um $2r\pi$ vermehren müsse. Daraus ergebe sich, daß für

114) Aufsätze aus dem Gebiete der höheren Mathematik, Berlin 1823, p. 47. Die Anwendung der Methode der unbestimmten Koeffizienten als Beweismittel verwirft er überhaupt (p. 39; Bull. Férussac 5, 1826, p. 251).

115) p. 94. Er beschränkt sich seltsamerweise auf positive $m$.

116) p. 101; die Resultate auch Bull. Férussac, 5 (1826), p. 251.

117) Recherches sur l'analyse des sections angulaires, Paris 1825, p. 58 (von 1823); Referat von S[aigey], bull. Férussac 4 (1825), p. 340. Er fügt bei (p. 74): aus der für $-\pi/2 < x < \pi/2$ geltenden Gleichung $Y = 0$ könne man durch Integration weitere erhalten, u. a. die Gleichungen (409) und (410). Solche nur für ein bestimmtes Intervall geltende Identitäten habe man aufzufassen als „Gleichungen mit unendlich vielen Wurzeln in arithmetischer Progression von unendlich kleiner Differenz". Im übrigen verweist er bereits auf Fourier. Nach den Referaten Bull. Férussac 7 (1827), p. 353 und 8 (1827), p. 175 findet sich eine Darstellung von Poinsot's Methode auch bei *D. Lardner*, Analytical treatise on trigonometry, Lond. 1826; dagegen Einwände bei *Brinkley*, Dublin philos. J. 1826, p. 291.

$0 < x < \pi/2$ Eulers Formel (32) in der Tat richtig sei; dagegen für $\pi/2 < x < 3\pi/2$ erhalte man:

$$(45) \qquad (-2\cos x)^m = \frac{X}{\cos m\pi} = \frac{Y}{\sin m\pi}.$$

Dem gegenüber bemerkt *Poisson*[118]): die Schwierigkeit bei der Anwendung der Methode von Lagrange auf diese Fragen liege darin, daß man von ihr aus nicht a priori angeben könne, an welchen Stellen der Wechsel in dem Werte des zuletzt zu bestimmenden Faktors einzutreten habe. Auch das erste Verfahren Eulers führe zunächst nur zu der Gleichung

$$(46) \quad (\cos 2mk\pi + i\sin 2mk\pi)|2\cos x|^m = (X + iY)(\cos 2mt\pi + i\sin 2mt\pi)$$

die Differenz $t - k$ könne und müsse dann von $x$ abhängen, aber die Ableitung der Formel gebe darüber keinen Aufschluß. Er leitet daher zunächst die allgemeine Formel

$$(47) \quad \sum \binom{m}{n} r^n(\cos(m-2n)x + i\sin(m-2n)x) = |1 + 2r\cos 2x + r^2|^m(\cos ms + i\sin ms)$$

ab, in der $s$ den Hauptwert der Funktion

$$(48) \qquad s = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}\operatorname{tg} x\right)$$

bedeutet, und gewinnt aus ihr die Folgerung:

$$(49) \quad X_t + iY_t = \begin{cases} |2\cos x|^m(\cos mt\pi + i\sin mt\pi), & \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right), \\ |2\cos x|^m(\cos m(t+1)\pi + i\sin m(t+1)\pi), & \left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right), \end{cases}$$

die mit den Resultaten von Poinsot übereinstimme.

Dieselbe Folgerung erhält dann auch *A. Cauchy* aus der von ihm[119]) aufgestellten Gleichung:

$$(50) \quad \sum \binom{m}{n} r^n(\cos nx + i\sin nx) = |1 + 2r\cos x + r^2|^{\frac{m}{2}}(\cos ms + i\sin ms),$$

in der $s$ den Hauptwert der Funktion

$$(51) \qquad s = \operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin x}{1 + r\cos x}$$

118) Bull. Férussac 4 (1825), p. 145. Die sich anschließende Polemik zwischen Poinsot (ib. p. 221) und Poisson (p. 344) fördert sachlich nichts.

119) Analyse algébrique, Paris 1821; Oeuvres (2) 3, p. 247. Ebenso *A. v. Ettingshausen,* Vorlesungen über die höhere Mathematik 1, Wien 1827, p. 126; auch die Formeln für $r = 1$, doch ist der Konvergenzbeweis falsch. — Ohne Konvergenzuntersuchung auch bei *Th. Clausen*, J. f. Math. 4 (1829), p. 282. Für $r = 1$ hat Clausen nur die Formeln mit $k = 0$, ohne Angabe der Gültigkeitsgrenzen.

bedeutet, in der übersichtlicheren Form[120]):

$$(52)\qquad \begin{cases} X + iY = (2\cos\theta)^m(\cos mk\pi + i\sin mk\pi), \\ \left(x = \theta + k\pi,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},\ k \text{ ganzz.}\right). \end{cases}$$

Er zeigt überdies, daß die Reihen für $m > 0$ in der Tat konvergieren, und meint, es werde leicht sein, ihre Konvergenz für $-1 < m < 0$ außer an den Grenzen der Intervalle mit den in seiner analyse algébrique entwickelten Methoden nachzuweisen[121]).

*Stein*[122]) geht allen Schwierigkeiten aus dem Wege, indem er einfach sagt: man braucht nur $\sqrt{X^2 + Y^2}$ zu berechnen, die hinzutretende Einheitswurzel ist in jedem Einzelfall leicht zu bestimmen.

Ein *Anonymus*[123]) meint: da $X + iY$ und $X - iY$ zwei Werte derselben Potenz seien, müsse es zwei ganze Zahlen $k, l$ von der Art geben, daß

$$(X + iY)e^{2mk\pi i} = (X - iY)e^{-2ml\pi i}$$

oder

$$(53)\qquad X\sin m(k+l)\pi = Y\cos m(k+l)\pi$$

sei, was mit den Resultaten von Poinsot[117]) übereinstimme und die von Lacroix[107]) aufgeworfene Frage beantworte.

*L. Olivier*[124]) und *van Rees*[125]) versuchen zu zeigen, daß der Wert der bei dem Lagrangeschen Verfahren zuletzt bestimmten Konstanten nur an solchen Stellen sich ändern könne, an welchen $\cos x$ sein Vorzeichen wechselt; doch sind ihre Schlußweisen unzureichend.

*K. D. v. Münchow*[126]) gewinnt die Gleichungen (41) zunächst für

120) Exerc. d'analyse 1 (1826); Oeuvres (2) 6, p. 18.

121) p. 21.

122) Ann. de math. 15 (1824/25), p. 150.

123) Ib. 16 (1825/26), p. 255.

124) J. f. Math. 1 (1826), p. 16; reproduziert von *C. G. Berling*, Diss. Lund 1830 (respond. L. Torbjörnsson), p. 29.

125) Corresp. math. phys. 6 (1830), p. 279. Er ist noch der Meinung, die durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten gelieferten Reihenentwicklungen seien immer richtig, wenn sie nur konvergierten.

126) Grundlehren der Trigonometrie, Bonn 1826, p. 124; p. 239 verifiziert er sie durch die Bemerkung, daß die zu entwickelnden Funktionen der Differentialgleichung

$$y''\cos x + 2my'\sin x\cos x + m(m+1)y = 0$$

genügen. Er macht sich unnötige Schwierigkeiten, weil er glaubt, die Moivresche Formel, die er aus nur für das Intervall $(-\pi/2 \cdots + \pi/2)$ geltenden Reihenentwicklungen ableitet, gelte ebenfalls nur für dieses Intervall; dasselbe Mißverständnis findet sich auch noch in der von *H. F. Scherk* veranlaßten Diss. von *Fr. Bredow*, Wratisl. 1829, p. 31, der p. 29 dasselbe sogar für die Entwicklungen von Sinus und Cosinus nach Potenzen des Bogens behauptet.

das Intervall $(-\pi/2 \cdots + \pi/2)$, geht dann zu den übrigen Intervallen über und erhält so schließlich die Formel

$$(54) \qquad (2\cos k\pi \cos x)^m = X \cos mk\pi + Y \sin mk\pi$$
$$\left(\frac{2k-1}{2}\pi < x < \frac{2k+1}{2}\pi\right)$$

*A. v. Ettingshausen*[127]) hat zwar Bedenken gegen den Grenzübergang von $r < 1$ zu $r = 1$, glaubt aber, sie fielen weg, wenn man zunächst die allgemeineren Reihen

$$(55) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} r^n \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (nx + \alpha)$$

untersuche.

Zum Abschluß sind diese Diskussionen erst durch *N. H. Abels* Untersuchung der Gültigkeitsgrenzen der Binomialreihe gekommen, von der man wohl annehmen muß, daß sie gerade durch sie angeregt worden ist[128]). Abel zeigt, daß die Reihen (37) und die aus ihnen weiter abzuleitenden Reihen

bei $m > 0$ für jedes $x$,

wenn $-1 < m < 0$ im Innern der nachher anzugebenden Intervalle,

wenn $m \leqq -1$ überhaupt nicht

konvergieren[129]), und daß die Gleichungen (37) durch die folgenden zu ersetzen sind[130]):

$$(56) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} nx = (2 + 2\cos x)^{\frac{m}{2}} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left(\frac{mx}{2} - mk\pi\right),$$
$$((2k-1)\pi < x < (2k+1)\pi).$$

Indem er diese Gleichungen kombiniert und $2x$ für $x$ schreibt, erhält er[131]):

$$(57) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} \cos(\alpha - 2nx) = |2\cos x|^m \cos(\alpha - mx + 2mk\pi),$$
$$\left(\frac{2k-1}{2}\pi < x < \frac{2k+1}{2}\pi\right)$$

---

127) Zeitschr. Math. Phys. 1 (1826), p. 107. In der Verwerfung der Anwendung der Methode der unbestimmten Koeffizienten auf dieses Problem stimmt er ib. p. 378 Poisson zu.

128) Vgl. die unter 61 zitierten Briefstellen.

129) J. f. Math. 1 (1826); Oeuvres 1, p. 239.

130) p. 246.

131) p. 249. Da er kein Zeichen für den absoluten Betrag hat, muß er jede Gleichung noch in zwei zerlegen. Für positive Werte von $m$ gelten die Formeln einschließlich, für $-1 < m < 0$ ausschließlich der Grenzen.

und daraus endlich[132]):

$$(58)\qquad \left.\begin{aligned} X &= |\,2\cos x\,|^m \cos mk\pi \\ Y &= |\,2\cos x\,|^m \sin mk\pi \end{aligned}\right\}\left(k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}\right),$$

und für die entsprechenden Reihen mit Gliedern abwechselnder Vorzeichen:

$$(59)\qquad \left.\begin{aligned} X_1 &= |\,2\sin x\,|^m \cos m\left(k + \tfrac{1}{2}\right)\pi \\ Y_1 &= |\,2\sin x\,|^m \sin m\left(k + \tfrac{1}{2}\right)\pi \end{aligned}\right\}(k\pi < x < (k+1)\pi).$$

Gleichwohl ist auch später noch darauf nicht immer Rücksicht genommen worden. So geht eine neue Abhandlung von *Crelle*[133]) von der Formel

$$(60)\qquad (2\cos x)^m = X_r \pm i Y_r$$

aus, beschränkt sich aber gleich auf die Voraussetzungen

$$m > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\cdot$$

Er fragt dann zunächst[134]), wie $r$ gewählt werden müsse, damit $Y_r \equiv 0$ werde; er schließt, daß die Bedingung hierfür von $x$ nicht abhängen könne, und findet als Antwort: $\cos 2mr\pi$ muß $= 1$ sein. Also sei $Y_0 = 0$, $X_0 = (2\cos x)^m$. Von dem so gewonnenen Resultat geht er dann zu andern Intervallen über.

*Berling*[135]) setzt auseinander, daß die Gleichung $Y_0 \equiv 0$ schon deshalb nicht allgemein richtig sein könne, weil sie durch die Substitution von $x + \pi$ für $x$ in $Y_0 \sin m\pi + X_0 \cos m\pi \equiv 0$ übergehe und also dann auch $X_0 \equiv 0$ sein müßte; im übrigen benutzt auch er die Binomialentwicklung von $(e^{ix} + e^{-ix})^m$ unter Berücksichtigung aller Werte der vieldeutigen $m^{\text{ten}}$ Potenz.

*G. Peacock*[136]) behauptet ohne Beweis, es sei

$$(61)\qquad |\,2\cos x\,|^m = \begin{cases} \dfrac{X_r}{\cos 2mr\pi} = \dfrac{Y_r}{\sin 2mr\pi} & \text{für } \cos x > 0, \\[2ex] \dfrac{X_r}{\cos(2r+1)m\pi} = \dfrac{Y_r}{\sin(2r+1)m\pi} & \text{für } \cos x < 0 \end{cases}$$

[was nur für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ richtig sein würde].

Daß $Y$ im Intervall $(-\pi/2 < x < \pi/2)$ identisch Null ist, be-

132) Ein im Nachlaß Abels vorhandener Anfang einer direkten Behandlung der Reihen (41) (vgl. Oeuvres 2, p. 286) ist nicht veröffentlicht.

133) J. f. Math. 5 (1830), p. 197.

134) p. 201.

135) Diss. 117, p. 25.

136) Brit. assoc. rep. 3, f. 1833, p. 262.

weist auch *E. E. Kummer*[137]) durch Differentiation einer seiner hypergeometrischen Reihen.

*J. A. Grunert*[138]) beweist die Richtigkeit der Gleichungen (58) und (59) mit Hilfe der Funktionalgleichungen, denen ihre beiden Seiten genügen.

Auch in der folgenden Zeit werden die Formeln noch zuweilen einfach durch Einführung komplexen Arguments in die Binomialreihe abgeleitet, ohne weitere Erörterung der Berechtigung zu diesem Verfahren; so die Gleichung (32) von *Barfuß*[139]) und die Gleichungen (37) für negative $m$ von *R. L. Ellis.*[140]) Meist aber wird die Abelsche Konvergenzuntersuchung[129]) mit einer oder der andern mehr oder weniger glücklichen Modifikation wiedergegeben, gewöhnlich ohne Erörterung der Berechtigung, in den Formeln zur Grenze $r = 1$ überzugehen; so bei *E. H. Dirksen*[141]), bei *J. A. Grunert*[142]), bei *J. Dienger*[143]), bei *Schloemilch*[144]). Eine ausführliche Erörterung gerade dieser Berechtigung findet sich bei *E. J. Bjoerling*[145]); eine kurze Darstellung des ganzen Beweises, unter Bezugnahme auf die allgemeine Theorie des Verhaltens einer Potenzreihe auf dem Konvergenzkreis, bei *O. Bonnet.*[146])

Zu einer andern Klasse hierher gehöriger Entwicklungen gelangt *Poisson*[149]) zunächst auf dem Wege, daß er Lagranges Differentialgleichung (40) durch eine nach den Cosinus der steigenden Vielfachen von $x$ fortschreitende Reihe zu integrieren versucht; er erhält Rekur-

---

137) J. f. Math. 15 (1836), p. 166.

138) Suppl. zu Klügels math. Wörterbuch 2, Leipz. 1836, p. 676.

139) Arch. Math. Phys. 7, 1846, p. 22.

140) J. de math. 9 (1844), p. 424, 429 = writings p. 228, 233.

141) Organon der Analysis 1, Berlin 1845, p. 906; vgl. auch Berl. Ber. 1845, p. 263.

142) Arch. Math. 8 (1846), p. 288.

143) J. f. Math. 34 (1847), p. 232; von 1845. Hier ist auch sonst nicht alles in Ordnung, z. B. p. 228 unten der Schluß, daß ein unendliches Produkt verschwinden müsse, wenn jeder seiner Faktoren absolut $< 1$ ist. Später (ib. 41, 1851, p. 48; von 1847) summiert Dienger für negative ganzzahlige $m$ erst die mit einem bestimmten Glied abgebrochene Reihe und führt dann den Grenzübergang zu unendlicher Gliederzahl aus.

144) Differentialrechnung, Greifswald 1847, p. 279. Vorher hatte Schloemilch teils nur die Formeln für positive ganzzahlige $m$ (Algebraische Analysis, Jena 1845, p. 168), teils nur diejenigen für $r < 1$ (ib. p. 219; Differentialrechnung p. 220) gegeben.

145) Upsala n. a. 13 (1847), p. 155.

146) Brux. mém. cour. in-4° 23 (1850), p. 113.

149) Bull. Férussac 4 (1825), p. 348. Er bemerkt, daß das Integral nur scheinbar zwei willkürliche Konstante enthalten könne, daß also $P$ zu $Q$ proportional sein müsse. Nur könne der Proportionalitätsfaktor in jedem Stetigkeitsintervall ein anderer sein.

sionsformeln für die Koeffizienten, vermöge deren sich alle durch die beiden ersten ausdrücken, und damit das Resultat in der Form:

$$\cos^m x = AP + BQ, \tag{62}$$

wo $P = \frac{1}{2} + \frac{m}{m+2} \cos 2x + \frac{m(m-2)}{(m+2)(m+4)} \cos 4x + \cdots,$

$$Q = \cos x + \frac{m-1}{m+3} \cos 3x + \frac{(m-1)(m-3)}{(m+3)(m+5)} \cos 5x + \cdots.$$

Die Rekursionsformeln verifiziert er dann noch, indem er in der (auf das Intervall $\left(0 \cdots \frac{\pi}{2}\right)$ bezogenen) Integraldarstellung der Koeffizienten partielle Integrationen ausführt; für die Anfangsglieder begnügt er sich mit der Bemerkung, daß man sie durch Einsetzen spezieller Werte in die Reihen bestimmen könne. *A. Cauchy*[150]) erhält

$$\cos^m x = \frac{1}{2^{m-1}} \frac{\Gamma(m+1)}{\left(\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\right)^2} P \tag{63}$$

aus der Integraldarstellung der Koeffizienten.

*van Rees*[151]) zeigt, daß man zwar diese Entwicklungen, dagegen nicht die von $\cos^m x$ nach den Sinus der Vielfachen von $x$, nach dem Verfahren von *Lagrange*[104]) erhalten könne.

*E. E. Kummer*[154]) gewinnt entsprechende, nur durch abwechselnde Vorzeichen der Glieder sich unterscheidende Entwicklungen für $\sin^m x$, indem er die Binomialentwicklungen von

$$(1 + \exp ix)^m \text{ und } (1 + \exp(-ix))^m$$

miteinander multipliziert; die Koeffizienten bestimmt er zunächst, indem er durch logarithmische Differentiation Rekursionsformeln für sie gewinnt; dann zeigt er[153]), daß sie sich als hypergeometrische Reihen mit dem vierten Argument 1 und also als Quotienten von Gammafunktionen ausdrücken.

*Fr. W. Newman*, mit der vorangehenden Literatur der Frage offenbar ganz unbekannt, leitet die Möglichkeit solcher Entwicklungen daraus ab, daß man $(2 \cos x)^m$ nach Potenzen von $\log(2 \cos x)$ entwickeln, für diese Funktion die Entwicklung (145) benutzen und schließlich die auftretenden Potenzen und Produkte der Cosinus wie-

150) Exerc de math. 2 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 422.

151) Corresp. math. phys. 6 (1830), p. 283. Die versprochene Fortsetzung ist nicht erschienen; van Rees ist nach der Notiz ib. p. 395 infolge der politischen Ereignisse ausgewandert.

152) Preisschr. Halae 1832 (Scherk gewidmet), p. 9.

153) p. 12; p. 10 weist er auf die Übereinstimmung seiner Resultate mit denjenigen von Abel [130]) hin.

der durch lineare Funktionen der Cosinus der Vielfachen der Arguments ersetzen und umordnen könne[154]). Zur Bestimmung der Verhältnisse der Koeffizienten dieser Entwicklung bedient er sich der Differentialgleichung (40), zur Bestimmung des Anfangsglieds seiner Darstellung (364) durch ein bestimmtes Integral[155]).

Andererseits können diese Entwicklungen natürlich auch von der Integraldarstellung der Koeffizienten (Nr. 16) aus erhalten werden. Zur Auswertung der dabei auftretenden Integrale hat bereits *L. Euler* den Anfang gemacht, indem er einerseits die Identität

$$(64)\quad \begin{cases} (m+n)\int \sin^{m-1} x \sin (n+1)x\,dx \\ = 2\sin^m x \sin nx + (n-m)\int \sin^{m-1} x \sin (n-1)x\,dx \end{cases}$$

und drei analoge ableitet, die aus ihr durch Vertauschung des einen oder des andern Sinus mit einem Cosinus hervorgehen[156]); andererseits die folgende[157]):

$$(65)\quad (m^2-n^2)\int \cos^m x \cos nx\,dx = -n\cos^m x \sin nx$$
$$+ m\cos^{m-1}x \sin x \cos nx + m(m-1)\int \cos^{m-2} x \cos nx\,dx,$$

154) Cambr. Dubl. math. j. 3 (1848), p. 61.

155) Das Bedenken: ob man aus dem Verschwinden aller folgenden Glieder der durch die Integration entstehenden Reihe schließen dürfe, daß auch ihre Summe verschwinde — sucht er durch eine Untersuchung der Konvergenz der durch unbestimmte Integration entstehenden Reihe zu zerstreuen. Dabei benutzt er eine nur für positive $m$ geltende asymptotische Darstellung der $\Gamma$-Funktion und kommt so zu dem falschen Schlusse, für negative $m$ sei die Reihe stets divergent.

156) Petrop. n. acta 6 (1788[90]), p. 38; 7 (1789[93]), p. 22 (beides von 1776). Seine Absicht ist dabei auf die Auffindung algebraischer Kurven gerichtet, deren Bogenlänge sich durch Integrale gewisser vorgegebener Formen ausdrücken läßt. Für $m = n$ fällt das zweite Glied rechts weg; *J. Liouville* bemerkt dazu (J. de math. (2) 19 (1874), p. 189): man könne die Ableitung der so entstehenden Formeln vereinfachen, wenn man je zwei von ihnen unter Benutzung komplexer Größen in eine zusammenziehe. Einzelne dieser Rekursionsformeln auch bei *G. Frullani,* Mem. soc. ital. 19 (1820), p. 228 (von 1818); bei *S. D. Poisson,* Bull. Férussac 4 (1825), p. 350; in anderer Bezeichnung bei *E. E. Kummer,* Preisschr. Halae 1832, p. 16.

157) Petrop. n. acta 11 (1793[98]), p. 124 (von 1777). *N. Fuß* (Petersb. mém. 4 (1811[13]), p. 210, 212 (von 1806)) leitet aus entsprechenden Formeln Darstellungen der Quotienten

$$\int_0^\pi \sin^m x \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} nx\,dx : \int_0^\pi \sin^p x \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} nx\,dx$$

durch Quotienten unendlicher Produkte ab (auch für nicht ganzzahlige $m$, $n$, $p$).

die durch Einsetzen der Grenzen für ganzzahlige $n$ die Rekursionsformel:

$$(66)\qquad \int_0^{\pi} \cos^m x \cos nx\,dx = \frac{m(m-1)}{m^2-n^2}\int_0^{\pi} \cos^{m-2} x \cos nx\,dx$$

liefert. Diese führt ihn zunächst, wenn auch $m$ eine ganze Zahl ist, zu dem Resultat:

$$(67)\quad \int_0^{\pi} \cos^m x \cos nx\,dx = 0 \text{ für } m < n \text{ und für } m > n,\ m - n \text{ ungerade;}$$

für $m = n$ wird sie illusorisch, er erhält aber erst für die kleinsten Werte von $n$, dann allgemein durch Benutzung komplexer Größen[158]):

$$(68)\qquad \int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx\,dx = \frac{\pi}{2^n}$$

und daraus durch abermalige Anwendung von (66):

$$(69)\qquad \int_0^{\pi} \cos^m x \cos nx\,dx = \binom{m}{r}\frac{\pi}{2^m} \text{ für } m > n,\ m - n = 2r \text{ gerade.}$$

*S. D. Poisson*[159]) erhält aus seinen Gleichungen (594) speziell für $F(z) = (1+z)^m$:

$$(70)\qquad \frac{2}{\pi}(1-r^2)\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^m x \cos mx}{1 - 2r\cos 2x + r^2}\,dx = \left(\frac{1+r}{2}\right)^m,$$

$$(71)\qquad \frac{4r}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^m x \sin mx \sin 2x}{1 - 2r\cos 2x + r^2}\,dx = \left(\frac{1+r}{2}\right)^m - \left(\frac{1}{2}\right)^m;$$

und durch Entwicklung beider Seiten nach Potenzen von $r$ und Koeffizientenvergleichung:

$$(72)\qquad \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^m x \begin{Bmatrix}\cos mx \cos 2nx\\ \sin mx \sin 2nx\end{Bmatrix} dx = \frac{1}{2^m}\binom{m}{n}.$$

---

158) p. 130. Er benutzt die Resultate, um die Koeffizienten der Entwicklung einer Funktion nach den Cosinus der Vielfachen von $x$ durch die Koeffizienten ihrer Entwicklung nach den Potenzen von $\cos x$ auszudrücken. — Die zuweilen sich findende Angabe, *Laplace* habe die Werte der Integrale (69) in seiner théorie analytique des probabilités gegeben, ist unrichtig; es finden sich dort (oeuvres 7, p. 240) nur asymptotische Werte derselben für große $m$.

159) J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 489; auch conn. des temps pour 1836[33], add. p. 7.

160) Oeuvres 2, p. 79 (zuerst 1839 in der Ausgabe von Holmboe publiziert).

*N. H. Abel*[160]) setzt in der Gleichung

$$(73)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos\left(n \operatorname{arc\,tg} \frac{t}{r}\right)}{\sqrt{r^2+t^2}^{\,n}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{(1+r)^n}$$

die einen speziellen Fall einer in Nr. **103** zu besprechenden Gleichung vorstellt, $r = 1$, $t = \operatorname{tg} x$; so erhält er wieder [Eulers] Gleichung (69).

*A. Cauchy*[161]) gewinnt aus seinen Residuensätzen die Gleichung

$$(74)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+iz)^a(1-iz)^b} = \frac{\pi}{2^{a+b-2}} \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a)\Gamma(b)},$$

die durch die Substitutionen

$$z = \operatorname{tg} x, \quad a + b - 2 = m, \quad b - a = n$$

in

$$(75)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos nx\, dx = \frac{\pi}{2^{m+1}} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m-n}{2}+1\right)}$$

übergeht; sowie die speziellen Gleichungen[162]):

$$(76)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x \cos mx\, dx = \frac{\pi}{2^{m+1}},$$

$$(77)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos\left(\frac{m\pi}{2} - mx\right) dx = \frac{\pi}{2^{m+1}},$$

$$(78)\qquad \int_0^{\pi} \cos^m x\, dx = \begin{cases} 0 \text{ für ungerade } m, \\ \pi \cdot \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots m} \text{ für gerade } m. \end{cases}$$

Auch erhält er solche Formeln[163]), indem er in den ebenfalls aus Residuensätzen folgenden Gleichungen:

$$(79)\qquad \int_0^{\pi} \left\{ \begin{matrix} (1 - r\cos x)\cos\frac{mx}{2} \\ r\sin x \sin\frac{mx}{2} \end{matrix} \right\} \frac{dx}{(1 - 2r\cos x + r^2)\cos^m\frac{x}{2}} = 2^{m-1}\pi[1 \pm (1+r)^m] \qquad (r < 1)$$

beiderseits nach Potenzen von $r$ entwickelt.

161) Mém. sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires, Paris 1825, p. 40; Ann. de math. 17 (1827), p. 109, 127. Ohne Beweis auch Bull. Férussac 3 (1825), p. 221.

162) Exerc. de math. 1, 1826 = Oeuvres (2) 6, p. 278, 280. Gleichung (76) ebenso auch bei *M. Ohm,* System der Mathematik 9, Nürnb. 1852, p. 207.

163) Ann. de math. 17 (1827), p. 124.

Die allgemeinere Formel

$$(80)\quad \int_0^\pi (1+2r\cos x+r^2)^{\frac{m}{2}} \cos(nx-m\varphi)\,dx = \frac{\pi r^n \Gamma(m+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m-n+1)}$$

$$\left(r<1,\ n \text{ ganzzahlig, } \operatorname{tg}\varphi = \frac{r\sin x}{1-r\cos x}\right)$$

aus der (69) sich für $r=1$ ergibt, ist von *C. J. D. Hill*[164]) angegeben und von *Th. Clausen*[165]) durch geeignete Verbindung des reellen und des imaginären Teils der Entwicklung von $(1+r\exp ix)^m$ bewiesen worden.

Die Werte der Integrale (75) können auch aus einer Formel von *v. Schmidten*[166]) entnommen werden, der überhaupt das Integral

$$(81)\qquad \int_0^\pi f(2\cos\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha$$

durch die Koeffizienten der Entwicklung von $f(t)$ nach Potenzen von $t$ ausdrückt.

Auch *E. E. Kummer*[167]) geht zur Bestimmung dieser Integrale von einer allgemeinen Identität aus; ist nämlich

$$\varphi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n u^n,$$

so ist:

$$(82)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{\Gamma(m+n)\Gamma(p)}{\Gamma(m)\Gamma(p+n)} = \frac{\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{p-m-1}\varphi(u)\,du}{\int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{p-m-1}\,du}.$$

Wird in diesen Formeln

$$u=\sin^2 x,\quad \varphi(u)=\cos 2px \quad \text{oder} \quad = \frac{\sin(2p-1)x}{(2p-1)\sin x}$$

gesetzt, so lassen sich die links stehenden Reihen elementar summieren, und es kommt:

$$(83)\quad \int_0^{\pi/2} \sin^{m-1}\alpha\cos^{p-1}\alpha \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(m\alpha+p\alpha)\,d\alpha = \frac{\Gamma(m)\Gamma(p)}{\Gamma(m+p)}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\frac{m\pi}{2}.$$

Wird aber $m=1/2$ genommen, $p$ durch $p/2+1$ ersetzt und

$$u=\sin^2 x,\quad \varphi(u)=\cos nx,$$

164) J. f. Math. 7 (1831), p. 103.

165) Ib. p. 309.

166) J. f. Math. 5 (1830), p. 396.

167) Ib. 17 (1837), p. 215; in anderer Darstellung ib. 20 (1840), p. 2. Vgl. auch *O. Schloemilch*, analytische Studien, 1, Leipz. 1848, p. 155, sowie *Oettinger*, J. f. Math. 38, 1848, p. 217.

so kommt:

$$(84)\quad \int\limits_0^{\pi/2} \cos^p\alpha \cos n\alpha\, d\alpha = \frac{\pi}{2^{p+1}} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p-n}{2}+1\right)}$$

und daraus:

$$(85)\quad \int\limits_0^{\pi} \sin^p\alpha \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} n\alpha\, d\alpha = \frac{\pi}{2^p} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p-n}{2}+1\right)} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} \frac{n\pi}{2}.$$

*J. Binet*[168]) kommt zu diesen Formeln von der anderen Seite her, indem er nämlich den Quotienten

$$(86)\quad \frac{B(t,t)}{B(t+r,\, t-r)}$$

in eine Fakultätenreihe entwickelt und diese dann durch bestimmte Integrale summiert.

*J. L. Raabe* leitet zunächst[169]) für unbestimmte Integrale der Form

$$(87)\quad \int \exp n\alpha \begin{Bmatrix}\cos^m\alpha\\ \sin^m\alpha\end{Bmatrix} d\alpha$$

Rekursionsformeln ab, ersetzt in diesen $n$ durch $ni$ und trennt Reelles und Imaginäres; Einsetzen der Grenzen gibt ihm dann[170]):

$$(88)\quad \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2\mu}\alpha \begin{Bmatrix}\cos n\alpha\\ \sin n\alpha\end{Bmatrix} d\alpha = \frac{\varphi(n,\mu)}{n} \begin{Bmatrix}\sin\frac{n\pi}{2}\\ N-\cos\frac{n\pi}{2}\end{Bmatrix},$$

$$(89)\quad \int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2\mu+1}\alpha \begin{Bmatrix}\cos n\alpha\\ \sin n\alpha\end{Bmatrix} d\alpha = \psi(n,\mu) \begin{vmatrix}\cos\frac{n\pi}{2}\\ \frac{1}{n}N_1+\sin\frac{n\pi}{2}\end{vmatrix},$$

$$(90)\quad \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2\mu}\alpha \begin{Bmatrix}\cos n\alpha\\ \sin n\alpha\end{Bmatrix} d\alpha = \frac{\varphi(n,\mu)}{n} \begin{Bmatrix}N\sin\frac{n\pi}{2}\\ 1-N\cos\frac{n\pi}{2}\end{Bmatrix},$$

$$(91)\quad \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2\mu+1}\alpha \begin{Bmatrix}\cos n\alpha\\ \sin n\alpha\end{Bmatrix} d\alpha = \psi(n,\mu) \begin{Bmatrix}1+\frac{1}{n}N_1\sin\frac{n\pi}{2}\\ -N_1\cos\frac{n\pi}{2}\end{Bmatrix};$$

168) J. Éc. polyt. cah. 27 (1839) p. 164; er zeigt, daß seine Resultate mit denjenigen von Cauchy[161]) und Poisson[159]) übereinstimmen. p. 197 leitet er aus ihnen einen asymptotischen Ausdruck für große Werte von $m$ ab.

169) Differential- u. Integralrechnung 1, Zürich 1839, p. 145.

170) p. 240. Daß Raabe erst 0 und $\infty$, dann $\pi/2$ und $\infty$ als Grenzen nimmt und sich dabei auf seine in Nr. 30 erwähnten Anschauungen stützt, macht die Resultate scheinbar von diesen abhängig; aber nur scheinbar.

wobei:

$$\varphi(n,\mu)\cdot\prod_{k=1}^{\mu}(4k^2-n^2)=(2\mu)!,$$

$$\psi(n,\mu)\cdot\prod_{k=1}^{\mu}((2k+1)^2-n^2)=(2\mu+1)!;$$

$$N=1-\frac{n^2}{2}-\frac{n^2(2^2-n^2)}{4!}-\cdots-\frac{n^2(2^2-n^2)(4^2-n^2)\cdots((2\mu-2)^2-n^2)}{(2\mu)!}$$

$$N_1=\quad-\frac{n^2}{1}-\frac{n^2(1-n^2)}{3!}-\cdots-\frac{n^2(1-n^2)(3^2-n^2)\cdots((2\mu-1)^2-n^2)}{(2\mu+1)!}$$

und zwar gilt jede dieser Gleichungen für alle Werte der Exponenten, für die der Nenner der rechten Seite nicht Null wird.

*J. A. Serret*[171]) leitet Cauchys Formel (75) durch eine ziemlich umständliche und die Einführung komplexer Größen nicht genügend begründende Rechnung mit der Integraldarstellung der Gammafunktionen ab. Für die drei andern Funktionen erhält er eine Darstellung durch ein anderes bestimmtes Integral, z. B.[172])

$$(92)\quad\int_0^{\pi/2}\cos^m x\sin nx\,dx=\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m-n}{2}+1\right)}\int_0^1\frac{t^{\frac{m-n}{2}}-t^{\frac{m+n}{2}}}{(1+t)^{m+1}(1-t)}\,dt.$$

Für den Fall $n=m+2k$, $k$ ganzzahlig, erhält er[173]) durch wiederholte partielle Integration Formeln ähnlicher Art wie die von Raabe (91).

Auch hat er die Formeln[174]):

$$(93)\quad\int_0^{\pi/2}\sin^{r-1}x\cos^{s-1}x\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(q-p)x\,dx$$

$$=\frac{B(r,s)}{B(p,q)}\begin{Bmatrix}\cos\frac{r\pi}{2}\\ \sin\frac{r\pi}{2}\end{Bmatrix}\int_0^1\frac{t^{p-1}-t^{q-1}}{(1-t)^r(1+t)^s}\,dt\quad(p+q=r+s)$$

und aus ihnen für $2r=2s=p+q$, wenn noch $x$ durch $x/2$ ersetzt wird:

$$(94)\quad\int_0^{\pi}\sin^{m-1}x\begin{Bmatrix}\cos nx\\ \sin nx\end{Bmatrix}dx=2^{m-1}\Gamma(m)\frac{\Gamma\left(\frac{m-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma(m-n)\Gamma(m+n)}\begin{Bmatrix}\cos\frac{n\pi}{2}\\ \sin\frac{n\pi}{2}\end{Bmatrix}$$

---

171) J. de math. 8 (1843), p. 2; andere Darstellung ib. p. 491.

172) p 7.

173) p. 9.

174) p. 12.

*O. Schloemilch*[175]) erhält Ausdrücke für die Integrale

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2} \cos^{p-2}\alpha \cot^q \alpha \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} p\alpha\, d\alpha,\\
&\int_0^{\pi/2} \cos^{u+n-1}\alpha\, \mathrm{tg}^{m-1}\alpha \begin{Bmatrix}\cos\mu\alpha \sin(n+1)\alpha\\ \sin\mu\alpha\cos(n+1)\alpha\end{Bmatrix} d\alpha,\\
(95)\qquad &\int_0^{\pi/2} \cos^{u+n-1}\alpha\, \mathrm{tg}^{m}\alpha \begin{Bmatrix}\cos\mu\alpha \cos(n+1)\alpha\\ \sin\mu\alpha\sin(n+1)\alpha\end{Bmatrix} d\alpha,\\
&\int_0^{\pi/2} \cos^{u+2n}\alpha \cos\mu\alpha\, d\alpha,\\
&\int_0^{\pi/2} \cos^{u+2n}\alpha \sin\mu\alpha\, \mathrm{tg}\,\alpha\, d\alpha
\end{aligned}
$$

in denen $m$ eine gerade, $n$ eine beliebige ganze Zahl, $\mu$ eine beliebige Zahl bedeutet[176]), durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge in den Doppelintegralen

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\xi^{u-1}e^{-\xi}}{u^q}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} d\xi\, du.\\
&\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{u^m\xi^{u-1}e^{-\xi}}{r^2+u^2}\begin{Bmatrix}r\cos u\xi\\ u\sin u\xi\end{Bmatrix} d\xi\, du,\\
&\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\xi^{u-1}e^{-\xi}}{(r^2+u^2)^{n+1}}\begin{Bmatrix}r\cos u\xi\\ u\sin u\xi\end{Bmatrix} d\xi\, du,
\end{aligned}
$$

unter Benutzung der hier unter Nr. **59b** und **c** besprochenen Formeln, und Einführung einer neuen Integrationsvariablen.

*M. Ohm* beginnt[177]) mit der Ableitung von Rekursionsformeln für die unbestimmten Integrale; indem er dann die Grenzen einsetzt, bestätigt er[178]) Raabes Resultate[170]).

Die unter den Voraussetzungen:

$$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}, \qquad 0<\alpha<2$$

gültige Entwicklung der Potenzen von $\cos x$ nach den Kosinus der

175) J. f. Math. 33, 1846, p. 354.

176) d. h. natürlich nur eine solche, daß die betr. Integrale Bedeutung haben.

177) System der Mathematik 9, Nürnb. 1852, p. 36.

178) p. 48.

Vielfachen von $\alpha x$:

(96) $\cos^m x$

$$= \frac{\alpha \Gamma(m+1)}{2^m}\left[\frac{1}{2\left(\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\right)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha x}{\Gamma\left(\frac{m+n\alpha}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m-n\alpha}{2}+1\right)}\right]$$

erhält *A. Cauchy*[179]) durch Anwendung der Integraltheoreme auf das Intervall $\left(0 \cdots \frac{\pi}{\alpha}\right)$. *E. E. Kummer*[180]) gewinnt diese Reihe sowie die entsprechende Reihe für $\sin^m x$, zunächst für $\alpha =$ einer Potenz von $\frac{1}{2}$, indem er die Entwicklungen von $\sin^m x$ und $\cos^m x$ ausmultipliziert, dann $x$ durch $x - \frac{\pi}{2}$ ersetzt und diese Prozedur unbegrenzt wiederholt. Außerdem hat er noch allgemeinere Formeln, aus denen dann wieder durch Spezialisierung z. B. die folgende hervorgeht[181]):

(97) $$|\cos x|^m = \frac{\Gamma(m+1)}{2^m \cos 2h\alpha\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2\alpha x + 2nx)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+\alpha+n+1\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-\alpha-n+1\right)},$$

$$(h-\tfrac{1}{2})\pi < x < (h+\tfrac{1}{2})\pi;$$

in ihr müßte ihrer Ableitung nach $\alpha$ zunächst ein Bruch sein, dessen Nenner eine Potenz von 2 ist, Kummer nimmt sie aber dann für beliebige reelle $\alpha$ in Anspruch.

Später[182]) erhält Kummer solche Entwicklungen als Spezialfälle hypergeometrischer Reihen.

Die Koeffizienten der Entwicklung

(98) $$\cos^j x \sin^k x = \sum_n \mathfrak{N}_{n,j,k}\begin{cases}\cos nx & \text{für gerade } k\\ \sin nx & \text{,, ungerade } k\end{cases}$$

erscheinen bei *A. Cauchy* (für ganzzahlige $j$, $k$) zunächst[183]) in der Gestalt von Summen von Produkten von Binomialkoeffizienten. Später[184])

---

179) Exerc. de math. 2, 1827, = Oeuvres (2) 7, p. 424. Die Annahme $\alpha = 2$ liefert die Gleichung (62) mit $B = 0$.

180) Preisschr. Halae 1832, p. 16 für $\alpha = \frac{1}{2}$; ib. p. 21 und J. f. Math. 14, 1835, p. 110 für $\alpha =$ einer Potenz von $\frac{1}{2}$. Nachdem die Form der Entwicklung auf dem im Text angegebenen Wege festgestellt ist, bestimmt er (p. 24 bzw. 114) die Koeffizienten auch noch durch ihre Integraldarstellung, indem er die Integrale mit Hilfe von Rekursionsformeln auswertet.

181) J. f. Math. 14, p. 119.

182) J. f. Math. 15 (1836), p. 165.

183) Turiner Mem. von 1831, p. 75.

184) Paris C. R. 11, 1840, p. 474, 505 = Oeuvres 1 (5), p. 309, 314. Das Vorzeichen ist an der letzteren Stelle richtig. Noch später (Paris C. R. 12 (1841), p. 92 = Oeuvres (1) 6, p. 25 nennt Cauchy $\mathfrak{N}_{n,j,k}$ das, was er vorher $2^{j+k}\mathfrak{N}_{n,j,k}$ genannt hatte.

schreibt er diese Summen — sie sind „*Cauchysche Zahlen*" genannt worden — in der Gestalt

$$\mathfrak{N}_{n,j,k} = \frac{1}{2^{j+k}} \sum_l (-1)^{k-l} \binom{k}{l} \binom{j}{\frac{k+j-n}{2} - l} \tag{99}$$

und gibt für sie die Rekursionsformeln:

$$\begin{cases} \mathfrak{N}_{n,j,k} = \mathfrak{N}_{n+1,j-1,k} + \mathfrak{N}_{n-1,j-1,k}, \\ \mathfrak{N}_{n,j,k} = \mathfrak{N}_{n+1,j,k-1} - \mathfrak{N}_{n-1,j,k-1}. \end{cases} \tag{100}$$

**6. Anhang zu Nr. 5.** Anhangsweise sei noch das Integral

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\sin \frac{2\mu+1}{2} \alpha}{\sin \frac{1}{2} \alpha} \right)^s \cos n\alpha \, d\alpha \tag{101}$$

erwähnt, durch das sich der Koeffizient von $a^{\pm n}$ in der Entwicklung von

$$\left( \sum_{\nu=-\mu}^{\mu} a^\nu \right)^s \tag{102}$$

ausdrückt. *P. S. de Laplace*[185]) gibt dafür mit Hilfe seiner Methode (Nr. **109**) den folgenden für große Werte von $s$ geltenden asymptotischen Ausdruck

$$\frac{(2\mu+1)^s \sqrt{3}}{\sqrt{2\pi s \mu (\mu+1)}} \exp \left( \frac{-3n^2}{2 s \mu (\mu+1)} \right). \tag{103}$$

Ebenso gibt er[186]) für ein bei einem ähnlichen Problem auftretendes Integral den asymptotischen Ausdruck:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^s \cos n\alpha \, d\alpha \sim \sqrt{\frac{3}{2\pi s}} \exp \left( \frac{-3n^2}{s} \right). \tag{104}$$

Ferner sei hier noch angeführt, daß *A. Cauchy*[187]) die Koeffizienten der Entwicklungen von $\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^s$ nach den Kosinus oder den Sinus der Vielfachen von $x$ durch Entwicklung beider Seiten der Residuenformeln

$$\int_0^\pi \begin{Bmatrix} 1 - r\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{Bmatrix} \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)^s d\alpha}{1 - 2r\cos\alpha + r^2} = \frac{\pi}{2} \begin{Bmatrix} \sec \\ \operatorname{cosec} \end{Bmatrix} \frac{s\pi}{2} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{1-r}{1+r} \right)^s \right] \tag{105}$$

nach Potenzen von $r$ erhält;

185) Théorie analytique des probabilités, livre 1, Nr. 36 (p. 162 der Ausgabe von 1847).

186) Ib. Nr. 42 (p. 186). Laplace gibt hier auch noch weitere Glieder der Näherungsformel.

187) Ann. de math. 17 (1827), p. 125.

daß *E. E. Kummer*[188]) die Koeffizienten der Entwicklung von

(106) $$\cos^m x \cos (z \operatorname{arctg} x)$$

durch Grenzfälle hypergeometrischer Funktionen von $z$ ausdrückt; daß *J. Binet*[189]) für

(107) $$\int_0^\pi (1 + 2 \cos \alpha)^s d\alpha$$

einen Ausdruck durch eine konvergente Fakultätenreihe ableitet; endlich, daß *A. Meyer*[190]) die Entwicklungen von

(108) $$\operatorname{tg}^m\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right), \quad \frac{1}{\sin x} \operatorname{tg}^m\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right), \quad \operatorname{tg}^m \frac{x}{2}, \quad \frac{1}{\cos x} \operatorname{tg}^m \frac{x}{2}$$

für ganzzahlige $m$ erhält, indem er in den unter [87]) erwähnten Potenzreihen die Variable durch $\sin x$ oder $\cos x$ ersetzt, deren Potenzen durch die Funktionen der Vielfachen von $x$ ersetzt und umordnet; die Koeffizienten erscheinen in der Gestalt hypergeometrischer Reihen.

**7. Trigonometrische Entwicklung rationaler ganzer Funktionen. Die Bernoullischen Funktionen.** Zu der ersten hierher gehörigen Reihe ist *L. Euler* zunächst auf einem merkwürdigen Umweg gekommen[191]): indem er nämlich die höheren Differentialquotienten der Funktion $\operatorname{arc} \operatorname{tg} y$ mit Hilfe der Substitution $y = \cot x$ durch die allgemeine Formel ausdrückt

(109) $$\frac{d^n \operatorname{arc} \operatorname{tg} y}{dy^n} = (-1)^{n-1}(n-1)! \sin^n x \sin n x$$

und dann $\operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(y - \frac{1}{\sin x}\right)$ nach der Taylorschen Formel entwickelt, erhält er:

(110) $$\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots.$$

188) J. f. Math. 17 (1837), p. 235.

189) J. Éc. polyt. cah. 27 (1839), p. 329.

190) Brux. mém. 21, 1848, p. 14.

191) Institutiones calculi differentialis, Laus. 1755, II, § 87, 91, 92. Euler teilt die Formel schon 1744 als Probe der von diesem Buch zu erwartenden neuen Resultate ohne Beweis an Goldbach mit, corresp. 1, p. 279. Wenn *Littrow* (Petersb. mém. 7 (1815/16[20]), p. 121) $-x/2$ anstatt $(\pi - x)/2$ als Summe der Reihe findet, so beruht das auf einer unrichtigen Annahme über die den vieldeutigen Funktionen in der Identität

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{r \sin x}{1 \pm r \cos x} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin x}{r \pm \cos x} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\pm \operatorname{tg} x)$$

beizulegenden Werte.

Um dieselbe Zeit[192]) kommt er von der divergenten Reihe (25) durch Integration zu:

$$\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - + - \cdots = \frac{x}{2} \tag{111}$$

und unter Benutzung der schon früher von ihm gefundenen Formel:

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - + - \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

zu:

$$\cos x - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{9}\cos 3x - + - \cdots = \frac{\pi^2}{12} - \frac{x^2}{4}. \tag{112}$$

Ebenso gewinnt *D. Bernoulli*[193]) unter Benutzung der Leibnizschen Reihe für $\pi/4$ aus (25) die Gleichung (110), und aus ihr durch weitere Integrationen:

$$\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{9}\cos 3x + + \cdots = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6}, \tag{113}$$

$$\sin x + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{27}\sin 3x + + \cdots = \frac{x^3}{12} - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi^2 x}{6}, \tag{114}$$

$$\cos x + \frac{1}{16}\cos 2x + \frac{1}{81}\cos 3x + + \cdots = -\frac{x^4}{48} + \frac{\pi x^3}{12} - \frac{\pi^2 x^2}{12} + \frac{\pi^4}{90}, \tag{115}$$

$$\sin x + \frac{1}{32}\sin 2x + \frac{1}{243}\sin 3x + + \cdots = -\frac{x^5}{240} + \frac{\pi x^4}{48} - \frac{\pi^2 x^3}{36} + \frac{\pi^4 x}{90} \tag{116}$$

Er zeigt, daß man dabei die Summen der reziproken Potenzen der natürlichen Zahlen nicht als bekannt vorauszusetzen braucht, sondern sie mit erhält, wenn man zur Konstantenbestimmung nicht nur einen, sondern zwei spezielle Werte von $x$ herbeizieht. Auch bemerkt er, daß diese Gleichungen nur für das Intervall $(0 \ldots 2\pi)$ gelten; für andere Intervalle seien die Integrationskonstanten anders zu bestimmen[194]).

In einer derselben Zeit angehörenden Abhandlung über bestimmte Integrale[195]) beginnt *Euler* mit den als rekurrierende Reihen aufgefaßten Entwicklungen (2) und (3), deren linke Seiten er bzw. mit $P$ und $Q$ bezeichnet. Er zeigt, daß

$$\int \frac{P\,dr}{r} = -\int Q\,dx = -\log(1 - 2r\cos x + r^2), \tag{117}$$

$$\int \frac{Q\,dr}{r} = \int P\,dx = \operatorname{arc\,tg} \frac{r \sin x}{1 - r\cos x} \tag{118}$$

192) Petrop. n. comm. 5 (1754/55[60]), p. 204. *G. Frullani* (mem. soc. ital. 19 (1821), p. 235; von 1818) gewinnt die Gleichung (111), indem er (3) nach $r$ zwischen den Grenzen 0 und 1 integriert.

193) Ib. 17 (1772), p. 6; daraus *S. D. Poisson,* J. Éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 313; 19 (1823), p. 412.

194) Petrop. n. comm. 17 (1772), p. 8; ebenso *Poisson,* J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 411.

195) Petrop. n. comm. 19 (1774) = instit. calc. integr. 4 (1794), suppl. V. § 32.

ist; durch Wiederholung derselben Operationen gelangt er zu Gleichungen zwischen den mehrfachen Integralen von $P$ und $Q$ nach $r$ und $x$. In den nach $x$ genommenen Integralen kann man die Substitution $r=1$ schon vor der Integration ausführen; aus $P$ entstehen dabei die Reihen, von denen hier die Rede ist. Euler gibt noch die Formeln für

$$\sum \frac{\cos nx}{n^6} \quad \text{und} \quad \sum \frac{\sin nx}{n^7}$$

und sagt dann, das allgemeine Bildungsgesetz sei nun hinlänglich klar. Für die Konstantenbestimmung schließt er sich jetzt an das Verfahren von D. Bernoulli an, das er um so bemerkenswerter findet[196]), als er früher geglaubt habe, die Summen der reziproken Potenzen ließen sich auf keinem andern Wege als dem ursprünglich von ihm eingeschlagenen finden. Außerdem gibt er noch den Satz, daß $\sum \frac{\sin nx}{n^{2r+1}}$ durch $x(\pi - x)(2\pi - x)$ teilbar sei[197]).

In einer erst aus dem Nachlaß veröffentlichten Abhandlung aus derselben Zeit[198]) gelangt *Euler* zu der Formel (111) noch auf einem andern Wege, indem er nämlich in der Interpolationsformel, welche die Funktion $z^{-1} \sin z$ durch ihre speziellen Werte für $z = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm n$ darstellt, zu $z=0$ und $n=\infty$ übergeht.

*J. Landen*[199]) gewinnt die Formel (111) aus der logarithmischen Reihe durch Übergang zu einem komplexen Argument, dann (110) durch Vertauschung von $x$ mit $\pi - x$, die weiteren Formeln durch Integration; die Konstanten bestimmt er wie Bernoulli.

*J. Fr. Pfaff*[200]) will die Formel (111) dadurch beweisen, daß er die einzelnen Reihenglieder nach Potenzen von $x$ entwickelt und dann die Summationsreihenfolge vertauscht, indem er den dabei auftretenden divergenten numerischen Reihen bestimmte Werte zuschreibt. Dasselbe Verfahren wendet er dann auf die weiteren Reihen an; er erhält

196) § 56. 197) § 48.

198) Opuscula analytica 1, Petrop. 1783, p. 166; von 1772. Er leitet aus ihr noch die Formel (112) und eine weitere für $\sum \pm \frac{\sin nx}{n^3}$ durch Integration her.

199) Math. memoirs 1, London 1780, p. 69—74. Sein Interesse geht hauptsächlich auf die numerischen Reihen, die man durch Annahme spezieller Werte für $x$ erhält.

200) Versuch einer neuen Summationsmethode, Berlin 1788, p. 5; ebenso *J. A. Eytelwein*, Grundlehren der höheren Analysis 2, Berlin 1824, p. 637. Das Verfahren würde sich wohl in eine strenge Ableitung verwandeln lassen, wenn man von der Gleichung (15) ausginge und den Grenzübergang zu $r=1$ erst am Schlusse vornähme. *M. Ohm* (Petersb. mém. prés. 1, 1831, p. 127; von 1825) ergänzt es durch eine Betrachtung, die auf der Benutzung des Lagrangeschen Restglieds der Taylorschen Reihe beruht.

so allgemein:

$$(119)\quad \sin x - \frac{\sin 2x}{2^{2k-1}} + \frac{\sin 3x}{3^{2k-1}} - + - \cdots = x \sum \pm n^{-2k+2}$$
$$- \frac{x^3}{3!} \sum \pm n^{-2k+4} + - + \cdots \pm \frac{x^{2k-3}}{(2k-3)!} \sum \pm n^{-2} \mp \frac{1}{2} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

$$(120)\quad \cos x - \frac{\cos 2x}{2^{2k}} + \frac{\cos 3x}{3^{2k}} - + - \cdots = \sum \pm n^{-2k}$$
$$- \frac{x^2}{2!} \sum \pm n^{-2k+2} + - + \cdots \pm \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} \sum \pm n^{-2} \mp \frac{1}{2} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Die Substitution $x = \pi$ gibt Rekursionsformeln zwischen den auftretenden Summen. Zu den Summen der entsprechenden Reihen mit lauter positiven Gliedern gelangt er dann mit Hilfe der Identität:

$$\sum \pm \frac{\sin nx}{n^{2k-1}} = \sum \frac{\sin nx}{n^{2k-1}} - \frac{1}{2^{k-2}} \sum \frac{\sin 2nx}{n^{2k-1}}.$$

Nachher macht ihm merkwürdigerweise dieser Übergang Bedenken; er entwickelt daher[201]) die endliche Summe

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n}$$

nach Potenzen von $x$, setzt $nx = z$ und führt dann den Grenzübergang zu $n = \infty$ an den einzelnen Gliedern aus; so erhält er als Summe:

$$z - \frac{z^3}{3 \cdot 3!} + \frac{z^5}{5 \cdot 5!} - \frac{z^7}{7 \cdot 7!} + - + \cdots = \int_0^z \frac{\sin nz}{z} dz.$$

Das würde für $n = \infty$, also auch $z = \infty$ zunächst $\pi/2$ geben; daß er doch den richtigen Wert herausrechnet, beruht darauf, daß er erst noch $\frac{x}{2} = x \sum \pm 1$ beiderseits addiert und dann nicht $\sum 1 = n$, sondern $\sum 1 + \sum \pm 1 = n$ benutzt.

Die Ableitung der Ausgangsgleichung aus der logarithmischen Reihe findet sich auch bei *S. F. Lacroix*[202]), bei *Littrow*[203]), bei *Stein*[204]), bei *R. Lobatto*[205]), bei *Th. Clausen*[206]), bei *A. de Morgan*[207]). *N. H.*

201) p. 118. Man könnte auch dieses Verfahren durch Einführung eines Konvergenzfaktors in einen Beweis verwandeln.

202) Traité du calcul différentiel et du calcul intégral 1, 2me éd., Paris 1810, p. 94.

203) Petersb. mém. 7 (1815/16[20]), p. 112; daraus dann p. 129 die weiteren Reihen durch Integration.

204) Gerg. ann. 13 (1823), p. 112.

205) Recherches sur la sommation de qq. séries trigonométriques, Delft 1826, p. 9.

206) J. f. Math. 4 (1829), p. 283.

207) Differential and integral calculus, London 1836—1841 heftweise als

*Abel*[208]) gewinnt sie, indem er den Grenzübergang, der bei reellem Argument von der Binomialreihe zur logarithmischen Reihe führt, auch für komplexe Argumente vornimmt.

*Fourier*[209]) ergänzt die Ableitung der Ausgangsformel aus der divergenten Reihe (25) durch Hinzufügung des Restgliedes:

$$(121)\quad \begin{cases} \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + - + \cdots + \frac{(-1)^{N+1}}{N}\sin Nx \\ \qquad = \frac{x}{2} + (-1)^{N+1}\int\limits_0^x \frac{\cos\left(Nx+\frac{x}{2}\right)}{2\cos\frac{x}{2}}\,dx \end{cases}$$

und zeigt dann durch partielle Integration, daß das Integral rechts mit wachsendem $N$ gegen 0 konvergiert. Nachher leitet er dasselbe Resultat auch noch aus der Reihendarstellung[210]) und aus der Integraldarstellung[211]) der Koeffizienten her. Weitere Reihen gewinnt er daraus durch Integration[210]).

*A. M. Legendre*[212]) entwickelt in der Eulerschen Integralformel

$$(122)\qquad \int\limits_0^1 \frac{r^a + r^{-a}}{1+2r\cos x + r^2}\,dr = \frac{\pi}{\sin a\pi}\,\frac{\sin a x}{\sin x}$$

beiderseits nach Potenzen von $a$ und findet so:

$$(123)\qquad \frac{1}{(2k)!}\int\limits_0^1 \frac{(\log r)^{2k}\sin x\,dr}{1+2r\cos x + r^2} = \frac{x}{2\sin x}\times$$

mal dem Koeffizienten von $a^{2k}$ in der Entwicklung von

$$\frac{\pi \sin a x}{x \sin a\pi}$$

nach Potenzen von $a$. Das Integral in (123) läßt sich aber mit Hilfe der Gleichung (3) auswerten; so erhält auch er die Gleichungen (119), (120). Nachher zeigt er noch, wie man sie durch Integration aus der ersten erhalten kann; die Werte der Summen der reziproken Potenzen

---

Bestandteil der library of useful knowledge erschienen, p. 244; durch Integration aus den Gleichungen (25) und dann auch die weiteren durch Integration sich ergebenden Reihen, p. 608.

208) J. f. Math. 1 (1826) = Oeuvres 1, p. 237, 247.

209) Paris mém. 4 (1819/20) [24] (Preisschrift von 1811), p. 273; théorie Nr. 182 = Oeuvres 1, p. 161. Ebenso für die Reihe (108) *Deflers*, bull. philom. (1819), p. 163.

210) Preisschrift p. 295; théorie Nr. 216 = Oeuvres 1, p. 202.

211) Preisschrift p. 305; théorie Nr. 222 = Oeuvres 1, p. 213.

212) Exerc. de calcul intégral 2, Paris 1817, p. 103 (publ. 1814).

nimmt er dabei als bekannt an. Weiterhin[213]) bekommt er dieselben Reihen auch noch, indem er in den unter Nr. **13** zu besprechenden Gleichungen beiderseits nach Potenzen von $\mu$ entwickelt.

*G. Frullani*[214]) gewinnt die Gleichung

$$(124)\quad x^m = \frac{\pi^m}{m+1} + 2\sum (-1)^n \Big\{ m\,\frac{\pi^{m-2}}{n^2} - m(m-1)(m-2)\,\frac{\pi^{m-4}}{n^4} + m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\,\frac{\pi^{m-6}}{n^6} - + \cdots \Big\} \cos nx,$$

sowie die Entwicklung (111) von $x/2$ nach den Sinus der Vielfachen von $x$ aus der Integraldarstellung der Koeffizienten.

*A. Cauchy*[215]) erhält die Reihen (119), (120) auch aus der Anwendung seiner Residuensätze auf die Funktionen von $z$:

$$(125)\qquad \frac{1}{z^{2m}}\,\frac{\pi\cos xz}{2\sin\pi z},\quad \frac{1}{z^{2m+1}}\,\frac{\pi\sin xz}{2\sin\pi z}.$$

*S. D. Poisson*[216]) verifiziert die Formel (119) für $k = 2$ durch die Integraldarstellung der Koeffizienten (Nr. **16**).

*N. I. Lobatschefskij*[217]) untersucht die Konvergenz der Reihe (110) direkt mit elementaren Hilfsmitteln; indem er je zwei aufeinanderfolgende Glieder zusammenfaßt und diese Operation mehrmals wiederholt, findet er:

$$(126)\qquad \sum_{n=1}^{2^k} \frac{\sin nx}{n} = \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \frac{\sin(2n-1)x}{2n(2n-1)}$$

$$+ \sum_{r=2}^{k} \Big[ \cos\frac{x}{2}\cos x\cos 2x \ldots \cos 2^{2k-3}x \sum_{n=1}^{2^{k-r}} \frac{\sin\big(2^r n - \frac{1}{2}(3^{2r-1}-1)\big)x}{2n(2n-1)} \Big]$$

$$+ \cos\frac{x}{2}\cos x\cos 2x\cos 2^{2k-2}x \sin\frac{2^k+1}{2}x.$$

---

213) Ib. p. 169 (publ. 1815); ebenso auch *S. D. Poisson*, j. éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 313 und *A. Cauchy*, exerc. d'analyse 2 (1827) (Oeuvres (2) 7, p. 357).

214) Ricerche sopra le serie, Firenze 1816, p. 61, 67; ebenso *J. Dienger*, J. f. Math. 34 (1847), p. 92, 96 (von 1845).

215) Exerc. d'analyse 2 (1827) (œuvres (2) 7, p. 357).

216) J. Ec. polyt. cah. 21 (1832), p. 203. Wenn er mécanique 2 (1833), p. 337, um die Formel für $k = 1$ zu beweisen, die Integraldarstellung der Koeffizienten nicht direkt auf die Funktion $x$, sondern auf $x^2$ anwendet und dann differentiiert, so beruht das auf den in Nr. 42 erwähnten Bedenken. — Die Ableitung der Ausgangsformel aus der Integraldarstellung der Koeffizienten steht auch bei *O. Schloemilch* (Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale, Jena 1843, p. 10, 22; analytische Studien 2, Leipz. 1848, p. 46) und bei *J. Dienger* (J. f. Math. 34, 1847, p. 92; von 1845).

217) Kasan Schriften 1834, p. 167 (russ.); eine gekürzte deutsche Übersetzung verdanke ich Herrn *Fr. Engel.*

Läßt man $k$ über alle Grenzen wachsen, so konvergiert die Reihe in der ersten Zeile unbedingt; in der zweiten Zeile ist der Faktor vor dem inneren Summenzeichen absolut kleiner als

$$< \frac{1}{2^{r-1} \sin \frac{x}{2}};$$

also konvergiert auch diese Zeile unbedingt; die dritte Zeile konvergiert gegen Null.

Daß die angegebenen Werte der Summen (110), (111) $\cdots$ nur für das Intervall $(-\pi \cdots + \pi)$ gelten, außerhalb desselben aber durch diejenigen Werte zu ersetzen sind, die sich aus ihnen durch die Forderung der Periodizität ergeben, hat bereits *D. Bernoulli*[218]) bemerkt; daß man die richtigen Werte auch durch eine sorgfältige Untersuchung der in der Gleichung (15) dem arc tg beizulegenden Werte bestimmen kann, hat *S. D. Poisson*[219]) gezeigt; daß der Grenzübergang von $r < 1$ zu $r = 1$ einer besonderen Rechtfertigung bedarf, hat aber erst *N. H. Abel*[220]) bemerkt und sie durch seinen allgemeinen Satz (Nr. 29) gegeben.

Die in diesen Formeln auftretenden rationalen ganzen Funktionen hängen enge zusammen mit den sogenannten Bernoullischen Funk-

218) Petrop. n. comm. 17 (1772), p. 8.

219) J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 411. *J. R. Young*, der diese Stelle Poissons nicht gekannt und nur unvollständige Ableitungen der Formel (111) vor Augen gehabt zu haben scheint, begnügt sich zu sagen, daß man das beizufügende Multiplum von $\pi$ in jedem besonderen Falle bestimmen könne (Dubl. proc. 3, 1846, p. 47).

220) J. f. Math. 1 (1826) = Oeuvres 1, p. 247. Um die Konvergenz der Reihen für $r = 1$ behaupten zu können, beruft sich Abel auf einen Satz, dessen Voraussetzungen, wie *E. G. Bjoerling* (Upsala n. a. 13 (1847), p. 174) mit Recht bemerkt, hier nicht erfüllt sind; doch meint *Sylow* (Oeuvres d'Abel 2, p. 304), es liege vielleicht nur ein Versehen vor und Abel habe sich auf sein „Lemma" berufen wollen, aus dem in der Tat geschlossen werden kann, daß die Summe beliebig vieler Glieder der Reihe vom $m^{\text{ten}}$ an nicht größer als $1/(m \cos x/2)$ sein kann. Die Schlußweise von *O. Schlömilch*, Algebr. Analysis, Jena 1845, p. 225 wäre, wie *Björling* an derselben Stelle bemerkt, nur gerechtfertigt, wenn vorher die gleichmäßige Konvergenz der Binomialreihe als Funktion des Exponenten $\mu$ auch für $\mu = 0$ und $x = \pm 1$ bewiesen wäre. Noch unvollständiger ist die Darstellung bei *J. Dienger*, J. f. Math. 34 (1847), p. 230 (von 1845), in *Schlömilchs* Differentialrechnung, Greifswald 1847, p. 279 („da ferner leicht erhellt") und bei *M. A. Stern*, Algebraische Analysis, Leipz. u. Heidelb. 1860, p. 423, obwohl letzterer p IV selbst moniert, daß bei *Cauchy* die Stetigkeit der Binomialreihe als Funktion des Exponenten nicht nachgewiesen sei. — Auch bei *A. Cauchy*, Paris C. R. 18 (1844), p. 132 = Oeuvres (1) 8, p. 160 wird die Konvergenz der Logarithmusreihe auf dem Konvergenzkreis nicht bewiesen.

tionen (vgl. I C 1, *Bachmann*, Nr. **11**; I E, *Seliwanoff*, Nr. **10**; II A 3, *Brunel*, Nr. **18**), d. h. mit denjenigen rationalen ganzen Funktionen einer Variabeln $x$, die für positive ganze Werte dieser Variabeln dieselben Werte haben wie die Summen:

(127) $$1^n + 2^n + 3^n + \cdots + x^n.$$

Das scheint lange nicht bemerkt worden zu sein, obwohl bereits *Euler*[221]) gezeigt hat, daß die letzteren [wie die ersteren] die Eigen-

---

221) Petrop. n. a. 6 (1788 [90]), p. 4 (von 1776). Erwähnt sei, daß von englischen Mathematikern verschiedene Entwickelungen der Summe (127) nach Fakultäten, mit Hilfe der „Differenzen der 0", d. h. der Zahlen $\{\Delta^m u^n\}_{u=0}$ gegeben worden sind; so von *J. Fr. W. Herschel* collection of examples of the applications of the calculus of finite differences, Cambr. 1820 (p. 51 der deutschen Übersetzung von *C. H. Schnuse*, Braunschw. 1859); von *H. Breen*, treatise on the summation of series, Belfast 1827, p. 19.

*A. Cauchy* (exerc. de math. 3 (1828) = Oeuvres (2) 8, p. 184; in etwas anderer, von den Zeichen der Residuentheorie befreiter Darstellung Résumés analytiques Turin 1833, § 9 = Oeuvres (2) 10, p. 84) gibt für diese Summen die Residuenformel:

$$\sum x^n = n! \cdot \mathrm{E} \frac{1}{e^{hz}-1} \frac{e^{xz}}{((z^{n+1}))}$$

und zeigt, wie man von ihr aus mit Hilfe der schon früher von ihm gegebenen Darstellung der Bernoullischen Zahlen zu der Darstellung der Summen als rationaler ganzer Funktionen

$$\sum x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^n}{2} + \frac{n}{2} B_1 x^{n-1} - \frac{1}{4}\binom{n}{n} B_2 x^{n-3} + \frac{1}{6}\binom{n}{5} B_3 x^{n-5} - + -$$

gelangen kann.

Damit der Sache nach identisch ist *O. Schloemilchs* Darstellung

$$\sum x^n = \left[\frac{d^n}{dt^n} \frac{e^{xt}-1}{1-e^{-t}}\right]_{t=0}$$

(Arch. Math. Phys. 10, 1847, p. 342). *Fr. Arndt* (J. f. Math. 31, 1846, p. 249) ersetzt in der Definitionsgleichung

$$f(x) - f(x-1) = x^n$$

die linke Seite durch ihre Taylorsche Entwicklung

$$f'(x) - \frac{1}{2} f''(x) + - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} f^{(n+1)}(x),$$

differentiiert dann $k$ mal und setzt $x = 0$; so erhält er die zur Bestimmung der Koeffizienten erforderlichen Rekursionsformeln.

Die „elf Darstellungen dieser Summe ohne Bernoullische Zahlen" von *F. Schweins* (Analysis, Heidelb. 1820, p. 323), die zuweilen erwähnt werden, drücken sie durch rationale Funktionen von $x, x-1, x-2, \cdots x-m$, bzw. $x, x+1, x+2, \cdots x+m$ aus, mit kombinatorisch [nicht eben einfach] bestimmten Zahlenkoeffizienten. Weitere Formeln dieser Art sind von *J. Steiner* (J. f. Math. 3 (1828), p. 207 = Werke 1, p. 175) angegeben und von *Gudermann* (ib. 5 (1830) p. 408) bewiesen worden. Vgl. auch *Oettinger*, J. f. Math. 16 (1837) p. 181.

Eine Darstellung dieser Art auch bei *V. Puiseux* (j. de math. 11, 1846, schaft haben, daß sich $f_{n-1}(x)$ von $df_n(x)/dx$ nur durch einen Zahlenfaktor und eine additive Konstante unterscheidet.

Näher hat sich, so viel ich sehe, zuerst *C. G. J. Jacobi*[222]) mit diesen Funktionen wenigstens mit denjenigen gerader Ordnung beschäftigt. Er setzt

$$(128)\qquad \chi_{2m+1}(x) = \frac{1}{(2m+1)!}(1 + 2^{2m+1} + \cdots + x^{2m+1})$$
$$= \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} + \frac{1}{2}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \alpha_1\frac{x^{2m}}{(2m)!}$$
$$- \alpha_2\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} + - \cdots + (-1)^{m+1}\alpha_m\frac{x^2}{2},$$

wobei die $\alpha_m$ durch

$$(129)\qquad \frac{h}{2}\operatorname{\mathfrak{Cot}}\frac{h}{2} = 1 + \alpha_1 h^2 - \alpha_2 h^4 + \alpha_3 h^6 - + -$$

definiert sind; macht darauf aufmerksam, daß die für ganzzahlige Werte von $x$ geltende Identität

$$(130)\qquad \chi_{2m+1}(x+1) = \chi_{2m+1}(x) + \frac{(x+1)^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

da es sich um rationale ganze Funktionen handelt, auch für beliebige Argumente bestehen bleiben muß; leitet daraus die von ihm übrigens als „abunde nota“ bezeichnete Relation

$$(131)\qquad \chi_{2m+1}(-\tfrac{1}{2} + \xi) = \chi_{2m+1}(-\tfrac{1}{2} - \xi)$$

her und beweist endlich auf einem ziemlich indirekten Wege, daß $\chi_{2m+1}(x)$ im Intervall $-1 < x < 0$ das Zeichen von $(-1)^{m+1}$, außerhalb desselben das entgegengesetzte hat.

*Ostrogradsky*[223]) setzt:

$$(132)\; Y_m = \frac{A_m x^2}{2} + \frac{A_{m-1}x^4}{4!} + \cdots + \frac{A_1 x^{2m}}{(2m)!} + \frac{1}{2}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} - \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!},$$

wobei er sich damit begnügt, die Koeffizienten $A_m$ $\left[\text{sie sind gleich } \frac{(-1)^m B_m}{(2m)!}\right]$ durch Rekursionsformeln zu definieren. Er zeigt, daß diese

p. 487); einfacher bei *O. Schloemilch* (Theorie der Differenzen und Summen, Halle 1848, p. 98); noch einfacher bei *A. Thacker* (Cambr. Dubl. math. j. 5, 1850, p. 243).

222) J. f. Math. 12 (1834), p. 266 = Werke 6, p. 66. Seine Schlußbemerkung läßt vermuten, daß auch er die Identität dieser Funktionen mit den trigonometrischen Reihen (119), (120) nicht gekannt hat.

223) Pétersb. mém. (6) 4 [sc. math. (6) 2 (1841), p. 313 (von 1839)]. *Ostrogradskys* $Y_m$ ist in der Bezeichnung von *Jacobi* (dessen Untersuchung Ostrogradsky übrigens nicht gekannt zu haben scheint):

$$Y_m(x) = -\chi_{2m+1}(x) + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \frac{-1}{(2m+1)!}(1 + 2^{2m-1} + \cdots + (x-1)^{2m-1})$$
$$= -\chi_{2m+1}(x-1).$$

Funktionen der Rekursionsformel

$$\frac{d^2 Y_m}{dx^2} = A_m + Y_{m-1}$$

genügen, und leitet daraus mit Hilfe der Fourierschen Sätze über die Separation der Wurzeln einer algebraischen Gleichung sowohl die Eigenschaft ab, daß $Y_m$ im Intervall $(0 \ldots 1)$ das Vorzeichen von $(-1)^m$ hat, als auch die Vorzeichen der $A_m$ und nur ein Extremum bei $1/2$. Dieselben Sätze gewinnt dann auch *C. J. Malmsten*[224]) auf einem umständlicheren Wege.

*J. L. Raabe*[225]) hat den Namen „Jacob-Bernoullische Funktion" für die Funktion

$$(133)\quad B_m(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{x^m}{2} + \binom{m}{1}\frac{B_1}{2}x^{m-1} - \binom{m}{3}\frac{B_2}{4}x^{m-3} + \binom{m}{5}\frac{B_3}{6}x^{m-5} - + - \cdots$$

eingeführt, wo die $B_m$ die Bernoullischen Zahlen sind; das letzte Glied ist bei ihm

$$(-1)^{\mu-1}\binom{2\mu}{2\mu-1}\frac{B_\mu}{2\mu}x \text{ für } m = 2\mu,$$
$$(-1)^{\mu-1}\binom{2\mu+1}{2\mu-1}\frac{B_\mu}{2\mu}x^2 \quad \text{,,} \quad m = 2\mu+1.$$

Er kommt zu diesen Funktionen durch die Aufgabe, unter den Bedingungen

$$a_{n+p} = a_n, \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_p = 0$$

den Grenzwert

$$\lim_{r=1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^m a_n r^n$$

zu berechnen; es stellt sich heraus, daß dieser Grenzwert

$$(134)\qquad = -p^m \sum_{k=1}^{p} a_k B_m\left(\frac{k}{p}\right)$$

ist. Er zeigt mit Hilfe der Rekursionsformeln der Bernoullischen Zahlen, daß diese Funktionen den Gleichungen

$$(135)\quad B_m(x+1) = B_m(x) + x^m, \quad (136)\quad B_m(1-x) = (-1)^m B_m(x),$$

$$(137)\quad \frac{dB_{2\mu+1}(x)}{dx} = (2\mu+1)B_{2\mu}(x), \quad \frac{dB_{2\mu}(x)}{dx} = 2\mu B_{2\mu-1}(x) + (-1)^\mu B_\mu$$

224) J. f. Math. 35 (1847), p. 63; verbesserter Abdruck Acta Math. 5 (1884), p. 14. Malmstens $\varphi(x)$ ist in Ostrogradskys Bezeichnung $-h^{2m}Y_{m-1}(x/h)$.

225) Die Jacob Bernoullische Funktion, Zürich 1848, p. 16. Raabe nimmt unzweckmäßigerweise die Zahl $m$ nicht mit in die Bezeichnung auf.

genügen, von denen die erste den Zusammenhang dieser Funktionen mit den Summen (126) ergibt. Auch beweist er[226]) die Relation:

$$(138)\quad \frac{B_m(nx)}{n^m} = B_m(x) + B_m\left(x+\frac{1}{n}\right) + \cdots + B_m\left(x+\frac{n-1}{n}\right) + \begin{cases} 0 \text{ für } m = 2\mu; \\ \dfrac{(-1)^{\mu+1}}{2\mu+2}\,\dfrac{n^{2\mu+2}-1}{n^{2\mu+1}}\,B_{m+1} \text{ für } m = 2\mu+1. \end{cases}$$

Den Zusammenhang dieser Funktion mit den hier behandelten trigonometrischen Entwicklungen hat Raabe erst später[227]) aufgewiesen: indem er die Euler-Maclaurinsche Summenformel mit dem ersten Poissonschen Restglied (Nr. **105**) auf die Funktion $(\sin x)/x$ und das Intervall $(0 \ldots \infty)$ anwendet [was selbstverständlich einer besonderen Rechtfertigung bedürfte] und dann wiederholt integriert, erhält er:

$$(139)\qquad B_{2\mu}(x) = \frac{(-1)^{\mu+1}2\cdot(2\mu)!}{(2\pi)^{2\mu+1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n^{2\mu+1}}$$

$$(140)\qquad B_{2\mu+1}(x) + \frac{(-1)^{\mu}B_{\mu+1}}{2\mu+2} = \frac{(-1)^{\mu}2(2\mu+1)!}{(2\pi)^{2\mu+2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi x}{n^{2\mu+2}}.$$

Anhangsweise seien noch die Gleichungen

$$(141)\qquad xB(\nu+1,\nu) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2\nu}{n}\frac{\sin(\nu+n)x}{(\nu+n)^2},$$

$$(142)\qquad \pi x\cot\nu\pi = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\nu+n)x}{(\nu+n)^2}$$

erwähnt, die *L. Euler*[228]) durch einen unsicheren Grenzübergang von Interpolationsformeln aus erhalten hat Ihnen kann die von *E. E. Kummer*[229]) als Spezialfall einer hypergeometrischen Reihe erhaltene

$$(143)\qquad \frac{2\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}+1\right)}{\nu\,\Gamma\left(\frac{-\nu+1}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\nu}{n}\frac{\cos(\nu-2n)x}{\nu-2n}\qquad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

angereiht werden.

226) p. 23, 28.

227) J. f. Math. 42 (1851), p. 348. — Nach einem neuerdings (Bern. Mitt. 1900, p. 96) publizierten Brief hat *Schläfli* diesen Zusammenhang bereits um 1840 gekannt.

228) Opusc. analyt. 1, Petrop. 1783, p. 171, 178. Eine Untersuchung darüber, ob und unter welchen Bedingungen die Gleichungen richtig sind, scheint nicht vorzuliegen. Die zweite schreibt Euler übrigens in der Weise, daß er jedem Glied mit positivem $n$ das entsprechende mit negativem $n$ vorangehen läßt. Speziell setzt er noch $x = \pi/(2\nu)$.

229) J. f. Math. 15 (1836), p. 166.

**8. Mit iterierten Integralen rationaler Funktionen zusammenhängende Entwicklungen.** Von den Reihen

$$\sum \frac{\sin nx}{n^{2k}}, \quad \sum \frac{\cos nx}{n^{2k+1}}, \quad \sum \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n^{2k}}, \quad \sum \frac{(-1)^{n+1} \cos nx}{n^{2k+1}}$$

treten die divergenten Reihen

$$(26) \qquad \sin x \pm \sin 2x + \sin 3x \pm + \pm \cdots = \begin{cases} \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} \\ \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \end{cases}$$

bereits bei *L. Euler*[230]), die erstere auch bei *D. Bernoulli*[231]) auf. Letzterer bemerkt auch bereits, daß die aus ihr durch Integration hervorgehenden Reihen, mit Ausnahme der ersten „aller Analysis zu spotten scheinen"; er begnügt sich daher mit Angabe dieser ersten[232]):

$$(144) \quad \cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + + + \cdots = -\frac{1}{2} \log(2 - 2\cos x)$$
$$= -\frac{1}{2} \log \sin \frac{x}{2} - \log 2.$$

Dieselbe Reihe sowie:

$$(145) \qquad \cos x - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - + - \cdots = \frac{1}{2} \log(2 + 2\cos x)$$
$$= \frac{1}{2} \log \cos \frac{x}{2} + \log 2$$

gibt dann auch *Euler*[233]) und später *R. Lobatto*[234]).

Andererseits hat Euler schon vorher[235]) die Entwicklung von $\log(1 + \mathfrak{n} \cos x)$ nach den Potenzen von $\cos x$ in eine solche nach den Vielfachen von Kosinus der $x$ umgesetzt. Die Koeffizienten erscheinen dabei zunächst in der Gestalt unendlicher Reihen, die nach Potenzen von $\mathfrak{n}$ geordnet sind; die beiden ersten dieser Reihen kann er direkt summieren, für die folgenden erhält er Rekursionsformeln, indem er nach $x$ differentiiert und mit $1 + \mathfrak{n} \cos x$ multipliziert. So

230) Petrop. n. comm. 5 (1754/55[60]), p. 202; 18 (1773), p. 30, 34.

231) Ib. 16 (1771), p. 35; 17 (1772), p. 15.

232) Ib. 17, p. 17. Ebenso später *Tralles*, Berl. Abh. 1812/13 [16], p. 232 Euler hat Petrop. n. comm. ib. 18, p. 35 nur die Reihe (14), aus der (145) für $r = 1$ hervorgeht.

233) Petrop. acta $1^2$ (1777[80]) = instit. calc. int. 4, suppl. 3, § 122, 126.

234) Recherches sur la sommation de qq. séries trigonométriques. Delft 1827, p. 9.

235) Institut. calc. integr. 1, 1768 § 295 = opera (1) 11, p. 179. Reproduziert von *S. F. Lacroix*, traité II, p. 128 der 2. Aufl. von 1814.

kommt:

$$(146)\qquad \log(1+\mathfrak{n}\cos x) = -\log\frac{2\alpha}{\mathfrak{n}} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^n}{n}\cos nx,$$

wo $\alpha$ mit $\mathfrak{n}$ wie in Nr. 3 zusammenhängt.

*J. Landen*[236]) gelangt zu diesen Entwicklungen direkt von der logarithmischen Reihe aus; er gibt auch den Ansatz zur Ableitung weiterer Reihen, führt aber rechts die Integrationen nicht aus[237]). Die allgemeine Untersuchung der durch wiederholte Integration aus der logarithmischen Reihe hervorgehenden Transzendenten nimmt dann *W. Spence* in Angriff; er definiert:[238])

$$(147)\qquad L^{(m)}(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}x^n}{n^m}$$

und erhält u. a. das Resultat, daß

$$(148)\qquad L^{(m)}(1+x) + (-1)^m L^{(m)}(1+x^{-1})$$

gleich einer rationalen ganzen Funktion von $\log x$ ist.[239]) Durch Einführung komplexer Argumente erhält er dann noch einige hierher gehörige Formeln, so[240])

$$(149)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n\cos nx}{n^2} = \frac{1}{2}\int_0^r \log(1+2r\cos x + r^2)\frac{dr}{r}$$

und

$$(150)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{n+1}\cos nx}{n^2(n+1)} = \frac{r}{2}\int_0^r \log(1+2r\cos x+r^2)\frac{dr}{r}$$

$$-\frac{1}{2}(r+\cos x)\log(1+2r\cos x+r^2) - \sin x \operatorname{arc\,tg}\frac{r\sin x}{1+r\cos x} + r.$$

Auch bemerkt er, daß man durch abermalige Integration

$$(151)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{n+2}\cos nx}{n^2(n+1)(n+2)}$$

erhalten könne, führt das aber nicht aus.

---

236) Math. memoirs, Lond. 1780, p. 81, 104.

237) p. 94, 112.

238) An essay on the theory of the various orders of logarithmic transcendents, Lond. 1809, p. 3. Die 2., von J. Herschel besorgte und mit Zusätzen aus Spences Nachlaß vermehrte Auflage, Edinb. 1820, habe ich nicht gesehen. — Landen und Spence interessieren sich übrigens hauptsächlich für die numerischen Reihen, die durch Einsetzen spezieller Werte für $x$ entstehen.

239) p. 43.

240) p. 127.

*A. M. Legendre*[241]) zeigt, daß die Integrale

$$(152)\qquad \int \frac{x^\mu \sin x\,dx}{\cos x + \cos\theta}$$

sich durch diejenigen der Reihen

$$(153)\qquad \sum \frac{\cos nx \cos n\theta}{n^{2m}}, \qquad \sum \frac{\sin nx \cos n\theta}{n^{2m+1}}$$

ausdrücken lassen, für die $2m \leqq \mu$ ist. Indem er darin $\theta = 0$ setzt, erhält er speziell die Integrale[242])

$$(154)\qquad \int_0^x x^\mu \cot\frac{x}{2}\,dx.$$

*J. Fourier*[243]) gewinnt die Gleichung (143), ähnlich wie (121), mit Hilfe der Identität:

$$(155)\quad \cos x - \tfrac{1}{2}\cos 2x + \tfrac{1}{3}\cos 3x - + - + \frac{(-1)^{N+1}}{N}\cos Nx = \log\left(2\cos\frac{x}{2}\right) + \int_0^x \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\cos\frac{x}{2}}\,dx$$

*G. Frullani*[244]) gewinnt für die Entwicklung von

$$\frac{\mathfrak{n}\sin x}{1+\mathfrak{n}\cos x}$$

durch Heraufmultiplizieren Rekursionsformeln; durch Integration nach $x$ erhält er daraus die Entwicklung von $\log(1+\mathfrak{n}\cos x)$. Nachher[245])

---

241) Exerc. de calc. int. 2 (1817), p. 193 (publ. 1815). Wenn er durch die Spezialisierung $x = \pi/2$ einfache Resultate zu erhalten glaubt, so beruht das freilich auf den beiden falschen Annahmen, daß so weit die Integrale noch Bedeutung und die Reihen, von denen er ausgeht, noch die von ihm angegebenen Werte haben.

242) p. 197.

243) Preisschrift v. 1811 Paris mém. 4 (1819/20[24]), p. 273; théorie Nr. 183 = Oeuvres 1, p. 163. — Wegen *Abels* Andeutungen betr. den Beweis der Konvergenz der Reihen vgl. man Note 194). Übrigens ist bemerkenswert, daß *C. F. Gauß* (Gott. comm. rec. 2 (1813) = Werke 3, p. 156 und im Nachlaß, p. 417) die Reihe (145) ohne weiteres benutzt, obwohl ihre Konvergenz weder bewiesen war, noch mit den damals bekannten Kriterien bewiesen werden kann.

244) Ricerche sopra le serie, Firenze 1816, p. 15; p. 13 für $\mathfrak{n} = 1$. P. 14 benutzt er ebenso die Entwicklung von $(1+\cos x)^{-1}$, um aus ihr durch zweimalige Integration die Reihe (145) herzuleiten. Er vermeidet es übrigens, die divergenten Entwicklungen, die er implizite benutzt, ausgerechnet hinzuschreiben. Zur Bestimmung der Anfangsglieder, die zunächst als Integrationskonstante auftreten, bedient er sich der Integralformeln.

245) p. 18.

zeigt er noch, daß die Koeffizienten der Entwicklung

$$\log(m + \cos x) = \sum A_n \cos nx$$

der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 A_n}{dm^2} + \frac{m}{m^2 - 1} \frac{dA_n}{dm} - \frac{n^2}{m^2 - 1} A_n = 0 \tag{156}$$

genügen, die sich durch die Substitution $m = \cos u$ [besser $m = \mathfrak{Cof}\, u$] vereinfacht.

Die Untersuchungen von *N. H. Abel*[246]), *C. J. Hill*[247]), von *J. H. Grillet*[248]) und von *Schaeffer*[249]) enthalten nichts, was für unsere Zwecke in Betracht käme; auch bei *J. J. Littrow*[250]) bleibt es bei Versuchen.

Eine gewisse Rolle spielen diese Funktionen in der Geometrie *N. I. Lobatschefskijs* bei Volumenbestimmungen. Schon in seiner ersten Abhandlung[251]) führt er zu diesem Zwecke die beiden Integrale

$$\Phi(x) = -\int_0^x \log \cos x\, dx \tag{157}$$

und

$$L(x, \omega) = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{x\, dx}{\mathfrak{cof}\, x - \cos \omega} \tag{158}$$

ein; er zeigt, daß sich das letztere durch das erstere vermöge der Gleichung

$$\sin 2\omega\, L(x, 2\omega) = \Phi(\omega + \xi) + \Phi(\omega - \xi) - 2\Phi(\omega) \tag{159}$$

---

246) Oeuvres 2, p. 189 (aus dem Nachlaß). Er behandelt nur die Reihe $\sum n^{-2} r^n$ für reelle Werte von $r$.

247) J. f. Math. 3 (1828), p. 112. Es handelt sich bei ihm namentlich um die Reduktion allgemeinerer Integrale auf die beiden Formen:

$$\mathrm{D}_r^x = \int \log(1 + 2r\cos x + r^2) \frac{dr}{r}$$

und

$$\mathrm{E}_r^x = \int_0 \frac{\log r\, dr}{1 + 2r\cos x + r^2}.$$

(Zusammenstellung der Resultate p. 144.) Eine weitere Abhandlung Hills, specimen exerc. anal., Lond. Goth. 1830, habe ich nicht gesehen; sie scheint weiteres über die erste dieser beiden Formen zu enthalten.

248) J. de math. 10, 1845, p. 238; betr. iterierte Logarithmen.

249) J. f. Math. 30, 1846, p. 277; betr. die unter [246]) erwähnte Reihe.

250) Pétersb. mém. 7 (1815/16[20]), p. 127, 130.

251) Kasaner Bote 1830, p. 617 = Geom. Abhandl. 1, Kasan 1883, p. 59 (russ.; mir nur durch die Angaben von *Fr. Engel* zugänglich, *N. I. Lobatschefskij*, Zwei geometrische Abhandlungen, 2, Leipzig 1899, p. 408). [*Lobatschefskijs* $L(x, \omega)$ geht durch die Substitution $x = \log r$ in *Hills* $\frac{1}{2} E_r^{\pi - \omega}$ [247]) über.]

ausdrücken läßt, in der $\xi$ durch

$$\operatorname{tg} \xi = \mathfrak{Tg}\, x \cot \omega$$

definiert ist, und gibt für das erstere die trigonometrische Entwicklung. In späteren Abhandlungen[252]) leitet er dann durch Betrachtungen seiner Geometrie weitere Relationen zwischen diesen Integralen sowie die Reduktion einer Anzahl anderer Integrale auf sie ab.

*Th. Clausen*[252a]) berechnet numerische Werte der Funktion:

$$(159^{a}) \qquad x \log 2 - \int_0^x \log \sin \frac{x}{2}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

mit Hilfe ihrer Entwicklung nach Potenzen von $x$ oder von $\pi - x$ (auf 16 Dezimalstellen).

*E. E. Kummer*[252b]) definiert zwei Funktionen zweier Argumente durch

$$(159^{b}) \qquad D(r, x) = \int_0^r \frac{(r + \cos x) \log r}{1 + 2r \cos x + r^2}\, dr,$$

$$(159^{c}) \qquad E(r, x) = \int_0^r \frac{\sin x \log r}{1 + 2r \cos x + r^2}\, dr$$

oder, nach der Substitution

$$(160) \qquad r = -\frac{\sin u}{\sin (u + x)},$$

---

252) Kasan Schriften 1835, p. 87; 1836, p. 7, 63; vgl. die Zusammenstellung der Formeln p. 152 = Geom. Abhandl. 1, p. 119, 123, 153, 210 (russ.; deutsch v. *H. Liebmann,* Abhandl. Gesch. Math. 19 (1904), p. 49, 53, 82, 123).

252a) J. f. Math. 8 (1832), p. 298. Bei dem Gebrauch, den er ib. 7 (1831), p. 310 von dieser und der durch einmalige Integration aus ihr hervorgehenden Reihe macht, übersieht er, daß die Formeln nur für das Intervall $0 < x < \pi$ gelten; sein Resultat ist daher nur für $n = 1$ richtig.

252b) Ib. 21 (1840), p. 78. *Kummers* $D(r, x)$ geht in *Hills* $D_\varrho^\xi$ über, abgesehen von einer additiven Konstanten, wenn die Variabeln durch die Relationen

$$1 + 2r \cos x + r^2 = \varrho^2, \quad 1 + 2\varrho \cos \xi + \varrho^2 = r^2, \quad \text{also} \quad \varrho\, d\varrho = (\cos x + r)\, dr$$

verbunden werden; Kummer bemerkt selbst, er habe für die Funktion $D$ den 1830 von Hill gegebenen Resultaten wenig Neues hinzufügen können, nur seien bei ihm die Sätze aus einer gemeinsamen Quelle abgeleitet. Übrigens ist zu beachten, daß die von Kummer für negative und für positive $r$ mit demselben Zeichen bezeichneten Funktionen nicht analytische Fortsetzungen voneinander sind.

durch[253]):

$$(161)\qquad D[u,x] = -\int_0^u \log \frac{\sin u}{\sin(u+x)} \cot u\, du,$$

$$(162)\qquad E[u,x] = -\int_0^u \log \frac{\sin u}{\sin(u+x)}\, du.$$

Er gibt eine Anzahl Funktionalgleichungen an, denen diese Funktionen genügen; dann[254]) die Reihenentwicklung:

$$(163)\qquad D(r,x) = \log x \cdot \log \sqrt{1 - 2r\cos x + r^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \cos nx}{n^2}$$

$$\left(-\frac{x}{2} < u < \frac{\pi - x}{2},\ 0 < x < \pi\right),$$

sowie eine entsprechende, nach fallenden Potenzen von $r$ fortschreitende. Die zweite Funktion läßt sich mit Hilfe der Identität[255]):

$$(164)\qquad 2E[u,x] = E(-1, 2u) + E(-1, 2x) - E(-1, 2u + 2x)$$

auf ihren speziellen Fall

$$(165)\qquad E(-1, x) = -\int_0^x \log\left(2\sin\frac{x}{2}\right) dx$$

zurückführen; übrigens gelten für sie die Reihenentwicklungen[256]):

$$(166)\qquad E[u,x] = -u\log r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \sin nx}{n^2}$$

$$= (\pi - u - x)\log r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 r^n}$$

sowie noch mehrere ähnliche.

---

253) p. 193. *Kummer* behält auch nach Einführung der neuen Variabeln dasselbe Zeichen bei, was zu Verwechslungen Anlaß geben kann.

254) p. 214.

255) p. 220.

256) p. 223. Die erste gilt unter den Voraussetzungen

$$0 < x < \pi,\ 0 < u + \frac{1}{2}x < \frac{\pi}{2},$$

die zweite für

$$0 < x < \pi,\ \frac{\pi}{2} < u + \frac{1}{2}x < \pi.$$

Als einfachste Funktionen dritter Ordnung führt er

$$(167)\qquad D_3(r, x) = \int_0^r \frac{(r + \cos x)(\log r)^2}{1 + 2r\cos x + r^2} dr,$$

$$(168)\qquad E_3(r, x) = \int_0^r \frac{\sin x\,(\log r)^2}{1 + 2r\cos x + r^2} dr$$

ein[257]). Er gibt auch für sie Funktionalgleichungen und Reihenentwicklungen, z. B.[258]):

$$(169)\quad D_3(r, x) = (\log r)^2 \log(1 + 2r\cos x + r^2) - 2\log r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} r^n \cos nx}{n^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} r^n \cos nx}{n^3},$$

$$(170)\quad E_3(r, x) = (\log r)^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{r\sin x}{1 + r\cos x} - 2\log r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} r^n \sin nx}{n^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} r^n \sin nx}{n^3}.$$

Zum Schlusse bemerkt er[259]), es würde auch möglich sein, die hier auftretenden trigonometrischen Reihen selbst an die Spitze der Entwicklung zu stellen.

*J. Kelland,* der durch ein physikalisches Problem gelegentlich auf die Summe

$$(171)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$$

geführt wird, begnügt sich damit zu zeigen[260]) — was für seine Zwecke ausreicht —, daß die durch sie definierte Funktion in der Umgebung von $x = 0$ eine Entwicklung der Form

$$\frac{x^3}{6}\log x + Dx + Ax^3 - \frac{x^5}{1440} + \cdots$$

zuläßt.

*Fr. W. Newman* hat, ohne Kummers Untersuchung[252b]) zu kennen, einen großen Teil von dessen Resultaten von neuem gefunden[261]). Als

257) p. 331.

258) p. 350, 359.

259) p. 370.

260) Edinb. trans. $15_4$ (1844), p. 523. Der Schluß benutzt die divergente Reihe (26); doch ließe sich das leicht vermeiden.

261) Cambr. Dubl. math. j. 2 (1847), p. 78. Auf die Untersuchungen Kummers hat ihn erst *A. Cayley* hingewiesen, ib. p. 236; Hill[247]) und Clausen[252a]) kennt er nur durch Kummer.

Fundamentalformen führt er neben Spences $L(x)$ (147) und einer mit Kummers $D(r, \pi - x)$ (159^b) identischen Funktion $\varDelta(r, x)$ noch die beiden ein:

$$(172) \qquad \supset(x) = -\int_0^x \log \sin x\, dx = x \log 2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{n^2},$$

$$(173) \qquad \lambda(r, x) = \frac{1}{2} \log x \log(1 - 2r \cos x + r^2) - \varDelta(r, x)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^r \log(1 - 2r \cos x + r^2) \frac{dr}{r} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \cos nx}{n^2};$$

übrigens sind auch bei ihm die für positive und für negative Argumentwerte mit demselben Zeichen bezeichneten Funktionen nicht analytische Fortsetzungen voneinander. Er gibt die Funktionalgleichungen[262]):

$$(174) \qquad \frac{1}{n} \supset(nx) = (n-1)\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \log 2 + \sum_{\nu=0}^{n-1} \supset\left(x + \frac{\nu\pi}{n}\right)$$

und[263]):

$$(175) \qquad \frac{1}{n} \varDelta(r^n, nx) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \varDelta\left(r, x + \frac{2\nu\pi}{n}\right)$$

und zeigt, wie sie benutzt werden können, um eine Tabelle der Funktionswerte, von der nur ein kleiner Teil direkt berechnet zu werden braucht, zu vervollständigen. Auch gibt er Reihenentwicklungen verschiedener Art und zeigt, wie deren Konvergenz durch geeignete Umformungen vergrößert werden kann. Auch über die durch wiederholte Integration entstehenden höheren Transzendenten

$$(176) \qquad \supset^{(n)}(x) = \int_0^x \supset^{(n-1)}(x)\, dx$$

gibt er einige Sätze[264]).

**9. Entwicklung der Potenzen der wahren Distanz zweier Punkte nach den Kosinus der Vielfachen der scheinbaren Distanz.** **a**) Die Koeffizienten der in Nr. 3 erwähnten Entwicklungen:

$$(177) \qquad (1 - \mathfrak{n} \cos x)^s = \frac{1}{2} \mathfrak{A}_s^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_s^{(n)} \cos nx$$

---

262) p. 86.
263) p. 173.
264) p. 96.

oder:

$$178)\qquad (1-2\alpha\cos x+\alpha^2)^s=\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}_s^{(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{B}_s^{(n)}\cos nx$$

erweisen sich als hypergeometrische Funktionen; in der Tat scheint die ganze Theorie dieser Funktionen, wie sie von Euler begründet ist, hier ihre Wurzel zu haben[265]. Von den analytischen Darstellungen dieser Funktionen hat *L. Euler*[266] zunächst die Entwicklungen nach Potenzen von $\mathfrak{n}$ aufgestellt, auch bald bemerkt[267], daß man rascher konvergente Reihen erhält, wenn man nicht die $\mathfrak{A}$ selbst, sondern ihre Produkte mit geeigneten Potenzen von $1-\mathfrak{n}^2$ entwickelt. Die Entwicklungen nach Potenzen von $\alpha$ erscheinen zuerst bei *J. L. Lagrange*[268], der $1-2\alpha\cos x+\alpha^2$ in die beiden komplexen Faktoren $1-\alpha e^{\pm ix}$ zerlegt, die Potenzen jedes Faktors für sich entwickelt und dann ausmultipliziert; ohne Benutzung komplexer Größen, mit Hilfe

---

265) Die Untersuchung der Eigenschaften dieser Funktionen gehört demnach eigentlich nicht zu den Aufgaben dieses Artikels, sondern in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten; da sie aber dort gewöhnlich nicht besonders behandelt wird, so mag sie hier Platz finden. — In den astronomischen Lehrbüchern erscheinen sie als „Koeffizienten von Laplace" oder auch wohl unter der Überschrift „über gewisse Funktionen der großen Achsen"; die erstere Bezeichnung ist insofern historisch nicht gerechtfertigt, als Laplace hier dem von seinen Vorgängern Geleisteten wenig hinzugefügt hat. Immerhin ist die Zusammenstellung der Hauptformeln, mécanique céleste 1 = Oeuvres 1, p. 307, bequem. Andere solche Zusammenstellungen bei *S. F. Lacroix,* Traité 2, 1798, p. 118, etwas verändert 2ᵉ éd. 1814, p. 112; bei *G. de Pontécoulant,* Théorie analyt. du syst. du monde 1, Paris 1829, p. 347; 3 (1834), p. 66; eine kurze auch bei *G. B. Airy,* math. tracts, 2ᵉ ed., Cambr. 1831, p. 103; ein Bericht über die Arbeiten des 18. Jahrhunderts auf diesem Gebiet bei *A. Gautier,* essai historique sur le problème des trois corps, Paris 1817, 2ᵉ partie, chap. 1—3. Vgl. übrigens auch VI 2, 13, *von Zeipel,* Nr. 2—10.

266) Recherches sur les inégalités[38], p. 26; institutiones calculi integralis, 1, Petrop. 1768, § 279 = opera (1) 11, p. 165. Für $s=-1$ erhält *G. Frullani,* ricerche sopra le serie, p. 28 die Reihe durch Heraufmultiplizieren (der [divergente] Fall $\mathfrak{n}=1$ schon p. 14); für beliebige $s$ p. 114 aus der hypergeometrischen Differentialgleichung. *Th. Jarrett* gibt die expliziten Formeln für beliebige $s$, Cambr. trans. 3, (1830), p. 93 (von 1827).

267) Paris recueil des pièces qui ont remporté les prix 8 (1771) (Preisschrift von 1756), p. 52.

268) Misc. Taur. 3² (1762/65[66]) und im wesentlichen ebenso Paris, recueil des pièces qui ont remporté les prix 9 (1766) (œuvres 1, p. 620; 6, p. 88). Ebenso *A. Cauchy*, extrait du mém. prés. à l'acad. de Turin, le 11. oct. 1831, lith. Turin 1832, p. 90; für ganzzahlige $s$ auch schon *Euler* introd. in analysin infinitorum 1, Laus. 1748, § 219; für $s=-1$ auch bei *J. J. Littrow*, Pétersbourg mém. 7 (1815/16[20]), p. 81.

der Ausdrücke der Potenzen von $\cos x$ durch die Kosinus der Vielfachen von $x$, erhalten sie *G. L. Klügel*[269]) und *Thibaut*[270]). *Euler* gewinnt sie dann auch, indem er die zuerst genannten Reihen nach Potenzen von $\alpha$ umordnet[271]); *G. Frullani*[272]) aus den Differentialrelationen.

Zu weiteren Darstellungen dieser Koeffizienten kommt *Euler* durch seine allgemeine Theorie der Transformation der hypergeometrischen Funktionen; sie liefert ihm zunächst einen Ausdruck von $\mathfrak{A}$ durch das Produkt aus $\alpha^n(1-\alpha^2)^{2n+1}$ in eine hypergeometrische Reihe[273]). Die Vergleichung der verschiedenen Entwicklungen gibt ihm dann den Satz[274]), daß

$$(179)\qquad \binom{s-1}{n}(1-\alpha^2)^{s+1}\mathfrak{B}_s^{(n)}$$

sich nicht ändert, wenn $s$ durch $-s-1$ ersetzt wird.

269) Gott. comm. 12 (1793/94[96]), p. 50.

270) Gött. Nachr. 1893, p. 630 (aus der Zeit um 1795); auch Gauß' Werke 8, p. 47. Wegen der Autorschaft dieser „dissertatiuncula" vgl. man Gött. Nachr., geschäftl. Mitt. 1902, p. 12.

271) Institutiones calculi integralis 4, Petrop. 1794, suppl. 4 (von 1778), § 98. Ursprünglich hatte er sie durch Induktion gefunden, § 82. § 21 teilt er sie ohne Beweis mit.

272) Ricerche sopra le serie, Firenze 1816, p. 117. Die Differentialgleichung (mit $1/n$ als unabhängiger Veränderlicher) hat er für $s=-1$ p. 37, allgemein p. 113. p. 134 wirft er die Frage auf, wie eine Funktion $F(m+\cos x)$ beschaffen sein müsse, damit ihre Entwicklungskoeffizienten als Funktionen von $m$ linearen Differentialgleichungen II. O. genügen; er findet, daß dazu $F$ selbst und seine Ableitungen einer unbegrenzten Reihe derartiger Differentialgleichungen genügen müssen, gibt aber nicht an, unter welchen Bedingungen diese miteinander verträglich sind.

273) Inst. calc. int. 4, suppl. 4, § 89. Erläuterungen zur Aufstellung und Transformation dieser hypergeometrischen Differentialgleichungen bei *N. Fuß*, St. Pétersbourg mém. 5 (1812/15), p. 115 (von 1809).

274) Inst. calc. integr. 4, suppl. 4 [von 1778], § 25, 82, zunächst durch Induktion; § 97 Beweis aus der Transformationstheorie der hypergeometrischen Funktionen (Die entsprechende Relation für die $\mathfrak{A}$, unter Beschränkung auf ganzzahlige $s$, übrigens schon inst. calc. int. 1, 1768, § 290 = opera (1) 11, p. 174). *C. G. J. Jacobi* (J. f. Math. 15 (1836); Werke 6, p. 99) gewinnt diese Relation aus der Legendreschen Integraldarstellung; *D. Bierens de Haan* (Amsterd. Verhandel. 8 (1862), p. 431) reproduziert das. *A. F. Svanberg*, J. f. Math. 18 (1837), p. 67, erhält sie, indem er aus den Differentialgleichungen, denen $\mathfrak{B}_{-s}^{(n)}$ und $\mathfrak{B}_{s-1}^{(n)}$ genügen, eine elementar integrable Kombination ableitet. Den konstanten Faktor bestimmt er mit Hilfe der Rekursionsformeln. *J. Binet*, J. de math. 5 (1840), p. 376, beweist sie auf Grund des Umstandes, daß die beiden Seiten derselben Rekursionsformel genügen; er reduziert die Bestimmung des konstanten Faktors mit Hilfe der Rekursions-

*J. Hellins*[275]) setzt $(1-\mathfrak{n}\cos x)/(1+\mathfrak{n})=$ dem Quadrat einer neuen Integrationsvariablen; nach Abspaltung algebraisch-logarithmischer Bestandteile erhält er Reihen, die nach Potenzen von

$$\frac{1-\mathfrak{n}}{1+\mathfrak{n}}=\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2 \tag{180}$$

fortschreiten.

Die von *E. E. Kummer*[276]) aus der allgemeinen Transformationstheorie der hypergeometrischen Reihen abgeleiteten Entwicklungen nach Potenzen von $1-\alpha^2$ und von

$$\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2$$

versagen, wie er selbst bemerkt, gerade in dem Falle, daß der Exponent $s$ ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{2}$ ist.

*C. F. Gauß*[277]) erhält durch die Umformungen:

$$\begin{aligned}(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)^s &= (1+\alpha)^{2s}\left\{1-\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}\cos^2\frac{x}{2}\right\}^s \\ &= (1-\alpha)^{2s}\left\{1+\frac{4\alpha}{(1-\alpha)^2}\sin^2\frac{x}{2}\right\}^s\end{aligned} \tag{181}$$

noch Entwicklungen, die nach Potenzen von $\frac{4\alpha}{(1\pm\alpha)^2}$ fortschreiten.

Entwicklungen nach Potenzen von $\beta^2=\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}$ geben *A. M. Legendre*[278]), *C. G. J. Jacobi*[279]), *O. Schlömilch*[280]).

*U. J. Leverrier*[281]) bemerkt, daß man diese Entwicklungen aus den nach Potenzen von $\alpha^2$ selbst fortschreitenden auch dadurch erhalten

---

formeln auf den Fall $n=0$; für diesen gibt eine Transformation der elliptischen Integrale die vollständige Formel.

275) Lond. trans. 1798, p. 535, 557.

276) J. f. Math. 15 (1836), p. 155.

277) Gott. comm. rec. 2 (1813); Werke 3, p. 129. Mit einem Spezialfall der zweiten ist im Prinzip die Entwicklung von

$$(1-e^2\sin^2 x)^{-\frac{3}{2}}$$

identisch, von der *J. B. J. Delambre* gelegentlich einer geodätischen Untersuchung Gebrauch macht (méthodes analyt. pour la détermination d'un arc de méridien, Paris, an VII, p. 72).

278) Exercices de calcul intégral 2, Paris 1817, p. 278 (publ. 1815); traité des fonctions elliptiques 2 (1826), p. 540. Er erhält sie als Entwicklungen nach Faktoriellen von $n$ und bestimmt ihre Koeffizienten mit Hilfe der Rekursionsformel (193).

279) J. f. Math. 15 (1836) (Werke 6, p. 96).

280) Analytische Studien 2, Leipzig 1848, p. 52.

281) Développements sur qq. points de la théorie des perturbations, Paris 1841, p. 36 = Paris observ. Ann. 2 (1856), p. 10; einige Andeutungen auch schon Paris C. R. 10 (1840), p. 751.

könne, daß man das Eulersche Verfahren zur Verwandlung langsam konvergierender Reihen in rascher konvergierende unbegrenzt oft anwende; für die wirkliche Ausführung der Berechnung sei es übrigens zweckmäßig, es nur eine begrenzte Anzahl mal anzuwenden. *A. Cauchy*[282]) erhält diese Entwicklungen, indem er in der Identität:

$$(182)\quad (1-e^{xi})^s(1-\alpha^2 e^{-xi})^s = \mathfrak{B}_s^{(0)} + \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{B}_s^{(n)}(\alpha^{-n}e^{-nxi} + \alpha^n e^{nxi})$$

den Faktor $(1-\alpha^2 e^{-xi})$ durch

$$(1-\alpha^2)\left(1-\beta^2\frac{1-e^{xi}}{e^{xi}}\right)$$

ersetzt, zunächst nach Potenzen von $(1-\exp xi)$ entwickelt und die Koeffizienten von $\alpha^{-n}$ vergleicht; die Vergleichung der Koeffizienten von $\alpha^n$ gibt ihm noch eine zweite Darstellung, bei der vor der Entwicklung nach Potenzen von $\beta^2$ ein anderer Faktor abgespalten ist.

Später hat Cauchy aus seinen Sätzen über „séries limitées" (Nr. 35) noch abgeleitet[283]), daß der beim Abbrechen der nach Potenzen von $\beta^2$ fortschreitenden Reihen entstehende Fehler absolut kleiner als das erste vernachlässigte Glied und von demselben Vorzeichen wie dieses ist; und zwar auch dann, wenn die Reihe nicht konvergent, sondern nur semikonvergent ist, was für $\frac{1}{2} < \alpha^2 < 1$ eintritt.

In der Zwischenzeit hat er auch einmal vorgeschlagen[284]), auf Grund der Identität

$$(183)\quad \frac{(1-\alpha e^{ix})(1-\alpha e^{-ix})}{(1-\alpha)^2} = \prod_{\nu=-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{x}{2\nu\pi+i\log\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{2\nu\pi+i\log\alpha}\right)$$

vor der Entwicklung nach Potenzen von $\alpha$ erst den Faktor $x^2+(\log\alpha)^2$ abzutrennen, wodurch die Schnelligkeit der Konvergenz erhöht würde, da die Nullstellen aller übrigen Faktoren weiter vom Ursprung des Koordinatensystems abliegen; doch hat er damals keine allgemeinen Formeln für die Koeffizienten der so entstehenden Entwicklung gegeben und diesen Ansatz auch später nicht weiter verfolgt.

Wenn $\alpha$ nahezu gleich 1 ist, versagen alle diese Entwicklungen

---

282) Paris C. R. 19 (1844), p. 58 = Oeuvres (1) 8, p. 248, ib. p. 160 = 286 noch die Bemerkung, daß man das Verfahren durch Einführung eines Konvergenzfaktors streng machen könne. Das Verfahren, das er p. 1197 = 340 gibt ist mit dem von *Leverrier*[281]) im wesentlichen identisch.

283) Paris C. R. 34 (1852), p. 159 = Oeuvres (1) 11, p. 402.

284) Paris C. R. 20 (1845), p. 919 = Oeuvres (1) 9, p. 175. Vgl. auch die vorangeschickten allgemeinen Auseinandersetzungen über die Verbesserung der Konvergenz durch Abspaltung solcher Faktoren, p. 907 = 164.

praktisch. *D'Alembert* hat für diesen Fall vorgeschlagen[285]), man solle die Integraldarstellung von $\mathfrak{B}_s^{(0)}$ durch Einführung von

$$t = 1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2$$

als Integrationsvariable in die Form

$$(184)\qquad \int\limits_q^p \frac{t^s\,dt}{\sqrt{(p-t)(t-q)}}$$

überführen, in der unter der genannten Voraussetzung $p$ nahezu gleich 2, $q$ klein ist; und nun für den einen Teil des Integrationsintervalls die Entwicklung des Faktors $(p-t)^{-\frac{1}{2}}$ nach steigenden Potenzen von $\frac{t}{p}$, für den anderen Teil die Entwicklung des Faktors $(t-q)^{-\frac{1}{2}}$ nach steigenden Potenzen von $\frac{q}{t}$ benutzen.

Der Fall eines negativen ganzzahligen Exponenten, der übrigens für astronomische Zwecke von geringem Interesse ist, läßt sich mit Hilfe der Entwicklung (2) erledigen. *G. Frullani*[286]) leitet aus ihr für den Koeffizienten von $\cos nx$ in der Entwicklung von $(m+\cos x)^{-s}$ den Ausdruck ab:

$$(185)\qquad \frac{(-1)^{(n-1)s}\,2}{(s-1)!}\,\frac{d^s}{dm^s}\,\frac{(m-\sqrt{m^2-1})^n}{\sqrt{m^2-1}}.$$

Für die niedrigsten positiven ganzzahligen Werte von s stehen ausgerechnete Formeln bei *Th. St. Davies*[286a]).

b) Die Darstellung der $\mathfrak{B}$ durch bestimmte Integrale

$$(186)\qquad \mathfrak{B}_s^{(n)} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi (1-2\alpha\cos x+\alpha^2)^s \cos nx\,dx$$

findet sich in versteckter Form schon bei *Euler*[287]), für $n=0$ und

285) Recherches sur différens points du système du monde 2, Paris 1754, p. 87. In der astronomischen Literatur scheint keine Veranlassung gewesen zu sein, diese Bemerkung d'Alemberts weiter auszuführen; mathematisch vgl. man die aus den Vorlesungen von *H. A. Schwarz* stammende Darstellung bei *H. Burkhardt*, elliptische Funktionen, Leipz. 1899, § 82.

286) Ricerche sopra le serie, Firenze 1816, p. 40.

286a) Edinb. trans. 154, 1844, p. 579. Er benutzt die Formeln zum Beweise einiger der geometrischen Sätze von *M. Stewart* (vgl. II A 9a, p. 645, Note 6).

287) Recherches[38]) p. 30; an Stelle der Integrale gibt er Näherungsformeln, wie man sie durch Anwendung der sog. Rechtecksformeln auf die Integrale oder auch durch die Anwendung der Methoden trigonometrischer Interpolation auf das vorliegende Problem erhalten würde. Daß Euler den letzteren Weg eingeschlagen hat, dafür scheint die Darstellung inst. calc. int. 1, § 292 = opera 1 (11), p. 178 zu sprechen. Er hat von diesen Interpolationsformeln auch tatsäch-

$n = 1$ bei *J. d'Alembert*[288]), allgemein bei *A. Cl. Clairaut*[289]), bei *J. Hellins*[290]), bei *A. M. Legendre*[291]) und bei *G. Frullani*[292]).

Für den Fall $s = -1/2$ gibt *P. S. de Laplace*[293]) noch die Umformung der Integraldarstellung:

$$(187) \qquad \mathfrak{B}^{(n)}_{-\frac{1}{2}} = \frac{4\alpha^n}{\pi} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}} dt}{\sqrt{1-\alpha^2+\alpha^2 t^2}}$$

und *A. M. Legendre* die damit im wesentlichen identische[294]):

$$(188) \qquad \mathfrak{B}^{(n)}_{-\frac{1}{2}} = \frac{2\alpha^n}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^{2n} x\, dx}{\sqrt{1-\alpha^2 \sin^2 x}}.$$

Isoliert steht die von *Euler*[295]) ohne Beweis angegebene Formel:

$$(189) \qquad (1-\alpha^2)\,\mathfrak{B}^{(0)}_{-\frac{3}{2}} \cdot \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha^2-z^2}} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2 \int_0^\alpha \sqrt[4]{\frac{1-z^2}{\alpha^2-z^2}} \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

In der gewöhnlichen Form hypergeometrischer Integrale, nämlich

$$(190) \qquad \mathfrak{B}^{(n)} = \frac{2\alpha^n}{\pi} \sin \pi s \int_0^1 x^{n-s-1}(1-x)^s(1-\alpha^2 x)^s dx$$

---

lich bei Störungsrechnungen Gebrauch gemacht (Paris recueil des pièces qui ont remporté les prix 7 (1769), p. 21 (Preisschrift von 1749); Petr. n. comm. 16 (1771), p. 448); in andern Fällen (Paris recueil des ... prix 8 (1771), p. 53; Preisschrift von 1756) bedient er sich der Reihenentwicklungen. An Stelle der Rechtecksformel benutzt *J. de Lalande* die Simpsonsche Formel. (Paris mém. 1758[63], p. 256; 1760[66], p. 315; 1761[63], p. 263; Astronomie 2, Paris 1764, p. 1395; 2me éd. 3 (1771), p. 593).

288) Recherches sur différents points du système du monde 2, Paris 1754, p. 66.

289) Paris mém. 1754[59], p. 549 (von 1757).

290) Lond. trans. 1798, p. 544.

291) Exerc. 2, p. 374; traité 2, p. 531.

292) Ricerche[286]), p. 53, 113.

293) Mécanique céleste, livre 15, Paris 1824 (œuvres 5, p. 378); der Zahlenfaktor berichtigt conn. des temps pour 1828[25], p. 314 (in den Oeuvres nicht mit abgedruckt, da die Berichtigung œuvres 5, p. 378 bereits ausgeführt).

294) Traité[278]) 2, p. 536. *C. G. J. Jacobi* gibt Fundamenta nova, Regiom. 1829, Nr. 9 = Werke 1, p. 67 eine einfache Ableitung von Legendres Formel und zeigt J. f. Math. 15 (1836) = Werke 6, p. 94, wie sie sich aus seiner allgemeinen Gleichung (374) ableiten läßt; *O. Schloemilch*, analytische Studien 2, Leipz. 1848, p. 51 reproducirt das.

295) Recueil des pièces qui ont remporté les prix 8 (1771) (Preisschrift von 1756), p. 53.

erscheinen die $\mathfrak{B}$ zuerst bei *J. Binet*[296]); er erhält diese Form, indem er in der Entwicklung nach Potenzen von $\alpha^2$ die Koeffizienten durch Eulersche Integrale I. Art ausdrückt und dann die Reihenfolge von Summation und Integration vertauscht. Eine einfache Umformung gibt die Entwicklung nach Potenzen von $\beta^2$. Wenn diese nicht konvergiert, entwickelt er den Faktor $(1-\alpha^2 x)^s$ nach Potenzen von

$$(191)\qquad \frac{1-\gamma^2 x}{1-x},\quad \gamma^2 = 2\alpha^2 - 1$$

und die einzelnen Glieder der so entstehenden Reihe nach Potenzen von $\gamma^2$, und wiederholt erforderlichenfalls diese Operation mehrmals.

Mit (190) ist übrigens im wesentlichen die folgende Integraldarstellung identisch:

$$(192)\qquad \mathfrak{B}_s^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(1-e^{-xi})^s(1-\alpha^2 e^{xi})^s e^{nxi}dx,$$

die *A. Cauchy*[297]) aus der ursprünglichen Definition (187) durch Verlegung des Integrationswegs in der Ebene der komplexen Größe exp $xi$ erhalten hat.

c) Die Rekursionsformel:

$$(193)\quad (n-s+1)\alpha\mathfrak{B}_s^{(n+1)} - n(1+\alpha^2)\mathfrak{B}_s^{(n)} + (n+s-1)\alpha\mathfrak{B}_s^{(n-1)} = 0$$

(bzw. die entsprechende Formel für die $\mathfrak{A}$) findet sich bereits bei *Euler*[298]), dann bei *Clairaut*[299]), als Spezialfall allgemeiner Formeln bei *A. F. Svanberg*[300]); die Ausdrücke der $\mathfrak{B}_s$ durch die $\mathfrak{B}_{s+1}$ und umgekehrt — die mit Hilfe von (193) auf verschiedene Formen gebracht werden können — bei *Euler*[301]), bei *d'Alembert*[302]), bei *Lagrange*[303]), bei *U. J. Leverrier*[304]). Auf eine für die numerische Rechnung zweckmäßige

---

296) J. éc. polyt. cah. 27 (1839), p. 332; ohne Beweis Paris C. R. 9 (1839), p. 44. *A. Cauchy* (Paris C. R. 18 1844, p. 1083 = œuvres (1) 8, p. 237) formt (173) in (175) mit Hilfe seiner Residuensätze um.

297) Paris C. R. 15 (1842), p. 266 = Oeuvres (2) 7, p. 98.

298) Recherches[38]), p. 28; Preisschrift von 1756[287]), p. 53; instit. calc. int.[266]) 1, § 279 = opera (1) 11, p. 167.

299) Paris mém. 1754[59], p. 550 (von 1757); im Anschlusse daran bei *J. de Lalande*, Paris mém. 1760[66], p. 317; 1761[63], p. 259; Astronomie 2, Paris 1764, p. 1396; 2me éd. 3 (1771), p. 595.

300) Upsala n. a. 11 (1839), p. 9.

301) Recherches[38]), p. 44; inst. calc. int.[266]) § 280 = opera (1) 11, p. 167, 171, 286, 279.

302) Recherches[288]) 2, p. 62, 70, 79, 83.

303) Taur. Misc. 3 (1762/65[66]); recueil des pièces qui ont remporté les prix 9 (1766); Berl. nouv. mém. 1781[83] (œuvres 1, p. 621; 6, p. 91; 5, p. 184).

304) Développements sur plusieurs points de la théorie des perturbations

Form hat sie *Legendre*[305]) gebracht; daran schließt sich dann die Darstellung der Quotienten $\mathfrak{B}_{s+1}^{(n)}/\mathfrak{B}_s^{(n)}$ als Kettenbrüche bei *P. N. Fuß*[306]), bei *C. G. J. Jacobi*[307]) und bei *P. A. Hansen*[308]).

d) Daß die unter b besprochenen Integrale zu den elliptischen gehören, scheint zuerst *J. d'Alembert* bemerkt zu haben[309]). Die eigentliche Theorie der elliptischen Integrale hat aber erst *J. Ivory*[310]) für die Untersuchung der $\mathfrak{B}$ herangezogen. Er führt das Integral $\mathfrak{B}_{-\frac{1}{2}}^{(0)}$ durch quadratische Transformation in ein Integral derselben Form über, in dem an Stelle von $\alpha$ die Größe

$$(194)\qquad \alpha_1 = \frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{1+\sqrt{1-\alpha^2}} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\alpha\right)$$

steht; durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält er:

$$(195)\qquad \mathfrak{B}_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)\cdots$$

und dazu:

$$(196)\qquad \mathfrak{B}_{-\frac{1}{2}}^{(1)} : \mathfrak{B}_{-\frac{1}{2}}^{(0)} = \alpha\left\{1+\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_1\alpha_2}{4}+\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{8}+\cdots\right\}.$$

Dabei begnügt er sich damit, daß er abbricht, wenn $\alpha_n$ klein genug geworden ist; eine Konvergenzuntersuchung gibt er nicht. Dann erscheint bei *K. Fr. Gauß*[311]) die Auffassung des reziproken Wertes von

des planètes, Paris 1841, p. 31; Paris observ. ann. 2, 1856, p. 1. Er bemerkt übrigens, daß die Benutzung der Rekursionsformel, wenn man mit den niedrigsten Werten von $n$ beginnt, zu einer Häufung der Fehler Anlaß geben könne und in der Tat oft gegeben habe.

305) Exerc.[278]) 2, p. 279; traité[278]) 2, p. 544.

306) Petersb. mém. 5 (1812[15]), p. 137 (von 1809). Fuß hat auch schon die Bemerkung (p. 144), daß es zweckmäßig ist, mit der Berechnung des $\mathfrak{B}_s^{(n)}$ für den höchsten noch zu berücksichtigenden Wert von $n$ zu beginnen.

307) Astr. Nachr. 28 (1849) (Werke 7, p. 156). — Auch *C. F. Gauß* hat, wie aus einer nachgelassenen Notiz hervorgeht (Werke 8, p. 84), sich seiner Kettenbruchdarstellung des Quotienten zweier hypergeometrischer Reihen zur Berechnung der $\mathfrak{B}$ bedient.

308) Leipz. Abhandl. 2 (1855), p. 188. Bei Hansen handelt es sich zunächst um die $\mathfrak{A}_s^n$ oder vielmehr um die Produkte $(1-\mathfrak{n}^2)^{-n}\mathfrak{A}_s^{(n)}$ für ganzzahlige $s$, wie sie bei der Entwicklung der Potenzen des Radiusvektors nach den Kosinus der Vielfachen der wahren Anomalie in der Theorie der elliptischen Bewegung der Planeten auftreten.

309) Recherches[288]) 2, p. 66 „s'intègre par la rectification des sections coniques". Er meint aber, diese Methode sei „plus curieuse et plus géométrique que commode pour le calcul".

310) Edinb. trans. 4 (1798), p. 183 (von 1796); reproduziert von *G. B. Airy*, math. tracts, 2[d] ed., Cambr. 1831, p. 105.

311) Gott. comm. rec. 4 (1818) = Werke 3, p. 352; die Beziehung zu dem hier besprochenen Problem deutlicher ausgesprochen in der Selbstanzeige Gött.

$\mathfrak{B}^{(0)}_{-\frac{1}{2}}$ als „arithmetisch-geometrisches" Mittel aus $1+\alpha$ und $1-\alpha$; die Berechnung des Quotienten (196) ist bei ihm, obwohl der Sache nach dieselbe, nicht so einfach dargestellt wie bei Ivory, indem es aussieht, als sei noch die Ausziehung weiterer Quadratwurzeln erforderlich.

*A. M. Legendre*[312]) zeigt, daß die Integrale (188) durch die Substitution $x = \pi - 2\psi$ in die von ihm gewöhnlich gebrauchte Normalform elliptischer Integrale (II B 3, *Harkneß-Wirtinger-Fricke*, Nr. 5, p. 189) übergehen, mit

$$k = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}$$

als Modul; er führt sie aber sogleich durch die Transformation (194) in solche über, die $\alpha$ selbst zum Modul haben, und wiederholt diese Transformation erforderlichenfalls. Für den Fall, daß $\alpha$ nahe an 1 liegt, schlägt er vor[313]), nach den Vielfachen nicht von $x$ selbst, sondern von demjenigen Argument $x_0$ zu entwickeln, das bei der erstgenannten Transformation durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\frac{x-x_0}{2} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\cot\frac{x}{2}$$

eingeführt ist.

Ausführliche Anweisungen zur Berechnung von $\mathfrak{B}^{(0)}_{-\frac{1}{2}}$ und $\mathfrak{B}^{(1)}_{-\frac{1}{2}}$ mit Hilfe der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen gibt auch *G. de Pontecoulant*[314]).

---

Anz. 1818 = Werke 3, p. 359. Dazu aus dem Nachlaß: der Beweis der Konvergenz des Verfahrens ib. p. 361; die Ableitung der Potenzreihen aus der Auffassung als arithmetisch-geometrisches Mittel p. 367; Tabelle numerischer Werte p. 403. Dann 7, p. 384 (von 1802) noch eine Zusammenstellung der Formeln und Durchrechnung eines Beispiels. Abgesehen von diesen Notizen und der in Note 269 erwähnten scheinen die „vielen eigenen Kunstgriffe", die Gauß in einem Brief an Olbers (Briefwechsel 1, p. 269; zuerst publ. von B. Boncompagni, Linc. pontif. atti 1884, p. 49) zu besitzen erklärt, verloren zu sein; ebenso die „ganz neuen, auf einem merkwürdigen und sehr allgemeinen, aus der Theorie der elliptischen Transcendenten entstehenden Prinzip beruhenden Approximationsformeln", von denen eine nachgelassene Notiz *C. G. J. Jacobi*'s (Werke 7, p. 292) spricht. Ein Brief von *P. Hansen,* Gauß Werke 7, p. 434 (von 1843) gibt die Anwendung des Verfahrens des arithm.-geom. Mittels auf Integrale allgemeinerer Form.

312) Exerc. de calc. int. 2 (1817), p. 285 (publ. 1815); Traité des fonctions elliptiques 2, Paris 1826, p. 547.

313) Exerc. p. 294; Traité p. 555. Er bemerkt, daß der Übergang von $x_0$ zu $x$ durch die aus (203) folgende Entwicklung geschehen könne.

314) Traité analytique du système du monde 3, Paris 1834, p. 87. Einfacher sei es, Legendres Tafeln der vollständigen elliptischen Integrale I. u. II. Art zu benutzen (p. 104).

e. Den asymptotischen Ausdruck für große Werte von $n$:

$$(197)\qquad \mathfrak{B}^{(n)}_{-\frac{1}{2}} \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}\frac{\alpha^n}{\sqrt{1-\alpha}}$$

hat bereits *A. Cauchy*[315]) mit Hilfe des asymptotischen Ausdrucks der $\Gamma$-Funktion gewonnen.

f. Die Ausdrücke der Ableitungen der $\mathfrak{B}$ durch die $\mathfrak{B}$ selbst finden sich bei *Euler*[316]), dann bei *Laplace*[317]), bei *Lagrange*[318]), bei *Legendre*[319]), bei *Pontécoulant*[320]), bei *Leverrier*[321]); ausführlich sind diese Ableitungen von *W. Scheibner*[322]) behandelt.

*A. Cauchy*[323]) benutzt an ihrer Stelle die durch die Integrale

$$(198)\qquad \Theta_{n,l} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1-e^{-vi})^s(1-\alpha^2 e^{vi})^{-l+s}e^{(n+l)vi}dv$$

dargestellten Funktionen, die sich von ihnen nur durch numerische Faktoren unterscheiden; er zeigt, wie sich durch partielle Integrationen Rekursionsformeln für sie gewinnen lassen[324]).

g) Daß die Formeln dieser Nummer auch zur Berechnung der magnetisierenden Wirkung eines elektrischen Kreisstroms auf ein magnetisierbares Teilchen benutzt werden können, scheint zuerst *Dippe*[325]) bemerkt zu haben.

---

315) *Turiner* mém.[227]), p. 91; Verallgemeinerung für beliebige $s$, mit anderem Beweis, Paris C. R. 19 (1844), p. 1131 = Oeuvres (1) 8, p. 324.

316) Instit. calc. int. 1 (1768), § 282, 287 = opera (1) 11, p. 168, 173; ein Spezialfall (in umgekehrter Auffassung, als Ausdruck von $\mathfrak{B}^{(1)}_{\frac{3}{2}}$ durch $\mathfrak{B}^{(0)}_{\frac{3}{2}}$ und dessen Integral), auch schon in der Preisschrift von 1756[287]), p. 53.

317) Paris hist. $1772_2$[76] = Oeuvres 8, p. 437.

318) Berlin nouv. mém. 1781[83] = Oeuvres 5, p. 185.

319) Für negative ganzzahlige $s$ exerc. de calc. int. 1 (1811), p. 373; allgemein ib. 2 (1817), p. 299 (publ. 1815); traité des fonctions elliptiques 2 (1826), p. 559.

320) Traité[314]) 3, p. 68.

321) Vgl. Note 304.

322) Habilitationsschrift Leipzig 1853, p. 10, 14.

323) Paris C. R. 15 (1842), p. 266 = Oeuvres (1) 7, p. 98. Die Formel ist hier durch einen auch in den Oeuvres nicht korrigierten Druckfehler ganz unverständlich; ib. p. 480 = 123 steht sie richtig.

324) Paris C. R. 15 (1842), p. 483 = Oeuvres (1) 7, p. 126.

325) Arch. Math. Phys. 7 (1846), p. 195. Er schließt sich an *Lacroix*[265]) an; seine Darstellung ließe sich übrigens noch vereinfachen, da die von ihm entwickelte Funktion

$$= \frac{1-\alpha\cos x}{(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$$

**10. Anhang zu Nr. 9.** Den Weg zur Übertragung der Methoden von Nr. 9 auf allgemeinere Integrale hat *C. F. Gauß*[326]) eröffnet, indem er zeigte, wie das Integral

$$(199)\quad \int N^{-\frac{3}{2}}(A + B\cos x + C\sin x + D\cos 2x + E\sin 2x)\,dx,$$

wo

$$(200)\quad N = a + b\cos x + c\sin x + d\cos^2 x + f\sin^2 x$$

auf ein Integral derselben Form, aber mit $b = c = 0$, reduziert werden kann; nämlich durch eine lineare homogene Substitution der drei Größen 1, $\cos x$, $\sin x$, bei welchen die quadratische Form $\cos^2 x + \sin^2 x - 1$ in sich transformiert wird. (Das Problem ist also analog zum Problem der Hauptachsenbestimmung der Flächen zweiter Ordnung; vgl. III C 2, *Staude,* Nr. 9, p. 173.)

Daran anschließend hat dann *C. G. J. Jacobi*[327]) die Aufgabe gestellt, die Potenzen $N^s$ nach den trigonometrischen Funktionen der Vielfachen von $x$ zu entwickeln. Den speziellen Fall $s = -1$, $d = f = 0$ hat er selbst behandelt[328]); dabei läßt er noch zu, daß die übrigen Koeffizienten komplex sind, wenn nur $N$ für keinen reellen Wert von $x$ Null wird. Er spaltet $N$ in die Faktoren $(1 - Ce^{xi})(1 - C_1 e^{-xi})$, zerlegt dann $1/N$ in Partialbrüche, entwickelt jeden von diesen für sich und vereinigt schließlich wieder; dabei muß er zwei Fälle unterscheiden, je nachdem von den Größen $C$, $C_1$ nur die eine absolut kleiner als 1 ist oder beide.

Über den Fall $c = f = 0$ finden sich einige Andeutungen bei *J. E. Czwalina*[329]). Er gibt für die Koeffizienten der Entwicklung von

---

mit

$$z = \frac{1}{(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}}$$

durch die Relation $y = z - \alpha\, dz/d\alpha$ verbunden ist.

326) Gott. comm. rec. 4 (1818) = Werke 3, p. 334. Die Beziehung zum Problem der vorigen Nr. ist deutlicher als in der Abhandlung selbst in der Selbstanzeige Gött. Anz. 1818 = Werke 3, p. 357 ausgesprochen. Eine andere Art der Rechnung gibt *Th. Clausen* (J. f. Math. 6 (1830), p. 290): er transformiert erst, durch Auflösung derselben kubischen Gleichung wie Gauß, auf den Fall, daß $N = (a_1 + b\cos x)^2 + (a_2 + c\sin x)^2$ gesetzt werden kann, und zeigt, daß die weitere Reduktion durch dieselben Formeln geschieht wie der Übergang von der wahren zur exzentrischen Anomalie. Noch eine andere Darstellung gibt *V. A. Lebesgue* (J. de math. 2 (1837), p. 360); er führt auch die Reduktion auf die Legendresche Normalform der elliptischen Integrale durch.

327) J. f. Math. 15 (1836), p. 205 = Werke 6, p. 119.

328) Ib. 32 (1846), p. 11 = Werke 6, p. 156; vgl. auch die Darstellung von *E. Heine,* Handbuch der Kugelfunktionen 1, p. 29, 212 der 2. Aufl. Berlin 1878. Heine zieht auch andere ganzzahlige Werte von $s$ in Betracht.

329) Progr. Gymn. Danzig 1842, p. 11.

$N'$ nach den Kosinus der Vielfachen von $x$ (nur diese treten hier auf) Rekursionsformeln und zeigt, daß sich mit deren Hilfe alle diese Koeffizienten aus den 3 ersten ableiten lassen; daß bei speziellen Werten der Koeffizienten von $N$ auch zwischen diesen dreien noch eine lineare Relation besteht; daß die Koeffizienten für irgendeinen Wert von $s$ sich aus den zu dem um eine Einheit größeren oder kleineren Wert gehörenden ableiten lassen.

Czwalina hat auch den allgemeineren Fall:

$$(201)\qquad N = a + b\cos x + c\sin x + d\cos^2 x + e\cos x\sin x + f\sin^2 x$$

in Angriff genommen[330]; hier sind im allgemeinen 4 Entwicklungskoeffizienten voneinander unabhängig, die übrigen lassen sich durch sie ausdrücken. Als jene vier können das absolute Glied und die Koeffizienten von $\cos x$, $\sin x$, $\sin 2x$ gewählt werden, nur nicht in dem Falle, daß $s$ ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{2}$ ist. Er bestimmt sie für $s = -2$, indem er $N$ durch Auflösung einer Hilfsgleichung 3. Grades auf die Form

$$(202)\qquad (\alpha + \alpha_1\cos x + \alpha_2\sin x)(\beta + \beta_1\cos x + \beta_2\sin x)$$

bringt[331]), dann $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ als Integrationsvariable einführt und die so erhaltenen Integraldarstellungen auf die Legendreschen Normalformen elliptischer Integrale transformiert[332]).

Natürlich kann man solche Entwicklungen auch dadurch erhalten, daß man den zu entwickelnden Ausdruck, wie oben erwähnt, in zwei Faktoren spaltet und jeden der beiden Faktoren dann für sich nach den Methoden der Nr. 9 entwickelt. Das umständlichste dabei ist die Zerlegung in Faktoren; für ihre bequeme Vollziehung haben sich einige Andeutungen im Nachlaß von *C. F. Gauß*[333]) gefunden; ausführlich ist sie von *A. Cauchy*[334]) behandelt worden.

**11. Entwicklungen der Sphärik.** Die Gleichungen (14) und (15) können, wie *A. M. Legendre*[335]) bemerkt, zur Berechnung der übrigen

330) Ib. p. 6; hierauf bezieht sich wohl die Ankündigung von Jacobi, J. f. Math. 15 (1836), p. 206 = Werke 6, p. 119, daß er die Durchführung dieser Rechnungen einem Schüler übertragen habe.

331) p. 20.

332) p. 23.

333) Werke 7, p. 595, 599.

334) Paris C. R. 18 (1844), p. 625 = Oeuvres (1) 8, p. 168. Er diskutiert namentlich den Fall $e = f = 0$, um den es sich handelt, wenn der Hauptteil der Störungsfunktion nach den Funktionen der Vielfachen der exzentrischen Anomalie des einen der beiden Planeten entwickelt werden soll.

335) Eléments de géométrie, Nr. 100 (mir war die 14. franz. Auflage, Brux.

Stücke eines ebenen Dreiecks dienen, von dem zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind. Von den Aufgaben der sphärischen Trigonometrie läßt sich, wie schon *J. L. Lagrange*[336]) bemerkt hat, die „Reduktion auf die Ekliptik", d. h. die Bestimmung von $y - x$ aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} y = \cos\omega \operatorname{tg} x \tag{203}$$

auf die Formel (2) zurückführen, indem sich durch Differentiation daraus ergibt:

$$dy = \frac{dx}{1 + 2r\cos 2x + r^2}, \quad r = \operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2}. \tag{204}$$

Einfacher gelangt er dann[295]) zu demselben Resultat durch direkte Einführung komplexer Größen, die

$$y - x = \frac{1}{2i}\log\frac{1 + re^{-2xi}}{1 + re^{2xi}} \tag{205}$$

ergibt. Erscheint an Stelle von $\cos\omega$ einer der Ausdrücke

$$\frac{\cos\omega}{\cos\varphi}, \quad \frac{\operatorname{tg}\omega}{\operatorname{tg}\varphi}, \quad \operatorname{tg}\omega\operatorname{tg}\varphi, \quad \operatorname{tg}^2\omega \tag{206}$$

als Faktor, so erhält $r$ bzw. die Werte

$$\operatorname{tg}\frac{\omega+\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega-\varphi}{2}, \quad \frac{\sin(\varphi-\omega)}{\sin(\varphi+\omega)}, \quad \frac{\cos(\varphi+\omega)}{\cos(\varphi-\omega)}, \quad \cos 2\omega. \tag{207}$$

Damit lassen sich dann alle Fundamentalaufgaben der sphärischen Trigonometrie behandeln[338]). Auch $\cos 2y$ und $\sin 2y$ lassen sich als Funktionen von $x$ durch Reihen derselben Art ausdrücken; es ist

---

1832 (p. 405) und die 2. Aufl. der deutschen Übersetzung von Crelle, Berlin 1833 (p. 411) zugänglich).

336) Berlin. nouv. mém. 1776[79] (œuvres 4, p. 276). Lagrange gibt an, er habe spezielle Fälle ohne Beweis bereits im 3. Bande der „tables astronomiques de l'académie" veröffentlicht. — Eine umständlichere Ableitung des Resultats, ohne Benutzung komplexer Größen, durch Entwicklung nach Potenzen von $1 - \cos x$ und Umordnung, findet sich bei *J. H. Lambert*, Berl. astr. Jahrb. 5, f. 1780[77], p. 69; ist mit ihr die umständlichere Lösung „par des moyens purement trigonométriques" identisch, die sich nach dem Bericht von *A. Cagnoli*, trigonometria piana e sferica, 2da ed. 1804 (p. 116 der franz. Übersetzung von 1808) in den Effemeridi di Milano für 1785, p. 187 finden soll.? Lambert gibt p. 67 auch die Entwicklung von $\arcsin(\varepsilon\sin x)$. *A. de Morgan* (calculus p. 124) leitet umgekehrt die Entwicklung (2) durch Differentiation aus der von $\operatorname{arc\,tg}(k\operatorname{tg}x)$ ab, nachdem er diese durch Benutzung komplexer Größen gewonnen hat. *J. L. Raabe* (Differential- und Integralrechnung 1, Zürich 1839, p. 277) gewinnt die Ausgangsformel (2), indem er zunächst für die Entwicklungskoeffizienten aus ihrer Integraldarstellung in komplexer Form (388) eine Rekursionsformel ableitet.

337) p. 278.

338) p. 285.

nämlich[339]):

$$(208)\qquad e^{2iy} = r + (1 - r^2)\frac{e^{2ix}}{1 + re^{2ix}}$$

Die allgemeinere Gleichung

$$(209)\qquad y = \operatorname{arc\,tg}\frac{a\sin x}{p + \cos x}$$

läßt sich ebenso behandeln[340]); sie kann nämlich auf die Form gebracht werden:

$$(210)\qquad e^{2yi} = e^{xi}\frac{1 + Pe^{-xi}}{1 + Pe^{xi}}\cdot\frac{1 + Qe^{-xi}}{1 + Qe^{xi}},$$

wobei

$$(211)\qquad P + Q = \frac{2p}{1 + a}, \quad PQ = \frac{1 - a}{1 + a}$$

ist; und Analoges gilt überhaupt, wenn $\operatorname{tg} y$ gleich einer [für die Konvergenz der sich ergebenden Reihen geeigneten Bedingungen zu unterwerfenden] rationalen Funktion von $\cos x$ und $\sin x$ ist. Lagrange führt die Rechnung noch für

$$(212)\qquad \frac{a\sin 2x + b\sin x}{\cos 2x + p\cos x + q}, \quad \frac{a\sin x + b\cos x}{\cos x + p\sin x}$$

durch. Besonders einfach ist dabei noch der Fall

$$(213)\qquad \frac{\sin x + p\sin 2x + q\cos 3x + \cdots}{\cos x + p\cos 2x + q\cos 3x + \cdots}.$$

Den speziellen Fall $a = 1$ der Gleichung (209) behandelt *B. J. Delambre*[341]) direkt mit Hilfe der für ihn geltenden Differentialgleichung:

$$(214)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1 + p\cos x}{1 + 2p\cos x + p^2}$$

und der Methode der unbestimmten Koeffizienten.

Weitere Ausführungen über die Benutzung dieser Formeln für die sphärische Trigonometrie finden sich bei *J. J. Littrow*[342]). Er be-

---

339) p. 279. Lagrange gewinnt durch Anwendung des binomischen Satzes auf die Gleichung (208) auch die Mittel zur Entwicklung von $\cos\mu y$ und $\sin\mu y$ mit beliebigem $\mu$.

340) p. 294; weniger durchsichtig bei *A. M. Legendre*, exercices de calcul intégral 2, Paris 1817, p. 239 (publiziert 1815). Die algebraischen Gleichungen, von denen die Faktorenzerlegung abhängt, brauchen nicht aufgelöst zu werden, da in den Reihen schließlich nur symmetrische Funktionen ihrer Koeffizienten vorkommen.

341) Méthode analytique pour la détermination d'un arc de méridien, Paris, an VII, p. 64. *Legendre* zeigt (ib. Anhang, p. 3), daß das Verfahren von Lagrange auch hier einfacher zum Ziele führt.

342) Pétersb. mém. 5 (1812[15]), p. 191; ib. 7 (1815/16[20]), p. 135 stellt er seine Formeln und diejenigen von Legendre zusammen.

handelt auch noch die Reihe für

$$(215)\qquad y = \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha \sin x + \beta \sin 2x + + \cdots}{1 + \alpha \cos x + \beta \cos 2x + + \cdots};$$

durch Entwicklung von $\operatorname{arc\,tg} \frac{u}{1+v}$ nach Potenzen von $u$ und $v$ und Umordnung erhält er Rekursionsformeln für die Koeffizienten[343]). Sind alle Koeffizienten außer $\alpha$ und $\beta$ Null, so kann die Gleichung auch geschrieben werden[344]):

$$(216)\qquad 2x - y = \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha\beta^{-1} \sin x + \beta^{-1} \sin 2x}{1 + \alpha\beta^{-1} \cos x + \beta^{-1} \cos 2x}.$$

*Legendre*[345]) behandelt dann auch noch denjenigen Fall der Gleichung (209), in welchem $a > 1$ ist. Wird die Gleichung hier auf die Form

$$(217)\qquad e^{iy} = \frac{1 + P_1 e^{xi}}{1 + P_1 e^{-xi}} \cdot \frac{1 + Q_1 e^{-xi}}{1 + Q_1 e^{xi}}$$

gebracht, so fallen die Größen $P$, $Q$ beide absolut kleiner als 1 aus, so daß nach Potenzen von ihnen entwickelt werden kann. Er gibt noch einige andere Entwicklungen derselben Art:

$$(218)\qquad \operatorname{arc\,tg}(a + b \operatorname{tg} x) = x + \mu + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^n}{n} \sin(2nx - n\lambda),$$

wobei:

$$(219)\qquad \operatorname{tg}\mu = \frac{a}{1+b}, \qquad \operatorname{tg}(\lambda + \mu) = \frac{a}{1-b}, \qquad r = \frac{\sin\mu}{\sin \lambda + \mu};$$

$$(220)\qquad \operatorname{arc\,tg} \frac{a + b \operatorname{tg} x}{1 + c \operatorname{tg} x} = -\operatorname{arc\,tg} \frac{c}{b} + \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{ab + c}{b - ac} + \frac{b^2 + c^2}{b - ac} \operatorname{tg} x\right];$$

$$\operatorname{arc\,tg}(a \sin x + b)$$

$$= \mu + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n+1}}{2n+1} \cos(2n+1)\mu \sin(2n+1)x + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{2n} \sin 2n\mu \sin 2nx,$$

wobei $\mu$ und $r$ in komplizierterer Weise von $a$ und $b$ abhängen; daraus durch Differentiation die Entwicklung von

$$(221)\qquad \frac{a \cos x}{1 + (a \sin x + b)^2};$$

343) Ib. 7, p. 91, 94, 113. Wenn Littrow aus seinen Resultaten schließen will, man könne mit Epizykeln nicht ebenso allgemeine Bewegungen darstellen als mit trigonometrischen Reihen, so beruht das auf einem Versehen.

344) Ib. p. 117. Littrow glaubt die beiden aus (204) und (215) sich ergebenden Entwicklungen verbinden zu können und kommt so zu einer Reihe für $x$ selbst, die noch zwei willkürliche Parameter enthält; indessen sind die beiden Reihen nicht gleichzeitig konvergent.

345) Exerc. de calc. int. 2 (1817), p. 239 (p. 1815).

ferner:[346])

$$(222)\quad \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}^2 x) = \frac{\pi}{2} - \alpha - \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{\sin 2\alpha} - \cot 2\alpha\right]$$

*J. Fr. Encke*[347]) zeigt, wie die Formeln sich systematisch auseinander ableiten lassen. Er beginnt mit der Umsetzung der Gleichungen (2) und (3) in die Formen

$$(223)\quad \frac{\cos v}{1 - \sin v \cos x} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n \frac{v}{2} \cos nx,$$

$$(224)\quad \frac{\sin v \sin x}{1 - \sin v \cos x} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n \frac{v}{2} \sin nx;$$

Integration ergibt ihm dann die Gleichung (15), die auch als Auflösung der Gleichung

$$(225)\quad \sin y = r \sin(x - y) \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\left(y - \frac{x}{2}\right) = -\frac{1-r}{1+r} \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

angesehen werden kann. Er rechnet dieselben Annahmen (207) für $r$ durch, wie *Lagrange,* außerdem noch einige andere. Die Gleichung (14) schreibt er auch:

$$(226)\quad \pm\frac{1}{2}\log\frac{1 \pm \sin v \cos x}{\cos^2\frac{v}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{n+1}}{n} \operatorname{tg}^n \frac{v}{2} \cos nx.$$

Auch die von *C. G. J. Jacobi*[348]) angegebene Entwicklung: „wenn

$$(227)\quad \cos x = \cos y + \frac{h}{2}\sin^2 y$$

ist, so ist

$$(228)\quad y - x = \frac{1}{2}h \sin x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{h^2}{2}\sin 2x + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{h^3}{3}\sin 3x + \cdots\text{“}$$

kann hierher gerechnet werden.

**12. Entwicklungen aus der Theorie der elliptischen Bewegung.** Auch zur Lösung der Aufgaben, auf welche die Lehre von der ungestörten elliptischen Bewegung der Himmelskörper um ihre Zentralkörper führt, sind trigonometrische Reihen frühzeitig herangezogen

346) Er gibt p. 243 an, daß man überhaupt jede Gleichung der Form: $y = \operatorname{arc\,tg}$ einer gebrochenen rationalen Funktion von $\operatorname{tg} x$ auf diese Weise behandeln könne.

347) Astr. Nachr. 24 (1846), col. 155; nicht in den ges. Abhandl.? Von *Encke* entnimmt die Formeln *Fr. Brünnow,* Lehrbuch der sphärischen Astronomie, Berlin 1851 (p. 14 der 3. Aufl. von 1871).

348) J. f. Math. 15 (1836), p. 6 = Werke 6, p. 93. Er beweist die Richtigkeit zuerst mit Hilfe seiner Umformung (374) der Integraldarstellung der Koeffizienten, dann mit Hilfe der Lagrangeschen Reihenumkehrungsformel.

worden. Zunächst erscheinen zwar diese Entwicklungen als nach Potenzen der Exzentrizität geordnet; so entwickelt z. B. *L. Euler*[349]) die rechte Seite der zwischen der wahren Anomalie $w$ und der exzentrischen Anomalie $u$ bestehenden Gleichung

$$(229) \qquad dw = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,du}{1-\varepsilon\cos u}$$

nach Potenzen von $\varepsilon$ und integriert dann gliedweise; übrigens ersetzt er bereits hier die zunächst auftretenden Potenzen von $\sin u$ und $\cos u$ durch die Sinus der Vielfachen von $u$. Nachdem er aber dann an den Problemen der Störungstheorie (Nr. 3) die prinzipielle Wichtigkeit der trigonometrischen Reihen erkannt hatte, ordnet er auch diese Entwicklung sogleich nach den Vielfachen von $u$. Er setzt die Entwicklung mit unbestimmten Koeffizienten an, bestimmt den ersten Koeffizienten direkt, leitet für die übrigen eine Rekursionsformel ab und erhält so[350]):

$$(230) \qquad w = u + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^n}{n}\sin nu, \quad f = \frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

Bei den gleichzeitigen französischen Mathematikern erscheinen dann die ersten Glieder der Reihenentwicklungen der elliptischen Bewegung mit denjenigen der Störungstheorie verquickt[351]). Namentlich hat *A. Clairaut* schon bei seiner ersten Behandlung des Problems der Mondbewegung[352]) gesehen, daß die Methode der Integration durch sukzessive Approximationen „Kreisbogen", d. h. Säkularglieder, einführt, wenn man nicht schon in erster Annäherung die Bewegung der

349) Petrop. comm. 7 (1734/35[40], p. 70; das Resultat auch Berlin. hist. 2 (1746[48]), p. 231. Abweichend vom astronomischen Gebrauch bezeichne ich die numerische Exzentrizität nicht mit $e$, sondern mit $\varepsilon$, da $e$ hier doch für die Basis der natürlichen Logarithmen reserviert bleiben muß. Im übrigen bediene ich mich der jetzt bei den Astronomen üblichen Bezeichnungen und rechne namentlich die Anomalien vom Perihel an, während sie im 18. Jahrhundert meist vom Aphel an gerechnet wurden.

350) Berlin. hist. 3 (1747[49]), p. 114. Im Grunde handelt es sich übrigens nur um eine andere Schreibweise der Gleichung (15).

351) Vgl. auch die Darstellung von *Clairauts* und *d'Alemberts* Mondtheorien bei *F. Tisserand,* Traité de mécanique céleste 3, Paris 1894, p. 46.

352) Sie stammt aus der ersten Hälfte des Jahres 1747, ist aber erst 1760 und 1761 im Journal des sçavans veröffentlicht. Die Gründe, die ihn zur Einführung und Wahl dieser ersten Annäherung bewogen haben, setzt er ib. 1761, p. 844 bei Gelegenheit einer späteren Polemik mit d'Alembert noch einmal ausführlich auseinander. Bei *d'Alembert,* Recherches[286]) 1 (1754), p. 36 erscheint die Einführung des Faktors $m$ abstrakt mathematisch durch eine Umformung der Differentialgleichung der Bahn.

Apsiden berücksichtigt; er benutzt daher[353]) als solche erste Annäherung eine Gleichung zwischen Radiusvektor $r$ und wahrer Anomalie $w$ der Form:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k}(1 - \varepsilon \cos mw),$$

in der $m$ eine (wenig) von 1 verschiedene Zahl bedeutet. Aus ihr entwickelt er die Werte der benötigten Potenzen von $r$ bis zu Gliedern mit $\varepsilon$ einschließlich; die Rechnung, die von ihnen zum Ausdruck der mittleren durch die wahre Anomalie führt, skizziert er hier nur[354]). Die zweite, zuerst veröffentlichte Redaktion[355]) gibt dann diesen Ausdruck bis zu Gliedern dritter Ordnung

$$(231)\qquad \zeta = w + \frac{2\varepsilon + 3\varepsilon^3}{m} \sin mw + \frac{3\varepsilon^2}{4m} \sin 2mw + \frac{\varepsilon^3}{3m} \sin 3mw$$

und führt auch die Berechnung der Potenzen von $r$ weiter; eine dritte[356]) fügt die Ausdrücke der trigonometrischen Funktionen der Elongation zweier Planeten durch die wahre Anomalie des einen hinzu. Eine vierte endlich[357]) wiederholt das noch ausführlicher und fügt zu der Entwicklung (231) noch die beiden Glieder vierter Ordnung[358]):

$$(232)\qquad \frac{5\varepsilon^4}{4m} \sin 2mw + \frac{5\varepsilon^4}{32m} \sin 4mw;$$

außerdem erscheinen hier[359]) ohne Beweis die Anfangsglieder der Auflösung der Gleichung

$$(233)\qquad \zeta = w + \varepsilon \sin mw,$$

353) J. des sçavans 1761, p. 13.

354) p. 20.

355) Paris mém. 1745 (49), p. 347, 357; ebenfalls von 1747, aber durch besonderen Beschluß der Akademie (p. 390) in diesen Band aufgenommen. Eine sich anschließende Abhandlung von *d'Alembert* (ib. p. 365) enthält solche Entwicklungen jedenfalls nicht explizite.

356) Ib. 1748 (52), p. 422 (déposé 1749, lu 1752); vgl. auch die übersichtlichere Darstellung ib. 1754 (59), p. 533, 539 (von 1757).

357) Théorie de la lune, Preisschrift Petersburg 1752; p. 18, 45 der zweiten Auflage, Paris 1765. Um so merkwürdiger ist, daß er in einer noch späteren Abhandlung (Paris mém. 1754 (59), p. 543, 555; von 1757) behauptet, um aus der „Korrektion des Ausdrucks der Zeit" die „Korrektion des wahren Ortes ausgedrückt durch den mittleren" zu bekommen, brauche man nur in ersterem die Vorzeichen der Koeffizienten zu ändern und überall statt der mittleren Anomalie die wahre zu setzen; was doch nur für die erste Annäherung richtig ist.

358) p. 47.

359) p. 59. p. 56 ist ausdrücklich gesagt, daß das alles unverändert aus der ersten Auflage übernommen sei. Daß hier die wahre, nicht wie in der eigentlichen Keplerschen Gleichung (236) die exzentrische Anomalie auftritt, liegt daran, daß *Clairaut* von Anfang an nach den Vielfachen der ersteren entwickelt.

nämlich:

$$w = \zeta + \varepsilon\left(1 - \frac{m^2\varepsilon^2}{2}\right)\sin m\zeta + \frac{1}{2}m\varepsilon^2\sin 2m\zeta + \frac{3}{8}m^2\varepsilon^3\sin 3m\zeta. \tag{234}$$

*J. d'Alembert*[360]) setzt dann allgemein auseinander, wie eine solche Umkehrung geschehen kann, wenn man bei Gliedern bestimmter Ordnung stehen bleiben will; auch gibt er ohne Beweis die Anfangsglieder der Entwicklung der Mittelpunktsgleichung d. h. der Differenz zwischen $w$ und der mittleren Anomalie $\zeta$ nach den Vielfachen der mittleren Anomalie[361]):

$$w = \zeta - 2\varepsilon\sin\zeta + \frac{\varepsilon^3}{4}\sin\zeta + \frac{5\varepsilon^2}{4}\sin 2\zeta - \frac{13\varepsilon^3}{12}\sin 3\zeta. \tag{235}$$

Dann hat *Jeaurat*[362]) die Anfangsglieder der Mittelpunktsgleichung auf einem ziemlich umständlichen Wege erhalten, indem er nämlich in der *Kepler*schen Gleichung

$$\zeta = u - \varepsilon\sin u \tag{236}$$

die linke Seite nach Potenzen von $\sin\zeta$, die rechte nach Potenzen von $\sin u$ entwickelt, daraus durch Reihenumkehrung die Entwicklungen von $\sin u$ und $\cos u$ nach Potenzen von $\sin\zeta$ ableitet, hierauf die Gleichung

$$\operatorname{tg} w = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin u}{\varepsilon + \cos u} \tag{237}$$

benutzt, um $\operatorname{tg} w$ und dann $w$ selbst nach Potenzen von $\sin\zeta$ zu entwickeln, schließlich diese Entwicklung in eine solche nach den Sinus der Vielfachen von $\zeta$ umsetzt. Dabei bricht er überall mit $\varepsilon^6$ ab. Weiterhin[363]) gewinnt er auch noch die Entwicklung des Radius

360) Recherches[288]) 1, p. 80. p. XLIII ist angegeben, daß alles nicht in Klammern Gesetzte schon aus dem Jahre 1751 stammt.

361) Ib. p. 89. Ebenso führt er ib. 2, Paris 1754, p. 107 die Anfangsglieder der Entwicklung (231) ohne Beweis an.

362) Paris mém. prés. 4 (1763), p. 530. Er gibt an, daß er damit nur den von *A. Clairaut* in der Theorie der Mondbewegung[352]) gegebenen Ansatz weiter ausführe; dieser habe aber die Rechnung nur bis zu Gliedern mit $\varepsilon^3$ getrieben, was dort ausreichend gewesen sei. — Die Anordnung der Entwicklung nach den Funktionen der Vielfachen des Winkels erscheint bei Jeaurat bereits als etwas so selbstverständliches, daß er darüber kein Wort weiter verliert. — Eine Geschichte der Lösungen des Keplerschen Problems [in der übrigens z. B. gleich Jeaurat nicht erwähnt wird] gibt *C. P. Burger*, Diss. Lugd. Bat. 1851; bibliographische Angaben bei *J. H. Graf* und *E. Gubler*, Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen, 1, Bern 1898, p. 7.

363) p. 603.

Vector $r$ nach den Potenzen von $\sin \zeta$ mit Hilfe der Gleichung

$$r = 1 - \varepsilon \cos u \tag{238}$$

und setzt sie in eine solche nach den Kosinus der Vielfachen von $\zeta$ um.

*J. J. de la Lande*[364]) gibt eine ihm von *Clairaut* mitgeteilte Methode, bei der zuerst mit Hilfe der Gleichungen:

$$d\zeta = \frac{r^2 dw}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad r = \frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon \cos w} \tag{239}$$

die Entwicklung des Radiusvektor nach den Kosinus und der Mittelpunktsgleichung nach den Sinus der Vielfachen von $w$ aufgestellt wird. Die Entwicklungen von $\zeta - w$ nach den Sinus der Vielfachen von $\zeta$ werden dann mit unbestimmten Koeffizienten angesetzt, daraus Ausdrücke für die Sinus der Vielfachen von $w$ abgeleitet und diese in die zuerst genannten Entwicklungen eingeführt; Koeffizientenvergleichung liefert schließlich die erforderliche Anzahl Relationen zur Bestimmung der eingeführten Unbekannten.

Allgemeine, nicht mit einer bestimmten Potenz von $\varepsilon$ abbrechende Ausdrücke für die Koeffizienten der Entwicklungen:

$$u - \zeta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\zeta, \tag{240}$$

$$r = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\zeta \tag{241}$$

---

364) Astronomie 2, Paris 1764, p. 1308; 2e éd. 3 (1771), p. 492. Ein ähnliches Verfahren gibt auch *Bossut* in einem Anhang zu seiner Preisschrift von 1762 (Paris recueil des pièces qui ont remporté les prix 8 (1771), p. 61), den er p. 55 als „composé depuis longtemps" bezeichnet. *A. Cagnoli*, trigonometria piana e sferica (schon in der 1. Auflage von 1786; p. 422 der 2. franz. Auflage von 1808) führt die Rechnung bis zu Gliedern mit $\varepsilon^9$ weiter; er bedient sich dazu seiner Methode der Umkehrung trigonometrischer Reihen (Nr. 19). Auch *P. S. de Laplace*, Mécanique céleste 1, Paris, an VII = Oeuvres 1, p. 179 beginnt mit der Entwicklung der Mittelpunktsgleichung nach den Cosinus der Vielfachen der wahren Anomalie; die weiteren Entwicklungen behandelt er als solche nach Potenzen von $\varepsilon$. Ebenso *G. B. Airy*, mathematical tracts, p. 8 der 2. Aufl., Cambr. 1831. Ein weiterer Aufsatz von *Bossut* gibt auch noch die Anfangsglieder der Entwicklung der exzentrischen Anomalie nach den Vielfachen der wahren (Paris mém. 1777[80], p. 59), sowie (p. 63) die von *A. Clairaut*, (Théorie de la Lune, Petersburger Preisschrift von 1752, p. 61 der 2. Aufl., Paris 1765; vgl. Note 359) mitgeteilte Auflösung der Gleichung

$$\zeta = u + a \sin mu + b \sin pu + c \sin qu$$

(von der die Keplersche Gleichung ein spezieller Fall ist), nach $u$; beides mit Hilfe des in Nr. 19 zu besprechenden Verfahrens.

nämlich:

$$(242) \qquad A_n = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n^{n+2k-1}}{k!(n+k)!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2k+n},$$

$$(243) \qquad B_n = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n+2k) n^{n+2k-2}}{k!(n+k-1)!} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2k+n}$$

hat erst *J. L. Lagrange*[365]) mit Hilfe der seinen Namen tragenden allgemeinen Umkehrungsformel gewonnen, indem er zuerst nach Potenzen von $\varepsilon$ entwickelt und dann umordnet. Auf demselben Weg erhält er auch einen ziemlich umständlichen Ausdruck für die Koeffizienten der Entwicklung von $w - \zeta$ nach den Sinus der Vielfachen von $\zeta$.

Dann stellt *J. H. Lambert* die bis dahin gefundenen Entwicklungen zusammen und fügt zu ihnen noch die Entwicklungen von $\zeta - u$ nach den Sinus der Vielfachen von $w$ und von $\zeta$ bei[366]).

Die Darstellung der Koeffizienten durch bestimmte Integrale ist zuerst von *W. Fr. Bessel*[367]) für diese Entwicklungen herangezogen worden; indem er in ihr $u$ als Integrationsvariable einführt und partiell integriert, erhält er für die Koeffizienten $B_n$ die Formel:

$$(244) \qquad B_n = -\frac{\varepsilon}{n\pi}\int_0^{2\pi} \sin u \sin(nu - n\varepsilon \sin u)\,du;$$

und für die Koeffizienten $C_n$ der Mittelpunktsgleichung, d. h. der Entwicklung (235) von $w - \zeta$ nach den Sinus der Vielfachen von $\zeta$:

$$(245) \qquad C_n = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{n\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nu - n\varepsilon \sin u)}{1 - \varepsilon \cos u}\,du.$$

Dieselben beiden Formeln, dazu noch

$$(246) \qquad A_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nu - n\varepsilon \sin u)\,du$$

---

365) Berl. hist. 25 (1769[71]) (von 1770) = oeuvres 3, p. 132.

366) Berl. astr. Jahrb. 5 (1780[77]), p. 72. Die erstgenannte Entwicklung ergibt sich aus der Keplerschen Gleichung (236) und der Relation

$$\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin u = \frac{\sin w}{1+\varepsilon\cos w};$$

von den Koeffizienten der zweiten gibt er ohne Beweis ein Rekursionsgesetz.

367) Berl. Abhandl. (1816/17[19]) (von 1818) = ges. Abhandl. 1, p. 19; Zeitschrift f. Astr. 5 (1818), p. 369.

erscheinen dann auch bei *S. D. Poisson*[368]). *Bessel* zeigt weiter[369]), daß sich auch die Koeffizienten der Entwicklungen von

$$(247) \qquad \log r, \qquad r^m, \qquad r^m \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} pu, \qquad r^m \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} pw$$

durch die $A_n$ und die $C_n$ ausdrücken lassen. Auch untersucht er die ersteren, die seitdem seinen Namen behalten haben[370]) noch näher: er gibt die Rekursionsformel zwischen je drei aufeinander folgenden von ihnen, die daraus entspringende Kettenbruchentwicklung, die lineare Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten, der sie als Funktionen von $\varepsilon$ genügen usw. Für die $C_n$ gibt er eine Entwicklung nach Potenzen von $(1-\sqrt{1-\varepsilon^2})/\varepsilon$, deren Koeffizienten Summen von $A_n$ sind. *Poisson* gibt noch[371]) die Gleichung:

$$(248) \qquad B_n = -\frac{\varepsilon}{n}\frac{dA_n}{d\varepsilon};$$

die Koeffizienten der Entwicklungen der $A_n$ nach Potenzen von $\varepsilon$ bestimmt er[372]) mit Hilfe seiner Integralformeln (246).

*A. F. Svanbery*[373]) schreibt den halben allgemeinen Koeffizienten in der Entwicklung der Ableitung der wahren Anomalie nach der

---

368) Conn. des temps pour 1825[22], p. 383. Er gibt an, der Ausdruck für die $C_n$ sei ihm von *Frullani* mitgeteilt worden. — Daß er die Integrale nur von 0 bis $\pi$ erstreckt und einen Faktor 2 vorsetzt, ist unwesentlich. Er bemerkt noch (p. 384), daß man beim Einsetzen der Werte der Koeffizienten $A_n$ und $B_n$ in die betreffenden Reihen und Vertauschung der Reihenfolge von Integration und Summation zwar unter dem Integralzeichen Reihen erhalte, die sich mit Hilfe von (110) bzw. (303) summieren lassen, daß das aber zu nichts führe, da zur Bestimmung der Stellen, an denen diese Reihensummen sich unstetig ändern, die Auflösung der Keplerschen Gleichung selbst erforderlich sei.

369) Berl. Abh. (1824[26]), p. 26 = Ges. Abhandl. 1, p. 92. *C. P. Burger*, Diss. Lugd. Batav. 1851, p. 13 führt die Entwicklungen von $r$ und von $\log r$ bis zu Gliedern mit $\varepsilon^9$ und gibt an, daß letztere bis zu solchen mit $\varepsilon^6$ bereits bei *J. de Gelder*, Differentiaalrekening 2, p. 379 stehe.

370) Vgl. II A 10, *Wangerin*, Nr. 41, p. 748. Ein von *F[rancoeur?]* verfaßter Auszug, bull. philomat. 1825, p. 33 hebt richtig hervor, daß Bessel eben durch die nähere Diskussion der durch die Integrale definierten Funktionen über Poisson hinausgeht. — Ergänzungen dazu, betr. die Entwicklungen der Cosinus und Sinus der Vielfachen der exzentrischen Anomalie nach den Funktionen der Vielfachen der mittleren und umgekehrt, bei *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 15, 1836, p. 12 = Werke 6, p. 100.

371) Conn. des temps pour (1836[33]), add. p. 6; der Zahlenfaktor berichtigt von *F. Lefort*, J. de math. 11 (1846), p. 43.

372) Ib. p. 9.

373) Upsala n. acta 11 (1839), p. 18.

mittleren:

$$(249)\qquad A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial w}{\partial \zeta}\cos n\zeta\, d\zeta$$

in die Form

$$(250)\qquad A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos n\zeta\, dw$$

um, aus der ersichtlich ist, daß er mit dem Absolutglied der Entwicklung von $y = \cos n\zeta$ nach den Vielfachen der wahren übereinstimmt. Diese Funktion genügt in ihrer Abhängigkeit von $w$ und der Exzentrizität $\varepsilon$ den beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$(251)\left\{\begin{aligned}&(1+\varepsilon\cos w)^4\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} - 2\varepsilon\sin w\,(1+\varepsilon\cos w)^3\frac{\partial y}{\partial w} + n^2(1-\varepsilon^2)^3 y = 0,\\ &(1-\varepsilon^2)\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \left(2\sin w + \frac{\varepsilon}{2}\sin 2w\right)\frac{\partial y}{\partial w} = 0.\end{aligned}\right.$$

Sie liefern Rekursionsformeln für die Koeffizienten der Entwicklungen von $y$ und seinen Ableitungen; aus diesen erhält er durch Elimination der höheren Koeffizienten schließlich[374]) eine Differentialgleichung für den Koeffizienten von $\cos w$ in der Entwicklung von $y$ und eine Relation, die $A_n$ und seine erste und zweite Ableitung nach $\varepsilon$ mit diesem Koeffizienten verbindet. Diese Gleichung integriert er durch Potenzreihen und gewinnt für deren Koeffizienten Rekursionsformeln; die absoluten Glieder lassen sich aus der Integraldarstellung berechnen. Er führt die Rechnung bis zu Gliedern zwölfter Ordnung durch.

*S. S. Greatheed*[375]) führt einen Hilfswinkel $\theta$ ein, der mit der mittleren Anomalie ebenso zusammenhängt wie die wahre mit der exzentrischen, also durch

$$(252)\qquad \theta = 2\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{\zeta}{2}\right),$$

$$(253)\qquad \frac{d\theta}{d\zeta} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\cos n\zeta,\qquad \lambda = \frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

definiert ist; das multipliziert er mit der Entwicklung von $\sin^p\zeta$ nach den Kosinus der Vielfachen von $\zeta$, bildet von dem Produkt die $(p-1)^{\text{te}}$ Ableitung und setzt in die Auflösung der Keplerschen Gleichung durch die Lagrangesche Reihe ein; das gibt ihm schließlich:

$$(254)\quad w = 2\sum\left[\lambda^n\exp\left(\frac{n\varepsilon}{2}(\lambda^{-1}-\lambda)\right) + \lambda^{-n}\exp\left(-\frac{n\varepsilon}{2}(\lambda^{-1}-\lambda)\right)\right]\frac{\cos n\zeta}{n}$$

374) p. 23.

375) Cambr. math. J. $1_6$ (1839), p. 208.

was so zu verstehen ist: die Exponentialgrößen sind nach Potenzen von $\lambda$ zu entwickeln, alle Potenzen von $\lambda$ mit negativen Exponenten sind wegzulassen, und von dem von $\lambda$ freien Glied ist nur die Hälfte zu nehmen.

Daran anknüpfend zeigt dann *A. Cayley*[376]) allgemein: ist

$$(255) \qquad f(\lambda)\cos(n\chi(\lambda)) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \lambda^m \qquad (a_m = a_{-m})$$

also wenn

$$(256) \qquad \zeta = \chi(\operatorname{expi} u)$$

gesetzt wird:

$$(257) \qquad f(\operatorname{expi} u)\cos(n\chi(\operatorname{expi} u)) = a_0 + 2\sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mu,$$

so ist der Koeffizient von $\cos n\zeta$ in der Entwicklung von

$$(258) \qquad \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos u}\cdot\frac{f(\operatorname{expi} u)}{i\chi'(\operatorname{expi} u)}$$

nach den Kosinus der Vielfachen von $\zeta$ gleich

$$(259) \qquad a_0 + 2\sum_{m=1}^{\infty} a_m \lambda^m,$$

was mit Greatheeds Regel übereinstimmt. Er gewinnt diesen Satz, indem er den Integralausdruck jenes Koeffizienten durch partielle Integration in

$$(260) \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos u}\frac{f(\operatorname{expi} u)}{i\chi'(\operatorname{expi} u)}\cos(n\chi(\operatorname{expi} u))\,du$$

umformt und dann die Entwicklungen beider Faktoren ausmultipliziert.

*A. Cauchy* führt die Bestimmung der Koeffizienten der in der Theorie der elliptischen Bewegung vorkommenden Reihenentwicklungen auf die Bestimmung der Funktionen

$$(261) \qquad \mathfrak{S}_{h,j,k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (1-\varepsilon\cos u)^j(\varepsilon\cos u)^k \operatorname{expi}(-hw-n\zeta)\,du$$

zurück[377]); er entwickelt diese in dreifach unendliche Reihen, deren Koeffizienten von den Zahlen $\mathfrak{N}_{h,j,k}$ (99) abhängen. In späteren Ar-

376) Ib. $3_4$ (1842), p. 162 = papers 1, 19. Als Beispiele behandelt er die Entwicklungen von $\cos kw$ und $\sin kw$.

377) Paris C. R. 11 (1840), p. 473 = Oeuvres (1) 5, p. 308. p. 510 = 320 gibt er entsprechende Darstellungen für den Fall, daß nach den Vielfachen der wahren Anomalie entwickelt wird.

beiten[378]) bedient er sich der Bezeichnung:

$$(262)\qquad \mathfrak{E}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{expi}(-ku + n\varepsilon \sin u)\,du.$$

Auch hat er den allgemeinen Satz[379]): der Koeffizient von expi $n\zeta$ in der Entwicklung irgendeiner Funktion $f(u)$ nach den Funktionen der Vielfachen von $\zeta$ ist gleich dem Koeffizienten von expi $nu$ in der Entwicklung jeder der beiden Funktionen

$$(263)\qquad (1-\varepsilon\cos u)\operatorname{expi}(n\varepsilon\cos u)f(u), \quad \frac{1}{ni}\operatorname{expi}(n\varepsilon\sin u)f'(u).$$

Die Entwicklungen der Produkte von Potenzen von Cosinus und Sinus der exzentrischen Anomalie erscheinen bei *A. Cauchy*[380]) zunächst nach Potenzen der Exzentrizität geordnet; nachher ordnet er sie nach den Funktionen der Vielfachen der wahren Anomalie um. Daran schließt er dann[381]) die Entwicklungen von

$$(264)\qquad \frac{\cos u - \varepsilon}{(1-\varepsilon\cos u)^3} = \frac{\cos w}{r^2}, \quad \frac{\sin u}{(1-\varepsilon\cos u)^3} = \frac{\sin w}{r^2}.$$

*F. Lefort* erhält für die Koeffizienten der Entwicklung der Mittelpunktsgleichung den Ausdruck:

$$(265)\qquad C_n = A_n + \frac{2}{n\pi}\sum_{m=1}^{\infty} 2f^m\int_0^{\pi}\cos(nu - n\varepsilon\sin u)\cos mu\,du,$$

einmal, indem er für $w-u$ ihre Entwicklung nach den Funktionen der Vielfachen von $u$ einsetzt und partiell integriert[382]), dann, indem er den Faktor $(1-\varepsilon\cos u)^{-1}$ entwickelt[383]).

Einen asymptotischen Ausdruck für einen der hier besprochenen Entwicklungskoeffizienten, nämlich für (243), hat zuerst *Fr. Carlini*[384])

378) Paris C. R. 13 (1841), p. 686 = Oeuvres (1) 6, p. 345.

379) Paris C. R. 12 (1841), p. 88 = Oeuvres (1) 6, p. 21; mit der Symbolik der Rechnung mit Residuen und „moyennes isotropiques" (nr. 35) Paris C. R. 38 (1854), p. 912 und (für einfachere Fälle, mit der Taylorschen statt der Laurentschen Reihe) p. 949 = Oeuvres (1) 12, p. 150, 154.

380) Turiner mém. von 1831[927]), p. 74.

381) p. 77.

382) J. de math. 11 (1846), p. 144. $f$ hat hier dieselbe Bedeutung wie in (230).

383) Ib. p. 152. Daß er nachträglich die Potenzen von $f$ noch nach Potenzen von $\varepsilon$ entwickelt, ist keine Vereinfachung. Noch umständlicher sind die auf einem ähnlichen Weg von *C. P. Burger,* Diss. Lugd. Bat. 1851, p. 26 erhaltenen Entwicklungen.

384) Ricerche sulla convergenza della serie che serve alla soluzione del problema di Keplero, Milano 1817 (auch als app. zu den effem. di Milano 1818;

angegeben. Er führt die Reihe (245) auf (242) zurück, zeigt, daß diese einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt, integriert deren Riccatische Resolvente durch ein bestimmtes Integral und ersetzt dieses für große Werte von $n$ nach der hier in Nr. **109** besprochenen Methode durch einen asymptotischen Ausdruck, erhält aber dabei infolge von Rechenfehlern ein falsches Resultat. Das richtige

$$(266) \qquad B_n \sim -\frac{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\sqrt{2n^3\pi}}\left(\frac{\varepsilon \exp \sqrt{1-\varepsilon^2}}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^n$$

ist zuerst aus dem Nachlaß von *P. S. de Laplace* veröffentlicht worden[385]; er erhält es, indem er seine Methode (Nr. **109**) zunächst auf die Integraldarstellung der Zylinderfunktionen rein imaginären Arguments anwendet und das Ergebnis „sans crainte" auch für reelle Argumente benutzt. *C. G. Jacobi* hat dann gezeigt[386], daß Carlinis Verfahren nach Richtigstellung der Versehen zu demselben Resultat führt.

*Carlini* hat die entsprechende Aufgabe auch für die Koeffizienten der Mittelpunktsgleichung (245) in Angriff genommen[387]. Indem er auf die Funktion $w = F(u)$ die Lagrangesche Reihenumkehrungsformel (II B 1, *Osgood*, Nr. **15**, p. 45) anwendet, und die Potenzen von $\sin \zeta$

---

mir nur durch die gleich zu nennende Bearbeitung Jacobis zugänglich). Auszug Giorn. di fisica 10 (1817), p. 458.

385) Suppl. à la méc. cél., Paris 1827 = Oeuvres 5, p. 489. Er bemerkt, er habe sich „par une autre analyse" von der Richtigkeit des Resultats überzeugt; darüber scheint nichts weiter bekannt zu sein.

386) Astr. Nachr. 28 (1848) = Werke 7, p. 177. Auch *Jacobi* deutet an, daß er eine Methode zur Behandlung solcher Aufgaben besitze, „deren Eigentümlichkeit aber die anderweitige Bestätigung ihrer Resultate wünschenswert gemacht habe". Er hat daher *Carlinis* Untersuchung neu bearbeitet (Astr. Nachr. 30 (1850) = Werke 7, p. 239). Im Laufe seiner Rechnung bestätigt *Carlini* (p. 214 bei *Jacobi*) ein von Graf *Oriani* gegebenes Resultat: der Koeffizient von $\varepsilon^n$ in der Entwicklung von $C_n$ nach Potenzen von $\varepsilon$ ist

$$\frac{1}{2^{n-1}n}\left(1+n+\frac{n^2}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right).$$

*Orianis* eigene Veröffentlichung (Milano effem. für 1805) war mir nicht zugänglich.

387) Vgl. *Jacobis* Bearbeitung, Werke 7, p. 191. — Bei Gelegenheit der über die Aufnahme der Untersuchung *Jacobis* in die Astr. Nachr. geführten Verhandlungen teilt *C. F. Gauß* im Dez. 1849 und Febr. 1850 Schumacher mit, er sei seit mehr als 40 oder 50 Jahren im Besitz eines Verfahrens, die Aufgabe „auf eine ohne allen Vergleich kürzere Art" aufzulösen. Nähere Mitteilungen darüber zu machen lehnt er ab (Briefwechsel zwischen Gauß und Schumacher, 6 (1865), p. 51, 58; im Auszug abgedruckt auch bei *L. Koenigsberger*, C. G. J. Jacobi, Leipz. 1904, p. 471, 472, 476).

nach (35) und (36), die Funktion $F'(\zeta)$ mit Hilfe von (230) entwickelt und ausmultipliziert, erhält er zunächst Darstellungen der gesuchten Koeffizienten durch Summen von Gliedern, die sich teils durch Zylinderfunktionen selbst summieren lassen, teils Funktionen, die Differentialgleichungen genügen, die aus der Differentialgleichung der Zylinderfunktionen durch Hinzufügung eines zweiten Gliedes hervorgehen. Im Schlußresultat heben sich die Glieder mit $n^{-2}$ weg, und es bleibt:

$$C_n \sim \frac{1}{n}\left(\frac{\varepsilon \exp \sqrt{1-\varepsilon^2}}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^n \left(1 + \frac{4}{3\sqrt{2n\pi f^3}}\right). \tag{267}$$

Das Verfahren von Carlini versagt, wenn die Exzentrizität selbst eine kleine Größe von der Ordnung $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ist; *Jacobi* zeigt aber[388]), daß das Schlußresultat auch für diesen Fall gültig bleibt.

Bei *A. Cauchy*[389]) finden sich Andeutungen, daß man derartige Probleme, zunächst für ganze Funktionen von $\cos u$ und $\sin u$, auch mit Hilfe seiner in Nr. **109** zu besprechenden Methoden behandeln könne: man solle als Integrationsweg in der Ebene der komplexen Größe $z = \exp iu$ den Kreis um den Ursprung nehmen, dessen Radius gleich der kleineren Wurzel der Gleichung

$$1 - \frac{\varepsilon}{2}(z + z^{-1}) = 0 \tag{268}$$

sei. Für $\varepsilon = 1$ fallen die beiden Wurzeln dieser Gleichung in den Punkt $z = 1$ zusammen; *Cauchy* gibt für diesen Fall für den Koeffizienten $A_n$ den asymptotischen Ausdruck[390]):

$$A_n \sim \sqrt[3]{\frac{6}{n^4}}\,\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \tag{269}$$

und deutet an[391]), daß man ihn erhalten könne, indem man den Integrationsweg aus zwei Bogen logarithmischer Spiralen zusammensetze.

**13. Entwicklungen von trigonometrischen und von Exponentialfunktionen.** Derartige Entwicklungen hat, soviel ich sehe, zuerst *J. Landen*[392]) veröffentlicht: er entwickelt in der Identität:

$$\int_1^z (1+z)^{2\nu} z^{\mu-\nu-1}\,dz = \int_1^z (1+z^{-1})^{2\nu} z^{\mu+\nu-1}\,dz \tag{270}$$

388) Astr. Nachr. 30 = Werke 7, p. 241.

389) Paris C. R. 38 (1854), p. 990 = Oeuvres (1) 12, p. 161.

390) p. 994 = 164. — Die Gleichung (236) mit $\varepsilon = 1$ tritt auch bei dem Problem der homalographischen Projektion auf; vgl. VI 1 4, *Bourgeois* und *Furtwängler*, Nr. 8, p. 280.

391) p. 1034 = 166 („Sur les services que la spirale logarithmique peut rendre à l'astronomie").

beiderseits nach Potenzen von $z$ [was jedenfalls für $|z| = 1$, $\nu > 0$ erlaubt ist], multipliziert mit $z^{-2\mu-1}$, integriert noch einmal zwischen denselben Grenzen, multipliziert noch mit $z^{\mu}$ und setzt dann $z = e^{ix}$; so erhält er:

$$(271) \qquad C \sin \mu x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2\nu}{n} \frac{\sin (n-\nu) x}{(n-\nu)^2 - \mu^2}$$

und durch Integration eine entsprechende Formel für $\cos \mu x$. Die dabei zunächst durch eine unendliche Reihe dargestellte Integrationskonstante $C$ drückt er noch durch ein bestimmtes Integral aus.

Im wesentlichen dieselbe Formel, mit der Bestimmung der Konstanten:

$$(272) \qquad C = \frac{-\nu B(-\mu-\nu, -\mu-\nu)}{2\mu(\mu-\nu)}$$

hat auch *Euler*[393]) durch einen von ihm selbst nicht als ausreichend betrachteten Grenzübergang aus Interpolationsformeln erhalten; außerdem hat er noch[394]):

$$(273) \qquad C_1 \sin \mu x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin (\nu + n) x}{(\nu + n)^2 - \mu^2},$$

wo $C_1$ sich ebenfalls durch Betafunktionen ausdrückt.

Ferner hat *L. Euler* die linke Seite der Identität

$$(274) \qquad \int_0^{\infty} \frac{r^{\mu}\, dr}{1 + 2r \cos x + r^2} = \int_0^{1} \frac{(r^{\mu} + r^{1-\mu})\, dr}{1 + 2r \cos x + r^2}$$

für rationale Werte von $\mu$ direkt durch Partialbruchzerlegung ausgewertet, in der rechten unter dem Integralzeichen mit Hilfe der Gleichung (2) nach Potenzen von $r$ entwickelt und so erhalten[395]):

$$(275) \qquad \frac{\pi}{2} \frac{\sin \mu x}{\sin \mu \pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 - \mu^2} \sin n x.$$

---

392) Math. memoirs 1, Lond. 1780, p. 83. Auch von dieser Reihe aus versucht *Landen* durch Integration zu weiteren zu kommen; vgl. Note 53. — Von *Landen* scheint die Formeln auch *E. Waring* zu haben, med. analyt. ed. $2^a$, Cantabr. 1785, p. 693.

393) Opusc. analyt. 1, Petrop. 1783, p. 186. Sein Interesse ist auf die für spezielle Werte von $x$ sich ergebenden Darstellungen von Betaprodukten durch Reihen gerichtet. Grenzübergang zu $\mu = 0$ gibt die Formel (111).

94) p. 192. Unter welchen Bedingungen ist die Gleichung richtig?

395) Opuscula analytiça 2, Petrop. 1785, p. 73 = instit. calc. integr. 4 Petrop. 1794, suppl. V, p. 376 (von 1775). Bei *Euler* erscheinen die Formeln zuerst in etwas unbequemer Form, er führt sie dann aber in die im Text ge-

Daraus gewinnt er noch durch Differentiation die [divergente] Entwicklung:

$$(276) \qquad \frac{\pi\mu}{2}\frac{\cos\mu x}{\sin\mu\pi} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2}{n^2-\mu^2}\cos nx$$

und durch Integration die [konvergente]:

$$(277) \qquad \frac{\pi}{2\mu}\frac{\cos\mu x}{\sin\mu\pi} = \frac{1}{2\mu^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-\mu^2}\cos nx.$$

Bald darauf[396]) ersetzt er, wenngleich nicht ohne Bedenken, in (275) $\mu$ durch $\mu i$ und erhält so

$$(278) \qquad \frac{\pi}{2}\frac{\mathfrak{Sin}(\mu\pi-\mu x)}{\mathfrak{Sin}\,\mu\pi} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin nx}{n^2+\mu^2}.$$

*J. Fr. Pfaff*[397]) geht umgekehrt von den Summen

$$(279) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2m+1}}{n^2-\mu^2}\sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2m}}{n^2-\mu^2}\cos nx$$

aus, entwickelt die einzelnen Glieder nach Potenzen von $x$ und ordnet dann mit Hilfe der Formel für die Partialbruchzerlegung der Kosekante um. Von den so erhaltenen Entwicklungen trigonometrischer Funktionen geht er dann ohne weiteres zu den hyperbolischen über. Durch Differentiation nach $\mu$ erhält er noch weitere Formeln, so daß er die Werte von $\sum\varphi(n^2)\cos nx$, $\sum n\varphi(n^2)\sin nx$ angeben zu können meint, wenn $\varphi$ irgendeine rationale Funktion bezeichnet[398]).

