ENCYKLOPÄDIE

DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

ERSTER BAND:

ARITHMETIK UND ALGEBRA.

ENCYKLOPÄDIE

DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEEN DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN,
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

ERSTER BAND IN ZWEI TEILEN.

ARITHMETIK UND ALGEBRA.

REDIGIERT VON

WILHELM FRANZ MEYER
IN KÖNIGSBERG I. PR.

ERSTER TEIL.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1898—1904.

Einleitender Bericht über das Unternehmen der Herausgabe der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften.

Im September des Jahres 1894 trafen auf einer Fahrt in den Harz *Felix Klein* und *Heinrich Weber* mit *Franz Meyer*, damals Professor an der Bergakademie in Clausthal, zusammen. Dort wurde der erste Plan der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften entworfen. *Franz Meyer* entwickelte seinen Gedanken der Abfassung eines *Wörterbuches der reinen und angewandten Mathematik*.

Das zu Ende gehende Jahrhundert hat wie auf so vielen Gebieten menschlicher Erkenntnis so auch hier den Wunsch nach einer zusammenfassenden Darstellung der in seinem Laufe geleisteten wissenschaftschaftlichen Arbeit entstehen lassen, welche zugleich die mannigfaltigen Anwendungen auf Naturwissenschaft und Technik mit einbegreifen sollte. Erschöpfend freilich im Sinne einer geschlossenen, in alle Einzelheiten des weitverzweigten Baues eingehenden, alle Wege nach historischer wie nach methodischer Richtung bezeichnenden Darlegung konnte, beim Mangel umfassender Vorarbeiten, ein solches Werk nicht geplant werden, wollte man anders nicht seine Durchführung gefährden. So war es zunächst die Absicht, nur das „Notwendigste", die fundamentalen „Begriffe" unseres mathematischen Wissens in Form eines *Lexikons* zusammenzustellen und zu charakterisieren.

„Es sollte" — so führte *Franz Meyer* in einem ersten Entwurfe aus — „die Erklärung des unter ein vorliegendes Stichwort fallenden Begriffes in der Form, in welcher er zuerst aufgetreten ist, gegeben werden, nebst Angabe der litterarischen Quelle, soweit das möglich ist. War dabei hauptsächlich an die neueren Begriffe gedacht, so sollten immerhin auch die alten und sogar auch die veralteten Kunstausdrücke Erwähnung finden, um sie wie in einem Museum zu konservieren. Darauf sollte die historische Entwickelung des Begriffes folgen bis in die neueste Zeit. Fast jeder Begriff differenziert und spaltet sich mit der Zeit, nimmt verschiedene Nüancen und Modifikationen an, verzweigt sich je nach den Anwendungen, die man von ihm macht, vertieft und verallgemeinert sich. Entsprechende Umänderungen, Zusätze und Zusammensetzungen erfährt das bezügliche Kunstwort. Die wichtigsten Abschnitte bei dieser Laufbahn des Begriffes sollten wiederum mit Belegen versehen werden." So sollte die Entwickelungsgeschichte eines jeden einzelnen Begriffes an seinem Teile ein Bild der fortschreitenden Wissenschaft liefern.

Der Plan fand die volle Zustimmung von *Klein* und *Weber*.

Frische und Mut ihn auszuführen mochte bei der Wanderung durch Berg und Wald sich stärken. Ein grosses Ziel war vor Augen gerückt, wert die Kräfte dafür einzusetzen und die Schwierigkeiten zu bestehen, die der Weg dahin darbieten würde. Das Unternehmen überstieg die Kraft des Einzelnen, es sollte ein Gemeinsames unserer Deutschen Mathematiker werden, zu dem ein jeder nach seinem besonderen Arbeitsgebiete beizutragen hätte, an dem darüber hinaus, wo es die Entwickelung mit sich brachte, auch Forscher aus dem Ausland heranzuziehen waren.

Damals war eben das *Kartell Deutscher Akademieen* geschlossen, bestimmt grosse wissenschaftliche Unternehmungen in gemeinsamer Arbeit ins Werk zu setzen und zu fördern. Die hier gestellte Aufgabe erschien recht eigentlich als eine Aufgabe des Kartells. Durch die Akademieen sollte nicht nur finanzielle Unterstützung geboten, sondern auch in wissenschaftlicher Beziehung der Fortgang der nicht rasch sich vollziehenden Arbeit — man dachte damals an eine Durchführung in sechs bis sieben Jahren — gesichert werden.

Die *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* aber sollte in erster Linie das Unternehmen zu dem ihrigen machen durch das Zusammenwirken ihrer Mitglieder. Für sie wurde der eben mit Erfolg begonnene Plan grosser eingehender wissenschaftlicher Referate über alle aktuellen Gebiete der Mathematik, die jeweils in den Jahresberichten niedergelegt werden sollten, ergänzt durch diese neue zusammenfassende Aufgabe, für die aus jenen zum Teile wenigstens die Vorarbeiten gezogen werden konnten.*)

---

*) Schon auf der ersten Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Halle, Herbst 1891 hat *Felix Müller* bei der Besprechung „litterarischer Unter-

So stellte sich der Bedeutung und dem Bedürfnis zusammenfassender Darstellung des weitverzweigten Wissens die Notwendigkeit eines Zusammenschlusses ihrer Vertreter zu gemeinsamer Arbeit in natürlichem Entwickelungsgang zur Seite.

* * *

Auf der *Naturforscherversammlung in Wien* im September 1894 beschloss die deutsche Mathematiker-Vereinigung den Plan der Abfassung eines Wörterbuches der reinen und angewandten Mathematik aufzunehmen und beauftragte *Franz Meyer*, für denselben die wissenschaftliche und finanzielle Unterstützung der im Kartell vereinigten Akademieen und gelehrten Gesellschaften zu *Göttingen*, *Leipzig*, *München* und *Wien* anzurufen.

Zu Anfang des Jahres 1895 wurde der erste Entwurf des Wörterbuches, verbunden mit einem vorläufigen Plan der Finanzierung (welcher mit Beiziehung der Firma B. G. Teubner in Leipzig aufgestellt war) den Akademieen vorgelegt und erlangte die prinzipielle Zustimmung von Göttingen, München und Wien, während die Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig mangels verfügbarer Mittel sich genötigt sah, von der Beteiligung am Unternehmen vorerst noch abzusehen.

Von den gelehrten Gesellschaften wurden *F. Klein* (Göttingen), *W. v. Dyck* (München), *G. v. Escherich* (Wien) beauftragt, die Verhandlungen mit der Redaktion und mit einem ins Auge zu fassenden Verlage einzuleiten und einen genauen Plan des Unternehmens nach seiner wissenschaftlichen wie nach seiner finanziellen Seite zu entwerfen. Diese akademische Kommission trat weiterhin als eine ständige Einrichtung der Redaktion zur Seite. Sie verstärkte sich gleich zu Anfang noch durch *H. Weber* (Strassburg) als Vertreter der deutschen Mathematiker-Vereinigung und *L. Boltzmann* (Wien) als Beirat in wissenschaftlichen Fragen. Später traten dann noch *H. v. Seeliger* (München) sowie neuerdings der später noch zu nennende *O. Hölder* (Leipzig) hinzu.

In eingehenden Vorarbeiten, welche die Gliederung des Stoffes und seine Einordnung in grössere zusammenfassende wie in kleinere

---

nehmungen, welche geeignet sind, das Studium der Mathematik zu erleichtern" (1. Jahresbericht der D. M.-V., S. 59) anlässlich der Darlegung des Entwurfes zu seinem (inzwischen erschienenen) mathematischen Vokabularium auf eine solche alphabetisch geordnete mathematische Encyklopädie hingewiesen.

Einzelartikel, sodann den in Aussicht zu nehmenden Umfang des ganzen Werkes zum Gegenstande hatten, verging der Sommer 1895. Die Entscheidung über die Durchführbarkeit des Unternehmens aber brachte eine Konferenz der Delegierten der Akademieen mit *Franz Meyer* im September 1895 zu Leipzig, an der sich auch *A. Wangerin* an Stelle *H. Weber*'s, sowie Verlagsbuchhändler *Alfred Ackermann-Teubner* beteiligte. Neben einem ersten Entwurf einer Stoffanordnung nach Stichworten lag dort das Manuskript von *Felix Müller*'s schon oben genanntem Lexikon der mathematischen Terminologie vor — und da zeigte sich, dass für die hier in Aussicht genommenen Zwecke einer *Encyklopädie* an einer *alphabetischen* Anordnung nicht festgehalten werden könne. Wollte man, wie dies der eingangs bezeichnete ursprüngliche Plan gewesen war, die Darlegung des Inhaltes unseres heutigen mathematischen Wissens anknüpfen an die einzelnen Begriffe und Kunstwörter und ihre Umgestaltung, so würde schon die richtige, von unnötigem Ballast freie Auswahl der aufzunehmenden Stichwörter, um welche sich die gesamte Darlegung zu gruppieren hätte, ganz erhebliche Schwierigkeiten bieten. Gleichwohl würde eine solche Anordnung eine weitgehende Zersplitterung des Inhaltes zur Folge haben, während doch andererseits besonders in der Darstellung der Resultate und Methoden der Forschung Wiederholungen kaum zu vermeiden wären. Das Lexikon würde zudem einen völlig unhomogenen Charakter erhalten, weil neben zusammenhängenden Entwickelungen über einzelne Gebiete auch ganz kurze Abschnitte, blosse Worterklärungen, eine Unmenge von Rückverweisen eingefügt werden müssten.

So kam in Leipzig auf Antrag von *Dyck* der Beschluss zu Stande, die Idee eines eigentlichen *Lexikons* fallen zu lassen und an Stelle des *künstlichen* Systems einer alphabetischen das *natürliche* System einer rein sachlichen Anordnung und Darlegung der mathematischen Wissensgebiete zu setzen. Auch in einer solchen wird noch oft genug der mannigfache Zusammenhang der einzelnen Disziplinen zerschnitten, kann das gegenseitige Ineinandergreifen in sachlicher oder in methodischer Hinsicht nur teilweise zum Ausdruck kommen, muss das Nacheinander der Darlegung das Nebeneinander der Thatsachen unvollkommen ersetzen. Aber doch ist es möglich, in der einfach ausgebreiteten Darstellung dem Hauptzuge der leitenden Gedanken zu folgen und ihm die Entwickelung der Einzelgebiete mit ihrer weiteren Ausgestaltung einzufügen.

Unter Zugrundelegung dieses neuen Prinzipes wurde nun zunächst die Disposition für die der reinen Mathematik gewidmeten Bände getroffen. Für ihre Ausarbeitung wie für die Bearbeitung zweier Probeartikel über „Flächen dritter Ordnung“ und über „Potentialtheorie“ gelang es neben *Franz Meyer* noch *Heinrich Burkhardt*, damals Privatdozent an der Universität Göttingen, zu gewinnen und den letzten auch zum Eintritt in die Redaktion zu bestimmen, denn von vornherein trat zu Tage, dass die Aufgabe der Redaktion von einem Einzelnen nicht würde bewältigt werden können. Im besonderen übernahm dann späterhin *Franz Meyer* die Redaktion von Band I (Arithmetik und Algebra) und von Band III (Geometrie), *Heinrich Burkhardt* die des Bandes II (Analysis).

Es lässt sich nicht verkennen, dass mit der Änderung des Systems der Darlegung auch eine Verschiebung des Inhaltes oder doch eine andere Betonung desselben gegeben war. Nicht der einzelne Begriff, sondern der Aufbau des Inhaltes in den Resultaten und Methoden der mathematischen Forschung bildet das Prinzip der Gruppierung. So wurde als Aufgabe der *„Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften“*, wie das Werk von da ab genannt wurde, die folgende aufgestellt:

„Aufgabe der Encyklopädie soll es sein, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten **Resultaten** zu geben und zugleich durch sorgfältige Litteraturangaben die geschichtliche Entwickelung der mathematischen **Methoden** seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie soll sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik beschränken, sondern auch die **Anwendungen** auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete mit berücksichtigen und dadurch ein Gesamtbild der Stellung geben, die die Mathematik innerhalb der heutigen Kultur einnimmt.“

Eine weitere Schwierigkeit lag nunmehr in der Bemessung des Umfanges des ganzen Werkes und in einer richtigen Verteilung des Raumes auf die einzelnen Gebiete. Vergleiche mit früheren Werken ähnlicher Art, mit analogen anderer Disziplinen boten nur geringen

Anhalt. Hier konnte ein erster Ansatz nur als eine wünschenswerte Begrenzung, nicht als eine sichere Norm aufgestellt werden, immerhin aber musste ein solcher Überschlag die Grundlage für die Bemessung der von den Akademieen beizusteuernden Mittel wie für die Verhandlungen mit der Verlagsbuchhandlung bilden.

Man einigte sich, sechs Bände Grossoktav zu je vierzig Bogen als Ausgangspunkt für die Raumdisposition festzulegen. Drei Bände sollten der reinen, zwei der angewandten Mathematik dienen, ein weiterer den historischen, philosophischen und didaktischen Fragen gewidmet sein. Jeder Band sollte mit einem eigenen Register versehen werden. Der letzte Band sollte ausserdem eine zusammenfassende Gesamtübersicht, und, um das Werk auch als Nachschlagewerk brauchbar zu machen, ein ausführliches alphabetisch geordnetes *Register* enthalten.

Für die gesamte Durchführung des Unternehmens sollte die Redaktion mit der von den Akademieen eingesetzten Kommission zusammenwirken:

Der *Redaktion* fiel die Aufgabe zu, auf Grund der in gemeinsamen Beratungen mit der Kommission festgestellten Disposition des Werkes den Stoff im einzelnen zu gliedern; die Mitarbeiter zu gewinnen, sich über die Verteilung der Gebiete mit ihnen zu verständigen und die gegenseitige Bezugnahme der Referenten über benachbarte Gebiete zu vermitteln; für die Erzielung eines einheitlichen Charakters der verschiedenen Artikel Sorge zu tragen; die Drucklegung zu überwachen; die Register zusammenzustellen; endlich durch die Kommission regelmässige Berichte über den Fortgang des Werkes an die beteiligten Akademieen zu erstatten.

Der *akademischen Kommission* sollte die Wahrnehmung des besonderen Interesses der Akademieen an dem Gedeihen des Werkes und die thatkräftige wissenschaftliche Unterstützung der Redaktion obliegen. Insbesondere sollte die Zustimmung dieser Kommission erforderlich sein für alle etwa sich als notwendig erweisenden Änderungen im Plane des Werkes wie in der Zusammensetzung der Redaktion und ebenso für die Auswahl der Mitarbeiter.

* * *

Im Frühjahr 1896 erhielten die vorgelegten Pläne und Organisationsvorschläge der Kommission und Redaktion die Zustimmung der Akademieen zu *Göttingen, München* und *Wien* und wurde der Vertrag für die Herausgabe mit dem Verlage von *B. G. Teubner* in Leipzig abgeschlossen.

Und nun begann das Werk — unter günstigen Auspicien, denn gleich von Anfang an gelang es der Redaktion, einen grossen, bedeutenden Kreis von Mitarbeitern sich zu sichern, bereit unter Hintansetzung ihrer besonderen Interessen ihre Arbeit in den Dienst der gemeinsamen Sache zu stellen. Es waren „*Allgemeine Grundsätze*" ausgegeben worden, welche nach Möglichkeit eine gemeinsame Basis des Aufbaues der Artikel und eine gleichmässige Behandlung des Stoffes sichern sollten, ohne doch die wissenschaftliche Freiheit und die Individualität des Einzelnen, der für seine Darlegung die volle Verantwortlichkeit trägt, allzusehr zu beschränken.*)

Über die Anordnung der einzelnen Bände, wie sie nunmehr, gestützt auf diese Grundlagen allmählich sich gestaltete, wird in den besonderen Einleitungen der Redaktion zu berichten sein. Hier soll nur hervorgehoben werden, wie die Aufstellung und allmähliche Ergänzung der umfassenden Disposition, die gegenseitige Abgleichung des Inhaltes der einzelnen Aufsätze und die Klarlegung ihrer wechselseitigen Beziehungen ganz besonders gefördert wurde in den häufigen persönlichen Konferenzen der Mitarbeiter, der Redakteure und Kommissionsmitglieder untereinander. Sie bedeuten ein aufs dankbarste anzuerkennendes Opfer aller Beteiligten, aber auch einen bleibenden

*) Wir glauben, sie an dieser Stelle mit denjenigen Abänderungen und Ergänzungen wiedergeben zu sollen, welche sie später, insbesondere bei Inangriffnahme der Bände der angewandten Mathematik, erfahren haben.

Allgemeine Grundsätze für die Bearbeitung der Artikel.

1. Innerhalb des einzelnen Artikels werden die dem betreffenden Gebiete eigentümlichen mathematischen *Begriffe*, ihre wichtigsten *Eigenschaften*, die fundamentalsten *Sätze*, und die *Untersuchungsmethoden*, die sich als fruchtbar erwiesen haben, dargestellt.

2. Auf die Ausführung von *Beweisen* der mitgeteilten Sätze muss verzichtet werden; nur wo es sich um prinzipiell wichtige Beweismethoden handelt, kann eine kurze Andeutung derselben gegeben werden.

3. Die auf *Anwendungen* bezüglichen Teile des Werkes sollen einen doppelten Zweck erfüllen: sie sollen *einerseits* den Mathematiker darüber orientieren, welche Fragen die Anwendungen an ihn stellen, *andererseits* den Astronomen, Physiker, Techniker darüber, welche Antwort die Mathematik auf diese Fragen giebt. Demgemäss beschränken sie sich auf die mathematische Seite der Anwendungen; Instrumentenkunde, Beobachtungskunst, Sammlung von Konstanten, Verwaltungsvorschriften fallen ausserhalb des Rahmens des Werkes.

Gewinn für das ganze Werk wie für Alle, die an demselben sich bethätigt haben. Die Naturforscherversammlungen des letzten Jahrzehntes, von der Wiener Versammlung des Jahres 1894, auf welcher der Grundstein des Werkes gelegt wurde, angefangen, der internationale Mathematikerkongress in Zürich (1897), wie endlich besondere Konferenzen der akademischen Kommission und der Redaktion, die fast regelmässig mit den jährlichen Versammlungen des Kartells der deutschen Akademieen vereinigt wurden, boten die wichtige Gelegenheit zur gemeinsamen Beratung über den Fortgang des Werkes und zum Gedankenaustausch über seine Ausgestaltung im Einzelnen.

Ganz besonders trat die Notwendigkeit persönlicher Aussprache hervor, als es sich, nachdem die wesentlichsten Schritte für die Disposition und die Durchführung der drei ersten Bände der reinen Mathematik getan waren, im Jahre 1897 darum handelte, nunmehr auch an die der angewandten Mathematik gewidmeten Bände heranzutreten. Von vorneherein war klar geworden, dass nur eine Erweiterung der Redaktion die Durchführung des Unternehmens sichern konnte und ebenso, dass es — wollte man nicht die Fertigstellung

---

Soll das erste dieser Ziele erreicht werden, so wird erforderlich sein: kurze Angabe der Überlegungen, die zur mathematischen Formulierung des betr. Problems geführt haben; explizite Aufstellung dieser Formulierung; Angabe der Grenzen, innerhalb deren in den Fällen der Praxis die auftretenden Konstanten liegen; Angabe des Genauigkeitsgrades, bis zu dem die betr. Formulierung als richtig anzusehen ist.

Soll auch das zweite Ziel erreicht werden, so wird man sich nicht auf blosse Verweisungen auf diejenigen Stellen der drei ersten Bände beschränken dürfen, an denen das betr. Problem behandelt ist; man wird das Resultat der erforderlichen mathematischen Operationen (Gleichungsauflösung, geometrische Konstruktion, Integration) kurz angeben müssen. Dagegen ist Wiederholung der Litteraturangaben nicht erforderlich.

4. Streng chronologische Anordnung des Stoffes würde zu vielen Wiederholungen nötigen, für die nicht Raum ist; aber die *allmähliche Entwickelung der Begriffe und Methoden* wird an geeigneten Stellen auseinanderzusetzen und durch *genaue Litteraturangaben* zu belegen sein.

5. Die vorhandenen historischen Monographien und bibliographischen Hilfsmittel werden den Herren Mitarbeitern zur ersten Orientierung gute Dienste leisten; der erste Grundsatz aller historischen Kritik verlangt jedoch, dass die Darstellung schliesslich auf *eigenem Studium der Originalarbeiten* beruht.

6. Von *älteren Entwickelungsperioden* werden zwar die Resultate aufzunehmen sein, aber auf speziellen Nachweis ihres Ursprungs wird verzichtet werden müssen; andernfalls würde die Befolgung der Grundsatzes (5) den Abschluss der Arbeit über die Maassen verzögern, da es an den erforderlichen orientierenden Vorarbeiten namentlich für das 18. und teilweise auch für das 17. Jahrhundert noch

des Ganzen in weiteste Ferne verschieben — notwendig war, das Werk von allen Seiten in Angriff zu nehmen. Die akademische Kommission hoffte, *F. Klein* zum Eintritt in die Redaktion und speziell für die Bearbeitung des auf Mechanik bezüglichen Bandes bestimmen zu können und ebenso *A. Sommerfeld* (damals Privatdozent in Göttingen), für die Redaktion des mathematisch-physikalischen Teiles zu gewinnen. Zunächst übernahm es *Klein* auf mehrfachen grösseren Reisen (nach England, Frankreich, Holland, Italien und Österreich), zu denen die Akademieen die nötigen Mittel in liberaler Weise gewährt hatten, für Disposition, Ausgestaltung und Mitarbeit an diesen Bänden die nötigen Vorarbeiten zu treffen. War schon für die ersten Bände die Beteiligung auch nichtdeutscher Autoren von wesentlicher Bedeutung für das Gepräge der Referate geworden, hier, bei den der angewandten Mathematik gewidmeten Bänden ist es besonders wichtig, der Entwicklung der einzelnen Gebiete gemäss auch auf die Mitarbeit nichtdeutscher Autoren zählen zu können.

So sehr wir das ganze Unternehmen nach Grundlage und Durchführung als ein deutsches in Anspruch nehmen wollen, es ist von

---

fehlt. Demgemäss wird die historische Darstellung im allgemeinen zweckmässigerweise mit dem Beginn des neunzehnten Jahrhunderts einsetzen. Soweit überhaupt Zitate auf frühere Zeiten gegeben werden, werden sie in dem Sinne zu verstehen sein, dass keine Gewähr dafür geleistet wird, ob nicht eine noch frühere Stelle hätte zitiert werden können.

7. Die einzelnen mathematischen Fächer werden nicht als von einander isoliert betrachtet; es ist im Gegenteil eine der Hauptaufgaben des Werkes, das vielfache *In- und Übereinandergreifen der verschiedensten Gebiete* allgemein zum Bewusstsein zu bringen.

8. Einseitige Hervorhebung eines bestimmten Schulstandpunktes läuft dem Zwecke des Werkes zuwider. Das Erstrebenswerteste würde es sein, wenn es überall gelänge, die auf verschiedenen Wegen gewonnenen Resultate zu einer *objektiven Darstellung* ineinander zu arbeiten; wo das undurchführbar erscheint, soll wenigstens jede der einander gegenüberstehenden Auffassungen zu Worte kommen.

9. Zur Entscheidung schwebender *Streitfragen*, insbesondere solcher über Priorität, ist die Encyklopädie nicht berufen.

10. Werden in einem Gebiete Begriffe oder Sätze benutzt, die einem andern angehören, so wird auf den das letztere Gebiet behandelnden Abschnitt *einfach verwiesen* (unter Benutzung der in der Disposition gebrauchten Signatur), auch wenn derselbe in der Encyklopädie erst an einer späteren Stelle erscheint. Übrigens werden Dinge, von welchen man zweifeln kann, ob sie in einen früheren oder in einen späteren Abschnitt gehören, im allgemeinen an der früheren Stelle eingereiht.

11. Soweit es ohne Beeinträchtigung der Grundsätze (7) und (10) geschehen kann, werden die Ansprüche an die *Vorkenntnisse* der Leser so gehalten, dass

höchster Bedeutung, soll es nicht einen einseitigen Standpunkt vertreten, dass in der Auffassung und Darlegung der einzelnen Gebiete alle Stimmen zu Worte kommen, welche zu der Eigenart ihrer Entwicklung beigetragen haben. Der bleibende Besitzstand einer jeden Wissenschaft ist ein internationales Gut, gewonnen aus der gesamten Arbeit der Gelehrten aller Zeiten und aller Länder. Aber in verschiedenen Richtungen, mit verschiedener Betonung und Wertschätzung der einzelnen Gebiete, mit charakteristischem Unterschied in den Methoden und in der Darstellungsform haben die verschiedenen Nationen, die verschiedenen Epochen sich an dieser Arbeit beteiligt. Dies muss in der Encyklopädie in der Darlegung des Inhaltes nach seiner geschichtlichen Entwicklung wie in der Heranziehung der Mitarbeiter zum Ausdruck gebracht werden. In der That zählt das Unternehmen heute neben dem Grundstock seiner deutschen Autoren Gelehrte Amerikas, Belgiens, Englands, Frankreichs, Hollands, Italiens, aus Norwegen, Österreich, Russland, Schweden zu seinen Mitarbeitern.

In den Jahren 1898 und 1899 konnte, besonders durch die persönlichen Bemühungen und Beziehungen *F. Klein*'s, die Durchführung

---

das Werk auch demjenigen nützlich sein kann, der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientierung sucht.

12. Bibliographische Vollständigkeit der *Litteraturangaben* ist ebensowenig möglich oder auch nur wünschenswert, als erschöpfende Aufzählung aller überhaupt aufgestellten Sätze oder vorgeschlagenen Kunstausdrücke.

13. Doch sollen alle wichtigen wirklich im Gebrauche befindlichen *termini technici* vorkommen und Erläuterung finden, damit sie später in das Register aufgenommen werden können. Besonders werden Fälle zu notieren sein, in welchen derselbe Terminus oder dasselbe Symbol von verschiedenen Autoren in verschiedenen Bedeutungen gebraucht wird, namentlich solche, in welchen der Sinn eines Terminus sich im Laufe der Zeit unvermerkt erweitert hat. Unter veralteten Terminis wird sparsame Auswahl zu treffen sein.

14. Überall, wo es zum Verständnis erforderlich ist, werden *Figuren im Texte* beigegeben.

15. Zur Aufnahme ausführlicher *Sammlungen von Formeln,* sowie von dergleichen *Tabellen numerischer Werte* der behandelten Funktionen — die doch nicht ohne vorherige Kontrolle aus anderen Werken abgeschrieben werden dürften — hat das Unternehmen *nicht* die Mittel. Dagegen sind Angaben darüber wünschenswert, wo dergleichen zu finden, erforderlichenfalls mit einer Warnung vor kritikloser Benutzung. — Ganz kleine Tabellen können Platz finden, welche den Verlauf einer Funktion durch einige wenige geeignet ausgewählte Zahlwerte veranschaulichen; vielfach wird eine graphische Darstellung denselben Dienst noch besser thun.

16. *Zitate* auf vielbenutzte Zeitschriften werden in einheitlicher abgekürzter

der der angewandten Mathematik gewidmeten Bände gesichert und eine erste Disposition derselben entworfen werden. Dabei erwies es sich als notwendig, den gesamten überreichen Stoff der Anwendungen statt wie geplant auf zwei, auf drei Bände zu verteilen, von denen der vierte die Mechanik, der fünfte die mathematische Physik, der sechste die Geodäsie, Geophysik und Astronomie umfassen sollte, während für die historischen, philosophischen und didaktischen Fragen ein siebenter Band vorbehalten wurde.

Im Jahre 1899 übernahm *Klein* definitiv die Redaktion des der Mechanik gewidmeten Bandes, bald darauf *Sommerfeld* die Redaktion des fünften Bandes, der mathematischen Physik.

An eine Disposition des sechsten Bandes konnte erst nach mannigfachen Vorverhandlungen im Jahre 1900 gegangen werden. Sie wurde von *E. Wiechert* in Göttingen für Geodäsie und Geophysik, von *R. Lehmann-Filhés* in Berlin für die Astronomie getroffen, die beide damit in die Redaktion der Encyklopädie eintraten. Leider sah sich der letztgenannte schon im Jahre 1902 genötigt, von der Redaktion, in der er in dankenswertester Weise die ersten Verhandlungen mit den gewählten Mitarbeitern geführt hatte, zurückzutreten. An seine

---

Form (nach einem besonders aufgestellten Schema) gegeben; Bücher werden, wo sie in einem Artikel zum ersten Mal vorkommen, mit Familien- und abgekürztem Vornamen des Verfassers, Hauptteil des Titels, Ort und Jahr zitiert, bei öfterem Vorkommen die späteren Male in kürzerer Form. Wo zu genaueren Angaben die Sache nicht wichtig genug erscheint, haben blosse Aufzählungen von Autorennamen für den Leser meist wenig Nutzen.

17. In ihrer Allgemeinheit nichtssagende *epitheta ornantia*, wie epochemachend, genial, grossartig, klassisch u. s. w. werden zu vermeiden sein. Dagegen wird angegeben, in welcher Richtung jedesmal der Fortschritt liegt: ob in Auffindung *neuer Resultate* — oder in *strenger Begründung* vorher nur vermutungsweise aufgestellter oder ungenügend bewiesener Sätze — oder in Abkürzung umständlicher Entwickelungen durch Beiziehung *neuer Hilfsmittel* — oder endlich in *systematischer Anordnung* einer ganzen Theorie.