Als Beispiele dafür können die von *P. G. Lejeune-Dirichlet* auf

---

gebene über („pulchriorem accipiet faciem"). (275) wird übrigens aus (271) für $\nu = -1$ erhalten; jene Gleichung bleibt demnach auch für diesen Wert richtig, für den man nicht ohne weiteres sieht, ob *Landens* Schlüsse sich noch rechtfertigen lassen.

396) Petrop. n. acta 3 (1785[88]), p. 22 (von 1776).

397) Versuch einer neuen Summationsmethode, Berlin 1788, p. 42. Er sieht, daß man die Formeln auch als Partialbruchreihen auffassen kann, hat aber Bedenken, ob das bei transzendenten Funktionen erlaubt ist (p. 47). — Für $m = 0$ gehen *Pfaffs* Formeln in die von *Euler* über; für positive Werte von $m$ divergieren die Reihen. — Die zweite Entwicklung mit $m = 0$ ebenso auch bei *G. Frullani,* mem. soc. ital. 18, 1820, p. 515 (von 1818).

398) p. 52. (Ebenso *Poisson,* J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 419). Daran anschließend bemerkt er, $\sum(n+\alpha)^{-2}\cos nx$ könne man nicht angeben, wohl aber

$$\sum(n+\alpha)^{-2}\cos\left(nx+\frac{\alpha x}{2}\right) \text{ (p. 61).}$$

anderem Wege[399]) gefundenen Reihen

$$(280)\quad \frac{\mathfrak{Cof}\,(\mu x + \mu\pi)\cos(\mu x - \mu\pi) - \mathfrak{Cof}\,(\mu x - \mu\pi)\cos(\mu x + \mu\pi)}{\mathfrak{Cof}\,2\mu\pi - \cos 2\mu\pi} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{n^4 + 4\mu^4}\sin nx,$$

$$(281)\quad \frac{\mathfrak{Sin}\,(\mu x + \mu\pi)\sin(\mu x + \mu\pi) - \mathfrak{Sin}\,(\mu x - \mu\pi)\sin(\mu x - \mu\pi)}{\mathfrak{Cof}\,2\mu\pi - \cos 2\mu\pi} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^4 + 4\mu^4}\sin nx$$

dienen.

Die Auffassung der Formeln als Partialbruchentwicklungen ihrer als Funktionen von $\mu$ betrachteten linken Seiten ist später von *A. M. Legendre*[400]) formuliert worden. Auch er nimmt den Übergang zu imaginären $\mu$ vor und findet so:

$$(282)\quad \frac{\pi}{2}\frac{\mathfrak{Sin}\,\mu x}{\mathfrak{Sin}\,\mu\pi} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + \mu^2}\sin nx,$$

$$(283)\quad \frac{\pi}{2\mu}\frac{\mathfrak{Cof}\,\mu x}{\mathfrak{Sin}\,\mu\pi} = \frac{1}{2\mu^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2 + \mu^2}\cos nx.$$

Ihre Rechtfertigung findet diese Anwendung der Partialbruchzerlegung auf transzendente Funktionen erst durch *A. Cauchys* Residuenrechnung. *Cauchy* gewinnt auch die Reihen (282) und (283) gleich in seiner ersten Abhandlung, indem er seine Sätze auf die Halbebene der $\mu$ mit positiv imaginärem Bestandteil und auf die Funktionen

$$(284)\quad \frac{\sin\mu x}{\sin\mu\pi}\,\frac{1}{1+\mu^2},\quad \frac{\mu\cos\mu x}{\sin\mu\pi}\,\frac{1}{1+\mu^2}$$

---

399) J. f. Math. 5 (1830), p. 293 = Werke 1, p. 170. Er benutzt den Umstand, daß jeder der beiden Ausdrücke sich von der zweiten Ableitung des andern nur um einen konstanten Faktor unterscheidet, um vermittelst partieller Integration Relationen zwischen den beiderseitigen Entwicklungskoeffizienten abzuleiten, die zusammen mit den Grenzbedingungen zu ihrer Bestimmung hinreichen; übrigens schreibt er die Reihensummen selbst nicht explizite hin.

400) Exerc. de calc. intégral 2, Paris 1817, p. 166 (publ. 1815). Er führt (276) durch Benutzung der ebenfalls divergenten Reihe (25) in (277) über (ebenso *A. de Morgan*, differential and integral calculus, Lond. 1836/41, p. 668). Er untersucht nicht, ob die Reihen konvergieren und die zu entwickelnden Funktionen wirklich darstellen; doch bemerkt er p. 170, daß die Formeln (277) und (283) jedenfalls nur für $|x| < \pi$, (275) und (282) nur für $|x| < \pi$ gelten können, obwohl eine derartige Einschränkung aus seinen Raisonnements in keiner Weise folgt. Vgl. die nächste Note.

anwendet[401]); dabei muß er die Werte der zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ genommenen Integrale dieser Funktionen — die übrigens, wie er selbst bemerkt, nur als „Hauptwerte" Sinn haben — als bekannt voraussetzen. Nachher erkennt er, daß das nicht notwendig ist, wenn man die Sätze gleich auf die ganze Ebene bezieht[402]).

Andererseits gewinnt Cauchy die Gleichung (283) auch aus seiner allgemeinen Relation (Nr. 106) zwischen zwei reziproken Funktionen, indem er in ihr

$$(285) \qquad \varphi(x) = e^{-\mu x}, \quad \text{also} \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\mu}{\mu^2 + x^2}$$

setzt[403]).

Ferner erhält er sie noch, indem er aus der allgemeinen Gleichung[404])

$$(286) \qquad f(x, y, \cdots; s) = \mathop{\mathrm{E}} \frac{F(r) - F(s)}{r - s} \frac{f(x, y, \cdots; r)}{((F(r)))}$$

die Entwicklung einer beliebigen Funktion „nach Funktionen derselben Art" ableitet. Die Annahme[405]):

$$(287) \qquad F(r) = e^{r\pi} - 1, \qquad f(x; s) = e^{sx}$$

gibt die Entwicklung von $\exp(sx)$ nach den Cosinus und Sinus der ganzzahligen Vielfachen von $x$; die Annahme[406]):

$$(288) \quad F(r) = \cos r\pi \quad \text{oder} \quad \sin r\pi, \quad f(x; s) = \cos sx \quad \text{oder} \quad \sin sx$$

die Entwicklungen von $\cos sx$ und $\sin sx$ nach den Cosinus bzw. den Sinus der ganzzahligen Vielfachen von $x$.

Endlich erhält er noch[407]) aus der Integraldarstellung der Koef-

---

401) Paris mém. prés. 1 (1827) (von 1814) = Oeuvres (1) 1, p. 472. Die auf Verlangen der akademischen Kommission [Legendre] beigefügten Nachträge erläutern noch ausführlich das Verhalten der Reihen an den Gültigkeitsgrenzen der Formeln und darüber hinaus (résumé p. 503).

402) So in einer der eben genannten Stelle beim Druck beigefügten Note; dann mém. sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, Paris 1825, p. 43 = Darb. bull. 8 (1875), p. 44 (deutsch von *P. Stäckel*, Leipz. 1900). Die Reihen erscheinen auch in den späteren Abhandlungen *Cauchys* wieder, in denen die Bedingungen für die Ausdehnung der Residuensätze auf unendliche Gebiete schärfer angegeben sind, als es zuerst der Fall war; so exerc. de math. 1 und 2 (1826/27) = Oeuvres (2) 6, p. 145 und (2) 7, p. 356, 384. p. 46 des mém. von 1825 zeigt er, wie der Grenzfall $x = \pi$ sich einordnet.

403) Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 192.

404) Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 367.

405) p. 372.

406) p. 380.

407) p. 421.

fizienten Entwicklungen von $\exp(sx)$ nach den Cosinus allein oder den Sinus allein.

*Fourier* gewinnt[408]) die Entwicklung von $\mathfrak{Sin}\, x$ als Beispiel seiner allgemeinen Darstellung der Koeffizienten einer trigonometrischen Entwicklung in Reihenform (Nr. 15).

Die Darstellung der Entwicklungskoeffizienten durch bestimmte Integrale hat die Möglichkeit gezeigt, auch einen Sinus in eine Cosinusreihe oder einen Cosinus in eine Sinusreihe zu entwickeln; so sind die Formeln

$$(289) \quad \sin \mu x = \frac{1-\cos\mu\pi}{\mu\pi} + \frac{2\mu}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1+(-1)^n\cos\mu\pi}{n^2-\mu^2}\cos nx,$$

$$(290) \quad 1-\cos\mu x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1+(-1)^n\cos\mu\pi)n}{n^2-\mu^2}\sin nx$$

von *G. Frullani* erhalten worden[409]).

*S. D. Poisson*[410]) gewinnt die Formeln, indem er in seiner Gleichung (970) unter dem Integralzeichen nach Potenzen von $\exp(-a)$ entwickelt und gliedweise integriert; nachher[411]) leitet auch er sie aus der Integraldarstellung der Koeffizienten ab.

Auch erhält er, indem er die beiden Seiten der Gleichung (2), nachdem beiderseits $\frac{1}{2}$ subtrahiert ist, mit $e^{-\mu x}\,dx$ multipliziert und

408) Preisschrift von 1811, Paris mém. 4 (1819/20[24]), p. 298; théorie de la chaleur, Nr. 218 = Oeuvres 1, p. 206. Er benützt übrigens dabei die divergente Reihe (25). — *E. E. Kummer* (Preisschrift Halae 1832) erhält diese Formel als Spezialfall seiner Entwicklung (152) von $\sin^m x$.

409) Ricerche sopra le serie, Firenze 1816, p. 75, 82. Wenn $\mu$ eine ganze Zahl ist, fällt ein Teil der Glieder weg; diese Fälle behandelt Frullani p. 68, 72, 79 direkt. Die beim Grenzübergang zu $\mu = 0$ zu beobachtende Vorsicht bespricht er p. 73. Der Fall $\mu = 1$ auch bei *Fourier,* Preisschrift von 1811, Paris mém. 4 (1819/20[24]), p. 306, 310; théorie Nr. 223, 225 = Oeuvres 1, p. 214, 217. — *Frullani* hat übrigens p. 77, 83 auch die Ableitung der Formeln (275) und (277) aus der Integraldarstellung. Später (mem. soc. ital. 19 (1821), p. 231; von 1818) erhält er die Formel (289) für $\mu = 1$ als Spezialfall einer Umformung von (63) für $m = 1$.

410) J. éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 311.

411) Ib. p. 426; 19 (1823), p. 54 (an letzterer Stelle die Entwicklung von $\mathfrak{Sin}\,\mu(x\pm\pi)$ nach den Cosinus der geraden und den Sinus der ungeraden Vielfachen von $x$); chaleur p. 280. Ebenso *G. Frullani,* mem. soc. ital. 18, 1820, p. 514 (von 1818); *G. S. Ohm,* die galvanische Kette, Berlin 1827 = ges. Abhandl. p. 149; *R. Murphy,* Cambr. trans. $5_3$ (1835), p. 379; *A. de Morgan,* differential and integral calculus, Lond. 1836/41, p. 611, 614. *Ph. Kelland,* theory of heat, Cambridge 1837, p. 77; *J. Dienger,* J. f. Math. 34, 1877, p. 99; *O. Schloemilch,* Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale, Jena 1843, p. 18, 20, 22, 23; analytische Studien 2, Leipzig 1848, p. 43, 47; *M. Ohm,* System der Mathematik 9, Nürnberg 1852, p. 329.

von 0 bis $x$ integriert, dann zur Grenze $r = 1$ übergeht, die Gleichung[412])

$$(291)\qquad \pi = \frac{1 - e^{-\mu x}}{\mu} + 2e^{-\mu x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n \sin nx + \mu(1 - \cos nx)}{n^2 + \mu^2},$$

und indem er sie mit derjenigen kombiniert, die aus ihr durch Vertauschung von $\mu$ mit $-\mu$ hervorgeht, wieder (282) und (283). Auch hier ersetzt er dann $\mu$ durch $\mu i$. Außerdem ersetzt er noch[413]) in der allgemeinen Gleichung (vgl. Nr. **106**)

$$(292)\qquad \tfrac{1}{2}f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_0^{\infty} f(\xi)\,d\xi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} f(\xi)\cos 2n\pi\xi\,d\xi$$

$$f(\xi) \text{ durch } \frac{\cos x\xi}{\mu^2 + \xi^2};$$

rechts lassen sich dann die Integrationen ausführen[414]) und die Reihe summieren; so erhält er abermals die Gleichung (283) und aus ihr wie früher die übrigen.

*E. E. Kummer*[415]) erhält die Formeln für $\mu =$ einer Potenz von $\frac{1}{2}$ als Spezialfälle seiner allgemeinen Formeln für die Entwicklung der Potenzen von Kosinus und Sinus. Später[416]) leitet er sie für beliebige $\mu$ aus der Transformationstheorie der hypergeometrischen Reihen ab. Auch sei noch die Entwicklung

$$(293)\qquad \frac{2^{\mu}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{-\mu+1}{2}\right)}{(\mu+1)\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}-2\right)}\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\mu}{n}\frac{\sin(\mu - 2n)x}{(\mu - 2n)^2 - 1}$$

erwähnt, die er ebenfalls als Spezialfall einer hypergeometrischen Reihe erhält[417]); sowie die allgemeine Formel[418]):

$$(294)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n \cos nx}{(\alpha + n)^{\beta}} = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^1 \frac{u^{\alpha}(-\log u)^{\beta - 1}(r\cos x - r^2 u)\,du}{1 - 2ru\cos x + r^2u^2}.$$

*O. Schlömilch*[419]) zeigt unter Benutzung der Gleichung (110), daß

---

412) J. éc. polyt. 19 (1823), p. 414.

413) Paris mém. 6 (1823[27]), p. 593 (von 1826).

414) Eben unter Benutzung der einen Hälfte der reziproken Beziehung zwischen den Funktionen (285).

415) Preisschrift Halae 1832, p. 15, 25.

416) J. f. Math. 15 (1836), p. 171.

417) Ib. p. 166.

418) J. f. Math. 17 (1837), p. 213.

419) Neue Methode zur Summierung endlicher und unendlicher Reihen, Greifswald 1849, p. 15 = Arch. Math. Phys. 12 (1849), p. 144. [Die gliedweise Differentiation ist hier tatsächlich zulässig.]

die Summe der Reihe

(295) $$y = \frac{x}{2\mu} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\mu \sin nx}{n(\mu^2 + n^2)}$$

der Differentialgleichung

(296) $$y'' - y = -\frac{\pi}{2\mu}$$

genügt, und integriert diese. Auch erhält er, indem er $x$ der Reihe nach durch $h$, $3h$, $5h$, ... ersetzt und dann summiert[420]):

(297) $$\frac{2\pi}{\mathfrak{Sin}\,\mu\pi} \frac{\mathfrak{Sin}\,\mu x}{\mathfrak{Sin}\,\mu h} = \frac{x}{2\mu h} + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\mu^2 + n^2} \frac{\sin nx}{\sin nh}$$

$$(-\pi < x + h < \pi, \quad -\pi < h < \pi).$$

Anhangsweise seien hier noch die Entwicklungen von

(298) $$\cos(m \operatorname{arc}\cos(\cos x + \alpha))$$

nach Potenzen von $\alpha$ und den Cosinus der Vielfachen von $x$ erwähnt, die *A. Cauchy*[421]) durch Anwendung der Lagrangeschen Reihenumkehrungsformel und Umordnung erhält.

**14. Andere spezielle Reihenentwicklungen.** a) Von andern speziellen trigonometrischen Entwicklungen mögen zunächst einige schon von *Fourier*[422]) gegebene und seitdem oft wiederholte Beispiele von Funk-

---

420) Theorie der Differenzen und Summen, Leipz. 1848, p. 130. [Gilt die Formel auch noch, wenn $x$ kein ungerades ganzzahliges Vielfaches von $h$ ist?]

421) Paris C. R. 15 (1842), p. 411 = Oeuvres (1), 7, p. 114.

422) Paris mém. 4 (1819/20), p. 306 (von 1811); théorie de la chaleur Nr. 223 = Oeuvres 1, p. 123. Die Formeln sind bei Fourier mit Hilfe der Integraltheoreme (Nr. 16) abgeleitet; sie können aber auch durch Kombination der in den vorhergehenden Nummern besprochenen Formeln gewonnen werden. Die dritte reduziert sich für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ auf (409). *Ph. Kelland* (Theory of heat, Cambrige 1837, p. 59) hat statt der ersten Gleichung

$$\frac{\alpha}{2} + \sum \frac{\sin n\alpha}{n} \cos nx + \sum \frac{1 - \cos n\alpha}{n} \sin nx = \begin{cases} \pi & \text{für } 0 < x < \alpha \\ 0 & \text{für } \alpha < x < 2\pi \end{cases};$$

und auch (p. 64) statt der dritten Gleichung eine andere, kompliziertere. Vgl. darüber Note 619. Die Gleichung (300) ist bei *Fourier* verdruckt; berichtigt von Lord *Kelvin*, Cambr. J. math. $2_6$ (1841), p. 262 = math. phys. papers 1, p. 6. *W. Hopkins* (Cambr. trans. $8_1$, p. 71) gibt die Entwicklung einer Funktion, die gleich $\sin x$ für $0 < x < \pi$, gleich 0 für $\pi < x < 2\pi$ ist (unnötig umständlich). Die Formel für ein beliebiges Dreieck

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nb}{n^2} \sin nx = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - b)x & \text{für } 0 \leqq x \leqq b, \\ \frac{1}{2}bx & \text{für } b \leqq x \leqq \pi, \end{cases}$$

tionen angeführt werden, die in verschiedenen Intervallen verschiedenen Gesetzen gehorchen:

$$(299)\quad \sum \frac{1-\cos n\alpha}{n} \sin nx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ für } 0 < x < \alpha, \\ 0 \text{ für } \alpha < x < \pi; \end{cases}$$

$$(300)\quad \sum \frac{\sin n\alpha \sin nx}{\pi^2 - n^2\alpha^2} = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha} \sin \frac{\pi x}{\alpha} & \text{für } 0 < x < \alpha, \\ 0 & \text{für } \alpha < x < \pi; \end{cases}$$

$$(301)\quad \sum \frac{\sin(2n+1)\alpha \sin(2n+1)x}{(2n+1)^2} = \begin{cases} \frac{\pi x}{4} & \text{für } 0 < x < \alpha, \\ \frac{\pi\alpha}{4} & \text{für } \alpha < x < \pi - \alpha, \\ \frac{\pi(\pi - x)}{4} & \text{für } \pi - \alpha < x < \pi; \end{cases}$$

$$(302)\quad \frac{\pi^2}{12} + \frac{4}{\pi} \sum \frac{(-1)^n \cos(2n+1)x}{(2n+1)^3} - \frac{1}{2} \sum \frac{(-1)^n \cos 2nx}{4n^2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi^2}{4} - x^2 & \text{für } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

*A. M. Legendre*[423]) hat die ähnlichen Gleichungen

$$(303)\qquad \frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cos n\alpha}{n},$$

$$(304)\qquad \log(2\cos x - 2\cos\alpha) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx \cos n\alpha}{n}$$

durch Rechnen mit komplexen Größen erhalten und die erstere auch dadurch verifiziert, daß er in (110) und (144) $x$ erst durch $x + \alpha$, dann durch $x - \alpha$ ersetzt; doch gibt er die Gültigkeitsgrenzen falsch an, obwohl sie auf beiden Wegen richtig erhalten werden können.

Die Summation der zweiten dieser Reihen (mit abwechselnden Vorzeichen, was aber nichts Wesentliches ändert) ist dann auch noch in Gergonnes Annalen[424]) als Aufgabe gestellt und von *Querret*[425]) auf dem zweiten, von *W. H. Talbot*[426]) auf dem ersten der von *Legendre*

---

erhält *G. Piola* (mem. soc. ital. $20_2$ (1831), p. 594) sowohl aus der Integraldarstellung der Koeffizienten als aus der Gleichung (113). Die Gleichung (301) auch bei *J. M. C. Duhamel*, 2, Paris 1840, p. 171.

423) Exerc. de calc. int. 2 (1817), p. 193 (publ. 1815).

424) Ann. de math. 13 (1823), p. 247.

425) Ib. p. 357.

426) Ib. 14 (1824), p. 94.

eingeschlagenen Wege erledigt worden. Ersterer gibt auch noch[427])

$$(305)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \sin n\alpha = \frac{1}{2} \log \frac{\cos x + \cos \alpha}{1 + \cos(x+\alpha)},$$

sowie Formeln für entsprechende Reihen aus Produkten von noch mehr Faktoren[428]). Alle vier Formeln (303), (304) und die aus ihnen durch die Substitution $x \,\|\, x + \pi$ hervorgehenden stehen auch bei *R. Lobatto*[429]). Eine Angabe der Gültigkeitsgrenzen fehlt bei allen drei Autoren.

**b)** Die Entwicklungen

$$(306)\qquad e^{r\cos x} \cos(r \sin x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!} \cos nx,$$

$$(307)\qquad e^{r\cos x} \sin(r \sin x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!} \sin nx$$

sind von *Tralles*[430]), *Cauchy*[431]), *M. Ohm*[432]), *R. Lobatto*[433]), *Clausen*[434]) und *O. Schloemilch*[435]) aus der Entwicklung von $e^z$ durch Substitution eines komplexen Wertes von $z$ und Trennung des Reellen und Imaginären, also durch die allgemein in Nr. 2 besprochene Methode, gefunden worden. Die Aufgabe, die Reihe (306) zu summieren, ist um dieselbe Zeit auch in den Annales von Gergonne gestellt[436]) und von *M. Pagani, M...s, C. G., Stein* und *Querret*[437]) ebenfalls unter Benutzung komplexer Größen gelöst worden. *C. G.* bemerkt dazu, daß man das Resultat auch durch Ausmultiplizieren der Entwicklungen der beiden Faktoren nach Potenzen von $r$, unter Benutzung des Ausdrucks von $\cos nx$ durch die Potenzen von $\sin x$ und $\cos x$ verifizieren könne; *Stein* und *Querret* fügen auch (307) hinzu. *Dirksen*[438]) erhält die Formeln mit

427) Ib. 13, p. 359.

428) Ib. p. 381.

429) recherches[28]) p. 21.

430) Berl. Abbandl. 1820/21[22], p. 138.

431) Analyse algébrique, Paris 1823, IX, § 2 = Oeuvres (2) 3, p. 251.

432) Aufsätze aus dem Gebiete der höheren Mathematik, Berlin 1823, p. 80.

433) recherches[28]) p. 15.

434) J. f. Math. 4 (1829), p. 283.

435) Differentialrechnung, Greifswald 1847, p. 222.

436) Der Quotient beider Formeln steht übrigens schon bei *J. Littrow*, Petersb. mém. 7 (1815/16[20]), p. 93; 12 (1821/22), p. 321.

437) Ib. 13 (1822/23), p. 105. *Querret* stellt sein Verfahren ib. p. 374 noch besonders dar.

438) Astr. Nachr. 1 (1823), col. 405. Die Darstellung durch Exponentialfunktionen komplexen Arguments benutzt er zur Verifikation.

Hilfe der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denen die Reihen als Funktionen von $r$ genügen, *J. A. Grunert*[439]) aus den Entwicklungen von $e^{ar}\cos br$, $e^{ar}\sin br$ nach Potenzen von $r$, *O. Schloemilch*[440]) durch Grenzübergang aus den Binomialentwicklungen, *J. Dienger*[441]) mit Hilfe von Funktionalgleichungen.

Will man die Entwicklungen (306) und (307) aus der Integraldarstellung der Koeffizienten ableiten, so bedarf man der Gleichungen

$$\text{(308)} \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{r\cos x}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(r\sin x)\begin{Bmatrix}\cos nx\\ \sin nx\end{Bmatrix}dx = \frac{r^n}{n!},$$

diese gewinnt *S. D. Poisson*[442]), indem er in seinen allgemeinen Gleichungen (594) $F(x) = e^{rx}$ setzt und dann beiderseits nach Potenzen von $r$ entwickelt.

*J. Dienger*[443]) stellt die Aufgabe, die Formeln

$$\text{(309)} \qquad \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n r^{2n}}{(n+1)\cdot(2n)!}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}2nx = {} & \mp\frac{2}{r^2}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}2x \\ & \pm\frac{2}{r}\,\mathfrak{Cos}\,(r\sin x)\sin(r\cos x)\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}x \\ & +\frac{2}{r}\,\mathfrak{Sin}\,(r\sin x)\cos(r\cos x)\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}x \\ & \pm\frac{2}{r^2}\,\mathfrak{Cos}\,(r\sin x)\cos(r\cos x)\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}2x \\ & -\frac{1}{r^2}\,\mathfrak{Sin}\,(r\sin x)\sin(r\cos x)\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}2x \end{aligned}$$

zu beweisen. Auch beweist er selbst[444]), daß

$$\text{(310)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}nx = \begin{Bmatrix}-\cos x\\ +\sin x\end{Bmatrix} + e^{\cos x}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(\sin x - x)$$

ist.

c) Die Frage nach den trigonometrischen Entwicklungen von

$$\text{(311)} \qquad \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(r\cos x), \qquad \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(r\sin x)$$

---

439) J. f. Math. 25 (1843), p. 264. Die Ableitung von $e^{ar}\cos br$ nach $r$ läßt sich schreiben: $\lambda e^{ar}\cos(br+\theta)$, wo $\lambda\cos\theta = a$, $\lambda\sin\theta = b$; usw.

440) Handbuch der algebraischen Analysis, Jena 1845, p. 21; mit weniger vollständiger Begründung auch *J. Dienger,* J. f. Math. 41 (1851), p. 53; *O. Werner,* Arch. Math. 22 (1854), p. 341.

441) ib. 34 (1847), p. 229 (von 1845). Durch Differentiationen und Integrationen nach $r$ und nach $x$ erhält er weitere Formeln.

442) J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 493.

443) Arch. Math. Phys. 9 (1847), p. 455.

444) J. f. Math. 38 (1849), p. 350 (von 1845).

ist schon von *A. Cagnoli*[445]) aufgeworfen worden; doch begnügt er sich mit der Angabe der Anfangsglieder in den Entwicklungen der niedersten Koeffizienten nach Potenzen von $r$. Dagegen leitet *G. Frullani*[446]) für die Koeffizienten der Entwicklung

$$e^{r\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(r) \cos nx \tag{312}$$

aus ihrer Integraldarstellung die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 J_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dJ_n}{dr} - n^2\left(1 + \frac{n^2}{r^2}\right) J_n = 0 \tag{313}$$

oder

$$\frac{d^2(r^{-n}J_n)}{dr^2} - \frac{2n+1}{r}\frac{d(r^{-n}J_n)}{dr} - (r^{-n}J_n) = 0 \tag{314}$$

her und integriert sie durch eine nach Potenzen von $r$ fortschreitende Reihe.

d) Die Summation der Reihe:

$$\cos x + \frac{1}{2}\frac{\cos 3x}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\cos 5x}{5} + + \cdots \tag{315}$$

ist in den Annales von Gergonne als Aufgabe gestellt worden[447]); *Querret* zeigt[448]), daß sie gleich dem reellen Teil von $\arcsin(e^{xi})$, also gleich

$$\tfrac{1}{2} \arccos(\sin 2x - 1)$$

ist.

*Th. Clausen*[449]) gibt dann die Reihen explicite an, die entstehen, wenn man in den Potenzreihenentwicklungen von $\cos z$, $\sin z$, $\operatorname{tg} z$, $\arcsin z$, $\operatorname{arc\,tg} z$ an Stelle von $z$ eine komplexe Größe setzt.

*J. Dienger*[450]) stellt die Aufgabe, die Gleichungen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)} r^n \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} nx \tag{316}$$
$$= \begin{Bmatrix}2\\ 0\end{Bmatrix} \mp 2\sqrt{1 - 2r\cos x + r^2} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{r \sin x}{1 - r\cos x}\right)$$

445) Trigonometria piana e sferica, 1786, p. 274 der 2. franz. Ausgabe von 1806.

446) Mem. soc. ital. 18 (1820), p. 503 (von 1818). Wird $r$ durch $ri$ ersetzt, so erhält man die von *W. Fr. Bessel* (Berl. Abhandl. 1824 = Ges. Abhandl. 1, p. 92) gegebenen Entwicklungen; vgl. Nr. 12.

447) Ann. de math. 13 (1823), p. 247.

448) Ib. p. 356, p. 380 hat er noch entsprechende Formeln für Produkte mit beliebig vielen Faktoren. *W. Talbot* glaubt ib. 14 (1824), p. 91, 94, $1 - \sin 2x$ statt $\sin 2x - 1$ schreiben zu sollen, nimmt das aber ib. p. 188 selbst zurück.

449) J. f. Math. 4 (1829), p. 283; ebenso später *J. Dienger*, ib. 34 (1847), p. 237 (von 1845), mit Angabe der Konvergenzbedingungen. Die Reihe (315) sowie die aus der Entwicklung von $\sin z$ und $\operatorname{arc\,tg} z$ hervorgehenden Reihen auch schon bei *R. Lobatto*, recherches[28]), p. 11, 12.

450) Arch. Math. Phys. 11 (1848), p. 337.

und

$$(317)\qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-4)} r^n \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} nx$$

$$= \begin{Bmatrix}-\frac{4}{3}\\ 0\end{Bmatrix} + 2r \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} x \pm \frac{4}{3} \sqrt{1-2r\cos x + r^2}^3 \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} \cdot \left(\frac{3}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{r \sin x}{1 - r\cos x}\right)$$

zu beweisen.

e) Für die Reihen

$$(318)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^k r^n \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} nx, \qquad (k \text{ ganzzahlig})$$

erhalten *M. Ohm*[451]) durch die Methode von Nr. 2, *J. A. Grunert*[452]) durch Differentiation von (2) und (3) nicht eben einfache Ausdrücke.

f) Reihen, in welchen die Koeffizienten die reziproken Werte der Produkte von mehreren ganzen Zahlen sind, treten schon bei *J. Landen* auf, indem er nämlich das Integral:

$$(319)\qquad \frac{1}{z}\int_1^z \frac{1}{z}\int_1^z z \int_1^z \frac{\log(1+z)}{z}\, dz^3$$

sowohl nach steigenden als nach fallenden Potenzen von $z$ entwickelt, dann beide Entwicklungen verbindet und $z = e^{ix}$ setzt, erhält er[453])

$$(320)\qquad \frac{\cos 2x}{1^2\cdot 3^2} - \frac{\cos 3x}{2^2\cdot 4^2} + \frac{\cos 4x}{3^2\cdot 5^2} - + - \cdots$$

$$= \frac{x}{4}\sin x + \left(\frac{\pi^2}{24} - \frac{x^2}{8} + \frac{3}{16}\right)\cos x - \frac{1}{2}$$

und daraus:

$$(321)\qquad \frac{\cos 2x}{1^2\cdot 3^2} + \frac{\cos 3x}{2^2\cdot 4^2} + \frac{\cos 4x}{3^2\cdot 5^2} + + + \cdots$$

$$= \frac{\pi - x}{4}\sin x + \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{3}{16}\right)\cos x - \frac{1}{2}$$

und durch Verbindung beider Resultate noch:

$$(322)\qquad \frac{\cos x}{1^2\cdot 3^2} + \frac{\cos 2x}{3^2\cdot 5^2} + \frac{\cos 3x}{5^2\cdot 7^2} + + + \cdots$$

$$= \frac{\pi}{8}\sin\frac{x}{2} + \frac{\pi}{16}(\pi - x)\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}.$$

Entsprechende Behandlung eines analog gebauten fünffachen Integrals

451) Pétersb. mém. prés. 1 (1830), p. 118 (von 1825); Auszug bull. Férussac 15 (1831), p. 226.

452) J. f. Math. 25 (1843), p. 468.

453) Math. memoirs 1, Lond. 1780, p. 76.

gibt ihm die Werte der Reihen[454]):

(323) $$\frac{\cos 3x}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2} \pm \frac{\cos 4x}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \frac{\cos 5x}{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2} \pm + \pm \cdots$$

und:

(324) $$\frac{\cos 2x}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2} + \frac{\cos 3x}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2} + \frac{\cos 4x}{3^2\cdot 4^2\cdot 5^2} + + + .$$

Ähnliche Reihen, in denen die Nenner der Koeffizienten allgemeinere rationale ganze Funktionen des Index sind, erscheinen bei *A. M. Legendre*[455]); er erhält aus (2) und (3) durch Multiplikation mit $r^a dr$ und Integration:

(325) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{a+n} = \sin x \int_0^1 \frac{r^a dr}{1+2r\cos x + r^2},$$

(326) $$\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{a+n} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1-r^2)r^{a-1}dr}{1+2r\cos x+r^2} = \int_0^{\infty} \frac{\mathfrak{Cof}\, x\xi}{\mathfrak{Sin}\, \pi\xi}\, \frac{\xi d\xi}{a^2+\xi^2}$$

und daraus weiter:

(327) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{(a+n-1)(a+n+1)} = \frac{\sin x}{2}\int_0^1 \frac{(1-r^2)r^{a-1}dr}{1+2r\cos x+r^2},$$

(328) $$\frac{1}{2a(a+2)} - \frac{1}{2}\,\frac{\cos x}{(a+1)(a+3)} + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{(a+n-2)(a+n)(a+n+2)}$$
$$= \frac{\sin^2 x}{2}\int_0^1 \frac{(1-r^2)r^{a-1}dr}{1+2r\cos x+r^2}.$$

Für rationale Werte von $a$ lassen sich die Integrale durch Logarithmen und zyklometrische Funktionen ausdrücken. Die einfachsten dahin gehörigen Formeln hat *J. J. Littrow*[456]) durch Kombination der Entwicklungen (111) und (145) erhalten; nämlich zunächst:

(329) $$\sin x\cdot\log\left(2\cos\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{4}\sin x = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin nx}{n^2-1},$$

454) p. 79.

455) Exerc. de calc. int. 2 (1817), p. 163, 188 (publ. 1815). Daß sich Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(b+(2n+1)d)\,x}{(b+2nd)(b+(2n+1)d)}$$

elementar summieren lassen, bemerkt auch *O. Schrader* (Comm. de summa seriei, Vimariae 1818, p. 31); doch führt er die Rechnung nicht aus.

456) Pétersb. mém. 7 (1815/16[20]), p. 136 (von 1814).

$$\frac{x}{2}\cos x + \frac{1}{4}\sin x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin nx}{n^2-1}, \tag{330}$$

$$\cos x \cdot \log\left(2\cos\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n \cos nx}{n^2-1}, \tag{331}$$

$$-\frac{x}{2}\sin x + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cos x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2-1} \tag{332}$$

und daraus noch durch Integration:

$$\frac{x}{2}(1+\cos x) - \frac{3}{4}\sin x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{(n-1)n(n+1)}, \tag{333}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\cos^2\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2}\log\left(2\cos\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{(n-1)n(n+1)}. \tag{334}$$

Reihen, die mit (330) und (332) im wesentlichen identisch sind, erhält *A. Cauchy*[457]) durch Anwendung derjenigen Form (630) der Integraldarstellung der Koeffizienten, bei welcher nur bis zu dem gerade in Betracht kommenden Werte von $x$ integriert wird, auf die Funktionen $\cos x$ und $\sin x$; *G. Frullani*[458]) erhält (332) einmal mit Hilfe der Identität:

$$-x\sin x = \frac{-1+e^{2xi}}{2e^{xi}}\log(1+e^{xi}) + \frac{-1+e^{-2xi}}{2e^{-xi}}\log(1+e^{-xi}); \tag{335}$$

dann[459]) aus der Integraldarstellung der Koeffizienten, endlich[460]) durch Multiplikation der Entwicklung von $x$ nach den Sinus der Vielfachen von $x$ mit $\sin x$; *O. Schloemilch*[461]) (330) und (332) aus der Integraldarstellung der Koeffizienten, (333) durch Kombination von (330) mit der Entwicklung von $\frac{x}{2}$, später noch[462]) (332) durch Kombination von (14) und (15).

*M. A. Stern*[463]) gibt für

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{(a+(n-2)b)(a+(n-1)b)(a+nb)} \tag{336}$$

---

457) Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 400.
458) Mem. soc. ital. $20_2$ (1831), p. 695.
459) p. 696.
460) p. 697.
461) Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale, Jena 1845, p. 19, 23.
462) Analytische Studien 2, Leipz. 1848, p. 128.
463) J. f. Math. 10 (1833), p. 216 (von 1831).

einen Ausdruck durch eine Summe von bestimmten Integralen, der Littrows Formel (333) als Spezialfall enthält. Noch allgemeiner erhält *O. Schloemilch*[464]), indem er die Koeffizienten durch Betafunktionen ausdrückt und dann die Reihenfolge von Summation und Integration vertauscht:

$$(337)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(p+nm)(p+nm+1)\ldots(p+nm+k)} \begin{Bmatrix} \cos nx \\ \sin(n+1)x \end{Bmatrix}$$
$$= \frac{1}{k!}\int_0^1 \frac{(1-r^k)r^{p-1}}{1-2r^m\cos x + r^{2m}} \begin{Bmatrix} 1-r^m\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} dr;$$

speziell für $p = m = k = 1$:

$$(338)\quad \frac{\sin x}{1\cdot 2} + \frac{\sin 2x}{2\cdot 3} + \frac{\sin 3x}{3\cdot 4} + \cdots = \sin x\left[\frac{\pi - x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\right].$$

Diese letztere ist andererseits auch als Spezialfall in der einen der beiden von *J. Dienger*[465]) gegebenen:

$$(339)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} r^n}{n(n+1)} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} nx = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$
$$+ \frac{1}{r}\begin{Bmatrix} \sin x \\ r+\cos x \end{Bmatrix} \operatorname{arc\,tg} \frac{r\sin x}{1+r\cos x} \pm \frac{1}{2r}\begin{Bmatrix} r+\cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} \log(1+2r\cos x + r^2)$$

enthalten. Erwähnt seien auch hier noch die von *O. Schlömilch*[466]) gegebenen, mit (325) und (326) verwandten Gleichungen:

$$(340)\quad \begin{Bmatrix} \frac{1}{2r} \\ 0 \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r+n} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} nx = \int_0^{\infty} \begin{Bmatrix} t\,\mathfrak{Cos} \\ r\,\mathfrak{Sin} \end{Bmatrix} (\pi t - xt) \frac{dt}{(r^2+t^2)\,\mathfrak{Sin}\,\pi t},$$

sowie die von *C. J. Malmsten*[467]):

$$(341)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{1-s}} \sin nx$$
$$= \sin\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(s) \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{((2n+1)\pi - x)^s} + \frac{1}{((2n+1)\pi + x)^s}\right].$$

g) *E. E. Kummer* hat darauf hingewiesen[468]), daß die meisten bekannten trigonometrischen Entwicklungen elementarer Funktionen

---

464) Arch. Math. Phys. 4 (1844), p. 34.

465) J. f. Math. 38 (1849), p. 351 (von 1845).

466) Arch. Math. Phys. 12 (1849), p. 147; aus den allgemeinen in Nr. 106 zu besprechenden Formeln.

467) J. f. Math. 38 (1849), p. 17 (von 1846); aus einer Gleichung zwischen zwei bestimmten Integralen. [Die Substitution von $\pi - x$ für $x$ würde die Formel vereinfachen.]

468) J. f. Math. 15 (1836), p. 157.

sich als hypergeometrische Reihen [auf dem Konvergenzkreise] auffassen lassen. Die Theorie der linearen Transformation der hypergeometrischen Funktionen gibt, wenn mit $C_n(\alpha, \beta, \gamma)$ der Koeffizient

$$(342) \quad \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\ldots n\cdot\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} = \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n)\Gamma(n+1)}$$

bezeichnet und

$$(343) \qquad 1-2r\cos x+r^2=\varrho^2, \quad \frac{r\sin x}{1-r\cos x}=\operatorname{tg} w$$

gesetzt wird, die Doppelrelation:

$$(344) \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\alpha, \beta, \gamma) r^n \cos(nx+\delta)$$
$$= \varrho^{\gamma-\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty} C_n(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma) r^n \cos(nx-(\gamma-\alpha-\beta)w+\delta)$$
$$= \varrho^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty} C_n(\alpha, \gamma-\beta, \gamma)\left(\frac{-r}{\varrho}\right)^n \cos(nx+nw+\alpha w+\delta).$$

Für $r=1$ wird:

$$(345) \qquad \varrho = 2\sin\frac{x}{2}, \quad w = \frac{2h+1}{2}\pi - \frac{x}{2};$$

$h$ bedeutet dabei eine ganze Zahl, deren Wert verschieden sein kann, je nach dem Intervall, in dem $x$ liegt. Die übrigen linearen Transformationen der hypergeometrischen Funktionen geben Umformungen einer trigonometrischen Reihe in eine Summe von zwei andern. Kummer hebt unter ihnen diejenigen hervor, welche derartige Reihen in Potenzreihen reellen Arguments überführen[469]). Lassen sich diese letzteren elementar summieren, so erhält man neue Entwicklungen elementarer Funktionen in trigonometrische Reihen, z. B.[470]):

$$(346) \qquad \sum \binom{\mu}{n}\frac{\cos(\mu-2n)x}{\mu-2n} = \frac{2^\mu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(1-\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)},$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(347) \qquad \sum \binom{\mu}{n}\frac{\sin(\mu-2n)x}{(\mu-2n)^2-1} = \frac{2^\mu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right)}\sin x;$$

und daraus durch Grenzübergang zu $\mu=0$ die Entwicklung von $\frac{\pi}{4}\sin\frac{x}{2}-\frac{x}{4}$ nach den Sinus der Vielfachen von $x$ und aus ihr durch Differentiation nach $x$ die Gleichung (277) für $\mu=\frac{1}{2}$.

469) p. 161.

470) p. 166.

Umgekehrt kann

$$F\left(\alpha, \beta, \gamma, \cos^2 \frac{x}{2}\right) \tag{348}$$

in eine nach den Cosinus der Vielfachen von $x$ fortschreitende Reihe transformiert werden[471]; für die Koeffizienten der letzteren ergeben sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung dreigliedrige Rekursionsformeln, die sich, wenn $2\gamma - \alpha - \beta - 1 = 0$ ist, auf zweigliedrige reduzieren, so daß sich die Koeffizienten in diesem speziellen Falle durch $\Gamma$-Quotienten ausdrücken lassen. Die Annahme $\beta = -\alpha$ liefert die Entwicklung von $\cos \alpha x$ nach den Cosinus der Vielfachen von $2x$[472].

**h)** *E. E. Kummer* gewinnt die Formel[473]:

$$\begin{aligned}\log \Gamma(x) = \frac{1}{2} \log (2\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{2n} \\ + \frac{1}{\pi}(C + \log(2\pi)) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{2n} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \sin 2n\pi x \quad (0 < x < 1);\end{aligned} \tag{349}$$

die Koeffizienten der Cosinusglieder bestimmt er mit Hilfe der Relation zwischen $\Gamma(x)$ und $\Gamma(1-x)$, die der Sinusglieder durch Benutzung einer Integraldarstellung von $\log \Gamma(x)$ und Umkehrung der Integrationsreihenfolge. Er schreibt sie noch um in:

$$\begin{aligned}\log \Gamma(x) - \frac{1}{2} \log (2\pi) + \frac{1}{2} \log (2 \sin \pi x) - (C + \log(2\pi))(1 - 2x) \\ = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \sin 2n\pi x.\end{aligned} \tag{350}$$

In etwas anderer Gestalt, nämlich:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \log n \sin 2n\pi x = \frac{\pi}{2} \log \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - x)}{\Gamma(\frac{1}{2} + x)} \\ - \pi x (C + \log 2\pi)\end{aligned} \tag{351}$$

erscheint dieselbe Formel bei *C. J. Malmsten*[474]).

**i)** Von Entwicklungen, deren Koeffizienten höhere Transzendente vorstellen, sei erwähnt die von *O. Schlömilch*[475]) gegebene:

$$\frac{\pi}{2x} = \sum_{n=1}^{\infty} \text{si}\, n\pi \sin x\xi, \tag{352}$$

---

471) p. 168.

472) p. 171.

473) J. f. Math. 35 (1847), p. 1. $C$ ist die Eulersche Konstante 0,577 ⋯

474) J. f. Math. 38 (1849), p. 25 (von 1846). Er erhält sie durch Vergleichung zweier verschiedener Ausdrücke eines bestimmten Integrals.

in ihr ist die Transzendente „Integralsinus“ durch

$$\text{(353)} \qquad \operatorname{si} x = \int_0^x \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi$$

definiert.

**15. Darstellung der Koeffizienten durch unendliche Reihen.** Der Gedanke, eine gegebene trigonometrische Reihe dadurch zu summieren, daß man ihre einzelnen Glieder nach Potenzen der Variabeln entwickelt und dann die Reihenfolge der Summationen vertauscht, ist bereits von *J. Fr. Pfaff*[476]) formuliert, zunächst allerdings auf Reihen angewendet worden, von denen die meisten divergieren. Die Umkehrung dieses Verfahrens, d. h. seine Anwendung auf die Entwicklung einer gegebenen Funktion, verlangt die Auflösung eines Systems von unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten; also erstens die Auflösung desjenigen Gleichungssystems, das aus jenem entsteht, wenn man nur die $N$ ersten Gleichungen und in ihnen nur die $N$ ersten Unbekannten beibehält, und zweitens den Grenzübergang zu $N = \infty$. In dieser Weise hat *J. J. Fourier* zunächst die Aufgabe behandelt, die Funktion 1 nach den Cosinus der ungeraden Vielfachen von $x$ zu entwickeln[477]). Die Anwendung desselben Verfahrens auf die Entwicklung einer beliebigen ungeraden Funktion in eine Sinusreihe liefert ihm dann für deren Koeffizienten den allgemeinen Ausdruck durch die unendliche Reihe[478]):

$$\text{(354)} \qquad B_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m f^{(2m)}(\pi)}{n^{2m}}.$$

475) Theorie der Differenzen u. Summen, Halle 1848, p. 128. Er hat auch die aus (352) durch endliche Summation hervorgehende Reihe.

476) Versuch einer neuen Summationsmethode, Berlin 1788.

477) Schon in der Preisschrift von 1811, Paris mém. 4 (1819/20[24]), p. 262; dann théorie analytique de la chaleur, Nr. 171 = Oeuvres 1, p. 149. Geringe Modifikationen des Ausdrucks würden hinreichen, um die Schlußweise den gegenwärtigen Anforderungen an Strenge genügend erscheinen zu lassen, bis auf den letzten Punkt: daß die durch den Grenzübergang zu $N = \infty$ erhaltenen Formeln wirklich dem vorgelegten Gleichungssystem genügen. In der Tat würde man durch ihr Einsetzen divergente Reihen erhalten.

478) Preisschrift p. 297; théorie Nr. 217, p. 205. Es würde nicht ohne Interesse sein, zuzusehen, wie und unter welchen Voraussetzungen (die Konvergenz der Maclaurinschen Entwicklung von $f(x)$ bis $x = \pi$ würde zwar notwendig, aber nicht hinreichend sein) die Schlüsse durch die jetzige Theorie der Funktionen von unendlich vielen Variabeln gerechtfertigt werden können. Ein Teil der dazu erforderlichen Abänderungen ist übrigens bereits von *G. Darboux* in den Anmerkungen zu seiner Ausgabe der Oeuvres angegeben. — Reproduziert ist Fouriers Verfahren von *U. J. Leverrier,* Paris observ. ann. 1 (1855), p. 119.

Ein anderes Beispiel einer derartigen Rechnung, nämlich die Auflösung des Gleichungssystems

$$(355)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m^2+n^2} = H_m\,(m=1,2,3,\cdot\cdot)$$

durch:

$$(356)\quad x_n = \frac{4}{\pi^2}\,\frac{n\,\mathfrak{Sin}\,n\pi}{\cos n\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\,\mathfrak{Sin}\,m\pi}{(m^2+n^2)\cos m\pi} H_m, \qquad (n=1,2,3,\cdot\cdot)$$

findet sich bei *G. Piola*[479]; er schließt daran eine Umrechnung der Koeffizienten der Entwicklung einer Funktion nach den Vielfachen von $\alpha x$ in die der Entwicklung derselben Funktion nach den Funktionen der Vielfachen von $x$ selbst.

Zu einem anderen Ausdruck der Koeffizienten durch unendliche Reihen gelangt *G. Frullani*[480] von der Voraussetzung aus, daß die zu entwickelnde Funktion in der Gestalt $F(m+\cos x)$ gegeben sei; indem er nach Potenzen von $\cos x$ entwickelt und diese Entwicklung dann in eine solche nach Potenzen von $e^{ix}$ bzw. nach den Cosinus der Vielfachen von $x$ umsetzt, erhält er:

$$(357)\qquad A_n = 2^{n+1}\left\{\int^{(n)} \frac{\partial^n z}{\partial r^n}\,dm^n\right\}_{r=1}$$

wo:

$$(358)\qquad z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r k}{2^{2k}}\,\frac{F^{(2k)}(m)}{(k!)^2}.$$

Später[481] schlägt er noch einen anderen Weg ein: er schreibt symbolisch:

$$(359)\qquad F(m+\cos x) = F(m) - 1 + \exp\left(\cos x \frac{\partial F(m)}{\partial m}\right).$$

Damit ist die allgemeine Aufgabe auf die spezielle der Entwicklung von $exp\,(r\cos x)$ zurückgeführt. Da die Koeffizienten dieser letzteren der Differentialgleichung (313) genügen, schließt er[482], daß die Koef-

479) Mem. soc. ital. $20_2$ (1831), p. 605; vgl. auch die Bemerkungen p. 629.

480) Ricerche sopra le serie, Firenze 1816, p. 41—47. p. 46 zeigt er, daß

$$2(n+1)A_{n+1} = \frac{dA_n}{dm} - \frac{dA_{n+1}}{dm} + 1$$

ist. Er zieht übrigens aus seinen Formeln nicht den Schluß, daß eine derartige Entwicklung immer möglich sei, sondern meint (p. 60), man müsse sich vor ihrer Anwendung auf anderem Wege von der Möglichkeit der Entwicklung überzeugen; sonst würde man unendliche oder imaginäre Werte für die Koeffizienten erhalten, wie bei der Taylorschen Entwicklung in denjenigen Fällen, in welchen sie „in difetto“ sei.

481) Mem. soc. ital. 18 (1820), p. 502 (von 1818).

482) Ib. p. 508.

fizienten der Entwicklung jeder analytischen Funktion erhalten werden können, indem man in den Entwicklungen der Zylinderfunktionen die Potenzen von $r$ durch die entsprechenden Differentialquotienten der Funktion $F$ ersetzt. Daran schließt er die Frage, wie diese Funktion $F$ beschaffen sein muß, wenn ihre Entwicklungskoeffizienten einer linearen Differentialgleichung der Form

$$P\frac{d^2A_n}{dm^2}+Q\frac{dA_n}{dm}-(R-n^2)A_n=0 \tag{360}$$

genügen sollen; er findet, daß man damit auf den vorher behandelten Fall zurückkommt[483]). Außerdem gibt er noch eine andere symbolische Darstellung, indem er

$$F(m+\mu)=F(m)-1+\exp\left(\mu\frac{\partial F(m)}{\partial m}\right) \tag{361}$$

setzt und dann die Entwicklung (291) der Exponentialfunktion benutzt[484]).

In ähnlichem Gedankengang zeigt *A. F. Svanberg*[485]), daß die Koeffizienten der Entwicklung irgendeiner Funktion $f(r\cos x)$ nach den Cosinus der Vielfachen von $x$ der Rekursionsformel

$$r\frac{dA_m}{dr}+mA_m=r\frac{dA_{m-2}}{dr}-(m-2)A_{m-2} \tag{362}$$

und die einer Funktion $f(u+v\cos x)$, wo $u$ und $v$ Funktionen von $r$ sein sollen, nach denselben Cosinus der Formel[486])

$$\begin{aligned} v\frac{dA_m}{dr}+mA_m\frac{dv}{dr}+2(m-1)A_{m-1}\frac{du}{dr}-v\frac{dA_{m-2}}{dr}& \\ +\ (m-2)A_{m-2}\frac{dv}{dr}&=0 \end{aligned} \tag{363}$$

genügen; sowie für beide Fälle, wie sich die Koeffizienten der Entwicklungen von $f', f'', \ldots$ aus denjenigen der Entwicklung von $f$ ableiten lassen[487]).

**16. Darstellung der Koeffizienten trigonometrischer Reihen durch bestimmte Integrale.** Integralausdrücke für Koeffizienten trigonometrischer Entwicklungen (zunächst für die unter 3 besprochenen) sind soviel ich sehe zuerst von *J. d'Alembert*[488]) veröffentlicht worden:

---

483) p. 513.

484) p. 517.

485) Upsala n. acta 11 (1839), p. 5.

486) p. 15.

487) p. 13, 16.

488) Recherches sur diff. points du système du monde 2, Paris 1754, p. 66. Über die Möglichkeit, daß auch *Euler* die Formeln damals schon besessen hat, vgl. man Note 8 von II A 9a, p. 646.

den Ausdruck

$$\frac{1}{2}A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx \tag{364}$$

für das absolute Glied der Entwicklung

$$f(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx \tag{365}$$

erhält er durch gliedweise Integration, unter Berücksichtigung des Umstandes, daß

$$\int_0^\pi \cos nx\,dx = 0 \tag{366}$$

ist für jeden ganzzahligen von Null verschiedenen Wert von $n$; die entsprechende Formel für $A_1$ gibt er ohne Beweis. Die allgemeine Formel:

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx \tag{367}$$

hat zuerst *A. Clairaut*[489]) durch Grenzübergang zu $m = \infty$ aus der Interpolationsformel (II a 9 a, Nr. 3) abgeleitet. *J. de La Lande*[490]) gewinnt sie von *Clairauts* Bemerkung[491]) aus, daß das absolute Glied in der Entwicklung von $f(x)\cos nx$ gleich $\frac{1}{2}A_n$ ist. Die heute geläufige Ableitung dieser Ausdrücke durch gliedweise Integration der als richtig angenommenen Reihe (365), unter Berücksichtigung der Relationen:

$$\int_0^\pi \cos mx \cos nx\,dx = \begin{cases} 0 \text{ für } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} \text{ für } m = n \neq 0, \\ \pi \text{ für } m = n = 0, \end{cases} \tag{368}$$

findet sich zuerst in einer nachgelassenen Abhandlung *L. Eulers*[492]). Dieselben Formeln sowie die entsprechenden

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx, \quad B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx \tag{369}$$

489) Paris mém. 1754[59], p. 548 (vom Juli 57).

490) Paris mém. 1760[66], p. 315. Ebenso *G. Plana,* Torino mem. 1811/12, p. 373.

491) Paris mém. 1754, p. 547.

492) Petrop. n. acta 11 (1793[98]), p. 115 (vom Mai 1777; im unmittelbaren Anschluß an die II A 9a, Note 20, p. 651 zitierte Interpolationsabhandlung) — *Euler* macht übrigens darauf aufmerksam, daß sich die Sinusreihen ebenso behandeln lassen.

gewinnt *G. Frullani*[493]) indem er zunächst unter Benutzung der Gleichungen für seine Hilfsfunktion $z$(358) den Ausdruck

$$(370)\qquad z = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi F(m + \sqrt{r}\cos x)\,dx$$

ableitet und dann die mehrfachen Integrale durch partielle Integration auf einfache zurückführt; nachher verifiziert er sie ebenfalls durch gliedweise Integration. *J. Fourier*[494]) gelangt zur Integraldarstellung, zunächst für die Sinusreihe, indem er zeigt, daß die Funktion (vgl. 354)

$$(371)\qquad s_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{n^{2m}} f^{(2m)}(x)$$

der Differentialgleichung

$$(372)\qquad s_n + \frac{1}{n^2}\frac{d^2 s_n}{dx^2} = f(x)$$

genügt; nachher bedient auch er sich der gliedweisen Integration.

Verlegt man mit *S. D. Poisson*[495]) in diesen Formeln den Anfangspunkt der Abszissen um eine Viertelperiode, so erhält man Reihen, die nach den Cosinus der geraden und den Sinus der ungeraden Vielfachen des Arguments, bzw. umgekehrt, fortschreiten.

Daß und wie man aus der Entwicklung von $f(x)\sin x$ nach den Sinus der Vielfachen von $x$ die Entwicklung von $f(x)$ selbst nach den Cosinus ableiten kann, bemerkt *M. Ohm*[496]).

Auf eigentümlichem Umweg gelangt *G. Piola*[497]) zur Integral-

493) Ricerche sopra le serie, Firenze 1816, p. 53, 65; mem. soc. ital. 18 (1820), p. 459 (von 1818) gibt er gleich die gliedweise Integration. Vgl. übrigens Note [480]). — Über das von *Poisson* wiederholt gegen *Fourier* ausgespielte angebliche Anrecht von *Lagrange* auf die Gleichung (369) vgl. man II A 9a, Note 10, p. 647, sowie hier Note [650]), [853]), [858]).

494) Paris mém. 4 (1819/20[24]), p. 301 (von 1811); théorie de la chaleur (Oeuvres 1, p. 210). An anderer Stelle (Paris mém. 8 (1825[29]); Oeuvres 2, p. 174) erwähnt er, daß ihn *Lacroix* auf *Eulers* Abhandlung[492]) aufmerksam gemacht habe, gibt aber nicht an, ob er die Formeln schon vorher gekannt habe. In dem von *P[oisson]* verfaßten Referat über Fouriers Abhandlung von 1807, n. bull. philomat. 1 (1808), p. 115 = Oeuvres de Fourier 2, p. 219 stehen nur die Formeln für die Entwicklung nach den Cosinus der ungeraden Vielfachen des Arguments.

495) J. Éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 428; 19 (1823), p. 53. Er glaubt dabei die zu entwickelnden Funktionen ähnlichen Beschränkungen unterwerfen zu müssen wie die in Note 1083 erwähnten. — Die so erhaltenen Formeln stehen auch bei *J. Dienger*, J. f. Math. 34 (1847), p. 88 und bei *M. Ohm*, System der Mathematik 9, Nürnberg 1852, p. 320.

496) System der Mathematik 9, Nürnberg 1852, p. 320.

497) Mem. soc. ital. 20 (1831), p. 621.

darstellung der Koeffizienten der Sinusreihe: indem er aus der Gleichung (369) die folgenden ableitet:

$$\int_0^\pi f(\alpha)\sin\frac{h\alpha}{r}\,d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^\pi \sin n\alpha \sin\frac{h\alpha}{r}\,d\alpha,$$

erhält er für die $B_n$ ein unendliches System linearer Gleichungen der in Nr. 15 besprochenen Art, dessen Auflösung unter Benutzung der Entwicklung (275) die gewünschten Formeln für die $B_n$ liefert.

*C. G. J. Jacobi*[498]) macht darauf aufmerksam, daß die Integraldarstellung (367), sobald man über die kleinsten Werte von $n$ hinausgeht, kleine Zahlwerte als Differenzen von großen liefert und also zu numerischer Berechnung wenig geeignet ist. Er leitet daher aus den Formeln von Nr. 5 die folgende

$$(373)\quad \int_0^\pi \cos^m\alpha\cos n\alpha\,d\alpha = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.3\dots(2n-1)}\int_0^\pi \cos^{m-n}\alpha\sin^{2n}\alpha\,d\alpha$$

und mit ihrer Hilfe die allgemeine

$$(374)\quad \int_0^\pi f(\cos\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha = \frac{1}{1.3\dots(2n-1)}\int_0^\pi f^{(n)}(\alpha)\sin^{2n}\alpha\,d\alpha$$

ab. Von dieser letzteren gibt er dann noch einen andern Beweis, indem er aus einer von *Lacroix* gegebenen Darstellung der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung einer Potenz das Lemma[499]):

$$(375)\quad \frac{d^{n-1}(1-z^2)^{\frac{2n-1}{2}}}{dz^{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}1.3\dots(2n-1)}{n}\sin(n\arccos z)$$

und aus ihm:

$$(376)\quad \frac{d^n(1-z^2)^{\frac{2n-1}{2}}}{dz^n}dz = (-1)^{n-1}.1.3\dots(2n-1)\cos nx\,dx\ (z=\cos x)$$

498) J. f. Math. 15 (1836), p. 3 = Werke 6, p. 86; reproduziert von *O. Schloemilch*, Analytische Studien 2, Leipz. 1848, p. 48. — *J. Liouville*, der J. de math. 1 (1836), p. 195 über diese Untersuchung Jacobis berichtet, bemerkt nicht ohne Berechtigung, ihre Anwendung werde in den meisten Fällen an der Komplikation der Ausdrücke der höheren Ableitungen scheitern.

499) Jacobi's Beweis dieses Lemmas auch bei *D. F. Gregory*, examples of the processes of the diff. and int. calc. p. 501 der 2. Aufl. Cambr. 1846 und bei *O. Schloemilch*, Differenzialrechnung, Greifswald 1847, p. 90; *J. Liouville*, J. de math. 6 (1841), p. 69 gibt noch zwei andere Beweise, einen davon reproduziert *J. A. Grunert*, Arch. Math. Phys. 4 (1844), p. 104; noch einen andern, durch Entwicklung beider Seiten nach Potenzen von $z$, gibt *M. Ohm*, System der Mathematik 9, Nürnberg 1852, p. 331.

ableitet; wiederholte partielle Integration gibt dann wieder die Gleichung (374). Auch erwähnt er[500]), daß in der Gleichung

$$(377)\qquad \int_0^\pi f(\cos\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha$$
$$= \int_0^\pi [af^{(n)}(\alpha) - bf^{(n+2)}(\alpha) + cf^{(n+4)}(\alpha) - + - \cdots]\, d\alpha$$

die Koeffizienten $a, b, c, \ldots$ von der Funktion $f$ unabhängig sind, sich also durch irgendeine spezielle Annahme dieser Funktion, z. B. $f(z) = \cos kz$, bestimmen lassen.

Bei *G. Boole*[501]) erscheint Jacobis Formel (374) als Spezialfall allgemeinerer Formeln, die entstehen, wenn in Relationen zwischen $B$- und $\Gamma$-Integralen die Variablen durch Differentialsymbole ersetzt werden.

*E. E. Kummer*[502]) beweist durch Entwicklung beider Seiten nach Potenzen von $r$ die Umformungen:

$$(378)\qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(2re^{i\alpha}\cos\alpha)e^{2ni\alpha}\, d\alpha = \sin n\pi \int_0^1 (1-u)^{n-1}\varphi(ru)\, du,$$

$$(379)\qquad \frac{2i}{\pi}\cos n\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(2re^{i\alpha}\cos\alpha)\,\alpha e^{2ni\alpha}\, d\alpha = \int_0^1 (1-u)^{n-1}\varphi(ru)\, du;$$

die erstere gilt für beliebige, die zweite, aus ihr durch Grenzübergang erhaltene, nur für ganzzahlige Werte von $n$. Beide setzen übrigens voraus, daß die Taylorsche Entwicklung von $\varphi(r+\varrho)$ bis $\varrho = r$ konvergiert.

Auch eine von *A. Cauchy*[503]) aus seinen Residuensätzen (Nr. 35) abgeleitete Umformung sei hier noch erwähnt: Ist die Funktion $f$ für $r_0 < r < r_1$ und für alle $x$ stetig, außer für einen Wert $x = x_0(r)$, für welchen $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ gleich einer endlichen Größe $\Delta$ ist, so ist:

$$(380)\qquad \int_0^{2\pi} [f(r_1e^{xi}) - f(r_0e^{xi})]\, dx = i\int_{r_0}^{r_1} \Delta\frac{dr}{r}.$$

500) J. f. Math. 15 (1836), p. 26 = Werke 6, p. 117.

501) Cambr. Dubl. math. j. $3_5$ (1843), p. 216.

502) J. f. Math. 20 (1840), p. 1, 4.

503) Paris C. R. 18 (1844), p. 1079 = Oeuvres (1) 8, p. 233. Die Anwendung auf die in Nr. 9 besprochenen Entwicklungskoeffizienten gibt deren Darstellung in der gewöhnlichen Form hypergeometrischer Integrale.

**17. Reihen, die Cosinusglieder und Sinusglieder nebeneinander enthalten.** Entwickelt man im Intervall $(0 \dots \pi)$ eine gerade Funktion $\varphi(x)$ nach den Cosinus oder eine ungerade Funktion $\psi(x)$ nach den Sinus der Vielfachen von $x$, so gelten die Entwicklungen von selbst auch im Intervall $(-\pi \dots 0)$. Infolgedessen kann man, wie *J. Fourier*[504]) zuerst bemerkt hat, eine für das ganze Intervall $(-\pi \dots \pi)$ gültige Entwicklung einer beliebigen Funktion $f(x)$ dadurch erhalten, daß man sie als Summe der geraden Funktion

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \tag{381}$$

und der ungeraden

$$\psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \tag{382}$$

darstellt und jeden dieser Bestandteile für sich entwickelt. Die Integralformeln für die Koeffizienten können dann vermöge der Identitäten

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos nx\,dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{0} \varphi(x) \cos nx\,dx = \int_{0}^{\pi} \varphi(x) \cos nx\,dx,$$

$$\int_{-\pi}^{0} \psi(x) \sin nx\,dx = \int_{0}^{\pi} \psi(x) \sin nx\,dx$$

in die Gestalt:

$$\left.\begin{matrix} A_n \\ B_n \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left\{\begin{matrix} \cos nx \\ \sin nx \end{matrix}\right\} dx \tag{383}$$

übergeführt werden, in der nur noch die gegebene Funktion $f(x)$ auftritt; und in dieser Gestalt können sie auch direkt durch gliedweise

504) Théorie Nr. 233 = Oeuvres 1, p. 227. In der Preisschrift von 1811 ist diese allgemeine Auseinandersetzung weggelassen, doch werden ihre Resultate benutzt. Théorie Nr. 396 = Oeuvres 1, p. 462 gibt er an, daß und wo das auf (384) beruhende Integral der Gleichung der Wärmeleitung in einem linearen Leiter sich bereits in seiner ersten Abhandlung von 1807 finde; *G. Darboux* konstatiert Oeuvres 2, p. VII, er habe alle solche Angaben mit Hilfe des inzwischen wieder aufgefundenen Manuskriptes von 1807 nachgeprüft und, wie nicht anders zu erwarten gewesen sei, richtig befunden. Die Schlußgleichung ist in der Form

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} f(\xi) \cos(nx - n\xi)\,d\xi$$

bereits ann. chim phys. 3, (1816), p. 361 mitgeteilt.

Integration der Reihe

$$f(x) = \tfrac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx \tag{384}$$

unter Berücksichtigung der Identitäten:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 \text{ für } m \neq n, \\ \pi \text{ für } m = n \neq 0, \\ 2\pi \text{ für } m = n = 0; \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx\, dx = 0 \text{ (auch für } m = n); \tag{385}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} 0 \text{ für } m \neq n, \\ \pi \text{ für } m = n \neq 0 \end{cases}$$

erhalten werden [05]).

Dieselben Formeln finden sich bei *Fr. W. Bessel*[506]), in einer dieser Zeit angehörenden, erst kürzlich veröffentlichten Niederschrift von *C. F. Gauß*[507]), sowie bei *G. Plana*[508]).

In noch einfacherer Gestalt erscheinen diese Sätze bei Benutzung komplexer Größen: Läßt sich eine Funktion $f(x)$ durch eine Reihe der Form

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{nix} \tag{386}$$

darstellen, so folgt aus der Relation:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{(m-n)ix}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ 2\pi & \text{„ } m = n \end{cases} \tag{387}$$

505) p. 230. In der Literatur der nächsten Zeit wird meist nicht diese, sondern die erste Ableitung Fouriers reproduziert; so bei *A. de Morgan*[207]) p. 777; bei *A. A. Cournot,* théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 215; bei *O. Schloemilch,* Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale, Jena 1843, p. 26; Analytische Studien 2, Leipzig 1848, p. 55; bei *M. Ohm,* System der Mathematik 9, Nürnberg 1852, p. 308.

506) Berl. Abhandl. 1816/17[18] (ges. Abhandl. 1, p. 17); Zeitschr. f. Astron. 5 (1818), p. 367. In einem Briefe an *Olbers* (Briefwechsel 2, Leipz. 1852, p. 85) wundert er sich darüber, daß die Sache nicht bekannt sei.

507) Werke 8, p. 469. Der Herausgeber erwähnt p. 603 eine Tradition, nach der *Gauß* die Formeln vor *Fourier* gehabt habe. In einem andern Nachlaßfragment (Werke 3, p. 436; vom Herausgeber p. 494 ins Jahr 1808 gesetzt) stehen nur die Formeln für die Cosinusreihe. Vgl. übrigens die Tagebuchnotiz von 1797, Nr. 87. Gauß' Bekanntschaft mit der Integraldarstellung für $A_0$ geht auch aus dem zu Beginn der „determinatio attractionis" ausgesprochenen Satze hervor (Gött. comm. rec. 4 (1818) = Werke 3, p. 333).

508) Torino mem. 25, 1820, p. 142; Ableitung wie bei Fourier.

daß

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-nix} dx \tag{388}$$

sein muß. In dieser Form erscheint der Satz bei *P. S. de Laplace*: zuerst[509]) für das von $e^{ix}$ freie, dann[510]) auch für ein beliebiges Glied einer nach beiden Seiten abbrechenden Reihe bei der Darstellung des mittelsten bzw. des allgemeinen Gliedes einer Binomial- oder Polynomialentwicklung für die Zwecke von Wahrscheinlichkeitsuntersuchungen, weiterhin[511]) für eine nur Glieder mit positivem $n$ enthaltende Reihe als ein Mittel, um aus der Darstellung der Lösung einer Differenzengleichung mittelst einer erzeugenden Funktion ihre Darstellung durch ein bestimmtes Integral abzuleiten. Später ist diese Darstellung von *A. Cauchy* viel benutzt worden[512]); selbständig scheint sie auch *A. Qu. Gregan-Craufurd*[513]) gefunden zu haben.

*H. G. v. Schmidten*[514]) erhält die Formel in der Gestalt

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \{e^{-nix} f(e^{ix}) + e^{nix} f(e^{-ix})\} dx$$

bei Gelegenheit von allgemeinen Untersuchungen über die Berechnung bestimmter Integrale durch Reihenentwicklung, durch Grenzübergang von Potenzen zu Exponentialfunktionen.

Von den Formeln dieser Nummer kommen *Deflers*[515]) und

---

509) Paris mém. 1782[85] = Oeuvres 10, p. 270; reproduziert théorie analytique des probabilités, Paris 1812, p. 152 der Ausg. von 1847 = Oeuvres 7, p. 140. Da er mit einer geraden Funktion zu tun hat, schreibt er $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}$ statt $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}$.

510) Paris mém. 10, 1809[10] = Oeuvres 12, p. 309; probab. p. 149.

511) Probab. p. 84. Er findet aber, wegen der komplexen Form könne man doch nichts damit anfangen, und wendet sich wieder anderen Darstellungsformen zu. Übrigens hat er hier $(-\pi \cdots + \pi)$ als Integrationsgrenzen.

512) Z. B. Paris C. R. 11 (1840), p. 468; 12 (1841), p. 89; 13 (1841), p. 318, 851; 15 (1842), p. 264 = Oeuvres (1) 5, p. 303; 6, p. 22, 282, 356, 7, p. 95.

513) Essay on the development of functions, Lond. 1844, p. 28.

514) Ann. de math. 12 (1822), p. 216; in wenig veränderter Gestalt disqu. de seriebus et integr. def., Havniae 1825 (nach dem Bericht Bull. Férussac 6 (1826), p. 105). Er geht von der Auffassung der Integration als einer distributiven Funktionaloperation (II A 11, *Pincherle*, Nr. 6, p. 768) aus.

515) Bull. philomat. 1819, p. 165.

*Poisson*[516]) zu denjenigen der vorigen zurück, indem sie die ersteren auf eine Funktion anwenden, die im Intervall $(0 \dots \pi)$ mit $f(x)$, im Intervall $(-\pi \dots 0)$ mit 0 identisch ist, und die so erhaltene Gleichung mit der entsprechenden Entwicklung von $f(-x)$ verbinden.

Einfacher kann dieser Rückweg dadurch gefunden werden, daß man die ersteren auf eine gerade bzw. ungerade Funktion anwendet. Mit dieser Auseinandersetzung hat *W. Thomson* (Lord *Kelvin*), der eine Bemerkung darüber bei Fourier vermißte, seine wissenschaftliche Tätigkeit eröffnet[517]).

Daß man, wenn man in den Integralen (383) statt von 0 bis $2\pi$ nur von 0 bis $\pi$ integriert, die Entwicklung einer Funktion erhält, die von 0 bis $\pi$ gleich $f(x)$, von $\pi$ bis $2\pi$ gleich 0 ist, verifiziert *A. de Morgan*[518]) noch mit Hilfe derjenigen für das Intervall $(0 \dots \pi)$ geltenden Entwicklungen von $f(x)$, die nur Sinus- oder nur Cosinusglieder enthalten.

Ersetzt man in den Gleichungen (383) die Variable $x$ durch $\frac{\pi x}{l}$, also die Integrationsgrenzen durch $\pm l$, und schreibt dann für $f\left(\frac{x}{l}\right)$ wieder $f(x)$, so erhält man die für $-l < x < +l$ gültige Formel:

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos \frac{n\pi x}{l} + B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right], \tag{389}$$

mit:

$$\left.\begin{matrix} A_n \\ B_n \end{matrix}\right\} = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(\alpha) \left\{\begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\right\} \frac{n\pi\alpha}{l} \, d\alpha. \tag{390}$$

Man kann auch noch den Anfangspunkt der Abszissen verlegen und dann schreiben:

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos \frac{2n\pi x}{b-a} + B_n \sin \frac{2n\pi x}{b-a} \right], \quad a < x < b, \tag{391}$$

mit:

$$\left.\begin{matrix} A_n \\ B_n \end{matrix}\right\} = \frac{2}{b-a} \int_{a}^{b} f(\alpha) \left\{\begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\right\} \frac{2n\pi\alpha}{b-a} \, d\alpha. \tag{392}$$

Die erste Umformung ist von *Fourier*[519]) angegeben; sonst[520]) werden

516) J. Éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 424; 19 (1823), p. 436; chaleur p. 191.

517) Cambr. math. j. $2_6$ (1841), p. 258 (P.Q.R. gezeichnet) = Math. phys. papers 1, p. 1. Die Sache ist bei ihm etwas umständlicher ausgedrückt, da er nicht $-\pi$ und $+\pi$, sondern 0 und $2\pi$ als Integrationsgrenzen hat.

518) Diff. and int. calc, London 1836/42, p. 777.

519) Preisschrift von 1811, p. 329; théorie Nr. 234 = Oeuvres 1, p. 231.

die Formeln auch vielfach gleich in dieser Gestalt abgeleitet; in der zweiten Gestalt erscheinen die Formeln bei *A. Cauchy*[521]).

**18. Entwicklung nach den Funktionen der ungeraden Vielfachen des Arguments.** a) Die Reihen von Nr. 5 enthalten nur ungerade Vielfache des Arguments, wenn der Exponent eine ungerade Zahl ist. Ist er eine positive solche Zahl, so brechen sie ab; ist er eine negative, so divergieren sie; so schon die beiden von *L. Euler* gleich bei seiner ersten Beschäftigung mit solchen Reihen angegebenen[522]):

$$\cos x - \cos 3x + \cos 5x - + - \cdots = \frac{1}{2\cos x}, \tag{393}$$

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + + + \cdots = \frac{1}{2\sin x}. \tag{394}$$

Dieselben Reihen und außerdem die beiden ebenfalls divergenten:

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + + + \cdots = 0, \tag{395}$$

$$\sin x - \sin 3x + \sin 5x - + - \cdots = 0 \tag{396}$$

erhält er auch noch, indem er in den Gleichungen (4), (5) $x = 2a$ setzt[523]). In der Literatur der folgenden Jahrzehnte treten sie dann häufig auf; so bei *A. J. Lexell*[524]), bei *Klügel*[525]), bei *Tralles*[526]), bei *S. D. Poisson*[527]), bei *J. A. Eytelwein*[528]), bei *H. Breen*[529]), bei *R. Lobatto*[530]).

b) Allgemein treten nur Funktionen der ungeraden Vielfachen des Arguments auf, wenn eine der Gleichung $f(\pi - x) = -f(x)$ genügende Funktion nach den Cosinus, oder eine der Gleichung $f(\pi - x) = f(x)$ genügende nach den Sinus der Vielfachen des Arguments entwickelt wird. Derartige Entwicklungen können also dadurch erhalten

---

520) Z. B. bei *Poisson,* J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 433.

521) Exerc. de math. 2, 1827 = Oeuvres (2) 7, p. 410; vgl. dazu die Bemerkungen p. 429. Bei *O. Schloemilch*, analytische Studien 2, Leipz. 1848, p. 57 ist zwar $b$ auch beliebig, aber $a$ gleich Null genommen.

522) Petrop. n. comm. 5 (1754/55[60]), p. 169, 172.

523) Ib., p. 203.

524) Ib., 18 (1773), p. 44, 49.

525) Mathematisches Wörterbuch 2, Leipz. 1805, p. 588.

526) Berlin Abhandl. 1812/13[16], p. 239.

527) J. éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 315; 19 (1823), p. 409. Die Reihe (396) erscheint auch in der 2. (nicht in der 1.) Auflage von *Poissons* traité de mécanique 1, Paris 1833, p. 638 als Entwicklung einer Funktion, die im Intervalle $(0 \ldots \pi)$ überall gleich Null ist, außer bei $x = \pi/2$.

528) Grundlehren der höheren Analysis 1, Berlin 1824, p. 451.

529) Treatise on the summation of series, Belfast 1827, p. 83; vgl. aber Note 84).

530) Recherches [15]), p. 3, 5.

werden, daß die Entwicklung irgendeiner Funktion $f(x)$ mit der von $f(\pi - x)$ durch Subtraktion bzw. Addition verbunden wird. In dieser Weise hat bereits *J. Landen* aus der Gleichung (110) erhalten[531]):

$$(397) \qquad \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + + + \cdots = \frac{\pi}{4};$$

aus der Gleichung (113)[532]):

$$(398) \qquad \cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + + + \cdots = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$$

aus der Gleichung (14)[533]):

$$(399) \qquad r\cos x + \frac{r^3}{3}\cos 3x + \frac{r^5}{5}\cos 5x + + + \cdots = \frac{1}{4}\log\frac{1 + 2r\cos x + r^2}{1 - 2r\cos x + r^2};$$

und aus (320) und (323)[534]):

$$(401) \qquad \frac{\cos 3x}{1^2\cdot 2^2} + \frac{\cos 5x}{2^2\cdot 3^2} + \frac{\cos 7x}{3^2\cdot 4^2} + + +$$
$$= 4\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin x + \left(\frac{\pi^2}{3} - 2\pi x + 2x^2 - 3\right)\cos x,$$

$$(402) \qquad \frac{\cos 3x}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2} + \frac{\cos 5x}{3^2\cdot 5^2\cdot 7^2} + \frac{\cos 7x}{5^2\cdot 7^2\cdot 9^2} + + +$$
$$= \frac{3\pi}{256}\sin 2x + \frac{\pi}{128}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos 2x - \frac{1}{9}\cos x + \frac{\pi}{128}(\pi - 2x).$$

Andere Reihen dieser Art erhält er durch Anwendung des Verfahrens der Nr. 2 auf Potenzreihen, die nur Glieder mit ungeraden Exponenten enthalten, so aus der Reihe für arc tg $z$[535]):

$$(403) \qquad \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - + - \cdots = \frac{\pi}{4};$$

und in ähnlicher Art[536]):

$$(404) \qquad r\sin x - r^3\sin 3x + r^5\sin 5x - + - \cdots = \frac{(1-r)\sin x}{(1-r)^2 + 4r\cos^2 x},$$

$$(405) \qquad r\cos x - r^3\cos 3x + r^5\cos 5x - + - \cdots = \frac{(1+r)\cos x}{(1-r)^2 + 4r\cos^2 x}$$

---

531) Math. memoirs 1, Lond. 1780. p. 70.

532) p. 74.

533) p. 104; für $r = 1$ schon p. 81, aus Gleichung (144). Vertauschung von $x$ mit $\pi - x$ ist hier gleichbedeutend mit Vertauschung von $r$ mit $-r$. Für $r = 1$ steht die Reihe auch bei *Tralles,* Berlin Abh. 1812/13[16], p. 233.

534) p. 78, 79.

535) p. 80.

536) p. 100, 102. Die Reihe (407) ebenso bei *L. Euler,* Petersb. mém. 5 (1812[15]), p. 65 (von 1780), die Reihe (406) bei *Querret* ann. de math. 13 (1822/23), p. 354 (ihre Summation war ib. p. 247 als Aufgabe gestellt worden). Bedenken, die man gegen das Rechnen mit trigonometrischen Funktionen imaginären Arguments haben könnte, glaubt er p. 393 dadurch beseitigen zu können, daß er in die Integraldarstellung der cyklometrischen Funktionen eine komplexe Variable

und daraus durch Integration:

$$(406)\quad r\cos x - \frac{r^3}{3}\cos 3x + \frac{r^5}{5}\cos 5x - + - = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2r\cos x}{1-r^2},$$

$$(407)\quad r\sin x - \frac{r^3}{3}\sin 3x + \frac{r^5}{5}\sin 5x - + - = \frac{1}{4}\log\frac{1+2r\,|\cos x|+r^2}{1-2r\,|\cos x|+r^2};$$

oder durch eine geeignete Modifikation des Verfahrens, das ihn zu den Reihen (320)—(324) führt, so aus dem Integral

$$\frac{1}{2i\sqrt{z}}\int\limits_1^z \frac{1}{z}\int\limits_1^z\int\limits_1^z \frac{\log(1+z)}{z}\,dz^3$$

die Reihe[537]):

$$(408)\quad \frac{\sin 3x}{1^2\cdot 2^2} - \frac{\sin 5x}{2^2\cdot 3^2} + \frac{\sin 7x}{3^2\cdot 4^2} - + - \cdots = \left(\frac{\pi^2}{6} - 2x^2 + 3\right)\sin x - 4x\cos x.$$

c) Die Formel:

$$(409)\qquad \frac{\pi x}{4} = \sin x - \frac{\sin 3x}{9} + \frac{\sin 5x}{25} - + - \cdots$$

hat *L. Euler*[538]) durch Spezialisierung von $\nu$ aus seiner allgemeineren Gleichung (141) erhalten; Differentiation gibt ihm die Gleichungen

$$(410)\qquad \frac{\pi}{4} = \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - + - \cdots$$

und (396), Integration:

$$(411)\qquad \frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi^2}{4} - x^2\right) = \cos x - \frac{\cos 3x}{27} + \frac{\cos 5x}{125} - + - \cdots$$

*Fourier* leitet die Gleichung (410) zunächst auf dem in Nr. 15 zu besprechenden Wege ab; nachher verifiziert er sie noch mit Hilfe

---

einführt. Die Reihen (406) und (407) stehen auch bei *J. Dienger,* J. f. Math. 34 (1847), p. 241 (von 1845); (407) auch bei *M. Ohm,* System der Mathematik, 8, Nürnb. 1851, p. 126; 9 (1852), p. 323.

537) Landen p. 75.

538) Opusc. analyt. 1, Petrop. 1783, p. 173 (von 1772). Daß die Gleichung nur für

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

richtig ist, während für

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$$

der Wert der rechten Seite

$$\frac{\pi}{4}(\pi - x)$$

ist, bemerkt erst *Fourier* Paris mém. 4 (1819/20[24]), p. 314; ann. chim. phys. 3 (1816), p. 362; théorie de la chaleur Nr. 228 = Oeuvres 1, p. 221, ebenso *Poinsot* [117]) und *Peacock,* Brit. assoc. rep. 3, f. 1833, p. 253.

der Gleichung[539])

$$(412)\quad \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - + - \cdots - \frac{(-1)^N}{2N-1}\cos(2N-1)x$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin 2N\alpha}{\cos\alpha}\,d\alpha$$

und mit Hilfe der Arcustangensreihe[540]). Die Reihe (398) gewinnt er mit Hilfe der Integraldarstellung der Koeffizienten[541]). Durch Integration erhält er noch (409)[542]).

Sonst werden alle diese Reihen vielfach aus der Integraldarstellung der Koeffizienten abgeleitet; so bei *D. F. Gregory*[543]), *J. M. C. Duhamel*[544]), *O. Schloemilch*[545]), *M. Ohm*[546]). *V. A. Lebesgue*[547]) beweist die Richtigkeit von (397) für $x/\pi =$ einem irreduzibeln Bruch mit durch 4 teilbarem Nenner direkt mit Hilfe der Partialbruchzerlegung der trigonometrischen Funktionen und der Summenformeln II A 9a (3).

---

539) Paris mém. 4 (1818/20[24]) (Preisschrift von 1811), p. 270; Théorie Nr. 179 = Oeuvres 1, p. 159. — Er bemerkt (Preisschrift p. 273; Théorie Nr. 184 = Oeuvres 1, p. 164), daß man auch die Gleichung (397), — die er irrtümlicherweise für neu hält — so gewinnen könne; die Ausführung dieser Rechnung findet sich bei *Deflers,* Bull. philomat. 1819, p. 163. Das Gültigkeitsintervall bestimmt sich, wie Fourier bemerkt, bei diesem Verfahren dadurch, daß nicht über eine Unendlichkeitsstelle weg integriert werden darf; *S. Earnshaw* (Cambr. trans. $8_3$, 1847, p. 267) bestimmt es durch Grenzübergang von der Reihe $\sum \pm \frac{r^n}{n}\cos nx$ her.

540) Ann. chim. phys 3 (1816), p. 360; Théorie Nr. 189 = Oeuvres 1, p. 169. Er benutzt übrigens nicht die Entwicklung von arc tg $z$ selbst, sondern die von arc tg $z$ + arc tg $z^{-1}$ obwohl er selbst bemerkt, daß diese für alle reellen $z$ divergiert. Die Ableitung aus der Arcustangensreihe auch bei *R. Lobatto,* Recherches [28]), p. 9 und bei *M. Ohm,* System der Mathematik 8, Nürnberg 1851, p. 126.

541) Preisschrift p. 305, 310; Théorie Nr. 222, 225 = Oeuvres 1, p. 212, 216; ebenso *G. Frullani,* Ricerche sopra le serie, Firenze 1815, p. 61. Mem. soc. ital. 18 (1820), p. 517 (von 1818) gibt Frullani die Reihe als Beispiel für die zweite seiner hier in Nr. 15 besprochenen Methoden.

542) Preisschrift p. 272; Ann. chim. phys. 3 (1816), p. 362; Théorie Nr. 181 = Oeuvres 1, p. 161.

543) Cambr. math. J. $1_3$, 1838, p. 117.

544) Cours d'analyse 2, Paris 1840, p. 170.

545) Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale, Jena 1843, p. 18, 22; analytische Studien 2, Leipz. 1843, p. 43, 45.

546) System der Mathematik, 9. Nürnb. 1852, p. 322.

547) J. de math. 15 (1850), p. 235.

Indem er dann $x$ durch $x+\frac{\pi}{2}$ und durch $x+\frac{3\pi}{2}$ ersetzt, erhält er die Summen der Reihen,

$$(413)\qquad \begin{gathered}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1},\\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.\end{gathered}$$

Daß die Summen der Reihen

$$(414)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(2n+1)x}{(2n+1)^{2m}},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(2n+1)x}{(2n+1)^{2m+1}}$$

für jedes positive ganzzahlige $m$ gleich rationalen ganzen Funktionen von $x$ sind, zeigt *J. Fr. Pfaff*[548]) auf dem in Nr. 7 erwähnten Wege, *A. M. Legendre*[549]) durch Entwicklung beider Seiten der Gleichungen (437) und (438) nach Potenzen von $\mu$ und Koeffizientenvergleichung. *A. L. Cauchy* gewinnt die ersten von ihnen aus der Integraldarstellung der Koeffizienten; allgemeine Ausdrücke ihrer Summen durch Residuenformeln erhält er[550]), indem er die Formeln (119), (120) (vgl. (125)) mit den aus ihnen durch die Substitution von $2x$ für $x$ entstehenden verbindet. Daß die Koeffizienten dieser ganzen Funktionen von $x$ sich durch die Summen

$$(415)\qquad 1^m-2^m+3^m-4^m+-\cdots\pm x^m$$

ausdrücken lassen, scheint zuerst *J. Dienger*[551]) bemerkt zu haben; wird zur Abkürzung

$$(416)\qquad 1-\frac{1}{3^{2m+1}}+\frac{1}{5^{2m+1}}-\frac{1}{7^{2m+1}}+-+\cdots=\mathrm{F}_m$$

---

548) Versuch einer neuen Summationsmethode, Berlin 1788, p. 38.

549) Exerc. de calcul int. 2 (1817), p. 170 (publ. 1815); ebenso *S. D. Poisson,* J. Éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 313, der es übrigens bequemer findet, sie von der divergenten Reihe (395) aus durch sukzessive Integrationen zu erhalten. Später (mécanique 1, p. 651) bestimmt er die Koeffizienten für $2m=2$ mit Hilfe der Integraltheoreme und integriert erst dann. Wenn er ib. 2, p. 345 die Reihe für $2m+1=1$ nicht direkt aus dem Integraltheorem ableitet, sondern dieses erst auf die Funktion $x$ anwendet und dann differentiiert, so beruht das auf den unter [1083]) erwähnten Bedenken. Die aus diesen Formeln sich ergebenden Entwicklungen der Potenzen von $x$ direkt aus der Integraldarstellung der Koeffizienten bei *W. R. Hamilton,* Dubl. trans. 19 (1843), p. 297.

550) Exerc. de math. 2, 1827 = Oeuvres (2) 7, p. 420.

551) J. f. Math. 34 (1847), p. 95; in anderer Form p. 97.

gesetzt, so lauten seine Gleichungen:

$$(417)\quad (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2n+1)x}{(2n+1)^{2m+1}} = \frac{\pi}{4}\frac{x^{2m}}{(2m)!} + F_1 \frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} + F_2 \frac{x^{2m-4}}{(2m-4)!} + \cdots + F_m,$$

$$(418)\quad (-1)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(2n+1)x}{(2n+1)^{2m+1}} = \frac{\pi}{4}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + F_1 \frac{x^{2m-3}}{(2m-3)!} + F_2 \frac{x^{2m-5}}{(2m-5)!} + \cdots + F_{m-1}x.$$

Die Summen lassen sich ihrerseits aus den in Nr. 7 besprochenen Bernoullischen Funktionen und den Summen

$$(419)\qquad 1^m + 3^m + 5^m + \cdots + \left[\frac{x-1}{2}\right]^m$$

ableiten. Für die letzteren geben *J. Fr. W. Herschel*[552]) und *H. Breen*[553]) Ausdrücke vermittelst der Differenzen der Null; für die ersteren selbst gibt *Oettinger*[554]) kombinatorische Ausdrücke.

*O. Schloemilch*[555]) erhält aus den Formeln von Nr. 7 durch endliche Summation

$$(420)\qquad \frac{\pi}{4h}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos(2n+1)h}$$
$$0 < (x+h) < \pi, \quad -\frac{\pi}{2} < h < \frac{\pi}{2}.$$

d) Die Entwicklungen der Potenzen von $\cos x$ oder von $\cos 2x$ nach den Cosinus der ungeraden Vielfachen von $x$ erhält *A. Cauchy*[556]) durch geeignete Kombination von speziellen Fällen seiner allgemeinen Formel (421).

Für die Potenzen von $\cos\frac{x}{2}$ und $\sin\frac{x}{2}$ finden sich derartige Entwicklungen bei *E. E. Kummer*[557]).

e) *A. Cauchy*[558]) erhält durch Kombination der Entwicklung (96) mit derjenigen, die aus ihr durch Ersetzung von $\alpha$ durch $2\alpha$ hervorgeht, die folgende Entwicklung der Potenzen von $\cos^m x$ nach den

552) Collection of examples (221), p. 52 der Übersetzung.

553) Treatise (221), p. 21.

554) J. f. Math. 16 (1837), p. 187.

555) Theorie der Differenzen und Summen, Halle 1848, p. 129. Muß $x$ ein ganzzahliges Vielfaches von $h$ sein?

556) Exerc. de math. 2, 1827 = Oeuvres (2) 7, p. 424.

557) J. f. Math. 14 (1835), p. 119.

558) Exerc. de math. 2, 1827 = Oeuvres (2) 7, p. 424.

Cosinus der ungeraden Vielfachen von $\alpha x$:

$$(421)\quad \cos^m x = \frac{\alpha\,\Gamma(m+1)}{2^{m-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\alpha x}{\Gamma\left(\frac{m+(2n+1)\alpha}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m-(2n+1)\alpha}{2}+1\right)}$$
$$\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right);$$

speziell für $\alpha = 1$ außer [Eulers] Gleichung (361) noch:

$$(422)\quad \cos^2 x = \frac{8}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 3x}{1\cdot 3\cdot 5} - \frac{\cos 5x}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{\cos 7x}{5\cdot 7\cdot 9} - + - \cdots\right],$$

und für $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$(423)\quad \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \cos x + \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + + - - \cdots$$
$$\left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right),$$

$$(424)\quad \frac{\pi\cos 2x}{4\sqrt{2}} = \frac{\cos x}{3} + \frac{\cos 3x}{1\cdot 5} + \frac{\cos 5x}{3\cdot 7} - \frac{\cos 7x}{5\cdot 9} - \frac{\cos 9x}{7\cdot 11} + + - - \cdots$$
$$\left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right).$$

*E. E. Kummer*[559]) gewinnt Formeln derselben Art, zunächst für $\alpha = 1$, indem er die Entwicklungen der Potenzen von $\cos x$ nach den Cosinus der geraden Vielfachen von $x$ noch mit $\cos x$ multipliziert und die Produkte trigonometrischer Funktionen in Summen verwandelt; so erhält er:

$$(425)\quad \left.\begin{array}{l}|2\cos x|^m\\ |2\sin x|^m\end{array}\right\} = \frac{\Gamma(m+2)}{\left(\Gamma\left(\frac{m+3}{2}\right)\right)^2}\left[\left\{\begin{array}{l}\cos\\ \sin\end{array}\right\} x + \frac{m-1}{m+3}\left\{\begin{array}{l}\cos\\ \sin\end{array}\right\} 3x \right.$$
$$\left. + \frac{(m-1)(m-3)}{(m+3)(m+5)}\left\{\begin{array}{l}\cos\\ \sin\end{array}\right\} 5x + \cdots\right],$$

wodurch die Bestimmung des Koeffizienten $B$ in Poissons Gleichung (62) geleistet ist. Die Annahme $m = 0$ gibt wieder die Gleichungen (397), (403), $m = 2$ gibt (422).

Weiterhin[560]) kommt er, indem er die Gleichungen (425) miteinander multipliziert, dann rechts die Produkte trigonometrischer Funktionen in Summen verwandelt und schließlich noch $x$ durch $\frac{\pi}{2} - x$ ersetzt, zu Entwicklungen der Potenzen von $\cos 2x$ und $\sin 2x$ nach den Cosinus oder Sinus der ungeraden Vielfachen von $x$;

559) Preisschrift Halae 1832, p. 13; J. f. Math. 14 (1835), p. 111, 121.

560) Preisschrift Halae p. 19. Die Gleichungen (426) und (428) sind insofern vollständiger als (423) und (424), als sie die Summen der Reihen auch außerhalb der dort allein berücksichtigten Intervalle angeben.

speziell zu den folgenden:

$$(426)\qquad \cos x + \frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + + - - \cdots$$
$$= \begin{cases} \frac{\pi}{4}\sqrt{2} & \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right), \\ 0 & \left(\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}\right); \end{cases}$$

$$(427)\qquad \sin x - \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + - - + \cdots$$
$$= \begin{cases} \frac{\pi}{4}\sqrt{2} & \left(\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}\right), \\ 0 & \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right); \end{cases}$$

$$(428)\qquad \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 3x}{1\cdot 5} + \frac{\cos 5x}{3\cdot 7} - \frac{\cos 7x}{5\cdot 9} - \frac{\cos 9x}{7\cdot 11} + + - - \cdots\right]$$
$$= \begin{cases} \cos 2x & \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right), \\ 0 & \left(\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}\right); \end{cases}$$

$$(429)\qquad \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1\cdot 3} - \frac{\sin 3x}{1\cdot 5} + \frac{\sin 5x}{3\cdot 7} + \frac{\sin 7x}{5\cdot 9} - - + + \cdots\right]$$
$$= \begin{cases} \cos 2x & \left(\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}\right), \\ 0 & \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right); \end{cases}$$

$$(430)\qquad \frac{8}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1\cdot 3} - \frac{\cos 3x}{1\cdot 5} - \frac{\cos 5x}{3\cdot 7} - \frac{\cos 7x}{5\cdot 9} - - - \cdots\right] = \sin 2x$$
$$(0 < x < \pi),$$

$$(431)\qquad \frac{8}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1\cdot 3} + \frac{\sin 3x}{1\cdot 5} - \frac{\sin 5x}{3\cdot 7} + \frac{\sin 7x}{5\cdot 9} - + -\right] = \sin 2x$$
$$\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

Wiederholung des Verfahrens führt zu entsprechenden Entwicklungen der Potenzen von $\cos 2^r x$ und $\sin 2^r x$ für beliebige ganzzahlige $r$[561]).

Andererseits erhält er, indem er immer wieder die Funktionen des ganzen durch die des halben Winkels ausdrückt, auch Entwicklungen von $\cos \frac{x}{2^r}$ nach den Cosinus der ungeraden Vielfachen von $x$; speziell[562]):

561) Ib. p. 21; ausführlicher J. f. Math. 14 (1835), p. 114.

562) Ib. p. 30. Von den entsprechenden Formeln für die Potenzen der Cosinus solcher Winkel gibt er nur den Weg zu ihrer Ableitung und eine Integraldarstellung der Koeffizienten.

$$(432)\quad \cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{\cos 3x}{5\cdot 6\cdot 7} + \frac{\cos 5x}{9\cdot 10\cdot 11} - \frac{\cos 7x}{13\cdot 14\cdot 15} + - + \cdots\right] \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(433)\quad \cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\left[\frac{2\sqrt{2}-1}{1\cdot 2\cdot 3}\cos x + \frac{6\sqrt{2}+1}{5\cdot 6\cdot 7}\cos 3x + \frac{10\sqrt{2}-1}{9\cdot 10\cdot 11}\cos 5x + + + \cdots\right] \quad \left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right).$$

Andere Formeln dieser Art hat Kummer aus der Theorie der hypergeometrischen Reihen erhalten; so die folgende[563])

$$(434)\quad \cos x\, F\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 x\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-\beta}{2}\right)}\left[\cos x + \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha-3)(\beta-3)}\cos 3x + \frac{(\alpha+1)(\alpha+3)(\beta+1)(\beta+3)}{(\alpha-3)(\alpha-5)(\beta-3)(\beta-5)}\cos 5x + \cdots\right].$$

Wird in ihr speziell $\alpha = -\beta = \mu$ genommen und $x$ durch $\frac{\pi}{2} - x$ ersetzt, so ergibt sie (432).

f) Die Entwicklungen

$$(435)\quad \frac{\pi}{4}\,\frac{\sin\mu x}{\mu\cos\frac{\mu\pi}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2-\mu^2},$$

$$(436)\quad \frac{\pi}{4}\,\frac{\cos\mu x}{\cos\frac{\mu\pi}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2-\mu^2},$$

$$(437)\quad \frac{\pi}{4}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\mu x}{\mu\,\mathfrak{Cos}\frac{\mu\pi}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2+\mu^2},$$

$$(438)\quad \frac{\pi}{4}\,\frac{\mathfrak{Cos}\,\mu x}{\mathfrak{Cos}\frac{\mu x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2+\mu^2}$$

hat schon *J. Fr. Pfaff* auf ähnlichem Wege wie die Summen (279) erhalten[564]). Als Partialbruchzerlegungen der als Funktionen von $\mu$

563) J. f. Math. 15 (1836), p. 170.

564) Versuch einer neuen Summationsmethode, Berlin 1788, p. 45, 52 Wenn $\mu$ eine ungerade ganze Zahl ist, werden die beiden ersten Formeln illusorisch; ist es eine gerade, so werden sie mit den später von *G. Frullani*[409]) gegebenen identisch.

betrachteten linken Seiten treten sie bei *A. M. Legendre*[565]), bei *A. Cauchy*[566]) und bei *A. de Morgan*[567]) auf. Letzterer hat übrigens an Stelle von (438):

$$(439)\qquad \frac{\pi}{4\mu^2}\left(1-\frac{\mathfrak{Cof}\,\mu x}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\mu\pi}{2}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\,\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2+\mu^2}.$$

*S. D. Poisson*[568]) gewinnt die Gleichung (438), indem er in (282) $x$ durch $x+\frac{\pi}{2}$ ersetzt und die Resultate verbindet.

g) *R. Lobatto*[569]) hat die Gleichungen:

$$(440)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}\begin{Bmatrix}\cos(2n+1)x\\ \sin(2n+1)x\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathfrak{Sin}\\ \mathfrak{Cof}\end{Bmatrix}(r\cos x)\,\sin(r\cos x).$$

Bei *J. Fr. Encke*[570]) erscheinen die Reihen (406) und (407) in den Formen:

$$(441)\qquad \begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\cos\delta\,\sin\varepsilon\,\cos x}{\cos\varepsilon\pm\sin\delta}\right)\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\mp\frac{\delta}{2}\right)\right)^{2n+1}\cos(2n+1)x,\end{aligned}$$

$$(442)\qquad \tfrac{1}{4}\log\frac{1+\sin v\cos x}{1-\sin v\cos x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}(\operatorname{tg}v)^{2n+1}\cos(2n+1)x,$$

sowie noch in verschiedenen ähnlichen.

*J. L. Raabe*[571]) gibt die Gleichung:

---

565) Exerc. de math. 2 (1817), p. 169 (publ. 1815).

566) Zuerst Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 472 (von 1814), dann mit vervollständigtem Beweis Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 380, 384. Auch aus den ib. p. 421 gegebenen Entwicklungen von $e^{\mu x}$ würden sich (437) und (438) durch geeignete Kombination ableiten lassen.

567) Differential and integral calculus, Lond. 1836/42, p. 669.

568) J. Éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 312; *O. Schloemilch,* Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale. Jena 1843, p. 24, gewinnt in analoger Weise die Formel (382).

569) Recherches [38]), p. 15.

570) Astr. Nachr. 24, 1846, col. 161.

571) Differential- und Integralrechnung $2_1$, Zürich 1843, p. 388. Er stellt zuerst eine Funktion, die die angegebenen Werte nur in dem Intervall

$$\left(-\frac{4n+1}{2}\pi\cdots\frac{4n+1}{2}\pi\right)$$

hat, außerhalb desselben überall Null ist, durch ein Fouriersches Integral dar und führt in diesem den Grenzübergang zu $n=\infty$ mittels der Poissonschen Formel (292) aus. Für $0<x<\pi/2$ läßt sich die Gleichung durch Division mit $\sin x-\cos x$ in die Entwicklung (397) überführen (p. 389).

$$(443)\quad \begin{aligned}&\frac{\pi}{2}(\cos x+\sin x)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}[\cos(4n+1)x-\cos(4n+3)x\\&\qquad-\sin(4n+1)x-\sin(4n+3)x]\\&=\begin{cases}\pi\sin x & \text{für}\quad k\pi<x<k\pi+\frac{\pi}{2},\\ \pi\cos x & \quad,,\quad k\pi+\frac{\pi}{2}<x<(k+1)\pi.\end{cases}\end{aligned}$$

*J. Dienger* stellt die Aufgabe[572]), die folgenden Gleichungen zu beweisen:

$$(444)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(2n+1)x}{(2n+1)\cdot 2n}=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\sin x-\frac{\cos x}{4}\log(2+2\cos 2x),$$

$$(445)\quad \begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(2n+1)x}{(2n+1)\cdot 2n}&=-\frac{x}{2}\cos x+\frac{1}{4}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\\&\quad+\frac{\sin x}{4}\log(2+2\cos x),\end{aligned}$$

$$(446)\quad \begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}\,\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)\cdot 2n}&=\arcsin\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}\\&\quad+\sqrt{2\sin x}\,\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-\cos x,\end{aligned}$$

$$(447)\quad \begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}\,\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)\cdot 2n}&=\log\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{\sin x}\right)\\&\quad-\sqrt{2\sin x}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+\sin x;\end{aligned}$$

ferner[573]):

$$(448)\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n r^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+3)}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(2n+1)x=$$

$$\mathfrak{Cos}(r\sin x)\left[\pm\frac{1}{r^2}\sin(r\cos x)\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(2x)\mp\frac{1}{r}\cos(r\cos x)\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}x\right]$$

$$+\mathfrak{Sin}(r\sin x)\left[\frac{1}{r^2}\cos(r\cos x)\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}(2x)+\frac{1}{r}\sin(r\cos x)\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}x\right].$$

*C. J. Malmsten*[574]) hat die Gleichungen:

$$(449)\quad \begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\log(2n+1)}{2n+1}\sin(2n+1)\pi x=\\&\frac{\pi}{2}\log\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\frac{1}{2})}-\frac{\pi}{4}\left(C-\log(2\pi\operatorname{tg}\pi x)\right),\end{aligned}$$

572) Arch. Math. Phys. 8 (1846), p. 214; Beweis mit der Methode von Nr. 2 J. f. Math. 38 (1849), p. 348 (von 1845).

573) Arch. Math. Phys. 11 (1848), p. 224.

574) J. f. Math. 38 (1849), p. 25, 39 (von 1846). $C$ hat dieselbe Bedeutung wie Note 473.

$$(450)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \log(2n+1)}{2n+1} \cos(2n+1)\pi x = \qquad (|x| < 2)$$
$$-\frac{\pi}{2} \log\left[\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{2}\right)\right] + \frac{\pi}{4}(\log \pi - C - \log\cos \pi x);$$

sowie[575]):

$$(451)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2n+1)x}{(2n+1)^{1-s}}$$
$$= \frac{\sin\frac{s\pi}{2}\Gamma(s)}{2^{1-s}} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{[(2n+1)\pi - 2x^s]} + \frac{1}{[2(n+1)\pi + 2x)^s}\right]$$

$$(452)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^{1-s}} = \frac{\sin\frac{s\pi}{2}\Gamma(s)}{2^{1-s}}$$
$$\left[\frac{1}{(2x)^s} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n\pi - 2x)^s} - \frac{1}{(2n\pi + 2x)^s}\right]\right].$$

**h**) Die allgemeine Bestimmung der Koeffizienten derartiger Reihenentwicklungen, also die Doppelformel

$$(453)\quad f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} (2n+1)\pi x \int_0^{\pi} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} (2n+1)\pi\alpha f(\alpha)\, d\alpha$$

findet sich bei *S. D. Poisson*[576]), bei *A. Cauchy*[577]), bei *W. R. Hamilton*[578]), bei *J. Dienger*[579]), bei *M. Ohm*[580]). Für die Cosinusreihe steht sie auch in dem Referat von *P*[*oisson*][581]) über Fouriers erste nicht veröffentlichte Abhandlung; bei Fourier selbst kommt sie nicht explizite vor.

575) p. 36.

576) J. Éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 425; mécanique 1, p. 649; chaleur p. 193. Er sagt, die Cosinusformel setze $f'(0) = 0$, $f(\pi) = 0$, die Sinusformel $f(0) = 0$, $f'(\pi) = 0$ voraus.

577) Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 427. *E. E. Kummers* Behauptung (Preisschrift Halae 1832, p. 16; J. f. Math. 14 (1835), p. 112), in solchen Entwicklungen ließen sich die Koeffizienten nicht durch bestimmte Integrale ausdrücken, scheint auf einer zu engen Auffassung des Integralbegriffs zu beruhen.

578) Dubl. Trans. 19 (1843), p. 297.

579) J. f. Math. 34 (1847), p. 89.

580) System der Mathematik 9, Nürnberg 1852, p. 322.

581) Bull. philomat. 1 (1807), p. 115 = Oeuvres de Fourier 2, p. 219. Es ist das übrigens das einzige von den auf Reihenentwicklungen und Integraldarstellungen sich beziehenden Resultaten Fouriers, das in diesem Referat erwähnt ist, und nicht eben geeignet, eine volle Vorstellung der Tragweite von Fouriers Methoden zu geben.

i) Durch Wiederholung des Verfahrens, das zu solchen Entwicklungen führt, können auch Reihen erhalten werden, in denen der Summationsbuchstabe nur die zu 1 oder die zu 3 (mod. 4) kongruenten Werte durchläuft; usw. So gibt *Landen*[582]) die Gleichungen:

$$(454)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{4n+1}}{4n+1} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} (4n+1)x = \frac{1}{8}\log\frac{1+2r\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}x+r^2}{1-2r\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}x+r^2} + \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{2r\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}x}{1-r^2},$$

$$(455)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{4n+3}}{4n+3} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} (4n+3)x = \pm\frac{1}{8}\log\frac{1+2r\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}x+r^2}{1-2r\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}x+r^2} \pm \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{2r\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}x}{1-r^2}.$$

Andere derartige Reihen erhält er, indem er in geeigneten Kombinationen der Gleichungen 37 und den aus ihnen durch Integration hervorgehenden $m$ gleich einer negativen ganzen Zahl setzt; so z. B.[583]):

$$(456)\qquad \sin x - \frac{\sin 7x}{3\cdot 7} + \frac{4\sin 13x}{3\cdot 6\cdot 13} - \frac{4\cdot 7\sin 19x}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 19} + - + \\ = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^6}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\cos x}\sqrt[3]{4\cos^2 x - 3}}.$$

k) Natürlich kann man durch Verbindung der Entwicklung einer Funktion $f(x)$ mit der von $f(-x)$ auch Reihen erhalten, in welchen nur die geraden Vielfachen des Arguments auftreten. So erhält z. B. *J. Landen*[584]):

$$(457)\qquad -\frac{1}{2}\log\{(1+r)^2 - 4r\cos x\} = r\cos 2x + \frac{r^2}{2}\cos 4x + \frac{r^3}{3}\cos 6x + + \cdots$$

$$(458)\qquad \operatorname{arc\,tg}\frac{2r\sin x\cos x}{1+r^2(1-2\cos^2 x)} = r\sin 2x + \frac{r^2}{2}\sin 4x + \frac{r^3}{3}\sin 6x + + + \cdots$$

Man kann, indem man $x$ durch $x/2$ ersetzt, diese Reihen auch in solche verwandeln, in welchen alle ganzzahligen Vielfachen des Arguments auftreten; sie gelten dann für das Intervall $(0\ldots 2\pi)$, bzw.

582) Math. memoirs 1, Lond. 1780, p. 105, 108.

583) p. 98.

584) Math. memoirs 1, Lond. 1780, p. 104, 107. Auch die Reihen (332) und (324) sind so erhalten.

$(-\pi \ldots + \pi)$. Die beiden genannten Reihen sind so im Grund von (14), bzw. (15) nicht verschieden.

**19. Umkehrung trigonometrischer Reihen.** Das Problem: wenn $y - x$ nach den Sinus der Vielfachen von $x$ entwickelt ist, daraus umgekehrt eine Entwicklung derselben Differenz nach den Sinus der Vielfachen von $y$ abzuleiten, ist bei den in Nr. 12 besprochenen astronomischen Entwicklungen mehrfach zur Sprache gekommen. *Bossut*[585]) setzt zu diesem Zwecke den gesuchten Ausdruck zunächst mit unbestimmten Koeffizienten an, differentiiert ihn so oft als nötig, setzt dann beiderseits die Argumente gleich Null und erhält so die erforderliche Anzahl von Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten der Anfangsglieder.

Damit im wesentlichen identisch ist das Verfahren von *A. Cagnoli*[586]), der die trigonometrische Reihe in eine Entwicklung nach Potenzen von $x$ umsetzt, diese umkehrt und dann wieder die trigonometrischen Funktionen einführt.

*O. Schloemilch* hat die Frage in einer besonderen Schrift[587]) behandelt, unter Benutzung der Integraldarstellung der Koeffizienten. Ist $x = \psi(y)$ die Umkehrung von $y = \varphi(x)$ und entsprechen den Werten 0 und $\pi$ von $x$ die Werte $\eta$ und $\gamma$ von $y$, so wird durch partielle Integration erhalten:

$$(459) \quad \tfrac{1}{2} A_0 = \gamma - \frac{1}{\psi(\gamma)} \int_\eta^\gamma \psi(y)\, dy, \quad A_n = -\frac{2}{n\pi} \int_\eta^\gamma \sin \frac{n\pi\psi(y)}{\psi(\gamma)}\, dy.$$

Analoge Formeln gibt er dann auch für die Sinusreihe[588]), für die Reihe mit Gliedern beider Arten[589]) und für das *Fourier*sche Integral[590]);

585) Paris recueil des pièces qui ont remporté les prix 8 (1771), p. 61 (Preisschrift von 1762); Paris mém. 1777 [80], p. 52.

586) Trigonometria piana e sferica, 1786 (p. 271 der 2. franz. Auflage von 1803).

587) Die allgemeine Umkehrung der Funktionen, Halle 1849. Schloemilchs Verfahren ist von demjenigen nicht verschieden, durch das *Bessel* und *Poisson* zu den Formeln (244) und (246) gelangt waren; Schloemilch zitiert eines dieser Resultate p. 36 aus zweiter Hand. Schloemilch führt einige Beispiele an, in welchen man auf diesem Wege zu einem Ausdruck der Koeffizienten durch unendliche Reihen gelangt; u. a. für die Koeffizienten von $(1 - x)^{-1/2}$ zu einem Ausdruck durch hypergeometrische Reihen (p. 24).

588) p. 26. Die durch partielle Integration vom Integralzeichen frei werdenden Bestandteile verschwinden hier nicht, sondern geben in ihrer Vereinigung Reihen, die sich mit Hilfe von (110) und (111) summieren lassen.

589) p. 42.

590) p. 47.

auch hat er Formeln für die Koeffizienten der Entwicklung einer beliebigen Funktion von $y$[591]).

**20. Verwandlung schlecht konvergierender trigonometrischer Reihen in besser konvergierende.** Schon *S. D. Poisson*[592]) entwickelt, wenn eine Funktion $f(x)$, die nicht für $x=0$ und für $x=\pi$ Null ist, durch eine Sinusreihe dargestellt werden soll, statt dessen die Differenz $f(x) - A \exp(\mu x) - B \exp(-\mu x)$, wobei er $A$, $B$ so bestimmt, daß diese Differenz an den beiden genannten Stellen Null wird. Doch denkt er zunächst nicht daran, daß die so erhaltene Reihe besser konvergiert, als die Entwicklung von $f(x)$ selbst; vielmehr liegt ihm nur daran, eine Entwicklung zu haben, die auch noch an den Grenzen des Intervalls Gültigkeit behält.

*A. de Morgan*[593]) erhält durch Anwendung des Eulerschen Verfahrens (I A 3, *Pringsheim* Nr. 37) auf eine Potenzreihe mit komplexen Variabeln und Trennung von Reellem und Imaginärem die Gleichungen:

$$(460)\qquad \sum a_n r^n \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} nx = \sum \Delta^n a_0 \cdot r^n \varrho^{-n-1} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} (nx + (n+1)\varphi),$$

in denen $\varrho$ und $\varphi$ durch

$$\varrho \cos\varphi = 1 - r\cos x, \quad \varrho \sin\varphi = r \sin x$$

bestimmt sind. Für $r=1$ wird

$$\varrho = 2\sin\frac{x}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi - x}{2},$$

also[594]):

$$(461)\qquad \begin{aligned} \sum a_n \cos nx = \frac{a_0}{2} - \frac{\Delta a_0}{4\sin^2\frac{x}{2}} + \frac{\Delta^2 a_0 \sin\frac{x}{2}}{8\sin^3\frac{x}{2}} \\ + \frac{\Delta^3 a_0 \cos x}{16\sin^4\frac{x}{2}} - \frac{\Delta^4 a_0 \sin\frac{3x}{2}}{32\sin^5\frac{x}{2}} - + + - \cdots \end{aligned}$$

---

591) p. 3.

592) J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 58. Daß bei Poisson eine Entwicklung nach den Sinus der geraden und den Cosinus der ungeraden Vielfachen des Arguments steht, beruht auf der unter 495) erwähnten Verlegung des Anfangspunktes der Abszissen. Die Benutzung gerade der Exponentialfunktion ist ihm durch das physikalische Problem nahe gelegt, mit dem er sich dort beschäftigt; er bemerkt übrigens selbst, man könne $\mu$ auch komplex nehmen; und das einfachste sei, den Grenzfall $\mu = 0$ zu benutzen, also $f(x) - Ax - B$ zu entwickeln. *A. Pioch* (Brux. mém. 15, 1850, p. 60) untersucht diesen Grenzfall direkt.

593) Diff. and int. calc., Lond. 1836/41, p. 242.

594) In der zweiten Formel ist $b_0$ zunächst willkürlich. Untersuchungen über die Gültigkeitsbedingungen der Formeln scheinen nicht vorzuliegen.

$$
(461)\quad \begin{aligned}\sum b_n \sin nx &= \frac{b_0}{2}\cot\frac{x}{2} - \frac{\Delta^2 b_0 \cos\frac{x}{2}}{8\sin^3\frac{x}{2}} \\ &+ \frac{\Delta^3 b_0 \sin x}{16\sin^4\frac{x}{2}} + \frac{\Delta^4 b_0 \cos\frac{3x}{2}}{32\sin^5\frac{x}{2}} - - + + \cdots.\end{aligned}
$$

Prinzipiell hat dann *G. G. Stokes*[595]) auf Grund seiner in Nr. **41** und **42** zu besprechenden Untersuchungen auseinandergesetzt, wie man mit Hilfe der Formeln von Nr. 7 oder von Nr. **18c** die Konvergenz einer trigonometrischen Reihe dadurch verbessern kann, daß man diejenigen Bestandteile abtrennt, die eine Unstetigkeit der zu entwickelnden Funktion oder ihrer Ableitungen niedrigster Ordnung im Innern des Intervalls oder beim Übergang von einer seiner Grenzen zur andern mit sich bringen.

**21. Restglied einer trigonometrischen Reihe.** Vielfach hat man auch versucht, für den Rest, der bleibt, wenn man eine Funktion durch eine Anzahl Anfangsglieder ihrer trigonometrischen Entwicklung ersetzt, Abschätzungsformeln ähnlicher Art aufzustellen, wie man sie für die Taylorsche Entwicklung einer analytischen Funktion besitzt. Der erste solche Versuch findet sich bei *A. Cauchy*[596]): die Gleichungen (618) ergeben

$$
(462)\quad \begin{aligned}2\pi r_n &= \int_0^\infty \frac{\cos nx - e^{-\nu}\cos(n-1)x}{1-2e^{-\nu}\cos x + e^{-2\nu}}\, Q(\nu)e^{-n\nu}d\nu \\ &- \int_0^\infty \frac{\sin nx - e^{-\nu}\sin(n-1)x}{1-2e^{-\nu}\cos x + e^{-2\nu}}\, P(\nu)e^{-n\nu}d\nu,\end{aligned}
$$

wo:

$$
(463)\quad \left.\begin{matrix}2P(\nu)\\ 2iQ(\nu)\end{matrix}\right\} = f(2\pi+\nu i) - f(\nu i) \pm f(2\pi-\nu i) \mp f(-\nu i).
$$

Die Brüche unter den Integralzeichen sind absolut genommen einerseits

$$
< \frac{1}{1-e^{-\nu}},
$$

andererseits

$$
< \frac{1}{2\sin^2 2x};
$$

595) Cambr. trans. $8_5$, 1849, = papers 1, p. 263 (von 1847).

596) Mém. von 1827 [1036]), p. 8; eine Andeutung auch Paris mém. 6, 1823[27] = Oeuvres (1) 2, p. 19. Eine wirkliche Anwendung auf einen speziellen Fall in einer Note von 1827 zur Wellenabhandlung, Paris mém. prés. 1 = Oeuvres (1) 1, p. 279.

wenn es nun gelingt, eine Zahl $k$ so zu bestimmen, daß:

$$(464)\qquad \left|\frac{Q(\nu)e^{-k\nu}}{1-e^{-\nu}}\right| < K, \qquad \left|\frac{(P(\nu)-P(0))e^{-k\nu}}{1-e^{-\nu}}\right| < K_1$$

ist, so folgt für $n > k$:

$$(465)\qquad r_n = \frac{\theta}{2(n-k)\pi}\left\{K + K_1 + \frac{|f(2\pi)-f(0)|}{2\sin^2 2x}\right\}, \qquad -1 < \theta < 1.$$

22. **Multiplikation trigonometrischer Reihen.** Daß man das Produkt zweier harmonischer trigonometrischer Reihen wieder als eine solche schreiben kann, wenn man gliedweise ausmultipliziert und die Produkte je zweier trigonometrischer Funktionen wieder durch Summen ersetzt, ist selbstverständlich; auch hat *L. Euler* schon bei seinen ersten Untersuchungen[597]) die Entwicklung von $y \operatorname{tg} x$ nach den Sinus (bzw. Cosinus) der Vielfachen von $x$ aus der von $y$ nach den Cosinus (bzw. den Sinus) so abgeleitet. Dann liegt diese Eigenschaft auch der unter (41) erwähnten Auffassung trigonometrischer Reihen zugrunde.

23. **Der Parsevalsche Satz.** Verwandt mit der Frage nach der Multiplikation zweier trigonometrischen Reihen ist die nach der Summe einer Reihe, deren Koeffizienten die Produkte der entsprechenden Koeffizienten zweier gegebenen Reihen sind. Einen speziellen Fall dieser Frage hat *M. A. Parseval*[598]) durch den folgenden seinen Namen tragenden Satz erledigt: wenn

$$(466)\qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n, \quad \varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_{-n} z^{-n}$$

ist, so ist die Summe der von $z$ freien Glieder in der Entwicklung des Produkts $f(z)\cdot\varphi(z)$:

$$(467)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} C_n \Gamma_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\{f(e^{xi})\varphi(e^{xi}) + f(e^{-xi})\varphi(e^{-xi})\}\,dx.$$

Als erste Anwendung gibt er selbst[599]) die Umformung der Reihe

$$(468)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(n!)^2}$$

597) Petrop. n. a. 5 (1754/55[60]), p. 189.

598) Paris mém. prés. 1 (1806), p. 639 (von 1799); auf Grund der Mitteilungen Parsevals schon vorher veröffentlicht von *S. F. Lacroix,* Traité des différences et des séries, Paris 1800, p. 377 = Traité du calcul diff. et du calcul int. (2ᵉ éd.), 3, Paris 1819, p. 394. Im wesentlichen ebenso bei *H. G. von Schmidten,* Ann. de math. 12 (1822), p. 219; J. f. Math. 5 (1830), p. 396; nach dem Referat bull. Férussac 6 (1826), p. 106 auch disqu. de seriebus et integr. def. Havniae 1825.

599) Paris mém. prés. 1, p. 645; ebenso *v. Schmidten,* Ann. de math. 12 (1822), p. 219; J. f. Math. 5 (1830), p. 396.

[d. h. im wesentlichen der Zylinderfunktion $J_0(2ir)$] in das bestimmte Integral:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi e^{2r\cos x}dx. \tag{469}$$

Eine zweite Formulierung, bei der beide Ausgangsreihen nach steigenden Potenzen von $z$ geordnet angenommen sind, ist bei ihm nicht vollständig richtig[600]), wohl aber bei *G. Frullani*[601]): ist

$$f(z)=\sum_{n=0}^\infty C_n z^n,\quad \varphi(z)=\sum_{n=0}^\infty \Gamma_n z^n, \tag{470}$$

so ist:

$$2C_0\Gamma_0+\sum_{n=1}^\infty C_n\Gamma_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \Re f(e^{xi})\cdot\Re\varphi(e^{xi})\,dx. \tag{471}$$

*Frullani* hat auch das allgemeinere Resultat[602]):

$$2C_0\Gamma_0+\sum_{n=1}^\infty C_n\Gamma_n\cos nx=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi\{\Re f(e^{(x+\alpha)i})+\Re f(e^{(x-\alpha)i})\}\,\Re\varphi(e^{\alpha i})\,d\alpha. \tag{472}$$

*A. Cauchy*[603]) schreibt den Satz in der Form: ist

$$\varphi(r)=\sum_{n=0}^\infty a_n r^n,\quad \psi(r)=\sum_{n=0}^\infty b_n r^n, \tag{473}$$

so ist:

$$\sum_{n=0}^\infty a_n b_n r_1^n r_2^n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(r_1e^{pi})\,\psi(r_2e^{-pi})\,dp, \tag{474}$$

---

600) Paris mém. prés. 1 (1806), p. 544 (von 1803). Bei Parseval fehlt der Faktor 2 vor $C_0\Gamma_0$.

601) Ricerche sopra le serie, Firenze 1816, p. 105; p. 111 auch entsprechende Formeln für mehr als zwei Reihen. Mem. soc. ital. 18 (1820), p. 467 führt Frullani die Form (471) in die ursprünglich von Parseval gegebene (467) über; auch gibt er (p. 468) eine entsprechende Darstellung für $\sum\limits_n C_n\Gamma_{n+p}$, sowie für Funktionen von mehreren Veränderlichen (p. 471) und für mehr als zwei Reihen (p. 474).

602) Ib., p. 110. Bei *Fourier,* Théorie Nr. 235 = Oeuvres 1, p. 233 steht nur die Angabe, es sei leicht die Summe dieser Reihe zu finden; *G. Darboux* drückt sie in einer Note hiezu durch das bestimmte Integral

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi\left\{\sum_{n=0}^\infty C_n\cos n\alpha\right\}\left\{\sum_{n=0}^\infty\Gamma_n\cos(n\alpha+nx)\right\}d\alpha$$

aus.

603) Bull. philomat. 1822, p. 173.

und bemerkt, daß er so weit richtig ist, als die Entwicklungen von $\varphi$ und $\psi$ nach Potenzen von $r$ konvergieren.

*G. Libri*[604]) leitet ihn von einer Summenformel aus durch Übergang zu unendlicher Gliederzahl ab.

**24. Eindeutige Bestimmtheit der Entwicklung.** Daß sich eine Funktion — wenn überhaupt — nur auf eine Weise in eine harmonische trigonometrische Reihe entwickeln läßt, und daß man also zur Bestimmung der Koeffizienten einer solchen Entwicklung sich der Methode der unbestimmten Koeffizienten bedienen dürfe, ist zuerst — wohl aus dem Gefühl einer gewissen Analogie mit der Entwicklung in eine Potenzreihe heraus — als selbstverständlich behandelt worden: so mehrfach von *Euler*[605]) und auch noch von *Lagrange*[104]). Doch haben bereits *A. L. Crelle*[606]), *S. D. Poisson*[607]), *Bredow*[608]) auseinandergesetzt, daß die Berufung auf diese Analogie ganz unzutreffend ist, indem die dort gebrauchten Schlüsse sich hier nicht anwenden lassen. Darüber hinaus hat *G. Frullani*[609]) veranlaßt durch das in Note[21]) erwähnte Beispiel, das er dann auch noch verallgemeinert, die Behauptung selbst für unrichtig erklärt: die Cosinus der verschiedenen Vielfachen von $x$ seien nicht wie die Potenzen voneinander linear unabhängig, sondern durch die Relation (25) miteinander verknüpft, und folglich könne man mit Hilfe der letzteren aus einer Entwicklung einer gegebenen Funktion beliebig viele andere erhalten. Dieselbe Bemerkung findet sich dann auch bei *S. D. Poisson*[610]) und im Anschluß an ihn bei *A. v. Ettingshausen*[611]).

604) J. f. Math. 12 (1834), p. 256.

605) Vgl. Note 41.

606) Lagranges mathematische Werke 2, Berlin 1823, p. 318.

607) Bull. Férussac 4 (1825), p. 346.

608) Diss. Vratisl. 1829, p. 35.

609) Mem. soc. ital. 18 (1820), p. 485 (von 1818).

610) J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 508; Bull. Férussac 4, p. 346. An der letzteren Stelle fügt Poisson noch bei: wenn man die Gleichung $y'' + \mu^2 y = 0$, für den Fall eines nicht ganzzahligen $\mu$ durch eine nach den Cosinus der ganzzahligen Vielfachen von $x$ fortschreitende Reihe mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten integrieren wolle, so komme man zu dem falschen Resultat, daß alle Koeffizienten Null sein müßten: während doch bekannt sei, daß die Aufgabe durch (277) gelöst werde. Der Fehlschluß beruhe darauf, daß man die Null der rechten Seite noch durch ein beliebiges Vielfaches der linken Seite von (25) ersetzen dürfe. [Man *muß* das hier tun, da die durch zweimalige Differentiation aus (277) entstehende Reihe (276) divergiert und erst durch Hinzufügung eines solchen Vielfachen in eine konvergente Reihe übergeführt werden kann. Vgl. Nr. 41.] Auch conn. des temps pour 1829 [26], p. 350 spricht Poisson davon, daß man eine Funktion auf mehr als eine Art in eine trigonometrische Reihe

*J. Littrow* ist durch das in Note 191 erwähnte Versehen sowie durch den Umstand, daß die Anwendung der Methode des Heraufmultiplizierens[41]) auf die Funktion

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} \tag{475}$$

den Koeffizienten von $\sin x$ nicht bestimmt, sondern eine beliebige lineare Kombination der Reihe (26) mit der durch Differentiation aus (27) entstehenden liefert, zu der Meinung gekommen[612]), es gebe für eine Funktion unendlich viele trigonometrische Entwicklungen.

*A. de Morgan* geht hierin noch weiter. Er war durch Anwendung der Methode der Trennung von Operations- und Quantitätssymbolen auf divergente Reihen zu der Meinung gekommen[613]): wenn $\varphi(n)$ eine gerade bzw. ungerade endliche Funktion von $n$ und $\sum\varphi(n)r^n$ eine stetige Funktion von $r$ sei, müsse $\sum\varphi(n)\cos nx$, bzw. $\sum\varphi(n)\sin nx$ immer Null sein, und schließt daraus[614]), daß man aus jeder Entwicklung einer Funktion in eine Sinusreihe durch Addition eines derartigen Ausdrucks unendlich viele andere ableiten und nicht wissen könne, ob es nicht außerdem noch andere gebe.

Durch die Integraldarstellung der Koeffizienten ist die Frage so weit entschieden worden, als die Tragweite dieser Darstellung reicht: für ein gegebenes Intervall $(a \dots b)$ kann es von einer gegebenen Funktion nicht mehr als eine im [im allgemeinen gleichmäßig konvergente[615])] Entwicklung nach den Cosinus und Sinus der ganzzahligen Vielfachen von $2\pi x/(b-a)$ geben; und ebenso auch nur eine solche Entwicklung nach den Cosinus oder Sinus der ganzzahligen Vielfachen von $\pi x/(b-a)$. Daß aber die Entwicklungen, die man so für verschiedene — wenn auch übereinandergreifende — Intervalle erhält, und ebenso die dreierlei Entwicklungen für dasselbe Intervall — nicht miteinander übereinzustimmen brauchen, haben bereits *Fourier*[616]) und

entwickeln könne; doch ist nicht ersichtlich, ob er an die hier besprochenen Dinge oder an Entwicklungen mit verschiedenen Gültigkeitsintervallen denkt. Chaleur p. 226 dagegen sagt er wieder ausdrücklich: „pour une étendue donnée" seien viele verschiedene solche Entwicklungen möglich.

611) Zeitschr. Phys. Math. 1 (1826), p. 379.

612) Petersb. mém. 7, 1815/16[20], p. 132.

613) Diff. and int. calc., Lond. 1836/41, p. 563. Er meint, $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi(n)r^n$ sei immer identisch Null.

614) p. 611.

615) Die Erkenntnis der Notwendigkeit dieser Bedingung gehört einer späteren Zeit an. Vgl. Nr. 29.

616) Paris mém. 4 (1819/20[24]), p. 309 (Preisschrift von 1811); Théorie Nr. 225 = Oeuvres 1, p. 216.

*Poisson*[617]) auseinandergesetzt und durch einfache Beispiele[618]) belegt. Gleichwohl hat es *Ph. Kelland*[619]) übersehen und daraufhin (sowie durch die zahlreichen Druckfehler bei Fourier veranlaßt) erklärt, fast alle Einzelresultate Fouriers seien falsch; das hat dann *W. Thomson* (Lord *Kelvin*)[620]) aufgeklärt.

Bei *A. Cauchy*[621]) erscheint der Satz in der Form: wenn die Summe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n \tag{476}$$

für alle $z$ von gegebenem absoluten Betrag null ist, so sind alle Koeffizienten null; er versucht den Beweis durch gliedweise Integration zu führen. Ebenso beruht auf gliedweiser Integration — und zwar über ein unendliches Intervall, mit Hilfe der Formeln von Nr. 59a — sein Schluß[622]): wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx \equiv 0 \quad \text{oder} \quad \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx \equiv 0 \tag{477}$$

ist, so ist auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-nr} \equiv 0, \tag{478}$$

und also sind alle $A_n$ bzw. $B_n$ einzeln gleich null.

Noch *G. G. Stokes* meint[623]), der Schluß aus der Integraldarstellung der Koeffizienten reiche aus, wenn absolute Konvergenz von $\sum A_n$ stattfindet oder durch Abspaltung der sie störenden Bestandteile[595]) erreicht werden kann; doch betont er[624]), daß er die Konvergenz der Reihe wenigstens im allgemeinen voraussetze und daher auf Reihen wie (25) nicht angewendet werden dürfe.

---

617) Théorie de la chaleur, Paris 1835, p. 186, 192, 226.

618) Zusammenstellung verschiedener Entwicklungen von 1 und von $x$ bei *M. Ohm,* System der Mathematik 9, Nürnb. 1852, p. 323, 326.

619) Theory of heat, Cambr. 1837, p. 59, 64.

620) Cambr. math. j. $2_6$ (1841), p. 260 (P. Q. R. gezeichnet) = Math. phys. papers 1, p. 4.

621) Paris C. R. 13 (1841), p. 911 = Oeuvres (1) 6, p. 360.

622) Ib. p. 913 = 364. Der Text der C. R. ist in den Oeuvres hier erweitert.

623) Cambr. trans. 8 (1849) = papers 1, p. 242, 268; von 1847. Seinen Versuch die Behauptung auch zu beweisen, ohne mehr als die Konvergenz von $\sum n^{-1} A_n$ vorauszusetzen, hält er selbst nicht für vollständig gelungen; in der Tat beruht er auf der Vertauschung der Grenzübergänge zu $n = \infty$ und zu $\Delta x = 0$, die er nur für den Fall rechtfertigen kann, „daß $A$ nicht eine Funktion von $n$ ist, deren Kompliziertheit mit wachsendem $n$ unbegrenzt zunimmt.“

624) Ib. p. 270.

## II. Entwicklung willkürlicher Funktionen in trigonometrische Reihen.

**25. Die Hauptschwingungen eines Massensystems.** Als man im zweiten Viertel des 18. Jahrhunderts anfing, die Bewegungen mechanischer Systeme von mehr als einem Grad der Freiheit zu untersuchen, erkannte man bald, daß solche Systeme imstande sind „einfache Schwingungen“ auszuführen, d. h. Bewegungen, bei welchen alle Punkte des Systems immer gleichzeitig durch ihre resp. Ruhelagen hindurchgehen. Beschränkt man dabei die Untersuchung auf sog. „unendlich kleine Schwingungen“, d. h. vernachlässigt man schon im Ansatz höhere Potenzen und Produkte der Ausschläge [und der Geschwindigkeiten], so sind diese einfachen Schwingungen „harmonisch“, d. h. sie lassen sich in der Form darstellen[625]):

(479) $$y_m = C f_m \sin \frac{2\pi(t-t_0)}{T},$$

in der $t$ die Zeit, $T$ die allen Punkten gemeinsame Schwingungsdauer, $y_m$ den Ausschlag des $m^{\text{ten}}$ Punktes, $C$ und $t_0$ die willkürlichen, aus den Anfangsbedingungen zu bestimmenden Integrationskonstanten bedeuten, die $f_m$ aber, bzw. ihre Verhältnisse, auf die es allein ankommt, Konstante, die von der Natur des Systems abhängen. Man fand auch, daß jedesmal von solchen Schwingungen eine größere Anzahl möglich ist[626]). Endlich zog *D. Bernoulli*[627]) aus akustischen Erfahrungen den Schluß, daß sich die allgemeinste mögliche Bewegung eines solchen Systems aus seinen einfachen harmonischen Schwingungen durch Superposition[628]) zusammensetzen, d. h. in der Form ausdrücken lassen müsse:

80) $$y_m = \sum_n C_n f_{mn} \sin \frac{2\pi(t-t_n)}{T_n}.$$

---

625) Das früheste mir bekannte derartige Beispiel findet sich bei *Joh. I. Bernoulli,* Petrop. comm. 2 (1727[29]); 3 (1728[32]) opera 3, p. 124, 198. Vgl. übrigens IV 6, *P. Stäckel,* Nr. 9, p. 480.

626) In den zunächst behandelten einfachsten Fällen stimmte diese Anzahl mit der Anzahl der Punkte des Systems überein; so ist der Satz von *D. Bernoulli* formuliert, Petrop. comm. 12 (1740[50]), p. 98. Daß sie auch größer sein kann, scheint erst *Euler* bei Gelegenheit des Problems der nicht nur in einer Ebene schwingenden Saite bemerkt zu haben, Petrop. n. comm. 19 (1774[75]), p. 340; doch hat es noch *Lagrange* übersehen, mécanique analytique, 2$^{\text{me}}$ éd., Paris 1811 = Oeuvres 11, p. 437.

Vgl. die Bemerkungen von *J. M. C. Duhamel,* j. éc. polyt. cah. 14, 1834, p. 3.

627) Petrop. comm. 13 (1741/43[51]), p. 173 (bei Gelegenheit des Problems der schwingenden Lamelle). Man vgl. dazu Bernoullis eigene spätere Angaben, Berl. hist. 1753[55], p. 189 und j. des sçavans, 1758, p. 158.

628) Das *Wort* Superposition finde ich erst bei *Wheatstone,* London trans.

Ihre mathematische Begründung fanden beide Sätze auf Grund von *L. Eulers* Integration einer linearen Differentialgleichung beliebig hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten[629]) und *J. d'Alemberts* entsprechender Behandlung eines Systems solcher Gleichungen[630]) durch *J. L. Lagrange*[631]).

Darüber hinaus ist *D. Bernoulli*, da ihm wie den meisten Mathematikern des 18. Jahrhunderts der Übergang vom Endlichen zum Unendlichen keine Skrupel machte, bald dazu gelangt, diese Sätze auch für die kleinen Schwingungen *kontinuierlicher* Systeme in Anspruch zu nehmen, indem er diesen Übergang an den fertigen Integralen der Differentialgleichungen vornahm[632]). Der andere hier mögliche Weg, der Übergang von dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu einer partiellen Differentialgleichung, war zunächst noch nicht gangbar, da die Begriffe des partiellen Differentialquotienten und der partiellen Differentialgleichung kaum erst aufgetaucht waren[633]). Vielmehr verfuhren die Mathematiker jener Zeit, wenn sie derartige Probleme direkt angreifen wollten, in folgender Weise: sie benutzten sogleich die Eigenschaft der einfachen harmonischen Schwingungen, daß bei ihnen die Beschleunigungen der verschiedenen Punkte des Systems zu ihren Ausschlägen proportional sind, um die ersteren durch die letzteren zu ersetzen; so erhielten sie statt der partiellen Differentialgleichung sofort wieder eine gewöhnliche, in die der Proportionalitätsfaktor als ein verfügbarer Parameter eingeht. Die besonderen Verhältnisse, unter denen die extremsten Punkte des zunächst angenommenen diskreten Systems sich befinden, geben beim Übergang zum kontinuierlichen Grenzbedingungen; diese dienen zur Bestimmung der zulässigen Werte jenes Parameters und damit der möglichen Schwingungsdauern. In dieser Weise haben bereits *Brook Taylor*[634]), *J. Hermann*[635]) und

---

$1833_2$, p. 397 und bei *A. Cauchy*, Paris C. R. 7 (1838), p. 986 = recueil de mém. sur la phys. math., Paris 1839, p. 1 (Oeuvres (1) 4, p. 115).

629) Berol. misc. 7 (1743), p. 193. Ob dasselbe Resultat bei *Th. Simpson*, tracts[36]) p. 90 von Euler unabhängig ist, läßt sich nicht entscheiden.

630) Berl. hist. 4 (1748[50]), p. 283. d'Alembert macht selbst auf die Erkenntnis dieser Bedeutung seiner Formeln Anspruch, opusc. math. 1, Paris 1761, p. 48, 51.

631) Taur. misc. 3, (1762/65[66]) Oeuvres 1, p. 520. Vgl. übrigens auch II A $4^b$, *Painlevé*, Nr. 21 und 28, sowie IV 6, *Stäckel*, Nr. 9.

632) Petrop. comm. 6 (1732/33[38]), p. 116; zunächst für das Problem der frei herabhängenden Kette, bei dem der Grenzübergang auf die Zylinderfunktion $J_0$ führt.

633) Vgl. darüber *A. v. Braunmühl*, Verhandl. Kongr. Heidelb. 1904, p. 553.

634) Lond. trans. 28 (1713), p. 26; methodus incrementorum, London 1715, p. 88.

*Joh. I. Bernoulli*[636]) den Grundton einer schwingenden Saite bestimmt; die Bestimmung sämtlicher möglicher einfacher Schwingungen auf diesem Wege erscheint dann bei *D. Bernoulli*[637]) und *L. Euler*[638]).

Eine genauere Untersuchung der Bedingungen, unter welchen das Superpositionsprinzip gilt, findet sich erst bei *J. M. C. Duhamel.* Er hebt namentlich hervor, daß es nur richtig ist, wenn die Kräfte, die man etwa bei der Zerlegung des gegebenen Systems in Teilsysteme neu einführt, als von den Koordinaten unabhängig angesehen werden dürfen[639]), und wenn etwaige Verbindungen durch lineare Bedingungsgleichungen zwischen den kartesischen Koordinaten der Punkte des Systems vertreten werden können[640]).

Der Grenzübergang von einer Differenzengleichung zu einer Differentialgleichung bietet übrigens doch gewisse Schwierigkeiten, die zum mindesten besprochen werden müssen. Einige Bemerkungen darüber finden sich bereits bei *A. A. Cournot*[641]): Das allgemeine Integral der Differenzengleichung enthält einen Bestandteil, der in der Grenze in eine durchaus unstetige Funktion übergeht und nur dadurch beseitigt werden kann, daß man einer an und für sich unbestimmt bleibenden Konstante arbiträr den Wert null beilegt.

**26. Der Streit um das Problem der Saitenschwingungen.** Daher konnte *D. Bernoulli,* nachdem *J. d'Alembert*[642]) und *L. Euler*[643]) das Problem der Saitenschwingungen auf die partielle Differentialgleichung[644])

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{481}$$

---

635) Acta erud. 1716, p. 370.

636) Petrop. comm. 5 (1728/32), p. 24 (opera 3, p. 209).

637) Ib. 7 (1734/35[40]), p. 170 für das Problem der frei herabhängenden Kette.

638) Ib. 8 (1736[41]), p. 40 für dasselbe Problem; ib. 7, p. 115 und methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Laus. et Gen. 1744, p. 282 für das ihm von *D. Bernoulli* (corresp. math. ed. *H. Fuß,* St. Petersburg 1843, 2, p. 429) gestellte Problem der schwingenden Lamelle.

639) J. éc. polyt. cah. 23 (1834), p. 5 (von 1832).

640) p. 19.

641) Théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 505, 515.

642) Berl. hist. 1747[49], p. 214; 1750[52], p. 355; opusc. math. 1, Paris 1761, p. 1; 4 (1768), p. 134; 5 (1768), p. 138.

643) Berl. hist. 1748[50], p. 69 = n. acta erud. 1749, p. 512; Berl. hist. 1753[55], p. 202; Taur. misc. 2 (1762/65[66]), p. 1; Berl. hist. 1765[67], p. 307; Petrop. n. comm. 17 (1772[73]), p. 381; Petrop. n. acta 1772²[83], p. 116. Über die Diskussion zwischen d'Alembert und Euler über den Grad der in der Gleichung (482) den Funktionszeichen $\Phi$, $\Psi$ beizulegenden Allgemeinheit vgl. Nr. 28.

644) Hier wie überall im folgenden nehme ich an, es sei über die Ein-

gebracht und diese in der Form

$$(482)\qquad y = \Phi(x+t) + \Psi(x-t)$$

($\Phi$, $\Psi$ willkürliche Funktionen) integriert hatten, behaupten[645]), diese Lösung müsse sich auch in der Form darstellen lassen:

$$(483)\qquad y = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos nt \sin nx$$

[wenn $\partial y/\partial t = 0$ für $t = 0$ und alle in Betracht kommenden $x$]. *Euler* bemerkte dazu sogleich[646]): das würde nur dann möglich sein, wenn die Gleichung auch für $t = 0$ richtig bleibe, wenn also die Anfangsfigur der Saite sich durch eine Gleichung der Form

$$(484)\qquad y = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx$$

darstellen lasse. Da man aber damals, mangels entgegenstehender Erfahrungen, allgemein davon überzeugt war, eine Gleichung zwischen zwei analytischen Ausdrücken könne nicht nur in einem Intervall, sondern müsse entweder nur für einzelne isolierte Argumentwerte, oder dann gleich ganz allgemein richtig sein, so wollten *Euler*[647]) und *d'Alembert*[648]) die Lösung (483) jedenfalls nur für den Fall gelten lassen, daß in der Anfangsfigur die Ordinate $y$ [in heutiger Ausdrucksweise] eine analytische periodische Funktion der Abszisse ist[649]).

---

heiten der Zeit, der Länge und der Masse so verfügt, daß die Differentialgleichungen und ihre Integrale sich möglichst einfach darstellen: hier also so, daß die Länge der Saite durch $\pi$ und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ihrer Wellenbewegungen durch 1 ausgedrückt ist.

645) Berl. hist. 1753[55], p. 148, 160, 165. Die Gleichung steht explizite an keiner dieser Stellen, ergibt sich aber aus ihrer Verbindung. Vgl. auch j. des sçavans 1758, p. 157.

646) Berl. hist. 1753[55], p. 195; Taur. misc. $3^2$, 1762/65, p. 11. Eulers Schluß ist in diesem Falle richtig, in andern Fällen würde man aus der Gültigkeit für $t > 0$ nicht auf ihre Gültigkeit für $t = 0$ schließen können. Vgl. Nr. 90.

647) Ib. p. 200; 1765[67], p. 312. Eulers Stellungnahme ist um so bemerkenswerter, als er doch selbst vollständig erkannt hatte, daß man in *seiner* Lösung (482) unter dem Zeichen $\Phi(x+t)$ für außerhalb des Intervalls $(0\ldots\pi)$ gelegene Werte von $x+t$ nicht die analytische Fortsetzung, sondern die periodische Wiederholung des ursprünglich gegebenen Funktionsstücks verstehen müsse.

648) Encyclopédie, art. „fondamental"; opuscules math. 1, Paris 1761, p. 42ff.; 4 (1768), p. 153, 175, 200; 5 (1768), p. 144; Berl. hist. 19 (1763[70]), p. 239 (von 1769).

649) d'*Alembert* will die Lösung nicht einmal für alle solchen Funktionen gelten lassen.

Auch *J. L. Lagrange* ist über diese Auffassung nicht hinausgekommen, so nahe ihn auch seine Untersuchungen an die Erkenntnis des wahren Sachverhalts geführt hatten[650]). *D. Bernoulli* zog sich diesen Einwänden gegenüber auf einen Standpunkt diesseits des Grenzübergangs zurück[651]).

Merkwürdig ist übrigens, daß in dieser ganzen Diskussion von keiner Seite Bezug darauf genommen worden ist, daß ja doch verschiedene Entwicklungen nicht periodischer Funktionen in der Literatur bereits fertig vorlagen (Nr. 7). Nur *Lagrange* hatte in einem damals nicht veröffentlichten Briefe an *d'Alembert*[652]) darauf hingewiesen, daß man, um $x^{2|3}$ nach den Sinus der Vielfachen von $x$ zu entwickeln, nur die bekannte Entwicklung von $x$ nach den Potenzen von $\sin x$ in geeigneter Weise umzuformen brauche; aber *d'Alembert* hatte das einfach mit der Bemerkung zurückweisen zu können geglaubt[653]), auf diesem Wege könne man ja auch eine ungerade Funktion wie $\sin x$ nach den Kosinus der Vielfachen von $x$ entwickeln wollen, was doch sicher nicht angehe.

---

650) Am nächsten war Lagrange dieser Erkenntnis in seiner ersten einschlägigen Abhandlung, wo er durch Grenzübergang von der Interpolationsformel aus bereits bis zu der Gleichung gelangt war

$$y = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sum (\sin nx \sin n\xi \cos nt) f(\xi) d\xi$$

(Taur. misc. 1 (1759); Oeuvres 1, p. 100); er hätte nur noch die Vertauschung von Summation und Integration vorzunehmen brauchen [ohne die die Reihe übrigens gar nicht konvergent ist]. Aber er kam dazu nicht, weil er eben nicht zu der Gleichung (485), sondern zu (484) gelangen *wollte.* Auch später hat er sich von dieser Stellung nicht mehr frei machen können; vgl. die schon[493]) zitierte Note zu II A 9[a], p. 647, zu der übrigens noch zu bemerken ist, daß nicht vollkommen bekannt ist, was in den späteren Teilen der 2. Aufl. der méc. anal. von Lagrange selbst und was von *Delambre* herrührt, der die Drucklegung besorgt hat.

651) J. des sçavans 1758, p. 165; Paris hist. 1762[64], p. 442; Petrop. n. comm. 19 (1774[75]), p. 241. — Wenn *G. Riccati,* delle corde, Bologna 1767, sich für D. Bernoulli erklärt, so geschieht es von einer ganz unklaren Auffassung aus: einerseits glaubt er bewiesen zu haben (p. 72), daß die Gestalt der Saite, wenn sie nicht von Anfang an eine Sinuslinie ist, „ben presto" in diese übergeht; andererseits redet er doch davon (p. 79), daß eine Saite „gleichzeitig als Ganzes und in Teilen" schwingen könne.

652) Oeuvres 13, p. 116.

653) Opusc. math. 5 (1768), p. 511; daran anschließend ausführlicher und mit anderen Beispielen *C. Ph. Grüson,* Suppl. zu Eulers Differentialrechnung, Berlin 1798, p. 104.

**27. Fourier und seine Zeitgenossen.** Erst *J. Fourier* hat wieder behauptet[654]), daß auch „des fonctions entièrement arbitraires" sich in trigonometrische Reihen entwickeln lassen müßten, da auch für solche die Integraldarstellung der Koeffizienten Bedeutung habe; insbesondere auch Funktionen, die in verschiedenen Teilen des Intervalls verschiedenen Gesetzen gehorchten[655]), und zwar gleichgültig, ob dabei an der Übergangsstelle ein stetiger Anschluß stattfinde oder nicht[656]); auch z. B. gerade Funktionen in Reihen, die nur Sinusglieder enthalten[657]). Er erklärt auch ausdrücklich, daß damit der alte Streit (Nr. 26) zu *D. Bernoullis* Gunsten entschieden sei[658]).

Bei seinen Zeitgenossen fand Fourier zunächst wenig Zustimmung. Die Einwände, die man ihm machte, sind nie authentisch veröffentlicht worden[659]); man kann daher nur so viel sagen: An der Bestimmung der Koeffizienten durch gliedweise Integration der unendlichen Reihe können sie keinen Anstoß genommen haben, da diese damals allgemein geübt wurde. Dagegen müssen sie sich klar darüber gewesen sein, daß dieses Verfahren die Entwickelbarkeit nicht beweist, sondern voraussetzt[660]). Andererseits sind ihnen die Grenzübergänge,

---

654) Paris mém. 4 (1819/20), p. 301 (von 1811). Über die von Fourier zum Beweise angewendeten Schlußweisen vgl. man Nr. 15, 16.

655) Théorie, œuvres 1, p. 530.

656) Paris mém. 4, p. 311; théorie p. 218.

657) p. 306, bzw. 213. Vgl. z. B. (290).

658) p. 317, bzw. 224 und 513.

659) Das Urteil der Akademie über Fouriers Preisschrift von 1811 (moniteur universel vom 9. Januar 1812, p. 38) enthält darüber, nach einer Bemängelung seiner Ableitung der Differentialgleichungen, nur die Worte „son analyse, pour les intégrer, laisse encore quelque chose à désirer, soit relativement à la généralité, soit même du côté de la rigueur". Auch *Fr. Arago* gibt in seiner Gedächtnisrede auf Fourier (Paris mém. 14 (1838), p. CXII = Oeuvres 1, p. 341; von 1833) außer diesen Worten nur noch die Namen der Kommissionsmitglieder (Laplace, Lagrange, Legendre) und fügt hinzu, sie hätten dieses Urteil abgegeben „sans toutefois appuyer leur opinion d'aucune espèce de développement". — Was Lagranges ablehnende Haltung betrifft, so braucht man sich nicht mit Riemann auf mündliche Tradition zu berufen, sondern findet sie deutlich ausgesprochen an der in II A 9[a], Note 10, p. 647 zitierten Stelle von 1811. Vgl. jedoch[647]).

660) Man vergleiche die Äußerungen *S. D. Poissons* „il m'a semblé qu'elles [die Entwicklungsformeln] n'avaient point été démontrées d'une manière précise et rigoureuse" (J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 46); „on reconnaît aisément l'insuffisance de cette méthode" (ib., p. 448 (vgl. auch p. 507)); „cette manière de déterminer les coefficiens . . . suppose que l'on connaisse à priori la forme de la série" (conn. des temps pour 1836[33], add. p. 5) und: „la détermination des coefficiens suppose essentiellement que l'on sache d'après la forme des fonctions, qu'elles

deren Fourier sich zunächst zur Ableitung seiner Resultate bedient hatte, doch wohl bedenklich vorgekommen.

**28. Exkurs betr. die Entwicklung des Begriffs einer willkürlichen Funktion.** In Ergänzung des bereits II A 1, *Pringsheim*, Nr. 1—5 Gesagten sei noch erwähnt: Zwar hätte eigentlich schon die Formulierung der Fundamentalsätze der Differential- und Integralrechnung auf die Frage führen müssen, wie der Umfang des Begriffs Funktion zu umgrenzen ist, wenn diese Sätze allgemeine Gültigkeit behalten sollen. Indessen ist die Begriffsbildung tatsächlich nicht von dieser allgemeinen Frage ausgegangen, sondern von der speziellen, was die Wendung besagt: das Integral einer partiellen Differentialgleichung enthält nicht nur willkürliche Konstante, sondern auch willkürliche Funktionen. *J. d'Alembert*[661]) hielt an der Auffassung fest, daß das den Anfangsbedingungen

$$(485) \qquad y = \Phi(x) + \Psi(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \Phi'(x) - \Psi'(x)$$

genügende Integral der Differentialgleichung (481) in der Form (482) nur einen Sinn habe, wenn sich $\Phi$ und ebenso $\Psi$ für alle Werte des Arguments durch denselben *analytischen* Ausdruck darstellen läßt; *L. Euler*[662]) dagegen betonte, daß die Gleichung (484) für jedes be-

---

sont développables" (théorie de la chaleur, p. 186). Auch *G Frullani* bemerkt im Anschluß an seine Diskussion des in Nr. 24 erwähnten Paradoxons (mem. soc. ital. 18 (1820), p. 493), die Koeffizientenbestimmung durch gliedweise Integration setze voraus, daß das Integral des Restgliedes Null sei. Vgl. auch die Äußerungen von *G. de Pontécoulant* (théorie analytique du système du monde 3, Paris 1834, p. 110): „la méthode . . . s'appliquerait . . . au développement de toute fonction donnée . . . du moment qu'on est d'avance assuré que cette fonction peut être exprimée par une semblable série"; von *Ch. Sturm* (j. de math. 1, 1836, p. 411): „Fourier et d'autres géomètres semblent avoir méconnu l'importance et la difficulté de ce problème [des Möglichkeitsbeweises] qu'ils ont confondu avec celui de déterminer les coefficients"; von *A. A. Cournot* (traité de la théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 211): „selon la juste remarque de M. Poisson, la méthode . . . repose sur une hypothèse qui a besoin d'être démontrée et qui consiste à admettre qu'une fonction quelconque peut se développer . . .".

661) Berl. hist. 1747[49], p. 214; 1750[52], p. 358; Opusc. math. 1, Paris 1761, p. 29; 4 (1768), p. 134; 5 (1768), p. 138. — Die Frage, welcherlei Rechnungsoperationen bei der Bildung eines solchen analytischen Ausdrucks zulässig sein sollen, hat d'Alembert nicht beantwortet, nicht einmal sich gestellt.

662) Berl. hist. 1748[50], p. 69 = N. acta erud. 1749, p. 512; Berl. hist. 1753[55], p. 217; 1765[67], p. 307; Taur. misc. $3_2$ (1762/65[66]), p. 1; Petrop. n. comm. 11 (1765[67]), p. 6; 17 (1772[73]), p. 381; Instit. calc. integr. 3 (1770), p. 237; Petrop. acta 1779[83], p. 116. — Die Frage, inwiefern durch eine nur *graphisch* gegebene Kurve eine Funktion *arithmetisch* bestimmt sei, ist damals nicht gestellt worden.

stimmte $t$ eine geometrisch konstruierbare Kurve auch dann vorstelle, wenn die Funktionen $\Phi$, $\Psi$ nur *graphisch* gegeben seien, und daß es also unabweisbar sei, in diesem „novum analyseos genus" — d. h. eben der Theorie der partiellen Differentialgleichungen — auch „functiones mixtas vel irregulares" zuzulassen. Dem trat freilich die Frage gegenüber, inwieweit man das Recht hat, auf solche Funktionen Infinitesimalbetrachtungen anzuwenden. *J. L. Lagrange*[663]) suchte, um diese Frage zu umgehen, die Rechnung so zu führen, daß solche Betrachtungen nicht direkt auf die gegebenen Anfangsfunktionen angewendet zu werden brauchen; doch sind diese Versuche trotz aller aufgewendeten analytischen Gewandtheit im Prinzip als gescheitert anzusehen, insofern es nicht möglich sein wird, seine Schlüsse anders als unter einschränkenden Voraussetzungen über die Natur jener Funktionen zu rechtfertigen[664]). Die Diskussion hat sich dann namentlich der spezielleren Frage zugewandt, inwieweit es zulässig sei, anzunehmen, daß in den Differentialquotienten der gegebenen Anfangsfunktionen, namentlich dem ersten und zweiten, an einzelnen Stellen Sprünge vorkommen[665]) (daß die gegebene Anfangsfigur Ecken oder Punkte mit zwei verschiedenen Krümmungsradien aufweise); *d'Alembert*[666]) bestreitet das, *Lagrange* nimmt es zuerst an, läßt sich aber dann von *d'Alembert* überzeugen[667]), *Euler*[668]) und *D. Bernoulli*[669]) schieben die Frage

663) Taur. misc. 1, 1759; 2 (1760/61); 3 (1762/65[66]) = Oeuvres 1, p. 37, 151, 539; auch noch in der 2. Auflage der mécanique analytique, Paris 1811 (Oeuvres 11, p. 422, 439).

664) Vgl. namentlich in der ersten und dritten Abhandlung (Oeuvres 1, p. 97, 543) den Grenzübergang zu $m = \infty$ (Übergang von der trigonometrischen Interpolationsformel zur unendlichen Reihe) und in der zweiten (p. 166) den Schluß, daß $\int_0^\pi f(x) \sin nx\, dx$ nur dann für alle ganzzahligen Werte von $n$ gleich Null sein könne, wenn $f(x) \equiv 0$ ist.

665) Stetigkeit aller Ableitungen und Entwickelbarkeit in eine gewöhnliche Potenzreihe, also eine spezielle Art analytischer Darstellbarkeit, galten damals noch als gleichbedeutend.

666) Opusc. math. 1, Paris 1761, p. 17; ib. 5 (1768), p. 141 (er behauptet hier, die Unzulässigkeit sei allgemein „de l'aveu de tous les géomètres" anerkannt); Taur. misc. $3_2$ (1762/65[66]), p. 389; Berl. hist. 19 (1763[70]), p. 240 (von 1769).

667) Vgl. Taur. misc. 2 (1760/61) = Oeuvres 1, p. 324, 331; dann seinen Briefwechsel mit d'Alembert aus dieser Zeit, Oeuvres 13, p. 5—38, endlich d'Alemberts eben genannten Aufsatz Taur misc. $3_2$, der mit den Worten beginnt: „je suis charmé que nous soyons enfin presque absolument d'accord".

668) Das erwähnt *d'Alembert*, Berl. hist. 19, p. 240. Dieselbe Auffassung berührt auch *Condorcet*, Paris hist. 1771[74], p. 74.

669) Petrop. n. comm. 19 (1774), p. 241: „tolle modo omnem de infinito

als physikalisch gleichgültig zur Seite. *Condorcet*[670]) nnd *P. S. de Laplaee*[671]) geben, ersterer für die Form $F(x, y, z) = 0$, letzterer für die Form $z = f(x, y)$ des Integrals, die bestimmtere Antwort: die im allgemeinen Integral einer partiellen Differentialgleichung $n^{\text{ter}}$ Ordnung auftretenden „willkürlichen" Funktionen müssen mit ihren Ableitungen bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung einschließlich stetig sein; sonst verliere die Differentialgleichung ihren Sinn. Andererseits ist *T. Valperga di Caluso*[672]) wieder für die Zulassung von Funktionen eingetreten, die in verschiedenen Teilen ihres Definitionsbereichs verschiedenen analytischen Gesetzen gehorchen. Die beiden Fragen sind dann, auf Veranlassung einer Petersburger Preisaufgabe[673]), von *L. Arbogast*[674]) aus-

---

amphiboliam . . . et omnem inter nos tolles controversiam". Ähnlich *G. Riccati* in der sonst mathematisch nichts Neues bietenden Schrift delle corde, Bologna 1767, p. IX: „la conformità della mia[!] soluzione coi fenomeni ci fa toccare con mano che ai minimi geometrici si possono sempre sostituire i minimi fisici".

670) Paris hist. 1771[74], p. 69.

671) Ib. 1779[82] = Oeuvres 19, p. 82; auch noch Théorie analytique des probabilités, livre 1, Nr. 19 (p. 87 der Ausgabe von 1847). *Condorcet* rechnet mit Differentialien, *Laplace* versucht den Übergang von einer Differenzengleichung her; im Grunde ist beides dasselbe, und der Versuch, genau festzustellen, welche Voraussetzungen eigentlich implizite gemacht sind, würde kaum der Mühe lohnen. — Vgl. auch Laplaces sich auf diese Frage beziehende Äußerung Paris mém. $11_1$ (1810[11]) = Oeuvres 12, p. 359: „les résultats transcendants de l'Analyse sont, comme toutes les abstractions de l'entendement, des signes généraux dont on ne peut déterminer la véritable étendue qu'en remontant par l'Analyse métaphysique aux idées élémentaires qui y ont conduit, ce qui présente souvent de grandes difficultés; car l'esprit humain en éprouve moins encore à se porter en avant qu'à se replier sur lui-même". — Über das Auftreten entsprechender Fragen bei Untersuchungen von *L. Euler* und *G. Monge* über Differentialgleichungen der Flächentheorie vgl. man Bd. 4 von *M. Cantors* Geschichte der Mathematik, Leipz. 1908, p. 553 (*V. Kommerell*), 882 (*C. R. Wallner*).

672) Torino mem. 1786/87, p. 571. Über den Versuch von *J. Charles,* Paris mém. prés. 10, 1785, p. 586, solche Funktionen analytisch darzustellen, vgl. man den Bericht von *C. R. Wallner* in M. *Cantors* Geschichte der Mathematik 4, Leipz. 1908, p. 881; über die späteren ähnlichen Versuche von G. Libri vgl. man Nr. 104.

673) Petrop. n. acta 5 (1787[89]), p. 5.

674) Mém. sur la nature des fonctions arbitraires qui entrent etc., St Petersb. 1791, p. 9; ebenso, mit derselben Terminologie, *Prony,* J. éc. polyt. cah. 4, an V, p. 511. — Vorher war „discontinue" bald in dem einen, bald in dem andern Sinne gebraucht worden, meist aber in dem auch von Arbogast noch festgehaltenen, während für das andere Wendungen wie „que la fonction ne fasse point de saut brusque" u. dgl. gebraucht worden waren. Die Festlegung des heutigen Gebrauchs von kontinuierlich und diskontinuierlich rührt erst von *Cauchy* her. Noch *Fourier* (Oeuvres 1, p. 396) gebraucht discontinue im Sinne von Arbogast (an den andern Stellen, p. 221, 394 handelt es sich um Funktionen, die in beiderlei

einandergehalten worden: er nennt eine Funktion „discontinue", wenn sie in verschiedenen Intervallen verschiedenen Gesetzen gehorcht, „discontigüe", wenn sie eine Unstetigkeit [er denkt nur an solche „erster Art"] im heutigen Sinne des Wortes aufweist. Er erläutert an den einfachsten Beispielen, daß die in der Lösung einer partiellen Differentialgleichung auftretende Funktion sowohl „discontinue" als „discontigüe" sein könne[675]); insbesondere meint er[676]), bei der Gleichung (483) sei ein Sprung in den Werten von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ sehr wohl zulässig, sie verlange dann nur, daß $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ für dieselben Argumentwerte denselben Sprung aufweise. *A. de Lorgna* dagegen[677]) will die diskontinuierlichen Funktionen aus der Analysis verbannen und sie nur in der Geometrie und in den Anwendungen der Mathematik zulassen.

Berichte über diese ganze Diskussion geben *S. F. Lacroix*[678]) und *A. de Morgan*[679]). Wenn letzterer meint, „diskontinuierliche" Funktionen ließen sich mit beliebiger Annäherung durch kontinuierliche ersetzen, so hat er das freilich nicht bewiesen; ganz richtig ist dagegen seine Bemerkung[680]): daß man auf einer kontinuierlichen Fläche „diskontinuierliche" Linien ziehen könne, sei selbstverständlich; also könne man unter Umständen auch durch eine diskontinuierliche Linie eine kontinuierliche Fläche legen.

Zu einem gewissen Abschluß ist diese Diskussion erst durch *J. Fourier* gelangt. Fourier hat einerseits die schon länger bekannten

---

Sinn „discontinues" sind); ebenso *J. Challis* (Cambr. trans. 3 (1830), p. 271), *S. D. Poisson* (Mécanique 2 (1833), p. 305; chaleur p. 173), *G. Peacock* (Brit. assoc. rep. f 1833, p. 258); selbst *Cauchy* einmal (Paris C. R. 15, 1842, p. 67 = Oeuvres (1/7, p. 172). *J. L. Raabe* dagegen (Differential- u. Integralrechnung 1, Zürich 1839 p. 5) gebraucht das Wort im Sinne von Cauchy, allerdings in ungenauer Formulierung.

675) p. 12.

676) p. 77. Er nimmt keine Stellung zu der Frage, ob eine Unstetigkeit in den Werten von $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ mit den fundamentalen Vorstellungen der Mechanik vereinbar sei, was *d'Alembert* schon Opusc. 1, p. 22 bestritten, *Lagrange*, Taur. misc. $2_2$ = Oeuvres 1, p. 330 durch den Hinweis darauf verteidigt hatte, daß schon bei Ableitung der Differentialgleichung die Beschränkung auf unendlich kleine Schwingungen eingeführt sei.

677) De functionibus arbitrariis calculi integralis dissertatio, Petrop. 1791 (anonym; wegen der Autorschaft vgl. man Petrop. n. acta 8 (1790[94]), p 5; 9 (1791[95]). p. 10).

678) Traité du calcul différentiel et du calcul integral, (2e éd.) 2 (1814), p. 685; 3 (1819), p. 307.

679) Differential and integral calculus, Lond. 1836/41, p. 727.

680) p. 730.

Beispiele von trigonometrischen Entwicklungen, die in verschiedenen Konvergenzbereichen verschiedene Stücke analytischer Funktionen darstellen, zusammengestellt und durch neue vermehrt[681]); andererseits immer wieder hervorgehoben[682]), daß es sich dabei nicht um vereinzelte exzeptionelle Erscheinungen handle, sondern daß die Möglichkeit der Koeffizientenbestimmung durch bestimmte Integrale, vermöge der Definition eines solchen Integrals durch einen Flächeninhalt, die Möglichkeit der Entwicklung für beliebige derartige Funktionen dartue, und daß überhaupt die Vorstellung einer solchen „fonction séparée ou partie de fonction“ keineswegs den „allgemeinen Prinzipien des Kalkuls“ entgegengesetzt, sondern vielmehr für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen unentbehrlich sei. Dabei denkt er aber, soviel ich sehe, meist doch nur an abteilungsweise analytische Funktionen[683]).

*J. Challis*[674]) nimmt die Frage nach der Zulässigkeit „diskontinuierlicher“ Funktionen oder, wie er sich ausdrückt, nach ihrer „Existenz“ noch einmal auf. Er meint, es sei unmöglich, diese Existenz auf rein analytischem Wege zu beweisen, da schon die Prinzipien der Differential- und Integralrechnung auf der Betrachtung „algebraischer“ Funktionen beruhten. Doch scheint er, soweit es möglich ist, seinen ziemlich unklaren Auseinandersetzungen zu folgen, nur an der Ausdrucksweise Anstoß zu nehmen, daß man solche Gebilde als Funktionen bezeichnet; gegen die Untersuchung von gemischten Linien und die Darstellung der Anfangsbedingungen bei der Integration von partiellen Differentialgleichungen durch sie hat er nichts einzuwenden.

Wie es übrigens oft in solchen Fällen zu gehen pflegt: der Epoche, der die Schwierigkeiten unübersteiglich geschienen hatten, folgte eine andere, die sie unterschätzte. So setzt z. B. *G. Piola*[684]) auseinander, ohne sich irgendwelche Sorgen um Konvergenzfragen zu machen: man könne doch die Werte einer „diskontinuierlichen“ Funktion (im alten Sinne des Wortes) für eine beliebige Anzahl gegebener Werte des Arguments durch Interpolationsformeln darstellen; lasse man dann $n$ über alle Grenzen wachsen, so erhalte man eine analytische Darstellung der Funktion selbst.

---

681) Paris mém. 4 (1819/20[24]) (Preisschrift von 1811), p. 306 ff.; théorie Nr. 223 ff. = Oeuvres 1, p. 213.

682) Paris mém. 4 (1819/20[24]), p. 301; Théorie Nr. 220, Nr. 426, Nr. 428, 13 = Oeuvres 1, p. 209, 522, 530: „nous avons insisté sur cette conséquence dès l'origine de nos recherches jusqu'à ce jour“.

683) Nur Théorie Nr. 417 = Oeuvres 1, p. 500 finde ich die Wendung: „la onction $f(x)$ représente une suite de valeurs, ou ordonnées, dont chacune est arbitraire“.

684) Mem. soc. ital. $20_2$ (1831), p. 573.

Um dieselbe Zeit ist auch an einer Reihe von Beispielen beobachtet worden, daß ein als Funktion eines oder mehrerer Parameter betrachtetes bestimmtes Integral in verschiedenen Teilen seines Definitionsbereichs Stücken verschiedener „elementarer" Funktionen gleich sein kann. So ist, soviel ich sehe, zuerst von *G. Bidone*[685]) und von *J. J. Fourier*[686]) bemerkt worden, daß

$$(486)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin x\xi}{\xi}\,d\xi = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x > 0, \end{cases}$$

von *Fourier* ferner[687]), daß:

$$(487)\qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \xi}{\xi}\cos x\xi\,d\xi = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| > 1, \\ 0 & \text{für } |x| < 1, \end{cases}$$

und daß[688])

$$(488)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos x\xi + \xi \sin x\xi}{1+\xi^2}\,d\xi = \begin{cases} e^{-x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

von *S. D. Poisson*, daß[689]):

$$(489)\qquad \int_0^\pi \frac{\sin\alpha\,d\alpha}{\sqrt{1-2r\cos\alpha + r^2}} = \begin{cases} 2 & \text{für } r \leqq 1, \\ \frac{2}{r} & \text{für } r \geqq 1, \end{cases}$$

sowie[690]), daß das Integral

$$(490)\qquad \int_{-1}^{+1} [(1-2ax+x^2)(1-2bx+x^2)]^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

---

685) Torino mem. 1811/12, p. 279.

686) Paris mém. 4 (1819/20[24]) (Preisschrift von 1811), p. 499; Théorie de la chaleur Nr. 356 = Oeuvres 1, p. 463. Vgl. auch *A. de Morgan,* Diff. and int. calc., Lond. 1836/42, p. 572.

687) Er erhält die Gleichung Paris mém. 4, p. 490; Théorie Nr. 348 = Oeuvres 1, p. 394 aus dem Reziprozitätssatz (Nr. 59) und verifiziert sie dann Paris mém. 4, p. 498; Théorie Nr. 357 = Oeuvres 1, p. 403 mit Hilfe von (486); ebenso *A. A. Cournot,* Théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 189. Bei *Legendre* exerc. de calc. int. 1 (1811) stehen die Formeln (486) und (488) nur für positive $x$; ebenso die erstere bei *S. D. Poisson,* J. éc. polyt. cah. 16 (1813), p. 221, der aber dann ebenda 18 (1820), p. 328, wo er auch das für negative Werte von $x$ geltende Resultat zu benutzen hat, sich doch auf die genannte Stelle beruft.

688) Ann. chim. phys. 3 (1816), p. 363; in anderer Form Théorie Nr. 358 = Oeuvres 1, p. 404.

689) J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 504. Reproduziert von *A. Cournot,* Théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 190.

690) Paris mém. 6 (1823[27]), p. 601 (von 1826).

vier verschiedene Werte hat, je nachdem $a$ und $b$ größer oder kleiner als 1 sind; von *A. de Morgan*[691]), wenn nicht schon früher, daß:

$$(491)\qquad \int_0^\pi \log(1 - 2r\cos\alpha + r^2)\,d\alpha = \begin{cases} 0 \text{ für } r \leqq 1, \\ 2\pi \log r \text{ für } r \geqq 1. \end{cases}$$

Gleichwohl hat *A. M. Legendre*, als *Cauchy* unter den Beispielen für die durch seine Residuensätze zu erhaltenden neuen Resultate die Gleichung

$$(492)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin x\xi}{\sin b\xi}\frac{d\xi}{1+\xi^2} = \frac{\pi}{2}\frac{\mathfrak{Cos}\, br - e^{-x}}{\mathfrak{Sin}\, b}$$

mit der Determination „$r$ gleich der absolut genommenen Differenz zwischen $\frac{x}{b}$ und der nächstgelegenen geraden ganzen Zahl" angab[692]), darin eine Schwierigkeit gefunden[693]) und *Cauchy*, bis dieser die Geduld verlor[694]), zu weiteren Erörterungen darüber veranlaßt, wie so die für verschiedene Intervalle geltenden verschiedenen Formeln sich aus seiner Methode mit Notwendigkeit ergeben[695]). Nachher hat *Legendre* diese Resultate, in seine Sprache übersetzt, in sein Buch aufgenommen[696]).

Auch andere Mathematiker dieser Zeit stehen den aus diesen Eigentümlichkeiten von Integralen und Reihensummen entspringenden Schwierigkeiten öfter ratlos gegenüber; so *P. Paoli*[697]) und *G. Piola*[698]).

---

691) Diff. and integral calculus, p. 676.

692) Paris mém. prés. 1 (1827), p. 442, 470 (von 1814).

693) Vgl. seinen der Abhandlung vorgedruckten Bericht an die Akademie, ib. p. 326: „La loi de continuité est violée."

694) Vgl. die Schlußworte p. 506: „Ce qui précède suffit; c'est pourquoi je n'insisterai pas d'avantage sur cet objet."

695) p. 485, 495, 499.

696) Exerc. de calcul intégral 2 (1817), p. 174 (publ. 1815). Daß *Legendre* den Gebrauch der Residuensätze in seiner Darstellung vermeiden kann, liegt nur daran, daß er die Sätze über die Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen ohne Beweis auch auf transzendente Funktionen anwendet und nachher doch den so erhaltenen Formeln bestimmte Gültigkeitsgrenzen zuschreibt, obwohl diese aus seinem Raisonnement keineswegs folgen.

697) Mem. soc. ital. $20_1$ (1828), p. 176.

698) Ib. $20_2$ (1831), p. 603: „Non sentendomi per ora forze bastanti per tentarne una chiara esposizione." — Wenn *G. Frullani* ebd. p. 696 ein falsches Resultat erhält, indem er die Entwicklung von $x \sin x$ nach den Cosinus der Vielfachen von $x$, nach Division mit $1 + x^2$, zwischen den Grenzen 0 und $\infty$ gliedweise integriert, so liegt das, wie er selbst bemerkt, daran, daß die Ausgangsreihe nicht in dem ganzen Integrationsbereich die von ihm angenommene Summe hat.

Andere Integrale, bei welchen dieselbe Eigentümlichkeit zur Beobachtung kam, haben nur als Hauptwerte Sinn; so namentlich die hier unter Nr. 59 besprochenen.

Beispiele von Doppelintegralen, die verschiedenen algebraischen Funktionen eines Parameters $k$ gleich sind, je nachdem $|k| < 1$ oder $> 1$ ist, finden sich bei *A. Cauchy*[699]).

Viel später[700]) kommt er noch einmal auf die entsprechenden Verhältnisse bei einfachen Integralen zurück; er führt hier außer (488) noch die beiden Beispiele an:

$$\text{(493)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-xr^2)\,dr = \sqrt{\frac{\pi}{x}} \text{ nur für } x > 0;$$

$$\text{(494)} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1 - re^{xi}} = \begin{cases} 2\pi \text{ für } |r| < 1, \\ 0 \text{ für } |r| > 1. \end{cases}$$

Inzwischen war auch bemerkt worden, daß die Eigenschaft, in verschiedenen Teilen des Konvergenzgebietes Teile verschiedener analytischer Funktionen darzustellen, auch andern als trigonometrischen Reihen zukommen kann. So hat *R. Murphy*[701]) darauf hingewiesen, daß die Summe der Reihe:

$$\text{(495)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n} \frac{(\alpha\beta)^n}{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{n-1}}$$

stets gleich der absolut kleineren der beiden Größen $\alpha$, $\beta$ ist; also z. B.[702])

$$\text{(496)} \qquad \frac{1}{2}(1-x^2) + \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}(1-x^2)^2 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}(1-x^2)^3 + \cdots = \begin{cases} 1 + x \text{ für } -1 < x < 0, \\ 1 - x \text{ für } \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

---

699) In den Noten von 1827 zu seiner Preisschrift von 1815, Paris mém. prés. 1 = Oeuvres (1) 1, p. 181, 185 (vgl. hier Nr. 64). Er erzählt bei dieser Gelegenheit, er sei bei seinen ersten Versuchen zur Behandlung des Wellenproblems dadurch aufgehalten worden, daß Entwicklung eines solchen Integrals nach Potenzen von $k$ und gliedweise Integration ein nur für $|k| < 1$ gültiges Resultat liefert.

700) Exerc. d'anal. 4 (1847), p. 412.

701) Cambr. trans. $4_3$ (1833), p. 375. Er wendet den damals bekannten Satz, daß die Lagrangesche Reihenumkehrungsformel [unter gewissen hier erfüllten Voraussetzungen] die absolut kleinste Wurzel der aufzulösenden Gleichung liefert, auf eine quadratische Gleichung an.

702) p. 383. Er bemerkt selbst, daß diese Reihe sonach dasselbe leiste wie Fouriers Gleichung (486).

*A. de Morgan* erhält Reihen dieser Art ausgehend von Untersuchungen über Funktionalgleichungen der Form:

$$\varphi(x) = \mu(x) + \nu(x)\varphi(\alpha(x)), \tag{497}$$

in der $\mu$, $\nu$, $\alpha$ gegebene Funktionen, $\varphi$ die gesuchte bedeuten; er findet so[703]):

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{x^2}{1+x^4} + \frac{x}{1+x^2}\frac{x^2}{1+x^4}\frac{x^4}{1+x^8} + \cdots \tag{498}$$

$$\equiv x(1-x^2)\left[\frac{1}{1-x^4} + \frac{x^2}{1-x^8} + \frac{x^6}{1-x^{16}} + \cdots\right] = \begin{cases} x \text{ für } |x| < 1; \\ \frac{1}{x} \text{ für } |x| > 1; \end{cases}$$

und[704]):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n x}{(1+a^n x)(1+a^{n+1}x)} = \begin{cases} \frac{1}{(a-1)(x+1)} \text{ für } |a| > 1, \\ \frac{1}{(1-a)(x+1)} \text{ für } |a| < 1. \end{cases} \tag{499}$$

*O. Schlömilch*[705]) geht von der Bemerkung aus, daß die Funktion

$$z = \frac{2x}{1+x^2} \tag{500}$$

sich nicht ändert, wenn man $x$ mit $\frac{1}{x}$ vertauscht, daß man aber gleichwohl Funktionen, die diese Eigenschaft nicht haben, nach Potenzen dieses $z$ entwickeln könne, z. B. gleich die Funktion

$$x = \frac{1}{z}\left(1 - \sqrt{1-z^2}\right) \tag{501}$$

selbst; so erhält er:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n+2)}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^{2n+1} = \begin{cases} x \text{ für } |x| < 1, \\ \frac{1}{x} \text{ für } |x| > 1. \end{cases} \tag{502}$$

Später[706]) zeigt er, daß entsprechendes immer eintritt, wenn man eine Funktion nach Potenzen einer andern entwickeln will und wenn dabei zu zwei Werten von $x$, zu denen derselbe Wert der letzteren gehört, nicht auch derselbe Wert der ersteren gehört — was dann sachlich, wenn auch nicht in der Ausdrucksweise, mit der Auffassung von *Murphy*[701]) übereinkommt. Als Beispiel nennt er die Entwicklung von $e^x$ nach Potenzen von $\sin x$.

---

703) In der ersten Form Cambr. trans. 6 (1836), p. 190; in der zweiten diff. and int. calc. 207), p. 229.

704) Cambr. trans. 6, p. 191.

705) Arch. Math. Phys. 10 (1847), p. 45.

706) Ebd. 14 (1850), p. 146.

Daß man mit Hilfe von Integralen wie (486) eine Funktion analytisch darstellen kann, die innerhalb eines Intervalls gleich einer gegebenen Funktion, außerhalb desselben gleich null ist, hat *P. G. Lejeune-Dirichlet* zur Grundlage seiner Theorie der Diskontinuitätsfaktoren (Nr. **104**) genommen; daß man auch eine Funktion darstellen kann, die in zwei verschiedenen Intervallen Teilen von zwei willkürlich gegebenen Funktionen gleich ist, z. B.

$$(503)\qquad \varphi(x)\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin a\xi\cos x\xi}{\xi}\,d\xi + \psi(x)\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin x\xi\cos a\xi}{\xi}\,d\xi = \begin{cases}\varphi(x) & \text{für } x < a,\\ \psi(x) & \text{für } x > a,\end{cases}$$

scheint zuerst *O. Schlömilch* ausgesprochen zu haben[707]).

Durch alle diese Einzelerfahrungen mußte die Forderung, genau zu definieren, was eigentlich unter einer „willkürlichen“ Funktion verstanden werden solle, allmählich sich aufdrängen. Ausdrücklich erhoben hat sie, soviel ich sehe, zuerst *J. Ivory* bei Gelegenheit der Diskussion über den Gültigkeitsbereich der Entwicklungen nach Kugelfunktionen[708]). Doch wird sie selbst von *P. G. Lejeune-Dirichlet*[709]) nur unvollständig erfüllt: er redet zwar bei der graphischen Darstellung einer Funktion durch eine Kurve davon, daß man sich diese „ganz gesetzlos“ gezogen denken könne, sagt aber dann, eine solche Funktion sei für ein Intervall nur dann als vollständig bestimmt anzusehen, wenn sie entweder für den ganzen Umfang desselben graphisch gegeben ist, oder mathematischen, für die einzelnen Teile desselben geltenden Gesetzen unterworfen wird; er kommt also, sobald er von der Berufung auf die graphische Darstellung absehen will, doch wieder

707) Arch. Math. 10 (1847), p. 323. Schlömilch bespricht den Fall, daß die Entwicklung von $\varphi(x)$ nach Potenzen von $x$ für $x > a$ divergiert, um zu schließen, daß die Potenzentwicklung einer Funktion außerhalb ihres Konvergenzbereichs nichts mit der Funktion zu tun zu haben braucht [wenn man Funktionen wie die durch (503) definierte zuläßt].

708) Phil. mag. (2) 2 (1827), p. 94: „Fonctions entièrement arbitraires. This is rather vague and indefinite.“

709) Repert. Phys. 1 (1837), p. 152 — Werke 1, p. 135; fast wörtlich ebenso auch in der von *G. Arendt* (Braunschw. 1904) herausgegebenen Vorlesung über bestimmte Integrale von 1854, p. 4. In seiner ersten Abhandlung über trigonometrische Reihen gibt er überhaupt keine Definition dessen, was er unter „Funktion“ verstehen will; doch redet er am Schlusse (J. f. Math. 4 (1829), p. 169 = Werke 1, p. 132) von der Funktion, die für rationale Argumentwerte gleich einer Konstanten $c$ und für irrationale gleich einer andern Konstanten $d$ ist.

auf die ältere Auffassung von der Zusammensetzung aus Stücken analytischer Funktionen zurück. Erst *A. A. Cournot* hat sich davon frei gemacht; er sagt[710]): „nous concevons qu'une grandeur peut dépendre d'une autre, sans que cette dépendance soit de nature à pouvoir être exprimée par une combinaison des signes de l'algèbre.“ Man könne also[711]) „imaginer une théorie qui aurait pour objet la discussion des propriétés générales des fonctions“; wenn man sich dazu entschließe, komme man über viele Schwierigkeiten und Streitigkeiten hinweg. Dann hat *A. Cauchy*[712]) auseinandergesetzt, daß der alte Begriff einer fonction discontinue „est loin d'offrir une précision mathématique“; es könne sehr wohl vorkommen, daß verschiedene Formeln für gewisse Werte des Arguments dieselbe Funktion vorstellen, für andere verschiedene Funktionen. Weniger bestimmt sind die Auseinandersetzungen von *A. Pioch*[713]). Er scheint unter „fonction ordinaire“ das zu verstehen, was man jetzt eine elementare Funktion nennt, und erklärt, solche Funktionen könnten nur da unstetig werden, wo sie unendlich werden. Man könne sich aber doch Funktionen vorstellen, bei welchen das nicht der Fall ist; also könne man nicht „tous les lieux géométriques en nombre infini que la pensée conçoit et réalise“, mit Hilfe derjenigen Funktionen darstellen, die man in der analytischen Geometrie und der Differentialrechnung betrachtet.

Eigentümlich ist die Terminologie von *A. de Morgan.* Er definiert[714]): „every expression which in any way contains $x$, or depends for its value upon the value of $x$, is called a function of $x$.“ Daß er dabei aber doch nur an algebraische Funktionen und aus diesen ableitbare denkt, zeigt die bald darauf folgende Stelle[715]): „when any function of $x$ is given, we can determine by common algebra the value which the function receives when $x$ receives any given value.“ Nach einer Erörterung über unbestimmte Formen folgt dann die Definition: wenn die Funktion für $x = a$ „im gewöhnlichen arithmetischen Sinn der Worte“ den Wert $A$ hat, so heißt dieser Wert ein gewöhnlicher Wert der Funktion; aber „when by making $x$ sufficiently

710) Théorie des fonctions 1, Paris 1841, p. 5.

711) p. 15.

712) Paris C. R. 18 (1844), p. 116 = Oeuvres (1) 8, p. 145.

713) Brux. mém. 15 (1850), p. 7.

714) The differential and integral calculus, Lond. 1836/41, p. 34.

715) p 44. Er glaubt aus diesen „Postulaten“ schließen zu können, jede „Funktion“ sei das, was man jetzt abteilungsweise differentiierbar nennt, meint aber p. 48 selbst, man könne dagegen Einwände erheben, je nach dem Sinn, in dem man die Postulate verstehe.

near to $a$, we can make the function as near as we please to $A,\ldots,A$ is called a singular value". Den Weg zur analytischen Behandlung der so definierten Funktionen bahnt er sich durch Einführung von 3 „Postulaten" als Erfahrungsresultaten:

1. Wenn $\varphi(a)$ ein gewöhnlicher Wert ist, kann $h$ immer so klein genommen werden, daß zwischen $\varphi(a)$ und $\varphi(a+h)$ kein singulärer Wert liegt.

2. Wenn $\varphi(a)$ ein endlicher Wert ist, kann man $h$ immer so klein annehmen, daß $\varphi(a+h)$ so nahe an $\varphi(a)$ liegt, als man will, und daß $\varphi(x)$ von $x=a$ bis $x=a+h$ der Größe nach immer zwischen $\varphi(a)$ und $\varphi(a+h)$ liegt.

3. Wenn eine Funktion für alle $x$ zwischen $a$ und $a+h$ einem Gesetz folgt, so folgt sie diesem Gesetz durchaus.

Das zweite bezeichnet er als „law of continuity of value", das dritte als „law of continuity of form".

Sonst gebrauchen englische Schriftsteller um diese Zeit die Worte „continuity" und „discontinuity" häufig, ohne genau zu definieren, was sie darunter verstehen; meist liegt wohl eine Vermischung der alten und der neuen Bedeutung vor. Dabei erscheint öfters die Formulierung „what is true up to the limit, is true as the limit" als Axiom; so bei *J. R. Young*[716]), während *G. Boole*[717]) findet, es beruhe auf einer „unsound induction" und ließe sich nur aufrechterhalten, wenn man „abandon the dominion of reason for that of intuition" wolle. *G. G. Stokes*[718]) dagegen schließt sich ausdrücklich der neuen Auffassung des Wortes an, mit dem Hinzufügen, es scheine ihm von der äußersten Wichtigkeit für die Anwendung partieller Differentialgleichungen auf physikalische und selbst auf geometrische Probleme, „to contemplate functions apart from all idea of algebraical expression".

Auch auf dem Kontinent hat der Sprachgebrauch noch längere Zeit geschwankt. Manche Autoren, so *J. M. C. Duhamel*[719]) und *O. Schlömilch*[720]),

716) Cambr. trans. 8 (1847), p. 429, 437.

717) Dubl. trans. 21 (1848), p. 124 (von 1846).

718) Phil. mag. (3) 33 (1848), p. 352 = papers 2, p. 54; der Sache nach ebenso Cambr. trans. $8_5$ (1849), p. 535 (von 1847) = papers 1, p. 240.

719) Cours d'analyse 1, Paris 1841, p. 5.

720) Algebraische Analysis, Jena 1845, p. 39. Nachher, p. 41, gibt er auch eine analytische Definition, die nur

$$\lim_{\delta=0}\,[f(x-\delta)-f(x+\delta)]=0$$

fordert, also Funktionen wie $\frac{1}{x^2}$ oder $\cos\frac{1}{x}$ unter die stetigen zählen würde; nachdem Schloemilch, Arch. Math. Phys. 12 (1849), p. 431, das selbst bemerkt bezeichnen als kontinuierlich oder stetig[721]) eine Funktion dann, wenn sie nicht von einem Wert zu einem andern übergehen kann, ohne alle Zwischenwerte zu durchlaufen; für abteilungsweise monotone Funktionen (an andere denken sie nicht) ist diese Definition mit der Cauchyschen äquivalent.

*A. A. Cournot* faßt den Stetigkeitsbegriff geometrisch[722]), gibt aber dann doch eine — freilich etwas unbestimmt formulierte — analytische Definition. Übrigens unterscheidet er[723]) „solutions de continuité du $1^{er}$, $2^{e}$,..., ordre", je nachdem die Funktion selbst, ihre erste, zweite Ableitung unstetig ist.

Andererseits ist das Wort „kontinuierlich" selbst auch wohl in einem engeren Sinne gebraucht worden, so versteht z. B. *Franke*[724]) darunter eine Funktion, die „um eine unendlich kleine Größe derselben Ordnung zu- oder abnimmt, als die Veränderliche $x$ selbst". Noch enger faßt es *M. Ohm*[725]), wenn er zu den kontinuierlichen Funktionen nur die elementaren rechnet und die unendlichen Reihen, die nach Potenzen eines allgemeinen Buchstabens fortschreiten, und behauptet, daß nur für solche „das unbedingte allgemeine Rechnen" zulässig sei.

A. *Cauchy* rekapituliert später[726]) noch einmal seine Stetigkeitsdefinition und erläutert dabei, wie sie sich auf die verschiedenen Zweige („types") einer mehrdeutigen Funktion anwenden lasse. Auch kommt

---

hatte, ist die Sache in den späteren Auflagen geändert. An der genannten Stelle im Archiv kritisiert er Cauchys Stetigkeitsdefinition; er übersieht dabei, daß Cauchy die Funktion als eindeutig definiert voraussetzt und also $f(a+0)$ und $f(a-0)$ nicht beide zugleich als Werte von ihr ansehen kann.

721) Wer eigentlich stetig als deutsche Übersetzung von continu eingeführt hat, kann ich nicht angeben; jedenfalls findet sich das Wort bei *B. Bolzano* rein analytischer Beweis des Lehrsatzes . . ., Prag 1817, p. 11 (vgl. darüber *O. Stolz,* Math. Ann. 18 (1881), p. 261) und bei *P. G. Lejeune-Dirichlet,* Repert. Phys. 1 (1837), p 152 = Werke 1, p. 135.

722) Théorie des fonctions 1, Paris 1841, p. 61.

723) Ib. p. 15.

724) Arch. Math. Phys. 15 (1850), p. 227. *J. Dienger,* (J. f. Math. 37 (1848), p. 364; von 1845) bezeichnet dasselbe mit „kontinuierlich im engsten Sinn". Seine weitere Behauptung (ebd. 38 (1849), p. 267; von 1845): Wenn zwei Funktionen in einem Intervall übereinstimmen, so stimmen sie auch darüber hinaus überein, soweit sie kontinuierlich sind — vernachlässigt unendlich kleine Größen von derselben Ordnung wie die beibehaltenen.

725) Der Geist der math. Analysis 1, Berlin 1842, p. 153 (engl. v. *A. J. Ellis,* Lond. 1843). Später (ebd. 2, Erlangen 1846, p. 74) sagt er: eine Funktion unterbricht ihre Stetigkeit, wenn sie imaginär wird oder eine im Kalkül unzulässige Form (1/0 oder log 0 usw.) annimmt.

726) Exerc. d'anal. 4 (1847), p. 314.

er noch einmal auf die Frage der Zulässigkeit diskontinuierlicher Funktionen in den Anwendungen der Mathematik zurück[727]); er setzt auseinander, daß sie in die Lösungen der Differentialgleichungen der mathematischen Physik durch die Grenzbedingungen hereingebracht werden, und meint, man komme über alle Schwierigkeiten hinweg, wenn man sie als spezielle Fälle allgemeiner Funktionen auffasse, aus denen sie durch Nullsetzen eines Parameters hervorgehen. Das führt ihn dann auf seine „limitateurs" (Nr. **104**).

**29. Exkurs betr. die Vertauschung der Reihenfolge von Grenzübergängen.** Wenn eine elementare Funktion von einer Veränderlichen an einer einzelnen Stelle in „unbestimmter Form" erscheint, so läßt sich diese Unbestimmtheit durch Einführung des sog. „wahren Wertes" der Funktion an einer solchen Stelle beseitigen[728]). Dagegen bei Funktionen mehrerer Veränderlicher findet das schon in ganz einfachen Fällen wie z. B. $\frac{x-y}{x+y}$ nicht mehr statt; die Unbestimmtheit läßt sich hier auf keine Weise entfernen, und es ist daher auch nicht gleichgültig, ob man zuerst die eine und dann die zweite Variable spezialisiert, oder ob man in umgekehrter Reihenfolge vorgeht. Das ist selbstverständlich frühzeitig bemerkt, auch z. B. von *S. F. Lacroix*[729]) und von *A. Cauchy*[730]) schon ganz sachgemäß allgemein auseinandergesetzt worden. Auch ist ein von *J. L. Lagrange*[731]) bemerktes Paradoxon der Potenzialtheorie von *O. Rodrigues*[732]) und dann von *P. S. de Laplace*[733]) durch die Bemerkung aufgeklärt worden, daß der Ausdruck

$$\frac{1-r^2}{(1-2r\mu+r^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{504}$$

---

727) Paris C. R. 28 (1849), p. 277 = Oeuvres (1) 11, p. 121. Er hat hier namentlich den Fall im Auge, daß die betrachtete Funktion nur in einem begrenzten Bereiche von Null verschieden, außerhalb desselben gleich Null ist. Sie ist dann an der Grenze des Bereichs im allgemeinen sowohl im alten wie im neuen Sinne des Wortes diskontinuierlich.

728) Vgl. II A 1, *Pringsheim,* Nr. **13**, p. 24.

729) Traité du calcul différentiel et du calcul intégral 1, (schon in der 1. Aufl., Paris 1797?; jedenfalls in der 2., 1810, p. 358).

730) Paris mém. prés. 1 (1827) (von 1815) = Oeuvres (1) 1, p. 333.

731) J. éc. polyt. cah. 15 (1809), p. 57 = Oeuvres 7, p. 363. Lagrange zeigt zwar, daß man bei richtiger Anordnung der Rechnung zu dem richtigen Resultat kommt, aber es bleibt bei ihm im unklaren, weshalb die andere Anordnung nicht auch dasselbe liefert.

732) Corresp. éc. polyt. 3 (1816) p. 384.

733) Paris mém. 2 (1817[19]) = Oeuvres 12, p. 415; Mécanique céleste livre 11, Paris 1823 = Oeuvres 5, p. 32. Vgl. dazu auch noch *Wantzel,* J. de math. 4 (1839), p. 185 und *H. Hennessy,* Phil. mag. (3) 33 (1848), p. 24. — *R. Murphy,*

für $r = 1$ zwar im allgemeinen null wird, aber nicht, wenn man vorher $\mu = 1$ setzt.

Gleichwohl ist die damit in engem Zusammenhang stehende Tatsache, daß die Reihenfolge zweier Grenzübergänge nicht ohne weiteres vertauscht werden darf, lange nicht klar erkannt worden. Zwar beruht die ganze *Cauchy*sche Funktionentheorie[734]) und ebenso der dritte *Gauß*sche Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra[735]) auf dem Umstand, daß die Reihenfolge der Integrationen in einem Doppelintegral nicht vertauscht werden darf, wenn die zu integrierende Funktion im Integrationsgebiet unendlich groß wird. Aber im übrigen ist auch *Cauchy* an der Erkenntnis der vorhin bezeichneten allgemeinen Tatsache dadurch vorbeigeführt worden, daß er zwar die fundamentale Bedeutung des Grenzbegriffs für die Analysis erkannt hat und die Terminologie des Rechnens mit unendlich kleinen und unendlich großen Größen nur als eine abgekürzte Sprechweise für seine Benutzung ansieht, daß er aber doch dieser Abkürzung sich auch in Fällen bedient, in welchen sie zu Fehlschlüssen Anlaß geben kann, indem sie nicht erkennen läßt, von welchen Variabeln die „unendlich kleinen", d. h. gegen Null konvergierenden Größen noch abhängen und von welchen nicht. So kommt er zu Scheinbeweisen für die Behauptungen: daß die Summe einer konvergenten Reihe stetiger Funktionen selbst eine stetige Funktion sei[736]); daß man eine solche Reihe, auch zwischen unendlichen Grenzen, gliedweise integrieren dürfe[737]); daß es

---

Cambr. trans. 5 (1835), p. 347, nennt solche Funktionen „transient functions"; außer dem Beispiel des Textes hat er p. 354 noch ein allgemeineres.

734) Vgl. die näheren Nachweisungen unter Nr. 35.

735) Gott. comm. rec. 3 (1816) = Werke 3, p. 61 (deutsch von *E. Netto*, Leipz. 1890; franz. Bearbeitung von *J. Liouville*, J. de math. 4 (1839) p. 505). Die bei *Gauß* unter dem Doppelintegralzeichen stehende Funktion ist der reelle Teil von derjenigen, die in den entsprechenden Untersuchungen von *Cauchy* auftritt. Wie weit übrigens *Gauß* die im Text hervorgehobene allgemeine Tatsache gekannt haben mag, ist schwer zu sagen. Einerseits wüßte ich keine Stelle zu nennen, wo er wirklich eine nicht zu rechtfertigende Vertauschung der Reihenfolge zweier Grenzübergänge vorgenommen hätte. Andererseits behandelt er aber doch z. B. in der Abhandlung über die hypergeometrische Reihe (Gott. comm. rec. 1 (1813) = Werke 3, p. 138) und in dem nachgelassenen Beweis für die Entwickelbarkeit einer Funktion in eine trigonometrische Reihe (vgl. hier Nr. 34) die Summe einer Reihe für $r = 1$ und den Grenzwert der durch die Reihe dargestellten Funktion für $\lim r = 1$ als gleichbedeutend.

736) Analyse algébrique, Paris 1821 = Oeuvres (2) 3, p. 120. Der Schlußfehler liegt in den Worten „l'accroissement... de $r_n$ devient insensible en même temps que $r_n$".

737) Leçons sur le calcul infinitésimal, Paris 1823 = Oeuvres (2) 4, p. 238; Mém. sur les intégrales définies, Paris 1825, p. 40. Er bemerkt nicht, daß in der

erlaubt sei, in einer konvergenten Doppelreihe die Reihenfolge der Summationen zu vertauschen[738]; daß ein bestimmtes Integral „unter dem Zeichen“ nach einem Parameter differentiiert werden könne[739]; daß auch die Differentiation und Integration eines Residuums nach einem Parameter erlaubt sei[740]. Wohl hat er bald bemerkt[741], daß die Differentiation unter dem Zeichen bei den von ihm eingeführten „Hauptwerten“ divergenter bestimmter Integrale nicht immer erlaubt ist; doch glaubt er auch hier noch, alle Schwierigkeiten fielen weg, wenn man den Hauptwert durch die Summe ersetze, als deren Grenzwert er definiert ist.

Ebenso beruht die ganze im zweiten Teil dieses Artikels zu besprechende Methode der Integration partieller Differentialgleichungen durch trigonometrische Reihen und Integrale auf der Voraussetzung, daß man die Reihen „gliedweise“, die Integrale „unter dem Zeichen“ differentiieren und integrieren dürfe; und in dieser Beziehung haben *Fourier* und *Poisson* ebensowenig irgendeinen Skrupel gefühlt als *Cauchy*.

Diese Auffassung hat dann auch die Lehrbücher noch geraume Zeit beherrscht: die gliedweise Differentiation und Integration einer unendlichen Reihe sowie die Differentiation und Integration eines bestimmten Integrals unter dem Zeichen werden von *J. L. Raabe*[742], von *J. M. C. Duhamel*[743], von *J. A. Grunert*[744], von *Moigno*[745] gelehrt und

---

Gleichung des Mittelwertsatzes

$$\int_a^b r_n\,dx = (b-a)\,r_n(\xi)$$

das $\xi$ noch von $n$ abhängt.

738) Vgl. darüber II A 1, *Pringsheim*, Nr. 35, p. 97.

739) Leçons calc. infin. = Oeuvres (2) 4, p. 195. Exerc. de math. 1 (1826) ≐ Oeuvres (2) 6, p. 80 dehnt *Cauchy* seine Behauptung sogar ausdrücklich auf seine „außerordentlichen Integrale“ (vgl. hier Nr. 59c) aus.

740) Exerc. de math. 1 (1826) = Oeuvres (2) 6, p. 31.

741) J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 591 = Oeuvres (2) 1, p. 556; Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 160. An der letzteren Stelle erwähnt er eine ihm von *Ostrogradsky* [vgl. Note 764] gemachte Bemerkung, daß sich so die *Poisson*sche Gleichung der Potentialtheorie (II A 7, Glch. (5)) begründen lasse (p. 174); auch für den Fall des logarithmischen Potentials (p. 170). Schon *A. M. Legendre* (Exerc.[278]) 2 (1817), p. 213; reprod. von *Lacroix*, Traité 3 (1819), p. 500) war auf Fälle gestoßen, in welchen die Differentiation eines derartigen Integrals unter dem Zeichen auf Widersprüche führt.

742) Differential- und Integralrechnung 1, Zürich 1839, p. 99.

743) Cours d'analyse 1, Paris 1841, p. 265; 2, Paris 1840, p. 3.

744) Arch. Math. Phys. 2 (1842), p. 276, 281. *C. J. Bjoerling* (Upsala n. a. 13 (1847), p. 39) widerlegt das durch ein einfaches Beispiel.

durch Vertauschung der Reihenfolge der Grenzübergänge zu rechtfertigen versucht. *A. A. Cournot*[746]) redet nur von der gliedweisen Integration von Potenzreihen und will den Beweis durch die Berücksichtigung des Lagrangeschen Restglieds einer solchen Reihe vervollständigen, übersieht aber dabei, daß der in diesem auftretende echte Bruch $\theta$ von der Integrationsvariablen nicht unabhängig ist. *M. Ohm*[747]) behandelt die gliedweise Differentiation und Integration von Potenzreihen auf Grund seiner Auffassung von der rein formalen Bedeutung solcher Reihen als selbstverständlich. Selbst *E. H. Dirksen,* der in der Zerpflückung der Beweise in unglaublich viele mit peinlichster Schulmäßigkeit durchgeführte Syllogismen geradezu schwelgt, stellt doch noch die falschen Behauptungen auf[748]), man dürfe in einer Doppelreihe die Reihenfolge der Summationen jedesmal vertauschen, wenn beide Anordnungen zu konvergenten Reihen führten, und also dürfe man unter der entsprechenden Voraussetzung überhaupt die Reihenfolge zweier Grenzübergänge vertauschen. Auch *O. Schlömilch,* der sich doch sehr als Vorkämpfer für eine strenge Behandlung der Analysis fühlte, nimmt einen Grenzübergang durchweg an den einzelnen Gliedern einer Reihe vor[749]).

Auch *A. de Morgan* hat sich nicht zu der allgemeinen Erkenntnis durchringen können, daß die Vertauschung der Reihenfolge zweier

745) Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, réd. principalement d'après les méthodes de *M. A. L. Cauchy,* 2, Paris 1844, p. 71, 74. Auch was *Moigno* ebd. 1 (1840), p. 119 für einen Beweis der Vertauschbarkeit der Reihenfolge zweier Differentiationen ausgibt, behandelt die Vertauschbarkeit der Reihenfolge zweier Grenzübergänge als selbstverständlich.

746) Théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 39.

747) System der Mathematik 9, Nürnberg 1851, p. 88.

748) Organon der transzendenten Analysis 1, Berlin 1845, p. 513, 609. Auf diese Sätze stützt sich seine zweite Behandlung des Grenzübergangs von der Binomial- zur Exponentialreihe (p. 614), während die vorangehende direkte Behandlung dieser Frage (p. 576) einwandfrei ist. Der Beweis des Satzes 32, p. 516: Wenn eine Doppelreihe positiver Glieder bei einer Anordnung konvergiert, konvergiert sie auch bei der andern, enthält denselben Schlußfehler, der Satz selbst ist aber richtig.

749) Algebraische Analysis, Jena 1845, p. 155, 157, 161, 172, 246, 251, 258; auch die Reihenfolge zweier Summationen vertauscht er p. 263 ohne weiteres. Wenn er Arch. Math. Phys. 3 (1843), p. 278 zur Vorsicht bei der gliedweisen Integration unendlicher Reihen mahnt, so denkt er dabei nur an den Fall, daß die Reihe nicht im ganzen Integrationsintervall konvergiert. — Ganz verfehlt ist auch sein Schluß (Differentialrechnung, Greifswald 1847, p. 274): Wenn die Summe einer konvergenten Reihe stetiger Funktionen nicht selbst stetig wäre, müßte sie zwei Werte $\Phi(a-\delta)$ und $\Phi(a+\delta)$ haben, was dem Begriff der Konvergenz widerspräche.

Grenzübergänge nur unter bestimmten Bedingungen zulässig ist, obwohl ihm fast alle bis dahin aufgefundenen weiterhin zu besprechenden Beispiele, in welchen das nicht angeht, bekannt waren[750]); er benützt die Kenntnis solcher Erscheinungen fast nur, um die beim Rechnen mit divergenten Reihen und Integralen sich ergebenden Widersprüche auf sie zu schieben[751]). Bei Gelegenheit der doppelten Definition der höheren Differentialquotienten einer Funktion von einer Variablen durch einen einfachen oder einen wiederholten Grenzübergang wirft er zwar die Frage auf[752]): „can we get a clear idea of what we are doing?" und beantwortet sie durch eine richtige Untersuchung unter Benutzung des Mittelwertsatzes[753]); aber einer klaren Auffassung des allgemeinen Problems steht bei ihm die in Nr. 28 besprochene Unbestimmtheit seines Funktionsbegriffes im Wege, namentlich außer den dort schon besprochenen „Postulaten" noch das folgende[754]): „let it be granted, that whatever is true of any finite number of points, however great, is true of an infinite number of points." Daraufhin kommt er zu der Meinung, „continuity of form" sei garantiert, wenn an der Übergangsstelle alle Differentialquotienten „kontinuierlich zu- oder abnehmen", und glaubt daraus folgern zu können, daß eine „discontinuity of form" in der Summe einer Reihe nur für solche Argumentwerte eintreten könne, für welche die Reihe divergiert. Auch sein angeblicher Beweis für die Vertauschbarkeit der Reihenfolge zweier partieller Differentiationen[755]) beruht auf dem gewöhnlichen Trugschluß.

Auch in Einzeluntersuchungen dieser Zeit ist derselbe Fehler häufig begangen worden. So meint z. B. *G. Libri*[756]), man könne den Wert von $0^0$, d. h. bei ihm, den von $x^y$ für $x = 0$, $y = 0$ dadurch bestimmen, daß man in irgendeiner Darstellung von $x^y$ durch eine unendliche Reihe zuerst $y$ und dann $x$ gleich Null setze. Obwohl demgegenüber ein *Anonymus*[757]) darauf hinweist, daß bereits *Cauchy*[758])

750) Er sagt einmal selbst: „There is hardly any end of the known instances in which . . . changes of form . . . arise from alteration of the specific value of a constant" (Cambr. trans $8_2$ (1844), p. 189).

751) Z. B. Differential and integral calculus[207]), p. 576.

752) Ib. p. 76.

753) p. 79.

754) p. 231.

755) p. 161. Die von ihm mit $\theta$ bezeichnete Größe des Mittelwertsatzes hat an verschiedenen Stellen des Beweises verschiedene Bedeutung, er argumentiert aber so, wie wenn sie überall dieselbe Bedeutung hätte.

756) J. f. Math. 10 (1833), p. 305.

757) Ebd. 11 (1834), p. 276.

richtig angegeben habe, dieser Ausdruck könne jeden positiven Wert, einschließlich 0 und $+\infty$ haben, so glaubt doch selbst *A. F. Möbius*[759]), man könne zur Ermittlung seines Wertes $x$ und $y$ irgendwie als Funktionen einer und derselben dritten Variablen ansehen und diese Funktionen in erster Annäherung durch Potenzen ersetzen; und der erste Anonymus[760]) sowie ein zweiter[761]) bestreiten wohl die Zulässigkeit dieser letzteren Annahme, haben aber gegen die erstere nichts zu erinnern. Ebenso liegen den Behauptungen von *J. A. Grunert*[762]): die durch gliedweise Differentiation einer Potenzreihe entstehende Reihe konvergiere immer auch noch an der Grenze des Konvergenzbereichs, wenn die ursprüngliche Reihe das tue — und von *J. Dienger*[763]): die Maclaurinsche Entwicklung einer Funktion stelle diese immer wirklich dar, soweit sie konvergiere — unzulässige Vertauschungen der Reihenfolge von Grenzübergängen zugrunde.

Inzwischen hatten sich aber die Beispiele dafür gehäuft, daß eine solche Vertauschung unter Umständen zu teils sinnlosen, teils geradezu falschen Resultaten führen könne. Vor allem gehören hierher die Integralformeln (486)—(488), (490), (492), in denen der Grenzübergang für den Parameter $x$ (bzw. $r, a, b$) zu einem Werte, von welchem anstatt des einen der rechtsstehenden Ausdrücke ein anderer zu setzen ist, mindestens von der einen Seite her zu einem falschen Resultat, die Differentiation unter dem Zeichen zu divergenten Integralen führt; ferner das schon[731]) erwähnte Paradoxon der Potentialtheorie sowie auch die Tatsache, daß das Potential eines ausgedehnten Körpers in inneren Punkten nicht der Laplaceschen, sondern der Poissonschen Differentialgleichung genügt[764]).

---

758) Analyse algébrique, Paris 1821, p. 29 = Oeuvres (2) 3, p. 69.

759) J. f. Math. 12 (1834), p. 136.

760) Ebd. p. 293.

761) Ebd. p. 292.

762) J. f. Math. 25 (1843), p. 241. Der Fehler liegt in der unzulässigen Ausführung des Grenzübergangs vom Differenzen- zum Differentialquotienten an den einzelnen Gliedern der Reihe.

763) Arch. Math. Phys. 12 (1849), p. 94. Der „Beweis" enthält auch noch andere Fehlschlüsse.

764) Vgl. II A 7b, *Burkhardt-Meyer,* Nr. 2, p. 469. Zu den Literaturangaben dort kann für unsere gegenwärtigen Zwecke noch nachgetragen werden: *M. Pagani* (J. f. Math. 12 (1834), p. 342) verfährt wie *Poisson.* Er behandelt auch den Fall, daß der Aufpunkt in der Oberfläche des anziehenden Körpers liegt; dabei vermischt er jedoch in eigentümlicher Weise die Begriffe des unendlich Kleinen im Sinne der Differentialrechnung und des physikalisch sehr Kleinen. Übrigens bemerkt er bereits, man müsse besonders zeigen, daß die mehrfachen Integrale, durch die sich die Kraftkomponenten ausdrücken, immer gleich den Ableitungen

Dann hat *N. H. Abel Cauchys* Behauptung[736]), die Summe einer konvergenten Reihe stetiger Funktionen sei selbst immer stetig, durch den Hinweis auf die Reihe (111) widerlegt, deren Summe jedesmal springt, wenn $x$ gleich einem ungeraden Vielfachen von $\pi$ ist[765]). Andererseits hat er zuerst einen einwandfreien Beweis des folgenden spezielleren Satzes gegeben[766]): Wenn eine Potenzreihe $\sum a_n r^n$ auch noch für $r = 1$ konvergiert, so ist ihre Summe auch noch für $r = 1$ eine stetige Funktion von $r$. Wenn er aber weiter behauptet[767]): Wenn die einzelnen Glieder der Reihe $\sum \varphi_n(x) r^n$ stetige Funktionen von $x$ sind und $r$ absolut kleiner als die Konvergenzgrenze genommen wird, so ist die Reihensumme eine stetige Funktion auch von $x$, —

des Potentials nach den Koordinaten sind. Einen genaueren Beweis der Poissonschen Gleichung hat zuerst *M. Ostrogradsky* zu geben versucht (Petersb. mém. (6) 1 (1831), p. 39 (von 1828)); er sieht, daß man ein bestimmtes Integral nicht ohne weiteres nach einem Parameter $a$ differentiieren darf, wenn die zu integrierende Funktion für $x = a$ unendlich groß wird und dieser Wert dem Integrationsintervall angehört; die weitere Durchführung ist aber ungenügend (die von ihm benutzten Integrale sind nicht konvergent) und führt nur infolge eines zweiten Versehens (er übersieht, daß er die beiden andern auftretenden Ableitungen ebenso wie $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ behandeln müßte) zum richtigen Resultat. Vgl. auch Note 741.

765) J. f. Math. 1 (1826) = Oeuvres 1, p. 224. Vgl. dazu seine Briefe an Holmboe und an Hansteen aus demselben Jahre, Oeuvres 2, p. 258 (hier noch die Bemerkung, daß gliedweise Differentiation von (111) zu der divergenten Reihe (25) führt) und p. 263. Seine wohl damit im Zusammenhang stehende Absicht, eine Abhandlung über die Entwicklung „stetiger und unstetiger“ Funktionen in trigonometrische Reihen in den Ann. de math. zu veröffentlichen (Brief an Holmboe, ib. p. 261), hat er nicht ausgeführt.

766) Oeuvres 1, p. 223. Wenn *E. G. Bjoerling* (Upsala n. acta 13 (1847), p. 156) *Abels* Schlußweise kritisiert, so übersieht er, daß bei *Abel* die Funktion $f(r)$ überhaupt nur durch die Reihensumme definiert ist, so daß man, wenn die Stetigkeit der letzteren feststeht, die Stetigkeit von $f(r)$ nicht mehr, wie Bjoerling meint, noch besonders unter die Voraussetzungen aufnehmen muß. Sein Beweis der gleichmäßigen Konvergenz einer Potenzreihe (p. 158) ist allerdings insofern der *Abel*schen Formulierung vorzuziehen, als er nicht wie *Abel* sogleich von dem Rest der Reihe, sondern nur von dem Restabschnitt $\sum_{\nu=n+1}^{n+m} a_\nu r^\nu$ redet. Wegen anderer gegen *Abels* Beweis bzw. gegen seinen Beweis eines dabei benutzten Hilfssatzes, erhobener Einwände vgl. man die Note von *L. Sylow*, Oeuvres 2, p. 302. J. f. Math. 2 (1827), p. 286 = Oeuvres 1, p. 618 stellt *Abel* die Aufgabe, $\lim_{r=1} \sum a_n r^n$ zu bestimmen, wenn man nur weiß, daß die Reihe für $0 < r < 1$ konvergiert.

767) Oeuvres 1, p. 224; vgl. die Note von *Sylow*, Oeuvres 2, p. 303. Die Notizen aus dem Nachlaß, Oeuvres 2, p. 202, enthalten noch denselben Fehlschluß; übrigens führt *Abel* hier die Reihe (15) als Beispiel dafür an, daß an der Grenze der Konvergenz für $r$ der Satz jedenfalls nicht mehr allgemein gilt

so setzt er beim Beweise stillschweigend noch voraus, daß die sämtlichen $\varphi_n(x)$ unterhalb einer und derselben endlichen Grenze bleiben[768]).

Weiter hat *A. de Morgan*[769]) bemerkt, daß aus dem Verschwinden aller Glieder einer Reihe nicht auf das Verschwinden ihrer Summe geschlossen werden kann; speziell[770]), daß aus

$$\lim_{a=\infty} \int_0^a \varphi_n(x)\,dx = 0 \tag{505}$$

nicht auch

$$\lim_{a=\infty} \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\,dx = 0 \tag{506}$$

folgt; *J. Liouville*[771]), daß die Differentiation zu beliebigem Index (vgl. hier Nr. **108**) unter dem Integralzeichen nicht immer zu richtigen Resultaten führt.

*J. M. C. Duhamel* hat um dieselbe Zeit sogar schon ganz allgemein auseinandergesetzt[772]): es sei doch geometrisch ganz selbstverständlich, daß eine veränderliche Kurve sich einer festen unbegrenzt nähern kann, ohne daß deswegen sich die Tangentenrichtungen der ersteren denen der letzteren zu nähern brauchen.

Ausdrücklich ausgesprochen finde ich den Satz, daß die Reihenfolge zweier Grenzübergänge nicht ohne weiteres vertauscht werden darf, zuerst bei *E. H. Dirksen*[773]), und zwar in der Form

$$\lim_{k=0} [\lim_{h=0} \psi(k, h)] \text{ nicht notwendig } = \lim_{h=0} \psi(h, h). \tag{507}$$

Aber systematisch hat doch erst *P. G. Lejeune-Dirichlet* auf die Reihen-

768) *A. Pringsheim*, Münch. Ber. 1897, p. 354, zeigt, daß die Behauptung auch noch richtig bleibt, wenn es einen positiven Exponenten $p$ von der Art gibt, daß $|n^{-p}\varphi_n(x)r^n|$ unterhalb einer endlichen Grenze bleibt, und zeigt durch ein Beispiel, daß sie nicht mehr richtig bleibt, wenn auch diese Bedingung nicht mehr erfüllt ist.

769) Elementary illustrations of the diff. and integr. calc., Lond. 1832, p. 33; Diff. and integr. calc., Lond. 1836/41, p. 70.

770) Diff. and. integr. calc., p. 576.

771) J. éc. polyt. cah. 21 (1832), p. 125.

772) J. éc. polyt. cah. 22 (1833), p. 76. Da seine Untersuchung nach einem andern Ziel gerichtet war, zieht er nicht ausdrücklich den Schluß: also darf man die Reihenfolge einer Differentiation und eines andern Grenzüberganges nicht vertauschen.

773) Berlin Abhandl. 1827[30], p. 110. Als Beispiel führt er

$$\psi(k, h) = \frac{k^2 + h}{k + h^2}$$

an. Daß er die Konsequenzen dieser Erkenntnis nicht voll gezogen hat, ist schon oben (748) besprochen.

folge von Grenzübergängen geachtet: nicht nur in den uns unmittelbar angehenden, hier in Nr. **37** zu besprechenden Untersuchungen, sondern auch bei der an der Spitze seiner Anwendungen der Analysis auf die Zahlentheorie (vgl. I C 3, *P. Bachmann*, Nr. 2, p. 642) stehenden Diskussion des Grenzwertes[774])

$$\lim_{\varrho=0}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\varrho}. \tag{508}$$

Daran anschließend hat dann *J. Liouville*[775]) die Notwendigkeit, darauf zu achten, auch bei elementaren Fragen, wie bei der Untersuchung des Grenzwertes

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \tag{509}$$

zur Geltung gebracht. Auch *W. R. Hamilton* achtet sorgfältig auf die Reihenfolge von Grenzübergängen, wo es auf sie ankommt[776]), wenn er auch keine allgemeinen Auseinandersetzungen darüber gibt.

Im Lauf der vierziger Jahre ist dann die Unzulässigkeit der Vertauschung der Reihenfolge zweier Grenzübergänge noch in andern Fällen bemerkt worden. So hat *C. J. Malmsten*[777]) an dem Beispiel

$$\int_0^{\infty}\frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}\frac{dx}{h^2+x^2}=\frac{\pi}{2h}\frac{1}{1-re^{-h}} \tag{510}$$

---

774) Berl. Abhandl. 1837 [39], p. 50 = Werke 1, p. 319; J. f. Math. 19 (1839), p. 326 = Werke 1, p. 414. Damit in Zusammenhang steht auch *Dirichlets* Unterscheidung unbedingt und nur bedingt konvergenter Reihen (Berl. Abhandl. 1837, p. 49 = Werke 1, p. 318; J. f. Math. 19 (1839), p. 330 = Werke 1, p. 419) und Integrale (Berl. Abhandl. 1839, p. 63 = Werke 1, p. 395); sie findet sich übrigens vorher schon bei *A. Cauchy*, Résumés analytiques, Turin 1833 = Oeuvres (2) 10, p. 69. Vgl. I A 3, *Pringsheim*, Nr. **31—33**, p. 91—96.

775) J. de math. 5 (1840), p. 280; reproduziert von *J. A. Grunert*, Arch. Math. Phys. 1 (1841), p. 205. Wenn *Moigno*, Leçons de calcul différentiel, réd. d'après les méthodes de *M. A. L. Cauchy*, Paris 1840, p. XXII und p. 3 dem gegenüber *Cauchys* Darstellung verteidigt, so übersieht er, daß diese, wie *Grunert* mit Recht bemerkt, die Existenz des Grenzwerts nicht beweist, sondern voraussetzt. Auch was *Th. Wittstein* (Arch. Math. Phys. 3 (1843), p. 327) und *O. Werner* (ebd. 22 (1854), p. 338) beibringen, trifft den Kernpunkt der Frage nicht: daraus allein, daß $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ für große $n$ zwischen 2 und 3 liegt, kann die Existenz eines Grenzwerts nicht erschlossen werden. Eine einwandfreie Darstellung des Grenzübergangs von der Binomial- zur Exponentialreihe überhaupt, nicht nur des speziellen Falles (509), finde ich zuerst bei *E. H. Dirksen*, Organon der transzendenten Analysis, Berlin 1845, p. 576. Die Unabhängigkeit des $r$ von $\mu$ wird hier ausdrücklich hervorgehoben und bewiesen. Bald darauf hat auch *Cauchy* selbst eine solche Darstellung gegeben (exerc. d'anal. 4 (1847), p. 236).

776) Z. B. Dublin trans. 19 (1843), p. 272.

erkannt, daß die Entwicklung eines Integrals nach Potenzen eines Parameters (hier $r$) an der Grenze der Konvergenz (hier $r = 1$) nicht immer den richtigen Wert des Integrals liefert, selbst wenn sie konvergiert; sein Versuch freilich, für Integrale der Formen

$$(511) \qquad \int\limits_0^m \begin{Bmatrix} \frac{1 - r\cos x}{r \sin x} \end{Bmatrix} \frac{f(x)\,dx}{1 - 2r\cos x + r^2}$$

allgemein die Bedingungen anzugeben, unter welchen das wirklich der Fall ist, kann nicht als durchweg gelungen angesehen werden[778]). Ferner haben *C. J. Björling*[779]) die gliedweise Differentiation und *P. L. Tschebyscheff*[780]) die gliedweise Integration einer unendlichen Reihe für einer besonderen Rechtfertigung bedürftig erklärt. *J. R. Young* hat zwar noch behauptet[781]), ein Resultat gliedweiser Differentiation einer unendlichen Reihe könne nie absurd ausfallen, wenn die Absurdität nicht schon am einzelnen Reihenglied zutage tritt; doch sind im Verlaufe einer daran anknüpfenden Polemik zwischen ihm[782]) und *R. Moon*[783])

---

777) Upsala n. a. 12 (1844), p. 174.

778) Seine Integralabschätzungen, obwohl von derselben Art, wie diejenigen *Dirichlets* (Nr. 37), sind doch nicht so sorgfältig durchgeführt; auch setzt er voraus, eine Funktion, die an irgendeiner Stelle Null wird, werde dort immer von bestimmter Ordnung Null. — *M. Ohm,* System der Mathematik 9, Nürnberg 1852, p. 156, begnügt sich mit der Bemerkung, daß die Gleichung (510) für $r = 1$ nicht mehr gilt.

779) Upsala n. a. 12 (1844), p. 340.

780) J. f. Math. 28 (1845), p. 283 = Oeuvres 1, p. 14. Er gründet darauf Zweifel an der Allgemeingültigkeit des Fundamentalsatzes der *Cauchy*schen Funktionentheorie (Nr. 35).

781) Dubl. proc. $3_1$ (1846), p. 37; phil. mag. (3) 28 (1848), p. 214. Wie er es meint, erläutert er an der zweiten Stelle an dem Beispiel der Reihe (111): Die Unbestimmtheit des Zählers in einem sehr entfernten Glied werde durch den Nenner $n$ „rendered nugatory"; durch die Differentiation komme sie wieder zum Vorschein. — Statt $\lim\limits_{x<1} f(x)$ schreibt er $f\left(1 - \frac{1}{\infty}\right)$ und unterscheidet das hierin auftretende $\infty$ von dem $\infty'$, das die Anzahl der mitgenommenen Reihenglieder ausdrückt (Phil. mag. (3) 27 (1845), p. 362; 28 (1846), p. 11; auch Cambr. trans. $8_4$ (1847), p. 430); damit streift er die Erkenntnis, daß die Redeweise des Rechnens mit unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen zur Behandlung solcher Fragen nicht ausreicht; aber man kann mit seinen Symbolen doch nicht so rechnen, wie er es tut. — Er schlägt vor (Phil. mag. (3) 27, p. 365) den Terminus „neutral series", den *Ch. Hutton* und nach ihm andere englische Mathematiker für oszillierende Reihen überhaupt gebraucht hatten, auf den Fall zu beschränken, daß eine solche Reihe an und für sich, nicht als Grenzfall einer andern Reihe betrachtet wird.

782) Phil. mag. (3) 27 (1845), p. 440; Cambr. trans. $8_4$ (1847), p. 429; vgl. auch p. 440 die Bemerkungen betr. den Grenzübergang von (14) zu (144) und (145).

beide zu der Erkenntnis der Tatsache gekommen, daß die Summe der Grenzwerte der Glieder einer Reihe von dem Grenzwert der Reihensumme wohl zu unterscheiden ist. Immerhin ist bei beiden nur von Fällen die Rede, in welchen die erstere Summe divergiert. Entsprechende Bemerkungen finden sich dann bei beiden auch für bestimmte Integrale[784]). Auch *O. Schlömilch* ist bald zu schärferen Anschauungen gekommen; so findet sich bei ihm eine einwandfreie Behandlung der Zahl $e$[785]); die Auseinandersetzung, daß man eine Reihe nicht ohne weiteres gliedweise differentiieren dürfe, indem eine Summe „von einer unendlichen Menge von Größen, die der Grenze Null zueilen", auch sehr beträchtlich ausfallen könne[786]); daß $\int f(r, x)\,dx$ für $r = 0$ nicht null zu sein braucht, auch wenn $f(0, x)$ im allgemeinen gleich null ist[787]); daß man ein Integral nicht ohne weiteres unter dem Zeichen differentiieren könne[788]). *F. Arndt* bemerkt nicht nur das letztere, sondern auch überhaupt, daß man einen Grenzübergang an einem Integral nicht immer unter dem Zeichen vollziehen dürfe, und erläutert das an Integralen der Art, wie sie hier in Nr. 59 besprochen werden[789]). Auch widerlegt er Dirksens Behauptung[743]) durch ein einfaches Beispiel[790]).

---

783) Phil. mag. (3) 28 (1846), p. 136, 140. Seine Ausdrucksweise ist höchst ungeschickt; die Polemik zwischen beiden scheint gerade dadurch so bitter geworden zu sein, daß sie dasselbe meinen, es aber verschieden ausdrücken.

784) *Young,* Phil. mag. (3) 27, p. 440; Cambr. trans. $8_4$, p. 434; *Moon,* Phil. mag. (3) 28, p. 141.

785) Differentialrechnung, Greifswald 1847, p. V.

786) Arch. Math. Phys. 10 (1847), p. 75. Die Art, wie er dabei das Zeichen $\lim(n\varepsilon)$ gebraucht, wird man freilich nicht als befriedigend ansehen können. *J. Dienger* will das ebd. 11 (1848), p. 38, durch Berufung auf den Satz von Dirksen widerlegen, der aber, wie oben 748) bemerkt, selbst nicht allgemein richtig ist. Differentialrechnung, Greifswald 1847, p. 116 hatte Schloemilch noch selbst den Schluß: „wodurch sich $\xi$, also auch $\frac{d\xi}{dy}$, der Null nähert."

787) Integralrechnung 1, Greifswald 1848, p. 121.

788) Ebd. p. 104, 140; analyt. Studien 1, Leipz. 1848, p. 6. Er scheint doch nur an Fälle gedacht zu haben, in welchen man dadurch ein divergentes Integral erhalten würde. Wenn *D. Bierens de Haan,* Arch. Math. Phys 13 (1849), p. 221, sich auf Schloemilchs Darstellung beruft, um behaupten zu können, daß die Differentiation unter dem Zeichen bei endlichen Grenzen immer zulässig sei, so begeht er dabei ein Versehen: in seiner Gleichung ($Z$) müßte $f$ statt $\varphi$ stehen, und $f$ ist nicht von $x$ unabhängig.

789) Arch. Math. Phys. 11 (1848), p. 72, 82. Er scheint seltsamerweise zu meinen, dergleichen könne nur eintreten wenn eine der Integrationsgrenzen 0[!] oder $\infty$ ist.

790) Ebd. p. 319.

Durch alle diese Bemerkungen und Beispiele war zwar genügend dargetan, daß man die Reihenfolge zweier Grenzübergänge nicht unter allen Umständen vertauschen dürfe; aber damit hatte man noch keine Antwort auf die Frage, unter welchen Umständen das denn erlaubt sei. Eine solche ist erst 1847 ziemlich gleichzeitig von mehreren Seiten für die spezielle Frage nach der Stetigkeit der Summe einer Reihe stetiger Funktionen gegeben worden. *E. G. Björling*[791]) erklärt, man dürfe daraus, daß eine Reihe „convergens $x$ quâlibet datâ usque ad limitem quendam $x = X$" nicht schließen, sie sei auch „convergens uno tenore, etiamsi $x$ indefinite ad $X$ adpropinquare fingatur". Nachher gebraucht er aber bei der Formulierung seiner Sätze doch wieder bloß das Wort convergens, wo er seiner Bemerkung gemäß „convergens uno tenore" sagen müßte, und glaubt dann sagen zu dürfen: der Index $n$, von dem an der Rest der Reihe kleiner als eine gegebene Größe ist, „alius est aliis $x$ in genere; at talis semper (aut plures) $x$ existit, cui respondeat maximus $n$".

Klarer als von Björling sind diese Verhältnisse gleichzeitig von *Ph. L. Seidel*[792]) und von *G. G. Stokes*[793]) dargelegt worden. Sie setzen beide, ersterer ausführlich, letzterer knapper auseinander, daß aus den Ungleichungen

$$(512)\qquad |s_n(x+\delta)-s_n(x)|<\varepsilon,\quad |r_n(x)|<\varepsilon,\quad r_n(x+\delta)|<\varepsilon$$

auf

$$(513)\qquad |(s_n(x+\delta)+r_n(x+\delta))-(s_n(x)+r_n(x))|<3\varepsilon$$

nur dann geschlossen werden kann, wenn es möglich ist, zu gegebenem $\varepsilon$ einen von $x$ unabhängigen Wert von $n$ zu bestimmen, für den diese Ungleichungen bestehen. Wenn das nicht der Fall ist, sagt Seidel: die Reihe konvergiert an einer solchen Stelle „beliebig langsam", Stokes: „unendlich langsam". Die Darstellung bei Seidel hat den Vorzug, daß er bestimmt von dem kleinsten $n$ redet, von dem an die Ungleichungen bei gegebenem $\varepsilon$ erfüllt sind; infolgedessen kommt er nicht wie Stokes zu der falschen Behauptung, bei einer unendlich langsam konvergenten Reihe müsse die Summe immer eine Unstetigkeit aufweisen, sondern läßt das ausdrücklich dahingestellt sein. Dagegen tritt bei Stokes klarer als bei Seidel hervor, daß die Frage nicht isoliert steht, sondern sich der allgemeinen Frage nach der Zulässig-

791) Upsala n. acta 13 (1847), p. 66, 156.

792) Münch. Abhandl. $5_2$ (1848), p. 381 (mit Anmerkungen von *H. Liebmann,* Leipz. 1900); p. 393 auch einige Andeutungen über entsprechendes Verhalten von Integralen.

793) Cambr. trans. $8_5$ (1849) = papers 1, p. 279.

keit der Vertauschung der Reihenfolge zweier Grenzübergänge unterordnet; auch gibt er ein Beispiel einer Reihe rationaler Funktionen, die an einer Stelle unendlich langsam konvergiert.

Übrigens muß *C. Weierstraß* den Begriff der „gleichförmigen" oder „gleichmäßigen" Konvergenz schon geraume Zeit früher besessen haben: In zwei aus den Jahren 1841 und 1842 stammenden, erst viel später veröffentlichten Abhandlungen gebraucht er diese Termini ohne Erklärung[794]).

Anhangsweise sei noch ein späterer Aufsatz *Cauchys*[795]) erwähnt, in dem er abermals behauptet, man dürfe in einer Doppelreihe die Glieder in beliebiger Weise zu Teilsummen zusammenfassen; doch leidet die dabei benutzte Definition der Konvergenz einer unendlichen Doppelreihe Mangel an Präzision, jedenfalls ist sie enger als die gewöhnliche. Bald darauf setzt er aber auseinander[796]), daß man die Glieder einer divergenten Doppelreihe unter Umständen in eine konvergente Reihe konvergenter einfacher Reihen umordnen könne; z. B. konvergiert die Entwicklung von $(1-x-y)^{-1}$ nach Potenzen von $x$ und $y$ nur so lange, als $|xy| < \frac{1}{4}$ ist; aber Umordnungen der erwähnten Art sind z. B. möglich, wenn $|x|$, $|y|$ und $|x+y|$ alle drei $< 1$ sind. Eine so erhaltene Summe nennt er[797]) die syntagmatische Summe der vorgelegten divergenten Reihe und eine derartige Reihe dann[798]) auch selbst eine syntagmatische Reihe; er zeigt[799]) daß eine solche Reihe die Funktion, aus deren Entwicklung sie entstanden ist, wirklich darstellt, solange diese [und ihre Ableitung] stetig bleibt. Übrigens gibt er[800]) um dieselbe Zeit noch einen gänzlich ungenü-

---

794) Werke 1, Berlin 1894, p. 67, 68, 70 („gleichmäßig"), 73, 81 („gleichförmig"). In einer andern Abhandlung derselben Zeit (ebd. p. 58) integriert er allerdings eine Potenzreihe gliedweise über einen zu ihrem Konvergenzkreis konzentrischen kleineren Kreis, ohne ausdrücklich von der Gleichmäßigkeit der Konvergenz zu reden.

795) Paris C. R. 19 (1844), p. 1433 = Oeuvres (1) 6, p. 386. Er gibt als Konvergenzbedingung: die aus irgendwelchen Gliedern der Reihe gebildete Teilsumme soll unendlich klein werden, wenn ihre Glieder alle zu unendlich großen Werten der Indizes gehören. So wie es ausgedrückt ist, muß man glauben, er meint „aller Indizes"; richtig sind aber seine Behauptungen nur, wenn man versteht: wenn in jedem Glied mindestens ein Index hinlänglich groß ist.

796) Paris C. R. 20 (1845), p. 329 = Oeuvres (1) 9, p. 20. Weniger vollständig und von der entgegengesetzten Seite her aufgefaßt schon résumés analytiques, Turin 1833 = Oeuvres (2) 10, p. 75.

797) Ib. p. 382 = 39.

798) p. 463 = 54.

799) p. 474 = 65.

800) Exerc. d'anal. 3 (1844), p. 33, 43.

genden Beweis dafür, daß die Reihenfolge zweier Differentiationen oder überhaupt zweier Differentialoperationen umgekehrt werden kann. Erst ganz spät[801]) nimmt er den Satz, daß die Summe einer unendlichen Reihe stetiger Funktionen nicht selbst stetig zu sein braucht, auch seinerseits auf.

**30. Exkurs betr. die Diskussion über die den Zeichen cos $\infty$ sin $\infty$ beizulegende Bedeutung.** Im Verlaufe der Diskussionen über den Gültigkeitsbereich des Satzes von der Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion in eine trigonometrische Reihe ist wiederholt die Frage aufgetaucht, was unter den Zeichen sin $\infty$, cos $\infty$ zu verstehen sei. Schon *J. L. Lagrange* hat einerseits behauptet[802]), für $m = \infty$ sei

$$\sin m\pi x = 0, \quad \cos m\pi x = \pm 1, \tag{514}$$

andererseits[803]) — was übrigens ziemlich auf dasselbe herauskommt — es sei dann

$$\sin (m+1)x - \sin mx = 0 \tag{515}$$

mit der Bemerkung: „on suppose que 1 s'évanouisse auprès de $m$". *J. d'Alemberts* Einwänden[804]) hat er zunächst entgegengehalten[805]), bei ihm sei $m$ eine ganze Zahl gewesen — [was übrigens nicht einmal richtig war] — später aber[806]) behauptet, für $m = \infty$ dürfe man $mx$ immer als eine ganze Zahl ansehen. Auch *S. Klügel*[807]) und *Bidone*[808]) benutzen die Gleichungen (514) ohne weiteres. *S. F. Lacroix* ist schon zaghafter: er setzt $\sin mx$ für $m = \infty$ nicht geradezu gleich Null, sondern bemerkt nur, das sei für unendlich viele Werte von $x$, näm-

---

801) Paris C. R. 36 (1853), p. 156 = Oeuvres (1) 12, p. 33. Aus seiner Deduktion erkennt man, daß er den springenden Punkt — die Notwendigkeit, daß man $n$ von $x$ unabhängig muß annehmen können — vollständig erkannt hat; die Formulierung der Sätze leidet aber darunter, daß er sich auch jetzt noch nicht entschließen kann, auf die Ausdrucksweise des Rechnens mit unendlich kleinen zu verzichten.

802) Taur. misc. 1 (1759) = Oeuvres 1, p. 102.

803) p. 111. — *S. D. Poisson* zeigt, daß man schon bei Beschränkung von $x$ auf ganzzahlige Vielfache von $\frac{\pi}{n}$ und von $m$ auf ganze Zahlen $n$ verschiedene Werte dieser Differenz für $m = \infty$ herausrechnen könne (J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 407); *J. Challis* (Cambr. trans. $3_1$ (1830), p. 270) bemerkt, man könne sich von der Unrichtigkeit der Gleichung (515) überzeugen, indem man ihre linke Seite in ein Produkt verwandle.

804) Opuscules math. 1 (1761), p. 68.

805) Taur. misc. 2, 1760/61 = Oeuvres 1, p. 322.

806) Mécanique analytique, (2e éd.) Paris 1811 = Oeuvres 11, p. 427.

807) Math. Wörterbuch 2, Leipz. 1805, p. 587.

808) Torino mem. 5 (1811/12), p. 288.

lich für alle zu $\pi$ kommensurablen, richtig, und verifiziert dann die unter dieser Annahme sich ergebenden Resultate unter Zugrundelegung der Bernoullischen Auffassung oszillierender Reihen (Nr. 4)[809]. Erst *A. Cauchy*[810]) erklärt wieder mit Bestimmtheit, sin $\infty$, cos $\infty$ könnten jeden Wert des Intervalls $(-1, \ldots, +1)$ haben.

*S. D. Poisson* setzt in einer seiner frühesten Abhandlungen[811]) in den Integralen:

$$(516) \qquad \int_0^\infty e^{-bx} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} ax\,dx = \begin{cases} \dfrac{b}{b^2+a^2} \\ \dfrac{a}{b^2+a^2} \end{cases}$$

$b = 0$ und erhält so die Gleichungen:

$$(517) \qquad \int_0^\infty \cos ax\,dx = 0, \quad \int_0^\infty \sin ax\,dx = \frac{1}{a}.$$

Später wiederholt er das mit dem Zusatz, daß es für $a = 0$ nicht mehr gelte und mit der Erläuterung[812]): diese Integrale hätten analog wie die entsprechenden unendlichen Reihen (Nr. 4) nur dann bestimmte Werte, wenn man sie als Grenzwerte anderer Integrale auffasse. Man erhalte übrigens dieselben Werte, wenn man (für das erste Integral) von

$$(518) \qquad \int_0^\infty e^{-bx^2} \cos ax\,dx \quad \text{oder von} \quad \int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+bx^2}\,dx$$

ausgehe. Man komme dadurch auf den Gedanken, daß Entsprechendes allgemein gelten müsse; aber es werde wohl sehr schwierig sein, das zu beweisen. Er benutzt die Gleichungen dann mehrfach[813]) in Fällen, in welchen nachher noch eine Integration in bezug auf $a$ vorzunehmen ist[814]); auch als Zwischenglied der Rechnung bei der Ableitung des Wertes konvergenter Integrale.

*G. Plana* gewinnt von den Gleichungen (517) die erste aus (938) durch Differentiation nach $a$[815]), die zweite[816]) auf demselben Wege

809) Traité des différences et des séries, Paris 1800, p. 147 = Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, (2$^e$ éd.) 3, Paris 1819, p. 158.

810) Analyse algébrique, Paris 1821 = Oeuvres (2) 3, p. 52.

811) J. Éc. polyt. cah. 16 (1813), p. 221; ib. 18 (1820), p. 307 macht er davon bei weiteren Rechnungen Gebrauch.

812) Ib. 19 (1823), p. 431; im wesentlichen ebenso Paris mém. 6 (1823[27]), p. 596 (von 1826).

813) J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 77, 467.

814) Ib. 18 (1820), p. 302, 307; 20 (1831), p. 237.

815) Torino mem. 23 (1818), p. 10 (von 1816).

816) p. 38.

wie *Poisson.* Er macht dann mehrfach[817]) von ihnen Gebrauch, um von andern divergenten Integralen die divergenten Bestandteile abzutrennen.

*P. Paoli*[818]) hält die Gleichungen (517) durch den Grenzübergang zu $b = 0$ nicht für genügend begründet; er meint, man müßte dann auch die Richtigkeit der Gleichungen

$$\sin \infty = 0, \quad \cos \infty = 0 \tag{519}$$

annehmen, was doch wieder mit der Identität $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ in Widerspruch stehe. Immerhin könne man diese Gleichungen in dem Sinne gelten lassen, daß ihre rechten Seiten die arithmetischen Mittel aus den sämtlichen möglichen Werten der linken vorstellten. Dann müsse man aber in demselben Sinne auch die Gleichungen

$$\int_0^\infty \xi^{2n} \cos \xi \, d\xi = 0 \tag{520}$$

und folglich auch

$$\int_0^\infty \frac{\cos \xi \, d\xi}{1 + \xi^2} = 0 \tag{521}$$

für richtig erklären; und letzteres widerspreche wieder der Gleichung (847).

*G. Frullani*[819]) erhält aus der Identität

$$\int_0^\varphi F(\xi) d\xi = C - \int_0^\infty F(\xi + \varphi) d\xi \tag{522}$$

durch die Annahme $F(\xi) = \cos x\xi$:

$$\frac{\sin x\varphi}{x} = C - \cos x\varphi \int_0^\infty \cos x\xi \, d\xi + \sin x\varphi \int_0^\infty \sin x\xi \, d\xi; \tag{523}$$

und indem er hier die Faktoren von $\cos x\varphi$ und $\sin x\varphi$ beiderseits einander gleich setzt, wieder die Gleichungen (517).

*J. L. Raabe*[820]) ersetzt die Integrale (517), nach Einführung eines

---

817) p. 37, 38; ebenso *G. Piola,* Mem. soc. ital. $20_2$ (1831), p. 627; *G. Frullani,* ib. p. 672; *Poisson,* J. Éc. polyt. cah. 20 (1831), p. 237.

818) Mem. soc. ital. 20 (1828), p. 169. *A. de Morgan* calculus[207]) p. 576; Cambr. trans. 8, 1844, p. 190 und *J. L. Raabe,* Differentialrechnung[76]), 1, p. 341 erklären den Schluß von (520) auf (521) oder auf andere derartige Gleichungen für unzulässig: die Summe unendlich vieler unendlich kleiner Größen könne endlich sein.

819) Ib. 20 (1831), p. 457 (von 1829).

820) J. f. Math. 15 (1836), p. 362; ebenso Differential- und Integralrechnung 1, Zürich 1839, p. 310; p. 319 Verallgemeinerung auf den Fall, daß unter dem Zeichen $\varphi$ trigonometrische Funktionen von mehr als zwei zu $x$ proportionalen

Konvergenzfaktors, durch unendliche Reihen und benutzt dann für diese die unter[76]) besprochene Schlußweise; so kommt er auch seinerseits auf die Gleichungen (517). Die Anwendung desselben Verfahrens auf allgemeinere Integrale führt ihn zu der Behauptung, es sei jedesmal

$$(524)\qquad \int\limits_0^\infty \varphi(\sin ax,\ \cos bx)\,dx = -\frac{1}{2k\pi}\int\limits_0^{2k\pi}\varphi(\sin ax,\ \cos bx)\,x\,dx,$$

wenn

$$(525)\qquad \int\limits_0^{2k\pi}\varphi(\sin ax,\ \cos bx)\,dx = 0$$

sei.

Nachher[821]) will er sich von der Richtigkeit der Gleichungen (519) oder wie er schreibt

$$(526)\qquad \lim \cos x = \lim \sin x = 0$$

auch direkt überzeugen. Er geht von

$$(527)\qquad e^{mxi} = \cos^m x(1 + i\,\mathrm{tg}\,x)^m$$

aus, entwickelt rechts in die Binomialreihe und glaubt diese für $m = \infty$ durch die Exponentialreihe ersetzen zu dürfen; so kommt er zu der Behauptung, für unendlich große $m$ sei:

$$(528)\qquad e^{mxi} = \cos^m x\,[\cos(m\,\mathrm{tg}\,x) + i\sin(m\,\mathrm{tg}\,x)]$$

aus der allerdings das gewünschte folgen würde. Übrigens meint er, die entsprechenden Grenzwerte der Potenzen von $\cos x$ und $\sin x$ müsse man dadurch bestimmen, daß man diese Potenzen erst durch die Funktionen der Vielfachen von $x$ ersetze[822]); dann komme man auch zu keinem Widerspruch mit der Identität $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

---

Argumenten stehen. — J. f. Math. 23 (1842), p. 105 (von 1840); 25 (1843), p. 162 stellt *Raabe* analoge Untersuchungen für Integrale der Form

$$\int\limits_0^\infty \varphi(\sin ax,\ \cos bx)\frac{dx}{x}$$

an; die *Jakob Bernoulli*sche Funktion, Zürich 1848, p. 36, für Integrale der Form

$$\int\limits_0^\infty x^m\varphi(\sin ax,\ \cos bx)\,dx$$

mit positiven ganzzahligen Exponenten $m$.

821) J. f. Math. 17 (1837), p. 219; Differential- und Integralrechnung 1, p. 234. Ebenso *A. de Morgan*, Cambr. trans. $8_2$ (1844), p. 203.

822) J. f. Math. 25 (1843), p. 169 macht er von den so gewonnenen Grenzwerten dieser Potenzen Gebrauch, um die Entwicklung der Funktion $\arcsin x$ nach Potenzen von $x$ aus deren Darstellung durch ein bestimmtes Integral durch Reihenentwicklung und Grenzübergang unter dem Integralzeichen abzuleiten [!].

Später[823]) gibt er zu, daß diese Ableitung „nicht frei von jedem Einwurfe dasteht"; da er die Existenz eines Grenzwerts bewiesen zu haben glaubt[824]), so schließt er jetzt folgendermaßen: Wenn der Grenzwert von 0 verschieden, z. B. positiv wäre, so müßte die Funktion für alle hinlänglich großen Werte des Arguments positiv sein.

Noch später[825]) hat Raabe noch folgenden merkwürdigen Schluß: Er transformiert das Doppelintegral

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \cos(x^2 - y^2)\,dx\,dy \tag{529}$$

durch Einführung neuer Integrationsvariablen vermöge:

$$x^2 = \frac{v\cos^2 u}{\cos 2u}, \quad y^2 = \frac{v\sin^2 u}{\cos 2u} \tag{530}$$

in:

$$\tfrac{1}{2}B(\tfrac{1}{2}, 0)\int_0^\infty \cos v\,dv \tag{531}$$

und meint nun: da aus den Gleichungen (927) folgt, daß der Wert des Doppelintegrales gleich $\frac{\pi}{4}$ ist, und da die $B$-Funktion unendlich groß ist, so muß der andere Faktor null sein.

Auch *B. Boncompagni*[826]) und *Oettinger*[827]) geben noch die Gleichungen (517) und sogar die allgemeineren:

$$\int_0^\infty x^{p-1}\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}x\,dx = \Gamma(p)\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}\frac{p\pi}{2} \tag{532}$$

auch für $p > 1$, dagegen erklären sich *P. G. Lejeune Dirichlet*[828]), *Navier*[829]), *J. A. Serret*[830]), *M. Ohm*[831]), *F. Arndt*[832]) gegen ihren Ge-

823) Differential- und Integralrechnung 2, Zürich 1843, p. 405.

824) Er hatte ebd. 1 (1839), p. 179, folgendermaßen geschlossen: wenn $f(x)$ bei unbegrenzt wachsendem $x$ kontinuierlich bleibt, muß $\lim_{x=\infty} f(x)$ existieren, indem er die Begriffe „stetig bis in beliebige Nähe von $\frac{1}{x} = 0$" und „stetig bei $\frac{1}{x} = 0$" verwechselt hatte. Vgl. auch seine Auseinandersetzung 1, p. XII: Für unendlich große Argumentwerte höre die Übereinstimmung zwischen der analytischen und der geometrischen Definition der trigonometrischen Funktionen auf.

825) J. f. Math. 37 (1848), p. 348.

826) J. f. Math. 25 (1843), p. 82, 86.

827) Ib. 38 (1849), p. 227, 231.

828) J. f. Math. 17 (1837), p. 60 = Werke 1, p. 263: „Essentiellement indéterminée, du moins tant qu'on la considère en elle-méme."

829) Leçons d'analyse 2, Paris 1840, p. 9.

830) J. de Math. 8 (1843), p. 21: „Serait bon de ne pas employer, puisque la valeur de l'intégrale est évidemment indéterminée."

brauch. *A. A. Cournot*[833]) will sie wenigstens als Grenzwerte gelten lassen, doch ohne sich darüber zu äußern, ob jede Art des Grenzübergangs zu demselben Resultat führen müsse.

*O. Schlömilch*[834]) argumentiert: Da aus der Annahme, die Reihen (25), (26) hätten die angegebenen Summen, mit Notwendigkeit die Gleichungen (519) folgten, diese aber offenbar mit $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ in Widerspruch seien, so dürfe man auch jene Reihensummen nicht gebrauchen.

Auch *M. Ohm*[835]) erklärt sich gegen den Gebrauch der Gleichungen (517).

In England ist über diese Fragen eine Zeitlang lebhaft diskutiert worden. *A. de Morgan*[836]) verwandelt die Integrale (517) durch Einschaltung geeigneter Zwischengrenzen in die unendlichen Reihen

$$(533)\qquad \begin{cases} \int\limits_0^\infty \cos x\,dx = 1 - 2 + 2 - 2 + - + \cdots \\ \int\limits_0^\infty \sin x\,dx = 2 - 2 + 2 - 2 + - + \cdots \end{cases}$$

und behauptet dann auf Grund der Eulerschen Reihentransformation[837]), die Summe der ersteren sei null, die der zweiten 1. Nachher zeigt er noch, daß der Grenzübergang von konvergenten Integralen wie (516) oder (518) her zu demselben Resultat führe[838]). Indem er andererseits die Integration erst unbestimmt ausführt, kommt er[839]) auf die Gleichungen (519); er erklärt zwar, keinen Beweis dafür zu haben, daß diese Gleichungen „universally true" seien, benutzt sie aber doch zur Summation der in Nr. 4 besprochenen Reihen. Nachher[840]) fügt er noch hinzu: Allerdings hätten die kontinentalen Mathematiker

831) Geist der mathematischen Analysis 2, Erlangen 1846, p. 150; System der Mathematik 8, Nürnberg 1851, p. 258; 9 (1852), p. 14, 73. Er bezeichnet seine Auffassung als die damals allgemeine.

832) Arch. Math. 11 (1848), p. 72, 82.

833) Théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 48, 184, 185.

834) Arch. Math. Phys. 3 (1843), p. 277; Handbuch der algebraischen Analysis, Jena 1845, p. 95. Auch Integralr. 1, Greifswald 1848, p. 140, erklärt er $\sin \infty = 0$ für „augenscheinlich falsch".

835) System der Mathematik 9, Nürnberg 1852, p. 360.

836) Calculus[207]), p. 571.

837) Vgl. I A 3, *Pringsheim,* Nr. 37, p. 101.

838) Calculus[207]), p. 572, 631.

839) p. 606. p. 628 behauptet er sogar, $\sin \infty$ sei von derselben Größenordnung wie $\exp(-\infty)$.

840) p. 604. Vgl. auch hier Note 75.

[d. h. bei ihm die französischen; andere kennt er nicht] recht, wenn sie behaupteten, cos $\infty$ und sin $\infty$ seien an und für sich unbestimmt; aber es gebe viele Formeln, die ihre Richtigkeit behielten, wenn man unbestimmte Ausdrücke durch das Mittel aller möglichen Werte ersetze, und in solchen Fällen seien die Gleichungen (519) anzuwenden. Das sicherste sei, solche Formeln immer nur als Grenzfälle von andern anzusehen; wenn auch kein Beweis dafür vorhanden sei, daß man von jeder allgemeineren Formel her zu demselben Grenzwert gelange. Schwierigkeiten dieser Art seien noch bei jeder Erweiterung der Analysis aufgetreten; es seien aber so viele von ihnen bereits aufgeklärt, daß man die Beseitigung der noch übrigen von der Zukunft erhoffen dürfe.

*De Morgans* Auffassungen sind dann von vielen englischen Autoren angenommen und verwendet worden, namentlich auch bei Gelegenheit der unter Nr. **99** zu besprechenden Diskussionen; so von einem mit *H. T.* zeichnenden Anonymus[841]); dann bei Versuchen, den Fourierschen Integralsatz zu beweisen, von einem andern Anonymus[842]) und von einem dritten, der mit *G.* zeichnet[843]). Auch *D. F. Gregory*[844]) stellt die Ableitung der Integrale (517) aus (516) oder (518) und die Ableitung der Gleichungen (519) aus ihnen als Aufgaben. Ein mit *H. G.* zeichnender Anonymus[845]) findet die Verwendung von (517) „rather doubtful", nimmt aber dann doch den Wert 0 für das erste dieser Integrale an, „as the nature of the case shews that it ought".

*S. Earnshaw*[846]) meint, theoretisch behaupte jedermann, cos $\infty$ und sin $\infty$ seien unbestimmt, und praktisch setze sie jedermann gleich null. Allgemeine Zweifel und Bedenken führten bei solchen Fragen zu nichts; man müsse versuchen, genau festzustellen, unter welchen Umständen das letztere erlaubt sei und unter welchen nicht. Es gebe „such a thing as a restricted $\infty$"; z. B. könne man zu verschiedenen Werten eines von einer ganzen Zahl abhängenden Ausdrucks kommen, wenn man diese Zahl durch nur gerade oder durch nur ungerade Werte über alle Grenzen wachsen lasse; und für Funktionen einer

---

841) Cambr. math. J. $2_3$ (1840), p. 141 („That being the average of all ist values"); ib. $3_1$ (1841), p. 47.

842) Ib. $3_6$ (1843), p. 257.

843) Ib. p. 289: „Assuming that cos $\infty$ is a zero of an order sufficient to destroy $f(\infty)$". Vgl. 839).

844) Examples of the processes of the differential and integral calculus, Cambr. 1841, p. 477?; in der zweiten, von *W. Walton* besorgten (mir allein zugänglichen) Auflage, Cambr. 1846, p. 480.

845) Cambr. math. J. $4_2$ (1844), p. 72.

846) Cambr. trans. $8_3$ (1847), p. 255 (von 1844).

kontinuierlichen Veränderlichen gelte Analoges[847]). Daraus folge nicht nur an und für sich schon, daß cos $\infty$ und sin $\infty$ unbestimmt seien, sondern auch die Unzulässigkeit von *de Morgans* Schlußweise[836]), die voraussetze, daß man $\infty$ als ein ganzzahliges Vielfaches von $\pi$ ansehen dürfe; wenn man andere Zwischenwerte benutze, könne man zu ganz andern Resultaten kommen. Auch den Schluß aus dem Grenzübergang von allgemeineren Integralen her verwirft er[848]): in (516) dürfe man nicht $\lim\limits_{b=0} (\exp - bx) = 1$ einsetzen, da diese Grenzgleichung für $x = \infty$ nicht mehr gelte; und den angegebenen Wert des zweiten Integrals (518) hält er überhaupt nicht für richtig.

*G. B. Airy*[849]) berichtet, er habe ursprünglich gegen die Verwendung der Integrale (517) Bedenken gehabt, läßt sich aber dann durch *de Morgans* Zuversicht so vollständig umstimmen, daß er sogar die eigentlich divergenten Integrale (520) benutzt. Ebenso benutzt *W. Center*[850]) diese Formeln ohne jeden Skrupel.

**31. Ältere mißglückte Beweisversuche.** Einige in der älteren Literatur sich findende Ansätze zur Rechtfertigung von Fouriers Behauptung[654]) sind zwar nicht zu vollständigen Beweisen durchgebildet, bieten aber doch vielleicht ein gewisses Interesse, insofern die Theorie der Funktionen von unendlich vielen Veränderlichen derartige Ansätze jetzt hoffnungsvoller erscheinen läßt, als es noch vor kurzem der Fall war. Hieher gehört vor allem ein schon von *Euler*[851]) skizzierter Gedankengang: Die Aufgabe, die allgemeinste periodische Funktion, d. h. die allgemeinste Lösung der Funktionalgleichung

$$F(x+1) - F(x) = 0 \tag{534}$$

zu suchen, kann vermöge des Taylorschen Satzes[852]) zurückgeführt

847) p. 261.

848) p. 264. Im Grunde dieselbe Argumentation, nur in anderer Ausdrucksweise, auch bei *R. Moon*, Phil. mag. (3) 26 (1845), p. 493, und bei *R. J. Young*, ib. 27 (1845), p. 441; Cambr. trans. $8_4$ (1847), p. 434. Vgl. 784.

849) Cambr. trans. $8_5$ (1849), p. 595.

850) Cambr. Dubl. math. J. 5 (1850), p. 215.

851) Petrop. n. comm. 3 (1750/51[53]), p. 43; reproduziert von *Lacroix*, Traité des différences et des séries, 1800, p. 232; Traité du calc. diff. et du calc. int. (2e éd.) 3 (1819), p. 245. *Euler* vermeidet hier den ihm doch sonst geläufigen Gebrauch komplexer Größen; dagegen nicht mehr in der auch sonst modifizierten Darstellung instit. calc. int. 2, Petrop 1769, Nr. 1209 = opera (1) 12, p. 369. *N. Fuß* (Petersb. mém. 4 (1811[13]), p. 221; von 1808) ersetzt ebenfalls derartige Funktionalgleichungen durch Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung, gibt aber keine Lösungen durch Reihenentwicklung.

852) Daß dessen Anwendung hier eine wesentliche Beschränkung der Vor-

werden auf die Integration der linearen Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung, mit konstanten Koeffizienten:

$$y' + \frac{1}{2!}y'' + \frac{1}{3!}y''' + \cdots = 0. \tag{535}$$

Die zugehörige determinierende Gleichung ist

$$z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots = 0, \tag{536}$$

d. h.

$$e^z - 1 = 0;$$

ihre Wurzeln sind:

$$z = 2n\pi i, \quad n \text{ eine beliebige ganze Zahl;} \tag{537}$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (535) also:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \{\alpha_n e^{2n\pi i x} + \beta_n e^{-2n\pi i x}\}. \tag{538}$$

Daraus ergibt sich für die allgemeine Lösung der entsprechenden Gleichung „mit zweitem Glied“:

$$F(x+1) - F(x) = f(x) \tag{539}$$

eine Formel, aus der man unmittelbar die Darstellung der Entwicklung von $f(x)$ nach den trigonometrischen Funktionen der ganzzahligen Vielfachen von $2\pi x$ ablesen kann[853]).

Ein anderer ebenfalls nicht zum Ziele führender Beweisansatz geht auf eine nachgelassene Abhandlung von *L. Euler* zurück, in der zunächst gezeigt wird[854]): der linearen Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit beliebig vielen Variablen und konstanten Koeffizienten:

$$0 = AV + B\frac{\partial V}{\partial x} + C\frac{\partial V}{\partial y} + \cdots + E\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + G\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \cdots + \cdots \tag{540}$$

wird durch einen Exponentialausdruck der Form $\exp(\alpha x + \beta y + \cdots)$ jedesmal dann genügt, wenn die Koeffizienten $\alpha, \beta, \cdots$ der „aequatio vicaria“

$$0 = A + B\alpha + C\beta + \cdots + E\alpha^2 + F\alpha\beta + G\beta^2 + \cdots + \cdots \tag{541}$$

---

aussetzungen bedingt, hat bereits *d'Alembert* bemerkt, Opusc. math. 4 (1768), p. 345; 5 (1788), p. 511.

853) Dieser letztere Schluß wird von Euler hier nicht gezogen, wohl aber von *Lagrange* bei einem etwas allgemeineren, nachher wieder auf das hier vorliegende spezialisierten Problem (Taur. misc. $3_2$ (1762/65[66]) = Oeuvres 1, p. 516), doch nur unter der ausdrücklich ausgesprochenen Voraussetzung „sofern eine analytische Darstellung von $f(x)$ möglich ist“. Auch hier hat also *Lagrange* nicht, wie man wohl gemeint hat, die Entwickelbarkeit einer *willkürlichen* Funktion behaupten wollen.

854) Petersb. mém. 4 (1811[13]), p. 45 (von 1779).

genügen. Wenn man alle so gebildeten Ausdrücke mit willkürlichen Konstanten multipliziere und dann summiere, so erhalte man „einen sehr allgemeinen Ausdruck, den man als das vollständige Integral der Gleichung (540) ansehen dürfe". Das ergänzt er dann noch durch die Bemerkung[855]): man könne eine derartige Summe als Entwicklung nach Potenzen von $p = \exp x$ auffassen und „bekanntlich" jede Funktion von $p$ nach Potenzen von $p$ entwickeln. Daran anschließend hat dann *S. D. Poisson* wiederholt[856]) behauptet: das allgemeine Integral einer linearen partiellen Differentialgleichung müsse sich, wenn $t$ eine der unabhängigen Variablen sei, nach Potenzen von $e^t$ oder auch von $e^{it}$ entwickeln lassen; diese Entwicklungen müßten auch für $t = 0$ gelten und dort die willkürlichen Anfangsbedingungen darstellen. Daß weder die Möglichkeit einer solchen Entwicklung des allgemeinen Integrals dargetan ist, noch daraus folgen würde, daß auch die Anfangsfunktion einer solchen Darstellung fähig sei, bemerkt bereits *E. Dirksen*[857]).

Ein dritter Ansatz, der auf *J. L. Lagrange*[858]) zurückgeht, vertauscht zunächst die Reihenfolge von Summation und Integration, wodurch aus der Entwicklung einer Funktion nach den Sinus der Vielfachen des Arguments die Formel

$$(542)\qquad \left[\int_0^\pi f(\alpha)\,\frac{\sin(n+1)\alpha\,\sin nx - \sin n\alpha\,\sin(n+1)x}{\cos\alpha - \cos x}\,d\alpha\right]_{n=\infty}$$

entsteht. Da Lagrange annimmt (vgl. Nr. **30**), es sei $\sin\infty = 0$, so schließt er, daß zu dem Werte des Integrals nur die Umgebung der Stelle $\alpha = x$ einen merklichen Beitrag liefert, für die auch der Nenner null ist; und indem er sich zur Bestimmung des sog. wahren Wertes

---

855) p. 49.

856) Paris mém. 1 (1816[18]), p. 83?; Bull. soc. philom. 1817, p. 180; J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 371; Mécanique 2 (1833), p. 366; chaleur p. 136, 168. Daß die Überlegung doch noch den Wunsch nach einem directeren Beweis bestehen läßt bemerkt er selbst chaleur p. 291.

857) Berl. Ber. 1842, p. 21.

858) Taur. misc. 1 (1759) = Oeuvres 1, p. 101. Bei Lagrange wird die Schlußweise nicht auf die Entwicklung der Funktion $f(x)$ selbst, sondern auf die zugehörige Lösung des Saitenproblems (Nr. 69) angewendet; infolgedessen hat ihn auch sie nicht zu der Annahme des Satzes geführt, eine willkürliche Funktion lasse sich in eine solche Reihe entwickeln. Vgl. Note 650) und 853). Übrigens fehlt bei Lagrange im Zähler der Subtrahend und steht im Minuenden $\alpha$ statt $(n+1)\alpha$; er hatte die Formel durch Grenzübergang aus einer andern erhalten, bei der nur ganzzahlige Vielfache von $\frac{\pi}{n}$ als Werte von $\alpha$ in Betracht kamen. In den Oeuvres ist die Formel geändert, aber nicht richtig.

des Integranden für diesen Fall der Annahme $\cos \infty = 1$ bedient, glaubt er zu dem gewünschten Resultat zu kommen.

Der erste Teil dieser Schlußweise ist auch von *J. L. Raabe*[859]) übernommen worden; den zweiten ergänzt er (für $x = 0$) durch folgende Betrachtung: Das Integral

$$\int_0^\varepsilon \frac{\sin n\alpha}{\sin \alpha} d\alpha \tag{543}$$

ist, wenn $\varepsilon = k\delta$ gesetzt wird, nach der Definition eines bestimmten Integrals gleich:

$$\lim_{k=\infty} \delta \left[\frac{\sin n\delta}{\sin \delta} + \frac{\sin 2n\delta}{\sin 2\delta} + \cdots + \frac{\sin kn\delta}{\sin k\delta}\right];$$

dafür schreibt er:

$$\lim_{k=\infty} \left[\sin n\delta + \frac{\sin 2n\delta}{2} + \cdots + \frac{\sin kn\delta}{k}\right], \tag{544}$$

und das ist nach (110) gleich $\frac{1}{2}(\pi - \varepsilon)$, also in der Grenze $= \frac{\pi}{2}$.

Verwandter Art ist die Schlußweise von *O. Schlömilch*[860]): sei die doppelte Summe der Reihe (27) mit $F(x)$ bezeichnet, so folgt für ganzzahlige $h$ durch gliedweise Integration mit Hilfe von (110):

$$\int_0^c F(\alpha) \cos h\alpha \, d\alpha = \pi \qquad (0 < c < 2\pi); \tag{545}$$

also wenn wiederholt unter dem Zeichen nach $h$ differentiiert[!] und dann $h = 0$ gesetzt wird:

$$\int_0^c \alpha^m F(\alpha) d\alpha = 0 \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots); \tag{546}$$

und also für jede analytische Funktion $f(x)$:

$$\int_0^c f(\alpha) F(\alpha) d\alpha = \pi f(0). \tag{547}$$

Hie und da findet sich auch der Schluß: da man jede Potenz von $x$ durch eine trigonometrische Reihe darstellen könne (Nr. 7), so sei gleiches auch für jede Funktion möglich, die sich nach solchen Potenzen entwickeln lasse; so bei *A. de Morgan*[861]).

*A. Pioch*[862]) will die trigonometrische Reihe aus dem Fourierschen

859) Differential- und Integralrechnung 1, Zürich 1839, p. 294.

860) Arch. Math. Phys. 1 (1841), p. 267.

861) Diff. and int. calc., London 1836/41, p. 609.

862) Brux. mém. cour. in 4° 15 (1841/42), p. 52. Dabei kommt der Zahlenfaktor des absoluten Gliedes zunächst falsch heraus; dem hilft er durch ein Taschenspieler-

Integral ableiten, indem er das divergente Integral (517) durch die divergente Reihe (25) ersetzt.

**32. Grenzübergang von den Interpolationsformeln her.** Der in Nr. 25 auseinandergesetzten Auffassung würde es entsprechen, wenn man versuchen würde, von der näherungsweisen Darstellung einer Funktion durch eine trigonometrische Interpolationsformel (II 9) vermittelst unbegrenzter Vermehrung der Zahl der benutzten Argumente zu ihrer Darstellung durch eine unendliche trigonometrische Reihe zu gelangen. In der That hat bereits *J. L. Lagrange*[863]) die bei dem Problem der nur in einzelnen Punkten belasteten Saite auftretende Gleichung:

$$(548)\qquad y_\nu = \sum_{n=1}^{N} B_n^{(N)} \sin\frac{n\nu\pi}{N+1}\cos\left(2kt\sin\frac{n\pi}{2(N+1)}\right)$$

in

$$(549)\qquad y_\nu = \sum \overline{B}_n \sin\frac{n\nu\pi}{N+1}\cos\frac{nkt\pi}{N+1}$$

übergeführt, wo die $\overline{B}_n$ sich von den $B_n^{(N)}$ nur durch Größen der Ordnung $1/N$ unterscheiden, und demgemäß seine Näherungskurve zwar nicht durch Punkte der gegebenen Anfangsfigur, sondern durch korrigierte Lagen gelegt, die aber mit wachsendem $N$ jenen unendlich nahe rücken. Er scheint ohne weiters anzunehmen, daß dann „die Differenzen beider Kurven so klein werden, wie man will“[864]), behauptet aber später doch noch[865]), ebenfalls ohne Begründung, daß die so erhaltenen unendlichen Reihen in den meisten Fällen divergieren würden.

Dagegen setzen *J. Fourier*[866]), *S. D. Poisson*[867]), *M. Pagani*[868]),

kunststück ab, nachher (p. 72) findet er das doch „raisonnements un peu abstraits“ und ersetzt es durch ein anderes, das kaum besser ist.

863) Taur. misc. 3 (1762/65[66]) = Oeuvres 1, p. 547.

864) p. 552.

865) Mécanique analytique, 2me éd., Paris 1811 = Oeuvres 11, p. 424.

866) Paris Mém. 4 (1819/20[24]). p. 394 (Preisschrift von 1811); Théorie de la chaleur Nr. 277 = Oeuvres 1, p. 294. Er bemerkt dazu (Nr. 278, p. 296): „Cette méthode ... a une clarté qui lui est propre, et qui dirige les premières recherches. Il est facile ensuite de passer à une méthode plus concise“; daran anschließend noch: Wenn man bei dem Problem der Wärmeleitung den entsprechenden Übergang von der Vorstellung diskreter Massenteilchen zu der eines kontinuierlichen Körpers vornehmen wolle, so müsse man dabei den Koeffizienten des Wärmeaustausches zwischen zwei Teilchen umgekehrt proportional ihrem Abstand nehmen (ein Punkt, dessen Nichtbeachtung nicht nur seinen Zeitgenossen, sondern auch noch späteren Physikern Schwierigkeiten gemacht hat). Vgl. übrigens auch seine spätere Angabe Paris Mém. 5 (1821/22[26]) = Oeuvres 2, p. 94, nach der seine Untersuchungen über Wärmeleitung überhaupt von der Vorstellung des Wärmeaustausches zwischen diskreten Teilchen ausgegangen sind; also jeden-

*v. Schmidten*[869]), *G. Piola*[870]) einfach in den Interpolationsformeln

(550) $$N = \infty, \ \frac{\nu\pi}{n} = x, \ \frac{\pi}{n} = dx,$$

wodurch die Summen zur Koeffizientenbestimmung in Integrale übergehen, die Darstellungsformel selbst in eine unendliche Reihe.

*A de Morgan*[871]) will diesen Grenzübergang bei der nur Cosinusglieder enthaltenden Reihe durchführen, indem er nur über die halbe Periode summiert; da die Summationsformeln nicht einfach werden, kommt er für $\frac{1}{2}\pi A_0$ z. B. nicht auf

$$\int_0^\pi f(x)\,dx$$

sondern auf

(551) $$\int_\delta^{\pi-\delta} \{1 + \sum \cos nx\} f(x)\,dx$$

und muß sich also noch auf die divergente Entwicklung (25) berufen.

Die Schwierigkeit, von diesem Ansatz aus zu einem wirklichen Beweis der Reihenformel zu gelangen, liegt in folgendem Umstand: Definiert man die in den Koeffizienten der Reihenformel auftretenden Integrale als Grenzwerte von Summen, wie sie bei Einschaltung von $M$ Zwischenwerten erscheinen, so verlangt die Reihenformel, daß *erst* zur Grenze $M = \infty$ und *dann* zur Grenze $N = \infty$ übergegangen werden soll. In der Interpolationsformel aber ist $M$ beständig gleich $N$, und von ihr aus würde man zunächst nur zu einer Grenzformel gelangen, in der beide Zahlen zugleich unter Aufrechterhaltung ihrer

---

falls auch seine Untersuchungen über trigonometrische Reihen von den Interpolationsformeln.

867) J. éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 421; 19 (1823), p. 445; chaleur p. 201. Poisson bezieht sich auf Lagrange; wie aus den im Text und in den Noten [850]), [853]), [858]) gemachten näheren Angaben hervorgeht, nur mit sehr bedingtem Recht. Er fügt bei (18, p. 421) „à la première époque où il [Lagrange] en a fait usage, le passage du fini à l'infini a souffert plusieurs difficultés parmi les géomètres; et l'exactitude de cette formule n'a pas paru suffisamment démontrée." Daran schließt er dann die Nr. 34 zu besprechenden Untersuchungen.

868) Brux. Mém. cour. 5 (1827), p. 32, 36. Mit der Konvergenzfrage findet er sich durch die Behauptungen ab: „Die Methode des Unendlichkleinen mache die Durchführung des Exhaustionsbeweises in jedem einzelnen Falle überflüssig" und: „die Reihen seien zwar nicht im allgemeinen, aber in den für die Anwendungen wichtigsten Fällen konvergent; und in andern sei es leicht, sie so zu transformieren, daß sie es würden."

869) J. f. Math. 5 (1830), p. 392.

870) Mém. soc. ital. $20_2$ (1831), p. 586.

871) Diff. and int. calc., Lond. 1836/42, p. 613.

Gleichheit über alle Grenzen wachsen. Darauf hat bereits *E. H. Dirksen*[872]) hingewiesen; ausführlicher hat es *P. G. Lejeune-Dirichlet*[873]) auseinandergesetzt.

**33. Der Deflerssche Beweisansatz.** *Deflers*[874]) leitet zunächst die Grenzgleichung:

$$(552) \qquad \lim_{n=\infty} \int F(x) \begin{Bmatrix} \cos nx \\ \sin nx \end{Bmatrix} dx = 0$$

durch partielle Integration ab; dabei setzt er voraus, die Funktion $F(x)$ lasse in der Umgebung jeder Stelle des Integrationsintervalls eine Entwicklung der Form zu:

$$(553) \qquad F(x) = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \cdots$$

mit Exponenten, die alle algebraisch größer als $-1$ sind. Hierauf bringt er die zunächst zu beweisende Gleichung (384) durch Summation der endlichen trigonometrischen Reihe auf die Form:

$$(554) \qquad f(x) = \lim_{N=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin (2N+1) \frac{(x-\alpha)}{2}}{2 \sin \frac{x-\alpha}{2}} f(\alpha)\, d\alpha;$$

ihre Richtigkeit ergibt sich dann mit Hilfe der Gleichung (vgl. 121):

$$(555) \qquad \lim_{N=\infty} \int \frac{\sin Nx}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}$$

aus (552), sobald in der Entwicklung von $f(x)$ kein Exponent negativ ist.

**34. Der Poissonsche Beweisansatz.** *S. D. Poisson* hatte zuerst die Sätze über die Integration partieller Differentialgleichungen durch trigonometrische Reihen aus ihrer Integration durch trigonometrische Integrale mittels der in Nr. 84 zu besprechenden Methoden abgeleitet. Später[875]) betrachtet er an Stelle der eigentlich zu untersuchen-

872) Berl. Abhandl. 1827[30], p. 111.

873) Repert. Phys. 1 (1837), p. 161 = Werke 1, p. 145.

874) Bull. soc. philomat. 1819, p. 161. Man erkennt nicht, inwiefern er die von ihm über die Funktion $f(x)$ schließlich gemachte Voraussetzung wirklich als Einschränkung ihrer Allgemeinheit empfunden hat. Daß Deflers nur von 0 bis $\pi$ (statt $2\pi$) integriert, heißt so viel als: er entwickelt eine Funktion, die von 0 bis $\pi$ gleich $f(x)$, von $\pi$ bis $2\pi$ (bzw. von $-\pi$ bis 0) gleich 0 ist; vgl. [518]) *Fourier* (théorie Nr. 423 = Oeuvres 1, p. 510) betrachtet die Richtigkeit der Grenzgleichungen (552) als „manifeste".

875) Bull. philomat. 1815, p. 89; J. éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 422. Poisson integriert hier nur von $x = 0$ bis $x = \pi$ und zieht nur zwischen diesen Grenzen gelegene Werte von $x$ in Betracht; er bemerkt auch ausdrücklich, daß an den beiden Grenzen sich nicht $f(x)$, sondern nur $\frac{1}{2} f(x)$ ergibt. Die Integration von $-\pi$ bis $+\pi$ hat Poisson erst ib. 19 (1823), p. 51, 432.

den Reihe die folgende:

$$(556)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\delta}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx-n\alpha)f(\alpha)\,d\alpha$$

und führt sie unter Vertauschung der Reihenfolge von Summation und Integration — gegen die hier nichts einzuwenden ist — und unter Benutzung der Gleichung (2) in das Integral:

$$(557)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-e^{-2\delta}}{1-2e^{-\delta}\cos(x-\alpha)+e^{-2\delta}}f(\alpha)\,d\alpha$$

über, das seinen Namen behalten hat. Er bemerkt, daß im Grenzfall $\delta = 0$ nur diejenigen Elemente des Integrals einen Beitrag geben, für die dann zugleich auch der Nenner Null wird, also nur die Umgebung von $\alpha = x$; er glaubt sich daher berechtigt, nur über diese Umgebung zu integrieren und dabei für $f(\alpha)$ den konstanten Wert $f(x)$ vor das Integralzeichen zu ziehen. Der Wert des dann noch bleibenden Integrals ist in der Grenze gleich $2\pi$[876]); also ergibt sich $f(x)$ als Grenzwert der Reihe (556) für $\delta = 0$.

Die Frage, welchen Bedingungen die Funktion $f(x)$ unterworfen werden muß, damit es erlaubt sei, unter dem Integralzeichen $f(x)$ durch $f(\alpha)$ zu ersetzen, ist von Poisson zwar für das analoge Problem für Funktionen von zwei Variabeln (Entwicklung nach Kugelfunktionen) im Verlaufe einer Diskussion mit Ivory behandelt und im wesent-

---

876) Der Wert dieses Integrals läßt sich mit elementaren Methoden finden und der Grenzübergang dann ausführen; Poisson begnügt sich hier und auch noch später (J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 52, 66, 415, 433; mécanique I, p. 645; chaleur p. 189) damit, daß er, wenn von $\alpha = x - \beta$ bis $\alpha = x + \beta$ integriert werden soll, $\beta$ und $\delta$ als unendlich kleine Größen derselben Ordnung behandelt und Glieder, die in bezug auf sie von der dritten Ordnung sind, vernachlässigt.

Über das zeitliche Verhältnis seiner Untersuchungen zu denjenigen Fouriers gibt Poisson an (J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 1): Fouriers Preisschrift von 1811 sei ihm im Manuskript zugänglich gewesen; die beiderseitigen Resultate stimmten überein, aber die Methode der Behandlung sei verschieden. Seine eigenen Untersuchungen seien 1815 dem Institut vorgelegt, aber seitdem durch Zusätze erweitert worden; worin diese bestehen, gibt er nicht an.

*Deflers* meint in einer Besprechung (Bull. Férussac 1 (1824), p. 333) von Poissons zweiter Abhandlung: dessen Auffassung sei analog zu der des sogenannten wahren Wertes eines Ausdrucks, der in der Form $\frac{0}{0}$ erscheint. Hier wie dort sei der Grenzwert dadurch ausgezeichnet, daß er den kontinuierlichen Übergang zwischen den benachbarten Werten herstelle. [Um diese Analogie vollständig zu machen, müßte freilich gezeigt werden, daß auch hier wie dort unabhängig von der Art der Annäherung immer derselbe Grenzwert erreicht wird.]

lichen auch erledigt worden; aber nicht für das doch einfachere hier in Rede stehende[877]).

Auch *A. Cauchy* hat sich einmal[878]) dieser Schlußweise bedient. Er bringt (für $x = 0$) den gleichgültigen Teil des Integrals auf die Form

$$(558)\qquad \int\limits_{\beta}^{2\pi-\beta} \frac{\varepsilon f(\alpha)\,d\alpha}{\varepsilon^2 + (1-\varepsilon)\left(2 \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

und sagt dann, der Faktor von $f(\alpha)$ sei in ihm

$$(589)\qquad < \frac{\varepsilon}{\beta^2}\left[\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon}{\beta^2} + (1-\varepsilon)\left(\frac{2}{\beta} \sin \frac{\beta}{2}\right)^2\right]^{-1},$$

also „sensiblement nul, si" $\beta$ „étant considéré comme infiniment petit du 1^er^ ordre, on prend pour $\varepsilon$ une quantité infiniment petite d'un ordre supérieur à 2"; den Hauptteil transformiert er zuerst in

$$(560)\qquad \int\limits_{0}^{\frac{\beta}{\varepsilon}} \frac{f(\varepsilon s)\,ds}{1 + (1-\varepsilon)\cdot\left(\frac{2}{\varepsilon} \sin \frac{\varepsilon s}{2}\right)^2}$$

und setzt darin ohne weiteres $\varepsilon = 0$.

*A. de Morgan*[879]) gibt im wesentlichen Poissons erste ungenügende Darstellung wieder.

Der kürzlich[880]) aus dem Nachlaß von *C. F. Gauß* veröffentlichte

877) Vgl. darüber II A 7b, *H. Burkhardt-W. F. Meyer*, Nr. **19**, p. 489 und II A 10, *A. Wangerin*, Nr. **16**, p. 715; sowie *H. Burkhardt*, Jahresber. d. Math.-Ver. $10_2$ (1908), p. 380 (von 1902). — Vgl. über diese Diskussion auch das Urteil von *C. F. Gauß*, Gött. Anz. 1828, p. 56 = Werke 6, p. 648 „einen Zusatz, der richtig verstanden allerdings alle Schwierigkeiten hebt, obwohl eine vollständige Unterscheidung der dabei vorkommenden unendlich kleinen Größen die Evidenz des Beweises noch vollkommener machen würde; wenigstens zeigt das, was neuerlich . . . gegen die neue Poissonsche Darstellung vorgebracht worden ist, wenn es auch das Wesen derselben gar nicht trifft, daß diese Darstellung noch mißverstanden werden konnte."

878) Exerc. de math. 1 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 188.

879) Diff. and int. calc., Lond. 1836/41, p. 615. Er meint, wenn man dabei von unendlich kleinen Größen rede, so sei das nur Abkürzung; wenn man nach Potenzen der kleinen Größen entwickle, könne man zeigen, daß die vernachlässigten Glieder in der Tat von höherer Ordnung seien als die beihehaltenen. p. 627 erläutert er den Grenzübergang zu $r = 1$ noch durch Figuren.

880) Werke 7, p. 471 (nach der Angabe des Herausgebers p. 603 etwa vom Jahre 1816). Von einer späteren Handschrift von *Gauß* über dieselbe Frage ist die Veröffentlichung erst in Aussicht gestellt. (Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß 3 (1912), p. 90.)

Beweisversuch stimmt der Sache nach mit dem Poissonschen überein. Gauß bezeichnet mit $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$, was Poisson $e^{-k}$ genannt hatte, bringt das zunächst zu bestimmende Integral auf die Form

$$(561)\qquad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\varepsilon f(\alpha)\,d\alpha}{\sin^2\frac{(x-\alpha)}{2}+\varepsilon\cos^2\frac{(x-\alpha)}{2}}$$

und substituiert

$$(562)\qquad \operatorname{tg}\frac{x-\alpha}{2}=\varepsilon\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},$$

wodurch es in

$$(563)\qquad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta-\pi}^{\theta+\pi}f(\alpha)\,d\beta$$

übergeht, wobei

$$(564)\qquad \theta=2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\varepsilon\cot\frac{x}{2}\right),$$

also in der Grenze gleich null zu setzen ist. Dann schließt er weiter: ist $\varepsilon$ unendlich klein, so ist für alle $\beta$, die von $-\pi$ und $+\pi$ um ein endliches verschieden sind, $f(\alpha)$ unendlich wenig von $f(x)$ verschieden, also auch das ganze Integral.

Daß bei dieser ganzen Schlußweise die Vertauschung der Reihenfolge der Grenzübergänge $\lim\limits_{\delta=0}$ und $\lim\limits_{n=\infty}$ einer besonderen Rechtfertigung bedarf, haben bereits *E. H. Dirksen*[881]), *W. R. Hamilton*[882]), *M. Ohm*[883]) bemerkt. Auch die schon erwähnten Untersuchungen von *C. J. Malmsten*[778]) sind von diesem Gedanken geleitet; die von ihm angegebenen Bedingungen für die Zulässigkeit jener Vertauschung sind freilich ungenügend. *O. Schloemilch*[884]) hält die Konvergenz der Reihe für $\delta=0$ für eine „offenbar“ hinreichende Bedingung.

881) Berl. Abhandl. f. 1827 [30], p. 86: „Es ist unmittelbar klar, daß die Bedeutung der auf diese Weise entstehenden unendlichen Reihe, an und für sich betrachtet, und hiermit wiederum die eigentliche Lösbarkeit des vorliegenden Problems selbst, völlig zweifelhaft bleibt.“

882) Dubl. Trans. 1843, p. 318 = Dubl. proc. 6, 1841/42, p. 235; übrigens doch mehr gefühlt als klar erkannt.

883) Versuch eines konsequenten Systems der Mathematik 9, Berlin 1852, p. 305.

884) Integralrechnung, Greifswald 1848, p. 173. Er meint übrigens „die Untersuchung . . . hat wenig Wert und trifft den Nerv der ganzen schönen Theorie . . . nicht“; daher begnügt er sich mit der Bestimmung des Grenzwerts des Poissonschen Integrals an der Stelle $x=0$ unter der Voraussetzung, daß $f'(x)$ im Integrationsintervall endlich bleibt.

*R. Moon* dagegen schließt umgekehrt[885]): Da man bei der erwähnten Vertauschung der Reihenfolge von Summation und Integration für $\delta = 0$ eine divergente Reihe erhält, so erklärt er nicht nur Poissons Beweis für falsch, sondern sogar überhaupt die Behauptung von der Möglichkeit der Entwicklung einer willkürlichen Funktion in eine trigonometrische Reihe.

*G. G. Stokes* hat bemerkt[886]), daß man den Poissonschen Ansatz zu einem vollständigen Beweis ausgestalten könne, wenn man die Konvergenz der Reihe für $\delta = 0$ direkt, etwa durch das hier in Nr. **38** zu besprechende Verfahren beweise. Aber erst bei *O. Bonnet*[887]) ist diese Bemerkung zu einem vollständigen Beweis durch den Hinweis auf Abels Satz[766]) geworden.

Das Poissonsche Schlußverfahren kann auch zum Beweis der Sätze über die Entwicklung einer Funktion komplexen Arguments in eine Potenzreihe dienen; es ist dazu von *A. Qu. Gregan-Craufurd*[888]) und von *C. Weierstraß*[889]) verwendet worden.

**35. Exkurs betr. die Entwicklungsgeschichte von Cauchys Residuentheorie.** Die Darstellung der Residuensätze ist in Cauchys erster — nicht zuerst publizierter — Abhandlung[890]) aus doppeltem

885) Phil. mag. (3) 26 (1845), p. 490. *J. R. Young* (ib. 27 (1845), p. 439) weist demgegenüber auf die früher[782]) besprochene Unterscheidung hin; aber *Moon* bleibt auf seiner Meinung (ib. 28 (1846), p. 139).

886) Cambr. trans. $8_5$ (1849), p. 537 (von 1847) = Papers 1, p. 244. Er bemerkt, daß man den Schluß auch anwenden könne, wenn $f'(x)$ an einzelnen Stellen nicht mehr stetig ist; man braucht dann nur, wie in Nr. 20 besprochen, die störenden Bestandteile abzutrennen und sich für diese auf die besonders bewiesene Konvergenz der Reihen von Nr. 7 und 8 zu berufen. Übrigens bemerkt *Stokes* selbst p. 542 = 251: Wenn er die Untersuchungen von *Dirichlet*[1047]) und *Hamilton*[1051]) früher gekannt hätte, so würde er sich wahrscheinlich an sie angeschlossen oder sich einfach auf ihre Resultate berufen haben.

887) Brux. mém. cour. in 4°, 23 (1850), p. 10.

888) An essay on the developement of functions, Lond. 1844, p. 30. Seltsam ist seine Konstantenbestimmung: er erhält für den Wert des Integrals für $f(\alpha) = 1$ die Differenz zweier Werte des Logarithmus derselben komplexen Größe und behauptet ohne weiteres, dafür sei $2\pi i$ zu nehmen. Vgl. [1012]).

889) Werke 1 (1894), p. 61 (von 1841). Er vermeidet den Gebrauch der trigonometrischen Funktionen, indem er $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ als Integrationsvariable einführt; übrigens hat auch er die Berufung auf den Abelschen Satz[766]) zur Vollendung des Schlusses.

890) Paris Mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 381 (von 1814). Vgl. II B 1, *Osgood*, Nr. 3, p. 14; dann die historischen Aufsätze von *P. Stäckel*, bibl. math. (3) 1, 1900, p. 109; 2, 1901, p. 111 und von *Ph. Jourdain*, ib. 6, 1905, p. 190, sowie *E. Lindelöf*, le calcul des résidus, Paris 1906, namentlich p. 84. Eine Über-

Grunde unübersichtlich. Es handelt sich zunächst um den Satz: Ist

$$Z = X + iY$$

eine Funktion von $x + iy$, die in dem von den Geraden

$$x = 0,\ x = a,\ y = 0,\ y = b$$

begrenzten Gebiet überall endlich ist, so ist

$$(565)\quad \int_0^a Z(x + ib)\,dx - \int_0^a Z(x)\,dx = \int_0^b Z(a + iy)\,i\,dy - \int_0^b Z(iy)\,i\,dy;$$

wie sich ergibt, wenn man die identische Gleichung

$$(566)\qquad \frac{\partial Z}{\partial y} = i\,\frac{\partial Z}{\partial x}$$

nach Multiplikation mit $dx\,dy$ über das Rechteck integriert und dabei auf der einen Seite die eine, auf der andern die andere Integration zuerst ausführt. Statt dessen trennt Cauchy erstens jede Gleichung zwischen komplexen Größen in zwei Gleichungen zwischen reellen Größen[891]); zweitens aber führt er noch zwei Hilfsfunktionen $M$, $N$ von $x$ und $y$ ein — wobei $M + iN$ keineswegs eine Funktion von $x + iy$ zu sein braucht — und bildet erst von $M + iN$ eine Funktion, so daß er statt nur mit den zwei Größen $X$ und $Y$ mit vier verschiedenen

$$(567)\qquad \begin{aligned} S &= X\frac{\partial M}{\partial x} - Y\frac{\partial N}{\partial x}, & U &= X\frac{\partial M}{\partial y} - Y\frac{\partial N}{\partial y} \\ T &= X\frac{\partial N}{\partial x} + Y\frac{\partial M}{\partial x}, & V &= X\frac{\partial N}{\partial y} + Y\frac{\partial M}{\partial y} \end{aligned}$$

zu tun bekommt[892]). Ist die Vertauschung der Integrationsreihen-

---

sicht über Cauchys wichtigste Resultate gibt auch *F. Casorati*, teorica delle funzioni di variabili complesse, Pavia 1868, p. 64—91, 102—111. *E. Fabbri*, il teorema dell'integrale di Cauchy, contributo alla storia critica dell'analisi, Bologna 1900, war mir nicht zugänglich.

891) Die Zusammenfassung zweier Gleichungen zwischen reellen zu einer zwischen komplexen Größen erscheint bei ihm erst Bull. philomat. 1822, p. 167 und J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 574. In den der Abhandlung von 1814 beim Druck 1827 beigefügten Noten sind die Resultate durchgängig in die neue Sprache übersetzt.

892) Man könnte sagen: Cauchy bildet die $M + iN$-Ebene, in der er eigentlich operiert, stetig — nicht notwendig konform — in eine $xy$-Ebene ab und integriert dann über ein Gebiet der $M + iN$-Ebene, das einem Rechteck der $xy$-Ebene entspricht. Er bedient sich dieser geometrischen Ausdrucksweise in seinen früheren Arbeiten nirgends, so daß schwer zu sagen ist, wie weit er selbst mit geometrischen Vorstellungen gearbeitet haben mag. Aber wie hat er ohne sie die Herrschaft über seine umständlichen Formeln in der Hand behalten können? Die Zusammenfassung von je zweien der 4 Größen (567) zu einer komplexen Größe erscheint Exerc. de math. 1 (1826) = Oeuvres (2) 6, p. 114; dort ist

folge nicht erlaubt, so erscheint an Stelle der Gleichung (565) eine von der Form:

$$(568)\quad \int_0^a Z(x+ib)\,dx - \int_0^a Z(x)dx = \int_0^b Z(a+iy)i\,dy - \int_0^b Z(iy)i\,dy + A;$$

die mit $A$ bezeichnete Größe tritt dabei zunächst in der Gestalt dessen auf, was Cauchy ein singuläres Integral nennt[893]); nachher zeigt er, daß sie auch durch einen Grenzwert ausgedrückt werden kann. Diese Darstellung durch einen Grenzwert ist sehr umständlich, wenn man Cauchys allgemeine Auffassung voranstellt[894]); für den einfacheren Fall lautet sie:

$$(569)\qquad A = 2\pi i \lim_{\varepsilon=0} \varepsilon f(a+\varepsilon),$$

wenn $a$ eine Unendlichkeitsstelle (Nullstelle des Nenners) von $f(z)$ bedeutet[895]).

Von speziellen Annahmen behandelt Cauchy außer $M = x$,

---

mit $f(z)\dfrac{dz}{dx}$, $f(z)\dfrac{dz}{dy}$ bezeichnet, was in der früheren Bezeichnung $S+iT$, $U+iV$ heißen würde. — Geradezu ausgesprochen finde ich die Zuordnung der komplexen Größe $x+iy$ zu dem Punkte der Ebene mit den kartesischen Koordinaten $x$, $y$ bei Cauchy erst Paris C. R. 5 (1837), p. 302 = Oeuvres (1), 4, p. 85.

893) D. h.

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(a+\xi)\,d\xi.$$

Der heute üblichen Ablehnung dieses Begriffs sowie des damit enge zusammenhängenden Begriffs der „valeur principale" eines bestimmten Integrals (vgl. z. B. II A 3, *Brunel*, p. 138, Note 2), kann ich mich nicht anschließen: Bei den in diesem Artikel zu besprechenden Untersuchungen begegnet man immer wieder Fällen, in welchen eine Gleichung

$$\lim_{y=0}\int f(x,y)\,dx = \int f(x,0)\,dx$$

in dem Sinne gilt, daß rechts der Hauptwert zu verstehen ist. Cauchy scheint auch gerade durch solche Fragestellungen auf seine Definition geführt worden zu sein.

894) Paris Mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 393.

895) Ib. p. 409; die Zusammenfassung zu einer Gleichung zwischen komplexen Größen erst in den Noten von 1827, sowie J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 574; an letzterer Stelle und Ann. de math. 17 (1827), p. 94 auch der allgemeinere Ausdruck für den Fall einer mehrfachen Unendlichkeitsstelle. — Wenn Cauchy Oeuvres (1) 1, p. 383 merkwürdigerweise behauptet, reeller und imaginärer Bestandteil einer rationalen Funktion komplexen Arguments könnten nur unbestimmt, nicht unendlich werden, so hat er übersehen, daß die Unbestimmtheit erst durch die zur Trennung des reellen und imaginären Teiles erforderliche Erweiterung mit dem konjugierten Wert des Nenners hereingekommen ist.

$N = y$ noch: $M = ax$, $N = xy$[896]); $M = x \cos y$, $N = x \sin y$[897]); $M = ax^2$, $N = xy$[898]). Übrigens verwendet er die Formeln in seinen ersten Abhandlungen auch ohne weiteres für ins Unendliche sich erstreckende Bereiche, mit der einzigen Einschränkung, daß die Funktionen für $x = \infty$ und alle in Betracht kommenden $y$ sowie für $y = \infty$ und alle in Betracht kommenden $x$ verschwinden sollen[899]).

*Cauchys* erstes Lehrbuch[900]) enthält dann eine ausführliche und in allem wesentlichen vollständige Theorie der expliziten algebraischen und der sog. elementaren transzendenten Funktionen einer komplexen Variablen, aber weder eine allgemeine Definition des dem Ausdruck „Funktion einer komplexen Variablen" beizulegenden Sinnes, noch Sätze über die Integrale solcher Funktionen, indem ja die Integralrechnung überhaupt außerhalb des Planes dieses Werkes lag. Aber

---

896) Oeuvres (1) 1, p. 349, 463. Dem Rechteck in der $xy$-Ebene entspricht hier ein Dreieck in der $MN$-Ebene.

897) p. 357 (Kreis, bzw. Kreisring in der $MN$-Ebene). Was Cauchy p. 362 als „séparation des exponentielles" bezeichnet, ist, wie er selbst in den Noten von 1827 merken läßt, ein Umweg zur Erlangung von Resultaten, die durch andere Annahmen über die Funktion $f(x)$ bequemer zu erreichen sind.

898) p. 359.

899) p. 425; ebenso noch J. éc. polyt. cah. 19 (1823) = Oeuvres (2) 1, p. 345 und Paris Mém. 22 (1850) (von 1824) = Oeuvres (1) 2, p. 200.

900) Cours d'analyse de l'école polytechnique, I^re^ partie (seule parue): Analyse algébrique, Paris 1821, Kap. 7—10 = Oeuvres (2) 3, p. 153—301. Er faßt die Gleichungen zwischen komplexen Größen als „symbolische" Zusammenfassungen je zweier Gleichungen zwischen reellen Größen, betont aber die Notwendigkeit, die elementaren Funktionen für komplexe Variable aufs neue zu definieren (p. 156, 257, 259) und die fortdauernde Gültigkeit der elementaren Rechengesetze besonders zu beweisen (p. 156, 205, 272) — wenn er auch die Durchführung dieser Beweise im einzelnen meist dem Leser überläßt. Ich kann daher die scharfe Kritik, die *H. Hankel* (Theorie der komplexen Zahlensysteme, Leipzig 1867, p. 14) an Cauchys Ausführungen übt, nicht als berechtigt anerkennen: Cauchys Auffassung unterscheidet sich mehr der Ausdrucksweise als der Sache nach von der von Hankel selbst vertretenen. Erst Exerc. d'analyse 4 (1847), p. 157 und ebenso Paris Mém. 22 (1850) = Oeuvres (1) 2, p. 282 erklärt er, er sei jetzt „après de nouvelles et mûres réflexions" zu der Ansicht gekommen, das beste sei, den Gebrauch des Zeichens $\sqrt{-1}$ ganz fallen zu lassen und die Theorie der imaginären Ausdrücke durch die Theorie der „geometrischen Größen" [d. h. der Vektoren in einer Ebene] zu ersetzen. Erwähnt sei übrigens, daß Cauchy hier ((2) 3 p. 266) und auch noch einige Zeit nachher (z. B. Leçons sur le calcul infinitésimal, Paris 1823 = Oeuvres (2) 4, p. 234; Exerc. de math. 1 (1826) = Oeuvres (2) 6, p. 13; leçons sur le calcul différentiel, Paris 1829 = Oeuvres (2) 4, p. 497; ebenso *P. G. Lejeune-Dirichlet,* J. f. Math. 4 (1829), p. 94 = Werke 1, p. 112) die Hauptwerte der mehrdeutigen Funktionen nur für komplexe Werte mit positiv imaginärem Bestandteil definiert.

auch das folgende[901]) enthält nur die Definition des Integrals einer komplexen Funktion reellen Arguments und bringt die Residuensätze nur für den Fall rechteckiger Begrenzung[902]).

Die entscheidenden Fortschritte bringt dann Cauchys Abhandlung von 1825[903]): die allgemeine Definition des Integrals zwischen komplexen Grenzen als Grenzwert einer Summe, unter Einschaltung beliebiger Zwischenwerte; die Umformung dieser Darstellung in die andere, bei welcher die reellen und die imaginären Teile der eingeschalteten Zwischenwerte als spezielle Werte zweier stetigen monotonen [und differentiierbaren] Funktionen $\varphi$, $\chi$ einer Hilfsvariablen angesehen und diese dann als Integrationsvariable eingeführt wird; den Beweis, daß der Wert des Integrals, wenn die Zwischenwerte alle einem rechteckig begrenzten Gebiet angehören, in dem die Funktion endlich und stetig ist, von der Wahl dieser Hilfsfunktionen unabhängig ist. Diesen letzteren Beweis führt er so[904]), daß er die Funktionen $\varphi$, $\chi$ um Produkte aus einer unendlich kleinen Größe $\varepsilon$ in zwei andere an den Grenzen verschwindende Funktionen $u$, $v$ ändert und dann zeigt, daß in der Entwicklung des variierten Integrals nach Potenzen von $\varepsilon$ der Koeffizient der ersten Potenz dieser Größe Null ist; „wie nach den Grundsätzen der Variationsrechnung vorauszusehen, da unter dem Integralzeichen ein vollständiges Differential steht". Ist die Stetigkeitsbedingung für einen Punkt des unvariierten Wegs nicht mehr erfüllt, so ist der Faktor von $\varepsilon$ nicht mehr gleich Null, sondern erscheint als „singuläres Integral", und als dessen Wert ergibt sich eben $\pi i$ mal dem zugehörigen Residuum[905]).

---

901) Leçons sur le calcul infinitésimal, Paris 1823 = Oeuvres (2) 4, p. 135.

902) p. 202.

903) Mém. sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, Paris 1825 = Bull. Darboux 7 (1874), p. 265; 8 (1875), p. 43, 148; deutsch v. *P. Stäckel*, Leipzig 1900. Die Ausdrucksweise Cauchys ist auch hier zunächst noch rein analytisch; erst § 9, p. 20 (vollständiger Paris Mém. 22 (1850) = Oeuvres (1) 2, p. 325) redet er von der Kurve $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$. Tatsächlich macht übrigens Cauchy in dieser Abhandlung trotz der erwähnten allgemeinen Formulierungen von keinen andern Integrationswegen als Geradenstücken und Kreisbogen wirklich Gebrauch.

904) p. 5.

905) p. 7. Nachher (p. 10; ebenso Ann. de math. 16 (1826), p. 104; 17 (1827), p. 93 und mit Ausführung aller Zwischenrechnungen Exerc. de math. 1 (1826) = Oeuvres (2) 6, p. 115) gibt er noch eine zweite Darstellung, bei der er die Funktion $f(z)$ in ein Hauptglied und einen an der betrachteten Stelle endlich bleibenden Bestandteil zerlegt. Das gibt ihm die Möglichkeit, auch mehrfache Pole zu behandeln; die für diese erhaltenen Resultate verifiziert er dann wieder nach dem ersten Verfahren.

Was die Ausdehnung der Sätze auf sich ins Unendliche erstreckende Bereiche betrifft, so gibt er auch in dieser Abhandlung zunächst[906]) nur wieder die früheren ungenügenden Bedingungen dafür an. Nachher[907]) bemerkt er doch, daß das nicht in allen Fällen angeht: wenn $f(z)$ im Unendlichen nur von der ersten Ordnung Null wird, so hilft er sich damit, daß er die Sätze zunächst auf $\frac{f(z)}{(1-\varepsilon z)}$ anwendet und nachher zur Grenze $\varepsilon = 0$ übergeht [was freilich eine neue Vertauschung von Grenzübergängen involviert].

Eine folgende Abhandlung[908]) bringt dann die Einführung der Namen „résidu" für den Grenzwert (569) und „résidu intégral" für die Summe aller Residuen einer Funktion innerhalb eines bestimmten Bereiches [den er sich allerdings auch hier immer noch durch Parallelen zu den Koordinatenachsen begrenzt vorstellt]; sowie der Bezeichnung:

$$\mathbf{E}\frac{f(z)}{((F(z)))} \tag{570}$$

für das résidu intégral von $\frac{f}{F}$, wenn bei dessen Bildung nur die Nullstellen von $F$, nicht auch die Pole von $f$ berücksichtigt werden sollen. Daran schließt sich eine genauere Untersuchung des Falles, daß ein Pol auf den Rand oder in eine Ecke des Rechtecks fällt[909]): liegt er auf dem Rande, so ist das zugehörige Residuum nur mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in Rechnung zu bringen und das Randintegral als singuläres Integral zu verstehen; liegt er in einer Ecke, so ist das Residuum mit $\frac{1}{4}$ zu multiplizieren und die Integration über die beiden anstoßenden Seiten ist zunächst bis zu demselben Abstand $\varepsilon$ von der Ecke auszuführen, und dann ist zur Grenze $\varepsilon = 0$ überzugehen.

Es folgt eine neue Darstellung der früheren Sätze unter Anwendung dieser Bezeichnungen, in der aber jetzt die Bedingungen schärfer formuliert sind, unter denen die Anwendung der Sätze auf einen ins Unendliche sich erstreckenden Bereich gerechtfertigt ist; z. B.[910]): die

---

906) p. 28; ebenso auch noch Ann. de math. 16 (1826), p. 98.

907) Mém. von 1825, p. 46.

908) Exerc. de math. 1 (1826) = Oeuvres (2) 6, p. 23; deutsch v. *A. v. Ettingshausen,* Zeitschr. Phys.-Math. 1 (1826), p. 342.

909) Ib. p. 116 zunächst für die einfachen Funktionen $z^{-m}$; dann p. 124, 128 für allgemeinere Funktionen, durch Abtrennung der unendlich werdenden Bestandteile. Der geometrischen Ausdrucksweise bedient sich übrigens Cauchy auch hier nicht.

910) Ib. p. 135. Etwas anders Ann. de math. 16 (1826), p. 100, wo die Grenzübergänge zu $x = \infty$ und zu $y = \infty$ in der umgekehrten Reihenfolge vorgenommen werden und infolgedessen vorausgesetzt werden muß, daß die Grenz-

Gleichung

$$(571)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\left[\mathop{\mathbf{E}}_{x=-\infty\, y=0}^{x=+\infty\, y=+\infty} f(z) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{F}\right]$$

gilt, wenn

$$(572)\qquad f(x+iy) = 0 \quad \text{für } x = \pm\infty \text{ und jedes [positive] } y$$

und:

$$(573)\qquad \lim_{y=\infty}\,[(x+iy)f(x+iy)] = \mathfrak{F} \text{ für jedes } x.$$

Daran schließen sich dann entsprechende Sätze über das für die ganze Ebene genommene Integralresiduum; namentlich[911]): wenn

$$(574)\qquad f(z) = 0 \text{ für } z = \infty,$$

und wenn außerdem die Grenzwerte

$$(575)\quad \lim_{x=+\infty}\,[(x+iy)f(x+iy)] = \mathfrak{F}_1,\ \lim_{x=-\infty}\,[(x+iy)f(x+iy)] = \mathfrak{F}_2$$

beide existieren — mögen sie auch voneinander verschieden sein — so ist:

$$(576)\qquad \mathbf{E}\, f(z) = \frac{\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2}{2}.$$

Es folgt die Ableitung der Gleichung[912]):

$$(577)\qquad \mathbf{E}\, f(z) = \mathbf{E}\,\frac{f(z^{-1})}{((z))}.$$

[Sie drückt den Satz aus: Die Summe der Residuen einer eindeutigen Funktion auf der ganzen Kugel ist Null]. Dann der Satz[913]): Hat die Funktion $f(z)$ in einem Punkte einen Pol, so ist das Residuum ihrer Ableitung $f'(z)$ in diesem Punkte immer gleich Null.

Erst nachher[914]) werden die Sätze auf Bereiche übertragen, die dadurch entstehen, daß ein Rechteck einer Hilfsebene stetig [nicht notwendig konform] auf die betrachtete Ebene abgebildet wird; mit besonderer Hervorhebung des Falles, daß in dieser Ebene das Bild

---

gleichung (573) für $x = \infty$ gilt (Cauchy sagt hier: $\lim\limits_{|z|=\infty} zf(z)$ soll gleich $\mathfrak{F}$ sein, macht aber von dieser Voraussetzung nur in dem eben angegebenen Sinne Gebrauch). — [Übrigens muß bei der einen wie bei der andern Schlußweise vorausgesetzt werden, daß die betreffende Grenzgleichung gleichmäßig in bezug auf die andere Koordinate gilt, da sie integriert wird.] — Noch eine andere Formulierung, bei der die Gültigkeit der Grenzgleichung (573) mit $\mathfrak{F} = 0$ sowohl für $x = \pm\infty$ und jedes [positive] $y$, als für $y = +\infty$ und jedes $x$ vorausgesetzt wird, exerc. d'anal 2, 1841, p. 361; C. R. 16 (1843), p. 426; 23 (1846), p. 274. = Oeuvres (1) 7, p. 276; 10, p. 78.

911) p. 141.

912) p 171.

913) p. 210.

914) p. 256.

ein Kreisringsektor ist; und schließlich[915]) auch noch auf Bereiche, deren Bild in der Hilfsebene durch zwei Parallele zu einer Achse und zwei Kurvenbogen begrenzt ist.

Als Ausdruck der Bedeutung, die Cauchy um diese Zeit seinen Untersuchungen beigelegt wissen wollte, darf man wohl die Äußerung in einem Referat [Selbstreferat?][916]) nehmen: „Substituer une méthode facile et d'une application très-étendue à une marche de calcul laborieuse et sans liaison n'est point, quoiqu'on ait pu dire, abuser des théories inventées ou développées par d'autres géomètres; c'est d'ailleurs la marche de l'esprit humain dans toutes les découvertes, et surtout dans les mathématiques."

Einen weiteren Fortschritt — namentlich auch für die hier zu besprechenden Anwendungen — bringt dann die Bemerkung[917]), daß die Summe der Residuen in der ganzen Ebene nicht immer von der Reihenfolge der Summation unabhängig ist, und die daran sich anschließende Definition des „Hauptwertes" dieser Summe als des Grenzwertes, dem sich die Summe der Residuen in einem Kreise um den Nullpunkt nähert, wenn der Radius dieses Kreises unbegrenzt wächst. Kann man eine Folge von unbegrenzt wachsenden Werten $\varrho_n$ angeben, derart, daß

$$\lim_{n=\infty} (\varrho_n e^{\varphi i} f(\varrho_n e^{\varphi i})) = \mathfrak{F} \tag{578}$$

existiert und von $\varphi$ unabhängig ist, so existiert auch der Hauptwert des Integralresiduums und ist diesem Werte $\mathfrak{F}$ gleich[918]); und dasselbe gilt auch noch, wenn die Grenzgleichung (578) in der Umgebung gewisser Werte von $\varphi$ nicht mehr erfüllt ist, falls nur dort

$$\varrho_n f(\varrho_n e^{\varphi i}) - \mathfrak{F} \tag{579}$$

unterhalb einer endlichen Grenze bleibt[919]); endlich auch noch, wenn statt (578) die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} [\tfrac{1}{2} \varrho_n e^{\varphi i} (f(\varrho_n e^{\varphi i}) + f(-\varrho_n e^{\varphi i}))] = \mathfrak{F} \tag{580}$$

in demselben Sinne besteht[920]).

---

915) p. 260.

916) Bull. Férussac 6 (1826), p. 316.

917) Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 292. Ib. p. 364 weist Cauchy ausdrücklich darauf hin, daß solche Untersuchungen unentbehrlich seien, wenn man die Sätze über Partialbruchzerlegung auf transzendente Funktionen anwenden wolle.

918) p. 297.

919) p. 298; p. 303 sogar eine Bemerkung betr. den Fall von unendlich vielen Ausnahmewerten des Winkels $\varphi$.

920) p. 320. Die Verallgemeinerung auf den Fall, daß statt der Kreise

Was denjenigen Satz betrifft, an dem Cauchys Name ganz besonders haften geblieben ist, so erscheint eine mit ihm äquivalente Formel, allerdings unter Beschränkung auf reelle positive $z$[921]), bei Cauchy bereits 1822. Die Anwendung des Residuensatzes auf einen Halbkreis gibt ihm nämlich zunächst[922]):

$$(581)\qquad \int_0^\pi \frac{e^{ip} f(e^{ip})\,dp}{e^{ip}-a} = \pi f(a) + i\int_{-1}^{+1}\frac{f(r)\,dr}{r-a}$$

und als eine „leichte" Folgerung daraus:

$$(582)\qquad \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inp} f(b+e^{ip})\,dp = \frac{\pi}{n!}\,\frac{d^n f(b)}{db^n}.$$

Doch hat er damals ihre zentrale Stellung entweder nicht erkannt oder nicht erkennen lassen wollen; vielmehr stellt er neben die Doppelformel:

$$(583)\qquad \tfrac{1}{2}\int_0^\pi\left(\frac{f(e^{ix})}{1-ze^{-ix}}+\frac{f(e^{-ix})}{1-ze^{ix}}\right)dx = \begin{cases}\pi f(z) \text{ für } z<1,\\ 0 \quad\;\; \text{„} \;\; z>1\end{cases}$$

als gleichberechtigt die andere:

$$(584)\qquad \tfrac{1}{2}\int_0^\pi\left(\frac{f(e^{ix})}{1-ze^{ix}}+\frac{f(e^{-ix})}{1-ze^{-ix}}\right)dx = \begin{cases}\pi f(0) \text{ für } z<1,\\ \pi\left(f(0)-f(z^{-1})\right) \text{ für } z>1\end{cases}$$

und gibt in einer bald folgenden Abhandlung[923]) sogar nur diese letztere, allerdings jetzt auch für negative reelle $z$ und in der Form, daß die beiden Integrale rechts in eines mit den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ zusammengezogen sind. Nachher[924]) schreibt er die Formeln in der

---

eine andere Schar zueinander ähnlicher Kurven auftritt, erst Paris C. R. 32 (1851), p 207 = Oeuvres (1) 11, p. 306.

921) „Nombre" bedeutet in dieser Zeit bei Cauchy immer nur positive reelle Zahl; für reelle Zahl überhaupt sagt er „quantité", für komplexe Zahl „expression imaginaire".

922) Bull. philomat. 1822, p. 169. Als Gültigkeitsbedingungen gibt er hier, daß die Funktion $f$ zwischen den Grenzen $p=0$, $p=\pi$; $r=0$, $r=1$ „ni infinie ni indéterminée" werden dürfe. Das Integral rechts ist übrigens als singuläres zu verstehen. In einer Nachschrift p. 173 erwähnt er, wie man alle seine Formeln aus dem Parsevalschen Satze (Nr. 23) erhalten könne.

923) J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 579. Er erwähnt hier selbst, daß man durch Trennung des reellen und imaginären Teils zu Poissons Formeln (594) gelange; später (Mém. von 1825, p. 54, 57; Exerc. de math. 1 (1826) = Oeuvres (2) 6, p. 275; Ann. de math. 17 (1827), p. 114) verweist er auch auf *Vernier* 1008), Frullani 1006), und Libri 1007).

924) Mém. von 1825 (Note 903), p. 56.

Gestalt, daß er die Faktoren $(1 - \exp(\pm ix))^{-1}$ — immer noch unter der Voraussetzung eines reellen $z$ — in reellen und imaginären Teil zerlegt und als Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ benutzt. Erst 1826[925]) werden die Formeln auch für komplexe Werte von $z$ in Anspruch genommen, und um dieselbe Zeit[926]) erscheint die Gestalt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(e^{ix})\,dx}{1 - ze^{-ix}}, \tag{585}$$

1831 die mit der jetzt üblichen Schreibweise schon ziemlich übereinstimmende[927]):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\zeta f(\zeta)}{\zeta - z}\,dx \qquad (\zeta = re^{xi}). \tag{586}$$

Als Gültigkeitsbedingung gibt er hier und auch noch später[928]) an, die Funktion $f$ müsse für $|z| < r$ „endlich und stetig" bleiben; erst 1840 bemerkt er[929]), man habe doch keine hinlängliche Sicherheit dafür, daß aus diesen Eigenschaften der Funktion dieselben für ihre Ableitung folgten, und es sei deshalb „plus rigoureux", wenn man diese Bedingung ausdrücklich mit unter die Voraussetzungen aufnehme. Bei dem Abdruck des ersten Teils der Abhandlung von 1831 im folgenden Jahre[930]) tut er das dann auch an den meisten Stellen, nur

---

925) Exerc. de math. 1 (1826) = Oeuvres (2) 6, p. 271; auch hier noch in der eben erwähnten Zerlegung.

926) Ann. de math. 17 (1827), p. 114. Ib. p. 112 sind die Formeln noch in der alten Gestalt gegeben.

927) Sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul (von 1831), lith. Turin 1832, eine addition 1833; ital. v. *G. Frisiani* und *G. Piola* (ohne die addition und den § 3 des ersten Teils und mit Versetzung des § 1 des ersten Teils an die Spitze des zweiten, mit Noten, die hauptsächlich in Ausführung der Zwischenrechnungen bestehen), Mem. di mat. e di fis. di diversi autori 2 (1834) (auch sep., Milano 1835). Der Auszug Bull. Férussac 15 (1831), p. 260 enthält keine expliziten Formeln, sondern nur allgemeine Angabe des Gedankengangs und der Resultate. Der Beweis der Gleichung (586) ist auch in dem mém. sur la résolution générale des équations 1837, p. 2 aus dem Turiner mém. reproduziert.

928) So in dem 1835 lithographierten mém. sur l'intégration des équations différentielles und auch noch in dessen Abdruck exerc. d'anal. et de phys. math. 1, 1840, p. 356; dann Paris C. R. 4 (1837), p. 216 (Brief an Coriolis) = Oeuvres (1) 4, p. 39.

929) Paris C. R. 8 (1839), p. 187 = Oeuvres (1) 4, p. 486 und in der damit bis auf die Einleitung, die Bezeichnung und die Reihenfolge der Abschnitte übereinstimmenden Note Exerc. d'anal. et de phys. math. 1 (1840), p. 32. Ebenso bei *Moigno*, leçons 1, Paris 1840, p. 159.

930) Exerc. d'anal. 2 (1841), p. 52. Einige Resultate der Abhandlung von

gerade nicht an der hier in Frage kommenden[931]), was aber wohl nur ein Versehen ist.

An die Formel (586) schließt er dann sofort die Entwicklung einer derartigen Funktion in eine nach Potenzen von $z$ mit ganzen positiven Exponenten fortschreitende Reihe, samt der Abschätzung des Restes mit Hilfe des Maximums der Funktion auf dem Kreise[932]).

Eine sich anschließende Abhandlung[933]) führt dann die Bogenlänge der Begrenzungskurve als Integrationsvariable ein und schreibt den Residuensatz in der Form[934]):

$$\mathcal{E}((f(z))) = \frac{1}{2\pi i}\int f(z)\frac{dz}{ds}\,ds. \tag{587}$$

Später hat er bemerkt[935]), daß man zur Ableitung seiner Sätze nicht des allgemeinen Integralbegriffs, sondern nur des Begriffs des Mittelwerts bedarf: er zeigt mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, daß die Summe

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\varepsilon^{\nu}f'(r\varepsilon^{\nu}) \qquad \left(\varepsilon = \exp\frac{2\pi i}{n}\right) \tag{588}$$

mit $\frac{1}{n}$ gegen null, also die Summe

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}f(r\varepsilon^{\nu}) \tag{589}$$

gegen einen von $r$ unabhängigen Grenzwert konvergiert. Bei dieser Darstellung erscheint die Stetigkeit von $f'(z)$ als unentbehrliche Vor-

---

1831 sind auch bereits ib. 1, p. 29 und p. 355 reproduziert; p. 29 fordert er die Stetigkeit auch der Ableitung, aber nicht p. 356.

931) Auch nicht in dem vorangehenden Abdruck des Auszugs von Bull. Férussac 15, exerc. d'anal. 2, p. 44.

932) Mém. von 1831, p. 9; vgl. auch den in Note 928 erwähnten Brief. — Die Leçons sur le calcul diff. Paris 1829 enthalten zwar (Oeuvres (2) 4 p. 446) Potenzreihen komplexen Arguments, mit der Angabe der Gültigkeitsbedingung „wenn das Restglied mit wachsendem $n$ unbegrenzt abnimmt", aber ohne Untersuchung darüber, unter welchen Voraussetzungen das eintritt.

933) Sur les rapports qui existent entre le calcul des résidus et le calcul des limites et sur les avantages qu'offrent ces deux nouveaux calculs dans la résolution des équations algébriques ou transcendantes, lith. Turin 1831 oder 1832; ital. Übersetzung von *A. Lombardi,* Mem. soc. ital. $22_1$ (1839), p. 91; Auszug bull. Férussac 16 (1831), p. 116.

934) p. 98 der italienischen Übersetzung.

935) Paris C. R. 10 (1840), p. 642 = Oeuvres (1) 5, p. 182 = exerc. d'anal. 1 (1840), p. 270; reproduziert von *Moigno,* Leçons[746]) 1, Paris 1840, p. 152; auch von *O. Schlömilch,* Differentialrechnung, Greifswald 1847, p. 198.

aussetzung[936]); Cauchy führt sie daher in der folgenden Zeit fast immer ausdrücklich mit auf, wenn er die gern ergriffene Gelegenheit hat, seinen Satz anzuziehen[937]). Erst infolge einer ihm von *J. Liouville* gemachten Bemerkung: sein ursprünglicher Beweis[932]), der letzten Endes auf der Vertauschung der Integrationsreihenfolge in einem Doppelintegral beruht, sei von der Voraussetzung der Stetigkeit der Ableitung unabhängig — läßt er sie zunächst wieder fallen[938]). In der folgenden Zeit scheint er über eine gewisse Unsicherheit nicht Herr geworden zu sein: öfters fügt er die Bedingung der Stetigkeit der Ableitung wieder bei[939]); und wenn er es an andern Stellen[940]) nicht tut, so denkt er dabei vielleicht an die einmal[941]) von ihm ausgesprochene allgemeine Bemerkung: man könne mit Hilfe der Theorie der singulären Integrale die Gültigkeit der Sätze leicht auf den Fall ausdehnen, daß die Ableitung an einer endlichen Anzahl von Stellen unendlich oder unstetig wird; Funktionen mit einer unendlichen Anzahl von Unstetigkeitsstellen schließe er überhaupt aus. Dann erklärt er aber doch wieder[942]): man könne alle Schwierigkeiten am besten abschneiden, wenn man die Stetigkeit der Ableitung mit voraussetze.

Was Entwicklungen nach steigenden und fallenden Potenzen von $z$ betrifft, so hat *A. Cauchy* zunächst behauptet[943]), daß zwei solche

936) Genau genommen setzt Cauchys Schlußweise sogar „gleichmäßige Differentiierbarkeit" der Funktion $f$ auf dem betrachteten Kreise voraus und vertauscht auch sonst ohne weiteres die Reihenfolge von Grenzübergängen.

937) Paris C. R. 10 (1840), p. 939; 11 (1840), p. 640; 17 (1843), p. 938, 1221; 18 (1844), p. 119; 19 (1844), p. 151 = Oeuvres (1) 5, p. 234, 361; 8, p. 115, 135, 148, 276. Wenn er es Paris C. R. 15 (1842), p. 261 = Oeuvres (1) 7, p. 92 nicht tut, so trägt dieser Paragraph auch sonst die Spuren früherer Abfassung.

938) Paris C. R. 19 (1844), p. 139; = Oeuvres (1) 8, p. 369. Wie es gemeint ist, verstehe ich nicht ganz: das Doppelintegraltheorem muß doch bei Ableitung des Randintegralsatzes nicht auf die Funktion $f$ selbst, sondern auf $f'$ angewendet werden. Liouville und Cauchy haben wohl die Existenz der Ableitung hier noch für selbstverständlich und die Endlichkeit des Integranden für eine hinreichende Bedingung für die Anwendung des Doppelintegralsatzes gehalten. Vgl. auch die Bemerkungen von *A. Pringsheim,* Bibl. math. $3_1$ (1900), p. 473.

939) Paris C. R. 20 (1845), p. 340; 29 (1849), p. 43 = Oeuvres (1) 9, p. 31; 11, p. 135.

940) 19 (1844), p. 205, 1332; 20 (1845), p. 127, 213, 283; 27 (1848), p. 373; 32 (1851), p. 280 = Oeuvres (1) 8, p. 287, 360, 423, 435; 9, p. 8; 11, p. 82, 329.

941) 20 (1845), p. 120 = Oeuvres (1) 8, p. 415.

942) 20 (1845), p. 465 = Oeuvres (1) 9, p. 56.

943) Paris C. R. 13 (1841), p. 912 = Oeuvres (1) 6, p. 361. Der Beweis geschieht durch gliedweise Integration [setzt also gleichmäßige Konvergenz voraus, die nicht stattzuhaben braucht, wenn die Reihe nur auf dem Kreise konvergiert].

Entwicklungen, deren Werte auf einem Kreise um den Nullpunkt übereinstimmen, notwendig Glied für Glied übereinstimmen müssen. Daraufhin hat *P. A. Laurent* der Pariser Akademie seine einschlägigen Untersuchungen mitgeteilt und im Begleitschreiben bemerkt[944]), er sei im Besitze der Konvergenzbedingungen „für alle bisher von den Mathematikern benutzten Reihenentwicklungen“, insbesondere auch für die trigonometrischen. Bei Gelegenheit der Berichterstattung über diese Abhandlung teilt dann *Cauchy* aus ihr den Satz mit[945]): Eine Reihe der vorhin genannten Art konvergiert, solange $|z|$ zwischen zwei Grenzen liegt, zwischen denen die Funktion und ihre Ableitung endlich und stetig bleiben; er gibt[946]) von ihm einen Beweis mit Hilfe seiner Residuenformeln, der nach seiner eigenen Angabe sich von dem Laurents nur durch eine kleine Vereinfachung unterscheidet.

Von weiteren funktionentheoretischen Resultaten aus dieser Zeit ist zunächst der von *Cauchy* aus einer von *Cellérier* eingereichten Note mitgeteilte[947]) Satz zu nennen, daß eine Funktion komplexen

---

Ein späterer Beweis (Paris C. R. 17 (1843), p. 193 = Oeuvres (1) 8, p. 5) verfährt im Prinzip ebenso, nur ersetzt er die Integration durch Mittelwertbildung. [Auch hier muß gleichmäßige Konvergenz vorausgesetzt werden, wenn man von dem Verschwinden der einzelnen Reste auf das Verschwinden ihres Mittelwerts schließen will.]

944) Paris C. R. 17 (1843), p. 348.

945) Ib. p. 938 = Oeuvres (1) 8, p. 116.

946) Ib. p. 940 = Oeuvres (1) 8, p. 117; etwas anders stilisiert C. R. 18 (1844), p. 122; 20 (1845), p. 122 = Oeuvres (1) 8, p. 152, 418. *Laurent* hatte seinen Satz nur als eine „extension“ von demjenigen Cauchys bezeichnet; *Cauchy* meint (C. R. 17 (1843), p. 940 und ebenso im Nachruf auf Laurent, ebd. 40 (1855), p. 632 = Oeuvres (1) 8, p. 117; 12, p. 257), es sei vielmehr ein neuer bemerkenswerter Satz. Sein Bericht schließt mit dem Antrag auf Aufnahme von Laurents Abhandlung in die mém. prés., doch ist sie nicht erfolgt. Laurents eigene Darstellung ist erst mehrere Jahre nach seinem Tode veröffentlicht (J. éc. polyt. cah. 40 (1863), p. 106, 145); sie ist sehr schwerfällig, da er überall mit der Darstellung einer komplexen Größe durch absoluten Betrag und Polarwinkel arbeitet, also z. B. statt $\frac{dz}{z}$ immer

$$\left(\sqrt{-1} + \frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}\right) d\varphi$$

schreibt.

947) Paris C. R. 18 (1844), p. 168 = Oeuvres (1) 8, p. 161. Auch von dieser Note ist der beantragte Abdruck in den mém. prés. nicht erfolgt; sie scheint überhaupt nicht in extenso veröffentlicht zu sein. *Cauchy* berichtet Paris C. R. 20 (1845), p. 121 = Oeuvres (1) 8, p. 416, *Cellérier* habe ihm mitgeteilt, daß der Satz auch noch gelte, wenn die Funktion nur für alle reellen Werte eines Intervalls null sei. Was dabei eigentlich unter Funktion komplexen Arguments zu verstehen sei, wird nicht angegeben.

Arguments, die für alle reellen Werte desselben null ist, auch für alle komplexen Werte null sein muß. *Cauchy* stellt ihm bald darauf[948]) zunächst den folgenden zur Seite: Eine Funktionalgleichung bleibt im ganzen Konvergenzkreisring bestehen, wenn sie auf einem Kreise gilt. Nachher[949]) hat er erkannt, daß dieser Satz noch eine wesentliche Erweiterung gestattet: man kann die Gültigkeit einer solchen Gleichung für den ganzen zusammenhängenden Bereich behaupten, in dem die Funktionen stetig bleiben; wenn man die einzelnen Glieder der Laurentschen Entwicklung von $f(x+\xi)$ nach Potenzen von $\xi$ entwickelt und dann umordnet. Die Abhandlung, in der er diese Erweiterung beweist, ist auch darum bemerkenswert, weil er in ihr — soviel ich sehe, in ihr zuerst — von der geometrischen Darstellung der Punkte komplexer Zahlen durch die Punkte einer Ebene unverhüllt Gebrauch macht; doch gebraucht *Cauchy* hier und auch später für die komplexe Variable und den Punkt, der sie darstellt, zwei verschiedene Buchstaben.

Ferner sei der Satz erwähnt, daß eine Funktion komplexen Arguments, die im Endlichen und Unendlichen überall endlich bleibt, notwendig eine Konstante ist. Cauchy hat ihn zunächst unter der noch etwas einschränkenden Voraussetzung bewiesen, daß $\lim\limits_{z=\infty} f(z)$ existiert[950]), dann aber gezeigt[951]), daß er von dieser Einschränkung befreit werden kann, indem man entsprechende Schlüsse auf die Funktion

$$\frac{f(z)}{(z-x)(z-y)} \tag{590}$$

anwendet.

Zwei andere Noten enthalten die Bemerkung[952]), daß man die

---

948) Paris C. R. 20 (1845), p. 121 = Oeuvres (1) 8, p. 416.

949) Paris C. R. 20 (1845), p. 377 = Oeuvres (1) 9, p. 34. Man ist versucht, hier bei Cauchy das Prinzip der „analytischen Fortsetzung" (vgl. II B 1, *Osgood*, Nr. **13**, p. 35) finden zu wollen; ein wesentlicher Unterschied gegenüber der Auffassung von *Weierstraß* liegt aber darin, daß die Funktion bei ersterem immer als für ihren ganzen Stetigkeitsbereich gegeben vorausgesetzt, nicht wie bei letzterem aus einem ihrer Elemente heraus erzeugt wird.

950) 19 (1844), p. 1337 = Oeuvres (1) 8, p. 367.

951) 19 (1844), p. 1343 = Oeuvres (1) 8, p. 373. Cauchy hat recht, wenn er 19 (1844), p. 1378 = Oeuvres (1) 8, p. 379 bemerkt, daß auch die zweite Formulierung unmittelbar aus einer bereits 17 (1843), p. 574 = Oeuvres (1) 8, p. 57 von ihm benutzten Umformung folgt; immerhin hat er den Satz nicht früher ausdrücklich ausgesprochen als Liouville den entsprechenden Satz für doppeltperiodische Funktionen (vgl. II B 3, *Harkneß-Wirtinger-Fricke*, Nr. **38**, p. 233). Andererseits beruht es wohl auf einer Verwechslung, wenn, wie *Osgood*, II B 1, Note 29, p. 19 angibt, zuweilen auch der allgemeine Satz Liouville zugeschrieben wird.

952) Paris C. R. 18 (1844), p. 561; 19 (1844), p. 209 = Oeuvres (1) 8, p. 165, 290.

Koeffizienten einer Laurentschen Entwicklung auch durch Integrale über den einen oder den andern Rand des Konvergenzkreisrings darstellen und sie damit abschätzen könne; sofern nur die Funktion auf diesem Rande nur so unendlich wird, daß die Integrale Bedeutung behalten.

Zu erneuter Beschäftigung mit der Frage nach den Gültigkeitsbedingungen seiner Sätze ist Cauchy durch einen Aufsatz von *E. Lamarle* veranlaßt worden. Dieser behauptet einerseits[953]), die Forderung der Stetigkeit der Ableitung sei unnötig [täuscht sich aber darin, indem auch in seinem Beweisgang die Reihenfolge von Differentiation und Integration vertauscht wird]; andererseits glaubt er die Periodizität der Funktion in bezug auf den Polarwinkel ausdrücklich fordern zu müssen. *Cauchy* erwidert[954]): Die letzte Forderung sei bei ihm immer in der der Stetigkeit inbegriffen gedacht. Daraufhin setzt *Lamarle* seine Auffassungen noch einmal ausführlich auseinander[955]). Er meint, eine komplexe Größe selbst als unabhängige Veränderliche zu betrachten, gebe keinen präzisen Sinn; man müsse sie durch ihren absoluten Betrag und ihren Polarwinkel ersetzen; dann muß man freilich die Periodizität in bezug auf diesen letzteren ausdrücklich fordern. Sein Funktionsbegriff ist ziemlich unklar: er definiert Funktion als eine „expression"[956]), gibt aber nicht an, welche Operationen bei der Bildung eines solchen Ausdrucks als zulässig betrachtet werden sollen. Er meint, man könne eine Funktion erst dann als „erschöpft" ansehen, wenn sie alle reellen und komplexen Werte angenommen habe, dürfe sich also auch bei den elementaren Transzendenten nicht auf die Hauptwerte beschränken. Damit hängt noch ein anderer Differenzpunkt zusammen. *Cauchy* hält auch in dieser Zeit noch an der früher[900]) von ihm gestellten Forderung fest, jedes Funktions-

953) J. de math. 11 (1846), p. 129; eine zweite Darstellung, ib. p. 259, die Mittelwerte statt der Integrale verwendet, enthält denselben Fehlschluß. Die am Schluß der letzteren zitierte Note bull. Brux. 13 war mir nicht zugänglich.

954) Ib. p. 313. Er bemerkt dabei p. 328: Lamarles Schlußweise falle mit der seiner eigenen letzten Abhandlung 935) zusammen, wenn man in dieser statt der Mittelwerte wieder Integrale schreibe. Die sich anschließenden Auseinandersetzungen darüber, wie man die funktionentheoretischen Sätze aus den Sätzen über die Integration vollständiger Differentialien ableiten könne, lassen eine Diskussion der Frage vermissen, wann die Integration eines solchen Differentials eine eindeutige Funktion liefre.

955) Ib. 12 (1847), p. 305. Er bemerkt, er habe die Stelle[936]), an welcher Cauchy auch seinerseits die Forderung der Stetigkeit der Ableitung für überflüssig erkläre, früher übersehen gehabt.

956) p. 314.

zeichen so zu definieren, daß es zu jedem Argumentwert nur einen Funktionswert liefert. Ein solcher eindeutig definierter Funktionszweig wird dann an einer mehr oder weniger willkürlich gewählten Übergangslinie unstetig; und nun kann es vorkommen, daß die Entwicklung einer solchen Funktion in eine Potenzreihe auch da noch konvergiert, wo eine solche Übergangslinie einsetzt; sie stellt eben von da an einen andern Funktionszweig dar. Das hat Cauchy auch gelegentlich am Beispiel von Binomialentwicklungen bemerkt[957]), namentlich an einem, bei welchem es sich darum handelt, daß der Hauptwert des Produkts zweier Wurzeln nicht überall gleich dem Produkt ihrer Hauptwerte ist. Seine Bemühungen, diese Verhältnisse aufzuklären, haben ihn aber zunächst nur zu den beiden Sätzen geführt: ein Punkt, in welchem die Funktion oder ihre Ableitung aufhören, stetig zu sein, liefert dann zugleich die wahre Konvergenzgrenze für ihre Potenzreihenentwicklung, wenn in ihm die Funktion oder eine ihrer Ableitungen unendlich wird[958]); und die Ableitung einer impliziten Funktion wird im allgemeinen, aber nur im allgemeinen, da unendlich, wo zwei Funktionswerte zusammenfallen[959]). *Lamarle* findet nun Cauchys Festsetzung ganz unnatürlich[960]) und verlangt, alle Werte, die derselben Gleichung genügen, auch zu derselben Funktion zu rechnen; die Stetigkeit habe man dann als eine den Funktionen naturgemäß innewohnende Eigenschaft aufzufassen. So könne man behaupten, daß das Aufhören der Stetigkeit immer die Divergenz der Potenzreihenentwicklung mit sich bringe.

Wo unter den Werten einer mehrdeutigen Funktion ein einzelner ausgezeichnet werden soll, schränkt *Lamarle* den Polarwinkel einer komplexen Größe auf das Intervall $(0 \ldots 2\pi)$ ein[961]). Inzwischen hatte

957) Paris C. R. 19 (1844), p. 141 = Oeuvres (2) 8, p. 655.

958) Paris C. R. 19 (1844), p. 152 = Oeuvres (1) 8, p. 277.

959) Paris C. R. 19 (1844), p. 157 = Oeuvres (1) 8, p. 282. [Geometrisch: Ein Punkt mit zur $y$-Achse paralleler Tangente begrenzt die Konvergenz der Entwicklung von $y$ nach Potenzen von $x$, ein gewöhnlicher Doppelpunkt nicht. Von höheren Singularitäten redet er nicht.]

960) J. de math. 12 (1847), p. 330. Dabei müßte er sich freilich eigentlich mit der Irreduzibilitätsfrage auseinandersetzen; für die einfachen Beispiele, an die er ausschließlich denkt, genügt es, wenn er p. 318 verabredet: Eine Potenz mit gebrochenem Exponenten $\frac{m}{n}$ solle stets so verstanden werden, daß erst die $n^{\text{te}}$ Wurzel ausgezogen und dann in die $m^{\text{te}}$ Potenz erhoben werde. — Störender ist, daß er p. 319 dem Radiusvektor einer komplexen Größe auch negative Werte beilegen zu müssen glaubt. Cauchys Beispiele 957) bespricht er p. 335 ganz zutreffend.

961) J. de math. 11 (1846), p. 140.

sich auch *E. G. Björling* mit der Frage nach der Definition solcher Funktionen für komplexe Argumente mit negativ reellem Bestandteil prinzipiell beschäftigt[962]); da er den Polarwinkel nicht durch die beiden Gleichungen

$$(591) \qquad x = r\cos\tau, \quad y = r\sin\tau$$

sondern durch die eine

$$(592) \qquad \tau = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$$

definiert, kommt er dazu, diesen Winkel für negative $y$ auf das Intervall $\left(\frac{\pi}{2}\cdots\frac{3\pi}{2}\right)$ einzuschränken[963]), so daß, wie er selbst sieht[964]), der Hauptwert einer Potenz oder des Logarithmus bei ihm eine Unstetigkeit längs der Halbachse der negativ imaginären Zahlen aufweist. *Cauchy* findet Lamarles wie Björlings Festsetzung unzweckmäßig[965]); er schlägt vor, wenn man es nicht bei seiner alten Festsetzung bewenden lassen wolle, den Hauptwert des Polarwinkels zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ zu nehmen, so daß die Unstetigkeit längs der Halbachse der negativ reellen Zahlen auftritt. Er nimmt infolgedessen die Definition und die Untersuchung der elementaren Transzendenten komplexen Arguments in einer Reihe von Abhandlungen noch einmal vor[966]).

Wohl mit durch diese Diskussion veranlaßt, hat sich *Cauchy* um diese Zeit den prinzipiellen Fragen aufs neue zugewandt. Einmal setzt er, unter Bezugnahme auf die Darstellung in der Analyse algébrique[900]), abermals auseinander[967]), daß man neuer Verabredungen bedürfe, wenn man in eine zunächst nur für reelle Variable definierte

---

962) Stockh. Handl. 1845, mit einem Nachtrag 1847, der in den Wiederabdruck Arch. Math. Phys. 9 (1847), p. 383; 11 (1848), p. 39 eingearbeitet ist.

963) Arch. Math. Phys. 9, p. 392, 408. Er hat den Ausdruck „potentia principalis“ geprägt, den Cauchy dann als „puissance principale“ übernommen hat (exerc. d'anal. 4 (1847), p. 259).

964) Arch. 9, p. 426. Was er p. 399 beibringt, um zu argumentieren, daß man es nicht konsequent anders machen könne, gilt nur, wenn man den Polarwinkel so einführt, wie er es tut. p. 431 meint er, eine Doppeldeutigkeit bzw. Unstetigkeit längs der negativ reellen Argumentwerte würde noch unbequemer sein.

965) J. de math. 11 (1846), p. 320; Paris C. R. 23 (1846), p. 275 = Oeuvres (1) 10, p. 79; Exerc. d'anal. 3 (1844), p. 387; 4 (1847), p. 253, 259. Diese späteren Bände der exerc. sind übrigens, wie aus mehrfachen Anzeichen zu ersehen ist, nicht in denjenigen Jahren fertig geworden, die auf den Titelblättern stehen.

966) Exerc. d'anal. 4 (1847), von p. 232 an.

967) Exerc. de math. 3 (1844) (wegen des Datums vgl. Note 965), p. 361; Auszug, in dem einiges schärfer ausgesprochen ist, Paris C. R. 23 (1846), p. 271 = Oeuvres (1) 10, p. 75.

Funktion an deren Stelle eine komplexe einführen wolle. Für rationale Funktionen und für solche, die sich durch beständig konvergente Potenzreihen darstellen lassen, reiche die Verabredung aus, daß die für reelle Argumente geltenden Sätze bestehen bleiben sollen; darüber hinaus nicht mehr.

Ferner nimmt er den Begriff des Kurvenintegrals noch einmal vor[968]), leitet die für ihn geltenden Sätze ab und bespricht namentlich auch den Fall[969]), daß ein vollständiges Differential über eine Kurve integriert wird, in deren Innern ein singulärer Punkt liegt, so daß die Integralfunktion mehrdeutig ausfällt und erst durch einen willkürlichen Schnitt von ihr eine eindeutig definierte Funktion abgespalten werden kann. Ein solches Differental, genommen über eine geschlossene Kurve, läßt sich dann durch eine Summe singulärer Integrale ersetzen. Auch setzt er sich mit der von *Poisson* gegebenen Auffassung des Integrals unter [1306]) genommen von $-1$ bis $+1$ auseinander[970]): der von diesem angegebene Wert werde erhalten, wenn man längs einer Geraden integriere, die von der Achse der reellen Zahlen nach der einen Seite wenig abweiche; damit gleichberechtigt sei aber ein anderer Wert, der durch Integration längs einer zur ersten bezüglich der Achse symmetrischen Geraden erhalten werde; der Hauptwert sei das arithmetische Mittel aus diesen beiden.

Im übrigen hat sich Cauchy um diese Zeit viel mit der Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen beschäftigt, namentlich mit der Ausdehnung der Methode der Integration durch Potenzreihen (vgl. II A 4a, *Painlevé,* Nr. **11**, p. 200) auf den Fall, daß für die unabhängige Variable auch komplexe Werte zugelassen werden. Er setzt auseinander[971]), daß man durch Annahme immer neuer Entwicklungszentra „geradlinige Integrale" so weit fortsetzen könne, bis man auf einen singulären Punkt stoße, und daß die Gesamtheit dieser geradlinigen, von einem bestimmten Ursprung aus genommenen Integrale eine Funktion vorstelle, die überall eindeutig und stetig sei, nur nicht auf den Verlängerungen der Geraden vom Ursprung nach den singulären Punkten. Das wendet er namentlich auf den Fall an, daß die

---

968) Paris C. R. 23 (1846), p. 251 = Oeuvres (1) 10, p. 70.

969) Paris C. R. 23 (1846), p. 537, 557 = Oeuvres (1) 10, p. 133, 135. Die Beziehung zur Theorie der Funktionen komplexen Arguments tritt namentlich in den Beispielen hervor. Vgl. dazu auch noch Paris C. R. 32 (1851), p. 789 = Oeuvres (1) 11, p. 385 die Erörterungen über den Hauptwert eines solchen Integrals für den Fall, daß auf dem Integrationsweg selbst ein Unstetigkeitspunkt liegt.

970) Paris C. R. 23 (1846), p. 567 = Oeuvres (1) 10, p. 147.

971) Ebenda.

Differentialgleichung die eine Variable nicht explizite enthält, daß es sich also um eine Integralfunktion im engeren Sinne oder um die Umkehrung einer solchen handelt; er setzt dabei auseinander, wie diese Schlüsse zu modifizieren sind, wenn schon die zu integrierende Funktion mehrdeutig ist[972]); andererseits auch, wie man aus dem „geradlinigen Integral in bezug auf einen Ursprung" das „vollständige Integral" erhalten könne, und behauptet, zwar nicht das erstere, wohl aber das letztere sei von der Wahl der unabhängigen Variablen unabhängig[973]).

Das führt ihn dazu, die Frage nach der Definition der Stetigkeit — zunächst für Integrale von Differentialgleichungen — noch einmal allgemein vorzunehmen[974]). Er betont jetzt, daß Stetigkeit auch ohne Eindeutigkeit vorhanden sein könne: die verschiedenen Zweige einer mehrdeutigen Funktion könnten so aufgefaßt werden, daß jeder für sich stetig sei, außer an den Übergangslinien, und an diesen schließe sich immer ein Zweig stetig an einen andern an.

Er gibt dann auch noch zwei neue Darstellungen der Grundbegriffe des Rechnens mit komplexen Größen. Die eine[975]), die, wie er selbst sagt, hauptsächlich auf rationale Funktionen Bezug hat, sich aber auch für Potenzreihen verwenden läßt, faßt die Gleichungen zwischen komplexen Größen als Kongruenzen mod $(i^2+1)$; die andere[976]) stellt den Begriff der „geometrischen Größen" [Vektoren in einer

---

972) Paris C. R. 23 (1846), p. 690 ausführlicher p. 698 = Oeuvres (1) 10, p. 154, 164.

973) p. 697, 738 = 161, 183. Er erklärt (p. 700, 730 = 166, 173), damit seien die von *Eisenstein* hervorgehobenen Schwierigkeiten beseitigt, die einer Entwicklung der Theorie der elliptischen Funktionen von den Integralen aus entgegenstehen. p. 698 u. 739/40 = 163/64, 185 scheint eine Verwechslung von „unverzweigt" und „eindeutig" vorzuliegen. — Er hat übrigens bereits hier erkannt, daß eine solche Integralfunktion in dem Sinne vollständig unbestimmt sein könne, als ihre Werte für einen gegebenen Argumentwert unendlich dicht liegen.

974) Paris C. R. 23 (1846), p. 702, 779 = Oeuvres (1) 10, p. 169, 186.

975) Paris C. R. 24 (1847), p. 1120; 25 (1847), p. 129 = Oeuvres (1) 10, p. 312, 351; in ausführlicherer, auch zum Teil veränderter Redaktion exerc. 4 (1847), p. 87. Vgl. auch die spätere Abhandlung exerc. 4, p. 356 (Auszug Paris C. R. 36 (1853), p. 70, 129, 161 = Oeuvres (1) 11, p. 439; 12, p. 12, 21), in der dieselbe Auffassung für komplexe Zahlen mit mehr als 2 Einheiten entwickelt wird.

976) Paris C. R. 29 (1849), p. 250 = Oeuvres (1) 11, p. 152; wenig veränderte Redaktion exerc. d'anal. 4 (1847), p. 157. Er nimmt die Idee nicht für sich in Anspruch, wohl aber ihre methodische Durchführung „avec des modifications utiles". Das Wort „Funktion einer geometrischen Größe" gebraucht er dabei im allgemeinsten Sinn (exerc. 4, p. 309).

Ebene] an die Spitze, betont die Notwendigkeit, die elementaren Rechnungsoperationen mit solchen neu zu definieren und die fortdauernde Gültigkeit der Rechnungsregeln neu zu beweisen, überläßt aber die Durchführung des letzteren dem Leser. Dann zeigt er, wie man von da aus auf die gewöhnliche Darstellung zurückkommt, wenn man zwei zueinander senkrechte Einheitsvektoren einführt[977]). An dem Gebrauch, jedes Funktionszeichen eindeutig zu definieren, hält er auch hier noch fest; doch gelangt er schließlich[978]) zu dem Begriff des „type", d. h. „eines analytischen Ausdrucks, der einen der verschiedenen Werte einer impliziten Funktion vorstellt".

Zunächst folgt nun eine kleine Gruppe von Aufsätzen[979]), in welchen Cauchy versucht, auch in nicht analytische Funktionen ein komplexes Argument einzuführen und namentlich die Behauptung zu beweisen: Wenn eine solche Funktion nur für solche reelle $x$ von null verschieden ist, die einem bestimmten Intervall angehören, ist sie auch nur für solche komplexen $x$ von null verschieden, deren reelle Bestandteile in dasselbe Intervall fallen. Doch hängt alles an der speziellen Auswahl der dabei benutzten „limitateurs" (Nr. **104**).

Die weitere Durchführung der Theorie der mehrdeutigen, zunächst der algebraischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen hat dann *V. Puiseux*[980]) unternommen. Er geht aus von einem Satz von *Cauchy*[981]), nach dem jede einzelne Wurzel einer algebraischen Gleichung sich stetig ändert, solange sie endlich bleibt und nicht mit einer andern Wurzel zusammenfällt, und zieht daraus den Schluß[982]), daß zwei Wege der unabhängigen Veränderlichen $z$, die von demselben

977) Exerc. d'anal. 4, p. 213. Daran schließen sich dann die bereits 966) erwähnten erneuten Festsetzungen betr. die elementaren Transzendenten.

978) Exerc. d'anal. 4, p. 312. Erst später (Paris C. R. 32 (1851), p. 484 = Oeuvres (1) 11, p 376) findet sich die wesentliche Erläuterung: Man muß von jedem Werte des einzelnen „type" zu jedem andern gelangen können, indem man die unabhängige Veränderliche sich stetig ändern läßt.

979) Paris C. R. 27 (1848), p. 525; 28 (1849), p. 280; 29 (1849), p. 610 = Oeuvres (1) 11, p. 87, 124, 188.

980) J. de math. 15 (1850), p. 365 (deutsch von *H. Fischer*, Halle 1861); Ankündigung Paris C. R. 30 (1850), p. 171; Bericht von *Cauchy* ib. 32 (1851), p. 276 = Oeuvres (1) 11, p. 325.

981) Exerc. d'anal. 2 (1841), p. 111; Auszug Paris C. R. 12 (1841), p. 1133 = Oeuvres (1) 6, p. 175.

982) J. de math. 15, p. 370. Er bemerkt p. 375, daß man bei algebraischen Funktionen die Ausnahmepunkte präziser charakterisieren könne, als es *Cauchy* bei seinen allgemeineren Untersuchungen [981]) hatte tun können. Das Wort „Weg" (chemin) in dieser Bedeutung ist hier von Puiseux in die mathematische Sprache eingeführt.

Ausgangspunkt nach demselben Endpunkt führen, auch zu demselben Funktionswert $u$ führen, wenn zwischen ihnen kein singulärer Punkt liegt; daß dann auch das Integral $\int u\,dz$ auf beiden Wegen denselben Wert erhält, beweist er durch die Methode der kleinen Variationen[983]). Auch zeigt er, wie man von einer Lösung der Gleichung durch eine Potenzreihe ausgehend durch Benutzung neuer Entwicklungszentren zur Lösung in der ganzen Ebene gelangen kann[984]). Daran schließt sich dann[985]) — und das ist das eigentlich Neue und auch von *Cauchy*[986]) als neu Anerkannte — die Untersuchung der Art, wie die verschiedenen Zweige in einem singulären Punkte zusammenhängen, sowie[987]) die Untersuchung der Integrale algebraischer Funktionen und ihrer Perioden; die Anzahl der letzteren ist allerdings nur in den einfachsten Fällen auf die kleinste mögliche Anzahl linear unabhängiger reduziert.

*Cauchy* setzt dann allgemein auseinander, daß man die Trennung der einzelnen „Funktionen" die einer und derselben „Gleichung" genügen, durch Gerade („lignes d'arrêt") vornehmen könne, die von den einzelnen singulären Punkten („points d'arrêt") ins Unendliche laufen. Er gibt dann[989]) auch seinerseits eine Bestimmung der Anzahl der linear unabhängigen Perioden des Integrals einer algebraischen Funktion, die aber nur unter besonderen Voraussetzungen richtig ist.

Und nun endlich kommt er dazu, die allgemeinen Begriffe der

---

983) p. 372; vgl. 904).

984) p. 379. Daß man dabei von jedem Punkte zu jedem andern durch eine endliche Anzahl von Fortsetzungen gelangen kann, behauptet er, ohne es zu beweisen; doch hat er sich vielleicht klar gemacht, daß bei algebraischen Funktionen die Entfernung vom nächsten singulären Punkt eine untere Grenze der Konvergenzradien liefert.

985) p. 384.

986) Paris C. R. 32 (1851), p. 278 = Oeuvres (1) 11, p. 327.

987) J. de math. 15, p. 429. In der einige Jahre älteren Untersuchung von *Ch. Hermite* (Paris C. R. 18 (1844), p. 1136 = Oeuvres 1, p. 152), war nur der Fall behandelt worden, daß die Verzweigungspunkte alle einfach sind, und daß in je zweien derselben dieselben Funktionszweige zusammenhängen, ohne daß letzteres deutlich als eine Spezialisierung hervortrat.

988) Paris C. R. 32 (1851), p. 68 = Oeuvres (1) 11, p. 292; Ergänzungen für den Fall, daß mehrere Funktionen durch mehrere simultane Gleichungen definiert sind, p. 162 = 304. Daß *Cauchy* die lignes d'arrêt alle rückwärts verlängert durch einen willkürlichen Punkt laufen läßt, ist nebensächlich und wohl eine Erinnerung an sein Verfahren bei der Integration von Differentialgleichungen 971). Der Terminus „ligne d'arrêt" auch exerc. d'anal. 4 (1847), p. 324; die einer solchen entsprechende Linie in der Ebene der Funktion nennt er hier p. 325 „ligne terminale".

989) Paris C. R. 32 (1851), p. 126 = Oeuvres (1) 11, p. 300.

Funktionentheorie festzulegen und bestimmte Kunstausdrücke für sie einzuführen[990]). Das Wort „fonction de $z$“ nimmt er auch hier noch im allgemeinsten Sinn, bemerkt aber sogleich, daß die Ableitung einer solchen Funktion im allgemeinen von der Tangentenrichtung der Kurve abhängt, auf der $z$ sich bewegend gedacht wird, und fügt hinzu, damit sei bestätigt, daß man bei Formulierung der Bedingungen für die Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe nicht unterlassen könne, auch von der Ableitung zu reden. Eine Funktion, die in jedem Punkt eine von der Tangentenrichtung unabhängige Ableitung hat, bezeichnet er als „monogène[991])“; eine Funktion, die nur einen „type“ aufweist[979]), zunächst[992]) als „monotypique“, später[993]) als „monodrome“. Die Stetigkeit der Ableitung verlangt er übrigens auch hier nicht[994]). Endlich führt er für „monodrome, monogène et finie“ noch das eine Wort „synectique“ ein[995]).

---

990) Paris C. R. 32 (1851), p. 161 = Oeuvres (1) 11, p. 301; exerc. d'anal. 4 (1847), p. 342. Statt „quantité géométrique“ 976) sagt er hier wieder „variable imaginaire“. Die allgemeine Auffassung von „fonction“ auch Paris C. R. 43 (1856), p. 69 = Oeuvres (1) 12, p. 333; er deutet hier an, daß sie Anstoß erregt habe, meint aber, sie biete die einzige Möglichkeit, über unzählige Schwierigkeiten wegzukommen.

991) Paris C. R. 32 (1851), p. 484 = Oeuvres (1) 11, p. 376; exerc. 4 (1847), p. 346.

992) Paris C. R. 32 (1851), p. 484, 704 = Oeuvres (1) 11, p. 377, 384.

993) Paris C. R. 34 (1852), p. 71, 73 = Oeuvres (1) 11, p. 388, 391 gebraucht er das Wort ohne Erklärung; exerc. d'anal. 4, p. 325 (ähnlich p. 345), gibt er die Erklärung: „Qui ne cessent d'être continues qu'en devenant infinies.“ Paris C. R. 36 (1851): p. 459 = Oeuvres (1) 12, p. 35 sagt er ausdrücklich, monodrome sei dasselbe, was früher 992) monotypique. Übrigens denkt er auch hier überall nur an algebraische Funktionen und die elementaren Transzendenten, allenfalls an beständig konvergente Potenzreihen. Den Terminus „évodique“, den er exerc. d'anal. 4 (1847), p. 329 für „stetig, aber nicht notwendig monodrom“ vorschlägt, hat er selbst nicht wieder benutzt.

994) Ebenso Paris C. R. 34 (1852), p. 161 (Änderung der unabhängigen Variablen in einem „isotropen Mittel“); 40 (1855), p. 558, 656, 713, 879 (hier auf Grund der Untersuchungen von *Puiseux* 985) die Formulierung, daß die Wurzeln einer algebraischen Gleichung in der Umgebung eines Verzweigungspunktes c monogene und monodrome Funktionen von $\sqrt[n]{z-c}$ sind); 41 (1855), p. 41; 42 (1856), p. 666; 43 (1856), p. 13 (hier der Satz, daß eine Funktion, die sich überall wie eine rationale Funktion verhält, eine solche ist usw.; sowie auch entsprechende Sätze über einfach periodische Funktionen, aber mit ungenügenden Voraussetzungen betr. das Verhalten im Unendlichen), 70 (hier noch einmal die Erklärung der Termini, unter ausdrücklicher Beschränkung auf einen bestimmten Bereich); 44 (1857), p. 410, 849 = Oeuvres (1) 11, p. 403; 12, p. 245, 265, 273, 282, 300, 315, 323, 334, 437, 448.

995) Paris C. R. 36 (1853), p. 459; 40 (1855), p. 447; 43 (1856), p. 70 =

Von „wesentlich singulären" Stellen (vgl. II B 1, *Osgood,* Nr. 4, p. 18) und dem Verhalten analytischer Funktionen in ihrer Umgebung ist übrigens bei Cauchy kaum je die Rede; ich wüßte nur eine Stelle[996]) zu nennen, an der er auseinandersetzt, daß tg $t$ für $t = \infty$ den Wert $+i$ oder $-i$ hat, je nach dem Vorzeichen des imaginären Bestandteils von $t$.

Um diese Zeit entschließt er sich endlich auch, anknüpfend an eine von *Hermite* [wo?] gemachte Bemerkung, auch für die Gesamtheit der Werte einer mehrdeutigen Funktion ein Zeichen einzuführen: er schlägt vor[997]), dafür das Zeichen des Hauptwerts mit einem unterscheidenden Beizeichen, etwa einem darüber gesetzten Strich, zu benutzen.

Eine Ergänzung seiner früheren Untersuchungen bietet noch eine Abhandlung[998]), in der er die „variation intégrale" einer stetigen (nicht notwendig monogenen) Funktion untersucht, d. h. die Wertänderung, die eine solche Funktion erfährt, wenn ihre unabhängige Veränderliche einen bestimmten Weg durchläuft; und namentlich den Zusammenhang der variation intégrale des Logarithmus einer monogenen Funktion auf einer geschlossenen Kurve mit den Anzahlen der Nullpunkte und der Pole der Funktion in dem von dieser Kurve umschlossenen Bereiche darlegt; samt der daraus folgenden Bestimmung der Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung, in der ganzen Ebene oder in einem begrenzten Bereiche. Daran schließt er auch noch[999]) einen neuen Beweis des Puiseuxschen Satzes[982]).

Mit seinen inzwischen neu gewonnenen Anschauungen kommt er auch noch einmal auf den Begriff des Residuums zurück[1000]); er zieht es jetzt vor, es nicht mehr als Grenzwert (569), sondern als Mittelwert bzw.[1001]) als Integral

$$\int \zeta f(z+\zeta)\,d\zeta \tag{593}$$

genommen um den betrachteten Punkt zu definieren.

Oeuvres (1) 12, p. 35, 228, 334. An der erstgenannten Stelle schließt er das „monogène" noch nicht mit ein.

996) Paris C. R. 40 (1855). p. 446 = Oeuvres (1) 12, p. 227. Daß man auch jeden andern Wert erhalten kann, wenn man die Variable auf geeignet gewähltem Weg ins Unendliche gehen läßt, scheint er auch hier nicht bemerkt zu haben.

997) Paris C. R. 40 (1855), p. 383 = Oeuvres (1) 12, p. 221.

998) Paris C. R. 40 (1855), p. 651, 713, 804 = Oeuvres (1) 12, p. 259, 267, 270.

999) Paris C. R. 42 (1856), p. 663 = Oeuvres (1) 12, p. 312.

1000) Paris C. R. 44 (1857), p. 406 = Oeuvres (1) 12, p. 433. Er leitet von dieser Definition aus die hauptsächlichsten Sätze noch einmal ab; namentlich spricht er jetzt ausdrücklich den Satz aus, daß alle Ableitungen einer monogenen monodromen Funktion selbst monogen und monodrom sind.

1001) Paris C. R. 41 (1855), p. 41 = Oeuvres (1) 12, p. 300.

Eine letzte Abhandlung *Cauchys*[1002]) versucht die Theorie der Potenzreihen mit mehreren unabhängigen Veränderlichen durch Einführung eines „régulateur" zugänglich zu machen, nach dessen Potenzen zunächst geordnet werden und der schließlich gleich 1 gesetzt werden soll.

Formeln, die mit den fundamentalen Sätzen Cauchys im wesentlichen äquivalent sind, sind übrigens um dieselbe Zeit auch von andern Autoren gegeben worden. *S. D. Poisson* erhält zunächst[1003]) die Doppelgleichung

$$(594)\qquad \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left\{\begin{matrix} 1 - r\cos x \\ i\sin x \end{matrix}\right\} \frac{[F(\alpha + e^{-xi}) \pm F(\alpha + e^{xi})]}{1 - 2r\cos x + r^2}\,dx = F(\alpha \pm r) \pm F(\alpha) \qquad (r < 1),$$

indem er die beiden Faktoren unter dem Integralzeichen, den ersten mit Hilfe der Gleichungen (2) und (3), nach Potenzen von $r$ entwickelt, dann ausmultipliziert und unter Benutzung der Integralrelationen (387) gliedweise integriert. Die erste Hälfte schreibt er auch:

$$(595)\qquad \frac{1-r^2}{2\pi}\int\limits_0^\pi \frac{F(\alpha + e^{-xi}) + F(\alpha + e^{xi})}{1 - 2r\cos x + r^2}\,dx = F(\alpha + r).$$

Ferner[1004]) gelangt er auf einem ziemlichen Umwege, indem er nämlich in seiner allgemeinen Darstellung der Lagrangeschen Umkehrungsformel (Nr. **102**) erst $F(\alpha) = \alpha$, dann $F(\alpha) = \varphi(\alpha)$ setzt und die

---

1002) Paris C. R. 44 (1857), p. 849 = Oeuvres (1) 12, p. 448. Er deutet an, daß er dabei Anwendungen auf astronomische Probleme im Auge hatte (p. 851, 896 = Oeuvres (1), 12, p. 452, 455); zu ihrer Ausführung ist er nicht mehr gekommen.

1003) J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 482; ohne Beweis auch schon Bull. philomat. 1822, p. 138. Er bemerkt ausdrücklich (p. 487 und 498), daß diese Gleichungen nur so lange bewiesen sind, als die bei ihrer Ableitung benutzten Taylorschen Entwicklungen nicht „en défaut" sind. *v. Schmidten* gibt die Formeln J. f. Math. 5 (1830), p. 395 ohne diese Gültigkeitsbedingung. *Cauchy* gibt Bull. philomat. 1822, p. 170; J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 579; Mém. sur les int. déf., Paris 1825, p. 56 an, wie die Formeln sich aus seinen Residuensätzen ergeben, und ergänzt sie durch die Angabe, wie sie für $r > 1$ zu modifizieren sind. Exerc. de math. 1 (1826) = Oeuvres (2) 6, p. 272 bringt er auch Formeln, bei denen im Zähler nur 1 oder nur $\cos x$ steht, sowohl durch Kombination mit (585), als auch durch direkte Anwendung des Residuensatzes auf Funktionen wie z. B. $f(z)(1 - rz)^{-1}(1 - rz^{-1})^{-1}$.

1004) p. 498.

Resultate miteinander kombiniert, zu der Gleichung:

$$(596)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\alpha+e^{-xi})\,dx=\varphi(\alpha);$$

er verifiziert sie dann durch die Bemerkung, daß man sie auch aus der Entwicklung von $\varphi(\alpha+e^{-xi})$ nach Potenzen von $e^{-xi}$, mit Hilfe der Relationen (387) ableiten könne. Indem er diese Relation für die Funktion $F(\alpha)$ benutzt, führt er die aus Formeln von Nr. **102** für $\varphi(\alpha)=r$ sich ergebenden Gleichungen über in die folgenden:

$$(597)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{F(\alpha+e^{\mp xi})}{1-re^{xi}}\,dx=\begin{cases}F(\alpha+r)\\ F(\alpha),\end{cases}\qquad (r<1)$$

die, wie er selbst bemerkt, von (594) nicht wesentlich verschieden sind.

Andererseits hat Poisson auch bereits bemerkt[1005]), daß das Integral

$$(598)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos az\,dz}{1+z^2}$$

(vgl. Nr. **59** b), wenn man die Integrationsvariable komplexe Werte mit dem konstanten imaginären Teil $iy$ durchlaufen läßt, den Wert $\pi\exp(-a)$ oder $-\pi\,\mathfrak{Sin}\,a$ erhält, je nachdem $y<1$ oder $>1$ ist.

*G. Frullani*[1006]) gewinnt aus der Integraldarstellung der Koeffizienten einer Cosinusreihe (Nr. **16**) nicht nur die Gleichung

$$(599)\qquad f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(f(e^{xi})+f(e^{-xi}))\,dx,$$

sondern auch die folgende:

$$(600)\qquad \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(f(e^{xi})+f(e^{-xi}))\cos nx\,dx.$$

*G. Libri*[1007]) leitet die mit (594) im wesentlichen identische Glei-

---

1005) J. éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 333. Darauf macht *P. Stäckel* aufmerksam, Bibl. math. (3) 1 (1900), p. 119.

1006) Ricerche sopra le serie, Firenze 1816, p. 102; Mem. soc. ital. 18 (1820) p. 461 (von 1818). Er gibt auch entsprechende Formeln für Funktionen von mehreren Variablen.

1007) Torino Mem. 28 (1824), p. 256 (von 1822); Da in der Gleichung (602) die Variable $t$ nur noch unter dem Zeichen der Exponentialfunktion vorkommt, glaubt er mit ihrer Hilfe Differenzen- und Summenbildungen, Differentiationen und Integrationen ebenso leicht vornehmen zu können, als dies mit Hilfe der Fourierschen Integraldarstellung möglich ist. J. f. Math. 7 (1831), p. 231 führt er die Formel mit dem Beifügen an: Die unbestimmte Größe $\alpha$, die aus dem chung

$$(601)\qquad \varphi(\alpha + t_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\varphi(\alpha + e^{xi})}{1 - t_1 e^{-xi}} + \frac{\varphi(\alpha + e^{-xi})}{1 - t_1 e^{xi}}\right) dx$$

aus dem Parsevalschen Satze (Nr. 23) ab; indem er die Faktoren $(1 - t_1 e^{\pm xi})^{-1}$ durch Integrale ersetzt, erhält er noch:

$$(602)\qquad \varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \int_{-\infty}^0 [\varphi(\alpha + e^{xi}) \exp(1 + (\alpha - t) y e^{-xi})$$
$$+ \varphi(\alpha + e^{-xi}) \exp(1 + (\alpha - t) y e^{xi})]\, dy\, dx.$$

*H. Vernier*[1008]) gewinnt die Formeln:

$$(603)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{F(\alpha + r e^{xi}) - F(\alpha + r e^{-xi})}{i \sin x}\, dx = F(\alpha + r) - F(\alpha - r)$$

$$(604)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{[F(\alpha + r e^{xi}) - F(\alpha + r e^{-xi})] \cos x}{i \sin x}\, dx = F(\alpha + r)$$
$$+ F(\alpha - r) - 2F(\alpha)$$

durch Reihenentwicklung nach Potenzen von $r$, mit Hilfe des Satzes, daß für ganzzahlige $p$ und $q$

$$(605)\qquad \int_0^\pi \frac{\cos px \sin qx}{\sin x}\, dx = \begin{cases} \pi, & \text{wenn } p - q \text{ negativ und ungerade} \\ 0 & \text{in den übrigen Fällen;} \end{cases}$$

ist; dann die Gleichung:

$$(606)\qquad \int_{-1}^{+1} f(r)\, dr = -i \int_0^\pi f(e^{xi}) e^{xi}\, dx$$

zunächst einfach durch Einführung einer komplexen Integrationsvariablen in das Integral links, aber mit dem nachdrücklichen Hinweis[1009]), daß dieser Schluß unzureichend ist, und daß die Gleichung nur richtig ist, sofern man auf beiden Seiten in solche Potenzreihen entwickeln kann.

---

Resultat herausfällt, „sert à détruire les erreurs que l'on pourrait commettre en attribuant au développement de $\varphi(t)$ une forme qui ne lui conviendrait point". Ib. 12 (1834), p. 257 gewinnt er die Formel aus einer Summenformel durch Übergang zu unendlicher Gliederzahl.

1008) Ann. de math. 15 (1825), p. 175. Er hat auch noch allgemeinere, aber weniger einfache Gleichungen mit dem Cosinus oder Sinus eines beliebigen Vielfachen von $x$ als Faktor unter dem Integralzeichen (p. 173).

1009) p. 180. *Gergonne* weist ib. p. 360, von einem „quelqu'un" veranlaßt, darauf hin, daß diese Formel ein Spezialfall einer Gleichung Cauchys (vgl. 581) ist.

Auch *R. Murphy*[1010]) stellt den Koeffizienten von $x^p$ in der Entwicklung von $f(x)$ nach (steigenden und fallenden) Potenzen von $x$ durch das bestimmte Integral

$$(607)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{+1}[x^{-p-1}f(x)+x^{p-1}f(x^{-1})]\,dx$$

dar, scheint aber dabei nur an Integration durch reelle Zwischenwerte zu denken und dem Integral

$$(608)\qquad \int_{-1}^{+1}x^{-1}dx$$

den Wert $-\log(-1)=-\pi i$ zuzuschreiben.

*M. Ostrogradsky*[1011]) bringt überhaupt die Differenz der beiden Werte, die ein Doppelintegral mit der singulären Stelle $(a, b)$ des Integranden je nach der Reihenfolge der Integrationen annimmt, auf die Form:

$$(609)\qquad \Delta=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}(f(a+\varepsilon\xi,\ b+\varepsilon\eta)-f(a+\varepsilon\eta,\ b+\varepsilon\xi))\varepsilon^2 d\xi\, d\eta$$

und bemerkt dann, da sie von $\varepsilon$ unabhängig ausfallen müsse, brauche man in der Entwicklung des Integranden nach Potenzen von $\varepsilon$ nur die von $\varepsilon$ unabhängigen Glieder zu berücksichtigen. Für den Fall

$$(610)\qquad f(x, y)=\frac{\partial f(x+iy)}{\partial x}$$

brauche man also in der Entwicklung von $f(a+ib+z)$ nach Potenzen von $z$ nur das Glied $Az^{-1}$ zu berücksichtigen; dieses gibt

$$(611)\qquad \Delta=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left\{\frac{1}{(\xi+i\eta)^2}-\frac{1}{(\eta+i\xi)^2}\right\}d\xi\, d\eta=2\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{(\xi^2-\eta^2)\,d\xi\, d\eta}{(\xi^2+\eta^2)^2}$$

und damit wieder die Resultate Cauchys.

Eine Darstellung von merkwürdiger Originalität findet sich bei *A. Qu. Gregan-Craufurd*[1012]). Er meint: wenn in dem Integral

$$(612)\qquad \int_{-a}^{+a}\frac{f(\alpha)\,d\alpha}{\alpha^2-x^2}$$

$f(\alpha)$ eine ungerade Funktion bedeutet, heben sich aus ihm alle Elemente paarweise weg, bis auf die Umgebungen von $\alpha=\pm x$, wenn

1010) Cambr. trans. $3_3$ (1830), p. 438.

1011) Petersb. mém. (6) 1 (1831), p. 117 (von 1828).

1012) Essay on the development of functions, Lond. 1844, p. 7.

diese Punkte zwischen den Integrationsgrenzen liegen; da er dem Integral (608) den Wert $+\pi i$ zuschreibt, kommt er für sein Integral auf den Wert $\pi i x^{-1} f(x)$. Indem er eine analoge Betrachtung für eine gerade Funktion anstellt und dann die beiden Resultate kombiniert, kommt er für eine beliebige endlich bleibende Funktion $\varphi(\alpha)$ zu der Formel[1013]):

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^{+a} \left( \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha - x} + \frac{\varphi(-\alpha)}{\alpha + x} \right) dx \tag{613}$$

und durch Entwicklung nach Potenzen von $x$ zur Maclaurinschen Formel mit Restglied[1014]). Zum Ausdruck der Koeffizienten durch die Ableitung gelangt er, indem er zuerst das Integral

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)}{\alpha^n - x^n} d\alpha \tag{614}$$

analog wie (612) behandelt und dabei ohne jede nähere Erläuterung annimmt, alle Wurzeln der Gleichung $\alpha^n = x^n$ lägen zwischen den Integrationsgrenzen; hierauf zur Grenze $x = 0$ übergeht[1015]). Andererseits bestimmt er noch[1016]) unabhängig von diesem Gedankengang die Koeffizienten einer Entwicklung nach fallenden und steigenden Potenzen durch gliedweise Integration und zeigt[888]) mit Hilfe des Poissonschen Schlußverfahrens, daß die so gebildete Reihe die Funktion wirklich darstellt.

*O. Bonnet* verwirft den Gebrauch des allgemeinen Funktionsbegriffs, „da man sich dabei keine klare Vorstellung von den Ableitungen machen könne"[1017]). Er setzt zunächst mit Hilfe von Abels Sätzen[766]) auseinander, daß die Maclaurinsche Entwicklung von $f(r \exp ix)$, soweit sie konvergiert, eine stetige Funktion von $r$ und $x$ vorstelle, und schließt daraus, daß sie jedenfalls nur so weit konvergieren könne, als $f$ stetig bleibt und für $x = 2\pi$ denselben Wert wieder annimmt wie für $x = 0$. Er will dann beweisen, daß diese Bedingungen auch hinreichend seien, und bedient sich zu diesem Zweck der trigonometrischen Entwicklung nach den Funktionen der Viel-

---

1013) p. 8. Man vgl. damit *Cauchys* Formeln (581) und (583).

1014) p. 10. Gegen den Gebrauch unendlicher Reihen hat er Skrupel. Er entwickelt auch — ebenfalls mit Restglied — den einen Bestandteil nach steigenden. den andern nach fallenden Potenzen von $x$; auch beide Teile nach fallenden, wobei sich aber alles weghebt (p. 17).

1015) p. 20. Berichtigung der Rechnung, p. 33.

1016) p. 28.

1017) Brux. mém.-cour. in 4° 15 (1850), p. 97.

fachen von $x$ bei konstantem $r$; dabei vergißt er, daß er vorher (vgl. Nr. 39) die Möglichkeit einer solchen Entwicklung nur unter einer Monotoniebedingung bewiesen hatte. Durch partielle Integration und Differentiation unter dem Zeichen [die wieder die Stetigkeit der Ableitung voraussetzt], gewinnt er dann die Art der Abhängigkeit der Koeffizienten dieser Entwicklung von $r$ und damit die Laurentsche Reihe[1018]).

Merkwürdig ist übrigens, daß *J. Dienger* noch vor Cauchy[991]) ausgesprochen hat[1019]), daß aus der Annahme der Existenz einer bestimmten Ableitung $F'(x+iy)$ — die er übrigens für selbstverständlich zu halten scheint — die sogenannten Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgen.