Speziell der Bearbeitung der Bände für angewandte Mathematik gelten noch die folgenden Bemerkungen:

1. Da sich die Encyklopädie wesentlich an ein mathematisches Publikum wendet, muss sie den Nachdruck auf die *mathematische* Seite der Theorieen legen. Hierzu wird einerseits zu zählen sein die mathematische *Formulierung* der in Betracht kommenden Aufgaben, andererseits ihre mathematische *Durchführung*. Der letztere Gesichtspunkt, welcher in den spezifisch physikalischen und ingenieurwissenschaftlichen Büchern vielfach zurücktritt, wird hier wesentlich im Auge zu behalten sein. Andererseits wird aber auch im Gegensatz zu der Darstellung in der Mehrzahl der mathematischen Werke die experimentelle Grundlegung der Einzel-

Stelle trat mit dem Jahre 1903 *K. Schwarzschild*, der eben an die Göttinger Sternwarte berufen worden war.

Ostern 1904 wurde *Conrad H. Müller*, der schon längere Zeit an den Arbeiten der Redaktion beteiligt war, zur Unterstützung *F. Klein*'s als Mitredakteur des vierten Bandes durch die akademische Kommission bestimmt; im Juli 1904 endlich *Ph. Furtwängler* (in Potsdam) zur Redaktion des ersten Teiles von Band VI (Geodäsie und Geophysik) in Gemeinschaft mit *E. Wiechert* berufen.

* * *

Inzwischen war, am 7. November 1898, das erste Heft des ersten Bandes zur Ausgabe gelangt, enthaltend *H. Schubert*'s Bericht über die Grundlagen der Arithmetik, *E. Netto*'s Referat über Kombinatorik und die grosse Arbeit von *A. Pringsheim* über Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse. Im August 1899 begann dann die Publikation des zweiten Bandes mit *Pringsheim*'s Grundlagen der allgemeinen Funktionenlehre, dem sich der Aufsatz von *A. Voss* über Differential- und

---

gebiete zu schildern sein, nämlich so weit, dass der Leser ein allgemeines Urteil über die Begründung und die Genauigkeitsgrenze der mathematischen Theorie gewinnt.

2. Dem allgemeinen Plane der Encyklopädie entspricht, wie in dem Rundschreiben hervorgehoben, die *historische Anordnung des Stoffes* und die Wiedergabe der Hauptmomente der *geschichtlichen Entwickelung*. Indess ist für die vorliegenden Bände in dieser Hinsicht zu beachten, dass die Ergebnisse der angewandten Mathematik rascher veralten, wie die der reinen, und dass daher die geschichtliche Entwickelung hier nicht dieselbe Wichtigkeit für das Verständnis des heutigen Standes der Theorie hat, wie dort. Trotzdem wird im Allgemeinen die historische Darstellung auch in den folgenden Bänden wünschenswert sein, soweit sie sich mit Systematik und Übersichtlichkeit verträgt.

3. Auf den Gebieten der angewandten Mathematik ist die Litteratur vielfach sehr zerstreut und unzusammenhängend. Die Redaktion hat es sich daher angelegen sein lassen, im voraus nach möglichst vielen Seiten, bei Mathematikern, Physikern, Technikern, . . . Astronomen, sowie in verschiedenen Ländern, Beziehungen anzubahnen; sie wird gerne bereit sein, den Herren Mitarbeitern auf Grund dieser Beziehungen sonst schwer beschaffbare Litteratur mitzuteilen oder wenigstens nachzuweisen.

4. Schliesslich scheint es nicht erforderlich, dass jeder Artikel von einem einem einzelnen Autor bearbeitet wird. Vielmehr sind auch *kleinere Beiträge*, welche nur einen Teil des in dem betr. Artikel zu behandelnden Stoffes decken, unter Umständen erwünscht. Solche Beiträge können dem zusammenfassenden Artikel als Anhang beigedruckt oder, falls sich der Verfasser damit einverstanden erklärt, dem Hauptreferenten des Gebietes zur Verfügung gestellt und von diesem eingearbeitet werden. In der Überschrift des Artikels wird die Autorschaft solcher Beiträge in geeigneter Weise zum Ausdruck kommen.

Integralrechnung, sowie der des verstorbenen *G. Brunel* über bestimmte Integrale anreihte. Im Oktober 1902 erschien das erste Heft des dritten Bandes mit den Aufsätzen von *H. v. Mangoldt* und *R. v. Lilienthal* über Differentialgeometrie. Die Veröffentlichung der der angewandten Mathematik gewidmeten Teile setzte im Juni 1901 mit dem vierten Bande mit *M. Abraham*'s Darlegung der geometrischen Grundbegriffe zur Mechanik der deformierbaren Körper und zwei Abhandlungen von *A. E. H. Love* über Hydrodynamik ein. Ostern 1903 folgte Band V (Mathematische Physik), eingeleitet durch die Aufsätze *C. Runge*'s über Mass und Messen und *J. Zenneck*'s über Gravitation, an welche sich *G. H. Bryan*'s Allgemeine Grundlegung der Thermodynamik anschliesst. Noch im Laufe dieses Jahres wird mit der Herausgabe der ersten Hefte der beiden Teile des sechsten Bandes begonnen werden. Sie werden einerseits die Aufsätze von *C. Reinhertz* und *P. Pizetti* über Geodäsie, von *S. Finsterwalder* über Photogrammetrie enthalten, andrerseits (im astronomischen Teil) die Abhandlungen von *E. Anding* und *F. Cohn* zur Theorie der Koordinaten bringen.

Man hat nicht überall diese, an allen Seiten des Werkes einsetzende Thätigkeit gutgeheissen in der Befürchtung, es möchte dadurch die Fertigstellung der einzelnen Bände sich allzusehr verzögern. Auch erhält der Leser gegenwärtig ein nicht leicht zu übersehendes Stückwerk vereinzelter Hefte, welches auch die Bibliotheken nur ungerne der Benützung freigeben. Es muss aber hierzu gesagt werden, dass eine Verzögerung der Herausgabe durch den breiten Umfang der redaktionellen Thätigkeit nicht eintritt, weil es sich fast durchweg um verschiedene Redakteure und Mitarbeiter handelt; im Gegenteil ist aber der gleichmässige Fortschritt des Ganzen für die Verwertung der wechselseitigen Beziehungen der einzelnen Bände und der einzelnen Aufsätze untereinander von wesentlicher Bedeutung. Der Erleichterung in der Benutzung der einzelnen Hefte andererseits hat die Verlagshandlung in jüngster Zeit durch eine besondere Ausstattung und Broschierung der Hefte Rechnung getragen.

Hier ist der Ort gegeben, das überaus grosse Entgegenkommen der Verlagsbuchhandlung *B. G. Teubner* mit besonderem Danke hervorzuheben. Einerseits hat die Firma alle auf die Drucklegung bezüglichen weitgehenden Wünsche und Anforderungen der Redaktion wie der Autoren auf das Bereitwilligste erfüllt und andererseits durch ihr eigenes Eintreten für die aufzuwendenden Honorare es ermöglicht, dem im Laufe der Entwicklung immer stärker auftretenden Bedürfnis gerecht zu werden, das Werk in einem gegenüber dem ersten Plane ganz beträchtlich erweiterten Umfange durchzuführen.

Man mag bedauern, dass der ursprüngliche Ansatz, einen ganz gedrängten Überblick unseres heutigen mathematischen Wissens in sechs nicht unhandlichen Bänden darzubieten, verlassen worden ist und mag nicht ohne Bedenken sehen, wie von Band zu Band das Werk über die zu Anfang gezogenen Grenzen hinaustritt. Das Streben nach möglichster Vollständigkeit in den einzelnen Abschnitten aber und der Wunsch übersichtlich und klar zu sein, auch auf Kosten der Kürze, ein Wunsch der besonders auch aus den Kreisen der Leser wiederholt an uns herangetreten ist, bilden den unmittelbaren Grund für das Anwachsen des Umfanges. Der wesentliche Grund aber liegt wohl tiefer: Das Werk ist ein *erstes* nach seiner Aufgabe, so kann es nicht ein vollendetes sein, sie zu erfüllen. Erst wenn das gewaltige Gebiet, welches es umfasst, in dieser ersten Fassung als ein Ganzes vor uns liegt, wenn der Kreis der Probleme, die es darzulegen hat, einmal durchmessen ist, wird man übersehen können, wieviel zur Vertiefung seines Inhaltes, zur Vereinfachung und Prägnanz der Darstellung, zur Abgleichung und zum Ineinanderschliessen aller einzelnen Teile zu thun noch übrig bleibt.

* * *

Zwei für die Anerkennung der bisher geleisteten wissenschaftlichen Arbeit bedeutsame Umstände sind in unserem historischen Berichte noch zu erwähnen:

Der eine ist die Herausgabe einer französischen Bearbeitung der Encyklopädie, zu der die Verleger *B. G. Teubner* in Leipzig und *Gauthier-Villars et fils* in Paris im Jahre 1900 die Ermächtigung durch die Akademieen erhielten. *J. Molk*, Professor an der Faculté des Sciences in Nancy, wurde mit der Leitung dieser Ausgabe zunächst für die der reinen Mathematik gewidmeten Bände betraut, während er für die Herausgabe der Bände der angewandten Mathematik mit *P. Appell*, Mitglied des Institut de France (Mechanik), sowie mit *A. Potier* (Physik), *Ch. Lallemand* (Geodäsie und Geophysik) und *H. Andoyer* (Astronomie) in Verbindung trat.

Es ist nicht bloss eine Übersetzung, sondern eine Bearbeitung beabsichtigt, bei welcher die ersten französischen Gelehrten ihre Beteiligung zugesagt haben. Unter voller Erhaltung der Eigenart des deutschen Originals soll dabei in dieser Ausgabe dem Gebrauche des französischen Leserkreises Rechnung getragen und sollen andererseits unter gemeinsamer Mitarbeit der Autoren wie der Bearbeiter die einzelnen Artikel noch mannigfache Ergänzungen, besonders auch bezüglich der Litteraturzitate erfahren.*)

So wird das deutsche Werk in seiner französischen Ausgabe noch weiteren Kreisen erschlossen und in ihnen gewürdigt werden.

Eine fernere Anerkennung der bisherigen Durchführung des Werkes, die wir mit besonderer Freude begrüssen, dürfen wir darin erblicken, dass in jüngster Zeit auch die Königl. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften zu *Leipzig* es ermöglicht hat, an der Herausgabe der Encyklopädie sich zu beteiligen. Sie hat ihrerseits *O. Hölder* in die akademische Kommission delegiert.

Damit erscheint nunmehr die Herausgabe als ein gemeinsames Unternehmen der im Kartell der deutschen Akademien vereinigten gelehrten Gesellschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien und es bezeugt auch sie die Bedeutung dieser Vereinigung für die Durchführung von Aufgaben, die nur in vereinter Arbeit möglich sind; zugleich aber bietet die Autorität der Akademieen, welche das Unternehmen zu dem ihren gemacht haben, die Gewähr, dass auch die künftige Gestaltung, die Vollendung des Ganzen, wie spätere Neubearbeitung in beste Hand gelegt und in ihrem wissenschaftlichen Grunde gesichert ist.

* * *

---

*) Der Prospekt der französischen Ausgabe kennzeichnet die Art der Bearbeitung in folgender Weise:

Dans l'édition française on a cherché à reproduire dans leurs traits essentiels les articles de l'édition allemande; dans le mode d'exposition adopté on a cependant largement tenu compte des usages et habitudes françaises.

Cette édition française offrira un caractère tout particulier par la collaboration de mathématiciens allemands et français. L'auteur de chaque article de l'édition allemande a, en effet, indiqué les modifications qu'il jugeait convenables d'introduire dans son article et, d'autre part, la rédaction française de chaque article a donné lieu à un échange de vues auquel ont pris part tous les interessés; les additions dues plus particulièrement aux collaborateurs français seront mises entre deux astérisques. L'importance d'une telle collaboration, dont l'édition française de l'Encyclopédie offrira le premier exemple, n'échappera à personne.

So möge denn die Encyklopädie unter diesem freundlichen Aspekt, unter dem Schirm der vereinigten Akademieen an ihrem Teile den Wissenschaften dienen:

Der *reinen mathematischen Forschung*, indem sie den alten vieldurchfurchten Boden zu neuer Saat und Ernte vorbereitet und neuerrungenes Land der befruchtenden Gedankenarbeit erschliesst;

den *angewandten Wissenszweigen*, indem sie die vielfach getrennten Wege mathematischer und naturwissenschaftlicher Betrachtung zusammenführt und nach Grundlage und Methode ihrer weiteren Entwicklung vorarbeitet;

der *Gesamtheit aller Geistesarbeit*, indem sie die Stellung bezeichnet und umschreibt, welche den mathematischen Wissenschaften im Bereich der menschlichen Erkenntnis zukommt.

München, 30. Juli 1904.

Walther von Dyck,
als Vorsitzender der akademischen Kommission
für die Herausgabe der Encyklopädie.

Vorrede zum ersten Bande.

Der vorliegende erste Band der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften umfasst die *Arithmetik*, *Algebra*, *Zahlentheorie*, *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (mit Anwendungen auf Ausgleichung und Interpolation, Statistik und Lebensversicherung), sowie einige angrenzende Disziplinen: *Differenzenrechnung*, *Numerisches Rechnen*, *Mathematische Spiele* und *Mathematische Wirtschaftslehre.*

Es sind das etwa diejenigen Teile der reinen Mathematik, die nicht spezifisch analytischen oder geometrischen Charakters sind.

Diese Abtrennung von der *Analysis* (Band II) und *Geometrie* (Band III) konnte naturgemäss keine ganz starre sein, vielfach war ein Übergreifen in jene beiden grossen Gebiete unvermeidlich, und ebenso wenig war es möglich, den Begriff der „reinen" Mathematik überall festzuhalten. Es mag das in den Hauptzügen, dem Gange des Bandes I folgend, näher ausgeführt werden.

In der Arithmetik (Abschnitt A) bilden das Irrationale und der Grenzbegriff (A 3) zugleich die Grundlage der heutigen Analysis; bei der Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen, Produkte, Kettenbrüche und Determinanten waren daher analytische und auch nicht-analytische Funktionen als Belege heranzuziehen. Die Theorie der einfachen und höheren komplexen Grössen (A 4) nötigte, auf die geometrischen Eigenschaften der einfachsten kontinuierlichen Transformationsgruppen einzugehen. Die Mengenlehre (A 5) ist als fundamentales Klassifikationsprinzip für die Funktionen überhaupt von Bedeutung geworden, und neuerdings auch für die Grundlagen der Geometrie und Analysis situs.

In der Algebra (Abschnitt B) beziehen sich einige der lehrreichsten Anwendungen der Invarianten- und Gruppentheorie (B 2, B 3 c, d, B 3 f), insbesondere der Theorie endlicher linearer Gruppen, auf bedeutsame geometrische Konfigurationen; andererseits ist die Lehre von den algebraischen Gebilden und Transformationen ebensowohl mit der Entwickelung der algebraischen Funktionen, wie der algebraischen Geometrie auf das Engste verknüpft.

In dem Abschnitte (C) über Zahlentheorie sind es vor allem die Approximationsmethoden der analytischen Zahlentheorie (C 3), die wesentlich der Analysis entstammen und umgekehrt wiederum diese gefördert haben; als eine Hauptanwendung auf die Geometrie erscheint die Unmöglichkeit von der Quadratur des Kreises. Der Artikel (C 6) über komplexe Multiplikation liesse sich mit demselben Rechte auch als integrierender Bestandteil der Lehre von den elliptischen Funktionen auffassen.

Endlich sei noch auf die mannigfachen Beziehungen zwischen der Wahrscheinlichkeits- und Differenzenrechnung, nebst deren Anwendungen (D, E), zu der Approximation bestimmter Integrale hingewiesen, sowie auf das Eingreifen der Lehre von den allgemeinen Koordinatensystemen und der Methoden der darstellenden Geometrie in das numerische Rechnen (F).

Gerade diese letzten Abschnitte (D, E, F, G) lehren zugleich, in welchem Umfange ursprünglich aus der reinen Mathematik geschöpfte Prinzipien ihre Kraft bei der Lösung der verschiedenartigsten technischen Probleme bewähren.

Wir wenden uns nunmehr zu der systematischen Einteilung der Abschnitte in die Einzelartikel und können uns dabei um so kürzer fassen, als das ausführliche Gesamtinhaltsverzeichnis eine äussere Orientierung über die Verteilung des Stoffes ohnehin gestattet.

Der Abschnitt (A) über *Arithmetik* beginnt mit den Elementen (A 1, H. Schubert), den arithmetischen Grundoperationen und deren Anwendungen auf positive und negative, ganze und gebrochene Zahlen; hieran schliesst sich von selbst die Kombinatorik (A 2, E. Netto), deren wesentlichster Ausfluss die Lehre von den Determinanten ist.

Von den Elementen aus kann man innerhalb der Arithmetik nach vierfacher Richtung weitergehen.

Entweder man erweitert (A 3, A. Pringsheim) das Gebiet der rationalen Zahlen durch Aufnahme der irrationalen, und überträgt zugleich die arithmetischen Grundoperationen auf eine unbegrenzte Anzahl von Objekten. Daraus erwächst der Begriff der Grenze einer Zahlenfolge, und hieraus wiederum durch Spezifikation die Theorie der Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen, Produkte, Kettenbrüche und Determinanten. Hierbei konnte auch die Lehre von den endlichen Kettenbrüchen mit aufgenommen werden.

Zweitens kann man die Beschränkung auf das Reelle fallen lassen und das Gebiet der arithmetischen Grössen durch Schöpfung der gemeinen und höheren komplexen Grössen ausdehnen (A 4, E. Study); geeignete Einteilungsprinzipien ermöglichen die organische Einordnung besonderer komplexer Grössen von Bedeutung, insbesondere der Quaternionen.

Drittens lässt sich die natürliche Zahlenreihe über sich selbst hinaus fortsetzen (A 5, A. Schoenflies) und man gelangt zu den verschiedenen Modifikationen der Mengen und der transfiniten Zahlen.

Oder endlich man baut (A 6, H. Burkhardt), im Anschluss an die Kombinatorik, auf der Grundlage des Permutationsprozesses die Lehre der Substitutionen einer Anzahl von Elementen auf. Als die folgenreichste Art der Zusammenfassung von Substitutionen erweist sich die „Gruppe", zunächst für eine endliche, weiterhin für eine unbegrenzte Reihe von Elementen oder überhaupt Operationen.

Indem man der Analysis den Begriff einer stetig variabeln Grösse entlehnt, betritt man den Boden der *Algebra*, wie sie in Abschnitt B behandelt ist. Mit Hilfe der ersten drei resp. vier Rechenspezies entstehen die ganzen resp. gebrochenen rationalen Funktionen einer und mehrerer Variabeln (B 1 a, b, E. Netto). Die hierher gehörigen Untersuchungen gruppieren sich um zwei Hauptprobleme, einmal um die formale Elimination von Unbekannten aus Gleichungssystemen, die in der Theorie der Modulsysteme einen gewissen Abschluss erreicht, sodann um den Existenznachweis für die Lösungen von algebraischen Gleichungen und Gleichungssystemen.

Die Theorie der ganzen Funktionen erfährt eine schärfere Ausprägung auf der Grundlage des Begriffes des „Rationalitätsbereiches", indem die Koeffizienten der Funktionen ihrerseits wiederum als ganze Funktionen einer Anzahl von Urvariabeln, aber mit nur ganzzahligen Koeffizienten aufgefasst werden (B 1 c, G. Landsberg). Dadurch gelingt es, die Eigenschaften der algebraischen Gebilde, insbesondere rationalen Transformationen gegenüber, den verschiedenen Modifikationen eines grundlegenden Prozesses unterzuordnen, der Reduktion unendlicher Funktionen- oder Formensysteme auf eine endliche Anzahl. Diese Entwickelungen dienen daher zugleich als algebraische Grundlage der höheren Zahlentheorie (Abschnitt C).

Von da an tritt im Abschnitte B wieder eine Verzweigung in Untergebiete spezifischen Charakters ein.

Abgesehen von dem Artikel B 3 a (C. Runge), der die mehr praktischen Fragen erörtert, wie man Gleichungswurzeln in geeignete Grenzen einschliessen und sie mittels numerisch brauchbarer Algorithmen approximieren kann, tritt der Gruppenbegriff als der herrschende auf. Unter den rationalen Transformationen der Variabeln ganzer Funktionen (Formen) sind in erster Linie die linearen zu berücksichtigen (B 2, W. Fr. Meyer). Unterwirft man jene Variabeln irgend einer linearen Gruppe, so unterliegen die Koeffizienten der gegebenen Formen gleichfalls einer gewissen linearen Gruppe, und die Aufgabe der linearen Invariantentheorie ist, die Invarianten dieser letzteren Gruppe, oder allgemeiner, einer beliebigen linearen Untergruppe, aufzustellen, sie sachgemäss zu klassifizieren, und die unbegrenzte Reihe derselben als ganze resp. als rationale Funktionen einer endlichen Anzahl unter ihnen darzustellen. Ein besonderes Interesse beanspruchen dabei wegen ihrer Beziehungen zur Gleichungstheorie, zur Analysis und Geometrie die aus einer endlichen Anzahl von Substitutionen zusammengesetzten Gruppen, denen daher noch ein besonderer Artikel (B 3 f, A. Wiman) gewidmet ist.

Als der eigentliche Träger des ganzen Abschnitts darf die schon in B 1 c berührte *Galois*'sche Theorie der Gleichungsgruppen (B 3 c, d, O. Hölder) gelten, die, ursprünglich von der speziellen Frage nach der Auflösbarkeit gewisser Gleichungen durch Wurzelzeichen ausgehend, in ihrer weiteren Entwickelung sich die Theorien algebraischer wie arithmetischer und geometrischer Rationalitätsbereiche (sowie auch die formalen Integrationstheorien der Differentialgleichungen) untergeordnet hat. Eine Einleitung in diese Theorie bildet die Lehre (B 3 b, K. Th. Vahlen) von den ein- und mehrwertigen algebraischen Funktionen einer oder mehrerer Grössenreihen, insbesondere der Wurzeln von Gleichungen und Gleichungssystemen.

Die *Zahlentheorie* oder die explizite Ausführung der Eigenschaften der einzelnen arithmetischen Rationalitätsbereiche liesse sich vom heutigen Standpunkt aus direkt an den Artikel B 1 c anschliessen. Aus historischen Gründen empfahl sich jedoch die Gestaltung eines besonderen Abschnittes (C).

An die Darstellung der elementaren Teilbarkeitsgesetze der natürlichen Zahlen (C 1, P. Bachmann) schliesst sich die Behandlung der linearen, bilinearen, quadratischen, und gewisser höherer Formen, Gleichungen und Kongruenzen (C 2, K. Th. Vahlen); die schon in der Algebra hervorgetretenen Begriffe der Elementarteiler und des Ranges einer Matrix dienen hierbei als grundlegende Klassifikationsprinzipien.

Der folgende Artikel (C 3, P. Bachmann) über analytische Zahlentheorie wird einmal den zerstreuten Methoden über additive Zusammensetzung von Zahlen gerecht, deren systematische Behandlung noch aussteht. Andererseits geht er auf die approximative Bestimmung mittlerer Werte zahlentheoretischer Funktionen ein. Endlich werden, im Anschluss an die periodischen Eigenschaften algebraischer Zahlen, die neuerdings hervorgetretenen Fragen nach der Transzendenz ausgezeichneter Irrationalitäten, wie e und π, erörtert.

Das Hauptziel der heutigen systematischen Zahlentheorie, die Ausdehnung der Teilbarkeitsgesetze der natürlichen Zahlen, sowie im Anschluss daran der Reziprozitätsgesetze der Potenzreste auf die algebraischen Zahlkörper, d. h. auf die rationalen Funktionen algebraischer Zahlen, insbesondere der quadratischen, wird in C 4 a, b (D. Hilbert) verfolgt. War die Aufgabe im Falle eines Kreiskörpers durch Einführung der idealen Zahlen gelöst, so treten im allgemeinen Falle die Schöpfungen der Körperideale resp. Körperformen an deren Stelle.

Der besondere Fall der in der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen auftretenden quadratischen Klassenkörper findet seine Erledigung in C 6 (H. Weber).

Von der bis hierher behandelten niederen und höheren Arithmetik und Algebra lässt sich sagen, dass sie eine geschlossene Einheit ausmachen.

Nicht das Gleiche gilt von den nun folgenden, schon oben berührten Abschnitten; sie genügen mehr *der negativen Definition, weder zum Vorhergehenden, noch zu den nächsten zwei Bänden zu gehören.*

Der Abschnitt D wird im wesentlichen von der Wahrscheinlichkeitsrechnung beherrscht; wenn sich auch beispielsweise die Ausgleichungsrechnung (D 2) theoretisch ohne Hilfe spezifischer Wahrscheinlichkeitsbegriffe aufbauen lässt, so haben sich doch die einschlägigen Begriffe und Methoden an der Hand der Wahrscheinlichkeitsrechnung allmählich entwickelt.

Die *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (D 1, E. Czuber), im Anfange nur eine Anwendung der Kombinatorik auf einige Hazardspiele, hat, vornehmlich nach Adoption infinitesimaler und geometrischer Grundbegriffe, ihren Umfang derart ausgedehnt, dass sie einer ansehnlichen Anzahl mathematischer Approximationsmethoden explizite oder implizite zu Grunde liegt. Erkenntnistheoretisch hat sie das Verdienst, den Begriff des Zufalles oder vielmehr der ihn begleitenden Umstände bis zu einem gewissen Grade in mathematische Ansätze und Gesetze aufgelöst zu haben.

Die ergiebigste Quelle der *Ausgleichungsrechnung* (D 2, J. Bauschinger) ist das Prinzip vom Minimum der Summe der Fehlerquadrate, das ja auch in modifizierter Fassung, als Prinzip vom kleinsten Zwange, als die Quelle der ganzen Dynamik dienen kann.

In der *Interpolationsrechnung* (D 3, J. Bauschinger) wird eine beliebige, durch gewisse Daten festgelegte Funktion durch eine ganze rationale Funktion oder auch durch eine endliche trigonometrische Reihe approximiert; sowohl bei der praktischen Ausgestaltung der erforderlichen Algorithmen, wie bei der mehr theoretisch interessierenden Aufstellung der Restglieder leistet die Differenzenrechnung wertvolle Dienste, die in Art. E (D. Seliwanoff) selbständig behandelt wird.

Die Aufgaben der *Statistik* (D 4 a, L. v. Bortkiewicz) und *Lebensversicherung* (D 4 b, G. Bohlmann) sprechen für sich selbst.

Der Artikel F (R. Mehmke), über *numerisches Rechnen*, enthält mehr, als sein Titel angibt. Ausgehend von Kunstgriffen und Tabellen, die dazu dienen, das praktische Rechnen mit rationalen und irrationalen Zahlen zu erleichtern, dehnt sich der Stoff durch Verwendung der mannigfaltigsten Arten von Rechenapparaten und Maschinen zu einer weiten mathematisch-technischen Disziplin aus; darüber hinaus wird er durch Einbeziehung fruchtbarer graphischer Methoden zu einer Art geometrischer Arithmetik.

Die Artikel G 1 (W. Ahrens), G 2 (L. Pareto) über *Spiele* und *Wirtschaftslehre* mögen als Anhang angesehen werden.

Der Artikel G 3 (A. Pringsheim) über *unendliche Prozesse mit komplexen Termen*, der eine unmittelbare Ergänzung sowohl zu A 3, wie zu A 4 darstellt, war ursprünglich für den zweiten Band bestimmt. Mit Rücksicht auf seine nahe Beziehung zu diesen Aufsätzen und in Übereinstimmung mit der in der französischen Ausgabe der Encyklopädie getroffenen Anordnung ist er nachträglich dem ersten Bande als Schlussartikel zugewiesen worden.

Um dem Leser eine bequemere Handhabung des ganzen Bandes zu ermöglichen, ist derselbe in zwei Teile zerlegt worden. Aus inneren und äusseren Gründen empfahl es sich, den ersten Teil mit dem letzten Artikel (B 3 f) des Abschnittes B (Algebra) abzuschliessen.

Möge die Encyklopädie, die die mathematischen Erfindungen eines Jahrhunderts in historischer Entwickelung vorführt, auch das erkenntnistheoretische Studium der grundlegenden Frage, was in der Mathematik denn eigentlich als „neu" zu gelten habe, beleben! Besteht das Neue in einer durch innere Anschauung gewonnenen Vermehrung und Vertiefung eines Besitzstandes aprioristischer Erkenntnisse oder kommt es nur zurück auf eine andere Gruppierung vorhandener Erfahrungsthatsachen?

Sodann sei es noch gestattet, die leitenden Gesichtspunkte auseinanderzusetzen, nach denen das *Register* bearbeitet worden ist. Dasselbe sollte ein Wort- und Sachregister sein.