Daß auch *C. F. Gauß* den Satz, „daß das Integral $\int \varphi(x)dx$ nach zwei verschiedenen Übergängen immer einerlei Wert erhalte, wenn innerhalb des zwischen beiden die Übergänge repräsentierenden Linien eingeschlossenen Flächenraumes nirgends $\varphi(x) = \infty$ wird“ gekannt hat, ist erst lange nach seinem Tode bekannt geworden[1020]).

Ebenso hat *C. Weierstraß* seine Ableitung des Laurentschen Satzes erst viel später veröffentlicht[1021]). Sie unterscheidet sich von der Cauchys zunächst dadurch, daß sie den Gebrauch der trigonometrischen Funktionen vermeidet und statt dessen für die komplexen Größen vom absoluten Betrag 1 die Parameterdarstellung

$$z = \frac{1+\lambda i}{1-\lambda i} \tag{615}$$

benutzt, in der $\lambda$ alle reellen Werte durchläuft; ferner, daß an Stelle der Forderung der Stetigkeit der Ableitung die etwas weniger verlangende auftritt, daß zu jedem gegebenen $\varepsilon$ die Ungleichung

$$\left| \frac{f(x+hk)-f(x)}{hk} - \frac{f(x+k)-f(x)}{k} \right| < \varepsilon \tag{616}$$

1018) p. 99. Dabei liegt noch insofern ein Versehen vor, als für die konstanten Glieder seine Schlüsse nicht gelten; deren Unabhängigkeit von $r$ muß besonders bewiesen werden.

1019) Arch. Math. Phys. 10 (1847), p. 423. Wegen der Zeitfolge der Veröffentlichungen vgl. man die Bemerkung Note 965).

1020) Brief an Bessel vom 18. Dez. 1811, veröffentlicht zuerst im Briefwechsel zwischen Gauß und Bessel, Leipzig 1880, p. 156 (jetzt Werke 7, p 91). Vgl. auch die von *L. Schlesinger*, Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß, 1912, p. 118, veröffentlichte, allerdings aus sehr viel späterer Zeit stammende Auseinandersetzung. Die Anwendung der Sätze auf mehrdeutige Funktionen scheint übrigens Gauß dieselben Schwierigkeiten gemacht zu haben wie Cauchy; vgl. darüber die Bemerkungen von *Schlesinger*, ebd. p. 99.

1021) Werke 1, Berlin 1894, p. 51 (von 1841); p. 54 unten sind nach „absolute Beträge“ die Worte einzuschalten „einander gleich sind und“

für alle in Betracht kommenden $x$, für alle $h$, deren absoluter Betrag eine gewisse Grenze nicht übersteigt, und für alle hinlänglich kleinen $k$ besteht. Damit führt er die Änderung der Funktion von einem Kreise zum andern auf die Änderung längs eines Kreises zurück; da die letztere bei der Integration null ergibt, so folgt, daß Entsprechendes auch für die erstere gilt, und daß folglich der Wert des Integrals

$$(617) \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} F(r \exp ix)\,dx$$

von $r$ unabhängig ist[1022]). Indem man auf Grund dieses Satzes den Integrationsweg für die Darstellung der Koeffizienten der Laurentschen Entwicklung passend verschieben kann, ergibt sich wie bei Cauchy[952]) eine Abschätzung dieser Koeffizienten und damit der Konvergenzbeweis für alle Punkte des Kreisrings, für den die Voraussetzungen erfüllt sind; daß die so gebildete Reihe die zu entwickelnde Funktion wirklich darstellt, beweist auch Weierstraß[899]) mit dem Poissonschen Verfahren.

Die Erkenntnis der fundamentalen Bedeutung von Cauchys Sätzen und Methoden hat sich übrigens verhältnismäßig langsam verbreitet; *Dirichlet* z. B. erscheint von ihr kaum berührt. Es liegt das wohl in erster Linie daran, daß Cauchy selbst nie eine zusammenhängende und von der Rücksicht auf ihn gerade beschäftigende spezielle Probleme freie Darstellung gegeben hat. Was sein Apostel *Moigno* bietet, kann dafür um so weniger als Ersatz dienen, als er die verschiedenen Entwicklungsstufen von Cauchys Gedanken an verschiedenen Stellen seiner Vorlesungen zerstreut[1023]) unverbunden wiedergibt. *A. de Morgan*[1024]) kennt und verwendet wohl eine große Anzahl der von Cauchy aus seinen allgemeinen Sätzen abgeleiteten Einzelresultate, meint aber doch[1025]), die Grenze zwischen denjenigen Fällen, in welchen es erlaubt sei, den in einem bestimmten Integrale auftretenden Parametern komplexe Werte beizulegen, und denjenigen, in welchen das nicht erlaubt sei,

1022) p. 56.

1023) Die von der Vertauschung der Integrationsreihenfolge in einem Doppelintegral ausgehende leçons de calc. diff. et de calc. int. 2, Paris 1844, p. 83 und 302; die der Exercices[908]) ib. 1 (1840), p. 484; die des Turiner mém. von 1831[927]), 2, p. 747; die auf dem Mittelwert (588) beruhende 1, p. 152. An der letzteren Stelle, aber nicht an den vier zuerst genannten fordert er die Stetigkeit auch der Ableitung.

1024) Den Hauptsatz gibt er diff. and. int. calc., Lond. 1836/41, p. 643, in der älteren Formulierung.

1025) p. 630; vgl. auch die Bemerkung p. 636, betr. die „very great care which this method required" und das Mißverständnis in der Note p. 638.

sei nie scharf gezogen worden. Die Darstellung von *D. F. Gregory*[1026]) gibt nur die elementarsten Sätze; die von *M. Ohm*[1027]) reproduziert nur die älteste, in mehrfacher Hinsicht unvollkommene Fassung.

*E. H. Dirksen* scheint eine von formalen Definitionen ausgehende Darstellung des Rechnens mit komplexen Zahlen entworfen gehabt zu haben, die jedenfalls bis zu einer strengen Begründung der Cauchyschen Integralsätze vordringen sollte; doch ist aus den wenigen veröffentlichten Andeutungen[1028]) nicht zu ersehen, wie weit er damit gelangt ist.

Selbst die Richtigkeit von Cauchys Resultaten ist keineswegs sogleich allgemein anerkannt worden. Die Einwendungen von *G. Radike*[1029]) gegen die Formulierung der Residuensätze beruhen freilich größtenteils auf Mißverständnissen; namentlich übersieht er, daß Cauchy immer nur Funktionen im Auge hat, die in dem betrachteten Bereich eindeutig definiert sind. Immerhin hat er darin recht, daß Cauchy an die Möglichkeit wesentlich singulärer Punkte, mit einer unbegrenzten Anzahl von Gliedern mit negativen Exponenten in der für ihre Umgebung geltenden Entwicklung, ursprünglich nicht gedacht zu haben scheint. Auch die Darstellung von *T. Franke*[1030]), der Cauchys Beweis des Entwicklungssatzes ohne nähere Angabe für nicht richtig erklärt, ist voll von Trugschlüssen. Aber selbst *P. L. Tschebyscheff*[1031]) glaubt die Stetigkeit aller Ableitungen als notwendige Bedingung für den

1026) Cambr. math J. $1_4$ (1838), p. 145.

1027) System der Mathematik 9, Nürnb. 1852, p. 178, 202, 204. Auch die Bedingungen für die Anwendbarkeit der Sätze auf ins Unendliche sich erstreckende Bereiche gibt er p. 190 noch in der ursprünglichen ungenügenden Form. — p. 87 hat er übrigens eine ihm eigentümliche Darstellung: um zu zeigen, daß

$$\int_0^{2\pi} \frac{ae^{xi}dx}{ae^{xi} - Ae^{\xi i}}$$

von $a$ unabhängig ist, differentiiert er erst nach $a$ unter dem Zeichen. Aber das tritt bei ihm nur als Rechenbeispiel auf und ist mit den andern Sätzen nicht in Verbindung gebracht. Die Benutzung des Begriffs des Hauptwerts eines bestimmten Integrals lehnt er übrigens ab (p. 197).

1028) Berl. Ber. 1839, p. 10; 1841, p. 5.

1029) J. f. Math. 25 (1843), p. 216.

1030) Arch. Math. Phys. 15 (1849), p. 227. Z. B behauptet er, alle Ableitungen einer stetigen Funktion seien selbst stetig, indem er eine Form des Mittelwertsatzes benutzt, die die Stetigkeit der ersten Ableitung bereits voraussetzt; dann berücksichtigt er p. 233 nicht, daß die von ihm mit $\Delta$ bezeichnete Größe noch von $x$ abhängt u. dgl. m.

1031) J. f. Math. 28 (1844), p. 283 = Oeuvres 1, p. 14.

Entwicklungssatz fordern zu müssen, da er die gliedweise Integration selbst bei einer Potenzreihe nicht für zulässig hielt.

*O. Schlömilch* hat sich wiederholt mit den Cauchyschen Sätzen beschäftigt. Zunächst scheint er nur diejenige Darstellung Moignos[1032]), die mit dem Begriff des Mittelwertsatzes arbeitet, kennen gelernt zu haben, ohne zu wissen, daß Cauchy früher[926]) selbst vom allgemeinen Integralbegriff ausgegangen war. Er fragt daher[1032]), wie wohl Cauchy auf dieses eigentümliche Verfahren gekommen sein möge, und beantwortet sich diese Frage dahin, daß hinter der ganzen Untersuchung die Gleichung (585) stehe. Er meint, Cauchy habe diese Gleichung wohl zuerst unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die Entwickelbarkeit von $f(z)$ in eine Potenzreihe schon bewiesen sei, und sei von hier aus zu der Frage gekommen, unter welchen Umständen sich der Schluß in umgekehrter Richtung durchführen lasse. Später[1033]) gibt er im wesentlichen Cauchys ursprüngliche Darstellung der Residuensätze[890]) wieder, wobei er die Stetigkeit der Ableitung ausdrücklich als Voraussetzung einführt. Eine dritte Darstellung[1034]) beginnt mit dem durch Vertauschung der Reihenfolge von Differentiation und Integration gelieferten Nachweis, daß das Integral (617) von $r$ unabhängig ist. Da er aber bei der Anwendung dieses Satzes auf $F(r) = r^{-m}f(r)$ wiederholt partiell integriert, kommt er auch hier[1035]) zu der Meinung, man müsse die Stetigkeit aller Ableitungen voraussetzen.

**36. Der Cauchyschen Beweisansatz aus der Residuentheorie.** Indem *A. Cauchy* seinen Satz[907]) auf zwei Halbstreifen in den beiden Halbebenen der $z$ mit positivem und mit negativem imaginären Bestandteil anwendet, gelangt er zu den beiden Gleichungen[1036]):

---

1032) Arch. Math. Phys. 7 (1846), p. 354. Die damit skizzierte Darstellung führt Schlömilch in seiner Differentialrechnung, Greifswald 1847, p. 194—217, im einzelnen durch; dabei glaubt er übrigens die Stetigkeit aller Ableitungen fordern zu müssen, indem er sich sonst nicht getraut (p. 214), den Mittelwert einer unendlichen Reihe durch die Summe der Mittelwerte ihrer Glieder zu ersetzen.

1033) Neue Methode zur Summation endlicher und unendlicher Reihen, Greifswald 1849 = Arch. Math. Phys. 12 (1849), p. 133.

1034) Math. Abhandlungen, Dessau 1850, p. 17.

1035) p. 27. Ähnlich ist auch die Darstellung von *J. Dienger,* Arch. Math. Phys. 15 (1850), p. 119. Diengers Aufsatz über bestimmte Integrale mit imaginären Grenzen, J. f. Math. 37 (1848), p. 363 (von 1845) betrifft nur die Fälle, daß bei konstantem absoluten Betrag oder bei konstantem Winkel integriert wird.

1036) Paris mém. 6 (1827), p. 808 (von 1823; oeuvres (1) 2, p. 12); mém. sur l'application du calcul des résidus à la solution des problèmes de physique math., Paris 1827, p. 6.

$$(618)\quad \begin{aligned} \int_0^{2\pi}\frac{f(\alpha)\,d\alpha}{e^{-(\alpha-x)i}-1} &= \frac{1}{i}\int_0^{\infty}\frac{f(2\pi+\beta i)-f(\beta i)}{e^{\beta+xi}-1}\,d\beta-\pi f(x)\\ \int_0^{2\pi}\frac{f(\alpha)\,d\alpha}{e^{(\alpha-x)i}-1} &= -\frac{1}{i}\int_0^{\infty}\frac{f(2\pi-\beta i)-f(-\beta i)}{e^{\beta-xi}-1}\,d\beta-\pi f(x)\end{aligned}$$

und durch Addition nnd Reihenentwicklung rechts unter dem Integralzeichen zu:

$$(619)\quad \begin{aligned} f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha)\,d\alpha+\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[&e^{-nxi}\int_0^{\infty}e^{-n\beta}(f(2\pi+\beta i)-f(\beta i))\,d\beta\\ &-e^{nxi}\int_0^{\infty}e^{-n\beta}(f(2\pi-\beta i)-f(-\beta i))\,d\beta\Big]\end{aligned}$$

woraus die zu beweisende Gleichung sich durch abermalige Anwendung des Residuensatzes auf die einzelnen Glieder der rechten Seite ergibt. Die Schlußweise setzt voraus, daß die zu entwickelnde Funktion $f(x)$ für alle reellen und komplexen Werte ihres Arguments endlich bleibt, außerdem noch bestimmte, von *Cauchy* hier noch nicht genau angegebene Bedingungen über das Verhalten dieser Funktion im unendlichen. Aber diese Bedingungen sind, wie bereits *Dirichlet* bemerkt hat[1037]), zusammen nur erfüllt, wenn $f(x)$ eine Konstante ist; womit dieser Beweis hinfällig wird[1038]).

Die Konvergenz seiner Reihe erschließt *Cauchy* übrigens daraus, daß das allgemeine Glied durch die Substitution $n\beta = z$ in:

$$(620)\qquad \frac{1}{n}\int_0^{\infty}e^{-z}\left(f\left(2\pi\pm\frac{zi}{n}\right)-f\left(\pm\frac{zi}{n}\right)\right)dz$$

übergeführt werden kann, und daß die Summe zweier solcher Glieder

---

1037) J. f. Math. 4 (1829); Werke 1, p. 119.

1038) *B. Riemann* (Hab.-Schr. Gött. 1854, veröffentlicht durch *R. Dedekind*, Gött. Abh. 13 (1867); Werke 2. Aufl., p. 234) deutet an, man könne ihn so umformen, daß man über $f(\alpha+\beta i)$ nur für positive Werte von $\beta$ Voraussetzungen zu machen brauche. — *Riemanns* sich anschließende Angabe, daß „umgekehrt dieser Satz (daß eine in der positiven Halbebene überall endliche Funktion komplexen Arguments existiert, die für reelle Argumente vorgeschriebene Werte annimmt) sich aus der *Fourier*schen Reihe ableiten lasse“, kann verschieden verstanden werden: entweder so, daß er damals noch an die Möglichkeit der Entwicklung jeder stetigen Funktion in eine trigonometrische Reihe geglaubt habe; oder so, daß er auch den in Rede stehenden Satz nur für solche Randwerte habe behaupten wollen, für die die Entwicklung möglich ist.

samt den zugehörigen Faktoren nahezu gleich

$$\frac{1}{n}\{f(2\pi) - f(0)\} \sin nx \tag{621}$$

sei.

Daß mit so einfachen Hilfsmitteln nicht zum Ziele zu kommen ist, muß *Cauchy* übrigens bald selbst bemerkt haben, nachdem ihn fortgesetzte Beschäftigung mit seinen Residuensätzen veranlaßt hatte[910]), die Bedingungen schärfer zu formulieren, unter denen diese Sätze auf sich ins Unendliche erstreckende Bereiche angewendet werden können[1039]). Er gibt zunächst[1040]) für ein nach allen Seiten unendlich großes Rechteck, dessen Seiten zu den Koordinatenachsen parallel sind, den Satz in folgender Formulierung: wenn für reelle $x$ die Grenzwerte

$$\lim_{x=+\infty} [xf(x)] = f_1, \quad \lim_{x=-\infty} [xf(x)] = f_2 \tag{622}$$

existieren, und wenn für komplexe $z$

$$\lim_{z=\infty} \frac{f(z)}{z} = 0 \tag{623}$$

ist, wenn endlich $\varepsilon$ eine hinlänglich kleine positive reelle Größe bedeutet, so gilt:

$$E\frac{\langle f(z)\rangle}{1+\varepsilon z} = f_2, \quad E\frac{\langle f(z)\rangle}{1-\varepsilon z} = f_1. \tag{624}$$

Wird das auf die Funktionen

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{\chi(z)}{\mathfrak{F}(z)}\int_x^X e^{z(x-\alpha)}\mathfrak{f}(\alpha)\,d\alpha, \\ \Psi(z) &= \frac{\psi(z)}{\mathfrak{F}(z)}\int_{x_0}^x e^{z(x-\alpha)}\mathfrak{f}(\alpha)\,d\alpha \end{aligned} \tag{625}$$

angewendet, in denen $\mathfrak{f}(\alpha)$ eine Funktion der reellen Variabeln $\alpha$ bedeuten soll, und wird dabei angenommen, daß

$$\frac{\chi(z) - \psi(z)}{\mathfrak{F}(z)} \tag{626}$$

---

1039) Die in Rede stehenden Untersuchungen *Cauchys* stehen im engsten Zusammenhang mit seinen später (Nr. 83) zu besprechenden Darstellungen von Integralen gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen durch Residuen.

1040) Mém. sur l'application du calcul des résidus à la solution des problèmes de physique mathématique, Paris 1827, p. 1. Da *Dirichlet* und *Riemann* diese Untersuchungen *Cauchys* nicht erwähnen, sind sie lange unbeachtet geblieben, obwohl schon C. S. [Saigey?] (bull. Férussac 12 (1829), p. 200) darauf hingewiesen hat, daß sie von Dirichlets Einwänden gegen Cauchys ersten Beweis nicht mit getroffen werden.

auch da endlich bleibt, wo $\mathfrak{F}(z) = 0$ ist, so ergibt sich

$$(627) \qquad E\frac{\chi(z)}{(\mathfrak{F}(z))}\int_{x_0}^{x} e^{z(x-\alpha)}\mathfrak{f}(\alpha)\,d\alpha = \mathfrak{f}(x)$$

und daraus für

$$(628) \qquad \mathfrak{F}(z) = e^{2z\pi} - 1, \quad \chi(z) = 1$$

die Entwicklung von $\mathfrak{f}(x)$ in eine harmonische trigonometrische Reihe. Die Frage, welchen Bedingungen die Funktion $\mathfrak{f}$ genügen muß, wenn $X(z)$, $\Psi(z)$ die erforderlichen Bedingungen erfüllen sollen, bespricht *Cauchy* hier noch nicht, wohl aber in einer folgenden Abhandlung[1041]). Er versucht mit Hilfe des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung zu zeigen, daß sich z. B. die Funktion $X(z)$ im unendlichen wie

$$(629) \qquad \frac{\chi(z)}{\mathfrak{F}(z)}\,e^{z(x-x_0)}$$

verhält; übersieht aber dabei die für jenen Satz wesentliche Bedingung, daß die unter dem Integralzeichen stehenbleibende Funktion ihr Zeichen im Integrationsintervall nicht wechseln darf[1042]). Übrigens führt ihn seine Ableitung zunächst zu den beiden Gleichungen:

$$(630) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{2}f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{x_0}^{x} f(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}\cos(nx - n\alpha)\,f(\alpha)\,d\alpha,\\ \frac{1}{2}f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{x}^{X} f(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x}^{X}\cos(nx - n\alpha)\,f(\alpha)\,d\alpha, \end{aligned}$$

die unter der Voraussetzung

$$0 \leqq x_0 < x < X \leqq 2\pi$$

gelten; erst deren Zusammenfassung gibt die eigentlich zu beweisende.[1043])

Verwandt mit Cauchys erster Schlußweise ist diejenige, vermöge deren *O. Schlömilch*[1044]) aus den in Nr. **103** zu besprechenden Formeln

1041) Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 396; p. 406 die Formulierung der Resultate in einen Satz. — Die Annahme $F(z) = e^{\pi z} + 1$ führt auf Reihen, die nach den Funktionen der ungeraden Vielfachen des Arguments fortschreiten (p. 411).

1042) Auch die späteren Andeutungen Paris C. R. 32 (1851), p. 212 = Oeuvres (1) 11, p. 313 geben über diesen Punkt keinen Aufschluß.

1043) Wie man die Reihen mit nur Cosinus- oder nur Sinusgliedern durch Spezialisierung seines allgemeinen Ansatzes direkt in der gewöhnlichen Form erhalten kann, gibt Cauchy ib. p. 418 an.

1044) Neue Methode zur Summierung endlicher und unendlicher Reihen, Greifswald 1849 = Arch. Math. Phys. 12 (1849), p. 149. Die Endlichkeit von $f$ selbst, die Schlömilch noch besonders fordert, ist bereits eine Folge der Endlichkeit von $f$.

folgert: die Reihen

$$\sum_n f(n) \cos nx, \quad \sum_n f(n) \sin nx \tag{631}$$

konvergieren für $0 < x < \pi$, wenn $f'(u + vi)$ von $u = 0$ bis $u = +\infty$ und von $v = -\infty$ bis $v = +\infty$ endlich und stetig bleibt.

**37. Der Dirichletsche Beweis.** Einen andern Ansatz, von dem aus man zu einem wirklichen Beweis der Entwicklungssätze gelangen kann, hat bereits *Fourier* selbst skizziert.[1045]) Er setzt zunächst auseinander, daß die einzelnen positiven und negativen Flächenstücke, deren algebraische Summe das Integral (486) darstellt, abgesehen von dem ersten, für große Werte von $x$ absolut genommen sehr wenig voneinander verschieden sind, so daß sie sich größtenteils gegeneinander wegheben, und daß daher der Wert des Integrals größtenteils von dem ersten unter ihnen geliefert wird; dann bemerkt er, daß man entsprechende Überlegungen für die Integrale

$$\int_0^\infty f(\alpha) \frac{\sin n\alpha}{\alpha} d\alpha \tag{632}$$

und

$$\int_0^\infty f(\alpha) \sin n\alpha \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} d\alpha \tag{633}$$

durchführen könne, gibt aber nicht an, welche Eigenschaften man dazu von der Funktion $f(x)$ voraussetzen muß[1046]).

Erst *P. G. Lejeune-Dirichlet* hat, auf Grund der von ihm gewonnenen Erkenntnis der großen Allgemeinheit des Begriffs „willkürliche Funktion" (vgl. Nr. 28) Beschränkungen angegeben, unter denen der Beweis möglich ist, und ihn dann auch wirklich in allen Einzelheiten

1045) Théorie de la chaleur, Nr. 415, 416, 423 = Oeuvres 1, p. 494, 498, 510 (noch nicht in der Preisschrift von 1811, also wohl erst durch die ihm gemachten Einwände veranlaßt).

1046) Dieser letztere Punkt ist in den Noten von *G. Darboux* zu Fouriers Oeuvres, bei *Reiff,* Geschichte der unendlichen Reihen, p. 185 und bei *G. A. Gibson,* Edinb. math. proc. 11 (1892/93), p. 147, die im übrigen das Verhältnis dieser Untersuchungen Fouriers zu denjenigen von Dirichlet alle richtig angeben, nicht genügend hervorgehoben. — Auch bei *Ostrogradsky,* Petersb. mém. (6) 1 (1831), p. 137 (von 1828), bei *J. M. C. Duhamel* (Cours d'analyse 2, Paris 1840, p. 162), bei *A. A. Cournot* (Théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 207), bei *A. de Morgan* (Differential and integral calculus 1841, p. 627), die alle dieselbe Schlußweise benutzen, bleibt die Frage unerörtert, unter welchen Voraussetzungen über die Funktion $f(x)$ sie richtig ist.

durchgeführt. Er geht aus von dem Integral

$$(634) \qquad J_k = \int_0^h \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} \varphi(\beta) d\beta \qquad (f(\beta) = \varphi(x + 2\beta))$$

und zerlegt es durch Einschaltung der Zwischenwerte

$$\frac{\nu}{k} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

in Teile, in welchen der Faktor $\frac{\sin k\beta}{\sin \beta}$ sein Zeichen nicht wechselt, so daß er auf jeden dieser Teile den ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden und damit die Abschätzung auf die des Integrals

$$(635) \qquad \varrho_\nu = \int_{\frac{(\nu-1)\pi}{k}}^{\frac{\nu\pi}{k}} \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta$$

zurückführen kann. Diese letztere vollzieht er in seiner ersten Abhandlung[1047]) dadurch, daß er zu

$$(636) \qquad \lim_{k=\infty} \varrho_\nu = \int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \frac{\sin \gamma}{\gamma} d\gamma$$

übergeht; in der zweiten[1048]) gewinnt er durch direkte Untersuchung der $\varrho_\nu$, für den Fall, daß $f(x)$ im ganzen Intervall positiv ist und mit wachsendem $x$ nicht zunimmt, die Doppelungleichung

$$(637) \left(\frac{\pi}{2} - \varrho_{2m+1}\right) \varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right) < J_k < \varrho_1 f(0) + \left(\frac{\pi}{2} - \varrho_1 + \varrho_{2m+1}\right) \varphi\left(\frac{2m\pi}{k}\right)$$

und aus ihr, indem er $m$ so mit $k$ ins Unendliche wachsen läßt, daß $\lim \frac{m}{k} = 0$ wird[1049]), die zu beweisende Grenzgleichung:

$$(638) \qquad \lim_{k=\infty} J_k = \frac{\pi}{2} \varphi(0).$$

Der Übergang zu den Fällen, daß $f(x)$ negativ ist, oder daß es mit wachsendem $x$ nicht abnimmt, geschieht sofort; den Fall eines [nach

1047) J. f. Math. 4 (1829), p. 157 = Werke 1, p. 117; ebenso *A. A. Cournot*, Théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 205.

1048) Repert. Phys. 1, Berlin 1837, p. 152 = Werke 1, p. 133; mit Anmerkungen von *H. Liebmann*, Leipzig 1900; reproduziert auch in *G. F. Meyers* Bearbeitung der Vorlesungen Dirichlets über bestimmte Integrale, Leipzig 1871, p. 229, und in vielen andern Lehrbüchern (zuerst wohl bei *M. Ohm*, System der Mathematik 9, Nürnb. 1852, p. 294).

1049) *W. Fr. Bessel* (Astr. Nachr. 16 (1839), p. 229 = ges. Abhandl. 2, p. 393) setzt zu diesem Zwecke $m = \sqrt[3]{k^2}$; im übrigen ist bei ihm, wie schon *Riemann*[1038]) bemerkt, die Durchführung im einzelnen nicht einwandfrei.

jetziger Ausdrucksweise] „abteilungsweise monotonen“ $f(x)$ erledigt Dirichlet dadurch, daß er aus (638) zunächst die andere Grenzgleichung

$$(639) \qquad \lim_{k=\infty} \int_g^h \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} \varphi(\beta) d\beta = 0 \qquad (0 < g < h < \pi)$$

ableitet und dann das Integral durch diejenigen Werte von $x$ in Teilintegrale zerlegt, an welchen $f(x)$ den Sinn seiner Änderung wechselt.

*O. Schlömilch*[1050]) glaubt Dirichlets Beweisgang ohne Einbuße an Strenge vereinfachen zu können. Er bringt alle Bestandteile des Integrals auf dieselben Grenzen und hat dann noch den Grenzwert

$$(640) \qquad \lim_{n=\infty} \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{f\left(\frac{\alpha}{k}\right)}{k \sin \frac{\alpha}{k}} + \frac{f\left(\frac{\pi-\alpha}{k}\right)}{k \sin \frac{\pi-\alpha}{k}} - \frac{f\left(\frac{\pi+\alpha}{k}\right)}{k \sin \frac{\pi+\alpha}{k}} - + + - \cdots \right.$$
$$\left. \pm \frac{f\left(\frac{r\pi \pm \alpha}{k}\right)}{k \sin \frac{r\pi \pm \alpha}{k}} \pm \cdots + (-1)^n \frac{f\left(\frac{n\pi + \alpha}{k}\right)}{k \sin \frac{n\pi + \alpha}{k}} \right] \sin \alpha d\alpha \qquad (k = 2n+1)$$

zu untersuchen; hier glaubt er den Grenzübergang unter dem Integralzeichen vornehmen zu dürfen, da diejenigen Glieder, für die $r$ von derselben Größenordnung wie $m$ sei, keinen Beitrag lieferten; unter dem Integralzeichen erscheint dann nur noch $f(0) \sin \alpha$ mit der Partialbruchzerlegung von $\operatorname{cosec} \alpha$ multipliziert.

*W. R. Hamilton*[1051]) bezeichnet die von *Fourier*[1044]) angewendete Schlußweise als „principle of fluctuation“. Er selbst beginnt mit dem Satze[1052]), daß die Grenzgleichung

$$(641) \qquad \lim_{k=\infty} \int \sin k\alpha f(\alpha) d\alpha = 0$$

jedesmal besteht, wenn die Funktion $f$ im Integrationsintervall stetig

---

1050) Arch. Math. Phys. 1 (1841), p. 417; etwas ausführlicher Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale, Jena 1843, p. 3.

1051) Dubl. proc. 6 (1841/42), p. 285 = Dubl. trans. $19_2$ (1843), p. 319. Hamilton wendet seine Schlüsse sogleich auf Entwicklungen nach allgemeineren oszillierenden Funktionen an; darüber wird in einem der Ergänzungsartikel zu berichten sein. Er bemerkt übrigens mit Recht (p. 237 bzw. 320), Fourier habe nicht gezeigt, daß die vernachlässigten Größen von höherer Ordnung als die beibehaltenen sind.

1052) Dubl. trans. 19, p. 267. Die Voraussetzung der Stetigkeit erscheint bei ihm p. 269 in derjenigen Form, die man jetzt als Voraussetzung gleichmäßiger Stetigkeit bezeichnet. p. 270 bemerkt er, daß eine endliche Anzahl von Unstetigkeitsstellen dem Schlusse keinen Eintrag tue.

ist; den Beweis führt er, indem er den Mittelwertsatz auf diejenigen Teilintervalle anwendet, in welchen der Faktor $\sin k\alpha$ sein Vorzeichen nicht wechselt. Ebenso zeigt er[1053]), daß

$$(642) \qquad \lim_{k=\infty} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\sin k\alpha}{\alpha}\, d\alpha = 0$$

ist. Für den dann noch erforderlichen Schluß, daß auch

$$(643) \qquad \lim_{k=\infty} \int_{x}^{x+\varepsilon} \frac{\sin (kx - k\alpha)}{kx - k\alpha} (f(x) - f(\alpha))\, d\alpha = 0$$

ist, muß er, um den Mittelwertsatz mit umgekehrter Rolle der beiden Faktoren anwenden zu können, die Voraussetzung hinzunehmen, daß $f(\alpha)$ zwischen $\alpha = x$ und $= x + \varepsilon$ sich immer in demselben Sinn ändert[1054]). Indem er in dieser Gleichung dann noch $f(x)$ durch

$$(644) \qquad \frac{(x-\alpha) f(x)}{\sin (kx - k\alpha)}$$

ersetzt, erhält er die zu beweisende Gleichung (638)[1055]).

Mit *Hamiltons* Anordnung der einzelnen Schritte des Beweises zeigt eine spätere Darstellung von *O. Schlömilch*[1056]) große Verwandtschaft; nur verwendet dieser bei Ableitung der Gleichung (641) mit Hilfe des ersten Mittelwertsatzes die beiden Faktoren in umgekehrter Rolle, so daß er hier schon $f(\alpha)$ als abteilungsweise monoton voraussetzen muß, was er übrigens nicht als eine Einschränkung erkannt zu haben scheint. Indem er dann zeigt, daß diese Gleichung auch noch gilt, wenn die Funktion $f(\alpha)$ bei $\alpha = 0$ so unendlich wird, daß

$$(645) \qquad \lim_{\alpha=0} [\alpha f(\alpha)] = 0$$

ist, gelangt er von ihr direkt zu (638), indem er $f(\alpha)$ durch

$$(646) \qquad \frac{f(\alpha) - f(0)}{\sin \alpha}$$

ersetzt[1057]).

**38. Beweis der Konvergenz durch partielle Integration in den Ausdrücken der Koeffizienten.** Schon *S. D. Poisson*[1058]) hat die Aus-

1053) p. 273.

1054) p. 275.

1055) p 281.

1056) Analytische Studien 2, Leipzig 1848, p. 14.

1057) p. 23, 26.

1058) Chaleur, p. 185. Vorher, Mécanique 1, p. 647 der 2. Auflage (nicht in der ersten) hatte er aus den durch einmalige partielle Integration sich erdrücke der Koeffizienten trigonometrischer Reihen mit nur Cosinus- oder nur Sinusgliedern durch bestimmte Integrale vermittelst wiederholter partieller Integration in:

$$(647)\qquad \begin{cases} A_n = -\dfrac{2}{n^2\pi}\displaystyle\int_0^\pi f''(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha, \\ B_n = -\dfrac{2}{n^2\pi}\displaystyle\int_0^\pi f''(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha \end{cases}$$

umgeformt und daraus geschlossen, daß eine solche Reihe wie $n^{-2}$ konvergiere. Daß dieser Schluß nur unter bestimmten Voraussetzungen über die Funktion $f(x)$ richtig ist, durch welche die Allgemeinheit der Untersuchung stark beeinträchtigt wird, hat bereits *W. R. Hamilton* hervorgehoben[1059]).

*E. H. Dirksen*[1060]) formt die Reihe (384), unter der Voraussetzung, daß $f'(x)$ „innerhalb der Grenzen der Integration einschließlich, beständig endlich und bestimmt bleibt", durch partielle Integration in den Ausdrücken der Koeffizienten um in

$$(648)\qquad \frac{1}{\pi}\left[f(\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx-n\alpha)}{n}\right]+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int f'(\alpha)\frac{\sin(nx-n\alpha)}{n}\,d\alpha$$

und schließt daraus mit Hilfe der speziellen Gleichung (110), daß ihre Summe endlich ist, sowie daß die Grenzgleichung

$$(649)\qquad \lim_{n=\infty}\int\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(x-\alpha)}f(\alpha)\,d\alpha = 0$$

gilt, wenn nur das Integrationsintervall keine Nullstelle des Nenners enthält[1061]). Infolgedessen glaubt er in dem Dirichletschen Integral (638) ohne weiteres die obere Grenze beliebig nahe an der untern nehmen und dann $f(x)$ vor das Integralzeichen ziehen zu können[1062]).

---

gebenden Formeln geschlossen, daß die Koeffizienten mit $\lim n = \infty$ gegen 0 konvergieren und hinzugefügt: „Cette remarque est nécessaire et suffit pour l'emploi qu'on fera de la formule". Für einen speziellen Fall auch schon conn. des temps pour 1836[33], add. p. 7. Von den Formeln (647) setzt die erste voraus, es sei $f'(0) = f'(\pi) = 0$, die zweite, es sei $f(0) = f(\pi) = 0$; vgl. darüber Note [1083]).

1059) Dubl. proc. 6 (1841/42), p. 235 = Dubl. trans. 19 (1843), p. 319.

1060) J. f. Math. 4 (1829), p. 172. Zum Beweis dafür, daß $f'(x)$ auch an einzelnen Stellen unendlich werden darf, beruft er sich auf die doch gerade dann nicht mögliche Entwickelbarkeit von $f(x)$ in eine Taylorsche Reihe (p. 173).

1061) p. 175.

1062) p. 176. In der ausführlicheren Darstellung Berl. Abh. 1829[32], p. 183

Auch *N. I. Lobatschefskij*[1063]) behandelt Reihen, die Cosinus- und Sinusglieder nebeneinander enthalten; da er aber in den Integralausdrücken der Koeffizienten die Integration nur über das halbe Intervall erstreckt (vgl.[518])), so bleiben ihm bei der zweimaligen partiellen Integration Glieder vom Integralzeichen frei, und er muß sich auf seinen Beweis[217]) der Konvergenz der speziellen Reihe (110) berufen, um behaupten zu können, daß diese für sich eine konvergente Reihe geben. Zum Beweis, daß die Summe der Reihe wirklich gleich der zu entwickelnden Funktion ist, bedient er sich zunächst des Poissonschen Verfahrens (Nr. 34); nachher noch der folgenden Schlußweise: wird die Reihensumme zwischen irgend zwei Grenzen gliedweise integriert und dann die Reihenfolge der Summation und der zur Bildung der Koeffizienten erforderlichen Integration vertauscht, was jetzt möglich ist, da durch die erste Integration das $n^{\text{te}}$ Glied den Nenner $n$ bekommen hat, so ergibt sich mit Hilfe von (110), daß das Integral der Reihensumme gleich dem der zu entwickelnden Funktion ist. Weiß man nun schon, daß die Reihensumme eine stetige Funktion ist, so ergibt sich der Schluß unmittelbar. Um zu zeigen, daß das überall da der Fall ist, wo die zu entwickelnde Funktion selbst stetig ist, zieht Lobatschefskij in der Dirichletschen Integraldarstellung (638) zweier benachbarter Werte der Reihensumme für die Umgebung des betrachteten Punktes die Differenz der zugehörigen Werte der zu entwickelnden Funktion vor das Integralzeichen, während er in den übrigen Bestandteilen dieses Integrals die Differenz $f(\alpha+\delta)-f(\alpha)$ durch $\delta f'(\alpha)$ ersetzt und daraus folgert, diese Bestandteile konvergierten mit $\delta$ zugleich gegen Null.

Auch *C. Navier*[1064]) und *J. Dienger*[1065]) suchen die Konvergenz der allgemeinen Reihe aus der speziellen Reihe (110) zu erschließen, indem sie zeigen wollen, daß in jener die Koeffizienten von der Größenordnung $\frac{1}{n}$ sind. *Navier* bedient sich zu diesem Zwecke einer nicht streng durchgeführten Abschätzung, indem er die Kurve $y=f(x)$ durch ein Polygon ersetzt; *Dienger* bedient sich der partiellen Integration. Daß die Summe aber den behaupteten Wert hat, berührt

---

will er den Schluß damit rechtfertigen, daß er sowohl auf $f(\alpha)$ als auf $1/\sin\frac{\alpha}{2}$ das Rollesche Theorem anwendet; das setzt aber eben auch die Existenz von $f'(x)$ an der betrachteten Stelle voraus.

1063) Kasan Schriften 1834, p. 167; vgl. Note 217.

1064) Leçons d'analyse 2 (1840), p. 167.

1065) J. f. Math. 34 (1847), p. 80. Er behauptet auch, einzelne Unstetigkeitsstellen täten dem Schlusse keinen Abbruch, doch ist seine Begründung dieser Behauptung ganz ungenügend.

*Navier* überhaupt nicht; *Dienger* zieht in dem Dirichletschen Ausdruck für die Summe der $2n+1$ ersten Glieder ohne weiteres $f(x)$ vor das Integralzeichen und ersetzt dann in dem Nenner des übrigbleibenden Integrals den Sinus durch den Bogen.

*G. G. Stokes*[1066]) wendet das Verfahren wieder auf Reihen an, die nur Cosinus- oder nur Sinusglieder enthalten, jedoch ohne das Vorkommen von Unstetigkeitsstellen in der Funktion oder ihren Ableitungen auszuschließen. Es bleiben dann bei den partiellen Integrationen vom Integralzeichen freigewordene Glieder stehen; die Konvergenz der von diesen gebildeten Reihen erschließt auch er aus der Konvergenz der speziellen Reihe (110), die er wie *Fourier*[209]) beweist. Daß die Reihensumme der zu entwickelnden Funktion gleich ist, erschließt er dann aus dem Poissonschen Verfahren (Nr. **34**), unter Hinzunahme des Abelschen Lemmas[766]). Durch Umkehrung der Schlußweise ergibt sich ihm die Möglichkeit, aus der Natur der Koeffizienten der Entwicklung auf die Unstetigkeiten der Funktion zu schließen, vermöge verschiedener Sätze, die er schließlich[1067]) zu dem einen zusammenfaßt: wenn die Funktion und alle ihre Ableitungen nur eine endliche Anzahl von Stetigkeitssprüngen aufweisen, so ist:

$$(650)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\pi}{2}\begin{Bmatrix}A_n\\B_n\end{Bmatrix}=\pm\frac{1}{n}\sum(f(\alpha+0)-f(\alpha-0))\begin{Bmatrix}\cos\\\sin\end{Bmatrix}n\alpha\\ &-\frac{1}{n^2}\sum(f'(\alpha+0)-f'(\alpha-0))\begin{Bmatrix}\sin\\\cos\end{Bmatrix}n\alpha\\ &\mp\frac{1}{n^3}\sum(f''(\alpha+0)-f''(\alpha-0))\begin{Bmatrix}\cos\\\sin\end{Bmatrix}n\alpha+\pm-\mp+\cdots;\end{aligned}\right.$$

die Summation ist dabei über alle Unstetigkeitsstellen der betr. Ableitung im Intervall zu erstrecken, die Funktion ist über das Intervall hinaus den Gleichungen

$$(651)\qquad f(-\alpha)=\pm f(\alpha),\quad f(\pi+\alpha)=\pm f(\pi-\alpha)$$

gemäß fortgesetzt zu denken, wobei die oberen Zeichen für die Cosinusreihe, die untern für die Sinusreihe gelten und etwa daraus entspringende Unstetigkeiten an einem oder dem andern Endpunkt des Intervalls sind mit dem halben Betrag in Rechnung zu bringen.

---

1066) Cambr. trans $8_5$ (1849), p. 539 (von 1847) = papers 1, p. 246. Er bemerkt, daß die Schlüsse sich nicht wesentlich ändern, wenn die letzte benutzte Ableitung an einer endlichen Anzahl von Stellen von niedrigerer als der ersten Ordnung unendlich wird. Das Vorkommen von unendlich vielen Unstetigkeiten schließt er ausdrücklich aus.

1067) p. 551 = 262. Die Formulierung betr. die Endpunkte des Intervalls ist bei Stokes etwas umständlicher. Die Gleichungen (650) sind übrigens als asymptotische zu verstehen.

**39. Benutzung des zweiten Mittelwertsatzes der Integralrechnung durch O. Bonnet.** *O. Bonnet* hat gezeigt, daß man die Abschätzung des Integrals (634) auch mit Hilfe desjenigen Satzes vornehmen kann, den man jetzt als zweiten Mittelwertsatz der Integralrechnung bezeichnet. Dieser Satz erscheint bei ihm in der Gestalt[1068]): wenn für alle $x$ des Intervalls $(a \ldots b)$ die Funktion $f(x)$ positiv ist und abnimmt und die Ungleichung gilt:

$$A < \int_a^x \psi(\beta)\,d\beta < B, \tag{652}$$

dann ist:

$$Af(a) < \int_a^b f(\beta)\psi(\beta)\,d\beta < Bf(a). \tag{653}$$

Wird hier $f(x)$ durch $\frac{\varphi(x)}{x}$ ersetzt, wobei $\varphi$ denselben Bedingungen genügen muß wie vorher $f$, so ergeben sich die Ungleichungen[1069]):

$$-\frac{2}{k}\frac{\varphi(a)}{a} < \int_a^b \varphi(\beta)\frac{\sin k\beta}{\beta}\,d\beta < \frac{2}{k}\frac{\varphi(b)}{b} \qquad (ab > 0) \tag{654}$$

und

$$0 < \int_0^\varepsilon (\varphi(\beta) - \varphi(\varepsilon))\frac{\sin k\beta}{\beta}\,d\beta < (\varphi(0)) - \varphi(\varepsilon))\int_0^\pi \frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta, \tag{655}$$

aus denen zunächst die Grenzgleichung (643) folgt. Um von ihr zu (638) zu kommen, muß noch $\varphi(x)$ durch

$$\frac{x\varphi(x)}{\sin x}$$

ersetzt werden; das verlangt, daß diese Funktion in der Umgebung von $x = 0$ abnimmt[1070]).

**40. Integral des Quadrats des beim Abbrechen einer trigonometrischen Entwicklung übrigbleibenden Fehlers.** Ist $s_n$ die Summe der $n$ ersten Glieder einer trigonometrischen Entwicklung der Funk-

---

1068) J. de math. 14 (1849), p. 249; Brux. mém. cour. in 4° 23 (1848/50), p. 8. Bonnet gewinnt den Satz, indem er in dem entsprechenden, für endliche Summen geltenden Lemma Abels die Gliederzahl unbegrenzt zunehmen läßt; er fügt dann nur hinzu, er sei „très-facile à établir en toute rigueur". Vgl. darüber II A 2, *Voß*, Nr. 35, p. 98, sowie die dort zitierte historische Darstellung von *A. Pringsheim*, Münch. Ber. 1900, p. 209.

1069) J. de math. 14, p. 254; Brux. mém. cour. 23, p. 13.

1070) Brux. mém. cour. 23, p. 17. Die Bedingung ist insofern unbequem, als der Faktor $x/\sin x$ dort zunimmt.

tion $f$, so ergibt sich aus den Gleichungen (368) bzw. (385) daß

$$\int (f - s_n) s_n \, dx = 0, \tag{656}$$

also

$$\int f^2 dx > \int s_n^2 dx \tag{657}$$

ist. Dieser Satz ist als sehr spezieller Fall in einem allgemeinen von *J. Liouville*[1071]) enthalten; seine Verwendung zu Untersuchungen über die Konvergenz trigonometrischer Reihen gehört einer späteren Zeit an.

**41. Differentiation und Integration trigonometrischer Reihen.** Solange man an der formalen Auffassung auch divergenter trigonometrischer Reihen festhielt und sich um die Reihenfolge von Grenzübergängen nicht kümmerte, glaubte man sich auch berechtigt, trigonometrische Reihen beliebig oft gliedweise zu differentiieren oder zu integrieren[1072]). Auch *S. D. Poisson* zweifelt nicht daran, daß das im allgemeinen zulässig sei; doch stellt er bereits folgende Überlegung an[1073]): Wird die Gleichung (384) gliedweise differentiiert und werden dann die Integrale durch partielle Integration umgeformt, so wird zunächst erhalten:

$$f'(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} f'(\alpha) \cos(nx - n\alpha)\, d\alpha - (f(\pi) - f(-\pi)) \cos nx \cos n\pi \right\}. \tag{658}$$

Wird hier die Summe rechts in zwei Bestandteile gespalten und dem zweiten Bestandteil, der für sich genommen divergiert, auf Grund der Gleichung (25) der Wert

$$\frac{1}{2\pi}(f(\pi) - f(-\pi)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\alpha)\, d\alpha \tag{659}$$

zugeschrieben, so stimmt das Resultat mit demjenigen überein, das durch direkte Anwendung der Formel (384) auf die Funktion $f'(x)$ erhalten wird. Poisson meint aber, das gelte nicht mehr für $x = \pm \pi$, da dann der erwähnten Reihe nicht der Wert $-\frac{1}{2}$, sondern $\infty$ zuzuschreiben sei; daraus glaubt er schließen zu müssen, daß die Entwicklung von $f'(x)$ an den Grenzen ihres Gültigkeitsintervalls divergiere, wenn nicht $f(\pi) = f(-\pi)$ sei [was wieder nach der andern Seite hin zu viel behauptet ist].

Entsprechende Überlegungen stellt er dann auch für diejenigen Reihen an, die nur Sinus- oder nur Cosinusglieder enthalten[1074]).

---

1071) J. de math. 1 (1836), p. 265.

1072) Vgl. Nr. 4, 7, 8.

1073) J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 438; chaleur p. 193.

1074) Auch *A. Cauchy* bemerkt, daß die Sinusreihe durch gliedweise Inte-

Dagegen wird durch Integration nach $x$ und Umformung der Koeffizienten durch partielle Integration aus der Gleichung (369) erhalten[1075]):

$$(660)\quad F(x) \equiv \int_0^x f(x)dx = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n\pi}{n} \int_0^{\pi} f(\alpha)\sin n\alpha d\alpha$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \int_0^{\pi} F(\alpha)\cos n\alpha d\alpha - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} F(\alpha)\cos n\alpha d\alpha$$

und da $F(0) = 0$ ist, so ist das gleich

$$(661)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F(\alpha)d\alpha + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx \int_0^{\pi} F(\alpha)\cos n\alpha d\alpha,$$

wie es sein soll. Poisson glaubt daraus schließen zu können, daß die durch gliedweise Integration einer Sinusreihe erhaltene Reihe auch an den Grenzen des Intervalls das richtige Resultat ergebe, wenn nur $F(0)$ und $F(\pi)$ überhaupt endlich seien. Aus der Cosinusreihe (365) wird ebenso erhalten:

$$(662)\quad F(x) = \Big[\frac{x}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx\Big] F(\pi)$$

$$+ \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx \int_0^{\pi} F(\alpha)\sin n\alpha d\alpha$$

der richtige Wert komme also hier dadurch heraus, daß das Zusatzglied nach (111) überall gleich 0 ist, außer für $x = \pi$.

Auch *G. G. Stokes* bemerkt[1076]), daß man aus einer Sinusreihe durch Integration immer eine noch besser konvergente Reihe erhalte, durch Differentiation dagegen häufig eine divergente; man könne aber mit Hilfe der bereits in Nr. 38 besprochenen Umformungen diese divergenten Reihen durch konvergente ersetzen. Ist z. B. $B_n$ der Koeffizient von $\sin nx$ in der Entwicklung einer Funktion $f(x)$, die mit ihren Ableitungen bis zur $(2\mu)^{\text{ten}}$ Ordnung einschließlich im

---

gration aus der Cosinusreihe abgeleitet werden kann, exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 419.

1075) J. éc. polyt. cah. 19, p. 441; chaleur p. 196.

1076) Cambr. trans. 8 (1849), p. 545 (von 1847) = papers 1, p. 255. Er bemerkt kurz, für die Cosinusreihe gelte Analoges; die von Poisson an die Gleichung (662) geknüpfte Bemerkung findet sich bei ihm nicht. p. 264 = 551 fügt er noch nachträglich bei, daß einzelne Unstetigkeiten der letzten berücksichtigten Ableitung den Schluß nicht stören.

Innern des Intervalls stetig ist, so ist der Koeffizient $B_n^{(2\mu)}$ in der entsprechenden Entwicklung ihrer $(2\mu)^{\text{ten}}$ Ableitung gegeben durch:

$$(663)\quad \begin{aligned}(-1)^\mu B_n^{(2\mu)} = n^{2\mu} B_n &- \frac{2}{\pi} n^{2\mu-1}[f(0) - (-1)^n f(\pi)] \\ &+ \frac{2}{\pi} n^{2\mu-3}[f''(0) - (-1)^n f''(\pi)] - + - \cdots \\ &+ (-1)^\mu \frac{2n}{\pi}[f^{(2\mu-2)}(0) - (-1)^n f^{(2\mu-2)}(\pi)].\end{aligned}$$

Läßt sich $B_n$ in der Form (650) darstellen, so kann man das Resultat auch so aussprechen[1077]): man erhält die Koeffizienten der Entwicklung von $f^{(\mu)}(x)$, wenn man gliedweise differentiiert, dabei aber aus der Formel (650) alle Glieder wegläßt, die zu divergenten Bestandteilen Veranlassung geben würden[1076]). Die Entwicklung von $f'(x)$ in eine Sinusreihe kann, wenn $f(x)$ im Innern des Intervalls keine Unstetigkeiten aufweist, ohne weiteres aus der Entwicklung von $f(x)$ in eine Cosinusreihe durch gliedweise Differentiation gefunden werden; aus ihr ergeben sich dann die Entwicklungen der Ableitungen ungerader Ordnung durch das vorhin genannte Verfahren.

*O. Bonnet*[1078]) sieht den Grund dafür, daß man eine trigonometrische Reihe nicht immer gliedweise differentiieren könne, in dem Umstande, daß die Konvergenz der Reihe den Vorzeichen ihrer Glieder und nicht allein ihrem Abnehmen zuzuschreiben sei.

**42. Verhalten der Reihe an Sprungstellen der zu entwickelnden Funktion.** Schon *D. Bernoulli*[1079]) hat darauf aufmerksam gemacht, daß man beim Übergang von (25) zu (110) für jedes der Intervalle $(2k-1)\pi < x < (2k+1)\pi$ die Integrationskonstante anders bestimmen müsse, und daß infolgedessen die letztere Reihe eine an den Trennungsstellen dieser Intervalle unstetige Funktion vorstellt. Auch *Euler* hat bemerkt[1080]), daß die Gleichung (111) für $x = \pi$ nicht mehr richtig sein kann; er legt sich die Sache so zurecht: für $x = \pi - \delta$ wird jedes Glied der Reihe nahezu gleich $\delta$, die Summe unendlich vieler unendlich kleiner Größen kann aber sehr wohl einen end-

---

1077) p. 258 = 547.

1078) Brux. mém. cour. in 4° 23 (1848/50), p. 24.

1079) Petrop. n. comm. 17 (1772), p. 8: „integer transitus perficitur non in arculo $dx$, sed in unico puncto vere mathematico". *J. Fr. Pfaff* (Versuch [48])) p. 18 ist mit dieser Erklärung nicht zufrieden, weiß aber auch nichts Besseres beizubringen als die Berufung darauf, daß schon die [divergente] Reihe (25) bei $x = 0$ nicht $\frac{1}{2}$, sondern $\infty$ zur Summe habe.

1080) opuscula analytica 1, Petrop. (1783), p. 169 = institut. calc. integr. 4, suppl. V, § 48? (von 1772).

lichen Wert haben. Immerhin blieben diese Bemerkungen vereinzelt; noch *Ch. Babbage* meint[1081]): die Reihe (110) zeige, daß die willkürliche Integrationskonstante nicht für die ganze Ausdehnung eines Integrals denselben Wert zu haben brauche; der Grund hiervon sei noch nicht genügend aufgeklärt; man könne ihn in Unstetigkeiten von Ableitungen des Integranden oder in besonderen Eigentümlichkeiten der Exponentialfunktion suchen.

Dann hat *A. Cauchy*[1082]) aus seinen Residuensätzen gefolgert, daß auch die Summen der Reihen (282), (283) in verschiedenen Intervallen verschiedenen analytischen Funktionen gleich sind.

Allgemein ist die Frage aber erst von *S. D. Poisson* behandelt worden.[1083]) Er zeigt zunächst, daß:

$$(664)\quad \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi f(\alpha)\,d\alpha + \frac{2}{\pi}\lim_{\delta=0}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^\pi e^{-n\delta}\cos(nx-n\alpha)f(\alpha)\,d\alpha$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ für } -\pi < x < 0, \\ \frac{1}{2}f(x) \text{ für } x=0 \text{ und für } x=\pi, \\ f(x) \text{ für } 0 < x < \pi \end{cases}$$

1081) Mem. of the analytical society, Cambr. 1813, p. VIII; die Vorrede, die wie auch die Abhandlungen des Bandes keinen Verfassernamen trägt, rührt nach Angabe von *W. W. R. Ball*, history of the study of mathematics at Cambridge 1889, p. 120, von Babbage her.

1082) Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 471 (von 1814). Vgl. die auf Verlangen der akademischen Kommission [*Legendre*] hinzugefügten Erläuterungen p. 493, 503. Betr. Legendre's eigene Darstellung vgl. man hier Note 400.

1083) J. éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 423. Er leitet daraus ab, daß die Reihen, die nur Sinus- oder nur Cosinusglieder enthalten, an den Grenzen ihrer Gültigkeitsintervalle selbst Null sind, bzw. verschwindende Ableitungen liefern (p. 428), sowie entsprechende Sätze für die Reihen, die nach den Funktionen der ungeraden Vielfachen des Arguments fortschreiten. Infolgedessen vermeidet er es, direkten Gebrauch von Entwicklungen von Funktionen zu machen, welche diesen Bedingungen nicht genügen, und hilft sich, um das vermeiden zu können, damit, daß er eine der erwähnten einfachen Funktionen mit derselben Art von Unstetigkeit addiert und ihre Entwicklung wieder subtrahiert (ib. p. 467, 489; 19 (1823), p. 58, 443). Noch im traité de mécanique (1833), leitet er 2, p. 337 die Entwicklung von $x$ nach den Sinus und p. 344 die von $\pi/4$ nach den Cosinus der Vielfachen von $x$ nicht direkt mit Hilfe der Integraldarstellungen der Koeffizienten ab, sondern gewinnt auf diesem Wege nur die Entwicklungen von $x^2$ nach den Cosinus bzw. von $\pi x$ nach den Sinus und differentiiert dann. — Auch *J. Liouville* hat diese Bedenken ursprünglich geteilt (J. de math. 1, 1836, p. 27, 30), aber bald bemerkt (ib. 2, 1837, p. 421, 433), daß sie grundlos sind.

ist; weiter[1084]) überhaupt, daß dieselbe Summe, wie auch die Summe (384), wenn $f(x)$ nur in einem Teil des Gültigkeitsintervalls von Null verschieden ist, an den Grenzen dieses Teilintervalls nicht $= f(x)$, sondern nur $= 1/2 f(x)$ ist; sowie[1085]), daß der Wert der letzteren Summe, für $x = -\pi$ und für $x = \pi$, wenn $f(-\pi)$ und $f(\pi)$ voneinander verschieden sind, keinem von beiden, sondern ihrem arithmetischen Mittel gleich ist. Derselbe Satz sowie der allgemeinere: wenn für einen besonderen Wert von $x$ die Grenzwerte $\lim\limits_{\varepsilon=0} f(x+\varepsilon)$ und $\lim\limits_{\varepsilon=0} f(x-\varepsilon)$ zwar beide existieren, aber voneinander verschieden sind, so ist an einer solchen Stelle die Summe der Reihe gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Grenzwerte — ergibt sich dann sofort aus *Dirichlets* Beweisverfahren, wie dieser auch selbst hervorhebt[1086]).

Die nähere Untersuchung des Verhaltens der Reihensumme in der Umgebung einer singulären Stelle hat *Fr. W. Newman* begonnen; zunächst für die Reihe (410). Er stellt die Summe ihrer $2m$ ersten Glieder in der Form dar[1087]):

$$y_m = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin 4mx}{\cos x}\,dx \tag{665}$$

1084) J. éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 430; 19 (1823), p. 435; chaleur p. 190.

1085) Ib. 19, p. 434. — Bei *Fourier* findet sich hierüber nur eine Andeutung, théorie Nr. 423 = Oeuvres 1, p. 511, die erst *Darboux* in einer Note dazu ausführt.

1086) J. f. Math. 4 (1829), p. 168; Repert. Phys. 1 (1837), p. 170 = Werke 1, p. 130, 156; ausführlich erörtert auch von *M. Ohm,* System der Mathematik 9, Nürnberg 1852, p. 311. Daß die gegenteilige Angabe bei *Dirksen,* J. f. Math. 4 (1829), p. 178 falsch ist, bemerkt bereits *B. Riemann,* Gött. Abhandl. 13 (1868) (von 1854) = Werke p. 238. In der ausführlicheren Abhandlung Dirksens, Berl. Abhandl. 1829 [32], p. 186, die Riemann nicht kennt [oder ignoriert?], steht übrigens die richtige Angabe.

Übrigens steht noch *G. Piola* (mem. soc. ital. $20_2$ (1831), p. 603) der Schwierigkeit ratlos gegenüber, daß die Sinusreihe die zu entwickelnde Funktion an der Grenze nicht mehr darstellen kann, wenn diese dort von Null verschieden ist. Er meint: wenn auch die Interpolationsformel an der Grenze nicht mehr richtig sei, könne man doch die zur Darstellung der Koeffizienten der Reihe dienenden Integrale bis an die Grenze erstrecken, da eine unendlich kleine Änderung der Grenzen das Integral nur unendlich wenig ändere. Da er aber doch weiß, daß diese letztere Behauptung nur „im allgemeinen richtig" ist, so verzichtet er in Erkenntnis seiner unzureichenden Kräfte auf eine klare Auseinandersetzung.

1087) Cambr. Dubl. math. J. 3 (1848), p. 108. Er meint die Frage, ob $m$ von $x$ abhängig sein könne, sei vom „algebraischen" Standpunkt aus jedenfalls zu bejahen, bei physikalischen Problemen im einzelnen Fall zu untersuchen.

und setzt darin

(666) $$x = \frac{\pi}{2} - \frac{u}{4m};$$

indem er den Grenzübergang ohne weiteres unter dem Integralzeichen vornimmt, erhält er für dieses Argument

(667) $$\lim_{m=\infty} y_m = \frac{1}{2}\int_0^u \frac{\sin u}{u}\,du.$$

Er meint, man könne so durch geeignete Wahl von $u$ jeden Wert zwischen den Grenzen $\pm\frac{\pi}{2}$ erhalten, da dies die Werte sind, die das Integral für $u = \pm\infty$ annimmt. Demgegenüber macht *H. Wilbraham*[1088]) darauf aufmerksam, daß die äußersten Werte, die dieses Integral annehmen kann, vielmehr

(668) $$\pm\int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,du$$

sind, daß also das geometrische Bild der Reihensumme nicht einfach ein aus abwechselnd horizontalen und vertikalen Strecken zusammengesetzter Linienzug sei, sondern daß die vertikalen Strecken beiderseits um ein endliches Stück zu verlängern sind.

Wenn *J. R. Young*[1089]) behauptet, die Gleichung (111) sei noch für $x = \pi$ und die Gleichung (410) noch für $x = \frac{\pi}{2}$ richtig, so meint er dabei doch nur: wenn $x$ sich der betr. Grenze unbegrenzt nähert.

*O. Bonnet* überträgt das Hauptresultat dieser Nummer auf Potenzreihen komplexen Arguments. Aus seinen Untersuchungen ergibt

---

Analog, nur kürzer, behandelt er auch die Reihe (111). Auch bei *A. Cauchy*, Paris C. R. 36 (1853), p. 457 = Oeuvres (1) 12, p. 33, findet sich die Bemerkung (1091), daß die Summe der in der Reihe (110) auf das $n$te noch folgenden Glieder für $x = \frac{1}{n}$ näherungsweise durch das Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sin u}{u}\,du \sim 0{,}6244$$

sich darstellen läßt.

1088) Ib. p. 198. Er erläutert die Verhältnisse durch Figuren. Übrigens ist bei ihm weder bewiesen, daß man (665) durch (667) ersetzen darf, noch daß man durch Annahme anderer Beziehungen zwischen $x$ und $n$ keine andern Werte erhalten könne; überhaupt liegt der ganzen Untersuchung kein scharfer Grenzbegriff zugrunde.

1089) Phil. mag. 27 (1845), p. 91 Dubl. proc. $3_2$ (1846), p. 46. Cambr. trans. $8_4$ (1847), p. 437.

sich[1090]): wenn die Werte einer solchen Funktion in einem Punkt $z_0$ des Konvergenzkreises einen endlichen Stetigkeitssprung aufweisen, so nähert sich die Funktion dem arithmetischen Mittel aus diesen beiden Werten, wenn die Variable sich dem Punkte $z$ auf einem Radius nähert. Auch den Fall untersucht er, daß die zu entwickelnde Funktion in einem Punkte des Konvergenzkreises so unendlich wird, daß

$$(669) \qquad \lim_{z=z_0} (z - z_0)^{1-\delta} f(z)$$

für einen positiven Wert von $\delta$ existiert; er zeigt, daß auch in diesem Falle die Entwicklung in allen übrigen Punkten des Konvergenzkreises noch konvergiert[1091]).

## III. Unharmonische trigonometrische Reihen.

**43. Erste Beispiele solcher Reihen.** Die Methode der ausgezeichneten Lösungen zur Integration partieller Differentialgleichungen (Nr. 69) führt auch dann nicht immer auf die im bisherigen allein besprochenen „harmonischen“ trigonometrischen Reihen, wenn der eine Faktor der Elementarlösung ein Cosinus oder Sinus ist; das ist vielmehr nur dann der Fall, wenn die zu erfüllenden Grenzbedingungen die einfache Form $u = 0$ oder $\partial u / \partial x = 0$ haben. Treten kompliziertere Grenzbedingungen oder neben den Grenzbedingungen für einzelne Innenwerte des Intervalls (bei den Anwendungen auf physikalische Probleme an Stellen, an welchen die Materialkonstanten sich sprungweise ändern) noch „Übergangsbedingungen“ auf, so erhält man zur Bestimmung der zulässigen Frequenzzahlen bzw. Abklingungskonstanten kompliziertere determinierende Gleichungen. Derartige Gleichungen sind bereits im Laufe des 18. Jahrhunderts mehrfach aufgestellt, zum Teil auch diskutiert worden. So erhalten etwa gleichzeitig *D. Bernoulli*[1092]) für die Schwingungszahlen einer Orgelpfeife „à che-

1090) Brux. mém. cour. in 4° 23 (1848/50), p. 103. Der Satz ist bei Bonnet nicht so bestimmt ausgesprochen; er redet ganz allgemein von dem Wert der Reihe für $z = z_0$.

1091) p. 104. Für den Fall, daß der Grenzwert (669) für keinen positiven Wert von $\delta$ existiert, aber für $\delta = 0$ gleich Null ist, zieht Bonnet p. 105 noch logarithmische Kriterien herbei.

1092) Paris mém. 1762 [64], p. 466. *S. D. Poisson* (Paris mém. 2 (1817) [19], p. 361) — der übrigens glaubt, man müsse das Problem als ein solches erzwungener Schwingungen behandeln, und deshalb die Eigenschwingungen gerade ausschließt — kommt bei anderen Annahmen über die Grenzbedingungen auf die Form:

$$\operatorname{tg} a\lambda \cdot \cot b\lambda = c.$$

Weitere Ausführungen über solche Orgelpfeifen bei *J. M. C. Duhamel*, J. de minée“ eine Gleichung der Form

$$\text{(670)} \qquad \operatorname{tg} a\lambda \,.\, \operatorname{tg} b\lambda = c,$$

und *L. Euler*[1093]) für die einer aus zwei verschiedenen Stücken zusammengesetzten Saite die folgende:

$$\text{(671)} \qquad \alpha \operatorname{tg} \frac{\lambda a}{\alpha} + \beta \operatorname{tg} \frac{\lambda b}{\beta} = 0,$$

die sich in dem später von *D. Bernoulli*[1094]) besprochenen Grenzfall $\beta = 0$ auf

$$\text{(672)} \qquad \alpha \operatorname{tg} \frac{\lambda a}{\alpha} + \lambda b = 0$$

reduziert; *Euler* noch[1095]) für eine Saite, deren Konstante in bestimmter Weise vom Ort abhängen:

$$\text{(673)} \qquad \operatorname{tg} \lambda (k - h) = \frac{(k-h)\lambda}{1 + hk\lambda^2},$$

die für $h = 0$ wieder in (672) übergeht. Die Frage aber, ob und wie man aus den so gefundenen Partikularlösungen die allgemeinen Lösungen durch Superposition zusammensetzen, also ob man eine willkürliche Funktion von $x$ nach den so erhaltenen Funktionen $\sin \lambda x$ oder $\cos \lambda x$ entwickeln könne, ist damals noch nicht berührt worden. Erst *J. J. Fourier* hat für das Problem der Abkühlung einer Kugel, in der die Temperatur von den Polarwinkeln unabhängig ist, nicht

---

math. 15 (1850), p. 197; er findet, bei *D. Bernoulli* kompensierten sich zwei Versehen.

1093) Petrop. n. comm. 9 (1762/63), p. 285.

1094) Ib. 16 (1771), p. 264. — Für die Diskussion dieser Gleichung (durch Untersuchung der Schnittpunkte der Geraden $\mu = -\lambda b$ mit der Tangenslinie $\mu = \alpha \operatorname{tg} \frac{\lambda a}{\alpha}$) sind die beiden Fälle

$$\frac{b}{a} > 0, \qquad \frac{b}{a} < 0$$

zu unterscheiden; außer der jedesmal vorhandenen Wurzel $\lambda = 0$, die für $b = a$ eine dreifache ist, hat die Gleichung im ersteren Fall in jedem der Intervalle $\left(k\pi - \frac{\pi}{2} \cdot\cdot k\pi\right)$ eine Wurzel (*D. Bernoulli,* Petrop. n. comm. 16, p. 266, für $b = a$), im letzteren in jedem der Intervalle $\left(k\pi \cdot\cdot k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ für $|b| < |a|$ mit Ausnahme des ersten. (*Euler,* introductio in analysin infin. 2, Laus. 1748, p. 318, für $b = -a$.) — Sind so die Wurzeln separiert, so kann man sich zu ihrer näheren Bestimmung der Reihenumkehrung bedienen, was ebenfalls bereits von den genannten Autoren für die von ihnen behandelten speziellen Fälle durchgeführt worden ist.

1095) Taur. misc. $3_2$ (1762/65), p. 56. Er gibt die Diskussion dieser Gleichung, unter Benutzung der Schnittpunkte der Tangenslinie mit einer Hyperbel.

nur gezeigt[1096]), daß $\sin \lambda_n x$ eine ausgezeichnete Lösung ist, wenn $\lambda_n$ eine Wurzel der Gleichung

$$\operatorname{tg} \lambda_n \pi = a \lambda_n \tag{674}$$

ist, in der $a$ eine positive Konstante bedeutet, sondern auch (durch elementare Rechnung) abgeleitet, daß für diese Funktionen das Integraltheorem gilt

$$\int_0^\pi \sin \lambda_m x \sin \lambda_n x \, dx = \begin{cases} 0 \text{ für } \lambda_m \neq \lambda_n, \\ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4\lambda_n} \sin 2\lambda_n \pi \text{ für } \lambda_m = \lambda_n; \end{cases} \tag{675}$$

so daß die Koeffizienten der Entwicklung einer Funktion nach diesen ausgezeichneten Lösungen durch die Methode der gliedweisen Integration sich bestimmen. Ebenso zeigt er[1097]), daß für das Problem

---

1096) Paris mém. 4 (1819/20[24]) (Preisschrift von 1811), p. 408; théorie de la chaleur Nr. 291, 424 = Oeuvres 1, p. 313, 513. Ohne Beweis auch bull. philomat. (1820), p. 64 = Ann. chim. phys. 13 (1820), p. 427 = Oeuvres 2, p. 279. Die Separation der Wurzeln nimmt er wie Euler[1094]) vor; zu ihrer Berechnung bedient er sich dann der Iteration in der Form

$$\lambda_n^{(k+1)} \pi = a \operatorname{arc} \operatorname{tg} \lambda_n^{(k)},$$

in der sie, wie aus der Figur erhellt, konvergiert, während $\lambda_n^{(k+1)} = a^{-1} \operatorname{tg} \lambda_n^{(k)} \pi$, divergiert. Den Beweis für die Möglichkeit der Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach diesen $\sin \lambda_n x$ scheint Fourier zuerst als durch das Gelingen der Koeffizientenbestimmung bereits genügend erbracht angesehen zu haben; nachträglich (théorie Nr. 424 = Oeuvres 1, p. 517) beruft er sich noch auf den Grenzübergang von der entsprechenden Interpolationsformel her, doch ohne dessen Zulässigkeit zu begründen. Übrigens bemerkt er: wenn man ein $\sin \lambda_n x$ aus ihrer Folge weglassen wollte, würde man jedenfalls nur solche Funktionen entwickeln können, für die $\int f(x) \sin \lambda_n x \, dx = 0$ wäre (Nr. 425, p. 519). — Dieselbe Entwicklung bei demselben Problem auch bei *S. D. Poisson,* J. éc. polyt. 19 (1823), p. 113; beim Problem des „Bordaschen Pendels" conn. des temps pour 1833[30], p. 45. Im Falle $a = \pi$ hat die Gleichung (674) $\lambda_0 = 0$ zur dreifachen Wurzel; Poisson bemerkt an der ersteren Stelle, die Entwicklung gelte auch in diesem Fall, nur sei dem zu $\lambda_0 = 0$ gehörenden Glied der Faktor $\frac{3}{2}$ beizufügen. Fourier's Verfahren ist reproduziert von *Ph. Kelland,* theory of heat, Cambr. 1837, p. 78. *O. Bonnet* (Brux. mém. cour. in 4°, 25, 1848/50, p. 35) hebt hervor, daß es die Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion nach den $\sin \lambda_n x$ nicht beweist, sondern voraussetzt; vgl. hierzu Note[660]).

1097) Preisschrift p. 458; théorie Nr. 323 = Oeuvres 1, p. 361. — *Poisson,* j. éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 480, hat dieselbe Entwicklung bei dem Problem der Schwingungen eines an einem elastischen Faden aufgehängten Massenpunktes; außerdem noch eine Entwicklung nach den $\sin \lambda_n x$, mit derselben Gleichung für die $\lambda_n$ und analoger Koeffizientenbestimmung. — Die Entwicklung des Textes auch in der Theorie der Schwingungen einer Kettenbrücke bei *C. H. L. Navier,* rapport à M. Becquey et mém. sur les ponds suspendus, Paris 1823, p. 138.

der Erkaltung eines Parallelepipeds die Funktionen $\cos\lambda_n x$ ausgezeichnete Lösungen geben, wenn die $\lambda_n$ der transzendenten Gleichung

$$(676)\qquad \lambda_n \operatorname{tg}\lambda_n\pi = a$$

genügen; und daß für diese Funktionen die Integraltheoreme

$$(677)\qquad \int_0^\pi \cos\lambda_m x\cos\lambda_n x\,dx = \begin{cases} 0 \text{ für } \lambda_m \neq \lambda_n, \\ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4\lambda_n}\sin 2\lambda_n\pi \text{ für } \lambda_m = \lambda_n \end{cases}$$

gelten.

Die Frage der Wärmeleitung in einem Stabe unter den Grenzbedingungen

$$(678)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = h_1 u \text{ für } x = -1,\quad \frac{\partial u}{\partial x} = -h_2 u \text{ für } x = 1$$

führt, wie *S. D. Poisson* ursprünglich[1098]) durch die in Nr. 84 zu besprechende Methode gefunden und später[1099]) durch die hier besprochene verifiziert hat, auf eine Entwicklung nach den Funktionen

$$(679)\qquad (h_2 - h_1)\cos\lambda_n \sin\lambda_n x - [2\lambda_n\cos\lambda_n + (h_1 + h_2)\sin\lambda_n]\cos\lambda_n x$$

mit der determinierenden Gleichung:

$$(680)\qquad (h_1h_2 - \lambda^2)\sin 2\lambda + (h_1 + h_2)\lambda\cos 2\lambda = 0.$$

Man erhält etwas einfachere Formeln, wenn man mit *J. M. C. Duhamel*[1100]) den Nullpunkt in den einen Endpunkt des Stabes verlegt, also die Bedingungen (678) durch

$$(681)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 2h_1 u \text{ für } x = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial x} = -2h_2 u \text{ für } x = 1$$

ersetzt; die determinierende Gleichung bleibt dieselbe, aber die Eigenfunktionen können einfacher

$$(682)\qquad 2h_1\sin\lambda_n x + \lambda_n\cos\lambda_n x$$

geschrieben werden. Im Falle $h_1 = h_2$, der von *G. G. Stokes*[1101]) direkt untersucht ist, zerfällt die determinierende Gleichung (680) in die beiden:

$$(683)\qquad h\operatorname{tg}\lambda + \lambda = 0,\quad \lambda\operatorname{tg}\lambda + h = 0;$$

---

1098) J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 34.

1099) Chaleur, p. 265, p. 266 führt er noch den Grenzübergang zu dem Falle aus, daß eine der Größen $h$ unendlich wird; der dann auftretende Eigenwert $\lambda = 0$ erfordert dabei eine besondere Überlegung.

1100) J. Éc. polyt. cah. 22 (1833), p. 30 (von 1829/30).

1101) Cambr. Trans. $8_5$ (1849) (von 1847) = Papers 1, p. 291.

die zu ihnen gehörenden Eigenfunktionen können bzw.

(684) $$\sin \lambda_n x, \quad \cos \lambda_n x$$

geschrieben werden.

Verwandt damit ist das Problem der Wärmebewegung in einer Kugelschale, ohne Wärmeabgabe nach innen und mit Strahlung nach außen, das *Poisson* auf Entwicklungen nach den Eigenfunktionen

(685) $$\begin{aligned} rX_n = (1 - pR)r_0^2 \sin(\lambda_n R - \lambda_n x) - R^2 \sin(\lambda_n x - \lambda_n r_0) \\ - r_0 R\lambda_n[R\cos(\lambda_n x - \lambda_n r_0) + r_0 \cos(\lambda_n R - \lambda_n x)] \end{aligned}$$

mit der determinierenden Gleichung

(686) $$\begin{cases} (\lambda^2 r_0 R + 1 - pR)\sin(\lambda R - \lambda r_0) \\ = (R - r_0 + pr_0 R)\lambda \cos(\lambda R - \lambda r_0) \end{cases}$$

führt[1102]).

Die Frage der radialen Schwingungen einer elastischen festen Kugel führt *S. D. Poisson*[1103]) auf eine Entwicklung einer willkürlichen Funktion in eine Reihe der Form

(687) $$f(x) = \sum A_n(\lambda_n x \cos \lambda_n x - \sin \lambda_n x),$$

wobei die $\lambda_n$ einer Gleichung[1104])

(688) $$(4 - 3\lambda^2)\sin\lambda - 4\lambda\cos\lambda$$

zu genügen haben. Die erforderlichen Integraltheoreme leitet er zunächst auf dem unten[1111]) erwähnten Umwege, nachher[1105]) durch direkte Rechnung ab.

Unharmonische trigonometrische Reihen treten auch bei den Untersuchungen der Schwingungen eines kontinuierlichen Systems auf,

---

1102) Chaleur, p. 287. Im Falle $p = 0$ hat die determinierende Gleichung $\lambda = 0$ zur dreifachen Wurzel; ihr entspricht eine von 0 verschiedene Konstante als Eigenfunktion (p. 288). Die Annahme $r_0 = 0$ führt auf die Formeln (674), (675) zurück (p. 289); p. 291 behandelt er diese auch noch einmal direkt. Übrigens gehen, was Poisson nicht bemerkt zu haben scheint, die Gleichung (686) in (680) und die Eigenfunktionen (685) bis auf irrelevante Faktoren in (679), bzw. (682) über, wenn man

$$2h_1 = \frac{(R - r_0)(pR - 1)}{R}, \quad 2h_2 = \frac{R - r_0}{r_0}$$

nimmt und

$$\lambda(R - r_0) \text{ durch } 2\lambda, \quad x \text{ durch } \frac{R + r_0}{2} + \frac{R - r_0}{2}x \text{ bzw. } r_0 + (R - r_0)x$$

ersetzt; nur ist zu beachten, daß dabei $h$ auch negativ ausfallen kann.

1103) Paris mém. 8 (1829), p. 411.

1104) Einige numerische Angaben über die Wurzeln dieser Gleichung noch p. 420.

1105) p. 416.

das an einem oder mehreren Punkten mit einem System einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden gekoppelt ist. So stellt *S. D. Poisson*[1106]) das Problem der sog. sympathischen Pendel durch das Gleichungssystem dar:

$$(689)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ für } -1 < x < 1; \\ a\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \theta = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2h\theta \text{ für } x = -1; \\ b\dfrac{d^2\psi}{dt^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \psi = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2k\psi \text{ für } x = 1; \\ u = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} = \varphi_1(x), \quad \theta = h_1, \quad \psi = k_1, \quad \dfrac{d\theta}{dt} = \alpha, \\ \qquad \dfrac{d\psi}{dt} = \beta \text{ für } t = 0 \end{cases}$$

und integriert sie — von Ausnahmefällen abgesehen[1107]) — durch den Ansatz:

$$(690)\begin{cases} u = \sum (C\sin\lambda x + D\cos\lambda x)(L\cos\lambda t + M\sin\lambda t), \\ \theta = \sum \dfrac{\lambda^2}{1 - a\lambda^2}(C\sin\lambda + D\cos\lambda)(L\cos\lambda t + M\sin\lambda t), \\ \psi = \sum \dfrac{\lambda^2}{1 - b\lambda^2}(C\sin\lambda - D\cos\lambda)(L\cos\lambda t + M\sin\lambda t). \end{cases}$$

Die Nebenbedingungen ergeben dann zwei Gleichungen für das Verhältnis $C:D$, Elimination desselben eine determinierende Gleichung der Form[1108]):

$$\operatorname{tg}\lambda = \text{einer gebrochenen Funktion 4. Grades von } \lambda.$$

Er leitet die zur Bestimmung der Koeffizienten der Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den hier auftretenden Eigenfunktionen erforderlichen Integralsätze ab.

Weiter ist *S. D. Poisson*[1109]) durch das Problem der kleinen

---

1106) Conn. des temps pour 1833[30], add. p. 3; Auszug Bull. Férussac 15 (183), p. 269.

1107) Diese Ausnahmefälle sind bei ihm nur analytisch charakterisiert; es muß sich um Fälle der Konsonanz des ganzen Systems mit einem der Teilsysteme handeln.

1108) Angaben über die näherungsweise Auflösung dieser Gleichung p. 30, 34.

1109) J. Éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 460. Poisson bespricht auch den Übergang von diesem Fall zu dem der harmonischen Sinusreihe. Er kann in doppelter Weise erreicht werden: einmal durch die Annahme $c = 1$, was keine Schwierigkeit bietet (p. 463); dann aber auch durch die Annahme $a = b$. Bei dieser

Schwingungen einer gestückelten Saite auf die Aufgabe geführt worden, simultan zwei Funktionen von zwei verschiedenen Veränderlichen in Reihen der Form

$$(691)\qquad \begin{cases} y_1 = \sum B_n \sin\lambda_n b \sin\lambda_n x, & 0 < x < a, \\ y_2 = \sum B_n \sin\lambda_n a \sin\lambda_n x & 0 < x < b, \end{cases}$$

zu entwickeln, wobei die $\lambda_n$ der Gleichung

$$(692)\qquad \sin\lambda_n b \cos\lambda_n a + c\cos\lambda_n b \sin\lambda_n a = 0$$

zu genügen haben. Die Koeffizienten berechnen sich dabei mit Hilfe der Gleichungen:

$$(693)\qquad \sin\lambda_n b \sin\lambda_m b \int_0^a \sin\lambda_n\alpha \sin\lambda_m\alpha\, d\alpha$$

$$+ c\sin\lambda_m\alpha \sin\lambda_m a \int_0^b \sin\lambda_n\alpha \sin\lambda_m\alpha\, d\alpha$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ für } \lambda_m \neq \lambda_n \\ \frac{1}{2}\sin\lambda_n a \sin\lambda_n b\{(a+bc)\sin\lambda_n a \sin\lambda_n b \\ \qquad\qquad -(b+ac)\cos\lambda_n a \cos\lambda_n b\} \text{ für } \lambda_m = \lambda_n. \end{cases}$$

Bei dem ähnlichen Problem der Wärmeleitung in einer aus Kern und Schale zusammengesetzten Kugel bedient sich *Poisson*[1110]) der Methode Fouriers. Es handelt sich zunächst darum, die Elementarlösungen

$$(693)\qquad \begin{cases} u_n = A_n \cos\lambda_n x + B_n \sin\lambda_n x, & (0 < x < l) \\ u_n^{(1)} = A_n^{(1)} \cos\lambda_n x + B_n^{(1)} \sin\lambda_n x, & (l < x < l + l_1) \end{cases}$$

---

letzteren würde sich zunächst $y_1 = 0$ für $x = a$, $y_2 = 0$ für $x = b$ ergeben; Poisson zeigt (p. 469), wie man das vermeiden kann, wenn man beobachtet, daß beim Grenzübergang das Verhältnis $\sin\lambda_n a : \sin\lambda_n b$ nicht notwendig gleich 1 wird, sondern wenigstens für einen Teil der $\lambda_n$ zunächst in der Form 0/0 erscheint, und seinen Grenzwert durch Entwicklung nach Potenzen von $b - a$ bestimmt. Er erhält so Zusatzglieder, die überall null sind, außer für $x = a$, bzw. $x = b$, und dort gerade die gewünschten Korrektionen ergeben. Etwas anders p. 489.

Er erhält die Funktionen, nach denen entwickelt werden soll, nicht als den Grenzbedingungen genügende Elementarlösungen der Differentialgleichung selbst, sondern als Lösungen derjenigen Differenzengleichung, auf die man geführt wird, wenn man die gegebenen Funktionen den Grenzbedingungen gemäß nach der in Nr. 84 zu erwähnenden Methode über ihren ursprünglichen Definitionsbereich hinaus fortsetzen will.

1110) J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 374; reproduziert, mit ausführlicher Diskussion der Grenzfälle, chaleur p. 300.

den Bedingungen

$$
(694)\qquad
\begin{gathered}
u = 0 \text{ für } x = 0,\\
\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \left(h - \frac{1}{l + l_1}\right) u^{(1)} = 0 \text{ für } x = l + l_1,\\
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \left(b - \frac{1}{l}\right) u - b u^{(1)} = 0\\
\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} - \left(b_1 + \frac{1}{l}\right) u + b_1 u^{(1)} = 0
\end{aligned}\right\} \text{ für } x = l
\end{gathered}
$$

gemäß zu bestimmen; die erste verlangt $A_n = 0$, die zweite bestimmt $A_n^{(1)}$ und $B_n^{(1)}$ bis auf einen gemeinsamen Faktor $C_n$, die vierte dann $B_n$ und dieses $C_n$ bis auf einen gemeinsamen Faktor $M_n$ und die dritte schließlich die determinierende Gleichung zur Bestimmung der zulässigen Werte von $\lambda$, eine bilineare Beziehung zwischen $\operatorname{tg} \lambda l$ und $\operatorname{tg} \lambda l_1$ mit rationalen ganzen Funktionen zweiten oder dritten Grades von $\lambda$ als Koeffizienten. Sollen dann zwei willkürliche Funktionen in die Reihen

$$
(695)\qquad
\begin{cases}
\varphi(x) = \sum M_n u_n(x), & (0 < x < l)\\
\psi(x) = \sum M_n u_n^{(1)}(x), & (l < x < l + l_1)
\end{cases}
$$

entwickelt werden, so sind noch die Faktoren $M_n$ aus diesen Bedingungen zu bestimmen: die dazu erforderlichen Integralrelationen leitet Poisson diesmal dadurch her, daß er auf die partiellen Differentialgleichungen des Problems zurückgeht und zunächst die Integralrelationen zwischen je zwei ausgezeichneten Lösungen derselben durch partielle Integration ziemlich umständlich ableitet[1111]). Der Grenzübergang zum Falle der homogenen Kugel läßt sich hier auf zwei Arten durchführen: entweder indem man die Übergangskonstanten erst einander gleich und dann unendlich groß werden läßt, oder indem man $l = 0$ nimmt; Poisson führt beides durch[1112]). Außerdem betrachtet er noch[1113]) den Fall eines sehr kleinen $l$; das gibt dieselben Resultate wie bei einer homogenen Kugel, mit einem modifizierten Wert der „äußeren Leitfähigkeit" (nicht einfach dem der Schale). Endlich gibt er noch Näherungswerte für die beiden kleinsten Werte von $\lambda_n$ für den Fall, daß $l$ und $l_1$ beide sehr klein sind[1114]).

---

1111) J. Éc. polyt. cah. 19, p. 377. Desselben umständlichen Verfahrens bedient sich Poisson auch noch später (conn. des temps pour 1836[33], add. p. 14; mécanique 2, p. 379; chaleur p. 263, 292); warum eigentlich? Ebenso *A. A. Cournot,* Théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 415. Vgl. auch [1103]).

1112) J. Éc. polyt. cah. 19, p. 384, 386.

1113) p. 389.

1114) p. 390.

*Lamé* und *Clapeyron*[1115]) zeigen, daß man auch die Koeffizienten der Entwicklung

$$(696) \qquad f(x) = \sum A_n \sin r_n x$$

auch dann durch die Methode der gliedweisen Integration bestimmen kann, wenn unter den $r_n$ die (paarweise konjugiert komplexen) Wurzeln der einen oder der andern der beiden Gleichungen

$$(697) \qquad r \pm \sin r = 0$$

verstanden werden; es ist nämlich dann:

$$(698) \qquad \int_0^1 \sin r_m \alpha \sin(r_n \alpha - r_n) dx = \begin{cases} 0 \text{ für } m \neq n, \\ \frac{1}{2}(\cos r_n \pm 1) \text{ für } m = n. \end{cases}$$

Indem sie die hieraus durch die Substitution von $1/2 - x$ und $1/2 + x$ sich ergebenden Resultate kombinieren, erhalten sie noch:

$$(699) \qquad \begin{cases} f(x) = 2\sum \sin rx \int_0^{1/2} f(\alpha) \sin r\alpha \, d\alpha \qquad (r + \sin r = 0), \\ f(x) = 2\sum \cos rx \int_0^{1/2} f(\alpha) \cos r\alpha \, d\alpha \qquad (r - \sin r = 0). \end{cases}$$

Ebenfalls nicht mehr rein trigonometrisch sind die von *J. Liouville*[1116]) behandelten Entwicklungen nach den Funktionen

$$(700) \quad V(\lambda_n x) = \exp(-\lambda_n x) - \exp\left(-\frac{\lambda_n x}{2}\right)\left(\cos\frac{\lambda_n x\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{\lambda_n x\sqrt{3}}{2}\right),$$

mit der determinierenden Gleichung[1117]):

$$(701) \qquad \sin\left(\frac{\lambda}{2}\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{3\lambda}{2}\right);$$

das zugehörige Integraltheorem lautet hier:

$$(702) \qquad \int_0^1 V(\lambda_n x) V(\lambda_m - \lambda_m x) dx = 0 \text{ für } \lambda_n \neq \lambda_m.$$

Dasselbe gilt von den von *J. M. C. Duhamel*[1118]) behandelten Entwicklungen nach den Funktionen

$$(703) \qquad \lambda_n^2\left(1 + \frac{B^2}{3}\right)\sin\lambda_n x - B^2 x(\sin\lambda_n - \lambda_n\cos\lambda_n)$$

---

1115) J. f. Math. 6 (1830), p. 45. Sie behaupten, man könne die Richtigkeit der Resultate leicht mit Hilfe der Residuensätze beweisen.

1116) J. Éc. polyt. cah. 25 (1837), p. 103; Ankündigung Paris C. R. 3 (1836), p. 572.

1117) Über die Verteilung der Wurzeln dieser Gleichung noch einige Andeutungen J. de math. 3 (1838), p. 571.

1118) J. Éc. polyt. cah. 25 (1837), p. 44.

mit der determinierenden Gleichung

$$(704)\qquad \left(\lambda^2\left(1+\frac{B^2}{3}\right)-B^2\right)\sin\lambda+B^2\lambda\cos\lambda=0.$$

Er erhält sie zunächst nach der in Nr. 84 zu besprechenden Methode und leitet dann[1119]) die Integraltheoreme auch noch aus der Integralgleichung, bzw. linearen Differentialgleichung mit zweitem Glied, ab, der die Entwicklungsfunktionen genügen. *J. Liouville* bemerkt dazu[1120]): weder das eine noch das andere Verfahren gebe einen Beweis, daß die Reihe konvergiert und die zu entwickelnde Funktion wirklich darstellt; er zeigt, wie sich auch diese Entwicklungen unter seine allgemeinen Ansätze subsumieren.

Von wirklich ausgeführten Entwicklungen der in dieser Nummer besprochenen Art wüßte ich nur die Gleichungen zu nennen:

$$(705)\qquad \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} sx$$
$$=(\sin as+s\cos as)\sum\left(\frac{1}{s-r}+b\right)\frac{\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} rx}{[(a+r)\cos ar-ar\sin ar]},$$

die *A. Cauchy*[1121]) aus den Formeln (677) abgeleitet hat; die Summe erstreckt über alle Wurzeln der Gleichung

$$(706)\qquad \operatorname{tg} ar+r=0$$

($b$ bedeutet eine willkürliche Konstante).

**44. Die Realität der Wurzeln der determinierenden Gleichungen.** Daß die zulässigen Werte von $\lambda_n$, also die Wurzeln der determinierenden Gleichungen, alle reell sein müssen, hat man vielfach durch physikalische Überlegungen darzutun sich begnügt: ein komplexes $\lambda_n$ würde für physikalische Probleme, für die das Energiegesetz gilt, eine Lösung mit Schwingungen unbegrenzt ab- oder zunehmender Amplitude geben, und umgekehrt für dissipative Erscheinungen periodische oder doch unbegrenzt oszillierende Lösungen[1122]). Ein derartiger Schluß würde selbst vom Standpunkte des Physikers nur zulässig sein, wenn man

1119) p. 45.

1120) J. de math. 2 (1837), p. 439; Auszug Paris C. R. 5 (1837), p. 598.

1121) Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres 2 (7), p. 381, 385, 389.

1122) Die erste Überlegung, für ein Problem mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden, bei *J. J. Lagrange,* Taur. misc. 3 (1762/65) = Oeuvres 1, p. 538, für solche mit unendlich vielen bei *S. D. Poisson*, j. éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 459, 481, die zweite bei *J. J. Fourier,* théorie Nr. 428 = Oeuvres 1, p. 529; bull. philomat. (1826), p. 178 = bull. Férussac 8 (1827), p. 11 = Paris mém. 7 (1827), p. 605 = Oeuvres 2, p. 132; Paris mém. 8 (1829), p. 614; 10 (1831) p. 144 = Oeuvres 2, p. 175, 207.

überzeugt sein könnte, daß die Differentialgleichungen bereits alle für den Vorgang in Betracht kommenden Umstände berücksichtigen[1123]).

*Fourier* selbst hat schon angedeutet, wie man wenigstens für die einfache Gleichung (674) den Beweis dadurch führen könne, daß man ein komplexes Argument einführt, die trigonometrischen Funktionen desselben durch solche und Exponentialfunktionen reellen Arguments ausdrückt, die Gleichung in ihren reellen und imaginären Teil spaltet und zeigt, daß man auf einen Widerspruch geführt wird, wenn der imaginäre Teil nicht Null ist.[1124]) Ausführlicher gibt er einen anderen Beweisansatz: wird mit $\varphi_m(\lambda)$ die rationale ganze Funktion

$$\varphi_m(\lambda) = \lambda \prod_{\mu=1}^{m} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2 \pi^2}\right) \tag{707}$$

bezeichnet, so folgt aus algebraischen Sätzen, daß für $0 < c < 1$ die Gleichung

$$c\varphi_m(\lambda) - \lambda^2 \varphi_m'(\lambda) = 0 \tag{708}$$

nur reelle Wurzeln hat. Da aus dieser durch Grenzübergang zu $m = \infty$ die Gleichung (674) entsteht, so glaubt sich Fourier ohne weiteres berechtigt, das Resultat auf die letztere zu übertragen[1125]).

*Poisson* dagegen hat es ursprünglich[1126]) als einen Vorzug seiner Methode (der Ableitung der Lösungen von partiellen Differentialgleichungen durch Reihen aus ihren Lösungen durch Integrale (Nr. **84**)) betrachtet, daß man bei ihr nicht nötig habe, die Realität der Wur-

1123) Gelegentlich hat diese Schlußweise in der Tat zu falschen Resultaten verführt: so glaubte z. B. Brook *Taylor* (Lond. trans. 28 (1713), p. 26; methodus incrementorum, Lond. 1715 u. 1717, p. 88) aus dem Umstande, daß Oberschwingungen einer Saite gegenüber dem Grundton rasch abklingen, schließen zu dürfen, daß man sich auch bei der mathematischen Behandlung nur mit der Aufsuchung des letzteren zu beschäftigen brauche; das würde aber nur richtig sein, wenn die Reibung im Ansatz berücksichtigt wäre, was bei Taylor keineswegs der Fall ist.

1124) Paris mém. 4 (1819/20)[24] (Preisschrift von 1811) p. 427; théorie Nr. 305 = Oeuvres 1, p. 329. *A. Cauchy* [1129]) und in anderer Weise *G. Darboux* in einer Anmerkung zu Fourier führen diese Andeutung aus.

1125) Dieser Grenzübergang kann mit Hilfe des allgemeinen von *A. Hurwitz* (math. Ann. 33 (1889), p. 249) gegebenen Satzes über die Nullstellen von Grenzfunktionen ohne weiteres gerechtfertigt werden. — Wenn *Fourier* p. 331 noch hinzufügt: für die Anwendung auf die Wärmeleitungsprobleme sei es nicht nötig, daß alle Wurzeln reell seien, da man mit Hilfe der zu den reellen Wurzeln gehörenden Elementarlösungen einen beliebigen Anfangszustand darstellen könne, so übersieht er, daß er gerade diese letztere Behauptung eben nicht bewiesen hatte.

1126) J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 36, 298, 381; ebenso *J. Liouville,* j. de math. 1, 1836, p. 31.

zeln der determinierenden Gleichung zu beweisen; es ergebe sich dabei aus der Ableitung selbst, daß man jedenfalls nur ihre reellen Wurzeln zu benutzen brauche. Er gibt auch Beispiele von transzendenten Funktionen, wie $\exp z + b \exp(az)$, für die Fouriers Voraussetzungen erfüllt sind und die doch keine oder nur eine reelle Nullstelle und unendlich viele komplexe haben[1127]. Später[1128] gibt er selbst einen Beweis dafür, daß alle Wurzeln der in Betracht kommenden Gleichungen reell sind: zu konjugiert komplexen Wurzeln würden konjugiert komplexe Eigenfunktionen gehören, und die Anwendung des Integraltheorems auf zwei solche würde zu dem Widerspruch führen, daß das Integral einer wesentlich positiven Größe Null sein müßte.

Inzwischen hatte *Cauchy* eine Anzahl transzendenter Gleichungen durch Trennung des Reellen vom Imaginären auf die Realität ihrer Wurzeln untersucht und u. a. folgende Resultate erhalten:

Die Gleichung $az = \operatorname{tg} z$ hat zwei komplexe Wurzeln oder keine, je nachdem $a$ dem Intervall $(0 \cdots 1)$ angehört oder nicht[1129].

Die Gleichung $\operatorname{tg} z = az + b$ hat für $a \leqq 0$ keine komplexe Wurzel, für $a > 0$ wenigstens keine, deren reeller Bestandteil absolut genommen $> |b/(2a)|$ wäre[1130].

Die Gleichung $\operatorname{tg} z = az/(z^2 + b)$ hat keine komplexen Wurzeln, wenn $a > 0$, $b < a$ ist[1131].

Alle Wurzeln der Gleichung $\operatorname{tg} z = a \,\mathfrak{Tg}\, cz$ sind entweder reell oder rein imaginär[1132].

---

1127) j. éc. polyt. cah. 19, p. 383; bull. philomat. 11 (1829), p. 167; Paris mém. 9 (1830), p. 92; einige Andeutungen auch 8 (1829), p. 367. *Fouriers* Ausrede Paris mém. 8 (1829); 10 (1831) (von 1829) = Oeuvres 2, p. 176, 187; bull. Férussac 11 (1829), p. 27: „die reellen Wurzeln seien ins Unendliche gerückt", widerlegt nichts. — *G. Peacock* (Brit. assoc. rep. 3, für 1833, p. 344) bespricht diese Diskussion, ohne selbst zu einer entschiedenen Stellungnahme zu kommen.

1128) Bull. philomat. (1826), p. 147; méc. 2 (1833), p. 383; chaleur (1335), p. 178; für einen weniger einfachen Fall conn. des temps pour 1833 [30], add. p. 15. Eine ergänzende Bemerkung noch Paris mém. 10 (1831), p. 330: der Schluß versagt, wenn zu einem komplexen Eigenwert eine identisch verschwindende Eigenfunktion gehört; aber dann braucht man einen solchen Wert überhaupt nicht zu berücksichtigen. — Auch *A. A. Cournot*, théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 417 reproduziert Poisson's Beweis.

1129) Exerc. de math. 1 (1826) = Oeuvres (2) 6, p. 358. $a$, $b$, $c$ bedeuten hier reelle Konstante, $f(z)$ eine Funktion, die für reelle Argumentwerte selbst reell ist.

1130) p. 361.

1131) p. 366.

1132) p. 368.

Die Gleichung $\operatorname{tg} z = f(z)$ hat jedenfalls unendlich viele reelle Wurzeln, wenn die Funktion $f(z)$ für hinlänglich große reelle $z$ endlich [er meint in der Tat nur finie, nicht bornée] bleibt[1133]). Dasselbe gilt für die Gleichung $\operatorname{tg}(\varphi(z)) - f(z)$, wenn $\lim\limits_{z=\infty} \varphi(z) = \infty$[1134]).

Ein sich anschließender Aufsatz[1135]) gibt noch einige Auskunft über Methoden zur Berechnung der Wurzeln solcher Gleichungen, durch Darstellung ihrer reziproken Potenzsummen als Residuensummen und Anwendung der Methode von *D. Bernoulli* (I B 3a, *Runge*, Nr. 13, p. 439).

*Fourier* spricht dann[1136]) davon, daß ein von ihm aufgestellter algebraischer Satz auch für transzendente Funktionen [er meint wohl nur: ganze transzendente Funktionen] Gültigkeit behalte. Dieser Satz behauptet, man könne jedem Paare komplexer Wurzeln einen bestimmten reellen Wert zuordnen, der [in der Folge der Ableitungen der Funktion?] „fait disparaître deux variations de signes à la fois". Es ist aber bis jetzt nicht einmal für Polynome gelungen, anzugeben, wie dieser Satz zu präzisieren sein würde, wenn er richtig werden soll[1137]).

In etwas modifizierter Form erscheint der Poissonsche Beweis für die Realität der Wurzeln bei *J. Liouville*[1138]). Er glaubte bewiesen zu haben[1139]), daß $f(x)$ identisch Null sein müsse, wenn für

1133) p. 369. Daran schließen sich Erörterungen über die etwaigen komplexen Wurzeln solcher Gleichungen, aus denen jedenfalls so viel hervorgeht, daß Poissons Gleichung (680) keine komplexen Wurzeln hat, wenn die Konstanten die durch ihre physikalische Bedeutung verlangten Vorzeichen haben (p. 381).

1134) p. 389. Die p. 395 besprochene Gleichungsform $\exp(i\varphi(z)) = f(z)$ ist davon nicht wesentlich verschieden.

1135) p. 414.

1136) Bull. philomat. (1826), p. 177 = Paris mém. 7 (1827) = bull. Férussac 8 (1827), p. 10 = Oeuvres 2, p. 130.

1137) Vgl. I B 3a, *Runge*, Nr. 4, p. 412, sowie die Bemerkungen von *A. Loewy* zu seiner Übersetzuug von Fouriers analyse des équations déterminés, Leipz. 1902, p. 254 *Cauchy* hat die exerc. 1 (1826) = Oeuvres (2) 6, p. 400 in Aussicht gestellte Behandlung der Frage m. W. nicht gegeben. Auch *Gauß* hat sich mit ihr beschäftigt, ohne zu einem Resultat zu kommen (Briefwechsel mit Schumacher, 2, p. 328; 3, p. 68, 72 (von 1833 und 1836); Gött. Anz. 1833, p = Werke 5, p. 121).

Die Erläuterungen zu Fouriers algebraischen Untersuchungen von *A. L. Crelle* (J. f. Math. 13 (1835), p. 119) und von *Dirksen* (ib. 14 (1835), p. 318) lassen die Frage unberührt; die von *M. A. Stern* (ib. 22 (1841), p. 49; von 1837) bringen nicht mehr bei als Fourier selbst. Stern gibt p. 29, 45 numerische Werte für die Wurzeln der hier in Rede stehenden Gleichungen, teilweise unter Berichtigung der Angaben seiner Vorgänger.

1138) J. de math. 2 (1837), p. 34.

1139) Ib. 1 (1836), p. 261. Der Beweis beruht darauf, daß mar eine lineare alle $n$

(709) $$\int X_n f(x)\,dx = 0$$

sei. Würde es nun außer den reellen Eigenfunktionen noch eine zu einem komplexen Eigenwerte gehörende geben, so könnte man diese für $f(x)$ nehmen und käme so auf einen Widerspruch.

Andererseits zeigt Liouville auch noch[1140]), in Ausführung eines Gedankens von *Plana*, daß eine Gleichung der Form:

(710) $$\sum \frac{A_n}{\lambda - a_n} = f(\lambda),$$

keine mehrfachen und keine komplexen Wurzeln haben kann, wenn die $a_n$ alle reell, die $A_n$ alle positiv sind und der Faktor von $i$ in $f(\lambda + \mu i)$ dasselbe Zeichen wie $\mu$ hat. Ein Teil der Gleichungen, um die es sich hier handelt, läßt sich auf diese Form bringen.

Nähere Auskunft über die Lage der Wurzeln der determinierenden Gleichungen erhält man aus den allgemeinen Sätzen von *Ch. Sturm*[1141]) über die Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen; für große Werte des Index auch aus *J. Liouville*s asymptotischen Darstellungen solcher Integrale[1142]).

**45. Beweise der Möglichkeit solcher Entwicklungen.** Die Behauptung, daß es möglich sei, eine sog. willkürliche Funktion in solche unharmonische trigonometrische Reihen zu entwickeln, kann zunächst als spezieller Fall allgemeinerer Sätze über Entwicklungen nach Eigenfunktionen aufgefaßt werden. So ergibt sich aus den Abschätzungen von *J. Liouville*, daß die Reihe:

(711) $$\sum A_n X_n \exp.(-\lambda_n t)$$

für $t > 0$ konvergiert[1143]); und daß die Reihe:

(712) $$\sum A_n X_n$$

---

Kombination der $X_n$ mit konstanten Koeffizienten bilden kann, die an beliebig vielen vorgeschriebenen Stellen des betrachteten Intervalls Null wird, setzt aber voraus, daß $f(x)$ nur an einer endlichen Anzahl von Stellen sein Vorzeichen wechseln kann.

1140) Ib. 3 (1838), p. 339; reproduziert von Moigno, Leçons 2, Paris 1844, p. 296.

1141) J. de math. 1 (1836), p. 175, 394.

1142) Ib. 2 (1837), p. 29.

1143) J. de math. 2 (1837), p. 31.

1144) Ib. p. 34. Liouville erwähnt zwar hier nicht, daß er diese Voraussetzung macht, hebt aber p. 419 sowie Paris C. R. 3 (1836), p. 622, hervor, daß sie für den Schluß unentbehrlich sei.

selbst wie $n^{-2}$ konvergiert, wenn die Funktion $f''(x)$ endlich (oder wenigstens integrierbar) ist[1144]). Eine gemeinsame Abhandlung von *Ch. Sturm* und *J. Liouville*[1145]) eröffnet dann noch einen weiteren Weg zu einem Beweise, allerdings unter der unbewiesenen Annahme[1146]), daß die Partialbruchzerlegung gültig sei:

$$\frac{X(\lambda)}{\varpi(\lambda)} = \sum \frac{X_n}{(\lambda - \lambda_n)\varpi'(\lambda_n)}; \tag{713}$$

da nämlich

$$\int_a^b X(\lambda) X_n \, dx = -\frac{X_n(b) \cdot \varpi(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \tag{714}$$

und für $\lambda = \lambda_n$:

$$\int_a^b X_n^2 dx = - X_n(b)\varpi'(\lambda_n) \tag{715}$$

ist, so würde daraus einerseits folgen:

$$\int_a^b X f(x) dx = \sum \frac{\int X X_n dx \cdot \int X_n f dx}{\int X_n^2 dx}, \tag{716}$$

und andererseits würde man denselben Ausdruck auch für $\int F(x) X dx$ finden, wenn mit $F(x)$ die Summe der zunächst formal mit Hilfe der Integraldarstellung der Koeffizienten gebildeten Reihe bezeichnet wird. Wenn Sturm und Liouville daraus weiter folgern, es müsse $F \equiv f$ sein, so setzen sie freilich dabei nicht nur für $f$, was sich noch rechtfertigen ließe, sondern auch für die unbekannte Reihensumme $F$ voraus, daß sie nur an einer endlichen Anzahl von Stellen ihr Vorzeichen wechseln[1147]). Ein dritter Ansatz von *Liouville* allein[1148]) zeigt unter der Annahme, daß $f(x)$ abteilungsweise monoton sei, durch Anwendung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung auf die Abteilungen, daß die Integrale

$$\int f(x) \cos \lambda x dx, \quad \int f(x) \sin \lambda x dx \tag{717}$$

als Funktionen von $\lambda$ betrachtet von der Größenordnung $\lambda^{-1}$ sind;

---

1145) Ib. p. 222; Auszug Paris C. R. 4 (1837), p. 675.

1146) Sie behaupten, man könne es beweisen, geben aber nicht an, wie.

1147) Das moniert bereits *O. Bonnet,* Brux. mém. cour. in 4°, 23 (1848/50), p. 58.

1148) J. de math. 2 (1837), p. 426. Auszüge Paris C. R. 3 (1836), p. 654; 5 (1837), p. 205. Derselbe Gedanke, aber ohne Abschätzung der Größenordnung der Differenz, bei *P. Q. R.* [*W. Thomson* Lord *Kelvin*], Cambr. math. J. 3 (1841), p. 26 = Math. phys. papers 1, p. 8.

daraus ergibt sich dann weiter, daß die Differenz[1149])

$$\int f(x) X_n dx - \int f(x) \cos nx dx \tag{718}$$

von der Ordnung $n^{-2}$ ist, daß also die unharmonische Reihe unter denselben Bedingungen wie die harmonische Entwicklung derselben Funktion konvergiert.

Vorher schon hat *A. Cauchy* seine in Nr. **36** besprochene Methode auch auf unharmonische trigonometrische Entwicklungen angewendet. Er erhält zunächst die Residuenformel[1150]):

$$f(x) = \mathbf{E} \frac{f(r) e^{ar}}{((f(r) e^{ar} - f(b-r) e^{a(b-r)}))} \int_0^1 \tfrac{1}{2}\left(e^{r(x-\alpha)} + e^{(b-r)(x-\alpha)}\right) f(\alpha) d\alpha, \tag{719}$$

in der $f(r)$ eine rationale ganze Funktion bedeutet, $a$ und $b$ reelle Konstante, von denen die erste positiv und $> \frac{1}{2}$ sein muß. Wird $a = 1$, $b = 0$ und

$$f(r) = (A + r)(B + r) \tag{720}$$

genommen, und $r$ durch $ri$ ersetzt, auch, was erlaubt ist, die determinierende Gleichung zur Umformung des Zählers benutzt, so wird erhalten[1151]):

$$\left\{\begin{aligned} f(x) &= \mathbf{E} \frac{r \cos rx + A \sin rx}{(((r^2 - AB) \sin r - (A + B) r \cos r))} \\ &\qquad \int_0^1 [r \cos(r - r\alpha) + B \sin(r - r\alpha)] f(\alpha) d\alpha \\ &= \sum \frac{r \cos rx + A \sin rx}{(r^2 - AB - A - B) \cos r + (A + B + 2) r \sin r} \\ &\qquad \int_0^1 [r \cos(r - r\alpha) + B \sin(r - r\alpha)] f(\alpha) d\alpha \end{aligned}\right. \tag{721}$$

die Summe erstreckt über alle Wurzeln der Gleichung

$$(r^2 - AB) \sin r - (A + B) r \cos r = 0. \tag{722}$$

Andere Annahmen über die noch willkürlichen Größen und Funktionen

---

1149) In einem Ausnahmefalle tritt an die Stelle von $\cos nx$ hier eine andere erste Annäherung.

1150) Mém. sur l'application du calcul des résidus à la Phys. math., Paris 1827, p. 5. Cauchy erwähnt, daß auch *Brisson* und *Ostrogradsky* zu ähnlichen Formeln gelangt seien; davon scheint nichts publiziert zu sein.

1151) Ib. p. 20. Die Formel wird hier nicht direkt abgeleitet, sondern auf dem Umweg über die Integration der partiellen Differentialgleichungen unter gegebenen Grenzbedingungen durch Residuen. In etwas anderer Form Exerc. de math. (2) 7 (1827) = Oeuvres 2 (7), p. 428.

ergeben dis Entwicklung[1152]):

$$(723)\qquad f(x) = \sum \frac{\psi(r, x)}{(\mathfrak{Sin}\, r \cos r - \mathfrak{Cos}\, r \sin r)^2} \int_0^1 \psi(r, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha,$$

$$(724)\qquad \begin{cases} \psi(r, x) = (\mathfrak{Sin}\, r - \sin r)(\mathfrak{Cos}\, rx - \cos rx) \\ \qquad - (\mathfrak{Cos}\, r - \cos r)(\mathfrak{Sin}\, rx - \sin rx), \end{cases}$$

in der die Summe über alle Wurzeln der Gleichung

$$(725)\qquad \mathfrak{Cos}\, r \cos r = 1 \quad \text{oder} \quad \mathrm{tg}^2 \frac{r}{2} = \mathfrak{Tg}^2 \frac{r}{2}$$

zu erstrecken ist.

Das letztgenannte Problem — bei dem übrigens nicht mehr rein trigonometrische Entwicklungen auftreten — behandelt auch *S. D. Poisson*[1153]).

Nachher[1154]) formuliert *Cauchy* noch das allgemeine Problem: eine beliebige Funktion $f(x, r)$ soll für einen allgemeinen Wert des Parameters $r$ nach denjenigen speziellen Funktionen $f(x, \varrho)$ entwickelt werden, in welchen dieser Parameter solche Werte hat, die eine gegebene ganze transzendente Funktion $F(\varrho)$ zu Null machen. Diese Aufgabe wird, sofern die Funktion $F(\varkappa)$ im Unendlichen gewissen Bedingungen[1155]) genügt, durch die Residuenformel

$$(726)\qquad f(x, r) = \mathbf{E} \frac{F(r) - F(\varrho)}{r - \varrho} \frac{f(x, \varrho)}{((F(\varrho)))}$$

gelöst. Damit kann dann auch eine beliebige Funktion von $x$ nach diesen speziellen Funktionen entwickelt werden, sobald es gelingt, sie durch eine Summe $\sum_n f(x, r_n)\varphi(r_n)$, in der die $r_n$ jetzt beliebig sein können; oder auch durch ein Integral $\int f(x, r)\varphi(r)\, dr$ darzustellen[1156]).

---

1152) Mém. von 1827, p. 34; Exerc. 2 = Oeuvres (2) 7 p. 428. An beiden Stellen noch verschiedene andere ähnliche Formeln; u. a. mém. von 1827, p. 45, Reihen, bei denen $\mathfrak{Cos}\, r \cos r = -1$ die determinierende Gleichung ist. Numerische Angaben über die Wurzeln dieser Gleichung noch Exerc. de math. 3 (1828) = Oeuvres (2) 8, p. 317.

1153) Paris mém. 8 (1829), p. 478; p. 485 einige numerische Angaben über die Wurzeln der Gleichung (725). Auch mécanique 2, p. 371, 387.

1154) Paris mém. 7 (1827) = Oeuvres (1) 2, p. 22; in etwas anderer Darstellung Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 366.

1155) Diese Bedingungen sind in der zweiten Darstellung sorgfältiger angegeben als in der ersten.

1156) p. 25 der ersten Darstellung; nicht in der zweiten.

Endlich gibt er noch die Formeln:

$$(727) \qquad f(x) = \frac{1}{a} \sum \frac{r}{r-1} \int\limits_{x_0}^{x} e^{r(x-\alpha)} d\alpha,$$

die Summe erstreckt über alle Wurzeln der Gleichung $e^{ar} = r$[1157]); und[1158])

$$(728) \qquad \frac{\pi}{2} f(x) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} e^{\lambda(x-\alpha)} \cos(\mu x - \mu\alpha) f(\alpha) d\alpha$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^{2\pi} e^{\lambda(x-\alpha)} \cos(\mu x - \mu\alpha) \cos(nx - n\alpha) f(\alpha) d\alpha.$$

Von den an Cauchy anknüpfenden Untersuchungen von *E. H. Dirksen* sind nur Auszüge veröffentlicht[1159]), die nicht erkennen lassen, ob er überhaupt über diesen hinausgelangt ist; namentlich bleibt auch bei ihm die Frage durchaus ungeklärt, ob, wie er behauptet, die Stetigkeit der Funktion $f(x)$ eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß ein Integral wie (625) die für die Weiterführung des Beweises erforderlichen Eigenschaften hat.

## IV. Mehrfache trigonometrische Reihen.

**46. Mehrfache trigonometrische Reihen.** Die Darstellung der Koeffizienten der Reihenentwicklung:

$$(729) \quad f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{ A_{m,n} \cos(mx + ny) + B_{m,n} \sin(mx + ny) \}$$

durch die bestimmten Doppelintegrale

$$(730) \qquad \left.\begin{matrix} A_{m,n} \\ B_{m,n} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\xi, \eta) \left\{\begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\right\} (m\xi + n\eta) d\xi\, d\eta$$

findet sich als naheliegende Konsequenz der Formeln (383) bei *Fr. W. Bessel*[1160]), *C. H. L. Navier*[1161]), *S. D. Poisson*[1162]), *P. A. Hansen*[1163]),

---

1157) Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 400, 405, 413.

1158) Ib. p. 412.

1159) Berl. Ber. 1842, p. 20; 1843, p. 83. Wie weit er Cauchy's Untersuchungen gekannt hat, ist aus seinen hier wie bei ihm gewöhnlich ungenügenden Zitaten nicht zu erkennen.

1160) Berl. Abhandl. 1820/21 = ges. Abh. 3, p. 362. — Bei *Fourier* kommen von mehrfachen trigonometrischen Reihen nur unharmonische vor und zwar nur der spezielle Fall, daß eine Funktion entwickelt werden soll, die ein Produkt einer Funktion von $x$ allein und einer Funktion von $y$ allein ist, wo dann jeder

*G. de Pontécoulant*[1164]); der Fall, daß nur Cosinusglieder auftreten, auch bei *G. Frullani*[1165]).

*C. G. J. Jacobi*[1166]) gibt die zu (374) analoge Umformung:

$$(731)\quad \int_0^\pi\int_0^\pi f(\cos\alpha,\cos\beta)\cos m\alpha\cos n\beta\, d\alpha\, d\beta$$

$$= \frac{2^{m+n}m!\,n!}{(2m)!\,(2n!)}\int_a^\pi\int_a^\pi \frac{\partial^{m+n}f(\cos\alpha,\cos\beta)}{(\partial\cos\alpha)^m(\partial\cos\beta)^n}\sin^{2m}\alpha\sin^{2n}\beta\, d\alpha\, d\beta.$$

In der komplexen Form:

$$(732)\qquad f(x,y)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_{mn}e^{(mx+ny)i},$$

$$(733)\qquad C_{mn}=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x,y)e^{-(mx+ny)i}$$

erscheint die Darstellung (730) bei *S. P. de Laplace*[1167]) und bei *A. Cauchy*[1168]).

Von speziellen Reihen dieser Art finden sich hier und da einzelne angegeben, meist einfache Konsequenzen der bekannten Entwicklungen von Funktionen einer Variabeln; so benutzt z. B. *Navier*[1170]) die [konvergente] Entwicklung:

$$(734)\qquad \frac{\pi^2}{4}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin mx\sin ny}{mn}$$

und die [divergente]

$$(735)\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin mx\sin ny\sin m\alpha\sin n\beta=\begin{cases}\infty \text{ für } x=\alpha,\ y=\beta\\ 0 \text{ überall sonst.}\end{cases}$$

---

Koeffizient ein Produkt von zwei Faktoren wird, deren einer nur von $m$, der andere nur von $n$ abhängt (Paris mém. 4 (1819/20[24]), p. 458; théorie de la chaleur Nr. 322 = Oeuvres 1, p. 361).

1161) Ann. chim. phys. 19 (1821), p. 244; bull. philomat. 1822, p. 77.

1162) J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 61, 138; connaiss. des temps für 1836[33], add., p. 21; théorie de la chaleur, p. 209.

1163) Astr. Nachr. 7 (1829), col. 473.

1164) Traité du système du monde 3, Paris 1834, p. 113.

1165) Mem. soc. ital. 18 (1820), p. 464 (von 1818).

1166) J. f. Math. 15 (1836) = Werke 6, p. 103.

1167) Paris mém. $11_1$ (1810)[11] = Oeuvres 12, p. 404.

1168) Paris C. R. 11 (1840), p. 463 = Oeuvres (1) 5, p. 297.

1170) Bull. philom. 1823, p. 97. Die zweite Behauptung würde selbst dann noch einer näheren Präzisierung und Rechtfertigung bedürfen, wenn man die Zulässigkeit der Benutzung der Gleichung (25) zugeben wollte.

Eine besondere Klasse von mehrfachen trigonometrischen Reihen tritt bei *G. Lamé* auf[1171]); nämlich:

$$\sum A_{m n p} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (m(a_1 x + b_1 y) + n(a_2 x + b_2 y) + p(a_3 x + b_3 y)), \tag{736}$$

wobei die $a$, $b$ gegebene (übrigens nicht alle willkürliche) Konstante bedeuten und die Summation über alle Werte der ganzen Zahlen $m$, $n$, $p$ zu erstrecken ist, die der Relation

$$m + n + p = 0$$

genügen. Die zur Koeffizientenbestimmung erforderlichen Integraltheoreme erscheinen bei ihm als spezielle Fälle eines allgemeinen Satzes, der mit dem sog. Greenschen Satze äquivalent ist.

**47. Rechnen mit mehrfachen trigonometrischen Reihen.** Ausgearbeitete Anweisungen für die Ausführung der Multiplikation zweier doppelter trigonometrischer Reihen gibt *P. A. Hansen*[1172]).

Was die Integration doppelter trigonometrischer Reihen betrifft, so gibt *S. D. Poisson*[1173]) Vorschriften, wie man aus der Entwicklung der Störungsfunktion nach den Funktionen der Vielfachen der exzentrischen Anomalien die Entwicklung ihres nach der Zeit genommenen Integrals nach denselben Funktionen mit Hilfe der Gleichungen

$$du = \frac{n\,dt}{1 - \varepsilon \cos u}, \quad du_1 = \frac{n_1\,dt}{1 - \varepsilon_1 \cos u_1} \tag{737}$$

gewinnen kann, indem man durch Heraufmultiplizieren mit den Nennern lineare Differentialgleichungen für die Koeffizienten der letzteren Entwicklung erhält, in welchen Verbindungen der Koeffizienten der ersteren als zweite Glieder auftreten. Er will diese Gleichungen durch Entwicklungen nach Potenzen von $\varepsilon$ und $\varepsilon_1$ integrieren.

*S. S. Greatheeds* Verfahren[375]) zur Ableitung der Koeffizienten einer trigonometrischen Entwicklung aus denjenigen einer andern ist von *A. Cayley*[1174]) auf mehrfache Reihen übertragen worden.

**48. Mehrfache unharmonische trigonometrische Reihen.** Solche treten bei *Fourier*[1175]), bei *Poisson*[1176]), bei *Navier*[1177]), bei *Cauchy*[1178]),

---

1171) J. Éc. polyt. cah. 22 (1833), p. 200 (von 1829); Ausführung der z. T. umständlichen Rechnungen Paris mém. prés. 5 (1838), p. 418 (von 1832).

1172) Über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns, Preisschrift Berlin 1831, p. 100.

1173) Conn. des temps pour 1836[33], add. p. 28.

1174) Cambr. math. J. $3_4$ (1842), p, 166.

1175) Paris mém. 4 (1819/20[24]), p. 458; Théorie Nr. 322. p. 361. Wenn es sich wie bei Fourier um die Entwicklung einer Funktion handelt, die als Produkt von Funktionen von nur je einer Koordinate angesehen werden kann, so kann man in der Tat, wie es Fourier ohne weiteres tut, annehmen, daß die Koeffizienten ebenfalls in Faktoren zerfallen, von denen jeder nur von je einem Index bei *J. M. C. Duhamel*[1179]) auf. Bei ersterem handelt es sich um Reihen, die nach Produkten der Form $\sin \lambda_n x \sin \lambda_m y$ fortschreiten, wobei $\lambda_n$, $\lambda_m$ zwei (nicht notwendig verschiedene) Wurzeln derselben charakteristischen Gleichung sind; bei den vier andern Autoren müssen die Koeffizienten jeder Koordinate einer andern Gleichung genügen; und zwar treten bei *Navier* nur Cosinusglieder auf, bei *Poisson*, *Cauchy* und *Duhamel* dagegen lineare Verbindungen von Cosinus und Sinus von der Art wie in (682) oder (685).

**49. Das Verfahren von Liouville.** Sollen von der Entwicklung einer Funktion von $x$ und $y$ nach den Funktionen der Vielfachen der Argumente diejenigen Glieder besonders berechnet werden, deren Argumente nur Vielfache der einen Verbindung

$$\theta = \alpha x - \beta y \qquad (\alpha, \beta \text{ relativ prim}) \tag{738}$$

enthalten, so setzt *J. Liouville*[1180]) zunächst:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) + \varphi(x, y), \tag{739}$$

wo in $\varphi$ kein ganzzahliges Vielfaches von $\theta$ mehr auftreten soll; die Substitution

$$x = \beta\sigma, \quad y = \alpha\sigma - \frac{\theta}{\beta} \tag{740}$$

gibt dann:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\beta\sigma, \alpha\sigma - \frac{\theta}{\beta}\right) d\sigma. \tag{741}$$

Für $\alpha = \beta = 1$ ist das Verfahren etwas zu modifizieren; Liouville bemerkt[1181]), daß die Substitution

$$\sigma = \frac{x-y}{2}, \quad \tau = \frac{x+y}{2} \tag{742}$$

$f$ in eine um $2\pi$ periodische Funktion von $\sigma$ und $\tau$ überführt, und

---

abhängt; vgl. die Note von *Darboux* zu der Stelle. *Ph. Kelland,* Theory of heat, Cambr. 1837, p. 56 meint dazu: „This appears to be a solution having quite sufficient generality".

1176) J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 142.

1177) Bull. philomat. 1825, p. 51 = Bull. Férussac 5 (1826), p. 308.

1178) Mém. sur l'application du calcul des résidus, Paris 1827, p. 51.

1179) J. Éc. polyt. cah. 22 (1833), p. 56 (von 1829/30).

1180) J. de math. 1 (1836), p. 201. Zur weiteren Durchführung der Berechnung denkt sich Liouville die Methoden mechanischer Quadratur herbeigezogen; vgl. darüber II A 9, Nr. 13, p. 662.

1181) p. 209.

daß dabei in der Entwicklung des von $\tau$ freien Gliedes nach den Funktionen der Vielfachen von $\sigma$ nur gerade Vielfache auftreten.

**50. Die Entwicklung der Störungsfunktion in der Theorie der Planetenbewegung**[1182]. a) *Die klassische Entwicklung.* Eine sehr ausgedehnte Literatur beschäftigt sich mit der trigonometrischen Entwicklung des „Hauptteils der Störungsfunktion"[1183], d. h. der Funktion

$$\Delta^{-1} = (r^2 + r_1{}^2 - 2rr_1 \cos \delta)^{-\frac{1}{2}} \tag{743}$$

nach den Funktionen der Vielfachen der Anomalien der beiden Planeten. Dabei bedeuten $r, r_1$ ihre Abstände von der Sonne (bzw. überhaupt einem Zentralkörper), $\delta$ ihren scheinbaren Abstand voneinander, von der Sonne aus gesehen. Bezeichnet man mit $a, a_1$ die großen Halbachsen, mit $r_0, r_{10}$ die Projektionen der Radienvektoren auf die Ekliptik, mit $x, x_1$ die Größen $\frac{r_0}{a} - 1$, $\frac{r_{10}}{a_1} - 1$, mit $y, y_1$ die in der Ekliptik gemessenen Mittelpunktsgleichungen, mit $z, z_1$ die Elevationen über die Ekliptik, mit $\tau, \tau_1$ die Anomalien der Epoche, endlich mit $\zeta, \zeta_1$ die mittleren Anomalien, so kann man schreiben:

$$\begin{aligned}\Delta^2 = {} & a^2(1+x)^2 + a_1{}^2(1+x_1)^2 + (z_1 - z)^2 \\ & - 2aa_1(1+x)(1+x_1)\cos(\zeta - \zeta_1 + y - y_1 + \tau - \tau_1).\end{aligned} \tag{744}$$

Nun kann man zunächst nach Potenzen und Produkten der als klein vorausgesetzten Größen $x, x_1, y, y_1, z, z_1$ und diese Potenzen und Produkte mit Hilfe der in Nr. 12 besprochenen Formeln nach den trigonometrischen Funktionen der Vielfachen von $\zeta$ und $\zeta_1$ entwickeln und schließlich alles nach diesen letzteren umordnen. Die Anfangsglieder der so entstehenden Entwicklung sind im Laufe des 18. Jahrhunderts, je nachdem ein Bedürfnis dazu sich einstellte, allmählich berechnet worden[1184]; weiter ist diese Rechnung von *P. S. de Laplace*[1185], *C. Burckhardt*[1186], *J. W. Lubbock*[1187], *J. Ivory*[1188], *G.*

1182) Für ausführlichere Angaben muß auf den Artikel von *H. v. Zeipel* VI 2, 13 verwiesen werden; hier können nur die vielleicht auch für andere Aufgaben als die zunächst vorliegende wichtigen Gesichtspunkte Berücksichtigung finden.

1183) Die Entwicklung des „von der Bewegung der Sonne abhängigen Teils der Störungsfunktion" erfordert nur die Ausmultiplikation von Reihen der in Nr. 12 besprochenen Art, in denen nur die Vielfachen je einer Anomalie auftreten.

1184) Sie finden sich z. B. auch, nebst einigen Bemerkungen allgemeiner Art, bei *G. B. Airy,* Math. tracts. 2e éd., Cambr. 1831, p. 111.

1185) Mécanique céleste 1, Paris 1798, 2, Nr. 48 = Oeuvres 1, p. 288; daraus bei *G. Pontécoulant,* Traité analytique du système du monde 1, Paris 1829, p. 346. 463.

*de Pontecoulant*[1189]), *B. Peirce*[1190]), *U. J. Leverrier*[1191]), *F. Boquet*[1192]) geführt worden. Allgemeine Ausdrücke der Koeffizienten der so erhaltenen Reihen in der Gestalt 19-facher Summen finden sich bei *A. Cauchy*[1193]).

b) *Funktionentheoretische Untersuchung der Koeffizienten auf Grund ihrer Darstellung durch Doppelintegrale*[1194]). Diese ist von *C. G. J. Jacobi* durch mehrere Spezialuntersuchungen vorbereitet worden. So reduziert er[1195]) Doppelintegrale der Form

$$\iint N^{-1} \sin \psi \, d\psi \, d\varphi, \tag{745}$$

in der $N$ eine ganze Funktion zweiten Grades von $\cos \psi$, $\sin \psi \cos \varphi$, $\sin \psi \sin \varphi$ bedeutet, auf eine Normalform, in der nur neben einem konstanten Glied die Quadrate dieser Größen auftreten; ebenso solche der Form[1196]):

$$\iint N^{-1} d\varphi \, d\psi, \tag{746}$$

---

1186) Paris mém. 1808$_2$, p. 36.

1187) Lond. trans. 1830, p. 327; 1831, p. 25, 283; 1832, p. 43, 601.

1188) Ib. 1833, p. 559.

1189) Traité analytique du système du monde 3, Paris 1834, p. 26; unter Benutzung von Rechnungen von *J. Binet,* von denen vorher nur eine Notiz Bull. philomat. 3 (1812), p. 113 veröffentlicht war.

1190) Astr. J. 1 (1849), p. 1?, 31?, 33?

1191) Paris observ. mém. 1 (1855), p. 258, 358; angekündigt schon Paris C. R. 29 (1849), p. 4.

1192) Thèse Paris 1885.

1193) Sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul [927]), p. 96. Merkwürdig ist dabei, daß Cauchy (Glchg. 124, p. 90) zuerst die hier in Nr. 9 besprochenen Entwicklungen nach den Cosinus der Vielfachen von $\vartheta$ benutzt und diese dann erst in Entwicklungen nach den Potenzen von $\cos \vartheta$ umsetzt, die er doch einfacher hätte haben können. Im Nachtrag von 1833, p. 162, gibt er Restabschätzungen und Angaben darüber, wie weit man die Reihe fortsetzen muß, wenn man verlangter Genauigkeit sicher sein will; mit numerischer Durchführung für alle Kombinationen der damals bekannten Planeten zu je zweien. Von einer Untersuchung Cauchys über die Konvergenz dieser Reihe ist Paris C. R. 18 (1844), p. 13 = Oeuvres (1) 8, p. 143 nur der Titel mitgeteilt.

1194) Diese Darstellung ist bereits von *Fr. W. Bessel* (Berl. Abh. 1820/21, p. 55 = ges. Abh. 2, p. 362), von *P. A. Hansen* (Astr. Nachr. 7 (1829, col. 473) und von *S. D. Poisson* (Conn. des temps pour 1836[33], add. p. 20) angegeben, aber nicht weiter benutzt worden.

1195) J. f. Math. 2 (1827), p. 234 = Werke 3, p. 57. Es handelt sich um Transformation einer quaternären quadratischen Form auf eine Summe von Quadraten durch eine lineare Substitution, welche die Form $x^2 + y^2 + z^2 - w^2$ in sich transformiert.

1196) J. f. Math. 8 (1831), p. 259 = Werke 3, p. 93. Hier handelt es sich um orthogonale Transformation einer ternären bilinearen Form, durch verschiein der $N$ eine bilineare Form von 1, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ einerseits, 1, $\cos\psi$, $\sin\psi$ andererseits bedeutet, auf eine Normalform, in der neben einem konstanten Glied nur die beiden Produkte $\cos\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$ auftreten.

Ausführlicher behandelt er[1197]) die Entwicklung der Funktion:

$$(747)\qquad \Delta^{-s} \equiv (l + 2l_1 \cos x + 2l_2 \cos y)^{-s}$$

nach den Cosinus der Vielfachen von $x$ und von $y$. Er gewinnt mit Hilfe der Identität:

$$(748)\qquad \frac{\partial(\Delta\cdot\Delta^{-s})}{\partial x} + (s-1)\frac{\partial\Delta}{\partial x}\Delta^{-s} \equiv 0$$

und der entsprechenden durch Differentiation nach $y$ entstehenden Relationen zwischen den Entwicklungskoeffizienten, aus denen hervorgeht, daß sich alle diese Koeffizienten durch vier geeignet ausgewählte unter ihnen linear ausdrücken lassen[1198]). Entwickelt man nur nach den Cosinus der Vielfachen der einen Variabeln, so genügen die Koeffizienten einer linearen Differentialgleichung 2. und einer (weniger einfachen) 3. Ordnung[1199]). Auch zeigt *Jacobi*[1200]), indem er die Integralausdrücke der Koeffizienten durch partielle Integration umformt, wie sich aus den für irgendeinen Wert von $s$ geltenden Werten der Koeffizienten die für den um 1 höheren Wert geltenden ableiten lassen.

Ob Jacobi beabsichtigt hat, auch die Resultate seiner schon 1839 begonnenen aber erst aus seinem Nachlaß[1201]) herausgegebenen Untersuchungen über „kettenbruchähnliche Algorithmen", die allerdings zunächst zahlentheoretische Zwecke verfolgen, auch für diese astronomischen Fragen nutzbar zu machen, muß dahingestellt bleiben.

c) *Berechnung der Koeffizienten durch doppelte mechanische Quadratur.* Hierüber vgl. man II A 9a, Nr. **13**, p. 662. Zu den dort ge-

---

dene Substitutionen für die beiden Variabelnreihen. Verallgemeinerung auf beliebig viele Variable J. f. Math. 12 (1834), p. 44 = Werke 3, p. 240.

1197) J. f. Math. 15 (1836), p. 205 = Werke 6, p. 119.

1198) Jacobi zeigt zuerst elementar, daß die von ihm aufgestellten Relationen gerade vier Koeffizienten willkürlich lassen, woraus aber noch nicht hervorgeht, daß zwischen diesen nicht noch weitere Relationen existieren; der Beweis, daß das nicht der Fall ist, gelingt ihm (p. 215 bzw. 131) nur „casibus specialibus exceptis". Wenn $s$ eine ganze Zahl ist, gilt der Satz noch, nur ist man dann in der Auswahl der Vier beschränkter als im allgemeinen Falle. — Im Grenzfalle $l = 2l_1 + 2l_2$ reduziert sich die Anzahl der willkürlich bleibenden Koeffizienten auf 3 (p. 225 bzw. 144).

1199) p. 219, 221 (136, 138).

1200) p. 222 bzw. 139.

1201) Von *E. Heine,* J. f. Math. 69 (1868), p. 29 = Werke 6, p. 385.

gebenen Literaturangaben ist noch nachzutragen, daß auch *Gauß*, wie aus seinem inzwischen veröffentlichten Nachlaß[1202]) hervorgeht, von diesem Verfahren Gebrauch gemacht hat, und daß sich eine Darstellung der Rechnungsvorschriften auch bei *G. de Pontecoulant*[1203]) findet. — *U. J. Leverrier*[1204]) urteilt, die wirkliche Durchführung der Methode für numerische Rechnungen sei erst durch das Verfahren von *Liouville* (Nr. 49) ermöglicht worden. Er selbst legt übrigens Wert darauf, die Rechnungen bei der einfachen mechanischen Quadratur so einzurichten, daß man den bereits ausgeführten Teil benutzen kann und nur zu ergänzen braucht, wenn sich nachträglich die Berücksichtigung einer größeren Anzahl von Entwicklungsgliedern als erforderlich herausstellt; vgl. darüber II A 9, Nr. 7, p. 653[1205]).

d) *Entwicklung zuerst nach den Funktionen der exzentrischen Anomalien. A. Cauchy* hat vorgeschlagen[1206]), zuerst nach den Funktionen der Vielfachen der exzentrischen Anomalien zu entwickeln und erst am Schlusse mit Hilfe der Formeln von Nr. 12 zu den mittleren Anomalien überzugehen. Ist $C_{l, l_1}$ der Koeffizient von $\exp i(lu + l_1 u_1)$ in der ersten Entwicklung, so ist der von $\exp i(n\zeta + n_1\zeta_1)$ in der zweiten:

$$(749) \qquad \sum_{l,} \sum_{l_1} \frac{l l_1}{n n_1} C_{l l_1} E_{n-l} E_{n_1 - l_1},$$

wobei $E$ die unter (262) angegebene Bedeutung hat.

Andererseits kann der Übergang von der ersten Entwicklung zu der zweiten auch mit Hilfe des Satzes (263) geschehen[1207]); will man dabei das anwenden, was Cauchy „die logarithmische Methode" nennt, so hat man vor allem den Logarithmus des Faktors $1 - \cos u$ zu entwickeln, was mit Hilfe von (146) geschieht.

Später[1208]) gibt Cauchy noch eine bemerkenswerte Umformung

1202) Werke 7, p. 505.

1203) Traité analytique du système du monde 3, Paris 1834, p. 114, 492.

1204) Paris C. R. 11 (1840), p. 698.

1205) Zu den dortigen Literaturangaben ist noch nachzutragen, daß sich einige Andeutungen Paris C. R. 11 (1840), p. 699 und die Resultate eines durchgerechneten Beispiels ib. 12 (1841), p. 117 finden. — Über Leverriers Untersuchung der großen Ungleichheit Pallas / Jupiter vergleiche man den Bericht von *A. Cauchy*, Paris C. R. 20 (1845), p. 767 = Oeuvres (1) 9, p. 121 (in den Oeuvres ist ein Absatz ausgefallen).

1206) Paris C. R. 13 (1841), p. 853; in anderer Bezeichnung 19 (1844), p. 63; in noch anderer 20 (1845). p. 785 = Oeuvres (1) 6, p. 358; 8, p. 253; 9, p. 140.

1207) Paris C. R. 19 (1844), p. 293 = Oeuvres (1) 8, p. 306.

1208) Paris C. R. 20 (1845), p. 1177 = Oeuvres (1) 9, p. 201.

dieser Rechnung. Die Lagrangesche Umkehrungsformel liefert zunächst

$$(750)\qquad F(u, u_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \zeta^n} [(1 - \varepsilon \cos \zeta) \sin^n \zeta F(\zeta, u_1)].$$

Sind $\mu$, $\mu_1$ die mittleren Bewegungen, so ist:

$$(751)\qquad \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{\mu} \frac{d}{dt} - \frac{\mu_1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta_1};$$

also kann statt (750) auch geschrieben werden:

$$(752)\qquad \begin{cases} F(u, u_1) = \dfrac{d\mathfrak{S}}{dt} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{-\varepsilon \mu_1}{\mu} \sin \zeta \right)^n (1 - \varepsilon \cos \zeta) \frac{\partial^n F(\zeta, u_1)}{\partial \zeta_1{}^n}, \\ \qquad = \dfrac{d\mathfrak{S}}{dt} + (1 - \varepsilon \cos \zeta) F(\zeta, U), \end{cases}$$

wo die Funktion $\mathfrak{S}$ einfach zu bilden und die neue Variable $U$ durch

$$(753)\qquad U - \sin U = \zeta_1 - \frac{\varepsilon \mu_1}{\mu} \sin \zeta$$

definiert ist, so daß sich $F(\zeta, U)$ aus $F(\zeta, \zeta_1)$ durch eine einfach unendliche Reihe ableiten läßt.

e) *Entwicklung nach der wahren Anomalie des einen und der exzentrischen Anomalie des andern Planeten. P. A. Hansen*[1209]) beginnt mit der Entwicklung nach den Potenzen des Verhältnisses der beiden Radienvektoren, indem er der Meinung ist, daß diese Entwicklung eine gewisse „natürliche Konvergenz" aufweise, die durch die Art und Weise der ferneren Umformung wohl verschlechtert, aber nicht verbessert werden könne. Ihre Koeffizienten sind zunächst Legendresche Polynome (vgl. II A 10, *Wangerin*, Nr. 2, p. 701) des Cosinus der scheinbaren Distanz; diesen schreibt er

$$(754)\qquad \cos H = A \cos w + B \sin w,$$

wobei $w$ die wahre Anomalie des gestörten Planeten ist, während $A$, $B$ von der des störenden und den Bahnelementen beider abhängen. Wird

$$(755)\qquad r \cos w = ax, \quad r \sin w = ay$$

gesetzt, so erscheint die Entwicklung als eine solche nach Potenzen von $x$ und $y$:

$$(756)\qquad \sum C_{mn} x^m y^n.$$

Die Koeffizienten $C$ lassen sich in die Form bringen:

$$(757)\qquad C_{mn} = \text{const.} \left( \frac{a}{a_1} \cdot \frac{a_1}{r_1} \right)^{m+n-1} D_{mn};$$

1209) Schriften der Sternwarte Seeberg, Gotha 1843, p. 19 (franz. von *V. Mauvais*, Conn. des temps pour 1847[44], additions); Auszüge Berl. Ber. 1843, p. 11; astr. Nachr. 20 (1843), vol. 177; monthly not. 5 (1843), p. 227; Brux. Bull. 9 (1842), p. 621; Taylor scient. mém. 3 (1843), p. 587.

dabei ist $D_{mn}$ durch

$$(758)\qquad (1-2A\xi-2B\eta+\xi^2+\eta^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum D_{mn}\xi^m\eta^n$$

definiert, also eine rationale ganze Funktion von $\cos w$, $\sin w$, die sich folglich durch die Interpolationsformeln genau darstellen läßt. Andererseits sind die Produkte $x^m y^n$ Funktionen derselben Art von der exzentrischen Anomalie des gestörten Körpers.

f) *Abtrennung eines Korrektionsgliedes. A. Cauchy*[1210]) bemerkt bereits, daß die klassische Entwicklung nur für kleine Werte des Achsenverhältnisses, der Exzentrizitäten und der Neigungen gut konvergiert; er schlägt daher vor, mit der Entwicklung nach Potenzen von

$$(754)\qquad \frac{2rr_1\cos\delta}{r^2+r_1^2}\quad\text{oder}\quad \frac{rr_1\cos^2\frac{\delta}{2}}{(r+r_1)^2}\quad\text{oder}\quad \frac{rr_1\sin^2\frac{\delta}{2}}{(r+r_1)^2}$$

zu beginnen. Er führt zunächst[1211]) die erste dieser Entwicklungen für den Fall verschwindender Exzentrizitäten aus, indem er die Entwicklung nach Potenzen von $\cos\delta$ in eine solche nach den Cosinus der Vielfachen von $\delta$ umsetzt und dann diese Cosinus erst durch die wahren Anomalien ausdrückt[1212]); um dann auf den Fall nicht verschwindender Exzentrizitäten zu kommen, ersetzt er in diesen Entwicklungen die Halbachsen durch die Radienvektoren, entwickelt[1213]) nach Potenzen der Cosinus der exzentrischen Anomalien und führt schließlich[1214]) mit Hilfe der Formeln der elliptischen Bewegung die Funktionen der Vielfachen der mittleren Anomalien ein.

Später hat Cauchy diese Idee nach verschiedenen Richtungen weiter verfolgt. Er setzt zunächst[1215]):

$$(755)\qquad \Delta=\sqrt{2rr_1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_1}+\frac{r_1}{r}\right)-\cos\delta\right]^{\frac{1}{2}},$$

hierauf

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a_1}+\frac{a_1}{a}\right)=\lambda,\ \ \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_1}+\frac{r_1}{r}\right)-\lambda=\frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{r}-\frac{a}{r_1}\right)(\varepsilon\cos u-\varepsilon_1\cos u_1)=\varrho,$$

$$(756)\qquad \frac{1}{\Delta}=\frac{1}{\sqrt{2rr_1}}(\lambda-\cos\delta+\varrho)^{-\frac{1}{2}}$$

1210) Turin mém. von 1831, p. 109. Er setzt auseinander, daß die erste dieser Entwicklungen für willkürliche $\delta$ am besten konvergiert, daß es aber, sofern man sich entschließen wolle, für verschiedene Intervalle verschiedene Entwicklungen zu gebrauchen, zweckmäßig sein könne, auch die beiden andern mit heranzuziehen.

1211) p. 113.

1212) p. 117. Er denkt sich diese Umformung durch doppelte mechanische Quadratur ausgeführt.

1213) p. 127.

1214) p. 129. Er gibt hier ausführliche Restabschätzungen.

1215) Paris C. R. 11 (1840), p. 461 = Oeuvres (1) 5, p. 296.

und entwickelt erst nach Potenzen von $\varrho$; um dann die Hilfsfunktion

$$(757) \qquad (\lambda - \cos\delta)^{-\frac{1}{2}}$$

und ihre nach $\lambda$ genommenen Ableitungen zu entwickeln, schreibt er[1216]) diese Hilfsfunktion in der Form

$$(758) \qquad (\lambda - \mu\cos(p - p_1 + \Pi) - \nu\cos(p + p_1 + \Phi))^{-\frac{1}{2}},$$

wo $p, p_1$ die wahren Längen sind, $J$ die gegenseitigen Neigungen bedeuten, $\Phi$ und $\Psi$ von den Neigungen und den Knotenlängen abhängen und

$$(759) \qquad \cos^2\frac{J}{2} = \mu, \quad \sin^2\frac{J}{2} = \nu$$

gesetzt ist, und entwickelt zunächst nach Potenzen von $\nu$.

Die Potenzen von $\varrho$ entwickelt er dabei mit Hilfe des Binomialsatzes nach Produkten von Größen, die nur auf je einen Planeten sich beziehen.[1217])

Ferner setzt er

$$(760) \qquad \Delta^2 = 2aa_1(\lambda - \cos(p_1 - p + \Pi) + \nu)$$

und entwickelt zunächst nach Potenzen von $\nu$.[1218])

Dann versucht er[1219]), mit der Entwicklung nach den Cosinus der Vielfachen von $\delta$ zu beginnen und die Koeffizienten dieser Entwicklung nach Potenzen von

$$(761) \qquad \frac{r^2}{r_1^2} - \frac{a^2}{a_1^2}$$

zu entwickeln, nachdem er den Integrationsweg, wie in (192) angegeben, in der Ebene der komplexen Zahlen verschoben hat. Die Koeffizienten dieser Entwicklung drückt er zunächst durch Residuen aus[1220]); nachher[1221]) spaltet er erst Faktoren ab, die nur von der Bewegung je eines Planeten abhängen, und entwickelt nach Potenzen von

$$(762) \qquad \frac{r^2}{a^2}\frac{a_1^2}{r_1^2} - 1,$$

1216) Paris C. R. 11 (1840), p. 467 = Oeuvres (1) 5, p. 302; Zusammenstellung der Formeln, Paris C. R. 11 (1840), p. 501 = Oeuvres (1) 5, p. 311.

1217) Paris C. R. 11 (1840), p. 470 = Oeuvres (1) 5, p. 305.

1218) Paris C. R. 12 (1841), p. 96 = Oeuvres (1) 6, p. 28. Für Entwicklung dieser Potenzen selbst empfiehlt er p. 32 Interpolationsformeln zu benutzen. Weitere Ausführungen C. R. 12 (1841), p. 194, 323 = Oeuvres (1) 6, p. 40, 78.

1219) Paris C. R. 15 (1842), p. 266 = Oeuvres (1) 7, p. 98.

1220) Über die Bestimmung dieser Residuen gibt er Paris C. R. 15, p. 303 = Oeuvres (1) 7, p. 103 noch einige Andeutungen.

1221) Paris C. R. 15 (1842), p. 360 = Oeuvres (1) 7, p. 108.

oder[1222]) er ersetzt (761) durch

$$(763)\qquad \frac{a^2}{r_1^2}\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{r_1^2}{a_1^2}\right)=\frac{a^2}{r_1^2}\left(\left(1-\frac{r_1^2}{a_1^2}\right)-\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)\right)$$

und entwickelt nach dem Binomialsatz.

Später, als er es zweckmäßig gefunden hatte (vgl. d), mit der Entwicklung nach den exzentrischen Anomalien zu beginnen, schreibt er das Quadrat der Distanz in der Form

$$(764)\qquad \Delta^2=\varrho+\varsigma,$$

wo:

$$\varrho = h + k\cos(u-u_1-\alpha) - b\cos(u-\beta) - b_1\cos(u_1-\beta_1) + c\cos(u+u_1-\gamma),$$

$$\varsigma = j\cos 2u + j_1\cos 2u_1$$

und behandelt zunächst, was für kleine Exzentrizitäten zweckmäßig ist, $\varsigma$ als Korrektionsglied, nach dessen Potenzen entwickelt wird.[1223]) Auch $\varrho$ spaltet er hier noch einmal in ganz analoger Weise, indem er die beiden ersten Summanden als Hauptbestandteil betrachtet; bald darauf zieht er es aber vor[1224]), $\varrho$ auf die Form

$$(765)\qquad \varrho = H + K\cos(u_1-\omega)$$

zu bringen, in der $H$, $K$, $\omega$ noch Funktionen von $u$ sind. Die Entwicklung von $\varrho$ nach den Funktionen der Vielfachen von $u_1$ geschieht mit Hilfe der Formeln von Nr. **9**, in denen dabei $\alpha$ durch

$$(766)\qquad \theta = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{K}{H}\right)$$

zu ersetzen ist. Es sind dann noch, da die übrigen Bestandteile teils keine Schwierigkeiten bieten sich auf die Potenzen dieses $\theta$ zurückführen lassen, diese letzteren nach den Funktionen der Vielfachen von $u$ zu entwickeln; auch diese Aufgabe läßt sich auf die Formeln von Nr. **9** bzw. **10** reduzieren, indem, wieder bis auf Faktoren, die keine Schwierigkeit bieten,

$$(767)\qquad \frac{d\log\theta}{du}\sim\frac{1}{\sqrt{H^2-K^2}}$$

und die hier unter dem Wurzelzeichen stehende Funktion eine rationale ganze Funktion 4. Grades von $\cos u$ und $\sin u$ ist.[1225])

Etwas später[1226]) findet sich bei Cauchy noch die Bemerkung,

---

1222) Paris C. R. 15 (1842), p. 481 = Oeuvres (1) 7, p. 124.

1223) Paris C. R. 19 (1844), p. 63 = Oeuvres (1) 8, p. 254.

1224) Ib. p. 159, 283 = 284, 296. Ob man bei diesem Verfahren das Glied $j\cos 2u$ mit in $\varrho$ hereinnimmt oder bei $\varsigma$ beläßt, macht keinen wesentlichen Unterschied.

1225) Ib. p. 289 = 302.

1226) Ib. 20 (1845), p. 775 = Oeuvres (1) 9, p. 130.

daß man die Zerlegung (764), bzw. die Bestimmung von $H$ und $K$, auch interpolatorisch vornehmen könne, da $j$ und $j_1$ einfache Werte haben.

Ein folgender Aufsatz Cauchys[1227]) bringt allgemeine Auseinandersetzungen über die zweckmäßigste Art der Zerlegung in Hauptglied und Korrektionsglied. In erster Stelle, meint er, müsse man darauf sehen, eine Reihe zu bekommen, die weiter konvergiert als die direkte Entwicklung der gegebenen Funktion nach Potenzen der Variabeln und dabei doch elementar gliedweise integriert werden kann. Eine solche bekomme man in der Tat, wenn man den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in Linearfaktoren zerlege und das Produkt der Faktoren mit den absolut kleinsten Nullstellen als Hauptbestandteil betrachte. Bei Anwendung dieses Verfahrens auf die Bestimmung der Koeffizienten $\mathfrak{B}$ führt er[1228]) die Gleichung

$$1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2 = 0 \tag{768}$$

durch die Substitution $\alpha = \exp(-\beta)$ in die Form

$$\cos x = \cos \beta i \tag{769}$$

über, deren Wurzeln

$$x = 2n\pi + \beta i$$

sind, und spaltet demgemäß den Faktor $(x^2 + \beta^2)^{-s}$ ab, so daß er eine Entwicklung der Form

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{x^{2n}\, dx}{(x^2 + \beta^2)^{-s}} \tag{770}$$

erhält; für $s = \frac{1}{2}$ gibt das erste Glied, wenn

$$\frac{x + \sqrt{x^2 + \beta^2}}{\beta} = z, \quad x = \frac{\beta}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) \tag{771}$$

gesetzt wird, einfach $\log z$, die folgenden außer Bestandteilen, die zu demselben Logarithmus proportional sind, noch Entwicklungen nach Potenzen von $z$ mit ganzzahligen Exponenten. Cauchy bemerkt noch[1229]), daß man auch mit der Entwicklung von

$$\sqrt{\frac{x^2 + \beta^2}{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}} \tag{772}$$

---

1227) Ib. p. 907 = 164.

1228) Ib. p. 920 = 177. Es handelt sich eigentlich nicht um die Entwicklung der Störungsfunktion, sondern um die Entwicklung der unbestimmten Integrale, durch die sich die Variationen der Bahnelemente ausdrücken.

1229) p. 923 = 181.

nach Potenzen von $z$ beginnen könne. Die Integrale der Formen

$$(773)\qquad \int \frac{e^{nix}dx}{\Delta},\quad \int \frac{x e^{nix}dx}{\Delta},\quad \int e^{nix}\Delta dx,\quad \int x e^{nix}\Delta dx$$

lassen sich dann mit Hilfe von Rekursionsformeln auf die vier reduzieren, die von den beiden ersten Formen für $n = 0$ und $n = 1$ geliefert werden; und wenn man noch die Formeln von Nr. **13** benutzt, so erkennt man, daß das gleiche auch noch gilt, wenn der Exponent $n$ keine ganze Zahl mehr ist. Cauchy deutet noch an[1230]), daß man auch den allgemeinen Fall der Entwicklung der Störungsfunktion analog behandeln könne; man müsse dann nur statt eines Faktors der Form $x^2 + \beta^2$ einen solchen der Form

$$(774)\qquad (x - \alpha)^2 + \beta^2$$

abspalten.

*J. Lubbock*[1231]) schreibt das Quadrat der Distanz zunächst in der Form:

$$(775)\qquad 1 - A_1 \cos \alpha_1 - A_2 \cos \alpha_2 - \cdots$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Winkel bedeuten, die sich aus den Vielfachen der Anomalien der beiden Körper zusammensetzen und die Koeffizienten $A_1$, $A_2, \ldots$ in jedem einzelnen Falle der absoluten Größe nach geordnet sein sollen; er schreibt dann statt dessen:

$$(776)\qquad (1 - A_1 \cos \alpha_1)(1 - A_2 \cos \alpha_2)\ldots(1 - A_k \cos \alpha_k) - Q,$$

wo also $Q$ sowohl die nicht berücksichtigten Glieder der Form $A \cos \alpha$ als auch die aus der Entwicklung des Produktes entstehenden in (775) nicht vorkommenden enthält, und entwickelt dann zunächst nach Potenzen von $Q$.

g) *Entwicklung nach den Funktionen des einen Winkels analytisch, nach denjenigen des andern interpolatorisch (Methode mixte). U. J. Leverrier* hat auch vorgeschlagen[1232]), die Entwicklung nach den Funktionen der Vielfachen des einen Arguments auf analytischem Weg, nach denjenigen des andern interpolatorisch oder, wie die Astronomen zu sagen gewohnt sind, durch mechanische Quadratur vorzunehmen. Er entwickelt zu diesem Zweck zunächst nach Potenzen der Exzentrizität des störenden Körpers; der Hauptteil enthält dann dessen Ano-

1230) p. 926 = 185. Die sich anschließende Note p. 996 = 186 enthält nur Persönliches.

1231) Phil. mag. (3) 31 (1847), p. 5, 86, 144. Ev. ersetzt er auch noch die $A_1, A_2, \ldots$ durch in den Tafeln vorkommende Näherungswerte und schiebt die dadurch hervorgebrachte Differenz ebenfalls auf $Q$.

1232) J. de math. 8 (1843), p. 282.

malie nicht in höheren Vielfachen und kann also für jeden speziellen Wert der Anomalie des gestörten Planeten nach den Formeln von Nr. 9 entwickelt werden. Will man die Methode anwenden, ohne vorher ein Korrektionsglied abzutrennen, so erscheint $\Delta^2$ als Funktion 4. Grades der exzentrischen Anomalie des störenden Planeten; diese ist dann in Faktoren zu zerlegen und wie am Schlusse von Nr. **10** angegeben zu verfahren. Diese Methode hat schon *C. F. Gauß* in seinerzeit nicht veröffentlichten Rechnungen[1233]) versucht, scheint sie aber bald verlassen zu haben. *A. Cauchy* ist wiederholt auf sie zurückgekommen, namentlich zeigt er[1234]), daß die Faktorenzerlegung des Quadrats der Distanz geschrieben werden kann:

$$(777)\qquad \mathfrak{K}^2\Delta^2 = (1 - ae^{-\varphi i}x)(1 - ae^{\varphi i}x^{-1})(1 - be^{-\varphi i}x)(1 - be^{\varphi i}x^{-1}),\quad x = e^{ui}.$$

Auch gibt er[1235]) Anweisung, wie man bei ihr bestimmen kann, wie viele Funktionswerte man für die mechanische Quadratur benutzen muß, um verlangter Genauigkeit sicher sein zu können.

**h)** *Heranziehung der Theorie der elliptischen Funktionen.* Versuche, die Theorie der elliptischen Funktionen weiter, als es bereits durch die „Funktionen der großen Achsen" (Nr. 9d) geschehen war, für die Störungstheorie nutzbar zu machen, gehen auf *J. Liouville* zurück.[1236]) Bei geeigneter Wahl der Zeiteinheit handelt es sich um die Berechnung von Integralen der Form:

$$(778)\qquad \int \begin{Bmatrix} \cos gt \\ \sin gt \end{Bmatrix} \frac{dt}{(A + A_1 \cos t)^\lambda}$$

oder, wenn $g$ in die Summe einer ganzen Zahl $n$ und eines Bruches $l$,

---

1233) Werke 7, p. 595 (von 1814?). Gauß entwickelt so nicht die Komponenten der störenden Kräfte selbst, sondern ihre Produkte mit einem Faktor

$$\lambda = \left(\frac{1}{\sin Z} - \cos(\zeta_1 - \varphi_1)\right)^{\frac{3}{2}},$$

der nach demselben Prinzip gewählt ist wie in den oben besprochenen Untersuchungen Cauchys[1227]). p. 599 noch einige Bemerkungen über die Bestimmung der Konstanten.

1234) Paris C. R. 18 (1844), p. 631; 19 (1844), p. 1231 = Oeuvres (1) 8, p. 175, 350.

1235) Ib. 20 (1845), p. 839 = (1) 9, p. 150. Vgl. auch die Andeutungen ib. 17 (1843), p. 1158 = (1) 8, p. 121.

1236) J. de math. 1 (1836), p. 445, Ankündigung Paris C. R. 3 (1836), p. 41; einige Andeutungen über die Ausdehnung des Verfahrens auf Fälle, in welchen die Exzentrizität des gestörten Planeten und die gegenseitige Neigung der Bahnen nicht mehr sehr klein sind, ib. 8 (1839), p. 696.

der absolut kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, zerlegt wird, der Formen:

$$(779) \qquad \int \begin{Bmatrix} \cos nt \\ \sin nt \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos lt \\ \sin lt \end{Bmatrix} \frac{dt}{(A + A_1 \cos t)^{\lambda}}.$$

Werden dann die Faktoren, mit denen $\cos lt$ und $\sin lt$ multipliziert sind, nach den Cosinus bzw. Sinus der ganzzahligen Vielfachen von $t$ entwickelt, so drücken sich die Koeffizienten durch elliptische Integrale aus. Die Integration nach $t$ führt Nenner der Form $n^2 - l^2$ ein; darauf beruht die Möglichkeit einer Abschätzung der Größe der beim Abbrechen an einer bestimmten Stelle vernachlässigten Glieder.

Wohl dadurch veranlaßt hat dann die *Pariser Akademie* die Preisfrage gestellt[1237]), die Störungen mit Hilfe von Entwicklungen zu berechnen, die nach von den Kreisfunktionen verschiedenen Funktionen, für welche bereits Tafeln existieren, fortschreiten; sie ist aber damals weder in dieser Form, noch in der späteren modifizierten[1238]) „nach Funktionen, für welche Tafeln ein für allemal berechnet werden können", gelöst worden.

i) *Asymptotische Werte der Koeffizienten für große Werte der Indizes.* Solche hat zuerst *C. G. Jacobi*[1239]) für die in Nr. **10** besprochenen speziellen Fälle erhalten: die Benutzung seiner allgemeinen Transformationsformel (374) führt die Integraldarstellung der Koeffizienten in diejenige Form über, wie sie zur Anwendung der Laplaceschen Formeln für Funktionen großer Zahlen verlangt wird.

Dann hat *A. Cauchy* seine allgemeinen in Nr. **109** zu besprechenden Untersuchungen auf das hier vorliegende Problem angewendet. Soll zunächst der Koeffizient $A_n$ von $x^n \exp(n\zeta i)$ in der Entwicklung der Störungsfunktion nach den Funktionen der Vielfachen der mittleren Anomalie bestimmt werden, so ist wegen des Satzes (263):

$$(780) \qquad F(x) = \frac{1}{\Delta}(1 - \varepsilon(x + x^{-1})) \exp\left(\frac{n\varepsilon}{2}(x - x^{-1})\right)$$

zu nehmen[1240]); dabei ist für $\Delta$ die Zerlegung (777) zu setzen und

1237) Paris C. R. 5 (1837), p. 291; wiederholt 7 (1838), p. 360; 9 (1839), p. 844; 11 (1840), p. 72.

1238) Paris C. R. 12 (1841), p. 637; wiederholt 13 (1841), p. 1177; 15 (1842), p. 1143; 18 (1844), p. 383. Schließlich wurde nur überhaupt eine Vervollkommnung der Störungstheorie verlangt (20 (1845), p. 599; 22 (1846), p. 768); den Preis erhielt dann *P. A. Hansen* (30 (1850), p. 250); seine Untersuchung ist aber erst einige Jahre später veröffentlicht.

1239) J. f. Math. 15 (1836), p. 16 = Werke 6, p. 104. Er behandelt nacheinander die Fälle, daß bei großem $m$ das $n$ endlich, von der Ordnung von $\sqrt{m}$ oder von der von $m$ selbst ist.

1240) Paris C. R. 20 (1845), p. 224 = Oeuvres (1) 8, p. 449. Bei der Ankündigung ib. 13 (1841), p. 318 = (1) 6, p. 281 scheint Cauchy ein sehr ähnliches, aber nicht genau dasselbe Verfahren im Auge gehabt zu haben.

ebenso

$$1 - \varepsilon(x + x^{-1}) = \frac{\varepsilon}{2f}(1 - fx)(1 - fx^{-1}), \tag{781}$$

wo $f$ dieselbe Bedeutung wie in (230) hat. Also ist in der in betracht kommenden Gleichung von Nr. **109**

$$\left\{\begin{aligned} & s = \tfrac{1}{2}, \\ & \varphi(x) = \left(1 - \frac{b}{a} x e^{2\varphi i}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{f}{a} x e^{\varphi i}\right) \exp\left(\frac{n\varepsilon}{2a} x e^{\varphi i}\right), \\ & \chi(x) = (1 - a^2 x)^{-\frac{1}{2}} (1 - abxe^{-2\varphi i})^{-\frac{1}{2}} (1 - afxe^{-\varphi i}) \exp\left(-\frac{an\varepsilon}{2} x e^{-\varphi i}\right) \end{aligned}\right. \tag{782}$$

zu nehmen; das gibt dann[1241]):

$$A_n \sim \left[\frac{1}{2}\right]_n \frac{\Re \xi^{-n}}{\sqrt{1 - a^2}} e^{\mathfrak{T}}, \tag{783}$$

mit:

$$\mathfrak{T} = \frac{n\varepsilon}{2}(\xi - \xi^{-1}) - \frac{\varepsilon}{4}(\xi + \xi^{-1}) - \frac{1}{4n} \frac{a^2}{1 - a^2}, \quad \xi = a^{-1} e^{\varphi i}. \tag{784}$$

Diese Rechnung führt er für eine Anzahl geeigneter Werte der exzentrischen Anomalie des andern Planeten aus und gewinnt daraus den asymptotischen Wert des Koeffizienten $A_{-m,n}$ in der Entwicklung nach den Funktionen der Vielfachen der beiden mittleren Anomalien durch mechanische Quadratur.

In einer späteren Note[1242]) deutet er noch an, wie man ebenfalls durch Benutzung einer der Formeln von Nr. **109** sogleich einen asymptotischen Wert für $A_{m,-n}$ selbst erhalten könne; wenn sich die Indizes $m, n$ näherungsweise wie die mittleren Bewegungen verhalten, können die Differentiationen nach den Anomalien durch eine einzige solche nach der Zeit ersetzt werden; man erhält so

$$A_{m,-n} \sim \frac{e^{-(m\zeta + n\zeta_1) i}}{2\pi} \frac{\mu}{n} \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \Delta^2}{dt^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{785}$$

und die einzusetzenden Werte der Anomalien sind aus den Gleichungen

$$\Delta^2 = 0, \; m \frac{\partial \Delta^2}{\partial \zeta} + n \frac{\partial \Delta^2}{\partial \zeta_1} = 0 \tag{786}$$

zu bestimmen.

---

1241) Paris C. R. 20 (1845), p. 845 = Oeuvres (1) 9, p. 160. In einer vorhergehenden Note (ib. p. 833 = 148) hatte er die Rechnung zuerst für die Koeffizienten der Entwicklung nach den Vielfachen der exzentrischen Anomali durchgeführt und war von diesen mit Hilfe der Gleichung (749) — oder vielmehr der entsprechenden Gleichung für Funktionen eines Planeten — zu den Koeffizienten der Entwicklung nach den exzentrischen Anomalien übergegangen.

1242) Paris C. R. 20 (1845), p. 1616 = Oeuvres (1) 9, p. 209.

**51. Entwicklung der Wärmemenge, die ein Teil der Erdoberfläche von der Sonne erhält, nach trigonometrischen Funktionen der Zeit.** Die Frage, wie die von der Sonne der Erde, bzw. einem bestimmten Punkt ihrer Oberfläche, durch Strahlung zugesendete Wärmemenge mit Ort und Zeit variiert, ist bereits von *E. Halley* in Angriff genommen worden. Er findet[1243]), daß die während eines Tages einem Ort von der geographischen Breite $\varphi$ zugesendete Wärmemenge zu

$$\sin\chi\cos(\varphi-\varepsilon)\pm\chi\cos(\varphi+\varepsilon) \tag{787}$$

proportional ist; dabei bedeutet $\varepsilon$ die Exzentrizität der Erdbahn, $\chi$ den halben Tagesbogen der Sonne, und das obere Zeichen gilt für das Sommer-, das untere für das Winterhalbjahr. Diesen Ausdruck hat *J. H. Lambert*[1244]) nach den Funktionen der Vielfachen der Länge der Sonne entwickelt und daraus den Satz abgeleitet, daß die gesamte einem Orte im Verlaufe eines Jahres zugeführte Wärmemenge von dem Vorzeichen der Breite unabhängig ist; auch hat er gezeigt[1245]), daß die gesamte der ganzen Erde während irgendeines Zeitintervalls zugeführte Wärmemenge der Änderung der wahren Anomalie der Erde während dieses Intervalls proportional ist.

Daß diese Sätze für geologische Untersuchungen von Bedeutung sein können, indem sie eine Abhängigkeit der Wärmezufuhr von den säkulären Veränderungen der Elemente der Erdbahn erkennen lassen, scheint zuerst *J. P. Rohde*[1246]) bemerkt zu haben. Schärfer formuliert erscheint diese Bemerkung bei *J. Fr. W. Herschel*, der die Sätze ausspricht[1247]), daß die der ganzen Erde im Laufe eines Jahres von der Sonne zugesendete Wärmemenge der kleinen Achse der Erdbahn proportional ist, und daß eine Vergrößerung der Exzentrizität auf der einen Halbkugel eine Verminderung, auf der andern eine Verstärkung

---

1243) Lond. trans. 17 (1693), p. 878. Die erforderliche Integration oder, wie er sich ausdrückt, „Summation aller Sinus der Sonnenhöhe, solange die Sonne über dem Horizont ist", stellt er geometrisch durch die Komplanation eines Zylinderhufes dar; diese ließ sich mit Hilfe damals bekannter geometrischer Sätze ausführen.

1244) Photometrie, Berlin 1773, p. 317. *Tralles*, Berl. Abhandl. 1818/19[20], math. p. 86, gibt an, wie der Satz bei Berücksichtigung der Absorption zu modifizieren ist.

1245) Photometrie p. 310.

1246) Jahreszeiten höherer Ordnung, Königsberg 1809.

1247) Lond. geol. trans. (2) $3_2$ (1832), p. 295 (von 1830); Auszug Lond. geol. proc. 1 (1826/33), p. 244. — Beweis bei *S. Haughton*, Phil. mag. (4) 31 (1866), p. 375.

des Gegensatzes zwischen Sommer und Winter bedingt, je nachdem das Perigäum der Sonne in ihren Winter oder in ihren Sommer fällt.[1248]) *S. D. Poisson*[1249]) hat dann diese Sätze und den von Lambert aus den Formeln der Theorie der elliptischen Bewegung abgeleitet, auch angegeben, daß bei Berücksichtigung der Abweichung der Erde von der Kugelgestalt noch Korrektionsglieder hinzutreten, die von der Schiefe der Ekliptik abhängen. Auch hat er die gesamte einem bestimmten Ort der Erdoberfläche in einem bestimmten Moment von der Sonne zugeführte Wärmemenge nach den Cosinus der Vielfachen des Stundenwinkels der Sonne entwickelt[1250]); sie ist von diesem eine „diskontinuierliche" Funktion im alten Sinne des Wortes (Nr. 28), die zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten erforderlichen Integrationen lassen sich elementar ausführen. Sie hängen ihrerseits vom halben Tagesbogen der Sonne ab und lassen sich infolgedessen nach den Funktionen der Vielfachen der wahren Sonnenlänge entwickeln; doch führt Poisson diese Entwicklung nur für den ersten dieser Koeffizienten, also das Tagesmittel der zugeführten Wärmemenge, aus. Die Koeffizienten drücken sich durch elliptische Integrale (aller drei Gattungen) aus; er reduziert sie auf die Legendreschen Normalformen[1251]).

## V. Das Fouriersche Integral.

**52. Übergang von der trigonometrischen Reihe zum Fourierschen Integral.** *J. J. Fourier*[1252]) läßt in den Gleichungen:

$$(788)\quad f(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{l}\quad A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\alpha)\cos\frac{n\pi\alpha}{l}\,d\alpha$$

$$(0 < x < l)$$

---

1248) Lond. geol. trans. (2) $3_2$, p. 298.

1249) Conn. des temps pour 1836[33], add. p. 53; im wesentlichen ebenso chaleur p. 477.

1250) Chaleur p. 481. Der Auszug, Paris C. R. 4 (1837), p. 137, gibt nur im allgemeinen den Gang der Rechnung an.

1251) Chaleur p. 485.

1252) Preisschrift von 1811, Paris mém. 4 (1819/20)[24], p. 485; théorie analytique de la chaleur, Paris 1822, Nr. 345 = Oeuvres 1, p. 390. Fourier nimmt für $l$ ein Vielfaches von $\pi$, wodurch nichts vereinfacht wird; übrigens deutet er bereits an, daß man ebenso gut wie von einer harmonischen auch von einer unharmonischen trigonometrischen Reihe ausgehen könne. Das hat dann *Poisson*, théorie de la chaleur, Paris 1835, p. 297 ausgeführt. — Veröffentlicht sind die Formeln 790 und 791 zuerst ann. chim. phys. 3 (1816), p. 361; dann auf Grund einer Mitteilung Fouriers von *S. F. Lacroix*, traité 3 (1819), p. 562, ohne Beweis. *A. Cauchy*, der die Formeln schon vorher benutzt hatte, sagt (bull.

(vgl. 389) die Intervallänge $l$ über alle Grenzen wachsen und sieht dabei die Differenz je zweier aufeinanderfolgender Werte von $n\pi/l$, also die Größe $\pi/l$, die dann unendlich klein wird, als das Differential einer stetig sich ändernden Größe $\xi$, die verschiedenen Werte von $n\pi/l$ als Werte dieser Variabeln, die Werte von $lA_n\pi$ als Werte einer Funktion $\varphi$ von diesem $\xi$, die Summe als Integral an; so gelangt er zu den Gleichungen:

$$(789) \qquad f(x) = \int_0^\infty \varphi(\xi) \cos x\xi d\xi, \quad \varphi(\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\alpha) \cos \xi\alpha d\alpha \quad (0 < x)$$

und faßt sie zu

$$(790) \qquad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(\alpha) \cos \xi x \cos \xi\alpha d\alpha d\xi$$

zusammen.[1253]) In derselben Weise erhält er die zweite Formel[1254]):

$$(791) \qquad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(\alpha) \sin \xi x \sin \xi\alpha d\alpha d\xi. \qquad (0 < x)$$

---

philomat. (1818), p. 179 und Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 300): „au moment où j'ai rédigé sur cet objet l'article déjà cité[1296]), je ne connaissais d'autre mémoire ou l'on eût employé les formules en question que ceux de Mr. Poisson et de moi sur le mouvement des ondes [auch keine mündliche Mitteilung?]. Depuis cette époque, M. Fourier m'ayant donné communication de ses recherches sur la chaleur, présentés à l'institut dans les années 1807 et 1811, j'y ai reconnu les mêmes formules". Wo er die Formeln später benutzt, nennt er sie nach Fourier; z. B. j. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 511. — Auch *Poisson* erkennt nach Fouriers Tode dessen Priorität für die Formeln (790) und (791) an (Paris mém. 10 (1831) p. 322 und théorie de la chaleur, Paris 1835, p. 205); traité de mécanique, 2$^{me}$ éd. 1, Paris 1833, p. 652 schreibt er sogar (692) Fourier zu.

Der Grenzübergang von der Reihe zum Integral findet sich auch bei *G. Plana,* Torino mem. 25 (1820), p. 142; bei *H. G. v. Schmidten,* ann. de math. 12 (1822), p. 220 und J. f. Math. 5 (1830), p. 392; bei *G. Piola,* mem. soc. ital. 20$_2$ (1831), p. 598; bei *J. M. C. Duhamel,* cours d'analyse 2, Paris 1840, p. 168; bei *A. A. Cournot,* théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 212 (bei diesem aber doch mit der Bemerkung, das Resultat sei illusorisch, wenn das Doppelintegral nicht einen endlichen bestimmten Wert habe); bei *O. Schlömilch,* Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale, Jena 1843, p. 24; bei *J Dinger,* J. f. Math. 34, 1847, p. 89. In etwas anderer Form erscheint er im Nachlaß von *C. F. Gauß* (Werke 8, p. 88; aus der Zeit zwischen 1799 und 1813), indem dort von der hier in Nr. 99 besprochenen Entwicklung ausgegangen wird.

1253) Über die Schreibung mehrfacher bestimmter Integrale besteht keine Übereinstimmung, auch nicht in den bisher erschienenen Artikeln der Enzyklopädie. Ich finde es am zweckmäßigsten, die Differentialzeichen in der umgekehrten

Durch Anwendung derselben Betrachtungsweise auf die für ein Intervall $(-\pi \cdots + \pi)$ geltenden, Glieder beider Arten enthaltenden Reihen kommt *S. D. Poisson*[1255]) zu der für alle reellen $x$ geltenden Formel:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) \cos(\xi x - \xi \alpha) d\alpha d\xi. \tag{792}$$

*Fourier*[1256]) leitet diese durch folgende Überlegung aus seinen beiden Formeln ab: ist $f(x)$ eine gerade Funktion, so gilt (790) auch für negative $x$, dagegen ist die rechte Seite von (791) in diesem Falle gleich $-f(x)$; für eine ungerade Funktion verhält es sich umgekehrt. Andererseits kann man in beiden Integralen die Integrationsvariable $\alpha$ durch $-\alpha$ ersetzen und die so entstehenden Gleichungen dann mit den ursprünglichen verbinden.

Da in (792) unter den Integralzeichen eine gerade Funktion von $\xi$ steht, kann man auch schreiben[1257]):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos(\xi x - \xi \alpha) d\alpha d\xi. \tag{793}$$

In einer anderen Abhandlung[1258]) gewinnt *A. Cauchy* die Integralformel, indem er zunächst für den Fall, daß $x$ ein ganzzahliges Viel-

---

Reihenfolge zu schreiben wie die zugehörigen Integralzeichen, so daß jedes Integralzeichen zusammen mit seinem Differentialzeichen zugleich die Stelle einer Klammer vertritt und nach der allgemeinen Klammerregel die innerste Integration die zuerst auszuführende ist. — In der Zeit Fouriers ist übrigens von der Unterscheidung der Integrationsreihenfolge bei Integralen mit konstanten Grenzen überhaupt nicht die Rede; vgl. Nr. 29.

1254) Preisschrift von 1811, Paris mém. 4 (1819/20[24]), p. 492; théorie Nr. 353 = Oeuvres 1, p. 399.

1255) J. éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 429; 19 (1823), p. 47, 452. An den früheren Stellen bull. philomat. (1815), p. 165 und Paris mém. 1 (1816[18]), p. 85 gibt er nur die in Nr. 54 zu besprechende Modifikation. — In den Formeln von *A. Cauchy*, Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 144 (Preisschrift von 1815) ist die Zusammenfassung von (789) zu (790) nur implizite enthalten.

1256) Théorie Nr. 354 = Oeuvres 1, p. 400 (noch nicht in der Preisschrift von 1811). Ebenso *Poisson*, j. éc. polyt., cah. 19 (1823), p. 455 und *Cauchy*, bull. philomat. 1818, p. 179; Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 301. Den Rückweg von (792) zu (790) und (791) erörtert ausführlich *A. Pioch*, Brux. mém. cour. in 4°, 15 (1841/42), p. 34.

1257) Diese Form tritt bei *Fourier* théorie Nr. 404 = Oeuvres 1, p. 475 unvorbereitet auf, während er vorher immer nur die anderen gebraucht hatte. Die Begründung gibt *G. Piola*, mem. soc. ital. $20_2$ (1831), p. 599.

1258) Paris mém. 22 (1850) (von 1824) = Oeuvres (1) 2, p. 198.

faches von $h$ ist, die Gleichung aufstellt:

$$(794)\qquad \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{n}\exp\left(\frac{\xi(x-nh)i}{h}\right)f(nh)\,d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/h}^{\pi/h}\sum_{n=0}^{n}\exp\left(\xi(x-nh)i\right)f(nh)\,h\,d\xi \end{aligned}$$

und in dieser dann zu $h = 0$, $nh = \alpha$ übergeht.

Daß man bei dem Fourierschen Integral die Grenzen der Integration in bezug auf $\alpha$ beliebig wählen kann, wenn nur $x$ zwischen ihnen liegt, ist von jedem, der sich mit ihm beschäftigte, bald bemerkt worden; so von *Poisson*[1259]), *Plana*[1260]), *Cauchy*[1261]), *Fourier.*[1262]) Fällt $x$ in eine Grenze dieser Integration selbst, so ist der Wert des Integrals nicht $f(x)$, sondern nur $\frac{1}{2}f(\xi)$; will man das vermeiden, so kann man mit *Poisson*[1263]) einen Ausdruck subtrahieren, der dieselbe Art von Unstetigkeit aufweist; z. B.:

$$(795)\qquad f(0)\left[1-\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin x\xi}{\xi}\,d\xi\right].$$

**53. Die komplexe Form des Fourierschen Integrals.** *A. Cauchy* hat alsbald[1264]) bemerkt, daß es vielfach zweckmäßig ist, die Fouriersche Integralformel in der Form zu schreiben:

$$(796)\qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{\xi i(x-\alpha)} f(\alpha)\,d\alpha\,d\xi;$$

der imaginäre Bestandteil dieses Integrals ist nämlich Null.

**54. Die Auffassung der Integralrelation als Grenzgleichung.** Wie für die Darstellung einer willkürlichen Funktion durch eine trigonometrische Reihe, so sind auch für ihre Darstellung durch ein

1259) Paris mém. 3 (1818), p. 151; bull. philomat. (1822), p. 83 (zunächst für die Laplacesche Form des Integrals der Wärmeleitungsgleichung); j. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 47, 452. Chaleur p. 206 mit dem Zusatze: man müsse es sogar tun, wenn die darzustellende Funktion mit wachsendem Argument unbegrenzt wachse.

1260) Torino mem. 25 (1820), p. 132.

1261) Bull. philomat. 1821, p. 102; Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 301.

1262) Théorie Nr. 417 = Oeuvres 1, p. 501.

1263) J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 60.

1264) Bull. philomat. 1821, p. 102; j. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 512; mém. von 1827, p. 56.

trigonometrisches Integral zuerst Beweisansätze gegeben worden, die zwar nicht den eigentlichen Satz zu beweisen imstande sind, wohl aber an dessen Stelle einen anderen, der für viele — freilich nicht für alle — Zwecke dieselben Dienste leisten kann. So ersetzen *A. Cauchy*[1265]) und *S. D. Poisson*[1266]) das Integral (792) durch das folgende:

$$(797)\qquad \frac{1}{2\pi}\lim_{\delta=0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\delta\xi}\cos(\xi x-\xi\alpha)f(\alpha)\,d\xi\,d\alpha;$$

in ihm läßt sich die Integration nach $\xi$ zuerst ausführen, und es bleibt:

$$(798)\qquad \frac{1}{2\pi}\lim_{\delta=0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)\,\frac{\delta\,d\alpha}{\delta^2+(x-\alpha)^2},$$

also ein Integral ähnlicher Art wie (557), das sich auch ebenso weiter behandeln läßt.

*G. Plana*[1267]) erhebt gegen diese Schlußweise den Einwand, daß die bei der Integration nach $\xi$ benutzte Formel für $\delta=0$ zu gelten aufhöre; er ersetzt sie daher durch eine umständlichere, aber auch nicht strengere, indem auch er auf die Reihenfolge der auszuführenden Grenzübergänge nicht achtet und statt dessen davon redet, daß man die obere Grenze von $\xi$ von höherer Ordnung unendlich nehmen müsse als $1/\delta$.

*Cauchy*[1268]) bemerkt, daß man statt des Konvergenzfaktors $\exp(-\delta\xi)$

---

1265) Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 134 (von 1815); zunächst für die einzelnen Integrale (790) und (791), was etwas umständlicher ist; die Zusammenfassung bull. philomat. 1818, p. 178; j. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 512 und in einem Zusatz von 1827 zu der zuerst genannten Abhandlung, Oeuvres (1) 1, p. 302. Ib. p. 139 (von 1815) bemerkt Cauchy bereits, der Schluß setze genügende Abnahme von $f(x)$ im unendlichen voraus, meint aber, wenn diese Bedingung nicht erfüllt sei, könne man durch Benutzung eines stärkeren Konvergenzfaktors zum Ziele kommen.

1266) Bull. philomat. 1815, p. 165; Paris mém. 1 (1816[18]), p. 85; j. éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 429; chaleur p. 207. An den beiden ersten Stellen redet Poisson überhaupt nur von der Gleichung (797), gar nicht von (792); an der dritten erklärt er es wenigstens für „indispensable", (792) so zu verstehen, daß damit (797) gemeint sei. — Reproduziert ist das Verfahren auch von *A. Pioch*, Brux. mém. cour. in 4°, 15, 1841/42, p. 24.

1267) Torino mem. 25 (1820), p. 132. Derselbe Einwand auch bei *M. Ohm*, System der Mathematik 9. Nürnb. 1852, p. 362.

1268) Bull. philomat. 1821, p. 149; j. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 513. An der letztgenannten Stelle wirft Cauchy die Frage auf, ob man immer einen genügend starken Konvergenzfaktor bestimmen könne; wenn das nicht der Fall sei, müsse man die Anwendung der Formel auf solche Funktionen beschränken, auch andere, wie $\exp(-\delta^2\xi^2)$ oder $(1+\delta^2\xi^2)^{-1}$ benutzen könne; die numerischen Werte von Integralen, die dabei schließlich zu bestimmen seien, könne man, da sie von der Natur der Funktion $f(x)$ unabhängig seien, dadurch erhalten, daß man diese Funktion geeignet spezialisiere. Für den Konvergenzfaktor $\exp(-\delta\xi^2)$ ist die Rechnung auch von *Poisson*[1269]) durchgeführt, mit Hilfe der Gleichung (947).

*W. R. Hamilton*[1270]) leitet seine Reproduktion von Poissons Schlußweise (in verallgemeinerter Form, für irgendeinen geeigneten Konvergenzfaktor) mit den Worten ein „this formula [792] may also be considered as a limit in another way".

*G. Boole*[1271]) geht aus von der Gleichung

$$(799)\qquad \lim_{k=\infty}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha+\Delta\alpha-x}{k}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha-x}{k}\right)$$
$$=\begin{cases}\pi \text{ für } \alpha<x<\alpha+\Delta\alpha,\\ \frac{\pi}{2} \text{ für } \alpha=x \text{ oder } \alpha+\Delta\alpha=x,\\ 0 \text{ für } x<\alpha \text{ oder } x>\alpha+\Delta\alpha;\end{cases}$$

indem er hier $\Delta\alpha$ durch $d\alpha$ ersetzt und integriert, kommt er zu (798) [wobei freilich die Vertauschung der Reihenfolge der beiden Grenzübergänge noch der Rechtfertigung bedürfte].

*G. G. Stokes*[1272]) ergänzt Poissons Schlußweise durch die wesentliche Bemerkung, daß (792) dann als Grenzwert von (797) aufgefaßt werden dürfe, wenn das erstere Integral unbedingt konvergiere. Für den Fall, daß die Integration nach $\alpha$ zwischen endlichen Grenzen genommen werde, sei das jedenfalls der Fall, wenn $f''(x)$ endlich sei; denn dann könne man zweimal patiell integrieren. Er behauptet dann noch[1273]), wenn auch

$$(800)\qquad \int_0^\infty f(\alpha)\,d\alpha$$

unbedingt konvergiere, oder wenn $f(x)$ mit wachsendem $x$ schließlich

---

für welche es möglich sei. Aber bis jetzt habe man keine Veranlassung zu glauben, daß man jemals dem anderen Fall begegnen werde.

1269) J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 453; chaleur p. 208.

1270) Dubl. trans. $19_2$ (1843), p. 284.

1271) Dubl. trans. 21 (1848), p. 126 (von 1846). Auch er glaubt, die Formel sei überhaupt nur in diesem Sinne richtig („extraordinary or limiting meaning of the symbol $\int$"). p. 128 gibt er noch eine spezielle Verifikation für $f(x)=x^n$, unter Benutzung einer für drei aufeinanderfolgende Werte von $n$ geltenden Rekursionsformel.

1272) Cambr. trans. $8_5$ (1849), p. 557 (von 1847) = Papers 1, p. 272.

1273) p. 559 = 275.

monoton gegen null abnehme, dürfe man die obere Grenze der Integration nach $\alpha$ unendlich nehmen.

**55. Andere Modifikationen der Integralrelation.** Man kann auch an Stelle der eigentlichen Fourierschen Integralformel die folgende ins Auge fassen:

$$(801)\qquad \lim_{\xi=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\xi \cos(\xi x-\xi\alpha)f(\alpha)\,d\xi\,d\alpha.$$

Dann kann man nämlich zunächst die Integration nach $\xi$ ausführen, wodurch man

$$(802)\qquad \lim_{\xi=\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin(\xi x-\xi\alpha)}{x-\alpha}f(\alpha)\,d\alpha$$

erhält; und nun kann man aus den Formeln (808, $a$ endlich und $a=\infty$) schließen, daß das nach $\alpha$ genommene Integral nur über die unmittelbare Umgebung der Stelle $\alpha=x$ erstreckt zu werden braucht. So hat bereits *Deflers* selbst[1274]) gezeigt, daß der Grenzwert von (801), bzw. (802) $=f(x)$ ist, wenn die Funktion $f(x)$ die von ihm angegebene Bedingung (553) erfüllt. *Fourier* hat dann dargelegt[1275]), wie man sich dieses Resultat durch eine geometrische Betrachtung plausibel machen kann: die Gleichung (938) bleibt auch noch richtig, wenn $\varkappa$ über alle Grenzen wächst; das kann nur so verstanden werden, daß dann das Intervall $(0\ldots\pi)$ den Hauptbeitrag zum Werte dieses Integrals liefert, die abwechselnd positiven und negativen Beiträge der folgenden Intervalle aber sich nahezu gegeneinander wegheben. Daran kann sich aber auch nichts Wesentliches ändern, wenn vor der Integration noch mit einer Funktion $f(\alpha)$ multipliziert wird[1276]). Derjenige

1274) Bull. philomat. 1819, p. 166. Daß er nicht Fouriers eigentliche Behauptung, sondern eine modifizierte beweist, erkennt Deflers nicht; übrigens bemerkt er bereits, daß der Grenzwert nur gleich $1/2 f(x)$ ist, wenn $x$ mit einem Endpunkte des Intervalls zusammenfällt, über das nach $\alpha$ integriert wird. Reproduziert ist Deflers Schlußweise bei *Poisson*, J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 454; chaleur p. 209; bei *J. Liouville*, J. de math. 1 (1836), p. 19; bei *J. M. C. Duhamel*, Cours d'analyse 2, Paris 1840, p. 157; bei *A. A. Cournot*, Théorie des fonctions 2, Paris 1841 p. 217; bei *M. Ohm*, System der Mathematik 9, Nürnb. 1852, p. 362.