In das *Wortregister* sind nur Ausdrücke aufgenommen, die in dem vorliegenden Bande wirklich vorkommen; wenn sich diese Aufnahme auch auf eine erhebliche Anzahl von Termini erstreckt hat, die entweder veraltet, oder nur weniger im Umlauf sind, oft auch nur einer augenblicklichen Idee des Autors entsprungen sein mögen, so geschah das, um auch diejenigen, die sich für die philologische Seite der Wortbildungen interessieren, bis zu einem gewissen Grade zu befriedigen. Weniger einfach gestaltete sich die Auswahl bei dem ansehnlichen Schatze von Ausdrücken technischer Natur, wie sie sich vornehmlich in den Artikeln über Statistik und Lebensversicherung, Numerisches Rechnen, Spiele und Wirtschaftslehre vorfinden. Der Herausgeber hat sich bemüht, hierbei Ausdrücke für solche Objekte herauszugreifen, denen immer noch ein gewisses Mass mathematischer Denkweise zukommt.

Was das *Sachregister* angeht, so sei vorab auf zwei Schwierigkeiten hingewiesen, die nur annähernd gelöst werden konnten.

Das ist einmal die Frage nach den zu zitierenden *Autoren.* Mit einigen Ausnahmen sind hier bei den Stichworten nur solche Autoren berücksichtigt, die der Gegenwart nicht mehr angehören, und auch diese zumeist nur dann, wenn ihr mit einem bestimmten Begriffe oder Satze oder einer spezifischen Methode verbundener Name — oft freilich nur zufällig oder auch missbräuchlich — zu einer Art gangbarer Münze geworden ist. Andererseits lag die Versuchung nahe, wenn ein Autor angeführt wurde, hinsichtlich seiner hervorstechenden Leistungen eine gewisse Vollständigkeit anzustreben. Der an sich berechtigte Wunsch, den Mancher gehegt haben wird, dass dies Prinzip auf möglichst viele oder gar alle Autoren hätte ausgedehnt werden sollen, konnte schon mit Rücksicht auf den zur Verfügung stehenden Raum nicht befriedigt werden. Wo dagegen der Name eines Forschers, oft nur der grösseren Deutlichkeit halber, innerhalb des Registertextes erwähnt wurde, ist er nicht durch den Druck hervorgehoben worden, da eine derartige Hervorhebung für andere Zwecke vorbehalten wurde (s. u.).

Die andere Schwierigkeit lag in den *Wortbildungen* selbst. Die grosse Anzahl der Mitarbeiter lässt es erklärlich erscheinen, dass ein und dasselbe Wort durchaus nicht stets denselben Begriff bezeichnet, und dass umgekehrt ein und derselbe Begriff, von Sätzen und Methoden gar nicht zu reden, mit den verschiedensten Namen belegt wird.

Der Herausgeber hat keine Mühe gescheut, sachlich zusammengehörige Zitate auch je an einer Stelle zu vereinigen, ist sich aber sehr wohl bewusst, dass in dieser Hinsicht noch viele Lücken verblieben sein werden, und umgekehrt manches Überflüssige Eingang gefunden hat. Dass bei Stichworten, die umfangreichere Begriffsgattungen angeben, Einzelheiten nach Möglichkeit unterdrückt werden mussten, bedarf wohl kaum der Rechtfertigung. Dass dagegen die Übersichtlichkeit des Registertextes durch häufige Einschachtelungen gelitten hat, soll ohne weiteres zugestanden werden.

Es wird vielleicht Bedenken erregen, dass auch eine Reihe von *Adjektiven* den Stichworten einverleibt wurde. Es geschah das indessen bei solchen Adjektiven, die mehr sind, als blosse Epitheta, die vielmehr eine besonders charakteristische Eigenschaft des Hauptwortes zum Ausdruck bringen. Da andererseits das Hauptwort als Stichwort nicht fehlen durfte, so gleicht das Register nach verschiedener Richtung einer mathematischen Tafel mit doppeltem, zuweilen sogar mehrfachem Eingange.

Über die Hervorhebung durch den Druck ist zu bemerken, dass die Stichworte, sowie Verweise auf solche, durch gesperrte Lettern wiedergegeben sind. Der *kursive* Druck ist verwandt zur Kenntlichmachung der Unterabschnitte innerhalb grösserer Wortartikel, sei es, dass sich diese Abschnitte auf charakteristische Bereiche des Bandes beziehen, oder auch auf Ableitungen und Zusammensetzungen des Stichwortes. Es erschien dabei zweckmässig, jene charakteristischen Bereiche der Kürze halber zum Teil besonders zu benennen. So z. B. wurden die Artikel B 1 c und C 4 a, b unter dem Gattungsnamen „Körpertheorie“ zusammengefasst, ferner die in F einen grossen Raum einnehmenden graphischen Methoden unter „Graphik“, u. a. m. Bezüglich einer spezifischen Verwendung des Semikolons, sowie runder und eckiger Klammern gibt die am Kopfe der ersten Registerseite befindliche Bemerkung Auskunft.

Von der ursprünglichen Absicht, jedes Zitat unter Anführung des Artikels und dessen Verfassers zu geben, wurde mit Rücksicht auf den Umfang Abstand genommen. Eben bezüglich des Umfanges sind dem Herausgeber die verschiedenartigsten Wünsche zugegangen, die sich etwa in den Grenzen von zwei bis zu zehn Bogen bewegen. Der thatsächliche Umfang von nicht ganz $4^1/_2$ Bogen ergibt im Verhältnis zu den $70^1/_2$ Bogen Text des Bandes einen Prozentsatz von etwas über $6\,\%$.

Zur Beurteilung des Registers sei noch auf seine Entstehung hingewiesen; erst nachdem von jedem Artikel ein gesondertes Register angefertigt war, wurden diese, so gut es anging, in ein Ganzes zusammengezogen.

Ursprünglich bestand die Absicht, dem Bande auch noch Berichtigungen und Nachträge beizufügen. Inzwischen ist das bisher in dieser Hinsicht zusammengekommene Material so inhomogen, dass hiervon Abstand genommen wurde, in der Hoffnung, es werde später möglich sein, was ja auch aus anderen Gründen durchaus erwünscht ist, den jeweils abgeschlossenen Bänden der Encyklopädie von Zeit zu Zeit Ergänzungshefte folgen zu lassen.

Zum Schlusse erfüllt der Herausgeber gern die Pflicht, nach verschiedenen Richtungen seinen besondern Dank auszusprechen: in erster Linie den Akademieen zu Göttingen, Leipzig, München und Wien, sowie der von ihnen eingesetzten Kommission; sodann den sämtlichen Herrn Mitarbeitern des ersten Bandes, die auf ihre Beiträge namhafte Zeit und Mühe verwandt haben; ferner Herrn Kollegen H. Burkhardt, der jeden Artikel einer mehrmaligen Korrektur unterzogen und hierbei eine umfangreiche Reihe kritischer und historischer Bemerkungen beigesteuert hat; und nicht zum letzten dem Teubner'schen Verlage für sein weitgehendes Entgegenkommen bei der schwierigen und langwierigen Drucklegung.

Königsberg i/Pr., April 1904.

W. Franz Meyer
als Herausgeber.

Inhaltsverzeichnis zu Band I Teil I.

A. Arithmetik.

1. Grundlagen der Arithmetik. Von H. Schubert in Hamburg.

(Abgeschlossen im Juli 1898.)

2. Kombinatorik. Von E. Netto in Giessen.

(Abgeschlossen im Okt. 1898.)

3. Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse.

Von A. Pringsheim in München.

(Abgeschlossen im Nov. 1898.)

B. Algebra.

1a. Rationale Funktionen einer Veränderlichen; ihre Nullstellen. Von E. Netto in Giessen.

(Abgeschlossen im Mai 1899.)

1b. Rationale Funktionen mehrerer Veränderlichen. Von E. Netto in Giessen.

(Abgeschlossen im Juli 1899.)

1c. Algebraische Gebilde. Arithmetische Theorie algebraischer Grössen. Von G. Landsberg in Heidelberg.

(Abgeschlossen im Aug. 1899.)

2. Invariantentheorie. Von W. Fr. Meyer in Königsberg i. Pr.

(Abgeschlossen im Sept. 1899.)

3a. Separation und Approximation der Wurzeln. Von C. Runge in Hannover.

(Abgeschlossen im Sept. 1899.)

3b. Rationale Funktionen der Wurzeln; symmetrische und Affektfunktionen. Von K. Th. Vahlen in Königsberg i. Pr.

(Abgeschlossen im Sept. 1899.)

3c, d. **Galois'sche Theorie mit Anwendungen.** Von O. Hölder in Leipzig.

(Abgeschlossen im Okt. 1899.)

3e. Gleichungssysteme. Von E. Netto in Giessen und K. Th. Vahlen in Königsberg i. Pr. (Siehe: B 1b und B 3b.)

3f. Endliche Gruppen linearer Substitutionen. Von A. Wiman in Lund.

(Abgeschlossen im Dez. 1899.)

Inhaltsverzeichnis der einzelnen Hefte zu Band I Teil I mit ihren Ausgabedaten.

1. Teil.

A. Arithmetik.

B. Algebra.

Inhaltsverzeichnis zu Band I Teil II.

C. Zahlentheorie.

1. Niedere Zahlentheorie. Von P. Bachmann in Weimar.

2. Arithmetische Theorie der Formen. Von K. Th. Vahlen in Königsberg i. Pr.

3. Analytische Zahlentheorie. Von P. Bachmann in Weimar.

4a. Theorie der algebraischen Zahlkörper. Von D. Hilbert in Göttingen.

(Abgeschlossen im April 1900.)

4b. Theorie des Kreiskörpers. Von D. Hilbert in Göttingen.

(Abgeschlossen im April 1900.)

5. Arithmetische Theorie algebraischer Grössen. Von G. Landsberg in Heidelberg. (Siehe: B 1c, p. 284—301.)

6. Komplexe Multiplikation. Von H. Weber in Strassburg.

(Abgeschlossen im Juni 1900.)

D. Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung.

1. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von E. Czuber in Wien.

(Abgeschlossen im Aug. 1900.)

2. Ausgleichungsrechnung. Von J. Bauschinger in Berlin.

(Abgeschlossen im Aug. 1900.)

3. Interpolation. Von J. Bauschinger in Berlin.

E. Differenzenrechnung.

1. Differenzenrechnung. Von D. Seliwanoff in St. Petersburg.

(Abgeschlossen im April 1901.)

F. Numerisches Rechnen.

1. Numerisches Rechnen. Von R. Mehmke in Stuttgart.

(Abgeschlossen im Juni 1902.)

G. Ergänzungen zum I. Bande.

1. Mathematische Spiele. Von W. Ahrens in Magdeburg.

(Abgeschlossen im Juni 1902.)

2. Anwendungen der Mathematik auf Nationalökonomie. Von V. Pareto in Lausanne.

Inhaltsverzeichnis der einzelnen Hefte zu Band I Teil II mit ihren Ausgabedaten.

2. Teil.

I A 1. GRUNDLAGEN DER ARITHMETIK.

(DIE VIER GRUNDRECHNUNGSARTEN; EINFÜHRUNG DER NEGATIVEN UND DER GEBROCHENEN ZAHLEN; OPERATIONEN DRITTER STUFE IN FORMALER HINSICHT.)

VON

H. SCHUBERT

IN HAMBURG.

Inhaltsübersicht.

1. Zählen und Zahl. Dinge[1]) *zählen* heisst, sie als gleichartig[2]) ansehen, zusammen auffassen[2]), und ihnen einzeln andere Dinge zu-

1) Dass auch *unkörperliche* Dinge gezählt werden können, betont *G. F. Leibniz,* den Scholastikern gegenüber, „De arte combinatoria" (1666), ebenso *J. Locke* in seinem Werke „An Essay concerning human understanding" (1690, Book II). Dagegen sieht *J. St. Mill* (Logic, Book III, 26) die in der Definition einer Zahl ausgesagte Thatsache als eine *physische* an, ähnlich *G. Frege,* „Grundlagen der Arithmetik" (Breslau 1884).

2) Dass dem Zählprozess einerseits ein Zusammenfassen der zu zählenden Dinge, andrerseits aber auch die Erkenntnis der *Gleichartigkeit* der zu zählenden Dinge vorangehen muss, hebt *E. Schröder* in seinem „Lehrbuch der Arithmetik" (Leipzig 1873) p. 4 hervor, ebenso *E. Mach* in seinem Buch „Die Principien der Wärmelehre" (Leipzig 1896) (Nr. 7).

ordnen[3]), die man auch als gleichartig ansieht[4]). Jedes von den Dingen, denen man beim Zählen andere Dinge zuordnet, heisst *Ein-*

3) Dass ein Zählen nicht ohne ein mehr oder weniger bewusstes *Zuordnen* oder Abbilden möglich ist, pflegte *K. Weierstrass* in der Einleitung zu seinen Vorlesungen über die Theorie der analytischen Functionen hervorzuheben. (Man vgl. *E. Kossak* „Die Elemente der Arithmetik", Berlin, Progr. Friedr. Werder-Gymn., 1872). Ebenso betonen dies *E. Schröder* in seinem Lehrbuch, *L. Kronecker* in seinem Aufsatze „Über den Zahlbegriff" (Philosophische Aufsätze, Zeller gewidmet, Leipzig 1887, Journ. f. Math. 101), *R. Dedekind* in seiner Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen?" (Braunschweig 1887 und 1893), in welcher das „Zuordnen" durch eine Reihe von Definitionen (Kette) und Lehrsätzen eingehend analysiert wird.

4) In dieser Definition der Zahl stimmen wohl alle Philosophen nnd Mathematiker im wesentlichen überein. Wohl aber gehen die Ansichten darüber auseinander, welche psychischen Momente die Bildung des Zahlbegriffs ermöglichen. Nach dem Vorbilde I. Kant's betont *W. R. Hamilton* als das Fundament des Zahlbegriffs die Anschauungsform der *Zeit.* Algebra ist ihm „Science of Order in Progression" oder „Science of Pure Time". Er spricht dies zuerst aus in der in den Dubl. Trans. 17, II (1835) erschienenen Abhandlung „Theory of Conjugate Functions or Algebraic Couples with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time". Später wiederholt er diese Ansicht in der Vorrede zu seinem Werke „Lectures on Quaternions" (Dublin 1853). Auf demselben Standpunkt steht *H. Helmholtz* in seiner Abhandlung „Zählen und Messen", in den Eduard Zeller gewidmeten philosophischen Aufsätzen (Leipzig 1887); ebenso auch *W. Brix* in seiner Abhandlung „Der mathematische Zahlbegriff und seine Entwickelungsformen" (Band V und VI der von Wundt herausgegebenen Philosophischen Studien; auch als Dissertation, Leipzig 1889). erschienen). Dagegen sagt *J. F. Herbart* in seiner „Psychologie als Wissenschaft" (Königsberg 1824, Band II), dass die Zahl mit der Zeit nicht mehr zu thun habe, als viele andere Vorstellungsarten. *J. J. Baumann* und *F. A. Lange* meinen, dass die Zahl weit besser mit der *Raum*vorstellung als mit der Zeitvorstellung in Einklang stehe, und zwar *J. J. Baumann* in seinem Werke „Die Lehre von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosophie" (Berlin 1869) und *F. A. Lange* in seinen „Logischen Studien" von 1877. Ebenso bekämpft *E. G. Husserl* die Bestrebungen, welche den Zahlbegriff auf die Vorstellung der Zeit gründen, und zwar im I. Bande seines Werkes „Philosophie der Arithmetik", Halle 1891.

Häufig wird *Aristoteles* als derjenige hingestellt, der zuerst die Zahl definiert hat, und zwar aus dem Begriff der Zeit. Dies ist nicht richtig. Aristoteles definiert umgekehrt die Zeit vermittelst des Zahlbegriffs und zwar in seiner „Physica auscultatio" (IV. Buch, 11. Kapitel, p. 219β oder deutsche Übersetzung von Prantl, Leipzig 1854, p. 207 u. f.), wo es heisst: „Zeit ist die Zahl der Bewegung nach dem Früher und Später" und weiterhin: „Zeit ist die Zahl der Raumbewegung". Der oft wiederholte Ausspruch *Euclid's* (Elemente, VII. Buch) „Die Zahl ist eine Vielheit von Einheiten" kann kaum als Definition aufgefasst werden.

Analysen des Zahlbegriffs sind *ausser in den schon zitierten Schriften* namentlich noch in den folgenden neueren Abhandlungen und Büchern zu finden:

heit[5]); jedes von den Dingen, die man beim Zählen andern Dingen zuordnet, heisst *Einer*[5]). Das Ergebnis des Zählens heisst *Zahl.* Wegen der Gleichartigkeit der Einheiten unter einander und der Einer unter einander ist die Zahl unabhängig von der Reihenfolge, in welcher den Einheiten die Einer zugeordnet werden[6]).

Wenn man bei einer Zahl durch einen hinzugefügten Sammelbegriff daran erinnert, inwiefern die Einheiten als gleichartig angesehen wurden, spricht man eine *benannte Zahl* aus. Durch vollständiges Absehen von der Natur der gezählten Dinge gelangt man vom Begriff der benannten Zahl zum Begriff der *unbenannten* Zahl. Unter Zahl schlechthin ist immer eine unbenannte Zahl zu verstehen.

Um Zahlen *mitzuteilen,* kann man als Einer irgend welche gleichartigen Dinge wählen (Finger, Rechenkugeln, Kreidestriche). Wilde Völker, die keine Schrift haben, nehmen Steine oder Muscheln als Einer, wenn sie Zahlen mitteilen wollen. Ordnet man den zu zählenden Dingen gleichartige Schriftzeichen zu, so erhält man die *natürlichen Zahlzeichen*[7]). So stellten in ältester Zeit die Römer die Zahlen von eins bis neun durch Aneinanderreihung von Strichen, die Azteken

---

W. Wundt, Logik, Band I;

G. Frege, Grundlagen der Arithmetik, Breslau 1884;

R. Lipschitz, Grundlagen der Analysis, Bonn 1877 (§ 1);

U. Dini, Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen Grösse, übersetzt von *J. Lüroth* (Leipzig 1892);

G. Peano, Arithmetices principia nova methodo exposita, Torino 1889;

K. Th. Michaelis, Über Kant's Zahlbegriff, Progr. Charlottenburg, Berlin, bei Gärtner, 1884;

E. Knoch, Über den Zahlbegriff und den elementaren Unterricht in der Arithmetik, Programm des Realprogymnasiums in Jenkau, 1892;

G. F. Lipps, Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik in Wundt's Philosophischen Studien (von Band X an); das vierte Kapitel (in Band XI) enthält die logische Entwickelung des Zahlbegriffs.

Von diesen Autoren knüpfen *G. Peano* und *E. Knoch* an Dedekind's Abbildungen in dessen schon zitierter Schrift an.

Auf den Zahlbegriff lassen sich die Gesetze der Arithmetik *ohne irgend ein Axiom* aufbauen, wie u. a. *K. Weierstrass* in seinen Vorlesungen betonte.

5) Die Unterscheidung von Einheiten und Einern in diesem Sinne rührt von *E. Schröder* her (Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Leipzig 1873, p. 5 oder Abriss der Arithmetik und Algebra, erstes Heft, p. 1).

6) *H. Helmholtz* und *L. Kronecker,* in den schon zitierten Aufsätzen zu Zeller's Jubiläum, denken sich die Zuordnung so, als wenn den zu zählenden Einheiten die Zahlen Eins, Zwei, Drei u. s. w. zugeordnet werden. Diese Ansicht bekämpft *E. G. Husserl* im Anhang zum ersten Teile seiner „Philosophie der Arithmetik" (Halle 1891).

7) Über *Zahl-Mitteilung* und *Zahl-Darstellung* durch Wort oder Schrift findet man Eingehendes in folgenden Schriften:

die Zahlen von eins bis neunzehn durch Zusammenstellung einzelner Kreise dar. Die modernen Kulturvölker haben natürliche Zahlzeichen nur noch auf den Würfeln, den Dominosteinen und den Spielkarten. Ordnet man den zu zählenden Dingen gleichartige Laute zu, so erhält man die natürlichen Zahllaute, wie sie z. B. die Schlagwerke der Uhren ertönen lassen. Statt solcher natürlicher Zahlzeichen und Zahllaute gebraucht man gewöhnlich Zeichen und Wörter, die sich aus wenigen elementaren Zeichen und Wortstämmen methodisch zusammensetzen[7]). Die moderne Zifferschrift, welche auf dem Princip des Stellenwertes und der Einführung eines Zeichens für nichts beruht, ist von indischen Brahma-Priestern erfunden, gelangte um 800 zur Kenntnis der Araber und um 1200 nach dem christlichen Europa, wo im Laufe der folgenden Jahrhunderte die neue Zifferschrift und das neue Rechnen allmählich das Rechnen mit römischen Ziffern verdrängte[7]).

Die Lehre von den Beziehungen der Zahlen zu einander heisst *Arithmetik* (ἀριθμός, Zahl). *Rechnen* heisst, aus gegebenen Zahlen gesuchte Zahlen methodisch ableiten. In der Arithmetik ist es üblich, eine beliebige Zahl durch einen *Buchstaben* auszudrücken, wobei nur zu beachten ist, dass innerhalb einer und derselben Betrachtung der-

---

M. Cantor, Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker, Halle 1863;

G. Friedlein, Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert, Erlangen 1869; Gerbert, Die Geometrie des Boethius und die indischen Ziffern, Erlangen 1861.

H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Leipzig 1874;

M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Leipzig 1880, I. Band;

A. F. Pott, Die quinäre und vigesimale Zählmethode bei Völkern aller Weltteile, Halle 1847;

A. F. Pott, Die Sprachverschiedenheit in Europa, an den Zahlwörtern nachgewiesen, Halle 1868;

K. Fink, Kurzer Abriss einer Geschichte der Elementar-Mathematik, Tübingen 1890;

A. von Humboldt, Über die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen und über den Ursprung des Stellenwertes in den indischen Zahlen (J. f. Math., Band 4);

P. Treutlein, Progr. Gymn. Karlsruhe 1875.

M. Chasles, Sur le passage du premier livre de la géométrie de Boèce, Brux. 1836; Aperçu historique ..., Brux. 1837; Par. C. R. 4, 1836; 6, 1838; 8, 1839.

F. Unger, Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung, Leipzig 1888;

H. G. Zeuthen, Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Kopenhagen 1896;

H. Schubert, Zählen und Zahl, eine kulturgeschichtliche Studie, in Virchow-Holtzendorff's Sammlung gemeinv. wiss. Vorträge, Hamburg 1887.

selbe Buchstabe auch immer nur eine und dieselbe Zahl bedeuten darf[8]).

Gleich[9]) heissen zwei Zahlen a und b, wenn die Einheiten von a und die von b sich einander so zuordnen lassen, dass alle Einheiten von a und von b an dieser Zuordnung teilnehmen. *Ungleich*[9]) heissen zwei Zahlen a und b, wenn ein solches Zuordnen nicht möglich ist. Da beim Zählen die Einheiten als gleichartig betrachtet werden, so ist es für die Entscheidung, ob a und b gleich oder ungleich sind, gleichgültig, welche Einheiten von a und von b einander zugeordnet werden. Wenn zwei Zahlen ungleich sind, so nennt man die eine die *grössere*, die andere die *kleinere*[9]). a heisst grösser als b, wenn sich die Einheiten von a und die von b einander so zuordnen lassen, dass zwar alle Einheiten von b, aber nicht alle von a an dieser Zuordnung teilnehmen. Das Urteil, dass zwei Zahlen gleich, bezw. ungleich sind, heisst eine *Gleichung*, bezw. *Ungleichung*. Für gleich, grösser, kleiner benutzt man in der Arithmetik bezw. die drei Zeichen $=$, $>$, $<$,[9]) die man zwischen die verglichenen Zahlen setzt. Wenn man aus mehreren Vergleichungen einen Schluss zieht, so deutet man dies durch einen wagerechten Strich an. Die fundamentalsten Schlüsse der Arithmetik sind:

$$\frac{a = b}{b = a}; \quad \frac{a > b}{b < a}; \quad \frac{a < b}{b > a}.$$

Diese Schlüsse beziehen sich auf nur zwei verglichene Zahlen. Auf drei Zahlen beziehen sich die folgenden Schlüsse:

---

8) Die ersten Keime einer arithmetischen Buchstabenrechnung finden sich schon bei den Griechen (Nikomachos um 100 n. Chr., Diophantos um 300 n. Chr.), mehr noch bei den Indern und Arabern (Alchwarizmî um 800 n. Chr., Alkalsâdî um 1450). Die eigentliche Buchstabenrechnung mit Verwendung der Zeichen $=$, $>$, $<$ und der Operationszeichen ist jedoch erst im 16. Jahrhundert ausgebildet (Vieta † 1603), vor allem in Deutschland und Italien. Das jetzt übliche Gleichheitszeichen findet sich zuerst bei *R. Recorde* (1556). Hierüber Näheres in:

L. Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen, 1878;

P. Treutlein, Die deutsche Coss, Zeitschr. f. Math., Band 24;

S. Günther, Geschichte des math. Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525, Berlin 1887; Beiträge zur Erfindung der Kettenbrüche, Progr., Weissenburg 1872; Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der math. Wissenschaften, Leipzig 1876.

Erst durch *L. Euler* (von 1707—1783) hat die arithmetische Zeichensprache die heutige festere Gestalt bekommen.

9) Eine genauere Analyse der Begriffe gleich, mehr, weniger, grösser und kleiner findet man in *E. G. Husserl*'s Philosophie der Arithmetik, Band I, Kap. 5 und 6 (Halle 1891), woselbst auch weitere philosophische Literatur zu finden ist.

$$\frac{\begin{matrix} a = m \\ b = m \end{matrix}}{a = b}; \quad \frac{\begin{matrix} a > m \\ b = m \end{matrix}}{a > b}; \quad \frac{\begin{matrix} a < m \\ b = m \end{matrix}}{a < b}; \quad \frac{\begin{matrix} a > m \\ m > b \end{matrix}}{a > b}.$$

2. Addition[10]). Wenn man zwei Gruppen von Einheiten hat, und zwar so, dass nicht allein alle Einheiten jeder Gruppe gleichartig sind, sondern dass auch jede Einheit der einen Gruppe jeder Einheit der andern Gruppe gleichartig ist, so kann man zweierlei thun: entweder man kann jede Gruppe einzeln zählen und jedes der beiden Zähl-Ergebnisse als Zahl auffassen oder man kann die Zählung über beide Gruppen erstrecken und das Zähl-Ergebnis als Zahl auffassen. Im ersteren Falle erhält man zwei Zahlen, im letzteren Falle nur eine Zahl. Man sagt dann von dieser im

---

10) Der hier im Text vollzogene logisch genaue *Aufbau* der vier fundamentalen Operationen der Arithmetik wurde am ausführlichsten von *E. Schröder* in seinem Lehrbuch (Leipzig 1873, Band I: Die sieben algebraischen Operationen) durchgeführt. Ausser ihm haben Verdienste um einen solchen Aufbau:

1) *M. Ohm,* Versuch eines vollkommen konsequenten Systems der Arithmetik (2 Bände, II. Auflage, Berlin 1829);
2) *W. R. Hamilton*, Preface zu den Lectures on Quaternions, Dublin 1853.
3) *M. Cantor,* Grundlage einer Elementararithmetik, Heidelberg 1855;
4) *H. Grassmann,* Lehrbuch der Arithmetik, Berlin 1861;
5) *H. Hankel,* Theorie der komplexen Zahlsysteme, Leipzig 1867 (Abschnitt I, II, III);
6) *J. Bertrand,* Traité d'arithmétique, 4. édition, Paris 1867;
7) *R. Baltzer,* Die Elemente der Mathematik, I. Band, letzte (7.) Auflage, Leipzig 1885;
8) *O. Stolz,* Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, Leipzig 1885.

Eine Verbindung des konsequenten Aufbaues mit didaktischen Rücksichten auf Anfänger versuchte zuerst *E. Schröder* in seinem Abriss der Arithmetik und Algebra, I. Heft, Leipzig 1874, dann ausführlicher *H. Schubert* in seinen Lehrbüchern (Sammlung von arithmetischen und algebraischen Fragen und Aufgaben, vier Auflagen, Potsdam 1883 bis 1896, System der Arithmetik, Potsdam 1885, Arithmetik und Algebra in Sammlung Göschen (Leipzig 1896 und 1898).

In früheren Jahrhunderten herrschte sogar noch Unklarheit darüber, welche Operationen als arithmetische Grund-Operationen zu betrachten sind, so um die Mitte des 15. Jahrhunderts bei *J. Regiomontanus, G. v. Peurbach, Lucius Pacioli* und im *Bamberger Rechenbuch. Peurbach*'s Algorithmus kennt z. B. acht Grund-Operationen, nämlich Numeratio, Additio, Subtractio, Mediatio, Duplatio, Multiplicatio, Divisio, Progressio.

Im Zusammenhang mit *allgemeineren* Gesichtspunkten erscheinen die Operationen und Gesetze der Arithmetik in der *formalen Arithmetik,* im *Logikkalkül* und in der *Begriffsschrift.* Die formale Arithmetik studiert die Beziehungen von Grössen, ohne Rücksicht darauf, dass diese Grössen Zahlen sind. Namentlich lese man hierzu einerseits *H. Grassmann*'s Ausdehnungslehre, 1844 und 1878, andrerseits *H. Hankel*'s Theorie der komplexen Zahlsysteme, Leipzig 1867. Bezüglich des Logikkalküls und der Begriffsschrift vgl. man Bd. VI.

letzteren Falle erhaltenen Zahl, dass sie die *Summe* der beiden im ersteren Falle erhaltenen Zahlen sei, und diese beiden Zahlen nennt man die *Summanden* der Summe. Der soeben geschilderte Übergang von zwei Zahlen zu einer einzigen heisst *Addition*. Zählen und Addieren unterscheiden sich also nur dadurch, dass man beim Zählen mit einer einzigen Gruppe, beim Addieren mit zwei Gruppen von Einheiten zu thun hat. Um anzudeuten, dass aus zwei Zahlen a und b eine dritte Zahl s durch Addition hervorgegangen ist, setzt man das Zeichen $+$ (plus) zwischen die beiden Summanden. Aus den Erklärungen des Grösserseins und der Addition folgt: Eine Summe ist grösser als einer ihrer Summanden, nämlich um den andern Summanden. Wenn $a > b$ ist, so kann a Summe von zwei Summanden sein, von denen der eine b ist.

Aus dem Begriff des Zählens folgt, dass es immer nur eine Zahl geben kann, welche die Summe zweier beliebigen Zahlen ist, und dass es umgekehrt auch nur eine Zahl geben kann, die, mit einer gegebenen Zahl durch Addition verbunden, zu einer *grösseren* gegebenen Zahl als Summe führt.

Da das Ergebnis des Zählens unabhängig von der Reihenfolge ist, in der man zählt, so muss sein:

$$a + b = b + a.$$

Man nennt das hierin ausgesprochene Gesetz das *Commutationsgesetz*[11]) der Addition. Trotz dieses Gesetzes kann man begrifflich die beiden

---

11) Wenn $+$ das Zeichen für eine ganz allgemein gedachte Verknüpfung zweier Grössen ist, so gilt für diese Verknüpfung das *commutative* Gesetz (Commutationsgesetz), wenn $a + b = b + a$ ist, das *associative* Gesetz (Associationsgesetz), wenn $(a + b) + c = a + (b + c)$ ist. Wenn ferner $\times$ das Zeichen für eine zweite allgemein gedachte Verknüpfung ist, so gilt für beide das *distributive* Gesetz (Distributionsgesetz), wenn $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ ist, oder wenn $(a \times b) + c = (a + c) \times (b + c)$ ist. Die Unterscheidung dieser drei Grundgesetze und deren Namen findet man in Deutschland zuerst bei *H. Hankel* (Theorie der komplexen Zahlsysteme, Leipzig 1867), in England schon seit etwa 1840, und zwar sind (nach Hankel) die Ausdrücke commutativ und distributiv zuerst von Servois (Gergonne's Ann., Bd. V, 1814, p. 93) gebraucht, associativ wahrscheinlich zuerst von Hamilton. Auch in allgemeineren Beziehungen als den arithmetischen Operationen spielen diese drei Grundgesetze eine fundamentale Rolle, so in der formalen Mathematik, dem Logikkalkül und der Begriffsschrift. (Vgl. hier Bd. VI.) Im Logikkalkül bedeutet $a + b$ alles, was entweder a oder b ist, $a \cdot b$ alles, was zugleich a und b ist. Für jede dieser Operationen gilt das commutative und das associative Gesetz. Ausserdem gilt das distributive Gesetz in beiderlei Gestalt, indem $(a + b) \,.\, c = (a \,.\, c) + (b \,.\, c)$ und ausserdem $(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c)$ ist. Hierauf machte *E. Schröder* in seiner Schrift „Operationskreis des Logikkalküls" (Leipzig 1877) aufmerksam.

Summanden unterscheiden, indem man bei der Operation des Addierens den einen als passiv[12]), den andern als aktiv[12]) auffasst. Den passiven Summanden könnte man *Augend*[12]), den aktiven *Auctor*[12]) (Increment[12])) nennen. Diese begrifflich mögliche Unterscheidung ist wegen des Commutationsgesetzes arithmetisch unnötig.

Aus dem Begriff des Zählens folgt ferner:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Das durch diese Gleichung ausgesprochene Gesetz heisst das *Associationsgesetz*[11]) der Addition.

Aus der Eindeutigkeit der Addition allein folgt das Gesetz über die Verbindung zweier Gleichungen durch Addition, wonach aus $a = b$ und $c = d$ folgt: $a + c = b + d$. Wie aber eine Gleichung und eine Ungleichung oder zwei Ungleichungen zu verbinden sind, kann nur durch Anwendung des Associationsgesetzes erkannt werden. Die vereinigte Wirkung beider Grundgesetze der Addition ergiebt:

Wenn beliebig viele Zahlen in beliebiger Reihenfolge durch Addition so verbunden werden, dass immer die Summe zweier Zahlen wieder als Summand einer neuen Addition auftritt, so ist die Zahl, die das schliessliche Ergebnis darstellt, immer dieselbe, gleichviel, in welcher Reihenfolge die vorliegenden Zahlen durch Addition verbunden werden.

Diese Wahrheit berechtigt dazu, das letzte Ergebnis die *Summe aller* gegebenen Zahlen zu nennen, und damit den Begriff der Summe dahin zu erweitern, dass dieselbe nicht allein zwei, sondern beliebig viele Summanden haben darf.

3. Subtraktion[10]). Bei der Addition sind zwei Zahlen, die beiden Summanden a und b, gegeben, und aus ihnen geht eine dritte Zahl, die Summe s, hervor. Wenn man nun umgekehrt die Summe s und den einen Summanden als gegeben betrachtet, so geht der andere Summand daraus als eine Zahl hervor, die (nach Nr. 2) eine ganz bestimmte ist. Die Aufsuchung dieser Zahl aus der Summe s und dem gegebenen Summanden nennt man *Subtraktion*[13]). Die Zahl s, die früher Summe

---

12) Die Unterscheidung der beiden durch eine arithmetische Operation verknüpften Zahlen durch die Ausdrücke *passiv* und *aktiv* gab zuerst *E. Schröder* in seinem „Abriss der Arithmetik und Algebra“ (Leipzig 1874). Bei der Addition nennt er die passive Zahl Augend, die aktive Increment. *H. Schubert* unterscheidet Augend und Auctor, z. B. in seiner „Arithmetik und Algebra“ in „Sammlung Göschen“ (Leipzig).

13) Addition, Multiplikation und Potenzierung nennt man gewöhnlich direkte Operationen und ihre Umkehrungen indirekte Operationen. Bei *H. Hankel* (Theorie

war, wird bei der soeben definierten *umgekehrten*[13]) Rechnungsart *Minuend* genannt. Der gegebene Summand könnte als aktive Zahl „*Minutor*" genannt werden. Üblich ist jedoch dafür der Name *Subtrahend.* Das Ergebnis der Subtraction heisst *Differenz.* Das Zeichen der Subtraktion ist ein wagerechter Strich (minus), vor den man den Minuend und hinter den man den Subtrahend setzt. Es ist also:

$$(s - a) + a = s$$

die *Definitionsformel* der Subtraktion. Aus der Eindeutigkeit der Subtraktion folgt hieraus zweitens:

$$(s + a) - a = s.$$

Auf der Definition der Subtraktion beruht auch die *Transpositionsregel erster Stufe,* wonach ein Subtrahend (Summand) auf der einen Seite einer Gleichung dort fortgelassen werden darf, um auf der andern Seite als Summand (Subtrahend) zu erscheinen. Durch Transponieren kann ein unbekannter Summand oder ein unbekannter Minuend *isoliert* werden, d. h. es kann dafür gesorgt werden, dass er auf der einen Seite einer Gleichung allein steht.

Identisch heisst eine Gleichung, die immer richtig bleibt, was für Zahlen man auch für die in ihr auftretenden Buchstaben setzen mag. *Formel* heisst eine identische Gleichung, wenn sie dazu dient, eine Wahrheit in arithmetischer Zeichensprache auszudrücken. *Bestimmungsgleichung* heisst eine Gleichung, die nur richtig wird, wenn die darin auftretenden Buchstaben durch bestimmte (nicht durch alle) Zahlen ersetzt werden. Wenn in einer Bestimmungsgleichung alle vorkommenden Zahlen bis auf eine bekannt sind, so pflegt man die noch unbekannte Zahl mit x[14]) zu bezeichnen, und es entsteht dann die Aufgabe, die Gleichung zu *lösen*, d. h. die Zahl zu suchen, die man für x setzen muss, damit die Gleichung richtig wird. Eine Gleichung, in der x Summand oder Minuend ist, löst man durch die Transpositionsregel erster Stufe.

---

der komplexen Zahlsysteme, Leipzig 1867) gehören die direkten Operationen der Arithmetik zu den *thetischen*, die indirekten zu den *lytischen* Verknüpfungsarten. Aus der thetischen Verknüpfungsart $a \asymp b = c$ folgen die beiden lytischen $c \top a = b$ und $c \perp b = a$.

14) Bei Diophantos wird die Unbekannte durch ein Schluss-Sigma als den letzten Bubstaben von ἀϱιϑμός bezeichnet. Über die Entstehung der Bezeichnung x für eine unbekannte Zahl lese man: *Treutlein,* Die deutsche Coss, Zeitschr. f. Math. Bd. 24 und die mehrfach angezweifelte Ansicht von *P. A. de Lagarde*, Woher stammt das x der Mathematiker? (Gött. Nachr., 1882).

4. Verbindung von Addition und Subtraktion. Aus der Definition der Subtraktion folgen bei Anwendung des Commutationsgesetzes und des Associationsgesetzes der Addition die vier Formeln:

$$a + (b - c) = (a + b) - c,$$
$$a - (b + c) = (a - b) - c,$$
$$a - (b - c) = (a - b) + c,$$
$$a - b = (a - n) - (b - n).$$

Da bei jeder dieser Formeln mindestens auf einer der beiden Seiten eine Differenz steht, so handelt es sich beim Beweise derselben nur darum, zu *prüfen*, ob die andere Seite die durch die Definition der Subtraktion vorgeschriebene Eigenschaft erfüllt, bei welcher Prüfung nur die beiden Grundgesetze der Addition oder eine Formel angewandt werden darf, die hier der zu beweisenden voraussteht und deshalb schon als bewiesen gelten kann.

Da aus $p = q$ nach Nr. **1** $q = p$ folgt, so enthält jede arithmetische Formel zwei Wahrheiten, die man erhält, je nachdem man die Formel von links nach rechts oder von rechts nach links auffasst. Wenn man das Associationsgesetz der Addition und die ersten drei der vier obigen Formeln von links nach rechts liest, so ergeben sie Regeln über Addieren und Subtrahieren von Summen und Differenzen. Wenn man sie von rechts nach links liest, so ergeben sie Regeln über Vermehrung und Verminderung von Summen und Differenzen. Auch liefern diese Formeln den Beweis dafür, dass Summanden und Subtrahenden in beliebige Reihenfolge gebracht werden können, sowie endlich die Regeln, nach denen aus einer Gleichung und einer Ungleichung oder aus zwei Ungleichungen durch Subtraktion der rechten und der linken Seiten eine neue Ungleichung erschlossen werden kann.

Die arithmetische Zeichensprache[8]) hat sich so ausgebildet, dass bei den Operationen der Addition und Subtraktion die Klammer[15]) um die *voranstehende* Rechnungsart fortgelassen werden darf, um die nachfolgende aber gesetzt werden muss, so dass das Associationsgesetz der Addition und die drei ersten der obigen Formeln auch so geschrieben werden dürfen:

---

15) Über das Setzen von *Klammern* in der Arithmetik spricht zuerst *E. Schröder* in seinem Lehrbuch die folgende allgemeine Regel aus: Ein Ausdruck, der Teil eines neuen Ausdrucks ist, wird in eine Klammer eingeschlossen. Allmählich ist es gebräuchlich geworden, diese Klammer in zwei Fällen fortzulassen, erstens wenn von zwei *gleichstufigen* Operationen die *voranstehende* zuerst ausgeführt werden soll, zweitens, wenn von zwei *ungleichstufigen* Operationen die *höherer* Stufe zuerst ausgeführt werden soll.

$$a + (b + c) = a + b + c; \quad a + (b - c) = a + b - c;$$
$$a - (b + c) = a - b - c; \quad a - (b - c) = a - b + c.$$

5. Null[16]). Da nach der Definition der Subtraktion der Minuend eine Summe ist, deren einer Summand der Subtrahend ist, so hat die Verknüpfung zweier gleicher Zahlen durch das Minuszeichen keinen Sinn. Eine solche Verknüpfung hat zwar die *Form* einer Differenz, stellt aber keine Zahl im Sinne von Nr. **1** dar. Nun befolgt aber die Arithmetik ein Princip, das man das *Princip der Permanenz*[17]) oder der Ausnahmslosigkeit nennt und das in viererlei besteht:

erstens darin, jeder Zeichen-Verknüpfung, die keine der bis dahin definierten Zahlen darstellt, einen solchen Sinn zu erteilen, dass die Verknüpfung nach denselben Regeln behandelt werden darf, als stellte sie eine der bis dahin definierten Zahlen dar;

zweitens darin, eine solche Verknüpfung als Zahl im erweiterten Sinne des Wortes zu definieren und dadurch den Begriff der Zahl zu erweitern;

drittens darin, zu beweisen, dass für die Zahlen im erweiterten Sinne dieselben Sätze gelten, wie für die Zahlen im noch nicht erweiterten Sinne;

viertens darin, zu definieren, was im erweiterten Zahlengebiet gleich, grösser und kleiner heisst[19]).

Demgemäss wird die Zeichen-Verknüpfung $a - a$ den beiden Grundgesetzen der Addition und der Definitionsformel der Subtraktion unterworfen, wodurch erzielt wird, dass die Formeln von Nr. **4** auch für die Zeichen-Verknüpfung $a - a$ gelten müssen. Durch Anwen-

---

16) Als gemeinsames Zeichen für alle Differenzformen, in denen Minuendus und Subtrahendus gleich sind, tritt die *Null* erst seit dem 17. Jahrhundert auf. Ursprünglich war die Null nur ein *Vacat-Zeichen* für eine fehlende Stufenzahl in der von den Indern erfundenen Stellenwert-Zifferschrift. (Man vgl. die in Anmerkung 7 angegebene Litteratur.) Sie heisst im Rechenbuch des im 14. Jahrhundert lebenden Mönchs Maximus Planudes (deutsch von *H. Waeschke,* Halle 1878) „tziphra“, woraus das englische cypher und das französische zéro für Null entstanden sind. Das auch von tziphra herkommende deutsche Wort Ziffer hat im Deutschen eine allgemeinere Bedeutung gewonnen. Andere Zifferschriften, wie die additive der Römer oder die multiplikative der Chinesen, haben kein Zeichen für Null.

17) Das Princip der *Permanenz,* dem hier im Text die für die Erweiterung des Zahlbegriffs geeignete Gestalt gegeben ist, ist in allgemeinster Form zuerst von *H. Hankel* (§ 3 der Theorie der komplexen Zahlsysteme, Leipzig 1867) ausgesprochen, nachdem schon *G. Peacock* die Notwendigkeit einer rein formalen Mathematik und im Zusammenhang damit ein Princip betont hatte, aus dem durch Erweiterung das der Permanenz hervorgeht (*G. Peacock* in Brit. Ass. III, London 1834, Symbolical Algebra, Cambridge 1845).

dung der Formel $a - b = (a - n) - (b - n)$ auf $a - a$ erkennt man dann, dass alle Differenzformen, bei denen der Minuendus gleich dem Subtrahendus ist, einander gleichzusetzen sind. Dies berechtigt dazu, für alle diese einander gleichen Zeichen-Verknüpfungen ein gemeinsames festes Zeichen einzuführen. Es ist dies das Zeichen 0 (null)[16]. Man nennt ferner das, was dieses Zeichen aussagt, eine „*Zahl*", die man auch Null nennt. Da aber Null kein Ergebnis des Zählens (Nr. **1**) ist, so hat der Begriff der Zahl durch die Aufnahme der Null in die Sprache der Arithmetik eine Erweiterung erfahren. Aus der Definition $a - a = 0$ ergiebt sich, wie man mit Null bei der Addition und Subtraktion zu verfahren hat, nämlich: $p + 0 = p$, $0 + p = p$, $p - 0 = p$; $0 + 0 = 0$, $0 - 0 = 0$.

6. Negative Zahlen[18]. Wenn in $a - b$ der Minuend a kleiner als der Subtrahend b ist, so stellt $a - b$ keine Zahl im Sinne von Nr. **1** dar. Nach dem in Nr. **5** eingeführten Princip der Permanenz[17] muss dann die Differenzform $a - b$ der Definitionsformel der Subtraktion $a - b + b = a$ unterworfen werden, woraus hervorgeht, dass dann die in Nr. **4** behandelten Formeln auf $a - b$ auch in dem Fall anwendbar werden, wo $a < b$ ist. Hierdurch erkennt man, dass alle Differenzformen einander gleich[19] gesetzt werden können, bei denen der Subtrahend um gleichviel grösser ist als der Minuend. Es liegt daher nahe, alle Differenzformen $a - b$, bei denen b um p grösser als a ist, durch p auszudrücken. Indem man endlich solche Differenzformen auch „*Zahlen*"

18) Obwohl bei einem logischen Aufbau der Arithmetik die Einführung der *negativen Zahlen* der Einführung der gebrochenen Zahlen vorangehen muss, so sind doch historisch die negativen Zahlen viel später in Gebrauch gekommen, als die gebrochenen Zahlen. Die griechischen Arithmetiker rechneten nur mit Differenzen, in denen der Minuend grösser als der Subtrahend war. Die ersten Spuren eines Rechnens mit negativen Zahlen finden sich bei dem indischen Mathematiker *Bhâskara* (geb. 1114), der den negativen und den positiven Wert einer Quadratwurzel unterscheidet. Auch die Araber erkannten negative Wurzeln von Gleichungen. *L. Pacioli* am Ende des 15. Jahrhunderts und *Cardano*, dessen Ars magna 1550 erschien, wissen zwar etwas von negativen Zahlen, legen ihnen aber keine selbstständige Bedeutung bei. *G. Cardano* nennt sie aestimationes falsae oder fictae, *Michael Stifel* (in seiner 1544 erschienenen Arithmetica integra) nennt sie numeri absurdi. Erst *Th. Harriot* (um 1600) betrachtet negative Zahlen für sich und lässt sie die eine Seite einer Gleichung bilden. Das eigentliche Rechnen mit negativen Zahlen beginnt jedoch erst mit *R. Descartes* († 1650), der einem und demselben Buchstaben bald einen positiven, bald einen negativen Zahlenwert beilegte.

19) Dass die durch eine Erweiterung des Zahlbegriffs hervorgerufene Erweiterung der Begriffe gleich, grösser und kleiner einer näheren Erörterung bedarf, wird in neueren guten Lehrbüchern hervorgehoben.

nennt, erweitert man den Zahlbegriff und gelangt zur Einführung der *negativen Zahlen.* Demgemäss lautet die Definitionsformel der negativen Zahl $-p$ (minus p):

$$-p = b - (b + p).$$

Im Gegensatz zu den negativen Zahlen heissen die in Nr. **1** definierten Ergebnisse des Zählens *positive* Zahlen. Aus der Definitionsformel der negativen Zahl $-p$ folgt für $b = 0$, dass $-p = 0 - p$, und da auch $p = 0 + p$ ist, so liegt es nahe, $+p$ für p zu setzen. Die vor eine Zahl (im Sinne von Nr. **1**) gesetzten Plus- und Minuszeichen heissen *Vorzeichen.* Negative Zahlen haben also das Vorzeichen minus, positive das Vorzeichen plus. Von den beiden Vorzeichen heisst das eine das *umgekehrte* des andern. Mit Vorzeichen versehene Zahlen heissen *relativ.* Lässt man bei einer relativen Zahl das Vorzeichen fort, so entsteht eine Zahl im Sinne von Nr. **1**, die man den *absoluten Betrag*[20]) der relativen Zahl nennt. Aus diesen Definitionen folgt, wie relative Zahlen durch Addition und durch Subtraktion zu verknüpfen sind. Als Ergebnis erscheint immer eine relative Zahl oder Null.

Die Einführung der relativen Zahlen ermöglicht es, eine beliebige klammerlose Aufeinanderfolge von Additionen und Subtraktionen als eine „*Summe*“ von lauter relativen Zahlen aufzufassen. Man nennt eine so aufgefasste Summe eine *algebraische* und die relativen Zahlen, die sie zusammensetzen, ihre *Glieder.* Steht eine algebraische Summe in einer Klammer, vor der ein Pluszeichen bezw. Minuszeichen steht, so darf dieselbe fortgelassen werden, wenn man die Vorzeichen der in ihr enthaltenen Glieder sämtlich beibehält bezw. sämtlich umkehrt.

Durch die Einführung der Zahl Null (Nr. **5**) und der negativen Zahlen erhalten die in Nr. **2** und Nr. **4** angedeuteten Vergleichungsschlüsse einen ausgedehnteren Sinn, wenn man auch auf die neu eingeführten Zahlen die Ausdrücke grösser und kleiner anwendet. Man nennt nämlich immer, gleichviel ob a und b null, positiv oder negativ sind, $a > b$, wenn $a - b$ positiv ist, $a < b$, wenn $a - b$ negativ ist[19]).

Endlich machen die neu eingeführten Zahlen auch solche Gleichungen lösbar, die nach dem ursprünglichen Zahlbegriff als unlösbar gelten mussten. So ist die Gleichung $x + 5 = 5$ nach Nr. **1** unlösbar, nach Nr. **5** aber lösbar. So ist ferner die Gleichung $x + 5 = 3$ nach Nr. **1** unlösbar, nach dieser Nummer aber lösbar[17]).

7. Multiplikation[10]). Da wegen der Grundgesetze der Addition die Reihenfolge, in welcher Additionen ausgeführt werden, das Ergebnis

20) Der Ausdruck „absoluter Betrag“ für den Modul jeder komplexen Zahl ist durch *K. Weierstrass'* Vorlesungen gebräuchlich geworden.

unverändert lässt, so konnte am Schluss von Nr. **2** das Ergebnis beliebig vieler aufeinanderfolgender Additionen als eine *Summe von vielen* Summanden aufgefasst werden. Stellen die letzteren nun sämtlich eine und dieselbe Zahl a dar, so liegt es nahe, diese Zahl nur einmal zu setzen und ein Zeichen hinzuzusetzen, welches angiebt, *wieviel* Summanden a die Summe enthalten soll. Man gelangt dadurch zu einer *neuen* Verknüpfung zweier Zahlen, nämlich der Zahl a, welche als Summand gedacht ist und der Zahl p, welche zählt, *wie oft* dieser Summand gedacht ist. Man nennt diese neue Verknüpfung *Multiplikation* und bezeichnet sie als Rechnungsart *zweiter Stufe*, während man die Addition und ihre Umkehrung, die Subtraktion, Rechnungsarten *erster Stufe* nennt. Eine Zahl a (passiv) mit einer Zahl p (aktiv) multiplizieren heisst also, eine Summe von p Summanden berechnen, von denen jeder a heisst. Die Zahl a, *welche* als Summand dabei auftritt, heisst *Multiplikand*, die Zahl p, welche zählt, *wie oft* der Summand gedacht ist, heisst *Multiplikator.* Das Ergebnis heisst Produkt. Wegen Nr. **5** und Nr. **6** kann der Multiplikand positiv, null oder negativ sein. Der Multiplikator aber, der angiebt, *wieviel* Summanden gemeint sind, kann nur ein Ergebnis des Zählens, also nur eine Zahl im Sinne von Nr. **1** sein. Indem eine Zahl a auch als Summe von einem einzigen Summanden aufgefasst wird, darf der Multiplikator auch die Zahl 1 sein. Das Zeichen der Multiplikation ist ein zwischen dem Multiplikand a und dem Multiplikator p gesetzter Punkt. Die Definitionsformel der Multiplikation lautet hiernach:

$$a \cdot p = \overset{1)}{a} + \overset{2)}{a} + \overset{3)}{a} + \cdots + \overset{p)}{a},$$

wo die jedem Summanden übergesetzte Zahl angiebt, der wievielte Summand er ist. Früher setzte man statt des Punktes das Zeichen $\times$.

Aus der Eindeutigkeit der Addition folgt die Eindeutigkeit der Multiplikation, und daraus folgt, dass Gleiches mit Gleichem multipliziert, Gleiches ergiebt. Aus der Definitionsformel der Multiplikation ergeben sich durch die Formeln von Nr. **3** und Nr. **4** die vier *Distributionsgesetze*[11]):

I. $a \cdot p + a \cdot q = a \cdot (p + q)$;

IIa. $a \cdot p - a \cdot q = a \cdot (p - q)$, wenn $p > q$ ist;

IIb. $a \cdot p - a \cdot q = 0$, wenn $p = q$ ist;

IIc. $a \cdot p - a \cdot q = -[a \cdot (q - p)]$, wenn $q > p$ ist;

III. $a \cdot p + b \cdot p = (a + b) \cdot p$;

IV. $a \cdot p - b \cdot p = (a - b) \cdot p$.

[Über das Fortlassen der Klammern auf den linken Seiten dieser Formeln lese man Anmerkung 15.]

Die Formeln I und II zeigen, vorwärts gelesen, wie ein gemeinsamer Multiplikand *abgesondert* wird, rückwärts gelesen, wie *mit* einer Summe bezw. Differenz multipliziert wird. Die Formeln III und IV zeigen, vorwärts gelesen, wie ein gemeinsamer Multiplikator *abgesondert* wird, rückwärts gelesen, wie eine Summe bezw. Differenz multipliziert wird. Aus den Distributionsgesetzen ergiebt sich, wie eine Gleichung und eine Ungleichung oder zwei Ungleichungen durch Multiplikation zu verbinden sind, falls die vier verglichenen Zahlen positiv sind.

Wie ein Produkt zu behandeln ist, dessen Multiplikand null oder negativ ist, geht aus Nr. **5** und Nr. **6** hervor. Wenn aber bei einem Produkte der *Multiplikator null oder negativ* ist, so stellt dies zunächst eine sinnlose Zeichen-Verknüpfung dar. Nach dem Princip der Permanenz[17]) ist derselben nun ein Sinn zu erteilen, der es gestattet, dass man damit nach denselben Regeln rechnen kann, als wenn der Multiplikator eine Differenz ist, die eine Zahl im Sinne von Nr. **1** darstellt. Deshalb ist bei der Formel II die Beschränkung $p > q$ aufzuheben, um aus ihr zu entnehmen, wie *mit* Null und negativen Zahlen multipliziert wird. So ergiebt sich, dass $a \cdot 0 = 0$ und $a \cdot (-w) = -(a \cdot w)$ ist. Hieraus ergiebt sich dann auch, wie relative Zahlen durch Multiplikation zu verknüpfen sind.

Aus den Distributionsgesetzen folgt auch, dass für die Multiplikation das *Commutationsgesetz*[11]) und das *Associationsgesetz*[11]) richtig sind.

Das Commutationsgesetz der Multiplikation hebt die Notwendigkeit der Unterscheidung von Multiplikand und Multiplikator für die reine Arithmetik auf. Man bezeichnet deshalb beide mit dem gemeinsamen Namen *Faktor* und schreibt sie in beliebiger Reihenfolge. Das Produkt nennt man ein *Vielfaches* von jedem seiner Faktoren und jeden Faktor einen *Teiler* des Produktes. Ferner nennt man bei einem Produkte jeden Faktor den *Koefficienten* des andern.

Bei benannten Zahlen tritt die Unterscheidung von Multiplikand und Multiplikator dadurch hervor, dass der erstere zwar benannt sein kann, der letztere aber unbenannt sein muss. Deshalb ist bei benanntem Multiplikand das Commutationsgesetz sinnlos.

Für die Arithmetik der unbenannten Zahlen folgt aus der vereinigten Wirkung des Commutationsgesetzes und des Associationsgesetzes, dass die Reihenfolge, in welcher Multiplikationen auf einander folgen, bezüglich des schliesslichen Ergebnisses gleichgültig ist. Dies berechtigt dazu, den Begriff des Produktes dahin zu erweitern, dass dasselbe nicht bloss zwei, sondern beliebig *viele Faktoren* haben darf.

Dadurch, dass diese Faktoren alle dieselbe Zahl darstellen können, ist die Möglichkeit der Definition einer direkten Operation dritter Stufe, der Potenzierung[21]), gegeben.

Eine algebraische Summe, deren Glieder auch Produkte sein können, heisst *Polynom.* Zwei Polynome multipliziert man, indem man jedes Glied des einen mit jedem Gliede des andern multipliziert und die erhaltenen Produkte wieder zu einer algebraischen Summe zusammenfasst. Dabei wird jedes Glied positiv oder negativ, je nachdem es aus Gliedern mit gleichen oder mit ungleichen Vorzeichen durch Multiplikation entsteht. Der Beweis dieser Regel folgt aus den Formeln I bis IV.

Aus den bisher entwickelten Definitionen und Resultaten lässt sich schliessen, dass, wenn beliebig viele Zahlen, die null oder relativ sind, in beliebiger Weise durch Addition, Subtraktion und Multiplikation verbunden werden, das schliessliche Ergebniss immer null oder relativ, also eine der bisher definierten Zahlen, sein muss.