1275) Théorie N. 415 = Oeuvres 1, p. 496.

1276) Er gibt nicht genau an, welche Bedingungen die Funktion $f$ erfüllen muß, damit man so schließen darf, sondern sagt nur (Nr. 417, p. 499): „la démonstration précédente suppose la notion des infinies telle qu'elle a toujours été admise par les géomètres. Il serait facile de présenter la même démonstration sous une autre forme en examinant les changements qui résultent de l'accroissement continuel du facteur „$\xi$“ sous le signe sin. Ces considérations sont trop

Teil dieses Schlusses, der sich auf den Fall endlicher Integrationsgrenzen für $\alpha$ bezieht, ist dann von *W. R. Hamilton* unter der Voraussetzung, daß die Funktion $f(x)$ im allgemeinen stetig und in der Umgebung der betrachteten Stelle monoton sei, im einzelnen sorgfältig durchgeführt worden[1277]); welche Bedingungen im Unendlichen noch zu erfüllen sind, damit die obere Grenze jener Integration durch $\infty$ ersetzt werden darf, bleibt auch bei ihm unerörtert.

*J. L. Raabe*[1278]) glaubt diese Überlegungen dadurch vereinfachen zu können, daß er die von ihm als richtig angenommene Gleichung (vgl. Nr. **30**)

$$(803) \qquad \int_0^\infty \cos(\xi x - \xi\alpha)\, d\xi = \begin{cases} 0 \text{ für } x \neq \alpha, \\ \infty \;\;\text{„}\;\; x = \alpha \end{cases}$$

benutzt, um die Integration nach $\alpha$ auf die Umgebung der Stelle $\alpha = x$ zu reduzieren. Die Ausführung der Integration nach $\xi$ würde dann nur noch die Bestimmung des Grenzwerts

$$(804) \qquad \lim_{\delta=0} \delta \int_0^\infty \cos \delta\xi\, d\xi$$

verlangen; das umgeht Raabe, indem er sagt, dieser Grenzwert müsse von der Wahl der darzustellenden Funktion $f(x)$ unabhängig sein, so daß man irgendein aus den Formeln von Nr. **59** bekanntes Paar von reziproken Funktionen zu seiner Bestimmung benutzen kann.

*A. Pioch*[1279]) reproduziert das Verfahren von Deflers, will es aber nur als eine Verifikation, nicht als eine Ableitung gelten lassen. Er stellt es auch[1280]) vom andern Ende her dar, indem er von der Gleichung

$$(805) \qquad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\sin z}{z}\, dz$$

ausgeht, in ihr an Stelle von $z$ durch

$$(806) \qquad z = \xi(\alpha - x)$$

---

connues pour qu'il soit nécessaire de les rappeler." Von den Bedingungen, die $f$ im Unendlichen zu erfüllen hat, spricht er überhaupt nicht.

1277) Dubl. trans. 19 (1843), p. 266/79; Ankündigung Dubl. Proc. 4 (1839), p. 284.

1278) Differential- und Integralrechnung 1, Zürich 1839, p. 268, 274.

1279) Brux. mém. cour. in 4°, 15 (1841/42), p. 22. p. 27 gibt er an, wie man auf demselben Wege zeigen kann, daß der Wert des Doppelintegrals 0 ist, wenn $x$ außerhalb des Intervalls fällt, über das nach $\alpha$ integriert ist.

1280) p. 23.

eine neue Integrationsvariable $\alpha$ einführt, dann

(807) $$\frac{\sin(\xi x - \xi\alpha)}{x-\alpha} \text{ durch } \int_0^\xi \cos(\xi x - \xi\alpha)\,d\xi$$

ersetzt und schließlich zu $\xi = \infty$ übergeht.

Bei *O. Schlömilch*[1281]) ist die Reihenfolge der Schlüsse insofern eine andere, als er die Grenzformel

(808) $$\lim_{\xi=\infty}\int_0^a \frac{\sin \xi\alpha}{\alpha} f(\alpha)\,d\alpha = \frac{\pi}{2} f(0)$$

aus

(809) $$\lim_{\xi=\infty}\int_0^a \frac{\sin \xi\alpha}{\sin \alpha} f(\alpha)\,d\alpha = \frac{\pi}{2} f(0)$$

(vgl. Nr. **37**) dadurch ableitet, daß er in der letzteren $f(\alpha)$ durch

(810) $$f(\alpha)\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

ersetzt.

Später[1282]) geht Schlömilch von der Gleichung (vgl.[1056]) und (641) aus:

(811) $$\lim_{\xi=\infty}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi(\alpha)\sin \xi\alpha\,d\alpha = 0;$$

indem er in ihr $\varphi(\alpha)$ durch

(812) $$\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha}$$

ersetzt, erhält er die Gleichung

(813) $$\lim_{\xi=\infty}\int_0^{\alpha_2} f(\alpha)\frac{\sin \xi\alpha}{\alpha}\,d\alpha = f(0)\int_0^\infty \frac{\sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha,$$

aus der sich dann das Weitere wie bei den andern Autoren ergibt. Der Übergang zu $\alpha_2 = \infty$ macht auch ihm kein Bedenken. Nachher[1283]) gibt er noch ein anderes Verfahren: er beweist zunächst durch Umkehrung der Integrationsreihenfolge die Gleichung:

(814) $$\int_0^\infty\int_0^{\alpha_2} F(\alpha)\frac{\cos \xi x \sin \xi\alpha}{\xi}\,d\alpha\,d\xi = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_x^{\alpha_2} F(\alpha)\,d\alpha & \text{für } x < \alpha_2, \\ 0 & \text{,, } x > \alpha_2 \end{cases}$$

ersetzt dann $F(x)$ durch $f'(x)$ und integriert partiell.

1281) Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale, Jena 1843 p. 29.

1282) Analytische Studien 2, Leipzig 1848, p. 23; etwas anders gewendet p. 72.

1283) Ib. p. 82; J. f. Math. 36 (1848), p. 268. Ebenso übrigens vorher schon *A. Kramer*, Progr. Gymn. Nordhausen 1845, p. 9.

*O. Bonnet*[1284]) leitet, wenn $f(\alpha)$ positiv ist und nicht zunimmt, mit Hilfe des ersten Mittelwertsatzes die Doppelungleichung ab:

$$(815)\qquad -\frac{2}{\xi}\frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon} < \int\limits_{\varepsilon}^{\alpha_2} f(\alpha)\frac{\sin\xi\alpha}{\alpha}d\alpha < \frac{2}{\xi}\frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

aus der hervorgeht, daß der Grenzwert dieses Integrals für $\xi = \infty$ gleich Null ist, wie klein auch $\varepsilon$ gewählt sein mag; und mit Hilfe des zweiten (vgl. Nr. **39**):

$$(816)\qquad 0 < \int\limits_0^{\varepsilon} (f(\alpha) - f(\varepsilon))\frac{\sin\xi\alpha}{\alpha}d\alpha < (f(0) - f(\varepsilon))\int\limits_0^{\varepsilon}\frac{\sin\xi\alpha}{\alpha}d\alpha,$$

woraus wieder

$$(817)\qquad \int\limits_0^{\varepsilon} f(\alpha)\frac{\sin\xi\alpha}{\alpha}d\alpha = \frac{\pi}{2}f(0)$$

folgt. Die Frage des Grenzübergangs zu $\alpha_2 = \infty$ läßt er unerörtert.

**56. Andere Versuche, den Fourierschen Integralsatz zu beweisen.** *Sarrus*[1285]) will die Fouriersche Integralformel dadurch beweisen, daß er zunächst aus den Gleichungen (834), (835), (847), die speziellen Formeln:

$$(818)\qquad \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-m\alpha}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\xi x\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\xi\alpha\, d\alpha\, d\xi = \frac{\pi}{2}e^{-mx}$$

ableitet, dann beiderseits mit $\varphi(m)dm$ multipliziert und zwischen zwei positiven Grenzen integriert, endlich

$$(819)\qquad \int e^{-mx}\varphi(m)dm = f(x)$$

setzt und die so definierte Funktion $f$ als eine willkürliche betrachtet; doch fehlt bei ihm sowohl eine Untersuchung darüber, welche Funktionen $f$ sich in der Gestalt (816) darstellen lassen, als auch die Rechtfertigung der vorgenommenen Vertauschungen von Grenzübergängen.

Auch in *A. Cauchys* Versuch, den Fourierschen Integralsatz, bzw. seine eigene Umgestaltung (796) desselben zu beweisen[1286]), wird die Reihenfolge von Grenzübergängen ohne Begründung vertauscht. Er leitet zunächst durch Anwendung seines Residuensatzes auf ein Drei-

1284) J. de math. 14 (1849), p. 253.

1285) Gerg. ann. 12 (1822), p. 39.

1286) Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 149.

eck mit den Ecken 0, $(a+ib)/\varepsilon$, $(a+ic)/\varepsilon$ die Gleichung her:

$$(820)\quad \int_0^{1/\varepsilon}[(a+ib)\varphi(ar+ibr)-(a+ic)\varphi(ar+icr)]dr = i\int_c^b \varphi\left(\frac{a+ip}{\varepsilon}\right)\frac{dp}{\varepsilon}.$$

Wird in ihr

$$(821)\quad \varphi(z)=\int_{x_0}^{x} e^{-z(x-\alpha)}f(\alpha)d\alpha$$

gesetzt, so läßt sich rechts die Integration nach $\alpha$ ausführen, indem

$$(822)\quad i\int_c^b\int_{x_0}^{x}\exp\left(-\frac{(a+ip)(x-\alpha)}{\varepsilon}\right)f(\alpha)d\alpha\frac{dp}{\varepsilon} = i\int_c^b\int_0^{\frac{x-x_0}{\varepsilon}}\exp(-as-ips)f(x-\varepsilon s)ds\,dp$$

in der Grenze $\varepsilon=0$ zu

$$(823)\quad if(x)\int_c^b\frac{dp}{a+ip}$$

wird. Für $a=0$, $b=1$, $c=-1$ wird erhalten:

$$(824)\quad \int_0^\infty\int_{x_0}^{x}\cos(rx-r\alpha)f(\alpha)d\alpha dr=\pi f(x);$$

wird das mit der analog abzuleitenden Gleichung

$$(825)\quad \int_0^\infty\int_x^X\cos(rx-r\alpha)f(\alpha)d\alpha dr=\pi f(x)$$

verbunden, so kommt man auf die zu beweisende Gleichung (796). Außerdem behandelt Cauchy auch noch den Grenzfall $b=c=0$; dieser liefert[1287])

$$(826)\quad f(x)=\frac{a}{2}\int_0^\infty\int_{x_0}^X\frac{\partial}{\partial a}(a\exp(-ar|x-\alpha|)f(\alpha)d\alpha dr.$$

*A. de Morgan*[1288]) glaubt den Schluß von der trigonometrischen

1287) p. 154. Er bemerkt, daß man die Formel auch dadurch beweisen könne, daß man einen Konvergenzfaktor $\exp(-\varepsilon r)$ einführe und dann mit Hilfe der Substitution $a|x-\alpha|=\varepsilon s$ zuerst die Integration nach $r$ ausführe.

1288) Diff. and. int. calc. Lond. 1836/41, p. 618, 628. Er setzt ausführlich auseinander, wie man mit Hilfe des Theorems beliebige „diskontinuierliche“ Funktionen analytisch darstellen könne.

Reihe auf das Fouriersche Integral zunächst durch die Wendung rechtfertigen zu können: „which being true for all values of $l$ is true at the limit when $l$ is infinite.“ Er scheint nicht zu erkennen, daß der Satz nur unter bestimmten Voraussetzungen über das Verhalten der darzustellenden Funktion im Unendlichen Sinn hat; wohl aber sieht er, daß den üblichen Beweismethoden solche Voraussetzungen implicite zugrunde liegen, und verwirft sie daher: sowohl die Einführung von Konvergenzfaktoren als die Deflerssche Schlußweise, die letztere wenigstens, wenn man nicht annehmen wolle, daß $\sin\infty = 0$ zu setzen sei. Was er selbst dann für einen Beweis ausgibt, besteht freilich auch nur darin, daß er die Vertauschung der Integrationsreihenfolge damit rechtfertigen will, daß man doch Integration und Summation vertauschen könne.

*A. Pioch*[1289]) geht aus von der Gleichung

$$(827)\quad \frac{1}{\pi}\sum_{\nu=0}^{n}\int_0^\infty b_\nu[\sin(\xi x - \xi a_\nu) - \sin(\xi x - \xi a_{\nu+1})]\frac{d\xi}{\xi} = \begin{cases} b_\nu & \text{für } a_\nu < x < a_{\nu+1}, \\ \frac{1}{2}(b_{\nu-1} + b_\nu) & \text{für } x = a_\nu; \end{cases}$$

läßt man in ihr die Anzahl der $a_\nu$ über alle Grenzen zu-, die Abstände je zweier aufeinanderfolgender unbegrenzt abnehmen, und ersetzt die Differenzen in den Klammern durch Produkte, so kann man die $a_\nu$ als Werte einer kontinuierlichen Veränderlichen $\alpha$, die Differenz zweier aufeinanderfolgender als deren Differential, die $b_\nu$ als Werte einer Funktion von ihr, die Summation nach $\nu$ als eine Integration nach $\alpha$ ansehen. Der Übergang zu $\alpha_2 = \infty$ macht ihm keine Skrupel[1290]).

Ein mit *G.* zeichnender Autor[1291]) leitet zuerst durch wiederholte partielle Integration die Gleichung her:

$$(828)\quad \int f(\alpha)\cos(\xi x - \xi\alpha)\,d\alpha = -\int\left[1 + \int\frac{\partial}{\partial\alpha} + \int\int\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \cdots\right]f(\alpha)\cos(\xi x - \xi\alpha)\,d\alpha$$

in der die Integrationen rechts in der Klammer sich alle auf $x$ beziehen und zwischen den Grenzen 0 und $x$ zu nehmen sind; daraus

1289) Brux. mém. cour. in 4°, 15 (1841/42), p. 16. Er erörtert p. 29 ausführlich das Verhalten des Integrals an Sprungstellen der zu integrierenden Funktion, indem er [irrtümlicherweise, vgl. [1263])] glaubt, daß sei noch nicht geschehen.

1290) p. 20.

1291) Cambr. math. J. $3_6$ (1843), p. 288.

auf Grund der unter [843]) erwähnten Annahme

$$(829)\int_0^\infty f(\alpha)\cos(\xi x-\xi\alpha)d\alpha=\int\left[f(0)+\int f'(0)+\int\int f''(0)+\cdots\right]\cos\xi x\,d\xi\,.$$

Wird dann noch nach $\xi$ zwischen den Grenzen 0 und $\infty$ mit Hilfe der Gleichungen (517) und (532) integriert, so wird die Maclaurinsche Entwicklung von $\pi/2f(x)$ erhalten.

**57. Umgestaltungen der Fourierschen Integralformel.** *G. Piola*[1292]) schreibt die Fouriersche Formel (791) zunächst in der Gestalt:

$$(830)\qquad f(x)=\frac{2u}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \sin u\xi x\,\sin u\xi\alpha f(\alpha)\,d\alpha\,d\xi$$

multipliziert dann beiderseits mit $\sin au$, verwandelt das Produkt der Sinus in eine Summe und integriert nach $u$ mit Hilfe von (938), beachtet aber dabei nicht, daß diese Gleichung nur für $\varkappa>0$ gilt.

*G. Boole*[1293]) erhält durch Benutzung der Gleichungen (796) und (920):

$$(831)\quad \frac{f(x)}{tn}=\frac{1}{\pi\Gamma(n)}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty} w^{n-1}f(\alpha)\cos\left(\xi\alpha-\xi x-tw+\frac{n\pi}{2}\right)d\alpha\,d\xi\,dw.$$

**58. Das Fouriersche Integral für den Fall von Unstetigkeiten der darzustellenden Funktion.** Für den Fall, daß die darzustellende Funktion Unstetigkeiten aufweist, hat *A. Cauchy*[1294]) vorgeschlagen, an ihrer Stelle die Funktion $f(x)\exp(-\beta f(x)^2)$ darzustellen, die sich für hinlänglich kleine $\beta$ außer in der Umgebung der Unstetigkeitsstelle beliebig wenig von $f(x)$ unterscheidet.

*G. Stokes*[1295]) bemerkt, das Auftreten einer endlichen Anzahl von Unendlichkeitsstellen bereite hier ebensowenig Schwierigkeiten, als im Falle der Reihen (Nr. **42**), wenn nur $\int f(x)dx$ in der Umgebung jeder solchen Stelle unbedingt konvergent sei.

**59. Paare reziproker Funktionen.** Wird

$$(832)\qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\xi)\cos x\xi\,d\xi=\varphi(x)$$

---

1292) Mem. Soc. ital. 20 (1831), p. 626. Die Verifikation des Spezialfalls $f(x)=x^{-1}$ benutzt divergente Integrale (p. 628).

1293) Dubl. trans. 21 (1848), p. 130 (von 1846).

1294) Paris mém. prés. 1 (1827), p. 145 (von 1814) = Oeuvres (1) 1, p. 139.

1295) Cambr. trans. $8_3$ (1849), p. 561 (von 1847 = Papers 1, p. 279.

gesetzt, so sagt die Gleichung (790) aus, daß auch

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \varphi(\xi)\cos x\xi\, d\xi = f(x)$$

ist, daß also die Funktionen $f$ und $\varphi$ in einer involutorischen Beziehung zueinander stehen. Ebenso kann die Gleichung (791) durch das Gleichungspaar

$$(833)\qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\xi)\sin x\xi\, d\xi = \psi(x), \qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \psi(\xi)\sin x\xi\, d\xi = f(x)$$

ersetzt werden. *A. Cauchy*[1296]) nennt daher $f$ und $\varphi$ „reziproke Funktionen erster Art", $f$ und $\psi$ „reziproke Funktionen zweiter Art". Von Fällen, in welchen die zu einer sog. „elementaren" Funktion reziproke sich ebenfalls durch elementare Funktionen ausdrücken läßt, ist aus Untersuchungen verschiedener Ziele und verschiedener Methoden eine ziemliche Anzahl bekannt:

**a**) Direkt durch Auswertung des unbestimmten Integrals und Einsetzung der Grenzen läßt sich eigentlich nur ein Fall erledigen; es ist:

$$(834)\qquad \int_0^\infty e^{-r\xi}\cos x\xi\, d\xi = \frac{r}{r^2+x^2},$$

$$(835)\qquad \int_0^\infty e^{-r\xi}\sin x\xi\, d\xi = \frac{x}{r^2+x^2}.$$

**b**) Formeln, die zu den Umkehrungen der unter **a**) besprochenen in Beziehung stehen, hat zuerst *P. S. de Laplace*[1297]) folgendermaßen erhalten: Seine Methode der Integration von Differenzengleichungen durch bestimmte Integrale führt für die Gleichung

$$(836)\qquad y_{s+1} = (s+1)\,y_s$$

auf das Integral $\int a^s e^{-a}\, da$, genommen zwischen geeigneten Grenzen. Ist $s > 0$, so können 0 und $+\infty$ als Grenzen angenommen werden, und man erhält das später von Gauß mit $\Pi(s)$ bezeichnete Integral (II A 3

1296) Bull. philomat. 1817, p. 121; 1818, p. 178; exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 177. — In der der komplexen Form des Integralsatzes (Nr. 53) entsprechenden Gestalt findet sich der Reziprozitätssatz als „schönes Theorem der Wahrscheinlichkeitsrechnung" im Nachlaß von *C. F. Gauß* (Werke 8, p. 88; aus der Zeit zwischen 1799 und 1813).

1297) Paris mém. (1782[85]) = Oeuvres 10, p. 258; reproduziert théorie analytique des probabilités, livre I, Nr. 33 (p. 126 der Ausgabe von 1814). „Par des considérations très-délicates", sagt *Poisson*, j. éc. polyt., cah. 19 (1823), p. 481.

*Brunel*, Nr. 12a, p. 157). Aus der Differenzengleichung folgt, wenn $s - \mu$ eine positive ganze Zahl ist:

$$\Pi(s) = \Pi(\mu) \cdot (\mu + 1)(\mu + 2) \cdots s. \tag{837}$$

Wird $s$ durch eine negative Zahl ersetzt, so divergiert diese Form; Laplace nimmt dann $-i\infty$ und $+i\infty$ als Grenzen.[1298]) Sei etwa zur Abkürzung[1299])

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} (-a)^{-s} e^{-a} da = \Pi_1(-s) \tag{838}$$

gesetzt, so folgt:

$$\Pi_1(-\mu) = \Pi_1(-s)(s-1)(s-2)\dots\mu. \tag{839}$$

Die Gleichungen (837) und (839) zusammen ergeben, daß

$$\mu^{-1}\Pi(\mu)\Pi_1(-\mu) = s^{-1}\Pi(s)\Pi_1(-s), \tag{840}$$

also von $\mu$ unabhängig ist. Nun zeigt Laplace durch die hier in Nr. 109 zu besprechende Methode, daß für große $s$ asymptotisch

$$\Pi(s) \sim s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s}, \qquad \Pi_1(-s) \sim s^{-s} e^s \sqrt{-2\pi s} \tag{841}$$

ist; daraus folgt[1300])

$$\lim_{s=\infty} [s^{-1}\Pi(s)\Pi_1(-s)] = 2\pi i \tag{842}$$

---

1298) Die Benutzung komplexer Größen hat ihn später selbst nicht mehr befriedigt; vgl. Paris mém. 11 (1810) = Oeuvres 12, p. 361: „j'ai obtenu ces valeurs par une analogie singulière, fondée sur les passages du réel à l'imaginaire, passages qui peuvent être considérés comme moyens de découvertes, dont les premières applications ont paru, si je ne me trompe, dans les mémoires cités et qui ont conduit aux valeurs de diverses intégrales définies dépendantes des sinus et cosinus. Mais ces moyens, comme celui d'induction, quoique employés avec beaucoup de précaution et de réserve, laissent toujours à désirer des démonstrations de leurs résultats".

1299) Wenn der von $-i\infty$ nach $+i\infty$ führende Integrationsweg den Nullpunkt zur Linken läßt, so ist dieses Integral gleich Null; Laplace kommt nicht in die Lage, sich mit dieser Schwierigkeit auseinandersetzen zu müssen, weil ihn die Rücksicht auf die nachher zu benutzende asymptotische Darstellung veranlaßt, die Integration über den negativ reellen Wert $a = -s$ zu führen. — Übrigens nimmt Laplace nicht $(-a)^{-s}$, sondern $a^{-s}$; ersteres ist bei nicht ganzzahligem $s$ (Laplace denkt nur an ganzzahlige) für die weitere Rechnung bequemer, indem man dadurch die Diskussion der Werte erspart, die den bei Laplace mehrfach in der Rechnung vorkommenden Potenzen von $-1$ beizulegen sind. — Den vorkommenden Potenzen von komplexen Größen mit positivem reellen Bestandteil sind die Hauptwerte beizulegen.

1300) Daß in der Tat $+i$ und nicht $-i$ zu nehmen ist, würde sich aus einer genaueren Untersuchung der zur Ableitung der asymptotischen Darstellung benutzten Substitution einer neuen Integrationsvariablen ergeben.

und also allgemein:

$$(843)\qquad \mu^{-1}\Pi(\mu)\,\Pi_1(-\mu) = 2\pi i.$$

Wird schließlich noch $a = -\mu + i\xi$ gesetzt, und nur der reelle Bestandteil beibehalten — der imaginäre ist Null — so kommt:

$$(844)\int\limits_0^\infty\{[(\mu+\xi i)^\mu+(\mu-\xi i)^\mu]\cos\xi+i[(\mu-\xi i)^\mu-(\mu+\xi i)^\mu]\sin\xi\}\frac{d\xi}{(\mu^2+\xi^2)^\mu} = \frac{2\mu\pi e^{-\mu}}{\Pi(\mu)}$$

speziell für $\mu = 1$[1301]):

$$(845)\qquad \frac{\pi}{e} = \int\limits_0^\infty \frac{\cos\xi+\xi\sin\xi}{1+\xi^2}\,d\xi = \int\limits_0^\infty \frac{(3+\xi^2)\,\xi\sin\xi}{(1+\xi^2)^2}\,d\xi.$$

Später gibt Laplace noch ein anderes Verfahren[1302]): das Doppelintegral

$$(846)\qquad \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-\eta^2(r^2+\xi^2)}\,\eta\cos x\xi\,d\eta\,d\xi$$

läßt sich auswerten, wenn man zuerst nach $\eta$ integriert und die Gleichung (834) sowie die zweite Gleichung von II A 3, *Brunel,* Nr. 9h, p. 153 benutzt; führt man zuerst die Integration nach $\xi$ aus und vergleicht die Resultate, so ergibt sich:

$$(847)\qquad \int\limits_0^\infty \frac{\cos x\xi}{r^2+\xi^2}\,d\xi = \frac{\pi}{2r}\,e^{-rx}$$

---

1301) Laplace gibt nicht an, wie er von dem ersten Integral (845) auf das zweite kommt; daß die Differenz der beiden Integrale in der Tat Null ist, davon kann man sich durch elementare Ausführung der unbestimmten Integration überzeugen. *Fourier* macht ann. chim. phys. 3 (1816) p. 363 darauf aufmerksam, daß das etwas allgemeinere Integral

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos x\xi+\xi\sin x\xi}{1+\xi^2}\,d\xi$$

nur für positive $x$ den Wert $\pi e^{-x}$ hat, für negative dagegen den Wert 0.

1302) Bull. philomat. 1811, p. 263; Paris mém. 11 (1810) = Oeuvres 12, p. 367; théorie analytique des probabilités, Paris 1812 (p. 108 der Ausgabe von 1847); reproduziert auch von *A. M. Legendre,* exerc. de calc. int. 1 (1811), p. 361; von *J. L. Raabe*, Differential- u. Integralrechnung 1, Zürich 1839, p. 261; von *A. A. Cournot,* théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 184; von *O. Schlömilch*, Integralrechnung, Greifswald 1848, p. 138; von *M. Ohm,* System der Mathematik 9, Nürnb. 1852, p. 145.

und daraus durch Differentiation nach $x$:

(848) $$\int_0^\infty \frac{\xi \sin x\xi}{r^2+\xi^2} d\xi = \frac{\pi}{2} e^{-rx}.$$

Differentiationen[1303]) nach $r$ bzw. $r^2$ geben weitere Formeln, mit deren Hilfe sich schließlich jedes Integral der Formen

(849) $$\int_0^\infty R(\xi) \cos x\xi \, d\xi, \qquad \int_0^\infty \xi R(\xi) \sin x\xi \, d\xi$$

auswerten läßt, wenn $R$ eine rationale Funktion bedeutet, deren Nenner keine reellen Nullstellen hat. *A. Cauchy*[1304]) schreibt diese allgemeinen Formeln in der Gestalt:

(850) $$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} x\xi \, d\xi = 2\pi \sum e^{-\beta x} \left\{ \begin{matrix} \mu \cos \alpha x - \lambda \sin \alpha x \\ \mu \sin \alpha x + \lambda \cos \alpha x \end{matrix} \right\};$$

in ihr bedeutet $\alpha + i\beta$ einen Pol von $F(z)$, $\lambda - i\mu$ das zugehörige Residuum, und die Summe ist über alle diejenigen Pole zu erstrecken, für welche $\beta > 0$ ist.

*G. Bidone* kommt durch Benutzung divergenter Reihen und andere ungenügend begründete Annahmen zunächst zu der Gleichung[1305])

(851) $$\int_0^\infty \frac{\cos x\xi \, d\xi}{r^2+\xi^2} = \frac{\pi \operatorname{Cof} rx}{2r} - \frac{\operatorname{Sin} rx}{r} \int_0^\infty \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi$$

und daraus erst mit Hilfe von (486) zu (847). Auf dieselbe Weise kommt er auch noch zu den Gleichungen[1306]):

(852) $$\int_0^\infty \left\{ \begin{matrix} r \cos x\xi \\ \xi \sin x\xi \end{matrix} \right\} \frac{d\xi}{\xi^2 - r^2} = \mp \frac{\pi}{2} \left\{ \begin{matrix} \sin rx \\ \cos rx \end{matrix} \right\}$$

---

1303) Anweisung zur bequemen Ausführung dieser Differentiationen gibt *O. Schlömilch*, J. f. Math. 33 (1846), p. 271 und analytische Studien 2, Leipzig 1848, p. 96.

1304) Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 429, 465 (v. 1814); exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 181 (hier in ausgerechneter Form); ann. de math. 17 (1827), p. 98 (hier p. 97 auch der Fall, daß $F(x)$ gleich einer rationalen Funktion von $z$, geteilt durch $\cos bz$ oder $\sin bz$ ist). An der zuerst genannten Stelle gibt Cauchy an, er habe die Formeln schon 1817 in Vorlesungen mitgeteilt.

1305) Torino mem. 1811/12, p. 288; daran anschließend und p. 313 analoge Formeln für Integrale mit Produkten und Potenzen mehrerer trigonometrischer Funktionen im Zähler. — In dem ähnlichen Verfahren von *J. Littrow*, Anleitung zur höheren Mathematik, Wien 1836, p. 436, heben sich mehrere Fehler im Resultat gerade auf.

1306) p. 308. Dieselben Resultate erhält *G. Plana* (ib. 23 (1818), p. 14; von

Ein Versuch zur direkten Behandlung der allgemeinen Integrale (849) findet sich zuerst bei *S. D. Poisson*[1307]); er leitet für das Integral

$$(853)\qquad y = \int_0^\infty \frac{\cos x\xi\, d\xi}{A + B\xi^2 + C\xi^4 + \cdots + \xi^{2n}}$$

durch wiederholte Differentiationen nach $x$ unter dem Integralzeichen [von denen die letzte nicht mehr zulässig ist] die Differentialgleichung ab:

$$(854)\quad Ay - B\frac{d^2y}{dx^2} + C\frac{d^4y}{dx^4} - + - \cdots + (-1)^n \frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} = \int_0^\infty \cos x\xi\, d\xi$$

und nimmt dann wie auch sonst (Nr. **30**) an[1308]), der Wert des rechts-

1816) auf dem Umwege über die entsprechenden Integrale mit $(\xi^2 - r^2)^2$ im Nenner. Wenn *Poisson* (j. éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 329, 339) andere Werte findet, so beruht das auf einer anderen Annahme über den dem divergenten Integral

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^2 - 1}$$

beizulegenden Wert; man kann das eine oder das andere Resultat erhalten, je nachdem man den Integrationsweg in der einen oder anderen Weise ins komplexe Gebiet verschiebt. In der Tat schließt Poisson hier Erörterungen über die Abhängigkeit auch konvergenter Integrale von den etwa eingeschalteten komplexen Zwischenwerten an, die aber doch noch weit von der Bestimmtheit der entsprechenden Cauchyschen Sätze entfernt sind. — *Ph. Kelland* (Cambr. trans. $7_2$ (1841), p. 168; Edinb. trans. $15_2$ (1842), p. 319, 329) benutzt die Formeln (847) usw. auch für rein imaginäre $r$.

1307) Bull. philomat. 1811, p. 375; J. Éc. polyt. cah. 17 (1813), p. 222. An der zweiten Stelle rechnet er von p. 225 an den Fall ausführlich durch, daß der Nenner sich auf $1 + x^{2n}$ reduziert; für $n = 1$ ist die Rechnung von *S. F. Lacroix* Traité du calc. diff. et du calc. int. 3, (2me éd.) Paris 1819, p. 492, sowie von *A. de Morgan*, calculus p. 577 reproduziert. Den allgemeinen Fall für $n = 2$ rechnet auch *G. Plana* durch (Torino mem. 23 (1818), p. 9 (von 1816)) mit Diskussion der den auftretenden mehrwertigen Funktionen beizulegenden Werte (p. 21) und des Grenzfalles, daß die determinierende Gleichung Doppelwurzeln hat (p. 11). Die Formeln für $n = 1$ erhält er aus denjenigen für $n = 2$ durch Integration nach $r$; *de Morgan* verifiziert Poissons Resultat für

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\xi}{1 + \xi^{2n}}\, d\xi$$

durch die Residuensätze (calc. p. 637); für $n = 1$ auch bei Gelegenheit der unter p besprochenen Rechnungen.

1308) *S. Earnshaw* der das für unzulässig hält, keine andere Methode zur Ableitung des Resultats (für $n = 1$) kennt und daran Anstoß nimmt, daß ein solches Integral in verschiedenen Intervallen verschiedenen analytischen Funktionen des Parameters $x$ gleich sein soll, hält deswegen dieses Resultat selbst für stehenden Integrals sei Null. Die Integrationskonstanten bestimmt er teils durch die Bemerkung, daß $y$ für $x = \infty$ endlich bleiben muß, teils aus den Werten der Ableitungen ungerader Ordnung für $x = 0$ $\left(\text{die } n - 1 \text{ ersten von ihnen sind } = 0, \text{ die letzte ist } = (-1)^n \frac{\pi}{2}\right)$. Die bei dieser Schlußweise in dem auftretenden divergenten Integral liegende Schwierigkeit will *A. M. Legendre*[1309]) dadurch umgehen, daß er als obere Grenze zunächst nicht $\infty$, sondern $\frac{2k\pi}{x}$ nimmt, unter $k$ eine ganze Zahl verstanden, und erst am Schlusse zu $k = \infty$ übergeht. Dagegen wendet *B. Paoli*[1310]) mit Recht ein, daß man nicht ohne weiteres $k$ als ganze Zahl voraussetzen dürfe; er zeigt aber, daß man mit etwas mehr Rechnung auch ohne diese Voraussetzung zum Ziele kommt[1311]). Etwas anders verfährt *J. M. C. Duhamel*[1312]): er nimmt als ober Grenze zunächst eine von $x$ unabhängige Größe $l$, so daß er die Differentialgleichung

(855) $$\frac{d^2y}{dx^2} - y + \frac{\sin lx}{x} = 0$$

erhält; zur Bestimmung der Grenzwerte der in ihrem Integral auftretenden Quadraturen für $l = \infty$ beruft er sich auf die Fouriersche Schlußweise (Nr. 37). Einen anderen Ausweg schlägt *W. R. Hamilton*[1313]) ein; wird der Wert von (847) mit $B$ bezeichnet, so zeigt er

---

unrichtig (Cambr. trans. $8_3$ (1847), p. 265) und meint, da der Integrand eine gerade Funktion von $r$ sei, müsse man annehmen, der Wert des Integrals (847) sei $B \cos rx$; da er aber die Bestimmung der Integrationskonstanten durch die Annahme $x = 0$ auch für unzulässig hält, sieht er kein Mittel, $B$ zu bestimmen.

1309) Exerc. de calc. int. 1 (1811), p. 357; ebenso *Navier*, leçons d'analyse 2, Paris 1840, p. 13. *Legendre* nimmt für die Koeffizienten auch komplexe Werte; das gibt aber schließlich auch nur Integrale, die schon unter den Formen (849) enthalten sind.

1310) Mem. soc. ital. 20 (1828), p. 174. Es macht ihm auch Bedenken, daß man zu keinem bestimmten Resultat kommt, wenn man erst $2k\pi$ selbst als obere Grenze einführt; doch sind diese Bedenken ungerechtfertigt. Sein Einwand gegen die Konstantenbestimmung durch die Annahme $x = 0$: bei dem Integral (848) würde dieses Verfahren auf falsche Resultate führen, ist insofern gerechtfertigt, als in der Tat gezeigt werden müßte, daß (847) eine bis $x = 0$ einschließlich stetige Funktion von $x$ ist; Ähnliches gilt aber auch für die Reihenentwicklungen, die er noch herbeizieht, und die ihn nur in neue Paradoxa verwickeln. — Die Benutzung komplexer Größen will er p. 179 damit rechtfertigen, daß, wie er zeigt, die Integrale als Funktionen von $r$ und $x$ der Laplaceschen Differentialgleichung genügen.

1311) Bei *J. M. C. Duhamel*, cours d'analyse 2, Paris 1840, p. 139 ist weniger Rechnung, aber die Schlußweise ungenügend.

1312) Cours d'analyse 2, Paris 1840, p. 139.

1313) Dubl. trans. $9_2$ (1843), p. 277. Vgl. auch *Serret*[1320]).

zunächst, daß

$$(856)\qquad \int_0^x B\,dx - \frac{dB}{dx} = \int_0^\infty \frac{\sin x\xi}{\xi}\,d\xi$$

ist; da die rechte Seite von $x$ unabhängig ist (ihren Wert braucht man nicht zu kennen), so folgt durch Integration

$$(857)\qquad e^{-x}\left[\int_0^x B\,dx + B - \int_0^\infty \frac{\sin x\xi}{\xi}\,dx\right] = \text{const.};$$

und zwar muß die Konstante gleich Null, also

$$(858)\qquad B + \frac{dB}{dx} = 0$$

sein. Damit der Sache nach identisch ist das Verfahren von *O. Schlömilch*[1314]) und von *M. Ohm*[1315]), die von dem Integral

$$(859)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin x\xi}{r^2+\xi^2}\frac{d\xi}{\xi} = \frac{\pi}{2}(1 - \exp(-|r|x))$$

ausgehen. Auch *F. Arndt*[1316]) verwirft Poissons Schlußweise wegen der Benutzung der divergenten Integrale. *J. R. Young*[1317]) ist der Meinung, daß sich bei ihm zwei Fehler gegeneinander aufheben; das Legendresche Verfahren führe deswegen zu einem richtigen Resultat, weil die Integrale konvergierten, so daß es gleichgültig sei, ob man die obere Grenze durch beliebige oder durch spezielle Zwischenwerte ins Unendliche wachsen lasse. *G. G. Stokes*[1318]) leitet zunächst für das Integral

$$(860)\qquad v = \int_0^\infty \frac{e^{-h\xi}\cos x\xi}{1+\xi^2}\,d\xi$$

die Differentialgleichung

$$(861)\qquad \frac{d^2v}{dx^2} - v = -\frac{h}{h^2+x^2}$$

1314) Analytische Studien 2, Leipzig 1848, p. 94.

1315) System der Mathematik 9, Nürnberg 1852, p. 126.

1316) Arch. Math. 11 (1848), p. 71.

1317) Cambr. trans. $8_4$ (1847), p. 436.

1318) Cambr. $8_5$ (1849), p. 565 (von 1847) = Papers 1, p. 285. Damit der Sache nach identisch ist auch das Verfahren von *Br. Bromwin*, Cambr. Dubl. math. J. 3 (1848), p. 243, nur daß dieser sich der symbolischen Rechnung bedient, nicht nach $x$, sondern nach $h$ differentiiert und übrigens sich weder um die Reihenfolge der vorzunehmenden Grenzübergänge noch um die Bestimmung der Integrationskonstanten Sorge macht.

ab und meint dann, man dürfe hier zu $h = 0$ übergehen, indem das Integral (860) dabei gleichmäßig zu seinem Grenzwert konvergiere, solange $x$ sein Vorzeichen nicht wechsle.

*E. Catalan*[1319]) führt die Poissonsche Rechnung für das Integral

(862) $$y_n = \int_0^\infty \frac{\cos x\xi\, d\xi}{(1+\xi^2)^n}$$

durch; er zeigt, daß es gleich dem Produkt von $e^x$ in eine rationale ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von $x$ ist, deren Koeffizienten sich durch Gammafunktionen ausdrücken lassen; indem er dann wieder zusammenzieht, erhält er:

(863) $$y_n = \frac{\pi e^{-x}}{2^{2n-1}\Gamma(n)^2}\int_0^\infty e^{-u}(u+2x)^{n-1}u^{n-1}du$$

oder

(864) $$y_n = \frac{\pi}{(\Gamma(n))^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}\int_1^\infty e^{-xz}(z^2-1)^{n-1}dz.$$

*J. A. Serret*[1320]) umgeht für diesen Fall die vorhin besprochene Schwierigkeit dadurch, daß er erst die Differenz

(865) $$v_n = \int_0^\infty \frac{\sin x\xi}{\xi(1+\xi^2)^n}\,d\xi - \frac{\pi}{2}$$

betrachtet und zeigt, daß sie der Differentialgleichung

(866) $$\left(1+\frac{d^2}{dx^2}\right)^n v_n = 0$$

genügt; zum Schluß differentiiert er dann noch nach $x$[1321]). Auch zeigt er durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge in einem Doppelintegral, daß Catalans Formel (863) für alle positiven $n$ richtig bleibt[1322]).

Schon vorher hatte *C. J. Malmsten* gezeigt[1323]), daß das Integral (862) für $n > 1$ der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten

(867) $$\frac{d^2y_n}{dx^2} - \frac{2(n-1)}{x}\frac{dy_n}{dx} - y_n = 0$$

---

1319) J. de math. 5 (1840), p. 110.

1320) Ib. 8 (1843), p. 21.

1321) Die Rechtfertigung der Zulässigkeit dieses Verfahrens würde hier wohl keiner prinzipiellen Schwierigkeit begegnen.

1322) p. 19.

1323) Stockh. Handl. 1841, p. 65.

genügt, die sich in eine Riccatische transformieren läßt. Ihre Integration durch bestimmte Integrale nach dem gewöhnlichen Verfahren gibt ihm ebenfalls die Gleichung (863). Durch Differentiation überzeugt er sich nachträglich, daß das Resultat für alle positiven $n$ richtig bleibt. *J. A. Serret*[1324]) leitet die Differentialgleichung (867) ebenfalls ab und integriert sie durch Produkte aus $\exp x$ oder $\exp - x$ in Reihen, die nach Potenzen von $x$ mit ganzen Exponenten fortschreiten und für ganzzahlige positive $n$ abbrechen[1325]). Durch die Substitution

$$y = \exp(\pm x) \frac{d^{-n}\theta}{dx^{-n}}, \tag{868}$$

wobei die Differentiation zu beliebigem Index in der ihr von *J. Liouville* beigelegten Bedeutung (vgl. Nr. **108**) zu verstehen und die Komplementärfunktion weggelassen ist, „da man doch nur ein partikuläres Integral brauche", und $(-n)$-malige Integration führt er diese Gleichung in die Gleichung erster Ordnung

$$x\frac{d\theta}{dx} + (\pm 2x - n + 1)\theta = 0 \tag{869}$$

über, der durch

$$\theta = Ax^{n-1}\exp(\mp 2x) \tag{870}$$

genügt wird; wird hier der Faktor $x^{n-1}$ durch $\Gamma$-Integrale dargestellt und dann die Differentiation unter dem Integralzeichen ausgeführt, so wird wieder die Formel (863) erhalten.

*A. Cayley*[1326]) gibt noch ohne Ableitung die Formel:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\xi\, d\xi}{(c^2+\xi^2)^n} \tag{871}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\, e^{-c}}{2^{2n}c^{2n-1}\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{(\sqrt{\theta+2c}+\sqrt{\theta})^{2n-1} + (\sqrt{\theta+2c}-\sqrt{\theta})^{2n-1}}{\sqrt{\theta}\sqrt{\theta+2c}} e^{-\theta} d\theta.$$

---

1324) J. de math. 9 (1844), p. 195; wenig gekürzt Paris C. R. 17 (1843), p. 458. Serret beschäftigt sich auch mit dem für uns nicht in Frage kommenden Fall, daß in der Differentialgleichung (867) die Vorzeichen des zweiten oder des dritten Gliedes andere sind; er gibt auch für diese Fälle Darstellungen der allgemeinen Lösung durch bestimmte Integrale und zeigt, wie sich die einen in die andern überführen lassen.

1325) Für andere Werte von $n$ sind die Reihen semikonvergent; es handelt sich im Grunde um Zylinderfunktionen rein imaginären Arguments.

1326) J. de math. 12 (1847), p. 236 = Papers 1, p. 313. Er bemerkt, man könne sich durch Entwicklung nach Potenzen von $c$ davon überzeugen, daß die Formel mit 861) übereinstimmt.

*R. L. Ellis*[1327]) erhält für das Integral (862) einen asymptotischen Ausdruck für große Werte von $n$, indem er unter dem Integralzeichen nach Potenzen von $x$ entwickelt, die Koeffizienten dieser Entwicklung vermittelst der Formel von Wallis durch asymptotische Werte ersetzt und schließlich die beiden ersten Glieder der so gefundenen Darstellung als Näherungsausdruck einer Exponentialfunktion ansieht; so erhält er:

$$y_n \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \exp\left(-\frac{x^2}{4n}\right). \tag{872}$$

*O. Schlömilch*[1328]) behandelt die Integrale

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos x\xi\, d\xi}{(\xi^2+1)(\xi^2+9)\ldots(\xi^2+(2m+1)^2)} \tag{873}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x\xi\, d\xi}{\xi(\xi^2+4)(\xi^2+16)\ldots(\xi^2+4m^2)}; \tag{874}$$

indem er in den Gleichungen (35) und (36) beiderseits mit $\exp(-\xi x)dx$ multipliziert und zwischen den Grenzen 0 und $\infty$ integriert, dann für die rechts auftretenden Integrale eine Rekursionsformel ableitet, erhält er die Partialbruchzerlegungen der in (873) und (874) unter den Integralzeichen stehenden rationalen Funktionen.

Später[1329]) leitet er auch noch den Wert des Integrals

$$\int\limits_0^\infty \frac{\xi^{m-1}\cos x\xi\, d\xi}{r^n+\xi^n} \tag{875}$$

für ungerade $m$ und gerade $n > m$, ebenfalls durch Partialbruchzerlegung unter dem Integralzeichen, ab.

Dann erscheint die Ableitung von (847) aus (834) bei *J. J. Fourier*[1330]), *A. Cauchy*[1331]), *H. G. v. Schmidten*[1332]), *A. A. Cournot*[1333]), *A. Pioch*[1334]),

---

1327) Cambr. trans. $8_2$ (1844), p. 213 = Writings p. 29. Er erläutert selbst: die Entwicklung beginnt zu divergieren, wenn man sie über die Potenz $x^{2n-2}$ hinaus fortsetzt.

1328) Arch. Math. Phys. 7 (1846), p. 45.

1329) Analytische Studien 2, Leipz. 1848, p. 106.

1330) Paris mém. 4 (1819/20[24]) (Preisschrift von 1811), p. 498; Théorie Nr. 350 = Oeuvres 1, p. 395.

1331) Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 136 (von 1815); Bull. philomat. 1817, p. 123; Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 183.

1332) Ann. de math. 12 (1822), p. 221; J. f. Math. 5 (1830), p. 392.

1333) Théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 218.

1334) Brux. mém. cour. in 4°, 15 (1841/42), p. 37.

*O. Schlömilch*[1335]), *G. G. Stokes*[1336]), *M. Ohm*[1337]), in modifizierter Form bei *J. L. Raabe*[1338]) als das einfachste Beispiel für den Reziprozitätssatz; bei ersterem mit dem wesentlichen Zusatz, daß $\exp(-|rx|)$ zu nehmen ist, wenn die Formel auch für negative Werte von $x$ [oder $r$] gültig bleiben soll. *Cauchy* gibt auch noch[1339]), ebenfalls aus dem Reziprozitätssatz die allgemeineren Gleichungen:

$$(876)\quad \int\limits_0^\infty \left[\frac{k+\xi}{h^2+(k+\xi)^2} \pm \frac{k-\xi}{h^2+(k-\xi)^2}\right]\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} x\xi\, d\xi = \pi e^{-hx}\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} kx.$$

Andererseits erscheinen aber bei *Cauchy* die Gleichungen (847) und (848) auch als einfachste Beispiele seiner Residuensätze, indem er sie so schreibt, daß $-\infty$ und $+\infty$ Integrationsgrenzen werden und diese Integrale dann gleich $2\pi i$ mal dem Residuum in dem einzigen in der Halbebene der $\xi$ mit positiv imaginärem Bestandteil gelegenen Pole $\xi = |r|i$ setzt.[1340])

Auch durch direkte Anwendung des Grenzübergangs von der Reihe zum Integral sind solche Formeln gewonnen worden; so bei *Poisson*[1341]) die Gleichungen (847) und (848) aus (283) und (282);

---

1335) Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale, Jena 1843, p. 39; analytische Studien 2, Leipz. 1848, p. 93.

1336) Cambr. trans. $8_5$ (1849), p. 565 (von 1847) = papers 1, p. 286.

1337) System der Mathematik 9, Nürnb. 1852, p. 374.

1338) Differential- und Integralrechnung 1, Zürich 1839, p. 273. Raabe bestimmt erst

$$\int\limits_0^\infty \operatorname{arc\,tg} \xi \sin x\xi d\xi$$

mit Hilfe von (917) und integriert dann partiell.

1339) Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 136 (von 1815). Die Annahme $h = 0$ gibt ihm die Gleichungen (852).

1340) Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 468 (von 1814; in die jetzt übliche Ausdrucksweise übersetzt in der beim Druck hinzugefügten Note p. 466); Bull. philomat. 1822, p. 171 (hier die Bemerkung, daß $(852_1)$ richtig ist, wenn man unter dem divergenten Integral seinen Hauptwert versteht); J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 578, 590; Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal, Paris 1823 = Oeuvres (2) 4, p. 236; Mém. sur les int. déf., Paris 1825, p. 63; Exerc. de math. 1 (1826) = Oeuvres (2) 6, p. 139; Ann. de math. 16 (1826), p. 103; 17 (1827), p. 105, 106, 110; Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 291. — Auch bei *Moigno*, leçons 2 (1844), p. 313 und bei *M. Ohm*, System der Mathematik 9, Nürnb. 1852, p. 196.

1341) J. Éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 317; chaleur p. 280.

bei *Fourier*[1342]) aus (300) die Gleichung:

$$(877)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin \pi\xi}{1-\xi^2} \sin x\xi\, d\xi = \begin{cases} \sin x & \text{für } 0 \leqq x \leqq \pi; \\ 0 & \phantom{\text{für }}x \geqq \pi. \end{cases}$$

Die Formeln

$$(878)\qquad \int_0^\infty \begin{Bmatrix} m^2 \\ \xi^2 \end{Bmatrix} \frac{\cos x\xi\, d\xi}{m^4 + 2m^2\xi^2\cos^2\alpha + \xi^4}$$

$$= \frac{\pi}{2m\sin 2\alpha} \sin(\alpha \pm mx\sin\alpha)\exp(-mx\cos\alpha)$$

gewinnt *Poisson*[1343]), indem er die Gleichung (847) auch für komplexe Werte von $r$ in Anspruch nimmt.

*G. Frullani* hat eine ganze Reihe von Ableitungen der Gleichungen (847), (848) gegeben: Zuerst[1344]) führt er in dem Doppelintegral

$$(879)\qquad \int_0^\infty\int_0^x \exp(\pm x)\cos x\xi\, dx\, d\xi$$

das eine Mal die eine, das andere Mal die andere Integration zuerst aus, unter Benutzung der Grenzgleichung[1345])

$$(880)\qquad \lim_{\xi=\infty}\int_0^x \exp(\pm x)x^{-1}\sin x\xi\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Dann[1346]) führt er in den Integralen

$$(881)\qquad \int \frac{du}{a \pm \log u}$$

---

1342) Ann. chim. phys. 3 (1816), p. 363; Théorie de la chaleur Nr. 358 = Oeuvres 1, p. 405. *M. Ohm* (System der Mathematik 9, p. 377), verwirft dieses Resultat, bzw. da die Integrale divergent seien; höchstens könne man fragen, ob sie vielleicht richtig seien, wenn man unter den Integralen ihre Cauchyschen Hauptwerte verstehe.

1343) Conn. des temps pour 1833[30], add. p. 25.

1344) Mem. soc. ital. $20_2$ (1831), p. 466 (von 1829).

1345) Diese Grenzgleichung ist bei ihm allerdings ungenügend begründet; er scheint angenommen zu haben, der Grenzwert eines Integrals auch über ein unendliches Intervall sei immer gleich null, sobald der Grenzwert des Integranden es ist. Übrigens ist die Formel ein einfacher Spezialfall von (808).

1346) Ib. p. 663. Dabei ist der Grenzwert einer nach Potenzen von $r$ fortschreitenden Reihe für $r=\infty$ zu bestimmen; das gelingt ihm dadurch, daß dieselbe Reihe auch bei der Entwicklung des Integrals

$$\int_0^r \frac{\sin\xi}{\xi}\, d\xi$$

$a + \log u = r$ als neue Integrationsvariable ein, entwickelt nach deren Potenzen und setzt dann $u = \exp(ix)$. Ferner[1347]) nimmt er in dem Doppelintegral

$$(882) \qquad \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\eta} \xi^{-1} \cos x\xi \sin \xi\eta \, d\xi \, d\eta$$

das eine Mal die eine, das andere Mal die andere Integration zuerst vor. Außerdem[1348]) erhält er durch Einführung einer komplexen Variabeln in die Reihenentwicklungen die Gleichung (vgl. 845)

$$(883) \qquad \int_0^\infty \frac{r \cos \xi + \xi \sin \xi}{r^2 + \xi^2} d\xi = e^{-r} \left[ \frac{\pi}{2} + \int_0^\infty \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta \right].$$

Endlich[1349]) geht er noch in der Gleichung

$$(884) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{m}} \frac{m(mr-1)\cos\xi + m\cos(m\xi - \xi)}{(mr-1)^2 + 2(mr-1)\cos m\xi + 1} d\xi = \pi(1 - mr)^{1 - \frac{1}{m}}$$

zur Grenze $m = 0$ über.

Andererseits können die Formeln (847) und (848) auch als Spezialfälle von andern angesehen werden, in denen ein willkürlicher (nicht auf ganzzahlige Werte beschränkter) Exponent auftritt. Schon *P. S. de Laplace* hat durch partielle Integration gezeigt[1350]), daß das Integral

$$(885) \qquad J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\xi} d\xi}{(r - i\xi)^a}$$

der Differentialgleichung $\frac{dJ}{dr} = -xJ$ genügt, also gleich $C \exp(-rx)$ ist, wo $C$ eine von $r$ unabhängige Größe bezeichnet, deren Bestimmung er unterlassen konnte, da er nur den Quotienten zweier solcher Integrale brauchte. Die vollständige Formel

$$(886) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\xi} d\xi}{(r + i\xi)^a} = \frac{2\pi x^{a-1} e^{-rx}}{\Gamma(a)}$$

---

nach Potenzen von $r$ auftritt, und daß dessen Grenzwert für $r = \infty$ aus (938) bekannt ist.

1347) p. 673. Auch hier benutzt er die Gleichung (486).

1348) p. 689. Für das entsprechende Integral mit $r \sin \xi - \xi \cos \xi$ im Zähler erhält er auf demselben Wege die Differenz zweier divergenter Integrale.

1349) p. 691. — Daß er für das Integral (848) bei Benutzung der Entwicklung von $x \sin x$ nach den Cosinus der Vielfachen von $x$ p. 696 einen falschen Wert erhält, liegt, wie er selbst sieht, daran, daß diese Entwicklung nur für das Intervall $(-\pi, \ldots, \pi)$ gilt.

1350) Théorie analytique des probabilités, add. II (p. 471 der Ausgabe von 1814).

ist von *A. Cauchy* sowohl aus den Reziprozitätssätzen[1351]) als auch als Residuenformel[1352]) abgeleitet worden. *S. D. Poisson* gewinnt sie für den Fall, daß $a$ eine ganze Zahl ist, durch wiederholte partielle Integration, nimmt sie aber sogleich auch für andere positive Werte von $a$ in Anspruch[1353]); *G. Frullani*[1354]) erhält sie durch Reihenentwicklungen; *J. Liouville*[1355]) durch Differentiation zu beliebigem Index. *A. Cayley*[1356]) erhält die Formel, indem er in der von ihm als bekannt bezeichneten Gleichung

$$(887)\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(i\xi)^{-a}e^{i\xi}d\xi = 2\sin(1-a)\pi\cdot\Gamma(1-a)$$

[vgl. (532)] einfach $\xi$ durch $r + i\xi$ ersetzt; auf analogem Wege findet er noch:

$$(888)\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix\xi}d\xi}{(r-i\xi)^a} = 0 \qquad (r > 0).$$

Die Ableitung der Gleichung (847) durch Umkehrung der Integrationsreihenfolge in einem Doppelintegral (vgl. 1302) erscheint später noch in verschiedenen andern Gestalten. *J. A. Serret*[1357]) erhält durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge in dem Doppelintegral

$$(889)\qquad \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-x\eta}\eta^{p-1}\frac{\sin\eta\xi\cos\xi}{\xi}\,d\xi\,d\eta$$

(vgl. 882) die Gleichung

$$(890)\qquad \frac{\pi}{2}\int\limits_1^\infty e^{-x\eta}\eta^{p-1}d\eta = \frac{\Gamma(p)}{x^p}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{p-1}\varphi\frac{\sin p\varphi}{\sin\varphi}\cos(x\operatorname{tg}\varphi)d\varphi,$$

---

1351) Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 137 (von 1815); J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 569; Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 182 (hier auch die durch Differentiation nach $x$ oder nach $a$ aus ihr entstehenden).

1352) J. Éc. polyt. cah. 28 (1844) = Oeuvres (2) 1, p. 499, 502 (von 1815; hier auch die durch Differentiation nach $x$ aus ihr entstehenden); mém. von 1825, p. 34; Ann. de math. 17 (1827), p. 109. Ebenso *A. de Morgan*, diff. and integr. calc., Lond. 1836/41, p. 640.

1353) J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 480: „l'induction nous suffit pour étendre ce résultat".

1354) Mem. soc. ital. $20_2$ (1831), p. 678.

1355) J. f. Math. 13 (1835), p. 231.

1356) J. de math. 12 (1847), p. 231. Er meint, (886) gebe eine bessere Definition der $\Gamma$-Funktion für negative Argumente als die von Cauchy durch „intégrales extraordinaires".

1357) J. de math. 8 (1843), p. 494.

aus der (847) für $p = 1$ folgt. *F. Arndt*[1358]) erhält aus dem Doppelintegral

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\xi\eta} \cos \xi\eta \sin \eta \, d\xi \, d\eta \tag{891}$$

zunächst die Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\xi \, d\xi}{1+\xi^2} = \int_0^\infty \frac{\xi \sin x\xi \, d\xi}{1+\xi^2} \tag{892}$$

und aus ihr die Differentialgleichung (858). *O. Schlömilch*[1359]) zeigt, daß das Laplacesche Verfahren sich auch auf das allgemeinere Integral

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \eta^\mu e^{-\eta(r^2+\xi^2)} \cos x\xi \, d\eta \, d\xi \tag{893}$$

anwenden läßt und dann den Wert von (862) liefert.

Bei *Schlömilch* erscheinen die Formeln auch noch als spezielle Fälle allgemeinerer Ansätze. Einmal erhält er[1360]), indem er die ganzzahligen Vielfachen von $\pi/2$ als Zwischengrenzen einschaltet, dann alle so entstehenden Teilintegrale auf dieselben Grenzen zurückführt, unter Benutzung einer Partialbruchformel aus der Theorie der trigonometrischen Funktionen:

$$\int_0^\infty \frac{r \cos^2 \xi}{r^2+\xi^2} d\xi = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathfrak{Tg}\, r \cos^2 \xi \, d\xi}{\mathfrak{Tg}^2 r \cos^2 \xi + \sin^2 \xi} = \int_0^\infty \frac{\mathfrak{Tg}\, r \, dz}{(1+z^2)(\mathfrak{Tg}^2 r + z^2)}; \tag{894}$$

und die Integration rechts läßt sich elementar ausführen. Dann erscheinen bei ihm[1361]) die Gleichungen (847) und (848) als einfachste Fälle von Abels Gleichungen (Nr. **103**), entsprechend der Annahme $f(z) = \exp(-\xi z)$.

*J. Dienger*[1362]) stellt die Aufgabe, die Gleichungen

$$\int_0^\infty \left\{ \begin{matrix} r \cos x\xi \\ \xi \sin x\xi \end{matrix} \right\} \frac{\cos b\xi \, d\xi}{r^2+\xi^2} = \pm \frac{\pi}{2} e^{-br} \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{Cof} \\ \mathfrak{Sin} \end{matrix} \right\} rx \tag{895}$$

zu beweisen.

1358) Arch. Math. Phys. 11 (1848), p. 70. Hat *W. Moesta* dieselbe Schlußweise im Auge, wenn er ib. p. 10, 1847, p. 455 die Aufgabe stellt, die Gleichung (892) zu beweisen?

1359) Analytische Studien 2, Leipz. 1848, p. 98.

1360) Arch. Math. Phys. 10 (1847), p. 446. Vgl. [1506])

1361) Neue Methode zur Summierung endlicher und unendlicher Reihen, Greifswald 1849 = Arch. Math. Phys. 12 (1849), p. 140.

1362) Arch. Math. Phys. 12 (1849), p. 97. Der Beweis ergibt sich durch

Auch die Bidoneschen divergenten Integrale (852) sind noch mehrfach vorgenommen worden. *O. Schlömilch*[1363]) leitet für das erste unter ihnen durch Differentiation unter dem Zeichen die Differentialgleichung ab:

$$\frac{\partial y}{\partial x}\cos rx + ry\sin rx = 0, \tag{896}$$

die bei ihrer Integration auftretende Konstante bestimmt er dadurch, daß er dem Integral für $x = 0$ den Wert 0 zuschreibt.

*F. Arndt*[1364]) zerlegt den rationalen Faktor unter dem Integralzeichen in Partialbrüche und zeigt so an, daß die Gleichungen (852) die Hauptwerte dèr Integrale liefern.

Später gibt *Schlömilch* noch zwei andere Ableitungen. Einmal[1365]) setzt er in den allgemeinen Formeln (790) und (791):

$$f(x) = \begin{cases} \sin rx & \text{für } x < c \\ 0 & \;\,„\;\; x > c; \end{cases} \quad \text{bzw. } f(x) = \begin{cases} \cos rx & \text{für } x < c \\ 0 & \;\,„\;\; x > c \end{cases} \tag{897}$$

und hebt dann nach Ausführung der Integration nach $\xi$ zwei divergente Integrale gegeneinander weg. Dann[1366]) leitet er noch für das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\xi}{r^2 - \xi^2}\frac{d\xi}{\xi} \tag{898}$$

eine zu (854) analoge Differentialgleichung zweiter Ordnung ab. Das allgemeinere Integral

$$\int_0^\infty \frac{\xi^{m-1}\cos x\xi\, dx}{r^n - \xi^n} \tag{899}$$

$m$ ungerade, $n$ gerade und $> m$, führt er durch Partialbruchzerlegung unter dem Integralzeichen auf das Bidonesche zurück[1367]).

---

Verwandlung der Produkte trigonometrischer Funktionen in Summen bzw. Differenzen.

1363) Arch. Math. Phys. 7 (1846), p. 271; J. f. Math. 33 (1846), p. 318. An der letztgenannten Stelle gibt er p. 328 eine Zusammenstellung der hier besprochenen Formeln.

1364) Arch. Math. Phys. 10 (1847), p. 243; ebenso *W. Mösta*, ib. p. 450, der aber die auftretenden divergenten Bestandteile ohne weiteres gegeneinander weghebt.

1365) Analytische Studien 2, Leipz. 1848, p. 99.

1366) Ib. p. 103. Sehr merkwürdig ist dabei, daß er zwar dem Integral (893) und den durch ein- und zweimalige Differentiation aus ihm entstehenden bestimmte Werte zuschreibt, aber meint, weiter dürfe man die Differentiationen nicht treiben, weil die dann entstehenden Integrale keine bestimmten Werte mehr hätten.

1367) Ib. p. 108.

Den Umstand, daß man das Integral (852) nicht einfach durch Übergang von reellen zu rein imaginären $r$ aus (847) erhalten kann, will *G. Boole*[1368]) daraus erklären, daß man das letztere als Grenzwert

$$\lim_{h=0} \int_0^\infty \frac{e^{-h\xi} \cos x\xi \, d\xi}{r^2 + \xi^2} \tag{900}$$

das erstere aber als Grenzwert:

$$\lim_{\substack{h=0\\k=0}} \int_0^\infty \frac{e^{-h\xi}(\xi^2 - r^2 - k^2) \cos x\xi \, d\xi}{[(\xi + r)^2 + k^2][(\xi - r)^2 + k^2]} \tag{901}$$

[so ist wohl zu lesen?] aufzufassen habe.

*P. G. Lejeune-Dirichlet*[1369]) bemerkt, man könne leicht zeigen, daß die Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-az} a^{p-1} da = \frac{\Gamma(p)}{z^p} \tag{902}$$

auch für komplexe Werte $k + \xi i$ von $z$ mit positivem reellen Bestandteil bestehen bleibe. Indem er dann mit $(b^2 + \xi^2)^{-1} \exp(-x\xi i) d\xi$ multipliziert, die Reihenfolge der Integrationen umkehrt und die Gleichung (847) benutzt, erhält er:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x\xi i}}{(k + \xi i)^p} \frac{d\xi}{b^2 + \xi^2} = \frac{\pi e^{-bx}}{b(b+k)^p}. \tag{903}$$

und durch Wiederholung dieses Verfahrens:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x\xi i}}{b^2 + \xi^2} \prod_{\nu=1}^{n} (k_\nu + \xi i)^{-p_\nu} d\xi = \frac{\pi}{b} e^{-bx} \prod_{\nu=1}^{n} (b + k_\nu)^{-p_\nu} \tag{904}$$

$$(x > 0;\ \Re(b) > 0,\ \Re(k_\nu) > 0,\ \Re(p_\nu) > 0).$$

Auch zeigt er[1370]): wenn links unter dem Integralzeichen noch Faktoren $[\log(h + \xi i)]^{-q}$ zutreten, so sind rechts noch die entsprechenden Faktoren $[\log(b + h)]^{-q}$ beizufügen.

---

1368) Dubl. trans. 21 (1848), p. 133 (von 1846).

1369) J. f. Math. 4 (1829), p. 95 = Werke 1, p. 113. Dirichlets Ableitung der Gleichungen (898), (899) ist reproduziert von *O. Schlömilch,* analytische Studien 2, Leipz. 1848, p. 110, und von *M. Ohm,* System der Mathematik 9, Nürnb. 1852, p. 427, sowie in den Veröffentlichungen der Dirichletschen Vorlesungen über bestimmte Integrale durch *G. F. Meyer,* Leipzig 1871, p. 190 und durch *G. Arendt,* Braunschw. 1904, p. 167.

1370) p. 97 bzw. 115.

c) Das Integral

$$\int_0^\infty \xi^{-m} \sin \xi \, d\xi \tag{905}$$

hat *L. Mascheroni*[1371]) dadurch zu bestimmen versucht, daß er unter dem Integralzeichen nach Potenzen von $\xi$ entwickelt und dann durch eine ungenügend begründete Umformung auf das Produkt aus dem Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Gamma(m+n)}{n^m \Gamma(n)} \tag{906}$$

und einer Partialbruchreihe kommt; diese summiert er durch das bestimmte Integral

$$\int_0^1 \frac{u^{1-m} + u^{-1+m}}{1+u^2} du, \tag{907}$$

das für rationale $m$ sich elementar auswerten läßt. Analog behandelt er auch das Integral

$$\int_0^\infty \xi^{-m} \cos \xi \, d\xi. \tag{908}$$

Dann ist aus dem Nachlaß von *L. Euler* ein Aufsatz veröffentlicht worden[1372]), in dem er eine bekannte Formel der Theorie der $\Gamma$-Funktionen (vgl. hier II A 3, *Brunel*, Nr. 17, p. 180) auch für komplexe Werte von $n$ in Anspruch nimmt und so erhält:

$$\int_0^\infty e^{-r\xi} \xi^{a-1} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} x\xi \, d\xi = \frac{\Gamma(a)}{\sqrt{r^2+x^2}^{\,a}} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} \left(a \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{r}\right). \tag{909}$$

Damit im Grunde identisch ist die Schlußweise von *P. S. de Laplace*[1373]); der Unterschied ist nur, daß er eine andere Integraldarstellung der

1371) Adnotationes ad calculum integralem Euleri, 1, Ticini 1790 = L. Euleri opera (1) 12, p. 463. Vgl. auch den Bericht von *G. Bidone*, Torino mem. 1811/12, p. 237, 243, der ein bei der Durchführung der Rechnung für $m = \frac{1}{2}$ von *Mascheroni* begangenes Versehen berichtigt.

1372) Institutiones calc. integr. 4, Petrop. 1794, p. 342, 343 (von 1781); reproduziert von *Lacroix*, Traité 3 (1819), p. 486. Über die historische Bedeutung dieser Untersuchungen Eulers vgl. die Bemerkungen von *P. Stäckel*, Bibl. math. (3) 1 (1900), p. 115. — Eulers Verfahren ist übrigens auch später noch öfter unbedenklich reproduziert worden; so von *A. A. Cournot*, théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 201; doch macht *R. Moon*, phil. mag (3) 26, p. 491 darauf aufmerksam, daß es jedenfalls versagt, wenn $r = 0$ und $a = 1$ ist, und also nicht zur Begründung der Gleichungen (517) dienen kann.

1373) J. Éc. polyt. cah. 15 (1809), p. 244 für $r = 0$, p. 252 allgemein.

$\Gamma$-Funktion gewöhnt ist. Er erkennt, daß die Ableitung keinen Aufschluß darüber gibt, welcher Wert der Funktion arc tg zu nehmen ist; da er in einer Anzahl spezieller Fälle findet, der Hauptwert gebe das richtige Resultat, so nimmt er an, das sei immer der Fall[1374]). Dann gibt er noch ein anderes Verfahren[1375]): er entwickelt in dem Integral

$$(910) \qquad \int_0^\infty e^{-r\xi - x\xi i}\,\xi^{a-1}\,d\xi$$

unter dem Zeichen nach Potenzen von $x$, integriert gliedweise und drückt die auftretenden $\Gamma$-Funktionen alle durch die erste aus; es bleibt eine Binomialreihe.

*S. D. Poisson*[1376]) bildet das Produkt der beiden Funktionen

$$(911) \quad \psi(a) = \int_0^\infty \xi^{a-1}\cos(b+\xi)\,d\xi, \quad \Gamma(1-a) = \int_0^\infty e^{-\eta}\eta^{-a}\,d\eta$$

---

1374) p. 250, 253.

1375) Paris mém. 11 (1810) = Oeuvres 12, p. 363; Théorie analytique des probabilités, add. III (p. 482 der Ausgabe von 1814); ebenso *v. Schmidten,* Ann. de math. 12 (1822), p. 213; J. f. Math. 5 (1830), p. 395; ähnlich *E. E. Kummer,* J. f. Math. 17, 1837, p. 212. *G. Bidone,* Torino mem. 1811/12, p. 320 behandelt den Fall $a = 0$ in ähnlicher Weise und leitet dann daraus weitere Formeln her, bei denen im Zähler ein Produkt von Potenzen verschiedener trigonometrischer Funktionen steht. *M. Ohm,* System der Mathematik 9, Nürnberg 1852, p. 117, erwähnt ohne näheren Nachweis ein Verfahren von *Euler* zur Verifikation der Gleichungen (909); er zeigt, daß es ebenfalls auf eine Entwicklung nach Potenzen von $x$ hinauskommt und bemerkt mit Recht, daß die Konvergenz dargetan werden müßte. — Die allgemeineren Formeln, die *B. Boncompagni,* J. f. Math. 25 (1843) p. 81 auf diesem Wege erhält, gehören nicht mehr hierher, er spezialisiert sie zu (909).

1376) Bull. philomat. 1811, p. 249. Die Darstellung bei *Poisson* ist dadurch umständlicher, daß er mit einem weniger bequemen Ausdruck der $\Gamma$-Funktion operiert. Auch spricht er zunächst nur von rationalen Werten von $a$. — Das von *A. Cauchy* (J. Éc. polyt. cah. 28, 1844 (von 1815) = Oeuvres (2) 1, p. 479) für beliebige $r$ angewendete Verfahren ist von dem Poissons im Grunde nicht verschieden. *Cauchy* bemerkt auch, daß es $a < 1$ voraussetze, daß man aber die Richtigkeit der Formeln für andere positive $a$ durch Differentiation nach $r$ nachweisen könne. Für negative $a$ divergieren die Integrale; *Cauchy* zeigt aber (p. 546 und Exerc. de math. 1 (1826) = Oeuvres (2) 6, p. 84), daß die Gleichungen auch für diesen Fall richtig bleiben, wenn man die Integrale als „außerordentliche" faßt, d. h. aus den Entwicklungen der unter dem Integralzeichen stehenden Funktionen nach Potenzen von $\xi$ alle Glieder weglässt, die von der ersten oder höheren Ordnung unendlich werden. — Im wesentlichen ebenso wie Poisson verfahren *O. Schlömilch,* J. f. Math. 33 (1846), p. 354; analytische Studien 1, Leipzig 1848, p. 69 und *M. Ohm,* System der Mathematik 9, Nürnb. 1852, p. 140; letzterer und führt durch die Substitution $\eta = \xi\zeta$ an Stelle von $\eta$ die neue Integrationsvariable $\zeta$ ein; die Integration nach $\xi$ läßt sich dann elementar ausführen, die noch bleibenden Integrale in bezug auf $\zeta$ hatte bereits Euler bestimmt; so kommt

$$(912) \qquad \Gamma(1-a)\psi(a) = \frac{\pi}{2}\left\{\frac{\cos b}{\sin\frac{a\pi}{2}} - \frac{\sin b}{\cos\frac{a\pi}{2}}\right\},$$

was mit dem Falle $r=0$ von (909) übereinstimmt, wenn noch $\Gamma(1-a)$ durch $\Gamma(a)$ ausgedrückt wird. Später[1377]) leitet er noch für die beiden Integrale (909) durch partielle Integrationen die simultanen Differentialgleichungen her:

$$(913) \qquad -\frac{dy}{dx} = \frac{x}{r}\frac{dz}{dx} + \frac{a}{r}z, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{x}{r}\frac{dy}{dx} + \frac{a}{r}y$$

und integriert sie, indem er arc tg $x$ als unabhängige Veränderliche einführt.

Bei *Fourier* finden sich die allgemeinen Gleichungen (909) nicht, sondern nur als Resultat der Anwendung des Reziprozitätssatzes auf die Funktion $x^{-a}$ die Relation zwischen zwei bestimmten Integralen[1378]):

$$(914) \qquad \int_0^\infty \xi^{a-1}\sin x\xi\, d\xi \cdot \int_0^\infty \xi^{-a}\sin x\xi\, d\xi = \frac{\pi}{2x},$$

die nur für $a=\frac{1}{2}$, wo beide identisch werden, ihren gemeinsamen Wert bestimmt.

Seine Rechtfertigung findet der Gebrauch komplexer Größen bei diesen Umformungen durch *A. Cauchys* allgemeinen Satz[1379]): wenn

zeigt auch, daß man die Reihenfolge der Integrationen hier in der Tat vertauschen darf.

*Sarrus* (ib. p. 257) will die Benutzung komplexer Größen durch die Bemerkung rechtfertigen, sie sei immer erlaubt, wenn man die Differentiation des Integrals nach dem Parameter unter dem Integralzeichen ausführen dürfe.

1377) J. Éc. polyt. cah. 16 (1813), p. 215; reproduziert von *Lacroix,* Traité 3 (1819), p. 490. *P. Paoli* (Mem. soc. ital. 20 (1828), p. 162) bemerkt dazu mit Recht, man könne auf die Einführung dieser Integrationsvariabeln nur verfallen, wenn man das Resultat schon kenne; er zeigt, wie man durch Multiplikation mit $-y$, $z$, bzw. $z$, $y$ und Addition Kombinationen erhält, die sich unmittelbar integrieren lassen. Ebenso *M. Ohm,* System der Mathematik 9, Nürnberg 1852, p. 122. *O. Schlömilch,* analytische Studien 1, Leipzig 1848, p. 65 faßt die beiden Gleichungen zu einer für $y \pm iz$ zusammen; ebenso *Ohm* p. 115.

1378) Paris mém. 4 (1819/20[24]) (Preisschrift von 1811), p. 502; Théorie de la chaleur Nr. 360 = Oeuvres 1, p. 406.

1379) Paris mém. prés. 1, 1827 (von 1815) = Oeuvres (1) 1, p. 350; die Zu-die Funktion $f(z)$ im Unendlichen gewissen [von Cauchy hier freilich noch nicht vollständig angegebenen] Bedingungen genügt, so gilt die Gleichung:

$$\int_0^\infty f(a\xi + b\xi i)\, d\xi = \frac{1}{a+bi}\int_0^\infty f(\xi)\, d\xi. \tag{915}$$

*A. de Morgan*[1380]) verifiziert die Gleichung (909) für ganzzahlige $a$ mit Hilfe von Rekursionsformeln.

*N. Fuß*[1381]) stellt für ganzzahlige positive $a$ Rekursionsformeln auf, die ihm erlauben, die Gleichungen (909) für solche $a$ sukzessive aus (834) abzuleiten; die Resultate nimmt er aber dann[1382]) doch auch für gebrochene Werte von $a$ in Anspruch.

*J. A. Grunert*[1383]) leitet die Gleichungen (909) für ganzzahlige positive $a$ durch sukzessive Differentiation nach $r$ aus (834) ab, indem er zunächst zeigt, daß

$$\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{\cos\left(a \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{r}\right)}{\sqrt{x^2+r^2}^{\,a}} = \frac{\cos\left((a+1) \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{r}\right)}{\sqrt{x^2+r^2}^{\,a+1}} \tag{916}$$

ist.

*R. Lobatto*[1384]) leitet umgekehrt die Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-r\xi}\xi^{-1} \sin x\xi\, d\xi = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{r} \tag{917}$$

[die den Grenzfall der zweiten Gleichung (909) für $a = 0$ vorstellt] aus (834) durch Integration unter dem Zeichen her. Mit diesem Verfahren im Grunde identisch ist das von *G. Frullani*[1385]), der in

---

sammenfassung zu einer Gleichung zwischen komplexen Größen in den Noten von 1827, p. 353, sowie auch Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 148. Auch bei *Moigno,* leçons 2 (1844), p. 309.

1380) Diff. and integral calculus, Lond. 1836/42, p. 630.

1381) Petersb. mém. 11 (1831), p. 238; von 1810.

1382) p. 243.

1383) J. f. Math. 8 (1832), p. 147. Die Gleichung (834) ist natürlich nur der reelle Teil einer einfachen Gleichung zwischen komplexen Größen. *J. L. Raabe* (Differentialrechnung 1, Zürich 1839, p. 245) und *M. Ohm* (System der Mathematik 9, Nürnb. 1852, p. 65) führen behufs Vollziehung der erforderlichen Differentiationen komplexe Größen unverhüllt ein. — *J. Liouville* (J. f. Math. 13 (1835), p. 229) nimmt die Ergebnisse dieses Verfahrens auf Grund seiner Vorstellungen betr. Differentiation zu beliebigem Index für beliebige $a$ in Anspruch.

1384) J. f. Math. 11 (1834), p. 171. (Er wendet dasselbe Verfahren auch auf die erste Gleichung (914) an, ohne zu bemerken, daß er dann ein divergentes Integral erhält). Ebenso *M. Ohm*, System 9, p. 69.

1385) Mem. soc. ital. $20_2$ (1831), p. 466 (von 1829).

dem Doppelintegral

$$(918)\qquad \int_0^\infty\int_0^x \exp(-r\xi)\cos x\xi\,dx\,d\xi$$

das eine Mal die eine, das andere Mal die andere Integration zuerst ausführt.

*O. Schlömilch*[1386]) und *M. Ohm*[1387]) bemerken, daß die zur Ableitung der Gleichungen (909) benutzten Methoden für $r = 0$ versagen; sie zeigen durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge in dem Doppelintegral

$$(919)\qquad \int_0^\infty\int_0^\infty \eta^{a-1}e^{-\xi\eta}\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}x\xi\,d\xi\,d\eta,$$

daß die [mit Poissons Gleichungen (912) identischen] Gleichungen

$$(920)\qquad \int_0^\infty \xi^{a-1}\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}x\xi\,d\xi = \frac{\Gamma(a)}{x^a}\left\{\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}\frac{a\pi}{2},$$

die sich aus (909) durch Grenzübergang zu $r = 0$ ergeben, in der Tat richtig sind. *W. Center*[1388]) leitet diese Gleichungen aus den von ihm als richtig angenommenen Gleichungen (517) durch allgemeine Differentiation nach $a$ ab; daß die von ihm auf demselben Wege gewonnenen Gleichungen

$$(921)\qquad \int_0^\infty \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(x\xi^n)\,d\xi = \frac{1}{n}\,\Gamma\!\left(\frac{1}{n}\right)x^{-\frac{1}{n}}\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}\frac{\pi}{2n}$$

damit im Grunde identisch sind, scheint er nicht bemerkt zu haben.

Das erste der Integrale (909) divergiert für $a = 0$; als Ersatz leiten *J. L. Raabe*[1389]), *J. M. C. Duhamel*[1390]), *Navier*[1391]), *A. A. Cournot*[1392]), *Moigno*[1393]), *M. Ohm*[1394]) aus (834) durch Integration nach $r$

---

1386) Arch. Math. Phys. 6 (1845), p. 201; J. f. Math. 33 (1846), p. 354; Analytische Studien 1, Leipz. 1848, p. 69.

1387) System der Mathematik 9, Nürnb. 1852, p. 140. Er zeigt, daß die Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen hier in der Tat zulässig ist.

1388) Cambr. Dubl. J. 3 (1850), p. 215 (von 1848).

1389) Differential- und Integralrechnung 1, Zürich 1839, p. 249; daraus p. 274 die dazu reziproke Formel.

1390) Cours d'analyse 2, Paris 1840, p. 8.

1391) Leçons d'analyse 2, Paris 1840, p. 10.

1392) Théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 179.

1393) Leçons de calcul diff. et de calc. int. 2, Paris 1844, p. 77.

1394) System der Mathematik 9, Nürnb. 1852, p. 70.

die Gleichung:

$$(922)\quad \int_0^\infty (\exp(-\alpha\xi) - \exp(-\beta\xi))\xi^{-1}\cos\varkappa\xi\, d\xi = \frac{1}{2}\log\frac{x^2+\beta^2}{x^2+\alpha^2}$$

ab. *A. de Morgan*[1395]) gewinnt sie aus der allgemeinen Gleichung (909) durch einen Grenzübergang zu $a = 0$. Die sechs erstgenannten Autoren erhalten auf dem gleichen Wege auch die [übrigens aus (917) folgende] Gleichung:

$$(923)\quad \int_0^\infty (\exp(-\alpha\xi) - \exp(-\beta\xi))\xi^{-1}\sin x\xi\, d\xi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{x} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{x}\cdot$$

*G. Boole* bemerkt[1396]), für nicht negative $a$ könne man die erste Gleichung nur als den Grenzfall für $h = 0$, $k = 0$ von

$$(924)\quad \int_0^\infty \frac{e^{-h\xi}\cos\left(n\operatorname{arc\,tg}\frac{\xi}{k}\right)}{(k^2+\xi^2)^{n/2}}\cos x\xi\, d\xi = \frac{\pi|x|^{n-1}}{2\Gamma(n)}$$

aufrechthalten.

Spezielle Fälle der hier besprochenen Formeln sind auch wohl durch besondere Methoden erhalten worden. So behandelt *J. L. Raabe* die Integrale

$$(925)\quad \int_0^\infty \frac{e^{-r\xi}}{\sqrt{\xi}}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}x\xi\, d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}\,\frac{\sqrt{r^2+x^2}\mp r}{r^2+x^2}}$$

zunächst[1397]) für $x < r$ durch Reihenentwicklung unter dem Integralzeichen nach Potenzen von $x$, dann[1398]) für $r = 0$ durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge in dem Doppelintegral:

$$(926)\quad \int_0^\infty\int_0^\infty \exp(-a^2\xi)\cos x\xi\, d\xi\, da.$$

In diesem Falle $r = 0$ kann das erste dieser Integrale durch eine einfache Substitution in

$$(927)\quad \int_0^\infty \cos\xi^2 d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{oder} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\cos\frac{\xi^2}{8\pi}d\xi = 2\pi$$

---

1395) Differential and integral calculus, Lond. 1836/41, p. 676.

1396) Dubl. trans. 21 (1848), p. 132 (von 1846). Er schlägt geradezu vor, (924) als Definition der $\Gamma$-Funktion anzusehen.

1397) Differential- und Integralrechnung 1, Zürich 1839, p. 263.

1398) p. 264. Sein Versuch, von da aus durch Differentiation und Summation auch den Fall $x > r$ zu erledigen, benutzt divergente Integrale.

übergeführt werden. Sein Wert ist auch aus einer Rechnung von *P. G. Lejeune-Dirichlet*[1399]) zu entnehmen. Es ist

$$\int_{-(4k+1)\pi}^{(4k+1)\pi} \cos\frac{\xi^2}{8\pi}\,d\xi = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{h=-2k}^{2k}\cos\frac{(\xi+2h\pi)^2}{8\pi}\,d\xi$$

$$= 2\int_0^{\pi}\left[\cos\left(\frac{\xi^2}{8\pi}+\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin\frac{4k+1}{4}\xi}{\sin\frac{\xi}{4}}\right.$$

$$\left.+\left[\cos\frac{\xi^2}{8\pi}-\cos\left(\frac{\xi^2}{8\pi}+\frac{\pi}{2}\right)\right]\frac{\sin\frac{2k+1}{2}\xi}{\sin\frac{\xi}{2}}\right]d\xi;$$

Grenzübergang zu $k=\infty$ gibt das gewünschte Resultat. Sonst wird es durch Spezialisierung der allgemeinen Formel (909)[1400]) oder durch Inanspruchnahme der Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-a^2\xi^2)\,d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \tag{928}$$

(vgl. II A 3, *Brunel*, Nr. 9g, p. 153) für geeignete komplexe Werte von $a$[1401]) gewonnen.

*Ph. Kelland*[1402]) nimmt, um

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2\xi}{\xi^2}\,d\xi = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos 2\xi}{\xi^2}\,d\xi = \frac{\pi}{2} \tag{929}$$

zu berechnen, die erste Gleichung (909) auch für $r=0$ und $x=0$ oder $=2$ in Anspruch und hebt dann zwei divergente Bestandteile gegeneinander weg.

*J. Dienger*[1403]) stellt den Beweis der Gleichung

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2(c\xi)\sin x\xi}{\xi}\,d\xi = \begin{cases}\frac{\pi}{4} & \text{für } 0<x<2c\\ 0 & \;\;,,\;\; x>2c\end{cases} \tag{930}$$

---

1399) Berl. Abh. 1835 [37], p. 401 = Werke 1, p. 249; J. f. Math. 17 (1837), p. 62 = Werke 1, p. 264.

1400) So bei *J. L. Raabe*, Differential- und Integralrechnung 1, Zürich 1839, p. 268; bei *M. Ohm*, System der Mathematik 9, Nürnb. 1852, p. 142.

1401) So bei *J. M. C. Duhamel*, Cours d'analyse 2, Paris 1840, p. 12; bei *A. A. Cournot*, Théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 181.

1402) Cambr. trans. $7_2$ (1841), p. 155; Edinb. trans. $15_2$ (1842), p. 317.

1403) Arch. Math. Phys. 12 (1849), p. 416.

als Aufgabe; *G. G. Stokes*[1404]) leitet den Wert von

$$\int_0^\infty \frac{\sin a\xi \sin b\xi \sin x\xi}{\xi^2}\, d\xi \tag{931}$$

ab, indem er unter dem Zeichen differentiiert und dann (486) benutzt.

*R. L. Ellis*[1405]) bemerkt, daß ein Integral der Form

$$\int_0^\infty \left(\sum A_\nu \cos a_\nu \xi\right) \frac{d\xi}{\xi^n} \quad \text{(für gerade } n\text{)} \tag{932}$$

oder

$$\int_0^\infty \left(\sum A_\nu \sin a_\nu \xi\right) \frac{d\xi}{\xi^n} \quad \text{(für ungerade } n\text{)} \tag{933}$$

nur dann einen endlichen Wert haben kann, wenn die Bedingungen

$$\sum A_\nu a_\nu^{n-2} = 0, \quad \sum A_\nu a_\nu^{n-4} = 0, \tag{934}$$

erfüllt sind. Infolgedessen brauchen, wenn zunächst

$$\int_0^\infty e^{-r\xi} \left(\sum A_\nu \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} a_\nu \xi\right) \frac{d\xi}{\xi^n} \tag{935}$$

berechnet und dann zur Grenze $r = 0$ übergegangen wird, eine Anzahl Glieder nicht berechnet zu werden, da sie vermöge dieser Relationen doch wegfallen; es bleibt

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{\pi}{2(n-1)!} \sum A_\nu a_\nu^{n-2} |a_\nu|. \tag{936}$$

Für

$$\sum A_\nu \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} a_\nu \xi = r \sin^m \xi \cos x\xi$$

gibt das die unter 1 besprochene Formel von Laplace.

*Cellerier*[1406]) zeigt durch den Schluß von $n$ auf $n+1$: sind $P$, $R$ gerade ganze Funktionen von $\xi$, $Q$ eine ungerade solche Funktion, so ist — sofern das Integral überhaupt Bedeutung hat —

$$\int_0^\infty (P \cos x\xi + Q \sin x\xi + R) \frac{d\xi}{\xi^n} \tag{937}$$

gleich dem absoluten Glied des Faktors von $\sin x\xi$ in der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung der Klammergröße nach $\xi$.

---

1404) Lond. trans. 1848, p. 238 = Papers 2, p. 29.

1405) Cambr. math. J. $3_4$ (1842), p. 185 = Writings p. 143.

1406) J. de math. 8 (1843), p. 257. Auf die Beziehung zu den Residuensätzen weist er p. 262 selbst hin.

d) Die spezielle Formel

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\xi}{\xi}\, d\xi = \frac{\pi}{2} \qquad (x > 0) \tag{938}$$

ist, soviel ich sehe, zuerst von *J. Fr. Pfaff*[1407]) und von *L. Mascheroni*[1371]) veröffentlicht worden. Schon vorher hatte sie *L. Euler*[1408]) dadurch erhalten, daß er in seiner allgemeinen Formel (909) zuerst $a = 0$, dann $r = 0$ setzt; dieses Verfahren von Euler ist dann oft wiederholt worden[1409]). Andere Autoren gehen dazu von der schon durch die Annahme $r = 0$ spezialisierten Formel (920) aus; so *Bidone*[1410]), der auch m. W. der erste ist, der darauf aufmerksam macht, daß für negative $x$ sich nicht $\frac{\pi}{2}$, sondern $-\frac{\pi}{2}$ ergibt. *Legendre*[1411]) gewinnt die Gleichung (938), indem er die aus (847) durch Differentiation und Integration nach $x$ sich ergebenden Formeln verbindet; *Laplace*[1412]) aus der Gleichung (947), durch Integration nach $x$ und Übergang

---

1407) Versuch einer neuen Summationsmethode, Berlin 1788, p. 119. Er substituiert $z = e^{ix}$ und macht dann die beiden falschen Annahmen, der Grenze $x = \infty$ entspreche $z = 0$ und die Formel

$$\int_0^1 \frac{z^\alpha - z^\beta}{\log z}\, dz = \log \frac{\alpha + 1}{\beta + 1}$$

gelte für beliebige $\alpha$, $\beta$.

1408) Institut. calc. integr. 4 (1794), p. 345 (von 1781).

1409) So von *P. S. de Laplace,* J. Éc. polyt. cah. 15 (1809), p. 247; von *S. D. Poisson,* ib. 16 (1813), p. 221 (noch ohne die Bemerkung, daß das Resultat nur für $x > 0$ gilt; ib. 18 (1820), p. 328, wo er es benutzt, fügt er sie stillschweigend bei); *Oettinger,* J. f. Math. 38 (1848), p. 223. *O. Bonnet,* j. de math. 14 (1849), p. 250 rechtfertigt das Verfahren durch die Anwendung des zweiten Mittelwertsatzes; *G. G. Stokes,* Cambr. trans. $8_5$ (1849), p. 564 (von 1847) = papers 1, p. 284 begnügt sich mit der Bemerkung, es sei leicht zu zeigen, daß Konvergenz von (909) für $a = 0$ beim Übergang zu $r = 0$ nicht „unendlich langsam" werde. Auch *M. Ohm* (System der Mathematik 9, Nürnb. 1852, p. 74, 114) erklärt sich gegen den unbegründeten Übergang zu $r = 0$ in Formeln, die vorher nur für $r > 0$ bewiesen waren, und deutet an (ib. p. 124), wie er im vorliegenden Fall gerechtfertigt werden könne; doch scheint er sein Raisonnement selbst nicht für einen vollen Beweis ausgeben zu wollen.

1410) Torino mem. 1811/12, p. 279. Ebenso *A. de Morgan* (Diff. and integral calculus, Lond. 1836/42, p. 630).

1411) Exerc. de calc. int. 1 (1811), p. 260; der Sache nach ebenso *W. R. Hamilton,* Dubl. trans. $19_2$ (1843), p. 277.

1412) Théorie analytique des probabilités, Paris 1812, p. 108 der Ausgabe von 1847.

zur Grenze $r = 0$; *Fourier*[1413]), indem er den Übergang von der trigonometrischen Reihe zum trigonometrischen Integral direkt an der Formel (397) ausführt; *Cauchy*[1414]), indem er in der Gleichung (835) unter dem Zeichen nach $r$ zwischen den Grenzen 0 und $\infty$ integriert; dann auch als Residuenformel[1415]).

*Fourier*[1416]) gibt als eine der einfachsten Folgerungen aus dem Reziprozitätssatz die Gleichung:

$$(939) \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\xi}{\xi}\cos x\xi\, d\xi = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \;\;\text{„} \;\; |x| > 1, \end{cases}$$

nachher[1417]) zeigt er, daß sie eine einfache Folgerung aus (938) ist.

*G. Frullani*[1418]) schaltet die Zwischenwerte $\frac{\pi}{x}, \frac{2\pi}{x}, \ldots$ ein; nachdem dann alle Teilintegrale wieder auf das erste dieser Intervalle zurückgeführt sind, erscheint unter dem Integralzeichen die Partialbruchreihe der Kotangente, und die Integration läßt sich elementar ausführen. Außerdem leitet er die Formel noch aus

$$(940) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{m}} \frac{m(\cos(m-1)\xi - \cos\xi)}{2(1-\cos m\xi)}\, d\xi = \frac{\pi}{2}$$

durch Grenzübergang zu $m = 0$ ab[1419].)

---

1413) Paris mém. 4 (1819/20[24]), p. 497 (Preisschrift von 1811); Théorie Nr. 356 = Oeuvres 1, p. 402.

1414) Leçons sur le calc. infinit., Paris 1823 = Oeuvres (2) 4, p. 198. Ebenso *Poisson,* chaleur p. 339; *A. Kramer,* Progr. Gymn. Nordhausen 1845, p. 4; *O. Schlömilch,* Integralrechnung, Greifswald 1848, p. 134; *Besge,* j. de math. 14, 1849. Damit der Sache nach identisch ist es, wenn *J. Littrow* (Anleitung zur höheren Mathematik, Wien 1836, p. 460), *J. L. Raabe* (Differential- u. Integralrechnung 1, Zürich 1839, p. 249; 2, 1843, p. 335), *Navier,* leçons d'analyse 2, Paris 1840, p. 10), *A. A. Cournot* (théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 180), *A. Pioch* (Brux. mém. cour. in 4⁰ 15 (1841/42), p. 77), *Moigno* (leçons sur le calcul 2, Paris 1844, p. 77) in der Gleichung (923) $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ nehmen. *Pioch* setzt auch in der Gleichung (922), indem er sie ohne weiteres auch für komplexe Argumente in Anspruch nimmt, $x = 0$, dann $\alpha = -xi$, $\beta = xi$.

1415) Mém. sur les intégr. déf., Paris 1825, p. 63; Exerc. de math. 1 (1826) = Oeuvres (2) 6, p. 139; Ann. de math. 17 (1827), p. 106.

1416) Paris mém. 4 (1819/20[24]), p. 497 (Preisschrift von 1811); Ann. chim. phys. 3 (1816), p. 363; Théorie de la chaleur Nr. 348, p. 394.

1417) Preisschrift p. 499; Théorie Nr. 357 = Oeuvres 1, p. 403.

1418) Mem. soc. ital. $20_2$ (1831), p. 448 (von 1829); ebenso *J. Littrow* (Einleitung in die höhere Mathematik, Wien 1836, p. 454), *Fr. Newman* (Cambr. Dubl. math. j. 2 (1847), p. 75); eine Note der Redaktion besagt, daß ihr auch *A. Cayley* dasselbe Verfahren mitgeteilt habe und *M. Ohm,* (System der Mathematik 9, *N. I. Lobatschefskij*[1420]) kommt zu (938), indem er in der Gleichung

$$(941) \qquad \lim_{n=\infty} \int_0^x \frac{\sin \frac{2n+1}{2} \pi \alpha}{\sin \frac{\pi}{2} \alpha} \, d\alpha = 1$$

(vgl. 809) $x$ so klein nimmt, daß er im Nenner den Sinus durch den Bogen ersetzen kann, und zugleich $n$ so groß, daß auch noch $nx$ unendlich wird. Auf demselben Gedanken beruht es, wenn *O. Schlömilch* andeutet[1421]), daß man den Wert von (938) auch bestimmen könne, indem man auf die vorhin genannten Teilintervalle diejenigen Betrachtungen anwendet, die bei der Bestimmung der Summe einer trigonometrischen Reihe erforderlich sind; und wenn *M. Ohm*[1422]) in derjenigen Gleichung, die aus (121) durch Vertauschung von $x$ mit $\pi - x$ hervorgeht, $x$ zu Null, $N$ und $Nx$ zu $\infty$ werden läßt.

*J. L. Raabe*[1423]) erhält die Gleichung

$$(942) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin^{2q+1} \xi}{\xi} \, d\xi = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2q-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2q)} \frac{\pi}{2},$$

aus der (938) für $q = 0$ hervorgeht, auch aus seinen Untersuchungen über allgemeinere trigonometrische Integrale [820]).

Mehrfach, so von *O. Schlömilch*[1424]) und von *M. Ohm*[1425]), ist auch bemerkt worden, daß man für die Benutzung des Integrals (938) bei der Ableitung des allgemeinen Fourierschen Integralsatzes seinen Wert nicht zu kennen, sondern nur zu wissen braucht, daß er endlich ist; man erhält ihn dann nachträglich, indem man die darzustellende Funktion so wählt, daß man die verlangten Integrationen mit Hilfe anderer Formeln vollziehen kann.

Übrigens ist trotz aller dieser Untersuchungen die Richtigkeit der Gleichung (938) noch lange hier und da bezweifelt worden; so von *R. Moon*[1426]), der meint, das Integral sei überhaupt unbestimmt,

---

Nürnb. 1852, p. 74). p. 455 bezeichnet Frullani die Ableitung durch Differentiation des divergenten Integrals (517) nach $x$ als die gebräuchliche.

1419) Ib. p. 693.

1420) Kasan Schriften 2; vgl. Note [217]) u. [1063]).

1421) Arch. Math. Phys. 1 (1841), p. 422.

1422) System der Mathematik 9, Nürnb. 1852, p. 76.

1423) J. f. Math. 23 (1842), p. 116; 25 (1843), p. 167.

1424) Analytische Studien 2, Leipz. 1848, p. 24; zunächst für seine Gleichung (808).

1425) System der Mathematik 9, Nürnb. 1852, p. 349, 371.

1426) Phil. mag. (3) 26 (1845), p. 488.

und von *S. Earnshaw*[1427]), der den angegebenen Wert wenigstens für „manifestly symbolically erroneous" erklärt.

e) Von den Gleichungen

$$(943)\quad \int_0^\infty \xi^{a-1}\sin\left(\frac{a\pi}{2}-x\xi\right)\frac{d\xi}{r^2+\xi^2}=\frac{\pi}{2}r^{a-2}e^{-rx}$$

$$(944)\quad \int_0^\infty \xi^{a-1}\sin\left(\frac{a\pi}{2}-x\xi\right)\frac{d\xi}{r^2-\xi^2}=\frac{\pi}{2}r^{a-2}\cos\left(\frac{a\pi}{2}-rx\right)$$

$$\left.\begin{matrix} x>0, \\ r>0, \\ 0<a\leqq 2 \end{matrix}\right.$$

ist die erste von *A. Cauchy* zunächst[1428]) ohne Beweis, nur mit der allgemeinen Andeutung, daß sie aus Residuensätzen folge, mitgeteilt worden; später führt er beide wiederholt als Beispiele an[1429]). In der zweiten ist das Integral als Hauptwert aufzufassen. Für $a = 0$ gelten sie nicht mehr, vielmehr liefert dann dasselbe Verfahren[1430]):

$$(945)\quad \int_0^\infty \frac{\sin x\xi}{\xi}\frac{d\xi}{r^2+\xi^2}=\frac{\pi}{2r^2}(1-e^{-rx}),$$

$$(946)\quad \int_0^\infty \frac{\sin x\xi}{\xi}\frac{d\xi}{r^2-\xi^2}=\frac{\pi}{2r^2}(1-\cos rx).$$

*J. Liouville*[1431]) und *W. Center*[1432]) erhalten die Gleichung (943) aus ihrem Spezialfall $a = 1$ durch Differentiation zu beliebigem Index.

f) Die Gleichung

$$(947)\quad \int_0^\infty e^{-r\xi^2}\cos x\xi\, d\xi=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{r}}\exp\left(-\frac{x^2}{4r}\right)$$

finde ich zuerst publiziert bei *P. S. de Laplace*, der verschiedene Be-

---

1427) Cambr. trans. 8 (1847), p. 265; vgl. auch p. 268.

1428) Bull. philomat 1822, p. 171 für den Fall $r = 1$ [aus dem sich aber der allgemeinere sofort ablesen läßt].

1429) J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 577; Leçons sur le calc. infinit., Paris 1823 = Oeuvres (2) 4, p. 236; Mém. sur les int. déf., Paris 1825, p. 65; Exerc. de math. 1, 1826 = Oeuvres (2) 6, p. 139; Ann. de math. 17 (1827), p. 104. (An letzterer Stelle, p. 108, schreibt er diese Formeln *Bidone* zu; aber vielleicht liegt ein Versehen in der Numerierung der Formeln vor.) Ebenso *M. Ohm*, System der Mathematik 9, Nürnb. 1852, p. 196.

1430) J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 578.

1431) Ib. 21 (1832), p. 125, 141; weitere — aber auch noch nicht ausreichende — Erläuterungen betr. die Unsicherheit, ob nicht noch eine „fonction complémentaire" beizufügen sei, J. f. Math. 11 (1834), p. 11.

1432) Cambr. Dubl. math. j. 5 (1850), p. 216 (von 1848).

weise für sie gibt: Entwickelung nach Potenzen von $x$[1433]); Inanspruchnahme der Integralformel (928) auch für imaginäres $a$[1434]); Beweis (durch Differentiation unter dem Integralzeichen und partielle Integration), daß ihre linke Seite der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2} xy = 0 \tag{948}$$

genügt[1435]).

Die Anwendung komplexer Größen zur Ableitung der Gleichung wird dann von *A. Cauchy* gerechtfertigt: teils einfach durch den Hinweis darauf, daß beide Seiten der Gleichung (947) sich nach Potenzen von $x$ entwickeln lassen[1436]), teils durch die Residuensätze[1437]).

---

1433) Paris mém. 10 (1809) = Oeuvres 12, p. 311 (ebenso bei *v. Schmidten*, J. f. Math. 5 (1830), p. 394; bei *J. L. Raabe*, Differential- u. Integralrechnung 1, Zürich 1839, p. 258; bei *M. Ohm*, System der Mathematik 9, Nürnberg 1852, p. 166 und im wesentlichen auch bei *E. E. Kummer*, ib. 17 (1837), p. 212 und bei *O. Schlömilch*, anal. Studien 1, Leipz. 1848, p. 61). Die Formel, die *B. Boncompagni* (J. f. Math. 25 (1843), p. 83) auf demselben Wege erhält, ist nur scheinbar allgemeiner. Wenn *S. D. Poisson* (Mécanique 2, p. 359) die Gleichung durch Vergleichung zweier verschiedener Formen des Integrals der Wärmeleitungsgleichung ableitet, so kommt das im Grunde auch auf die Entwicklung nach Potenzen von $x$ hinaus.

1434) Ib. p. 313; Théorie analytique des probabilités, Paris 1812 (p. 105 der Ausgabe von 1847) „en vertu de la généralité de l'analyse". Vgl. übrigens Note 1298. Reproduziert ist dieses Verfahren von *Lacroix*, Traité 3 (1819), p. 487; von *Cauchy*, Paris mém. prés. 1 (1827) (von 1815) = Oeuvres (1) 1, p. 117; J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 518; von *Fourier*, Théorie de la chaleur, Nr. 375 = Oeuvres 1, p. 433; von *Navier*, leçons d'analyse 2, Paris 1840, p. 15; es findet sich auch im Nachlaß von *C. F. Gauß*, Werke 3, p. 436 (vom Herausgeber p. 494 vermutungsweise in das Jahr 1808 gesetzt). Die von *M. Ohm*, Geist der mathematischen Analysis 2, Erlangen 1846, p. 169 versprochene, System der Mathematik 9, Nürnb. 1852, p. 112 gegebene Rechtfertigung des Verfahrens von Laplace ist ungenügend: er beruft sich auf die ib. 8, 1851, p. 35 von ihm ausgesprochene Behauptung, man dürfe gegen $\infty$ jede endliche reelle oder imaginäre Zahl vernachlässigen, ohne irgendwie gezeigt zu haben, daß das auch in der Grenze eines bestimmten Integrals gilt.

1435) Paris mém. 11, 1810 = Oeuvres 12, p. 366; Théorie des probabilités p. 107. Reproduziert von *Legendre*, Exerc. de calc. int. 1 (1811), p. 363; von *Lacroix*, Traité 3 (1819), p. 489; von *Navier*, leçons d'analyse 2, Paris 1840, p. 12; von *J. M. C. Duhamel*, cours d'analyse 2, Paris 1840, p. 137; von *A. A. Cournot*, théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 183; von *Moigno*, leçons 2, 1844, p. 91; von *O. Schlömilch*, anal. Studien 1, Leipz. 1848, p. 61; von *M. Ohm*, System der Mathematik 9, Nürnb. 1852, p. 111 (dazu p. 375 die Bemerkung, daß sich die Integrationskonstante auch mit Hilfe des Reziprozitätssatzes bestimmen lasse).

1436) Leçons sur le calcul inf., Paris 1823 = Oeuvres (2) 4, p. 242; ebenso

Durch Differentiation nach $x$ ergeben sich aus (947) die Werte der Integrale[1438]):

$$\int_0^\infty \xi^{2k+1} e^{-r\xi^2} \sin x\xi\, d\xi, \tag{949}$$

$$\int_0^\infty \xi^{2k} \quad e^{-r\xi^2} \cos x\xi\, d\xi. \tag{950}$$

Sie lassen sich zu der Gleichung

$$\int_0^\infty \xi^{m-1} \sin\left(\frac{m\pi}{2} - x\xi\right) e^{-r\xi^2} d\xi \tag{951}$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}} \exp\left(-\frac{x^2}{4r}\right) \int_0^\infty ((x+\xi i)^{m-1} + (x-\xi i)^{m-1}) \exp\left(-\frac{\xi^2}{4r}\right) d\xi$$

zusammenfassen; daß diese auch für andere positive Werte von $m$ als ganzzahlige gilt, hat *Cauchy* zuerst[1439]) auf einem ziemlichen Umwege dargetan, indem er beiderseits die Faktoren, mit denen die Exponentialgröße multipliziert auftritt, durch „außerordentliche Integrale" [1376]) ersetzte und dann die Reihenfolge der Integrationen umkehrte; später[1440]) beweist er es durch Integration um einen Parallelstreifen.

Für die allgemeineren Integrale:

$$\int_0^\infty \exp(-r\xi^n)\xi^{a-1} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} x\xi\, d\xi \tag{952}$$

---

*J. M. C. Duhamel,* cours d'analyse 2, Paris 1840, p. 11; *Moigno,* leçons 2 (1844), p. 80, *O. Schlömilch,* Integralrechnung, Greifswald 1848, p. 137.

1437) Bull. philomat. 1822, p. 167; Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 341 (von 1814); Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 281; ebenso *A. de Morgan,* differential and integral calculus, Lond. 1836/41, p. 634; *Moigno,* leçons 2 (1844), p. 306.

1438) *Laplace,* Paris mém. 10 (1809); $11_1$ (1810) = Oeuvres 12, p. 313, 366; *Legendre,* Exerc. de calc. int. 1 (1811), p. 363; *Cauchy,* Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 348 (von 1814); vgl. die Erläuterungen von 1827, p. 347; *A. de Morgan,* differential and integral calculus, London 1836/42, p. 678. Über die dabei auftretenden höheren Differentialquotienten von $\exp(-x^2)$ finden sich einige Bemerkungen noch bei *J. Liouville,* j. de math. 5 (1840), p. 311; auch *O. Schlömilch,* J. f. Math. 33 (1846), p. 270 gibt Anweisung zu ihrer bequemen Berechnung.

1439) J. Éc. polyt. cah. 28 (1844), (von 1815) = Oeuvres (2) 1, p. 549; Exerc. de math. 2 (1826) = Oeuvres (2) 6, p. 86. Ausgerechnete Formeln für die kleinsten ganzzahligen Werte von $m$: Oeuvres (2) 1, p. 556 (mit $x = r\sqrt{6}$).

1440) In den Noten von 1827 zur Abhandlung von 1814, Paris mém. prés. 1 = Oeuvres (1) 1, p. 347; eine Andeutung auch schon Bull. philomat. 1822, p. 167.

erhält *Oettinger*[1441]) — für $a = 0$ auch *A. Cauchy*[1442]) — durch Entwicklung unter dem Integralzeichen Reihen nach Potenzen von $x/\sqrt[n]{s}$, mit Koeffizienten, die sich durch $\Gamma$-Funktionen ausdrücken.

g) *A. Cauchy* gewinnt ferner[1443]) aus der allgemeinen Gleichung

$$(953)\qquad \int_0^\infty \{f(\xi^2 - 2x\xi + x^2) + f(\xi^2 + 2x\xi + x^2)\}\, d\xi = 2\int_0^\infty f(\xi^2)\, d\xi$$

durch Spezialisierung von $f$ unter Berücksichtigung von (927) zunächst

$$(954)\qquad \int_0^\infty \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(x^2 + \xi^2)\cos 2x\xi\, d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

und daraus

$$(955)\qquad \int_0^\infty \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\xi^2 \cos(x\xi)\, d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x^2}{4} \pm \sin\frac{x^2}{4}\right).$$

Andererseits[1444]) leitet er auch die Formel

$$(956)\qquad \int_0^\infty e^{i\xi^2}\cos(x\xi)\, d\xi = \frac{1+i}{2\sqrt{2}}\sqrt{\pi}\, \exp\left(-\frac{ix^2}{4}\right)$$

1441) J. f. Math. 38 (1848), p. 222, 228. Er rechnet eine Anzahl spezieller Annahmen durch, namentlich solche, in welchen sich die Reihen elementar oder mit Hilfe von Integralen abklingender Funktionen (vgl. unten p) summieren lassen; doch sind unter diesen Beispielen nicht wenige divergente Integrale.

1442) Paris C. R. 37 (1853), p. 206 = Oeuvres (1) 12, p. 102.

1443) Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 118 (von 1815); Bull. philomat. 1821, p. 111; J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 520 (hier auch noch weitere Formeln durch Differentiation nach $x$). Die Schlußweise bei *Fourier*, Théorie Nr. 407 = Oeuvres 1, p. 481 ist im Grunde dieselbe, nur die Reihenfolge der einzelnen Schritte ist geändert; ebenso die bei *P. G. Lejeune-Dirichlet*, Berl. Abhandl. 1835 [37], p. 399; J. f. Math. 17 (1837), p. 61 = Werke 1, p. 248, 263. An der zweiten Stelle bemerkt er, man könne sich durch die Substitution $\xi^2 = \beta$ davon überzeugen, daß die Integrale einen Sinn haben, obwohl die Integranden im Unendlichen nicht gegen 0 konvergieren. *O. Schlömilch*, analytische Studien 2, Leipzig 1848, p. 60, reproduziert Dirichlets Schlußweise. — *J. M. C. Duhamel*, cours d'analyse 2, Paris 1840, p. 12 und *A. A. Cournot*, théorie des fonctions 2 (1841) p. 182 führen ohne weiteres komplexe Parameter in das Integral (493) ein.

1444) Mém. sur les intégrales définies, Paris 1825, p. 60. Um zu erkennen, daß die Differentiation unter dem Zeichen in der Tat erlaubt ist, muß man erst $\xi^2$ als Integrationsvariable einführen.

Der von *Cauchy*, Exerc. de math. 1 (1826) = Oeuvres (2) 6, p. 77 für das Integral

$$\int_0^\infty \xi^{2n} \exp(-s(\xi^2 + \xi^{-2}))\cos x\xi\, d\xi$$

ab, indem er den Residuensatz auf die Funktion exp $(-x^2)$ und den achten Oktanden der Ebene anwendet. Differentiation nach $x$ ergibt noch:

$$(957)\quad \int_0^\infty \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} \xi^2 \sin(x\xi)\,\xi\,d\xi = \frac{x}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\mp\cos\frac{x^2}{4} + \sin\frac{x^2}{4}\right)$$

oder:

$$(958)\quad \int_0^\infty \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} \xi \,\sin(x\sqrt{\xi})\,d\xi = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\mp\cos\frac{x^2}{4} + \sin\frac{x^2}{4}\right).$$

h) Die Gleichung:

$$(959)\quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{Cof}(\pi\xi - a\xi)}{\operatorname{Sin}\pi\xi}\sin x\xi\,d\xi = \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cof} x - \cos a} \qquad (0 < a < 2\pi)$$

erhält *S. D. Poisson*[1445]), indem er in der Partialbruchzerlegung der als Funktion von $a$ betrachteten rechten Seite die einzelnen Glieder vermittelst der Gleichung (835) durch Integrale ausdrückt und dann die Reihenfolge von Summation und Integration vertauscht. Ersetzung von $a$ durch $\pi + a$ gibt ihm noch:

$$(960)\quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{Cof} a\xi}{\operatorname{Sin}\pi\xi}\sin x\xi\,d\xi = \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cof} x + \cos a} \qquad (-\pi < a < \pi);$$

später[1446]) erhält er auch diese Gleichung direkt durch Partialbruchzerlegung. Vertauschung von $a$ mit $ai$, dann von $a$ mit $xi$ und von $x$ mit $ai$ gibt[1447]):

$$(961)\quad \int_0^\infty \frac{\cos a\xi}{\operatorname{Sin}\pi\xi}\sin x\xi\,d\xi = \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cof} x + \operatorname{Cof} a}$$

$$(962)\quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{Sin} a\xi}{\operatorname{Sin}\pi\xi}\cos x\xi\,d\xi = \frac{1}{2}\,\frac{\sin a}{\operatorname{Cof} x + \cos a}. \qquad (-\pi < a < \pi).$$

Indem er weiter in (960) $a$ durch $a + \frac{\pi}{2}$, dann durch $a - \frac{\pi}{2}$ ersetzt

---

angegebene Wert beruht auf einem Versehen; es muß heißen

$$\int_0^\infty \xi^{2n} \exp\left(-s(\xi^2 + \xi^{-2})\right)\cos\left(x(\xi - \xi^{-1})\right)d\xi$$

[was nicht mehr zu den Integralen gehört, um die es sich hier handelt]. J. Éc. polyt. cah. 28 (1844) (von 1815) = Oeuvres (2) 1, p. 519 steht die Sache richtig.

1445) Paris mém. $1811_2$ [1814], p. 212.

1446) J. Éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 295.

1447) Paris mém. $1811_2$, p. 216; J. Éc. polyt. cah. 18, p. 297.

und die so entstehenden Gleichungen miteinander verbindet, erhält er noch[1448]):

$$\text{(963)} \qquad \int_0^\infty \frac{\mathfrak{Sin}\, a\xi}{\mathfrak{Cos}\, \pi\xi} \sin x\xi\, d\xi = \frac{\sin \frac{a}{2}\, \mathfrak{Sin} \frac{x}{2}}{\mathfrak{Cos}\, x + \cos a},$$

und indem er entsprechend in bezug auf $x$ operiert[1449]):

$$\text{(964)} \qquad \int_0^\infty \frac{\mathfrak{Cos}\, a\xi}{\mathfrak{Cos}\, \pi\xi} \cos x\xi\, d\xi = \frac{\cos \frac{a}{2}\, \mathfrak{Cos} \frac{x}{2}}{\mathfrak{Cos}\, x + \cos a}.$$

Für $a = 0$ oder $= \pi$ ergeben sich spezielle bzw. Grenzfälle; namentlich aus (960) die Gleichung[1450]):

$$\text{(965)} \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x\xi\, d\xi}{e^{2\pi\xi} - 1} = \frac{1}{4}\, \mathfrak{Cot} \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}.$$

*A. M. Legendre*[1451]) erhält alle diese Gleichungen, indem er auf der linken Seite unter dem Integralzeichen mit Hilfe der Gleichungen (282, 283) in trigonometrische Reihen entwickelt, dann gliedweise integriert und summiert.

*Poisson* gibt zur Bestimmung des Integrals (847) auch noch andere Methoden: einmal[1452]) verwandelt er es durch Einschaltung der Zwischenwerte $\frac{2k\pi}{x}$ in eine unendliche Reihe; dieselbe Reihe tritt auch auf, wenn in dem Integral

$$\text{(966)} \qquad \frac{1}{4\nu} \int_0^{2\pi} \frac{\mathfrak{Sin}\, rx}{\mathfrak{Cos}\, rx - \cos x\xi} \cos x\xi\, d\xi$$

---

1448) Paris mém. $1811_2$, p. 217; J. Éc. polyt cah. 18, p. 298.

1449) J. Éc. polyt. cah. 18, p. 298.

1450) Paris mém. $1811_2$, p. 219; J. Éc. polyt. cah. 18, p. 302; 20 (1832), p. 237. Die Ableitung der speziellen Formel aus der allgemeinen ist an der ersteren Stelle streng; an der zweiten und dritten werden divergente Integrale benutzt. *G. Piola* (Mem. soc. itat. $20_2$ (1831), p. 635) verifiziert die Gleichung (965), indem er unter dem Integralzeichen nach Potenzen von exp $(-2\pi\xi)$ entwickelt und gliedweise integriert. *O. Schlömilch,* Theorie der Differenzen und Summen, Halle 1848, p. 155 leitet die Gleichung (970) aus den von ihm unabhängig von ihr bewiesenen Integraldarstellungen der Bernoullischen Zahlen ab; *J. Dienger,* Arch. Math. Phys. 14 (1850), p. 223 stellt ihren Beweis als Aufgabe.

1451) Exerc. de calc. int. 2, Paris 1817, p. 185 (publ. 1815); ebenso *A. de Morgan,* differential and integral calculus, Lond. 1836/41, p. 669; *O. Schlömilch,* Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale, Jena 1843, p. 50; analytische Studien 2, Leipzig 1848, p. 124. *M. Ohm,* System der Mathematik 9, Nürnb. 1852, p. 378.

1452) J. Éc. polyt. cah. 17 (1815), p. 630.

der erste Faktor unter dem Integralzeichen als Funktion von $r$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, von $\xi$ in Partialbrüche zerlegt wird; dieses Integral aber läßt sich elementar oder mit Hilfe von (2) bestimmen. Andererseits ersetzt er[1453]) in den Formeln die durch Vergleich der Koeffizienten der Reihen (2) u. (3) mit der Integraldarstellung entstehen $r$ durch $1 - \frac{r}{n}$ und $x$ durch $\frac{x}{n}$ und geht dann zu $n = \infty$ über.

*G. Plana* gewinnt zunächst[1454]) die Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{\xi}{\mathfrak{Sin}\, \pi\xi} \cos x\xi \, d\xi = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \tag{967}$$

durch Partialbruchzerlegung des ersten Faktors rechts unter dem Integralzeichen; daraus durch Integration nach $x$:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\xi}{\mathfrak{Sin}\, \pi\xi} d\xi = \frac{1}{2} \mathfrak{Cot} \frac{x}{2} \tag{968}$$

und daraus wieder die Gleichung (961). Die Substitution von $ai$ für $a$ rechtfertigt er durch die Bemerkung, daß es sich um Funktionen handle, die sich nach Potenzen von $a$ entwickeln lassen[1455]). Außerdem leitet er noch[1456]) aus der Gleichung (965) zunächst für ganzzahlige $q$ die folgende ab:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-q\xi} \sin x\xi \, d\xi}{1 - e^{-\xi}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{\pi}{e^{2\pi x} - 1} - \sum_{n=1}^{q-1} \frac{x}{n^2 + x^2}; \tag{969}$$

hier ersetzt er die Summe rechts durch eine [semikonvergente] Entwicklung Eulers und nimmt dann das Resultat für beliebige Werte von $q$ in Anspruch.

---

1453) Ib. cah. 19 (1823), p. 488.

1454) Torino mem. 23 (1818), p. 40 (von 1816). Dem divergenten Integral

$$\int_0^\infty \xi \, \mathfrak{Cot}\, \pi\xi \cos x\xi \, d\xi$$

schreibt er p. 38 den Wert

$$-\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}$$

zu; daraus erhält er durch Differentiation nach $x$ und Abtrennung des divergenten Bestandteils auch seinerseits die Gleichung (g).

1455) p. 41. Er unterläßt freilich die Feststellung des Konvergenzgebiets der Entwicklung.

1456) p. 47.

i) Die Gleichung

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos x\xi\, d\xi}{\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos a} = \frac{\pi}{\sin a}\,\frac{\mathfrak{Sin}\, ax}{\mathfrak{Sin}\,\pi x} \tag{970}$$

ist in anderer Schreibweise schon von *L. Euler* gewonnen worden[1457]. Er erhält zunächst durch Ausführung der unbestimmten Integration und einige Reduktionen für ganzzahlige Werte von $m$ und $n$ die Gleichung

$$\int\limits_0^\infty \frac{r^m + r^{-m}}{r^n + 2\cos a + r^{-n}}\,\frac{dr}{r} = \frac{\pi}{n \sin a}\,\frac{\sin\frac{ma}{n}}{\sin\frac{m\pi}{n}}; \tag{971}$$

er bemerkt dann, daß sie ungeändert bleibt, wenn man für $m$ und $n$ Brüche mit demselben Nenner setzt, und nimmt sie infolgedessen für beliebige reelle und dann auch für imaginäre Werte von $m$ in Anspruch; die durch die letztere Annahme erhaltene Gleichung geht durch die Substitution $r^n = e^\xi$ in (975) über. Die ähnliche Gleichung

$$\int\limits_0^\infty \frac{\mathfrak{Sin}\,\xi}{\mathfrak{Cof}\,\xi - \cos a} \sin x\xi\, d\xi = 2\pi \frac{\mathfrak{Cof}\,(\pi x - ax)}{\mathfrak{Sin}\,\pi x} \tag{972}$$

erhält *G. Plana*[1458], indem er den ersten Faktor unter dem Integralzeichen in Partialbrüche zerlegt und gliedweise integriert. *S. D. Poisson*[1459] gewinnt diese und ähnliche Formeln als Umkehrungen der unter (h) besprochenen, indem er seine allgemeine Methode zum Beweis des als Grenzformel aufgefaßten Fourierschen Integralsatzes (Nr. 54) auf den vorliegenden Fall direkt anwendet: er multipliziert z. B. in der Gleichung (vgl. 962)

$$\frac{\mathfrak{Sin}\, a}{\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos a} = 2\int\limits_0^\infty \frac{\mathfrak{Sin}\, a\mathfrak{x}}{\mathfrak{Sin}\,\pi\mathfrak{x}} \sin \xi\mathfrak{x}\, d\mathfrak{x} \tag{973}$$

beiderseits mit $\exp(-m\xi)\cos x\xi\, d\xi$ und integriert nach $\xi$ zwischen den Grenzen 0 und $\infty$; rechts wird dann erhalten:

$$\frac{m}{m^2 + (x-\mathfrak{x})^2} + \frac{m}{m^2 + (x+\mathfrak{x})^2}, \tag{974}$$

und für die Integration nach $\mathfrak{x}$ kommt im Grenzfalle $m = 0$ nur die

---

1457) Petrop. n. a. 3 (1785[88]), p. 14 (von 1776); das Resultat ohne Beweis auch 5 (1787/89), p. 14 (ebenfalls von 1776).

1458) Torino mem. 23 (1818), p. 46 (von 1816); reproduziert von *Poisson*, J. Éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 310; ebenso *O. Schlömilch*, Analytische Studien 2, Leipzig 1848, p. 124. *Euler*[1457] erhält umgekehrt die Partialbruchzerlegungen derartiger Funktionen aus diesen Integralsätzen; vgl. Nr. 13.

1459) J. Éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 305.

Umgebung von $\mathfrak{x} = x$ in Betracht, so daß schließlich wieder (970) erhalten wird. Er verifiziert das Resultat durch die Partialbruchzerlegung von $\frac{\sin a}{\mathfrak{Cos}\,\xi + \cos a}$ [1460]) und bemerkt noch[1461]), daß die Formeln auch richtig bleiben, wenn für $x$ eine komplexe Größe gesetzt wird, deren imaginärer Bestandteil absolut genommen $< 1$ ist.

Allgemeinere Formeln, in welchen die hier besprochenen als Spezialfälle enthalten sind, finden sich bei *A. Cauchy*[1462]):

$$(975) \qquad \int\limits_0^\infty \begin{Bmatrix} \mathfrak{Cos}\,\lambda\xi \cos x\xi \\ \mathfrak{Sin}\,\lambda\xi \sin x\xi \end{Bmatrix} \frac{d\xi}{\mathfrak{Cos}\,\xi + \cos\theta}$$

$$= \frac{2\pi}{\sin\theta} \cdot \frac{\begin{Bmatrix} \mathfrak{Cos} \\ \mathfrak{Sin} \end{Bmatrix} (\pi x + \theta x) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (\lambda\pi - \lambda\theta) - \begin{Bmatrix} \mathfrak{Cos} \\ \mathfrak{Sin} \end{Bmatrix} (\pi x - \theta x) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (\lambda\pi + \lambda\theta)}{\mathfrak{Cos}\,2\pi x - \cos 2\pi\lambda}.$$

j) Die für $|x| < |\alpha|$ geltenden Gleichungen:

$$(976) \qquad \int\limits_0^\infty \frac{\sin x\xi}{\sin\alpha\xi} \frac{d\xi}{m^2 + \xi^2} = \frac{\pi}{2m} \frac{\mathfrak{Sin}\,mx}{\mathfrak{Sin}\,m\alpha},$$

$$(977) \qquad \int\limits_0^\infty \frac{\cos x\xi}{\sin\alpha\xi} \frac{\xi\,d\xi}{m^2 + \xi^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\mathfrak{Cos}\,mx}{\mathfrak{Sin}\,m\alpha},$$

$$(978) \qquad \int\limits_0^\infty \frac{\sin x\xi}{\cos\alpha\xi} \frac{d\xi}{\xi(m^2 + \xi^2)} = \frac{\pi}{2m^2} \frac{\mathfrak{Sin}\,mx}{\mathfrak{Cos}\,m\alpha},$$

$$(979) \qquad \int\limits_0^\infty \frac{\cos x\xi}{\cos\alpha\xi} \frac{d\xi}{m^2 + \xi^2} = \frac{\pi}{2m} \frac{\mathfrak{Cos}\,mx}{\mathfrak{Cos}\,m\alpha},$$

in denen die Integrale als Hauptwerte zu verstehen sind, hat *A. Cauchy*[1463])

---

1460) p. 306. Er benutzt eine divergente Form der Partialbruchentwicklung und das divergente Integral ($517_1$); wenn man das erstere vermeidet, braucht man auch das letztere nicht.

1461) p. 309. *Poisson* setzt diesen imaginären Bestandteil auch gleich 1; das gibt aber ein divergentes Integral.

1462) Ann. de math. 17 (1827), p. 111.

1463) Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 442 (von 1814). Mém. sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, Paris 1825, p. 66 gibt *Cauchy* ebenfalls die 1., 2. und 4. Formel (980), an Stelle der 3. jedoch:

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x\xi}{\cos\alpha\xi} \frac{\xi\,d\xi}{m^2 + \xi^2} = -\frac{\pi}{2} \frac{\mathfrak{Sin}\,mx}{\mathfrak{Cos}\,m\alpha};$$

dagegen Ann. de math. 17 (1827), p. 108 dieselben Formeln wie im Text. Die erste Formel als Beispiel für die Residuensätze auch bei *A. de Morgan,* Differential and integral calculus, London 1836/41, p. 638.

durch Anwendung seiner Residuensätze auf eine Halbebene gewonnen. Um auch den Fall $|x| > \alpha$ zu erledigen, wendet er[1464]) dieselben Sätze auf einen Parallelstreifen an, der dann noch unendlich viele weitere Pole der zu integrierenden Funktion enthält; das gibt zunächst z. B.

$$(980) \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\xi}{\sin \pi\xi} \frac{d\xi}{1+\xi^2} = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{1+n^2} - \frac{\pi e^{-x}}{\mathfrak{Sin}\,\pi},$$

und daraus einerseits, da für $|x| < |\pi|$ der Wert des Integrals bereits bekannt ist, den Wert der rechts stehenden Summe unter dieser Voraussetzung, andererseits, da die Summe eine gerade periodische Funktion von $x$ ist, den Wert des Integrals auch in den andern Fällen. Dem Berichterstatter der Akademie über Cauchys Abhandlung, *A. M. Legendre*, scheinen diese Schlüsse Schwierigkeiten geboten zu haben[1465]) (sie sind allerdings bei Cauchy namentlich in der ursprünglichen Redaktion nicht eben übersichtlich dargestellt, besser in den Zusätzen von 1827); er hat daher Cauchy zu wiederholten Erläuterungen darüber veranlaßt, wie so die Bedingung $|x| < |\alpha|$ bei der Anwendung der Residuensätze auf die Halbebene dadurch hereinkommt, daß man Forderungen betr. das Verhalten der Funktionen im Unendlichen stellen muß[1466]), und wie so die Formeln im Grenzfall $\alpha = 0$ in sonst bekannte übergehen[1467]), bis Cauchy schließlich die Geduld verlor[1468]). Legendre leitet die Formeln auch selbst ab[1469]), für $|x| < |\alpha|$ unter Benutzung von Partialbruchzerlegungen, die er allerdings nur dadurch erhalten hatte, daß er die für die Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen geltenden Sätze ohne weiteres auch auf transzendente Funktionen übertrug; für $|x| > |\alpha|$ durch sukzessive Reduktionen. Den Grenzfall $x = \alpha$ erledigt er mittels des Grenzfalls $r = 1$ der Formel (991). Auch gewinnt er noch durch Verbindung der dritten Formel (980) mit der durch Differentiation der vierten nach $x$ entstehenden (in der Note 1463 angegebenen) die Gleichung

$$(981) \qquad \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x\xi}{\cos \alpha\xi} \frac{d\xi}{\xi} = 0 \quad \text{für} \quad |x| < |\alpha|$$

und verifiziert sie durch Zerlegung des Integrationsbereichs mittels der Zwischenwerte $\frac{2k\pi}{\alpha}$[1470]).

1464) Paris mém. prés. 1 = Oeuvres (1) 1, p. 469, 499.
1465) Vgl. seinen der Abhandlung vorgedruckten Rapport p. 326.
1466) p. 486.
1467) p. 493.
1468) „Ce qui précède suffit", p. 506.
1469) Exerc. de calc. int. 2 (1817), p. 174 (publ. 1815).

Cauchy gibt übrigens auch noch allgemeinere Formeln, in denen links an Stelle von $(m^2 + \xi^2)^{-1}$ eine beliebige rationale Funktion (von geeignetem Verhalten im Unendlichen), rechts die entsprechende Residuensumme steht[1471]).

*O. Schlömilch*[1472]) erhält für das Integral

$$(982) \qquad y = \int_0^\infty \frac{\operatorname{Cof} a\xi}{\operatorname{Sin} \pi\xi} \frac{\sin x\xi}{m^2 + \xi^2} d\xi$$

als Funktion von $x$ die lineare Differentialgleichung:

$$(983) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - m^2 y = -\int_0^\infty \frac{\operatorname{Cof} a\xi}{\operatorname{Sin} \pi\xi} \sin x\xi \, d\xi.$$

Indem er deren zweites Glied nach Potenzen von $\exp(-x)$ entwickelt, dann integriert und die Integrationskonstanten durch Grenzübergang zu $x = \infty$ bestimmt, findet er:

$$(984) \qquad y = \frac{1}{2m^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-nx)\cos na}{n^2 - m^2}.$$

Für $m = 1/2$ und $m = 1$ läßt sich diese Reihe mit Hilfe geeigneter Kombinationen der Gleichungen (14) und (15) summieren; das gibt

$$(985) \qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{Cof} a\xi}{\operatorname{Sin} \frac{\pi}{2}\xi} \frac{\sin x\xi}{1 + \xi^2} d\xi = -\frac{\pi}{2} e^{-x} \cos a$$
$$+ \frac{1}{2} \operatorname{Sin} x \sin a \log \frac{\operatorname{Cof} x + \sin a}{\operatorname{Cof} x - \sin a}$$
$$+ \operatorname{Cof} x \cos a \operatorname{arc\,tg} \frac{\cos a}{\sin x} \qquad \left(\frac{\pi}{2} > a > 0\right)$$

und[1473]):

$$(986) \qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{Cof} a\xi}{\operatorname{Sin} \pi\xi} \frac{\sin x\xi}{1 + \xi^2} d\xi = -\frac{1}{2} e^{-x}(x \cos a + a \sin a)$$
$$+ \frac{1}{2} \operatorname{Sin} x \cos a \log(1 + 2e^{-x}\cos a + e^{-2x}) + \operatorname{Cof} x \sin a \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin a}{e^x + \cos a}.$$

---

1470) p. 181.

1471) Ann. de math. 17 (1827), p. 97.

1472) Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale, Jena 1843, p. 52. $a = 0$, $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{\pi}{4}$ gibt Spezialfälle; Differentiation nach $x$ eine weitere Formel.

1473) p. 58.

Auf entsprechendem Wege erhält er noch[1473a])

$$(987)\quad \int_0^\infty \frac{\mathfrak{Sin}\, a\xi}{\mathfrak{Sin}\frac{\pi}{2}\xi}\frac{\cos x\xi}{1+\xi^2}d\xi = \frac{\pi}{2}e^{-x}\sin a$$

$$-\frac{1}{2}\mathfrak{Cos}\, x\cos a \log\frac{\mathfrak{Cos}\, x+\sin a}{\mathfrak{Cos}\, x-\sin a}+\mathfrak{Sin}\, x\sin a \operatorname{arc\,tg}\frac{\cos a}{\sin x};$$

$$(988)\quad \int_0^\infty \frac{\mathfrak{Sin}\, a\xi}{\mathfrak{Sin}\,\pi\xi}\frac{\cos x\xi}{1+\xi^2}d\xi = \frac{1}{2}e^{-x}(x\sin a - a\cos a)$$

$$+\frac{1}{2}\mathfrak{Cos}\, x\sin a\log(1+2e^{-x}\cos a+e^{-2x})-\mathfrak{Sin}\, x\cos a\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin a}{e^x+\cos a}.$$

Später[1474]) erhält Schlömilch diese Resultate direkt aus den Entwicklungen der ersten Faktoren links unter den Integralzeichen.

Hier können auch die Geichungen

$$(989)\quad \int_0^\infty \mathfrak{Tg}\frac{\xi}{2}\sin x\xi\frac{d\xi}{\xi^2} = \frac{2}{\pi}\sum\frac{1-\exp(-n\pi x)}{n^2}$$

und

$$(990)\quad \int_0^\infty \frac{\mathfrak{Sin}\,\xi(\theta-\frac{1}{2})}{\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}\xi}\frac{\cos x\xi}{\xi(\xi^2+4\alpha^2)}d\xi$$

$$=\frac{\pi}{8\alpha^2}\frac{e^{-2x\alpha}\sin(2\theta-1)\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{2}\sum\frac{\exp(-n\pi x)\cos n\pi\theta}{n\pi(n^2\pi^2-4\alpha^2)}$$

angeschlossen werden, die *G. G. Stokes*[1475]) erhält, indem er die auf je zwei verschiedene Arten erhaltenen Ausdrücke für die gewissen Grenzbedingungen genügenden Integrale partieller Differentialgleichungen miteinander vergleicht. Die Summation ist in ihnen über alle ungeraden ganzzahligen Werte von $n$ zu erstrecken.

k) Die Gleichung

$$(991)\quad \int_0^\infty \frac{\sin\alpha\xi}{1-2r\cos\alpha\xi+r^2}\frac{\xi d\xi}{m^2+\xi^2} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{e^{m\alpha}-r}\qquad (r\leqq 1)$$

hatte *A. M. Legendre*[1476]) durch Benutzung der Entwicklung (3) und der Gleichung (848) abgeleitet; daraus durch Multiplikation mit $r d\alpha$, Integration nach $\alpha$ und Differentiation nach $r$ [oder einfacher aus der

1473a) p. 62.

1474) Analytische Studien 2, Leipzig 1848, p. 126.

1475) Cambr. trans. $8_5$ (1849), p. 576, 581 (von 1847) = Papers 1, p. 301, 309.

1476) Exerc. de calc. int. 2 (1817), p. 123 (publ. 1815).

Entwicklung (13)]:

$$(992)\qquad \int_0^\infty \frac{r-\cos\alpha\xi}{1-2r\cos\alpha\xi+r^2}\,\frac{d\xi}{m^2+\xi^2}=-\frac{\pi}{2m}\,\frac{1}{e^{m\alpha}-r}.$$

Ähnlich erhält *S. D. Poisson*[1477]) für $x<\alpha$:

$$(993)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin x\xi\sin\alpha\xi}{1-2r\cos\alpha\xi+r^2}\,\frac{d\xi}{m^2+\xi^2}=\frac{\pi}{4m}\,\frac{e^{mx}-e^{-mx}}{e^{m\alpha}-r}$$

$$(994)\qquad \int_0^\infty \frac{(\cos\alpha\xi-r)\cos x\xi}{1-2r\cos\alpha\xi+r^2}\,\frac{d\xi}{m^2+\xi^2}=\frac{\pi}{4m}\,\frac{e^{mx}+e^{-mx}}{e^{m\alpha}-r},$$

während für $x>\alpha$ kompliziertere Formeln auftreten. Differentiationen und Integrationen nach $r$, $\alpha$ oder $x$ geben weitere Formeln, mit deren Hilfe sich jedes Integral der Form

$$(995)\qquad \int R_1(\xi^2)R_2(\cos\alpha\xi)\begin{Bmatrix}\cos x\xi\\ \sin\alpha\xi\sin x\xi\end{Bmatrix}d\xi$$

auswerten läßt, wenn $R_1$ und $R_2$ rationale Funktionen ihrer Argumente bedeuten, die für keinen reellen Wert von $\xi$ Null werden.

l) *P. S. de Laplace* war mit Hilfe von Formeln aus der Theorie der $\Gamma$-Funktionen zu der Gleichung gelangt[1478]):

$$(996)\qquad \Delta^m x^a=\frac{-1}{\pi}\sin a\pi\,\Gamma(a)\int_0^\infty e^{-x\xi}(e^{-\xi}-1)^m\xi^{-a-1}d\xi.$$

Indem er in ihr $\xi$ durch $-2\xi i$, $a$ durch $a+m-1$ ersetzt, erhält er[1479]):

---

1477) J. Éc. polyt. cah. 17 (1815), p. 626. *B. Boncompagni* (J. f. Math. 25 (1843), p. 94) behandelt diese Integrale mit nicht durchweg einwandfreien Hilfsmitteln; durch Übergang zu $r=1$ in geeigneten Kombinationen von ihnen erhält er die hier unter j besprochenen Formeln.

1478) Théorie analytique des probabilités, livre I, Nr. 41 (p. 163 der Ausgabe von 1814). Wenn *Laplace* hier schon davon redet, daß er diese Gleichung durch „les passages réciproques du réel à l'imaginaire" gefunden habe, so bezieht sich das auf die Behandlung der $\Gamma$-Funktion mit negativem Argument. *A. Cauchy* (J. Éc. polyt. cah. 28 (1844) (von 1815) = Oeuvres (2) 1, p. 523), der im übrigen hier dem Gedankengang von Laplace zur Ableitung der Formel (996) im wesentlichen folgt, bedient sich zur Darstellung der $\Gamma$-Funktionen negativer Argumente derjenigen Art bestimmter Integrale, die er später „außerordentliche" genannt hat (vgl. 1376, [1356])).

1479) Théorie des probab., livre I, Nr. 42 (p. 168 der Ausgabe von 1814). Ib. add. II, p. 480 beweist er die Formel (997) direkt, indem er $\sin^m\xi$ durch die Cosinus bzw. die Sinus der Vielfachen von $\xi$ ausdrückt und von den Formeln (920) Gebrauch macht. — p. 169 leitet er für große $m$ und kleine $a$ geltende asymptotische Ausdrücke ab.

(997)
$$\frac{2^m}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(x\xi - \frac{a\pi}{2}\right)\left(\frac{\sin\xi}{\xi}\right)^m \xi^{-a}d\xi$$
$$= \frac{1}{\Gamma(a+m)}\Big[(x+m)^{a+m-1} - \binom{m}{1}(x+m-2)^{a+m-1}$$
$$+\binom{m}{2}(x+m-4)^{a+m-1} - + - \cdots\Big];$$

dabei ist die Summe in der Klammer so weit fortzusetzen, als die Basen der Potenzen nicht negativ werden. Die damit übereinstimmenden Formeln:

(998)
$$\int_0^\infty \xi^{-a-1}\sin^m\xi \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} x\xi\, d\xi = \mp \frac{\pi}{2^{m+1}} \frac{\Delta^m(x-m)^a}{\Gamma(a+1)\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\frac{(a+m)\pi}{2}}$$

gewinnt *A. Cauchy*[1480]), indem er in dem Doppelintegral

(999)
$$\int_0^\infty\int_0^\infty z^a e^{-\xi z} \sin^m \xi \cos x\xi\, d\xi\, dz$$

das eine Mal die eine, das andere Mal die andere Integration zuerst ausführt; $\Delta^m$ ist dabei das Zeichen der $m^{\text{ten}}$ Differenz, gebildet unter der Voraussetzung, daß die konstante Differenz von $x$ gleich 2 genommen wird, und $a$ muß für die Formel mit Cosinus $< m$, für die mit Sinus $< m+1$ sein; endlich sind, wenn $x < m$, in der Entwicklung von $\Delta^m(x-m)^a$ alle Glieder, deren Basen negativ ausfallen würden, in der ersteren durch die entsprechenden Potenzen mit positiven Basen zu ersetzen[1481]); in der letzteren sind auch noch in allen diesen Gliedern die Vorzeichen zu ändern. Ist auch $a$ ganzzahlig und dabei $a+m$ ungerade, so ist die rechte Seite der Formel mit Cosinus Null; ist dabei $a+m$ gerade, so erscheint sie in unbestimmter Form, und der richtige Wert kann nach der gewöhnlichen Regel bestimmt werden. Für die Formel mit Sinus verhält es sich umgekehrt[1482]).

---

1480) J. Éc. polyt. cah. 28 (1844), (von 1815) = Oeuvres (2) 1, p. 485, 492. Leitet man das Integral mit Sinus aus dem mit Cosinus durch Differentiation nach $x$ ab, so erhält man für ersteres zuerst eine zu enge Gültigkeitsbedingung und bedarf noch einer ergänzenden Betrachtung.

1481) p. 487, 493. p. 551 gibt er für diesen Fall einen asymptotischen Ausdruck mit Hilfe der Relation $\sin^m x \sim x^m \exp\left(-\frac{mx^2}{6}\right)\cdot\left(1-\frac{mx^4}{180}+\cdots\right)$, unter der Voraussetzung, daß $a$ und $m$ sehr groß, $x$ von der Ordnung $\sqrt{m}$ sei. Für $a = 0$ findet sich ein entsprechender Ausdruck bei *R. Hoppe*, J. f. Math. 40 (1850), p. 150 (von 1845).

1482) Oeuvres (2) 1, p. 488.

Speziell für $a = 1$ wird erhalten[1483]):

$$(1000) \qquad \int_0^\infty \xi^{-m-1} \sin^m \xi \sin x\xi \, d\xi = \frac{(-1)^m \pi}{2^{m+1}}.$$

Auch die von *Ph. Kelland*[1484]) für ganzzahlige $m$ bewiesene Gleichung

$$(1001) \qquad \int_0^\infty \left(\frac{\sin m\xi}{\sin \xi}\right)^2 \left(\frac{\sin x\xi}{\xi}\right)^2 d\xi = \frac{m\pi x}{2}$$

kann hier erwähnt werden.

m) Eine andere Integralformel ähnlicher Art ist die ebenfalls von *A. Cauchy*[1485]) gegebene:

$$(1002) \qquad \int_0^\infty \frac{(e^{2k} - 2e^k \cos\xi + 1)^{\frac{m}{2}}}{(k^2 + \xi^2)^{\frac{a+1}{2}}} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} (a + at) \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} (x\xi + mv)\, d\xi$$
$$= \frac{\pi}{2} \frac{e^{-kx}}{\Gamma(a+1)} \Delta^m x^a,$$

wobei:

$$t = \operatorname{arc\,tg} \frac{\xi}{k}, \quad v = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\xi}{\cos\xi - e^{-k}},$$

während $k$ ganz willkürlich gewählt werden kann. Für $k = 0$ wird

$$(1003) \qquad t = \frac{\pi}{2}, \quad v = \frac{\xi + \pi}{2},$$

und man erhält eine andere Form der Gleichungen (998). Cauchy gibt von dem Integral (1002) auch noch eine asymptotische Entwicklung (nach fallenden Potenzen von $a$), deren erstes Glied ist[1486]):

$$(1004) \qquad \Delta^m x^a \sim \left(\frac{a}{k}\right)^{a+1} e^{kx-a} (e^k - 1)^m \left(\frac{a+1}{k^2} - \frac{m}{4\,\mathfrak{Sin}^2 \frac{k}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

unter $k$ ist dabei die einzige positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{a+1}{k} - x - \frac{m}{1 - e^{-k}} = 0$$

---

1483) p. 494. Das Integral mit Cosinus divergiert in diesem Falle. Vgl. übrigens noch die schon besprochene Untersuchung von *R. L. Ellis*[1405]).

1484) Cambr. trans. $7_2$ (1841), p. 156.

1485) J. éc. polyt. cah. 28 (1844), (von 1815) = Oeuvres (2) 1, p. 534; aus dem Falle $m = 0$ durch wiederholte Differenzenbildung. Die Formel setzt $x > 0$ voraus; die für $x < 0$ eintretende Modifikation gibt er p. 541 an.

1486) p. 565.

zu verstehen, und es ist vorausgesetzt, daß $a$ und $m < a$ beide sehr große Zahlen, $x$ merklich kleiner als jede von ihnen, und $a + 1 - m$ nicht sehr klein gegen $x - \frac{m}{2}$ ist.

Verwandt mit dem Falle $m = 0$ dieser Integrale sind die beiden folgenden

$$(1005) \qquad \int_0^\infty (1 + \xi^2)^{-\frac{\alpha+1}{2}} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(\beta \operatorname{arc\,tg} \xi) \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} x\xi \, d\xi.$$

Sie gehen durch die Substitution $\xi = \operatorname{tg} v$ in zwischen den Grenzen 0 und $\pi/2$ genommene Integrale über, die *E. E. Kummer*[1487]) durch Grenzfälle hypergeometrischer Reihen ausgedrückt hat. Für $\beta = \alpha + 1$ geben sie die Umkehrungen zu den unter **c** besprochenen Formeln.

Ferner sei die von *P. Paoli*[1488]) gegebene Formel erwähnt:

$$(1006) \qquad \int_0^\infty \xi^{-a-1} e^{-m\xi}(e^{-n\xi} - 1)^k \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} x\xi \, d\xi$$
$$= \mp \frac{(-1)^a}{a!} \Delta^k r^a \left[\log r \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(a\beta) \mp \beta \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} a\beta\right];$$

dabei ist $r \cos \beta = m$, $r \sin \beta = x$, $k \geqq a + 1$, und die Differenzenbildung bezieht sich auf $m$ unter der Voraussetzung $\Delta m = n$.

**n**) Die Integrale

$$(1007) \qquad \int_0^\infty \exp(-s^2\xi - s^2\xi^{-1}) \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} x\xi \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}$$

lassen sich zunächst in

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \begin{Bmatrix} s^2 + z^2 \\ x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} 2sz \frac{dz}{x^2 + (s^2 + z^2)^2}$$

überführen und diese sich mit Hilfe von (847) und (848) auswerten[1489]). Weitere Formeln ergeben sich daraus durch Differentiationen nach $x$ und nach $s^2$.

**o**) Bei *A. Cauchy* finden sich ferner noch die Formeln[1490]):

$$(1008) \qquad \int_0^\infty \operatorname{arc\,tg} \frac{m}{\xi} \sin x\xi \, d\xi = \frac{\pi}{2} \frac{1 - e^{-mx}}{x}$$

---

1487) J. f. Math. 17 (1837), p. 235.

1488) Mem. soc. ital. 20 (1828), p. 271.

1489) *A. Cauchy*, J. Éc. polyt. cah. 28 (1844) (von 1815) = Oeuvres (2) 1, p. 506.

1490) J. Éc. polyt. cah. 28 (1844) (von 1815) = Oeuvres (2) 1, p. 508.

und[1491]):

$$(1009)\qquad \int_0^\infty \xi^{a-1} e^{-s\xi} \log \xi \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} x\xi\, d\xi$$

$$= -\frac{\Gamma(a)}{r^a}\left[\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} a\theta \cdot \left(\log r - \frac{d \log \Gamma(a)}{da}\right) \pm \theta \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} a\theta\right]$$

mit $r \sin\theta = x$, $r\cos\theta = s$.

p) Wenn die zu einer gegebenen Funktion reziproke Funktion sich nicht durch elementare Funktionen ausdrücken läßt, so kann es von Vorteil sein, ihre Integraldarstellung in eine andere überzuführen, die nicht mehr oszillierende, sondern abklingende Funktionen enthält und dadurch zu Abschätzungen geeigneter ist. Hieher gehört die von *J. Fourier* gegebene Umformung:

$$(1010)\qquad \int_0^\infty e^{-\xi^2 t} \cos x\xi \sin \xi \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \int_{\frac{-x-1}{2\sqrt{t}}}^{\frac{-x+1}{2\sqrt{t}}} \exp(-\eta^2)\, d\eta;$$

er erhält sie[1492]) durch Vergleichung zweier auf verschiedenen Wegen gewonnenen Lösungen desselben Wärmeleitungsproblemes und verifiziert sie dann wenigstens für $x = 0$ durch Entwicklung beider Seiten nach fallenden Potenzen von $t$, mit Hilfe der Gleichung (493). Sie kann übrigens auch aus der um dieselbe Zeit von *P. S. de Laplace*[1493]) aufgestellten Gleichung:

$$(1011)\qquad \int_0^\infty e^{-\xi^2 t} \sin x\xi \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_0^x \exp\left(-\frac{\eta^2}{4t}\right) d\eta$$

abgeleitet werden[1494]). Damit verwandt ist auch die von *A. M. Legen-*

1491) p. 513; ebenso *O. Schlömilch,* J. f. Math. 33 (1846), p. 321; Analyt. Studien 1, Leipzig 1848, p. 74.

1492) Paris mém. 4 (1819/20[24]) (Preisschrift von 1811), p. 520; Théorie de la chaleur Nr. 369 = Oeuvres 1, p. 423. Im Grunde handelt es sich darum, daß in der Darstellung der betr. Lösung durch ein Fouriersches Doppelintegral das eine Mal die eine, das andere Mal die andere Integration ausgeführt wird.

1493) Théorie analytique des probabilités, Paris 1812, p. 108 der Ausgabe von 1847; aus (947) durch Integration nach $x$. Ebenso *M. Ohm,* System der Mathematik 9, Nürnberg 1852, p. 113.

1494) Die umgekehrte Ableitung von (1011) aus (1010) scheint nicht leicht zu sein; wohl aber kann man auch die Gleichung (1011) auf dem von *Fourier* angegebenen Weg ableiten. *A. de Morgan,* Differential and integral calculus, London 1836/41, p. 675 erhält (1011) aus den von *N. Abel* angegebenen Surrogaten der Residuensätze Nr. **103.**

*dre*[1495]) gegebene Gleichung

$$(1012)\qquad \int_0^\infty e^{-\xi^2}\sin x\xi\,d\xi = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)\int_0^x \exp\frac{\eta^2}{4}\,d\eta;$$

er gewinnt aus ihr durch Differentiation nach $x$ weitere Formeln, in denen dieselbe Transzendente auftritt, durch geeignete Kombination auch solche, aus denen sie herausfällt, z. B.:

$$(1013)\qquad \int_0^\infty e^{-\xi^2}\left(1-\frac{x^2}{2}-2\xi^2\right)\sin x\xi\,d\xi = -\frac{x}{2}\cdot$$

*A. F. Svanberg*[1496]) erhält die Gleichung (1012) durch Einführung von Polarkoordinaten in das Doppelintegral

$$(1014)\qquad \int_0^\infty\int_0^\infty \exp(-\xi^2-\eta^2)\sin x\xi\,d\xi\,d\eta.$$

Hierher gehört auch die von demselben Autor gegebene Identität[1497]):

$$(1015)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \xi^\alpha \exp(x\xi-\xi^2)\,d\xi\cdot\int_0^\infty \xi^{-\alpha}\exp(-\xi^2)\cos x\xi\,d\xi \\ \displaystyle +\int_0^\infty \xi^{-1+\alpha}\exp(x\xi-\xi^2)\,d\xi\cdot\int_0^\infty \xi^{1-\alpha}\exp(-\xi^2)\sin x\xi\,d\xi \\ \displaystyle -\frac{x}{2}\int_0^\infty \xi^{-1+\alpha}\exp(x\xi-\xi^2)\,d\xi\cdot\int_0^\infty \xi^{-\alpha}\exp(-\xi^2)\cos x\xi\,d\xi = \frac{\pi}{4\cos\frac{\alpha\pi}{2}}; \end{cases}$$

er erhält sie, indem er aus den Differentialgleichungen, von denen die hier auftretenden Integrale partikuläre Lösungen sind, eine elementar integrable Kombination ableitet.

*A. Cauchy* hat dann erkannt, daß sich derartige Formeln durch Verlegung des Integrationswegs von der Achse der reellen in die der rein imaginären Zahlen gewinnen lassen[1498]). So erscheinen bereits in

1495) Exerc. de calc. int. 1 (1811), p. 363; durch Aufstellung und Integration einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit zweitem Glied, der die linke Seite genügt. *A. de Morgan,* Diff. and integr. calc., London 1836/41, p. 634 leitet dasselbe Resultat unter Benutzung komplexer Größen ab.

1496) Upsala n. a. 13 (1847), p. 7.

1497) J. f. Math. 18 (1838), p. 67.

1498) Diese Auffassung der Bedeutung derartiger Umformungen findet sich in einer späteren Abhandlung Cauchys, Mém. sur les intégrales définies, Paris 1825, p. 30, ausdrücklich ausgesprochen unter Bezugnahme auf die Dienste, die sie ihm bei seiner Untersuchung über Wasserwellen (Nr. 86) geleistet habe.

seiner ersten Abhandlung über bestimmte Integrale[1499]) die Gleichungen:

$$(1016)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos x\xi}{1+\xi}\,d\xi = \int_0^\infty \frac{\eta}{1+\eta^2}\,e^{-x\eta}\,d\eta$$

$$(1017)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin x\xi}{1+\xi}\,d\xi = \int_0^\infty \frac{1}{1+\eta^2}\,e^{-x\eta}\,d\eta. \qquad (x>0).$$

Sie sind als Spezialfälle in den allgemeinen Formeln

$$(1018)\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-s\xi}}{(k+\xi)^n}\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} x\xi\,d\xi = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty \left\{\begin{matrix}s+z\\ x\end{matrix}\right\}\frac{e^{-kz}z^{n-1}}{x^2+(s+z)^2}\,dz$$

enthalten; diese gewinnt *Cauchy*[1500]), indem er in den Doppelintegralen

$$(1019)\qquad \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty z^{n-1}e^{-(k+\xi)z-s\xi}\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} x\xi\,d\xi\,dz$$

das eine Mal die eine, das andere Mal die andere Integration zuerst ausführt.

Für den Fall $s=0$, $n=1$ führt *F. Arndt*[1501]) diese Integrale auch noch auf die beiden

$$(1020)\qquad \mathrm{Ci}\,x = -\int_x^\infty \frac{\cos\xi}{\xi}\,d\xi = -\int_1^\infty \frac{\cos x\xi}{\xi}\,d\xi$$

$$\mathrm{Si}\,x = \int_0^x \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi = \int_0^1 \frac{\sin x\xi}{\xi}\,d\xi$$

---

1499) Paris mém. prés. 1 (1827), (von 1814) = Oeuvres (1) 1, p. 377. — *G. Bidone* hatte Torino mem. 1811/12, p. 302, 318 sowohl die links-, als die rechtsstehenden Integrale untersucht und in Reihen entwickelt, ohne ihren Zusammenhang zu erkennen. Auch von Integralen der Form

$$\int_0^\infty \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(x\xi)\,\frac{d\xi}{(m+n\xi)\sqrt{\xi}}$$

gibt er Entwicklungen.

1500) J. Éc. polyt. cah. 18 (1844), (von 1815) = Oeuvres (2) 1, p. 480. Für $n=1$, $s=0$ ebenso bei *J. L. Raabe,* Differential- und Integralrechnung 1, Zürich 1839, p. 363; und bei *F. Arndt,* Arch. Math. Phys. 10 (1847), p. 230 Für $s=0$ und beliebige $n$ bei *O. Schlömilch,* Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale, Jena 1843 p. 68, und bei *A. F. Svanberg,* J. de math. 11 (1846), p. 200.

1501) Arch. Math. Phys. 10 (1847), p. 230.

zurück; es ist nämlich:

$$(1021)\quad \int_0^\infty \begin{Bmatrix}\cos x\xi\\ \sin x\xi\end{Bmatrix}\frac{d\xi}{\xi+k} = \begin{Bmatrix}-\cos\\ +\sin\end{Bmatrix} kx\,\mathrm{Ci}\,kx + \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} kx\left[\frac{\pi}{2} - \mathrm{Si}\,kx\right]$$
$$(k>0,\ x>0).$$

Für zwei mit diesen nahe verwandte Integrale erhält *A. de Morgan*[1502]) die Entwicklungen:

$$(1022)\quad \int_0^\infty \frac{\sin x\xi\, d\xi}{r^2+\xi^2} = \frac{\mathfrak{Cof}\, rx}{r}\sum_{n=1}^\infty \frac{(rx)^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}$$
$$-\frac{\mathfrak{Sin}\, rx}{r}\left(\gamma + \log rx + \sum_{n=1}^\infty \frac{(rx)^{2n}}{2n\cdot(2n)!}\right),$$

$$(1023)\quad \int_0^\infty \frac{\xi\cos x\xi\, d\xi}{r^2+\xi^2} = \mathfrak{Sin}\, rx\sum_{n=1}^\infty \frac{(rx)^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}$$
$$-\mathfrak{Cof}\, rx\left(\gamma + \log rx + \sum_{n=1}^\infty \frac{(rx)^{2n}}{2n\cdot(2n)!}\right),$$

indem er in eine Reihenentwicklung des Integrallogarithmus komplexe Größen einführt, „as an instance of the legitimate passage from possible to impossible quantities".

In anderer Form erscheinen diese Resultate bei *O. Schlömilch*[1503]). Unter Benutzung der folgenden Darstellung des Integrallogarithmus (vgl. II A 3, *Brunel*, Nr. **14**, p. 174)

$$(1024)\quad \mathrm{li}\, e^{-x} = -e^{-x}\int_0^\infty \frac{e^{-\xi}d\xi}{x+\xi}$$

erhält er durch Umkehrung der Integrationsreihenfolge zunächst die für $r \geqq -1$ geltenden Gleichungen:

$$(1025)\quad \int_0^\infty e^{-r\xi}\,\mathrm{li}\, e^{-\xi}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} x\xi\, d\xi$$
$$= -\frac{1}{r^2+x^2}\left[\begin{Bmatrix}r\\ x\end{Bmatrix}\log\sqrt{(1+r)^2+x^2}\begin{Bmatrix}+x\\ -r\end{Bmatrix}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{1+r}\right];$$

1502) Differential and integral calculus, Lond. 1836/41, p. 655. $\gamma$ bedeutet die Konstante des Integrallogarithmus 0,577...

1503) Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale, Jena 1843, p. 75. Er führt die Rechnung für reelles $r$, $x=0$ durch und nimmt dann das Resultat auch für komplexes $r$ in Anspruch, bemerkt aber, daß man auch die Formel (1022) direkt auf demselben Wege erhalten könne. Die Gleichung (1028) erhält Schlömilch auch noch Arch. Math. Phys. 9 (1847), p. 312 aus (847) durch Integration nach $r$.

speziell für $r = 0$:

$$(1026) \qquad \int_0^\infty \operatorname{li} e^{-\xi} \cos x\xi \, d\xi = -\frac{1}{x} \operatorname{arc\,tg} x, \qquad (x > 0)$$

$$(1027) \qquad \int_0^\infty \operatorname{li} e^{-\xi} \sin x\xi \, d\xi = -\frac{1}{2x} \log(1 + x^2);$$

und daraus mit Hilfe des Reziprozitätssatzes:

$$(1028) \qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} \xi}{\xi} \cos x\xi \, d\xi = -\frac{\pi}{2} \operatorname{li} e^{-x}, \qquad (x > 0)$$

$$(1029) \qquad \int_0^\infty \frac{\log(1 + \xi^2)}{\xi} \sin x\xi \, d\xi = -\pi \operatorname{li} e^{-x},$$

ferner[1504]) für $r = -1$ [und ebenfalls $x > 0$]

$$(1030) \qquad \int_0^\infty e^{\xi} \operatorname{li} e^{-\xi} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} x\xi \, d\xi = -\frac{1}{1 + x^2} \left[ \begin{Bmatrix} -1 \\ x \end{Bmatrix} \log x + \begin{Bmatrix} x \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\pi}{2} \right].$$

Indem er außerdem für positive $x$ die Formel:

$$(1031) \qquad \operatorname{li} e^x = e^x \int_0^\infty \frac{e^{-\xi} d\xi}{x - \xi}$$

benutzt[1505]), erhält er ebenso:

$$(1032) \qquad \int_0^\infty e^{-\xi} \operatorname{li} e^{\xi} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} x\xi \, d\xi = \frac{-1}{1 + x^2} \left[ \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} \log x \begin{Bmatrix} +x \\ -1 \end{Bmatrix} \frac{\pi}{2} \right]$$

und durch Kombination dieser beiden Gleichungen und Übergang zu den reziproken Formeln nicht nur die [mit de Morgans Resultaten (1022), (1023) übereinstimmenden][1506])

$$(1033) \qquad \int_0^\infty \begin{Bmatrix} \xi \cos x\xi \\ r \sin x\xi \end{Bmatrix} \frac{d\xi}{r^2 + \xi^2} = -\frac{1}{2} \left[ e^x \operatorname{li} e^{-x} \pm e^{-x} \operatorname{li} e^x \right],$$

---

1504) Arch. Math. Phys. 5 (1844), p. 207. Hier führt er die Rechnung ohne Benutzung komplexer Größen wirklich durch.

1505) Das Integral divergiert; nimmt man den Hauptwert, so bekommt man bekanntlich (vgl. etwa *N. Nielsen,* Theorie des Integrallogarithmus, Leipz. 1906, p. 3) nicht eine analytische Fortsetzung der durch (1021) für positive $x$ definierten Funktion. Bei der weiteren Rechnung kommen dann natürlich auch beständig divergente Integrale vor; die Art, wie Schlömilch sich (Arch. Math. 5, p. 208) damit abfindet, ist so nicht zu halten, liefert aber den richtigen Hauptwert.

1506) Die Formeln enthalten hier einen von *F. Arndt,* ib. 11 (1848), p. 81

sondern auch noch die beiden folgenden:

$$(1034)\qquad \int_0^\infty \begin{Bmatrix} r\cos x\xi \\ \xi \sin x\xi \end{Bmatrix} \frac{\log \xi\, d\xi}{r^2+\xi^2} = \frac{\pi}{2} e^{-rx} \log r - \frac{\pi}{4}[e^{-x} \operatorname{li} e^x \mp e^x \operatorname{li} e^{-x}].$$

Für das zweite der Integrale (1033) gibt auch *A. F. Svanberg*[1507]) eine Umformung: die Substitution

$$(1035)\qquad \xi = \varrho, \quad y = \varrho\sigma$$

führt das Doppelintegral

$$(1036)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin x\eta}{\eta} d\eta \int_0^\infty \frac{\sin x\xi}{r^2+\xi^2} d\xi$$

in

$$\int_0^\infty\int_0^1 \frac{\sin x\varrho \sin x\sigma\varrho}{\sigma(r^2+\varrho^2)} d\sigma d\varrho + \int_0^\infty\int_0^1 \frac{\sin x\varrho \sin x\sigma\varrho}{r^2+\varrho^2\sigma^2} d\sigma d\varrho$$

über; hier lassen sich die Integrationen nach $\varrho$ mit Hilfe von (847) ausführen, und es bleibt:

$$(1037)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin x\xi\, d\xi}{r^2+\xi^2} = f(x) - f(-x),$$

wo:

$$f(x) = \frac{e^{rx}}{2x} \int_{rx}^\infty \frac{e^{-\sigma} d\sigma}{\sigma}.$$

*O. Schlömilch* erhält die Formeln (1033) auch als spezielle Fälle der allgemeinen Gleichungen:

$$(1038)\qquad \int_0^\infty \Phi(\cos\xi) \frac{r\, d\xi}{r^2+\xi^2} = \int_0^1 \Phi\left(\sqrt{1-\eta^2}\right) \frac{\operatorname{Sin} r\, d\eta}{\operatorname{Sin}^2 r + \eta^2},$$

$$(1039)\qquad \int_0^\infty \Phi(\sin\xi) \frac{\xi\, d\xi}{r^2+\xi^2} = \int_0^1 \Phi\left(\sqrt{1-\eta^2}\right) \frac{\operatorname{Cos} r\, d\eta}{\operatorname{Cos}^2 r - \eta^2};$$

diese gewinnt er[1508]), indem er Zwischengrenzen $k\pi/2$ einschaltet,

berichtigten Vorzeichenfehler; Arndt erhält sie zunächst durch einen von ihm selbst nicht als streng angesehenen Grenzübergang zu $u = 0$ aus seinen Formeln (1049) und verifiziert sie dann p. 86 mit Hilfe der Formeln (1024, 847). Anal. Studien 2, Leipz. 1848, p. 143 hat auch *Schlömilch* sie richtig; er gibt hier noch eine andere Form der Ableitung, durch Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen in einem divergenten Doppelintegral.

1507) Upsala n. a. 13 (1847), p. 11. Das Integral $f(x)$ divergiert für negative Argumentwerte; ist Svanbergs Resultat richtig, wenn man den Hauptwert nimmt? Daß das Integral (1037) keine algebraische Funktion von $x$ sein kann, beweist *J. Liouville* gelegentlich, J. Éc. polyt. cah. 22 (1833), p. 193.

1508) J. f. Math. 36 (1848), p. 271; in etwas anderer Formulierung Arch. Math. 10 (1847), p. 443.

alle Teilintegrale auf dieselben Grenzen zurückführt und dann unter den Integralzeichen summiert. Ebenso können sie als spezielle Fälle der von *Br. Bromwin*[1509]) gegebenen symbolischen Gleichungen

$$(1040)\quad \int_0^\infty \left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} x\xi f\left(\frac{d}{d\xi}\right)\varphi(\xi)\exp(-r\xi)\,d\xi = \varphi\left(-\frac{\partial}{\partial r}\right)\left\{\begin{matrix}r\\ x\end{matrix}\right\}\frac{f(-r)}{r^2+x^2},$$

$$(1041)\quad \int_0^\infty \varphi(\xi)f(\xi^2)\exp(-r\xi)\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}x\xi\,d\xi = \varphi\left(-\frac{\partial}{\partial r}\right)f\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left\{\begin{matrix}r\\ x\end{matrix}\right\}\frac{1}{r^2+x^2}$$

aufgefaßt werden.

Einerseits mit diesen Formeln, andererseits mit (1021) verwandt sind auch die von *O. Schlömilch*[1510]) unter Benutzung der aus einer zu (896) analogen Differentialgleichung abgeleiteten Ausdrücke der [divergenten] Integrale

$$(1042)\quad \int_0^\infty \left\{\begin{matrix}\xi\cos x\xi\\ r\sin x\xi\end{matrix}\right\}\frac{d\xi}{\xi^2-r^2} = \left\{\begin{matrix}-\sin rx\\ +\cos rx\end{matrix}\right\}\operatorname{Si} rx - \left\{\begin{matrix}\cos rx\\ \sin rx\end{matrix}\right\}\operatorname{Ci} rx.$$

Weitere Formeln dieser Art finden sich bei *A. F. Svanberg*[1511]). Er erhält aus der ersten Gleichung (920) durch Multiplikation mit $\exp(-x)dx$ und Integration zwischen den Grenzen $x$ und $\infty$:

$$(1043)\quad e^{-x}\int_0^\infty \frac{\xi^{a-1}(\cos x\xi - \xi\sin x\xi)}{1+\xi^2}\,d\xi = \Gamma(a)\cos\frac{a\pi}{2}\int_x^\infty x^{-a}e^{-x}dx.$$

Das betrachtet er als eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit zweitem Glied, die bei ihrer Integration auftretenden Doppelintegrale lassen sich durch partielle Integration auf einfache zurückführen, und es bleibt:

$$(1044)\quad \int_0^\infty \left\{\begin{matrix}\cos x\xi\\ \sin x\xi\end{matrix}\right\}\frac{\xi^{a-1}d\xi}{1+\xi^2} = \frac{\pi}{2}\left\{\begin{matrix}\dfrac{\operatorname{Cof} x}{\sin\frac{a\pi}{2}}\\[2ex] \dfrac{\operatorname{Sin} x}{\cos\frac{a\pi}{2}}\end{matrix}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\Gamma(a)\left\{\begin{matrix}\cos\frac{a\pi}{2}\\ \sin\frac{a\pi}{2}\end{matrix}\right\}\left[e^{-x}\int_0^x x^{-m}e^{x}dx + e^{x}\int_0^x x^{-m}e^{-x}dx\right].$$

---

1509) Cambr. Dubl. math. J. 3 (1848), p. 245, 247.

1510) J. f. Math. 33 (1846), p. 319. *F. Arndt,* Arch. Math. Phys. 10 (1847), p. 245 erhält die Gleichungen (1042) durch Partialbruchzerlegung der rationalen Faktoren unter den Integralzeichen; er bemerkt, daß sie nur richtig sind, wenn man die Hauptwerte nimmt.

1511) J. de math. 11 (1846), p. 198. Geeignete Kombination der beiden Formeln (1044) gibt wieder (943).

Andererseits hat *F. Arndt* durch Umkehrung der Integrationsreihenfolge gefunden[1512]), daß auch die Integrale

$$(1045)\qquad \int_0^\infty \begin{Bmatrix} r\cos x\xi \\ \xi\sin x\xi \end{Bmatrix} \mathrm{Ci}\,(u\xi)\,d\xi, \quad \int_0^\infty \begin{Bmatrix} \xi\cos x\xi \\ r\sin x\xi \end{Bmatrix} \mathrm{Si}\,(u\xi)\,d\xi$$

sich durch Integrallogarithmen ausdrücken lassen; und zwar sind dabei die Fälle $x > 0$ und $x < 0$ zu unterscheiden.

Außerdem leitet er zunächst[1513]) die Gleichung ab:

$$(1046)\qquad \int_0^\infty \frac{\cos x_1\xi - \cos x_2\xi}{\xi}\,d\xi = \log\frac{x_2}{x_1},$$

indem er in dem Integral

$$(1047)\qquad \int_p^\infty \frac{\cos x_1\xi - \cos x_2\xi}{\xi}\,d\xi = \int_{px_1}^{px_2} \frac{\cos\xi}{\xi}\,d\xi$$

unter dem Zeichen nach Potenzen von $\xi$ entwickelt, gliedweise integriert und dann $p = 0$ setzt; und mit ihrer Hilfe, durch Umkehrung der Integrationsreihenfolge in einem Doppelintegral, wieder die Gleichungen (1034) bzw. deren — übrigens naheliegende — Verallgemeinerung:

$$(1048)\qquad \int_0^\infty \begin{Bmatrix} r\cos x\xi \\ \xi\sin x\xi \end{Bmatrix} \log\frac{\xi}{u}\,\frac{d\xi}{r^2+\xi^2}$$
$$= \frac{\pi}{2}e^{-rx}\log\frac{r}{u} - \frac{\pi}{4}\left[e^{-rx}\,\mathrm{li}\,e^{rx} \mp e^{rx}\,\mathrm{li}\,e^{-rx}\right].$$

Ebenso erhält er[1514]) unter Benutzung von (917):

$$(1049)\qquad \int_0^\infty \begin{Bmatrix} r\sin x\xi \\ \xi\cos x\xi \end{Bmatrix} \mathrm{arc\,tg}\,\frac{\xi}{u}\,\frac{d\xi}{r^2+\xi^2} = -\frac{\pi}{4}e^{rx}\,\mathrm{li}\exp(-(r+u)x)$$
$$\pm \frac{\pi}{4}e^{-rx}\left[\log\left|\frac{r+u}{r-u}\right| + \mathrm{li}\exp(-(u-r)x)\right].$$

Die beiden Gleichungspaare (1045), (1046) gelten übrigens nur unter der Voraussetzung $u \neq r$; für das letztere gibt Arndt selbst ohne Beweis an, was für $u = r$ an seine Stelle tritt, für das erstere

1512) Arch. Math. Phys. 11 (1848), p. 83.

1513) Ib. p. 72. Für das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x\xi\log\xi}{1+\xi^2}\,d\xi$ gibt *O. Schlömilch*, ib. 12 (1849), p. 209 ohne Beweis eine Darstellung durch ein Integral einer abklingenden Funktion.

1514) 11, p. 77.

erhält *O. Schlömilch*[1515]) entsprechende Formeln durch Vertauschung der Integrale in einem divergenten Doppelintegral, und stellt ihnen auch noch andere[1516]) zur Seite, bei welchen im Nenner $r-x$ steht.

Ein großer Teil der zuletzt besprochenen Formeln sind als Spezialfälle in den allgemeinen Gleichungen

$$(1050)\quad \int_0^\infty\int_0^c \frac{f(t)}{r^2+\xi^2}\left\{\begin{matrix}\cos x\xi\cos\xi t\\ \sin x\xi\sin\xi t\end{matrix}\right\}dt\,d\xi$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2r}e^{-rx}\displaystyle\int_0^c\left\{\begin{matrix}\mathfrak{Cof}\\ \mathfrak{Sin}\end{matrix}\right\}rt\,f(t)\,dt \quad \text{für } x>c,\\[2ex] \dfrac{\pi}{2r}\left[\left\{\begin{matrix}\mathfrak{Cof}\\ \mathfrak{Sin}\end{matrix}\right\}rx\displaystyle\int_0^c e^{-rt}f(t)\,dt\pm\int_0^x\left\{\begin{matrix}\mathfrak{Sin}\\ \mathfrak{Cof}\end{matrix}\right\}(rt-rx)f(t)\,dt\right] \quad \text{für } x<c\end{cases}$$

enthalten, die *O. Schlömilch*[1517]) angegeben hat. Die Annahme $f(t)=1/t$ führt auf (1042), speziell für $c=\infty$ auf (1033); die Annahme $f(t)=t^{\mu-1}$, $c=\infty$ auf Ausdrücke der Integrale

$$(1051)\quad \int_0^\infty\left\{\begin{matrix}\cos x\xi\\ \sin x\xi\end{matrix}\right\}\frac{d\xi}{(r^2+\xi^2)\xi^\mu}$$

durch unvollständige $\Gamma$-Funktionen, speziell für $\mu=\frac{1}{2}$ durch die in (1010)—(1012) auftretende Transzendente.

q) Ferner erhält *A. Cauchy*[1518])

$$(1052)\quad \int_0^\infty\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(x\xi^2+t\xi)\,\xi\,d\xi=\mp\int_0^\infty e^{-t\xi}\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}(x\xi^2)\,\xi\,d\xi \qquad (t>0)$$

---

1515) Analytische Studien 2, Leipz. 1848, p. 144.

1516) p. 147.

1517) Arch. Math. 11 (1848), p. 174.

1518) *Cauchy* leitet die Gleichungen (1049) Mém. sur les int. déf., Paris 1825, p. 59 durch Integration der Funktion $z\exp(itz+ixz^2)$ um den ersten Quadranten her und vernachlässigt dabei das Integral über den unendlich großen Viertelskreis. Das wird sich wohl nicht anders rechtfertigen lassen, als indem man zunächst die Formeln (1050) ableitet; auch für diese sind übrigens weder die in dieser Abhandlung noch die später von Cauchy angegebenen Bedingungen (vgl. Nr. 35) erfüllt, und man muß zur Vervollständigung des Beweises eine Bemerkung von *C. Jordan* (Cours d'analyse 2, Paris 1883, p. 290) heranziehen. (Vgl. darüber *H. Burkhardt,* Münch. Ber. 1912, p. 106.) In der Preisschrift über die Wasserwellen (Paris mém. prés. 1 (1827), (von 1815) = Oeuvres (1) 1, p. 121) begnügt sich Cauchy mit einer Verifikation der Gleichungen durch Entwicklung beider Seiten nach steigenden Potenzen von $t$; um diese links unter dem Integralzeichen vornehmen zu können, fügt er erst noch einen Konvergenzfaktor hinzu und benutzt dann die Gleichungen (909). Auch gibt er eine obere Grenze für den Wert oder, was dasselbe ist:

$$(1053)\qquad \int_0^\infty \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(x\xi + t\sqrt{\xi})\,d\xi = \mp\int_0^\infty e^{-t\sqrt{\xi}}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(x\xi)\,d\xi;$$

die Verbindung dieser Gleichungen mit (958) gibt ihm:

$$(1054)\qquad \int_0^\infty \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(x\xi)\cos(t\sqrt{\xi})\,d\xi = \frac{t}{2\sqrt{x^3}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{t^2}{4x} \pm \sin\frac{t^2}{4x}\right)$$

$$\mp\int_0^\infty e^{-t\sqrt{\xi}}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(x\xi)\,d\xi.$$

(Wird durch $t = \sqrt{2kx}$ ein neuer Parameter und durch $x\xi = \mu$ eine neue Integrationsvariable eingeführt, so wird:

$$(1055)\qquad \int_0^\infty \cos x\xi\cos(t\sqrt{\xi})\,d\xi = \frac{K}{x},$$

wo

$$(1056)\qquad K = \int_0^\infty \cos\sqrt{2k\mu}\cos\mu\,d\mu$$

eine Funktion von $k$ allein ist; Cauchy operiert mit dieser Form.)

Eine mit (1054) im wesentlichen äquivalente Formel erhält *Cauchy* auch noch auf folgendem Wege[1519]): Anwendung des Residuensatzes auf den ersten Quadranten führt zu:

$$(1057)\qquad \int_0^\infty \frac{\exp(x\mu^2 i)}{1-\mu^2}\,d\mu = i\int_0^\infty \frac{\exp(-x\mu^2 i)}{1+\mu^2}\,d\mu - \frac{\pi}{2}\exp(ix),$$

wo links der Hauptwert zu verstehen ist; also bei Trennung von Reellem und Imaginärem:

$$(1058)\qquad \int_0^\infty \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} x\mu^2\frac{d\mu}{1-\mu^2} = \int_0^\infty \begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} x\mu^2\frac{d\mu}{1+\mu^2} \pm \frac{\pi}{2}\begin{Bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{Bmatrix}.$$

---

des Integrals (p. 131). In einer 1827 hinzugefügten Note bemerkt er noch (p. 286), durch sukzessive partielle Integrationen erhalte man für jedes der beiden in der ersten Gleichung (1051) auftretenden Integrale dieselbe [semikonvergente] Entwicklung

$$-\frac{x^2}{2t^2}\left(1 - 3\cdot4\cdot5\cdot\frac{x^2}{t^4} + 5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot\frac{x^4}{t^8} - + - \cdots\right),$$

was also dieser Gleichung zu widersprechen scheine; durch Beachtung der Restglieder könne man sich aber davon überzeugen, daß diese Entwicklung nur das rechts-, nicht das linksstehende Integral darstelle.

1519) Paris mém. prés. 1 (1827), = Oeuvres (1) 1, p. 292.

Andererseits ergibt sich, wenn in den Gleichungen unter g) beiderseits mit $(1 \pm \mu^2)$ dividiert und dann die Gleichungen unter b) berücksichtigt werden:

$$(1059)\quad \int_0^\infty \frac{\cos x\mu^2 - \sin x\mu^2}{1-\mu^2}\,d\mu = \sqrt{2\pi}\int_0^\infty \sin \xi^2 \sin(2\xi\sqrt{x})\,d\xi,$$

$$(1060)\quad \int_0^\infty \frac{\cos x\mu^2 - \sin x\mu^2}{1+\mu^2}\,d\mu = \sqrt{2\pi}\int_0^\infty \sin \xi^2 \exp(-2\xi\sqrt{x})\,d\xi.$$

Elimination liefert dann die gewünschte Formel.

Die beiden Integrale (1054) sind in dem folgenden enthalten:

$$(1061)\qquad f(t) \equiv \int_0^\infty e^{-z\xi^2}\sin(t\xi)\,d\xi,$$

in welchem $z$ eine komplexe Größe mit positivem reellen Teil bedeutet. *S. D. Poisson* zeigt[1520]), daß es der Differentialgleichung

$$(1062)\qquad \frac{df}{dt} + \frac{t}{2z}f = \frac{1}{2z}$$

genügt; damit erhält er:

$$(1063)\quad f(t) = \frac{1}{2z}\exp\left(-\frac{t^2}{4z}\right)\int_0^t \exp\frac{t^2}{4z}\,dt = \frac{t}{2z}\int_0^1 \exp\left(-\frac{t^2(1-v^2)}{4z}\right)dv.$$

Wenn $z$ rein imaginär ist, ergibt sich daraus durch Differentiation nach $t$ und Trennung des Reellen und Imaginären[1521])

$$(1064)\int_0^\infty \cos x\xi\cos(t\sqrt{\xi})\,d\xi = \frac{t^2}{2x^2}\left(\int_0^\infty \cos\frac{t^2(1-v^2)}{4z}dv - \int_1^\infty \cos\frac{t^2(1-v^2)}{4z}dv\right);$$

und hier gibt der erste Bestandteil die in Cauchys Gleichung (1054) vom Integralzeichen freien Glieder, der zweite eine [semikonvergente] Entwicklung von derselben Art wie die in Note 1518) erwähnte[1522]).

---

1520) Paris mém. 1 (1816[18]), p. 94. — Für reelle Werte von $z$ ist die Gleichung (1063) mit Legendres Gleichung (1012) äquivalent. — *G. Plana* (Torino mem. 25 (1820), p. 117) gewinnt die Differentialgleichung aus der Entwicklung von $f$ nach steigenden Potenzen von $z$.

1521) *Poisson* leitet diese Formel durch eine etwas umständlichere Betrachtung besonders ab (Paris mém. 1, p. 109). Bei komplexem $z$ führt er (p. 99) nicht direkt $\infty$ als Hilfspunkt zur Trennung des Integrals in zwei Bestandteile ein, sondern zunächst einen willkürlichen Wert $a$, und zeigt dann, daß dieser so genommen werden kann, daß man den zweiten Bestandteil vernachlässigen darf. *Plana* (Torino mem. 25, p. 128) gibt an, daß man auch in diesem Falle zweckmäßigerweise $a = \infty$ nimmt.

1522) Paris mém. 1, p. 116. *Plana* (Torino mem. 25, p. 125) ersetzt die semikonvergente Reihe durch ein divergentes Integral.

Bei *Cauchy*[1523]) findet sich für das in (1054) rechts auftretende Integral noch eine Umformung; nämlich:

$$(1065)\quad \int_0^\infty \exp\left(-t\sqrt{\xi}\right)\cos x\xi\, d\xi = \frac{t}{2\sqrt{\pi x}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}\exp\left(-\frac{nt^2}{4x}\right)dn.$$

Er erhält sie, indem er von der Gleichung

$$(1066)\quad \exp\left(-t\sqrt{\xi}\right) = \frac{t}{2\sqrt{\pi x}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{nt^2}{4x}-\frac{x\xi}{n}\right)\sqrt{n}\,dn$$

Gebrauch macht und dann die Integration nach $\xi$ mit Hilfe von (909) ausführt.

Für die allgemeineren Integrale

$$(1067)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\xi^m)\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} x\xi\, d\xi$$

erhält *A. de Morgan*[1524]) Reihenentwicklungen nach Potenzen von $x$ durch Entwicklung unter dem Integralzeichen und Inanspruchnahme der Gleichungen (920) auch für positive $a$.

r) Auch die Gleichung (951) ist für andere als ganzzahlige Werte von $m$ hieber zu rechnen. Für $m<0$ divergiert das links stehende Integral; faßt man es aber als „außerordentliches Integral"[1376]), so gilt, wie *Cauchy*[1525]) zeigt, die Gleichung:

$$(1068)\quad \int_0^\infty \xi^{-m-1}\sin\left(\frac{-m\pi}{2}-x\xi\right)e^{-\xi^2}d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(m)}\int_x^\infty (\xi-x)^m\exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right)d\xi.$$

Weitere derartige Umformungen sind[1526]):

$$(1069)\quad \begin{Bmatrix}1\\ i\end{Bmatrix}\int_0^\infty e^{-s\xi}\left((k+\xi i)^{-n} \pm (k-\xi i)^{-n}\right)\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} x\xi\, d\xi$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{-kz}z^{n-1}\left(\frac{s}{s^2+(x+z)^2} \pm \frac{s}{s^2+(x-z)^2}\right)dz$$

---

1523) Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 189. Er bemerkt, daß er diese Umformung schon bei der Vorbereitung der Preisschrift gefunden habe.

1524) Differential and integral calculus, Lond. 1836/41, p. 648. Was er nachher als eine Verifikation gibt, ist auch nichts anderes; es ist nur der Übergang von reellem zu komplexem Parameter an einer anderen Stelle der Rechnung vorgenommen.

1525) J. Éc. polyt. cah. 28 (1844), (von 1815) = Oeuvres (2) 1, p. 550; Exerc. de math. 1 (1826), = Oeuvres (2) 6, p. 86. Daß an der letzteren Stelle 0 und $x$ statt $x$ und $\infty$ als Grenzen angegeben sind, ist ein Versehen.

1526) *A. Cauchy*, J. Éc. polyt. cah. 28 (1844), (von 1815) = Oeuvres (2) 1, p. 497, 504. Für $s=0$ kommt man auf (886) zurück, wenn man die rechtsstehenden Integrale als singuläre auffaßt (p. 499).

und:

$$(1070)\quad \begin{Bmatrix}1\\ i\end{Bmatrix}\int\limits_0^\infty e^{-s\xi}((k+\xi i)^{-n} \mp (k-\xi i)^{-n})\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} x\xi\, d\xi$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)}\int\limits_0^\infty e^{-kz} z^{n-1}\left(\frac{x+z}{s^2+(x+z)^2} \mp \frac{x-z}{s^2+(x-z)^2}\right)dz.$$

Hier lassen sich auch noch die von *A. de Morgan*[1527]) aus den Abelschen Gleichungen (Nr. **103**) abgeleiteten Formeln anreihen:

$$(1071)\quad \int\limits_0^\infty \frac{\exp(-\xi^2)}{r^2+\xi^2}\begin{Bmatrix}r\cos x\xi\\ \xi\sin x\xi\end{Bmatrix} d\xi$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\exp(r^2)\left[e^{-rx}\int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{2}x-r}\exp(-z^2)dz \pm e^{rx}\int\limits_{\frac{1}{2}x+r}^{\infty}\exp(-z^2)dz\right];$$

die erste dieser Formeln ist in etwas anderer Gestalt auch von *J. Binet* gegeben worden[1528]). Ferner sei erwähnt die von *O. Schlömilch*[1529]) durch Umkehrung der Integrationsreihenfolge in einem Doppelintegral erhaltene Formel:

$$(1072)\quad \int\limits_0^\infty \frac{\cos x\xi}{(r^2+\xi^2)^{m+1}}d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(m+1)}\int\limits_0^\infty \exp\left(-r^2\xi^2 - \frac{x^2}{4\xi^2}\right)\xi^{2m}d\xi.$$

s) An anderer Stelle[1530]) gibt *Cauchy* noch eine Umformung eines ähnlichen Integrals in ein Doppelintegral. Durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge in einem Doppelintegral findet er, daß der Wert des Integrals

$$(1073)\quad \exp(\xi\sqrt{i})\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(h+\beta i+\frac{\xi^2 i}{h+\beta i}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{h+\beta i}} - \frac{\xi\sqrt{i}}{\sqrt{h+\beta i}^{\,3}}\right)d\beta$$

von $\xi$ unabhängig, also allgemein gleich seinem Wert für $\xi = 0$ ist, der sich zu $\sqrt{\pi}$ ergibt. Daraus folgt dann:

$$(1074)\quad \mathfrak{Cof}(\xi\sqrt{i}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(h+\beta i+\frac{\xi^2 i}{h+\beta i}\right)\frac{d\beta}{\sqrt{h+\beta i}}$$

---

1527) Differential and integral calculus, Lond. 1836/41, p. 675. Bei de Morgan fehlt in der ersten Formel der Faktor $r$; sie bedürfen wohl überhaupt der Nachprüfung.