8. **Division**[10]). Die Division geht aus der Multiplikation durch Umkehrung[13]) hervor, nämlich dadurch, dass das Produkt und der eine Faktor als gegeben, der andere Faktor als gesucht betrachtet wird. Dabei erhält die Zahl, die vorher Produkt war, den Namen *Dividend,* der gegebene Faktor den Namen *Divisor,* der gesuchte Faktor den Namen *Quotient.* Das Zeichen der Division ist ein Doppelpunkt (gelesen : durch), vor den man den Dividend und hinter den man den Divisor setzt. Demgemäss lautet die *Definitionsformel der Division:*

$$(p:a)\cdot a = p.$$

Statt $p:a$ schreibt man auch $\frac{p}{a}$, seltener p/a. Wie die Subtraktion hat auch die Division begrifflich zwei Umkehrungen, da sowohl der passive Faktor, der Multiplikand, als auch der aktive Faktor, der Multiplikator, gesucht werden kann. Ist der Dividend eine benannte Zahl, so heisst die Aufsuchung des Multiplikand *Teilung,* die des Multiplikators *Messung.* Wegen des Commutationsgesetzes ist es jedoch bei unbenannten Zahlen unnötig, die beiden Umkehrungen der Multiplikation zu unterscheiden. Damit $p:a$ Sinn habe, muss p ein Produkt sein können, dessen einer Faktor a ist, d. h. p muss ein Vielfaches von a, oder, was dasselbe ist, a ein Teiler von p sein.

Daraus, dass $0 \cdot m = 0$ ist, folgt zweierlei:

---

21) Vgl. hier Nr. **11**.

1) Null dividiert durch Null ist jeder beliebigen Zahl gleich zu setzen. Daher nennt man die Zeichen-Verknüpfung $0:0$ *vieldeutig.*

2) Null dividiert durch jede beliebige Zahl ergiebt immer die Zahl Null.

Wenn aber der Divisor null ist und der Dividend nicht null, sondern eine beliebige relative Zahl p ist, so entsteht die Frage, welche Zahl, mit Null multipliziert, zur relativen Zahl p führt. Da keine der bisher definierten Zahlen die verlangte Eigenschaft hat, so ist das Princip der Permanenz[17]) anzuwenden. Die Untersuchung aber, *welcher* Sinn dann $p:0$ beizulegen ist, wenn p nicht null ist, gehört in ein anderes Kapitel der Mathematik (vgl. I A 3).

Da die Division nur dann eindeutig zu einer der schon definierten Zahlen führt, wenn der Divisor nicht Null ist, so darf man aus zwei Gleichungen nur dann durch Division eine dritte erschliessen, *wenn die Divisoren von Null verschieden sind.* Auf der Ausserachtlassung dieser Einschränkung beruhen viele Trugschlüsse der elementaren Arithmetik wie auch der höheren Analysis.

Wie relative Zahlen dividiert werden, folgt aus den entsprechenden Regeln für die Multiplikation relativer Zahlen.

Aus der Definitionsformel der Division folgt auch:

$$(p \cdot a):a = p, \quad \text{falls } a \text{ nicht Null ist.}$$

Diese Formel ergiebt im Verein mit der Definition der Division die Regel, dass Multiplikation und Division mit derselben Zahl sich aufheben, *falls diese Zahl nicht Null ist.*

Daraus, dass die beiden Gleichungen $x \cdot b = p$ und $x = p:b$ sich gegenseitig bedingen, falls b nicht Null ist, ergiebt sich die *Transpositionsregel zweiter Stufe.* Durch zweitstufiges Transponieren kann man entweder einen unbekannten Faktor oder einen unbekannten Divisor isolieren und dadurch die Lösung von Bestimmungsgleichungen bewerkstelligen.

9. Verbindung der Division mit der Addition, Subtraktion und Multiplikation. Mit Hilfe der Definitionsformel der Division (Nr. **8**) kann man die Richtigkeit folgender Formeln erkennen:

$$
\begin{aligned}
&\text{I.} && (a+b):m = a:m + b:m,\\
&\text{II.} && (a-b):m = a:m - b:m,\\
&\text{III.} && a\cdot(b:c) = a\cdot b:c,\\
&\text{IV.} && a:(b\cdot c) = a:b:c,\\
&\text{V.} && a:(b:c) = a:b\cdot c,\\
&\text{VI.} && a:b = (a\cdot m):(b\cdot m),\\
&\text{VII.} && a:b = (a:n):(b:n).
\end{aligned}
$$

[Über das Fortlassen der Klammern auf den rechten Seiten von F. I bis V lese man Anm. 15.]

Hierbei sind die auftretenden Divisoren natürlich als Teiler des zugehörigen Dividend aufzufassen. Insbesondere darf auch keiner der Divisoren null sein. Die Formeln III, IV, V, VII entsprechen in der zweiten Stufe genau den vier in Nr. 4 für die erste Stufe aufgestellten Formeln.

Die beiden Distributionsformeln III und IV in Nr. 7, sowie die hier mit I und II bezeichneten Formeln lehren, in der einen Richtung gelesen, wie eine Summe oder Differenz multipliziert oder dividiert wird, in der andern Richtung gelesen, wie Produkte mit gleichem Faktor oder Quotienten mit gleichem Divisor addiert oder subtrahiert werden. Im ersten Falle werden Klammern gelöst, im zweiten gesetzt.

Aus den Formeln I und II folgt auch, wie eine algebraische Summe durch eine Zahl dividiert wird, und wie umgekehrt eine beliebige algebraische Summe von Quotienten mit gemeinsamem Divisor in einen Quotienten verwandelt werden kann, dessen Divisor der gemeinsame Divisor aller Glieder ist. Wenn bei einer algebraischen Summe von Quotienten die *Divisoren verschieden* sind, so kann man diese Quotienten durch Formel VI in andere Quotienten verwandeln, die alle denselben Divisor (General-Divisor) haben, und dann die soeben genannte Regel anwenden.

Das Associationsgesetz der Multiplikation und die obigen Formeln III, IV, V lehren, je nachdem man sie in der einen oder in der andern Richtung liest, sowohl, wie mit Produkten oder Quotienten multipliziert oder dividiert wird, als auch, wie Produkte oder Quotienten multipliziert oder dividiert werden. Im ersten Falle werden Klammern gelöst, im zweiten gesetzt. Ferner zeigen diese Formen, dass Faktoren und Divisoren in beliebige Reihenfolge gebracht werden können, ohne dass das schliessliche Ergebnis sich dadurch ändert.

Wenn zwei Quotienten gleichen positiven Divisor haben, so stellt derjenige die grössere Zahl dar, der den grösseren Dividend hat. Wenn aber zwei Quotienten, deren Dividend und Divisor positiv sind, gleichen Dividend haben, so stellt derjenige, der den grösseren Divisor hat, die *kleinere* Zahl dar. Diese Regeln folgen aus den aufgestellten Formeln und ergeben, wie eine Ungleichung und eine Gleichung oder zwei Ungleichungen durch Division zu verbinden sind, wenn die Divisoren positiv und Teiler der zugehörigen Dividenden sind.

10. Gebrochene Zahlen[21]). In § 5 und § 6 schuf das Princip der Permanenz[17]) aus $a - b$, wo a nicht grösser als b ist, die Null und die negativen Zahlen. In derselben Weise entstehen aus $a : b$, wo a kein Vielfaches von b ist, die *gebrochenen Zahlen*, und zwar dadurch, dass man die Definitionsformel der Division

$$(a : b) \cdot b = a$$

auf $a : b$ überträgt, falls a kein Vielfaches von b ist. So erreicht man auch die Übertragung aller bisher aufgestellten Definitionen und Formeln auf die Quotientenform $a : b$ und die Aufhebung der in Nr. **8** und Nr. **9** ausgesprochenen Beschränkung, „falls der Divisor ein Teiler des Dividend ist". Insbesondere erscheint nun die Gleichung $b \cdot x = a$ auch dann lösbar, wenn b kein Teiler von a ist.

Indem man die Quotientenform $a : b$, wo b kein Teiler von a ist, eine „*Zahl*" nennt, erweitert man von neuem den Begriff der Zahl, vergrössert man das Untersuchungsfeld der Arithmetik und vervollkommnet man die Mittel[22]), mit denen sie arbeitet. Im Gegensatz zu den so entstehenden gebrochenen Zahlen heissen alle bisher definierten Zahlen (Nrn. **1**, **5**, **6**) *ganze Zahlen*. Den Dividend a eines Bruches $a : b$ nennt man seinen *Zähler*, den Divisor b seinen *Nenner*. Man bezeichnet einen Bruch durch einen wagerechten Strich[21]), eine darüber gesetzte ganze Zahl, die sein Zähler ist, und eine darunter gesetzte ganze Zahl, die sein Nenner ist.

---

21) Mit *Brüchen* wurde schon im Altertum gerechnet. Ja, das älteste mathematische Handbuch, der *Papyrus Rhind* im Britischen Museum, enthält schon eine eigenartige Bruchrechnung (Näheres in *M. Cantor's* Geschichte der Mathematik, Band I), in der jeder Bruch als Summe verschiedener *Stammbrüche* geschrieben wird. Die *Griechen* unterschieden in ihrer Buchstaben-Zifferschrift Zähler und Nenner durch verschiedene Strichelung der Buchstaben, bevorzugten aber Stammbrüche. Die *Römer* suchten die Brüche als Vielfache von $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{24}$ u. s. w. bis $\frac{1}{288}$ darzustellen, im Zusammenhang mit ihrer Münz-Einteilung. Die *Inder* und *Araber* kannten Stammbrüche und abgeleitete Brüche, bevorzugten aber, ebenso wie die *alten babylonischen* und, ihnen folgend, die *griechischen Astronomen*, *Sexagesimalbrüche* (vgl. Anmerkung 24). Der *Bruchstrich* und die heutige Schreibweise der Brüche rührt von *Leonardo* von Pisa (genannt *Fibonacci*) her, dessen liber abaci (um 1220) die Quelle für die Rechenbücher der nächsten Jahrhunderte wurde.

22) Dass die Einführung der negativen und der gebrochenen Zahlen von der Algebra entbehrt werden kann, und dass jene Zahlen nur Symbole sind, die das Rechnen erleichtern, führte *L. Kronecker* in seiner Abhandlung „Über den Zahlbegriff" (J. f. Math. 101, 1887) aus. Nach *Kronecker* dienen also die Erweiterungen des Zahlbegriffs nur zu dem, was *E. Mach* „Oekonomie der Wissenschaft" nennt. (Vgl. *E. Mach*, Mechanik, Leipzig 1883; Populärwissenschaftliche Vorlesungen, Leipzig 1896; Die Principien der Wärmelehre, Leipzig 1896, p. 391 u. f.)

Um Brüche zu vergleichen, bringt man sie durch Anwendung der Formel VI in Nr. **9** auf gleichen Nenner und nennt einen Bruch *gleich* einem andern, *grösser* oder *kleiner*[19]), als der andere, wenn sein Zähler gleich dem Zähler des andern Bruches ist, grösser oder kleiner als dessen Zähler ist. Einen Bruch $\frac{a}{b}$ nennt man grösser oder kleiner als die ganze Zahl c, je nachdem $a > b \cdot c$ oder $a < b \cdot c$ ist. Ein Bruch, der kleiner als 1 ist, heisst *echt*, ein Bruch, der grösser als 1 ist, *unecht*. Durch Anwendung der Betrachtungen in Nr. **5** und Nr. **6** auf Brüche gelangt man zu den Begriffen des negativen Bruches, des positiven Bruches, des relativen Bruches und des absoluten Betrages[20]) eines relativen Bruches. Jede der bisher definierten Zahlen ist also Null oder positiv-ganz oder negativ-ganz oder positiv-gebrochen oder negativ-gebrochen. Man fasst alle Zahlen, die eins dieser Merkmale haben, also alle bisher definierten Zahlen, durch das Wort „*rational*"[23]) zusammen, im Gegensatz zu den später definierten irrationalen Zahlen (vgl. I A 3). Die Regeln, wie rationale Zahlen durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zu verknüpfen sind, gehen aus den in den früheren Paragraphen aufgestellten Formeln hervor.

Nach Formel VII in Nr. **9** kann ein Bruch, dessen Zähler und Nenner einen gemeinsamen ganzzahligen Teiler haben, gleich demjenigen Bruche gesetzt werden, der entsteht, wenn man Zähler und Nenner durch diesen Teiler dividiert. Dieses Verfahren heisst *Heben* oder *Reduzieren* des Bruches. Das erststufige Analogon zum Heben der Brüche ist die Verminderung des Minuend und Subtrahend einer Differenz um eine und dieselbe ganze Zahl. Während aber bei diesem Verfahren jede beliebige ganze Zahl als Minuend und als Subtrahend aus jeder beliebigen Differenz ganzer Zahlen erzielt werden kann, kann durch Heben eines beliebigen Bruches nicht jede beliebige ganze Zahl als Zähler oder Nenner erzielt werden. Man

---

23) Die Unterscheidung von rationalen und irrationalen Grössen tritt bei den Griechen in geometrischem Gewande schon vor Euclid (um 300 v. Chr.) auf, zuerst wohl bei *Pythagoras* (um 500), der erkannte, dass die Hypotenuse eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks unsagbar (ἄῤῥητος) sei, wenn die Katheten sagbar sind. *Plato* (429—348) erkannte die Irrationalität bei der Diagonale des Quadrats über Fünf (Plato's Staat, VIII 546). Ausführlicher noch behandelte *Euclid* das Irrationale (ἄλογον) im 10. Buche seiner „Elemente", und zwar in geometrischer Gestalt, indem unterschieden wird, ob zwei Strecken kommensurabel oder inkommensurabel (ἀσύμμετροι) sind. Archimedes (287—212) schloss bei seiner Berechnung der Zahl π die Quadratwurzel aus Drei und aus anderen Zahlen in sehr nahe rationale Grenzen ein. Über das Irrationale in neuerer Zeit vgl. hier I A 3.

muss sich damit begnügen, soweit zu heben, dass Zähler und Nenner keinen gemeinsamen Teiler mehr haben. Ist der Zähler eines Bruches ein Teiler des Nenners, so lässt sich durch Heben ein Bruch erzielen, dessen Zähler 1 ist. Solche Brüche mit dem Zähler 1 heissen *Stammbrüche*[21]. Jeder beliebige Bruch kann als Produkt seines Zählers mit seinem Stammbruch aufgefasst werden, d. h. mit demjenigen Bruch, der denselben Nenner hat. Wenn $a > b$ ist und a und b ganzzahlig sind, so kann $a = m \cdot b + v$ gesetzt werden, wo m eine ganz bestimmte ganze Zahl und $v < b$ ist, woraus folgt, dass jeder Bruch um einen echten Bruch grösser als eine ganze Zahl ist, oder dass jede rationale Zahl in zwei Grenzen eingeschlossen[19] werden kann, die ganze Zahlen sind, sich um 1 unterscheiden, und von denen die eine grösser, die andere kleiner ist[19], als die rationale Zahl.

Durch Fortsetzung des Stellenwert-Princips, auf dem unsere Zifferschrift beruht, nach rechts gelangt man zu den *Dezimalbrüchen*[24], d. h. Brüchen, von denen nur der Zähler geschrieben zu werden braucht, weil der Nenner zehn oder hundert oder tausend u. s. w. ist. Welche von diesen Zahlen als Nenner gemeint ist, deutet man durch die Stellung eines Komma's[24] an. (Vgl. Numerisches Rechnen in I F.)

Die Einführung der relativen Zahlen verwandelt jede Subtraktion in eine Addition, und zwar durch Umkehrung eines Vorzeichens. Ebenso verwandelt die Einführung der gebrochenen Zahlen jede Division in eine Multiplikation. Versteht man nämlich unter *reziprokem Wert* eines Bruches den Bruch, dessen Zähler und Nenner Nenner und Zähler des ursprünglichen Bruches sind, so erkennt man, dass das Ergebnis der Division durch einen Bruch übereinstimmt mit dem Ergebnis der Multiplikation mit seinem reziproken Werte.

Die Arithmetik, welche nur die Operationen erster und zweiter Stufe umfasst, schliesst, wie aus dem Obigen hervorgeht, mit den beiden folgenden Endergebnissen ab:

---

24) Die *Dezimalbrüche* entstanden im Laufe des 16. Jahrhunderts. *Johann Keppler* (1571—1630) führte das Dezimalkomma ein. Das Princip, das der Dezimalbruch-Schreibweise zu grunde liegt, war schon im Altertum bei den *Sexagesimalbrüchen* verwendet. Bei denselben lässt man auf die Ganzen Vielfache von $\frac{1}{60}$ und dann von $\frac{1}{3600}$ folgen. Dass dieselben *babylonischen* Ursprungs sind, ist durch die Entdeckung einer von babylonischen Astronomen angewandten sexagesimalen Stellenwert-Zifferschrift (mit 59 verschiedenen Ziffern, aber ohne ein Zeichen für nichts) unzweifelhaft geworden. Auch die griechischen Astronomen (*Ptolemaeus*, um 150 n. Chr.) rechneten mit Sexagesimalbrüchen. Z. B. setzte *Ptolemaeus* $\pi = 3 \,..\, 8 \,..\, 30 = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600}$. Unsere Sechzig-Teilung der Stunde und des Grades, sowie die Ausdrücke *Minute* (pars *minuta* prima) und *Secunde* (pars minuta *secunda*) sind Reste der alten Sexagesimalbrüche.

1) Wenn allgemeine Zahlzeichen (Buchstaben) in beliebiger Weise durch die Operationen erster und zweiter Stufe verbunden werden, so lässt sich das Ergebnis immer als Quotient darstellen, dessen Dividend und Divisor eine algebraische Summe von Produkten ist;

2) Wenn beliebig viele rationale Zahlen in irgend welcher Weise durch die Operationen erster und zweiter Stufe verbunden werden, so ist das Ergebnis immer eine rationale Zahl, falls eine Division durch Null nicht vorkommt.

Neue Erweiterungen des Zahlengebietes werden erst notwendig, wenn man die bisher definierten Zahlen durch die Operationen dritter Stufe miteinander verknüpft. (Vgl. Nr. **11** sowie I A 3 und I A 4.)

11. Die drei Operationen dritter Stufe. In Nr. 7 ist die Definition des Produktes dahin erweitert, dass es beliebig viele Faktoren enthalten darf. Der Fall, dass diese alle gleich sind, führt zur direkten Operation dritter Stufe, der *Potenzierung*[25]). Eine Zahl a (passiv) mit einer Zahl p (activ) potenzieren, heisst also, ein Produkt von p Faktoren bilden, von denen jeder a heisst. Die Zahl a, *welche* als Faktor eines Productes gesetzt wird, heisst *Basis*, die Zahl p, welche angiebt, *wie oft* die andere Zahl a als Faktor eines Produktes gesetzt werden soll, heisst *Exponent*[25]). Das Resultat der Potenzierung, das man a^p schreibt und „a hoch p“ liest, heisst *Potenz*. Insofern man a als Produkt von einem Faktor auffasst, setzt man $a^1 = a$. Durch die Definition der Potenzierung ergeben sich

25) Potenzen mit den Exponenten 1 bis 6 bezeichnete schon Diophant in abgekürzter Weise. Er nennt die zweite Potenz δύναμις, ein Wort, auf das durch die lateinische Übersetzung potentia das Wort „Potenz“ zurückzuführen ist. Im 14. bis 16. Jahrhundert finden sich schon Spuren eines Rechnens mit Potenzen und Wurzeln, so bei *Oresme* († 1382), *Adam Riese* († 1559), *Christoff Rudolf* (um 1530) und namentlich bei *Michael Stifel* in dessen Arithmetica integra (Nürnberg 1544). Näheres hierüber in *M. Cantor*'s Geschichte der Mathematik. Aber erst die Erfindung der Logarithmen am Anfange des 17. Jahrhunderts verschaffte den Operationen dritter Stufe ein volles Bürgerrecht in der Arithmetik. Die tiefere Erkenntnis ihres Zusammenhanges gehört jedoch einer noch späteren Zeit an. Die Erfinder der Logarithmen sind *Jost Bürgi* († 1632) und *John Napier* († 1617). Um die Verbreitung der Kenntnis der Logarithmen hat auch *Keppler* († 1630) grosse Verdienste. *Henry Briggs* († 1630) führte die Basis zehn ein und gab eine Sammlung von Logarithmen dieser Basis heraus. (Vgl. Numerisches Rechnen, I F.) Das Wort Logarithmus (λόγον ἀριθμός = Nummer eines Verhältnisses) erklärt sich dadurch, dass man zwei Verhältnisse dadurch in Beziehung zu setzen suchte, dass man das eine potenzierte, um das andere zu erhalten. So nannte man 8 zu 27 das dritte Verhältnis von 2 zu 3. Auch kommt für Logarithmus der Ausdruck „numerus rationem exponens“ vor, von dem vielleicht das Wort „Exponent“ herrührt.

aus den Gesetzen der Multiplikation die folgenden Gesetze der Potenzierung:

I. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$;
IIa. $a^p : a^q = a^{p-q}$, falls $p > q$ ist;
IIb. $a^p : a^q = 1$, falls $p = q$ ist;
IIc. $a^p : a^q = 1 : a^{q-p}$, falls $p < q$ ist;
(Distributionsformeln bei gleicher Basis.)

III. $a^q \cdot b^q = (a \cdot b)^q$;
IV. $a^q : b^q = (a : b)^q$;
(Distributionsformeln bei gleichem Exponenten.)

V. $(a^p)^q = a^{p \cdot q} = (a^q)^p$; (Associationsformel.)

Nach der Definition der Potenzierung kann die Basis jede beliebige Zahl sein; der Exponent muss jedoch ein Ergebnis des Zählens, also eine positive ganze Zahl sein. Für „positiv-ganz" sagt man auch *„natürlich"*; demnach heisst eine Potenz mit einem derartigen Exponenten eine *„natürliche"*.

Wegen einer geometrischen Anwendung heissen Potenzen mit dem Exponenten 2 auch Quadrate, mit dem Exponenten 3 auch Kuben.

Ist die Basis eine Summe, eine Differenz, ein Produkt, ein Quotient oder eine Potenz, so ist dieselbe in eine Klammer einzuschliessen. Dagegen macht die höhere Stellung des Exponenten eine Klammer um denselben überflüssig.

Nach der Definition der Potenzierung sind a^0 und a^{-n}, wo $-n$ eine negative ganze Zahl ist, zunächst sinnlose Zeichen. Auch Produkte, deren Multiplikator null oder negativ ist, waren, nach der ursprünglichen Definition der Multiplikation, sinnlose Zeichen. Doch erhielten solche Zeichen, gemäss dem Princip der Permanenz, dadurch Sinn, dass man wünschte, mit solchen Differenzen ebenso multiplizieren zu können, wie mit Differenzen, die eine positive Zahl darstellen. In derselben Weise verfährt man mit den Potenzformen

$$a^0 \quad \text{und} \quad a^{-n}.$$

Man setzt also $a^0 = a^{p-p}$, hebt die Beschränkung $p > q$ in Formel IIa auf, und wendet dieselbe, umgekehrt gelesen, an. Dann kommt:

$$a^0 = a^{p-p} = a^p : a^p = 1.$$

Ebenso setzt man $a^{-n} = a^{p-(p+n)}$, hebt die Beschränkung $p > q$ in Formel IIa auf, findet dadurch $a^p : a^{p+n}$, wendet nun Formel IIc an und erhält $1 : a^n$.

Die Ausdehnung des Begriffs der Potenzierung auf den Fall, dass der Exponent eine gebrochene Zahl ist, lässt sich erst bewerkstelligen, nachdem die Gesetze der Radizierung, der einen der beiden Umkehrungen der Potenzierung, festgestellt sind.

Da bei der Potenzierung das Kommutationsgesetz nicht gilt, weil im allgemeinen b^n nicht gleich n^b ist, so müssen die beiden Umkehrungen der Potenzierung nicht bloss logisch, sondern auch *arithmetisch unterschieden* werden. Die Operation, welche bei $b^n = a$ die Basis, also die passive Zahl, als gesucht, a und n aber als gegeben betrachtet, heisst *Radizierung*[25]); die Operation, welche bei $b^n = a$ den Exponenten, also die aktive Zahl, als gesucht, b und a aber als gegeben betrachtet, heisst *Logarithmierung*[25]).

„n^{te} *Wurzel aus* a", geschrieben: $\sqrt[n]{a}$,[25]) ist also die Zahl, welche mit n potenziert, a ergiebt. Demnach ist $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ die Definitionsformel der Radizierung. Die Zahl, welche ursprünglich Potenz war, heisst bei der Radizierung *Radikand*, die Zahl, welche Potenz-Exponent war, heisst *Wurzel-Exponent* und die Zahl, welche Basis war, heisst *Wurzel*. Durch die Definition der Radizierung ergeben sich aus den Gesetzen der Potenzierung die folgenden Gesetze der Radizierung:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{I.} & \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b};\\ \text{II.} & \sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b};\end{array}\right\}\quad\text{(Distributive Formeln.)}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{III.} & \sqrt[p]{a^q} = \left(\sqrt[p]{a}\right)^q;\\ \text{IV.} & \sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a} = \sqrt[q]{\sqrt[p]{a}};\end{array}\right\}\quad\text{(Associative Formeln.)}$$

$$\text{V.}\quad \sqrt[np]{a^{nq}} = \sqrt[p]{a^q}.$$

Durch die Radizierung lassen sich Potenzen mit *gebrochenen Exponenten* definieren. Da $\frac{p}{q}\cdot q = p$ die Definitionsformel der gebrochenen Zahl $\frac{p}{q}$ ist, und da $a^{\frac{p}{q}\cdot q}$ gleich $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q$ ist, so ist unter $a^{\frac{p}{q}}$ eine Zahl zu verstehen, die, mit q potenziert, a^p ergiebt, und dies ist $\sqrt[q]{a^p}$. Ebenso erkennt man, dass $a^{-\frac{p}{q}} = 1:\sqrt[q]{a^p}$ ist. Ferner ergiebt Formel V, wie $\sqrt[n]{a}$, wo n eine positive oder negative gebrochene Zahl ist, als Potenz dargestellt werden kann, deren Basis a ist und deren Exponent rational ist. Jede Wurzel lässt sich also als Potenz darstellen, deren Basis der Radikand der Wurzel ist, gerade so wie jeder Quotient sich als Produkt darstellen lässt, dessen Multiplikand der Dividend des Quotienten ist.

Wenn a eine beliebige rationale Zahl und n eine ganze Zahl ist, so stellt a^n eine rationale Zahl dar. Wenn aber bei rationalem a die Zahl n zwar rational, aber nicht ganzzahlig ist, so giebt es nur dann eine rationale Zahl, die gleich a^n gesetzt werden darf, wenn a die q^{te} Potenz einer rationalen Zahl ist, wo q der Nenner der Zahl n ist. In allen anderen Fällen stellt a^n, wo n nicht ganzzahlig ist, eine Zeichen-Verknüpfung dar, der erst noch Sinn zu erteilen ist. (Vgl. I A 3 und I A 4.)

„*Logarithmus von a zur Basis b*“[25]), geschrieben: $\overset{b}{\log}\, a$, ist der Exponent, mit welchem b potenziert werden muss, damit sich a ergiebt. Demnach ist:

$$b^{\overset{b}{\log}\, a} = a$$

die Definitionsformel der *Logarithmierung.* Die Zahl, welche ursprünglich Potenz war, heisst bei der Logarithmierung *Logarithmand,* die Zahl, welche Basis war, heisst *Logarithmen-Basis,* und die Zahl, welche Exponent war, heisst *Logarithmus.* Durch die Definition der Logarithmierung ergeben sich aus den Gesetzen der Potenzierung die folgenden Gesetze der Logarithmierung:

$$\text{I.}\quad \overset{b}{\log}\,(p \cdot q) = \overset{b}{\log}\, p + \overset{b}{\log}\, q;$$

$$\text{II.}\quad \overset{b}{\log}\,(p : q) = \overset{b}{\log}\, p - \overset{b}{\log}\, q;$$

$$\text{III.}\quad \overset{b}{\log}\,(p^m) = m \cdot \overset{b}{\log}\, p;$$

$$\text{IV.}\quad \overset{b}{\log}\, a = \frac{\overset{c}{\log}\, a}{\overset{c}{\log}\, b}.$$

Wenn b eine beliebige rationale Zahl ist, so stellt $\overset{b}{\log}\, a$ nur dann eine rationale Zahl dar, wenn a gleich einer Potenz ist, deren Basis b ist, und deren Exponent eine rationale Zahl ist. [Dies ist z. B. der Fall, wenn $b = \frac{9}{4}$ und $a = \frac{8}{27}$ ist. Denn $(\frac{9}{4})^{-\frac{3}{2}} = (\frac{4}{9})^{+\frac{3}{2}}$ $= (\sqrt{\frac{4}{9}})^3 = (\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$. Daher ist $\overset{\frac{9}{4}}{\log}\, \frac{8}{27}$ gleich der rationalen Zahl $-\frac{3}{2}$.] In allen sonstigen Fällen stellt $\overset{b}{\log}\, a$ eine Zeichen-Verknüpfung dar, der erst noch Sinn zu erteilen ist. (Vgl. I A 3 und I A 4.)

In der folgenden Tabelle der arithmetischen Operationen ist immer 16 als passive, 2 als aktive Zahl betrachtet.

Tabelle der 7 Operationen.