1528) Paris C. R. 12 (1841), p. 961. Er verspricht die Ableitung für eine andere Gelegenheit und begnügt sich mit der Andeutung, daß man die Richtigkeit durch eine Differentiation verifizieren könne.

1529) Beiträge[1503]), p. 88.

1530) J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 569.

und also:

$$(1075)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{Cos}\,(x\xi\sqrt{i})\,e^{\xi^2 i}d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\iint_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(h+\beta i+\xi^2 i\left(1+\frac{x^2}{h+\beta i}\right)\right)\frac{d\beta}{\sqrt{h+\beta i}}.$$

t) Bei *A. Cauchy* finden sich noch die allgemeinen Sätze[1531]): Wenn $\varphi(x)$ und $f(x)$ reziproke Funktionen erster Art sind, so sind:

$$(1076)\qquad \varphi^{(2n)}(x) \quad \text{und} \quad (-1)^n x^{2n} f(x)$$

reziproke Funktionen erster Art;

$$(1077)\qquad \varphi^{(2n+1)}(x) \quad \text{und} \quad (-1)^n x^{2n+1} f(x)$$

reziproke Funktionen zweiter Art; ferner für positive $k$:

$$(1078)\qquad f(x)\cos kx \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\{\varphi(x+k)+\varphi(|x-k|)\}$$

reziproke Funktionen erster Art,

$$(1079)\qquad f(x)\sin kx \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}\{\varphi(|x-k|)-\varphi(x+k)\}$$

reziproke Funktionen zweiter Art.

u) Anhangsweise seien noch Formeln erwähnt, die zwar eigentlich nicht zu den hier zu besprechenden gehören, insofern sie Integrale mit $\cos x\xi$ und solche mit $\sin x\xi$ nebeneinander enthalten, die aber doch unter Umständen ähnliche Dienste leisten können. Hieher gehören die von *A. Cauchy*[1532]) aus Residuensätzen erhaltenen Gleichungen

$$(1080)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp\,(\pm x\xi i \pm b\xi^{-1} i)\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\exp\left(\pm 2i\sqrt{bx}\pm\frac{i\pi}{4}\right) \quad \binom{x>0}{b>0}$$

oder:

$$(1081)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(x\xi+b\xi^{-1})\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\left(2\sqrt{bx}+\frac{\pi}{4}\right);$$

ferner[1533]):

$$(1082)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(i\xi)^a e^{-x\xi i}}{\log(1+\xi i)}\,\frac{d\xi}{r^2+\xi^2}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{a\pi}{2}-x\xi\right)\log(1+\xi^2)+2\sin\left(\frac{a\pi}{2}-x\xi\right)\operatorname{arc\,tg}\xi}{\left[\frac{1}{2}\log(1+\xi^2)\right]^2+[\operatorname{arc\,tg}\xi]^2}\,\frac{\xi^a d\xi}{r^2+\xi^2}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi r^{a-1}e^{-r\xi}}{\log(1+r)} & \text{für } a>0; \\[2ex] \dfrac{\pi}{r}\left[\dfrac{e^{-r\xi}}{\log(1+r)}-\dfrac{1}{r}\right] & \text{für } a=0; \end{cases}$$

---

1531) Bull. philomat. 1817, p. 121; Exerc. de math. 2, 1827 = Oeuvres (2) 7, p. 178.

1532) J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 520 = Oeuvres (2) 1, p. 284; daraus weitere Formeln durch Differentiation nach $b$.

1533) Ib. p. 578, bzw. 341.

dann auch[1534]):

$$(1083)\qquad \int_0^\infty \frac{\frac{\pi}{2}(\cos x\xi - \cos b\xi) - (\sin x\xi - \sin b\xi)\log\xi}{\frac{\pi^2}{4} + (\log\xi)^2}\frac{d\xi}{\xi} = \pi(e^{-x} - e^{-b}).$$

Eine weitere Gruppe von Formeln dieser Art hat *S. D. Poisson*[1535]) erhalten. Er geht aus von der Identität:

$$(1084)\qquad \int_0^\infty \exp\left[2\xi^2 i - x\xi(1+i)\right]d\xi$$

$$= \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)\int_0^\infty \exp\left[-\left(\xi(1-i) + \frac{xi}{2}\right)^2\right]d\xi;$$

wird in ihr

$$(1085)\qquad \eta = \xi(1-i) + \frac{xi}{2}$$

als neue Variable eingeführt, so ist in bezug auf diese von 0 nach $\infty$ und dann wieder zurück nach $xi$ zu integrieren. Zweimalige Differentiation der so erhaltenen Gleichung nach $x$ gibt:

$$(1086)\qquad \int_0^\infty \exp\left[2\xi^2 i - x\xi(1+i)\right]\xi\, d\xi$$

$$= \frac{x}{4}\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)\left[\frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_0^{xi}\exp(-\eta^2)\,d\eta\right] + \frac{i}{4},$$

$$(1087)\qquad \int_0^\infty \exp\left[2\xi^2 i - x\xi(1+i)\right]\xi^2\, d\xi$$

$$= \frac{1+i}{16}x - \frac{1-i}{8}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)\left[\frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_0^{xi}\exp(-\eta^2)\,d\eta\right],$$

wobei noch

$$(1088)\qquad \int_0^{xi}\exp(-\eta^2)\,d\eta = \frac{xi}{2}\int_0^1 \exp\frac{x^2\eta^2}{4}\,d\eta$$

gesetzt werden kann. Trennung des Reellen und Imaginären in der ersten Gleichung liefert:

$$(1089)\qquad \int_0^\infty \xi\exp(-x\xi)\cos(2\xi^2 - x\xi)\,d\xi = \frac{x\sqrt{\pi}}{8}\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right);$$

1534) Mém. sur les int. déf., 1825, p. 64 für $b = 0$; Ann. de math. 17 (1827), p. 107 für beliebige [positive?] $b$.

1535) Théorie de la chaleur, Supplément, Paris 1837, p. 39.

die zweite gibt zunächst zwei Gleichungen, in denen noch die höhere Transzendente vorkommt, durch deren Elimination aber:

$$(1090)\qquad \int_0^\infty \xi^2 \exp(-x\xi)\,[\sin(2\xi^2 - x\xi) - \cos(2\xi^2 - x\xi)]\,d\xi$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{8}\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right).$$

Auf demselben Wege erhält er auch noch[1536]) die Gleichungen:

$$(1091)\qquad \int_0^\infty \xi \exp(-x\xi)\cos(2\xi^2 + x\xi)\,d\xi = 0,$$

$$\int_0^\infty \xi^2 \exp(-x\xi)\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}(2\xi^2 + x\xi)\,d\xi$$
$$= \pm\frac{x}{8} \mp \frac{1}{8}\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)\exp\left(\frac{x^2}{4}\right)\int_{xi}^\infty \exp(-\eta^2)\,d\eta.$$

Von den Werten des Integrals

$$(1092)\qquad W = \int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}(\xi^3 - x\xi)\,d\xi$$

hat *G. B. Airy*[1537]) eine (von $x = -4$ bis $x = +4$ reichende) Tabelle dadurch erhalten, daß er für das Intervall $\xi = 0$ bis $\xi = 2$ sich der mechanischen Quadratur, für $\xi = 2$ bis $\xi = \infty$ einer durch wiederholte partielle Integration entstehenden [semikonvergenten] Entwicklung bedient. Letztere ist von der Form

$$(1093)\qquad P_1 \sin u + P_2 u \cos u;$$

dabei bedeuten $P_1$, $P_2$ nach fallenden Potenzen von $3\xi^2 - x$ geordnete Reihen, und es ist

$$(1094)\qquad u = \frac{\pi}{2}(\xi^3 - x\xi)$$

gesetzt. In einem Nachtrag[1538]) gibt er noch eine ihm von *A. de Morgan* mitgeteilte Entwicklung nach steigenden Potenzen von $x$, die allerdings auf der Benutzung divergenter Fälle des Integrals (920) beruht.

1536) p. 44.

1537) Cambr. trans. $6_3$ (1838), p. 391. — p. 400 zeigt er, daß man größere Genauigkeit erreicht, wenn man das letzte berücksichtigte Glied der semikonvergenten Entwicklung nur halb nimmt.

1538) Ib. $8_5$ (1849), p. 597.

*G. G. Stokes*[1539]) führt das Integral (1092) durch die Substitutionen

$$(1095)\quad \begin{cases} n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}} x, \quad \eta = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \xi = \frac{z}{2}(\sqrt{3} - i), \\ p = \frac{n}{2}(1 + i\sqrt{3}) = n(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \end{cases}$$

über in

$$(1096)\qquad W = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} U,$$

wo $U$ den reellen Teil des Integrals

$$(1097)\qquad u = \int_0^\infty \exp\left[-(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)(\eta^3 - n\eta)\right] d\eta$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta) \int_0^\infty \exp(-z^3 + pz)\, dz$$

für $\theta = \frac{\pi}{6}$ bedeutet. Dieses Integral konvergiert zwar nur für $-\pi < 6\theta < \pi$ absolut, *Stokes* bemerkt aber, man könne leicht zeigen, daß seine Konvergenz bei Annäherung an die zweite Grenze nicht unendlich langsam (Nr. 29) wird. Die Funktion $U$ genügt der Differentialgleichung[1540]):

$$(1098)\qquad \frac{d^2 U}{dn^2} + \frac{n}{3} U = 0;$$

aus ihr läßt sich sowohl *de Morgans* konvergente Entwicklung als auch eine semikonvergente, für große Werte von $n$ bzw. $x$ geltende ableiten.[1541]) Die letztere besteht aus zwei Bestandteilen, von denen der eine die Form hat:

$$(1099)\quad A n^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{2i}{3}\sqrt{\frac{n^3}{3}}\right)\left[1 - \frac{1\cdot 5}{1}\frac{i}{16\sqrt{3n^3}} + \frac{1\cdot 5\cdot 7\cdot 11}{1\cdot 2}\left(\frac{i}{16\sqrt{3n^3}}\right)^2 - + - \cdots\right],$$

während der andere aus ihm durch Vertauschung von $i$ mit $-i$ hervorgeht. Die Bestimmung der hier auftretenden Integrationskonstanten

1539) Ib. 9, 1850, = papers 2, p. 332.

1540) Daß diese Gleichung durch eine einfache Transformation aus einem speziellen Fall der *Bessel*schen Gleichung hervorgeht, bemerkt *Stokes* selbst p. 356.

1541) Er berichtet p. 335, er sei auf den Gedanken, solche Darstellungen zu benutzen, durch *Cauchys* Formeln für die *Fresnel*schen Integrale gekommen; von *Airys* Formel (1093) spricht er nicht. Daß man die asymptotischen Reihen, wenn man sie an geeigneter Stelle abbricht, zu numerischer Berechnung der Integrale verwenden könne, glaubt er — was freilich nicht ausreicht — daraus schließen zu können, daß die Summen dieser abgebrochenen Reihen Differentialgleichungen genügen, die sich von (1098) nur durch ein kleines zweites Glied unterscheiden.

gelingt im Falle eines positiven $n$[1542]) durch Anwendung der Methode der „Funktionen großer Zahlen" (hier Nr. **109**) auf die Integraldarstellung (1097); für den Fall eines negativen $n$ gibt er nur eine Kontinuitätsbetrachtung, die ihn selbst nicht befriedigt.[1543]) Indem er dann für positive $n$ den gefundenen Ausdruck noch auf die Form

$$(1100) \qquad W = \sqrt{2} \cdot (3x)^{-\frac{1}{4}} M \cos\left(\pi \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} - \psi\right)$$

bringt, wo $M$ und $\psi$ ebenfalls durch asymptotische Reihen dargestellt sind, erhält er auch asymptotische Darstellungen für die Wurzeln der Gleichung $U = 0$[1544]); um solche auch für die Wurzeln von $\frac{dU}{dn} = 0$ zu erhalten, leitet er, da er die Differentiation des asymptotischen Ausdrucks für $U$ unbequem findet, zuerst die Differentialgleichung ab, der $\frac{dU}{dn}$ genügt.

**60. Unharmonische Form des trigonometrischen Integrals.** Will man ein trigonometrisches Integral so einrichten, daß jedes seiner Elemente bei $x = 0$ die dritte Grenzbedingung (Nr. 69) erfüllt, so hat man als Element etwa

$$\frac{h \sin \xi x + \xi \cos \xi x}{h^2 + \xi^2}$$

zu nehmen. Wird das mit $\sin \xi \alpha$ multipliziert und zunächst nach $\xi$ integriert, so wird aus (847) und (848) erhalten:

$$(1101) \quad \int_0^\infty \frac{h \sin \xi x + \xi \cos \xi x}{h^2 + \xi^2} \sin \xi \alpha \, d\xi = \begin{cases} 0 \text{ für } x > \alpha \\ \frac{\pi}{2} e^{(hx - h\alpha)} \text{ für } x < \alpha. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich die von *Fourier*[1545]) ohne Beweis angegebene Formel:

$$(1102) \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{h \sin \xi x + \xi \cos \xi x}{h^2 + \xi^2} \sin \xi \alpha [h f(\alpha) - f'(\alpha)] \, d\alpha \, d\xi.$$

Wird hier noch das Glied mit $f'(\alpha)$ durch partielle Integration um-

1542) p. 338.

1543) p. 342.

1544) p. 346.

1545) Bull. philomat. 1820, p. 61 = Oeuvres 2, p. 275. Fourier bemerkt Paris Mém. 7, 1827 = Oeuvres 2, p. 117, die Formel sei im Bull. durch einen Druckfehler [in den hier weggelassenen physikalischen Konstanten] entstellt. In den Oeuvres ist sie bereits berichtigt, und die oben wiedergegebene Verifikation von *Darboux* in einer Note zu p. 275 der Oeuvres bezieht sich auf die bereits berichtigte Formel.

geformt, so erhält man[1546]) die von *Poisson*[1547]) aus der unharmonischen trigonometrischen Reihe (Nr. 84) durch Übergang zu unendlich langem Intervall abgeleitete und dann mehrfach[1548]) benutzte Formel:

$$(1103)\qquad f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (h \sin \xi x + \xi \cos \xi x)(h \sin \xi\alpha + \xi \cos \xi\alpha) f(\alpha) \frac{d\alpha\, d\xi}{h^2 + \xi^2}.$$

Ebenfalls durch einen ungenügend begründeten Grenzübergang beim Schluß vom Endlichen auf das Unendliche ist Poisson ferner[1549]) zu Formeln gekommen, die die Richtigkeit folgender Gleichungen voraussetzen würden:

$$(1104)\left\{\begin{aligned} &\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{a^2\xi \cos \xi x \cos \xi\alpha + a_1{}^2\xi_1 \sin \xi x \sin \xi\alpha}{a^2\xi + a_1{}^2\xi_1} f(\alpha)\, d\alpha\, d\xi = f(x) \text{ für } x > 0,\\ &\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{a_1{}^2\xi \cos \xi_1 x \cos \xi\alpha + a_1{}^2\xi \sin \xi_1 x \sin \xi\alpha}{a^2\xi + a_1{}^2\xi_1} f(\alpha)\, d\alpha\, d\xi = 0 \text{ für } x < 0, \end{aligned}\right.$$

und zwar würde seine Schlußweise, wenn sie überhaupt zulässig wäre, sich auf den Fall anwenden lassen, daß $\xi_1$ eine „willkürliche" Funktion von $\xi$ wäre ($a$ und $a_1$ sind beliebige reelle Konstante). In dieser Allgemeinheit ist die Sache sicher nicht richtig[1550]); ob sie für den bei Poisson allein in Betracht kommenden Fall[1551]), daß die Relation zwischen $\xi$ und $\xi_1$ lautet:

$$(1105)\qquad a^2(\xi^2 + \varrho^2) = a_1{}^2(\xi_1{}^2 + \varrho_1{}^2)$$

($\varrho$, $\varrho_1$ neue Konstante) sich nicht doch rechtfertigen läßt, darüber scheinen keine Untersuchungen vorzuliegen.

Ebensowenig scheint bekannt zu sein, unter welchen Umständen

1546) Wenn man, was man ohnedies muß, $f(\infty) = 0$ voraussetzt.

1547) J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 44.

1548) Ib. p. 72, 118; chaleur p. 269, 323. An der zuletzt genannten Stelle gibt er einen Beweis der Richtigkeit der Formel, indem er die Differenz zwischen den beiden Darstellungen derselben Funktion durch die Gleichungen (790) und (1103) bildet: Die Integrationen nach $\xi$ lassen sich in dieser Differenz mit Hilfe der Gleichungen (847) und (848) ausführen, und es ergibt sich in der Tat 0.

1549) Paris Mém. 10 (1831), p. 337 (von 1823).

1550) Nimmt man etwa an, $f(\alpha)$ sei in einem endlichen Intervall konstant gleich 1, außerhalb desselben gleich 0, so könnte man die Integration nach $\alpha$ ausführen, und es würde sich dann für ein einfaches Integral ein von dem Parameter $x$ und den Grenzen dieses Intervalls unabhängiger Wert ergeben.

1551) In diesem Fall tritt ev. noch eine Komplikation dadurch auf, daß $\xi_1$ nicht für alle reellen Werte von $\xi$ reell ausfällt.

die ebenfalls von Poisson[1552]) angegebene Gleichung

$$(1106)\qquad f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty [(g - a\xi^2)\cos x\xi - p\xi \sin x\xi]$$

$$\left[\int_0^\infty [(g - a\xi^2)\cos \alpha\xi - p\xi\sin\alpha\xi] f(\alpha)\, d\alpha - f'(0) + pf(0)\right]\frac{d\xi}{(g - a\xi^2)^2 + p^2\xi^2}$$

richtig ist.

Endlich sei hier noch die Gleichung erwähnt:

$$(1107)\quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^\infty \exp(-a^2)[\exp(2a\sqrt{mt})\cos(2a\sqrt{mt} - 2\theta m)$$

$$+ \exp(-2a\sqrt{mt})\cos(2a\sqrt{mt} + 2\theta m)] f(\theta)\, da\, d\theta\, dm,$$

die *W. Thomson* Lord *Kelvin*[1553]) durch Grenzübergang aus einer Reihenformel erhalten hat.

**61. Differentiation und Integration trigonometrischer Integrale.** Der Vorteil der Darstellung einer willkürlichen Funktion durch ein *Fourier*sches Integral liegt, wie schon *Fourier* selbst bemerkt[1554]), darin, daß in ihr die eigentliche Variable nicht mehr unter dem ursprünglichen Funktionszeichen, sondern nur noch unter den Zeichen der trigonometrischen Funktionen cos und sin vorkommt, so daß man Differentiationen — auch zu beliebigem Index[1555]) — Integrationen, Reihensummierungen[1556]) bequem ausführen kann: „la fonction acquiert en quelque sorte, par cette transformation, toutes les propriétés des quantités trigonométriques."

*A. Cauchy*[1557]) bedient sich zu diesem Zwecke einer symbolischen Darstellung, indem er schreibt.

$$(1108)\qquad F(\xi)\, f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} e^{\xi i(x-\alpha)} f(\alpha)\, F(\xi i)\, d\alpha\, d\xi.$$

---

1552) Conn. des temps pour 1833 [30], add. p. 22; aus den Nr. 43 p. 1055 besprochenen Formeln. p. 24 führt er für den Fall $f(\alpha) = 0$ für $\alpha > 0$ die Integration nach $\xi$ mit Hilfe der Gleichungen (878) aus.

1553) Cambr. math. j. 34 (1842), p. 174 = papers 1, p. 15.

1554) Théorie Nr. 419 = Oeuvres 1, p. 505.

1555) Nr. 422, p. 508. Vgl. II A 2, *Voß*, Nr. 48, p. 117.

1556) Diese Bemerkung auch bei *H. G. Schmidten*, Gerg. Ann. 12 (1822), p. 222.

1557) Paris mém. 22 (1850), (von 1824) = Oeuvres (1) 2, p. 202. *Cauchy* schreibt die Formeln gleich für beliebig viele Variable an. — Rechts ist übrigens $\xi$ nicht mehr Differentiationssymbol, sondern einfach Integrationsvariable.

Dabei bedeutet $F$ zunächst eine ganze Funktion des Differentialsymbols $\xi = \frac{d}{dx}$; *Cauchy* nimmt die Formel aber „par analogie" auch für beliebige andere Funktionen dieses Symbols in Anspruch und sieht dann ihre rechte Seite als Definition der linken an.

*O. Schlömilch*[1558]) zeigt: Aus

$$(1109)\qquad \frac{\pi}{2} f'(x) = \int_0^\infty\int_0^c f'(\alpha) \sin\xi\alpha \sin x\alpha \, d\alpha \, d\xi$$

folgt durch partielle Integration:

$$(1110)\qquad \frac{\pi}{2} f'(x) = \frac{1}{2} f(c) \lim_{k=\infty}\left[\frac{\sin k(x-c)}{x-c} - \frac{\sin k(x+c)}{x+c}\right]$$

$$-\int_0^\infty\int_0^c f'(\alpha)\cdot\alpha\cdot\sin\xi\alpha \sin x\alpha \, d\alpha \, d\xi.$$

Die Differentiation der Kosinus-Formel (790) unter dem Zeichen ist also nur für $f(c) = 0$, die der Sinus-Formel (791) nur für $f(c) = 0$, $f(o) = 0$ erlaubt. Das muß aber der Fall sein, wenn die durch Differentiation sich ergebenden Integrale einen bestimmten Wert haben.

*G. G. Stokes*[1559]) untersucht die Sache genauer. Seien z. B. $\psi(x)$, $\psi_2(x)$ die zu $f(x)$, $f''(x)$ reziproken Funktionen 2. Art, so ergibt sich durch partielle Integration:

$$(1111)\quad \psi_2(x) = -x^2\psi(x) + x\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum Q\cos x\alpha - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum Q_1 \sin\alpha x.$$

Dabei sind die Summen erstreckt über alle Werte $\alpha$ von $x$, für welche $f(x)$ und $f'(x)$ unstetig werden und Sprünge $Q$ bzw. $Q_1$ aufweisen. Mit Hilfe derartiger Formeln kann auch umgekehrt aus der Entwicklung von $\psi(x)$ nach fallenden Potenzen von $x$ abgeleitet werden, wie weit $f(x)$ und $f'(x)$ stetig sind. Auch kann die Darstellung von $\psi(x)$ von unbequemen Bestandteilen befreit werden. Für Funktionen 1. Art gilt Analoges; nur ist zu beachten, daß im Falle, daß zwar $f(x)$ mit $x$ schließlich monoton abnimmt, aber $\int_0^\infty f(\xi)\,d\xi$ divergiert, $\varphi(x)$ (832) für $x = 0$ nicht zu divergieren braucht.[1560]) Um zu zeigen, daß unter den gemachten Voraussetzungen für $f(x)$ das Integral für $f(x)$ (p. 1098) (an der unteren Grenze) stets konvergiert, betrachtet *Stokes* zunächst

1558) Analyt. Studien 2 (1848), p. 88.

1559) Cambr. trans. $8_5$ (1849), p. 557 = Papers 1, p. 273.

1560) p. 560 = 277.

die Funktion

$$(1112)\qquad \tilde{\omega}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{x_0}^{x} f(\xi) \cos x\xi \, d\xi,$$

und ihr unbestimmtes Integral $\omega_1(x)$. $\omega_1(o)$ ist endlich, da $\omega_1(x)$ gleichmäßig konvergiert. Partielle Integration zeigt, daß

$$\int \omega(\xi) \cos x \xi \, d\xi$$

bis zu $x = 0$ heran konvergiert. Die Differenz zwischen $\omega(x)$ und $\varphi(x)$ kann aber die Divergenz des Integrals für $f(x)$ (p. 1098) nicht bewirken. Und auch in diesem Falle ist dieses Integral der Grenzwert eines mit einem Konvergenzfaktor versehenen. Entsprechendes gilt auch für Integrale mit cos- und sin-Gliedern.

Was *A. Pioch*[1561]) vorbringt, betrifft nur das Verfahren an den Grenzen und Unbestimmtheitsstellen.

**62. Mehrfache trigonometrische Integrale** werden durch wiederholte Anwendung der Sätze über die zweifachen (Nr. 52) gewonnen. Sie treten zuerst bei *A. Cauchy*[1562]) in der Gestalt auf:

$$(1112\text{a})\qquad f(x,y) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} {}^{(4)} \cos x\xi \cos y\eta \cos \alpha\xi \cos \beta\eta f(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta \, d\xi \, d\eta$$

sowie in drei entsprechenden, die sich von ihr dadurch unterscheiden, daß diese Kosinus alle oder teilweise durch Sinus ersetzt sind; dann bei *J. J. Fourier*[1563]) in der Gestalt:

$$(1113)\qquad f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} {}^{(4)} \cos \xi(x-\alpha) \cos \eta(y-\beta) f(\alpha,\beta) \, d\alpha \, d\beta \, d\xi \, d\eta.$$

Werden durch die Substitutionen

$$x - \alpha = r\cos\theta, \quad y - \beta = r\sin\theta,$$
$$\xi = \varrho\cos\psi, \qquad \eta = \varrho\sin\psi$$

Polarkoordinaten eingeführt, so geht das Integralelement

$$(1114)\qquad \cos(\xi x - \xi\alpha) \cos(\eta y - \eta\beta) \, d\xi \, d\eta$$

über in:

$$(1114\text{a})\qquad \tfrac{1}{2}[\cos(r\varrho\cos(\psi - \theta)) + \cos(r\varrho\cos(\psi + \theta))] \varrho \, d\varrho \, d\psi.$$

---

1561) Bruxelles mém. cour. in 4° 15 (1841/42), p. 74.

1562) Paris Mém. prés. 1, 1827 (von 1815) = Oeuvres (1) 1, p. 141. Der Übergang von (791) zu (1114) auch bei *G. Piola*, Mem. soc. ital. $20_2$ (1831), p. 600.

1563) Théorie analytique de la chaleur Nr. 408 = Oeuvres 1, p. 483; ebenso bei *Poisson*, Chaleur p. 210.

War ursprünglich nach $\xi$ und $\eta$ von $-\infty$ bis $+\infty$ zu integrieren, so ist jetzt nach $\varrho$ von 0 bis $\infty$ und nach $\psi$ von 0 bis $2\pi$ zu integrieren; statt dessen kann man, wie *Poisson*[1564]) bemerkt hat, die letztere Integration auch von $\theta$ bis $\theta + 2\pi$, bzw. von $-\theta$ bis $2\pi - \theta$ ausführen, und so sich davon überzeugen, daß das Resultat dieser Integrationen von $\theta$ unabhängig ist.

Später[1565]) gibt *Cauchy* die komplexe Form:

$$(1115)\quad \frac{1}{(2\pi)^{2n}}\int^{(n)} \exp\left[(\xi x - \xi\alpha + \eta y - \eta\beta + \cdot\cdot)i\right] f(\alpha, \beta\cdot\cdot)\, d\alpha\, d\beta \cdot\cdot\, d\xi\, d\eta \cdots;$$

die Integrationen nach $\xi, \eta, \ldots$ sind dabei von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken, die Integrationen nach $\alpha, \beta, \ldots$ über irgend ein Gebiet, in dessen Innern der Punkt $x, y, \ldots$ liegt.

**63. Das mehrfache Fouriersche Integral als Grenzformel.** Will man ein mehrfaches Fouriersches Integral, analog wie es in Nr. 54 mit dem Doppelintegral geschehen, durch eine Grenzformel ersetzen, so kann man unter dem Integralzeichen einen Faktor $e^{-\delta_1 \xi - \delta_2 \eta}$ hinzufügen und dann erst den Grenzübergang zu $\delta_1 = 0$, hierauf den zu $\delta_2 = 0$ ausführen. So verfahren in der Tat *A. Cauchy*[1566]) und *S. D. Poisson*[1567]). Nachher[1568]) gibt letzterer noch ein anderes Verfahren: wird der Faktor

$$(1116)\qquad \exp\left(-\delta\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right)$$

benutzt und statt der Integrationsvariabeln $\xi, \eta$ die entsprechenden Polarkoordinaten eingeführt, so kommt man durch Integration von (1124) auf das Integral

$$(1117)\qquad \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta f(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta}{(\delta^2 + (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

das aus einer damals mehrfach diskutierten Frage der Potential-

---

1564) Paris mém. 1 (1817), p. 139. Bei *Poisson* ist die Sache dadurch unnötig kompliziert, daß er nicht von der ganzen $\xi - \eta$-Ebene, sondern nur von einem Quadranten redet.

1565) Bull. philomat. 1821, p. 102; J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 512; Exerc. de math. 2, 1827 = Oeuvres (2) 7, p. 196. An der zuletzt genannten Stelle auch die Verallgemeinerung der Formel (826).

1566) Paris Mém. prés. 1, 1827 = Oeuvres (1) 1, p. 141 (von 1814).

1567) Paris Mém. 1, 1816 [18], p. 87. Der Konvergenzfaktor ist dort durch die Fragestellung selbst motiviert.

1568) Ib. p. 142.

theorie[1569]) bekannt war. *Cauchy* bemerkt noch[1570]), daß man auch

(1118) $$\exp(-\delta^2\xi^2 - \delta^2\eta^2) \text{ oder } (1 + \delta^2\xi^2 + \delta^2\eta^2)^{-1}$$

benutzen könne.

**64. Paare reziproker Funktionen von mehreren Variabeln.** Analog wie in Nr. 59 die Darstellung einer Funktion einer Variabeln durch ein Fouriersches Doppelintegral kann man auch die entsprechende Darstellung einer Funktion von mehreren Variabeln durch ein mehrfaches Fouriersches Integral in ein Gleichungspaar spalten, also z. B. schreiben:

(1119) $$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(\xi, \eta) \cos \xi x \cos y\eta \, d\xi \, d\eta,$$

(1120) $$f(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi(\xi, \eta) \cos \xi x \cos y\eta \, d\xi \, d\eta,$$

und das dann so auffassen, daß dadurch zwischen den Funktionen $f$, $\varphi$ eine reziproke Beziehung definiert ist. Einfache Beispiele ergeben sich, wenn $f(x, y)$ ein Produkt von zwei Faktoren ist, deren jeder nur von einer Variabeln abhängt und deren reziproke Funktionen bekannt sind.

Die zu $\exp\left(-z\sqrt{x^2+y^2}\right)$ reziproke Funktion $Z$ bestimmt *A. Cauchy*[1571]), indem er erstere durch das bestimmte Integral

(1121) $$\exp\left(-z\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \exp\left(-\theta^2 - \frac{z^2(x^2+y^2)}{4\theta^2}\right) d\theta$$

darstellt (vgl. II A 3, *Brunel*, Nr. 9 h, p. 153/4); dann lassen sich in

(1122) $$Z = \frac{2}{\sqrt{\pi^3}}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \exp\left(-\theta^2 - \frac{z^2(\xi^2+\eta^2)}{4\theta^2}\right) \cos \xi x \cos \eta y \, d\theta \, d\xi \, d\eta$$
$$= \frac{8}{z^2\sqrt{\pi^3}}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \exp(-\theta^2 - \xi^2 - \eta^2) \cos\frac{2\theta\xi}{z} \cos\frac{2\theta\eta}{z} \theta^2 \, d\theta \, d\xi \, d\eta$$

zuerst die Integrationen nach $\xi$ und $\eta$ mit Hilfe der Gleichung (947) und hierauf auch die nach $\theta$ mit Hilfe einer Formel aus der Theorie der $\Gamma$-Funktionen ausführen, so daß man

(1123) $$Z = \frac{1}{2\pi}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (z > 0)$$

1569) Vgl. II A 7 b. *Burkhardt* u. *Meyer*, Nr. 5. insbes. Note 36—38.
1570) J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 513. Vgl. Note 1268.
1571) Paris Mém. prés. 1, 1827 = Oeuvres (1) 1, p. 155 (von 1815).

erhält. *S. D. Poisson*[1572]) gelangt zu demselben Resultat einfacher durch Einführung von Polarkoordinaten: das Integral

$$\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int e^{-z\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \cos \xi(x-\alpha) \cos \eta(y-\beta)\, d\xi\, d\eta$$

erhält die Form:

$$(1124) \qquad \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\!\!\int\limits_0^{\infty} \exp(-\varrho z) \cos(r\varrho \cos\psi)\varrho\, d\varrho\, d\psi,$$

und nun läßt sich zunächst die Integration nach $\varrho$ und hierauf die nach $\psi$ elementar ausführen.

Andere Fälle lassen sich mit Hilfe eines von *A. Cauchy*[1573]) angegebenen allgemeinen Satzes erledigen: Ist

$$(1125) \qquad \int\limits_0^{\infty} f(\xi) \cos \xi x\, d\xi = \Sigma B_n x^{-n-1},$$

so ist:

$$(1126) \qquad \int\limits_0^{\infty}\!\!\int\limits_0^{\infty} f(\sqrt{\xi\eta}) \sin(r\xi + r\eta)\, d\xi\, d\eta = \Sigma B_n \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma(n+1)} r^{-n-1}.$$

Z. B. gibt die Anwendung dieses Satzes auf die Funktion $f(\xi) = \exp(-2k\xi)$:

$$(1127) \qquad \int\limits_0^{\infty}\!\!\int\limits_0^{\infty} \exp(-2k\sqrt{\xi\eta}) \sin(\xi+\eta)\, d\xi\, d\eta = \frac{\pi k}{2(1+k^2)^{\frac{3}{2}}};$$

daraus folgt durch Integration nach $k$:

$$(1128) \qquad \int\limits_0^{\infty}\!\!\int\limits_0^{\infty} \exp(-2k\sqrt{\xi\eta}) \sin(\xi+\eta) \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{\xi\eta}} = \frac{\pi}{\sqrt{1+k^2}},$$

und wenn hier noch $k$ durch $ki$ ersetzt wird[1574]):

---

1572) Paris Mém. 1 (1816 [18]), p. 141. Daß überhaupt die zu einer Funktion von $x^2 + y^2$ reziproke Funktion die Variabeln ebenfalls nur in dieser einen Verbindung enthält, also vom Polarwinkel unabhängig ist, ist aus ihrer Darstellung durch ein Doppelintegral nicht unmittelbar ersichtlich, folgt aber aus ihrer physikalischen Bedeutung und ergibt sich auch analytisch, wenn man die von Poisson für den hier vorliegenden speziellen Fall benutzte Schlußweise auf den allgemeinen Fall anwendet.

1573) Paris Mém. prés. 1, 1827 = Oeuvres (1) 1, p. 128 (von 1815).

1574) Ib. p. 180 (von 1827).

$$(1129)\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty \cos(2k\sqrt{\xi\eta})\sin(\xi+\eta)\frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{\xi\eta}} = \begin{cases}\dfrac{\pi}{\sqrt{1-k^2}} & \text{für } k<1\\ 0 & \text{für } k>1,\end{cases}\\ \displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty \sin(2k\sqrt{\xi\eta})\sin(\xi+\eta)\frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{\xi\eta}} = \begin{cases}0 & \text{für } k<1\\ \dfrac{\pi}{\sqrt{k^2-1}} & \text{für } k>1.\end{cases}\end{cases}$$

Die Anwendung desselben Satzes auf die zu $\cos\left(t\sqrt[4]{x^2+y^2}\right)$ reziproke Funktion

$$(1130)\qquad \varphi(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos\left(t\sqrt[4]{\xi^2+\eta^2}\right)\cos x\xi \cos y\eta\, d\xi\, d\eta$$

bereitet Cauchy vor, indem er den als Funktion von $\xi^2+\eta^2$ betrachteten Faktor $\cos\left(t\sqrt[4]{\xi^2+\eta^2}\right)$ durch seine Fouriersche Integraldarstellung

$$(1131)\ \cos\left(t\sqrt[4]{\xi^2+\eta^2}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos\left(t\sqrt[4]{\mathfrak{a}}\right)\cos\mathfrak{x}(\xi^2+\eta^2)\cos\mathfrak{x}\mathfrak{a}\, d\mathfrak{a}\, d\mathfrak{x}$$

ersetzt und die Integrationen nach $\xi$ und $\eta$ mit Hilfe der Gleichungen (954) und (957) ausführt[1575]); so erhält er zunächst:

$$(1132)\qquad \varphi(x, y) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos\left(t\sqrt[4]{\mathfrak{a}}\right)\sin\frac{x^2+y^2}{4\mathfrak{x}}\cos\mathfrak{x}\mathfrak{a}\,\frac{d\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}}\, d\mathfrak{a},$$

und das formt er wieder in die unter dem Integralzeichen nur den einen Parameter

$$k = \frac{t^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

enthaltenden Gestalten:

$$(1133)\ \varphi(x, y) = \frac{-8}{\pi^2(x^2+y^2)}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos\left(2\sqrt[4]{k^2\xi\eta}\right)\cos\xi\sin\eta\, d\xi\, d\eta$$

oder

$$(1134)\qquad \varphi(x, y) = \frac{-16k^2}{\pi^2 t^4}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos\left(2\sqrt[4]{k^2\xi\eta}\right)\sin(\xi+\eta)\, d\xi\, d\eta$$

um.[1576]) Der genannte Satz zeigt dann[1577]), daß diese Funktion sich

1575) Ib. p. 67, 160 (von 1815).

1576) p. 161, 107.

1577) p. 129.

aus der in (1055) definierten Funktion $K(k)$ durch die Gleichung

$$(1135) \qquad \varphi(x, y) = -\frac{16 k^2}{\pi^2 t^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(k \cos \theta) \cos \theta \, d\theta$$

ableiten läßt, wobei

$$(1136) \qquad f(k) = \frac{d(kK)}{dk}$$

ist.

*S. D. Poisson* behandelt die noch allgemeinere Annahme:

$$(1137) \qquad f(x, y) = \exp\left(-z\sqrt{x^2+y^2}\right) \cos\left(t\sqrt[4]{x^2+y^2}\right).$$

Die zu dieser Funktion reziproke geht durch Einführung von Polarkoordinaten über in:

$$(1138) \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\varrho z) \cos\left(t\sqrt{\varrho}\right) \cos(r\varrho \cos\psi) \, d\varrho \, d\psi.$$

Das entwickelt Poisson einerseits[1578]) nach steigenden Potenzen von $t$, wodurch er

$$(1139) \qquad \varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^n Z}{\partial z^n}$$

erhält, unter $Z$ die in (1123) definierte Funktion verstanden; andererseits[1579]) führt er es auch durch die Substitution $\varrho = u^2$ in

$$(1140) \qquad -\Re \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-u^2(z + ir\cos\psi)\right) \sin ut \, du \, d\psi$$

über, ersetzt das innere Integral durch seine Umformung (1063) und benutzt für diese ihre asymptotische Entwicklung nach fallenden Potenzen von $t$.

Um von der in Nr. 86 behandelten Formel aus zu einem brauchbaren asymptotischen Ausdruck zu gelangen, benutzt *Poisson*[1580]) den asymptotischen Ausdruck (1054) der Funktion $K$, so daß er auf

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos \frac{t^2}{4r\cos\omega} + \sin \frac{t^2}{4r\cos\omega}\right] \frac{t \, d\omega \, d\psi}{\sqrt{r^3 \cos^3\omega}}$$

kommt; hier führt er durch die Substitution $\cos\omega = (1 + w^2)^{-1}$ eine

---

1578) Paris Mém. 1 (1816/18), p. 144. Poisson betrachtet statt der Funktion (1137) ihre Ableitung nach $t$, was etwas weniger übersichtlich ist.

1579) Ib. p. 147.

1580) Paris mém. 1 (1816/18), p. 156.

neue Integrationsvariable ein und integriert dann wiederholt partiell. So erhält er auch für diesen Fall eine Entwicklung nach fallenden Potenzen von $t$, deren Anfangsglied ist:

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{c}{r}\cos\frac{t^2}{r} \sim c_1\frac{t^2}{r^3}\cos\frac{t^2}{r}.$$

*Cauchy* dagegen[1581]) benutzt als neue Integrationsvariable

$$\mu = \frac{t^2}{4r}(1-\cos\theta),$$

zerlegt dann das Integrationsintervall in Teilintervalle und schätzt die Beiträge der einzelnen ab; so kommt er zu demselben Resultat.

65. **Die sogenannte Poissonsche Hilfsformel.** *A. M. Legendre* hatte bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über Kugelfunktionen durch Ausrechnung gezeigt[1582]), daß für jede rationale ganze Funktion $G$ die Gleichung gilt:

$$(1141)\quad \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} G\left(\mu\mu_1 + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_1^2}\cos(\psi-\psi_1)\right) d\mu\, d\psi = 2\pi\int_{-1}^{+1} G(\zeta)\, d\zeta,$$

dieses Resultat hatte er dann auch auf beliebige analytische Funktionen übertragen.[1583]) Bei *S. D. Poisson*[1584]) erscheint es in der Gestalt:

$$(1142)\quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(g\cos p + h\sin p\cos q + k\sin p\sin u)\sin p\, dp\, dq$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi} f\left(\sqrt{g^2+h^2+k^2}\cos\theta\right)\sin\theta\, d\theta;$$

er führt den Beweis durch Transformation auf ein neues Polarkoordinatensystem. Er nimmt es sogleich[1585]) auch für den Fall in Anspruch,

1581) Paris mém. prés. 1 = Oeuvres (1) 1, p. 243; von 1827.

1582) Paris mém. 1789 [an 2], p. 372 (von 1790).

1583) Exerc. de calc. int. 2 (1817), p. 273 (publ. 1815).

1584) Paris mém. 3 (1818[20]), p. 126; Bull. philomat. 1819, p. 113. In dem Beispiel, durch das *G. Plana* (Torino mem. 25 (1820), p. 150) dartun will, daß der Satz nicht allgemein richtig sei, liegt der Fehlschluß darin, daß er für das Integral

$$\int_0^{2\pi}(\alpha\cos u + \gamma\sin u\cos v)\, dv$$

einen Wert benutzt, der nur für $|\gamma\,\mathrm{tg}\,u| < |\alpha|$ richtig ist, während für $|\gamma\,\mathrm{tg}\,u| > |\alpha|$ dieses Integral divergiert.

1585) Paris mém. 3, p. 132.

daß an Stelle von $g$, $h$, $k$ die Differentiationssymbole $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ treten, und deren Potenzen durch die entsprechenden höheren Differentialquotienten, also namentlich $g^2 + h^2 + k^2$ durch den Laplaceschen Differentialoperator $\delta$ (II A 7 b, *Burkhardt* und *Meyer*, Nr. 2) zu ersetzen sind.

*A. Cauchy*[1586]) gewinnt die Gleichung (1142) als Umgestaltung eines speziellen Falles seiner in Nr. 66 zu besprechenden Hilfsformel; dabei gewinnt er zugleich die Verallgemeinerung:

$$(1143)\quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left(\frac{g\cos u + h\sin u\cos v + k\sin u\sin v}{Q}\right)\frac{\sin u\, du\, dv}{Q^3}$$
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{ABC}}\int_0^{\pi} f\left(\sqrt{\frac{g^2}{A} + \frac{h^2}{B} + \frac{k^2}{C}}\cos\theta\right)\sin\theta\, d\theta,$$

wobei:

$$Q^2 = A\cos^2 u + B\sin^2 u\cos^2 v + C\sin^2 u\sin^2 v.$$

In späteren Abhandlungen gibt er die noch etwas allgemeiner aussehende Reduktionsformel:

$$(1144)\quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left(\frac{P}{Q}\right)\frac{\sin p\, dp\, dq}{Q^3} = \frac{2\pi}{\Omega}\int_0^{\pi} f(K\cos\theta)\sin\theta\, d\theta$$

oder:

$$(1145)\quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left(\frac{P}{Q}\right)\frac{\sin p\, dp\, dq}{P^3} = \frac{2\pi}{K^3\Omega}\int_0^{\pi} f(K\cos\theta)\frac{\sin\theta\, d\theta}{|\cos^3\theta|};$$

dabei ist:

$$u = r\cos p,\quad v = r\sin p\cos q,\quad w = r\sin p\sin q,\quad P = gu + hv + kw,$$
$$Q = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Dvw + 2Ewu + 2Fuv$$

gesetzt, $\Omega$ bedeutet die Diskriminante der quadratischen Form $Q^2$, $K^2$ die zu ihr reziproke Form, geschrieben in $g$, $h$, $k$ als Veränderlichen. Er erhält sie durch eine derjenigen linearen Transformationen, durch welche die quadratische Form $Q$ auf eine Summe von Quadraten reduziert wird.[1587])

1586) J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 528. *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 10 (1833), p. 106 = Werke 3, p. 166 zeigt, daß sich diese allgemeinere Formel durch eine einfache Substitution aus der speziellen (1142) ergibt.

1587) Exerc. de math. 5 (1830) = Oeuvres (2), p. 387 bedient sich Cauchy einer sukzessiven Reduktion, indem er zunächst diejenigen Glieder, die $u$ enthalten, zu einem vollständigen Quadrat ergänzt, dann diejenigen, die nach dieser Umformung noch $v^2$ und $vw$ enthalten; Paris C. R. 13 (1841), p. 38 = Oeuvres (1) 6, p. 222 und mit geometrischer Deutung der auftretenden Größen einer ortho-

*E. Catalan*[1588]) gibt die folgende Verallgemeinerung der Poissonschen Formel auf beliebig viele Variable:

$$(1146)\quad \int^{(n-1)} \varphi(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n) \frac{dx_1\, dx_2 \cdots dx_{n-1}}{x_n}$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\pi \varphi\left(\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_n^2}\cos\theta\right) \sin^{n-2}\theta\, d\theta,$$

dabei ist links über alle reellen Werte von $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ zu integrieren, die der Bedingung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leqq 1$$

genügen, und für $x_n$ sind die beiden durch:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

definierten Werte zu nehmen.

*E. J. Nanson*[1589]) hat die allgemeine Formel:

$$\int \varphi\left(\frac{\Sigma e_p l_p}{\sqrt{\Sigma b_p l_p^2}}\right) \left(\sum b_p l_p^2\right)^{-\frac{n}{2}} dw = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{\pi b_p}} \int_0^\pi \varphi(k\cos\theta) \sin^{n-2}\theta\, d\theta,$$

in der die Summen von $p = 1$ bis $p = n$ zu erstrecken sind,

$$k^2 = \sum e_p^2 b_p^{-1}, \quad \sum l_p^2 = 1$$

ist und $dw$ das Element dieser $(n-1)$ dimensionalen sphärischen Mannigfaltigkeit bedeutet. Aus ihr ergeben sich für $n = 3$ die Formel von Cauchy, für $b_p = 1$ die von Boole.

*P. L. Tschebyscheff*[1590]) gibt ohne Beweis eine sehr allgemeine

---

gonalen Substitution Paris C. R. 13 (1841), p. 97 = Oeuvres (1) 6, p. 232. Letzteres Verfahren reproduziert *Moigno,* Leçons 2 (1844), p. 230. — An der erstgenannten Stelle schickt er eine analoge Diskussion eines eine quadratische Form mit zwei Variabeln enthaltenden Integrals voraus, bei der aber keine Reduktion der Zahl der Integrationen, nur eine Umformung erzielt wird.

1588) Journ. de math. 6 (1841), p. 81. Für die Bestimmung des rechts vor dem Integralzeichen stehenden Faktors beruft sich Catalan auf eine früher von ihm gegebene Formel; *R. L. E. [Ellis]*? (Cambr. math. j. $4_2$ (1844), p. 64) gibt eine einfachere Bestimmung durch Einführung von Polarkoordinaten. — Die Kritik von *G. Boole* (Cambr. math. j. $3_6$ (1843), p. 278; vgl. auch $4_1$ (1843), p. 26) übersieht, daß Catalan ausdrücklich auch über negative Werte der Koordinaten integriert; will man das nicht, so muß man freilich eine kompliziertere Formel aufstellen.

1589) Mess. of math. (2) 26 (1897), p. 119.

1590) J. de math. 8 (1843), p. 235.

Umwandlungsformel, aus der sich die Formeln von Liouville (Dirichlet?) und Cauchy Nr. 66 als spezielle Fälle ergeben.

*E. Catalan*[1591]) gibt von Tschebyscheffs allgemeiner Formel einen Beweis mit Hilfe der Darstellung von $f(x_1 + x_2 + \cdots)$ durch ein Fouriersches Integral.

Eine einfache geometrische Bedeutung hat der Beweis der Poissonschen Formel (1142) durch *W. Roberts*[1592]) erfahren.

**66. Eine Hilfsformel von Cauchy.** Verwandt mit der Poissonschen Formel ist eine von *A. Cauchy*[1593]) gegebene Umformung des Integrals:

$$(1148)\qquad \int^{(n)} f(\alpha^2 + \beta^2 + \cdots) \cos\xi\alpha \cos\eta\beta \cdots d\alpha\, d\beta.$$

Er ersetzt in ihm die Funktion $f$ durch folgende Form ihrer Fourierschen Integraldarstellung:

$$(1149)\qquad f(x) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos(\theta^2 x - \theta^2\tau^2) f(\tau^2)\tau\, d\tau\, \theta\, d\theta;$$

die Integrationen nach $\alpha, \beta, \ldots$ lassen sich dann mit Hilfe der Gleichung (956) ausführen, und es bleibt:

$$(1150)\qquad 4\sqrt{\pi}^{2n-1}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos\left(\frac{n\pi}{4} - \theta^2\tau^2 - \frac{\xi^2+\eta^2+\cdots}{4\theta}\right) f(\tau^2)\tau\, d\tau \frac{d\theta}{\theta^{n-1}},$$

also eine Funktion nur von $s = \xi^2 + \eta^2 + \ldots$ Ist $n$ eine ungerade Zahl, so läßt sich auch noch die Integration nach $\theta$ mit Hilfe der Gleichung (956) und der aus ihr durch partielle Integration hervorgehenden ausführen; eine etwas andere Anlage der Rechnung liefert das Resultat in der Gestalt[1593a]):

$$(1151)\qquad (-\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, 2^{n-1} \frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{ds^{\frac{n-1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\alpha\sqrt{s}) f(\alpha)\, d\alpha,$$

die für $n = 3$ durch Einführung von Polarkoordinaten in die Poissonsche Formel (1142) übergeht. — Für $n = 2$ läßt sich das Resultat

1591) Ib. p. 239.

1592) Ib. 11 (1846), p. 210.

1593) J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 521.

1593a) p. 527.

1593b) p. 530.

noch in die folgende Gleichung überführen:

$$(1152)\quad 2\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(\mu\nu)\sin\nu\cos\frac{\mu(\xi^2+\eta^2)}{4}\,d\mu\,d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu^2+\nu^2)\cos\xi\mu\cos\eta\nu\,d\mu\,d\nu.$$

## Anwendungen trigonometrischer Reihen und Integrale.

## VI. Integration partieller Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen.

**67. Integration partieller Differentialgleichungen durch Reihen, die nach den sukzessiven Ableitungen willkürlicher Funktionen fortschreiten.**[1594]) Wählt man in der II A 5, von *Weber*, Nr. **11**, p. 313 dargestellten allgemeinen Lösung der nicht homogenen linearen partiellen Differentialgleichung I. O. zwischen drei Variabeln die beiden Funktionen $f_1$, $f_2$ so, daß jede von ihnen nur zwei von den Variabeln enthält, und löst dann nach der abhängigen Variabeln auf, so erscheint diese allgemeine Lösung einer solchen Gleichung in der Gestalt

$$(1153)\qquad u = F(\Phi(f(x, y)), x).$$

Von dieser Analogie geleitet hat man auch das allgemeine Integral einer derartigen Gleichung II. O. zuerst in der Form gesucht:

$$(1154)\qquad u = F(\Phi(f_1(x, y)), \Psi(f_2(x, y)), x),$$

in der $F$, $f_1$, $f_2$ zu bestimmende, $\Phi$, $\Psi$ willkürlich bleibende Funktionen ihrer Argumente bedeuten sollten. Den einfachsten Fall einer derartigen Integration gab die d'Alembert-Eulersche Form des Integrals der Differentialgleichung der Saitenschwingungen (482), bei der

$$(1155)\qquad f_1(x, y) \equiv x + y,\ f_2(x, y) \equiv x - y,\ F(\Phi, \Psi, x) \equiv \Phi + \Psi$$

war. Man erkannte aber bald, daß eine derartige Lösung nur in sehr speziellen Fällen möglich ist. *L. Euler* hat dann Fälle gefunden, in welchen der Ausdruck des allgemeinen Integrals außer den beiden willkürlichen Funktionen $\Phi$, $\Psi$ noch ihre ersten Ableitungen enthält, z. B. integriert er[1595]) die Gleichung der kugelförmigen Flüssigkeitswellen

$$(1156)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^2}$$

---

1594) Wegen der Integration durch Potenzreihen vergleiche man IIA 5, *von Weber*, Nr. 1, p. 296.

1595) Berl. hist. 1759 [66], p. 210; Taur. misc. 2 (1760/61), p. 8 = Oeuvres de Lagrange 14, p. 186. Umständlicher bei *Ch. Brooke*, J. f. Math. 13 (1835), p. 260.

durch:

$$(1157)\quad r^2 u = \Phi(r+t) - r\Phi'(r+t) + \Psi(r-t) - r\Psi'(r-t).$$

Weiter[1596]) sucht er dann Fälle, in welchen außer den ersten Ableitungen noch höhere auftreten, und kommt so schließlich dazu, daß er das Integral in Form einer unendlichen Reihe ansetzt, die nach den sukzessiven Ableitungen der willkürlichen Funktionen fortschreitet. Z. B. integriert er[1597]) die Gleichung:

$$(1158)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{m(m-1)}{x^2} u$$

durch eine Reihe:

$$(1159)\quad u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{m+n} \Phi^{(n)}(x+t),$$

die nur abbricht, wenn $m$ eine negative ganze Zahl ist. Neben diese Form des Integrals stellt er dann noch eine andere, die statt der sukzessiven Ableitungen der willkürlichen Funktionen ihre sukzessiven Integrale enthält.[1598]) Diese letztere ist dann namentlich von *P. S. de Laplace* benutzt und fortgebildet worden. *Euler* hatte[1599]) den allgemeinen Fall der linearen Differentialgleichung II. O. mit zwei unabhängigen Veränderlichen durch Einführung der in (1155) mit $f_1$, $f_2$ bezeichneten Funktionen als neue unabhängige Variable auf die Form reduziert:

$$(1160)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} + M\frac{\partial u}{\partial s} + N\frac{\partial u}{\partial t} + Lu + T = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung gibt *Laplace* zunächst[1600]) in der Gestalt:

$$(1161)\quad u = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n(s)\int^{(n)} \Phi(t)\,dt^n + B_n(t)\int^{(n)} \Psi(s)\,ds^n\right],$$

in der $\Phi$, $\Psi$ die willkürlichen Funktionen bedeuten, während die Funktionen $A_n$, $B_n$ sich in bestimmter Weise durch sukzessive Integrationen aus den Koeffizienten der Gleichung ableiten.

---

1596) Taur. misc. 3 (1762/65), p 32.

1597) Ib. p. 69; reproduziert von *Lacroix,* Traité 2 (1814), p. 645.

1598) Taur. misc. 3, p. 184.

1599) Instit. calc. integr. 3, Petrop. 1770, p. 261. Vgl. auch II A 5, *von Weber,* Nr. 53, p. 384. Zu dieser Reduktion sowie zu weitergehender auch für Fälle von 3 unabhängigen Variabeln aber nur mit konstanten Koeffizienten vgl. auch *S. Earnshaw,* Phil. mag. (3) 35 (1849), p. 24.

1600) Paris hist. 1779[82] = Oeuvres 10, p. 54. Der zweite Bestandteil der Lösung entsteht aus dem ersten, indem man die in diesem durch die willkürlichen Integrationskonstanten eingeführten Bestandteile zusammenfaßt; so (für den Fall $M = N = T = 0$, $L =$ const.) bei *Poisson,* chaleur p. 147.

Für den Fall, daß die Koeffizienten der Gleichung nur die eine unabhängige Variable $x$ nicht enthalten, ist die Untersuchung dieser Form des Integrals von *Brisson* weitergeführt worden. Er findet[1601]), daß dann der die eine willkürliche Funktion $\Phi$ enthaltende Bestandteil des Integrals geschrieben werden kann:

$$(1162)\qquad u = e^{\alpha x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\partial^n W}{\partial\alpha^n}\frac{d^n\Phi(x)}{dx^n} = e^{\alpha x}\Phi\left(x+\frac{\partial W}{\partial\alpha}\right);$$

dabei muß $W$ derjenigen gewöhnlichen Differentialgleichung genügen, die aus der gegebenen dadurch hervorgeht, daß man die symbolischen Potenzen von $\frac{\partial}{\partial x}$ durch die wirklichen von $\alpha$ ersetzt; und die zweite Form ist so zu verstehen, daß nach Potenzen von $\frac{\partial W}{\partial\alpha}$ entwickelt und dann diese Potenzen durch die entsprechenden höheren Ableitungen von $W$ ersetzt werden sollen. Hängen die Koeffizienten der gegebenen Differentialgleichung auch von der anderen Variabeln $y$ nicht ab, so kann $W$ gleich $\exp(\beta y)$ genommen werden, wo dann $\beta$ mit $\alpha$ durch eine determinierende Gleichung verbunden sein muß. Läßt sich diese Gleichung in lineare Gleichungen spalten, so entspricht jedem solchen Faktor ein Integral der Form[1602]):

$$(1163)\qquad u = e^{\alpha x+\beta y}\,\Phi(bx-ay);$$

und in dieser kann noch unbeschadet der Allgemeinheit $\alpha = 0$ genommen werden.

Der Ausnahmefall, in welchem die Gleichung nicht auf die Form (1160), sondern auf die Form

$$(1164)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+M\frac{\partial z}{\partial x}+N\frac{\partial z}{\partial t}+Lz+T=0$$

gebracht werden kann, entzieht sich dieser Untersuchung; und man

1601) J. Éc. polyt. cah. 14 (1808), p. 204 (von 1804); von p. 226 an entsprechende Formeln für Differentialgleichungen mit mehr als zwei unabhängigen Variabeln. Einfachere Darstellung im Nachtrag von 1807, p. 254: Da die Koeffizienten der Ableitungen von $\Phi(x)$ von der Wahl dieser Funktion unabhängig sind, so kann man behufs ihrer Bestimmung $\Phi(x)$ zu $\exp(\alpha x)$ spezialisieren.

1602) p 211. — Die von Brisson p. 213 speziell behandelten Gleichungen der Form

$$\sum K_{gh}x^t y^h\frac{\partial^{g+h}u}{\partial x^g\,\partial y^h}$$

lasssen sich auf Gleichungen mit konstanten Koeffizienten zurückführen, indem man $\log x$, $\log y$ als unabhängige Veränderliche einführt.

scheint in der Tat eine Zeitlang geglaubt zu haben, das allgemeine Integral lasse sich in diesem Fall überhaupt nicht so darstellen, daß eine willkürliche Funktion explizite in ihm auftritt. Erst *P. Paoli*[1603]) hat wenigstens für die Voraussetzungen, daß $T \equiv 0$, die andern Koeffizienten konstant sind, eine zu (1162) analoge Darstellung gegeben. Er gibt das Integral zunächst in der Form:

$$(1165) \qquad z = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n(x)\Phi^{(n)}(t) + B_n(x)\Psi^{(n)}(t)\};$$

die $A_n$, $B_n$ bestimmen sich dabei analog wie oben durch sukzessive Integrationen, ausgehend von

$$(1166) \qquad A_0(x) = e^{\alpha x}, \quad B_0(x) = e^{\beta x},$$

wenn $\alpha$, $\beta$ die beiden Wurzeln der Gleichung

$$(1167) \qquad \alpha^2 + M\alpha + L = 0$$

bedeuten. Sind diese einander gleich, so ist $B_0(x) = xe^{\alpha x}$ zu nehmen, und man erhält dann einfach[1604]):

$$(1168) \qquad z = e^{\alpha x} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{N^n x^{2n}}{(2n)!} \Phi^{(n)}(t) + \frac{N^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Psi^{(n)}(t) \right\},$$

also dasselbe Resultat, wie wenn man nach Abspaltung des Faktors $e^{\alpha x}$ den andern Faktor nach Potenzen von $x$ entwickelt hätte. Andererseits könne man zu solchen Entwicklungen auch von der Bemerkung aus gelangen, daß der Gleichung durch $e^{mx+nt}$ genügt werde, wenn $m$ und $n$ durch die Gleichung $m^2 + Mm + Nn + L = 0$ verbunden sind[1605]); wenn man hier $e^{mx}$ nach Potenzen von $n$ in die Reihe $\sum\limits_k c_k n^k$ entwickle, so erhalte man ein Integral der Form

$$(1169) \qquad \sum A_k n^k e^{nt} = \sum A_k \Phi^{(k)}(t), \quad (\Phi(t) = e^{nt}),$$

und da dieses der Gleichung für jedes $n$ genüge, wenn $\Phi(t)$ den angegebenen Wert habe, so müsse es ihr auch genügen, wenn man statt dessen eine beliebige Funktion $\Phi(t)$ setze. Die zweite Wurzel der Gleichung für $m$ gebe eine zweite Lösung mit einer zweiten willkürlichen Funktion. Näher liege es, umgekehrt $e^{nt}$ nach Potenzen von $m$ zu entwickeln; aber er meint, dann erhalte man nicht das allgemeine Integral, da nur eine willkürliche Funktion auftrete.

---

1603) Mem. soc. ital. 10 (1803), p. 251.

1604) p. 256.

1605) p. 257. Er beruft sich p. 258 ohne nähere Angabe auf Andeutungen Condorcets. Für $\alpha = \beta$ p. 260.

**68. Allgemeines über Integration durch Reihen von Elementarlösungen.** Mit dieser letzten Formulierung mündet der in der vorigen Nummer verfolgte Gedankengang in einen andern ein, der von den in Nr. 26 besprochenen Untersuchungen ausgeht. Diese haben zu folgendem allgemeinen Ansatz für die Behandlung von Problemen der Schwingungen kontinuierlicher Systeme geführt: man bestimme zuerst, physikalisch zu reden, „einfache harmonische Schwingungen“, d. h. mathematisch zu reden, partikuläre Integrale der Differentialgleichung in der Gestalt von Produkten, deren einer Faktor eine trigonometrische Funktion — Sinus oder Kosinus — der noch mit einer Frequenzzahl multiplizierten Zeit, der andere eine trigonometrische Funktion der Raumkoordinaten ist. Man bemerkte auch bald[1606]), daß der scheinbar allgemeinere Ansatz: „$u$ gleich dem Produkt aus einer Funktion der Zeit allein in eine Funktion der Raumkoordinaten allein“ nicht weiter führt; wird ein derartiger Ausdruck in die Differentialgleichung eingesetzt, so kann sie so umgeschrieben werden, daß auf der einen Seite nur Größen stehen, die vom Orte, auf der andern nur solche, die von der Zeit unabhängig sind; und eine solche Gleichung kann nur bestehen, wenn beide Seiten weder vom Orte, noch von der Zeit abhängen. So erkennt man, daß jeder der beiden Faktoren eines solchen partikulären Integrals für sich einer Differentialgleichung genügen muß. Die Gleichung für den von der Zeit abhängigen Faktor läßt sich in denjenigen Fällen, mit welchen wir es hier zu tun haben, nur durch Exponentialfunktionen der je nach Umständen mit einer reellen oder rein imaginären Konstanten multiplizierten Zeit befriedigen. Der andere Faktor muß dann derjenigen Differentialgleichung genügen, die aus der gegebenen dadurch hervorgeht, daß man die Differentialsymbole $\frac{\partial^n}{\partial t^n}$ durch die entsprechenden Potenzen jener Konstanten ersetzt.[1607])

Enthält dieser andere Faktor noch mehrere unabhängige Variable (mehrere Raumkoordinaten), so kann man auf ihn dasselbe Verfahren nochmals anwenden: Man kann versuchen, der Differentialgleichung, die er erfüllen muß, durch ein Produkt von Funktionen zu genügen, deren jede nur von einem Teil der Raumkoordinaten abhängt. Wenn das überhaupt möglich ist, muß jede dieser Funktionen wieder für

1606) So bei *L. Euler,* Petrop. n. comm. 10 (1764[66]), p. 247; dann bei *J. Fourier,* Théorie Nr. 167 = Oeuvres 1, p. 145.

1607) Diese Formulierung (nur mit Vertauschung von Raum und Zeit) bei *A. Cauchy,* J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 546 = Oeuvres (2) 1, p. 310; die Sache selbst ist schon vorher bekannt gewesen.

sich einer Differentialgleichung genügen. Dieses Verfahren ist zuerst von *L. Euler*[1608]) bei Gelegenheit des Problems der Schwingungen einer Membran benutzt worden, dann von *Jakob II Bernoulli*[1609]) bei dem Versuch, die Schwingungen einer Platte in Angriff zu nehmen, von *A. M. Legendre*[1610]), in der Potentialtheorie, wo es auf Entwicklungen nach Kugelfunktionen führt; endlich in der Theorie der stationären Wärmeströmung bei *P. S. de Laplace*[1611]) und bei *J. Fourier*[1612]). Eine derartige Lösung der vorgelegten Differentialgleichung, die als Produkt von Funktionen von nur je einer Variabeln erscheint, soll im folgenden als eine *Elementarlösung* bezeichnet werden.[1613])

Hat die vorgelegte Diffentialgleichung konstante Koeffizienten, so gilt dasselbe von den einzelnen gewöhnlichen Differentialgleichungen, die bei diesem Verfahren die einzelnen Faktoren der Elementarlösung bestimmen; jeder dieser Gleichungen wird also wieder durch Exponentialfunktionen (reellen oder imaginären Arguments) genügt, und die Elementarlösung selbst erscheint dann in der Form:

$$\exp(\alpha t + \beta x + \gamma y + \cdots). \tag{1170}$$

Die Koeffizienten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ... sind dabei durch eine algebraische Gleichung („aequatio vicaria“) verbunden, die aus der gegebenen Differentialgleichung dadurch hervorgeht, daß man die Ableitungen der zu bestimmenden Funktion durch die entsprechenden Produkte von Potenzen dieser Koeffizienten ersetzt. Diese Formulierung erscheint für die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u \tag{1171}$$

bei *L. Euler*[1614]), für andere Gleichungen mit nur zwei unabhängigen Veränderlichen gelegentlich bei *P. Paoli*[1615]) und bei *B. Brisson*[1616]),

1608) Petrop. n. comm. 10 (1764[66]), p. 247 für kartesische, p. 255 für Polarkoordinaten. Vgl. auch seinen Brief an Lagrange von 1759, Oeuvres de Lagrange 14, p. 164.

1609) Petrop. n. acta 1787[89], p. 197.

1610) Paris hist. 1789 [an II], p. 426 (von 1790); vgl. im übrigen II A 5, *Wangerin*, Nr. **11**, p. 711.

1611) Bull. philomat. 1820, p. 84 = Oeuvres 13, p. 213; Connaiss. des temps pour 1823 [20], p. 250; Mécanique céleste, Livre 11, Paris 1823 = Oeuvres 5, p. 88.

1612) Théorie Nr. 167 = Oeuvres 1, p. 145 (nicht in der Preisschrift von 1811).

1613) Im Anschluß an die Terminologie einer Vorlesung von *F. Klein*, 1889/90. Bei *Fourier* (Théorie Nr. 428, 7° = Oeuvres 1, p. 528) findet sich einmal der Ausdruck „Mouvements simples“ in diesem Sinne gebraucht.

1614) Instit. calc. integr. 3, Petrop. 17, p. 222.

1615) Mem. soc. ital. 10 (1803), p. 257. Er beruft sich p. 258 ohne nähere Angabe auf Andeutungen *Condorcets*.

allgemein in einer nachgelassenen Abhandlung von *L. Euler*[1617]). Dann bei *Fourier* an vielen Stellen der Théorie de la chaleur.[1618]) Auch *S. D. Poisson* geht bei seinen Untersuchungen regelmäßig[1619]) von ihr aus, soweit er nicht das in Nr. 73 zu besprechende Verfahren verwendet. Auch *G. G. Stokes* glaubt noch an die Allgemeinheit der so erhaltenen Lösung.[1620]) In die Lehrbücherliteratur ist diese Auffassung von *C. B. Navier* eingeführt worden[1621]), dann auch von *J. M. C. Duhamel*[1622]) und *A. Cournot*[1623]).

Was übrigens die Frage betrifft, ob der Zerlegung des mathematischen Ausdrucks für die Schwingung in die einzelnen Glieder der Reihe die physiologische Zerlegung eines zusammengesetzten Tones in seinen Grundton und dessen harmonische Obertöne durch das Ohr entspricht, so ist diese Frage schon von *D. Bernoulli*[1624]) bejaht, dagegen von *d'Alembert*[1625]), von *Lagrange*[1626]) und noch später von *J. M. C. Duhamel*[1627]) verneint worden. Später gibt Duhamel weitere Ausführungen.[1628])

**69. Ausgezeichnete Lösungen und Eigenfunktionen.** Der in der vorigen Nummer besprochene Ansatz gibt noch keinen Aufschluß darüber, welche Werte der dort noch unbestimmt bleibenden Para-

---

1616) J. Éc. polyt. cah. 14 (1802), p. 220. Er meint selbst dazu (p. 221): Aus der Tatsache, daß sich das allgemeine Integral als eine Summe solcher Partikularlösungen darstellen lasse, erkläre sich, daß D. Bernoulli aus seiner Form der Lösung des Problems der Saitenschwingungen alle physikalisch interessanten Eigenschaften dieser Erscheinung ebenso vollständig habe ableiten können wie d'Alembert und Euler aus der ihrigen.

1617) Petersb. Mém. 4 (1811 [13]), p. 45 (von 1779).

1618) Vgl. namentlich die allgemeine Ausdehnung Nr. 428, Oeuvres 1, p. 526.

1619) Bull. philomat. 1815, p. 164; 1817, p. 183; 1822, p. 81; Paris Mém. 1 (1816 [18]) p. 83; 3 (1818 [20]), p. 171; J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 370; Mécanique (2) p. 353; Chaleur p. 363, 381.

1620) Cambr. Trans. $7_3$ (1842), p. 442 = papers 1, p. 4; auch ib. $8_4$ (1847), p. 444 = 1, p. 202.

1621) Leçons 2 (1840), p. 149.

1622) Cours d'Analyse 2 (1840), p. 179.

1623) Théorie des fonctions 2 (1841), p. 401, 402.

1624) Berl. hist. 1753 [55], p. 152, 188.

1625) Opuscules math. 1, Paris 1761, p. 61.

1626) Taur. misc. 1 = Oeuvres 1, p. 141.

1627) Paris C. R. 10 (1840), p. 13. Er glaubte experimentell festgestellt zu haben, daß eine Saite oder Platte, wenn sie einen zusammengesetzten Klang hören lasse, in Teile zerfalle, von denen jeder mit einer anderen Schwingungszahl schwinge.

1628) Ib. 27 (1848), p. 457; Phil. Mag. (3) 34 (1849), p. 415; Ann. chim. phys. (1848), p. 45. Er schrieb die Idee *Saveur* zu.

meter zur Bildung der Elementarlösungen benutzt werden sollen; das kann erst entschieden werden, wenn noch weitere Bedingungen gegeben sind.[1629]) Reden wir zunächst nur von Gleichungen mit zwei unabhängigen Variabeln $x$, $t$, so kommt vor allem der Fall in Frage, daß die Bedingungen folgendermaßen lauten: Für alle oder doch alle positiven Werte der einen Variabeln $t$ und für zwei verschiedene Werte der andern, sagen wir $x = 0$ und $x = a$ soll

entweder $u = 0$ sein (erste Randbedingung),[1630])

oder $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (zweite Randbedingung),

oder $hu + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (dritte Randbedingung),

oder endlich es soll:

$$u_{x=0} = u_{x=a}, \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=a}$$

sein (Periodizitätsbedingung). (Dabei können die drei ersten Bedingungen an den beiden Endpunkten beliebig miteinander kombiniert sein, und es kann auch, wenn an beiden Enden die dritte Bedingung gilt, die Konstante $h$ an ihnen verschiedene Werte haben.) Man kann dann nämlich die Elementarlösungen so wählen, daß sie *einzeln* diesen Bedingungen genügen. Die so fixierten Elementarlösungen der partiellen Differentialgleichung nennt man wohl die zu den betreffenden Nebenbedingungen gehörenden *ausgezeichneten Lösungen;* die in ihnen enthaltenen nur von $x$ abhängenden Faktoren neuerdings die *Eigenfunktionen*[1631]) des Problems. Als solche Eigenfunktionen ergeben sich in den einzelnen Fällen die folgenden:

---

1629) Ganz unklar sind die Auseinandersetzungen, durch die *J. Challis,* ohne von Grenzbedingungen zu reden, dartun will, daß $\sin nx$ „die primäre Form" für die Integration der Gleichung der Saitenschwingungen sei (Phil. mag. 2, 6 (1829), p. 299, Cambr. trans. $3_3$, 1830, p. 280; vgl. auch das Referat Bull. Férussac 16 (1831), p. 237). Über die Integration partieller Differentialgleichungen durch trigonometrische Reihen vgl. auch die Darstellung bei *A. Cournot,* Theorie des fonctions 2 (1841), p. 411.

1630) Der Fall, daß an beiden Enden die Bedingung $u =$ einer von $O$ verschiedenen Konstanten $b$ vorgeschrieben ist, läßt sich, wenn die Differentialgleichung die Funktion nicht selbst, sondern nur ihre Ableitungen enthält, durch die Substitution von $u - b$ als neuer Unbekannten auf den im Text behandelten zurückführen. Der Fall, daß $u$ an beiden Enden verschiedenen Konstanten gleich sein soll, läßt sich mit Hilfe des Superpositionsprinzips reduzieren, indem man erst eine von $t$ unabhängige Lösung sucht die dieser Bedingung genügt; so bei *G. S. Ohm,* Die galvanische Kette, Berlin 1827 (= Ges. Abh. p. 149), und bei *Poisson,* chaleur p. 271.

1631) Wohl von *D. Hilbert* zuerst eingeführt, Gött. Nachr. 1904, p. 51. Die

Für $x = 0$ und für $x = \pi$ der ersten Randbedingung genügt $\sin nx$, wenn $n$ eine ganze Zahl ist.

Für $x = 0$ und für $x = \pi$ der zweiten Randbedingung genügt $\cos nx$, wenn $n$ eine ganze Zahl ist.

Für $x = 0$ der ersten, für $x = \pi$ der zweiten Randbedingung genügt $\sin nx$, wenn $n$ ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ ist.[1632])

Für $x = 0$ der zweiten, für $x = \pi$ der ersten Randbedingung genügt $\cos nx$, wenn $n$ ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ ist.

Für $x = 0$ der ersten, für $x = 1$ der dritten Randbedingung genügt $\sin \lambda_n x$, wenn $\lambda$ eine Wurzel der determinierenden Gleichung (683) ist.

Für $x = 0$ der zweiten, für $x = 1$ der dritten Randbedingung genügt $\cos \lambda_n x$, wenn $\lambda_n$ eine Wurzel derselben Gleichung ist.

Für $x = 1$ der dritten Randbedingung mit einem Wert $2h_2$ der Konstanten $h$, für $x = 0$ derselben Bedingung, aber mit einem andern Wert $-2h_1$ der Konstanten genügt der Ausdruck (682), wenn $\lambda_n$ eine Wurzel der Gleichung (680) ist.

Der Periodizitätsbedingung für $a = 2\pi$ genügt der Ausdruck $A \cos nx + B \sin nx$, wenn $n$ eine ganze Zahl ist, welches auch das Verhältnis der beiden Konstanten $A$, $B$ ist.

Bei andern Aufgaben treten noch kompliziertere Randbedingungen oder auch „Übergangsbedingungen" d. h. Bedingungen an einer inneren Stelle des Intervalls auf; soweit man dann überhaupt noch mit trigonometrischen Funktionen zu tun hat, kommen die in Nr. 43 erwähnten determinierenden Gleichungen und Eigenfunktionen in Betracht.[1633])

---

Eigenfunktionen sind durch ihre Definition im allgemeinen nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt; es ist bei den trigonometrischen Funktionen nicht wie bei allgemeineren bequem, diesen Faktor durch die Forderung festzulegen, daß die Integrale der Quadrate der Eigenfunktionen, genommen über das in Betracht kommende Intervall, alle den Wert 1 bekommen.

1632) So z. B. bei *Navier*, Bull. philomat. 1825, p. 180; bei *Poisson*, Mécanique 2. p. 321.

1633) Soll z. B. die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \eta^2 - \zeta^2\right) \quad \text{für} \quad h - k < x < h,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a_1^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \eta^2 - \zeta^2\right) \quad \text{für} \quad h < x < h + l$$

unter den Übergangsbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{a_1^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{für} \quad x = h$$

Verschiebung des Anfangspunkts der Koordinaten und Veränderung des Maßstabes ändert die Form der Eigenfunktionen. Wird z. B. $\left(-\frac{\pi}{2}\cdots+\frac{\pi}{2}\right)$ als das Intervall genommen, an dessen beiden Enden die erste Bedingung erfüllt sein soll, so treten die Kosinus der ungeraden und die Sinus der geraden Vielfachen des Arguments als Eigenfunktionen auf.[1634])

Unter Umständen fällt ein Teil der Eigenfunktionen dadurch weg, daß noch Symmetriebedingungen auftreten; so kommen, wenn in dem eben angeführten Fall verlangt wird, daß man nur mit geraden Funktionen des Arguments zu tun haben will, nur die Kosinus der ungeraden Vielfachen des Arguments in Frage.[1635])

---

und den Randbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad \text{für} \quad x=h-k$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0 \quad \text{für} \quad x=h+l$$

integriert werden, so besteht das ausgezeichnete Lösungssystem aus 2 Funktionen, von denen die eine für das eine, die andere für das andere Intervall gilt. Ausgezeichnete Lösung ist nach Poisson (Paris mém. 10 (1831), p. 323 (von 1823)):

$$u=a^2(A\cos\lambda t+B\sin\lambda t)\cos l\xi_1\cos(\xi x+\xi k-\xi h),$$

$$v=a_1{}^2(A\cos\lambda t+B\sin\lambda t)\cos k\xi\cos(\xi_1 x-\xi_1 l-\xi_1 h),$$

wobei $\lambda$, $\xi$, $\xi_1$ den Gleichungen

$$\lambda^2=a^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)=a_1{}^2(\xi_1{}^2+\eta_1{}^2+\zeta_1{}^2),$$

$$a^2\xi\cos l\xi_1\sin k\xi+a_1{}^2\xi_1\sin l\xi_1\cos k\xi=0$$

genügen müssen. Vgl. Note 1714.

1634) So bei dem von *J. J. Fourier* (Paris Mém. 4 (1819/20 [24]) (Preisschrift von 1811), p. 250; Théorie de la chaleur Nr. 166 = Oeuvres 1, p. 144) behandelten Problem der stationären Wärmeströmung in einem rechteckigen Streifen, d. h. der Integration der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

für das Gebiet $0<y<\pi$, $x>0$, wobei $x$ dieselbe Rolle spielt wie im Text $t$. — Bei dem Problem der Wasserwellen mit einer Raumkoordinate, d. h. der Integration der Gleichung

$$\frac{\partial u^4}{\partial t^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$

sind die Elementarlösungen $\exp\left(+\sqrt{\lambda}\,t\right)\cos\lambda x$, $\exp\left(+\sqrt{\lambda}\,t\right)\sin\lambda x$ durch die Bedingung der Endlichkeit bei $t=+\infty$ ausgeschlossen; die mit dem Faktor $\exp\left(-\sqrt{\lambda}\,t\right)$ lassen sich nur durch gleichzeitige Berücksichtigung der Ausbreitung der Wellen in die Tiefe ausscheiden (*A. Cauchy*, Paris Mém. 1 (1827) (von 1815) = Oeuvres (1) 1, p. 58).

1635) Vgl. Note 495. Durch Rechnen mit Symbolen abgeleitet von *D. F. Gregory*, Cambr. math. j. $1_3$ (2. Aufl. 1846), p. 116.

Der von $t$ abhängige Faktor, der mit der Eigenfunktion zusammen die ausgezeichnete Lösung der partiellen Differentialgleichung bildet, enthält je nach der Ordnung der höchsten in letzterer auftretenden Ableitung nach $t$ noch eine oder mehrere willkürliche Konstante, und zwar in denjenigen Fällen, mit welchen wir hier zu tun haben, linear. Unter Umständen bestimmt sich ein Teil von diesen durch die Forderung, daß die ausgezeichnete Lösung bei $t = \infty$ endlich bleiben soll.[1636]) Ist das nicht der Fall, so kann man einen Teil der konstanten Faktoren mit in die Definition der partikulären Integrale $\varphi_n$, $\psi_n$ so hineinnehmen, daß diese den Anfangsbedingungen

$$\begin{gathered} \varphi_n(0) = 1,\ \varphi_n{}'(0) = 0, \ldots \\ \psi_n(0) = 0,\ \psi_n{}'(0) = 1, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

genügen. Aus den so gebildeten Partikularlösungen kann dann eine allgemeinere in der Form

$$(1172) \qquad \sum [A_n \varphi_n(t) + B_n \psi_n(t) + \cdots] \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \lambda_n x$$

zusammengesetzt werden; und zwar ohne weiteres, wenn die Anzahl der Glieder der Summe eine endliche ist, während bei einer unendlichen Reihe die Bedingung, daß sie hinlänglich oft gliedweise differentiiert werden darf, ausdrücklich in die Voraussetzungen mit aufzunehmen ist. Soll dann eine Lösung der Form (1172) so bestimmt werden, daß den „*Anfangsbedingungen*“

$$(1173) \qquad \left\{ \begin{aligned} & u_{t=0} = f_0(x), \\ & \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = f_1(x) \\ & \ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

genügt wird, so verlangt das, daß die Funktionen $f_0, f_1, \ldots$ in Reihen der Form

$$(1174) \qquad f_0 = \sum A_n \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \lambda_n x, \quad f_1 = \sum B_n \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \lambda_n x, \ldots$$

entwickelt werden, worüber nach den Sätzen des ersten Teils zu entscheiden ist.

Die Idee dieser Methode nicht nur, sondern auch die klare Erkenntnis ihrer prinzipiellen Wichtigkeit gehört *D. Bernoulli*[1637]); wirk-

1636) So in dem P. [*Poisson*] gezeichneten Referat über *Fouriers* Abhandlung von 1807, Bull. philomat. 1 (1808), p. 114 = Oeuvres de Fourier 2, p. 218; dann in der Preisschrift von 1811, Paris Mém. 4 (1819/20 [24]), p. 253 und Théorie Nr. 168 = Oeuvres 1, p. 145. Vgl. übrigens Note 581.

1637) Vgl. die in Nr. 26 zitierten Stellen, namentlich die Wendungen lich verwendbar ist sie aber erst geworden, seitdem *J. J. Fourier*[1638]) einerseits durch Heranziehung der bereits von anderen Gedankenketten her bekannten Entwicklungen spezieller Funktionen in trigonometrische Reihen ihre Brauchbarkeit zur Lösung spezieller Aufgaben, andererseits durch Heranziehung der ebenfalls bereits vorhandenen Darstellung der Koeffizienten solcher Entwicklungen durch bestimmte Integrale ihre allgemeine Tragweite dargetan hat.[1639])

Wieweit Fourier dabei etwa von dem Vorbild der Laplaceschen Theorie der Entwicklung einer Funktion des Ortes auf der Kugel nach Kugelfunktionen beeinflußt war, wird sich um so weniger sagen lassen, als Laplace in seinen früheren Arbeiten[1640]) betreffend den Grad der Allgemeinheit dieser Entwicklungen sich immer nur sehr unbestimmt ausgedrückt und erst[1641]) nach dem Bekanntwerden von Fouriers Untersuchungen einen Beweis der Konvergenz der Reihe zu geben wenigstens versucht hat.

Zur Behandlung nichtlinearer Differentialgleichungen nach dieser Methode hat bereits *G. Libri*[1642]) einen Anfang gemacht, und zwar für das Wärmeleitungsproblem, wenn nicht das Newtonsche, sondern das Dulong-Petitsche Erkaltungsgesetz angenommen wird. Für den Fall eines linearen Leiters ist dann die Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{\delta u} - 1 = 0 \tag{1175}$$

zu integrieren; indem er annimmt, $\delta$ sei eine kleine Größe und die Lösung lasse sich nach Potenzen von ihr entwickeln, erhält er für die einzelnen Glieder dieser Entwicklung lineare Gleichungen. Die Art, wie er diese integriert und die auftretenden willkürlichen Funktionen dem Anfangszustand entsprechend bestimmt, ist von *Ph. Kelland*[1643])

---

Berl. hist. 1753 [55], p. 195 „cette nouvelle vérité de la physique méchanique" und Petrop. n. comm. (19) 1774, p. 239 „non haesito principium, de quo hic sermo est . . . inter utilissima referre theoremata physico-mechanica".

1638) Vgl. namentlich die allgemeinen Auseinandersetzungen Théorie Nr. 428 = Oeuvres 1, p. 526.

1639) Mit Ausnahme der Entwicklungen von cos $x$ nach den Sinus und von sin $x$ nach den Kosinus der Vielfachen von $x$ waren alle speziellen Entwicklungen Fouriers entweder geradezu vorher schon bekannt oder ließen sich doch aus schon bekannten durch einfache Kombinationen ableiten.

1640) Vgl. die Zusammenstellung der in Betracht kommenden Stellen des Jahresber. d. Math. 10 (1908), p. 373.

1641) Paris Mém. 2 (1817/19) (von 1818) und damit fast wörtlich übereinstimmend Méc. cél. livre 11, Paris 1823 (Oeuvres 12, p. 430; 5, p. 43).

1642) J. f. Math. 7 (1831), p. 116. Frühere Veröffentlichungen Libris (Pisa 1827; Florenz 1829) waren mir nicht zugänglich.

1643) Heat, Cambr. 1837, p. 70. Kelland findet, bei Libri sei das Superund von *J. Liouville*[1644]), dem *C. H. Sturm*[1645]) beistimmt, kritisiert worden.

Unter andern Grenzbedingungen sind andere Elementarlösungen zu benutzen. Soll z. B. die Wärmeleitungsgleichung

(1175a) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

unter den Grenzbedingungen

$$u = \varphi(t) \text{ für } x = 0, \quad \text{und } u = 0 \text{ für } x = +\infty$$

integriert werden, so können als Elementarlösungen die folgenden dienen:

(1176) $$e^{-x\sqrt{n}} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (2nt - x\sqrt{n});$$

sie gehen aus (1170) durch Einführung eines komplexen Parameters hervor. Läßt sich dann die Funktion $\varphi(t)$ in eine Reihe

(1177) $$\varphi(t) = \sum (A_n \cos 2nt + B_n \sin 2nt)$$

entwickeln, so ist die zugehörige Lösung:

(1178) $$u = \sum e^{-x\sqrt{n}} \{A_n \cos(2nt - x\sqrt{n}) + B_n \sin(2nt - x\sqrt{n})\}.$$

Auf diesem Resultat *Fouriers*[1646]) beruhen die Untersuchungen über das Eindringen der täglichen und jährlichen Temperaturschwankungen in den Erdboden.

---

positionsprinzip unrichtigerweise für die Lösungen einer nicht linearen Differentialgleichung in Anspruch genommen.

1644) J. de math. 3 (1838), p. 350; Ankündigung Paris C. R. 6 (1838), p. 240. Liouville findet es nicht zulässig, daß Libri die Glieder, die $\delta$ zum Faktor haben, benutzt, um die Lösung dem vorgegebenen Anfangszustand anzupassen; wenn man das tue, könne man diese Glieder nicht mehr als klein gegen die von $\delta$ freien behandeln. *Libri* bestreitet das (ib. Paris C. R. 8 (1839), p. 740); im übrigen bringt die sich anschließende, auch auf andere Fragen sich beziehende Polemik zwischen ihm (ib. p. 789, 798) und Liouville (ib. p. 796) zu der vorliegenden sachlich nichts Weiteres bei. — *Biot* hatte die Teilnahme an der zur Berichterstattung über Liouvilles Note eingesetzten Kommission abgelehnt (ib. 6 (1838), p. 249).

1645) Paris C. R. 8 (1839), p. 788.

1646) Paris Mém. 5 (1821/22 [26]) = Oeuvres 2, p 8 (Preisschrift von 1811). Reproduziert von *Ph. Kelland*, Theorie of heat p. 126. Ebenso bei *Poisson*, J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 73, 78; Conn. des temps pour 1827 [24], p. 305. Später, chaleur p. 327 sagt Poisson von diesem Verfahren: «le procédé le plus directe... est celui que j'ai suivi et auquel on a cherché ... difficulté». Geht das auf Duhamel oder auf Dirichlet?

Dieselben Elementarlösungen können auch gebraucht werden, wenn die Wärmeleitungsgleichung unter den Bedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = h(u - \varphi(t)) \quad \text{für} \quad x = 0, \quad u = 0 \quad \text{für} \quad x = \infty$$

integriert werden soll. Die Lösung ist dann:

$$(1179)\quad u = h\sum \frac{\exp(-x\sqrt{n})}{D_n}\left[A_n \cos(2nt - x\sqrt{n} - \varepsilon_n) + B_n \sin(2nt - x\sqrt{n} - \varepsilon_n)\right],$$

wobei:

$$D_n^2 = 2n + 2h\sqrt{n} + h^2, \quad D_n \cos\varepsilon_n = h + \sqrt{n}, \quad D_n \sin\varepsilon_n = \sqrt{n};$$

das hat *Poisson*[1647]) von der Lösung einer analogen Aufgabe für die Kugel mit Hilfe von Entwicklungen nach Kugelfunktionen ausgehend durch einen Grenzübergang gefunden; *W. Thomson* Lord *Kelvin* verifiziert es[1648]) durch Benutzung der Laplaceschen Form der Lösung und des Spiegelungsprinzips.

Für verschiedene andere Fälle finden sich Elementarlösungen bei *G. G. Stokes*[1649]) angegeben. So hat er für die Potentialgleichung

$$(1180)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

die allgemeinere Lösung als $\exp(\alpha x + \beta y)$:

$$(1181)\qquad \exp(\beta x - \alpha y)\cdot\cos(\alpha x + \beta y)$$

und für ihre Transformierte in Polarkoordinaten:

$$(1182)\qquad r^m \cdot e^{n\theta}(\cos m\theta - n\log r).$$

Weiter[1650]) gibt er die Lösung derselben Gleichung unter den Grenzbedingungen:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = a,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x - \frac{a}{2} \quad \text{für } y = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \text{ für } y = b$$

durch

$$(1183)\qquad \varphi = \frac{4a^2}{\pi^3}\cdot\sum\frac{1}{n^3}\cdot\frac{\mathfrak{Cof}\,\frac{n\pi}{a}(b-y)}{\mathfrak{Sin}\,\frac{n\pi b}{a}}\cdot\cos\frac{n\pi x}{a}.$$

---

1647) Chaleur p. 385, 431.

1648) Cambr. j. 3 (1843), p. 211 = papers 1 p. 21.

1649) Cambr. trans. $7_3$ (1842), p. 442 = papers 1, p. 5.

1650) Ib. $8_1$ (1844), p. 105 = papers 1 p. 61; vgl. auch Ergänzungen ib. $8_3$ (1847), p. 411 = papers 1, p. 191; Erläuterungen betr. den Punkt, daß die Gleichung $u = \Sigma Y_n \sin nx$ durch zweimalige Differentiation nach $x$ nicht mehr zu konvergieren braucht, ib. $8_5$ (1849), p. 568 = papers 1, p. 289.

Ferner[1651]): ist dasselbe Problem unter den Grenzbedingungen:

$$\frac{\partial u}{\partial y} - hu = 0 \text{ für } y = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + hu = 0 \text{ für } y = +1,$$

$$u = 0 \quad \text{für} \quad x = 0$$

zu behandeln, so kann man als Elementarlösung nehmen:

(1184) $$\mathfrak{Sin}\,\lambda_n x \cos\lambda_n y \quad \text{und} \quad \mathfrak{Sin}\,\mu_n x \sin\mu_n y,$$

wobei die $\lambda_n$ Wurzeln der determinierenden Gleichung $\lambda \operatorname{tg}\lambda = h$, die $\mu$ aber Wurzeln der Gleichung $\mu \operatorname{ctg}\mu = -h$ sind. Die Entwicklung einer beliebigen Lösung nach diesen Elementarlösungen wird dann durch Zusammensetzung der Entwicklung einer geraden Lösung nach den Lösungen der ersten Art und einer ungeraden nach denjenigen der zweiten Art erhalten. Man kann auch Elementarlösungen in der Form:

(1185) $$Y_n \sin nx$$

mit ganzzahligen $n$ ansetzen. Sind die Bedingungsgleichungen:

$$u = f(y) \quad \text{für} \quad x = 0, \qquad u = F(y) \quad \text{für} \quad x = \pi$$

vorgeschrieben, so muß $Y$ der Gleichung

(1186) $$\frac{d^2 Y}{dy^2} - n^2 Y + \frac{2n}{\pi}[f(y) - (-1)^n F(y)] = 0$$

genügen, und die Integrationskonstanten sind aus den anderen Nebenbedingungen zu bestimmen. Stokes führt das für verschiedene Fälle durch. Hier sei nur der Fall erwähnt, daß $f \equiv 0$ und $F$ eine beliebige Funktion von $y$ ist. Dann wird erhalten:

(1187) $$Y_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2\pi} \cdot \frac{\mathfrak{Cof}\, ny}{n\cos n + h \sin n} \int_0^1 (n\cos(n\pi - n\beta) + h\sin(n\pi - n\beta))F(\beta)\,d\beta.$$

Für die Gleichung

(1188) $$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (1 + \alpha\beta)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

gibt er die Elementarlösung[1652])

(1189) $$u = A \exp(-\mu x \sin\psi) \cos(nt - \mu x \cos\psi)$$

---

1651) Ib. $8_5$ (1849), p. 569 = 1, p. 291. p. 579 = 306 erhält er auf dem zweiten Wege auch das Integral derselben Gleichung unter den Bedingungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-2y} \text{ für } x = 0 \text{ und } x = \alpha, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ für } y = 0,$$

$$u \text{ endlich für } y = +\infty.$$

1652) Phil. Mag. 1 p. 307 = 3, p. 145.

mit den Relationen:

$$\mu = n \sqrt[4]{\frac{n^2+1}{(1+\alpha\beta)^2 n^2 + 1}},$$

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{\alpha\beta n}{(1+\alpha\beta)^2 n^2 + 1},$$

und für

(1190) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0$$

die Elementarlösung

(1191) $$u = \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \cos\left(t \frac{\sqrt{3}}{2} - x\right).$$ [1653]

Bei G. G. Stokes findet sich zuerst die Lösung der Gleichung[1654]

(1192) $$r \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

durch

(1193) $$u = A_0 \log r + \sum (A_n r^{-n} + A_n' r^n) \cos n\theta + \sum (B_n r^{-n} + B_n' r^n) \sin n\theta.$$

*Navier*[1655] integriert die Differentialgleichung

(1194) $$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} + F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$$

unter den Grenzbedingungen

(1195) $$\begin{aligned} &\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{und für} \quad x = a \\ &\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{für} \quad y = 0 \quad \text{und für} \quad y = b \end{aligned}$$

durch

(1196) $$z = \sum_n \left\{ A_n \sin \frac{n\pi x}{a} \exp\left(-\frac{n\pi y}{b}\right) + B_n \sin \frac{n\pi y}{b} \exp\left(-\frac{n\pi x}{a}\right) \right\}.$$

Die Methode der Reihenentwicklung ist häufig auch in Fällen benutzt worden, in welchen zwar die im Schlußresultat auftretenden, aber nicht die im Laufe der Zwischenrechnung benutzten Reihen konvergieren. So integriert *S. D. Poisson*[1656] die Differentialgleichung

(1197) $$\frac{d^2 y}{dx^2} = y - \varphi(x),$$

---

1653) Ib. $8_3$ (1847), p. 302 = 1, p. 101.

1654) Cambr. trans. $8_1$ (1844), p. 113 = papers 1, p. 31.

1655) Bull. philomat. 1823, p. 99. Die angegebene Lösung genügt schon der Gleichung $\Delta u = 0$, so daß die Grenzbedingungen von selbst erfüllt sind. Die Gleichung (1194) hat noch andere Elementarlösungen (ihre determinierende Gleichung zerfällt), die aber nicht dazu gebracht werden können, den Bedingungen (1195) zu genügen.

1656) Conn. des temps pour 1826[23], p. 252. Poisson macht sich die Zulässigkeit der Schlußweise folgendermaßen plausibel: Für kleine Werte von $n$

indem er die Funktion $\varphi(x)$ in die Reihe

(1198) $$\varphi(x)=\sum(A_n\cos nx+B_n\sin nx)$$

entwickelt, durch:

(1199) $$y=\sum\frac{A_n\cos nx+B_n\sin nx}{1+n^2}$$

und wendet das dann auch auf den Fall an, daß die Funktion $\varphi(x)$ nur in der nächsten Umgebung von $x=0$ von 0 verschieden ist, indem er für diesen Fall $A_n=1$, $B_n=0$ nimmt; wobei zwar die Reihe (1199), aber nicht (1198) konvergiert.

Auch die Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung mit zweitem Glied kann unter Umständen dadurch geleistet werden, daß man das zweite Glied in eine doppelte trigonometrische Reihe entwickelt.[1657]) Die frühesten Beispiele dieser Art finde ich bei *Navier*, der die Differentialgleichung

(1200) $$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}=\varphi(x,y)$$

in dieser Weise behandelt.[1658]) Ist

(1201) $$\varphi(x,y)=\sum B_{m,n}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}$$

und sind die Randbedingungen:

$$z=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \quad \text{für } x=0,\quad \text{für } x=a,\quad \text{für } y=0$$
$$\text{und für } y=b,$$

so gibt er als Lösung:

(1202) $$z=4\sum B_{m,n}\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)^{-2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Für den Fall, daß $\varphi(x,y)$ nur in dem Punkt $\xi,\eta$ von 0 verschieden, und zwar gleich 1 ist, setzt er

$$B_{m,n}=\frac{1}{\pi^2}\sin\frac{m\xi\pi}{a}\sin\frac{n\eta\pi}{b},$$

---

könne man in den Integralen (383) $\cos nx=1$, $\sin nx=0$ setzen, weil bei diesen die Integration nur über kleine Werte von $nx$ erstreckt zu werden braucht; und für große Werte von $n$ könne man das auch tun, weil die betr. Glieder in (1199) wegen des Nenners $1+n^2$ doch keinen merklichen Beitrag lieferten. Ähnlich auch Mécanique 1 (1833), p. 639.

1657) Auf eine Darstellung der entsprechenden Behandlung der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen mit zweitem Glied muß in diesem Artikel verzichtet werden; man müßte sonst die ganze astronomische Störungstheorie und überdies noch eine Menge verstreuter Untersuchungen der verschiedensten mechanischen und elektrodynamischen Spezialprobleme mit hineinnehmen.

1658) Bull. philomat. 1823, p. 97.

für den Fall $\varphi(x, y) = \text{const.}$:

$$B_{m,n} = \frac{1}{mn\pi^2}.$$

Soll die zu bestimmende Lösung sich für je einen oder zwei Werte von je einer der unabhängigen Variabeln auf je eine vorgeschriebene Funktion der anderen reduzieren, so läßt sich das Problem auf Grund des Superpositionsprinzips in einfachere zerlegen. So reduziert z. B. *Fourier*[1659]) die Integration der Differentialgleichung der Wärmeleitung unter den Grenzbedingungen

$$u = f(x) \text{ für } t = 0,\ u = \varphi(t) \text{ für } x = 0,\ u = \psi(t) \text{ für } x = \pi$$

auf die Bestimmung von drei Funktionen, die einzeln der Differentialgleichung und jede für sich den Nebenbedingungen:

$$u_1 = f(x) \text{ für } t = 0,\ u = 0 \text{ für } x = 0,\ u = 0 \text{ für } x = \pi;$$
$$u_2 = 0 \text{ für } t = 0,\ u = \varphi(t) \text{ für } x = 0,\ u = 0 \text{ für } x = \pi;$$
$$u_3 = 0 \text{ für } t = 0,\ u = 0 \text{ für } x = 0,\ u = \psi(t) \text{ für } x = \pi$$

genügen sollen. Die erste dieser Teilaufgaben ist durch $u_1 = \sum B_n \exp(-n^2 t) \sin nt$ gelöst, die zweite — von der die dritte nicht wesentlich verschieden ist — löst Fourier[1660]) folgendermaßen. Reduziert sich $\varphi(t)$ auf eine Konstante $b_1$, so ist die Lösung:

$$(1203)\quad u_2 = u_{21}(x, t) \equiv \frac{b_1 x}{\pi} + \frac{2b_1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \exp(-n^2 t) \sin nx.$$

Gilt das bis zu irgendeinem Moment $t_1$ und ist von da an $\varphi(t)$ gleich einer anderen Konstanten $b_1 + b_2$, so ist von da an:

$$(1204)\quad u_2 = u_{22} \equiv \frac{(b_1 + b_2)x}{\pi}$$
$$- \frac{2b_2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 t) \sin nx \int_0^{\pi} \left[\frac{(b_1 + b_2)\alpha}{\pi} - 2u_{21}(\alpha, t_1)\right] d\alpha$$
$$\equiv u_{21} + \frac{b_2 x}{\pi} + \frac{2b_2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \exp(-n^2 t + n^2 t_1) \sin nx.$$

---

1659) Bull. Férussac 11 (1829), p. 20; Paris mém. 8 (1829) = Oeuvres 2, p. 161. Eine entsprechende Behandlung des Saitenproblems bei *J. M. C. Duhamel,* j. éc. polyt. cah. 23 (1834), p. 35 (von 1832). Er führt auch für die Anfangserregungen $\varphi(t) = \alpha$, $\psi(t) = \beta$ eine lineare Funktion ein und ersetzt diese durch ihre trigonometrische Entwicklung. Nachher Paris C. R. 3 (1836), p. 638 gibt er noch eine allgemeine Darstellung des Fourierschen Integrals für eine beliebige lineare Differentialgleichung die in bezug auf $t$ von der ersten, in bezug auf $x$ von der $m^{\text{ten}}$ Ordnung ist und auch ein mit $t$ variables 2. Glied enthält. Dazu auch Untersuchungen über gestrichene Saiten ib. p. 646 sowie über Saiten und longitudinal schwingende Stäbe, J. d. math. 8 (1843), p. 122.

1660) p. 14 bzw. 159.

Wird so fortgeschlossen, dann allgemein $t_m - t_{m-1}$ durch $d\tau$, $b_m$ durch $\varphi'(\tau)\,d\tau$ und die Summe durch ein Integral ersetzt, so wird — unter der Voraussetzung $\varphi(0) = 0$ — erhalten:

$$(1205)\quad u_2 = \frac{x}{\pi}\varphi(t) + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx\int_0^t \exp(-n^2\tau)\varphi'(\tau)\,d\tau.$$

Dieses Resultat verifiziert Fourier dann noch, indem er die Lösung zunächst in der Form ansetzt:

$$(1206)\quad u_2 = \frac{x}{\pi}\varphi(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\exp(-n^2 t)\,\alpha_n(t)\sin nx$$

und zeigt, daß die damit eingeführten Funktionen $\alpha_n(t)$ den Differentialgleichungen

$$(1207)\quad \exp(-n^2 t)\frac{d\alpha_n}{dt} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n}{n}\varphi'(t)$$

genügen müssen. *P. G. Lejeune-Dirichlet* dagegen[1662]) setzt als Elementarlösung für diesen Fall an:

$$(1208)\quad u_2 = R\cos\lambda t + S\sin\lambda t,$$

wobei $R, S$ den Differentialgleichungen

$$(1209)\quad \frac{d^2R}{dx^2} = \lambda S, \qquad \frac{d^2S}{dx^2} = -\lambda R$$

genügen müssen; er unterwirft sie noch den Bedingungen:

$$R = 0,\quad S = 0 \text{ für } x = 0;\quad R = 1,\quad S = 0 \text{ für } x = \pi.$$

Die gesuchte Lösung schreibt er dann zunächst in der Gestalt der Summe zweier Fourierscher Integrale:

$$(1210)\quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\Big[R\cos(\lambda t - \lambda\tau) + S\sin(\lambda t - \lambda\tau)\Big]\varphi(\tau)\,d\tau\,d\lambda,$$

die sich für $t = 0$, $0 < x < \pi$ in der Tat auf 0 reduziert, indem dann die beiden Bestandteile einander entgegengesetzt gleich werden. Hier entwickelt er die Hilfsfunktionen $R, S$ mit Hilfe der Differentialgleichungen, denen sie genügen, nach den Sinus der Vielfachen von $x$; die Integrationen nach $\lambda$ lassen sich dann elementar gliedweise ausführen, die nach $\tau$ brauchen nur über das Intervall von 0 bis $t$ erstreckt zu werden, da darüber hinaus die beiden Bestandteile sich wieder gegeneinander wegheben, und das so erhaltene Resultat kann durch eine partielle Integration in das von Fourier erhaltene übergeführt werden.

1662) J. f. Math. 5 (1830), p. 293 = Werke 1, p. 166.

Auch *G. Frullani*[1663]) integriert die Differentialgleichung (1175) durch eine Reihe, die nach den Cosinus oder den Sinus der Vielfachen von $x$ fortschreitet, indem er deren Koeffizienten als Funktionen von $t$ durch gewöhnliche Differentialgleichungen bestimmt. Nachher entwickelt er alles nach Potenzen von $x$ und zeigt, daß die Koeffizienten dieser Entwicklung sich aus dem Anfangsglied durch sukzessive Differentiationen ableiten lassen[1664]); so gelangt er wieder zu der Form (1206) der Lösung. Er zeigt noch, daß dasselbe Verfahren sich auch auf Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten[1665]) sowie auf solche mit mehr als zwei unabhängigen Variabeln anwenden läßt.[1666])

In einfachen Fällen lassen sich die durch die Methode der Reihenentwicklung erhaltenen Lösungen mit Hilfe der im ersten Abschnitt besprochenen Formeln in geschlossener Form durch Elementarfunktionen darstellen. So bringt schon Fourier[1667]) die Lösung der Potentialgleichung unter den Nebenbedingungen

$$u = \frac{\pi}{2} \text{ für } y = 0, \quad u = 0 \text{ für } y = +\infty, \quad u = 0 \text{ für } x = \pm\frac{\pi}{2}$$

auf die Form

$$\frac{\pi}{2}\, u = \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\operatorname{Sin} y} \tag{1211}$$

(gleich dem reellen Teil der Funktion $2 \operatorname{arctg} e^{-(y+ix)}$) und die den Nebenbedingungen

$$u = f(x) \text{ für } y = 0, \quad u = 0 \text{ für } y = +\infty, \quad u = 0 \text{ für } x = 0, \quad x = \pi$$

genügende Lösung derselben Gleichung[1668]) mit Hilfe von

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-ny} \cos nx = \frac{1}{2}\,\frac{\cos x - e^{-y}}{\operatorname{Cof} y - \cos x} \tag{1212}$$

auf die Form 1630).

**70. Integration partieller Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale, von den in Nr. 67 besprochenen Reihenentwick-**

---

1663) Ricerche sopra le serie p. 152, 155. Frullani kommt zu derartigen Ansätzen nicht von Überlegungen der mathematischen Physik aus, sondern weil er für einzelne Funktionen, wie z. B. $(t + \cos x)^n$, gefunden hatte (vgl. 480)), daß sie einerseits sich in derartige Reihen entwickeln lassen, andererseits einfachen partiellen Differentialgleichungen genügen.

1664) Frullani führt hier unnötigerweise $e^t$ als neue Variable ein, was nichts vereinfacht.

1665) p. 158, 160.

1666) p. 163.

1667) Preisschrift von 1811, Paris mém. 4 (1819/20[24]), p. 275. Ann. chim. phys. 3 (1816), p. 359; Théorie Nr. 205 = Oeuvres 1, p. 185.

1668) Théorie Nr. 237 = Oeuvres 1, p. 237.

lungen aus. Zu solcher Integration, die ihm wohl auch durch Eulers und seine eigenen Untersuchungen über die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale (vgl. II B 3) nahe gelegt war, ist *P. G. de Laplace* von den in Nr. 67 besprochenen Untersuchungen aus durch eine merkwürdige Infinitesimalbetrachtung gelangt[1669]; er erhält eine Darstellung durch die Summe zweier Integrale, von denen eines ist:

$$(1213)\quad \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A_n(s)(t-\tau)^n \Phi(\tau)\,d\tau = \int_0^t T(s_1 t - \tau)\,\Phi(\tau)\,d\tau;$$

und hier kann noch die variable Grenze vermöge der Substitution $\tau \,||\, t\tau$ durch die feste Grenze 1 ersetzt werden, so daß die Lösung in der Tat in der Gestalt der Summe zweier bestimmter Integrale erscheint. Nachdem diese Form so gefunden ist, kann man die Bedingungen, denen die Funktion $T$ genügen muß, direkt durch Einsetzen dieses Ausdruckes in die Differentialgleichung erhalten. Reduzieren sich $L, M, N$ auf Konstante $l, m, n,$ so wird $T$ ein Produkt aus $\exp(-mx - nt)$ in eine Funktion von $x(t-\tau)$ allein. Diese letztere erscheint bei Laplace[1670] in der Gestalt einer unendlichen Reihe; *M. A. Parseval*[1671] führt diese mit Hilfe seines Integralsatzes (467) in ein bestimmtes Integral über.

Dann hat *Brisson* bemerkt[1672], daß man seine Darstellung (1162) der Lösung als die Summe der von $s$ freien Glieder im Produkte der Entwicklung von $\Phi(x+s)$ nach steigenden und von

$$V(s) = -se^{\alpha s}\int We^{-\alpha s}\,ds$$

nach fallenden Potenzen von $s$; oder auch von $W(\alpha + s)$ nach stei-

1669) Paris hist. 1779[82] = Oeuvres 10, p. 55. *S. F. Lacroix*, traité des différences et des séries, Paris 1800, p. 506; traité du calcul diff. et du calc. int. 3 (1819), p. 550 erzielt diese Umformung einfacher durch Verwandlung der wiederholten Integrale in einfache.

1670) Oeuvres 10, p. 60.

1671) Paris mém. prés. 1 (1806), p. 646 (von 1799). Es handelt sich um eine Zylinderfunktion rein imaginären Arguments. In einfacherer Darstellung erscheint die Umformung der Reihe in ein bestimmtes Integral bei *A. A. Cournot*, Théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 422. — Parseval schreibt das Resultat auch für die Gleichung der schwingenden Saite im widerstehenden Mittel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

um.

1672) J. Éc. polyt. cah. 14 (1808), p. 241.

genden und von

$$\Omega(x) = -se^{xs}\int \Phi(x)e^{-xs}\,dx$$

nach fallenden Potenzen von $s$ ansehen könne. Wenn man dann „un théorème que les géomètres ont quelquefois employé" [d. h. eben wieder den Parsevalschen Satz] benutze, erhalte man[1673]):

$$(1214)\qquad 2\pi z = e^{\alpha x}\int_0^\pi \Re\big(V(e^{ui})\,\Phi(x + e^{ui})\big)\,du$$

bzw.

$$(1215)\qquad 2\pi z = e^{\alpha x}\int_0^\pi \Re\big(\Omega(e^{ui})\,W(\alpha + e^{ui})\big)\,du.$$

Wenn man

$$(1216)\qquad \Phi(x) = \int e^{px}\,\varphi(p)\,dp$$

setzen könne, könne man auch schreiben[1674]):

$$(1217)\qquad z = \int W(p,y)\,e^{px}\,\varphi(p)\,dp;$$

und wenn sich $W$ in die Form

$$(1218)\qquad W = \int e^{\alpha P}\,Q\,dp$$

setzen lasse, in der $P$, $Q$ Funktionen von $x, y, p$, aber nicht von $\alpha$ bedeuten sollen, auch:

$$(1219)\qquad z = \int Q\,\Phi(x + P)\,dp.$$

**71. Integration partieller Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale: Integration des Produkts der Elementarlösung mit einer willkürlichen Funktion ihres Parameters nach diesem.** Zu derartigen Darstellungen ist *Brisson*[1675]) zuerst durch folgende Über-

---

1673) p. 242.

1674) p. 251.

1675) J. Éc. polyt. cah. 14 (1808), p. 219. Ähnlich bei *S. D. Poisson,* bull. philomat. 1822, p. 82, der aber meint, man könne doch nichts damit anfangen? Bei diesem Ansatz ist für $\Phi$ implizite eine analytische Funktion vorausgesetzt [wie übrigens auch bei dem vorigen, obwohl Brisson p. 218 das Gegenteil zu behaupten scheint]; aber man kann für verschiedene analytische Intervalle verschiedene Funktionen nehmen; und nun scheint er nicht an andere willkürliche Funktionen zu denken, als an solche, die sich aus Stücken verschiedener analytischer Funktionen zusammensetzen. Daher kann er meinen, p. 220, es sei dadurch die von *Biot* (Paris mém. 4, an XI, p. 111; vom an VIII) ausgesprochene Behauptung bewiesen, „in gewissen Fällen haben die partikulären Integrale der Differentialgleichungen, wenn sie aus einer unendlichen Anzahl voneinander unabhängiger Terme bestehen, dieselbe Ausdehnung wie das allgemeine Integral". Biot selbst scheint seinen angekündigten Beweis nicht veröffentlicht zu haben; seine Abhandlung ib. 6 (1806), p. 201 (vom an X) enthält nichts darüber.

legung gelangt: wenn $\alpha, \beta$ durch die aequation directrix verbunden sind, so ist nicht nur $\exp(\alpha x + \beta t)$, sondern auch jede unter dieser Voraussetzung gebildete Ableitung dieser Funktion nach $\alpha$ eine Lösung; also auch die Summe beliebig vieler, mit willkürlichen Funktionen von $\alpha$ multiplizierten solcher Ableitungen. Wenn man für diese Funktionen die mit abwechselnden Vorzeichen genommenen iterierten Integrale einer willkürlichen Funktion von $\alpha$ nehme, so erhalte man eine Reihe, die man auch durch sukzessive partielle Integrationen aus

$$\int \exp(\alpha x + \beta t)\,\varphi(\alpha)\,d\alpha$$

erhalten könne.[1676])

Direkt aus der Überlegung heraus, daß man statt der Summe unendlich vieler mit Konstanten multiplizierter Elementarlösungen auch ein Integral setzen könne, erscheint dann dieselbe Form der Lösung bei *A. Cauchy*. So gibt er das Integral der Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1220}$$

in der Form[1677]):

$$u = \sum \int e^{\xi y} \cos \xi x \,\varphi(\xi)\, d\xi \tag{1221}$$

und das der Gleichung der Wasserwellen

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1222}$$

in der Form[1678]):

$$u = \sum \int e^{t\sqrt{\xi}} \cos \xi x \,\varphi(\xi)\, d\xi; \tag{1223}$$

die Summenzeichen bedeuten dabei jedesmal, daß zu dem angeschriebenen Glied noch andere treten sollen, die aus ihm durch Vertauschung von $\xi$ mit $-\xi$ (im zweiten Fall auch von $\sqrt{\xi}$ mit $-\sqrt{\xi}$) oder von Cosinus mit Sinus hervorgehen; jedes Glied mit einer anderen willkürlichen Funktion des Parameters.

Später[1679]) erscheinen die Schlüsse bei ihm wohl auch in der umgekehrten Reihenfolge: eine beliebige Funktion von $x$ und $t$ läßt sich durch

$$\int_0^\infty f(\xi, t) \cos \xi x \, dx$$

darstellen; soll sie einer partiellen Differentialgleichung genügen, so muß $f$ einer gewöhnlichen genügen.

---

1676) Brisson schreibt diese Form der Lösung ohne nähere Angabe *Lacroix* zu; in der Tat wird sie mit (1231) identisch, wenn man dort $p$ durch $\exp \alpha$ ersetzt.

1677) Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 21 (von 1815).

1678) p. 57.

1679) ib. p. 170, 175 (von 1827).

*A. de Morgan*[1680]) glaubt zwar selbst, daß die Ersetzung der Summe durch ein Integral hier richtig sei, wenn man den Fall einer diskontinuierlichen Funktion $\varphi(\xi)$ nicht ausschließe; weist aber doch darauf hin, daß es keineswegs bewiesen sei.

Durch dieselbe Schlußweise erhält *S. F. Lacroix*[1681]) das Integral der Gleichung

$$(1224)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = u$$

in der Form:

$$(1225)\qquad u = \int \exp\left(\alpha x + \alpha^{-1}y\right)\varphi(\alpha)\,d\alpha.$$

Auf die Wärmeleitungsgleichung ist dieses Verfahren von *A. A. Cournot*[1682]) angewendet worden.

Hierher gehört es auch, wenn *Poisson*[1683]) die Entwicklung der Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$(1226)\qquad \sum_n A_n \exp\left(\lambda_n^2 t + \lambda_n x\right)$$

dadurch in die Laplacesche Form des Integrals (1236) überführt, daß er diese Umformung mit Hilfe der Gleichung

$$(1227)\qquad \exp \lambda_n^2 t = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\omega^2 + 2\omega\lambda_n\sqrt{t}\right)d\omega$$

an den einzelnen Gliedern ausführt und dann wieder die Summe

$$\sum A_n \exp \lambda_n x$$

als Ausdruck einer willkürlichen Funktion ansieht.

Später[1684]) gibt *Poisson* für die Wärmeleitungsgleichung, indem er von der unter (1176) gegebenen Form der Elementarlösung ausgeht, speziell auch noch die Darstellung der Lösung durch ein bestimmtes Integral:

$$(1228)\quad u = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \frac{p\cos\xi\tau\exp\left(-x\sqrt{\frac{\xi}{2}}\right)}{\sqrt{p^2+p\sqrt{2\xi}+\xi}}\cos\left(\xi\tau - x\sqrt{\frac{\xi}{2}} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\xi}}{p\sqrt{2}+\sqrt{\xi}}\right)\varphi(\tau)\,d\tau\,d\xi$$

---

1680) Cambr. trans. (8) 2 (1844), p. 186.

1681) Traité du calc. diff. et du calc. int. 3, Paris 1819, p. 561.

1682) Théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 425.

1683) Mécanique 2, p. 355; chaleur p. 360; ebenso *A. A. Cournot,* Théorie 2, p. 421.

1684) Chaleur, p. 331.

Für

$$(1229)\qquad \varphi(t) = \exp.(-|t|) = \frac{2p}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos t\theta\, d\theta}{1+\theta^2},\ x = 0$$

wird so erhalten[1685]):

$$(1230)\ u = \frac{2p}{\pi}\int_0^\infty \frac{\left(p+\sqrt{\frac{\theta}{2}}\right)\cos\left(\theta t - x\sqrt{\frac{\theta}{2}}\right)+\sqrt{\frac{\theta}{2}}\sin\left(\theta t - x\sqrt{\frac{\theta}{2}}\right)}{(p^2+p\sqrt{2\theta}+\theta)(1+\theta^2)}\exp\left(-x\sqrt{\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= \frac{8p}{\pi t}\int_0^\infty \frac{\left(p+\frac{z}{\sqrt{t}}\right)\cos\left(2z^2-\frac{xz}{\sqrt{t}}\right)+\frac{z}{\sqrt{t}}\sin\left(2z^2-\frac{xz}{\sqrt{t}}\right)}{\left(p^2+\frac{2pz}{\sqrt{t}}+\frac{2z^2}{t}\right)\left(1+\frac{4z^4}{t^2}\right)}\exp\left(\frac{-xz}{\sqrt{t}}\right) z\,dz.$$

**72. Integration partieller Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale, in Übertragung der bei gewöhnlichen Differentialgleichungen angewendeten Methode.** Eine Übertragung der bei gewöhnlichen Differentialgleichungen erfolgreichen Methoden zur Integration durch bestimmte Integrale hat, soviel ich sehe, zuerst *S. F. Lacroix* unternommen[1686]), und zwar für lineare Gleichungen zweiter Ordnung ohne zweites Glied, deren Koeffizienten lineare Funktionen der unabhängigen Veränderlichen sind. Wird in eine solche Gleichung ein Ausdruck der Form

$$(1231)\qquad u = \int p^x q^y r\, dp$$

eingesetzt, wobei $q$ und $r$ noch zu bestimmende Funktionen von $p$ sein sollen, so wird zunächst eine Gleichung der Form

$$(1232)\qquad \int (M + Nx + Py)\, p^x q^y r\, dp = 0$$

erhalten, in der $M, N, P$ Funktionen von $p$ und $q$ sind. Werden dann $q$ und $r$ als Funktionen von $p$ durch die Gleichungen

$$\frac{dq}{q} = \frac{M dp}{Np},\qquad Mr - \frac{d(Npr)}{dp} = 0$$

bestimmt, so zeigt eine partielle Integration, daß die Gleichung (1232) erfüllt ist, sobald an beiden Integrationsgrenzen

$$Np^{x+1}q^y r = 0$$

ist. Damit ist zunächst nur ein partikuläres Integral gefunden; wird aber noch mit einer willkürlichen Funktion der bei der Bestimmung

---

1685) Chaleur suppl., Paris 1837, p. 34, 39.

1686) Traité des différences et des séries, Paris 1800, p. 525; 2. Aufl., 1819, p. 573.

von $q$ eintretenden Konstanten $\omega$ multipliziert und nach diesem $\omega$ zwischen irgendwelchen konstanten Grenzen integriert, an Stelle des bei Bestimmung von $v$ willkürlich bleibenden konstanten Faktors eine willkürliche Funktion eines Parameters gesetzt und nach diesem zwischen irgendwelchen Grenzen integriert, so wird die Darstellung einer allgemeineren Lösung durch ein Doppelintegral

$$u = \iint p^x q^y r\, \varphi(\omega)\, dr\, d\omega \tag{1233}$$

erhalten.

Die Anwendung eines analogen Verfahrens auf eine Gleichung mit konstanten Koeffizienten liefert ihm das Resultat, daß einer solchen Gleichung durch einen Ausdruck der Form (1231) genügt wird, wenn $r$ eine willkürliche Funktion von $p$ bleibt, während $\log q$ mit $\log p$ durch eine Gleichung zweiten Grades verbunden ist. Die Grenzen der Integration bleiben hier willkürlich.

**73. Integration partieller Differentialgleichungen durch bestimmte Integrale, vermöge der Darstellung der numerischen Koeffizienten ihrer Reihenentwicklungen durch solche Integrale.** Die Anwendung dieser dem Vorgehen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen sich näher anschließenden Methode auf partielle findet sich, soviel ich sehe, zuerst in einem speziellen Falle bei *P. S. de Laplace*[1687]), der das Integral der Differentialgleichung der linearen Wärmeleitung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

aus der seiner Entwicklung nach Potenzen von $t$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} f^{(2n)}(x) \tag{1234}$$

mit Hilfe der [lange vorher von ihm bei anderer Gelegenheit gefundenen, der Theorie der $\Gamma$-Funktionen angehörenden] Relationen

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-a^2) a^m\, da = \begin{cases} 0 \text{ für } m = 2n+1, \\ \dfrac{(2n)!}{2^n n!} \text{ für } m = 2n \end{cases} \tag{1235}$$

in die Form

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-a^2) f(x + 2a\sqrt{t})\, da \tag{1236}$$

1687) J. Éc. polyt. cah. 15 (1809), p. 240. Oft reproduziert, z. B. von *A. A. Cournot,* Théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 420; in symbolischer Form von *D. F. Gregory,* Cambr. math. j. (1) 3 (1838), p. 127.

überführt. Dabei ist, wie aus der Ableitung selbst hervorgeht, $f(x)$ gerade diejenige Funktion von $x$, auf die sich $u$ für $t = 0$ reduziert.

Dann gibt *Poisson*[1688]) die Integration der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu \tag{1237}$$

— auf die er die allgemeine [hyperbolische] Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen drei Variabeln mit konstanten Koeffizienten zurückgeführt hatte —, zunächst durch eine Summe zweier Reihen, von denen eine ist:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b\right)^n F(x) \tag{1238}$$

und summiert diese dann durch das bestimmte Doppelintegral[1689]):

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{t^{n+1}}{n!} \left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{b} \sin\varphi \sin\psi\right)^n F(x) \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} e^{t\sqrt{b} \sin\varphi \sin\psi} F(x + t\cos\varphi)\, t \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi.$$

Für negative $b$ wird der Exponent imaginär; Poisson zeigt[1690]), daß man dann eine reelle Form erhält, indem man je zwei Elemente zusammennimmt; nämlich:

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \cos\left(t\sqrt{-b} \sin\varphi \, \sin\psi\right) F(x + t\cos\varphi)\, t \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi. \tag{1239}$$

Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1 - m^2}{4x^2} u \tag{1240}$$

hat schon *Euler*[1691]) durch Reihen integriert, die nach Potenzen von $x$

---

1688) Paris mém. 3 (1818 [20]), p. 162; reproduziert von *G. Plana,* Torino mem. 25 (1820), p. 146.

1689) Auch dieses Resultat verifiziert Poisson Paris mém. 3, p. 166 durch Differentiation unter dem Integralzeichen und partielle Integration.

1690) Conn. des temps pour 1826 [23], p. 273. Poisson reduziert hier auch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \sqrt{-2b} \frac{\partial v}{\partial x}$$

durch die Substitution

$$u = v \exp\left(-x\sqrt{\frac{b}{2}}\right)$$

auf (1237).

1691) Taur. Misc. (3) 2 (1765), p. 69.

fortschreiten, während ihre Koeffizienten willkürliche Funktionen von $x \pm t$ und deren Ableitungen enthalten. *S. D. Poisson*[1692]) ersetzt in diesen Reihen die numerischen Koeffizienten durch bestimmte Integrale und vertauscht dann die Reihenfolge von Summation und Integration; so gelangt er unter der Voraussetzung $m^2 < 1$ zur Darstellung der allgemeinen Lösung durch die Summe zweier bestimmter Integrale

$$(1241) \qquad u = \int_0^\pi \varphi(x\cos\omega + t)x^{\frac{1+m}{2}}\sin^m\omega\, d\omega$$

$$+ \int_0^\pi \psi(x\cos w + t)x^{\frac{1-m}{2}}\sin^{-m}\omega\, d\omega.$$

Für den Fall $m = 0$ sind die beiden Bestandteile nicht wesentlich voneinander verschieden; Poisson zeigt durch einen geeigneten Grenzübergang, daß dann an Stelle des zweiten ein Integral der folgenden Form zu treten hat[1693]):

$$(1242) \qquad \sqrt{x}\int_0^\pi \psi(x\cos\omega + t)\log(x\sin^2\omega)\, d\omega.$$

Die Substitution $u = v\sqrt{x}$ führt die Differentialgleichung dieses Falles über in:

$$(1243) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial x}$$

(Schallausbreitung in der Ebene, Schwingungen einer schweren Kette); deren allgemeine Integration ist also dadurch mit erledigt. Liegt $m$ außerhalb der angegebenen Grenzen, so divergiert das eine oder andere der angegebenen Integrale (1241); Poisson bleibt dann bei der Reihenentwicklung stehen und untersucht namentlich die Fälle eines geraden ganzzahligen $m$, in welchen in dieser ein unendlich großes Glied auftritt; er zeigt, daß man dann dieses Glied einfach weglassen und die Summe der unendlich vielen folgenden wieder durch ein bestimmtes Integral darstellen kann.[1694])

Um auch zu einer entsprechenden Darstellung der Lösung von

$$(1244) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-m^2}{4x^2}u$$

---

1692) J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 222 (von 1821). Es handelt sich der Sache nach um Eulersche Integrale 1. Art, die aber hier nicht in der gewöhnlichen Form auftreten.

1693) p. 227.

1694) p. 234.

zu gelangen, geht Poisson von der Darstellung der Lösung des Falles $m = 1$ durch das Laplacesche Integral aus, so daß er hier eine Darstellung durch zwei Doppelintegrale

$$(1245)\quad u = x^{\frac{1+m}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\pi} \varphi(x\cos\omega + 2a\sqrt{t}) \sin^m\omega\, d\omega\, e^{-a^2} da$$
$$+ x^{\frac{1-m}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\pi} \psi(x\cos\omega + 2a\sqrt{t}) \sin^{-m}\omega\, e^{-a^2} da$$

erhält.[1695]) Es treten demnach scheinbar zwei willkürliche Funktionen auf; doch zeigt er, daß sich die Koeffizienten der Entwicklung dieser Lösung nach Potenzen von $t$ alle durch die eine Funktion

$$(1246)\quad x^{\frac{1+m}{2}} \int_0^{\pi} \varphi(x\cos\omega)\sin^m\omega\, d\omega + x^{\frac{1-m}{2}} \int_0^{\pi} \psi(x\cos\omega)\sin^{-m}\omega\, d\omega$$

und ihre Ableitungen ausdrücken lassen.[1696]) Im Falle $m = 0$ ist auch hier das eine Doppelintegral durch ein anderes zu ersetzen, in welchem $\log(x\sin^2\omega)$ als Faktor auftritt. Die Substitution[1697]) $u = v\sqrt{x}$ transformiert diese Gleichung in die Gleichung der Wärmeleitung in einem Zylinder, in dem die Temperatur nur Funktion der Zeit und des Abstandes $x$ von der Achse ist:

$$(1247)\quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Ist $m$ eine ungerade ganze Zahl, so läßt sich in dem einen Bestandteil die Integration nach $\omega$ elementar ausführen, die Entwicklung des anderen Bestandteiles enthält nur eine endliche Anzahl von Gliedern, und schließlich kann man noch zusammenziehen, so daß man eine Darstellung der Lösung durch ein einfaches Integral erhält.[1698])

Wird in (1245) an Stelle von $a$ eine neue Integrationsvariable $\alpha$ durch die Substitution

$$(1248)\quad x\cos\omega + 2a\sqrt{t} = \alpha$$

---

1695) p. 240; Verifikation durch Differentiation unter dem Zeichen und partielle Integration p. 290. — Anders verfährt *A. A. Cournot* (Théorie des fonctions 2, 1841, p. 424): er sucht erst eine Lösung der Form $u = y(x)\cdot\exp(\alpha^2 t)$, drückt beide Faktoren durch bestimmte Integrale aus, summiert in bezug auf $\alpha$ und ersetzt die Summen der Form $\sum A\exp(\alpha x)$ durch die Zeichen willkürlicher Funktionen.

1696) p. 243.

1697) p. 245.

1698) p. 247.

eingeführt und wird die dann auftretende Exponentialgröße

$$\exp\left(-\frac{(\alpha - x\cos\omega)^2}{4t}\right)$$

mit Hilfe der Gleichung (974) durch ein bestimmtes Integral ersetzt, so geht der bei $x = 0$ endlich bleibende Bestandteil der Lösung über in

$$(1249)\qquad u = \frac{x^{n+1}}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 t} P_n(x\xi)\cos\xi\alpha\,\varphi(\alpha)\,d\alpha,$$

wo

$$(1250)\qquad P_n(x) = \int\limits_0^{\pi} \cos(\xi\cos\omega)\sin^{2n+1}\omega\,d\omega$$

also bis auf einen Faktor gleich der jetzt mit $J_{n-\frac{1}{2}}(x)$ bezeichneten Zylinderfunktion ist.[1699])

*Poisson* führt auch noch die Entwicklung der Lösung der allgemeinen Gleichung:

$$(1251)\qquad \frac{\partial^m u}{\partial x^m} = \frac{\partial^n u}{\partial y^n}$$

nach Potenzen von $x$ in eine Integraldarstellung über, indem er die numerischen Koeffizienten mit Hilfe der durch wiederholte partielle Integration zu erhaltenden Formel

$$(1252)\qquad \frac{n!}{m!} = \frac{e^k}{2\pi} \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^n e^{-\alpha + zi}}{(k+zi)^{m+1}}\,dz\,d\alpha$$

---

1699) p. 294. Ist die Anfangsfunktion nur für ein bestimmtes Intervall gegeben und darüber hinaus Grenzbedingungen gemäß fortzusetzen, so zerspaltet Poisson die Integraldarstellung durch ein dem in Nr. 97 zu besprechendes ähnliches Verfahren in eine nach Zylinderfunktionen fortschreitende Reihe, über die man vorläufig II A 10, *Wangerin,* Nr. 57, p. 754 vergleiche. — Übrigens bemerkt Poisson erst nachträglich (p. 475), daß man aus der Lösung der partiellen Differentialgleichung durch (1241) die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{1-m^2}{4x^2} - \xi^2\right)u = 0$ durch die Summe zweier bestimmter Integrale ableiten könne.

*J. Liouville* (j. éc. polyt. cah. 24 (1835), p. 54) behandelt die Aufgabe, die Funktion $\psi$ so zu bestimmen, daß

$$\int\limits_0^{\pi} \psi(x\cos\omega)\sin^{2n+1}\omega\,d\omega$$

einer gegebenen Funktion $f$ von $x$ gleich werde; er löst sie mit Hilfe einer früher von ihm zur Umwandlung eines $n$-fachen Integrals in ein einfaches gegebenen Formel durch

$$\psi(x) = \frac{(-1)^{n+1}2}{\Gamma(n+1)x^{2n+3}} \frac{d^{n+1}(xf(x))}{d(x^{-2})^{n+1}}.$$

umformt. Er erhält so[1700]):

$$(1253)\qquad u = \sum \frac{e^k}{2n\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(y + \frac{\varepsilon \alpha x^{m/n}}{(k+zi)^{m/n}}\right) \frac{e^{-\alpha+zi}}{k+zi}\, dz\, d\alpha;$$

dabei besteht die Summe aus $n$ Gliedern, deren jedes eine andere willkürliche Funktion und eine andere $n^{\text{te}}$ Einheitswurzel $\varepsilon$ enthält. Für $m = n$ führt ein geeigneter Grenzübergang, unter Einführung eines Konvergenzfaktors, zur Euler-d'Alembertschen Form der Lösung zurück; für $m = 1$, $n = 2$ unter Einführung einer neuen Integrationsvariablen, zur Laplaceschen Form (1236). Die Anwendung auf den Fall $m = 2$, $n = 1$ würde zunächst ein divergentes Integral liefern, doch erhält Poisson durch eine Modifikation des Verfahrens für diesen Fall[1701]):

$$(1254)\qquad u \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{z^2 i}\, dz}{\sqrt{k+zi}} = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(y + \frac{x^2}{4(k+zi)}\right) \frac{e^{z^2 i}\, dz}{\sqrt{k+zi}}$$

$$+ \frac{x}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1\left(y + \frac{x^2}{4(k+zi)}\right) \frac{e^{z^2 i}\, dz}{\sqrt{k+zi}^{\,3}}.$$

Eine andere Modifikation wendet er im Falle $m = 1$, $n = 3$ an.

Ebenso summiert *Fourier*[1702]) die Entwicklung des Integrals der Differentialgleichung:

$$(1255)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial u}{\partial t}$$

nach Potenzen von $t$ durch:

$$(1256)\qquad u = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x + t \sin \alpha)\, d\alpha$$

$+$ einem zweiten Glied, von dem er nur sagt, daß es sich ebenfalls durch ein bestimmtes Integral ausdrücken lasse, dessen Form aber von der des ersten sehr verschieden sei.

Auch nichtlineare Gleichungen werden für diese Methode zugänglich, wenn es gelingt, sie durch Transformation auf lineare zu

---

1700) J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 464. Die Einführung der komplexen Größen dient zunächst nur zur Vereinfachung der Schreibweise, indem die imaginären Bestandteile von selbst herausfallen; doch bemerkt Poisson p. 467 selbst, das Verfahren setze voraus, daß die gegebenen Anfangsfunktionen $f$ analytisch seien, da man sonst nicht komplexe Argumente in sie einführen könne.

1701) p. 472; chaleur p. 143; ohne Beweis bull. philomat. (1822), p. 138. Vgl. auch *A. de Morgan,* Diff. and integral calc., Lond. 1836/41, p. 738.

1702) Théorie Nr. 414 = Oeuvres 1, p. 494 *J. Liouville* drückt dieses Integral durch einen Differentialquotienten zu gebrochenem Index aus (j. éc. polyt. cah. 21 (1832), p. 57).

reduzieren. So führt *M. A. Parseval*[1703]) die Gleichung der endlichen Schallschwingungen in einer Dimension

$$(1257)\qquad \left\{1-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

durch die Legendresche Transformation[1704])

$$(1258)\qquad u=px+qt-\omega$$

in

$$(1259)\qquad (1-p^2)\frac{\partial^2\omega}{\partial q^2}+2p\frac{\partial^2\omega}{\partial p\,\partial q}-\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2}=0$$

und diese durch die weitere Substitution

$$\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}=\frac{p^2}{2}\pm p+q$$

in

$$(1260)\qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial\mu\,\partial\nu}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\mu}+\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\right)=0,$$

also in eine Laplacesche Gleichung über. Ebenso reduziert er[1705]) die Gleichung der endlichen Wasserwellen in einem seichten Kanal

$$(1261)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+\left\{\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{3}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-1\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

durch (1258) und

$$\left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\}=p\pm\sqrt{1-\frac{1}{2}p^2-q}$$

auf:

$$(1262)\qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial\mu\,\partial\nu}-\frac{1}{2}\frac{1}{\mu-\nu}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\mu}-\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\right).$$

Die letztere integriert er durch die Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}{(n+2)!}\,\frac{(\mu-\nu)^n}{2^{n-1}}\left(f^{(n)}(\mu)+F^n(\nu)\right)$$

und bemerkt, daß deren von $f$ abhängiger Bestandteil gleich der Summe der von $s$ freien Glieder im Produkt der Entwicklungen von

$$f(\mu+s)\quad\text{und}\quad -3+\frac{4}{(\mu-\nu)s}+2\sqrt{1-(\mu-\nu)s}$$

ist, so daß er mit Hilfe seines Satzes wieder eine Integraldarstellung der Lösung enthält.

**74. Übergang von der Lösung durch eine trigonometrische Reihe zur Lösung durch ein bestimmtes Integral.** Auch von der Lösung einer partiellen Differentialgleichung mit zwei unabhängigen

1703) Paris mém. prés. 1 (1806), p. 524 (von 1803).

1704) Paris hist. 1787 [89], p. 310.

1705) Paris mém. prés. 1, p. 536; Berichtigung p. 648. Er nimmt an, daß nur die Horizontalkomponente der Bewegung merklich sei.

Veränderlichen durch eine Reihe von Elementarlösungen, speziell durch eine trigonometrische Reihe, kann man zu ihrer Lösung durch ein bestimmtes Integral gelangen. Sei die Lösung in der Form gegeben:

$$(1263)\qquad F(x,t) = \sum_n \varphi_n(t)\,(A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

wo die $\varphi_n(t)$ so normiert seien, daß sie sich für $t = 0$ alle auf 1 reduzieren und die $A_n$, $B_n$ sich aus den Anfangswerten (für $t = 0$) vermittelst der Formeln von Nr. **17** bestimmen. Nimmt man die Funktionen $\varphi_n(t)$ mit unter die Integralzeichen und vertauscht, sofern das zulässig ist[1706]), die Reihenfolge von Summation und Integration, so erhält man:

$$(1264)\qquad F(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\left\{\frac{1}{2}\varphi_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(t)\cos(nx - n\alpha)\right\}d\alpha;$$

und wenn es nun gelingt, die in der Klammer stehende Summe elementar auszudrücken, so hat man die gewünschte Darstellung der Lösung. Für die Differentialgleichung der Wärmeleitung, für die $\varphi_n(t) = e^{-nt}$ ist, erhält man so unter Benutzung von (2):

$$(1265)\qquad F(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-e^{-t})f(\alpha)\,d\alpha}{1-2e^{-t}\cos(x-\alpha)+e^{-2t}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-e^{-t})f(x+\alpha)\,d\alpha}{1-2e^{-t}\cos\alpha+e^{-2t}};$$

die zweite Form ist so zu verstehen, daß dabei der Funktion $f(x)$ außerhalb des Intervalls $(-\pi \cdots + \pi)$ diejenigen Werte beigelegt werden, die sich aus den gegebenen durch periodische Wiederholung (nicht durch analytische Fortsetzung) ergeben. Den Fall, daß nicht Periodizitäts-, sondern Randbedingungen gegeben sind, kann man durch das Verfahren von Nr. **69** auf den hier betrachteten zurückführen; man erhält dann $F(x,t)$ ausgedrückt als Summe oder Differenz von zwei solchen Integralen. In dieser Form tritt diese Umsetzung zuerst bei *Fourier*[1707]) auf. Ausführlicher ist dieser Prozeß später nochmals von *A. Cauchy* besprochen worden[1708]), und zwar unter Benutzung

1706) Bei der Gleichung der Saitenschwingungen ist das nicht zulässig, da dann die Summe in der Klammer zu den in Nr. 4 besprochenen divergenten Reihen gehören würde; doch findet sich in der älteren Literatur auch für solche Fälle diese Schreibweise angewendet.

1707) Théorie de la chaleur Nr. 237 = Oeuvres 1, p. 237; noch nicht in der Preisschrift von 1811. Vgl. Note (1668).

1708) Paris C. R. 1843, p. 520 = Oeuvres (1) 7, p. 304. Cauchy versucht die komplexer Größen. Die Lösung der Laplaceschen Gleichung in 2 Veränderlichen für den Kreis durch das Poissonsche Integral findet sich nochmals hier als Anwendung, ebenso bei *G. G. Stokes.*[1709])

Andererseits kann man auch damit beginnen, daß man die Elementarlösung selbst durch ein bestimmtes Integral ausdrückt, die Summe unendlich vieler solcher Lösungen als Integral einer Summe schreibt und die dann unter dem Integralzeichen stehende Summe mit unendlich vielen unbestimmten Koeffizienten — deren sämtliche Glieder die Variabeln nur in einer Verbindung enthalten — ansieht. So stellen *Fourier*[1710]) und *Poisson*[1711]) die Elementarlösung der Differentialgleichung der Wärmeleitung durch das bestimmte Integral

$$(1266)\qquad \exp(-n^2t - nx) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\alpha^2 - n(x + 2\alpha\sqrt{t})\right) d\alpha$$

dar und gelangen auf diesem Wege zu der Laplaceschen Form (1236) der Lösung. Fourier diskutiert diese Lösung weiter für die beiden Annahmen

$$f(x) = e^{-|x|}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } |x| < 1, \\ 0 \text{ für } |x| > 1; \end{cases}$$

die erstere liefert[1712]):

$$(1267)\qquad e^{t+x}\psi\left(\sqrt{t} + \frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - e^{t-x}\psi\left(\sqrt{t} - \frac{x}{2\sqrt{t}}\right),$$

die letztere[1713]):

$$(1268)\qquad \psi\left(\frac{-x-1}{2\sqrt{t}}\right) - \psi\left(\frac{-x+1}{2\sqrt{t}}\right),$$

wo $\psi(r)$ die Funktion:

$$(1269)\qquad \psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_r^\infty e^{-r^2} dr$$

---

Sache auch noch für einen von einer beliebigen Kurve begrenzten Bereich zu erweitern. Indessen hat er nicht bewiesen — übrigens auch nicht behauptet — daß die von ihm gegebene Lösung p. 307 im Innern des Bereichs überall endlich bleibt.

1709) Cambr. trans. 8 (1) (1844), p. 115 = papers 1 p. 34.

1710) Paris mém. 4 (1819/20 [24]) (Preisschrift von 1811), p. 507; théorie de la chaleur Nr. 364 = Oeuvres 1, p. 413; reproduziert von *A. A. Cournot,* Théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 421.

1711) Bull. philomat. (1817), p. 182.

1712) Preisschrift p. 511; théorie Nr. 365, p. 417.

1713) Preisschrift p. 517; théorie Nr. 367, p. 421. p. 520 bzw. Nr. 369, p. 423 zeigt er durch Vergleichung der Reihenentwicklungen, daß diese Lösung mit derjenigen identisch ist, die man erhält, wenn man sich des Fourierschen Integrals bedient und dabei die Gleichung (832) benutzt.

(Krampsche Transzendente, Error-Funktion; vgl. I D 1, *Czuber*, p. 757, Note 123) bedeutet.[1714])

1714) Hier sei auch die Integration des in Note 1633) angegebenen Gleichungsystems angeführt, mit Hinzunahme der weiteren Grenzbedingungen:

$$u = f(x),\ \frac{\partial u}{\partial t} = F(x),\ v = f(x),\ \frac{\partial v}{\partial t} = F(x) \text{ für } t = 0,$$

auf das *S. D. Poisson* das Problem der Brechung und Reflexion longitudinaler Wellen an der Grenze zweier isotroper Mittel zurückgeführt hat, welche ziemliche Schwierigkeiten bietet. Poisson behandelt es allgemein, zunächst für den Fall eines endlichen $k$ vermittelst unharmonischer trigonometrischer Reihen; von da aus kommt er durch teilweise bedenkliche Übergänge für den Grenzfall $k = \infty$ zu folgender Form der Lösung (p. 332): sei

$$\lambda = a\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \qquad \xi_1 = \frac{1}{a_1}\sqrt{a^2\xi^2 + (a^2 - a_1^2)(\eta^2 + \zeta^2)},$$

$$\lambda_2 = a\sqrt{-\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad \xi_2 = \frac{1}{a_1}\sqrt{-a^2\xi^2 + (a^2 - a_1^2)(\eta^2 + \zeta^2)};$$

$$U(x) = H^{-1}(a^2\xi\cos l\xi_1\cos(\xi x - \xi h) + a_1^2\xi_1\sin l\xi_1\sin(\xi x - \xi h))\cos l\xi,$$

$$V(x) = H^{-1}(\cos l\xi_1\cos(\xi_1 x - \xi_1 h) + \sin l\xi_1\sin(\xi x - \xi h))\cdot a^2\xi\cos l\xi,$$

$$H^2 = a^4\xi^2\cos^2 l\xi_1 + a_1^4\xi_1^2\sin^2 l\xi_1;$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\cos l\xi_2 \exp(\xi x - \xi h),\ \ V_2 = \frac{1}{2}\cos(x - l - h)\xi_2,\ \ \Delta_2 = \frac{2l\xi_2 + \sin 2l\xi_2}{16\xi_2} + \frac{\cos^2 l\xi_2}{8\xi_1};$$

$$E = \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{h} U(\alpha) f(\alpha)\, d\alpha + \frac{1}{a_1^2}\int_{h}^{h+l} V(\alpha) f(\alpha)\, d\alpha,$$

$$\lambda F = \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{h} U(\alpha) F(\alpha)\, d\alpha + \frac{1}{a_1^2}\int_{h}^{h+l} V(\alpha) F(\alpha)\, d\alpha;$$

seien ferner $E_2$ und $F_2$ ebenso aus $U_2$ und $V_2$ gebildet wie $E$ und $F$ aus $U$ und $V$; dann ist schließlich

$$u = \frac{2a^2}{\pi}\int_0^\infty (E\cos\lambda t + F\sin\lambda t)\frac{U(x)\,d\xi}{\cos^2 l\xi_1} + a^2\sum(E_2\cos\lambda t + F_2\sin\lambda t)\frac{U_2}{\Delta_2},$$

$$v = \frac{2a^2}{\pi}\int_0^\infty (E\cos\lambda t + F\sin\lambda t)\frac{V(x)\,d\xi}{\cos^2 l\xi_1} + a^2\sum(E_2\cos\lambda t + F_2\sin\lambda t)\frac{U_2}{\Delta_2};$$

die Summen sind dabei über alle reellen positiven Wurzeln $\xi$ der Gleichung

$$a_1^2\xi_2\sin l\xi_2 - a^2\xi\cos l\xi_2 = 0$$

zu erstrecken.

Wird auch $l = \infty$, so entwickelt Poisson (p. 335) die Wurzelgroße $H^{-1}$ nach den Kosinus der Vielfachen von $2l\xi_1$ und glaubt sich wegen der nachfolgenden Integration nach $\xi$ berechtigt, diese Entwicklung auf ihr Absolutglied zu reduzieren.

**75. Diskussion über den Grad der Allgemeinheit der so erhaltenen Lösungen.** In welchem Sinne man sagen könne, daß die durch die Methoden der letzten Paragraphen erhaltenen Integrale die allgemeinsten Lösungen der betreffenden partiellen Differentialgleichungen vorstellen, darüber ist schon zu Beginn des vorigen Jahrhunderts mehrfach diskutiert worden. Man war zunächst, wie bereits bemerkt, von den einfachsten Beispielen aus zu der allgemeinen Behauptung gelangt: ebenso wie das allgemeine Integral einer gewöhnlichen Differentialgleichung willkürliche Konstante, müsse das allgemeine Integral einer partiellen Differentialgleichung willkürliche Funktionen enthalten; und zwar ebenso viele, als die Ordnung der Gleichung betrage. Doch führte diese Auffassung schon bei einer so einfachen Gleichung wie

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

auf Paradoxa: die Entwicklung der Lösung nach Potenzen von $x$ nämlich:

$$\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}\varphi^{(n)}(t) + \sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\psi^{(n)}(t) \tag{1270}$$

enthält zwei willkürliche Funktionen von $t$, dagegen ihre Entwicklung nach Potenzen von $t$:

$$\sum \frac{t^{(n)}}{n!} F^{(2n)}(x) \tag{1271}$$

nur eine willkürliche Funktion von $x$[1715]). Es hat dann zunächst *S. D. Poisson*[1716]) darauf aufmerksam gemacht, daß hier insofern kein Widerspruch vorliegt, als beide Entwicklungen zu demselben Resultat führen, wenn man aus jeder von ihnen eine Entwicklung nach Potenzen beider Veränderlichen zugleich ableitet. *J. Fourier* fügt dem noch hinzu[1717]): wenn die Werte von $u$ für $t = 0$ gegeben sind, so lassen sich aus der Differentialgleichung durch schrittweise Integration die Werte von $u$ für positive $t$ ableiten; will man aber dasselbe Verfahren

---

1715) Diese Bemerkung ist nach der Angabe von *Lacroix,* Traité 2 (1814), p. 643 von „mehreren Geometern" gemacht, von *Poisson*[1716]) zuerst veröffentlicht worden.

1716) J. Éc. polyt. cah. 13 (1806), p. 110; Bull. philomat. 1817, p. 183; J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 369; Mécanique 2, p. 352; chaleur p. 137. Vielfach reproduziert, z. B. von *Lacroix* an der eben genannten Stelle, von *Laplace,* Traité analytique des probabilités p. 62 (2. Aufl. 1814), von *Fourier,* Theorie Nr. 399 = Oeuvres 1, p. 465, von *A. de Morgan,* Differential and integral calculus, p. 723, 731, von *A. A. Cournot,* Théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 398. Was *D. F. Gregory,* Cambr. math. j. 1 (3) (1838), p. 127 auseinandersetzt ist weniger eine Lösung der Schwierigkeit als ihre Konstatierung.

1717) Théorie Nr. 400 = Oeuvres 1, p. 467.

auf den Fall anwenden, daß die Werte von $u$ für $x = 0$ gegeben sind, so reicht das allein nicht dazu aus, es müssen vielmehr auch noch die von $\frac{\partial u}{\partial x}$ gegeben sein. Man könne also überhaupt nicht behaupten, daß die Anzahl der in der allgemeinen Auflösung auftretenden willkürlichen Funktionen immer der Ordnung der Gleichung gleich sein müsse.

Aus der Übereinstimmung der Darstellung der Lösung durch bestimmte Integrale mit der durch Potenzreihen hat man vielfach geschlossen, daß die ersteren die allgemeine Lösung vorstellen, weil man überzeugt war, daß die letzteren es tun. So schließt auch noch *Cauchy* bei seinen ersten Untersuchungen[1718]. Da er aber bald an dem Beispiel von Funktionen wie $\exp(-x^2)$ bemerkte, daß alle Koeffizienten der Taylorschen Entwicklung einer Funktion Null sein können, ohne daß die Funktion selbst identisch Null ist, so erklärte er diesen Schluß selbst für unzulässig[1719]. *Poisson* will diesen Einwand nicht gelten lassen: er meint, man könne zwar für endliche $m$ behaupten, daß $x^m \exp(-x^2)$ für $x = 0$ zu Null werde, aber nicht für unendlich große $m$, und man könne also auch nicht behaupten, daß *alle* Koeffizienten der genannten Entwicklung von $\exp(-x^2)$ Null seien[1720]. *Fourier* dagegen betont[1721], daß es für die Entscheidung über die Allgemeinheit der Lösung durch bestimmte Integrale gar nicht darauf ankomme, ob sie sich in die Lösungen durch Potenzreihen überführen lassen, und welche Bewandtnis es mit diesen habe: die Ableitung jener Lösungen selbst zeige, daß man mit ihnen beliebig vorgeschriebenen Nebenbedingungen genügen könne. Cauchy kommt später[1722] nochmals auf diese Frage zurück: die Lösung der Schallgleichung durch

$$F_1(x + t) + F_2(x - t)$$

gibt, wenn $F_1$ und $F_2$ nur in einem endlichen Intervall von 0 verschieden sind, fortschreitende Wellen, die Lösung durch Potenzreihen „semble indiquer les vibrations stationaires“.

---

1718) Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 149 (von 1815).

1719) Eine Andeutung schon Bull. philomat. 1821, p. 151; dann 1822, p. 49; J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 551.

1720) Ib. 1822, p. 85. — Eine Unterscheidung der Reihenfolge der vorzunehmenden Grenzübergänge darf man bei *Poisson* hier so wenig wie an anderen Stellen suchen.

1721) Théorie Nr. 428, 6⁰ = Oeuvres 1, p. 528: „les objections qui avaient été proposées à ce sujet sont dénuées de tout fondement; il serait aujourd'hui superflu de les discuter.“

1722) C. R. 28 (1848), p. 279 = (1) 11, p. 122.

Später[1723]) zeigt *Poisson* auch noch, daß die Entwicklung der Lösung der Wärmeleitungsgleichung nach Exponentialfunktionen

$$u = \sum_n A_n \exp(\lambda_n^2 t + \lambda_n x) \tag{1272}$$

durch Entwicklung der einzelnen Glieder nach Potenzen von $t$ und Umordnung in die Form (1271) übergeht, wenn man

$$\sum_n A_n \exp \lambda_n x = F(x)$$

setzt. Dabei nimmt er weiter an, daß man eine willkürliche Funktion $F(x)$ in eine solche Reihe entwickeln könne.

Daß solche Argumentationen unter Umständen auf Paradoxien führen, hat bereits *A. A. Cournot* bemerkt: Wenn man die Lösung (1272), statt nach Potenzen von $t$, nach solchen von $x$ entwickelt, so erhält man zwar auch eine Reihe der Form (1270), aber die beiden in ihr auftretenden Funktionen

$$\varphi(t) = \sum A_n \exp(\lambda_n^2 t), \quad \psi(t) = \sum A_n \lambda_n \exp(\lambda_n^2 t)$$

können nicht als voneinander unabhängig angesehen werden, sondern die zweite geht aus der ersten durch Differentiation zum Index $1/2$ im Sinne von Liouville (Nr. 108) hervor.[1724]) Und wenn man die Lösung

$$u = \sum A_n \exp\left(\lambda_n x + \frac{t}{\lambda_n}\right) \tag{1273}$$

der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial t} = u$$

nach Potenzen von $t$ entwickelt, so lassen sich alle Koeffizienten aus dem ersten durch sukzessive Integrationen ableiten, ohne daß willkürliche Integrationskonstanten auf treten; man komme also so nicht auf die allgemeinste Lösung, die zwei willkürliche Funktionen enthalten müsse.[1725])

*Poisson* hat auch wiederholt[1726]) den folgenden Standpunkt ver-

1723) Mécanique 2, p. 353. Chaleur p. 138 entwickelt er nicht nach Potenzen von $t$ selbst, sondern von $t - h$; damit glaubt er (p. 134) den im Text erwähnten Bedenken betr. die Allgemeingültigkeit der Taylorschen Reihe zu entgehen.

1724) Théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 407.

1725) ib. p. 408.

1726) Bull. philomat. 1817, p. 180; 1822, p. 81; Paris mém. 1 (1816[18]), p. 83; 3 (1818[20]), p. 171; J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 370; Mécanique 2, p. 348; chaleur p. 139, 163, 363, 381. Chaleur p. 139 fügt er erläuternd bei: $x^m$ z. B. könne man durch

$$\left(\frac{\exp(\varepsilon x) - 1}{\varepsilon}\right)^m$$

treten: man könne die Entwicklungen nach Elementarlösungen auffassen als Entwicklungen nach den Potenzen einer Exponentialgröße (nicht notwendig mit ganzzahligen Exponenten); und da er die Meinung teilte, jede Funktion lasse sich nach Potenzen der unabhängigen Variabeln entwickeln, so schien ihm damit der Beweis für die Allgemeinheit der in jener Form auftretenden Lösungen erbracht. Das überträgt er dann ohne weiteres auf die Lösungen durch Integrale von Elementarlösungen[1727]). Nachher aber, veranlaßt durch seine Untersuchung über die Verwendbarkeit des Fourierschen Integrals für komplexe Werte des Arguments[1256]) schränkt er diese Behauptung doch ein: Er meint jetzt[1728]), die Reihen und Integrale von Elementarlösungen seien nur so weit brauchbar, als sie konvergierten. Z. B. könne man nicht behaupten, daß die Gleichung

$$(1273a) \qquad u = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty \mathfrak{Cof}\, \xi y \cos(\xi x - \xi\alpha)\,\varphi(\alpha)\, d\alpha\, d\xi$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\mathfrak{Sin}\,\xi y}{\xi} \cos(\xi x - \xi\alpha)\,\psi(\alpha)\, d\alpha\, d\xi$$

die allgemeine Lösung der Potentialgleichung vorstelle, da diese Integrale nur unter sehr engen Voraussetzungen über die Funktionen $\varphi$, $\psi$ konvergierten. Andererseits[1729]) dürfe man Ausdrücke wie

$$(1273b) \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\pi} e^{-a^2} f(x\cos\omega + 2a\sqrt{t}) \sin^{2n+1}\omega\, d\omega\, da$$

oder

$$(1273c) \qquad \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-\xi y}\cos(\xi x - \xi\alpha) f(\alpha)\, d\alpha\, d\xi = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{y f(\alpha)\, d\alpha}{(x-\alpha)^2 + y^2}$$

nicht als die allgemeinen Integrale der betr. Differentialgleichungen ansehen, obwohl sie je eine willkürliche Funktion enthalten: die erste gebe nur ein solches, das für $x = 0$ endlich bleibt, die zweite nur eines, das für $y = +\infty$ zu Null wird.

Später[1730]) gibt er die entsprechende Auseinandersetzung auch für

---

ersetzen und also mit Hilfe des Binomialtheorems in eine Reihe von Exponentialfunktionen entwickeln.

1727) Bull. philomat. 1822, p. 82.

1728) J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 461.

1729) ib. p. 248, 463.

1730) Mécanique 2, p. 357; chaleur p. 141 Die den Funktionen $\varphi$, $\psi$ auf-die Lösung der Wärmeleitungsgleichung durch das Laplacesche Integral (1236).

**76. Ableitung der Hauptlösung aus der Lösung durch ein bestimmtes Integral.** *S. D. Poisson*[1731]) führt in der Laplaceschen Form (1236) des Integrals der Differentialgleichung der linearen Wärmeleitung die unter dem Zeichen der willkürlichen Funktion stehende Verbindung der unabhängigen Variabeln selbst als Integrationsvariable

$$\alpha = x + 2a\sqrt{t}$$

ein; dadurch geht jene Form über in:

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\alpha)^2}{4t}\right) f(\alpha)\, d\alpha. \tag{1274}$$

Da hier die unabhängigen Variablen nicht mehr unter dem Zeichen der willkürlichen Funktion vorkommen, so kann ein derartiger Ausdruck der Differentialgleichung nur dadurch genügen, daß ihr der Faktor, mit dem die willkürliche Funktion multipliziert ist, hier also

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-\alpha)^2}{4t}\right) \tag{1275}$$

genügt, wie Poisson bald darauf[1732]) selbst bemerkt; und zwar hat er die Eigenschaft, sich für einen bestimmten Wert der einen Variablen, nämlich $t = 0$, und alle Werte der andern $x$, mit Ausnahme des einzigen $x = \alpha$, auf Null zu reduzieren, während er für diesen einen Wert unendlich bzw. unbestimmt wird. In der Tat kommt man von (1274) auf (1275), wenn man annimmt, die Funktion $f$ sei nur für einen einzigen Wert $\alpha$ von 0 verschieden, so daß man die Integration nur über die Umgebung dieses Punktes zu erstrecken braucht und deswegen den andern Faktor als konstant vor das Integralzeichen ziehen kann; dabei muß man übrigens der Funktion $f$ für diesen einen Argumentwert einen unendlich großen Wert zuschreiben, damit ihr Integral über ein unendlich kleines Intervall gleichwohl endlich bleiben kann. Eine derartige Lösung soll im folgenden mit einem von *F. Klein* in

---

zuerlegenden Beschränkungen sind hier nicht so eng wie im Falle der Potentialgleichung.

1731) Bull. philomat. 1815, p. 86.

1732) Paris mém. 1 (1816[18]), p. 151; Bull. philomat. 1822, p. 83 (hier Erörterungen darüber, ob (1275) als ein singuläres oder als ein partikuläres Integral aufzufassen sei; *Poisson* entscheidet sich für die letztere Alternative); J. Éc.. polyt. cah. 19 (1823), p. 24; chaleur p. 282. Ebenso *Fourier*, Théorie Nr. 374, 378 = Oeuvres 1, p. 427, 439.

Vorlesungen[1733]) gebrauchten Ausdruck als eine *Hauptlösung* der Differentialgleichung bezeichnet werden; insbesondere soll dieser Name für den Fall gebraucht werden, daß der Ausnahmepunkt zum Anfangspunkt der Abszissen gemacht ist, daß es sich also z. B. um die Funktion

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \tag{1276}$$

handelt.

Ein anderer Weg, der von der Elementarlösung direkt zur Hauptlösung führt, ist ebenfalls schon von *Fourier*[1734]) vorgezeichnet: das Integral der Elementarlösung nach dem Parameter, zwischen irgendwelchen Grenzen genommen, muß ebenfalls der Differentialgleichung genügen; und da es zwischen den Grenzen 0 und $\infty$ oder $-\infty$ und $+\infty$ genommen, für $t=0$ in ein divergentes Integral übergeht, sein Grenzwert für $\lim t = 0$ nur an einer Stelle unendlich, sonst überall Null ist, so liefert es dann eben die Hauptlösung. So wird für die Wärmeleitungsgleichung erhalten:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 t}\cos \xi x\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}; \tag{1277}$$

und diese Formel zeigt zugleich, in welchem Sinne die eben wiederholte Behauptung über den Grenzwert eines derartigen Integrals richtig ist.

**77. Ableitung der Lösung durch ein bestimmtes Integral aus der Hauptlösung.** Umgekehrt kann man, wenn die Hauptlösung $H(x,t)$ einer Differentialgleichung bekannt ist, aus ihr die allgemeine Lösung ableiten, indem man diese als Übereinanderlagerung der Resultate der verschiedenen Einzelstörungen auffaßt, die von den einzelnen Punkten der $x$-Achse ausgehen. Man erhält so eine allgemeine Lösung zunächst in der Gestalt:

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x-\alpha, t) f(\alpha)\, d\alpha. \tag{1278}$$

In den Fällen, mit welchen wir hier zu tun haben, ist die Hauptlösung eine homogene Funktion von $x$ und einer Potenz von $t$; eine einfache Substitution führt dann (1278) in die weitere Form:

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} t^\nu H(a t^\nu, t) f(x + a t^\nu)\, da \tag{1279}$$

über, in der das Produkt der beiden ersten Faktoren unter dem Inte-

1733) 1888/89; vgl. *A. Sommerfeld,* Math. Ann. 45 (1894), p. 263.

1734) Théorie Nr. 374 = Oeuvres 1, p. 432.

gralzeichen eine Funktion von $t$ allein ist. So erscheint bei *A. Cauchy*[1735]) das Integral der Potentialgleichung in den Formen:

$$(1280)\qquad u = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y f(\alpha)\, d\alpha}{y^2 + (x-\alpha)^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x+ay)\, da}{1+a^2};$$

bei *Fourier* das Integral der Gleichung der schwingenden Lamelle

$$(1281)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

zunächst in der Form[1736])

$$(1282)\qquad u = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left[\frac{(\alpha-x)^2}{4t} + \frac{\pi}{4}\right] f(\alpha)\, d\alpha,$$

dann[1737]) auch in der folgenden:

$$(1283)\qquad u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sin a^2 + \cos a^2) f(x + 2a\sqrt{t})\, da.$$

Läßt sich die Hauptlösung nur durch einen Grenzwert darstellen, so erscheint bei diesem Verfahren auch die allgemeine Lösung in der Gestalt eines solchen; so bei *A. Cauchy*[1738]) eine Lösung der Saitengleichung durch:

$$(1284)\qquad u = \lim_{k=0}\frac{1}{2\sqrt{\pi k}}\exp\left(\frac{t^2}{4k}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{(x-\alpha)^2}{4k}\right]\cos\frac{(x-\alpha)t}{2k} f(\alpha)\, d\alpha$$

$$= \lim_{k=0}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(\frac{t^2}{4k}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-a^2)\cos\frac{at}{\sqrt{k}} f(x+2a\sqrt{k})\, da.$$

---

1735) Paris mém prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 135 (von 1814). An dieser Stelle handelt es sich bei *Cauchy* allerdings zunächst nicht um die Integration der Potentialgleichung, sondern um die Auffassung des Fourierschen Integrals als Grenzformel (Nr. 54). Die Hauptlösung der Potentialgleichung

$$\int_0^\infty e^{-\xi y}\cos x\xi\, d\xi = \frac{y}{y^2+x^2}$$

ist ein Beispiel dafür, daß die Hauptlösung nicht immer die einfachste Lösung ist, die nur an einer Stelle unendlich wird. Diese würde sein $\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ und die Hauptlösung ist von dieser die Ableitung nach $y$.

1736) Bull. philomat. 1818, p. 131. *Fourier* sagt nicht, wie er für diesen Fall die Hauptlösung gefunden habe, sondern deutet nur p. 136 an, daß es darauf ankomme, zunächst die Hauptlösung zu finden.

1737) Théorie Nr. 406 = Oeuvres 1, p. 479. Ebenso bei *A. Cauchy,* Bull. philomat. 1821, p. 145.

1738) Bull. philomat. 1821, p. 148.

**78. Anpassung der Lösung durch ein bestimmtes Integral an gegebene Anfangsbedingungen.** Die in den Nummern 73, 74 besprochene Form der Lösung durch ein bestimmtes Integral läßt unmittelbar erkennen, auf welche Funktion von $x$ sie sich für $t = 0$ reduziert. Anders ist es mit der in Nr. 77 besprochenen. Sei wieder $E(\xi, t) \cos \xi x$ Elementarlösung der vorgelegten Differentialgleichung, so normiert, daß $E(\xi, 0) = 1$ ist; und es soll die in der Integralform

$$(1285) \qquad u = \int_0^\infty E(\xi, t) \cos x\xi \, \varphi(\xi)\, d\xi$$

auftretende willkürliche Funktion $\varphi$ des Parameters so bestimmt werden, daß sich diese Lösung für $t = 0$ auf eine (für positive Argumente) gegebene Funktion von $x$ reduziert, daß also

$$\int_0^\infty \cos x\xi \, \varphi(\xi)\, d\xi = f(x) \qquad (x > 0)$$

wird. Um die Auflösung dieser Integralgleichung zu umgehen, kann man damit beginnen, daß man den von der Zeit abhängigen Faktor der Elementarlösung durch ein Integral der Form

$$(1286) \qquad E(\xi, t) = \int_0^\infty \eta(\mu, t) \cos \mu\xi \, d\mu$$

ausdrückt[1739]); vertauscht man dann die Reihenfolge der Integrationen, so erhält man zunächst

$$(1287) \; u = \frac{1}{2} \int_0^\infty \eta(\mu, t) \int_0^\infty \varphi(\xi) \left[\cos(\mu\xi + x\xi) + \cos(\mu\xi - x\xi)\right] d\xi\, d\mu,$$

und das ist wegen der vorausgesetzten Gleichung (1285) gleich

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \eta(\mu, t) \left[f(\mu + x) + f(|\mu - x|)\right] d\mu,$$

1739) *A. Cauchy* benutzt (Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 152; von 1815) nicht diese Darstellung, sondern die Darstellung von $E(\xi, t)$, als Funktion von $\xi$ betrachtet, durch ein Fouriersches Doppelintegral, von der man auf (1286) kommt, indem man die eine Integration ausführt; seine Rechnung läßt sich leicht so umschreiben, daß nur von (1286) Gebrauch gemacht wird, und ich vermute nach seinen verschiedenen Andeutungen — vgl. namentlich die in Note 1252) erwähnten —, daß er ursprünglich selbst so gerechnet und erst, nachdem er auf diesem Wege auch seinerseits zu dem Fourierschen Integralsatz gelangt war, die Rechnung umgeschrieben hat. — Für die einfachsten in Betracht kommenden Fälle waren die Darstellungen der Form (1285) etwa 1810 bekannt; vgl. Nr. 71.

oder wenn man geeignete neue Integrationsvariablen einführt, gleich

$$(1288) \qquad \frac{1}{2}\int_0^\infty [\eta(|\alpha - x|, t) + \eta(\alpha + x, t)] f(\alpha)\, d\alpha,$$

womit die Aufgabe gelöst ist. Für die Potentialgleichung, für die $E(\xi, t) = \exp(-\xi t)$ ist, wird so erhalten

$$(1289) \qquad u = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{t}{(\alpha - x)^2 + t^2} + \frac{t}{(\alpha + x)^2 + t^2}\right] f(\alpha)\, d\alpha;$$

und die für (557) angestellte Überlegung zeigt, daß das in der Tat für $t = 0$ sich auf $f(x)$ reduziert.

In den einfachen Fällen, mit welchen man zunächst zu tun hat, kann man auch ohne Kenntnis der allgemeinen Reziprozitätssätze mit Hilfe der Formeln von Nr. 59 erkennen, daß zugleich mit der Gleichung (1286) die folgende besteht:

$$(1290) \qquad \eta(\mu, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty E(\xi, t) \cos \mu\xi\, d\xi.$$

Setzt man das in (1286) ein, so erhält man die Lösung der vorgelegten Differentialgleichung durch ein trigonometrisches Doppelintegral:

$$(1291) \qquad u = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty E(\xi, t) \cos x\xi \cos \alpha\xi f(\alpha)\, d\xi\, d\alpha$$

und aus ihr durch die Annahme $t = 0$ die Darstellung der willkürlichen Anfangsfunktion durch ein solches Integral unabhängig von anderen Betrachtungen.

Steht in (1285) an Stelle des Cosinus ein Sinus, so kann man entsprechend verfahren; man hat auch in diesem Falle eine Darstellung der Form (1286) (nicht etwa die entsprechende mit $\sin \mu\xi$) zu benutzen.

Umständlicher wird die Sache, wenn man statt der Darstellung (1286) nur eine der Form

$$(1292) \qquad E(\xi, t) = \int_0^\infty [\eta(\mu, t) \cos \mu\xi + \zeta(\mu, t) \sin \mu\xi]\, d\mu$$

hat. Man benutzt dann am bequemsten auch für $u$ den allgemeineren Ansatz

$$(1293) \qquad u = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\xi, t)\, [\varphi(\xi) \cos x\xi + \psi(\xi) \sin x\xi]\, d\xi$$

und unterwirft die Funktionen $\varphi$, $\psi$ neben der Bedingung

$$(1293\text{a})\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(\xi)\cos x\xi + \psi(\xi)\sin x\xi]\, d\xi = f(x)$$

noch der weiteren

$$(1293\text{b})\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [-\varphi(\xi)\sin x\xi + \psi(\xi)\cos x\xi]\, d\xi = 0.$$

Damit erhält man:

$$(1294)\quad u = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\Big[\eta(\mu,\, t)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\varphi(\xi)\cos(x\xi+\mu\xi) + \psi(\xi)\sin(x\xi+\mu\xi)$$
$$+ \varphi(\xi)\cos(x\xi-\mu\xi) + \psi(\xi)\sin(x\xi-\mu\xi)]\,d\xi$$
$$+ \zeta(\mu, t)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\varphi(\xi)\sin(x\xi+\mu\xi) - \psi(\xi)\cos(x\xi+\mu\xi)$$
$$+ \varphi(\xi)\sin(x\xi-\mu\xi) - \psi(\xi)\cos(x\xi-\mu\xi)]\,d\xi\Big]\,d\mu$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\eta(\mu, t)\,[f(x+\mu)+f(x-\mu)]\,d\mu.$$

Auf ähnlichem Wege ist *A. Cauchy*, wie er selbst berichtet[1740]), zuerst zur Integration der Wellengleichung (1222) gelangt, für die

$$(1295)\qquad E(\xi, t) \equiv \cos\left(t\sqrt{\xi}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty}\cos\left(\mu^2 + \frac{t^2\xi}{4\mu^2} - \frac{\pi}{4}\right)d\mu$$

ist. Nur führt er die hier mit $\psi$ bezeichnete Funktion nicht ein und benutzt auch nicht die Relation (1293b); infolgedessen ist er genötigt, die Glieder mit $\sin(x\xi \pm \mu\xi)$, die bei ihm nicht alle von selbst wegfallen, noch mit Hilfe der Relation (852) so umzuformen, daß auch in ihnen statt des Sinus ein Cosinus auftritt, und dann, um beide Teile zusammenziehen zu können, in dem andern von der Relation

$$(1296)\qquad \cos\left(\mu^2 - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\sin\left(\mu^2\nu^2 - \frac{\pi}{4}\right)\frac{d\nu}{1-\nu^4}$$

Gebrauch zu machen.[1741])

---

1740) ib. p. 295; Ann. de math. 17 (1827), p. 110.

1741) Bei Cauchy ist die Sache dadurch noch etwas umständlicher, daß er diese letzte Umformung erst nach Einführung einer neuen Integrationsvariablen vornimmt.

Um die Laplacesche Lösung der Wärmeleitungsgleichung den Nebenbedingungen

$$u = \varphi(t) \text{ für } x = 0, \quad u = f(x) \text{ für } t = 0, \quad x > 0$$

anzupassen, führt *W. Thomson Lord Kelvin*[1742]) für $t = 0$, $x < 0$ eine Funktion $u = \psi(x)$ ein, die zusammen mit $f(x)$ die erste Nebenbedingung erfüllen soll. Die Lösung erscheint dann in der Form

$$(1297)\quad u = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Bigg[\int\limits_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} \exp(-a^2) f(x + 2a\sqrt{t})\, da + \int\limits_{\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt{t}}} \exp(-a^2)\psi(x + 2a\sqrt{t})\, da\Bigg].$$

Wird

$$\psi(-x) = F(x) - f(x)$$

gesetzt, so ergibt sich infolge der ersten Nebenbedingung die Funktion $F$ durch Auflösung der Gleichung:

$$(1298)\qquad \sqrt{\pi} \cdot \varphi(t) = \int\limits_0^{\infty} e^{-a^2} \cdot F(2a\sqrt{t})\, da.$$

Dazu entwickelt Thomson $\varphi(t)$ in eine trigonometrische Reihe und stellt dieselbe durch Benützung der Gleichung

$$(1299)\qquad {\sin \atop \cos}\{2mt\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-a^2} {\mathfrak{Sin} \atop \mathfrak{Cos}}\{2a\sqrt{mt}\} {\sin \atop \cos}\{2a\sqrt{mt}\}\, da,$$

die er aus

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi} \quad \text{für} \quad \xi = a + \sqrt{\pm 2mi}$$

erhält, durch ein Integral derselben Form wie das auf der rechten Seite von (1298) dar. Durch Vergleich bekommt er

$$F(x) = \sum \left(A_n \mathfrak{Cos}\,(x\sqrt{m}) \cos(x\sqrt{m}) + B_n \mathfrak{Sin}\,(x\sqrt{m}) \sin(x\sqrt{m})\right), m = \frac{\pi n}{p}$$

und durch Einsetzen der Integrale für die Koeffizienten und Übergang zu $p = \infty$

$$(1300)\quad F(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\! \int [e^{x\sqrt{\tau}} \cos(x\sqrt{\tau} - 2\theta\tau) + e^{-x\sqrt{\tau}} \cos(x\sqrt{\tau} + 2\theta\tau)]\varphi(\tau)\, d\tau\, d\theta.$$

1742) Cambr. math. j. $3_3$ (1842), p. 173 = papers 1, p. 11; ib. $4_2$ (1843), p. 70 = 1, p. 43 finden sich Erörterungen darüber, daß die Schlußformel auch dann noch richtig ist, wenn die dabei benützten Funktionen „impossible" sind. Verallgemeinerung für den Fall, daß die 3. Randbedingung zu erfüllen ist, ib. $3_5$ (1843), p. 209.

**79. Integration durch trigonometrische Integrale.** Die Integration der Differentialgleichung der linearen Wärmeleitung durch trigonometrische Integrale tritt bei *J. J. Fourier*[1743]) zunächst in der Form auf, daß der in Nr. 52 besprochene Grenzübergang an der Lösung durch eine trigonometrische Reihe ausgeführt wird; je nachdem dabei von einer Cosinus- oder von einer Sinusreihe ausgegangen wird, erscheint die eine oder die andere der beiden Formen:

$$u = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\xi^2 t} \cos x\xi \cos \alpha\xi f(\alpha)\, d\alpha\, d\xi \tag{1301}$$

und:

$$u = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\xi^2 t} \sin x\xi \sin \alpha\xi f(\alpha)\, d\alpha\, d\xi. \tag{1302}$$

*A. Cauchy*[1744]) gibt, zunächst ohne jede Andeutung, wie er dazu gekommen ist, die Integration der sog. Laplaceschen Differentialgleichung durch eine Summe von vier Integralen, von denen eines ist:

$$u = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\xi y} \cos \xi x \cos \xi\alpha f(\alpha)\, d\alpha\, d\xi, \tag{1303}$$

während die drei andern aus ihm dadurch hervorgehen, daß man $y$ mit $-y$ oder die Cosinus mit Sinus vertauscht oder beide Ver-

1743) Paris mém. 4 (1819/20 [24]) (Preisschrift von 1811), p. 490, 496; Théorie de la chaleur Nr. 347, 353, 397 = Oeuvres 1, p. 393, 399, 463. Die Formel mit Cosinus und Sinus findet sich erst in der Théorie, Nr. 354 = Oeuvres 1, p. 401, vgl. Note 504). Nachträglich (p. 170, von 1827) gibt er noch die Erläuterung: eine beliebige Funktion von $x$ und $t$ kann durch das Integral

$$\int_0^\infty f(\xi, t) \cos \xi x\, d\xi$$

dargestellt werden; soll sie der Differentialgleichung (1175) genügen, so muß $f$ die gewöhnliche Differentialgleichung $\frac{d^2 f}{dt^2} + \xi f = 0$ erfüllen. Fourier hat auch noch eine 2. Form des Integrals der Gleichung der Wärmeleitung; er erhält es aus der Reihenform (1270), indem er die einzelnen Glieder durch bestimmte Integrale ausdrückt und dann unter dem Zeichen summiert. Vgl. Note 1760.

1744) Paris mém. prés. 1 (1827) (von 1815) = Oeuvres (1) 1, p. 21; p. 146 zeigt er durch Entwicklung nach Potenzen von $y$, daß der angegebene Ausdruck mit demjenigen identisch ist, den man durch Anwendung der Methode der unbestimmten Koeffizienten erhält; und dieser habe „toute la généralité désirable". *Fourier* dagegen legt Wert darauf, daß man die Allgemeinheit der Lösung durch sein Integral, ohne auf irgendwelche Reihenentwicklung zurückzugehen, aus ihr selbst beweisen könne, da man imstande sei, sie beliebig gegebenen Anfangsbedingungen anzupassen (Bull. philomat. 1818, p. 136).

tauschungen zugleich vornimmt. Ähnlich integriert er weiterhin[1745]) die Differentialgleichung der Wasserwellen:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1304}$$

durch eine Summe von acht Bestandteilen, von denen der eine ist:

$$u = \int_0^\infty \int_0^\infty \cos(t\sqrt{\xi}) \cos \xi x \cos \xi \alpha f(\alpha)\, d\alpha\, d\xi, \tag{1305}$$

während die übrigen aus ihm teils durch die eben erwähnten Vertauschungen, teils dadurch hervorgehen, daß man die trigonometrischen Funktionen der Zeit durch Exponentialfunktionen ersetzt.

Dann stellt *Fourier*[1746]) die drei Integrale der Gleichungen der Wärmeleitung (1175), der Wasserwellen (1299) und der schwingenden Lamelle:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \tag{1306}$$

nebeneinander:

$$u = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\xi^2 t) \cos(\xi x - \xi \alpha) f(\alpha)\, d\alpha\, d\xi, \tag{1307}$$

$$u = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t\sqrt{\xi}) \cos(\xi x - \xi \alpha) f(\alpha)\, d\alpha\, d\xi, \tag{1308}$$

$$u = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{-\infty} \cos(\xi^2 t) \cos(\xi x - \xi \alpha) f(\alpha)\, d\alpha\, d\xi. \tag{1309}$$

Auch exponiert er[1747]) das einzuschlagende Verfahren allgemein an der Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + c\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \cdots; \tag{1310}$$

er schreibt die Elementarlösung in der Form:

$$u = \exp(-mt) \cos \xi x$$

mit

$$m = \xi^2 - b\xi^4 + c\xi^6 - + \cdots$$

setzt in ihr $x - \alpha$ für $x$ und integriert sie zuerst nach dem Parameter $\xi$, hierauf, nach Multiplikation mit einer beliebigen Funktion

1745) ib. p. 56; dazu die Erläuterungen p. 149.

1746) Bull. philomat. 1818, p. 132. Bei *Fourier* ist die Reihenfolge der Integrationen die umgekehrte.

1747) Théorie Nr. 404, p. 4 = Oeuvres 1, p. 474.

der Integrationsvariablen $\alpha$, auch noch nach dieser. Daran schließt er noch die Bemerkung[1748]), daß man für die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

zwei Elementarlösungen

$$u = \cos \xi^2 t \cos \xi x, \quad u = \sin \xi^2 t \sin \xi x$$

ansetzen könne, und daß infolgedessen auch die allgemeine Lösung sich als Summe zweier Doppelintegrale darstelle, wobei dann die Anfangsbedingungen

$$u = \varphi(t), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \psi(t) \quad \text{für} \quad t = 0$$

erfüllt werden können.

Später erscheint die Sache wohl auch in der Form dargestellt, daß zuerst in die Elementarlösung, mit Rücksicht auf die Willkürlichkeit des Anfangspunkts der Koordinaten, ein zweiter Parameter $\alpha$ eingeführt wird, indem man $x$ durch $x - \alpha$ ersetzt; dann wird mit einer willkürlichen Funktion von $\alpha$[1749]) multipliziert und nach $\alpha$ und nach $\xi$ integriert; so bei *J. M. C. Duhamel*[1750]) und bei *A. A. Cournot.*[1751])

*J. M. C. Duhamel*[1752]) erhält durch Integration der Elementarlösungen für

$$(1311) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \theta$$

die Lösung:

$$(1312) \qquad \theta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \cos\left(t\sqrt{1+\xi^2}\right) \cdot \cos(\xi x - \xi\alpha)\, \chi(\alpha)\, d\alpha\, d\xi$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{\sin\left(t\sqrt{1+\xi^2}\right)}{1+\xi^2} \cdot \cos(\xi x - \xi\alpha)\, \chi_1(\alpha)\, d\alpha\, d\xi.$$

*G. G. Stokes*[1753]) integriert die Differentialgleichung (1175) unter den Bedingungen: $u = 0$ für $t = 0$, $u = 1$ für $x = 0$, um ohne weiteres unter dem Integralzeichen differentiieren zu können, durch die

---

1748) Nr. 405, p. 477.

1749) Warum nicht auch von $\xi$?, muß man bei diesem Ausgangspunkt wohl fragen.

1750) Cours d'analyse 2, Paris 1840, p. 182.

1751) Théorie des fonctions, 2, Paris 1841, p. 425.

1752) J. de math. 14 (1849), p. 65 von 1839.

1753) Papers 3 p. 130. Der Übergang von der Lösung der Wärmeleitungsgleichung durch ein Fouriersches Integral zur Laplaceschen Form auch bei *Cournot,* Théorie 2, p. 426.

Summe zweier trigonometrischer Integrale:

$$(1313)\quad u = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty [\cos x\xi \cos \xi\alpha\,\varphi(\alpha, t) + \sin x\xi \sin \xi\alpha\,\psi(\alpha, t)]\,d\alpha\,d\xi.$$

Die Differentialgleichung verlangt:

$$\varphi = \varphi(\alpha)\exp(-\alpha^2 t),\quad \psi = \psi(\alpha)\exp(-\alpha^2 t),$$

die erste Grenzbedingung

$$\psi(\alpha) = -\varphi(\alpha);$$

das entstehende Integral kann in die Laplacesche Form übergeführt werden, aus der hervorgeht, daß der 2. Bedingung nur durch $\varphi(\alpha) = 1$ genügt wird. Aus der so erhaltenen Lösung leitet er dann den Fall, daß die 2. Bedingung durch $u = f(t)$ ersetzt wird dadurch ab, daß er mit $f(\tau)d\tau$ multipliziert und $t$ durch $t - \tau$ ersetzt und nach $\tau$ von $-\infty$ bis $t$ integriert.

*A. Cauchy*[1754]) stellt die Integration linearer Differentialgleichungen durch trigonometrische Integrale in symbolischer Form dar. Er zeigt zunächst: wenn $F$ eine ganze Funktion des Differentialssymbols $D$ und des Symbols $\Delta$ der endlichen Differenzen bedeutet, so ist:

$$(1314)\quad F(D, \Delta)f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\xi(x-\alpha)i}F(\xi i, e^{\xi i} - 1)f(\alpha)\,d\alpha\,d\xi.$$

Das veranlaßt ihn, auch für den Fall, daß $\varphi$ keine ganze Funktion mehr vorstellt, mit $\varphi(\xi)\overline{f(x)}$ das Integral

$$(1315)\qquad u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\xi(x-\alpha)i}\varphi(\xi)f(\alpha)\,d\alpha\,d\xi$$

zu bezeichnen[1755]). Ist $\varphi$ der Quotient zweier ganzer Funktionen $\frac{\mathfrak{f}}{F}$, so genügt diese Funktion $u$ der Gleichung $F(D)u = \mathfrak{f}(D)f(x)$. Cauchy zeigt ferner[1756]), daß die so definierte Funktionaloperation den Gesetzen der Assoziation und Distribution genügt, und daß namentlich die Gleichung gilt:

$$\varphi(\xi)\,\overline{\exp(axi)} = \exp(axi)\,\varphi(a).$$

1754) Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 201. Vgl. auch II A 11, *Pincherle*, Nr. 6, 9, p. 769, 773. Die an der letztgenannten Stelle erwähnten englischen Untersuchungen sind also zum großen Teil schon hier von Cauchy vorweggenommen.

1755) p. 204. Cauchy hat $\alpha$ als Symbol; im Text ist dafür $\xi$ benutzt, um dem $\alpha$ dieselbe Bedeutung lassen zu können, wie sonst überall in diesem Artikel.

1756) p. 209.

Das erweitert er dann auf Funktionen mehrerer Variablen[1757]); damit gelingt ihm die Aufstellung partikulärer Lösungen von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen mit zweitem Glied, und die Reduktion der Integration von solchen Gleichungen höherer Ordnung auf die sukzessive Integration mehrerer Gleichungen niedrigerer Ordnung, für den Fall, daß die linke Seite der Gleichung sich symbolisch in Faktoren zerlegen läßt.

*G. Plana* kommt zu Darstellungen der Lösungen partieller Differentialgleichungen durch Fouriersche Integrale, indem er in ihren Entwicklungen in Potenzreihen die einzelnen Glieder durch solche Integrale darstellt, sie durch partielle Integrationen umformt und dann die Reihenfolge von Summation und Integration vertauscht; so erhält er die Lösung von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u$$

als Summe zweier Glieder, von denen eines ist[1758]):

$$(1316) \qquad u = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\xi x - \xi \alpha - \frac{y}{\xi}\right) f(\alpha)\, d\alpha\, d\xi$$

und die von

$$(1317) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u$$

durch eine Summe zweier Glieder, von denen eines ist[1759]):

$$(1318) \qquad u = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{Cos}\left(t\sqrt{1-\xi^2}\right) \cos(\xi x - \xi \alpha) f(\alpha)\, d\alpha.$$

Dasselbe Verfahren wendet auch *Fourier* selbst an[1760]), um eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung zu erhalten, die sich für $x = 0$ samt ihrer ersten Ableitung nach $x$ auf gegebene Funktionen von $t$ redu-

1757) p. 226; ein Nachtrag p. 236 führt die symbolische Behandlung der einfachsten Fälle durch, p. 248 auch für Differenzengleichungen.

1758) Torino mem. 25 (1820), p. 144. Er untersucht nicht, ob dieses Integral überhaupt einen Sinn hat.

1759) ib. p. 145. Er bemerkt selbst, daß das Argument des $\mathfrak{Cos}$ nur in einem Teile des Integrationsgebietes reell ist, so daß eine Zerlegung desselben erforderlich würde, und zieht daher die Methode von Poisson vor.

1760) Théorie Nr. 413 = Oeuvres 1, p. 490. *G. Darboux* zeigt in einer Note p. 492, wie man zu dieser Lösung von einer geeignet gewählten Form der Elementarlösung aus gelangen kann; in etwas anderer Form *W. Thomson* Lord *Kelvin*, Cambr. math. j. 3 (5) (1843), p. 208 = papers 1, p. 18.

ziert; er findet so eine Summe zweier Glieder, von denen eines ist:

$$u = \frac{4}{\pi} \iint \{\cos(2\tau^2 t - 2\tau^2\theta) \operatorname{Cos} \tau x \cos \tau x \\ - \sin(2\tau^2 t - 2\tau^2\theta) \operatorname{Sin} \tau x \sin \tau x\} f(\theta) d\theta dt.$$

**80. Ableitung der Hauptlösung einer partiellen Differentialgleichung aus der Darstellung ihrer allgemeinen Lösung durch ein Fouriersches Integral.** Die „Hauptlösung" kann aus der Darstellung der allgemeinen Lösung durch ein Fouriersches Integral:

$$(1319) \qquad u = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t, \xi) \cos(\xi x - \xi \alpha) f(\alpha) d\alpha d\xi$$

erhalten werden, wenn man in dieser die Integrationsvariable $\alpha$ überall, außer unter dem Zeichen $f$, durch den ausgezeichneten Wert von $x$, hier also durch 0 ersetzt; das Doppelintegral zerfällt dann in das Produkt zweier einfachen Integrale; wird in Ergänzung der bereits eingeführten Voraussetzungen dem auf $\alpha$ beziehenden der Wert 1 zugeschrieben, so erhält man die Hauptlösung dargestellt durch das einfache Integral:

$$(1320) \qquad H = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(t, \xi) \cos \xi x d\xi.$$

In den Fällen, mit welchen wir hier zu tun haben, enthält die Funktion $\varphi$ ihre beiden Argumente nur in einer Verbindung $\xi^{\frac{1}{m}} t$; dann läßt sich die Hauptlösung schreiben:

$$(1321) \qquad H = \frac{1}{\pi t^m} \int_0^\infty \bar{\varphi}(\xi) \cos(h\xi) d\xi,$$

erscheint also als Produkt einer Potenz von $t$ in eine Funktion der einen Variablen

$$h = \frac{x}{t^m}.$$

Ist die zu der Funktion $\bar{\varphi}$ reziproke Funktion bekannt, so erhält man die Hauptlösung in elementarer Form. Bei dem ersten Beispiel einer derartigen Bestimmung einer Hauptlösung, nämlich derjenigen von (1299) durch

$$(1322) \qquad H = \frac{1}{x t^2} \int_0^\infty \cos \sqrt{\xi} \cos h\xi d\xi, \qquad h = \frac{x}{t^2}$$

bei *A. Cauchy*[1761]), ist das allerdings nicht der Fall.

1761) Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 61 (von 1814).

Bei Gleichungen vom hyperbolischen Typus existiert keine Hauptlösung: das Integral, das man durch das oben besprochene Verfahren erhalten würde, divergiert. Gleichwohl ist hie und da von ihm Gebrauch gemacht worden, so z. B. von einem *Anonymus*[1761a]) für die Gleichung der Saitenschwingungen. Begnügt man sich mit der Annahme, die gegebene Funktion sei nur in einem kleinen Intervall, etwa von 0 bis $\alpha$, von Null verschieden, und zwar $= 1$, so kann man z. B. mit *Navier*[1762]) in dem Integral der Gleichung der Saitenschwingungen (bzw. der Longitudinalschwingungen eines Stabes):

$$(1323)\qquad u = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\alpha \cos\xi t \cos\xi x \cos\xi\alpha\, d\xi\, d\alpha$$

zunächst die Integration nach $\alpha$ ausführen, so daß man

$$(1324)\qquad u = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\xi t \cos\xi x \frac{\sin\xi\alpha}{\xi} d\xi$$

erhält. Das läßt sich dann wieder als die Summe von vier Integralen der Form (1320) darstellen und daraus u. a. ablesen, daß für jedes $x > \alpha$ das $u$ von $t = x - \alpha$ bis $t = x$ gleich $\frac{1}{2}$, vorher und nachher aber $= 0$ ist.

**81. Übergang von der Lösung durch ein trigonometrisches Integral zur Lösung durch ein einfaches Integral.** Die Darstellung der Lösung einer partiellen Differentialgleichung durch ein Fouriersches Integral läßt sich allgemein, d. h. unabhängig von irgendwelcher Spezialisierung der Anfangsbedingungen, auf ein einfaches Integral reduzieren, wenn es gelingt, die Integration nach $\xi$ allgemein auszuführen, d. h. das Integral

$$(1325)\qquad \int_0^\infty E(\xi, t)\cos(\xi x - \xi\alpha)\, d\xi$$

auszuwerten. Dieses Integral unterscheidet sich aber von der Hauptlösung (Nr. 80) nur dadurch, daß $x - \alpha$ an Stelle von $x$ steht. Es ist also die hier in Rede stehende Reduktion dann und nur dann möglich, wenn eine Hauptlösung existiert und sich durch elementare Funktionen ausdrücken läßt. Das hat bereits *Fourier* erkannt, wie aus seinen Andeutungen[1763]) zu schließen ist.

1761a) Cambr. math. j. 3 (6) (1843), p, 257.
1762) Bull. philomat. 1825, p. 181.
1763) Bull. philomat. 1818, p. 132, 136.

Hierher gehört die Zurückführung des Integrals (1273 a) der Potentialgleichung auf

$$(1326)\qquad u = -\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\alpha)\,d\alpha}{y^2+(x-\alpha)^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-ay)\,\frac{da}{1+a^2}$$

durch *A. Cauchy*[1764]); die des Integrals der Wärmeleitungsgleichung (1301) auf

$$(1327)\qquad u = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(\alpha-x)^2}{4t}\right)f(\alpha)\,d\alpha$$

und weiter auf die Laplacesche Form (1236) durch *G. Plana*[1765]) und *J. Fourier*[1766]); die des Integrals (1309) der Gleichung der schwingenden Lamelle auf:

$$(1328)\qquad u = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{(x-\alpha)^2}{4t}\right\}f(\alpha)\,d\alpha$$

$$(1329)\qquad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\{\sin a^2+\cos a^2\}\,f(x+2a\sqrt{t})\,da$$

durch *Fourier*[1767]) und *Cauchy*[1768]).

Andererseits läßt sich die Lösung durch ein Fouriersches Integral auch dann auf ein einfaches Integral reduzieren, wenn es gelingt, die Integration nach $\alpha$ elementar auszuführen, m. a. W. die zu der gegebenen Anfangsfunktion reziproke Funktion mit Hilfe der Formeln von Nr. 59 durch elementare Funktionen auszudrücken. So gibt *Fourier*[1769]) die Lösung der Wärmeleitungsgleichung unter der Anfangs-

---

1764) Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 22, 154 (von 1815). Auch Cauchy bemerkt, daß das Element des Integrals (1320) selbst der Differentialgleichung genügt.

1765) Torino mem. 25 (1820), p. 143.

1766) Théorie de la chaleur Nr. 398 = Oeuvres 1, p. 464, reproduziert von *A. A. Cournot,* Théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 426. *Poisson* (J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 29) führt umgekehrt die Laplacesche Form des Integrals in die Fouriersche über; später (chaleur p. 298) hat er auch die Transformation der letzteren in die erstere.

1767) Théorie Nr. 406 = Oeuvres 1, p. 479; ohne Beweis bereits Bull. philomat. 1818, p. 131 = Oeuvres 2, p. 260; reproduziert von *J. M. C. Duhamel,* Cours d'analyse 2, Paris 1840, p. 189 und von *A. A. Cournot,* Théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 431.

1768) Bull. philomat. 1821, p. 145.

1769) Paris mém. 4 (1819/20[24]) (Preisschrift von 1811), p. 491; Théorie Nr. 349 = Oeuvres 1, p. 395.

bedingung

$$u = \exp |x|$$

durch

$$(1330)\qquad u = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \exp(-\xi^2 t)\frac{\cos x\xi}{1+\xi^2}d\xi.$$

**82. Übergang von der Lösung durch ein trigonometrisches Integral zu der von Integralzeichen freien Form der Lösung.** Ein solcher Übergang ist natürlich nur dann möglich, wenn sich die allgemeine Lösung überhaupt frei von Integralzeichen darstellen läßt. So ersetzt *A. Cauchy*[1770]) in der Lösung der Gleichung der Saitenschwingungen

$$(1331)\qquad u = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty} \cos \xi t \cos(\xi x - \xi\alpha) f(\alpha)\, d\alpha\, d\xi$$

das Produkt trigonometrischer Funktionen durch eine Summe von solchen und wendet dann auf jeden Teil den Fourierschen Integralsatz selbst wieder an; so kommt er auf die d'Alembert-Eulersche Form der Lösung zurück.

**83. Darstellung der Integrale durch die Formeln der Residuentheorie.** *A. Cauchy* hat zunächst[1771]) das den Nebenbedingungen

$$\frac{d^\nu y}{dt^\nu} = Y_\nu \text{ für } t = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

genügende Integral der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(1332)\qquad A_0 y + A_1\frac{dy}{dt} + A_2\frac{d^2y}{dt^2} + \cdots + A_n\frac{d^ny}{dt^n} = 0$$

auf die Form gebracht

$$(1333)\qquad y = \sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{F(Y) - F(\theta_\nu)}{Y - \theta_\nu}\,\frac{e^{\theta_\nu t}}{F'(\theta_\nu)},$$

---

1770) Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 179; reproduziert von *A. A. Cournot*, Théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 429.

1771) J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 548, ausführlicher p. 583. Entsprechend für ein System von Differentialgleichungen Paris C. R. 8 (1839), p. 827 = Exerc. d'analyse 1 (1840), p. 53 = Oeuvres (1) 4, p. 369. Cauchy gibt (J. Éc. polyt. cah. 19, p. 584 auch einen ähnlichen Ausdruck für die Integrale von Gleichungen mit zweitem Glied. Wegen der von ihm ebenfalls behandelten Gleichungen der Form

$$\sum_{\nu=0}^{n}\frac{A_\nu}{(1+t)^{n-\nu}}\frac{d^\nu y}{dt^\nu} = 0$$

vgl. man Note 1776).

in der $F(\theta)$ die Hilfsfunktion

$$F(\theta) = A_0 + A_1\theta + A_2\theta^2 + \cdots + A_n\theta^n \tag{1334}$$

bedeutet, die Summe über alle Wurzeln der Gleichung $F(\theta) = 0$ zu erstrecken ist und nach Ausführung der Division die Exponenten von $Y$ durch die entsprechenden Indizes zu ersetzen sind. Das läßt sich als eine Residuenformel auffassen und bei geeigneter Wahl der reellen Größe $\Theta$ durch das bestimmte Integral

$$y = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(Y) - F(\Theta + \theta i)}{Y - (\Theta + \theta i)} \frac{\exp(\Theta + \theta i)t}{F'(\Theta + \theta i)} d\theta \tag{1335}$$

ersetzen.

Von da gelangt er dann[1772] zu einer entsprechenden Darstellung des den Anfangsbedingungen

$$\frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu} = f_\nu(x, y, \ldots) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

genügenden Integrals der partiellen Differentialgleichung

$$\nabla_0 u + \nabla_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \cdots + \nabla_m \frac{\partial^m u}{\partial t^m} = 0, \tag{1336}$$

in der die $\nabla$ Funktionen der auf die $m$ übrigen Variabeln sich beziehenden Differentialsymbole $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \ldots$ bedeuten. Er stellt diese Lösung zunächst durch eine Summe von trigonometrischen Integralen (in der von ihm angegebenen komplexen Form) dar:

$$u = \frac{1}{(2\pi)^m} \sum_{\nu=0}^{n-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} {}^{(2m)} T_\nu(t, \xi, \eta, \ldots) f_\nu(\xi, \eta, \ldots) \tag{1337}$$

$$\cdot \exp\left[\xi i(x - \alpha) + \eta i(y - \beta) + \cdots\right] d\alpha\, d\beta \ldots d\xi\, d\eta \ldots;$$

eine derartige Summe genügt der vorgelegten Differentialgleichung, wenn die Funktion

$$S = T_0 + T_1 v + \cdots + T_{n-1} v^{n-1} \tag{1338}$$

als Funktion von $t$, für beliebige $v$, derjenigen gewöhnlichen Differentialgleichung genügt, deren Koeffizienten $A_\nu$ dadurch aus den $\nabla_\nu$ hervorgehen, daß man in diesen die symbolischen Potenzen der Differentialsymbole durch die wirklichen von bzw. $(\alpha i), (\beta i), \ldots$ ersetzt.

---

1772) J. Éc. polyt. cah. 19, p. 544; Paris mém. 22 (1850) (von 1824) = Oeuvres (1) 2, p. 220. An letzterer Stelle bespricht er p. 224 mehrere Fälle, in welchen die Funktion $F$ reduzibel ist, so daß man die Integration der vorgelegten Gleichung auf die von zwei einfacheren Gleichungen zurückführen kann.

Und wenn diese Funktion den Anfangsbedingungen

$$\frac{d^\nu S}{dt^\nu} = v^\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

genügt, so genügt $u$ den Anfangsbedingungen

$$\frac{\partial^\nu u}{\partial t^\nu} = f_\nu(x, y, \ldots) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Cauchy gibt dann noch die Vereinfachungen an, die eintreten, wenn die Gleichung $F = 0$ eine reine Gleichung ist.[1773])

In einer derselben Zeit angehörigen, aber erst später veröffentlichten Abhandlung geht Cauchy davon aus, daß das Integral

$$(1339) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\Theta + i\theta) \exp(\Theta + i\theta) t\, d\theta,$$

wenn $\Phi$ eine ganze Funktion bezeichnet, zwar an und für sich unbestimmt ist, daß man aber übereinstimmend den Wert 0 erhält, wenn man unter dem Integralzeichen erst noch einen Konvergenzfaktor $\exp(-\delta|y|)$ oder $\exp(-\delta y^2)$ oder $(1 + \delta y^2)^{-1}$ hinzufügt und dann zu $\delta = 0$ übergeht.[1774]) Infolgedessen schreibt er auch dem Integral (1293) selbst den Wert 0 zu und schließt daraus, daß der Differentialgleichung (1290) durch

$$(1340) \qquad u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\Theta + i\theta)}{F(\Theta + i\theta)} \exp(\Theta + i\theta) t\, d\theta$$

genügt wird, wenn $F$ die durch (1288) definierte Funktion und $\varphi$ irgendeine ganze Funktion bedeutet. Wird für $\varphi$ [was auch ausreicht] eine ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades genommen, so führt die Anwendung der Residuensätze auf die Form (1289) der Lösung zurück. Nachträglich[1775]) zeigt er noch, daß man zu demselben Resultat auch kommen kann, indem man mit der Zerlegung von $F\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ in Linearfaktoren beginnt.

Nachher[1776]) stellt Cauchy diese Resultate mit der inzwischen (909) von ihm eingeführten Bezeichnung der Residuentheorie dar. Die Glei-

1773) J. Éc. polyt. cah. 19, p. 553.

1774) Paris mém. 22 (1850) (von 1824) = Oeuvres (1) 2, p. 207. Einzelnes über den Entwicklungsgang seiner Ideen gibt Cauchy selbst Paris C. R. 14 (1842), p. 392 = Oeuvres (1) 6, p. 404.

1775) p 216.

1776) Exerc. de math. 1 (1826) = Oeuvres (2) 6, p. 252. ib. p. 316 analoge Formeln für Gleichungen der in Note 1771) genannten Form.

chung (1287) schreibt sich dann einfach

$$y = \mathbf{E} \frac{\varphi(r) \exp rt}{((F(r)))};$$

und zwar gilt das auch, wenn die Gleichung $F(r) = 0$ mehrfache Wurzeln hat. Die Aufgabe, die Funktion $\varphi$ so zu bestimmen, daß $y$ und seine Ableitungen bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ einschl. für $t = 0$ die Werte $1, \eta, \eta^2, \ldots, \eta^{n-1}$ annehmen, wird dann durch

$$\varphi(r) = \frac{F(r) - F(\eta)}{r - \eta}$$

gelöst[1777]); und dieselbe Formel löst auch die allgemeinere Aufgabe, $\varphi$ so zu bestimmen, daß $y$ und seine Ableitungen beliebig vorgeschriebene Werte $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ annehmen, wenn man nur in ihr nach Entwicklung nach Potenzen von $\eta$ die Exponenten durch Indizes ersetzt.

Eine folgende Abhandlung[1778]) überträgt dann auch diese Form der Lösung auf partielle Differentialgleichungen. Der Gleichung:

$$F(\overset{m}{\breve{D}}_x, \overset{n}{\breve{D}}_t) u = 0,$$

die in bezug auf $x$ von der $m^{\text{ten}}$, in bezug auf $t$ von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung sein und keine gemischten Differentialquotienten enthalten soll, wird unter den Nebenbedingungen:

$$\mathfrak{f}_\nu(D_t) u = 0 \quad \text{für} \quad x = x_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

durch

$$u = \mathbf{E}_r \left[ \mathbf{E}_s \frac{\varphi(r, s) \exp st}{((F(r, s)))} \frac{\sum_{\mu=0}^{m-1} R_\mu \exp(r_\mu x)}{((\mathfrak{F}(r)))} \right]$$

genügt; dabei sind die $r_\mu$ die Wurzeln der Gleichung:

$$(1341) \qquad F(\varrho, s) = F(r, s)$$

(für $\varrho$ als Unbekannte) und die $R_\mu$, die $\mathfrak{R}_\nu$ und $\mathfrak{F}$ sind ganze tran-

---

1777) ib. 2 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 41. Cauchy gibt auch hier die Formeln für Gleichungen mit zweitem Glied. p. 48 entsprechende Formeln für die in Note 1771) genannten Gleichungen; bei ihnen tritt an die Stelle der Entwicklung nach Potenze nvon $\eta$ eine solche nach Faktoriellen. — p. 257 noch einige weitere Umformungen, unter Bezugnahme auf eine wie es scheint nicht veröffentlichte Untersuchung von *Brisson;* p. 265 wieder die Umformung in die Fourierschen Integrale. Eine Ableitung dieser Formeln durch Rechnen mit Symbolen auch C. R. 17 (1843), p. 453 = (1) 8, p. 32.

1778) Mém. sur l'application du calcul des résidus à la physique mathématique, Paris 1827, p. 11.

szendente Funktionen von $r$, die durch die Gleichungen

$$\sum_{\mu=0}^{m-1} R_\mu \mathfrak{f}_\nu(r_\mu) \exp(r_\mu x_\nu) = \mathfrak{R}_\nu \mathfrak{F} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

verbunden, im übrigen aber willkürlich sind. Am einfachsten nimmt man für $\mathfrak{F}$ die bei der Auflösung dieser Gleichungen nach den $R_\mu$ auftretende Nennerdeterminante; und von den $\mathfrak{R}_\nu$ kann man eines gleich 1, die übrigen gleich 0 nehmen. Die Funktion $\varphi(r, s)$ endlich ist aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen.

Ist z. B.[1779])

$$F(r, s) = r^2 - br + c - (a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s),$$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1,$$

so reduziert sich die Gleichung (1341) auf

$$(\varrho - r)(\varrho + r - b) = 0,$$

und es wird:

$$\mathfrak{F}(r) = \mathfrak{f}_0(r)\,\mathfrak{f}_1(b-r)\exp(b-r) - \mathfrak{f}_0(b-r)\,\mathfrak{f}_1(r)\exp r,$$

und wenn $\mathfrak{R}_0 = 0$, $\mathfrak{R}_1 = 1$ genommen wird:

$$R_0 = -\,\mathfrak{f}_0(b-r), \quad R_1 = \mathfrak{f}_0(r).$$

Sollen dabei noch die Anfangsbedingungen

$$D_t^\nu(u) = f_\nu(x) \quad \text{für} \quad t = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

erfüllt werden, so ist:

$$\varphi(r, s) = \exp(-st)\,\mathfrak{f}_1(r)\int_0^1 \frac{F(r, s) - F(r, f(\alpha))}{s - f(\alpha)} \exp(r - r\alpha)\, d\alpha$$

zu nehmen, wo wieder die Exponenten von $f$ nach Ausführung der Division durch Indizes zu ersetzen sind. Die Annahmen:

$$n = 1, \quad F(r, s) = r^2 - l - s, \quad \mathfrak{f}_0(r) = A - r, \quad \mathfrak{f}_1(r) = B + r$$

führen auf die in Nr. 45 besprochenen Entwicklungen[1780]).

Andererseits kann die Lösung auch geschrieben werden:

$$u = \mathop{\mathrm{E}}_r \left[ \mathop{\mathrm{E}}_s \frac{F(r, s) - F(r, \varpi(r))}{s - \varpi(r)} \; \frac{\exp st}{(\!(F(r, s))\!)} \; \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{m-1} R_\mu \exp(r_\mu x)}{(\!(\mathfrak{F}(r))\!)} \right];$$

1779) p. 16.
1780) p. 19.

die Funktionen $\varpi_\nu(r)$ sind dabei so zu bestimmen, daß

$$\mathrm{E}_r \frac{\varpi_\nu(r) \sum_{\mu=0}^{m-1} R_\mu \exp(r_\mu x)}{((\mathfrak{F}(r)))} = f_\nu(x) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

wird. Das kann, wenn $m$ eine gerade Zahl ist und die $x_\nu$ zu je $\frac{m}{2}$ zusammenfallen, außer durch die eben angegebene Methode auch folgendermaßen geschehen[1781]): Die Funktion

$$v = \sum_{\mu=0}^{m-1} R_\mu \exp(r_\mu x)$$

genügt der Differentialgleichung:

$$F(D_x, s)v = vF(r, s).$$

Wird eine andere Funktion $w$ so bestimmt, daß sie der Differentialgleichung

$$F(-D_x, s)w = wF(\varrho, s)$$

genügt, so wird der Ausdruck

$$wF(D_x, s)v - vF(-D_x, s)w = vw(F(r, s) - F(\varrho, s))$$

die Ableitung einer bilinearen Verbindung von $v$, $w$ und ihren Differentialquotienten, und folglich wird:

$$(F(r, s) - F(\varrho, s))\int vw\,dx = 0,$$

wenn diese bilineare Verbindung an beiden Grenzen der Integration Null ist. Das läßt sich aber dadurch erreichen, daß man dem $w$ Bedingungen ähnlicher Art auferlegt, wie diejenigen, denen $v$ bereits genügen muß; und dann wird

$$\int vw\,dx = 0,$$

außer wenn $\varrho$ einem der $r_\mu$ gleich ist. So erhält man[1782]):

$$\varpi_\nu(r) = \frac{\mathfrak{F}'(r)}{2m} \frac{\int w_\nu f_\nu(x)\,dx}{\int vw_\nu\,dx}.$$

Das hier im Nenner auftretende Integral läßt sich mit Hilfe der Bedingungsgleichungen auswerten; speziell wenn $v$ mit seinen Ableitungen bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ einschließlich an beiden Grenzen Null sein soll, ergibt sich[1783]):

$$\frac{\partial F(r, 0)}{\partial r} \int vw\,dx = k_0 \mathfrak{F}'(r) \sum_{\mu=0}^{m-1} R_\mu r_\mu^{\frac{m}{2}},$$

---

1781) p. 23.

1782) p. 27. Cauchy führt die Rechnung für einige spezielle Beispiele durch.

1783) p. 30.

wobei $k_0$ den Koeffizienten von $r^m$ in der Funktion $F(r, 0)$ bedeutet. Ist die Funktion $F$ eine gerade Funktion von $r$, so genügen $v$ und $w$ derselben Differentialgleichung.[1784])

**84. Rückkehr von der Lösung durch Integrale zur Lösung durch trigonometrische Reihen.** Auch wenn die Nebenbedingungen eine der in Nr. 69 angegebenen Formen haben, läßt sich die Lösung durch ein trigonometrisches Integral darstellen; man muß dann die Funktion $f(x)$, die zunächst etwa nur für das Intervall $(0 \ldots \pi)$ gegeben ist, in geeigneter Weise über dieses Intervall hinaus fortsetzen. Für den Fall, daß an beiden Enden die Bedingung $u = 0$ vorgeschrieben ist, schreibt *S. D. Poisson*[1785]) die Laplacesche Lösung (1236) der Wärmeleitungsgleichung zunächst:

$$(1342)\quad u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{(-1)^n f_n(n\pi + (-1)^n x + 2\alpha\sqrt{t})\}\, d\alpha;$$

dabei nimmt er an, jede der Funktionen $f_n$ sei nur so lange von 0 verschieden, als ihr Argument dem Intervall $(0 \ldots \pi)$ angehört. Die Bedingung $u = f(x)$ für $t = 0$, $0 < x < \pi$ verlangt, daß $f_0 = f$ genommen wird; sollen die beiden andern Bedingungen für alle positiven Werte von $t$ erfüllt sein, so ergibt sich sukzessive, daß auch alle übrigen $f_n = f$ genommen werden müssen. Führt man in jedem der Teilintervalle $(n\pi \ldots (n+1)\pi)$ eine neue Integrationsvariable

$$\alpha = n\pi + (-1)^n x + 2a\sqrt{t}$$

ein und macht von der Gleichung (947) Gebrauch, so erhält man die Lösung dargestellt durch eine Summe von Doppelintegralen

$$(1343)\quad u = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty}\int_0^{\pi} [e^{-\xi^2 t} + \cos n\pi\xi \cos \xi(\alpha + (-1)^n x)] f(\alpha)\, d\xi\, d\alpha,$$

wenn man dann mit Poisson die Cosinussumme wie in Nr. 34 versteht, braucht man die Integration nach $\xi$ nur über die Umgebungen der ganzzahligen Werte von $\xi$ auszudehnen und erhält so wieder die Lösung der Aufgabe durch eine harmonische Cosinusreihe.

1784) p. 31. p. 37 gibt er noch eine dritte Umformung, p. 47 eine vierte, indem er den Nenner $\mathfrak{F}(r)$ mit in die Definition von $v$ hereinzieht.

1785) Bull. philomat. 1815, p. 87; J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 51. Poisson verlegt den Anfangspunkt der $x$ in die Mitte des Intervalls; infolgedessen erhält er eine Entwicklung nach den Sinus der geraden und den Cosinus der ungeraden Vielfachen des (halben) Arguments. Vgl. Note 531.

Dasselbe Verfahren wendet er dann[1786]) auch auf den Fall an, daß an den Grenzen die dritte Randbedingung (1274) zu befriedigen ist. Soll zunächst die Form (1274) des Integrals für $x = \pi$ der Bedingung (1171 c) genügen, so muß für alle positiven Werte von $t$ die Gleichung bestehen:

$$(1344)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(\pi-\alpha)^2}{4t}\right\}(hf(\alpha)+f'(\alpha))\,d\alpha = 0.$$

Poisson meint, das verlange, daß zu entgegengesetzt gleichen Werten der Exponentialfunktion entgegengesetzt gleiche Werte der Klammergrößen gehörten, daß also

$$hf(\pi+\alpha)+f'(\pi+\alpha) = e^{-h\alpha}\frac{d(e^{h\alpha}f(\pi+\alpha))}{d\alpha}$$

eine gerade Funktion von $\alpha$ sei. Hieraus erhält er durch partielle Integration:

$$(1345)\qquad (\delta+h)\int_0^\infty e^{-\delta\alpha}f(\pi+\alpha)\,d\alpha = (\delta-h)\int_0^\infty e^{-\delta\alpha}f(\pi-\alpha)\,d\alpha.$$

Ebenso liefert ihm die bei $x = -\pi$ geltende Grenzbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial x} - h_1 u = 0$$

eine zweite Gleichung

$$(1346)\qquad (\delta-h_1)\int_0^\infty e^{-\delta\alpha}f(-\pi+\alpha)\,d\alpha = (\delta+h_1)\int_0^\infty e^{-\delta\alpha}f(-\pi-\alpha)\,d\alpha.$$

Indem er in jedem der hier auftretenden Integrale das Argument von $f$ als neue Integrationsvariable einführt, gelingt es ihm, die beiden Integrale:

$$p(\delta) = \int_0^\infty e^{-\delta\alpha}f(\alpha)\,d\alpha, \quad q(\delta) = \int_0^{-\infty} e^{\delta\alpha}f(\alpha)\,d\alpha$$

---

1786) J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 29; reproduziert von *J. Liouville,* j. de math. 1 (1836), p. 20, mit der Bemerkung (p. 27): es ließe sich anwenden, wenn höhere Ableitungen in den Grenzbedingungen auftreten würden. — Chaleur p. 284 meint *Poisson* selbst: die direkte Aufstellung der Reihenentwicklung sei einfacher; aber „sous le rapport de l'analyse" sei die Umformung des Integrals in die Reihe „une transformation délicate et importante". Übersichtlich auch von *W. R. Hamilton,* Dubl. trans. 19 (2) (1843), p. 287. p. 293 gibt er an, wie eine etwa auftretende Wurzel $\lambda = 0$ zu behandeln ist. Dann von *O. Bonnet,* Bruxelles mém. cour. in 4° 23 (1848/50), p. 31. Vgl. dazu die Berichtigung p. 116. Er bespricht die einzelnen vorzunehmenden Grenzübergänge genauer; doch bleibt auch bei ihm die Frage unbeantwortet, welche Eigenschaft man von $f(x)$ verlangen muß, wenn $\psi(x)$ die bereits erforderlichen haben soll; er sagt p. 32 nur: „supposons que $f(y)$ soit telle qu'on puisse mettre $p$ et $q$ sous la forme": 1299.

als Quotienten [ganzer transzendenter Funktionen] auszudrücken:

(1347) $$p(\delta) = \frac{\psi(\delta)}{\varphi(\delta)}, \quad q(\delta) = \frac{\psi(-\delta)}{\varphi(-\delta)},$$

wobei:

$$\varphi(\delta) = (\delta + h)(\delta + h_1)e^{2\pi\delta} - (\delta - h)(\delta - h_1)e^{-2\pi\delta},$$

$$\psi(\delta) = (\delta + h)(\delta + h_1)e^{2\pi\delta}\int_0^{\pi} e^{-\delta\alpha}f(\alpha)\,d\alpha$$

$$- (\delta - h)(\delta - h_1)e^{-2\pi\delta}\int_0^{-\pi} e^{-\delta\alpha}f(\alpha)\,d\alpha$$

$$+ (\delta - h)(\delta + h_1)\int_{-\pi}^{\pi} e^{\delta\alpha}f(\alpha)\,d\alpha.$$

Daraus folgt dann:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi\alpha i}f(\alpha)\,d\alpha = \lim_{\delta=0}\left\{\frac{\psi(\xi i + \delta)}{\varphi(\xi i + \delta)} - \frac{\psi(\xi i - \delta)}{\varphi(\xi i - \delta)}\right\}.$$

Dieser Grenzwert ist gleich Null, außer wenn $\xi$ eine Wurzel der Gleichung

(1348) $$\varphi(\xi i) = 0$$

oder

$$(hh_1 - \xi^2)\sin 2\pi\xi + (h + h_1)\xi\cos 2\pi\xi = 0$$

ist. Also zerfällt, wenn nachher noch nach $\xi$ zwischen den Grenzen 0 und $\infty$ integriert wird, das Integral in eine unendliche Reihe von Gliedern, in deren jedem die Integration nur über die Umgebung einer solchen Wurzel zu erstrecken ist. So erhält er eine Lösung durch eine unharmonische trigonometrische Reihe der Form:

(1349) $$u = \sum_{\lambda} e^{-\lambda^2 t}\frac{P\cos\lambda x + Q\sin\lambda x}{R},$$

wobei:

$$\left.\begin{matrix}P\\Q\end{matrix}\right\} = \{(hh_1 - \lambda^2)(\cos 2\lambda\pi \mp 1) - (h + h_1)\lambda\sin 2\lambda\pi\}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}\right\}\lambda\alpha f(\alpha)\,d\alpha$$

$$+ (h - h_1)\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}\right\}\lambda\alpha f(\alpha)\,d\alpha,$$

$$R = [h + h_1 + 2\pi(hh_1 - \lambda^2)]\cos 2\lambda\pi - [2 + 2\pi(h + h_1)]\sin 2\lambda\pi$$

ist, die Summation sich über alle reellen nicht negativen Wurzeln $\lambda$ von (1348) erstreckt und von dem zu der Wurzel $\lambda = 0$ gehörenden Gliede, das übrigens nur in dem Grenzfall $h = h_1 = 0$ von 0 verschieden ist, nur die Hälfte zu nehmen ist.[1787]) Er verifiziert noch, daß jedes Glied dieser Summe der Differentialgleichung und den Grenzbedingungen genügt.

Einfacher gestaltet sich die Anwendung der Methode, wenn die Periodizitätsbedingung

$$f(\alpha + \pi) = f(\alpha - \pi)$$

vorgeschrieben ist.[1788]) Diese wird identisch erfüllt durch den Ansatz

$$f(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha + 2n\pi), \tag{1350}$$

wenn $\varphi$ außerhalb des Intervalls $(-\pi, \ldots, +\pi)$ gleich Null genommen wird. Die Darstellung der Lösung durch ein Fouriersches Integral zerfällt dann in ähnlicher Weise wie in dem zuerst besprochenen Falle. Dagegen treten wieder kompliziertere Verhältnisse auf, wenn außer den Grenz- auch noch Übergangsbedingungen gegeben sind, wie bei dem Problem der Wärmeleitung in einer aus Kern und Schale verschiedenen Materials zusammengesetzten Kugel.[1789]) Doch führt Poisson auch hier die Rechnung vollständig durch: die determinierende Gleichung zerfällt zunächst in die beiden:

$$\sin l\xi = 0, \quad \operatorname{tg}(l + l_1)\xi + m\xi = 0,$$

doch zeigt sich nachher, daß die zu den Wurzeln der ersteren gehörenden Glieder sich gegenseitig zerstören.

*J. M. Duhamel*[1790]) hat Poissons Verfahren auf den Fall angewendet, daß für die in der Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\alpha - x)^2}{4t}\right) f(\alpha)\, d\alpha \tag{1351}$$

auftretende Funktion $f(x)$ aus den Grenzbedingungen sich die Beziehungen ergeben

$$f(-x) + f(x) = 0,$$

$$f''(1-x) + f''(1+x) - h(f'(1-x) - f'(1+x) + f(1-x) + f(1+x)) = 0.$$

Er ersetzt zu diesem Zweck die Exponentialgröße in (1351) vermöge

---

1787) p. 36. Er glaubt (p. 39), im allgemeinen Falle beliebiger $h$ und $h_1$ würde die direkte Behandlung dieses Problems durch Aufstellung der ausgezeichneten Lösungen und Koeffizientenbestimmung „zum mindesten sehr schwierig" sein. Er bespricht dann noch ausführlich den Übergang vom allgemeinen Falle zu den speziellen, daß $h$ oder $h_1$ oder beide einen der Werte 0 oder $\infty$ haben.

1788) p. 63.

1789) p. 123.

1790) J. éc. polyt. cah. 25 (1837), p. 36 (von 1835).

(947) durch

$$(1352)\qquad 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\int_0^\infty \exp\,(-\xi^2 t)\cos\,(\xi x - \xi\alpha)\,d\xi.$$

Wird dann die Integration nach $\alpha$ zuerst ausgeführt gedacht, so lassen sie sich wie bei Poisson durch partielle Integrationen umformen; man kommt schließlich auf die schon besprochenen Entwicklungen.

Die zur Anwendung dieses Verfahrens erforderliche Fortsetzung einer zunächst nur für ein begrenztes Intervall gegebenen Funktion $f(x)$, vorgeschriebenen Grenzbedingungen gemäß, erscheint in einer übersichtlichen symbolischen Form bei *A. Cauchy*[1790a]. Für den einfachsten Fall, daß an beiden Endpunkten (0 und $\pi$) die erste Grenzbedingung vorgeschrieben ist, setzt er

$$(1353)\quad f(x) = \begin{cases} A_0 f(x) - A_1 f(2\pi - x) + A_2 f(x - 2\pi) - + - \cdots \\ -B_0 f(-x) + B_1 f(x + 2\pi) - B_2 f(-x - 2\pi) + - + \cdots \end{cases}$$

und bestimmt die Koeffizienten so, daß sie nur für das jedesmal in Betracht kommende Intervall von 0 verschieden sind, was durch

$$(1354)\qquad \left.\begin{matrix} A_n \\ B_n \end{matrix}\right\} = \pm \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\pm n\pi}^{\pm(n+1)\pi} e^{(x-\alpha)\xi i}\, d\alpha\, d\xi$$

geschieht. Wird dann, um die Reihenfolge von Integration und Summation vertauschen zu können, noch ein Konvergenzfaktor eingeführt, so wird erhalten:

$$(1355)\quad f(x) = \lim_{\delta=0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^\pi \frac{1-\delta}{2\pi}\,\frac{\sin\alpha\xi - \sin(2\pi-\alpha)\xi}{1 - 2\delta\cos 2\alpha\xi + \delta^2}\, 2\sin x\xi f(\alpha)\, d\alpha\, d\xi;$$

und das bricht in die trigonometrische Reihe auseinander, da für $\delta = 0$ nur die Umgebungen der Punkte $\alpha\xi = n\pi$ Beiträge liefern.

Nachher[1791] gibt er noch ein anderes Verfahren: Das der Bedingung $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ für $t = 0$ genügende Integral der Gleichung der Saitenschwingungen läßt sich einerseits schreiben:

$$(1356)\qquad u = \mathfrak{Cos}\,(tD_x)f(x),$$

andererseits:

$$(1357)\qquad u = \exp\,(xD_t)\,\varphi(t) + \exp\,(-xD_t)\,\chi(t);$$

$f(x)$ ist dabei die Funktion, auf die sich $u$ für $t = 0$ reduziert. Die

1790a) Paris mém. 22 (1850) (von 1824) = Oeuvres (1) 2, p. 240.

1791) p. 251. Vgl. p. 270 die Zusammenstellung der Regeln des Rechnens mit solchen Symbolen.

Bedingung $u = 0$ für $x = 0$ verlangt

$$\varphi(t) + \chi(t) = 0;$$

also kann statt (1357) geschrieben werden:

$$u = \mathfrak{Sin}\,(xD_t)\varphi(t). \tag{1358}$$

Die Bedingung $u = 0$ für $x = \pi$ verlangt dann:

$$0 = \mathfrak{Sin}\,(\pi D_t)\varphi(t). \tag{1359}$$

Nun ist

$$\mathfrak{Sin}\,(\pi D_x)u = \sin\,(\pi D_x)\,\sin\,(xD_t)\varphi(t) = \mathfrak{Cos}\,(xD_t)\,\mathfrak{Sin}\,(\pi D_t)\varphi(t),$$

also nach (1359) gleich Null; wird hier für $u$ sein erster Ausdruck (1356) eingesetzt und beachtet, daß die entstehende Gleichung für alle Werte von $t$ gelten muß, so folgt, daß $f(x)$ der Gleichung

$$\mathfrak{Sin}\,(\pi D_x) f(x) = 0, \tag{1360}$$

d. h.

$$f(x+\pi) - f(x-\pi) = 0 \tag{1361}$$

genügen muß. Außerdem gibt die Vergleichung von (1356) mit (1358), daß

$$f(x) = -f(-x) \tag{1362}$$

sein muß. Die beiden letzten Gleichungen zusammen ergeben[1792]):

$$f(x) = \exp\,(-2\pi D_x) f(x) = \exp\,(2\pi D_x) f(x) \tag{1363}$$

wird dann wieder eine Funktion $f(x)$ eingeführt, die nur im Ausgangsintervall von Null verschieden ist, so läßt sich mit Hilfe von (1360) und (1362) die Funktion $f(x)$ durch eine Summe ausdrücken, von der in jedem Teilintervall nur ein Glied von Null verschieden ist, und diese Summe läßt sich unter Einführung von Konvergenzfaktoren in der Gestalt

$$f(x) = \frac{1-\delta^2}{1-2\delta(\cos 2\pi D_x)+\delta^2}\,\{f(x) - f(-x)\} \tag{1364}$$

summieren. Wird hier für $f(x)$ sein Ausdruck durch ein Fouriersches Integral gesetzt, so lassen sich die verlangten Operationen vornehmen, und man erhält wieder das frühere Resultat.

Dieses zweite Verfahren läßt sich nun auch auf den Fall anwenden, daß die Gleichung (1175) p. 1185 unter den Bedingungen

$$(A + D_x)u = 0 \text{ für } x = 0, \quad (B + D_x)u = 0 \text{ für } x = \pi \tag{1365}$$

zu integrieren ist.[1793]) Das allgemeine Integral von (1175) läßt sich

1792) p. 268.

1793) p. 252. Cauchy behandelt die etwas allgemeinere Gleichung

$$D_t u - D_x^2 u + u = 0$$

einerseits schreiben:

(1366) $$u = \exp(tD_x^2) f(x)$$

andererseits:

(1367) $$u = \exp(x\sqrt{D_t})\varphi(t) + \exp(-x\sqrt{D_t})\chi(t).$$

Dieser zweite Ausdruck genügt der ersten Grenzbedingung (1365), wenn:

(1368) $$\varphi(t) = (A - \sqrt{D_t})\psi(t), \quad \chi(t) = -(A - \sqrt{D_t})\psi(t)$$

genommen wird, und auch der zweiten, wenn die damit eingeführte neue unbekannte Funktion $\psi(t)$ der Bedingung

(1369) $$F(\sqrt{D_t})\psi(t) = 0,$$

unterworfen wird, wobei

(1370) $$F(\lambda) \equiv (B+\lambda)(A-\lambda)\exp(\pi\lambda)x - (B-\lambda)(A+\lambda)\exp(-\pi\lambda)x$$

ist. Die Gleichung (1367) kann infolge von (1368) geschrieben werden:

(1371) $$u = 2(A - D_x)\,\mathfrak{Sin}(x\sqrt{D_t})\psi(t);$$

die Vergleichung dieses Ausdrucks mit (1366) zeigt, daß sich $f$ und $\psi$ durch eine neue Hilfsfunktion $\varpi$ folgendermaßen ausdrücken lassen müssen:

(1372) $$2\,\mathfrak{Sin}(x\sqrt{D_t})\psi(t) = \exp(tD_x^2)\varpi(x)$$

(1373) $$f(x) = (A - D_x)\varpi(x);$$

und zwar muß diese Funktion eine ungerade sein, da die linke Seite von (1373) es ist. Außerdem muß sie wegen (1369) und (1372) der Gleichung

(1374) $$F(D_x)\varpi(x) = 0$$

genügen. Diese letztere kann einerseits geschrieben werden[1794]):

(1375) $$\varpi(x) = \frac{(A+D_x)(B-D_x)}{(A-D_x)(B+D_x)}\exp(-2\pi D_x)\varpi(x),$$

andererseits:

(1376) $$\varpi(x) = \frac{(A-D_x)(B+D_x)}{(A+D_x)(B-D_x)}\exp(2\pi D_x)\varpi(x);$$

durch wiederholte Anwendung dieser Gleichungen ergibt sich:

(1377) $$\varpi(x) = \left[\frac{(A+D_x)(B-D_x)}{(A-D_x)(B+D_x)}\right]^n \varpi(x - 2n\pi)$$
$$= \left[\frac{(A-D_x)(B+D_x)}{(A+D_x)(B-D_x)}\right]^n \varpi(x + 2n\pi);$$

---

und führt das letzte Glied durch die Rechnung durch; es läßt sich aber durch eine einfache Substitution beseitigen.

1794) Cauchy führt zunächst eine entsprechende Rechnung für die Funktion $f$ selbst durch; erst nachher (p. 265) bemerkt er, daß die Sache sich für $\varpi$ etwas einfacher gestaltet.

Bedingung $u = 0$ für $x = 0$ verlangt

$$\varphi(t) + \chi(t) = 0;$$

also kann statt (1357) geschrieben werden:

$$(1358)\qquad u = \mathfrak{Sin}\,(xD_t)\varphi(t).$$

Die Bedingung $u = 0$ für $x = \pi$ verlangt dann:

$$(1359)\qquad 0 = \mathfrak{Sin}\,(\pi D_t)\varphi(t).$$

Nun ist

$$\mathfrak{Sin}\,(\pi D_x)u = \sin\,(\pi D_x)\,\sin\,(xD_t)\varphi(t) = \mathfrak{Cos}\,(xD_t)\,\mathfrak{Sin}\,(\pi D_t)\varphi(t),$$

also nach (1359) gleich Null; wird hier für $u$ sein erster Ausdruck (1356) eingesetzt und beachtet, daß die entstehende Gleichung für alle Werte von $t$ gelten muß, so folgt, daß $f(x)$ der Gleichung

$$(1360)\qquad \mathfrak{Sin}\,(\pi D_x)f(x) = 0,$$

d. h.

$$(1361)\qquad f(x+\pi) - f(x-\pi) = 0$$

genügen muß. Außerdem gibt die Vergleichung von (1356) mit (1358), daß

$$(1362)\qquad f(x) = -f(-x)$$

sein muß. Die beiden letzten Gleichungen zusammen ergeben[1792]):

$$(1363)\qquad f(x) = \exp\,(-2\pi D_x)f(x) = \exp\,(2\pi D_x)f(x)$$

wird dann wieder eine Funktion $f(x)$ eingeführt, die nur im Ausgangsintervall von Null verschieden ist, so läßt sich mit Hilfe von (1360) und (1362) die Funktion $f(x)$ durch eine Summe ausdrücken, von der in jedem Teilintervall nur ein Glied von Null verschieden ist, und diese Summe läßt sich unter Einführung von Konvergenzfaktoren in der Gestalt

$$(1364)\qquad f(x) = \frac{1-\delta^2}{1-2\delta(\cos 2\pi D_x)+\delta^2}\,\{f(x) - f(-x)\}$$

summieren. Wird hier für $f(x)$ sein Ausdruck durch ein Fouriersches Integral gesetzt, so lassen sich die verlangten Operationen vornehmen, und man erhält wieder das frühere Resultat.

Dieses zweite Verfahren läßt sich nun auch auf den Fall anwenden, daß die Gleichung (1175) p. 1185 unter den Bedingungen

$$(1365)\qquad (A + D_x)u = 0 \text{ für } x = 0,\quad (B + D_x)u = 0 \text{ für } x = \pi$$

zu integrieren ist.[1793]) Das allgemeine Integral von (1175) läßt sich

1792) p. 268.

1793) p. 252. Cauchy behandelt die etwas allgemeinere Gleichung

$$D_t u - D_x^2 u + u = 0$$

einerseits schreiben:

(1366) $$u = \exp(tD_x^2) f(x)$$

andererseits:

(1367) $$u = \exp(x\sqrt{D_t})\varphi(t) + \exp(-x\sqrt{D_t})\chi(t).$$

Dieser zweite Ausdruck genügt der ersten Grenzbedingung (1365), wenn:

(1368) $$\varphi(t) = (A - \sqrt{D_t})\psi(t), \quad \chi(t) = -(A - \sqrt{D_t})\psi(t)$$

genommen wird, und auch der zweiten, wenn die damit eingeführte neue unbekannte Funktion $\psi(t)$ der Bedingung

(1369) $$F(\sqrt{D_t})\psi(t) = 0,$$

unterworfen wird, wobei

(1370) $$F(\lambda) \equiv (B + \lambda)(A - \lambda)\exp(\pi\lambda)x - (B - \lambda)(A + \lambda)\exp(-\pi\lambda)x$$

ist. Die Gleichung (1367) kann infolge von (1368) geschrieben werden:

(1371) $$u = 2(A - D_x)\,\mathfrak{Sin}\,(x\sqrt{D_t})\psi(t);$$

die Vergleichung dieses Ausdrucks mit (1366) zeigt, daß sich $f$ und $\psi$ durch eine neue Hilfsfunktion $\varpi$ folgendermaßen ausdrücken lassen müssen:

(1372) $$2\,\mathfrak{Sin}\,(x\sqrt{D_t})\psi(t) = \exp(tD_x^2)\varpi(x)$$

(1373) $$f(x) = (A - D_x)\varpi(x);$$

und zwar muß diese Funktion eine ungerade sein, da die linke Seite von (1373) es ist. Außerdem muß sie wegen (1369) und (1372) der Gleichung

(1374) $$F(D_x)\varpi(x) = 0$$

genügen. Diese letztere kann einerseits geschrieben werden[1794]):

(1375) $$\varpi(x) = \frac{(A + D_x)(B - D_x)}{(A - D_x)(B + D_x)} \exp(-2\pi D_x)\varpi(x),$$

andererseits:

(1376) $$\varpi(x) = \frac{(A - D_x)(B + D_x)}{(A + D_x)(B - D_x)} \exp(2\pi D_x)\varpi(x);$$

durch wiederholte Anwendung dieser Gleichungen ergibt sich:

(1377) $$\varpi(x) = \left[\frac{(A + D_x)(B - D_x)}{(A - D_x)(B + D_x)}\right]^n \varpi(x - 2n\pi)$$
$$= \left[\frac{(A - D_x)(B + D_x)}{(A + D_x)(B - D_x)}\right]^n \varpi(x + 2n\pi);$$

---

und führt das letzte Glied durch die Rechnung durch; es läßt sich aber durch eine einfache Substitution beseitigen.

1794) Cauchy führt zunächst eine entsprechende Rechnung für die Funktion $f$ selbst durch; erst nachher (p. 265) bemerkt er, daß die Sache sich für $\varpi$ etwas einfacher gestaltet.

lung einer Funktion in eine doppelte harmonische Sinusreihe von zwei Variabeln ab.[1798])

**85. Ableitung des „Endverlaufs" aus den Reihenentwicklungen.** Häufig wünscht man einen einfachen Ausdruck zu haben, der die Lösung der Differentialgleichung für große Werte der einen unabhängigen Variabeln näherungsweise darstellt. Ist diese Variable die Zeit, so gibt ein solcher Ausdruck über den Endverlauf der betr. Erscheinung Auskunft; in Ermangelung eines anderen möge dieser Terminus auch für andere Fälle beibehalten werden.

Die Entwicklungen nach Elementarlösungen erlauben einen solchen Ausdruck sehr einfach anzugeben, wenn sie Exponentialfunktionen der Zeit enthalten. Ist eine solche Reihe:

$$\sum_n \exp(-\lambda_n t)\,\varphi_n(x) \tag{1389}$$

und ist dabei:

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots,$$

so werden für große, aber nicht allzugroße Werte der Zeit alle auf das Anfangsglied folgenden Glieder der Reihe vernachlässigt werden können, dieses selbst aber noch nicht; die Erscheinung wird also dann durch dieses erste Glied allein mit hinlänglicher Genauigkeit beschrieben werden können. Das hat bereits *Fourier*[1799]) auseinandergesetzt; er bezeichnet den damit gegebenen Zustand des Systems als „état pénultième".

**86. Ableitung des „Endverlaufs" aus der Integraldarstellung.** Will man von der Lösung der partiellen Differentialgleichung durch ein bestimmtes Integral zu einem asymptotischen Ausdruck dieser Lösung für große Werte der einen unabhängigen Variablen gelangen, so liegt zunächst der folgende Schluß nahe: wenn in den Formeln (1319) die Funktion $f(\alpha)$ (zwar nicht nur für $\alpha = 0$, aber doch) nur in der Umgebung von $\alpha = 0$ von Null verschieden ist, so kann man für Werte von $x$, die groß gegen alle in Betracht kommenden Werte von $\alpha$ sind, $\alpha$ überall da, wo es neben $x$ auftritt, also überall außerhalb des Funktionszeichens $f$, gegen $x$ vernachlässigen. Das Doppelintegral zerfällt dann in das Produkt zweier einfachen Integrale, von denen das eine die Hauptlösung des betreffenden Problems vorstellt, während das andere

$$\int f(\alpha)\,d\alpha$$

ist.

1798) p. 279.

1799) Theorie Nr. 198 = Oeuvres 1, p. 177.

So hat z. B. *S. D. Poisson*[1800]) in der Form (1274) des Integrals der Wärmeleitungsgleichung außerhalb des Funktionszeichens $f$ die in Betracht kommenden Werte von $\alpha$ gegen $x$ vernachlässigt und so dieses Integral für hinlänglich große Werte von $x$ asymptotisch durch

$$(1390)\qquad \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\int f(\alpha)\,d\alpha$$

ersetzt. Bald darauf[1801]) fügt er die Bemerkung hinzu, daß der Schluß nur für hinlänglich große Werte von $t$ zulässig sei.

Ebenso stellt *A. Cauchy*[1802]) die Lösung seines Wellenproblems durch

$$(1391)\qquad \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos\left(t\sqrt{\xi}\right)\cos x\xi\, d\xi \,.\int f(\alpha)\,d\alpha$$

dar. Doch sind ihm alsbald Bedenken über den Gültigkeitsbereich dieser Lösung gekommen, da sie ihn zu physikalisch unzulässigen Konsequenzen zu führen schien[1803]); er schreibt daher die allgemeine Lösung, indem er das Integral (1054) $K$ mit Hilfe von (1055) durch einen Näherungswert ersetzt, in der Form:

$$(1392)\qquad u \sim \frac{1}{2t}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\sin\frac{\pi t^2}{4(x-\alpha)} + \cos\frac{\pi t^2}{4(x-\alpha)}\right\} f(\alpha)\,d\alpha,$$

aus der hervorgeht, daß ihre Ersetzung durch (1391) nur dann erlaubt ist, wenn $\frac{t^2}{(x-\alpha)}$ wenig von $\frac{t^2}{x}$ abweicht, also wenn $\frac{t^2\alpha}{4x^2}$ klein ist.

Ähnlich schreibt *S. D. Poisson*[1804]), indem er seine Form der

1800) Bull. philomat. 1815, p. 87.

1801) ib. 1816, p. 12 (zunächst für das entsprechende dreifache Integral; J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 24; chaleur p. 282. Bei *Fourier,* der diese Schlußweise in seine Théorie analytique de la chaleur aufgenommen hat (Nr. 377—381 = Oeuvres 1, p. 437—443; in der Preisschrift von 1811 steht sie noch nicht), fehlt umgekehrt die Bemerkung, daß sie nicht nur $\frac{t}{x^2}$, sondern auch $\frac{x}{\alpha}$ als groß voraussetzt (am Schluß von Nr. 380, p. 442 scheint er sogar das Gegenteil behaupten zu wollen); so daß *Darboux* in seinen Anmerkungen p. 437, 443 den ganzen Schluß für unverständlich erklären konnte.

1802) Paris mém. prés. 1 (1827) (von 1815) = Oeuvres (1) 1, p. 61.

1803) p. 91. Er hält $x$ fest, läßt $t$ über alle Grenzen wachsen und schließt dann aus (1054), daß die Schwankungen von $K$, d. h. also die Wellenhöhen beständig zunehmen müßten. — Etwas andere Darstellung, aber der Sache nach übereinstimmend, ib. p. 186 (von 1827).

1804) Paris mém. 1 (1816[18]), p. 111. Poisson führt auch schon bei diesem Teil der Untersuchung die spezielle Voraussetzung (1395) ein; doch tut das nichts zur Sache. Die Resultate auch Bull. philomat. 1817, p. 87; 1818, p. 97.

Hauptlösung benutzt, das allgemeine Integral (1308) der Gleichung (1304) in der Gestalt:

$$(1393)\qquad y = \frac{t^2}{4\pi}\int\int_0^1 \frac{f(\alpha)}{(x-\alpha)^2}\cos\frac{t^2(1-u^2)}{4(x-\alpha)}\,du\,d\alpha$$

und ersetzt sie, wenn $x$ groß gegen die in Betracht kommenden Werte von $\alpha$ ist, durch:

$$(1394)\qquad \frac{t^2}{4\pi x^2}\int_0^1 \cos\frac{t^2(1-u^2)}{4x}\,du\cdot\int f(\alpha)\,d\alpha.$$

Auch er bemerkt[1805]), daß diese Umformung nur erlaubt ist, solange $\frac{t^2}{x}$ nicht von derselben Größenordnung wie $\frac{x}{\alpha}$ ist. Er behandelt aber auch den Fall[1806]), in welchem beide Größen von derselben Ordnung sind; dabei benutzt er die [semikonvergente] Entwicklung der Hauptlösung nach Potenzen von $\frac{(x-\alpha)}{t^2}$ und integriert sie gliedweise nach $u$. Für den Fall

$$(1395)\qquad f(\alpha) = 1-\alpha^2,\qquad -1<\alpha<1$$

treten dabei als Hauptglieder die beiden Integrale

$$(1396)\qquad \int_0^1 (1-v^2)\begin{Bmatrix}\cos kv\\ \sin kv\end{Bmatrix}dv = \begin{cases}4k^{-3}(\sin k - k\cos k),\\ 0\end{cases}\qquad \left(k=\frac{t^2}{4x^2}\right)$$

auf, so daß er als erste Annäherung erhält[1807]):

$$(1397)\qquad y = \frac{4}{t^5\sqrt{2\pi x^3}}\left\{\sin\frac{t^2}{4x^2}-\frac{t^2}{4x^2}\cos\frac{t^2}{4x^2}\right\}\left\{\cos\frac{t^2}{4x}+\sin\frac{t^2}{4x}\right\}.$$

Die Nullstellen des ersten Klammerfaktors begrenzen „gezähnelte Wellen", die mit konstanter Geschwindigkeit fortschreiten, die Nullstellen des zweiten die „Zähnchen", die mit konstanter Beschleunigung über sie hinlaufen.

Die Untersuchung der Ausbreitung der Bewegung in die Tiefe führt auf eine entsprechende Diskussion des Integrals[1808]):

$$(1398)\qquad u = \frac{1}{\pi}\int\int \exp\left(-\frac{t^2(1-v)}{2}\right)\cos\frac{t^2(1-v^2)\alpha}{4z^2}f(\alpha)\,dv\,d\alpha.$$

*Cauchy* wendet[1809]) — wie vorher schon *Fourier*[1810]) — dagegen

1805) p. 115.

1806) Erläuterungen zu diesem Teil der Rechnung bei *G. Plana,* Torino mem. 25 (1820), p. 122.

1807) Paris mém. 1, p. 118.

1808) p. 127.

1809) Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 198. Er berichtet, er habe solche Formeln schon bei der Ausarbeitung der Preisschrift abgeleitet, sie ein, daß es nicht erlaubt sei, eine beliebige Form der Anfangsstörung durch (1395) zu ersetzen. Man erhalte zwar auch unter anderen Annahmen über die Form der Anfangsstörung durch Benutzung des asymptotischen Ausdrucks (1054) der Hauptlösung für $u$ einen Ausdruck der Form

$$(1399)\qquad u \sim \frac{t}{\sqrt{x^3}}\left[\varphi(v)\cos\left(\frac{t^2}{4x^2}-\frac{\pi}{4}\right)+\psi(v)\sin\left(\frac{t^2}{4x^2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

aber die Funktionen $\varphi, \psi$ (letztere ist Null, wenn $f$ eine gerade Funktion ist) hängen wesentlich von der Natur von $f$ ab. Läßt sich $f$ nach Potenzen von $\alpha$ bzw. von $|\alpha|$ entwickeln, so erhält man[1811]) mit Hilfe der Gleichungen

$$(1400)\qquad \begin{aligned} \int_0^1 \alpha^{2n} \cos \alpha v \, d\alpha &= (-1)^n \frac{d^{2n}}{dv^{2n}} \frac{\sin v}{v}, \\ \int_0^1 \alpha^{2n-1} \sin \alpha v \, d\alpha &= (-1)^n \frac{d^{2n+1}}{dv^{2n+1}} \frac{\sin v}{v} \end{aligned}$$

asymptotische Entwicklungen von $\varphi$ und $\psi$ nach fallenden Potenzen von $v$. Im Falle

$$f(\alpha) = \exp(c - c\alpha) - 1$$

erhält man so sogar eine konvergente Reihe, die sich elementar summieren läßt.[1812]) Für andere Fälle ist zu beachten, daß der absolute Betrag der Funktion $\varphi$ bzw. im allgemeineren Falle der Funktion $\sqrt{\varphi^2+\psi^2}$ nicht bei jeder Annahme über $f$ reelle Nullstellen hat; z. B. bei der zuletzt genannten Annahme für $\alpha > 0$ überhaupt keine, für $f(\alpha) = -(1-\alpha)^2$ nur eine[1813]); die Extrema dieser Funktion geben dann nicht alle Maxima der Wellenamplitude, sondern zum Teil auch Minima. Wenn die Funktion $f$ oder ihre Ableitungen an den Grenzen des Intervalls $(-1 \cdots +1)$ nicht mehr endlich bleiben, so daß die vorhin genannte Methode versagt, kann man solche asymptotische

---

aber nicht weiter verfolgt, da er angenommen habe, die Bewegung, die sie darstellten, sei „trop peu sensible pour qu'on dût en tenir compte“. Vgl. in der Tat ib. p. 91 (von 1815), wo er aus der vollständigen Formel ableitet, daß die Wellenamplitude überall mit wachsender Zeit gegen Null konvergiert.

1810) Bull. philomat. 1818, p. 133 = Oeuvres 2, p. 262; auch noch Paris mém. 8 (1829), p. 620 = Oeuvres 2, p. 179.

1811) Paris mém. prés. 1 = Oeuvres (1) 1, p. 200, 203. p. 231 bemerkt er noch, daß man solche Entwicklungen auch erhalten könne, indem man wiederholt partiell integriere und dabei vor jeder Integration noch den wenig von 1 verschiedenen Faktor $x^2(x-\alpha)^{-2}$ unter dem Integralzeichen hinzufüge.

1812) p. 218.

1813) p. 216.

Entwicklungen mit Hilfe der Umformung

$$(1401)\quad \int\limits_{-1}^{+1} f(\alpha) e^{v\alpha i} d\alpha = \frac{1}{vi} \int\limits_{0}^{\infty} \left[ e^{vi} f\left(1+\frac{\beta i}{v}\right) - e^{-vi} f\left(-1+\frac{\beta i}{v}\right) \right] e^{-\beta} d\beta$$

erhalten.[1814])

Für große Werte von $v$ wird es notwendig, in der Entwicklung von $\frac{t^2}{x-\alpha}$ nach Potenzen von $\alpha$ auch noch Glieder 3. Ordnung mitzunehmen; es geben dann zu den Integralen

$$(1402)\quad \int\limits_{-1}^{+1} f(\alpha) \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} v\alpha\, d\alpha$$

nur die Umgebungen der Endpunkte merkliche Beiträge. Man erhält also Formeln ähnlicher Art wie im vorigen Falle, nur noch mit einer Potenz von $v$ im Nenner.[1815])

*Poisson* repliziert[1816]): wesentlich andere Annahmen über die Gestalt der Anfangsstörung als (1395) seien physikalisch unzulässig.

Bei *Poisson* finden sich auch Untersuchungen[1817]) über asymptotische Werte des Integrals:

$$(1403)\quad \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty e^{-\xi^2 t} \frac{(\xi \cos x\xi + h \sin x\xi)(\xi \cos\alpha\xi + h \sin\alpha\xi)}{h^2+\xi^2} f(\alpha)\, d\xi\, d\alpha$$

für große Werte von $t$. Der Bruch läßt sich nach Potenzen von $\xi$ in eine Reihe

$$\frac{(\xi \cos x\xi + h \sin x\xi)(\xi \cos\alpha\xi + h \sin\alpha\xi)}{h^2+\xi^2} = \frac{(1+hx)(1+h\alpha)}{h^2}\xi^2 + \cdots$$

entwickeln; die Integration der einzelnen Glieder nach $\xi$ läßt sich dann mit Hilfe der Gleichung (928) ausführen, und man erhält eine [semikonvergente] Entwicklung nach fallenden Potenzen von $t$, die mit einem Glied mit $t^{-\frac{3}{2}}$ beginnt. Für $f(x) = 1$ kann man nicht so verfahren, weil dann die Integration der einzelnen Glieder nach $\alpha$ sich nicht ausführen läßt; Poisson benutzt in diesem Falle zur Ausführung der Integration nach $\alpha$ die divergenten Integrale (834) und

---

1814) p. 236.

1815) p. 225—231.

1816) Paris mém. 8 (1829), p. 573; Bull. philomat. 11 (1829), p. 169. Er meint auch (p. 574), Cauchys Resultate betr. die Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit von der Dimension der Anfangsstörung seien mit dem „Prinzip der Koexistenz kleiner Schwingungen" nicht verträglich.

1817) J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 75, 363; chaleur p. 324.

(835) für $\lim r = 0$ und entwickelt erst dann nach Potenzen von $\xi$; das gibt im Endresultat zwar ebenfalls eine Entwicklung nach fallenden Potenzen von $t$, aber sie beginnt mit $t^{-\frac{1}{2}}$.

Ferner formt *Poisson*[1818]) den von den Anfangswerten von $u$ selbst abhängigen Teil des Integrals der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1404}$$

nämlich:

$$u = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\pi \int_0^\pi \exp\left(-\frac{t}{2} \cos p\right) \tag{1405}$$

$$\cdot \cos\left(\frac{t}{2} \sin p \sin q\right) f(x + t \cos p)\, t \sin p\, dp\, dq$$

durch partielle Integration um in:

$$\frac{1}{2}\left\{\exp\left(\frac{t}{2}\right) f(x-t) + \exp\left(-\frac{t}{2}\right) f(x+t)\right\} \tag{1406}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \left(\frac{\partial P}{\partial t} t \sin p + \frac{\partial P}{\partial p} \cos p\right) f(x + t\cos p)\, dp\, dq,$$

wo zur Abkürzung

$$\exp\left(-\frac{t}{2} \cos p\right) \cos\left(\frac{t}{2} \sin p \sin q\right) = P$$

gesetzt ist; ist die Funktion $f$ nur für kleine Werte ihres Arguments von Null verschieden, so kann die erste Zeile auch durch

$$\frac{1}{2} \exp\left(\frac{x}{2}\right)\left\{f(x-t) + f(x+t)\right\}$$

ersetzt werden; von der zweiten behauptet er, sie könne für große Werte der Zeit in erster Annäherung ganz vernachlässigt und in zweiter durch

$$\frac{l}{\sqrt{t}}\left(A \cos\frac{t}{2} + B \sin\frac{t}{2}\right) \exp\left(\frac{x}{2}\right)$$

ersetzt werden, wo $A$ und $B$ von $x$ und $t$ unabhängige Faktoren, $2l$ die Ausdehnung der Anfangsstörung bedeuten.

Um auch für die Formel (1230) einen asymptotischen Ausdruck zu erhalten, entwickelt *Poisson*[1819]) unter dem Integralzeichen die alge-

1818) Conn. des temps pour 1826[23], p. 274. Er gibt auch die entsprechende Umformung für den anderen, von den Anfangswerten von $\partial v/\partial t$ abhängenden Bestandteil.

1819) Chaleur suppl. p. 39. Inwiefern eine solche Entwicklung berechtigt ist, da doch $t^{-\frac{1}{2}}$ überall mit $z$ multipliziert auftritt und bis $z = \infty$ integriert werden soll, müßte noch genauer untersucht werden; was Poisson p. 45 selbst braischen Faktoren, mit denen die Exponential- und trigonometrischen Funktionen multipliziert sind, nach fallenden Potenzen von $t$ und bricht mit Gliedern der Ordnung $-3/2$ ab; so erhält er zunächst:

$$(1407) \qquad u \sim \frac{8}{\pi t}\int_0^\infty \cos\left(2z^2 - \frac{xz}{\sqrt{t}}\right)\exp\left(-\frac{xz}{\sqrt{t}}\right) z\,dz$$

$$+ \frac{8}{\pi b t\sqrt{t}}\int_0^\infty \left[\sin\left(2z^2 - \frac{xz}{\sqrt{t}}\right) - \cos\left(2z^2 - \frac{xz}{\sqrt{t}}\right)\right]\exp\left(-\frac{xz}{\sqrt{t}}\right) z^2\,dz$$

und da die Integrale sich mit Hilfe der Gleichungen (1091) auswerten lassen:

$$u \sim \frac{1}{t\sqrt{\pi t}}\left[x + \frac{1}{b}\left(1 - \frac{x^2}{2t}\right)\right]\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

87. **Die mit einer partiellen Differentialgleichung verträglichen Unstetigkeiten.** Die Frage, welcherlei Unstetigkeiten man in dem Integral einer partiellen Differentialgleichung noch zulassen kann, ohne daß die Differentialgleichung selbst ihren Sinn verliert, ist bei ihrem ersten Auftreten eng verknüpft mit der allgemeineren Frage, wie weit die Benutzung unstetiger Funktionen in der Analysis überhaupt zulässig ist, und es ist daher über die ersten einschlägigen Diskussionen bereits in Nr. 28 berichtet. In konkreterer Gestalt erscheint die Frage zuerst bei dem von *D. Bernoulli*[1820]) gestellten Problem der Schwingungen einer Saite, die aus zwei Stücken von verschiedenen physikalischen Konstanten zusammengesetzt ist. *Euler* hatte zuerst[1821]) angenommen, an der Übergangsstelle müßten beide Stücke immer dieselbe Tangente haben; nachher aber, im Verlauf einer Diskussion mit *D. Bernoulli*, der dieselbe Forderung gestellt hatte[1822]), erinnerte er sich daran, daß er doch früher selbst immer behauptet hatte, bei der homogenen Saite sei das Auftreten von Ecken kein Hindernis für die Anwendung seiner Integrationsmethode, und ließ daher jene Forderung jetzt auch für die unhomogene Saite fallen.[1823]) *S. D. Poisson*

darüber sagt, genügt nicht, könnte aber vielleicht doch als Ausgangspunkt für eine genauere Untersuchnng dienen.

1820) J. des sçavans 1758, p. 166.

1821) Petrop. n. comm. 9 (1762/63), p. 274.

1822) Ib. 16 (1771), p. 269.

1823) Ib. 17 (1772), p. 413. Euler führt eine Übergangsbedingung ein, aus der aber folgen würde, daß die Obertöne auch einer solchen Saite zum Grundton harmonisch wären; vgl. darüber die Bemerkungen von *S. D. Poisson*, J. Éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 474. — Der scheinbare Widerspruch ist übrigens dahin aufzuklären, daß auch bei der homogenen Saite eine Unstetigkeit der Tangente nicht beständig an einer und derselben Stelle stehen bleiben kann, sondern mit der zugehörigen Fortpflanzungsgeschwindigkeit fortrücken muß.

dagegen argumentiert umgekehrt[1824]): Derselbe Schluß, der bei der gestückelten Saite zu der Erkenntnis von der Notwendigkeit der Stetigkeit der Tangente an der Übergangsstelle führt, gilt auch für jeden Punkt der unhomogenen: man müsse also auch bei dieser durchgängige Stetigkeit der Tangente verlangen: „sans cette restriction, le mouvement de la corde ne saurait être déterminé par l'analyse différentielle." Er erläutert das für eine Differentialgleichung 1. Ordnung noch näher[1825]): im Integral einer solchen brauche man nur die Stetigkeit der Funktion selbst, nicht die ihrer Ableitungen vorauszusetzen: die Gleichung behalte an der Sprungstelle der letzteren einen bestimmten Sinn, wenn man diese dort durch Gleichungen wie

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h=0} \frac{f(x+\frac{1}{2}h) - f(x-\frac{1}{2}h)}{h}$$

definiere. Bei A. Cauchy findet sich die Bemerkung[1826]): Die Differentialgleichung setzt die Stetigkeit der Funktion voraus, denn ohne sie kann man nicht von einer Ableitung sprechen. Weiter[1827]): Sobald man Unstetigkeiten zuläßt, sind die Lösungen durch die Anfangsbedingungen nicht mehr vollständig bestimmt. Für mechanische Probleme hat man die stetigen Lösungen zu nehmen, für physikalische, wenn die Anfangsbedingungen selbst unstetig wird, als Grenzfälle stetiger Funktionen aufzufassende Lösungen.

Daß man sich das Auftreten von Unstetigkeiten in den Integralen physikalischer Differentialgleichungen durch die Annahme von Energiequellen in einzelnen Punkten verständlich machen kann, hat, so viel ich sehe, zuerst *G. Libri*[1828]) an dem Beispiel der Lösung der Gleichung der linearen Wärmeleitung durch

$$u = \exp(-|x|)$$

bemerkt.

*J. M. C. Duhamel* setzt ohne eingehendere mathematische Be-

---

1824) J. Éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 451, 474. Auch mécanique 2, p. 307 hält Poisson noch an dieser Auffassung fest.

1825) Ib. p. 454.

1826) Schon früher; wiederholt C. R. 28 (1849) p. 277 = Oeuvres (1) 11, p. 121.

1827) ib. 29 (1849), p. 548 = (1) 11, p. 173. Nähere Ausführungen p. 180. Aber führt hier jede Art des Übergangs zu demselben Resultat?

1828) J. f. Math. 7 (1831), p. 129. Die Herbeiziehung des Ausdrucks der Lösung durch das Integral $\frac{2}{\pi} \cdot y_1$ Gl. 864 tut nichts zur Sache. — Auch *J. Challis* sucht sich die Möglichkeit des Auftretens von Unstetigkeiten (im alten Sinne des Wortes) in den Integralen der Differentialgleichungen der Mechanik durch die Annahme entsprechender Unstetigkeiten in den wirkenden Kräften verständlich zu machen, Cambr. trans. 3, (1830), p. 288.

gründung zunächst für das Problem der Wärmeleitung auseinander[1829]): eine kleine Änderung der Anfangsbedingungen könne nur eine kleine Änderung der Lösung bedingen; eine diskontinuierliche Funktion könne mit beliebiger Annäherung durch eine kontinuierliche ersetzt werden; also müßten die unter Voraussetzung kontinuierlicher Anfangswerte abgeleiteten Resultate auch für diskontinuierliche Gültigkeit behalten. Insbesondere gelte das auch für den Fall, daß die vorgeschriebenen Anfangswerte die vorgeschriebenen Grenzbedingungen nicht erfüllen.

Bei nicht linearen Differentialgleichungen treten Unstetigkeiten wohl notwendig in den Lösungen auf. Das scheint zuerst *C. Challis* bemerkt zu haben. *Poisson* hatte für die Differentialgleichung:

$$(1408) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(1 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$$

die Lösung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = w, \quad w = f(x - (1 + w)t)$$

gegeben; *Challis*[1830]) macht nun darauf aufmerksam, daß z. B. für $f(x) = m \sin x$ daraus folgt: In einem bestimmten Zeitmoment $t_1$ ist ein Minimum der Geschwindigkeit $w = 0$ vorhanden für $x = t_1 + n\pi$ und ein Maximum $w = m$ für $x = (1 + m)t_1 + \frac{2n-1}{2}\pi$, zur Zeit $t_1 = \frac{\pi}{2m}$ fallen beide Werte zusammen. *G. H. Stokes*[1831]) weist demgegenüber darauf hin, daß die Tangente der $(w, x)$-Kurve zur Zeit $t + dt$ den Wert

$$\frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{1 + t\frac{\partial w}{\partial x}}$$

ergebe, und daß die Benützung der angegebenen Lösung also nicht über die Zeit hinaus Sinn haben könnte für welche der Nenner Null wird.[1832]) *Challis* erwidert zunächst[1833]): Also ist die Annahme ebener Wellen überhaupt unzulässig.[1834]) Man dürfe eine Formel nicht bloß

1829) J. éc. polyt. cah. 22 (1833), p. 75.

1830) Phil. Mag. (3) 38 (1848), p. 496.

1831) Ib. (3) 33 (1848), p. 350 = papers 2 p. 51.

1832) Die Art wie er diese Schwierigkeit durch Einführung von diskontinuierlichen Flächen zu beseitigen sucht, hat er später (papers 2, p. 55; von 1883) auf Bemerkungen von *Kelvin* und *Rayleigh* hin als mit dem Energieprinzip in Widerspruch stehend zurückgenommeu.

1833) Phil. mag. (3) 35 (1849), p. 243.

1834) Diese Folgerung schon Note 1830.

bis zu einer gewissen Grenze benützen, sondern entweder auch darüber hinaus oder gar nicht.

**88. Variable Koeffizienten in den Grenzbedingungen.** Auch Fälle, in welchen die in den Grenzbedingungeu auftretenden Koeffizienten nicht mehr konstant, sondern Funktionen des Ortes sind, können mit Hilfe der Methode der Reihenentwicklungen behandelt werden, wenn diese Funktionen selbst sich in solche Reihen entwickeln lassen. So behandelt *J. Liouville*[1835]) die Aufgabe, die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1409}$$

unter den Nebenbedingungen

$$u = 0 \text{ für } x = \frac{\pi}{2}, \quad u = 0 \text{ für } y = +\infty, \tag{1410}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} - uf(x) + F(x) = 0 \text{ für } y = 0$$

durch eine gerade[1836]) Funktion von $x$ zu integrieren, indem er zunächst $f(x)$ in eine Reihe nach den Kosinus der geraden Vielfachen von $x$

$$f(x) = \sum R_n \cos nx \tag{1411}$$

entwickelt; der Ansatz:

$$u = \sum A_n e^{-ny} \cos nx, \tag{1412}$$

in welchem nur die ungeraden Vielfachen von $x$ auftreten sollen, verlangt dann, daß

$$\sum nA_n \cos nx + f(x) \sum A_n \cos nx = F(x)$$

wird. Liouville setzt, durch das Resultat der direkten Untersuchung des Falles $f(x) =$ konst. geleitet,

$$A_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} (P(\mu) \cos n\mu + Q(\mu) \sin n\mu)\, d\mu. \tag{1413}$$

Wird das eingeführt, die Produkte trigonometrischer Funktionen in Summen verwandelt und auch die Integraldarstellung der Koeffizienten der Entwicklung von $F(x)$ benutzt, so werden zur Bestimmung von

1835) J. de math. 1 (1836), p. 33 = Paris mém. prés. 5 (1838), p. 559 (von 1834). Auszug J. f. Math. 16 (1837), p. 39.

1836) Liouville behandelt p. 68 auch den Fall, daß von dieser Forderung abgesehen wird; es treten dann neben den Kosinus- auch Sinusglieder auf.

$P$ und $Q$ die beiden Gleichungen erhalten[1837]):

$$(1414)\quad \frac{dQ}{d\mu} + Pf(\mu) = F(\mu) - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{f(\mu) - f(\alpha)}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha} Q(\alpha) \cos\mu \sin\alpha \, d\alpha$$

$$\frac{dP}{d\mu} - Qf(\mu) = 0,$$

mit den Nebenbedingungen:

$$(1415)\quad Q = 0 \text{ für } \mu = 0, \quad P = 0 \text{ für } \mu = \frac{\pi}{2}.$$

Die Auflösung dieser Integralgleichungen[1838]) gelingt ihm nur unter der speziellen Voraussetzung, daß sich der unter dem Integralzeichen stehende Quotient als Summe von Produkten von Funktionen von nur je einem Argument darstellen läßt.[1839])

$$(1416)\quad \frac{f(\mu) - f(\alpha)}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha} = \sum \Psi_r(\mu)\Pi_r(\alpha);$$

dann geht nämlich die erste Gleichung über in:

$$\frac{dQ}{d\mu} + Pf(\mu) = F(\mu) - \sum C_r \Psi_r(\mu),$$

wobei

$$(1417)\quad C_r = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} Q(\alpha)\Pi_r(\alpha)\, d\alpha;$$

und nun kann man erst für unbekannte Werte der Konstanten $C_r$ integrieren und diese Konstanten dann mit Hilfe der letzteren Gleichung bestimmen.[1840])

**89. Mit der Zeit variable Grenzflächen.** Spezielle physikalische Probleme führen auch auf die Aufgabe, eine partielle Differentialgleichung mit den beiden unabhängigen Veränderlichen $x, t$ in der Weise zu integrieren, daß an einem mit $t$ noch veränderlichen Wert $z$ von $x$ eine Grenzbedingung zu erfüllen ist, die selbst noch diese zu bestimmende Funktion $z$ von $t$ enthält. Das älteste mir bekannte derartige Problem ist das des „Fortschreitens des Frostes" oder überhaupt der Erstarrung irgendeiner Flüssigkeit, das von *Lamé* und *Clapeyron* im Interesse geologischer Fragestellungen in Angriff ge-

1837) Einfachere Ableitung dieser Gleichungen, ohne Benutzung der Reihenentwicklung von $f(x)$, p. 57.

1838) Als solche sieht sie Liouville selbst an, p. 50.

1839) Für den Fall, daß diese Bedingung nicht erfüllt ist, meint er p. 57, man könne sich „der bekannten Methode sukzessiver Approximationen" bedienen.

1840) Die Möglichkeit, daß diese Gleichungen sich widersprechen oder nicht voneinander unabhängig sind, erörtert Liouville selbst in einer Note, J. de math. p. 55 und J. f. Math. p. 43.

nommen worden ist.[1841]) Sie führen es auf die Integration der Differentialgleichung der linearen Wärmeleitung unter den Nebenbedingungen

$$u = 0 \text{ für } x = 0; \quad u = \alpha, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ für } x = z$$

zurück und geben ohne Beweis als Lösung:

$$u = A \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad z = \beta\sqrt{t},$$

wobei die Konstanten $A$, $\beta$ die Bedingungen

$$A \exp\left(-\frac{\beta^2}{4}\right) = \frac{\beta}{2}, \quad A \operatorname{Erf} \beta = \alpha$$

zu erfüllen haben.

**90. Sinn der Lösung für dem angenommenen Anfangszustand vorangehende Zeiträume.** *W. Thomson Lord Kelvin* hatte bereits aus der Lösung der Wärmeleitungsgleichung (p. 1185) den Schluß gezogen, daß bei diesem Problem ein beliebig vorgeschriebener Anfangszustand im allgemeinen nicht als Folge vorhergehender Zustände aufgefaßt werden kann, indem diese Formeln im allgemeinen für negative Werte von $t$ imaginäre Werte liefern.[1842]) Bald darauf untersucht er die Sache näher.[1843]) Unter der Voraussetzung, daß sich die Temperatur als Funktion der Zeit in eine trigonometrische Reihe entwickeln läßt, kommt er zu dem Schluß, sie muß sich dann als Funktion von $t$ und $x$ in eine Reihe der Form:

$$(1418) \quad \sum \Big[\exp(x\sqrt{n})\big(A_n \cos(x\sqrt{n} + 2tn) + B_n \sin(x\sqrt{n} + 2tn)\big)$$
$$+ \exp(-x\sqrt{n})\big(A_n^{(1)} \cos(x\sqrt{n} - 2tn) + B_n^{(1)} \sin(x\sqrt{n} - 2tn)\big)$$

entwickeln lassen. Wird hier $t = 0$ gesetzt, so erhält man die Form, in der sich der Anfangszustand ausdrücken lassen muß, wenn er als Folge seit unbegrenzt langer Zeit vorhergehender Zustände betrachtet werden soll.

Ein weiterer Aufsatz[1844]) faßt die Sache von einer anderen Seite auf: Zu dem Anfangszustand

$$(1419) \qquad u_0 = \sum A_n \cos(m_n x + p_n)$$

gehört die Lösung

$$(1420) \qquad u = \sum \exp(-m_n^2 t)\, A_n \cos(m_n x + p_n),$$

1841) Ann. chim. phys. 47 (1831), p. 255 = bull. Férussac 16 (1831), p. 258.
1842) Cambr. math. j. (3) 4 (1842), p. 174 = papers 1 p. 11.
1843) Ib. (3) 5 (1843), p. 206 = papers 1, p. 16.
1844) Ib. (4) 2 (1844), p. 67 = papers 1, p. 41.

und die Bedingung ist einfach die, daß diese Reihe auch noch für negative $t$ konvergiert.

*A. A. Cournot* hat gemeint[1845]): wenn man schreibt

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}[\varphi(x + 2a\sqrt{t}) + \varphi(x - 2a\sqrt{t})]\exp(-a^2)\,da,$$

erhält man eine auch für negative Werte von $t$ gültige Formel, indem die imaginären Bestandteile herausfallen.

## VII. Integration partieller Differentialgleichungen mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen.

**91. Integration durch trigonometrische Reihen.** Eine partielle Differentialgleichung mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen kann durch trigonometrische Reihen integriert werden, wenn sie: 1. Elementarlösungen zuläßt, die Produkte aus je irgendeiner Funktion der einen Variabeln (der Zeit) in trigonometrische Funktionen von je einer der übrigen Variabeln (der Raumkoordinaten) sind, z. B.: $\varphi_{m,n}(t)\cos mx \cos ny$; und wenn 2. für je zwei Werte dieser übrigen Variabeln Grenzbedingungen der in Nr. 69 besprochenen Art vorgeschrieben sind. Eine derartige Integration (mit unharmonischen trigonometrischen Reihen) tritt bereits bei *J. Fourier* auf[1846]); weitere Beispiele finden sich bei *Poisson*[1847]), bei *Navier*[1848]), bei *Lamé* und *Clapeyron*[1849]), bei *J. M. C. Duhamel*[1850]), bei *G. G. Stokes*.[1851])

Wie man bei solchen Entwicklungen auf in Nr. 19 besprochene Umstände Rücksicht nehmen muß, hat *G. G. Stokes*[1852]) gezeigt, und zwar an dem Beispiel der Integration von $\Delta u = 0$ für ein Parallelepiped, wenn an jeder Grenzfläche eine Funktion der beiden anderen Variabeln vorgeschrieben ist. Wird angesetzt:

$$u = \sum\sum Z_{m,n} \sin mx \sin ny,$$

so kommt:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \sum\left[-m^2\sum Z_{m,n}\sin ny + \frac{2m}{\pi}[f_1(y,z) - (-1)^m F_1(y,z)]\right]\sin nx,$$

1845) Théorie 2 (1841), p. 421.

1846) Paris mém. 4 (1819/20[24]), (Preisschrift von 1811) p. 458; théorie de la chaleur Nr. 321 = Oeuvres 1, p. 359.

1847) Paris mém. 1 (1816), p. 88; 8 (1829), p. 510; chaleur p 354.

1848) Bull. philomat. 1822, p. 77; 1825, p. 51 (unharmonische Reihen); Bull. Férussac 5 (1826), p. 309.

1849) J. f. Math. 7 (1831), p. 401.

1850) J. Ec. polyt. cah. 21 (1832), p. 389. 22 (1833) p. 54 (von 1829/30).

1851) Cambr. trans. 8 (1) (1844), p. 136.

1852) Cambr. Trans. 8 (1847) = papers 1, p. 296.

und wenn die innere Klammer in die Reihe $\sum Q_{m,n} \sin ny$ entwickelt wird und die entsprechende Größe bei der Bildung von $\frac{d^2u}{dy^2}$ mit $P_{m,n}$ bezeichnet wird, so ergibt sich für $Z_{m,n}$ eine Gleichung der Form:

$$(1421) \qquad \frac{d^2Z}{dz^2} - (m^2 + n^2)Z + \frac{2m}{\pi} Q + \frac{2n}{\pi} P = 0.$$

Die auftretenden Integrationskonstanten bestimmen sich, wenn man auch die Funktionen $f_3$ und $F_3$ in die Doppelreihen

$$\sum G_{m,n} \sin mx \sin ny, \quad \sum H_{m,n} \sin mx \sin ny$$

entwickelt, woraus hervorgeht, daß sich $Z_{m,n}$ für $z = 0$ auf $G_{m,n}$ und für $z = c$ auf $H_{m,n}$ reduziert.

Nachher[1853]) gibt er auch noch ein ihm von *W. Thomson* mitgeteiltes Verfahren. Er setzt zunächst die dreifache Reihe an

$$\sum A_{mnp} \sin mx \sin ny \sin pz;$$

soll $u = 0$ für $z = \pi$, $u = f(x, y)$ für $z = 0$ werden, so gibt die Differentiation

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \sum \left[ - \sum \sum p^2 A_{mnp} \sin mx \sin ny + \frac{2p}{\pi} f(x, y) \right] \sin pz.$$

Das wendet er auch auf den Fall an, daß $f$ nur in einem Element der betreffenden Koordinatenebene von Null verschieden ist und durch die Reihe

$$\frac{4}{\pi^2} \sum \sum \sin m\alpha \sin n\beta \sin mx \sin ny$$

ersetzt werden kann. Die Differentiation nach $y$ und $z$ kann unter dem Zeichen geschehen. Es folgt:

$$A_{mnp} = \frac{8}{\pi^3} \cdot \frac{p}{m^2 + n^2 + p^2} \sin m\alpha \sin n\beta.$$

Ausführung der Summation nach $n$ oder nach $p$ mit Hilfe der Gleichungen (278) und der entsprechenden für $\sum \frac{n \cos nx}{n^2 + \mu^2}$ führt zu der einen oder anderen der vorigen Formeln zurück.

In analoger Weise behandelt er dann auch[1854]) die Integration derselben Differentialgleichung für denselben Körper unter der Bedingung, daß $u$ an der Oberfläche überall Null sein und an einem Punkte $\alpha, \beta, \gamma$ im Innern wie $\frac{1}{\gamma}$ unendlich werden soll, indem er zunächst den Fall behandelt, daß in einem kleinen Gebiet im Innern

---

1853) ib. p. 302.
1854) 1, p. 303.

nicht die Gleichung $\Delta u = 0$, sondern $\Delta u =$ einer gegebenen Funktion $\varrho$ erfüllt sein soll und diese in die Reihe

$$\varrho = \sum\sum\sum R_{mnp} \sin mx \sin ny \sin pz$$

entwickelt. Dann geht er dazu über, dieses Gebiet unendlich klein werden zu lassen, und zwar so, daß dabei

$$\int\int\int \varrho \, d\tau = 1$$

wird; dann wird

$$R_{mnp} = \frac{8}{\pi^3} \sin m\alpha \sin n\beta \sin p\gamma$$

und also

$$u = \frac{32}{\pi^2} \sum \frac{1}{m^2 + n^2 + p^2} \sin mx.$$

**92. Integration von Differentialgleichungen mit $n+1$ unabhängigen Veränderlichen durch $n$-fache bestimmte Integrale.** Derartige Integrationen lassen sich zunächst für die einfachsten Fälle durch naheliegende Verallgemeinerungen der Formeln von Nr. 73 gewinnen. So tritt die Integration der Differentialgleichung der Wärmeleitung im unbegrenzten Raume

$$(1422) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

unter der Anfangsbedingung:

$$u = f(x, y, z) \text{ für } t = 0$$

durch

$$(1423) \quad u = \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2) f(x + 2\lambda\sqrt{t}, y + 2\mu\sqrt{t}, z + 2\nu\sqrt{t}) \, d\lambda \, d\mu \, d\nu$$

und ihre Umformung in

$$(1424) \quad u = \frac{1}{8\sqrt{\pi^3 t^3}} \int\int\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}{4t}\right\} f(\alpha, \beta, \gamma) \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma$$

bereits bei *Poisson*[1855]), dann auch bei *Fourier*[1856]) auf.

Andere solche Integrationen sind zuerst auf dem Wege erhalten worden, daß einer (hier unterdrückten) Konstanten, die zunächst auf reelle Werte beschränkt war, auch komplexe beigelegt wurden. So

1855) Bull. philomat. 1816, p. 12; Paris mém. 3 (1818), p. 144. J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 139, 357. *A. Cauchy* (Bull. philomat. 1821, p. 109) gewinnt diese Form der Lösung aus der durch das sechsfache Fouriersche Integral.

1856) Théorie Nr. 372, 376 = Oeuvres 1, p. 429, 435; (noch nicht in der Preisschrift von 1811).

zeigt *S. D. Poisson*[1857]), daß der Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} \tag{1425}$$

jedes Integral jeder der beiden Gleichungen

$$\pm\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \tag{1426}$$

genügt; indem er diese Integrale in der Laplaceschen Form annimmt und dann neue Integrationsvariable durch eine komplexe Substitution einführt, kommt er dazu, das Integral der Gleichung der Plattenschwingungen:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0 \tag{1427}$$

in der Form hinzuschreiben:

$$z = \int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2-b^2}\varphi(x + 2a\sqrt{ti},\, y + 2b\sqrt{ti})\,da\,db \tag{1428}$$

$$+ \int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2-b^2}\psi(x + 2a\sqrt{-ti},\, y + 2b\sqrt{-ti})\,da\,db$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\Big\{\cos(a^2+b^2) f_1(x + 2a\sqrt{t}, y + 2b\sqrt{t}) \tag{1429}$$

$$+ \sin(a^2+b^2) f_2(x + 2a\sqrt{t}, y + 2b\sqrt{t})\Big\}\,da\,db.$$

Durch Einführung neuer Integrationsvariabler gelangt er von da zu der Form:

$$z = \frac{1}{4\pi t}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\frac{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}{4t} f(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta, \tag{1430}$$

die wieder die Hauptlösung erkennen läßt.[1858])

Andererseits gelangt man auch zu Darstellungen der allgemeinen Lösung durch bestimmte Integrale, wenn es gelingt, in ihrer Entwicklung in eine Potenzreihe das allgemeine Glied durch ein bestimmtes Integral darzustellen und dann die Summation unter dem Integral-

1857) Bull. philomat. 1818, p. 127; Paris mém. 3 (1818)[20], p. 149.

1858) *Fourier* scheint ib. p. 130 diese Form für sich in Anspruch zu nehmen, als in einer der Akademie vorgelegten, aber nicht publizierten Abhandlung enthalten. In der Théorie, Nr. 412 = Oeuvres 1, p. 488 leitet er sie aus der Darstellung (1482) ab, indem er in ihr die Integrationen nach den Parametern vermittels (955) ausführt, und gelangt dann von ihr zurück zu (1429); reproduziert von *A. A. Cournot,* Théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 232.

zeichen zu vollziehen. So gelangt *S. D. Poisson*[1859]) von der Integration der Gleichung der Schallschwingungen durch die Potenzreihe

$$(1431)\qquad \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \Delta^n F(x, y, z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \Delta^n f(x, y, z),$$

indem er in ihr $\Delta^n F$ vermöge seiner Hilfsformel (Nr. 65) durch

$$(1432)\ \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left\{ \cos u \frac{\partial}{\partial x} + \sin u \sin v \frac{\partial}{\partial y} + \sin u \cos v \frac{\partial}{\partial z} \right\}^n F \sin u \, du \, dv$$

ersetzt und dann, nach Vertauschung der Reihenfolge von Summation und Integration, die unter dem Integralzeichen auftretende Reihe als eine symbolische Darstellung einer Taylorschen Entwicklung auffaßt, zur Darstellung derselben allgemeinen Lösung durch die Summe zweier Doppelintegrale:

$$(1433)\ \varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(x + t\cos u, y + t \sin u \sin v, z + t \sin u \cos v) t \sin u \, du \, dv$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F(x + t \cos u, y + t \sin u \sin v, z + t \sin u \cos v) \, t \sin u \, du \, dv.$$

Er verifiziert dieses Resultat einmal durch Differentiation unter dem Integralzeichen und partielle Integration[1860]), dann auch, indem er in der Darstellung des Integrals durch eine Reihe von Elementarlösungen:

$$(1434)\qquad u = \sum A \operatorname{\mathfrak{Sin}}(pt) e^{gx+hy+kz} + \cdots, (p^2 = g^2 + h^2 + k^2 + \cdots)$$

den Faktor $\operatorname{\mathfrak{Sin}} pt$ durch das Doppelintegral

$$(1435)\qquad \operatorname{\mathfrak{Sin}} pt = \frac{pt}{2\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \exp\{t(g \cos u + h \sin u \sin v + k \sin u \cos v)\} \sin u \, du \, dv$$

ersetzt, die Reihenfolge von Integration und Summation vertauscht und die dann unter dem Integralzeichen auftretende Summe

$$(1436)\qquad \frac{1}{2\pi} \sum A p \exp(gx + hy + kz)$$

als Ausdruck einer willkürlichen Funktion $f(x, y, z)$ ansieht.[1861])

Das so erhaltene Resultat nimmt er dann auch für den Fall in Anspruch, daß die [hier auf 1 reduzierte] Konstante der Fortpflanzungsgeschwindigkeit imaginär wird; so kommt er zur Darstellung

---

1859) Bull. philomat. 1819, p. 113; Paris mém. 3 (1818)[20], p. 131.

1860) Paris mém. 3, p. 134.

1861) p. 142.

des Integrals der Potentialgleichung in drei Variabeln durch[1862]):

$$(1437)\quad u = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(y + xi\sin u\sin v,\ z + xi\sin u\cos v)\, x\sin u\, du\, dv$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F(y + xi\sin u\sin v,\ z + xi\sin u\cos v)\, x\sin u\, du\, dv,$$

meint aber selbst, daß damit nicht viel anzufangen sei. Wohl aber erhält er auf diesem Wege das Integral der Wärmeleitungsgleichung zunächst in der symbolischen Form[1863]):

$$(1438)\quad u = \exp\left\{t\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right\} f(x, y, z)$$

$$= \iiint_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 - 2\alpha\sqrt{t}\frac{\partial}{\partial x}\right.$$

$$\left. - 2\beta\sqrt{t}\frac{\partial}{\partial y} - 2\gamma\sqrt{t}\frac{\partial}{\partial z}\right\} f(x, y, z)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma,$$

die sich sogleich in (1423) überführen läßt; und das der Gleichung:

$$(1439)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u,$$

auf die er die allgemeine [hyperbolische] Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten zwischen zwei Veränderlichen reduziert, nacheinander in den Formen[1864]):

$$(1440)\quad u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}\left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n f(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n F(x)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{t^n}{n!}\left\{\sin u\sin v + \cos u\frac{\partial}{\partial x}\right\}^n t F(x)\sin u\, du\, dv + \cdots$$

$$= \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{t\sin u\sin v} F(x + t\cos u)\sin u\, du\, dv + \cdots.$$

Andere derartige Integrationen gelingen, indem man als Anfangsglied der Entwicklung das Integral einer Gleichung mit einer Varia-

---

1862) p. 144.

1863) p. 162. Reproduziert von *G. Plana,* Torino mem. 25 (1820), p. 146. Auch dieses Resultat verifiziert Poisson p. 166 durch Differentiation unter dem Integralzeichen und partielle Integration.

1864) p. 174.

blen weniger ansetzt. So integriert *M. A. Parseval*[1865]) die Gleichung

(1441) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

durch die Reihe:

(1442) $$u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left\{a^n \int^{(2n)} \frac{\partial^{2n} v}{\partial y^{2n}} dt^{2n}\right\},$$

in der

(1443) $$v = \varphi(y, x + t\sqrt{a}) + \psi(y, x - t\sqrt{a})$$

die Lösung von

(1444) $$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

ist; entsprechend führt er die Lösung der entsprechenden Gleichung mit drei Raumkoordinaten auf die von (1441) zurück. Dann bemerkt er, daß die Reihe (1442) aus den von $s$ freien Gliedern derjenigen Reihe besteht, die man erhält, wenn man in

(1445) $$T = \sum_{n=0}^{\infty} a^n s^n \int^{(2n)} \frac{\partial^{2n} v}{\partial y^{2n}} dt^{2n}$$

$a$ durch $a + a/s$ ersetzt. Die Reihe $T$ enthält die Glieder gerader Ordnung der Reihe:

(1446) $$P = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{as}^{\,n} \int^{(n)} \frac{\partial^n v}{\partial y^n} dt^n,$$

deren Summe wieder gleich

(1447) $$\int \frac{\partial v}{\partial t} dt,$$

ist wenn vor der Integration nach $t$ das $y$ durch $\mu - t\sqrt{as}$ ersetzt und nachher wieder $y$ eingeführt wird. Das gesuchte Absolutglied von $T\left(a + \frac{a}{s}\right)$ läßt sich dann schließlich mit Hilfe seines Satzes (Nr. 23) durch ein bestimmtes Integral darstellen.

*A. Cauchy*[1866]) gelangt für die Gleichung der Schallbewegung mit nur zwei Raumkoordinaten zu einer *Poisson*s Form (1433) entsprechenden Form der Lösung, indem er in der Form

(1448) $$\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\infty}{}^{(4)} \cos(t\sqrt{\mu\nu}) \sin\nu \cos\frac{\mu[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2]}{4} f(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta\, d\mu\, d\nu$$

die Integration nach $\mu$ und $\nu$ zuerst ausführt; er erhält so zunächst:

(1449) $$\frac{1}{2\pi}\iint \frac{f(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta}{\sqrt{t^2 - (x-\alpha)^2 - (y-\beta)^2}},$$

1865) Paris mém. prés. 1 (1806), p. 383 (von 1801).
1866) Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 182.

wobei die Integration über alle diejenigen Werte von $\alpha$, $\beta$ zu erstrecken ist, für welche der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen nicht negativ ist, und daraus durch Einführung von Polarkoordinaten die gewünschte Form.

Ähnlich wie Parseval integriert *S. D. Poisson*[1867]) die Differentialgleichung der Schallbewegung

$$(1450)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

durch die Summe zweier Reihen, von denen die eine ist:

$$(1451)\qquad u = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n-1} \int^{(n)} f_n(\xi, \mu, \varphi)\, d\xi^{(n)},$$

dabei bedeuten $r, \mu = \cos\theta, \varphi$ Polarkoordinaten, $\xi$ ist nach der Ausführung sämtlicher Integrationen durch $r - t$ zu ersetzen, und die Funktionen $f_n$ bestimmen sich auseinander durch die Rekursionsformel:

$$(1452)\quad 2(n+1) f_{n+1} = n(n+1) f_n + \frac{\partial}{\partial \mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial f_n}{\partial \mu}\right) + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 f_n}{\partial \varphi^2}.$$

Indem er dann die wiederholten Integrationen auf einfache zurückführt, kommt er[1868]) zur Darstellung der Lösung durch die Summe zweier Integrale, deren Integranden Differentialgleichungen mit einer Variabeln weniger, als in (1450) vorkommen, genügen.

Später[1869]) gibt er dann die Verallgemeinerung des Ansatzes (1231) von Lacroix: ist

$$(1453)\qquad \exp(pt + gx + hy + \cdots),$$

wo $p$ mit den $g, h$ durch eine aequatio vicaria zusammenhängt, die Elementarlösung, so ist die allgemeine:

$$(1454)\qquad \int \exp(pt + gx + hy + \cdots) f(g, h, \cdots)$$

bzw. eine Summe solcher Integrale, wenn die aequatio vicaria zu gegebenen Werten von $g, h$ mehr als eine Wurzel $p$ hat.

Dem entspricht es, wenn *Cauchy*[1870]) die Potentialgleichung

$$(1455)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

---

1867) J. éc. polyt. cah. 14 (1808), p. 338.

1868) p. 342.

1869) Paris mém. 3 (1818[20]), p. 171; Bull. philomat. 1822, p. 82. *Lacroix* skizziert diese Verallgemeinerung übrigens auch selbst, traité des différences et des séries, Paris 1800, p. 529 (1819 weggelassen).

1870) Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 25 (von 1815). Die Frage nach der Allgemeinheit dieser Lösung behandelt er p. 148 analog wie im Falle von zwei unabhängigen Variabeln.

durch

(1455a) $$u = \sum \iint e^{z\sqrt{m^2+n^2}} \cos mx \cos ny\, f(m,n)\, dm dn,$$

und die Wellengleichung

(1456) $$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

durch[1871])

(1457) $$u = \sum \iint e^{t\sqrt[4]{m^2+n^2}} \cos mx \cos ny\, f(m,n)\, dm\, dn$$

integriert.

*S. D. Poisson*[1872]) erhält die Lösung der Gleichung der stationären Wärmeströmung in einer Kugel, unter der Oberflächenbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial r} + b(u - f(\theta, \psi)) \text{ für } r = R,$$

durch Vertauschung der Reihenfolge von Summation und Integration in der Lösung durch eine Reihe nach Kugelfunktionen, in der Gestalt:

(1458) $$u(r, \theta, \psi) = \frac{bR^2}{4\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(R^2 - \alpha^2 r^2)\, \alpha^{bR-1} f(\theta_1, \psi_1) \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\psi_1\, d\alpha}{(R^2 - 2rR\alpha\cos\gamma + r^2\alpha^2)^{3/2}}$$

mit

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos(\psi - \psi_1).$$

Im Grenzfall $R = \infty$ führt er durch

$$\alpha = 1 - \frac{h}{R}, \quad r = R - z, \quad R\theta = s, \quad R_1\theta_1 = s_1, \quad s\cos\psi = x,$$
$$s\sin\psi = y, \quad s_1\cos\psi_1 = x_1, \quad s_1\sin\psi_1 = y_1$$

neue Variable ein; das gibt:

(1459) $$u = -\frac{b}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-bh} f(x_1, y_1)\, dx_1\, dy_1\, dh}{[(h+z)^2 + (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Für $s = 0$, d. h. wenn der Ursprung des Koordinatensystems in den betrachteten Punkt verlegt wird, läßt sich dieser Ausdruck durch Einführung der Mittelwerte

$$F(s_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s_1, \psi_1)\, d\psi_1$$

auf das Doppelintegral

(1460) $$u = b \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-bh}(h+z) F(s_1) s_1\, ds_1 \cdot dh}{[(h+z)^2 + s_1{}^2]^{3/2}}$$

1871) p. 65.

1872) J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 328 (von 1821); chaleur p. 392.

und für $b = \infty$ schließlich auf das einfache Integral

$$(1461) \qquad u = \int_0^\infty \frac{F(s_1) s_1 \, ds_1}{(z^2 + s_1^2)^{3/2}}$$

reduzieren.[1873])

*C. J. Hargreave*[1874]) führt die Differentialgleichung der Kugelfunktionen durch die Substitution

$$\left.\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}\right\} = \varphi \pm \frac{i}{2} \lg \frac{1+\mu}{1-\mu}$$

über in

$$(1462) \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y} + \frac{n(n+1)}{4 \cos^2 \frac{X-Y}{2}} \cdot P = 0$$

und integriert sie nach sukzessiven Substitutionen durch ein $n$-faches Integral. Die durch Integration neu hinzutretenden willkürlichen Funktionen müssen durch Zurückgehen auf die ursprüngliche Gleichung bestimmt werden. Er kommt nur zur Lösung durch eine Entwicklung nach Potenzen von $\mu$, frei von $\varphi$.

Andererseits gelangt man auch zu solchen Darstellungen, wenn es gelingt, die Hauptlösung durch irgendwelche andere Überlegungen zu finden. So schließt *Fourier*[1875]), daß sich die Hauptlösung der Wärmeleitungsgleichung für drei Koordinaten als Produkt von drei Faktoren darstellen lasse, deren jeder die Hauptlösung der entsprechenden Gleichung mit nur einer der drei Koordinaten vorstellt, und kommt so wieder zu der Gleichung (1424) und von ihr zu (1423) zurück.

**93. Integration durch mehrfache Fouriersche Integrale.** Von solchen Integrationen erscheinen bei *A. Cauchy*[1876]) die der Laplaceschen Differentialgleichung (1455) durch:

$$(1463) \qquad u = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{\pm z\sqrt{\xi^2+\eta^2}} \cos(\xi x - \xi \alpha) \cos(\eta y - \eta \beta) f(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta \, d\xi \, d\eta$$

und die der Gleichung der Wasserwellen

$$(1464) \qquad \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

---

1873) p. 334. Conn. des temps (1827) [24], p. 309 bezieht er sich auf dieses Resultat.

1874) Lond. trans. 1841, p. 78.

1875) Théorie de la chaleur Nr. 376 = Oeuvres 1, p. 435.

1876) Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 66, 155 (von 1815); ebenso bei *Fourier*, théorie Nr. 410, p. 486.

durch[1877]):

$$(1465)\quad u = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos(t\sqrt{\xi^2+\eta^2})\cos(\xi x-\xi\alpha)\cos(\eta y-\eta\beta)f(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta\,d\xi\,d\eta.$$

Später[1878]) gibt er die durch Benutzung komplexer Größen vereinfachte allgemeine Formulierung: einer homogenen linearen Differentialgleichung mit beliebig vielen Variablen $x, y, \ldots, t$, und konstanten Koeffizienten wird durch ein Integral der Form genügt:

$$(1466)\qquad \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}{}^{(2n)} \exp\{\tau t + i[\xi(\alpha - x) + \eta(\beta - y) + \ldots]\}\, f(\alpha,\beta,\ldots)\, d\alpha\, d\beta \ldots d\xi\, d\eta \ldots;$$

dabei ist $\tau$ als Funktion von $\alpha, \beta\ldots$ durch diejenige algebraische Gleichung

$$(1467)\qquad F(\xi, \eta, \ldots, \tau) = 0$$

bestimmt, in welche die gegebene Differentialgleichung übergeht, wenn man in ihr allgemein den Differentialquotienten

$$\frac{\partial^{m+n+\cdots+r}}{dx^m\,\partial y^n \ldots \partial z^r}$$

durch $(\xi i)^m (\eta i)^n \ldots \tau^r$ ersetzt. Genügen dieser Gleichung mehrere Werte von $\tau$, so erscheint die allgemeine Lösung der Differentialgleichung als eine Summe von Integralen der Form (1466), in deren jedem eine andere Lösung der Hilfsgleichung und eine andere willkürliche Funktion benutzt ist.[1879]) Sollen diese Funktionen so bestimmt werden, daß die gesuchte Lösung und ihre Ableitungen nach $t$ für $t = 0$ gegebenen Funktionen der übrigen Variablen gleich werden, so ist dazu noch ein System linearer Gleichungen aufzulösen; diese Auflösung gestaltet sich einfach, wenn die Gleichung (1467) in bezug auf $\tau$ eine reine Gleichung ist.[1880]) Dasselbe Problem behandelt er in seiner Abhandlung von 1822.[1881])

---

1877) Oeuvres (1) 1, p. 67, 160. Er gewinnt sie aus der Lösung durch ein Doppelintegral ebenso, wie die Lösung der entsprechenden Gleichung mit einer Variabeln weniger durch ein Doppelintegral aus der durch ein einfaches Integral.

1878) Bull. philomat. 1821, p. 102.

1879) Unter Umständen ist ein Teil dieser Lösungen durch Nebenbedingungen ausgeschlossen; vgl. Note 1634.

1880) p. 107. Speziell erhält er so wieder die verschiedenen Formen (1428), (1482) für die Lösung der Gleichung der Plattenschwingungen (p. 111, 145).

1881) J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 544. Man vgl. *H. Burkhardt*, Jahr.-Ber. d. Deutschen Math.-Ver. 10 (1909), 1, p. 674.

Z. B. integriert er die Gleichung[1882])

(1468) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

unter den Anfangsbedingungen

(1469) $$u = \varpi(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \Pi(x, y, z) \text{ für } t = 0$$

durch das sechsfache Integral

(1470) $$u = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{+\infty}{}^{(6)} \exp\{\xi i(x-\alpha) + \eta i(y-\beta) + \zeta i(z-\gamma)\}\, U d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\xi\, d\eta\, d\zeta;$$

dabei ist

(1471) $$U = \varpi(\alpha, \beta, \gamma)\cos\theta t + \Pi(\alpha, \beta, \gamma)\frac{\sin\theta t}{\theta}$$

und

$$\theta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

Hat die Differentialgleichung speziell die Form:

(1472) $$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \cdots\right)^l u = \frac{\partial^m u}{\partial t^m},$$

wo die $l$. Potenz links symbolisch zu verstehen ist, d. h. nach Auflösung der Klammern die Potenzen und Produkte der Differentialoperatoren durch die entsprechenden höheren Ableitungen zu ersetzen sind, so lassen sich die Resultate mit Hilfe der Reduktionsformeln von Nr. **66** vereinfachen. Ist die Anzahl der Raumkoordinaten eine ungerade Zahl $2\nu + 1$, so erhält die Hauptlösung die Form[1882a]):

(1473) $$P = \frac{(-1)^\nu}{2m\pi^{\nu+1}}\frac{d^\nu}{ds^\nu}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\alpha\sqrt{s}\sum_{\mu=0}^{m-1}\exp(\alpha^{2l/m}\lambda_\mu t)\,d\alpha,$$

wobei $s = x^2 + y^2 + \cdots$ ist und $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$ die verschiedenen Werte von $(-1)^l$ bedeuten; ist jene Anzahl eine gerade Zahl $2n$, so hat sie die Form:

(1474) $$P = \frac{1}{2^{2\nu-2}m\pi^{\nu+1}}\int_0^\infty\int_0^\infty\sum_{\mu=0}^{m-1}\exp(\alpha^{2l/m}\lambda_\mu t)\cos\left(\frac{\nu\pi}{2} - \alpha^2\beta^2 - \frac{s}{\beta^2}\right) \cdot \frac{\alpha}{\beta^{2n-1}}\,d\beta\,d\alpha.$$

---

1882) J. éc. polyt. cah. 20 (1831), p. 297 = Oeuvres (2) 1, p. 403. Die scheinbar allgemeinere Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2D\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} + 2E\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} + 2F\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$

(mit konstanten Koeffizienten) läßt sich durch eine lineare homogene Transformation auf die im Text besprochene reduzieren; bei Cauchy ist diese Transformation mit der Integration verquickt.

1882a) J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 557.

Für $n=3$, $l=m=1$ (Wärmeleitung) läßt sich die noch übrige Integration in (1473) mit Hilfe von (947) ausführen, und man kommt dann auf (1424) zurück; für $n=2$, $l=m=2$ und imaginäre Konstanten der Fortpflanzungsgeschwindigkeit (schwingende Platten) erhält er aus (1473) ein divergentes Integral, das er (was allerdings so nicht zulässig ist) als Fouriersche Integraldarstellung der Funktion sin auffaßt, so daß er auf (1430) zurückkommt; für $n=3$, $l=1$, $m=2$ (Schallwellen) betrachtet er das Integral

$$(1475)\qquad \int_0^\infty \cos(t\alpha)\cos\left(\alpha\sqrt{s}\right)d\alpha$$

als Grenzwert von

$$(1476)\qquad \int_0^\infty e^{-\delta\alpha}\cos(t\alpha)\cos\left(\alpha\sqrt{s}\right)d\alpha,$$

dessen Auswertung zu (974) führt. Der Übergang zu $\delta=0$ gibt dann die *Poisson*sche Form (1433).

Bei *Fourier* findet sich noch die Integration der Gleichung der Membranschwingungen

$$(1477)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

durch[1883]):

$$(1478)\qquad u=\frac{1}{4\pi^2}\int^{(4)}\cos\left(t\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right)\cos(\xi x-\xi\alpha)\cos(\eta y-\eta\beta)f(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta\,d\xi\,d\eta;$$

die der Gleichung der Schallschwingungen

$$(1479)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

durch[1884]):

$$(1480)\qquad u=\frac{1}{8\pi^2}\int^{(6)}\cos\left(t\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)\cos(\xi x-\xi\alpha)\cos(\eta y-\eta\beta)\cos(\zeta z-\zeta\gamma)f(\alpha,\beta,\gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\xi\,d\eta\,d\zeta;$$

der Gleichung der Plattenschwingungen

$$(1481)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0$$

---

1883) Théorie de la chaleur Nr. 409 = Oeuvres 1, p. 484. Hier wie im folgenden schreibe ich von den beiden Bestandteilen des Integrals nur denjenigen mit dem Cosinus der Zeit und den Werten der Anfangsverrückungen und lasse den andern weg, der den Sinus der Zeit und die Werte der Anfangsgeschwindigkeiten enthalten würde.

1884) Ib. p. 485.

durch[1885]):

$$(1482)\qquad u = \frac{1}{4\pi^2}\int^{(4)} \cos(\xi^2 t + \eta^2 t)\cos(\xi x - \xi\alpha)\cos(\eta y - \eta\beta) f(\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta\, d\xi\, d\eta.$$

Auch Systeme partieller Differentialgleichungen lassen sich in derselben Weise integrieren. So behandelt *S. D. Poisson* die Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie, die bei ihm in der Form

$$(1483)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{3}\left[2\frac{\partial\sigma}{\partial x} + \Delta u\right],\quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{3}\left[2\frac{\partial\sigma}{\partial y} + \Delta v\right],$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{3}\left[2\frac{\partial\sigma}{\partial z} + \Delta w\right],\quad \sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

erscheinen, folgendermaßen[1886]): Er definiert zuerst eine Hilfsfunktion $\varphi$ durch

$$(1484)\qquad \sigma = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2};$$

diese muß dann der Differentialgleichung

$$(1485)\qquad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} = \Delta\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

genügen, also auch einer Gleichung folgender Form

$$(1486)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta\varphi + Pt + Q,$$

in der $P$, $Q$ noch zu bestimmende Funktionen der Koordinaten sind. Werden dann weitere Hilfsfunktionen $p, q, \varphi_1, u_1, v_1, w_1$ durch

$$(1487)\qquad \Delta p + P = 0,\quad \Delta q + Q = 0,\quad \varphi = \varphi_1 + pt + q,\quad u = u_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \ldots$$

definiert, so zeigt sich, daß $\varphi_1, u_1, v_1, w_1$ Gleichungen der Formen:

$$(1488)\qquad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = \Delta\varphi_1,$$

$$(1489)\qquad \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{1}{3}\Delta u_1,\ \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = \frac{1}{3}\Delta v_1,\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = \frac{1}{3}\Delta w_1,\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0$$

genügen müssen; diese Funktionen lassen sich also durch Integrale der Form (1433) darstellen. Werden dann die Anfangswerte von $v_1$, $w_1$, $\partial v_1/\partial t$, $\partial w_1/\partial t$ als Ableitungen willkürlicher Funktionen nach $x$ angenommen, so lassen sich durch diese letzteren auch die Anfangswerte von $u_1$ ausdrücken, bis auf eine willkürlich bleibende Funktion von $y$ und $z$.

Bald darauf[1887]) behandelt Poisson in analoger Weise auch die

1885) Ib. Nr. 410, p. 487.

1886) Paris mém. 8 (1829), p. 623.

1887) Ib. 10 (1831), p. 554. Eine Darstellung der Untersuchungen Poissons findet sich bei *Th. Dieu* J. de math. 14 (1849), p. 349 = Paris thèse. p. 363 ein

Integration der Differentialgleichungen der Bewegung einer elastischen Flüssigkeit. Er nimmt sie in der Form an:

(1490) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Die Substitutionen

(1491) $$\sigma = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + U, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + V, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + W,$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \psi$$

ergeben dann

(1492) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta \varphi + \psi.$$

Werden Hilfsfunktionen $\psi_1, \varphi_1$ durch
$$\Delta \psi_1 = \psi, \qquad \varphi_1 = \varphi + \psi_1$$
definiert, so genügt die letztere der Gleichung (1488), läßt sich also durch die Summe zweier Integrale der Form (1433) ausdrücken. Der Funktion $\varphi$ kann noch die Bedingung

(1493) $$\varphi = 0 \text{ für } t = 0$$

auferlegt werden; von den beiden Integralen, durch welche sich $\varphi_1$ ausdrückt, ist dann in demjenigen, der die Anfangswerte von $\varphi_1$ selbst enthält, die willkürliche Funktion $\Pi$ durch die aus der Potentialtheorie bekannte Darstellung[1888]):

(1494) $$\Pi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty(3)} \frac{\psi(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma}{\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}}$$

zu ersetzen. Dann ist zunächst das Integral

(1495) $$\zeta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{t \sin\theta\, d\theta\, d\omega}{\sqrt{(x + t\cos\theta - \alpha)^2 + (y + t\sin\theta\sin\omega - \beta)^2 + (z + t\sin\theta\cos\omega - \gamma)^2}}$$

zu reduzieren; wird die Polarachse der Integrationsvariabeln in die Richtung nach dem Punkt $(x-\alpha, y-\beta, z-\gamma)$ verlegt, so ergibt sich, daß

(1496) $$\zeta = \begin{cases} \dfrac{4\pi t}{r} & \text{für } r > t \\ 4\pi & \text{für } r < t \end{cases} \qquad (r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2)$$

---

etwas einfacher gewähltes Koordinatensystem; p. 366 Potentialbewegung. p. 367 unten bemerkt er selbst eine Unstimmigkeit aus seinen Formeln; p. 371 gibt er an, worin sein Verfahren von dem von Poisson abweicht.

1888) Poisson führt diese Form nicht direkt ein, sondern stellt $\Pi$ erst durch ein Fouriersches Integral dar und transformiert dieses wie beim Übergang von (1429) zu (1430).

ist. Daraus folgt:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} II\,(x+t\cos\theta,\ y+t\sin\theta\sin\omega,\ z+t\sin\theta\cos\omega)\,t\,\sin\theta\,d\theta\,d\omega$$

$$(1497)\qquad = \begin{cases} -\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}{}^{(3)}\frac{\psi(\alpha,\beta,\gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma}{r} & \text{für } r>t \\ 0 \text{ für } r<t & \end{cases}$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_t^{\infty}\psi(x+r\cos\theta_1,\ y+r\sin\theta_1\sin\omega_1,\ z+r\sin\theta_1\cos\omega_1)\,r$$
$$\sin\theta_1\,dr_1\,d\theta_1\,d\omega_1\,.$$

Poisson zeigt noch[1889]), wie sich die so gefundenen Formeln auf die früher für wirbelfreie Bewegungen gefundenen reduzieren, wenn $U, V, W$ die partiellen Ableitungen einer Funktion $f$ nach den Koordinaten sind; es wird dann:

$$(1498)\qquad \psi(x+r\cos\theta_1,\ldots) = \Delta f(x+r\cos\theta_1,\ldots);$$

und wenn in dem Differentialausdruck $\Delta$ Polarkoordinaten eingeführt werden, so lassen sich die Integrationen nach diesen zum Teil ausführen, und man erhält für $\varphi_1 = \varphi + f$ wieder die früheren Formeln.

Diese Abhandlung enthält auch noch eine neue Darstellung der allgemeinen Integration der Gleichungen (1483). Poisson geht jetzt[1890]) von der Elementarlösung aus:

$$(1499)\qquad \begin{aligned} u &= \left(A\cos\varrho\lambda t + A_1\frac{\sin\varrho\lambda t}{\varrho\lambda}\right)\cos\varrho\delta,\\ v &= \left(B\cos\varrho\lambda t + B_1\frac{\sin\varrho\lambda t}{\varrho\lambda}\right)\cos\varrho\delta,\\ w &= \left(C\cos\varrho\lambda t + C_1\frac{\sin\varrho\lambda t}{\varrho\lambda}\right)\cos\varrho\delta; \end{aligned}$$

in ihr bedeuten $\varrho, \alpha, \beta, \gamma$ ganz willkürliche Konstante, $\delta$ steht zur Abkürzung für

$$\xi(x-\alpha)+\eta(y-\beta)+\zeta(z-\gamma),$$

$\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ kann gleich 1 angenommen werden, indem man, wenn das nicht der Fall ist, die Bedeutung von $\varrho$ und $\lambda$ geeignet abändern kann; und die übrigen noch vorkommenden Größen müssen dann den Bedingungen

$$(1500\text{a})\qquad \begin{aligned} 3A\lambda^2 &= A + 2\xi(A\xi+B\eta+C\zeta),\\ 3B\lambda^2 &= B + 2\eta(A\xi+B\eta+C\zeta),\\ 3C\lambda^2 &= C + 2\zeta(A\xi+B\eta+C\zeta), \end{aligned}$$

1889) p. 564.
1890) p. 580.

$$\begin{aligned}&3A_1\lambda^2 = A_1 + 2\xi(A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta),\\ \text{(1500b)}\quad &3B_1\lambda^2 = B_1 + 2\eta(A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta),\\ &3C_1\lambda^2 = C_1 + 2\zeta(A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta)\end{aligned}$$

genügen. Das ist zunächst auf zweierlei Art möglich: entweder durch

$$\text{(1501)}\quad \lambda^2 = \frac{1}{3},\quad A\xi + B\eta + C\zeta = A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta = 0$$

oder durch

$$\text{(1502)}\quad \lambda^2 = 1,\quad A:B:C = A_1:B_1:C_1 = \xi:\eta:\zeta;$$

die allgemeinste Lösung superponiert sich aus den so erhaltenen partikulären, so daß in ihr noch sechs Konstante willkürlich bleiben. Wird dann aus den so gefundenen Elementarlösungen die allgemeinste durch Fouriersche Integrale zusammengesetzt, so treten in diesen Bestandteile der beiden Formen auf:

$$\text{(1503)}\quad \begin{aligned}&\int^{(6)}\varphi(\alpha,\beta,\gamma)\cos\varrho\delta\cos(\varrho t)\,\xi^2\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,\\ &\int^{(6)}\varphi(\alpha,\beta,\gamma)\cos\varrho\delta\cos(\varrho t)\,\eta\zeta\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\xi\,d\eta\,d\zeta;\end{aligned}$$

um sie zu reduzieren, führt er an Stelle von $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ Polarkoordinaten mit der bisherigen $z$-Achse als Polarachse ein und dann an Stelle von $\xi,\eta,\zeta$ solche mit der Richtung nach dem Punkte $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$, als Achse. Das gibt dann zunächst

$$\begin{aligned}\iint\cos(\varrho\varrho_1\cos\varrho\varrho_1)\xi^2\,d\omega_\xi &= 4\pi\sin^2\theta_1\left(\frac{\sin\varrho\varrho_1}{\varrho^3\varrho_1^3} - \frac{\cos\varrho\varrho_1}{\varrho^2\varrho_1^2}\right)\\ &+ 4\pi\cos^2\theta_1\left(\frac{\sin\varrho\varrho_1}{\varrho\varrho_1} + \frac{2\cos\varrho\varrho_1}{\varrho^2\varrho_1^2} - \frac{2\sin\varrho\varrho_1}{\varrho^3\varrho_1^3}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\iint\cos(\varrho\varrho_1\cos\varrho\varrho_1)\eta\zeta\,d\omega_\xi\\ &= 4\pi\sin^2\theta_1\cos\theta_1\cos\omega_1\left(\frac{\sin\varrho\varrho_1}{\varrho\varrho_1} + \frac{3\cos\varrho\varrho_1}{\varrho^2\varrho_1^2} - \frac{3\sin\varrho\varrho_1}{\varrho^3\varrho_1^3}\right),\end{aligned}$$

ferner nach Einführung eines Konvergenzfaktors:

$$\text{(1504)}\quad \begin{aligned}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty\varphi(\alpha,\beta,\gamma)\cos\varrho t\cos\varrho\varrho_1\,d\varrho\,d\varrho_1 = \frac{\pi}{2}\varphi(x + t\cos\theta_1,\\ y + t\sin\theta_1\sin\omega_1,\ z + t\sin\theta_1\cos\omega_1),\end{aligned}$$

$$\text{(1505)}\quad \begin{aligned}&\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty\varphi(\alpha,\beta,\gamma)\cos\varrho t\sin\varrho\varrho_1,\ \varrho\varrho_1\,d\varrho\,d\varrho_1\\ &= \frac{\pi}{2}\frac{\partial}{\partial t}[t\varphi(x + t\cos\theta_1,\ y + t\sin\theta_1\sin\omega_1,\ z + t\sin\theta_1\cos\omega_1)]\end{aligned}$$

und endlich:

$$\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty\varphi(\alpha,\beta,\gamma)\cos\varrho t\,\frac{\sin\varrho\varrho_1}{\varrho\varrho_1}\,d\varrho\,d\varrho_1 = \pi\int^\infty\varphi(\alpha,\beta,\gamma)\frac{d\varrho_1}{\varrho_1}.$$

Damit lassen sich die sechsfachen Integrale (1503) durch Doppelintegrale ersetzen, so daß er schließlich[1891]) das Resultat folgendermaßen aussprechen kann: Man setze für $n = 1, 2, 3$:

$$P_n = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\iint f_n\left(x + \frac{\xi t}{\sqrt{3}}, \cdots\right) t\, d\omega_\xi + \frac{1}{4\pi}\iint F_n\left(x + \frac{\xi t}{\sqrt{3}}, \cdots\right) t\, d\omega_\xi;$$

ferner:

$$(1506)\quad \begin{aligned} q &= \xi f_1(x + \xi\varrho_1 \cdots) + \eta f_2(y + \eta\varrho_1 \cdots) + \zeta f_3(z + \zeta\varrho_1 \cdots) \\ Q &= \xi F_1(x + \xi\varrho_1 \cdots) + \eta F_2(y + \eta\varrho_1 \cdots) + \zeta F_3(z + \zeta\varrho_1 \cdots) \\ \left.\begin{matrix}\psi_n(\varrho)\\ \Psi_n(\varrho)\end{matrix}\right\} &= \frac{1}{4\pi}\int\!\!\int \left[3p\xi - \left\{\begin{matrix} f_n \\ F_n \end{matrix}\right\}(x + \xi\varrho_1 \cdots)\right] d\varpi_\xi, \end{aligned}$$

endlich:

$$\left.\begin{matrix}\varphi_1(\varrho)\\ \Phi_2(\varrho)\end{matrix}\right\} = \frac{1}{4\pi}\int\!\!\int \left\{\begin{matrix} q \\ Q \end{matrix}\right\} \xi\, d\varpi_\xi, \cdots;$$

dann erhält man:

$$(1507)\quad u = P_1 + \psi_1(t) - \psi_1\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + \int_0^t \left(\psi_1(\tau) - \psi_1\left(\frac{\tau}{\sqrt{3}}\right)\right) d\tau$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t}\left(t\varphi(t) - t\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right) + t\Phi(t) - t\Phi\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right), \cdots$$

*J. Liouville* bemerkt dazu[1892]): man könne die Ableitung dadurch vereinfachen, daß man durch Differentiation aus (1492) ableite, daß $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ der Schallgleichung genügen muß. *Poisson* weist dann[1893]) darauf hin, daß man nach seinem Verfahren auch den Fall behandeln könne, daß die Funktion $\psi$ auch von $t$ abhängt; man brauche dazu nur diese Funktion in eine Reihe der Form

$$(1508)\qquad \psi(x, y, z, t) = \sum \psi_m(x, y, z) e^{mt}$$

zu entwickeln. Er stellt dann noch die gesuchte Lösung durch ein sechsfaches *Fourier*sches Integral

$$(1509)\quad p = \frac{1}{8\pi^3} e^{mt} \int_{-\infty}^{\infty (6)} (A\cos u + B\sin u)\, \psi(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

dar, wobei $u$ zur Abkürzung für $\xi(x - \alpha) + \eta(y - \beta) + \zeta(z - \gamma)$ steht

1891) p. 592. Er meint (p. 594), diese Formeln seien zwar weniger einfach als die der früheren Abhandlung (1886), hätten aber vor jenen den Vorzug der Symmetrie.

1892) J. de math. 3 (1838), p. 435 = Paris C. R. 7 (1838), p. 248.

1893) J. de math. 3 (1838), p. 615.

und $A, B$ zu bestimmende Funktionen von $\xi, \eta, \zeta$ sind. Einsetzen ergibt dann Gleichungen zur Bestimmung dieser Funktionen. Er führt die Rechnung für den Fall der Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - \left(A \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \cdots + D \cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + \cdots\right) = e^{mt} \cdot \psi(x, y, z)$$

näher aus; das dabei auftretende Integral

$$(1510) \qquad q = \int_{-\infty}^{+\infty}{}^{(3)} \frac{\cos u\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{m^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

hat den Wert

$$\frac{2\pi^2}{r} \exp(-|mr|), \quad r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2,$$

womit das sechsfache Integral für $p$ auf ein dreifaches, also das achtfache Integral für $\varphi$ auf ein fünffaches reduziert ist, in welchem $x + at\cos\theta, \ldots$ an Stelle von $x, y, z$ auftreten. Werden noch $\alpha, \beta, \gamma$ durch $x + r\cos\theta, \ldots$ ersetzt und an Stelle von $\theta$ und $\omega$ wieder die Winkel $\lambda$ und $\mu$ eingeführt, so läßt sich die Integration nach diesen vollziehen und gibt:

$$(1511) \quad \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} q(x + at\cos\theta, \ldots, \ldots) \sin\theta\, d\theta\, d\omega$$
$$= \frac{4\pi^3}{mtr}\left[\exp(-m|r-t|) - \exp(-m|r+t|)\right]$$

Die weiteren Integrationen nach $\alpha, \beta, \gamma$ lassen sich nicht ausführen. solange die Funktion $\psi$ nicht spezialisiert ist; *Liouville* bemerkt dazu noch[1894]), daß man auch dieses Problem auf die Integration der Schallgleichung zurückführen könne, indem man

$$\lambda_m = \frac{\partial\varphi_m}{\partial t} - m\varphi_m$$

als neue unbekannte Funktionen einführe. Nachher läßt sich auch die Summation vollziehen, indem z. B.

$$\sum \psi_m e^{mt-mr} = \psi(t - r, x + r\cos\theta, \ldots)$$

ist. Auch fügt er bei, die Anwendung dieser Methode zur Auffindung eines partikulären Integrals einer Gleichung mit zweitem Glied sei nicht auf Gleichungen mit konstanten Koeffizienten beschränkt.

Etwas anders verfährt *Ostrogradski.*[1895]) Er beginnt gleich mit der Darstellung der unbekannten Funktionen durch sechsfache Fou-

1894) J. de math. 4 (1839), p. 1.

1895) Petersb. mém. (6) 1 (1831), p. 455 (von 1829) riersche Integrale in komplexer Form:

$$(1512)\quad u = \frac{1}{8\pi^3}\int^{(6)} T_1 \exp\left(\xi i(x-\alpha) + \eta i(y-\beta) + \zeta i(z-\gamma)\right) d\tau_\alpha d\tau_\xi;$$

indem er diese Darstellungen in die partiellen Differentialgleichungen einsetzt, erhält er für die $T$ als Funktionen von $t$ gewöhnliche Differentialgleichungen; aus diesen bildet er Kombinationen, deren jede nur eine der Verbindungen

$$\xi T_1 + \eta T_2 + \zeta T_3,\ \eta T_1 - \xi T_2,\ \zeta T_2 - \eta T_3,\ \xi T_3 - \zeta T_1$$

enthält und für sie einen Ausdruck durch trigonometrische Funktionen der Zeit liefert. Die dann erhaltenen sechsfachen Integrale reduziert er auf vierfache, indem er sich auch seinerseits der Gleichung

$$(1513)\quad \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty (6)} \varphi(\alpha,\beta,\gamma)\cos\varrho t\cos[(x-\alpha)\xi+(y-\beta)\eta+(z-\gamma)\zeta]\,d\alpha d\beta d\gamma d\xi d\eta d\zeta$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\,(x + t\sin\theta\cos\omega, \cdots) t\sin\theta\, d\theta\, d\omega$$

bedient[1896]); damit erhält er für die von den Anfangselongationen abhängenden Bestandteile die Ausdrücke[1897]):

$$(1514)\quad 4\pi u = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f_1(x + t\sin\theta\cos\omega,\ y + t\sin\theta\sin\omega,$$
$$z + t\cos\theta)\, t\sin\theta\, d\theta\, d\omega + \frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

wobei

$$(1515)\quad \varphi = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_t^{t\sqrt{3}}\int_0^{\tau}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int^{(6)} f_1(\alpha,\beta,\gamma)\exp(i\delta)\cos\varrho r\, d\tau_\alpha d\tau_\xi + \cdots\right] dr\, d\tau$$

und entsprechende Ausdrücke für die von den Anfangsgeschwindigkeiten abhängenden.

In einer folgenden Abhandlung[1898]) zeigt er, wie diese Ausdrücke

1896) Er gibt diese Gleichung hier ohne Beweis; später (ib. 2 (1833), p. 348) beweist er sie, indem er $\varrho^{-1}\sin\varrho t$ durch das Doppelintegral

$$\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cos(\xi\sin\theta\cos\omega + \eta\sin\theta\sin\omega + \zeta\cos\theta)\, t\sin\theta\, d\theta\, d\omega$$

ersetzt, nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge den Fourierschen Integralsatz benutzt und dann noch nach $t$ differentiiert.

1897) Diese Resultate auf Grund einer Mitteilung Ostrogradskis ohne Beweis auch bei Poisson, Paris mém. 10 (1831), p. 594.

1898) Petersb. mém. (6) 2 (1833), p. 352.

sich in die von Poisson gegebenen überführen lassen. Es handelt sich dabei wesentlich um die Reduktion von Integralen der allgemeinen Form

$$(1516)\qquad \frac{1}{(2\pi)^3}\int^{(6)}(A\xi^2 + \cdots + F\eta\zeta)\,\varrho^{-2}\cos\delta\cos\varrho r\,d\tau_\alpha\,d\tau_\xi,$$

in der $A \cdots F$ willkürliche Funktionen von $\alpha, \beta, \gamma$ bedeuten; Ostrogradski führt sowohl für $\xi, \eta, \zeta$, als auch für $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ Polarkoordinaten ein und entwickelt $\cos\delta$ nach Kugelfunktionen von $\xi, \eta, \zeta$; die Integraltheoreme der Kugelfunktionen (II A 10, *Wangerin*, Nr. 14, p. 714) erlauben ihm dann die Reduktion des sechsfachen Integrals auf ein vierfaches:

$$(1517)\qquad \frac{1}{2\pi^2}\int^{(4)}\left(Y_0 R\vartheta - 4Y_2\frac{d^2R}{d\vartheta^2}\vartheta^2\right)\cos\varrho t\,d\varrho\,dr\,d\varpi_{x-\alpha},$$

wobei

$$\vartheta = r^2\varrho^2, \qquad R = \frac{\sin\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\vartheta}}.$$

Die einzelnen Bestandteile dieses Integrals gehen aus Integralen der Form

$$(1518)\qquad U = \int^{(4)} L\cos\varrho t\,\frac{\sin\lambda r\varrho}{r\varrho}\,d\varrho\,dr\,d\varpi_{x-\alpha}$$

dadurch hervor, daß man in diesen, sowie in ihren ersten und zweiten Ableitungen nach $\lambda$ diese Hilfsgröße gleich $l$ setzt; $L$ ist dabei eine willkürliche Funktion von $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$. Die Integration nach $\varrho$ läßt sich ausführen, und die Ableitungen nach $\lambda$ lassen sich durch solche nach $t$ ersetzen; so erhält auch er die Gleichungen (1506, 1507).

Andererseits gibt er noch[1899]) eine Umformung des Ausdrucks (1498); indem er die Differentiationen nach $x, y, z$ durch solche nach $\alpha, \beta, \gamma$ ersetzt und partiell integriert (bzw. einen Teil des Raumintegrals in ein Oberflächenintegral umformt), erhält er eine Form, in der unter dem Integralzeichen nur mehr die willkürlich gegebenen Anfangswerte selbst, nicht mehr ihre Ableitungen auftreten. Er zeigt noch[1900]), daß die gefundenen Ausdrücke den Differentialgleichungen und den Anfangsbedingungen wirklich genügen, und[1901]) daß $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ ein vollständiges Differential bleibt, wenn dieser Ausdruck und seine Ableitung nach $t$ es zur Zeit $t = 0$ sind; auch gibt er die Reduktionen

1899) p. 362.
1900) p. 367.
1901) p. 364.

an, die an den allgemeinen Ausdrücken eintreten, wenn von diesen beiden Bedingungen nur die eine oder nur die andere erfüllt ist.

*Lamé* und *Clapeyron*[1902]) integrieren die Differentialgleichungen des elastischen Gleichgewichts, d. h. das simultane System:

$$(1519)\quad \begin{gathered} \sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \Delta u + 2\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, \quad \Delta v + 2\frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0, \quad \Delta w + 2\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0 \end{gathered}$$

unter den Grenzbedingungen:

$$(1520)\quad \begin{gathered} \sigma = \frac{1}{2}F(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ für } z = 0, \\ u = v = 0 \text{ für } z = \infty \end{gathered}$$

durch

$$(1521)\quad \begin{aligned} u &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty (4)} \exp(-\zeta z)\left(\frac{\xi}{4\zeta^2} - \frac{\xi z}{2\zeta}\right) F(\alpha,\beta) \sin(\xi x - \xi\alpha) \\ &\qquad\qquad \cos(\eta y - \eta\beta)\, d\alpha\, d\beta\, d\xi\, d\eta, \\ v &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty (4)} \exp(-\zeta z)\left(\frac{\eta}{4\zeta^2} - \frac{\eta z}{2\zeta}\right) F(\alpha,\beta) \cos(\xi x - \xi\alpha) \\ &\qquad\qquad \sin(\eta y - \eta\beta)\, d\alpha\, d\beta\, d\xi\, d\eta, \\ w &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{+\infty}^{-\infty (4)} \exp(-\zeta z)\left(-\frac{3}{4\zeta} - \frac{z}{2}\right) F(\alpha,\beta) \sin(\xi x - \xi\alpha) \\ &\qquad\qquad \sin(\eta y - \eta\beta)\, d\alpha\, d\beta\, d\xi\, d\eta \end{aligned}$$

mit

$$\zeta^2 = \xi^2 + \eta^2.$$

Auch geben sie entsprechende, nur kompliziertere Formeln für den Fall, daß Grenzbedingungen der Art wie (1520) für zwei verschiedene endliche Werte von $z$ vorgeschrieben sind.[1903])

*A. Cauchy* hat dann gezeigt[1904]), wie auch die Gleichungen der Schwingungen anisotroper elastischer Medien durch Fouriersche Integrale allgemein integriert werden können. Er geht dabei aus von dem von ihm in seiner Wichtigkeit auch für die analytische Behand-

1902) J. f. Math. 7 (1831), p. 403.

1903) p. 406.

1904) Exerc. de math. 5 (1830) = Oeuvres (2) 9, p. 391. *Cauchy* ist mit Vorliebe wiederholt auf diese Ableitung der möglichen ebenen Wellen zurückgekommen; vgl. darüber die ausführlicheren Angaben Jahresber. d. D. Math.-Ver. 10 (1908), § 63. Namentlich erscheint in einem lith. mém. von 1836, von dem eine deutsche Bearbeitung von *Fr. X. Moth,* Wien 1842, erschienen ist, die Ersetzung der trigonometrischen Funktionen reellen durch Exponentialfunktionen komplexen Arguments.

lung der optischen Probleme erkannten Begriff der ebenen Welle, d. h. einer Lösung des Differentialgleichungssystems, welche die Koordinaten $x, y, z$ nur in der einen Verbindung

$$\mathfrak{r} = \xi x + \eta y + \zeta z \tag{1522}$$

enthält. Führt man diese ein, so nehmen die Gleichungen die Form an:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \mathfrak{L}\frac{\partial^2 u}{\partial \mathfrak{r}^2} + \mathfrak{R}\frac{\partial^2 v}{\partial \mathfrak{r}^2} + \mathfrak{Q}\frac{\partial^2 w}{\partial \mathfrak{r}^2}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mathfrak{R}\frac{\partial^2 u}{\partial \mathfrak{r}^2} + \mathfrak{M}\frac{\partial^2 v}{\partial \mathfrak{r}^2} + \mathfrak{P}\frac{\partial^2 w}{\partial \mathfrak{r}^2}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \mathfrak{Q}\frac{\partial^2 u}{\partial \mathfrak{r}^2} + \mathfrak{P}\frac{\partial^2 v}{\partial \mathfrak{r}^2} + \mathfrak{N}\frac{\partial^2 w}{\partial \mathfrak{r}^2}; \end{aligned} \tag{1523}$$

dabei bedeuten $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ quadratische Funktionen der (zu den Stellungskosinus der Wellenebene proportionalen) Größen $\xi, \eta, \zeta$. Eine lineare Kombination

$$\mathfrak{s} = Au + Bv + Cw$$

der Verschiebungskomponenten genügt also einer Gleichung der einfachen Form

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2} = s^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial \mathfrak{r}^2},$$

wenn ihre Koeffizienten den Gleichungen

$$\begin{aligned} (\mathfrak{L} - s^2) A + \mathfrak{R} B + \mathfrak{Q} C &= 0, \\ \mathfrak{R} A + (\mathfrak{M} - s^2) B + \mathfrak{P} C &= 0, \\ \mathfrak{Q} A + \mathfrak{P} B + (\mathfrak{N} - s^2) C &= 0 \end{aligned} \tag{1524}$$

genügen. Das gibt zu gegebenen Werten von $\xi, \eta, \zeta$ drei mögliche Werte von $s^2$ und zu jedem ein System der Verhältnisse $A : B : C$; aus den so erhaltenen ebenen Wellen läßt sich dann die allgemeinste Lösung in der Gestalt *Fourier*scher Integrale zusammensetzen.[1905])

**94. Reduktion mehrfacher Fourierscher Integrale.** Die Lösung einer partiellen Differentialgleichung durch ein Fouriersches Integral läßt sich auch bei mehreren unabhängigen Variablen auf eine geringere Anzahl von Integrationen reduzieren, wenn die zugehörige Hauptlösung eine derartige Reduktion zuläßt. So führt *Cauchy*[1906]) das Integral (1463) der Potentialgleichung durch Anwendung der Re-

1905) Paris C. R. 8 (1839), p. 727 = Oeuvres (1) 4, p. 291; p. 309 Einführung von Polarkoordinaten und Reduktion des sechsfachen Integrals auf ein vierfaches.

1906) Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 26 (von 1815); dazu die Erläuterungen p. 155. Etwas anders Paris C. R. 16 (1843), p. 584 = (1) 7, p. 321. Auch G. G. Stokes, Cambr. Trans. 8 (1843) = papers 1, p. 44.

duktionsformel (Nr. 66) über in:

$$(1525)\qquad u = \frac{y}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta}{\{y^2+(x-\alpha)^2+(z-\beta)^2\}^{3/2}};$$

dann auch das Integral der Wärmeleitungsgleichung in (1424) und (1423)[1907]), das der Plattenschwingungen (1482) in (1430) und (1429).[1908])

*A. Cauchy*[1909]) gelangt zur Reduktion des sechsfachen Integrals (1470), indem er die Hilfsformel (Nr. 66) auch für divergente Integrale benutzt und demgemäß dann zunächst das dreifache Integral

$$(1526)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}{}^{(3)}\cos(\xi x-\xi\alpha)\cos(\eta y-\eta\beta)\cos(\zeta z-\zeta\gamma)\cos\theta t\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

durch

$$(1527)\qquad -\frac{2\pi}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\xi r\cos\xi t\,d\xi,$$

das sich nach Einführung des Konvergenzfaktors $\exp(-k|\xi|)$ elementar auswerten läßt, ersetzt. Werden dann für $x-\alpha, \ldots$ Polarkoordinaten eingeführt, so läßt sich auch noch die Integration nach $r$ für den Grenzfall $k=0$ mit Hilfe der Grenzformel (974) ausführen, und es bleibt:

$$(1528)\qquad u = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Pi(x+t\cos p, y+t\sin p\cos q, z+t\sin p\sin q)\,t\sin p\,dp\,dq$$

$$+\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\varpi(x+t\cos p, y+t\sin p\cos q, z+t\sin p\sin q)\,t\sin p\,dp\,dq.$$

Ist die Anfangsstörung nur auf die Umgebung des Nullpunktes beschränkt, so hat $u$ zur Zeit $t$ nur in der Nähe der Fläche $x^2+y^2+z^2=t^2$ merkliche Werte.

Auch die bei *Poissons* Behandlung der Reflexion und Brechung auftretenden Integrale lassen sich, wenn die Anfangsstörung nur Funktion des Radiusvektor ist, wie er selbst zeigt[1910]), in dieser Weise re-

1907) Bull. philomat. 1821, p. 109; vgl. auch j. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 517.

1908) p. 111. Auch bei *Fourier* (Theorie Nr. 412, p. 488) später bei *A. Cournot,* Théorie 2, p. 432.

1909) J. éc. polyt. cah. 20 (1831), p. 301 = Oeuvres (2) 1, p. 407. *Cauchy* führt die Rechnung für eine scheinbar allgemeinere Differentialgleichung.

1910) Paris mém. 10 (1831), p. 349 (von 1823). *Poisson* hat das Problem der Reduktion der sechsfachen Fourierschen Integrale allgemein wie Cauchy in Angriff genommen, aber nicht mehr ausführen können. Paris mém. 18 (1842), p. 151. — Die Voranzeige Paris C. R. 9 (1839), p. 517, enthält noch nichts.

duzieren. Z. B. das Integral:

$$(1529)\quad \frac{1}{4\pi^3}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty(5)} f(\varrho)\cos\lambda t\cos[\xi(\alpha+x-2h)+\eta(\beta-y)$$
$$+\zeta(\gamma-z)]\frac{a^2\xi^2-a_1^{\,2}\xi_1^{\,2}}{a^2\xi^2+a_1^{\,2}\xi_1^{\,2}}d\alpha\,d\beta\,d\gamma\,d\eta\,d\zeta\,d\xi$$

geht durch Einführung von Polarkoordinaten für beide Reihen von Veränderlichen:

$$\begin{array}{lll} \alpha=\varrho\cos\theta, & \beta=\varrho\sin\theta\cos\varphi, & \gamma=\varrho\sin\theta\sin\varphi, \\ \xi=\mathfrak{r}\cos\vartheta, & \eta=\mathfrak{r}\sin\vartheta\cos f, & \zeta=\mathfrak{r}\sin\vartheta\sin f \end{array}\qquad (\lambda=a\mathfrak{r})$$

und durch Anwendung des Hilfssatzes der Nr. 65 auf die auf $\theta$ und $\psi$ sich beziehenden Integrationen über in:

$$(1530)\quad \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\frac{\left(a^2\cos^2\vartheta-a_1\sqrt{a^2-a_1^{\,2}\sin^2\vartheta}\right)\sin\vartheta}{a^2\cos^2\vartheta+a_1\sqrt{a^2-a_1^{\,2}\sin^2\vartheta}}$$
$$\cdot\,\varrho\mathfrak{r}\sin\varrho\mathfrak{r}\cos\mathfrak{r}p\,f(\varrho)\,d\varrho\,d\mathfrak{r}\,d\vartheta\,df,$$

wobei

$$p=(2h-x)\cos\vartheta+y\sin\vartheta\cos f+z\sin\vartheta\sin f\pm at,$$

in dem letzteren Ausdruck sind die beiden Vorzeichen und die Summe der so entstehenden Integrale zu nehmen.

Will man hier die Integrationen nach $\varrho$ und $\mathfrak{r}$ zuerst ausführen, so hat man allerdings ein divergentes Integral; *Poisson* führt daher einen Konvergenzfaktor ein und erhält so:

$$(1531)\quad \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\left(a^2\cos^2\vartheta-a_1\sqrt{a^2-a_1^{\,2}\sin^2\vartheta}\right)\sin\vartheta}{a^2\cos^2\vartheta+a_1\sqrt{a^2-a_1^{\,2}\sin^2\vartheta}}\,\frac{d(p\,f(p))}{dp}\,d\vartheta\,df.$$

*W. Thomson*[1911]) behandelt die Integrale:

$$(1532)\quad V=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\xi\cos y\eta\ldots d\xi\,d\eta\ldots}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\cdots+u^2}^{\,s-1}}$$

($s$ bedeutet die Anzahl der Variabeln). Er führt sie durch eine lineare Transformation über in

$$(1533)\quad V=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos u\eta\cdot\int\frac{d\zeta\ldots}{(u^2+\eta^2+\Sigma\zeta^2)^{\frac{s-1}{2}}}\,d\eta;$$

das $s-1$-fache Integral läßt sich auf ein einfaches zurückführen.

Nach Differentiation nach dem Parameter $u$ kann man zuerst dieses und dann auch das Integral in bezug auf $\eta$ ausführen und er-

1911) Cambr. Dubl. J. 2 (1847), p. 117.

hält schließlich:

$$V = \frac{2\pi^{\frac{s+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} \cdot \frac{\exp\left(-u\sqrt{x^2+y^2+\cdots}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+\cdots}}. \tag{1534}$$

**95. Darstellung der Integrale durch die Formeln der Residuentheorie.** Die Darstellung der Integrale partieller Differentialgleichungen durch Residuenformeln hat *Cauchy*, wie bereits in Nr. 83, p. 1230 erwähnt, sogleich für Gleichungen mit beliebig vielen Variablen gegegeben.

Eine sich anschließende, aber erst später vollständig veröffentlichte Abhandlung[1912]) enthält die Anwendung dieses Verfahrens auf Differentialgleichungen erster Ordnung mit variablen Koeffizienten. Wird in die Gleichung

$$K\varphi + X\frac{\partial\varphi}{\partial x} + Y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \ldots + T\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{1535}$$

für $\varphi$ als Funktion von $x, y, \ldots$ (nicht von $t$) sein Ausdruck durch das verallgemeinerte Fouriersche Integral (1115) eingesetzt, so ergibt sich: gehen $K, X, Y, \ldots, T$ in $S, U, V, \ldots W$ über, wenn $x, y, \ldots$ durch die Integrationsvariablen $u, v \ldots$ ersetzt werden, so müssen diese Variablen den Differentialgleichungen

$$\begin{gathered} U - W\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad V - W\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \ldots \\ \left(S - \frac{\partial U}{\partial u} - \frac{\partial V}{\partial v} - \ldots\right)\psi + W\frac{\partial\psi}{\partial t} = \Delta \cdot f(u, v, \ldots, t) \end{gathered} \tag{1536}$$

und den Anfangsbedingungen

$$u = \alpha,\ v = \beta,\ \ldots \psi = f_0(\alpha, \beta, \ldots) \text{ für } t = 0$$

genügen.

Auch die Resultate der späteren Abhandlung überträgt er wenigstens formal auf Gleichungen mit beliebig vielen Variablen, wenn auch nur auf parallelepipedisch begrenzte Bereiche[1913]) und unter Festhaltung der Voraussetzung, daß keine gemischten Ableitungen vorkommen.

In einer folgenden Note[1914]) führt *Cauchy* durch die Gleichungen

$$u = \cos p, \quad v = \sin p \cos q, \quad w = \sin p \sin q, \tag{1537}$$

$$\lambda = x + \frac{st}{\cos\delta}\cos\theta,\ \mu = y + \frac{st}{\cos\delta}\sin\theta\cos\psi,\ \nu = z + \frac{st}{\cos\delta}\sin\theta\sin\psi,$$

---

1912) Mém. von 1827 (1778), p. 48. Von speziellen Fällen bespricht er hier Wärmeleitung und Schallbewegung in einem Parallelepiped.

1913) Paris mém. 9 (1830) = Oeuvres (1) 2, p. 66 (von 1823); Auszug bull. Férussac 4 (1825), p. 71.

1914) Bull. Férussac 13 (1830), p. 273.

wobei:

$$\cos\delta = \cos p \cos\theta + \sin p \sin\theta \cos(q - \psi)$$

Polarkoordinaten ein und transformiert damit die Lösung der Gleichung in vier Variabeln $F(D_x, D_y, D_z, D_t)\varphi = 0$ in die Gestalt:

$$(1538)\quad \varphi = -\frac{1}{16\pi^2} D_t^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{E} \frac{F(u, v, w, s) - F\left(u, v, w, s\mathfrak{f}(\lambda, \mu, \nu) D_t^{-1}\right)}{\left(1 - \mathfrak{f}(\lambda, \mu, \nu) D_t^{-1}\right) s\left((F(u, v, w, s))\right)} \frac{t^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi \sin p\, dp\, dq}{|\cos\delta|^3}$$

in der nach Ausführung der Division die Exponenten von $\mathfrak{f}$ durch Indizes zu ersetzen und dann für die $\mathfrak{f}_\mu$ die gegebenen Anfangswerte der $\partial^\mu\varphi/\partial t^\mu$ zu substituieren sind ($\mu = 0, 1, \ldots n - 1$). Für die Gleichung der Schallschwingungen komme man so auf die von Poisson (1433) angegebene Form des Integrals. Hat die Gleichung die Form $\partial^2\varphi/\partial t^2 =$ einer linearen Funktion der zweiten Ableitungen nach den Koordinaten, mit konstanten Koeffizienten, so lassen sich die Integrationen nach $\varpi$ und $\tau$ ausführen.

**96. Reduktion der Integration eines Systems partieller Differentialgleichungen auf die einer resultierenden Gleichung.** *A. Cauchy* hat zunächst für die Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie bzw. der Optik gezeigt, daß man die Integration eines Systems partieller Differentialgleichungen auf die einer einzigen solchen Gleichung zurückführen kann.

Eine spätere Abhandlung[1915]) führt die Integration eines Systems partieller Differentialgleichungen auf die Bestimmung einer „Hauptfunktion“ zurück. Werden die Variablen $u, v, \ldots$ aus den Differentialgleichungen eliminiert, indem dabei die Differentialsymbole wie algebraische Größen behandelt werden, so bleibt zwischen diesen eine Gleichung

$$(1539)\qquad \nabla(D_x, D_y, \ldots, D_t) = 0$$

zurück; es wird zunächst angenommen, diese könne so geschrieben werden, daß der Koeffizient der höchsten ($n^{\text{ten}}$) Potenz von $D_t$ die Einheit ist. Es ist dann die Gleichung

$$(1540)\qquad \nabla\varpi = 0$$

unter den Anfangsbedingungen

1915) Paris C. R. 8 (1839), p. 900 = Oeuvres (1) 4, p. 410 = exerc. d'analyse 1 (1840), p. 87. Angekündigt Paris C. R. 2 (1836), p. 85 = Oeuvres (1) 4, p. 5. — Die Reduktion der Zahl der erforderlichen Integrationen erscheint im Ergänzungsartikel.

$$(1541)\quad \varpi = 0,\ \frac{\partial\varpi}{\partial t} = 0, \ldots, \frac{\partial^{n-2}\varpi}{\partial t^{n-2}} = 0,\ \frac{\partial^{n-1}\varpi}{\partial t^{n-1}} = \varpi(x,y,z)$$

$$\text{für } t = 0$$

zu integrieren, wo $\varpi(x,y,z)$ eine willkürlich gegebene Funktion bezeichnet; und wenn diese Funktion durch irgendeine andere ersetzt wird, so bezeichnet Cauchy auch die zugehörige Lösung von (1539), eine „Hauptfunktion", mit demselben Buchstaben. Die Lösung des gegebenen Gleichungssystems, die zu den Anfangsbedingungen

$$(1542)\quad u = \varphi,\ \frac{\partial u}{\partial t} = \varphi,\ \ldots,\ v = \chi,\ \frac{\partial v}{\partial t} = \chi,\ \ldots$$

gehört, wird dann dadurch erhalten, daß man in ihm die Ableitungen $D_t u$, $D_t^2 u, \ldots$ durch

$$(1543)\quad D_t u - \nabla\varphi,\ D_t^2 u - \nabla(\varphi_1 + D_t\varphi)\ldots$$

ersetzt und nun so auflöst, wie wenn die Differentialsymbole algebraische Größen wären.

Ist aber in (1539) die höchste Potenz von $D_t$ noch mit einer Funktion $K$ der übrigen Differentialsymbole multipliziert, so ist die letzte Bedingung (1541) durch

$$(1544)\quad K\frac{\partial^{n-1}\varpi}{\partial t^{n-1}} = \varpi(x,y,z)$$

zu ersetzen, und man erhält nicht für $\varpi$ selbst, sondern nur für $K\varpi$ eine Darstellung durch das Residuum eines Fourierschen Integrals. Sollen z. B. die Gleichungen[1916])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

integriert werden, so kann als Hauptfunktion irgendeine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2\varpi}{\partial x\,\partial y} = \sin t\,\varpi(x,y)$$

genommen werden.

Läßt sich die Funktion $\nabla$ in zwei Faktoren $\nabla_1$ vom $m^{\text{ten}}$, $\nabla_2$ vom $p^{\text{ten}}$ Grade zerlegen, so läßt sich die Integration von $\nabla = 0$ in zwei Schritten ausführen, indem man erst $\nabla_1 \Pi = 0$ unter den Bedingungen:

$$(1545)\quad \Pi = 0,\ \frac{\partial\Pi}{\partial t} = 0, \ldots, \frac{\partial^{m-2}\Pi}{\partial t^{m-2}} = 0,\ \frac{\partial^{m-1}\Pi}{\partial t^{m-1}} = \varpi(x,y,z)$$

$$\text{für } t = 0,$$

dann $\nabla_2\varpi = \Pi$ unter den Bedingungen:

$$(1546)\quad \varpi = 0,\ \frac{\partial\varpi}{\partial t} = 0, \ldots, \frac{\partial^{p-2}\varpi}{\partial t^{p-2}} = 0,\ \frac{\partial^{p-1}\varpi}{\partial t^{p-1}} = 0 \quad \text{für } t = 0$$

---

1916) Paris C. R. 8 (1839), p. 905 = Oeuvres (1) 4, p. 416 = exerc. d'analyse 1 (1840), p. 91.

integriert.[1917]) Das wird besonders einfach, wenn eine Identität der Form

$$(1547)\qquad \frac{D_t^{n-2}}{\nabla} = \frac{g}{D_t^2 - G} + \frac{h}{D_t^2 - G}$$

besteht, in der $G$, $H$ rationale ganze Funktionen der übrigen Differentialsymbole $D_x, D_y, \ldots, g, h$ Konstante bezeichnen; dann kann man auch die Gleichungen

$$(1548)\qquad (D_t^2 - G)\varpi_1 = 0, \quad (D_t^2 - H)\varpi_2 = 0$$

unabhängig voneinander integrieren und hat darauf nur noch Quadraturen vermöge einer Formel

$$(1549)\qquad \varpi = D_t^{2-n}(g\omega_1 + h\omega_2)$$

auszuführen. Für die Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie im isotropen Mittel ohne Dispersion sind diese Bedingungen erfüllt, indem dort

$$(1550)\qquad \nabla \equiv \nabla_1 \nabla_2$$
$$\equiv (D_t^2 - \iota(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2))(D_t^2 - \iota(1+f))(D_x^2 + D_y^2 + D_z^2),$$

also

$$(1551)\qquad \frac{D_t^2}{\nabla} = \frac{1+f}{f}\frac{1}{\nabla_1} - \frac{1}{f}\frac{1}{\nabla_2}$$

ist.[1917a]) Für $f = 2$ erhalte man so Formeln, die von denjenigen von Ostrogradsky nur scheinbar verschieden seien; für die Optik glaubt Cauchy $f = -1$ setzen zu müssen. Später[1918]) gibt Cauchy hierüber noch weitere Ausführungen, namentlich Formeln zur Ableitung der Verschiebungskomponenten aus dem Ausdruck der Dilatation, die, wie er selbst sagt, von den von Ostrogradsky gegebenen nicht wesentlich verschieden sind. Überdies bemerkt er[1919]), daß auch die Wirbelkomponenten $U, V, W$ der Schallgleichung genügen, und daß man, wenn diese und die Dilatation gefunden sind, die Verschiebungskomponenten aus:

$$(1552)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \ldots$$

entnehmen kann.

**97. Ableitung des Endverlaufs aus der Integraldarstellung.** Die Diskussion des Endverlaufs der Ausbreitung von Wasserwellen nach

---

1917) Paris C. R. 9 (1839), p. 641 = Oeuvres (1) 5, p. 9; etwas ausführlichere und anders angeordnete Darstellung exerc. d'anal. 1 (1840), p. 189. Ankündigung Paris C. R. 9 (1839), p. 288 = Oeuvres (1) 4, p. 497.

1917a) Paris C. R. 9 (1839), p. 646 = Oeuvres (1) 5, p. 17; exerc. d'anal. 1 (1840), p. 208.

1918) Paris C. R. 14 (1842), p. 402 = Oeuvres (1) 6, p. 415.

1919) Paris C. R. 14 (1842), p. 406 = Oeuvres (1) 6, p. 419.

allen Seiten ist von *A. Cauchy*[1920]) am Schlusse seiner Abhandlung wenigstens insoweit angedeutet, als die allgemeine Lösung durch die Hauptlösung und diese durch ihre aus (1054) und (955) sich ergebenden asymptotischen Werte ersetzt ist. Eine genauere Untersuchung gibt *S. D. Poisson*. Er benutzt zunächst[1921]) ebenfalls die Entwicklung der Hauptlösung nach steigenden Potenzen von $k/t^2$, wo $k = z + i\varrho\cos\omega$, $\varrho^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$, $\operatorname{tg}\omega = \eta/\xi$, ersetzt aber darin nicht einfach $\varrho^2$ durch $x^2 + y^2$, sondern behält von den Gliedern mit den Integrationsvariabeln $\alpha, \beta$ noch diejenigen bei, die auf das Integral

$$(1553)\qquad \iint f(\alpha,\beta)\,(\alpha^2+\beta^2)\,d\alpha\,d\beta$$

führen; die Glieder mit $\int \alpha f\,d\alpha\,d\beta$ und $\int \beta f\,d\alpha\,d\beta$ denkt er sich durch geeignete Wahl des Koordinatenanfangspunktes beseitigt. Nachher[1922]) stellt er für große Werte von $x/\alpha$, $y/\beta$ und mäßige Werte von $t^2/r$ die allgemeine Lösung analog wie Cauchy durch das Produkt aus der Hauptlösung in $\int f(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta$ dar und benutzt die asymptotische Entwicklung der Hauptlösung. Endlich behandelt er noch[1923]) den Fall, daß auch $t^2/r$ groß ist, unter der speziellen Annahme, daß die Anfangsfunktion durch

$$(1554)\qquad f(\alpha,\beta) = 1 - \frac{\alpha^2}{l^2} - \frac{\beta^2}{l_1^{\,2}}$$

gegeben sei, solange diese Funktion positiv ist, außerhalb des damit definierten Bereichs durch $f(\alpha,\beta) = 0$. Indem er hier durch die Gleichungen

$$(1555)\qquad \alpha = ls\cos\psi, \qquad \beta = l_1 s\sin\psi$$

eine Art von Polarkoordinaten $s, \psi$ einführt und für die Hauptlösung den unter den getroffenen Voraussetzungen geltenden asymptotischen Ausdruck benutzt, erhält er zunächst:

$$(1556)\qquad \frac{ll_1}{\sqrt{2\pi}^3}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left\{\cos\frac{gt^2}{4\varrho\cos\omega} + \sin\frac{gt^2}{4\varrho\cos\omega}\right\}\frac{(1-s^2)\,ts}{(\varrho\cos\omega)^{3/2}}\,ds\,d\psi\,d\omega.$$

Hieraus gewinnt er durch wiederholte partielle Integration nach $\omega$ eine asymptotische Entwicklung nach fallenden Potenzen von $t^2/\varrho$,

1920) Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 109 (von 1815).

1921) Paris mém. 1 (1816[18]), p. 149.

1922) p. 153. *Poisson* führt schon hier die Voraussetzung (1554) ein, doch tut sie hier noch nichts zur Sache. Vgl. Note 1804.

1923) p. 156.

dessen erstes Glied zu (1556) den folgenden Beitrag liefert:

$$(1557)\qquad -\frac{ll_1}{\pi\sqrt{2}}\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos\frac{gt^2}{4\varrho}\cdot\frac{(1-s^2)s}{\varrho}\,ds\,d\psi,$$

und indem er hier noch $1/\varrho$ außerhalb des Zeichens cos durch seine nullte, unter diesem Zeichen durch seine erste Annäherung in bezug auf $\alpha, \beta$ ersetzt, erhält er schließlich[1924]) ein Produkt aus

$$(1558)\qquad \cos\frac{gt^2}{4\sqrt{x^2+y^2}}$$

in eine Funktion $K$, die hauptsächlich[1925]) von der einen Größe:

$$(1559)\qquad k = \frac{t^2}{4r^3}\sqrt{l^2x^2+l_1y^2}$$

abhängt und bei der Annahme (1554)

$$(1560)\qquad K = \frac{\sqrt{2}\,ll_1\,t^2}{3\pi\sqrt{x^2+y^2}^{\,3}}\int_0^1 (1-a^2)^{3/2}\cos ka\,da$$

ist. Es ergeben sich also kreisförmig begrenzte „Wellen", die sich mit gleichmäßiger Beschleunigung ausbreiten, überlagert von „Zähnchen", die mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschreiten und von algebraischen Kurven sechster Ordnung begrenzt sind. Poisson bespricht dann auch noch[1926]) kurz die Konsequenzen der (analog wie (1554) zu verstehenden) Annahme:

$$(1561)\qquad f(\alpha,\beta) = (1-s^2)(1+ms^2).$$

Die Fortpflanzung der Wellenbewegung in die Tiefe unterhalb des Störungszentrums behandelt er[1927]) nur für denjenigen Zeitraum, während dessen man die allgemeine Lösung durch die Hauptlösung ersetzen kann.

*A. Cauchy*[1928]) gelangt durch Benutzung des asymptotischen Ausdrucks (1054) der Hauptlösung bei beliebiger Gestalt der Anfangsstörung zu:

$$(1562)\qquad u = \frac{t^2\sqrt{2}}{8\pi r^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha,\beta)\left(\cos\frac{t^2}{4r}+\sin\frac{t^2}{4r}\right)d\alpha\,d\beta,$$

---

1924) p. 163.

1925) Poissons Angabe, sie hänge nur von dieser Größe ab, ist eine Ungenauigkeit.

1926) p. 175.

1927) p. 179.

1928) Paris mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 242.

wo $r$ die Entfernung der beiden Punkte $(x, y)$ und $(\alpha, \beta)$ bedeutet. Hier kann in erster Annäherung $r$ durch $r_0$, den Abstand des Punktes $(x, y)$ vom Anfangspunkt, ersetzt werden; in zweiter ist

$$\text{(1563)} \qquad \frac{1}{r} \sim \frac{1}{r_0} + \frac{\alpha x + \beta y}{r_0^3}$$

zu setzen.[1929]) Werden dann durch

$$x = r_0 \cos \varphi, \quad y = r_0 \sin \varphi; \quad \alpha = \varrho \cos \psi, \quad \beta = \varrho \sin \psi$$

Polarkoordinaten eingeführt, so kommt man für den Fall, daß die Funktion $f$ nur von $\varrho$ nicht von $\psi$ abhängt und nur für $\varrho < 1$ von Null verschieden ist, zu einem Integral der Form[1930])

$$\text{(1564)} \qquad \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-\nu^2}} f\left(\sqrt{\mu^2 + \nu^2}\right) \cos v\nu \, d\mu \, d\nu, \quad v = \frac{t^2}{4 r_0^2}.$$

Ist $f$ eine ganze Funktion von $\varrho$, so läßt sich die Integration nach $\mu$ elementar ausführen, die nach $\nu$ dann durch Entwicklung nach Potenzen dieser Größe. Die Annahme

$$\text{(1565)} \qquad f(\varrho) = -(1 - \varrho^2)$$

gibt Resultate, die mit denjenigen von Poisson übereinstimmen; andere Annahmen, wie im Falle, daß nur eine Raumkoordinate berücksichtigt zu werden braucht (Nr. 86), beträchtlich davon abweichende. Läßt sich $f$ in eine Reihe nach Potenzen von $\varrho$ entwickeln, so erhält man durch gliedweise Integration eine Entwicklung nach fallenden Potenzen von $v$.[1931]) In speziellen Fällen, z. B. für $f(\varrho) = -\sqrt{1 - \varrho^2}$, bricht diese Entwicklung ab.

Von Fällen, in welchen $f$ nicht nur von $\varrho$ abhängt, behandelt Cauchy nur den einen[1932]):

$$\text{(1566)} \qquad f(\alpha, \beta) = \begin{cases} 1 \text{ für } |\alpha| < a \text{ und } |\beta| < b, \\ 0 \text{ für } |\alpha| > a \text{ oder } |\beta| > b; \end{cases}$$

die Integrationen lassen sich hier elementar ausführen:

Daß man die allgemeine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in drei Dimensionen in hinlänglicher Entfernung vom Störungszentrum und für hinlänglich große Werte von $\frac{r^2}{t}$ durch die Hauptlösung er-

1929) p. 247. Von der dritten Annäherung sagt er nur, daß es sich bei ihr hier ebenso verhalte wie bei dem Problem mit nur einer Raumkoordinate (Nr. 86).

1930) p. 255.

1931) p. 265.

1932) p. 284.

setzen kann, geben bereits *Poisson*[1933]) und *Fourier*[1934]) an. Weniger einfach ist der Fall des Halbraums mit der Grenzbedingung $u = 0$ für $x = 0$; die Hauptlösung für den Pol $(\alpha, 0, 0)$ ist hier:

$$(1567)\qquad \frac{1}{8\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{y^2+z^2}{4t}\right)\left\{\exp\left(-\frac{(x-\alpha)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\alpha)^2}{4t}\right)\right\}$$

wird also für $\alpha = 0$ identisch Null. *Poisson*[1935]) behält daher in diesem Fall auch die Glieder 1. Ordnung in der Entwicklung nach Potenzen von $\alpha$ bei, so daß er als asymptotischen Ausdruck erhält:

$$(1568)\qquad u = \frac{x}{8\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(\frac{-r^2}{4t}\right) \int^{(3)} \alpha f(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Er macht darauf aufmerksam, daß sonach hier der asymptotische Wert nicht nur von der gesamten zu Anfang vorhandenen Wärmemenge (dem Integral der Funktion $f$ selbst), sondern auch von ihrer Verteilung abhängt.

Was die Frage nach dem Endverlauf der durch eine lokalisierte Anfangsstörung in einem elastischen Medium erzeugten Bewegung betrifft, so hat zunächst *S. D. Poisson*[1936]) für die Potentialbewegungen einer Flüssigkeit gezeigt: Wird die Gleichung (1468) auf räumliche Polarkoordinaten transformiert und werden dann ihre beiden Seiten, nach Multiplikation mit dem Oberflächenelement einer um den Koordinatenanfangspunkt beschriebenen Einheitskugel, über diese Kugel integriert, so ergibt sich, daß der Mittelwert

$$(1569)\qquad U = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} u \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

der einfacheren Gleichung

$$(1570)\qquad \frac{\partial^2 (rU)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (rU)}{\partial r^2}$$

genügt, und daraus, daß dieser Mittelwert zur Zeit $t$ nur zwischen $r = t - \varepsilon$ und $r = t + \varepsilon$ von Null verschieden ist, wenn er zur Zeit $t = 0$ nur für $r < \varepsilon$ von Null verschieden war. Später leitet er ein entsprechendes Resultat für die Bewegungen selbst, nicht nur für ihre Mittelwerte, aus den Gleichungen (1433) ab: sind dort die Funktionen $f, F$ zur Zeit $t = 0$ nur für solche Punkte von Null verschieden, für die $x^2 + y^2 + z^2 < \varepsilon^2$ ist, so kann $\varphi$ zur Zeit $t$ nur für solche Punkte $x, y, z$ von Null verschieden sein, zu denen sich reelle Werte

1933) Bull. philomat. 1816, p, 12; J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 359.
1934) Théorie de la chaleur, Nr. 385 = Oeuvres 1, p. 447.
1935) J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 366.
1936) J. éc. polyt. cah. 14 (1808), p. 319.

von $u$ und $v$ so bestimmen lassen, daß

$$(1571)\quad (x + t\cos u)^2 + (y + t\sin u\sin v)^2 + (z + t\sin u\cos v)^2 < 1$$

wird. Das ist aber wieder nur für die Punkte zwischen den beiden Kugelflächen um den Ursprung von den Radien $r = t - \varepsilon$ und $r = t + \varepsilon$ der Fall. Noch später[1938]) zeigt er, daß Ähnliches auch dann noch gilt, wenn es sich nicht mehr um eine bloße Potentialbewegung handelt: aus den Formeln (1497) ergibt sich, daß für $r > t + \varepsilon$ auch in diesem Falle die Funktion $\psi$ Null ist, wenn sie es zu Anfang für $r > \varepsilon$ war, und daß sie für $r < t - \varepsilon$ zwar nicht Null, aber doch von $t$ unabhängig wird.

*Poisson* hat auch den Endverlauf der Ausbreitung einer lokalisierten Anfangsstörung in zwei übereinandergeschichteten Medien, in welchen beiden die hydrodynamischen Gleichungen, aber mit verschiedenen Werten der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, gelten, in einer ausführlichen Untersuchung verfolgt[1939]); doch beruht alles auf den Nr. 86 p. 1244 erwähnten unsicheren Grundlagen.

Ferner hat *Poisson* den Endverlauf der von einer lokalisierten Anfangsstörung in einer Flüssigkeit erzeugten Bewegung untersucht[1940]). Er führt durch die Gleichungen

$$x + t\cos\theta = r_1\cos\mu_1,\quad y + t\sin\theta\sin\omega = r_1\sin\mu_1\sin\lambda_1,$$
$$z + t\sin\theta\cos\omega = r_1\sin\mu_1\cos\lambda_1$$

Polarkoordinaten und dann durch

$$t = r - \zeta,\quad \theta = \pi - \mu + \eta,\quad \omega = \pi + \lambda + \eta_1$$

neue Veränderliche $\zeta, \eta, \eta_1$ ein, von denen nur kleine Werte in Betracht kommen, so daß er schließlich durch die abermalige Substitution:

$$\eta r = s\sin\sigma,\quad \eta_1 r\sin\mu = s\cos\sigma$$

die Form erhält:

$$(1572)\quad \varphi = \frac{1}{4\pi r}\int\limits_0^\delta\int\limits_0^{2\pi} F s\,ds\,d\sigma - \frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial\zeta}\int\limits_0^\delta\int\limits_0^{2\pi} f s\,ds\,d\sigma = \frac{1}{r}\,\Psi(\zeta,\mu,\lambda),$$

wo $\Psi$ eine Funktion bedeutet, die nur für kleine Werte von $\zeta$ von Null verschieden ist. Daraus folgt dann, daß für große Werte von $r$ die Geschwindigkeit nahezu zum Abstand vom Störungszentrum umgekehrt proportional ist und nahezu in die Richtung dieses Abstandes fällt.

---

1938) Paris mém. 10 (1831), p. 567.

1939) Paris mém. 10 (1831), p. 344 (von 1823).

1940) Paris mém. 10 (1831), p. 565, 568.

Entsprechende Umformungen nimmt er dann auch mit den Gleichungen der Bewegung in einem isotropen festen elastischen Körper vor[1941]); hier ergibt sich, daß die mit der Geschwindigkeit 1 fortschreitende Bewegung in großem Abstand vom Störungszentrum sich wie die in einer Flüssigkeit mögliche verhält, die andere aber schließlich nahezu transversal und die Dilatation bei ihr nahezu gleich Null ist.

*J. M. C. Duhamel*[1942]) gibt ohne Beweis den Satz: befindet sich eine Kugel in einem Raume, dessen Temperatur eine periodische Funktion der Zeit und eine beliebige Funktion des Ortes auf der Oberfläche ist, so ist der Mittelwert der Temperatur auf einer zur Oberfläche konzentrischen Kugelfläche, genommen über die Periode, konstant und gleich dem Mittel der Außentemperatur. Dabei dürfen die thermischen Konstanten beliebige Funktionen des Abstandes vom Mittelpunkt sein. *Saigey* erklärt[1943]), er habe den Satz Duhamel mitgeteilt; er gelte übrigens auch, wenn die Außentemperatur nicht periodische Funktion der Zeit sei; die äußeren Ursachen müßten nur „ein unveränderliches Mittel der Temperatur für die ganze Oberfläche" ergeben. *Duhamel* erwidert[1944]): was ihm *Saigey* mitgeteilt habe, sei teilweise falsch gewesen. *Saigey* teilt dann[1945]) die Überlegungen mit, aus denen er seinen Satz erschließen zu können meint; es handelt sich um eine differentielle Betrachtung des Wärmeaustausches zwischen je zwei benachbarten konzentrischen Schichten. *Duhamel* erklärt[1946]), der Satz ergebe sich aus allgemeineren Formeln Poissons und aus Ansätzen Fouriers, nur sein Beweis sei direkter. Außerdem teilt er noch einen zweiten Satz mit[1947]): befindet sich ein beliebiger Körper in einem Raume, dessen Temperatur eine periodische Funktion der Zeit ist, so ist der Mittelwert der Temperatur irgendeines Punktes, genommen über die Periode, gleich derjenigen Temperatur, die dieser Punkt annehmen würde, wenn die Außentemperatur in jedem Punkte beständig ihren Mittelwert behielte. Auch Saigey gibt noch[1948]) Korollare seiner Behauptung.

---

1941) Ib. p. 597; die Resultate ohne Formeln auch schon ann. chim. phys. 44 (1830), p. 431 = bull. Férussac 14 (1830), p. 386. Die Anwendung der Resultate auf den Lichtäther lehnt er hier noch ab; ebenso die Zerlegung eines lokalisierten Anfangszustandes in unbegrenzte ebene Wellen.

1942) Paris C. R. 2 (1836), p. 109.

1943) Paris C. R. 2 (1836), p. 161.

1944) Paris C. R. 2 (1836), p. 162.

1945) Paris C. R. 2 (1836), p. 179.

1946) Paris C. R. 2 (1836), p. 181.

1947) Paris C. R. 2 (1836), p. 217.

Andererseits hat auch *A. Cauchy* aus seinen Formeln, die an die Vorstellung der Zusammensetzung der allgemeinsten Bewegung aus ebenen Wellen anknüpfen, Schlüsse über die Ausbreitung einer begrenzten Anfangsstörung gezogen. Er schließt zunächst[1948a]) für den Fall, daß die Funktion $F(\xi, \eta, \zeta, s)$ homogen ist, aus der Gleichung (1538): wenn die Funktionen $\mathfrak{f}$ nur in der Umgebung des Ursprungs von Null verschieden sind, erhält $\varphi$ von Null verschiedene Werte nur für solche Punkte, für die $ux + vy + wz + st$ nahezu gleich Null ist; wobei $s$ mit $u, v, w$ durch die Gleichungen (1537) verbunden sind. Die Gleichung

$$(1573)\qquad ux + vy + wz + st = 0$$

ist aber unter dieser Voraussetzung die Gleichung einer Tangentialebene der Wellenfläche; also schließt er, daß die Bewegung in jedem Augenblick nur in der Nähe der Tangentialebenen der Wellenfläche merklich sein kann und folglich [für den Fall, daß diese Fläche konvex ist] das Gebiet, in welchem die Bewegung merklich ist, in jedem Augenblick durch die zugehörige Wellenfläche nach innen begrenzt ist.

*Cauchy* gibt ohne Beweis für die Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie die folgenden Sätze[1949]): in einem isotropen Medium breitet sich eine lokalisierte Anfangsstörung in zwei Kugelwellen aus; die eine von diesen Wellen fällt weg, wenn die Anfangsdilatation Null ist. In einem einachsigen Medium kann man zwischen den Elastizitätskoeffizienten noch eine solche Beziehung annehmen, daß jede lokalisierte Anfangsstörung zu drei Wellen Anlaß gibt, die durch Flächen zweiten Grades begrenzt sind; wenn man dabei diejenige Welle unberücksichtigt läßt, die in einem isotropen Medium mit der Dilatation verschwindet, so kommt man auf die s. Z. von Huyghens gegebene Konstruktion der Wellenfläche zurück.

*Cauchy* stellt dann[1950]) den folgenden Abhandlungen über solche Fragen seine Auffassung der Zerlegung in ebene Wellen an die Spitze: auch eine lokalisierte Anfangsstörung könne man ansehen

1948) Paris C. R. 2 (1836), p. 240.

1948a) Bull. Férussac 13 (1830), p. 277.

1949) Bull. Férussac 11 (1829), p. 112 = Paris mém. 9 (1830), p. 114 = Oeuvres (1) 2, p. 83.

1950) Exerc. de math. 5 (1830) = Oeuvres (2) 9, p. 406, 447: mém. sur la théorie de la chaleur, Paris 1830 = bull. Férussac 13 (1830), p. 414 = Paris mém. 10 (1831), p. 297 = Oeuvres (1) 2, p. 94. — *Poisson* spricht sich scharf gegen die Hereinziehung der ebenen Wellen aus; er erklärt sie für „tout-à-fait étrangère à la question" (ann. chim. phys. 44 (1830), p. 433 = bull. Férussac 14 (1830), p. 387).

als zusammengesetzt aus einer sehr großen Anzahl sehr schwacher Wellen, deren Ebenen zu Anfang alle nahezu durch einen Punkt gehen. In jedem späteren Augenblick sei dann eine merkliche Bewegung nur in solchen Punkten vorhanden, an denen noch unendlich viele Wellenebenen unendlich nahe vorbeigehen, d. h. in den Punkten der Wellenfläche, die in diesem Augenblick von den Wellenebenen berührt wird.

Die einer quantitativen Durchführung dieser Vorstellungen sich entgegenstellenden Schwierigkeiten hat zuerst *P. H. Blanchet*[1951]) zu überwinden versucht. Die Ausdrücke der Verschiebungskomponenten bestehen aus Bestandteilen der Form:

$$(1574)\qquad \frac{1}{8\pi^3}\int^{(6)} \frac{ms}{\mathfrak{S}_s'} \exp(i\varrho\xi) \cos st\,\chi(\varrho)\varrho^2 \sin\theta\, d\varrho\, d\theta\, d\psi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

oder der hieraus durch Integration nach $t$ entstehenden; dabei steht $\varrho^2$ für $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2$, $\chi(\varrho)$ für

$$(1575)\qquad f(x-\varrho\cos\theta,\, y-\varrho\sin\theta\cos\psi,\, z-\varrho\sin\theta\sin\psi),$$

wobei $f$ eine der vorgeschriebenen Anfangsfunktionen bedeutet, $s$ ist mit $\xi, \eta, \zeta$ durch die homogene Gleichung

$$(1576)\qquad \mathfrak{S}(\xi, \eta, \zeta, s) = 0$$

verbunden, ist also eine homogene Funktion ersten Grades dieser Größen, und $ms/\mathfrak{S}_s'$ ist von denselben Größen eine homogene Funktion nullten Grades. Werden an Stelle von $\eta$, $\zeta$ zwei neue Variable $p$, $q$ durch

$$(1577)\qquad \eta = p\xi, \quad \zeta = q\xi$$

eingeführt und wird $s = n|\xi|$ gesetzt, so werden $m$ und $n$ Funktionen von $p$ und $q$ allein, und es wird

$$d\xi\, d\eta\, d\zeta = \xi^2\, d\xi\, dp\, dq.$$

Von dem Faktor $\xi^2$ befreit sich Blanchet, indem er das zu reduzierende Integral als zweite Ableitung eines andern nach $t$ auffaßt; in diesem lassen sich die Integrationen nach $\xi$ und nach $\varrho$ mit Hilfe der Fourierschen Formel für Funktionen einer Variablen ausführen, und

---

1951) *P. H. Blanchet* hat drei nur in Nebensachen verschiedene Darstellungen seines Reduktionsverfahrens gegeben, p. 10 und p. 23 seiner ersten Abhandlung, J. de math. 5 (1840) (von 1838) und p. 16 der dritten, ib. 7 (1842); die Darstellung des Textes ist aus ihnen kombiniert. Ganz kurze Angabe der Hauptresultate Paris C. R. 7 (1838), p. 310; etwas ausführlichere in dem Rapport von *Ch. Sturm*, ib. p. 1144. Von einer zweiten Abhandlung Blanchets wird nur mitgeteilt (ib. p. 723, 1144), daß sie zeige, wie die Resultate für den Fall der Isotropie auf die früher bekannten zurückkommen.

es bleibt:

$$(1578)\qquad -\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{ms}{\mathfrak{S}_s'}\,t^2\chi(nt)\sin\theta\,d\theta\,d\psi\,dp\,dq.$$

Hier schreibt er $s$ für $nt$ und setzt

$$pt = \eta_1,\quad qt = \zeta_1.$$

Zwischen den so eingeführten Größen besteht die Gleichung[1952]):

$$(1515)\qquad \mathfrak{S}(t, \eta_1, \zeta_1, s) = 0.$$

Wird dann auch dieses $s$ selbst als neue Integrationsvariable eingeführt[1953]), so ist in bezug auf diese über alle Werte zu integrieren, für die diese Gleichung bei gegebenem $t$ durch reelle Werte von $\eta_1, \zeta_1$ erfüllt werden kann, m. a. W. von dem kleinsten Wert $s = Nt$, für den die Fläche (1578a) von der Ebene $\xi = t$ berührt wird, bis $s = \infty$.[1954]) Diese Ebene wird durch die Kurven $s =$ konst. in Elementarringe vom Flächeninhalt

$$(1579)\qquad d\sigma = \frac{d\sigma}{ds}\,ds,$$

diese durch die Linien, längs deren eine zweite neue Veränderliche konstant ist, in Elemente

$$(1580)\qquad \delta\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)\cdot ds$$

geteilt. Wird das Integral

$$(1581)\qquad \int\frac{ms}{\mathfrak{S}_s'}\,\delta\left(\frac{d\sigma}{ds}\right),$$

genommen über einen solchen Elementarring, das eine homogene Funktion ersten Grades von $t$ und $s$ vorstellt, mit $\varphi(t, s)$ bezeichnet, so kann statt (1578a) geschrieben werden

$$(1581\text{a})\qquad -\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_{Nt}^{\infty}\chi(s)\,\varphi(t,s)\,ds\sin\theta\,d\theta\,d\psi.$$

---

1952) *P. H. Blanchet* erschwert das Verständnis seiner Untersuchungen dadurch, daß er diese neuen Größen mit demselben Buchstaben bezeichnet wie die früheren $\eta$, $\zeta$.

1953) *Ch. Sturm* sagt in seinem Bericht: bis hierher habe Blanchet die Untersuchungen seiner Vorgänger über analoge Fragen benutzen können; seine weiteren Hilfsmittel „lui appartiennent exclusivement et sont aussi simples qu'ingénieux".

1954) Die obere Grenze $s = \infty$ gilt nur für den innersten Mantel der Fläche $\mathfrak{S} = 0$; für die beiden andern behauptet Blanchet später (J. de math. 7 (1842), p. 24), es sei bzw. von $N_2 t$ bis $N_1 t$ und von $N_3 t$ bis $N_1 t$ zu integrieren, wenn $N_1$, $N_2$, $N_3$ die zu den drei Mänteln gehörenden Werte von $N$ seien.