Name der Operation:	Beispiel:	Die passive Zahl, hier 16, heisst:	Die aktive Zahl, hier 2, heisst:	Das Resultat heisst:
Addition	$16 + 2 = 18$	Augend (Summand)	Auctor (Summand)	Summe
Subtraktion	$16 - 2 = 14$	Minuend	Subtrahend	Differenz
Multiplikation	$16 \cdot 2 = 32$	Multiplikand (Faktor)	Multiplikator (Faktor)	Produkt
Division	$16 : 2 = 8$	Dividend	Divisor	Quotient
Potenzierung	$16^2 = 256$	Basis	Exponent	Potenz
Radizierung	$\sqrt[2]{16} = 4$	Radikand	Wurzel-Exponent	Wurzel
Logarithmierung	$\overset{2}{\log} 16 = 4$	Logarithmand	Logarithmen-Basis	Logarithmus

Wie hierbei aus jeder der drei direkten Operationen Addition, Multiplikation, Potenzierung ihre beiden Umkehrungen folgen, zeigt folgende Tabelle:

Stufe:	Direkte Operation:	Indirekte Operation:	Gesucht wird:
I.	Addition: $5 + 3 = 8$	Subtraktion: $8 - 3 = 5$	Augend
		Subtraktion: $8 - 5 = 3$	Auctor
II.	Multiplikation: $5 \cdot 3 = 15$	Division: $15 : 3 = 5$	Multiplikand
		Division: $15 : 5 = 3$	Multiplikator
III.	Potenzierung: $5^3 = 125$	Radizierung: $\sqrt[3]{125} = 5$	Basis
		Logarithm.: $\overset{5}{\log} 125 = 3$	Exponent

In derselben Weise, wie die Multiplikation aus der Addition, die Potenzierung aus der Multiplikation hervorgeht, so könnte man auch aus der Potenzierung als der direkten Operation dritter Stufe eine direkte *Operation vierter Stufe*[26]), aus dieser eine fünfter Stufe u. s. w.

26) Von Abhandlungen, die sich auf Operationen vierter oder höherer Stufe beziehen, seien hier erwähnt: die von *H. Gerlach* in der Zeitschr. f. math. nat. Unterr. Jahrg. 13, Heft 6, von *F. Wöpcke* in J. f. Mat. 42, von *E. Schulze*

ableiten. Doch ist schon die Definition einer direkten Operation vierter Stufe zwar logisch berechtigt, aber unwichtig, weil bereits bei der dritten Stufe das Kommutationsgesetz seine Gültigkeit verliert. Um zu einer direkten Operation vierter Stufe zu gelangen, hat man a^a als Exponenten von a zu betrachten, die so entstandene Potenz wieder als Exponenten von a zu betrachten und so fortzufahren, bis a $b$mal gesetzt ist. Nennt man das Ergebnis dann $(a; b)$, so stellt $(a; b)$ das Resultat der direkten Operation vierter Stufe dar. Für dieselbe gilt z. B.: $(a; b)^{(a; c)} = (a; c + 1)^{(a; b-1)}$.

---

in Arch. f. Math. (2) III (1886). *G. Eisenstein* untersuchte durch Reihen-Entwickelungen die Funktion $x = y^{\frac{1}{y}}$ als Umkehrung von $y = (x; \infty)$ in J. f. Math. Bd. 28. Die Lehrbücher von *Hankel*, *Grassmann*, *H. Scheffler*, *E. Schröder*, *O. Schloemilch*, *Schubert* erwähnen die direkte Operation vierter Stufe, ohne näher darauf einzugehen.

I A 2. KOMBINATORIK

VON

E. NETTO

IN GIESSEN.

Inhaltsübersicht.

Die Monographien sind in Nr. **1** und Nr. **35** angegeben.

---

1. Kombinatorik; historische Würdigung. Die *Kombinatorik* hat sich weder in ihren elementaren noch in ihren höheren analytischen Gebieten so entwickelt, wie dies zu Beginn des Jahrhunderts in überschwänglicher Weise von den Vertretern der „kombinatorischen Schule“ erhofft wurde. Anfänge der Kombinatorik lassen sich weit zurück verfolgen; als Zweig der Wissenschaft darf sie erst von *Bl. Pascal*[1]), *G. W. Leibnitz*[2]), *J. Wallis*[3]), besonders aber von *Jac. Bernoulli I.* und *A. de Moivre*[4]) an gelten. Die Grundzüge der elementaren Teile sind in jedes Lehrbuch übergegangen; die analytischen Anwendungen treten sehr zurück. So stammen die umfassenderen Monographien sämtlich aus früherer Zeit[5]), und tiefer eindringende Abhandlungen sind nur in geringer Zahl vorhanden[6]).

2. Kombinatorische Operationen. Definitionen. Von den unendlich vielen möglichen kombinatorischen Operationen haben drei als gleichberechtigt (trotz logischer Bedenken) hauptsächliche Geltung erlangt, die Permutationen (P.), die Kombinationen[7]) (K.) und die Variationen (V.). Jede Anordnung von n Elementen nennen wir eine Komplexion (Kp.) derselben. — P. von n Elementen heifsen die Kp., welche alle gegebenen Elemente in allen möglichen Aufeinanderfolgen liefern. Sind die Elemente von einander verschieden, dann giebt es $n!$, kommen unter ihnen a gleiche einer Art, b gleiche einer andern Art u. s. w. vor, dann giebt es $n! : (a!\, b! \ldots)$.

K. von n Elementen zur k^{ten} Klasse sind alle Kp. von je k jener n Elemente ohne Berücksichtigung der Anordnung; darf jedes Element nur einmal aufgenommen werden, dann sind es K. ohne Wiederholung (o. W.), sonst mit Wiederholung (m. W.). Es giebt in k^{ter} Klasse

$$\text{K. o. W. } \frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad \text{K. m. W. } \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}.$$

1) Traité du triangle arithmétique. Paris 1665, geschrieb. 1664 (Op. posth.).

2) Dissertatio de arte Combinatoria. Lipsiae 1668. Opp. II, T. I, p. 339.

3) Treatise of algebra. Lond. 1673 und 1685.

4) *Bernoulli,* Ars conjectandi. Basil. 1713 (Op. posth.). — *Moivre,* Probabilities. Lond. 1718.

5) *K. F. Hindenburg,* Nov. Syst. Permutationum etc. Lips. 1781. — *J. Weingärtner,* Lehrb. d. combinator. Analysis. Leipz. 1800. — *Knr. Stahl,* Grundrifs d. Kombin.-Lehre. Jena 1800. — *Bernh. Thibaut,* Grundr. d. allgem. Arithm. od. Analysis. Götting. 1809. — *Chr. Kramp,* Élem. d'Arithm. Cologne 1808. — *Fr. W. Spehr,* Lehrbegr. d. rein. Kombin.-Lehre. Braunschw. 1824. — *A. v. Ettingshausen,* D. kombinat. Analysis. Wien 1826. — *L. Öttinger,* Lehre v. d. Kombinat. Freiburg 1837.

6) *Hessel,* Arch. f. Math. 7 (1845), p. 395. — *Öttinger,* ib. 15 (1850), p. 241.

7) *Hindenburg* schreibt auch „Komplexionen“; diese zerfallen in eigentliche Kombinationen, in Konternationen, Konquaternationen u. s. w.

V. entstehen, wenn man in den K. die Elemente permutiert. Es giebt in k^{ter} Klasse

$$\text{V. o. W. } \frac{n!}{(n-k)!}, \qquad \text{V. m. W. } n^k.$$

3. Inversion; Transposition. Da die Elemente nur insofern gelten, als sie identisch oder verschieden sind, so kann ihre Bezeichnung beliebig z. B. durch Ziffern 1, 2, 3, ... oder durch Buchstaben a, b, c, ... bewirkt werden. Dadurch kommt ein neues Agens in die Betrachtung, welches nun nach verschiedenen Richtungen hin benützt werden kann. Eine Kp. heisst *gut geordnet*, wenn stets die höhere Ziffer (der alphabetisch spätere Buchstabe) hinter der niederen (dem früheren) steht. Jede Abweichung davon heifst *Inversion*[8]). Für die Abzählung der Inversionenzahl bei umfangreichen Kp. giebt *P. Gordan* eine Regel[9]). Eine Kp. verschiedener Elemente gehört zur *ersten* oder *zweiten* Klasse (ist *gerade* oder *ungerade*), je nachdem sie eine gerade oder ungerade Anzahl von Inversionen enthält[10]). Durch eine *Transposition*, d. h. Umstellung zweier Elemente, wird die Klasse geändert[11]).

4. Permutationen mit beschränkter Stellenbesetzung. P. mit *beschränkter Stellenbesetzung* sind solche, bei denen entweder eine vorgeschriebene Anzahl von Elementen ihre Plätze beibehält, oder bei denen gewisse Stellen nur von gewissen Elementen eingenommen werden dürfen.

L. Euler[12]) führt eine Funktion $f(n)$ ein, welche die Zahl der P. giebt, bei denen jedes Element den ursprünglichen Platz ändert. Hiermit in Verbindung steht ein $F(n, m)$, welches angiebt, bei wievielen P. von n Elementen genau m ihren Platz behalten[13]). Es ist

---

8) *G. Cramer,* Introduct. à l'Analyse des lignes courbes (1750); Genève. Appendice p. 658. — *T. P. Kirkman,* Cambr. a. Dubl. J. 2 (1847), p. 191.

9) Vorles. üb. Invarianten-Theor., herausgeg. v. *G. Kerschensteiner* (1885), Leipz. I, p. 2.

10) *E. Bézout,* Mém. Paris (1764), p. 292. — *A. L. Cauchy,* J. d. l'Éc. pol. cah. 10 (1815), p. 41. — *K. G. Jacobi,* Werke 3, p. 359 = J. f. M. 22 (1841), p. 285.

11) *P. S. Laplace,* Mém. Paris (1772), p. 294.

12) Mém. Pétersb. 3 (1809), p. 57. — *Öttinger,* Lehre v. d. Kombin. Freiburg 1837. — *M. Cantor,* Z. f. Math. 2 (1857), p. 65. — *R. Baltzer,* Leipz. Ber. (1873), p. 534. — *S. Kantor,* Z. f. Math. 15 (1870), p. 361. — *A. Cayley,* Edinb. Proceed. 9 (1878), p. 338 u. 388.

13) *M. Cantor,* Z. f. Math. 2 (1857), p. 410. — *J. J. Weyrauch,* J. f. Math. 74 (1872), p. 273.

$$f(n) = nf(n-1) + (-1)^n = (n-1)[f(n-1) + f(n-2)];$$
$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0.$$
$$F(n, m) = \binom{n}{m} f(n-m).$$

Eine andere Beschränkung der Stellenbesetzung ist die, dass gewisse Stellen nur von gewissen Elementen eingenommen werden dürfen[14]), z. B. die geraden Stellen nur von geraden Zahlen[15]); oder, falls gleiche Elemente vorkommen, dass nicht zwei solche aufeinander folgen[16]).

Auch darin liegen Beschränkungen der Stellenbesetzung, dass die P. selbst in verschiedene Anordnungen treten, z. B. so dass n P. von n Elementen so untereinander gesetzt werden sollen, dass in keiner Spalte gleiche Elemente vorkommen[17]) (lateinisches Quadrat).

5. Verwandte Permutationen. *Verwandte Permutationen* sind nach *H. A. Rothe*[18]) zwei P. dann, wenn die Stellenordnung und das Stellenelement (als Zahl) der einen gegen die der anderen vertauscht sind; es wird zu bestimmen sein, wie viele P. sich selbst verwandt sind[19]). *P. A. Mac-Mahon* giebt Erweiterungen dieser Begriffe[19]).

6. Sequenzen. *D. André* hat den Begriff der *Sequenz* bei P. eingeführt und in einer ganzen Reihe von Abhandlungen durchforscht[20]). Aufeinanderfolgende Zahlenelemente einer P. bilden eine Sequenz, wenn jedes folgende gröſser (kleiner) als das vorhergehende ist. Jede P. zerfällt in Sequenzen. Die Anzahl der vorkommenden Sequenzen bestimmt die „Art" der P. Es wird untersucht, wieviele P. einer bestimmten Art angehören. Es zeigt sich, dass die Anzahl der P. mit gerader Sequenzenzahl gleich derjenigen der P. mit ungerader Sequenzenzahl ist. Es werden geometrische Repräsentationen gegeben, u. s. w.

---

14) *C. W. Baur,* Z. f. Math. 2 (1857), p. 267.

15) *A. Laisant,* C. R. 112 (1891), p. 1047.

16) *O. Terquem,* J. d. Math. 4 (1839), p. 177. — Weitere Einschränkungen in der Stellenbesetzung untersucht *Th. Muir,* Edinb. Proceed. 10 (1881), p. 187. *A. Holtze,* Arch. f. Math. (2), 11 (1892), p. 284.

17) *A. Cayley,* Messenger (2), 19 (1890), p. 135. *M. Frolov,* J. m. spéc. (3), 4 (1890), p. 8 u. 25. *J. Bourget,* J. de Math. (3), 8 (1882), p. 413. *P. Seelhof,* Arch. f. Math. (2), 1 (1884), p. 97.

18) Hindenb. Arch. f. M. (1795).

19) *P. A. Mac Mahon,* Messeng. (2), 24 (1894), p. 69.

20) C. R. 97 (1883), p. 1356; 115 (1892), p. 872; 118 (1894), p. 575. [*G. Darboux* Rapport; C. R. 118 (1894), p. 1026]. Soc. m. d. Fr. 21 (1893), p. 131; Ann. Éc. Norm. (3), 1 (1884), p. 121.

7. Anwendung auf Fragen der Arithmetik. Im Zusammenhange mit den P.-Theoremen stehen die Fragen, auf wie viele Arten man Summen oder Produkte gegebener Elemente, die verschieden oder zum Teil einander auch gleich sind, mit oder ohne Umstellung dieser Elemente, rechnerisch durchführen könne[21]).

8. Kombinationen zu bestimmter Summe oder bestimmtem Produkte. Auch bei den K. und V. können die einzelnen Kp. Beschränkungen unterworfen werden. Die bekannteste und wichtigste besteht darin, dafs die K. und V. der natürlichen Zahlen betrachtet werden, deren Elemente m. W. oder o. W. eine *bestimmte Summe* haben, welche das *Gewicht* der Kp. genannt wird. Ihre Bedeutung tritt in der Invariantentheorie zu Tage. *L. Euler* war der Erste, welcher diese Frage behandelte (Introd. in Anal. Lausanne 1748, § 299 ff.; Comm. Acad. Petr. 3 [1753], p. 159), der für die Anzahl dieser K. Entwickelungscoefficienten gewisser Produkte gab und dadurch zu Beziehungen zwischen K. m. W. und K. o. W. gelangte. Diese Fragen wurden später vielfach weiter verfolgt[22]), und ihre Beantwortung besonders von *Cayley*[23]) und *J. J. Sylvester*[24]) durch Aufstellung von Tabellen und geometrische Repräsentationen gefördert. *Mac-Mahon* hat diese Untersuchungen weitergeführt, die dann auch auf die Zerlegung von Zahlenpaaren ausgedehnt wurden. Wir müssen uns mit diesen Bemerkungen begnügen, da die weiteren Anwendungen auf symmetrische Funktionen und die Invariantentheorie nicht mehr kombinatorischer Natur sind.

In ähnlicher Weise hat *Möbius* die K. behandelt, bei denen die Elemente der Kp. ein *bestimmtes Produkt* besitzen[25]). Sie werden nach ihren Klassen geordnet, und die Anzahlen der zugehörigen K. mit einander in Verbindung gebracht. Derartige Relationen treten auch für den Fall auf, dafs den Kp. noch Bedingungen auferlegt werden, z. B. dafs bei dem vorgeschriebenen Produkte $a^\alpha b^\beta$ in jeder Kp. jedes Element mindestens einen Faktor b hat.

Ettingshausen ist ferner darauf eingegangen, jede Kp. als Produkt

---

21) *E. Ch. Catalan,* J. d. Math. 6 (1874), p. 74. *E. Schröder,* Z. f. Math. 15 (1870), p. 361.

22) *M. Stern,* J. f. M. 21 (1840), p. 91 u. p. 177, ibid. 95 (1883), p. 102. *C. Wasmund,* Arch. f. Math. 21 (1853), p. 228, ibid. 34 (1860), p. 440.

23) Lond. Transact. 145 (1855), p. 127, ibid. 148 (1858), p. 47. Amer. J. 6 (1883), p. 63.

24) Quart. J. 1 (1855—57), p. 81 u. p. 141. Amer. J. 5 (1882), p. 251. C. R. 96 (1883). Vgl. auch *Mac Mahon,* Lond. Trans. 184 (1894), p. 835, sowie den Bericht über Combin. Analysis: Lond. M. S. Pr. 28 (1897), p. 5.

25) J. f. M. 9 (1832); 105.

aufzufassen, und alle solche zu einer K.-Klasse gehörigen Produkte zu summieren[26]). Weiter werden die Klassen nach bestimmten Moduln eingeteilt und Zahlenbeziehungen zwischen ihnen ermittelt[27]).

Und nicht nur auf die K. selbst beziehen sich solche Untersuchungen, sondern auch auf Kp., die in verschiedenartiger Weise aus den gewöhnlichen K. abgeleitet sind. Es wird z. B. zum ersten Elemente jeder Kp. 0 addiert, zum zweiten 1, ... zum n^{ten} $(n-1)$. So entstehen Produkte, zwischen deren Summen wieder merkwürdige Beziehungen sich angeben lassen[28]). Vgl. auch *Th. B. Sprague,* Edinb. Proc. 37 (1893), p. 399.

9. Kombinationen mit beschränkter Stellenbesetzung. Der Weg der Untersuchung, welcher sich auf *beschränkte Stellenbesetzung* bezieht, gliedert sich hier. Zunächst werden, ähnlich wie bei den P., Forderungen gestellt, dass gewisse Elemente in einer vorgeschriebenen Anzahl von Malen vorkommen[29]), oder dass eine Maximalzahl für ihr Auftreten gegeben ist[30]).

10. Tripelsysteme. Eine andere Richtung aber hat sich für die Geometrie, die Wahrscheinlichkeitsrechnung, für die Algebra als besonders wichtig herausgestellt. Unabhängig von einander stellten *T. P. Kirkman*[31]) und *J. Steiner*[32]) fast identische Aufgaben; der Erste sein „Schulmädchen-Problem": Fünfzehn Mädchen werden 35mal ausgeführt in Reihen zu je 3, so dass nicht 2 zweimal zusammen gehen; der Letzte das folgende: Aus N Elementen sollen K. der 3^{ten} Klasse (Ternen) so ausgewählt werden, dass jede Ambe ein- und nur einmal vorkommt; ferner K. der 4^{ten} Klasse (Quaternen) so, dass in ihnen jede Terne, die unter den vorigen nicht auftrat, ein- und nur einmal vorkommt u. s. w. *Cayley*[33]) und *R. R. Anstice*[34]) behandelten einzelne Fälle der *„Tripelsysteme"*. Eine allgemeine Regel für die Bildung solcher Systeme, welche $N = 6n + 1$, $6n + 3$ fordern, gab *M. Reiss*[35]).

---

26) Die kombinatorische Analysis. Wien (1826).

27) *A. A. Cournot,* Bull. sci. m. (1829). *Ch. Ramus,* J. f. M. 11 (1834), p. 353.

28) *H. F. Scherk,* J. f. M. 3 (1828), p. 96; J. f. M. 4 (1829), p. 226.

29) *Ad. Weiss,* J. f. M. 34 (1847), p. 255.

30) *Öttinger,* Arch. f. M. 15 (1850), p. 241. *Baur,* Z. f. M. 2 (1857), p. 267. *Scherk,* Math. Abhandl. Berlin (1825), p. 67. *André,* Ann. Éc. norm. (2), 5 (1876), p. 155.

31) Cambr. a. Dubl. m. J. 7 (1852), p. 527 u. 8 (1853), p. 38; vgl. *T. Clausen,* Arch. f. M. 21 (1853), p. 93.

32) J. f. M. 45 (1853), p. 181 = Werke II, p. 435.

33) Phil. Mag. (3), 37 (1850), p. 50. — Ibid. (4), 25 (1862), p. 59.

34) Cambr. a. Dubl. m. J. 7 (1852), p. 279 u. 8 (1853), p. 149.

35) J. f. M. 56 (1859), p. 326.

In neuerer Zeit wurden analytische Darstellungen für Primzahlen $6n+1$ hergeleitet, ferner für Zahlen $6n+3$, falls dies das Dreifache einer Primzahl von der Form $6k+5$ ist, u. s. w. Endlich wurden analytische Bildungsregeln gegeben, aus denen die Konstruktion für jedes mögliche N folgt[36]). Für $N=13$ sind zwei Tripelsysteme bekannt[37]). Die weiteren Teile der *Steiner*'schen Aufgabe sind noch nicht in Angriff genommen. — Auf ähnliche Aufgaben macht *Cayley* aufmerksam[38]). Vgl. I A 6 Nr. **13** Anm. 67.

11. Ausdehnung des Begriffs der Variation. Der Begriff der V. ist nach der Richtung hin erweitert worden, dass m Reihen von je n Elementen gegeben sind, und als V. m^{ter} Klasse werden dann die Kp. bezeichnet, welche je ein Element aus jeder der m Reihen enthalten. Darf derselbe Stellenzeiger der Elemente nur einmal auftreten, so sind es V. o. W., sonst V. m. W.

12. Formeln. Zwischen den verschiedenen bisher besprochenen Anzahlen bei P., K. und V. giebt es eine ausserordentlich grosse Menge verknüpfender Formeln. Hier muss es ausreichen, auf die hauptsächlichsten Schriftsteller hinzuweisen, welche sich mit der Ableitung oder Zusammenstellung beschäftigt haben[39]).

13. Binomialkoefficienten. Wir haben schon erwähnt, dass die Beweise des *binomischen* und des *polynomischen* Satzes für ganze positive Exponenten n

$$(z_1+z_2+\cdots+z_\varrho)^n=\sum\frac{n!}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\cdots\varkappa_\varrho!}\,z_1^{\varkappa_1}z_2^{\varkappa_2}\cdots z_\varrho^{\varkappa_\varrho}$$
$$(\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_\varrho=n)$$

Anwendungen kombinatorischer Formeln sind. Die binomische Formel findet sich zuerst bei *H. Briggs*[40]), dann bei *J. Newton*[41]); die Koeffi-

36) *E. Netto,* Substit.-Theorie § 192ff. Leipz. (1882). Math. Ann. 42 (1892), p. 143. *E. H. Moore,* Math. Ann. 43 (1893), p. 271; N. Y. Bull. (2), 4 (1897), p. 11. *L. Heffter,* Math. Ann. 49 (1897), p. 101. *J. de Vries,* Rend. Palermo 8 (1894).

37) *K. Zulauf,* Dissert. Giessen (1897).

38) Phil. Mag. 30 (1865), p. 370.

39) *Hindenburg,* Nov. Syst. Permutationum, Combin. etc. primae lineae. Lips. (1781). — D. polynom. Lehrs., d. wichtigste Theorem d. ganzen Analysis, neu bearb. v. *J. N. Tetens, G. S. Klügel, A. Krauss, J. F. Pfaff* u. *Hindenburg,* herausgeg. v. *Hindenburg.* Leipz. 1796. *Hindenburg,* Infinitonomii dignitatum historia, leges etc. Vgl. auch *J. A. Grunert,* Arch. f. M. 1 (1841), p. 67; *Brianchon,* J. d. l'Ec. Polyt. t. 15 (1837), p. 159.

40) Arithmetica Logarithmica. London (1620).

41) Briefe an *Oldenburg* (1676) 13. Juni u. 24. Oktober.

cienten der binomischen Entwickelung ($n = 2$), die *Binomialkoefficienten* in ihrer Anordnung etc. als „arithmetisches Dreieck"

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \end{array}$$

kommen schon bei *Bl. Pascal* vor[42]).

Als Erweiterungen des binomischen Satzes ist zu erwähnen, erstens die Entwickelung von $a(a+b)(a+2b)\cdots(a+nb)$ nach Potenzen von a;[43]) ferner die Entwickelung

$$(x+a)^n = x^n + c_1(x+t_1)^{n-1} + c_2(x+t_1+t_2)^{n-2} + \cdots,$$

wobei die t_α willkürliche Grössen sind[44]).

Als Erweiterung der Binomialkoefficienten sind Ausdrücke der Form

$$[n(n+k)(n+2k)\ldots(n+(p-1)k)] : p!$$

eingeführt worden[45]), deren Zähler als Fakultäten eingehend untersucht sind[46]). Die analytische Behandlung gehört nicht hierher.

Zwischen den Binomialkoefficienten giebt es eine unübersehbare Zahl von Relationen, deren Klassificierung von *J. G. Hagen* angebahnt ist[47]). Vgl. auch die „figurierten Zahlen" der Alten.

14. Anwendungen. Wie schon in Nr. **1** erwähnt wurde, bieten die meisten Anwendungen analytischer Natur der Kombinatorik nur noch historisches Interesse dar. Wir beschränken uns darauf, die wichtigsten Zweige anzugeben, welche die Kombinatorik zu stützen unternommen hatte. An erster Stelle gehört hierher die Wahrscheinlichkeitsrechnung, in deren elementaren Teilen ja ununterbrochen kombinatorische Fragen auftreten, und von der aus umgekehrt die Kombinatorik manche Anregung erhalten hat. Sie knüpft ferner an

---

42) Traité du triangle arithmét. Paris (1665) posth.; u. schon früher bei *M. Stifel,* Arithm. integra. Norimb. (1544), p. 44.

43) *Pascal* „productum continuorum".

44) *N. H. Abel,* J. f. M. 1 (1826), p. 159 giebt einen Spezialfall; allgemein *A. v. Burg,* J. f. M. 1 (1826), p. 367. — *Cayley,* Phil. Mag. 6 (1853), p. 185 = Werke II, 102.

45) *Bl. Pascal,* siehe oben.

46) *L. Euler,* Calc. diff. II. c. 16 u. 17. Berl. (1755). *Öttinger,* J. f. M. 33 (1846), p. 1, 117, 226, 329; ferner 35 (1847), p. 13 u. 38 (1849), p. 162, 216; endlich 44 (1852), p. 26 u. 147, wo auch Historisches aufgeführt ist.

47) Synopsis. Berlin (1891), p. 64ff. Vgl. auch *G. Eisenstein,* Brief an *M. A. Stern,* Z. f. Math. 40 (1895), p. 193 der hist. Abtl.

die Theorie der Reihen an, bestimmt formal die Produkte, Potenzen, Quotienten von Reihen; das Resultat der Substitution einer Reihe für die Variable z in eine Reihe, die nach Potenzen von z fortschreitet; die formale Umkehrung von Reihen; die Rationalisierung solcher, in welche Irrationalitäten eingehen; die allgemeinen Glieder wiederkehrender Reihen; die Logarithmen von Reihen und Reihen von Logarithmen u. s. w. Ebenso giebt sie die Form für die höheren Differentiale von komplicierteren Funktionen u. s. w. Für ihre Zwecke hatte sie ein vollständiges Bezeichnungssystem ersonnen, welches jetzt freilich durchaus veraltet ist[48]).

Die gesamte Theorie der endlichen discreten Gruppen (I A 6) kann unmittelbar an die Kombinatorik angeschlossen werden.

Noch eine zweite Anwendung, die auf die Lösung linearer Gleichungen gerichtete, hat sich in überraschender Weise entwickelt. Sie ist zur *Lehre von den Determinanten* geworden.

15. Determinanten. Erklärung des Begriffs. Es seien n^2 Grössen a_{ik} $(i, k = 1, 2, \dots n)$ gegeben; man bilde alle $n!$ Produkte a_{1i_1}, a_{2i_2}, $\dots$ a_{ni_n} in denen i_1, i_2, $\dots$ i_n eine P. von 1, 2, $\dots$ n bedeutet und gebe jedem das Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem diese P. zur ersten oder zweiten Klasse gehört. Die Summe dieser $n!$ Summanden ist die *Determinante* n^{ten} Grades[49]). *A. L. Cauchy*[50]) definiert sie auch so, dass er das alternierende Produkt $\prod(a_i - a_k)$, $(i = 1, 2, \dots n;\ k = i+1, \dots n)$, entwickelt und die Exponenten als zweite untere Indices schreibt. *E. Schering*[51]) giebt eine geometrische und eine analytische Erklärung, *Kronecker* legte in seinen Vorlesungen eine funktionentheoretische zu Grunde.

An Bezeichnungen sind die üblichsten[52])

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = |\, a_{h1}\, a_{h2} \dots a_{hn} \,| = |\, a_{hk} \,|;$$

$$(h, k = 1, 2, \dots n).$$

48) Vgl. *Hindenburg,* Nov. Syst. etc. Leipz. (1781).

49) *Jacobi,* J. f. M. 22 (1841), p. 285 = Werke III, p. 355.

50) Analyse algébrique. Paris (1821).

51) Gött. Abh. 22 (1879), p. 102.

52) Die dritte Bezeichnung ist von *L. Kronecker* vielfach verwendet; die letzte zuerst von *St. Smith*, Brit. Ass. Rep. (1862) p. 504. Als neu eingeführt hat sie dann *L. Kronecker,* J. f. M. 68 (1868), p. 273. Über weitere Bezeichnungen vgl. *Cayley,* Phil. Mag. 21 (1861), p. 180. *Nanson*, Lond. phil. Mag. (5) 44 (1897), p. 396. *W. Schrader*, Determinanten. Halle 1887.

Historisch zu bemerken ist, dass die Determinanten von *Leibnitz*[53]) und später unabhängig von *Cramer*[54]) erfunden und zunächst zur Auflösung eines Systems linearer Gleichungen benutzt worden sind. Die ersten ausführlichen theoretischen Darlegungen stammen von *J. Binet* und *Cauchy;* allgemein eingeführt wurde die Lehre über die D. durch *Jacobi*[55]). Ausführliche Litteraturangaben findet man bei *Muir*[56]) von Beginn der Theorie bis zum Jahre 1885 fortgesetzt; Historisches auch bei *S. Günther*, Determinantentheorie, Erlangen (1875), bei *Baltzer*, Determinanten, Leipzig (1881) und bei *G. Salmon*, Modern higher algebra, Note I im Anschluss an *Baltzer.*

16. Definitionen. Die Grössen a_{ik} heissen die *Elemente* (El.) der D.; der erste (zweite) Index giebt die Ordnungszahl der Zeile (Spalte). Die Grössen a_{ii} bilden die *Hauptdiagonale*; die $a_{i,\,n+1-i}$ bilden die *Nebendiagonale.* Das Glied $a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ der D. heisst ihr *Hauptglied.* Wählt man m Werte des ersten und m des zweiten Index aus $1, 2, \dots n$ aus, so bilden die zugehörigen El. eine *Subdeterminante* (Subd.) m^{ten} Grades[57]). Sind die El. ihrer Hauptdiagonale zugleich El. derjenigen der D., dann heisst die Subd. eine *Hauptsubdeterminante.* Ist das Produkt der Hauptglieder zweier Subd. ein Glied der D., so heissen die Subd. *adjungiert,* oder auch *komplementäre* Subd.

Ist $a_{ik} = a_{ki}$, so heisst die D. eine *symmetrische D.*

Ist $a_{ik} = a_{i+k-2}$, so heisst die D. eine *rekurrierende* (einseitige, *orthosymmetrische*). Sie ist symmetrisch[58]).

Ist $a_{ik} = a_{i+1,\,k+1}$, wobei die Indices mod. n reduciert werden, so heisst die D. eine *Cirkulante*[59]), (auch *negativ-orthosymmetrische D.*).

Ist $a_{ik} + a_{ki} = 0$, $a_{ii} = 0$, so heisst die D. eine *halbsymmetrische.* Ist $a_{ik} + a_{ki} = 0$ für $i \neq k$, dann heisst die D. eine *schiefe*[60]).

---

53) Lettres à l'Hospital (1693). — Acta Erudit. Leipz. (1700), p. 206.

54) Introd. à l'anal. des courbes algébr. (1750). Genève. Appendice p. 656.

55) J. de l'Éc. Polytechn. Cah. 16 (1812), p. 280 u. Cah. 17 (1812), p. 29. — *Jacobi,* J. f. M. 22 (1841), p. 285 = Werke III, p. 355.

56) Quart. J. 18 (1882), p. 110; ibid. 21 (1886), p. 299. — Edinb. Proc. 13 (1886), p. 547. — Im Phil. Mag. (5), 18 (1884), p. 416 macht *Muir* auf *Ferd. Schweins* als einen vergessenen Entdecker aufmerksam, „Theorie der Differenzen u. Differentiale" (1825). Heidelberg. Cap. IV, p. 317.

57) Auch Unterdeterminante, Partialdeterminante, Minor.

58) *H. Hankel,* Dissert. Leipz. (1861) Göttingen. — „Recurrierend" nach *G. Frobenius;* Berl. Ber. (1894), p. 253.

59) *Th. Muir,* Quart. J. (1882), p. 166. *Hankel* l. c.

60) *Jacobi,* J. f. M. 2 (1857), 354; ibid. 29 (1845), p. 236. *Cayley,* J. f. M. 38 (1849), p. 93; ibid. 32 (1846), p. 119; ibid. 50 (1855), p. 299. *Cayley* bezeichnet die halbsymmetrischen D. als „schiefsymmetrische".

Ist $a_{ik} = a_{n+1-i,\,n+1-k}$, so heisst die D. eine *centrosymmetrische.*

17. Anzahl-Probleme hinsichtlich der Glieder. Die Anzahl der Glieder einer D. n^{ten} Grades ist $n!$. Es knüpfen sich hieran weitere Fragen: wie viele der Glieder enthalten eine vorgeschriebene Anzahl von El. der Hauptdiagonale[61])? Wie viele Glieder hat eine D., deren Hauptdiagonale k El. 0 enthält[62])? Wie viele verschiedene Glieder giebt es in symmetrischen, wie viele in halbsymmetrischen D.[63])?

18. Elementare Eigenschaften. Die folgenden Eigenschaften elementarer Natur zeigen sich sofort: man kann, ohne den Wert der D. zu ändern, jede α^{te} Z. zur α^{ten} Sp. machen[64]). Bei Transposition zweier Parallelreihen ändert sich das Vorzeichen der D.; folglich ist eine D. mit zwei identischen Parallelreihen gleich Null[65]). Die D. kann als lineare, homogene Funktion der El. jeder Reihe dargestellt werden[66]). Daraus folgt, dass man einen gemeinsamen Faktor aller El. einer Reihe vor die D. ziehen kann. Der Grad einer D. lässt sich durch passende *Ränderung,* d. h. Anfügung neuer Z. und Sp. vermehren. Stimmen zwei D. in $(n-1)$ Reihen überein, so können sie zu einer D. mit denselben $(n-1)$ Reihen summiert werden. Ist $a_{ik} = b_{ik} + c_{ik}$ $(k = 1, \ldots n)$, so zerfällt umgekehrt die D. in einzelne Summanden. Die lineare, homogene Darstellung liefert die partielle Ableitung der D. nach a_{ik}. Bezeichnen wir sie mit a'_{ki}, so folgt $\sum\limits_{\lambda} a_{i\lambda} a'_{\lambda k} = \varepsilon_{ik} D$, (d. h. $= D$, wenn $i = k$, sonst $= 0$)[67]). Wie die a', so können auch die höheren Subd. als partielle Ableitungen höherer Ordnung dargestellt werden[68]).

Die D. ändert ihren Wert nicht, wenn zu einer Reihe eine Parallelreihe addiert oder von ihr subtrahiert wird[69]).

---

61) *Baltzer,* Determin. 4. Aufl. Leipz. 1875, p. 39. Leipz. Ber. (1873), p. 534. *C. J. Monro,* Messeng. (2), 2 (1872), p. 38.

62) *N. v. Szütz,* Math. Ann. 33 (1889), p. 477.

63) *J. J. Weyrauch,* J. f. M. 74 (1872), p. 273. *Cayley,* Monthly Not. of Astron. Soc. 34 (1873—74), p. 303 u. p. 335. *G. Salmon,* Modern Algebra. Dublin (1885), p. 45.

64) *J. C. Becker,* Z. f. M. 16 (1871), p. 326. *Gordan,* Vorles. üb. Invar.-Th. (1885), p. 21. — Die D. wird „gestürzt“.

65) *Ch. A. Vandermonde,* Par. Acad. (1772), 2^{e} part., p. 518, 522.

66) *Cramer,* l. c. *J. L. Lagrange,* Berl. Mem. (1773), p. 149, 153.

67) ε_{ik} von *Kronecker* eingeführt, J. f. Math. 68 (1868), p. 273. Setzt man $a'_{ik} : D = \alpha_{ik}$, so nennt *Kronecker* die Systeme a_{ik}, α_{ik} reciproke Systeme.

68) *Jacobi,* J. f. Math. 22 (1841), p. 285, § 10 = Werke III, p. 365.

69) *Jacobi,* J. f. Math. 22 (1841), p. 371 = Werke III, p. 452.

Mit Hülfe der angegebenen Sätze kann die Berechnung von D. mit Zahlen-El. häufig abgekürzt werden, ebenso wie die von D., deren El. analytischen Gesetzen folgen. Es besteht eine fast unübersehbare Zahl von Einzelresultaten; die Heraushebung auch nur der wichtigsten würde den Rahmen dieser Darstellung sprengen[70]).

19. Laplace'sche und andere Zerlegungssätze. Von *P. S. Laplace*[71]) rührt ein wichtiger Satz her über die Entwickelung von D. nach Produkten adjungierter Subd. Aus den m ersten Z. (Sp.) werden alle möglichen Subd. m^{ten} Grades, aus den folgenden Z. (Sp.) alle adjungierten $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades gebildet. Dem Produkte zweier adjungierten wird ein solches Vorzeichen gegeben, dass das Produkt ihrer Hauptglieder ein Glied der D. ist. Die Summe dieser Produkte ist gleich der D. Nimmt man beliebige m und $(n-m)$ Z. (Sp.), so ist die Summe $=0$, wenn auch nur eine gemeinsame Reihe vorkommt[72]). *Jacobi* zieht hieraus eine Reihe von Schlüssen über D. mit Null-Elementen[73]).

Sehr naheliegend ist die Erweiterung des Satzes nach der Richtung, dass die Produkte aus mehr als zwei Faktoren bestehen[74]).

Eine andere Erweiterung benutzt die Ränderung der D. und giebt an, wie aus jedem durch die *Laplace*'sche Formel gelieferten Resultate ein neues über geränderte D. sich ableiten lässt[75]). Dieser Erweiterung stellt sich eine andere die adj. Subd. betreffend zur Seite[76]).

20. Entwickelungen. Von weitern Entwickelungen wäre noch zu erwähnen die einer D., bei welcher die Diagonalglieder $a_{ii}=b_{ii}+z$ heissen; die Entwickelung geschieht nach Potenzen von z.[77]) Ferner ist die Entwickelung einer einreihig geränderten D. $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades nach den El. des Randes von Wichtigkeit[78]). Von *O. Hesse* stammt

---

70) Vgl. die Beispiele in *Baltzer, S. Günther, R. F. Scott, Salmon* u. s. w.

71) Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde. Paris Ac. d. Sc. (1772) 2e part., p. 267. — *Cauchy,* l. c. p. 100. — *Jacobi,* l. c. Nr. 5.

72) *Cauchy,* l. c.

73) *Jacobi,* l. c. Nr. 5.

74) *Vandermonde,* l. c. p. 524. — *Laplace,* l. c. p. 294. — *Jacobi,* l. c. Nr. 8.

75) *Netto,* J. f. Math. 114 (1895), p. 345.

76) *E. Pascal,* Rend. Acc. d. Linc. (5) 5, (1896), p. 188. Das dort aufgestellte Theorem folgt übrigens aus dem vorigen vermittels eines allgemeinen Satzes von *Th. Muir,* Edinb. Transact. 30 (1882), p. 1, durch den man von einer Formel über Subd. zu einer andern über adjungierte Subd. übergehen kann.

77) *Laplace,* Mécan. céleste, 1, liv. 2, Nr. 56. Paris (1799). — *Jacobi,* J. f. Math. 12 (1834), p. 15 = Werke III, p. 208.

78) *Cauchy,* l. c. p. 69.

ein Satz über Zerfällung der geränderten D., falls die ungeränderte verschwindet[79]).

21. Komposition und Produkt. Das Produkt einer D. m^{ten} in eine D. n^{ten} Grades lässt sich durch Aneinanderschieben in Diagonalrichtung (*Laplace*'scher Satz) leicht als D. $(m+n)^{\text{ten}}$ Grades darstellen. *J. Ph. M. Binet* und *A. L. Cauchy* haben das Produkt zweier D. n^{ten} Grades wieder als D. n^{ten} Grades dargestellt[80]). Gleichzeitig haben sie folgende Erweiterung gegeben: Aus zwei Systemen a_{ik}, b_{ik} wird ein drittes c_{ik} gebildet, *komponiert*,

$$a_{ik} \quad (i=1,\dots m;\ k=1,\dots n); \quad b_{ik} \quad (i=1,\dots n;\ k=1,\dots m)$$
$$c_{ik} = \sum a_{i\lambda} b_{\lambda k} \quad (i=1,\dots m;\ k=1,\dots m;\ \lambda=1,\dots n);$$

dann ist $|c_{ik}|=0$ für $m>n$; ferner $|c_{ik}| = |a_{ik}|\,|b_{ik}|$ für $m=n$; und endlich $|c_{ik}| = \sum\limits_t |a_{it}|\,|b_{it}|$ für $m<n$, wobei t alle möglichen Kombinationen m^{ter} Klasse aus $1, 2, \dots n$ durchläuft. Der mittlere Fall giebt die Multiplikationsregel[81]); die verschiedene Anordnung der El. in Z. und Sp. liefert vier verschiedene Formen für das Produkt[82]). An diese Darstellung knüpfen sich analytisch und zahlentheoretisch wichtige Formeln[83]).

22. Andere Art von Komposition. Auf eine andere Art von Komposition hat *Kronecker*[84]) aufmerksam gemacht: a_{ik} $(i,k=1,\dots m)$ und b_{gh} $(g,h=1,\dots n)$ werden zu $c_{pq}=a_{ik}b_{gh}$ $(p=(i-1)n+g;$ $q=(k-1)n+h;\ i,k=1,\dots m;\ g,h=1,\dots n)$ komponiert. Dann ist

$$|c_{pq}| = |a_{ik}|^n \cdot |b_{gh}|^m.$$

23. Zusammengesetzte Determinanten. Eingehendes Interesse hat sich der Frage nach den *zusammengesetzten* D. (compound det.) zugewendet, d. h. nach solchen, deren Elemente selbst wieder nach gewissen Gesetzen gebildete D. sind. Am nächstliegenden ist die Untersuchung der aus den El. a'_{ik}, d. h. den Adjunkten der a_{ik} gebildeten D. *Cauchy*[85]) hat für $|a'_{ik}|$ $(i,k=1,\dots n)$ den Wert ange-

79) J. f. Math. 69 (1868), p. 319.

80) J. de l'Éc. polyt. Cah. 16 (1812), p. 280; Cah. 17 (1812), p. 29.

81) Weitere Beweise u. a.: *J. König,* Math. Ann. 14 (1879), p. 507. *M. Falk,* Brit. Ass. Rep. (1878), p. 473. *A. V. Jamet,* Nouv. Corresp. M. 3 (1877), p. 247.

82) *Cauchy,* l. c. p. 83.

83) *Ch. Hermite,* J. f. Math. 40 (1850), p. 297. *K. F. Gauss* Werke 3, p. 384. *Baltzer,* Leipz. Ber. (1873), p. 352. *S. Gundelfinger,* Z. f. Math. 18 (1873), p. 312.

84) Vorlesungen. *K. Hensel,* Acta mat. 14 (1890—91), p. 317. *Netto,* Acta mat. 17 (1894), p. 200. *B. Igel,* Monatsh. f. Math. 3 (1892), p. 55. *G. v. Escherich,* ib. 3 (1892), p. 68.

85) l. c. p. 82.

geben; *Jacobi*[86]) allgemeiner für $|a'_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, \dots m;\ m < n)$. Im ersten Falle tritt eine Potenz von D. auf, im zweiten eine solche, multipliciert mit einer Subd. $|a_{ik}|$.

Diese Sätze sind von *Franke*[87]) erweitert worden; statt der a'_{ik} werden die Subd. m^{ten} Grades p_{ik} $(i, k = 1, 2, \dots \mu)$ betrachtet, wo $\mu = \binom{n}{m}$ ist, und die Numerierung auf alle μ Subd. m^{ten} Grades von D. sich erstreckt. Ferner soll p'_{ik} zu p_{ik} adjungiert sein, d. h. p'_{ik} ist eine Subd. $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades von $|a_{ik}|$, und das Produkt der Hauptglieder von p_{ik} und p'_{ik} ist ein Glied von $|a_{ik}|$. Es ergiebt sich dann

$$|p_{ik}| = D^{\binom{n-1}{m-1}}, \qquad |p'_{ik}| = D^{\binom{n-1}{m}},$$

und auch hier kann man die Subd. von $|p'_{ik}|$ in ähnlicher Weise darstellen, wie bei *Jacobi* die Subd. von $|a'_{ik}|$.[88])

Allgemeiner noch ist der *Sylvester*'sche Satz[89]), den wir kurz dahin charakterisieren können, dass er sich auf Ränderung der D. $|p_{ik}|$ bezieht.

Andere Arbeiten beschäftigen sich damit, D. aus Reihen zweier gegebenen D. zusammenzusetzen, und diese neuen D. als Elemente einer D. aufzufassen[90]).

24. Rang der Determinante. Nach *Kronecker* bezeichnet man als *Rang* r einer D. die grösste Zahl von der Beschaffenheit, dass nicht alle Subd. r^{ten} Grades verschwinden[91]). Durch Vertauschung und durch lineare Kombinationen der Reihen wird r nicht geändert. Ist D vom Range r, so können seine El. aus zwei Systemen

$$a_{ik}\ (i = 1, \dots n;\ k = 1, \dots r) \quad \text{und} \quad b_{ik}\ (i = 1, \dots r;\ k = 1, \dots n)$$

komponiert werden[92]). Von Wichtigkeit ist dieser Begriff für viele Fragen der Algebra, besonders Auflösung linearer Gleichungen (I B 1 b).

---

86) l. c. § 11. — *C. W. Borchardt*, Brief an *Baltzer* (1853).

87) J. f. Math. 61 (1863), p. 350.

88) *C. W. Borchardt*, J. f. Math. 61 (1863), p. 353, 355, macht darauf aufmerk- dass der Satz ein Spezialfall des früher von *Sylvester* gegebenen ist; *Kronecker*, Berl. Ber. (1882), p. 822 weist seine Identität mit dem obigen von *Jacobi* nach. — Vgl. *Picquet*, C. R. 86 (1878), p. 310; J. de l'Éc. Pol. cah. 45 (1878), p. 201.

89) Phil. Mag. (4), 1 (1851), p. 415. Vgl. *Frobenius*, J. f. Math. 86 (1879), p. 54); Berl. Ber. (1894), p. 242. — *Netto*, Acta mat. 17 (1894), p. 201; J. f. Math. 114 (1895), p. 345. *R. F. Scott*, Lond. Proceed. 14 (1883), p. 91. *C. A. v. Velzer*, Amer. J. 6 (1883), p. 164. *Ém. Barbier*, C. R. 96 (1883), p. 1845; ib. 97 (1883), p. 82. *E. J. Nanson*, Lond. phil. Mag. (5) 44 (1897), p. 396.

90) *Picquet*, l. c. *G. Zehfuss*, Z. f. Math. 7 (1862), p. 496.

91) Berl. Ber. (1884), p. 1071.

92) *Kronecker*, J. f. Math. 72 (1870), p. 152. *Baltzer*, Determinanten, 4. Aufl. Leipz. (1875), p. 53.

25. Hier mag noch ein auf allgemeine D. bezüglicher Satz von *Mac-Mahon* erwähnt werden (Phil. Trans. 185 (1894), p. 146). Zwischen einer D. und all den Subd., deren Hauptdiagonalen in die Hauptdiagonale der D. fallen, bestehen $2^n - n^2 + n - 2$ Relationen. Vgl. auch *Muir*, Phil. Mag. (1894), p. 537; Edinb. Proceed. 20 (1895), p. 300. *Cayley*, ibid. p. 306. *Nanson*, ibid. (1897), p. 362.

26. Symmetrische Determinanten. Bei *symmetrischen*, d. h. solchen D., deren El. in Beziehung auf die Hauptdiagonale symmetrisch sind, bilden auch die a'_{ik} eine symmetrische D. — Jede Potenz einer symmetrischen D., und jede gerade Potenz einer beliebigen D. ist symmetrisch[93]. Das Produkt aus einer symmetrischen D. in das Quadrat einer beliebigen D. ist als symmetrische D. darstellbar[94]. Ist r der Rang einer symm. D., so hat sie eine nicht verschwindende Hauptsubd. vom Grade r.[95] *H. G. Grassmann* hatte zuerst angegeben[96], dass zwischen den Subd. symmetrischer D. lineare Relationen bestehen; denselben Satz hat später *Kronecker* wieder gefunden[97], und *C. Runge* hat gezeigt[98], dass die von ihm gegebenen Relationen die einzigen vorhandenen sind. Diese haben folgenden Charakter:

$$|a_{gh}| = \sum |a_{ik}| \qquad \begin{matrix}(g = 1, \ldots m;\, h = m+1, \ldots 2m;\, i = 1, \ldots m-1, r;\\ k = m+1, \ldots r-1, m, r+1, \ldots 2m).\end{matrix}$$

Rändert man eine symmetrische, verschwindende D. in symmetrischer Weise, so ist die entstehende D. als Function der Ränderungs-Elemente aufgefasst ein Quadrat[99], wie sich aus Nr. **19** leicht ergiebt. Trägt man $a_{ii} + z$ statt der a_{ii} ein und setzt die entstehende symmetrische D. gleich Null, dann hat diese Gleichung in z nur reelle Wurzeln. Die entstehende Gleichung heisst die „Säculargleichung"[100]. (Vgl. Nr. **31.**)

---

93) *H. Seeliger*, Z. f. Math. 20 (1875), p. 468 bestimmt die El. einer beliebigen Potenz einer sym. D.

94) *O. Hesse*, J. f. Math. 49 (1853), p. 246. — Vgl. über eine Erweiterung *Muir*, Amer. J. 4 (1881), p. 351.

95) *S. Gundelfinger*, J. f. Math. 91 (1881), p. 235; vgl. *Hesse*, analyt. Geom. d. Raumes, 3. Aufl. Leipz. (1881), p. 460. *Frobenius*, Berl. Ber. (1894), p. 245.

96) Ausdehnungslehre, Berlin (1862), p. 131. Vgl. *Mehmke*, Math. Ann. 26 (1885), p. 209. Die Art wie *Grassmann* statt der D. gewisse „kombinatorische Produktbildungen" benutzt, erkennt man am einfachsten aus der „Übersicht" (Arch. f. Math. 6 [1845], p. 337). Genaueres findet sich in der „Ausdehnungslehre" § 37, § 51 ff., § 63 ff. Die D. tritt dabei als ein Produkt $\Pi(a_{i_1} e_1 + a_{i_2} e_2 + \cdots)$ „extensiver Grössen" auf, bei dem $e_\varkappa^2 = 0$, $e_\varkappa e_\lambda = - e_\lambda e_\varkappa$ ist.

97) Berl. Ber. (1882), p. 821. Vgl. *Darboux*, J. d. Mat. (2) 19 (1874), p. 347.

98) J. f. Math. 93 (1882), p. 319.

99) *Cauchy*, l. c., p. 69.

100) *J. L. Lagrange*, Mém. de Berlin (1773), p. 108 für $n = 3$; allgemein

27. Rekurrierende Determinanten. Cirkulanten. Die Symmetrie tritt bei *rekurrierenden* D. $a_{ik} = a_{i+k-2}$ in noch verstärktem Masse auf. *Hankel* (l. c.), der sie als orthosymmetrisch bezeichnet, stellt sie als $|\varDelta_k|$ dar, wo die $\varDelta_k$ die Anfangsglieder der Differenzenreihen der a_{i+k} sind. Diese D. treten vielfach in der Algebra auf[101]; ihr Rang wird dabei von Bedeutung.

Einen Specialfall hiervon bilden diejenigen rekurrierenden D. n^{ten} Grades, bei denen $a_{n+i} = a_i$ ist[102]; und mit diesen hängen eng die *Cirkulanten* (vgl. Nr. **16**) zusammen $(a_{i,k} = a_{i+1,k+1})$, die in Beziehung auf die Nebendiagonale symmetrisch sind, welche sich durch Vertauschung der Z. in jene umwandeln lassen. Eine Cirkulante ist in das Produkt aus den n Faktoren

$$a_1 + \omega^\alpha a_2 + \omega^{2\alpha} a_3 + \cdots + \omega^{(n-1)\alpha} a_n, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

auflösbar, wobei ω eine primitive n^{te} Wurzel der Einheit bedeutet; daraus folgt sofort, dass eine Cirkulante $2n^{\text{ten}}$ Grades als solche n^{ten} Grades darstellbar ist[103]. Eine Cirkulante $2n^{\text{ten}}$ Grades kann ferner als Produkt einer solchen n^{ten} Grades und einer ähnlich gebildeten ausgedrückt werden[104].

28. Halbsymmetrische Determinanten. Für *halbsymmetrische* D. $(a_{ik} = -a_{ki};\ a_{ii} = 0)$[105] gelten die Sätze: $a'_{ik} = a'_{ki}$; $\frac{\partial D}{\partial a_{ik}} = 0$; $D = 0$ für ungerades n; dagegen $a'_{ik} = -a'_{ki} = \frac{1}{2}\frac{\partial D}{\partial a_{ik}}$; $a'_{ii} = 0$; und D ist ein Quadrat für gerades n. Jedes Glied von $\sqrt{D}$ ist ein Produkt von $\frac{1}{2}n$ El. a_{ik}, deren Indices alle unter einander verschieden sind, wie z. B. das in $\sqrt{D}$ auftretende Glied $a_{12}\, a_{34} \ldots a_{n-1,n}$ zeigt. $\sqrt{D}$ wird von *Cayley* (l. c.) $= \pm (1, 2, \ldots n)$ gesetzt und als „*Pfaffian*“ bezeichnet.

Cauchy, Exerc. d. Math. 4 (1829), p. 140. Vgl. *E. Kummer,* J. f. Math. 26 (1843), p. 268. *G. Bauer,* J. f. Math. 71 (1870), p. 46. *Sylvester,* Phil. Mag. 2 (1852), p. 138. *Borchardt,* J. de Math. 12 (1847), p. 50; J. f. Math. 30 (1846), p. 38.

101) *Jacobi,* J. f. Math. 15 (1836), p. 101. *Kronecker,* Berl. Ber. (1881), Juni; J. f. Math. 99 (1886), p. 346. *Frobenius,* Berl. Ber. (1894), p. 241.

102) „persymmetrische D.“ nach *Muir,* Quart. J. 18 (1882), p. 264.

103) *J. W. L. Glaisher*, Quart. J. 15 (1878), p. 347; ibid. 16 (1878), p. 31. Vgl. auch I A 6, Nr. **23, 24**.

104) *R. F. Scott,* Quart. J. 17 (1880), p. 129.

105) *Lagrange* u. *S. D. Poisson* sind wohl, *Jacobi* zufolge, zuerst auf solche D. gestossen. Vgl. *Jacobi,* J. f. Math. 2 (1827), p. 354. — *Cayley,* J. f. Math. 38 (1849), p. 93, nennt sie „schief-symmetrisch“. Er beweist zuerst, dass D ein Quadrat ist bei geradem n. J. f. Math. 32 (1846), p. 119; ibid. 50 (1855), p. 299.

106) *Brioschi,* J. f. Math. 52 (1856), p. 133. *Cayley,* l. c. Vgl. eine Erweiterung von *Muir,* Phil. Mag. (5) 12 (1881), p. 391.

Das Quadrat jeder D. geraden Grades kann in eine halbsymmetrische D. umgeformt werden[106]), so dass die D. selbst als Pfaffian auftritt. *Cayley* hat ferner gezeigt (l. c.), dass wenn man eine halbsymmetrische D. ungeraden Grades beliebig durch $a_{\alpha k}$, $a_{i\beta}$ rändert, die entstehende D. in ein Produkt $\pm(\alpha, 2, \ldots n) \cdot (\beta, 2, \ldots n)$ zweier Pfaffians zerfällt. Für $\alpha = \beta = 1$ geht daraus der vorige Satz hervor.

29. Schiefe Determinanten. Lässt man die Bedingung $a_{ii} = 0$ fallen, so gelangt man zu den *schiefen* D., deren Behandlung gleichfalls auf *Cayley* zurückzuführen ist (l. c.). Die Entwickelung der schiefen D. nach den Gliedern der Hauptdiagonale (Nr. **20**) liefert Aggregate von halbsymm. D. Ist also jedes $a_{ii} = z$, so treten bei der Entwickelung von D. nach Potenzen von z nur die Glieder mit den Exponenten n, $n - 2$, $n - 4$, ... auf.

30. Centrosymmetrische und andere Determinanten. Endlich seien noch die *centrosymmetrischen* D. $(a_{ik} = a_{n+1-i,\, n+1-k})$ kurz erwähnt. Jede derartige von geradem Grade $2m$ kann als Produkt zweier D. m^{ten} Grades dargestellt werden. Da nun Cirkulanten (Nr. **27**) durch Umstellung der Zeilen zu centrosymmetrischen D. gemacht werden können, so folgt der (Nr. **27**) erwähnte Satz leicht aus diesem.

31. Weitere Determinantenbildungen. Ausser den angeführten besonderen Bildungen sind noch viele andere untersucht worden; so knüpfen sich z. B. an die letztbesprochenen die centroschiefen D. an; ferner sind die *Vandermonde*'schen oder *Potenzdeterminanten* zu erwähnen, bei denen $a_{ik} = a_i^{\nu_k}$ ist, wobei die ν_k beliebige Zahlen bedeuten. Die Kettenbruch-Determinanten[107]), die *Continuanten* (*Sylvester*), liefern die Darstellung der Zähler und Nenner der Näherungswerte eines Kettenbruches[108]). *Hermite* betrachtet Par. C. R. 41 (1855), p. 181, J. f. Math. 52 (1856), p. 40 Det., in denen a_{ik} und a_{ki} konjugiert complex sind. Erweiterung der Säkulargleichung.

An die Funktionentheorie knüpfen Bildungen an wie: 1) die *Wronski*'sche D.; 2) die *Jacobi*'sche (Funktional)-D.; 3) die *Hesse*'sche D.

Bei 1) sind die a_{1i} Funktionen von x; die $a_{\varkappa i}$ ihre $(\varkappa - 1)^{\text{ten}}$ Ableitungen[109]).

---

107) *Painvin*, J. d. Math. (2) 3 (1858), p. 41. *J. Sylvester,* Am. J. 1 (1878), p. 344.