Hier führt nun Blanchet die Differentiation nach $t$ in der Grenze und unter den Integralzeichen aus und läßt dabei alle Glieder weg, die $t$ nicht mehr unter dem Zeichen als Faktor enthalten; es bleibt dann nur:

$$(1582) \qquad \frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Nt\,\varphi(1,N)\frac{d^2\chi(Nt)}{dt^2}\sin\theta\,d\theta\,d\psi,$$

und das kann nur von Null verschieden sein, wenn $\chi(Nt)$ innerhalb des Integrationsgebietes von Null verschiedene Werte annimmt, m. a. W. solange der Punkt $(x, y, z)$ noch von irgendwelchen Punkten des anfänglichen Störungsgebietes die Entfernung $\varrho = Nt$ hat. Das würde heißen: man beschreibe um alle Punkte dieses Gebietes die zu dem Werte von $t$ gehörenden Wellenflächen und bestimme von diesem Flächensystem die innere und äußere Enveloppe; zur Zeit $t$ findet merkliche Bewegung nur zwischen diesen Enveloppen statt.[1955])

Um die Größe dieser Bewegung abzuschätzen, zeigt Blanchet noch durch eine differentialgeometrische Überlegung[1956]), daß $ms/\mathfrak{S}_s'$ im ganzen Integrationsgebiet wenig von seinem Wert im Berührungspunkt der Ebene $\xi = t$ mit der Fläche (1578a) verschieden ist; dieser Wert kann also vor die Integralzeichen gezogen werden. Damit treten die Richtungskosinus der Wellennormale vor die Integralzeichen: die Bewegung erscheint als geradlinig polarisiert.

In einer dritten Abhandlung[1957]) findet es Blanchet doch für erforderlich, die bisher vernachlässigten Bestandteile des Integrals (1581a) mit zu berücksichtigen. Er bemerkt zunächst: aus dieser Form selbst gehe schon hervor, daß keine Bewegung in dem Gebiete stattfinden kann, in welchem die Abstände $\varrho$ alle kleiner als $Nt$ sind; womit die innere Begrenzung des Bewegungsgebiets in Übereinstimmung mit *Cauchy* gefunden ist.

Um auch eine Begrenzung nach außen zu finden, beginnt er[1958]) mit der Überlegung, daß für gegen $t$ große Werte von $s$ die Schnittkurve der Fläche $\mathfrak{S} = 0$ mit der Ebene $\xi = t$ von ihrer Schnittkurve

---

1955) J. de math. 5 (1840), p. 19; weitere Andeutungen p. 28.

1956) Cauchy berichtet Paris C. R. 13 (1841), p. 3 = Oeuvres (1) 6, p. 204, Blanchet habe schon 1830 gesehen, daß sich die Gesetze der Polarisation ebenso gut aus den allgemeinen Integralen wie aus der Untersuchung der möglichen ebenen Wellen ableiten lassen; das bezieht sich wohl hierauf.

1957) J. de math. 7 (1842), p. 16.

1958) J. de math. 7 (1842), p. 17; kurze Angabe der Hauptresultate Paris C. R. 12 (1841), p. 1165. Die Sätze von Cauchy, auf die Blanchet selbst, und die von Jürgensen, auf die Liouville am Schlusse der Abhandlung im J. de math. hinweist, gehören nicht hierher, sondern beziehen sich auf das Abelsche Theorem.

mit der Ebene $\xi = 0$ der Gestalt nach wenig verschieden, also nahezu zentrisch-symmetrisch ist. Man kann, wenn man durch die Gleichungen

(1583) $$\eta_1 = r \sin p, \quad \zeta_1 = r \cos p$$

Polarkoordinaten einführt, wodurch

(1584) $$r\frac{dr}{ds}dp \text{ an die Stelle von } \delta\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)$$

tritt, die Integration nach $p$ auch nur von 0 bis $\pi$ ausdehnen, wenn man auch negative Werte von $r$ berücksichtigt. Damit ist aber die Möglichkeit zu einer Umformung der Summe der zu den verschiedenen Werten von $s$ (den verschiedenen Mänteln der Fläche $\mathfrak{S} = 0$) gehörenden Integrale gegeben; es ist nämlich:

(1585) $$\mathfrak{S}_s' + \mathfrak{S}_r' \frac{dr}{ds} = 0,$$

also:

(1586) $$\sum \frac{-m}{\mathfrak{S}_s'}\frac{r\,dr}{ds} = \sum \frac{mr}{\mathfrak{S}_r'} = \mathrm{E}\frac{mr}{((\mathfrak{S}))_r};$$

und da hier unter dem Residuenzeichen eine rationale Funktion von $r$ steht, deren Zähler von einem um eine Einheit niedrigeren Grade ist als der Nenner, so ist diese Residuensumme gleich einer nur von $p$ abhängigen, von $s$ und $t$ aber unabhängigen Größe $H$. Das Integral (1518 a) nimmt damit die Form an[1959]):

(1587) $$\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_{Nt}^{\infty} H s\,\chi(s)\,ds\,dp \sin\theta\,d\theta\,d\psi$$

und ist also Null, wenn $Nt$ nicht innerhalb derjenigen Grenzen für $\varrho$ liegt, innerhalb deren $\chi(\varrho)$ von 0 verschieden sein kann, d. h. außerhalb des äußersten Mantels der Wellenfläche.

Diese Überlegung setzt voraus, daß der betrachtete Mantel der Wellenfläche von den übrigen getrennt verläuft. Schneiden sich zwei Mäntel der Wellenfläche, so hat auch ihre Schnittkurve mit der Ebene $\xi = t$ einen Doppelpunkt. Blanchet zeigt in einer vierten Abhandlung[1960]), daß in der Umgebung eines solchen zwar $r$ eine zweiwertige Funktion von $p$ ist, daß aber die zu zwei solchen Werten von $r$ gehörenden Werte von $mr/\mathfrak{S}_r'$ einander bis auf Größen höherer Ordnung entgegengesetzt gleich sind, und also die Umgebung eines solchen Punktes zu dem zu betrachtenden Integral keinen merklichen Beitrag liefert.

---

1959) J. de math. 5 (1840), p. 21.

1960) J. de math. 5 (1840), p. 29. Er bemerkt, man müsse bei diesem Schluß $\chi$ als bis zu einer um 1 höheren Ordnung differentiierbar voraussetzen als bei dem vorigen; Ankündigung Paris C. R. 13 (1841), p. 18.

Noch vor der Veröffentlichung von Blanchets Untersuchungen hatte auch *Cauchy* die Frage behandelt, zunächst veranlaßt durch eine Anfrage *Poissons*[1961]), ob er sich eigentlich bei seinen Untersuchungen vorstelle, daß die ganze Masse in Bewegung sei oder nur ein begrenzter Teil. Er antwortet sogleich: beide Auffassungen seien berechtigt; man könne entweder die Ausbreitung einer begrenzten Anfangsstörung, oder die Fortpflanzung der Wellen in so großer Entfernung vom Störungszentrum untersuchen, daß man sie als ebene behandeln dürfe. Er habe beide Fragestellungen verfolgt. Die Darstellung der Lösung durch ein mehrfaches Fouriersches Integral sei nichts anderes, als die Zerlegung einer beliebigen Bewegung in ebene Wellen; insbesondere könne man auch eine auf nur einen Teil des Raumes beschränkte Bewegung mit Hilfe dieser Formel aus unbegrenzten ebenen Wellen zusammensetzen. Wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge unabhängig sei, bleibe die von einer begrenzten Anfangsstörung ausgehende Bewegung immer in einer Schicht konstanter Dicke[1962]) zwischen zwei Wellenflächen eingeschlossen; hänge die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge ab, so sei die Dicke dieser Schicht von der Zeit abhängig; wenn die obere Grenze der Werte der Fortpflanzungsgeschwindigkeit unendlich sei, breite sich die Bewegung wie die Wärmeleitung instantan aus.

Die spätere Durchführung[1963]) behandelt zunächst den Fall, daß die „Hauptfunktion" des Problems nur Funktion des Abstands vom Koordinatenanfangspunkt ist. Wenn die Funktion $\Pi$ nur für hinlänglich kleine Werte ihres Arguments von 0 verschieden ist, kann das Integral zur Zeit $t$ nur für solche Werte von $x, y, z$ von 0 verschieden sein, für welche es möglich ist, die Gleichung

$$\varsigma \pm st = 0$$

nahezu zu befriedigen; daraus allein folgt schon, daß Bewegung nur in solchen Punkten vorhanden sein kann, von welchen aus sich reelle Tangentialebenen an die Wellenfläche legen lassen; womit die innere Begrenzung des Bewegungsgebietes gefunden ist. Um auch eine äußere Begrenzung zu bekommen, schließt er folgendermaßen: Wenn $x$ sehr groß ist, kann $\varsigma + st = r \cos\delta + \omega t$ nur dadurch sehr klein sein,

1961) Paris C. R. 8 (1839), p. 581 = Oeuvres de Cauchy (1) 4, p. 323.

1962) Das zeigt er hier freilich nur für eine ebene Welle; der Übergang von dieser zu einer beliebigen Anfangsstörung wird mit ein paar keineswegs ausreichenden Worten abgetan.

1963) Paris C. R. 13 (1841), p. 190 = Oeuvres (1) 6, p. 269.

daß $\cos\delta$ sehr klein ist; es nimmt also dann $\varsigma + st$ mit wachsendem $\mathfrak{x} = \xi/\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ zu, man kann das Residuum, das ursprünglich in bezug auf $s$ zu nehmen war, in bezug auf $\varsigma + st$ und schließlich in bezug auf $\mathfrak{x}$ nehmen; und wenn man die Beiträge je zweier Punkte zusammenfaßt, die zu einer Koordinatenachse symmetrisch liegen, so hat man mit einer rationalen Funktion von $\mathfrak{x}$ zu tun, deren Zähler von einem um zwei Einheiten niedrigeren Grad ist als der Nenner, und das Residuum ist Null. Also verschwindet die Hauptfunktion, sobald $x$ so groß ist, daß die Gleichungen

$$(1588) \qquad \varsigma + \omega t = 0, \quad \frac{\partial(\varsigma + \omega t)}{\partial \mathfrak{x}} = 0$$

keine Lösung mehr gemein haben; geometrisch ausgedrückt, außerhalb eines Zylinders mit zur Achse parallelen Geraden, der der Wellenfläche umschrieben ist; und da das für eine beliebige Achsenrichtung gilt, außerhalb des äußersten Mantels der Wellenfläche, wenn dieser konvex ist, andernfalls außerhalb der ihm doppelt umschriebenen Developpablen. Das stimme mit Blanchets Resultaten überein; wie dieser auch bestätigt.[1964])

Nachher[1965]) gibt *Cauchy* noch eine genauere Abschätzung der Größenordnung des Integrals für die verschiedenen in Betracht kommenden Fälle; indem er die übrigen Größen als im Integrationsbereich nahezu konstant vor das Integralzeichen zieht, bleibt ihm nur ein Integral von der Form

$$(1589) \qquad \int_{-\varepsilon}^{\varrho} s\Pi(s)\,ds$$

übrig: dabei ist $\varepsilon$ die halbe Dicke der Wellenschicht und $\varrho$ die Entfernung des Aufpunktes vom nächsten Punkt der Wellenfläche. Ist die Entfernung $> \varepsilon$, so kann die obere Grenze $\varrho$ durch $\varepsilon$ ersetzt werden; und da $\Pi$ eine gerade Funktion von $s$ ist, ist das Integral dann Null. Daraus folgt, daß das ursprünglich vorgelegte Integral für Punkte, die nicht der Wellenschicht angehören, von der Ordnung $\varepsilon^3$ ist, für Punkte dieser Schicht selbst dagegen nur von der Ordnung $\varepsilon^2$.

Zu einer weiteren Reduktion gelangt er[1966]), indem er erst die

---

1964) Paris C. R. 13 (1841), p. 339.

1965) Paris C. R. 13 (1841), p. 494 = Oeuvres (1) 6, p. 324. Ganz kurze Ankündigung schon p. 365 bzw. 287; ausführlichere p. 407 bzw. 300.

1966) Paris C. R. 13 (1841), p. 568 = Oeuvres (1) 6, p. 329. Der Schluß setzt voraus, daß die Funktion $f(r)$, welche die Anfangsstörung darstellt, an den Grenzen ihres Bereiches stetig in Null übergeht; was Cauchy beibringt, um die

Differentiationen nach $t$ und dann die Integration nach $s$ ausführt; er erhält so:

$$(1590) \qquad D_t^{n-1}\varpi = \mathrm{E}\frac{\omega^{n-1}}{(\!(F)\!)_\omega}\frac{k\cos\delta}{r}\, s\,\Pi(s);$$

$k^2$ ist dabei das Krümmungsmaß der Fläche $F(x, y, z, t) = 0$ im Endpunkt eines zur Normale der Wellenfläche parallelen Einheitsvektors.

Weiter zeigt er noch[1967]), wie diese Resultate sich auf den Fall übertragen lassen, daß die Anfangsstörung nicht von $r^2$, sondern von einer andern quadratischen Funktion der Koordinaten abhängt und[1968]), wie sich die Resultate spezialisieren, wenn die Differentialgleichung die spezielle Form $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ gleich einer linearen homogenen Funktion der zweiten Ableitungen nach den Koordinaten hat.

Demgegenüber macht *Blanchet*[1969]) darauf aufmerksam, daß nun doch zwischen den beiderseitigen Resultaten in einem Punkte keine Übereinstimmung bestehe, insofern nach Cauchy auch zwischen den Mänteln der Wellenfläche keine Bewegung vorhanden sei, während aus seinen Untersuchungen folge, daß eine solche im allgemeinen allerdings vorhanden sein müsse: die Integrale von $N_2 t$ bis $N_1 t$ und von $N_3 t$ bis $N_1 t$ seien, wenn zwischen ihren Grenzen noch Werte von $\varrho$ liegen, für welche $\chi(\varrho)$ nicht verschwindet, im allgemeinen von der Größenordnung: Volumen des Erschütterungsraumes geteilt durch die 4. Potenz des Abstandes zwischen dem betrachteten Punkt und einem der Integrationspunkte — und könnten nur dann von höherer Ordnung sein, wenn die mit $\varphi$ bezeichneten Funktionen ganz singuläre Eigenschaften hätten. *Cauchy* ersetzt[1970]), um das zu diskutieren, sein $n$-faches Intergral durch das einfache

$$(1591) \qquad \varpi = \mathrm{E}\frac{\omega^{n-1}}{(\!(F)\!)_\omega}\int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-2}}{(n-2)!}\frac{(\varsigma-\omega\tau)\,\Pi(\varsigma-\omega\tau)}{\varsigma}\,dt$$

und findet nun, indem er die Rechnung unter speziellen Annahmen über die Funktion $F$, für die es möglich ist, durchführt[1971]), daß diese Größe zwischen den Mänteln der Wellenfläche allerdings von

---

Folgerung auch für den andern Fall zu rechtfertigen, würde jedenfalls noch der Nachprüfung und geeigneter Einschränkungen bedürfen.

1967) Paris C. R. 13 (1841), p. 573 = Oeuvres (1) 6, p. 334.

1968) Paris C. R. 13 (1841), p. 576 = Oeuvres (1) 6, p. 338.

1969) Paris C. R. 13 (1841), p. 958 = Oeuvres de Cauchy (1) 6, p. 367. Cauchy behält sich zunächst seine Erklärung vor.

1970) Paris C. R. 13 (1841), p. 1093 = Oeuvres (1) 6, p. 381.

1971) Paris C. R. 13 (1841), p. 1093 und p. 1129 bzw. 385.

Null verschieden ist, daß aber[1972]) die Komponenten transversaler[1973]) Schwingungen dort gleichwohl Null sind.

Der erst nach dieser Diskussion erschienene Bericht *Cauchys*[1974]) über Blanchets beide späteren Abhandlungen bringt nichts Neues mehr bei.

*Blanchet*[1975]) bespricht noch kurz den Fall, daß im Störungsgebiet dauernde beschleunigende Kräfte wirken: Auch in diesem Fall gelte das Superpositionsprinzip, wenigstens in hinlänglicher Entfernung vom Störungszentrum.

In späterer Zeit hat *Cauchy* die Vorstellung vom Aufbau der allgemeinsten Lösung aus ebenen Wellen wieder fallen lassen, weil sie „le grand inconvénient" habe, eine lokalisierte Anfangsstörung aus unbegrenzten Elementen zusammenzusetzen.[1976]) Er will jetzt statt dessen Kugelwellen als Elemente benutzen, ausgehend von der Gleichung:

$$(1592) \qquad f(x, y, z) = \frac{1}{\pi^2} \lim_{\varepsilon = 0} \int_{-\infty}^{+\infty} {}^{(3)} \frac{\varepsilon f(\alpha, \beta, \gamma)}{(\varepsilon^2 + R^2)^2} d\alpha\, d\beta\, d\gamma,$$

die eine beliebige Funktion $f$ aus Funktionen von

$$(1593) \qquad R^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2$$

zusammenzusetzen gestattet.[1977]) Um das auszunützen, betrachtet er zunächst[1978]) den Fall, daß der Anfangszustand die Variablen selbst nur in der Verbindung

$$(1594) \qquad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

1972) Paris C. R. 13 (1841), p. 1130 = Oeuvres (1) 6, p. 387. Einige weitere Auseinandersetzungen über die Ableitung der Verschiebungskomponenten aus der Hauptfunktion noch C. R. 14 (1842), p. 5, 8 = Oeuvres (1) 6, p. 392, 395.

1973) Daß die Behauptung nur für transversale Schwingungen richtig ist, gibt Cauchy selbst an, Paris C. R. 14 (1842), p. 13 = Oeuvres (1) 6, p. 400. *Blanchet* konstatiert daraufhin (Paris C. R. 13 (1841), p. 1152), daß er recht behalten habe.

1974) Paris C. R. 14 (1842), p. 389 = Oeuvres (1) 6, p. 401. Die dem Bericht angehängten Noten betreffen andere Fragen.

1975) Paris C. R. 14 (1842), p. 634.

1976) Paris C. R. 13 (1841), p. 3 = Oeuvres (1) 6, p. 204; Ankündigung exerc. de math. 1 (1840), p. 211.

1977) Er bemerkt (1) 6, p. 212, er habe diese Formel ursprünglich aus der Fourierschen abgeleitet, durch Einführung eines Konvergenzfaktors und Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen. Außer dem im Text besprochenen behandelt er durchweg auch den allgemeineren Fall, daß $R^2$ eine beliebige definite homogene quadratische Form von $x - \alpha$, $y - \beta$, $z - \gamma$ bedeutet.

1978) Paris C. R. 13 (1841), p. 104 = Oeuvres (1) 6, p. 238.

enthält; er setzt dann auch noch:

$$(1595) \qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \varrho^2 = Q^2 \cos^2 \delta,$$

wo $\lambda$, $\mu$, $\nu$ wieder die unter (1537) angegebene Bedeutung haben, und findet:

$$(1596) \quad Q^2 = s^2 t^2 + 2st(x \cos\theta + y \sin\theta \cos\psi + z \sin\theta \sin\psi) + r^2 \cos^2 \delta.$$

Damit läßt sich das nach $\theta$ und $\psi$ genommene Doppelintegral vermöge seiner Hilfsformel (Nr. 66) auf ein einfaches Integral reduzieren und dieses nachher noch elementar ausführen, so daß nach einigen Rechnungen bleibt:

$$(1597) \quad \varpi = \frac{1}{4\pi} D_t^{2-n} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathbf{E} \frac{s^{n-2}(st+\varsigma)\,\Pi(st+\varsigma) \sin p\, dp\, dq}{((F(\cos p, \sin p \cos q, \sin p \sin q, s)))_s},$$

wobei

$$(1598) \qquad x\cos\theta + y \sin\theta\cos\psi + z\sin\theta\sin\psi = \varsigma$$

gesetzt ist.

Nachher[1979]) zeigt er noch, wie dieses Resultat auch direkt erhalten werden kann, ohne daß man von den Formeln des allgemeinen Falles auszugehen braucht, indem er für die Funktion $\Pi$ zuerst eine Exponentialfunktion, dann eine Summe von solchen nimmt. Es ist nämlich

$$(1599) \qquad \mathbf{E} \frac{\exp(\varsigma + \omega t)}{((F))}$$

die den Anfangsbedingungen

$$(1600) \quad \varpi = 0, \ \frac{\partial \varpi}{\partial t} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial^{n-2}\varpi}{\partial t^{n-2}} = 0, \ \frac{\partial^{n-1}\varpi}{\partial t^{n-1}} = e^{\varsigma}$$

genügende Lösung; wird dann die gegebene Anfangsfunktion vermöge der Poissonschen Hilfsformel durch

$$(1601) \qquad \Pi(r) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f'(\varsigma) \sin\theta\, d\theta\, d\psi$$

dargestellt, wo

$$(1602) \qquad f(r) = r\,\Pi(r)$$

ist, so wird wieder die Formel (1597) erhalten[1980]). Damit erscheint dann schließlich[1981]) die Hauptfunktion für beliebigen Anfangszustand in der Gestalt:

$$(1603) \qquad \varpi = \iiint \mathfrak{F}\, \varpi(\alpha, \beta, \gamma)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma,$$

---

1979) Paris C. R. 13 (1841), p. 116 = Oeuvres (1) 6, p. 244.

1980) Paris C. R. 13 (1841), p. 118 = Oeuvres (1) 6, p. 252.

1981) Paris C. R. 13 (1841), p. 122 = Oeuvres (1) 6, p. 256.

wo $\mathfrak{S}$ die zu $\Pi(r) = \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 + r^2)^2}$ gehörende Lösung ist. Diese kann auch geschrieben werden:

$$(1604)\quad \mathfrak{S} = \frac{1}{8\pi} D_t^{3-n} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{E}\, \frac{s^{n-3}}{F}\, \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2 + (\varsigma + st)^2)} \sin p\, dp\, dq.$$

Erwähnt sei hier noch ein Versuch *A. Cauchys* zu einer eigentümlichen Behandlung des Beugungsproblems. Indem er zunächst den Fall ins Auge faßt, daß eine Raumkoordinate nicht auftritt, und die Bedingung der Inkompressibilität einführt, bleiben ihm die Gleichungen

$$(1605)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \Delta v, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

er setzt für negative $x$:

$$(1606)\qquad \left.\begin{aligned} u &= -\eta_0 \\ v &= +\xi \end{aligned}\right\} \exp i(\xi x + \eta_0 y - st), \quad s^2 = \xi^2 + \eta_0^2$$

und sucht nun für negative $x$ eine Lösung, die sich für $x = 0$, $y_0 < y_1 < y$ auf die eben angegebene, für $x = 0$, $y < y_0$ und für $x = 0$, $y > y_1$ aber auf Null reduziert. Er behauptet[1982]), diesen Bedingungen genüge

$$\left.\begin{aligned} u &= -\eta_0 \\ v &= \xi \end{aligned}\right\} \frac{1}{2\pi} \int_{y_0}^{y_1}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp i[x\sqrt{s^2 - \eta^2} + \eta(y - \beta) + \eta_0 \beta - st]\, d\eta\, d\beta,$$

indem er den Fourierschen Integralsatz auch für das dann auftretende divergente Integral als richtig in Anspruch nimmt. Dann aber behauptet er noch, da große Werte von $\eta$ doch keinen Beitrag geben dürften, „weil sonst das Integral divergent sei", sei es erlaubt im Exponenten

$$(1606\text{a})\qquad \sqrt{s^2 - \eta^2} \quad \text{durch} \quad s - \frac{\eta^2}{2s}$$

zu ersetzen; dann läßt sich eine Integration ausführen, und es bleibt:

$$(1607)\quad \left.\begin{aligned} u &= -\eta_0 \\ v &= \xi \end{aligned}\right\} \sqrt{\frac{s}{2\pi x}} \exp i\left(sx - st - \frac{\pi}{4}\right) \int_{y_0}^{y_1} \exp i\left(\eta_0 \beta + \frac{s}{2x}(y - \beta)^2\right) d\beta.$$

Für $\eta_0 = 0$, also $\xi = s$ reduziert sich das auf[1983]):

$$(1608)\qquad u = 0, \quad v = \frac{s}{\sqrt{\pi}} \int \cos\left(sx - st - \frac{\pi}{4} + \alpha^2\right) d\alpha,$$

---

1982) Paris C. R. 15 (1842), p. 609 = Oeuvres (1) 7, p. 161.

1983) Paris C. R. 2 (1836), p. 458 = Oeuvres (1) 4, p. 36 hatte er dieses Resultat bereits ohne Beweis mitgeteilt.

das Integral genommen zwischen den Grenzen

$$(y-y_1)\sqrt{\frac{s}{2x}} \quad \text{und} \quad (y-y_0)\sqrt{\frac{s}{2x}}.$$

Entsprechende Formeln leitet er dann auch für den Fall ab, daß alle drei Raumkoordinaten zu berücksichtigen sind[1984]).

Über den Fall, daß die Vereinfachung (1606a) nicht erlaubt ist, gibt er in einigen folgenden Aufsätzen[1985]) noch Andeutungen ohne Formeln: man müsse die dann auftretenden Glieder mit Faktoren der Form $\exp(ax)$, $a>0$, als reflektierte Wellen deuten und das Problem so angreifen, daß die Bewegung in der Schirmebene als gegeben angenommen und gefragt werde, wie sie sich nach beiden Seiten hin ausbreite.

**98. Das Spiegelungsprinzip.** Ist der Bereich, für den eine Differentialgleichung unter gegebenen Grenz- und Anfangsbedingungen integriert werden soll, teilweise durch eine zur $x$-Achse normale Ebene begrenzt, und ist an dieser die Bedingung $u=0$ oder $\frac{\partial u}{\partial x}$ vorgeschrieben, so kann das dadurch geschehen, daß man den Bereich und die an den etwa noch vorhandenen andern Grenzen geltenden Grenzbedingungen an dieser Ebene spiegelt und für die Anfangswerte in dem Spiegelbild die zu den gegebenen spiegelbildlich gleichen oder entgegengesetzt gleichen nimmt, und nun die Gleichung für diese Bedingungen für den erweiterten Bereich integriert. Das ist für die Schallbewegung in einer Dimension schon von *L. Euler*[1985a]), später von *S. D. Poisson*[1985b]) und von *J. Challis*[1985c]) dargelegt worden; daran haben sich dann die in Nr. 84 besprochenen Untersuchungen von *Cauchy* und *Poisson* über die Zerspaltung der Lösung durch ein Fouriersches Integral in die unendliche Reihe angeschlossen.

Darüber hinaus hat dann *A. Cauchy* auseinandergesetzt[1985d]), daß man, wenn der gegebene Bereich mehrere unebene Begrenzungsflächen aufweist, dieses Verfahren unbegrenzt oft wiederholen könne, indem bei

---

1984) Paris C. R. 15 (1842), p. 612 = Oeuvres (1) 7, p. 164.

1985) Paris C. R. 15 (1842), p. 670, 712 = Oeuvres (1) 7, p. 170, 180; hauptsächlich p. 675 = 175. Die in Aussicht gestellte ausführlichere Darstellung scheint nicht erschienen zu sein.

1985a) Berl. hist. 1765/67; ausgehend von seiner Form der Lösung der Gleichung.

1985b) J. Éc. polyt. cah. 14 (1808), p. 351.

1985c) Cambr. trans. 3 (1830), p. 312.

1985d) Mém. von 1827, p. 54. Er gibt an, er habe entsprechende Untersuchungen über die Reflexion von Wasserwellen 1824 der Akademie vorgelegt; davon scheint nichts veröffentlicht zu sein.

jeder Spiegelung neue ebene Begrenzungsflächen auftreten, die zu neuen Spiegelungen benutzt werden können. So könne man z. B. die Lösung der Schallgleichung für ein rechtwinkliges Parallelepiped („einen Saal") aus der für den unbegrenzten Raum erhalten; doch begnügt er sich mit dieser Andeutung.

Ausgedehnten Gebrauch von dem Spiegelungsprinzip hat dann namentlich *G. Lamé* gemacht. Schon in einer seiner ersten Arbeiten[1985e]) benutzt er es, um die Lösung des Problems der Wärmeleitung für verschiedene ebenflächig begrenzte Körper aus der für das rechtwinklige Parallelepiped abzuleiten.

Bei seinen in Nr. 90 besprochenen Untersuchungen über die Fortsetzung nach rückwärts macht auch *W. Thomson* vom Spiegelungsprinzip Gebrauch.

**99. Die mathematische Formulierung des Huyghensschen Prinzips.** Solange eine genaue quantitative Formulierung der Folgerungen aus der Undulationstheorie des Schalles und des Lichtes nicht vorlag, waren die Physiker nach dem Vorgang von *Chr. Huyghens* gewohnt, sich die Anwendung dieser Theorie auf spezielle Probleme dadurch zu erleichtern, daß sie sagten: ebenso wie zur Zeit $t = 0$ vom Störungszentrum eine Welle ausgeht, breitet sich die zu irgendeiner späteren Zeit $t$ vorhandene Bewegung von jedem Punkte, bis zu dem sie dann bereits gelangt ist, weiter aus, so daß man also, um die Bewegung zu einer Zeit $t + \tau$ zu erhalten, nicht auf den Anfangszustand zurückzugehen, sondern nur die Wirkungen der zur Zeit $t$ bereits vorhandenen Bewegungen zu summieren braucht. Die dazu erforderlichen Integrationen wurden in praxi häufig dadurch umgangen, daß man eben mitnahm, was die von der Erfahrung her bekannten Resultate gaben, und vernachlässigte, was ihnen zu widersprechen schien.

Eine quantitative Behandlung der Frage muß vor allem zeigen, wie die von den einzelnen Punkten der bereits entstandenen Welle ausgehenden „wavelets" nach vorwärts sich summieren, nach rückwärts dagegen sich gerade aufheben. Für die geradlinige Fortpflanzung der Schallwellen ist das schon von *D. Bernoulli* gefordert und von *L. Euler*[1986]) folgendermaßen geleistet worden: wenn zwischen den An-

1985e) J. éc. polyt. cah. 22 (1833) (von 1829): p. 194 gerades Prisma über einem gleichseitigen Dreieck, p. 243 Hälfte dieses Prismas, p. 247 gerades Prisma über einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck (die von ihm erwähnte Behandlung dieses Problems durch *Ostrogradsky* scheint nicht veröffentlicht zu sein); p. 248 und 250 zwei Tetraeder, von denen das eine der 6., das andere der 24. Teil eines Würfels ist.

1986) Berl. hist. 1759[66], p. 201; 1765[67], p. 319, 353; auch Oeuvres de fangselongationen $y_0$ und den Anfangsgeschwindigkeiten $v_0$ eine der Relationen

$$v_0 = \pm \frac{dy_0}{dx} \tag{1609}$$

besteht, so ergibt sich, daß in den Formeln (485) entweder $\Phi \equiv 0$ oder $\Psi \equiv 0$ sein muß; und je eine dieser Bedingungen ist für je eine der nach beiden Seiten vom Störungszentrum auslaufenden Wellen erfüllt, sobald diese sich vollständig voneinander getrennt haben.

Für die Schallfortpflanzung nach drei Dimensionen läßt sich der Schluß noch in derselben Weise durchführen, wenn die Bewegung außer von der Zeit nur vom Abstand vom Störungszentrum abhängt. Denn wenn eine Funktion $u$ von $r$ und $t$ allein der Gleichung (1468) genügt, so genügt, wie ebenfalls *Euler*[1987]) gefunden hat, die Funktion

$$2u + \frac{\partial(ru)}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r^2 u)}{\partial r} \tag{1610}$$

der Gleichung der Saitenschwingungen. Daraus folgt: wenn die Anfangsstörung sich ganz innerhalb einer um den Koordinatenanfangspunkt beschriebenen Kugel befindet, so ist in jedem späteren Augenblick das Störungsgebiet zwischen zwei Kugelflächen eingeschlossen, deren Radien beide mit der Geschwindigkeit 1 wachsen. Ist $u$ nicht nur von $r$ und $t$ abhängig, so gilt, wie *S. D. Poisson*[1988]) zeigt, Ent-

---

Lagrange 14, p. 164. Erläuterungen über die entsprechenden Verhältnisse bei Kugelschallwellen bei *G. G. Stokes* Phil. mag. 34 (1849), p. 54 = Papers 2, p. 85.

1987) Taur. misc. $2_2$ (1760/61), p. 9 = Oeuvres de Lagrange 14, p. 186; Berl. hist. 1759[66], p. 250. In der im Text gegebenen Form ist das Resultat Eulers übrigens erst von *Lagrange* formuliert, Taur. misc. $2_2$, p. 74 = Oeuvres 1, p. 215.

1988) J. Éc. polyt. cah. 14 (1808), p. 334. Auf ganz unklaren Vorstellungen beruht es, wenn *J. Challis* (Phil. mag. (2) 6 (1829), p. 125; Cambr. trans. $3_1$ (1829), p. 306; vgl. auch das Referat bull. Férussac 16 (1831), p. 242) dasjenige partikuläre Integral der Gleichung (1468), das die Raumkoordinaten nur in der Verbindung $r$ enthält, als „the proper general integral" dieser Gleichung bezeichnet und das (Cambr. trans. $3_3$ (1830), p. 385; Referat bull. Férussac 16 (1831), p. 177) dahin erläutert, dieses Integral sei allgemein „as regarding the mode of action of the particles of the fluid on each other", das von Poisson gegebene „in regard to its application to any proposed instance"; dabei aber doch noch annimmt, (Cambr. trans. $3_1$ (1829), p. 310), in jedem vom Ursprung der $r$ ausgehenden Elementarkegel könne die Bewegung eine andere sein. Seine Behauptungen werden auch dadurch nicht klarer, daß er sie noch oft wiederholt. Cambr. trans. $5_2$ (1834), p. 175 scheint er zu meinen, das genannte Integral sei für Bewegung in der Ebene das einzige von der Lage der Koordinatenachsen unabhängige; ib. p. 177 (für die Ebene) und p. 180 (für den Raum) betrachtet er die Bewegung als überall rechtwinklig zu einer Wellenfläche und zieht die Sätze über die gegenseitige Lage unendlich benachbarter Normalen einer solchen herbei. Schon sprechendes noch von dem Mittelwert der Funktion $u$ auf einer um das Störungszentrum beschriebenen Kugelfläche:

$$U = \frac{1}{4r^2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} u\, d\mu\, d\psi. \tag{1611}$$

Die Frage ist dann wieder akut geworden, als *Poisson* bald nach dem Erscheinen der ersten Untersuchungen Fresnels auf die Schwierigkeiten hinwies, die einer strengen Begründung des Huyghensschen Prinzips und damit der aus ihm folgenden Konstruktionen des reflektierten und des gebrochenen Strahles entgegenstehen[1989]. Zu einer Erledigung der Frage konnte er damals schon deswegen nicht gelangen, weil er Fresnels Bezeichnung des Äthers als eines Fluidums zu eng faßt und infolgedessen nicht die Differentialgleichungen der Elastizitätstheorie, die damals eben erst von *Navier* aufgestellt waren[1990], sondern die der Hydrodynamik zugrunde legt und höchstens die Koeffizienten der longitudinalen Elastizität nach den drei Koordinatenrichtungen verschieden nimmt. *Fresnel* erwidert[1991]: die Erklärung des Umstandes, daß kein „mouvement rétrograde" stattfinde, sei nicht das Ziel seiner Untersuchungen gewesen.

Weiter ist die Frage in England besprochen worden. *G. B. Airy*

---

*S. Earnshaw* (ib. $6_2$ (1837), p. 211) sagt dem gegenüber „it is in reality a very particular integral".

1989) Ann. chim. phys. 22 (1823), p. 250 = Oeuvres de Fresnel 2, p. 192. Nur dieser Auszug aus einer der Akademie vorgelegten Abhandlung ist veröffentlicht, diese selbst nicht; Poisson hat sich wohl bald selbst überzeugt, daß seine Grundannahmen zu eng waren. Die Resultate auch Bull. Férussac 2 (1824), p. 15. — Vgl. namentlich die Äußerung Ann. chim. phys. 22, p. 253: „les lois de l'optique . . . appartiennent à la mécanique des fluides et non à la simple géométrie." — Ein sich anschließender Brief an Fresnel, ib. p. 270 = Oeuvres de Fresnel 2, p. 207, bespricht besonders die Schwierigkeiten, auf die man geführt wird, wenn man sich von der Huyghensschen Konstruktion aus verständlich machen will, daß die einmal erzeugte Welle nur nach außen und nicht zugleich auch immer wieder nach innen sich ausbreitet. — Die Note von *Fresnel,* ib. 21 (1822), p. 225 und eine andere aus dem Nachlaß von *Lagrange,* ib. p. 241 (nicht in den Oeuvres von Lagrange?) betreffen nur die aus dem als feststehend angenommenen Huyghensschen Prinzip abzuleitenden geometrischen Konstruktionen, nicht seine eigene Begründung.

1990) Paris Mém. 7 (1828), p. 375 (vom Mai 1821).

1991) Ann. chim. phys. 23 (1823), p. 37 = Oeuvres 2, p. 219. Die allgemeine Auseinandersetzung, die er p. 48 gibt: „in der fortschreitenden Welle summieren sich die Amplituden der einzelnen wavelets, nach rückwärts vernichten sie sich gegenseitig", erledigt die Frage nur für den Fall der Bewegung nur nach einer Dimension und ist dann mit der bereits von Euler gegebenen identisch.

begnügt sich mit einer ihn selbst nicht ganz befriedigenden[1992]) Berufung auf die Analogie des Falles der eindimensionalen Bewegung. Aber schon *H. T.*[1993]) fragt im Anschluß daran, wie man denn eigentlich die Intensität der von den einzelnen Punkten der augenblicklichen Wellenfläche ausgehenden Elementarwellen bestimmen solle; das habe weder Fresnel noch Airy gezeigt. Sein eigener Versuch, diese Frage zu beantworten, führt ihn freilich auf ein divergentes Integral der in Nr. **30** besprochenen Art, und der Wert, den er diesem zuschreibt, führt, wie *H. G.* zeigt[1994]), zu dem mit der Erfahrung im Widerspruch stehenden Resultate, daß auch im Mittelpunkt des Schattens eines nicht mehr als klein zu betrachtenden Schirmes Licht vorhanden sei. *Ph. Kelland*[1995]) versucht dem Problem dadurch beizukommen, daß er zunächst für eine ebene Welle fragt: wie muß die Intensität der Elementarwelle genommen werden, damit das bekannte Resultat herauskommt? Wird mit $r$ der Abstand irgendeines Punktes der ebenen Welle von einem in ihrer Ebene liegenden Koordinatenanfangspunkt bezeichnet, so verlangt das die Auflösung der Integralgleichung:

$$(1612)\quad \int_0^\infty f(r^2)\sin\frac{2\pi}{\lambda}\left(wt-\sqrt{r^2+b^2}\right)\cdot r\,dr=\sin\frac{2\pi}{\lambda}(wt-b);$$

Kelland kommt mit Hilfe von Sätzen aus Liouvilles Theorie der Differentiation zu beliebigem Index (Nr. **108**) zu der Lösung

$$f(r^2)=\frac{1}{\pi r^2},$$

---

1992) Math. tracts 2. ed., Cambr. 1831, p. 267: „the following answer appears to be correct, but its application in several cases seems doubtful."

1993) Cambr. math. J. $3_1$ (1841), p. 46. *Stokes* papers 2, p. 288 nennt *A. Smith* als den Verfasser. Er bemerkt p. 289, daß in dessen Untersuchung der Richtungsunterschied der den verschiedenen sekundären Wellen entsprechenden Schwingungen nicht beachtet sei. Die Annahme, $\cos\infty=0$ könne man dadurch rechtfertigen, daß man nachher noch mit dem Polarwinkel multipliziere und über die Peripherie integriere; das erläutert er papers 3, p. 228 (in einem Brief an Kelland bezüglich dessen Untersuchung Edinb. trans. 15, p. 315) durch Einführung eines Konvergenzfaktors; und das erstere könne man rechtfertigen für eine Richtung, die näherungsweise mit der ursprünglichen Wellennormale zusammenfalle. Man erhalte dann auch wirklich eine Phasenverschiebung von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge.

1994) Ib. $4_2$ (1843), p. 73. Er meint: „the principle of Huyghens ... cannot be looked upon as a physical principle but only as an artifice rendered necessary by the state of analysis, and which will not always represent the physical conditions of the problem."

1995) Cambr. trans. 7 (1841), p. 169. Ein zweiter Aufsatz Edinb. trans. $15_2$ (1842), p. 315.

bezeichnet dieses Resultat aber selbst als zweifelhaft. Nachdrücklich sind Schwierigkeiten dann von *R. Moon*[1996]) hervorgehoben worden: Wenn gezeigt sei, daß die Bewegung eines Teilchens im wesentlichen nur von denjenigen Teilen der primären Welle beeinflußt werde, die in der Nähe der durch dieses Teilchen gehenden Wellennormalen liegen, dürfe daraus keineswegs geschlossen werden, daß man diesen Schluß auch auf sekundäre Wellen übertragen dürfe. Man dürfe auch nicht sagen: „Die Funktion $\varphi(\theta)$ eines Winkels ist 1 für $\theta = 0$ und nimmt dann nach beiden Seiten rasch ab; also darf man $\varphi(\theta)$ durch 1 ersetzen, wenn man nur über die Umgebung der Richtung der Wellennormale integriert", und dann doch die Integration von $-\infty$ bis $+\infty$ ausdehnt.

## VIII. Sonstige Anwendungen.

**100. Ermittelung des Wertes bestimmter Integrale auf Grund der Integraldarstellung der Koeffizienten trigonometrischer Reihen.** Ist die Entwicklung einer Funktion in eine trigonometrische Reihe auf anderm Wege als unter Benutzung der Integraldarstellung der Koeffizienten (Nr. **16**) gefunden, so kann diese Darstellung umgekehrt zur Auswertung der betreffenden bestimmten Integrale dienen. So leitet z. B. *J. L. Raabe*[1997]) aus den Formeln von Nr. 2 die Werte der Integrale

$$(1613)\qquad \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\alpha\, d\alpha}{1 - a\cos\alpha}$$

ab. Weitere Beispiele hat *O. Schlömilch* zusammengestellt[1998]); Summation nach $n$ bzw. Multiplikation der Entwicklungen zweier verschiedener Funktionen liefert ihm noch andere.[1999]) *D. Bierens de Haan*[2000]) leitet aus der Integraldarstellung der Koeffizienten der Entwicklung von $\log\varrho$ weitere Formeln durch Differentiation ab.

**101. Ermittelung des Wertes bestimmter Integrale mit Hilfe der Fourierschen Integralformel.** Daß es zuweilen gelingt, ein bestimmtes Integral dadurch auszuwerten, daß man es in eine der

1996) Phil. mag. (3) 26 (1845), p. 90. Er gebraucht die strengsten Ausdrücke; in einer zweiten Abhandlung 27 (1845), p. 46 entwickelt er ziemlich komplizierte Vorstellungen über die Natur der Lichtwellen.

1997) Differential- und Integralrechnung 1, Zürich 1839, p. 279.

1998) Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale, Jena 1843, p. 35.

1999) p. 38.

2000) Arch. 13 (1849), p. 193. Die Differentiation nach $n$ p. 197 ist jedenfalls ohne weiteres nicht zulässig. Die Formel (B) auf p. 209 ist so, wie sie dort steht, nicht richtig.

Fourierschen Integralformeln einführt, dafür hat bereits *H. G. v. Schmidten* ein Beispiel gegeben[2001]): Führt man

$$(1614) \qquad f(x) = \int_0^\infty \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) dt$$

in die Cosinusformel (790) ein, so kann man zuerst die Integration nach $\alpha$ mit Hilfe von (947), hierauf ganz elementar die nach $t$ und endlich die nach $\xi$ mit Hilfe von (847) ausführen; man erhält so $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\exp(-2x)$ [wie auch sonst bekannt].

Auf der Benutzung der Fourierschen Integraldarstellung beruht es auch, wenn *S. D. Poisson*[2002]) zu der Gleichung gelangt:

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-x\xi)\left[(p+\xi)\cos x\xi - \xi \sin x\xi\right]\xi\, d\xi}{(\xi^2 - \xi_1^2)(2\xi^2 + 2p\xi + p^2)}$$

$$= \frac{\pi}{4\xi_1} \frac{\exp(-x\xi_1)\left[(p+\xi_1)\sin x\xi_1 + \xi_1 \cos x\xi_1\right]}{2\xi_1^2 + 2p\xi_1 + p^2}.$$

Eine eigentümliche Anwendung des Integralsatzes findet sich noch bei *Cauchy*[2003]); soll das Integral

$$(1615) \qquad J = \int_0^\infty \cos x\xi\, \gamma(\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

in welchem $\gamma$ bekannt ist, durch die Funktion

$$F(x) = \int_0^\infty \cos x\xi f(\xi)\, d\xi$$

ausgedrückt werden, so drückt er $\gamma$ durch das Integral aus:

$$\gamma(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos \xi\mathfrak{x} \cos \alpha\mathfrak{x} \cdot \gamma(\alpha)\, d\mathfrak{x}\, d\alpha$$

und ersetzt die Produkte trigonometrischer Funktionen von $\mathfrak{x}$ durch

2001) Ann. de math. 2 (1822), p. 221; J. f. Math. 5 (1830), p. 392.

2002) Chaleur p. 340. Er meint, man könne den Wert dieses Integrals „par aucun procédé directe" finden, und begnügt sich daher mit der Verifikation einiger Spezialfälle. Übrigens handelt es sich um ein divergentes Integral: an Stelle des Faktors $\frac{1}{\xi^2 - \xi_1^2}$ stand ursprünglich $\frac{\xi^2 - \xi_1^2}{(\xi^2 - \xi_1^2)^2 + g^2}$, und es war zu $g = 0$ übergegangen worden.

2003) Mém. prés. 1 (1827) = Oeuvres (1) 1, p. 152. Entsprechendes auch für mehrere Variable.

Summen, so kommt:

$$J = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{0}^{\infty} \cos \alpha(\mathfrak{x} - x) \gamma(\mathfrak{x}) F(\alpha)\, d\alpha\, d\mathfrak{x}. \tag{1616}$$

**102. Darstellung der Wurzeln von Gleichungen durch Integrale.** Daß man die Lagrangesche Reihe (II B 1, *Osgood,* Nr. 15, p. 44):

$$y - \alpha = \sum_{n-1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1} (\varphi(\alpha))^n}{d\alpha^{n-1}}, \tag{1617}$$

die der Gleichung

$$y = \alpha + \varphi(y) \tag{1618}$$

genügt, durch ein einfaches bestimmtes Integral darstellen kann, hat bereits *M. A. Parseval* gezeigt[2004]). Er geht davon aus, daß man die Reihe (1617) erhält, wenn man

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \frac{\partial^n V}{\partial \alpha^n}, \tag{1619}$$

wo

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^{n-1}}{s^{n-1}} (\varphi(\alpha))^n = \frac{\varphi(\alpha)}{1 - \frac{u}{s} \varphi(\alpha)} \tag{1620}$$

nach $u$ von 0 bis 1 integriert und dann nur die von $s$ freien Glieder beibehält. Da nun

$$T = \frac{\varphi(\alpha + s)}{1 - \frac{u}{s} \varphi(\alpha + s)},$$

also

$$\int_0^1 T du = -s \log \left(1 - \frac{\varphi(\alpha + s)}{s}\right)$$

ist, so braucht er nur noch seinen Integralsatz (467) anzuwenden, um den folgenden Ausdruck zu erhalten:

$$y - \alpha = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{\cos v \log \sqrt{A^2 + B^2} - \sin v \operatorname{arc\,tg} \frac{B}{A}\right\} dv, \tag{1621}$$

wobei

$$A + Bi = 1 - e^{-iv} \varphi(\alpha + e^{iv})$$

ist.

*S. D. Poisson*[2005]) kommt zu einer entsprechenden Darstellung für

2004) Paris Mém. prés. 1 (1806), p. 567 (von 1804).
2005) J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 497.

eine beliebige Funktion $F$ von $y$, indem er aus den Integralrelationen

$$(1622)\quad -\int_{-\pi}^{\pi} e^{-nxi}\log(1-e^{xi}\varphi(\alpha))\,dx = \begin{cases} \frac{2\pi}{n}(\varphi(\alpha))^n & \text{für } n>0 \\ 0 & \text{für } n\leqq 0 \end{cases}$$

zunächst die Gleichung

$$(1623)\quad \frac{1}{(n-1)!}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-nxi}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\alpha^{n-1}}[-F'(\alpha)\log(1-e^{xi}\varphi(\alpha))]\,dx$$
$$= \frac{2\pi}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\alpha^{n-1}}[F'(\alpha)(\varphi(\alpha))^n]$$

ableitet und dann nach $n$ summiert; er erhält so:

$$(1624)\quad F(y)-F(\alpha)$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F'(\alpha+e^{-xi})\log(1-e^{xi}\varphi(\alpha+e^{-xi}))e^{-xi}\,dx,$$

was für $F(\alpha)\equiv\alpha$ in die von Parseval gegebene Formel übergeht; und durch partielle Integration noch:

$$(1625)\quad F(y)-F(\alpha)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\alpha+e^{-xi})\,\frac{e^{xi}\varphi(\alpha+e^{-xi})-\varphi'(\alpha+e^{-xi})}{1-e^{xi}\varphi(\alpha+e^{-xi})}\,dx.$$

*G. Libri*[2006]) gelangt von seiner Formel (601) aus zu einer Darstellung der Wurzel durch ein dreifaches Integral, von der er selbst zugibt, daß sie viel weniger einfach ist als die Parsevalsche.

*G. Boole*[2006a]) zeigt durch Einführung einer neuen Integrationsvariabeln, daß

$$\frac{1}{2\pi}\iint \exp\,[(f(\alpha)-x)\xi i]F(\alpha)\,d\alpha = F(u)\frac{du}{dx},$$

wenn $f(u)=x$. Er leitet daraus die Umkehrungsformeln von Lagrange und Laplace ab.

Dagegen erscheint die einfachste Gestalt der hier einschlagenden Formeln bei *A. Cauchy*[2007]), der von seinen Residuensätzen aus zu der

2006) Torino mem. 28 (1824), p. 259 (von 1822).

2006a) Dublin trans. 21 (1848), p. 135 (von 1846); in etwas anderer Darstellung Cambr. Dubl. j. 3 (1848), p. 113.

2007) Exerc. de math. 1 (1826) = Oeuvres (2) 6, p. 421; Andeutungen auch schon Paris Mém. 4 (1819/20[24]) = Oeuvres (1) 2, p. 9; für den Fall, daß die Funktion noch einen Parameter enthält, im Turiner mémoire p. 22. Die Formeln von Cauchy würden sich durch partielle Integrationen aus der von Parseval, Poisson und Jacobi benutzten Gestalt ergeben.

Gleichung gelangt:

$$(1626)\qquad \sum \varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(e^{xi})F'(e^{xi})}{F(e^{xi})} e^{xi}\,dx;$$

in ihr bedeutet $\varphi$ irgendeine im Einheitskreis reguläre Funktion, und die Summe ist über alle diejenigen Wurzeln der Gleichung $F(z) = 0$ zu erstrecken, deren absoluten Beträge kleiner als 1 sind. Diese Determination der Wurzeln, über die die Summe zu erstrecken ist, erscheint auch bei *C. G. Jacobi*[2008]), bei dem die Formel weniger einfach lautet

$$(1627)\qquad \sum_{k=1}^{\nu} z_k^n = (-1)^{\nu+1}\nu r^n$$

$$+\frac{nr^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin nx \operatorname{arctg}\frac{V}{U} - \cos nx \log\sqrt{U^2+V^2}\right)dx$$

$$U + iV = F(re^{xi})$$

und die Summe über alle Wurzeln zu erstrecken ist, deren absoluten Beträge kleiner sind als der benutzte Wert von $r$.

In weiteren Abhandlungen *Cauchys* erscheint dann die Verallgemeinerung dieser Formel für ein Ringgebiet[2009]) und für einen beliebigen Bereich[2010]); auch für Funktionen von mehreren Veränderlichen[2011]).

Daran schließen sich dann[2012]) die Sätze über den „calcul des

2008) J. f. Math. 2 (1827), p. 6 = Werke 6, p. 19. Ein zweiter Aufsatz Jacobis, J. f. Math. 6 (1830), p. 257 = Werke 6, p. 26 enthält nichts, was für uns hier in Betracht käme.

2009) Turiner mémoire p. 35.

2010) Zweites Turiner mémoire; im Auszug Bull. Férussac 16 (1831), p. 121.

2011) Turiner mémoire p. 48.

2012) In einer größeren Abhandlung „sur les rapports qui existent entre le calcul des résidus et le calcul des limites", lith.? Turin 1832, von der ein übrigens alles Wesentliche enthaltender Auszug Bull. Férussac 16 (1831), p. 123, ein kürzerer Paris C. R. 4 (1837), p. 216 = Oeuvres (1) 4, p. 38 und eine von *A. Lombardi* besorgte italienische Übersetzung mem. soc. ital. $22_1$ (1839), p. 91 erschienen ist. Eine dritte Turiner Abhandlung, von 1833 die italienisch ib. p. 228 und französisch, mit einem 2. Teil vermehrt J. Éc. polyt. cah. 25 (1837), p. 176 = Oeuvres (2) 1, p. 416 veröffentlicht ist, (ein Auszug auch Paris C. R. 4 1837), p. 672 = Oeuvres (1) 4, p. 45) gehört nicht mehr in diesen Gedankenkreis, sie macht es sich im Gegenteil zur Aufgabe, den genannten Satz vom Zusammenhang mit dem Randintegral losgelöst direkt durch Überlegungen der Analysis situs zu beweisen; und das gleiche gilt von den Beweisen, die *Sturm* und *Liouville* (J. de math. 1 (1836), p. 278: Reduktion auf die Umgebung eines ein-indices", d. h. die Bestimmung der Anzahl der Wurzeln der Gleichung $u + iv = 0$ innerhalb eines Bereiches durch die Abzählung derjenigen Stellen auf seinem Rande, an welche der Quotient $\frac{v}{u}$ beim Durchgang durch $\infty$ von positiven zu negativen Werten oder umgekehrt übergeht.

Andererseits leitet *A. Cauchy*[2013]) aus der Fourierschen Integralformel die folgende ab:

$$(1628)\quad \int^{(2n)} \cos(\xi A)\cos(\eta B)\ldots f(\alpha,\beta,\ldots)\,d\alpha\, d\beta \ldots d\xi\, d\eta \ldots = (2\pi)^{2n} \sum \frac{f(\alpha,\beta,\ldots)}{|D|};$$

darin bedeuten $A, B, \ldots$ irgendwelche Funktionen von $\alpha, \beta, \ldots, D$ ihre Funktionaldeterminante, und die Summe ist über alle diejenigen Lösungssysteme der Gleichungen

$$A = 0,\ B = 0,\ \ldots$$

zu erstrecken, die dem Integrationsgebiet dieser Variabeln angehören; nach $\xi, \eta, \ldots$ ist zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ zu integrieren. Insbesondere nimmt er[2014]) im Falle $n = 1$ für $A$ und $B$ den reellen und imaginären Teil einer Funktion des komplexen Arguments $\alpha + i\beta$ und erhält so Formeln für die symmetrischen Funktionen der einem gegebenen Gebiete angehörenden komplexen Wurzeln einer algebraischen oder transzendenten Gleichung.

*R. Murphy*[2015]) gibt zunächst die Formulierung: die kleinste Wurzel[2016]) der Gleichung $\varphi(x) = 0$ ist entgegengesetzt gleich dem

---

zelnen Wurzelpunktes); ebenso *Cauchy* selbst, (Paris C. R. 4 (1837), p. 674 = Oeuvres (1) 4, p. 45) und *Sturm* allein (ib. p. 290: Untersuchung der Wertveränderung von arc $(u + iv)$); ebenso *A. de Morgan*, Cambr. trans. $7_3$ (1842), p. 297 gegeben haben. Vgl. dazu die Bemerkungen *Cauchy*s Paris C. R. 5 (1837), p. 6 = Oeuvres (1) 4, p. 81, die Darstellung, die *Moigno* (J. de math. 5 (1840), p. 75; deutsch bearbeitet von *J. A. Grunert*, Arch. Math. 1 (1840), p. 19) von diesen Dingen gibt, sowie I B 3a, *Runge*, Nr. 6, p. 418.

2013) J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 538; Bull. Férussac 4 (1825), p. 71; vgl. auch *W. R. Hamilton*, Dubl. trans. $19_2$ (1843), p. 315.

2014) J. Éc. polyt. cah. 19, p. 542. Auf eine Angabe *Laurent*s hin, (Paris C. R. 17 (1843), p. 349) er sei im Besitze einer Methode „zur Separation der Moduln der Wurzeln einer algebraischen Gleichung" ohne Zuhilfenahme der Gleichung der Quadrate der Wurzeldifferenzen, bemerkt Cauchy (ib. p. 370 = Oeuvres (1) 8, p. 17) das sei schon durch seine alten Untersuchungen gelöst.

2015) Cambr. trans. $4_1$ (1831), p. 129 (Auszug bull. Férussac 16 (1831), p. 128); treatise on algebraic equations p. 77.

2016) Er meint, das Verfahren gebe „analytisch" jede Wurzel, „arithmetisch" die kleinste; über die Definition der „kleinsten", wenn sie komplex sind, ist er sich übrigens im unklaren (p. 138).

Koeffizienten von $x^{-1}$ in der Entwicklung von

$$\log \frac{\varphi(x)}{x}$$

nach steigenden und fallenden Potenzen von $x$; und allgemein[2017]): sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die $m$ kleinsten Wurzeln dieser Gleichung, $f$ eine beliebige Funktion, so ist $f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \cdots + f(\alpha_m) - mf(0)$ entgegengesetzt gleich dem Koeffizienten von $x^{-1}$ in der Entwicklung von

$$f'(x) \log \frac{\varphi(x)}{x}.$$

Nachher[2018]) zeigt er, daß der Koeffizient von $x^{-1}$ in der Entwicklung irgendeiner Funktion $F(x)$ gleich

$$(1629) \qquad \int_{\theta}^{\theta + 2\pi i} F(e^\theta) e^\theta \, d\theta$$

ist, und schreibt dann auch die übrigen Sätze entsprechend um. *A. de Morgan* bemerkt dazu[2019]): die Ableitung beruhe auf der sicher nicht zutreffenden Voraussetzung, daß nur eine solche Entwicklung einer Funktion möglich sei; diese Schwierigkeit falle bei der umgekehrten, mit den Integraltheoremen beginnenden Ableitung weg, weil sich aus dieser selbst ergebe, welche Entwicklung man zu nehmen habe.[2020])

**103. Analytische Darstellung des reellen und des imaginären Bestandteils einer Funktion komplexen Arguments vermittelst ihrer Werte für reelle Argumente**[2021]). Die Aufgabe: wenn eine Funktion reellen Arguments $f(x)$ gegeben ist, den reellen und den imaginären Teil derjenigen Funktion $f(z)$ analytisch darzustellen, die entsteht, wenn man in $f(x)$ an Stelle von $x$ ein komplexes Argument $z = x + iy$ einführt, hat sich zunächst bei hydrodynamischen Problemen dargeboten. Schon *J. d'Alembert*[2022]) hatte das Problem der ebenen Potentialbewegung auf die Aufgabe reduziert, zwei Funktionen $M, N$ von $x$

2017) p. 138; p. 133 für $m = 1$, p. 135 für $f(x) = x$.

2018) p. 146. Die Beziehung zum Parsevalschen Satz bemerkt er selbst p. 150.

2019) Differential and integral calculus, Lond. 1836/41, p. 328, 644. [Man muß diejenige Entwicklung nehmen, die in der Umgebung des Nullpunktes konvergiert.]

2020) *J. Cockle* macht Phil. mag. (3) 32 (1848), p. 421 darauf aufmerksam, daß das Verfahren bereits bei *Lagrange,* Berl. Mém. f. 1768, p. 261 sich finde.

2021) Man vergleiche hierzu die Vorarbeiten zur Geschichte der Funktionentheorie im 18. Jahrhundert von *P. Stäckel,* Bibl. math. (3) 1 (1900), p. 109; 2 (1901), p. 111.

2022) Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides, Paris 1752, chap. 4, p. 60.

und $y$ so zu bestimmen, daß $Mdx + Ndy$ und $Ndx - Mdy$ gleichzeitig vollständige Differentiale $du$, $dv$ werden; auch hatte er gezeigt[2023]), daß dazu $v + iu$ eine Funktion von $x - iy$, $v - iu$ eine solche von $x + iy$ sein muß, allerdings nur, indem er die für reelle Argumente bzw. Verbindungen der Argumente geltenden Sätze über die Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Funktionen voneinander ohne weiteres auch auf komplexe Verbindungen übertrug. *L. Euler*[2024]) fügt dem bei: soll $u + iv = f(x - iy)$ werden und sich für $y = 0$ auf eine gegebene Funktion

$$(1630) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n + iB_n) x^n$$

reduzieren, so setze man

$$x - iy = r(\cos\varphi - i\sin\varphi);$$

dann wird:

$$(1631) \qquad \begin{aligned} u &= \sum (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) r^n, \\ v &= \sum (B_n \cos n\varphi - A_n \sin n\varphi) r^n. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich für das hydrodynamische Problem die Gleichungen des Systems der Stromlinien; unter ihnen muß bei geeigneter Spezialisierung der Konstanten auch die Gleichung der etwa vorhandenen festen Wand enthalten sein. Dabei stellt sich aber sogleich eine Schwierigkeit ein, auf die *d'Alembert*[2025]) aufmerksam macht: es müßte

---

2023) p. 61.

2024) Berl. Mém. 1755[57], p. 357. Schon *Lagrange* (Taur. misc. 3 (1765/66) = Oeuvres 1, p. 506) macht darauf aufmerksam, daß dieses Verfahren nur anwendbar sei, wenn die Funktion $f(x)$ „connue analytiquement", nicht wenn sie „ne donnée que mécaniquement" sei. Ähnlich *Poisson* (Paris Mém. 3 (1818[20]), p. 173; chaleur p. 172) und *Cournot* (Theorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 410).

2025) Opuscules mathématiques 1, Paris 1761, p. 140. Er behauptet sogar (auch noch 5 (1868), p. 42), wenn die Gleichung der Wand nicht die angegebene Form habe, sei das Problem analytischer Behandlung überhaupt nicht zugänglich. Er übersieht dabei, daß die Gleichung, wenn sie auch nicht in der gewünschten Form gegeben ist, doch immer auf sie gebracht werden kann; wie er übrigens später (ib. 5 (1768), p. 111) selbst durch Beispiele zeigt. — Die Ableitung von $f(x + iy)$ aus $f(x)$ mit Hilfe der Potenzreihe erscheint auch wohl in der symbolischen Form:

$$f(x + iy) = \cos\left(y\frac{d}{dx}\right) f(x) + i \sin\left(y\frac{d}{dx}\right) f(x);$$

so bei *H. Goodwin*, Cambr. trans. $8_3$ (1847), p. 344. (Auszug phil. mag. (3) 30 (1847), p. 367. Cambr. Dubl. j. 1847, p. 228 Verallgemeinerung für den Fall daß $f(x)$ imaginäre Koeffizienten hat. Auch *G. G. Stokes* schreibt so Cambr. trans. $7_3$ (1842), p. 442 = Papers 1, p. 4). Auch bei komplexen Funktionen, indem er demnach die Gleichung der Wand immer auf die Form: imaginärer Teil einer Funktion von $x + iy$ gleich einer Konstanten gebracht werden können, während doch nicht jede Funktion von $x$ und $y$ als ein solcher Bestandteil angesehen werden kann.

*J. L. Lagrange*[2026]) behandelt dann die Aufgabe, zwei Funktionen komplexen Arguments so zu bestimmen, daß die Gleichung

$$\Phi(x + iy) - \Psi(x - iy) = \text{einer gegebenen Konstanten } H$$

längs gegebenen Begrenzungslinien erfüllt ist. Er reduziert die Frage zunächst für den Fall, daß alles zur $x$-Achse symmetrisch ist, auf zwei einfachere, in denen $\Psi$ entweder $= \Phi$ oder $= - \Phi$ ist. Wenn die Begrenzungen von Geraden $y = \pm x \operatorname{tg} \lambda\pi$ gebildet sind, ergibt sich die Lösung aus seinem schon früher erwähnten allgemeinen Ansatz; er erhält so nach längerer Rechnung und unter Benutzung divergenter Reihen:

$$(1632)\qquad \Phi(x) = \tfrac{1}{2} H + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^{\frac{2n+1}{\lambda}}$$

bzw.

$$(1633)\qquad \Phi(x) = \frac{H}{2\lambda i} \log x + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x^{\frac{2n}{\lambda}}.$$

Durch Grenzübergang kommt er auch noch zu dem Fall, daß die Begrenzung von zwei parallelen Geraden gebildet wird. Nachher setzt er noch eine Gleichung der Form

$$(1634)\quad f(x + iy) + f(x - iy) = a_0 f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f(x + ny) + f(x - ny))$$

an, entwickelt beiderseits nach Potenzen von $y$ und vertauscht rechts die Summationsreihenfolge; durch Koeffizientenvergleichung erhält er dann zur Bestimmung der $a_n$ ein unendliches System linearer Gleichungen und durch dessen Auflösung die Werte[2027]):

$$(1635)\qquad a_0 = \frac{a \operatorname{\mathfrak{Sin}} \pi}{2\pi}, \quad a_n = (-1)^n \frac{n^2 - (n^2 + 1) a}{n^2 + 1} \operatorname{\mathfrak{Sin}} \pi$$

---

$f(z, w) = 0$ in

$$\cos\left(y \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x, w) = 0,$$

$$\sin\left(y \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x, w) = 0$$

zerlegt.

2026) Taur. misc. 3 (1765/66) = Oeuvres 1, p. 499. Vgl. auch seine Briefe an d'Alembert, Oeuvres 13, p. 22, 30.

2027) Oeuvres 1, p. 510; 13, p. 44.

mit der an und für sich noch willkürlichen Konstanten $a$, die er, um raschere Konvergenz zu erzielen, gleich 1 nimmt.

*J. d'Alembert* bemerkt[2028]) zu Lagranges erstem Verfahren: daß die von diesem angegebenen Ausdrücke den Bedingungen wirklich genügten, könne man leicht mit Hilfe der schon früher von ihm aufgestellten Formeln für Potenzen mit komplexer Basis und komplexem Exponenten nachweisen. Statt Lagranges zweite Formel zu benutzen, könne man auch neben der Taylorschen Reihe, d. h. der Darstellung der ersten Differenz der Funktion $f(x)$ durch ihre Differentialquotienten, noch die entsprechenden Darstellungen der höheren Differenzen mit heranziehen[2029]); aber auch davon habe man nichts[2030]): bei einer „algebraischen" Funktion brauche man es nicht und bei einer „diskontinuierlichen" könne man es nicht anwenden, da die benutzten Formeln Stetigkeit aller Ableitungen voraussetzten.

Einige Jahre später kommt er noch einmal auf die Frage zurück. Er geht jetzt von der Bemerkung aus[2031]), daß man den Bedingungen $f(x+y)-f(x-y) = \text{const}$ für $x=a$ und für $x=b$ durch eine periodische Funktion genügen könne; eine solche stellt er zuerst durch eine Entwicklung nach Potenzen trigonometrischer Funktionen dar, ersetzt diese dann aber durch eine Entwicklung nach den Funktionen der Vielfachen des Arguments. Indem er dieses Resultat ohne weiteres[2032]) auch auf den Fall überträgt, daß an Stelle des

2028) Taur. misc. 3, p. 383; vgl. auch seinen Brief an Lagrange in dessen Oeuvres 13, p. 26. Wenn d'Alembert meint (p. 385 bzw. 28; vgl. auch opusc. 5, p. 109), für den Fall, daß die Begrenzung die $x$-Achse schneidet, sei nur der Wert 0 von $H$ zulässig, so erkennt er nicht, daß dann der Ursprung ein singulärer Punkt ist; und wenn er weiter meint, derselbe Wert müßte dann auch für jede Stromlinie gelten, die die Achse trifft, so erkennt er nicht, daß die Stromlinien die Achse alle in demselben singulären Punkt treffen können.

2029) Taur. misc. 3, p. 391. d'Alembert meint, das gebe „une [formule] toute différente"; tatsächlich muß es auf dieselbe Formel führen. Aber darin hat er recht, daß sein Verfahren direkt erkennen läßt, wie die Reihe rechts abbricht, wenn für $f(x)$ eine rationale ganze Funktion genommen wird. Weitere Ausführungen hierzu gibt er noch opusc. 5, p. 123.

2030) Taur. misc. 3, p. 393; opusc. 5, p. 130. Was *A. Genocchi* (Ann. sc. mat. 8 (1857), p. 398) dazu bemerkt, entscheidet nicht: die Anwendung der Newtonschen Interpolationsformel auf andere als rationale ganze Funktionen verlangt eine Konvergenzuntersuchung; und wenn er statt dessen ein Restglied hinschreibt, so führt die Frage nach der Zulässigkeit der Einführung komplexer Argumentwerte in dieses auf das Hauptproblem selbst zurück.

2031) Opusc. 5 (1868), p. 50; weitere Ausführungen p. 95.

2032) p. 96 beruft er sich zur Rechtfertigung dieser Behauptung auf die Entwicklung nach Potenzen von $y$.

reellen $y$ eine imaginäre Größe $iy$ tritt, kommt er zu dem Resultat, man könne die von Lagrange behandelte Aufgabe durch den Ansatz

$$f(x+iy) = \sum A_n \cos(nx + niy) \tag{1636}$$

oder:

$$f(x+iy) = \sum A_n \sin(nx + niy) \tag{1637}$$

angreifen. Nachher[2033]) wendet auch er Lagranges erstes Verfahren (die Reduktion auf eine Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung) an; durch andere Anlage der Rechnung kommt er auch von diesem aus zur Lösung durch eine trigonometrische Reihe.

Zu einer wirklichen Lösung der Aufgabe in der Form (1636) oder (1637) ist d'Alembert nicht gelangt, da er die ihm zwar bekannte Darstellung der Koeffizienten trigonometrischer Reihen durch Integrale für die Entwicklung willkürlicher Funktionen zu benutzen nicht für zulässig hielt. Das hat erst *Fourier* getan, der in der Tat im Anschluß an seine Nr. 74 besprochenen Untersuchungen ausdrücklich sagt[2034]): der reelle Teil derjenigen Funktion komplexen Arguments, die sich für $y=0$ auf $f(x)$ reduziert, läßt sich durch die Reihe:

$$u = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-ny} \sin n x \int_0^{\pi} f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha \tag{1638}$$

oder, was wegen (1212) dasselbe ist, durch das bestimmte Integral

$$u = \frac{2}{\pi} \mathfrak{Sin}\, y \int_0^{\pi} \left\{ \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, y - \cos(x-\alpha)} - \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, y - \cos(x+\alpha)} \right\} f(\alpha)\, d\alpha \tag{1639}$$

---

2033) p. 106. Er schreibt $\Sigma A_n \sin n\pi \cos ny$, ohne zu beachten, daß das ja identisch null wäre; er müßte das $\sin n\pi$ mit in die Konstante hineinnehmen. Nachher (p. 108, 114) redet er doch wieder so, als ob er glaubte, man käme zu noch allgemeineren Lösungen, wenn man neben den trigonometrischen Funktionen der Vielfachen des Arguments auch noch Potenzen von ihnen mit in die Reihe aufnehme.

2034) Théorie Nr. 237 = Oeuvres 1, p. 237. Über den Grad der Allgemeinheit dieser Lösung drückt er sich einigermaßen unbestimmt aus; tatsächlich ist sie dadurch spezialisiert, daß sie für $y = +\infty$ gegen $0$ konvergiert; und außerdem ist sie auf den Fall beschränkt, daß für $f(x)$ eine ungerade periodische Funktion genommen wird bzw. die etwa nur für ein bestimmtes Intervall vorgeschriebenen Funktionswerte dieser Forderung gemäß über das Intervall hinaus fortgesetzt werden. Vgl. Note 1667 u. 1668. — Die Reduktion von

$$\sum (-1)^n \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} e^{-(2n+1)y}$$

auf $\operatorname{arctg} \frac{\cos x}{\mathfrak{Sin}\, y}$ auch bei D. F. Gregory Cambr. math. j. 2 (1838), p. 118.

ausdrücken. Er hat dann auch[2035]) seine Integraldarstellung zu dem gleichen Zwecke benutzen wollen, indem er in ihr einfach $x$ durch $x+iy$ ersetzt. Die Frage, unter welchen Umständen das erlaubt ist, hat *S. D. Poisson*[2036]) wenigstens an Beispielen untersucht. Er findet, daß das für $f(x) = \sin px$ oder $f(x) = \cos px$ der Fall ist, wenn $p > 0$ genommen und die Formel so verstanden wird, daß zuerst nach $\xi$ bis zu einer endlichen Grenze $\omega$, hierauf nach $\alpha$ integriert, endlich zu $\omega = \infty$ übergegangen wird. Für $f(x) = (1+x^2)^{-1}$ dagegen findet er es bequemer, zuerst nach $\alpha$ zu integrieren; dann gibt die Formel das richtige Resultat nur, solange der imaginäre Bestandteil von $x$ absolut kleiner als 1 ist; sonst werden die Integrale unbestimmt.

*A. Cauchy* will die Schwierigkeit durch Zufügung eines Konvergenzfaktors beseitigen. Indem er dann wie in Nr. 77 verfährt, gelangt er zu der Formel[2037])

$$(1640)\quad f(x+iy) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\delta=0} \Big\{ \exp\frac{y^2}{4\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2} \cos\frac{ay}{\sqrt{\delta}} f(x+2a\sqrt{\delta})\, da$$
$$+ i\int_0^y \exp\frac{y^2}{4\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2} \cos\frac{ay}{\sqrt{\delta}} f'(x+2a\sqrt{\delta})\, da\, dy \Big\}.$$

*N. H. Abel* glaubte in einer Jugendarbeit[2038]) die Aufgabe durch

---

2035) Théorie Nr. 420 = Oeuvres 1, p. 505; Ann. chim. phys. 3 (1816), p. 361. So wie er die Integrale schreibt (Integration zuerst nach $\xi$), sind sie freilich auf jeden Fall sinnlos, wie *G. Darboux* in einer Note zu der Stelle mit Recht hervorhebt.

2036) J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 459; einige Andeutungen auch schon Bull. philomat. 1822, p. 137. Er bemerkt an der erstgenannten Stelle: man dürfe nicht etwa den Beweis für die Gültigkeit der Formel auch für komplexe Argumentwerte dadurch führen wollen, daß man einfach $x$ durch $x+iy$ und dann $\alpha$ durch $\alpha - iy$ ersetze; denn das würde heißen, von der einen Grenze des Integrals zur andern durch andere Werte als vorher, nämlich durch komplexe gehen, eine der Stellen, an denen Poisson die Abhängigkeit eines Integrals vom Integrationswege streift.

2037) Bull. philomat. 1821, p. 151; J. Éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 567. An der letzteren Stelle setzt er auseinander: man könne $f(x+iy)$ definieren als „diejenige Lösung der Gleichung $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = i\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, die sich für $y=0$ auf $f(x)$ reduziert"; aber das führe auch wieder nur auf die Integration der Laplaceschen Gleichung. Eine Untersuchung der Gültigkeitsbedingungen der Gleichung (1640) wäre vielleicht auch jetzt noch von Interesse.

2038) Mag. f. naturvid. 1 (1823) = Oeuvres 1, p. 20. Die Zeichen der absoluten Beträge fehlen bei Abel, müßten aber jedenfalls stehen. Abel will die das Doppelintegral

$$(1641)\quad f(x+iy) + f(x-iy) = \frac{2|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\exp(-v^2t - v^2y^2)\,|v|\,dt\,dv$$

gelöst zu haben. Würde man in ihm (was Abel nicht tut) die Integration nach $v$ zuerst ausführen, so würde man die Gleichung

$$(1642)\qquad f(x+iy) + f(x-iy) = \frac{2\,|y|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x+t)}{t^2+y^2}\,dt$$

erhalten, die eine gewisse Verwandtschaft mit Cauchys Residuenformeln[2039])

$$(1643)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)\,dt}{y+it} = 2\pi f(iy),$$

$$(1644)\qquad \int_0^{\infty}\frac{f(t)+f(-t)}{2}\,\frac{y\,dt}{t^2+y^2} = \frac{\pi}{2}f(iy)\qquad (y>0)$$

$$(1645)\qquad \int_0^{\infty}\frac{f(t)-f(-t)}{2}\,\frac{t\,dt}{t^2+y^2} = \frac{\pi i}{2}f(iy)$$

aufweist. Aber diese Formeln gelten nur unter bestimmten Voraussetzungen über die Funktion $f(z)$; und aus dem Liouvilleschen Fundamentalsatz (II B 1, *Osgood*, Nr. 4, p. 19) zusammen mit dem Symmetriesatz (ib. Nr. 20, p. 57) geht hervor, daß diese Voraussetzungen

---

Formel beweisen, indem er rechts $f(x+t)$ nach Potenzen von $t$ entwickelt und gliedweise integriert; dabei schreibt er freilich, wie *J. Bertrand*, Ann. di mat. 1 (1858), p. 156 mit Recht einwendet, divergenten Integralen endliche Werte zu; und auch wenn man das dadurch heilen wollte, daß man sie als „intégrales extraordinaires" [1376]) auffaßte oder durch Schleifenintegrale (II B 1, *Osgood*, Nr. 17, p. 51) ersetzte, bliebe immer noch die Unmöglichkeit, die gliedweise Integration zu rechtfertigen.

2039) Mém. sur les int. déf., Paris 1825, p. 61, 62; exerc. de math. 1 (1826) = Oeuvres (2) 6, p. 138; Gerg. Ann. 17 (1827), p. 91, 92. Von diesen Formeln unterscheiden sich übrigens nur durch die Bezeichnung diejenigen, die *Abel* in einer anderen Jugendarbeit (Oeuvres 2, p. 79; zuerst 1839 in Holmboes Ausgabe publiziert) gewinnt, indem er in den Integralrelationen (847), (848), (859) die Variable $x$ durch das Differentiationssymbol $d/dx$ ersetzt und an der Funktion $f(x)$ operiert. Formeln ähnlicher Art stehen übrigens auch bei *H. Vernier*, Gerg. Ann. 15 (1830), p. 178 und bei *v. Schmidten*, J. f. Math. 5 (1830), p. 396. *Schlömilchs* Beweis der Abelschen Formeln (Arch. 12 (1849), p. 139) setzt voraus daß $f'(z)$ rechts von der Achse der rein imaginären $z$ endlich bleibt. Hat man es unter dieser Voraussetzung wirklich mit einer Lösung zu tun?

nicht erfüllt sein können, wenn $f(x)$ für reelle Werte von $x$ reell und nicht konstant ist.[2040])

Die Gleichungen

$$(1646)\qquad \int_0^\infty \frac{\Phi(r, u)}{a^2+u^2}du = \frac{\pi}{2a}F(re^{-a}) \qquad a > 0$$

$$\left.\begin{aligned}
&(1647)\qquad \int_0^\infty \frac{u\Psi(r, u)}{a^2+u^2}du = \frac{\pi}{2}[F(re^{-a}) - F(0)]\\
&(1648)\qquad \int_0^\infty \frac{\Psi(r, u)}{a^2+u^2}\frac{du}{u} = \frac{\pi}{2}[F(r) - F(re^{-a})]
\end{aligned}\right\} \quad a \geqq 0$$

in welchen $F(re^{iu}) = \Phi(r, u) + i\Psi(r, u)$ ist, stehen auch bei *O. Schlömilch*[2041]). Er erhält sie aus den trigonometrischen Entwicklungen nach den Funktionen der Vielfachen von $u$ mit Hilfe der Formeln von Nr. **59**b durch gliedweise Integration.

Bei *R. Hoppe*[2042]) steht die Gleichung

$$(1649)\qquad \int_0^{2n\pi} f'(x)\log(1 - 2r\cos x + r^2)\,dx$$

$$= r\int_{-\infty}^{+\infty}[f(2n\pi + ix) - f(ix) - f(2n\pi) + f(0)]\,\frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} - r};$$

er leitet sie zunächst für $f(x) = x^{m+1}$ ab und daraus dann allgemein.

Daß ein Ausdruck der Form

$$(1650)\qquad u = f_1(x + iy) + f_2(x - iy)$$

nicht nur dann ein reelles Resultat gibt, wenn $f_1$ und $f_2$ identisch sind, sondern auch dann, wenn sie konjugiert komplex sind, ist nicht sogleich bemerkt worden; *J. Challis* übersieht es noch 1829[2043]) und 1834.[2044])

*S. Earnshaw*[2045]) scheint zu meinen, daß man eine allgemeinere

---

2040) Für $f(x) = \exp x$ gelangt Abel, wie Bertrand ebenfalls bemerkt, nur durch einen Rechenfehler zum richtigen Resultat.

2041) Analyt. Studien 2, Leipzig 1848, p. 117; p. 122 auch entsprechende Formeln mit $a^2 - u^2$ im Nenner.

2042) J. f. Math. 40 (1850), p. 141.

2043) Phil. mag. (2) 6 (1829), p. 126. Vgl. die scharfe Kritik von *J. Bertrand,* Paris C. R. 23 (1846), p. 827.

2044) Cambr. trans. $5_2$ (1834), p. 175.

2045) Cambr. trans. $6_2$ (1837), p. 208; p. 223 analog für drei unabhängige Variable.

Lösung als (1650) erhalte, wenn man eine Summe

$$\sum[f(\alpha x + \beta y) + f_1(\beta x - \alpha y)]$$

über alle möglichen Werte der Konstanten $\alpha$, $\beta$ erstrecke, die der Bedingung $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ genügen.

*R. Murphy* gibt die eigentümliche Darstellung[2046]):

$$(1651)\qquad \frac{1}{2iy}\int\limits_{x-iy}^{x+iy} f(x)\,dx = \lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{n!}\exp\left(-\frac{(n+1)\pi x}{y}\right)\frac{d^n\left(u\exp\frac{\pi x}{y}\right)}{d\left(\exp\left(-\frac{\pi x}{y}\right)\right)^n}\right],$$

wobei:

$$(1652)\qquad u = \frac{1}{n!}\exp\left(\frac{(n+1)\pi x}{y}\right)\frac{d^n\left(f(x)\exp\left(-\frac{\pi x}{y}\right)\right)}{d\left(\exp\frac{\pi x}{y}\right)^n}.$$

*G. Plana*[2047]) ersetzt Lagranges Auflösung des unendlichen Gleichungssystems durch eine übersichtlichere, benutzt aber dabei auch divergente Reihen. Von seinen Beispielen führt schon $\sqrt{z}$ auf einen imaginären Ausdruck für eine reelle Größe: er verläßt daher das Verfahren wieder und wendet sich zu trigonometrischen Reihen.

*A. Genocchi* bemerkt[2048]), Lagranges Gleichung (1634) ergebe sich unmittelbar aus der gewöhnlichen Lagrangeschen Interpolationsformel (I B, 1a, *Netto*, Nr. 2, p. 229), wenn man diese für unendlich viele gegebene Argumentwerte in Anspruch nehme. Er will aber diese Bemerkung selbst nicht für einen Beweis ausgeben, verweist vielmehr auf Cauchys Residuenformeln; da er aber diese nur in ihrer unvollkommenen ersten Gestalt kennt, so sind die Gültigkeitsbedingungen für die Gleichung (1634) auch bei ihm ungenügend angegeben. Wenn diese Bedingungen erfüllt seien, so könne man aus ihr folgern, daß die Fouriersche Integralformel dann auch für rein imaginäre Argumentwerte in Anspruch genommen werden dürfe[2049]). Planas Beweis verwirft er wegen der Benutzung der divergenten Reihen.[2050])

*Plana* bemerkt noch[2051]): wenn die Benutzung des unendlichen

2046) Cambr. trans. $3_3$ (1830), p. 430. $y$ ist bei den Differentiationen als konstant zu behandeln.

2047) Torino mem. 16 (1857), p. 99.

2048) Ann. sc. 8 (1857), p. 398.

2049) p. 419. Die im Anschluß daran erwähnten Versuche italienischer Hydrauliker scheinen nur zu ganz partikulären Lösungen geführt zu haben.

2050) p. 405.

2051) Torino mem. 18 (1859), p. 500.

Systems linearer Gleichungen Schwierigkeiten mache, könne man mit Fourier erst ein endliches System auflösen und dann den Grenzübergang ausführen. Die Benutzung divergenter Reihen will er durch den Hinweis darauf rechtfertigen, daß man sie durch die Eulersche Transformation (I A, 3, *Pringsheim*, Nr. **37**, p. 101) in konvergente verwandeln könne.

Daß aus einer beliebigen Funktion $F$ des komplexen Arguments $x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ die Gleichungen eines Systems von Isothermen und Stromlinien (filets de chaleur) für ein Wärmeleitungsproblem erhalten werden können, ist wohl von *G. Lamé*[2052]) zuerst ausgesprochen und an dem Fall erläutert worden, daß sich die Funktion $F$ in eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

entwickeln läßt.

**104. Diskontinuitätsfaktoren.** Will man Funktionen, die in verschiedenen Intervallen durch verschiedene analytische Ausdrücke $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sich darstellen lassen, der Rechnung unterziehen, so kann das dadurch geschehen, daß man sie etwa in der Form schreibt:

$$f(x) = J_1(x)\varphi(x) + J_2(x)\psi(x), \tag{1653}$$

wo nun jeder der Faktoren $J_1, J_2$ in dem einen Intervall gleich 1, in dem andern gleich 0 sein muß. Daß man derartige Faktoren durch Grenzausdrücke darstellen kann, scheint zuerst *G. Libri*[2053]) bemerkt zu haben; er hat sich aber die Idee dadurch verdorben, daß er glaubte, nach Ausdrücken suchen zu müssen, die auch an der Grenze der beiden Intervalle denselben Wert liefern wie in dem einen von ihnen[2054]): So ist er dazu gekommen, so unhandliche Ausdrücke wie $0^{0^x}$ (er meint damit $\lim\limits_{\varepsilon=0}(\varepsilon^{\varepsilon^x})$, das in der Tat für $x \leqq 0$ gleich 0, für $x > 0$ gleich 1 ist) vorzuschlagen, mit denen man doch nicht rechnen

2052) J. de math. 1 (1836), p. 86. Er denkt dabei übrigens nur an reelle Koeffizienten $A_n$.

2053) Libris erste Veröffentlichungen (Mém. de math., Pisa 1827 und Florenz 1829) waren mir nicht zugänglich; doch scheinen sie nach seinem eigenen Bericht J. f. Math. 6 (1830), p. 67 nur eine Andeutung enthalten zu haben. Er gibt einige ganz einfache zahlentheoretische Anwendungen, aus denen hervorgehen dürfte, daß schon bei etwas größeren Werten der gegebenen Zahlen nicht durchzukommen sein würde.

2054) Das tritt klarer noch an der späteren Stelle J. f. Math. 7 (1831), p. 224 hervor.

kann[2055]). Zwar hat auch er schon bemerkt[2056]), daß auch die Gleichungen (486, 487) solche Ausdrücke liefern; indem er aber auch hier die eben genannte Forderung stellt, will er nicht diese Ausdrücke selbst benutzen, sondern rationale ganze Funktionen von ihnen, hütet sich aber, ein Beispiel ihrer wirklichen Verwendung zu versuchen.

Später[2057]) benutzt er den etwas einfacheren Ausdruck: $(1+0^x)^{-1}$.

Libri kommt später nochmals auf seine Formulierung zurück. Die Abhandlung selbst scheint nicht veröffentlicht zu sein.[2058])

*G. Peacock*[2059]) meint, es sei nicht nötig, nach einem analytischen Ausdruck für einen solchen Faktor zu suchen, ein rein symbolisches Zeichen, wie etwa

$$(1654) \qquad {}^xD_b^a = \begin{cases} 0 \text{ für } x < a \text{ und für } x > b \\ 1 \quad \text{„} \qquad a \leqq x \leqq b \end{cases}$$

leiste dieselben Dienste. Daneben will er noch Ausdrücke wie

$$(a-a)/(x-a)$$

benutzen, von dem er meint, er sei gleich 1 für $x=a$, sonst überall gleich 0.

Aber erst *P. G. Lejeune-Dirichlet* hat darauf hingewiesen[2060]), daß

---

2055) Das bemerkt bereits *A. C.* [*Cournot*], Bull. Férussac 11 (1829), p. 124; 15 (1831), p. 149.

2056) J. f. Math. 7 (1831), p. 228. Wenn die zunächst sich darbietende Funktion $y$ in dem einen Intervall gleich 0, in dem anderen gleich 1, an der Grenze gleich $\frac{1}{2}$ ist, so bildet er eine Funktion von $y$ wie $-2y^2+3y$, die für $y=\frac{1}{2}$ und für $y=1$ gleich 1, für $y=0$ gleich 0 ist.

2057) J. f. Math. 10 (1833), p. 304; 12 (1834), p. 237. *W. Walton* gebraucht $\frac{1-0^x}{1+0^x}$ und rechnet merkwürdig damit herum (Cambr. Dubl. math. j. 3 (1848), p. 202); *G. Boole* (Dubl. trans. 21 (1848), p. 141 (von 1846)) gebraucht sein 3-faches Integral als diskontinuierlichen Faktor.

2058) Der Auszug Paris C. R. 15 (1842), p. 401 bewegt sich in allgemeinen Redensarten. Cauchy weist bei dieser Gelegenheit darauf hin (ib. p. 410), daß er früher schon in einer Abhandlung von 1824 bestimmte Integrale angegeben hat, die diskontinuierliche Funktionen darstellen, die außerhalb gewisser Grenzen verschwinden. Libri erwidert (Paris C. R., p. 411), das habe mit seinen Untersuchungen die hauptsächlich zahlentheoretische Zwecke verfolgen, nichts zu tun.

2059) Brit. assoc. rep. 3 (1834), p. 248. *A. de Morgan* bemerkt dazu (differential and integral calculus, London 1836/41, p. 616: das $D$ brauche man zu oft in anderen Bedeutungen. Er schlägt $J_a^b$ dafür vor und macht davon p. 729 wirklich Gebrauch, um die d'Alembert-Eulersche Lösung des Saitenproblems darzustellen. In Libris $0^{0^x}$ findet er „no particular advantage".

2060) Berlin Abh. 1839. Auszug Paris C. R. 8 (1839), p. 156 (abgedruckt J. de math. 4 (1839), p. 164) und ausführlicher Berlin Ber. 1839, p. 18 = Werke 1, p. 393, 377, 383. Eine Darstellung von Dirichlets Verfahren findet sich auch bei *Moigno*, Leçons 2 (1844), p. 269.

man ja in den in Nr. 28 besprochenen Integralen wirklich analytische Ausdrücke der verlangten Art habe, daß z. B.

$$(1655)\qquad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\xi}{\xi}\cos x\xi\,d\xi = \begin{cases} 1 \text{ für } |x| < 1, \\ 0 \text{ für } |x| > 1 \end{cases}$$

sei, und daß man das dazu verwenden könne, um ein mehrfaches Integral, das nur über ein begrenztes Gebiet zu erstrecken ist, in ein anderes überzuführen, das sich über den ganzen unendlichen Raum erstreckt; man braucht dazu nur an Stelle von $x$ eine Funktion der Koordinaten zu setzen, die innerhalb der zuerst vorgeschriebenen Begrenzung absolut $< 1$, außerhalb absolut $> 1$ ist, dann das Element des zu berechnenden Integrals mit dem so gebildeten Diskontinuitätsfaktor zu multiplizieren und die Reihenfolge der Integrationen zu vertauschen. Daß diese Vertauschung bei nur bedingt konvergenten Integralen nicht ohne weiteres erlaubt ist, setzt er bei dieser Gelegenheit auseinander. Er benutzt dieses Verfahren zur Reduktion des über den Bereich

$$x + y + \cdots < 1,\ x > 0,\ y > 0, \ldots$$

genommenen Integrals

$$(1656)\qquad \int .. \exp(-kx - ky\,..)\,x^{a-1}y^{b-1}\ldots dx\,dy\ldots$$

auf ein Produkt von Gammafunktionen, mit Hilfe der Gleichung (902). Nachher gibt er noch eine zweite Art der Anwendung eines solchen Faktors: man könne auch einen Faktor der zu integrierenden Funktion durch ein solches diskontinuierliches Integral ersetzen, z. B.

$$(1657)\qquad \frac{1}{\sigma^q} = \frac{1}{\sin q\pi\,\Gamma(q)}\int_0^\infty \psi^{q-1}\sin(\sigma\psi + \tfrac{1}{2}q\pi)\,dq.$$

Das Potential und die Anziehungskomponenten eines homogenen Ellipsoids behandelt er nach der ersten Methode; schließlich gibt er noch einige Andeutungen über das Potential zweier homogenen Ellipsoide aufeinander.

Die Fouriersche Integralformel selbst hat *R. L. Ellis*[2061]) zu diesen Zwecken verwendet; als Beispiel behandelt er das Liouvillesche Integral:

$$(1658)\qquad \iint f(mx + ny + \cdots)\,x^{a-1}y^{b-1}\ldots dx\,dy \qquad mx + ny + \cdots \leqq h$$

2061) Cambr. J. $4_1$ (1843), p. 1. Er berichtet, er habe die Idee schon gehabt, bevor er mit Dirichlets Untersuchungen bekannt geworden sei; ebenso *M. Ohm*, System, 9, p. 381, Ausführung von Beispielen p. 424, 432; p. 435 Vergleich mit Dirichlets Verfahren.

und analog den Fall[2062]), daß die Potenzen von $x, y \ldots$ durch eine Exponentialfunktion ersetzt sind; oder durch $\frac{1}{(a^2+x^2)(b^2+y^2)\ldots}$ oder durch $\exp(-a^2x^2 - l^2y^2 - \cdots)$; dann auch noch Bestimmung eines beim Wahrscheinlichkeitsproblem vorkommenden Integrals.[2063]) Nachher[2064]) bemerkt *Ellis*, daß ebenso wie die Fouriersche Integralformel zur Auswertung bestimmter Integrale, die Formel

$$(1659) \qquad \int_0^{\pi} \sum \cos(x-u)\alpha f(u) d\alpha = \pi f(x),$$

wenn $x$ eine der Zahlen $a, a+1, \ldots b$ ist, und die Summation über dieselben Werte von $u$ zu erstrecken ist, zur Auswertung endlicher Summen gebraucht werden kann.

Die Verwendung des Fourierschen Integrals als diskontinuierlichen Faktor ausführlich auch bei *Schlömilch*[2065]) mit Anwendung auf Integrale der Form:

$$(1660) \int\int x^{l-1} y^{m-1} \exp(-\alpha x - \beta y - \cdots) F(x+y+\cdots) dx dy \cdots$$
$$k \geqq x + y + \cdots \geqq \lambda,$$

auf Bestimmung der Masse eines Ellipsoids von in bestimmter Weise variabler Dichte, auf Integrale der Form:

$$(1661) \qquad \cdot\cdot \int F\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{x}\right)^2 + \cdots\right] dx \ldots,$$

wobei

$$k > \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{x}\right)^2 + \cdots > \lambda,$$

$$(1662) \qquad \cdot\cdot \int \exp(-a^2x^2 - \cdots) F(x+y+\cdots) dx \ldots,$$

wobei

$$k > x + y + \cdots > \lambda,$$

$$\cdot\cdot \int F(x+y+\cdots) dx \ldots,$$

wobei

$$1 > \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \cdots$$

*R. L. Ellis*[2066]) gibt noch weitere Beispiele für Fälle in welchen das Integrationsgebiet durch mehrere lineare Ungleichungen abgegrenzt ist.

2062) Ib. $4_3$ (1844), p. 116.

2063) Ib. p. 128.

2064) J. de math. 9 (1844), p. 423.

2065) Analyt. Studien 2, p. 160; p. 186 eine Umformung; zum Schluß Komplanation des dreiachsigen Ellipsoids.

2066) Cambr. Dubl. math. J. 1 (1846), p. 1.

*A. Cauchy*[2067]) definiert einen „coefficient limitateur" durch

$$l_x = \begin{cases} 0 \text{ für } x < 0 \\ 1 \text{ für } x > 0 \end{cases}$$

(er schreibt $l_t = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2}}\right)$, da er kein Zeichen für den absoluten Betrag hat). Man kann ihn als Grenzwert von $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{\varepsilon + \sqrt{x^2}}\right)$ oder von $(1 + \exp(-x/\varepsilon))^{-1}$ erhalten.[2068]) Weiter setzt er

$$l_t = l_{t-a}\, l_{b-t};$$

das ist also nur von Null verschieden, solange $t$ zwischen $a$ und $b$ liegt. Später[2069]) sagt *Cauchy* statt limitateur lieber „restricteur". Er führt jetzt auch bestimmte Integrale und namentlich das Fouriersche Integral als Beispiel an. Zur Umformung benützt er seine Sätze über Wurzeldarstellungen. Er gibt einige Beispiele von Integralen, die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung auftreten.

**105. Restglied der Euler-Maclaurinschen Summenformel.** Die Summenformel (vgl. auch I E, *Seliwanoff*, Nr. **11**).

$$(1663)\quad \sum_{x=0}^{x} f(x) = \int_0^x f(x)\,dx - \frac{1}{2}(f(x) - f(0)) + \frac{1}{12}(f'(x) - f'(0)) - \frac{1}{720}(f'''(x) - f'''(0)) + - \cdots$$

hat *L. Euler* durch Umkehrung der *Taylor*schen Reihe gefunden. Die Koeffizienten bestimmt er zunächst[2070]) durch Rekursionsformeln; später[2071]) zeigt er, daß diese Rekursionsformeln mit denjenigen identisch sind, die auftreten, wenn man die Entwicklung von $u(1 - e^{-u})^{-1}$ nach Potenzen von $u$ aus der von $u^{-1}(1 - e^{-u})$ ableitet, und daß daher der Koeffizient von $f^{(2m+1)}(x)$ in (1595) mit dem Koeffizienten von $u^{2m+1}$ in der Entwicklung von $\frac{u}{2}\left(1 + \cot\frac{u}{2}\right)$ übereinstimmt, also

---

2067) Paris C. R. 29 (1849), p. 553 = (1) 11, p. 177.

2068) Aus diesen beiden Formeln leitet er p. 188 her, daß $l_{\alpha+\beta i} = l_\alpha$ sei.

2069) 37 (1853), p. 110 = (1) 12, p. 80.

2070) Nur mit einer Andeutung des Beweises Petrop. comm. 6 (1732/33[38]), p. 68; ausführlicher ib. 8 (1736[41]), p. 14 und im wesentlichen ebenso instit. calc. diff. 1755, II, § 109. Bei *Euler* ist übrigens alles, was sich auf die untere Grenze bezieht, in eine Integrationskonstante zusammengezogen.

2071) Petrop. comm. 12 (1740[50]), p. 77; instit. calc. diff. II, § 114; Petrop. acta 1781 II[85], p. 64 und noch einmal in der nachgelassenen Abhandlung von 1780, Petersb. Mém. 5 1812[15], p. 45.

den Wert hat:

(1664) $$\frac{(-1)^m B_m}{(2m)!} = \frac{(-1)^m S_m}{2^{2m-1}\pi^{2m}},$$

wo $B_m$ die $m^{\text{te}}$ *Bernoulli*sche Zahl (II A 3, *Brunel*, Nr. 18) und $S_m$ die Summe

(1665) $$S_m = 1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \cdots$$

bedeutet.

Bei *C. Maclaurin*[2072]) ist die Ableitung im Prinzip dieselbe wie bei *Euler*, nur integriert er nicht gleich von 0 bis $x$, sondern zuerst nur von 0 bis 1, von da bis 2 usw. und summiert dann. Für die Koeffizienten gibt er zunächst dieselben Rekursionsformeln wie Euler; nachher[2073]) zeigt er durch die Annahme $f(x) = e^{-x}$, daß sie mit den Entwicklungskoeffizienten übereinstimmen. Außerdem gelangt er durch eine andere Kombination der Teilresultate noch zu einer zweiten Summenformel[2074]):

(1666) $$\sum_{k=0}^{x-1} f(k+\tfrac{1}{2}) = \int_0^x f(x)\,dx$$
$$+ \sum_{m=1} \frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m-1}\pi^{2m}}\left(1 - \frac{1}{2^{2m-1}}\right) S_m \left(f^{(2m+1)}(x) - f^{(2m+1)}(0)\right).$$

Bei *E. Waring* findet sich außer der Ableitung dieser beiden Formeln noch die Bemerkung[2075]): benutzt man als erste Annäherung

(1667) $$\frac{y_0 + y_n}{2} + \frac{n}{n^2-1} y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1},$$

---

2072) Treatise on fluxions, Edinb. 1742, Nr. 828—830. Wegen der Unabhängigkeit *Maclaurins* von *Euler* vgl. man *G. Eneström*, Stockh. öfversigt (36) 10 (1879), p. 16 und *Reiff*[6]), p. 87, dem sich *M. Cantor* 3, p. 663, anschließt; die Übereinstimmung beider Ableitungen hat übrigens nichts Auffallendes, da es sich nur um eine Verallgemeinerung des von *J. Stirling* zur Ableitung seiner speziellen Formel (II A 3, *Brunel*, p. 166) benutzten Verfahrens handelt. — Darstellungen von *Maclaurins* Verfahren finden sich auch bei *L. Saalschütz*, Vorlesungen über die *Bernoulli*schen Zahlen, Berlin 1893, p. 18 und bei *J. Eggenberger*, Diss. Bern 1893, p. 52 = Bern Mitt. 1893, p. 159 (2. Aufl. Jena 1906).

2073) Treatise Nr. 847. Ebenso *Br. Mollweide*, Klügels math. Wörterbuch 4 (1823), p. 655; *F. T. Schubert* (Petersb. Mém. 11 (1831), p. 159; von 1824) benutzt statt $\exp(-x)$ vielmehr $\exp x$ selbst.

2074) Nr. 832. Weiterhin (Nr. 848) gibt er auch noch die entsprechenden Ergänzungsglieder für andere elementare Quadraturformeln; weitere derartige Formeln bei *C. Br. Mollweide*, Klügels math. Wörterbuch 4, Leipz. 1823, p. 143.

2075) Meditationes analyticae, p. 585 der 2. Auflage von 1785.

so tritt in der Korrektion kein Glied mit $f''$ auf; benutzt man

$$(1668) \qquad \frac{1}{90}\{7(y_0+y_4)+32(y_1+y_3)+12y_2\},$$

so fällt auch noch das Glied mit $f^{IV}$ weg. Auch erwähnt er[2076]), daß man die Formeln zur Interpolation verwenden könne, wenn man die zu interpolierende Funktion als das $\sum y$ ansieht.

*J. L. de Lagrange*[2077]) erhält die Summenformel — auch die entsprechende Formel für wiederholte Summation —, indem er die symbolische Gleichung

$$(1669) \qquad \Delta^\lambda f(x) = (e^D - 1)^\lambda f(x)$$

(vgl. II A 11, *Pincherle,* Nr. 2, p. 764) auch für negative Werte von $\lambda$ in Anspruch nimmt; das gibt ihm sofort den Satz, daß die Koeffizienten mit denjenigen der Entwicklung von $(e^u - 1)^\lambda$ übereinstimmen, und damit Rekursionsformeln. *P. S. de Laplace* dagegen faßt das umgekehrt[2078]): erst indem man [auf dem von *Euler* eingeschlagenen Wege] sich von der Möglichkeit einer solchen Entwicklung überzeuge und die Koeffizienten durch die spezielle Annahme $f(x) = e^x$ bestimme, ergebe sich die Berechtigung, dem $\lambda$ in der Gleichung (1669) auch negative Werte beizulegen. Nachher leitet er das Resultat auch noch durch seine „Methode der erzeugenden Funktionen" ab[2079]).

*L. F. A. Arbogast*[2080]) übersetzt nur die Methoden von *Lagrange* und *Laplace* in seine eigene Ausdrucks- und Bezeichnungsweise.

Eine explizite Darstellung der Koeffizienten für $\lambda > 1$ gibt *J. Brinkley*[2081]) vermittelst der von ihm „unter die Elemente der Analysis aufgenommenen"[2082]) Zahlen $\Delta^n 0^m$ (d.h. $\{\Delta^n u^m\}_{u=0}$). *J. Herschel*[2083])

2076) p. 586.

2077) Berlin nouv. mém. 1772 = Oeuvres 3, p. 451. Er meint: „quoique l'opération ... ne soit pas fondée sur des principes clairs et rigoureux, elle n'en est cependant pas moins exacte, comme on peut s'en assurer a posteriori; mais il serait peut-être très-difficile d'en donner une démonstration directe et analytique."

2078) Paris Mém. prés, 7 (1773[76]) = Oeuvres 8, p. 316; Paris Mém. 1777[80] (von 1779) = Oeuvres 9, p. 316[27]; reproduziert von *S. F. Lacroix,* traité des différences et des séries, Paris 1800, p. 94; traité du calc. diff. et du calc. int. 3 (1819), p. 100.

2079) Paris Mém. 1779[82] = Oeuvres 10, p. 35; ebenso Théorie analyt. des probabilités, Paris 1812, p. 42 der Ausgabe von 1847.

2080) Calcul des dérivations, Straßb. 1800, p. 343, 350.

2081) Lond. trans. 1807, p. 125.

2082) Lond. trans. 1816, p. 32; examples of the applic. of the calculus of finite diff., Cambr. 1820, (p. 82 der deutschen Übersetzung von C. H. Schnuse, Braunschw. 1859).

2083) Das rechnet ihm *J. Herschel,* examples p. 82, als Verdienst an.

gibt diese Darstellung in der symbolischen Gestalt:

$$(1670)\qquad {}^{(\lambda)}B_m = \left\{\frac{\log(1+\Delta)}{\Delta}\right\}^{\lambda} 0^m,$$

und zeigt, daß sie auch für negative Exponenten gilt.

*A. Cauchy*[2084]) stellt die Ableitung der allgemeinen Formel durch symbolische Rechnung aufs neue dar; er setzt in der Form:

$$(1671)\qquad f(D_a)\sum_x K = \sum_x f(D_a) K$$

$K = e^{ax}$ und gibt auch eine weitere Form.[2085]) Später[2086]) gibt er nochmals die gewöhnliche Ableitung, aber mit dem Zusatz: Es folgt aus ihr, daß die Reihe nur konvergiert, wenn die Entwicklung von $f(x)$ nach Potenzen von $x$ beständig konvergiert.

*C. J. Malmsten* beweist zunächst für eine rationale ganze Funktion $y$ von $x$, daß in der Gleichung

$$(1672)\qquad \sum e^x y = e^x\left(y + \sum_n A_n h^n \frac{d^n y}{dx^n}\right)$$

die Koeffizienten $A_n$ die Werte haben[2087]):

$$(1673)\qquad A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dh^n}\frac{1}{e^h - 1},$$

womit die Eulersche symbolische Darstellung dieser Koeffizienten für diesen Fall bestätigt ist. Daran anschließend untersucht *B. G. Bjoerling* diese Koeffizienten[2088]) sowie[2089]) diejenigen der Entwicklung von $(e^h + 1)^{-1}$ noch näher und gibt dann[2090]) auch seinerseits einen Beweis der genannten Formel und der allgemeineren[2091]):

$$\sum e^{rx} y = e^{rx}\left(y + \sum_n \frac{h^n}{n!}\frac{d^n y}{dx^n}\frac{d^n}{d(rh)^n}\frac{1}{e^{rh} - 1}\right).$$

Er bemerkt[2092]), die gewöhnliche Darstellung der hieraus entspringen-

---

2084) Paris C. R. 17 (1843), p. 458 = (1) 8, p. 37. Er behauptet p. 27, die Euler-Maclaurinsche Reihe konvergiere *nur*, wenn $f(x)$ eine ganze transzendente Funktion sei.

2085) p. 459 = 38.

2086) Paris C. R. 19 (1844), p. 1187 = (1) 8, p. 331; angekündigt schon 17 (1843), p. 378 = (1) 8, p. 27.

2087) Upsala n. acta 12 (1844), p. 293 = Arch. Math. Phys. 6 (1845), p. 41.

2088) Ib. p. 299.

2089) p. 315.

2090) p. 328.

2091) p. 332. Wegen der behaupteten Gültigkeit auch für komplexe $h$ vgl. die Ergänzungen 13 (1847), p. 14.

2092) 12, p. 343. Die bereits vorliegenden Untersuchungen über das Restglied scheint er teils nicht gekannt, teils nicht richtig gewürdigt zu haben.

den allgemeinen Summationsformel setze voraus, daß die Taylorsche Entwicklung der darzustellenden Funktion für den ganzen in Betracht kommenden Bereich konvergiere, daß man die Reihenfolge der Summationen vertauschen dürfe, und daß es nicht erforderlich sei, ein Ergänzungsglied (willkürliche Funktion der Periode $h$) beizufügen; seine eigene Darstellung[2093]) unterscheidet sich von ihr freilich nur dadurch, daß diese Voraussetzungen ausdrücklich als solche ausgesprochen sind.

Bei *H. Breen*[2095]) steht nur die Formel ohne Restglied.

*A. M. Legendre*[2096]) bestimmt die Koeffizienten von (1663) und (1666) ähnlich wie *Maclaurin* durch die spezielle Annahme $f(x) = e^{nx}$. Auch bemerkt er[2097]), daß die Reihen im allg. nur semikonvergent sind, und schlägt vor, die Konvergenz durch Hinzufügung eines Gliedes der Form

$$(1674) \qquad 2\int_0^x f(\xi)\cos 2\pi(x-\xi)\,d\xi,$$

oder auch mehrerer solcher Glieder, mit den Kosinus der Vielfachen von $2\pi(x-\xi)$, zu verbessern, ev. das unbegrenzt fortzusetzen. Das führt ihn schließlich auf die Darstellung von $\int f(x)dx$ durch eine trigonometrische Reihe und ein *Poisson*sches Integral, die er aber nur als „un jeu d'analyse qui ne présente aucune utilité réelle" ansehen will. Später[2098]) kombiniert er noch die beiden Formeln (1663) und (1666) zu einer neuen, in der die erste Ableitung herausfällt. Auch erwähnt er die Möglichkeit, daß alle in der Formel auftretenden Ableitungen an beiden Grenzen des Intervalls Null sind[2099]), steht ihr aber ratlos gegenüber, da er das Rechnen mit divergenten Reihen nicht verwerfen will und also nicht zur Erkenntnis kommt, daß die Hinzufügung eines Restgliedes erforderlich ist.

---

2093) Ib. 13 (1847), p. 16. Er glaubt sogar neben der Entwickelbarkeit der Funktion $f(x+h)$ noch die ihrer Ableitungen besonders fordern zu müssen. — p. 25 stellt er die Formeln für $\sum y_x$ und $\sum(-1)^x y_x$ nebeneinander.

2095) Treatise p. 35 (p. 38 die Verallgemeinerung auf $\sum a^x y_x$, aber nicht durchgeführt), 134.

2096) Exerc. de calc. intégral 1, Paris 1811, p. 309; 2 (1817), p. 145 (von 1814). Ebenso *F. T. Schubert*, Petersb. Mém. 11 (1830), p. 158 (von 1824) und *A. A. Cournot*, Théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 460.

2097) Ib., p. 149. Er gelangt dazu, indem er von den $S_m$ jedesmal nur das Hauptglied nimmt und für die Summen der so entstehenden Glieder eine lineare Differentialgleichung mit zweitem Glied ableitet.

2098) Traité des fct. elliptiques 2, Paris 1826, p. 576.

2099) p. 578. Für den ihn zunächst interessierenden Fall eines elliptischen Integrals hilft er sich mit der Benutzung der ersten der hier II A 9 unter (19) angegebenen Formeln, die er, was dort nicht erwähnt ist, ebenfalls hat.

Die Bemerkung, daß die Reihe semikonvergent sei, ist von *Erchinger*[2100]) in Verfolgung einer Vermutung von *J. Fr. Pfaff* dahin präzisiert worden, daß der Rest kleiner sei als das erste vernachlässigte Glied; wenn man die Koeffizienten durch die Summen (1665) ausdrückt und dann die Reihenfolge der beiden Summationen vertauscht, so läßt sich zeigen, daß die einzelne Kolonnensumme einer linearen Differentialgleichung mit zweitem Glied genügt, von der das partikuläre Integral

$$(1675) \qquad (2m\pi)^{-2mx-1}\int^{x} f^{(2m+1)}(x)\sin 2m\pi x dx$$

zu nehmen ist, womit die Kolonnensummen abgeschätzt werden können.

*G. Plana*[2101]) entnimmt aus den Untersuchungen von *Poisson* über Elektrizitätsverteilung die Gleichung[2102]):

$$(1676) \qquad 4\int_0^\infty \frac{\sin xy}{e^{2\pi y}-1}dy = \cot\frac{x}{2} - \frac{2}{x}$$

und leitet aus ihr durch Entwicklung beider Seiten nach Potenzen von $y$ Formeln für die *Bernoulli*schen Zahlen ab; indem er diese in

2100) Mitgeteilt von *O. Schrader*, commentatio de summa seriei

$$\frac{a}{b(b+d)} + \frac{a}{(b+2d)(b+3d)} + \frac{a}{(b+4d)(b+5d)} + + \cdots$$

a soc. Hafniensi praemio ornata, Vimariae 1818, p. 58; (daraus bei *A. Eytelwein*, Grundlehren der höheren Analysis 2, Berlin 1824, p. 744) und von *A. v. Ettingshausen*, Vorlesungen über die höhere Mathematik 1, Wien 1827, p. 429. Schon *C. J. Malmsten* (J. f. Math. 35 (1847), p. 56 = acta math. 5 (1884), p. 3) macht darauf aufmerksam, daß die Schlußweise nur für konvergente Reihen zulässig sein würde. — *Schraders* weitere Behauptung, der Rest sei sogar kleiner als das letzte mitgenommene Glied, bezieht sich nur auf ein spezielles von ihm behandeltes Beispiel; bei *Ettingshausen* und *Eytelwein* ist das mißverstanden.

2101) Torino mem. 25 (1820), p. 404; ib. (2) 14 (1854), p. 41 (von 1851) meint er übrigens selbst: „pour le moment je ne vois pas les avantages qui peuvent être attachés à cette transformation."

2102) Paris Mém. 1811 II [1814], p. 220. Er bezeichnet hier p. 222, sowie J. Éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 304 die aus ihr sich ergebenden Integraldarstellungen der Bernoullischen Zahlen als „connues"; ebenso *A. M. Legendre*, exerc. de calc. intégral 2 (1817), p. 189 (publ. 1815). Auch *A. Cauchy* scheint das andeuten zu wollen, Mém. sur les appl. du calcul des résidus à la phys. math., Paris 1827, p. 9. Doch kennen auch *G. Brunel* (II A 3, p. 184, Note 165; Plana 1828 ist dort durch 1820 zu ersetzen) und *L. Saalschütz*, Vorlesungen über die *Bernoulli*schen Zahlen, Berlin 1893, p. 110, keine ältere Quelle. — *A. Genocchi* (ann. sci. 3 (1852), p. 406) bemerkt, daß sie vermöge einer einfachen Substitution aus schon von *Euler* (Petrop. n. comm. 14 I, 1769[70], p. 152) gegebenen Darstellungen hervorgehen; *Hr. Eneström* teilt mir mit, daß *Euler* diese letzteren auch ib. 19 (1774[75]), p. 95 = inst. calc. int. 4, p. 288 benutzt.

(1663) einsetzt, und dann rechts Summation und Integration vertauscht, kommt er zu der Formel:

$$(1677)\quad \sum f(x) = \int f(x)\,dx - \tfrac{1}{2} f(x) + \frac{1}{i}\int_0^\infty \frac{f(x+yi) - f(x-yi)}{e^{2\pi y} - 1}\,dy.$$

Dieselbe Formel hat dann auch *N. H. Abel*[2103]) zuerst ebenfalls von den Integralstellungen der *Bernoulli*schen Zahlen aus gewonnen; später[2104]) gibt er eine andere Ableitung, bei der er von der Annahme ausgeht, die zu summierende Funktion $f(x)$ sei in der Form:

$$(1678)\qquad f(x) = \int e^{vx}\psi(v)\,dv$$

gegeben, so daß die Summation

$$(1679)\qquad \sum f(x) = \int \frac{e^{vx}\psi(v)}{e^v - 1}\,dv$$

und die Anwendung von (965) die Formel (1677) liefert. Auch hat er eine — nicht eben einfache — entsprechende Formel für wiederholte Summation.

Die Gleichung (1677) läßt sich übrigens auch durch Summation aus der Gleichung

$$(1680)\quad \tfrac{1}{2}(f(1) + f(0)) = \int_0^1 f(x)\,dx - i\int_0^\infty \frac{f(1+yi) - f(1-yi) - f(yi) + f(-yi)}{e^{2\pi y} - 1}\,dy$$

ableiten[2105]), die *A. Cauchy*[2106]) durch Anwendung seiner Residuensätze auf die Funktion $f(z)/((2\pi z - 1))$ und einen Parallelstreifen gewonnen hat.

*S. D. Poisson*[2107]) setzt in der Gleichung

$$(1681)\quad f(k) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-x}^{x} f(\xi)\cos\frac{n\pi(k-\xi)}{x}\,d\xi$$

---

2103) Mag. for Naturvidensk. 1 (1823) = Oeuvres 1, p. 22.

2104) Ib. 3 (1825) = Oeuvres 1, p. 34; reproduziert von *A. de Morgan,* Diff. and integr. calc. London 1836[41], p. 671. Eine Notiz aus *Abels* Nachlaß, Oeuvres 2, p. 77, stellt dasselbe in der Symbolik der „Theorie der erzeugenden Funktionen" dar.

2105) Das bemerken *B. Tortolini* (ann. sci. 4 (1853), p. 228) und *A. Genocchi* (ib. 6 (1855), p. 102).

2106) Paris Mém. 6 (1826), p. 609 = Oeuvres (1) 2, p. 17; Mém. sur l'applic. du calcul des résidus à la physique math., Paris 1827, p. 8. Die Gültigkeitsbedingungen sind von *Cauchy* auch an der 2. dieser Stellen nicht vollständig angegeben. Er bemerkt, daß man „bekannte Formeln", z. B. die Darstellung von $\Sigma n^{-2}$ durch ein bestimmtes Integral, aus dieser Gleichung erhalten könne.

für $k$ die ganzzahligen Werte von $-x$ bis $+x$ und summiert; so erhält er zunächst:

$$(1682)\quad \tfrac{1}{2}f(-x) + \sum_{k=-x+1}^{x-1} f(k) + \frac{1}{2}f(x) = \int_{-x}^{x} f(\xi)d\xi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int f(\xi)\cos 2n\pi\xi\, d\xi.$$

Indem er dann rechts $(2m-1)$ mal partiell integriert und die dabei auftretenden Summen (1665) durch die *Bernoulli*schen Zahlen ersetzt, erhält er, wenn mit

$$(-1)^{m-1}B_m[f^{(2m-1)}(x)]$$

abgebrochen wird, noch das Restglied:

$$(1683)\quad \begin{aligned} R_m &= \frac{(-1)^m 2}{(2\pi)^{2m}}\int \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi\xi}{n^{2m}} f^{(2m)}(\xi)d\xi \\ &= \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m+1}}\int \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi\xi}{n^{2m+1}} f^{(2m+1)}(\xi)d\xi, \end{aligned}$$

womit, wie bei *Erchinger*, die Möglichkeit einer Abschätzung erreicht ist, wenn eine obere Grenze für $|f^{(2m)}|$ oder $|f^{(2m+1)}|$ bekannt ist. Er bespricht auch noch die von *Legendre* erwähnte Möglichkeit, daß alle Ableitungen ungerader Ordnung an beiden Grenzen des Intervalls 0 sind, und überzeugt sich durch wiederholte partielle Integration, daß dann in der Tat $R_m$ von $m$ unabhängig wird.[2108])

*J. L. Raabe*[2109]) ergänzt *Poissons* Untersuchung noch durch die

2107) Paris mém. 6 (1823[27]), p. 577; Auszug Bull. Férussac 10 (1828), p. 117; reproduziert z. B. bei *A. A. Cournot,* Théorie des fonctions 2, Paris 1841, p. 464. *Poisson* faßt die Formel umgekehrt als ein Hilfsmittel zur näherungsweisen Berechnung eines bestimmten Integrals auf. Etwas andere Darstellung bei *de Morgan,* differential and integral calculus, p. 622 (vorher, p. 265, 311, nur die Ableitung der Formel ohne Restglied durch symbolische Rechnung wie bei Lagrange).

2108) p. 588; ebenso *Ostrogradsky,* Petersb. mém. (6) $4_1$ (1841), p. 317.

2109) J. f. Math. 18 (1838), p. 77 (von 1836). Für den Fall, daß $f^{(2m)}$ im Intervall sein Zeichen wechselt, bestimmt *Raabe* für jedes der dadurch gebildeten Teilintervalle die Schrittgröße, die man nehmen muß, um verlangter Genauigkeit sicher sein zu können, und nimmt dann die kleinste der so bestimmten Schrittgrößen für das ganze Intervall; er bespricht ausführlich die Vorsichtsmaßregeln, die dabei durch den Umstand erforderlich werden, daß man die Stellen der Zeichenwechsel nur angenähert kennt (p. 85). In seiner Differential- und Integralrechnung I, Zürich 1839, p. 426, gibt *Raabe* noch eine andere Ableitung der Gleichung (1682), die darauf beruht, daß das *Dirichlet*sche Integral, wenn es über ein aus mehreren Perioden bestehendes Intervall erstreckt wird, sofort eine Summe der hier betrachteten Art als Grenzwert liefert; im übrigen rekapituliert er im wesentlichen seine frühere Untersuchung.

Überlegung: wenn $f^{(2m)}$ im Intervall sein Zeichen nicht wechselt, so kann man mit Hilfe des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung schließen, daß $R_m$ kleiner ist als das letzte berücksichtigte Glied.

*Ostrogradsky* dagegen[2110]) und ebenso *C. J. Malmsten*[2111]) wenden auf die Abschätzung des Restintegrals (1683) den Mittelwertsatz im umgekehrten Sinne an, indem sie nicht einen Mittelwert der Bernoullischen Funktion, sondern einen solchen einer Ableitung der zu entwickelnden Funktion vor das Integralzeichen ziehen. Außerdem gibt er noch[2112]) eine etwas modifizierte Ableitung des Poissonschen Resultats, die ihm einen allerdings nur unbedeutend kleineren Zahlenkoeffizienten des Restglieds liefert; auch stellt er[2113]) neben das Resultat Jacobis ein analoges für den Fall, daß $\sum f^{(2m)}$ und $\sum f^{(2m+2)}$ verschiedene Zeichen beibehalten.

*W. Fr. Bessel*[2114]) beginnt mit der Entwicklung der Funktion

$$(1684)\qquad \Phi(y) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{x}\left[f\left(\frac{2k-1}{2}-y\right)+f\left(\frac{2k+1}{2}+y\right)\right]$$

nach den Kosinus der Vielfachen von $2\pi y$; die Koeffizienten dieser Entwicklung lassen sich in

$$(1685)\qquad (-1)^n\int_0^x f(\alpha)\cos 2n\pi\alpha\,d\alpha$$

umformen; und indem er hier wiederholt partiell integriert und dann die Reihenfolge von Summation und Integration vertauscht, erhält er für $y=\frac{1}{2}$ die Summenformel mit der Poissonschen Form des Restgliedes. Er zeigt, daß die Summe aus diesem Restglied und dem letzten berücksichtigten Glied dasselbe Zeichen hat wie das letztere, wenn $f^{(2n)}(x)$ im Intervall von 0 bis $x$ ihr Vorzeichen nicht wechselt, und daß man also dann einen zu großen oder einen zu kleinen Wert erhält, je nachdem man mit einem positiven oder einem negativen Glied abbricht.

*L. F. Menabrea*[2115]) stellt Poissons Verfahren noch einmal ausführlicher dar, nur mit einigen Umstellungen; die Koeffizienten bestimmt er durch die Annahme $f(x)=\cos x$. Dasselbe Verfahren wen-

---

2110) Petersb. mém. (6) 4 (sc. math. (6) 2) (1841), p. 315 (von 1839).

2111) J. f. Math. 35 (1847), p. 69 = acta math. 5 (1884), p. 26.

2112) p. 71 bzw. 29.

2113) p. 73 bzw. 31.

2114) Astr. Nachr. 16 (1839), col. 1 = Abhandl. 2, p. 391.

2115) Torino mem. (2) 8 (1846), p. 195 (von 1844) det er dann auch[2116]) auf die 2. Summenformel (1666) sowie auf entsprechende aus der Simpsonschen Formel hervorgehende an.[2117])

Der Versuch von *C. D. Hill*[2118]), die Korrektionsglieder dadurch zu vereinfachen, daß er sie durch Ausdrücke ersetzt, die den Gaußschen Quadraturformeln analog gebaut sind und denselben Grad von Annäherung wie diese liefern, scheitert daran, daß die zur Bestimmung der Hilfsargumente dienende Gleichung schon in den niedrigsten Fällen komplexe Wurzeln hat.

*C. G. J. Jacobi* stellt, ausgehend von der Darstellung des Restes der Taylorschen Reihe durch ein bestimmtes Integral, den Rest der Euler-Maclaurinschen Formel ebenfalls durch ein bestimmtes Integral dar[2119]):

$$\int_0^1 B_{2m}(1-t)\sum_0^x f^{(2m+1)}(x-t)\,dt \tag{1686}$$

und schließt daraus[2120]), daß er dasselbe Vorzeichen hat wie die in ihm auftretende Summe, sofern diese Summe in dem ganzen Integrationsintervall ihr Zeichen nicht wechselt; und weiter, daß er kleiner ist als das letzte berücksichtigte Glied, wenn auch die Summe $\sum f^{(2m-1)}(x-t)$ in demselben Intervall überall dasselbe Zeichen hat wie die erste.

*O. Schlömilch*[2121]) nimmt bei der Ableitung aus der Taylorschen Formel das Restglied der letzteren in Gestalt eines bestimmten Integrals mit; die Summation liefert unter dem Integralzeichen das Produkt aus $f^{(2m+1)}$ in eine Bernoullische Funktion.

Auch gewinnt er die Gleichung[2122]) (1677), indem er $f(x)$ durch ein Integral der Form $\int e^{xu}\varphi(u)\,du$ sich ausgedrückt denkt, unter dem Integralzeichen summiert, für den auftretenden Faktor $\frac{1}{e^u-1}$ seine

2116) p. 212.

2117) p. 222.

2118) J. f. Math. 5 (1830), p. 333.

2119) J. f. Math. 12 (1834), p. 265 (Werke 6, p. 65).

2120) p. 269 bzw. 72. Über das Verhältnis der Resultate Jacobis zu denjenigen Poissons vgl. man die Bemerkungen von *Malmsten*, J. f. Math. 35 (1847), p. 58 (berichtigt acta math. 5 (1884), p. 6): Poisson braucht nur über eine Ableitung eine Voraussetzung zu machen, Jacobi über zwei verschiedene, aber nicht über deren einzelnen Werte, sondern nur über die aus ihnen gebildeten Summen. (Doch wird man selten über die Vorzeichen dieser Summen etwas aussagen können, wenn man es nicht auch über die einzelnen Summanden kann.)

2121) Theorie der Differenzen und Summen, Halle 1848, p. 47; p. 59 noch eine Umformung des Restglieds.

2122) p. 157. Vgl. [2104]).

Darstellung durch das Integral (965) setzt, die Reihenfolge der Integrationen vertauscht und jene Darstellungsformel auch für komplexe Argumente in Anspruch nimmt.

Die Abelsche Gleichung hat er auch in der Form[2123]):

$$(1687) \qquad \frac{1}{2} f(o) + \sum f(n) = \int_0^\infty \frac{f(-iy) - f(iy)}{2i} \operatorname{Cot}(\pi y)\, dy.$$

er führt sie in die Abelsche Form (1677) über und erhält die Formeln für endliche Summen durch Subtraktion. Die Entwicklung von $f(a \pm yi)$ nach Potenzen von $y$ gibt dann das Restglied in komplexer Form.

Bei *J. Pearson*[2124]) steht nur die Formel ohne Restglied.

*Schaar*[2125]) will die Konvergenzbedingungen bestimmen. Dazu zeigt er, wie man die Gleichung (1677) aus Cauchys Gleichung (1680) durch Summation oder auch direkt auf dem Wege durch Anwendung des Residuensatzes auf einen Streifen ableiten kann, bemerkt aber dazu[2126]), der Schluß setze die Bestimmung der Konvergenz der Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ oder wenigstens von

$$\varphi(y) = f(x + iy) - f(x - yi) - f(yi) + f(-yi)$$

($\varphi$ ist also hier nicht etwa die Bernoullische Funktion) voraus. Indem er noch den Nenner unter dem Integralzeichen entwickelt und dann in jedem einzelnen Glied wiederholt partiell integriert, erhält er für den Rest die Darstellung:

$$(1688) \qquad \frac{2}{(2\pi)^{2m}} \int_0^\infty \varphi^{(2m)}(x) \cdot \sum_{r=1}^\infty \frac{e^{-r\pi i x}}{r^{2m+2}}\, dx;$$

in einem folgenden Satz[2127]) benützt er aber doch nicht diese Form, sondern die Poissonsche.

*M. Ohm*[2128]) nimmt bei der Ableitung der Summenformel aus der Taylorschen Entwicklung schon in den einzelnen Übergangsreihen die Lagrangeschen Restglieder mit hinzu und kommt so ebenfalls auf die Restform:

$$(1689) \qquad \int_0^h f^{2m+2}(x + v) \cdot \psi(h - v)\, dv$$

---

2123) Archiv 12 (1849), p. 150.

2124) Calc. of finite diff. p. 25, 2. Aufl. Cambr. 1850.

2125) Brux. mém. cour. in 4° 22 (1846/47), p. 17.

2126) p. 23.

2127) Ib. 23 (1848/50).

2128) System 8 Nürnberg 1851, p. 202.

und formt dies dann[2129]) in

$$\Psi(\theta h) f^{2m-1}(x)$$

um, wenn $f^{2m}(x+v)$ von $v=0$ bis $v=h$ sein Vorzeichen behält.

Eine Verallgemeinerung der *Euler-Maclaurin*schen Summenformel erhält man, wenn man verlangt, die Summe $\sum m^x f(x)$ durch die Werte der Funktion $f(x)$ und ihrer Ableitungen an den beiden Grenzen des Summationsintervalls darzustellen. Der Koeffizient der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ableitung wird dann gleich dem Produkt aus $1/(n!(m-1)^{n+1})$ in eine ganze Funktion von $m$ mit ganzen Zahlenkoeffizienten. Das — nicht eben einfache — Gesetz dieser letzteren ist bereits von *L. Euler*[2130]) induktiv erkannt, dann von *S. F. Lacroix*[2131]) durch symbolische Methoden, von *J. A. Eytelwein*[2132]) durch Heranziehung anderer Formeln der Differenzenrechnung bewiesen worden.

*Euler* hat sich speziell mit dem Fall $m=-1$ beschäftigt, also mit der Formel

$$(1690)\quad \sum(-1)^x f(x) = \tfrac{1}{2} f(0) - \tfrac{1}{3} f'(0) + \tfrac{1}{48} f'''(0) - + - \cdots$$

Er gibt zunächst Rekursionsformeln für die Koeffizienten und zeigt, daß sie mit den Entwicklungskoeffizienten von $(1+e^u)^{-1} - \frac{1}{2}$ identisch sind[2133]). Am Auftreten des Faktors 691 im Zähler des $6^{\text{ten}}$ Koeffizienten erkennt er, daß eine Beziehung zu den *Bernoulli*schen Zahlen vorliegen müsse, und verifiziert dann bis zu $n=9$, daß der Koeffizient von $f^{(2n+1)}$, mit

$$(1691)\qquad (-1)^n \frac{2^{2n+1}-1}{2\cdot(2n+1)!} B_n$$

übereinstimmt[2134]). Nachher gibt er noch eine zweite Formel, in der

2129) p. 209, 211.

2130) Petrop. n. a. 2 (1784[88]), p. 65; von 1776. Vgl. übrigens auch *C. Maclaurin,* Treatise on fluxions, Edinb. 1741, Nr. 841. p. 682.

2131) Traité des différences et des séries, Paris 1800, p. 113; traité du calcul différentiel et du calcul intégral 3, Paris 1819, p. 116.

2132) Grundlehren der höhern Analysis 2, Berlin 1824, p. 627.

2133) Petrop. n. a. 2, p. 46. Er geht dabei zunächst von der Annahme aus, daß die Summe links unbegrenzt weit fortgesetzt sei.

2134) p. 52; ebenso Petersb. mém. 5 (1812[16]), p. 55 (von 1780). Einen Beweis der Allgemeingültigkeit der Formel (1690) hat *Euler* an keiner von beiden Stellen; ein solcher findet sich erst bei *S. F. Lacroix,* traité des différences et des séries, Paris 1800, p. 131 = traité du calcul diff. et du calcul int. 6, Paris 1819, p. 141. Formal stehen diese Reihen auch bei *Oettinger,* J. f. Math. 33 (1846), p. 129 (auch „die Lehre von den aufsteigenden Funktionen", Berlin 1836), der übrigens hier und dann nochmals Arch. Math. Phys. 13 (1849), p. 45 die Notwendigkeit betont, sie gleichberechtigt miteinander zu behandeln.

die Werte der Funktion und ihrer Ableitungen nicht für $x = 0$, sondern für $x = -\frac{1}{2}$ auftreten[2135]); doch begnügt er sich hier mit der Angabe von Rekursionsformeln.

*N. H. Abel*[2136]) gibt in Analogie zu (1677) für diese Summe, wenn sie unbegrenzt fortgesetzt wird, die Darstellung:

$$(1692)\quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f(x+n+1) = \frac{1}{2} f(x) + \int_0^{\infty} \frac{f(x+iy)-f(x-iy)}{2i} \frac{dy}{\mathfrak{Sin}\, \pi y}.$$

Für *mehrfache (wiederholte) Summen* gibt *N. H. Abel*[2137]) die — nicht eben einfache — Darstellung:

$$(1693)\quad \sum^{(n)} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k A_{n-k-1,n} \Gamma(n-k) \int^{(n-k)} f(x)\, dx^{n-k}$$
$$+ \frac{(-1)^n}{2} f(x) + (-1)^{n-1} \int_0^{\infty} \Big[ \frac{P}{i} (f(x+yi) - f(x-yi))$$
$$+ Q(f(x+yi) + f(x-yi)) \frac{dy}{e^{2\pi y}-1} \Big];$$

dabei ist $(-1)^{n-1} A_{k,n}$ der Koeffizient von $d^k (e^v - 1)^{-1} / dv^k$ in der Entwicklung von $(e-1)^{-n}$ nach den Ableitungen von $(e^v - 1)^{-1}$, und $P$, $Q$ sind durch

$$P + Qi = \sum_{k=0}^{n-1} i^k A_{k,n} y^k$$

definiert.

*A. Cauchy*[2138]) drückt die Koeffizienten dieser Entwicklung einfacher durch die der Entwicklung von $(e^z - 1)^{-m}$ nach Potenzen von $z$ mit steigenden Exponenten aus.

*F. T. Schubert*[2139]) erhält Ausdrücke der Koeffizienten durch sym-

---

2135) Petrop. n. a. 2, p. 54.

2136) Mag. naturv. 1 (1823) = Oeuvres 1, p. 27. Ob die Bemerkung (Oeuvres 2, p. 291), daß man (1692) aus (1677) dadurch ableiten könne, daß man in (1677) $x$ durch $2x$ ersetzt und von der so entstehenden Gleichung nach Multiplikation mit 2, die ursprüngliche subtrahiert, von Abel selbst oder von seinem ersten Herausgeber *Holmboe* herrührt, ist ungewiß.

2137) Mag. for naturv. 3 (1825) = Oeuvres 1, p. 37. *O. Schlömilch* zeigt, Theorie der Differenzen und Summen, Halle 1848, p. 172, daß die Koeffizienten in dem Ausdruck der mehrfachen Summen sich durch die Fakultätenkoeffizienten einfach ausdrücken.

2138) Exerc. de math. 3 (1828) = Oeuvres 2 (8), p. 191. Ein Restglied hat er nicht, dagegen Verallgemeinerung auf Funktionen von mehreren Veränderlichen.

2139) Petersb. mém. 11 (1830), p. 167 (von 1824). Auch er hat kein Restglied.

bolische Summen, zieht es aber vor, diese Ausdrücke nur für die niedersten zu benutzen und zur Berechnung der übrigen den Umstand heranzuziehen, daß sie sich zu arithmetischen Reihen höherer Ordnung anordnen lassen.

Auch *Oettinger*[2140]) kennt den Zusammenhang der Koeffizienten dieser Summenformeln mit denjenigen der Entwicklung von $(e^z - 1)^{-m}$; er gibt die ausgerechneten Werte der Koeffizienten für die niedersten Fälle.

*D. F. Gregory*[2141]) begnügt sich mit der formalen Darstellung:

$$\sum^{(n)} f(x) = \left(\exp \frac{d}{dx} - 1\right)^{-n} f(x).$$

*O. Schlömilch*[2142]) hat die Gleichungen

$$\frac{1}{2} f(0) - f(1) + - \cdots = \int_0^\infty \frac{f(-yi) - f(yi)}{2i} \, \mathfrak{Cosec}\, \pi y \, dy. \tag{1694}$$

$$f(1) + f(3) + f(5) + \cdots = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{f(-yi) - f(yi)}{2i} \, \mathfrak{Cot} \frac{\pi y}{2} \, dy. \tag{1695}$$

$$f(1) - f(3) + - \cdots = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{f(-yi) - f(yi)}{2i} \, \mathfrak{Sec} \frac{\pi y}{2} \, dy. \tag{1696}$$

**106. Umformung von Reihen.** Für die Zwecke der Summation und Transformation von Reihen, deren Glieder elementare Funktionen des Index sind, drückt Cauchy Summen der Form $\sum f(n)$ durch Residuen aus; das gibt ihm zunächst[2143]):

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \mathbf{E} \frac{\pi \cos \pi z}{((\sin \pi z))} f(z), \tag{1697}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \mathbf{E} \left(\left(\frac{\pi z \cos \pi z}{\sin \pi z}\right)\right) \frac{f(z)}{z}; \tag{1698}$$

und bei geeigneten Annahmen über das Verhalten der Funktion $f$ im Unendlichen können hier die Doppelklammern auch von dem ersten Faktor auf den zweiten übertragen werden, unter Änderung des Vorzeichens. Die Anwendungen der Formeln auf die Funktionen $f(x) \cos \alpha x$,

2140) J. f. Math. 12 (1834), p. 336; 16 (1837), p. 132; 33 (1846), p. 125; auch für Summen von Gliedern abwechselnder Vorzeichen.

2141) Cambr. math. j. $1_5$ (1839), p. 220.

2142) Arch. Math. Phys. 12 (1849), p. 150; die 3. ist im Grunde von der 1. nur durch die Bezeichnung verschieden; ebenso die 2. von der früheren.

2143) Exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 346.

$f(x) \sin \alpha x$ gibt ihm noch[2144]) die Formeln:

$$(1699) \quad -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(f(n)+f(-n))\cos n\alpha = \mathrm{E}\frac{\pi z \cos \alpha z}{\sin \pi z}\left(\left(\frac{f(z)}{z}\right)\right),$$

$$(1700) \quad -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(f(n)-f(-n))\sin n\alpha = \mathrm{E}\frac{\pi \sin \alpha z}{\sin \pi z}((f(z)))$$

und weitere[2144a]) durch Anwendung seiner Residuensätze auf Funktionen wie

$$\frac{r(z)}{\mathfrak{Cof}\, az \cos bz} \quad \text{oder} \quad r(z)\frac{\mathfrak{Sin}\, az}{\mathfrak{Sin}\, bz}\frac{\sin az}{\sin \pi z}$$

(wo $r(z)$ eine rationale Funktion bezeichnet).

Eine ähnliche Formel, nämlich:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi\left(t+\frac{2\pi k}{\omega}\right) = \frac{\omega}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-iktw}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ik\theta\omega}\varphi(\theta)d\theta,$$

hat sich auch im Nachlaß von *C. F. Gauß* gefunden.[2145])

Allgemeine Untersuchungen über derartige Umformungen finden sich auch bei *W. R. Hamilton.*[2146])

*S. D. Poisson* hat solche Formeln benutzt, um Reihen, die für große Werte von $t$ gut konvergieren, in andere überzuführen, die für kleine Werte von $t$ brauchbar sind.[2147]) Indem er in der Reihe

$$(1701) \qquad u = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp(-n^2 t)\int_0^{\pi} f(\alpha)\cos(nx-n\alpha)\,d\alpha$$

die Exponentialfunktion durch das Integral (947) ersetzt und noch einen Konvergenzfaktor einführt, erhält er zunächst

$$(1702) \quad u = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-n\delta-\tau^2)[\cos(nx-n\alpha+2t\tau)$$
$$+\cos(nx-n\alpha-2t\tau)]\,f(\alpha)\,d\alpha\,d\tau.$$

Nach Ausführung der Summation mit Hilfe der Gleichung (1212) liefert der Grenzübergang zu $\delta = 0$ nur für die Umgebung diskreter

2144) p. 355.

2144a) p. 307, 352, 359.

2145) Werke 8, p. 88; aus der Zeit zwischen 1799 und 1813.

2146) Dubl. Trans. $19_2$ (1843), p. 300.

2147) chaleur suppl. p. 48. Er bestimmt die von der Formel für $t = 0$ und für $x = 0$ gelieferten Grenzwerte.

Punkte Beiträge, und es bleibt:

(1703) $$u = \frac{1}{2t\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\alpha+2n\pi)^2}{4t^2}\right) f(\alpha)\, d\alpha.$$

*O. Schlömilch*[2148]) bildet

(1704) $$\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}f(o) + \sum f(n)\cos nx\right] = \int_0^{\infty}\left[\frac{1}{2t} + \sum \frac{t\cos nx}{t^2+n^2}\right]\psi(t)\,dt$$
$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} \frac{\mathfrak{Cos}\,(\pi t - xt)}{\mathfrak{Sin}\,\pi t}\,\psi(t)\,dt,$$

wo

$$\varphi(t) + i\psi(t) = f(-ti)$$

und entsprechende Sinusformeln.

Man kommt zu derartigen Umformungen auch, wenn man die auf zwei verschiedenen Wegen erhaltenen Integrale einer Differentialgleichung miteinander vergleicht. Z. B. wie *G. G. Stokes*[2149]) zeigt, an der Integration von $\nabla u = 0$ unter den Bedingungen:

$$u = 0 \quad \text{für} \quad x = 0,\ x = a,\ y = 0.$$

Hier ergibt sich die Umformung:

(1705) $$\frac{2}{b}\sum \frac{\mathfrak{Sin}\,n(a-x)}{\mathfrak{Sin}\,na}\sin ny_1 \sin ny = \frac{1}{a}\sum \frac{\mathfrak{Sin}\,my \cdot \mathfrak{Sin}\,m(b-y_1)}{\mathfrak{Sin}\,mb}\sin mx,$$

gültig für

$$0 < x < a$$
$$0 < y < y_1 < b.$$

Integration auf beiden Seiten nach $x$ zwischen 0 und $a$, nach $y$ und $y_1$ zwischen 0 und $b$ ergibt für $a = rb$

(1706) $$\frac{1}{r}\sum \frac{1}{n^3}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi n r}{2} + r\sum \frac{1}{n^3}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi n}{r} = \frac{\pi^3}{16}.$$

Die Summation ist dabei nur über die ungeraden Werte von $n$ zu erstrecken.

**107. Transformation der Thetafunktionen.** Aus den Beziehungen zwischen zwei reziproken Funktionen erster bzw. zweiter Art (Nr. 59) erhält *A. Cauchy*[2150]) durch Vertauschung der Reihenfolge von

---

2148) Arch. Math. Phys. 12 (1849), p. 143.

2149) Cambr. Trans. 8 (1848) = papers 1, p. 299; p. 294 schon ein Beispiel mit unharmonischen Reihen.

2150) exerc. de math. 2 (1827) = Oeuvres (2) 7, p. 185. Er berichtet p. 194, *Laplace* habe die Formel für $x = 0$, $a$ oder $b$ sehr klein durch ihm eigentüm-

Summation und Integration:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n f(n\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1 - r\cos\alpha u}{1 - 2r\cos\alpha u + r^2} \varphi(u)\, du, \tag{1707}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n f(n\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{r\sin\alpha u}{1 - 2r\cos\alpha u + r^2} \psi(u)\, du. \tag{1708}$$

Für $r = 1$ werden die Integrale unbestimmt; nimmt man die Hauptwerte und definiert $\beta$ durch $\alpha\beta = 2\pi$, so ergibt sich:

$$\begin{gathered} \sqrt{\alpha}\left\{\frac{1}{2} f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n\alpha)\right\} = \sqrt{\beta}\left\{\frac{1}{2}\varphi(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n\beta)\right\}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} f(n\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ val. princ.} \int_0^{\infty} \psi(u) \cot\frac{\alpha u}{2}\, du. \end{gathered} \tag{1709}$$

Ersetzt man in der ersten dieser Gleichungen $f(x)$ durch $f(x)\cos(\theta x)$, so hat man $\varphi(u)$ durch

$$\tfrac{1}{2}\{\varphi(|u+\theta|) + \varphi(|u-\theta|)\}$$

zu ersetzen; so erhält man für $0 < \theta < \beta$:

$$\begin{aligned} &\sqrt{\alpha}\left\{\frac{1}{2} f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n\alpha)\cos n\theta\alpha\right\} \\ &\qquad = \frac{1}{2}\sqrt{\beta}\left\{\varphi(\theta) + \sum_{n=1}^{\infty}[\varphi(n\beta+\theta) + \varphi(n\beta - 0)]\right\}. \end{aligned} \tag{1710}$$

Die Annahme $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ gibt auch $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, also mit $\alpha^2 = 2a^2$, $\beta^2 = 2b^2$, $\theta^2 = 2u^2$, $ab = \pi$, für $x < b$:

$$\begin{aligned} &\sqrt{a}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2a^2}\cos 2nau\right\} \\ &\qquad = \frac{1}{2}\sqrt{b}\left\{e^{-u^2} + \sum_{n=1}^{\infty}[e^{-(nb+u)^2} + e^{-(nb-u)^2}]\right\}. \end{aligned} \tag{1711}$$

---

liche Methoden verifiziert; darüber scheint nichts weiter bekannt zu sein. Der Spezialfall $u = O$ von (1711) mit Andeutung des Beweises bereits in Cauchys erster Mitteilung über reziproke Funktionen, bull. soc. philomat. 1817, p. 124. Oeuvres (2) 7, p. 286 erhält er noch eine etwas allgemeinere Formel, indem er $a$ durch $a\sqrt{\theta}$, $b$ durch $\frac{b}{\sqrt{\theta}}$ ersetzt, wo $\theta$ auch komplex sein kann.

*S. D. Poisson* erhält zunächst[2151]) den für $x = 0$ eintretenden speziellen Fall der letzteren Gleichung direkt, indem er gleich in die Ausgangsformel die Annahme $f(x) = e^{-kx^2}$ einführt. Nachher[2152]) gewinnt er aus der Theorie der trigonometrischen Reihen die allgemeine Formel:

$$(1712) \qquad \int_0^\infty f(\alpha)d\alpha + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty \cos\frac{2n\pi\alpha}{a} f(\alpha)d\alpha = \frac{1}{2}f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(na)$$

und aus ihr durch die spezielle Annahme $f(x) = \mathfrak{Sec}\,\pi x$ die ebenfalls der Theorie der Transformation der Thetafunktionen angehörende:

$$(1713) \qquad \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{Sec}\, 2n\pi l = \frac{1}{4l}\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{Sec}\,\frac{n\pi}{2l};$$

später[2153]) auch noch durch die Annahme $f(x) = \exp(-x^{-2})\cos 2bx$ wieder die Gleichung (1711).

Die Gleichung (1711) findet sich übrigens auch im Nachlaß von *C. F. Gauß*[2155]), der folgendermaßen schließt: der Koeffizient von $\cos n\pi x$ in der Entwicklung der Summe

$$(1714) \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha(k+x)^2)$$

läßt sich in

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\cos n\pi x\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{\alpha^2}\right)$$

umformen (nach (947)).

Ähnlich schließt *Poisson*[2156]):

---

2151) j. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 420.

2152) j. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 451.

2153) Paris mém. 6 (1823 [27]), p. 591 (von 1826).

2155) Werke 3, p. 436; vom Herausgeber (p. 494) vermutungsweise in das Jahr 1808 gesetzt. Vgl. übrigens auch die Rechnung p. 418 (von 1799?).

2156) In einer Note (Paris mém. 10 (1831), p. 110) zu seinem Referat über Jacobis Fundamenta, in der er auseinandersetzt, daß man auf diesem Wege die Formeln für die lineare Transformation der elliptischen Funktionen aus ihrer Darstellung durch Thetaquotienten ableiten könne. Im Grunde ist übrigens die Schlußweise keine andere als die früher [875]) von ihm angewandte; es ist nur durch die Einführung des Konvergenzfaktors die Möglichkeit der Vertauschung der Reihenfolge von Summation und Integration erzielt. Auch *C. G. J. Jacobi* selbst hat schon in einer seiner ersten Veröffentlichungen (J. f. Math. (3) 1828, p. 307 = Werke 1, p. 260) auf den Zusammenhang der hier besprochenen Formeln mit der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen hingewiesen; ebenso später *Lebesgue*, j. de math. 5 (1840), p. 186.

$$(1715)\quad 2\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n \exp(-4n^2r^2)\cos 2nx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\beta^n[\cos 2n(2r\alpha+x)+\cos 2n(2r\alpha-x)]\exp(-\alpha^2)d\alpha$$

$$=1+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\frac{1-\beta^2}{1-2\beta\cos(4r\alpha+2x)+\beta^2}$$

$$+\frac{1-\beta^2}{1-2\beta\cos(4r\alpha-2x)+\beta^2}\Big]\exp(-\alpha^2)\,d\alpha$$

und geht dann zu $\beta=1$ über. Auch erhält er[2157]), indem er seine allgemeine Formel (1712) auf die Annahmen

$$f(z)=\frac{\sin z}{\mathfrak{Sin}\,\frac{\pi\alpha z}{x}}\quad\text{oder}\quad\frac{\cos z}{\mathfrak{Cos}\,\frac{\pi\alpha z}{x}}$$

anwendet und die Integralrelationen (968, 970) herbeizieht, den entsprechenden Beweis für die Transformation der Partialbruchreihen.

**108. Differentiation zu beliebigem Index** (vgl. II A, 2, *Voß*, Nr. 48, p. 116). Schon *Fourier* selbst[2158]) hat darauf hingewiesen, daß man auf Grund der Darstellung einer willkürlichen Funktion durch seine Integralformel (790) den „$\mu^{\text{ten}}$ Differentialquotienten einer Funktion für beliebiges $\mu$" durch die Gleichung

$$(1716)\quad \frac{d^\mu f(x)}{dx^\mu}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^\mu\cos\left(\xi x-\xi\alpha+\frac{\mu\pi}{2}\right)f(\alpha)\,d\alpha\,d\xi$$

definieren könne.

Doch macht bereits *J. Liouville*[2159]) darauf aufmerksam, daß diese Formel bei nicht ganzzahligem $\mu$ ein mehrdeutiges, bei gebrochenem $\mu$ mit geradem Nenner überdies ein komplexes Resultat ergebe[2160]); und daß man auch nicht untereinander übereinstimmende Resultate erhalte, wenn man an ihrer Stelle die Formel (792) benutze.[2161]) Er hat ihren Gebrauch daher zuerst ganz vermieden; später[2162]) schlägt er vor, an ihrer Stelle diejenige Modifikation zu benutzen, bei der eine Integrationsgrenze endlich genommen wird.

2157) p. 116.

2158) Théorie de la chaleur, Paris 1822, Nr. 422 = Oeuvres 1, p. 508. Daraus bei *G. Peacock,* Brit. ass. rep. 3, für 1834, p. 218.

2159) j. éc. polyt. cah. 21 (1832), p. 124; J. f. Math. 12 (1834), p. 287.

2160) J. f. Math. 13 (1834), p. 221.

2161) Ib. p. 222.

2162) Ib. p. 222. Er will untersuchen, unter welchen Umständen die so ge-

**109. Funktionen großer Zahlen.** Unter diesem Namen pflegt man eine Gruppe von Untersuchungen zusammenzufassen, die das Verhalten analytischer[2163]) Funktionen einer Variabeln $n$ für große Werte derselben auf anderem Wege als durch direkte Entwicklung nach fallenden Potenzen von $n$ festzustellen suchen; sei es, daß es sich um Funktionen handelt, die eine solche Entwicklung überhaupt nicht zulassen, oder daß die vorliegende Darstellung der Funktion Zwischenglieder benutzt, die nicht so entwickelt werden können.

*P. S. de Laplace*[2164]) scheint der erste gewesen zu sein, der bemerkt hat, daß das Problem sich angreifen läßt, wenn es gelingt, die Funktion durch ein bestimmtes Integral

$$(1717) \qquad \Phi(n) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, \varphi(x)^n\, dx$$

---

wonnene Definition mit der von ihm selbst bevorzugten übereinstimmende Resultate gibt, beachtet aber nicht, daß er dazu erst die Frage beantworten müßte, unter welchen Umständen die von ihm vorgenommenen Vertauschungen von Grenzübergängen erlaubt sind.

2163) Von der asymptotischen Darstellung zahlentheoretischer Funktionen ist hier nicht die Rede; über sie vergleiche man I C 3 (*Bachmann*), Nr. 5, p. 658.

2164) Paris mém. 1778[81]; 82[85]; 83[86] = Oeuvres 9, p. 422, 444; 10, p. 209, 295; dann in der théorie analytique des probabilités, Paris 1812 = Oeuvres 7, p. 89. — Eine Darstellung des Verfahrens von *Laplace* findet sich auch bei *S. F. Lacroix,* traité des différences et des séries, Paris 1800, p. 462 = traité du calcul diff. et du calcul int. 2me éd., 3, Paris 1819, p. 502; die Ableitung der Formel (1721) auch bei *A. M. Legendre,* exerc. de calcul int. 1, Paris 1811, p. 343; eine übersichtliche Darstellung, samt Anwendung auf die asymptotische Darstellung von $B(m, n)$, wenn $m$ und $n$ beide groß sind, auch bei *A. de Morgan,* Diff. and integr. calc., London 1836/41, p. 603. *De Morgan* bestimmt auch den asymptotischen Wert von $\Gamma(n+1)$ selbst auf diesem Weg, indem er — was freilich noch zu rechtfertigen wäre — das Maximum nicht von $\varphi$, sondern von $f\varphi^n$ nimmt. Ebenso *Liouville,* J. de math. 11 (1846), p. 465, und mit geringer Abänderung auch *A. Cauchy,* Paris C. R. 19 (1844), p. 68 = Oeuvres (1) 8, p. 259.

In ähnlicher Weise wie die einfachen Integrale behandelt *Laplace* auch die entsprechenden Doppelintegrale (Théorie analyt. des probabilités, Livre 1, 2. partie, chap. 1, Nr. 28 = Oeuvres 7, p. 105/110) sowie schon früher (und zwar gleich für mehrfache Integrale, aber zum Teil fehlerhaft): Paris Mém. 1782[85] = Oeuvres 10, p. 230/235.

*W. R. Hamilton,* Dubl. proc. 7 (1842/43), p. 420 gibt Andeutungen über Ausdehnung des Verfahrens von Laplace auf Doppelintegrale der Form:

$$\frac{4\sqrt{n}}{\pi} \int_0^r dr \int_0^\infty e^{-nu^2}\, U \cos\left(2\sqrt{n}\, r u V\right) du,$$

wo $U$, $V$ sich nach Potenzen von $u^2$ mit ganzzahligen Exponenten entwickeln lassen.

darzustellen, in dem $f$ und $\varphi$ von $n$ unabhängige Funktionen von $x$ bedeuten. Es überwiegen nämlich dann die Beiträge derjenigen Teilintervalle, in welchen $\varphi(x)$ seinen größten Wert annimmt, die der übrigen um so mehr, je größer $n$ ist. Bei Abschätzung der ersteren sind zwei Fälle zu unterscheiden. Wenn an der Stelle $x_0$ des Maximums $\varphi'(x_0) \neq 0$ ist, führt er eine neue Integrationsvariable $t$ durch die Gleichung

$$y \equiv f(x)\varphi(x)^n = y_0 e^{-t} \tag{1718}$$

ein, in der $y_0$ den Wert von $y$ für $x = x_0$ bedeutet; durch Reihenumkehrung kann er dann $x$ und $dx/dt$ nach Potenzen von $t$ entwickeln und so für $\Phi(n)$ eine Entwicklung nach Integralen der Form

$$\int e^{-t} t^m dt \tag{1719}$$

erhalten. Diese Integrale sind zunächst von $t = 0$ bis zur Grenze des Gültigkeitsbereiches der Entwicklung zu nehmen; aber eben weil nur die Umgebung von $t = 0$ einen wesentlichen Beitrag liefert, kann er sie bis $t = \infty$ erstrecken, so daß sie sich durch $\Gamma$-Funktionen ausdrücken lassen. So erhält er für $\Phi(n)$ einen Näherungsausdruck, dessen erstes Glied

$$-\frac{y_0^2}{y_0'}$$

ist, während jedes folgende aus dem ihm unmittelbar vorhergehenden durch Multiplikation mit einer Größe der Ordnung $n^{-1}$ erhalten wird.

Wenn aber an der Stelle des Maximums $\varphi'(x_0) = 0$ ist, ist die Reihenumkehrung in der vorher benutzten Form nicht möglich. Ist etwa noch

$$\varphi''(x_0) = 0, \ldots, \varphi^{(\mu)}(x_0) = 0,$$

so substituiert *Laplace*

$$y = y_0 \exp(-t^{\mu+1}) \tag{1720}$$

und erhält so entsprechende Resultate; für $\mu = 1$ wird das Anfangsglied

$$\frac{\sqrt{2\pi y_0}^{\,3/2}}{\sqrt{-y_0''}}, \tag{1721}$$

und jedes folgende entsteht aus dem ihm unmittelbar vorhergehenden durch Multiplikation mit einer Größe der Ordnung $n^{-1/2}$.

*A. Cauchy*[2165]) ersetzt, ebenfalls unter der Voraussetzung $\varphi'(x) = 0$,

---

2165) Paris mém. 8 (1829) = Oeuvres (1) 2, p. 33; Voranzeige (von 1827) ib. p. 29. Im wesentlichen ebenso in einem von *H. A. Schwarz* entzifferten Fragment aus dem Nachlaß von *B. Riemann*, ges. Werke, p. 429 (von 1863). — Die Formel (1722) wird aus (1721) erhalten, wenn man in letzterer, unter Berücksich-

$x$ durch $x_0 + t/\sqrt{n}$, $\varphi(x)$ durch $e^w$, $w$ durch $w_0 + \frac{w_0''}{2} \cdot \frac{t^2}{n}$ und dann die Grenzen der Integration ebenfalls durch $\pm\infty$; so erhält er als erste Annäherung:

$$\sqrt{\frac{2\pi\varphi_0}{-n\varphi_0''}}\, f_0 \varphi_0^{\,n}. \tag{1722}$$

Dieses Resultat überträgt er sogleich auch auf komplexe Funktionen und Integration zwischen komplexen Grenzen. Im letzteren Falle würde die Methode zunächst nur verlangen, daß im Punkte $x$ die Ableitung von $|\varphi(x)|$ nach der Tangente des Integrationswegs Null ist, doch müßte dann reeller und imaginärer Teil getrennt werden. *Cauchy* bemerkt aber, daß die Formeln in derselben Gestalt wie im Reellen bestehen bleiben, wenn $\varphi'(x_0)$ selbst gleich Null ist, und daß man das in vielen Fällen durch erlaubte Abänderung des Integrationswegs erreichen kann.[2166]) Dem zugehörigen Wert $|\varphi(x_0)|$ nennt er dann „Prinzipalmodul" der Funktion $\varphi(x)$.

*Cauchys* Absicht bei diesen Untersuchungen war auf die Ermöglichung einer Bestimmung des wahren Konvergenzkreises der Potenzreihe $\sum \Phi(n)\, z^n$ gerichtet[2167]); er schließt auch gleich Anwendungen auf die Auflösung der *Kepler*schen Gleichung durch Entwicklung nach den Potenzen der Exzentrizität u. dgl. an. Erst einige Jahre später[2168]) ist er zu der Erkenntnis gelangt, daß der Konvergenzradius

---

tigung von $\varphi'(x_0) = 0$, $y''$ durch die Ableitungen von $f$ und $\varphi$ ausdrückt und das von $n$ freie Glied gegen das mit $n$ multiplizierte vernachlässigt.

2166) Den Begriff des verschiebbaren Integrationswegs hat *Cauchy* hier noch nicht explizite, so wenig wie in seinen andern Schriften aus dieser Zeit. Er spricht nur davon, daß das Integral noch einen verfügbaren Parameter enthalten solle (p. 38), wählt aber als solchen nachher den Radius des Kreises, auf dem er integriert. Über die Veränderung des Maximum Maximorum bei Änderung eines solchen Parameters enthält ein späterer Aufsatz Cauchys (Paris C. R. 17 (1843), p. 1215 = Oeuvres (1) 8, p. 128; reproduziert auch von *Moigno,* Leçons 2 (1844), p. 776) noch einige Auseinandersetzungen. Ein noch späterer, Paris C. R. 20 (1845), p. 550 = Oeuvres (1) 9, p. 79 zeigt, daß die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Auftreten eines Prinzipalmoduls darin bestehen, daß außer $\varphi'(x) = 0$ noch

$$\Re\, \frac{x^2 \varphi''(x)}{\varphi(x)} > 0$$

ist.

2167) Über die Stellung dieser Untersuchungen *Cauchys* innerhalb der Entwicklungsgeschichte seiner Theorie der Funktionen komplexer Variabeln vgl. man *A. Brill* u. *M. Noether,* Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 3 (1892/93), p. 177.

2168) Turiner mém. lith. von 1831, p. 9 = exerc. d. anal. 2 (1841), p. 54. — Die Beziehung dieser Untersuchungen zu den vorher besprochenen deutet Cauchy selbst mém. p. 15 = exerc. 2, p. 54 an: der Rest, der bleibt, wenn man die sich aus den Eigenschaften der Funktion bestimmt, und daß die Koeffizienten der Entwicklung

$$F(u) = \sum A_n u^n \tag{1723}$$

---

Taylorsche Entwicklung von $f(z)$ mit dem Glied mit $z^{n-1}$ abbricht, ist absolut kleiner als das Produkt aus

$$\frac{|z^n|}{|\zeta|^{n-1}(|\zeta| - |z|)}$$

in das Maximum von $f(\zeta)$ auf dem Kreise vom Radius $|\zeta|$; um eine möglichst scharfe Abschätzung zu erhalten, muß man diesen Radius so wählen, daß dieses Maximum möglichst klein wird, d. h. eben, man muß den Prinzipalmodul von $f(\zeta)$ bestimmen.

Spätere Untersuchungen Cauchys haben hauptsächlich die genauere Feststellung der Bedingungen im Auge, unter welchen der Ausdruck (1722) wirklich als Näherungswert des zu bestimmenden Integrals betrachtet werden kann. Er behandelt zunächst [Paris C. R. 20 (1845), p. 128 = Oeuvres (1) 8, p. 425] die folgende Frage: Sei

$$F(x) = \varpi(x) f(y) = \sum A_n x^n,$$

wo $y$ selbst wieder Funktion von $x$ ist; wenn man $f(y)$ in der Integraldarstellung (1724) des Koeffizienten $A_n$ durch seine Entwicklung nach Potenzen von $y$ ersetzt, so erhält man eine Reihenentwicklung für diesen Koeffizienten; wie weit wird diese konvergieren? Cauchy zeigt, daß man diese Frage beantworten kann, indem man $f(y)$ durch eine Funktion der Form

$$M\left(\frac{Y}{Y-y} - \frac{Y}{Y_0 - y}\right) \qquad (Y_0 < |y| < Y) \tag{1}$$

ersetzt, deren Entwicklungskoeffizienten sämtlich absolut größer sind als die entsprechenden Entwicklungskoeffizienten von $f(y)$. Einen analogen Satz gibt er dann auch für den Fall, daß die Funktion $f$ von zwei verschiedenen Funktionen $y$ und $z$ von $x$ abhängt; speziell für die Annahme

$$y = 1 - x, \qquad z = \frac{1-x}{x}, \tag{2}$$

das gibt ihm dann den folgenden Satz [p. 214 = 439]: ist

$$F(x) = \varpi(x) f(y, z) \tag{3}$$

$$f(y, z) = \sum_{l,m} H_{lm} y^l z^m, \tag{4}$$

$$\varpi(x) = \sum k_n x^n, \tag{5}$$

so ist

$$A_n = \sum_{l,m} H_{lm} \Delta^{l+m} k_{n-l}, \tag{6}$$

wobei das Zeichen $\Delta$ durch $\Delta n = 1$ definiert ist. Für

$$\varpi(x) \equiv (1-x)^{-s} \tag{7}$$

gibt das:

$$A_n = \sum_{l,m} (-1)^{n+m} \binom{-s+l+m}{n+m} H_{lm}; \tag{8}$$

sich durch die Integrale

(1724) $$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int F(u) u^{-n-1} du$$

---

für

(9) $$f(y,z) \equiv \varphi(x)\chi\left(\frac{1}{x}\right) \equiv \varphi(1-y)\chi(1+z)$$

wird:

(10) $$H_{lm} = (-1)^l \frac{\varphi^{(l)}(1)\chi^{(m)}(1)}{l!\,m!}.$$

Ist endlich noch

(11) $$\varphi(x) = (1-ax)^{\mu}\,\Phi(x),$$
$$\chi(x) = (1-a_1 x)^{\nu}\,X(x)$$

und dabei $\Phi(x)$, $X(x)$ „überall kontinuierlich" [er brauchte nur zu verlangen „innerhalb eines Kreises, dessen Radius größer als 1 ist"], so lautet die Bedingung für die unbedingte Konvergenz der erhaltenen Doppelreihe einfach

(12) $$\frac{|a|}{1-|a|} + \frac{|a_1|}{1-|a_1|} < 1.$$

Bei dieser Untersuchung hatte er, um über den Konvergenzkreis der Entwicklung $\left(\sum A_n x^n\right)$ integrieren zu können, $s < 1$ voraussetzen müssen; in einer neuen Redaktion [Paris C. R. 20 (1845), p. 280 = Oeuvres (1) 9, p. 5] zeigt er, daß man diese Bedingung fallen lassen kann, wenn man zuerst über einen Kreis von kleinerem Radius integriert und erst in den Schlußformeln auf den Konvergenzkreis selbst übergeht. Auch bespricht er jetzt [p. 329 = 19] den Fall, daß die Entwicklung von $f(y,z)$ nicht unbedingt konvergiert, sondern nur bei geeigneter Reihenfolge der Summationen, z. B. wenn man erst nach Potenzen von $y$ und die Koeffizienten dieser Entwicklung nach Potenzen von $z$ entwickelt; es ergibt sich, daß die Entwicklung von $A_n$, die man erhält, wenn man nur den Faktor $\chi(1+z)$ entwickelt, unter den Bedingungen [p. 395 = 52]:

(13) $$\frac{|a_1|}{1-|a_1|} < 1, \qquad (1-|a|)\cdot\frac{|a_1|}{1-|a_1|} < 1$$

konvergiert. Daran schließen sich Untersuchungen [p. 696 = 89; vorläufige Mitteilungen p. 477, 481, 552 = 69, 74, 81], in welchen an Stelle der hier benutzten Größen $y$ oder $z$ der Polarwinkel $p$ von $x$ als Hilfsvariable auftritt, nach deren Potenzen zunächst entwickelt wird. Wird in dem Ausdruck des absoluten Glieds $A_0$ der Entwicklung von $f(x)$ nach Potenzen von $x$ durch das Integral (1724)

(14) $$f(x) = e^{-ap^2}\psi(p)$$

gesetzt und der Faktor $\psi(p)$ nach Potenzen von $p$ entwickelt, so ergibt sich für $A_0$ eine Entwicklung, die sich in der symbolischen Form schreiben läßt:

(15) $$A_0 = \frac{1}{4\pi}\left(\psi\left(i\sqrt{\frac{\partial}{\partial a}}\right) + \psi\left(-i\sqrt{\frac{\partial}{\partial a}}\right)\right)\int_{-\omega}^{+\omega} e^{-ap^2}dp$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\omega}^{\pi}\frac{\psi(p)+\psi(-p)}{2}e^{-ap^2}dp.$$

Dabei ist $\omega$ so zu wählen, daß die Entwicklung von $\psi(p)$ bis $p = \omega$ konvergiert; ist der Kreisring, in welchem die Laurentsche Entwicklung von $F(x)$ konausdrücken lassen, die entweder über den wahren Konvergenzkreis

---

vergiert, hinreichend breit, so kann man $\omega = \pi$ nehmen, und das Zusatzglied fällt dann weg. Wird in diesem Resultat $F(x)$ wieder durch $x^{-n}\varphi^n(x)f(x)$ ersetzt, $na$ für $a$ eingeführt und für $a$ der Wert

$$-\frac{1}{2}\varphi(x)\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial p^2}$$

genommen, so daß die Entwicklung von $\psi(p)$ kein Glied zweiter Ordnung enthält, so wird der Koeffizient von $p^m$ in dieser Entwicklung höchstens von der Ordnung $\frac{m}{3}$ in bezug auf $n$; man erhält also [p. 701 = 98. Beim Vergleich mit (1722) ist zu beachten, daß hier das Integral noch mit $2\pi$ dividiert ist. Eine spätere Abhandlung (Paris C. R. 29 (1849), p. 47 = Oeuvres (1) 11, p. 139) erläutert den Schluß noch durch den Zusatz: man kann $n$ und $\varpi$ so wählen, daß $n\varpi^2$ sehr groß, $n\varpi^3$ sehr klein wird], wenn der Prinzipalmodul zu $x = 1$ gehört,

$$A_n = \frac{1}{2}\frac{F'(1)}{\sqrt{na\pi}}(1+\varepsilon), \tag{16}$$

wobei

$$\varepsilon = C\sqrt{n}\lambda^n, \tag{17}$$

$C$ von $n$ unabhängig, und $|\lambda| < 1$ ist.

Von demselben Ansatz aus gelangt Cauchy auch zu einem neuen Beweis der Gleichung (8) [p. 712 = 103]. Wird nämlich

$$F(x) = \left(1-\frac{x}{k}\right)^{-s}\varphi(x)\chi\left(\frac{1}{x}\right) \tag{18}$$

genommen, so ergibt sich zunächst auf dieselbe Weise wie (15) die Gleichung

$$A_n = k^{-n}\varphi\left(k\exp\left(-\frac{\partial}{\partial n}\right)\right)\chi\left(k\exp\left(-\frac{\partial}{\partial n}\right)\right)[s]_n, \tag{19}$$

wo

$$[s]_n = (-1)^n\binom{-s}{n},$$

und wenn hier das Symbol der Differentiation nach $n$ vermöge $\left(\exp\frac{\partial}{\partial n} = 1 + \Delta\right)$ durch das der endlichen Differenz ersetzt und die Operation an dem Binomialkoeffizienten ausgeführt wird, wieder die Gleichungen (8) mit (10) [p. 718 = 111.]

Endlich behandelt Cauchy auch noch die Frage nach der asymptotischen Darstellung des Koeffizienten $A_{-m,n}$ von $x^{-m}y^n$ in der Entwicklung einer Funktion der beiden Variablen $x$, $y$ nach deren Potenzen; wenigstens für den Fall, daß diese Funktion die Gestalt hat:

$$F(x,y) = \left(1-\frac{y}{v}\right)^{-s}f(x,y), \tag{20}$$

wo $v$ noch Funktion von $x$ sein und $f(x, y)$ mit seinen ersten Ableitungen als Funktion von $y$ in einem geeigneten Kreisring stetig sein soll [p. 723 = 116]. Die Anwendung von (8) gibt dann zunächst für den Koeffizienten $A_n$ von $y^n$ den asymptotischen Ausdruck:

$$A_n \sim [s]_n v^{-n} f(x, v). \tag{21}$$

Hier ist nun noch der Wert $u$ von $x$ zu bestimmen, der den Prinzipalmodul selbst oder über einen zu ihm konzentrischen Kreis von kleinerem Radius zu nehmen sind. Die asymptotischen Werte für das Integral (1724) lassen sich in zwei Fällen leicht gewinnen: wenn der Integrationsweg durch eine Nullstelle $u = re^{\varphi i}$ von $F'(u)$ gelegt werden kann, so setzt *Cauchy*[2169]):

$$(1725)\qquad u^{-n} F(u) = e^{-anp^2}\chi(p),$$

so daß er zunächst erhält:

$$(1726)\qquad A_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{n}} \int\limits_0^{\pi\sqrt{n}} \left\{\chi\left(\frac{p}{\sqrt{n}}\right) + \chi\left(-\frac{p}{\sqrt{n}}\right)\right\} e^{-ap^2}\,dp;$$

die erste Näherung ergibt sich dann, indem die variablen Werte von $\chi(p)$ durch den Wert für $p = 0$ ersetzt und die Integration bis $\infty$ ausgedehnt wird, weitere, indem weitere Glieder der Entwicklung von $\chi$ nach Potenzen von $p$ zugezogen werden. Wenn andererseits $F(u)$ auf dem Konvergenzkreis nur einen singulären Punkt $u_0$ hat, in dessen Umgebung

$$(1727)\qquad F(u) = \left(1 - \frac{u}{u_0}\right)^{-s} f_1(u)$$

gesetzt werden kann, wo $f_1$ regulär und $s < 1$ ist, so ergibt sich durch die Benutzung der Entwicklung von $f_1$[2169a]):

---

von $x^m v^{-n}$ liefert, und dann die Formel (16) anzuwenden; das gibt:

$$(22)\qquad A_{-m,n} \sim [s]_n u^m v^{-n} \frac{f(u,v)}{2\sqrt{ma\pi}}, \qquad a = -\left[\frac{x}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{v}\frac{dv}{dx}\right)\right]_{x=u}.$$

Zur Bestimmung von $u$, $v$ kann dabei das Gleichungspaar

$$(23)\qquad F = 0, \quad \frac{x}{m}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{y}{n}\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

dienen.

2169) Paris C. R. 20 (1845) = Oeuvres (1) 9, p. 90. Die Rechnung mit Funktionen von Differentialsymbolen, deren sich *Cauchy* hier bedient, ist nur Aufputz und für die Sache selbst nicht wesentlich. Er hat übrigens hier, auf Grund der inzwischen erschienenen Untersuchung *Laurents*, die allgemeinere Voraussetzung, daß die Entwicklung (1723) auch Glieder mit negativen Exponenten enthält; für die Bestimmung der asymptotischen Wertes dieser letzteren kommen dann die auf der inneren Begrenzung des Konvergenzringes gelegenen singulären Punkte in Betracht. Daß man zur Abschätzung des allgemeinen Gliedes bzw. des Restes der Reihe (1723) nicht immer am zweckmäßigsten über den Konvergenzkreis selbst integriert, bemerkt Cauchy bereits im Turiner mém. p. 16, unter Hinweis auf seine früheren Untersuchungen.

2169a) Paris C. R. 20 (1845) = Oeuvres (1) 9, p. 102; im wesentlichen ebenso Paris C. R. 34 (1852) = Oeuvres (1) 11, p. 387. Einige weitere Ausführungen dazu bei *G. W. Hill*, Amer. J. of math. 6 (1884), p. 125.

$$A_n = \sum_m (-1)^m \frac{u_0^{-n+m} f_1^{(m)}(u_0)}{2\pi \cdot m!} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\nu p i}(1-e^{pi})^{-s+m} dp$$
$$= \sum_m (-1)^m \frac{u_0^{-n+m} f_1^{(m)}(u_0)}{m!} \binom{s+n-m-1}{n};$$

und hier ist der Quotient jedes Gliedes durch das folgende von der Ordnung $n$. Dabei ist nicht einmal erforderlich, daß die Entwicklung von $f_1$ längs des ganzen Integrationswegs konvergiert; man muß nur, wenn das nicht der Fall ist, ein Restglied hinzunehmen, dessen Darstellung durch das Cauchysche Integral, wie *Cauchy* selbst bemerkt hat[2169b]), die Abschätzung gestattet.

**110. Auflösung von Integralgleichungen.** Zu solcher hat *R. Murphi* die trigonometrischen Entwicklungen herangezogen: um die Gleichung

$$\int_0^\pi f(t) \cos at\, dt = F(a) \tag{1728}$$

nach $f(t)$ aufzulösen, benutzt er[2170]) die Entwicklung (277) von $\cos at$ nach den Cosinus der ganzzahligen Vielfachen von $t$ und setzt auch für $f(t)$ eine solche Entwicklung an:

$$f(t) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nt. \tag{1729}$$

Ausmultiplikation ergibt dann:

$$F(a) = \sin a\pi \left[\frac{c_0}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a c_n}{a^2 - n^2}\right], \tag{1730}$$

also für $a = n$:

$$c_n = \frac{n}{\pi} F(n).$$

*O. Schlömilch*[2171]) löst die Funktionalgleichung auf

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-ux} F(u)\, du \tag{1731}$$

2169b) An der letztgenannten Stelle, p. 401.

2170) Cambr. trans. $5_3$ (1835), p. 380. p. 382 trägt er nach: man müsse noch einen „appendage“ beifügen, nämlich die allgemeinste Lösung der Gleichung:

$$\int_0^\pi f(t) \cos at\, dt = 0.$$

Diesen stellt er durch divergente Reihen dar.

2171) Arch. Math. Phys. 12 (1849), p. 142.

durch

$$F(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \begin{matrix} \varphi(t) \cos ut \\ \psi(t) \cos ut \end{matrix} \right\} dt,$$

wo $\varphi(t) + i\psi(t) = f(-it)$ ist.

*L. Euler*[2172]) setzt zur Lösung der Funktionalgleichung:

$$(1732) \qquad 2 \frac{df(x)}{dx} \sin x = f(2x)$$

trigonometrische Reihen an. Es stellt sich heraus, daß alle Glieder mit höheren Vielfachen wegfallen müssen, so daß man $\sin x$ und $1 - \cos x$ als partikuläre Lösungen erhält.

Ein weiteres Beispiel für die Auflösung einer Funktionalgleichung durch Verwendung trigonometrischer Reihen bei *W. Thomson Lord Kelvin.*[1742])

**111. Integration von Gleichungen mit gemischten Differenzen.** *D. F. Gregory*[2173]) integriert die Gleichung:

$$(1733) \qquad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \Delta^2 u(x-h, t),$$

in der das Zeichen $\Delta$ durch $\Delta u = u(x+h) - u(x)$ definiert ist, oder

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\Delta^2}{1+\Delta}\right) u = 0$$

zuerst symbolisch durch

$$(1734) \qquad u = \exp\left(\frac{t\Delta}{\sqrt{1+\Delta}}\right) \varphi(x) + \exp\left(\frac{-t\Delta}{\sqrt{1+\Delta}}\right) \psi(x);$$

und indem er $\varphi$ und $\psi$ durch ihre Fouriersche Integraldarstellung ersetzt, die Operationen unter dem Integralzeichen ausführt und schließlich noch $f$ und $F$ für $\psi + \varphi$ und $\psi - \varphi$ schreibt, durch

$$(1735) \qquad \pi u = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(2t \sin \frac{h\xi}{2}\right) \cos(\xi x - \xi\alpha) f(\alpha)\, d\alpha\, d\xi$$

$$+ \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(2t \sin \frac{h\xi}{2}\right) \sin(\xi x - \xi\alpha) F(\alpha)\, d\alpha\, d\xi.$$

**112. Gaußsche Summen.** *P. G. Lejeune-Dirichlet* hat die Bestimmung der Summen

$$(1736) \qquad \left.\begin{matrix} G \\ H \end{matrix}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} \frac{2n^2\pi}{m}$$

2172) Petrop. n. comm. 16 (1771), p. 151.

2173) Cambr. math j. $1_2$ (1838) p. 59.

auf die der Summe

$$(1737) \qquad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos nx$$

zurückzuführen gelehrt.[2174]) Die Gleichungen (955) geben nämlich

$$(1738) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \frac{m\alpha^2}{8\pi} F(\alpha)\, d\alpha = \frac{2\pi}{\sqrt{m}} (G \pm H);$$

wird links zuerst nur von $-(4k+1)\pi$ bis $+(4k+1)\pi$ integriert, das so entstehende Integral durch Einschaltung der Zwischenwerte $(2h+1)\pi$ in Teilintegrale zerlegt und diese alle auf dieselben Grenzen transformiert, so läßt sich die Summation unter dem Integralzeichen und dann der Grenzübergang zu $k = \infty$ ausführen, und man erhält

$$(1739) \qquad G \pm H = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{Bmatrix} 1 + \cos \frac{m\pi}{2} \\ \sin \frac{m\pi}{2} \end{Bmatrix} F(0)$$

$$+ \frac{4}{\sqrt{m}} \sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{4}\right]} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left(\frac{m\pi}{2} + \frac{2s^2\pi}{m}\right) F\left(\frac{4s\pi}{m}\right)$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{m}} \sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left( \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \frac{s^2\pi}{2m} - \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \left(\frac{m\pi}{2} + \frac{s^2\pi}{2m}\right)\right) F\left(\frac{2s\pi}{m}\right);$$

dabei ist mit $[\alpha]$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als $\alpha$ ist, und in den Summen ist das letzte Glied nur halb zu nehmen, wenn $\frac{m}{4}$ bzw. $\frac{m}{2}$ selbst eine ganze Zahl ist.

Wird

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n < m \\ 0 & \text{,, } n \geqq m \end{cases}$$

genommen, so wird:

$$F\left(\frac{k\pi}{m}\right) = 0 \quad \text{für} \quad 0 < k < m,$$

und man erhält die Werte der Gaußschen Summen.[2175])

2174) Berl. Abhandl. f. 1835, p. 401 = Werke 1, p. 249; kürzere franz. Fassung J. f. Math. 17 (1837), p. 61 = Werke 1, p. 264; Auszug j. de math. 3 (1838), p. 2. Reproduziert ist Dirichlets Untersuchung von *M. Ohm*, System der Mathematik 9 (Nürnberg 1852), p. 354 und von *O. Schlömilch*, Studien 2, p. 62. Vgl. auch die Darstellung bei *A. Kramer*, Programm Gymnasium Nordhausen 1845, p. 17.

2175) Vgl. über diese I C 3, *Bachmann*, Nr. 2, p. 644 sowie II A 3, *Brunel*, nr. 20, p. 187.

*A. Cauchy* kommt zu diesen von der Transformationstheorie aus.[2176]) Wird in der Gleichung (1711)

$$a^2 = \alpha^2 - \frac{2\pi i}{n}, \quad b^2 = \beta^2 + \frac{n\pi i}{2}, \; u = 0$$

gesetzt, so wird $\beta$ mit $\alpha$ zugleich null und in erster Annäherung $2\beta = n\alpha$. Wird dann in jener Gleichung beiderseits mit $n\alpha$ multipliziert, so erscheinen links die Glieder der Summe

$$(1740) \qquad \sum_{\nu=0}^{n-1} \exp\left(-\nu^2 \cdot \frac{2\pi i}{n}\right),$$

jedes multipliziert mit einer Reihe, die als Näherungswert des Produkts aus $\sqrt{a}$ in das Integral

$$(1741) \qquad \int_0^\infty \exp(-x^2)\,dx$$

betrachtet werden kann, und rechts die Summe $1 + \exp\left(-\frac{n\pi i}{2}\right)$, multipliziert mit einer Reihe, die ebenso als Näherungswert des Produkts aus $\sqrt{b}$ in dasselbe Integral betrachtet werden kann; das gibt dann die Gaußsche Formel in der Gestalt:

$$(1742) \qquad \sum_{\nu=0}^{n-1} \exp\left(-\nu^2 \frac{2\pi i}{n}\right) = \frac{1+i}{2} \sqrt{n}\left(1 + \exp\left(-\frac{n\pi i}{2}\right)\right)$$

**113. Sukzessive Evolventen ebener Kurven.** Sei ein singularitätenfreier Kurvenbogen gegeben; die Tangenten in seinen Endpunkten seien zueinander rechtwinklig. $\theta_0$ sei der Winkel, den die Tangente in einem beliebigen Punkte mit der Tangente in einem Endpunkt bildet; der Krümmungsradius $\varrho_0$ in diesem Punkte sei als Funktion von $\theta_0$ in eine Reihe nach den Sinus der ungeraden Vielfachen entwickelt:

$$(1743) \qquad \varrho_0 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(2n+1)\theta_0.$$

Wird die Kurve vom Punkte $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ aus abgewickelt und der Krümmungsradius der Evolvente als Funktion des Winkels $\theta_1$ ihrer Tangente mit der andern Anfangstangente der gegebenen Kurve betrachtet, so ergibt sich wegen $d\varrho_1 = \varrho_0 d\theta_0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_0$:

$$(1744) \qquad \varrho_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n}{2n+1} \sin(2n+1)\theta_1.$$

2176) Paris C. R. 10 (1840), p. 563 = J. de math. 5 (1840), p. 158 = Oeuvres (1) 5, p. 156. — Paris C. R. 10, p. 719 = Oeuvres (1) 5, p. 199. Verallgemeinerungen auf andere „alternierende“ Summen von Einheitswurzeln.

Wird von dieser Evolvente wieder in geeigneter Weise die Evolvente genommen usw., so wird für die $m^{\text{te}}$ Evolvente:

$$(1745)\qquad \varrho_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{mn} B_n}{(2n+1)^m} \sin(2n+1)\theta_m;$$

also die Koordinaten eines Punktes dieser $m^{\text{ten}}$ Evolvente:

$$(1746)\qquad x_m = \int_0^{\theta} \varrho_m \cos\theta_m d\theta_m$$

$$= \frac{B_0}{4}(1-\cos 2\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{mn} B_n}{(2n+1)^m} \frac{2n+1-n\cos(2n+2)\theta_m-(n+1)\cos 2n\theta_m}{n(n+1)}$$

$$(1747)\qquad y_m = \int_0^{\theta} \varrho_m \sin\theta_m d\theta_m$$

$$= \frac{B_0}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{mn} B_n}{(2n+1)^m} \frac{(n+1)\sin 2n\theta_m - n\sin(2n+2)\theta_m}{n(n+1)}.$$

Daraus ergibt sich:

$$(1748)\qquad \lim_{m=\infty} x_m = \frac{B_0}{4}(1-\cos 2\theta), \qquad \lim_{m=\infty} y_m = \frac{B_0}{4}(2\theta - \sin 2\theta).$$

Im wesentlichen so beweist *S. D. Poisson*[2177]) die Behauptung von *Johann I. Bernoulli,* daß diese sukzessiven Evolventen sich mit wachsendem $m$ immer mehr der Gestalt einer Zykloide nähern.

Noch mehr vereinfacht ist die Darstellung bei *Puiseux*[2178]), der aus $\lim r_m = A_1 \cos u$ oder $= A_1 \sin u$ sogleich schließt, daß es sich um eine Zykloide handelt.

2177) J. Éc. polyt. cah. 18 (1820), p. 431. Poissons Darstellung ist dadurch unnötig umständlich, daß er wegen der in Note 660 erwähnten Bedenken sich nicht getraut, schon den Krümmungsradius der Ausgangskurve durch eine derartige Reihe darzustellen.

2178) J. de math. 9 (1844), p. 398.

(Abgeschlossen im Mai 1914.)

# Register zu Band II, Teil I.

Die Stichworte des Registers sind durch gesperrten Druck hervorgehoben; auch ist der Sperrdruck gelegentlich dazu verwandt, um verschiedene Gebiete, in denen das einzelne Stichwort auftritt, deutlicher von einander zu sondern. Ein Semikolon dient abgesehen vom üblichen Gebrauch zur Trennung verschiedener nebeneinander zitierter Bandartikel; ein Bindestrich abgesehen vom üblichen Gebrauch als Ersatz des Stichwortes. Die Ziffern beziehen sich auf die Seiten des Bandes, die größeren auf den Text, die kleineren auf die Anmerkungen.

## B

## D

## I

## L

## M

## N

## O

## S

## T

## W

## Z

# Berichtigungen.

S. 5, Fußnote 16). Im vierten Gliede der Reihe ist $\frac{x^6}{6}$ statt $\frac{x^6}{6^6}$ zu setzen.

S. 5, Fußnote 17). Im dritten Gliede der Reihe ist $\frac{x^6}{3}$ statt $\frac{x}{3}$ zu setzen.

S. 12. Die mit 60) und 62) bezeichneten Fußnoten haben Nummer und Platz zu tauschen.

S. 19. In Fußnote 97) ist bei dem Zitat auf Bolzano zu lesen: p. 12, 51 statt: p. 17. Am Schlusse ist hinzuzufügen: Beiden Beweisen fehlt zur Selbständigkeit das „allgemeine Konvergenzprinzip" (I A 3, 13), welches Bolzano durch einen circulus vitiosus zu beweisen versucht (a. a. O. p. 35), Cauchy stillschweigend postuliert (vgl. I A 3, p. 65, 66).

S. 31, Fußnote 164). In allen drei Beispielen ist: $\sin\frac{1}{x^3}$ statt $\sin\frac{1}{x}$ zu setzen.

S. 41, Z. 2 v. o.: 187 statt 186.

S. 56, Z. 10 v. u.: Lies: processes statt progresses.

S. 65, Z. 15 v. o.: Streiche $h = 0$ hinter der Klammer.

S. 65, Z. 11 v. u.: Lies: $:h^n$ statt $\cdot h^n$.

S. 102, Z. 9 v. o.: Lies: $f(x, y + \Delta y)$ statt $f(x, y) + \Delta y$.

S. 115, Z. 12 v. o.: Streiche die Klammer vor vgl.

S. 121, Z. 1 v. o.: Lies: $Y_{2n+1}$ statt $Y_{2m-1}$.

S. 125, Z. 15 v. u: Lies: $x - a_i$ statt $x - a$.

S. 502, Fußnote 191). Es ist hinzuzufügen: Im wesentlichen schon bei J. Liouville, J. de math. 10 (1845), p. 223.