108) *Sylvester,* Phil. Mag. 5 (1859), p. 458; 6 (1853), p. 297. *W. Spottiswoode,* J. f. Math. 51 (1856), p. 209. *E. Heine,* ibid. 57 (1860), p. 231. *S. Günther,* Erlangen (1873) u. Math. Ann. 7 (1874), p. 267. — Vgl. II A 3.

109) *C. J. Malmsten,* J. f. Math. 39 (1850), p. 91. *Hesse,* ibid. 54 (1857), p. 249. *E. B. Christoffel,* ibid. 55 (1858), p. 281. *Frobenius,* ibid. 76 (1873), p. 236. *M. Pasch,* ibid. 80 (1875), p. 177.

Bei 2) sind a_i Funktionen von n Variablen $x_1, \ldots x_n$, und $a_{\varkappa i}$ ist $= \frac{\partial a_i}{\partial x_\varkappa}$ [110]).

Bei 3) ist a eine Funktion von $x_1, \ldots x_n$, und $a_{\varkappa i}$ ist $= \frac{\partial^2 a}{\partial x_\varkappa \partial x_i}$. [111])

An die Algebra knüpfen Bildungen an wie *Resultanten* und *Diskriminanten.* Wir verweisen hierüber auf I B 1 a und b.

32. Determinanten höheren Ranges. Determinanten höheren (ν^{ten}) Ranges werden aus n^ν Grössen $a_{h_1, \ldots h_\nu}$ derart gebildet, dass man die Indices gleicher Stelle unter sich vertauscht; dann werden Produkte von je n dieser Grössen gebildet, bei denen nie zwei Faktoren an gleicher Stelle gleichen Index haben, und endlich der frühern Zeichenregel entsprechend das $\pm$ Zeichen vorgesetzt. Alle diese Aggregate bilden die D. Von ihnen gelten eine Reihe von Eigenschaften der gewöhnlichen Det.; andere sind zu modifizieren; Det. *geraden* und solche *ungeraden* Ranges verhalten sich in manchen Hinsichten verschieden [112]). Auch hier ist eine Behandlung im Sinne *Grassmann's* möglich (*G. v. Escherich* l. c.), vgl. Anm. 96.

33. Unendliche Determinanten. Betrachtet man a_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots \infty)$, so kann man $D_n = |a_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, \ldots n)$ als Funktion von n auffassen. Wächst n, so gelangt man zum Begriffe *unendlicher Det.* Vor allem ist hier die Existenzfrage aufzuwerfen [113]). Diese Bildungen sind für Differenzialgleichungen von Wichtigkeit. Vgl. I A 3 Nr. **58, 59.**

34. Matrizen. Ein System von $m \cdot n$ Grössen a_{ik} $(i = 1, 2, \ldots m;$ $k = 1, 2, \ldots n)$ heisst eine *Matrix.* An diese Gebilde schliesst sich eine Reihe fundamentaler Fragen, deren Behandlung in I A 4 (bilineare

---

110) *Jacobi,* J. f. Math. 12 (1834), p. 38 = Werke III, p. 233; J. f. Math. 22 (1841), p. 319 = Werke III, p. 393. *Sylvester,* Phil. Trans. (1854), p. 72. *Cayley,* J. f. Math. 52 (1856), p. 276. *Clebsch,* ibid. 69 (1868), p. 355. *Kronecker,* ibid. 72 (1870), p. 155 u. s. w.

111) *Hesse,* J. f. Math. 28 (1844), p. 83; ibid. 42 (1851), p. 117; ibid. 56 (1859), p. 263. *Sylvester,* Cambr. a. Dubl. M. J. 6 (1851), p. 186.

112) Zuerst behandelt wurden kubische D. von *A. de Gasparis* (1861). Es folgten: *Dahlander,* Oefvers. of K. Akad. Stockh. (1863). *G. Armenante,* Giorn. di Battagl. 6 (1868), p. 175. *E. Padova,* ibid. p. 182. *G. Zehfuss,* Frankf. (1868). *G. Garbieri,* Giorn. d. Batt. 15 (1877), p. 89. *H. W. L. Tanner,* Proceed. Lond. M. S. 10 (1879), p. 167. *R. F. Scott,* ib. 11 (1880), p. 17. *G. v. Escherich,* Wien. Denkschr. 43 (1882), p. 1. *L. Gegenbauer,* ib. 43 (1882), p. 17; 46 (1883), p. 291; 50 (1885), p. 145; 55 (1889), p. 39. Wien. Ber. 101 (1892), p. 425.

113) *G. W. Hill,* Acta Math. 8 (1886), p. 1, im Wes. Abdruck einer Monogr. Cambridge U. S. A. (1877). *H. Poincaré,* Bull. Soc. d. Fr. 13 (1884—85), p. 19; 15 (1885—86), p. 77. *Helge von Koch,* Acta math. 15 (1891), p. 53; ibid. 16 (1892 bis 1893), p. 217.

Formen) gegeben wird. Der Begriff des Ranges sowie der Komposition von Matrizen ist festzustellen. Aus einer Matrix können auf verschiedene Weise Det. gebildet werden. Ihr Zusammenhang, sowie ihre invarianten Eigenschaften sind zu untersuchen. Hierher gehört der Fall der *korrespondierenden Matrizen:* a_{ik} $(i=1,\dots m;\ k=1,\dots\alpha)$ und b_{jl} $(j=1\dots\beta;\ l=1,2,\dots m)$, wobei $\alpha+\beta=m$ ist, und die $\alpha\cdot\beta$ Relationen bestehen $\sum\limits_{(q)}' a_{qk}b_{jq}=c_{kj}=0$, bei denen Proportionalität korrespondierender Determinanten eintritt[114]).

35. Monographien. An Lehrbüchern über Determinanten führen wir, unter Übergehung von nur für den Schulgebrauch bestimmten, als hauptsächlichste an:

Brioschi, La teoria dei determinanti. Pavia (1854). Deutsch, Berlin (1856).
Spottiswoode, Elementary Theorems relating to Determinants, J. f. Math. 51 (1856), p. 209—271 u. 328—381.
Baltzer, Theorie u. Anwendung der Determinanten. Leipzig (1857). Fünfte Aufl. (1881).
Salmon, Lessons introductory to the modern higher algebra. Dublin (1859). Deutsch Leipz. (1877) v. *Fiedler.*
Hesse, Die Determinanten, elementar behandelt. Leipz. (1872).
Günther, Lehrbuch der Determinantentheorie. Erlangen (1875). Zweite Aufl. (1877).
Scott, A treatise on the theory of determinants. Cambridge (1880).
P. Mansion, Éléments de la théorie des déterminants. Paris 4e éd. (1883).
L. Leboulleux, Traité élémentaire des déterminants. Genève (1884).
A. Sickenberger, Die Determinanten in genetischer Behandlung. München (1885).
Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie. I. Determinanten. Leipz. (1885).
Pascal, I determinanti. Milano (1897).

114) Der Begriff der Matrix ist von *A. Cayley* eingeführt, J. f. Math. 50 (1855), p. 282. *Cayley* will die Theorie der Matrizen von derjenigen der Determinanten getrennt halten.

I A 3. IRRATIONALZAHLEN UND KONVERGENZ UNENDLICHER PROZESSE

VON

ALFRED PRINGSHEIM

IN MÜNCHEN.

Inhaltsübersicht.

Erster Teil. Irrationalzahlen und Grenzbegriff.

I. Irrationalzahlen.

II. Grenzbegriff.

Zweiter Teil. Unendliche Reihen, Produkte, Kettenbrüche und Determinanten.

III. Unendliche Reihen.

Litteratur.

Lehrbücher.

Leonhard Euler, Introductio in analysin infinitorum. I. Lausannae 1748. Deutsch von *Michelsen* (Berlin 1788) und von *H. Maser* (Berlin 1885).

Augustin Cauchy, Cours d'analyse de l'école polytechnique. — I. Analyse algébrique. Paris 1821. Deutsch von *C. Itzigsohn,* Berlin 1885.

M. A. Stern, Lehrbuch der algebraischen Analysis. Leipzig 1860.

Eugène Catalan, Traité élémentaire des séries. Paris 1860.

Oskar Schlömilch, Handbuch der algebraischen Analysis. Jena 1868 (4. Aufl.).

Charles Méray, Nouveau Précis d'analyse infinitésimale. Paris 1872. — Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale. I. Paris 1894.

Karl Hattendorff, Algebraische Analysis. Hannover 1877.

Rudolf Lipschitz, Lehrbuch der Analysis. I: Grundlagen der Analysis. Bonn 1877.
Moritz Pasch, Einleitung in die Differential- und Integral-Rechnung. Leipzig 1882.
Max Simon, Elemente der Arithmetik als Vorbereitung auf die Functionentheorie. Strassburg 1884.
Otto Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. 2 Bde. Leipzig 1885. 86.
Jules Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. Paris 1886.
Camille Jordan, Cours d'analyse de l'école polytechnique. 2de éd. I. Paris 1893.
Ernesto Cesaro, Corso di analisi algebrica. Torino 1894.
Otto Biermann, Elemente der höheren Mathematik. Leipzig 1895.
Alfred Pringsheim, Vorlesungen über die element. Theorie der unendl. Reihen und der analyt. Functionen. I. Zahlenlehre. (Demnächst bei B. G. Teubner, Leipzig, erscheinend.)

Bezüglich der Irrationalzahlen vergleiche man noch: *P. Bachmann,* Vorl. über die Natur der Irrationalzahlen, Leipzig 1892; bez. der unendlichen Reihen: *J. Bertrand,* Traité de calc. différentiel, Paris 1864 [1]).

Monographien.

Siegm. Günther, Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche. Schul-Programm, Weissenburg 1872.
Paul du Bois-Reymond, Die allgemeine Functionentheorie. I (einz.). Tübingen 1882.
R. Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen. Tübingen 1889.
Giulio Vivanti, Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica. Mantova 1894.

Erster Teil. Irrationalzahlen und Grenzbegriff.

I. Irrationalzahlen.

1. Euklid's Verhältnisse und incommensurable Grössen. Die *Irrationalzahlen,* deren principielle Einführung eine der wesentlichsten Grundlagen der *allgemeinen Arithmetik* bildet, sind nichtsdestoweniger zunächst aus *geometrischen* Bedürfnissen erwachsen: sie erscheinen ursprünglich als Ausdruck für das *Verhältnis incommensurabler* (d. h. durch kein gemeinschaftliches Mass messbarer) *Streckenpaare* (z. B. der Diagonale und Seite eines Quadrats [2])). In diesem Sinne kann das 5. Buch des *Euklid,* welches die *allgemeine* Theorie der *„Verhältnisse"* entwickelt, sowie das von den *incommensurablen* Grössen handelnde 10. Buch als litterarischer Ausgangspunkt für die Lehre von den *Irrationalzahlen* angesehen werden. Immerhin behandelt *Euklid* naturgemäss nur ganz bestimmte mit *Zirkel und Lineal konstruierbare* (also, arithmetisch gesprochen, durch Quadratwurzeln dar-

1) Die sehr umfangreichen Abschnitte über *Reihen* in *S. F. Lacroix'* grossem Traité de calc. diff. et intégr. (3 Vols., 2de éd., Paris 1810—1819) enthalten über die *elementare* Reihenlehre wenig brauchbares.

2) Dass die Diagonale und Seite eines Quadrats incommensurabel seien, soll schon *Pythagoras* erkannt haben; s. *M. Cantor,* Gesch. der Math. 1 (Lpz. 1880), p. 130. 154.

stellbare) *Irrationalitäten* in ihrer Eigenschaft als *incommensurable Strecken*[3]); die Anschauung, dass das Verhältnis zweier solcher *spezieller* oder gar zweier *ganz beliebig* zu denkender incommensurabler Strecken eine *bestimmte* (irrationale) *Zahl definiere*, ist ihm, wie überhaupt den Mathematikern des Altertums, fremd geblieben[4]).

2. **Michael Stifel's Arithmetica integra.** Aber auch für die Arithmetiker und Algebraisten des Mittelalters und der Renaissance sind die aus der Geometrie übernommenen *Irrationalitäten* noch keine „*wirklichen*", sondern allenfalls *uneigentliche* oder *fingierte Zahlen*[5]), die lediglich wie ein notwendiges Übel geduldet werden. Den ersten entscheidenden Schritt für eine richtigere Schätzung der Irrationalzahlen verdankt man wohl *Michael Stifel*, der im 2. Buche seiner *Arithmetica integra*[6]) im Anschlusse an das 10. Buch des *Euklid* ausführlich von den „*Numeris irrationalibus*"[7]) handelt. Wenn er sich auch zunächst noch der aus dem *Euklid* abstrahierten Ansicht anschliesst, dass die *irrationalen* Zahlen *keine „wirklichen"* Zahlen seien[8]),

---

3) Näheres darüber (ausser a. a. O. bei *Euklid*): *Klügel*, Math. W.-B. 2, p. 949. *M. Cantor* a. a. O. p. 230. *Schlömilch*, Ztschr. f. M. 34 (1889), Hist.-lit. Abth. p. 201.

4) *Euklid* sagt (Elem. X, 7) ganz ausdrücklich: Inkommensurable Grössen verhalten sich *nicht* wie Zahlen zu einander. — *Jean Marie Constant Duhamel* (Des méthodes dans les sciences de raisonnement, Paris 1865—70) hat versucht (a. a. O. 2, p. 72—75), die Euklidische Verhältnislehre für die Fundierung des allgemeinen Irrationalzahlbegriffs nutzbar zu machen. Doch verdirbt er schliesslich seine anfänglich richtige Methode durch unnötige Heranziehung eines unklaren geometrischen Grenzbegriffs. — Dagegen giebt *O. Stolz* (Allg. Arithm. 1, p. 35 ff.), neben einer der heutigen Darstellungsweise angepassten Reproduktion der Euklidischen Verhältnislehre, die nötigen Andeutungen, wie die letztere zu einer einwandfreien Theorie der reellen Zahlen (insbesondere also auch der irrationalen) ausgestaltet werden könne. — Vgl. auch: *O. Stolz*, Grössen und Zahlen (Rektoratsrede vom 2. März 1891, Lpz. 1891), p. 16; ferner: Nr. **13**, Fussn. 84.

5) „*Numeri ficti*", gewöhnlich als „*Numeri surdi*" bezeichnet: diese dem *Leonardo von Pisa* (Liber abaci, 1202) zugeschriebene Benennung hat sich bis ins 18. Jahrhundert, in England („*Surds*") bis auf die Gegenwart erhalten.

6) Nürnberg 1544. Fol. 103—223.

7) Die Bezeichnung „*radices surdae*" gebraucht *Stifel* in einem engeren Sinne a. a. O. Fol. 134.

8) Die entgegengesetzte Angabe bei *C. J. Gerhardt* (Gesch. der Math. in Deutschl., München 1877, p. 69) scheint mir inkorrekt. Die betreffende Stelle bei *Stifel* (a. a. O. Fol. 103[a]) lautet ganz unzweideutig: „Non autem potest dici numerus verus, qui talis est, ut praecisione careat et ad numeros veros nullam cognitam habet proportionem. Sicut igitur infinitus numerus non est numerus: *sic irrationalis numerus non est verus numerus* atque lateat sub quadam infinitatis nebula."

so liegt hierin, wie der betreffende Zusammenhang lehrt, doch schliesslich nur eine von der heutigen verschiedene *Ausdrucksweise*, welche im Grunde nichts anderes besagt, als dass die *irrationalen* Zahlen eben *keine rationalen* sind. Dagegen dokumentiert *Stifel* seine mit den modernen Anschauungen *sachlich* im wesentlichen übereinstimmende Auffassung durch den Ausspruch, dass *jeder irrationalen* Zahl gerade so gut, wie *jeder rationalen* ein *eindeutig bestimmter Platz* in der geordneten Zahlenreihe zukomme[9]). Damit erscheint in der That das wesentlichste Moment, welches die Irrationalitäten als *Zahlen* charakterisiert, zum ersten Male scharf hervorgehoben. Freilich sind hierbei unter Irrationalzahlen immer nur gewisse einfache *Wurzelgrössen* zu verstehen — eine Einschränkung, die sich teils aus der damals noch bestehenden Alleinherrschaft der *Euklidischen* Methoden in der *Geometrie* erklärt, teils aber auch aus dem Umstande, dass die Aufsuchung der n^{ten} Wurzel aus einer zwischen g^n und $(g+1)^n$ ($g =$ ganze Zahl) gelegenen ganzen Zahl die *einzige* Aufgabe war, deren *Nichtlösbarkeit* durch eine *rationale* Zahl man damals wirklich *nachweisen* konnte[10]).

3. Der Irrationalzahlbegriff der analytischen Geometrie. Erst der allmählich sich vollziehende Bruch mit der Geometrie der Alten, insbesondere die mit dem Erscheinen von *Descartes' Géométrie* (1637) beginnende Entwickelung der analytisch-geometrischen Methode, sodann die Erfindung der Infinitesimalrechnung durch *Leibniz* und *Newton* (1684; 1687) schuf das Bedürfnis, die Äquivalenz zwischen *Strecken* und *Zahlen* weiter auszubilden und den Irrationalzahlbegriff dementsprechend zu vervollständigen. Hatte schon *Descartes* beliebige *Streckenverhältnisse* mit *einfachen Buchstaben* bezeichnet und damit *wie mit Zahlen* gerechnet, so erscheint die Aussage, dass *jedem Verhältnis* zweier Quantitäten eine *Zahl* entspreche, an der Spitze von *Newton's Arithmetica universalis* (1707) geradezu als *Definition* der Zahl[11]). Und noch specieller an den geometrischen Begriff der

9) A. a. O. Fol. 103^{b}, Zeile 3 von unten: „Item licet infiniti numeri *fracti* cadeant inter quoslibet duos numeros immediatos, quemadmodum etiam infiniti numeri *irrationales* cadunt inter duos numeros integros immediatos. *Ex ordinibus tamen utrorumque facile est videre, ut nullus eorum ex suo ordine in alterum possit transmigrare.*"

10) *Stifel* a. a. O. Fol. 103^{b}.

11) „*Numerum* non tam multitudinem unitatum quam abstractam quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quae pro unitate habetur rationem intelligimus." — Freilich erscheint, wie *Stolz* treffend bemerkt (Allg. Arithm. 1, p. 94), diese Definition bei N. nur als eine Art Paradestück: für eine wirkliche

messbaren Grösse anknüpfend definiert *Chr. Wolf*, dessen in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts überaus verbreiteten Lehrbücher trotz ihres Mangels an Originalität und schärferer Kritik immerhin als Ausdruck der damals von der grossen Majorität acceptierten Ansichten gelten können: „*Zahl* ist dasjenige, was sich zur Einheit verhält, wie eine gerade Linie zu einer gewissen anderen Geraden“[12]). Die *Zahl* erscheint also als Ausdruck für das Resultat der *Messung* einer *Strecke* durch eine andere, welche die Rolle der *Einheitsstrecke* spielt — eine Anschauung, die bis in die neueste Zeit hinein zur einzig herrschenden wurde und auch noch heutzutage von einzelnen Mathematikern streng festgehalten wird. Jeder *Strecke* (oder auch — vermöge einer einfachen und bekannten Modifikation — jedem *Punkte* einer Geraden) entspricht nunmehr eine bestimmte *Zahl*, nämlich entweder eine *rationale* oder eine *irrationale*, d. h. zunächst ein nach geeigneten Regeln (Euklidisches Verfahren zur Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Masses[13]) oder unbegrenzte Unterteilung der messenden Einheitsstrecke) zu gewinnender *unbegrenzt fortsetzbarer Algorithmus in rationalen Zahlen* (unendlicher Kettenbruch, unendlicher Dezimalbruch); die *Berechtigung*, ein solches *unbegrenztes System von Rationalzahlen* als eine *einzige bestimmte Zahl* zu betrachten, wird dann ausschliesslich darin erblickt, dass dasselbe als *arithmetisches Äquivalent* einer *gegebenen Strecke* mit Hülfe *derselben Messungsmethoden* gefunden wird, welche für *andere* Strecken eine *bestimmte rationale* Zahl liefern. Daraus folgt nun aber *keineswegs*, dass man umgekehrt auch berechtigt ist, ein *beliebig vorgelegtes arithmetisches* Gebilde der bezeichneten Art in dem eben definierten Sinne als *Irrationalzahl* zu betrachten, d. h. die Existenz einer jenes Gebilde bei geeigneter Messung erzeugenden *Strecke* als *evident* anzusehen[14]). Dieser für die konsequente Aus-

Ausbildung der Irrationalzahltheorie auf Grund der Euklidischen Verhältnislehre wird sie keineswegs ausgenützt. (Vgl. auch: *Stolz*, Zur Geometrie der Alten, Math. Ann. 22 [1888], p. 516.)

12) Elementa Matheseos universae. 1, Halae 1710: Elementa Arithmeticae, Art. 10. (Ich zitiere nach der mir vorliegenden zweiten Auflage von 1730.)

13) Eucl. Elem. X, 2, 3. *A. M. Legendre,* Géométrie, Livre III, Probl. 19.

14) Der oben citierte *Chr. Wolf* weiss hierüber nur folgendes zu sagen (a. a. O. Art. 296): „In geometria et analysi demonstrabitur, tales radices, quae actu dari non possunt, esse ad unitatem ut rectam lineam ad rectam aliam, consequenter numeros eosque irrationales, cum ex hypothesi rationales non sint.“ Das läuft doch schliesslich wieder darauf hinaus, dass von den *arithmetisch definierten* Irrationalitäten lediglich die *geometrisch konstruierbaren* als *Zahlen* zu betrachten sind. Dabei springt nun freilich *W.* mit dem Begriffe der *geometrischen Konstruierbarkeit* in der Weise leichtfertig um, dass er z. B. Parabeln be-

bildung des Irrationalzahlbegriffs fundamentale Punkt wurde bis in die neueste Zeit teils mit Stillschweigen übergangen, teils mit Hülfe angeblicher geometrischer Evidenzen abgethan oder durch metaphysische Redensarten über Stetigkeit, Grenzbegriff und Unendlichkleines mehr verdunkelt, als aufgeklärt.

4. Das Cantor-Dedekind'sche Axiom und die arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen. *G. Cantor* hat wohl zuerst scharf hervorgehoben, dass die Annahme, *jedem* nach Art einer Irrationalzahl definierten *arithmetischen Gebilde* müsse eine bestimmte *Strecke* entsprechen, weder *selbstverständlich, noch beweisbar* erscheine, vielmehr ein wesentliches, rein *geometrisches Axiom* involviere[15]. Und fast gleichzeitig hat *R. Dedekind* gezeigt, dass das fragliche *Axiom* (oder, genauer gesagt, ein ihm *gleichwertiges*) *derjenigen* Eigenschaft, welche man bisher *ohne jede zulängliche Definition* als *Stetigkeit* der geraden Linie bezeichnet hatte, erst einen *greifbaren Inhalt* giebt[16]. Um die Grundlagen der allgemeinen *Arithmetik* von einem derartigen *geometrischen* Axiome völlig unabhängig zu machen, hat jeder der beiden genannten Autoren seine besondere *rein arithmetische* Theorie der Irrationalzahl entwickelt[17]. Einer anderen, gleichfalls *rein arithmetischen* Einführungsart hatte sich schon seit längerer Zeit *K. Weierstrass* in seinen Vorlesungen über analytische Funktionen bedient[18]. *Cantor*

---

liebig hoher Ordnung ohne weiteres als *konstruierbar* ansieht und diese sodann zur angeblichen Konstruktion von $\sqrt[m]{x}$ benützt! (a. a. O. Elementa Analyseos, Art. 630).

15) Math. Ann. 5 (1872), p. 128.

16) *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Braunschweig 1872. — Das betreffende Axiom erscheint daselbst in folgender Fassung: „Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Klassen von der Art, dass *jeder* Punkt der *ersten* Klasse *links* von *jedem* Punkte der *zweiten* Klasse liegt, so existiert *ein* und *nur ein* Punkt, welcher diese Einteilung . . . hervorbringt."

17) A. a. O. — Die *Cantor*'sche Theorie wurde ungefähr um dieselbe Zeit, wie von ihrem Verfasser selbst, auch von *E. Heine* (mit ausdrücklichem Hinweis auf mündliche Mitteilungen *Cantor*'s) in etwas ausführlicherer Weise publiziert: J. f. Math. 74, p. 174 ff. — Dagegen hat *Ch. Méray* die Grundlagen dieser Theorie *unabhängig* von *Cantor* gleichfalls aufgefunden und ungefähr gleichzeitig mit *Cantor* und *Heine* veröffentlicht in seinem: Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale, Paris 1872.

18) Die Grundprinzipien der *W.*'schen Theorie hat zuerst *H. Kossak* kurz mitgeteilt in einer Programmabhandlung des Werder'schen Gymnasiums, Berlin 1872 (p. 18 ff.). — Ausführlicheres findet man bei *S. Pincherle*, Giorn. di mat. 18 (1880), p. 185 ff. — *O. Biermann*, Theorie der analytischen Functionen, Leipzig 1887, p. 19 ff.

selbst hat im 21. Bande (1883) der Math. Ann. (p. 565 ff.) alle *drei* Definitionsformen einer kritischen Vergleichung unterzogen und bei dieser Gelegenheit seine erste Darstellung (wohl im Anschluss an die von *Heine* gegebene) einigermassen modificiert, derart, dass die Trennung der zu definierenden *Irrationalzahl* von jeglicher *Grenzvorstellung* noch schärfer zum Ausdruck kommt.

5. Die Theorien von Weierstrass und Cantor. Die *Weierstrass*'sche Theorie und die etwas bequemer zu handhabende *Cantor*'sche, welche man mit *Heine*[19]) passend als eine glückliche Fortbildung der ersteren bezeichnen kann, knüpfen beide an eine bestimmte *formale Darstellung* der Irrationalzahlen an, als deren einfachster und jedermann geläufiger Typus diejenige durch *unendliche Dezimalbrüche* erscheint[20]). Während aber *W.* hiervon das Prinzip der *Summenbildung* als ausschliessliches *Erzeugungsmoment* beibehält, so entnimmt *C.* jenem Vorbilde den allgemeineren Begriff der sog. *Fundamentalreihe*, d. h. einer Reihe von rationalen Zahlen a_ν von der Beschaffenheit, dass $|a_{\nu+\varrho} - a_\nu|$ für einen *hinlänglich gross* gewählten Wert von ν und *jeden* Wert von ϱ *beliebig klein* wird. *Wesentlich* ist sodann, dass die zu definierende *allgemeine reelle* Zahl (welche je nach Umständen eine *rationale* oder *irrationale* sein kann) *nicht* etwa als *Summe* einer „*unendlichen*“ Anzahl von Elementen oder als „*unendlich entferntes*“ Glied einer Reihe durch irgend welchen nebelhaften *Grenzprozess* gewonnen wird. Dieselbe erscheint vielmehr als ein fertiges, *neu geschaffenes Objekt*, oder, noch konkreter nach *Heine*[21]), als ein *neues Zahlzeichen*, dessen *Eigenschaften* aus denjenigen der definierenden rationalen Elemente eindeutig festgestellt werden, dem ein *eindeutig bestimmter Platz* innerhalb des Gebietes der rationalen Zahlen angewiesen wird, und mit welchem nach bestimmten Regeln *gerechnet*[22]) werden kann. Die

---

19) A. a. O. p. 173.

20) Eine ausführliche Darstellung der *Cantor*'schen Theorie, welche zweckmässig die Lehre von den *systematischen Brüchen* (Verallgemeinerung der Dez.-Br.) zum Ausgangspunkte nimmt, findet man bei *Stolz,* Allg. Arithm. 1, p. 97 ff.; eine andere, für den Anfänger gleichfalls nicht unzweckmässige Darstellung, bei welcher zur Definition der Irrationalzahlen und ihrer Rechnungsoperationen *zwei monotone* Zahlenfolgen (s. Nr. **13** dieses Artikels) dienen, giebt *P. Bachmann,* Vorl. über die Natur der Irrationalzahlen (Lpz. 1892), p. 6 ff.

21) A. a. O. p. 173: „Ich stelle mich bei der Definition (der Zahlen) auf den rein formalen Standpunkt, *indem ich gewisse greifbare Zeichen Zahlen nenne,* so dass die Existenz dieser Zahlen also nicht in Frage steht.“ — Anders *Cantor:* Math. Ann. 21 (1883), p. 553.

22) Vgl. *Pincherle* a. a. O. Art. 18, 28. *Biermann* a. a. O. p. 24. *Heine* a. a. O. p. 177. *Cantor*, Math. Ann. 5, p. 125; 21, p. 568.

auf diese Weise definierten *allgemeinen reellen Zahlen* sind natürlich zunächst *nicht* als Zeichen *für bestimmte Quantitäten* (zähl- oder messbare Grössen) anzusehen, und die für sie definierten Begriffe *„grösser“* und *„kleiner“* bezeichnen demgemäss keine *Quantitätsunterschiede,* sondern lediglich *Successionen.* Insbesondere erleidet hierbei also auch der Begriff der *rationalen* Zahlen eine *Erweiterung* in *dem* Sinne, dass sie als *Zeichen* erscheinen, denen in erster Linie lediglich *eine bestimmte Succession* zukommt[23]), und die wohl bestimmte *Quantitäten* vorstellen *können,* aber nicht *müssen.* Wird dieser entscheidende Punkt übersehen[24]), so erscheinen Einwendungen begreiflich, wie sie von *E. Illigens* gegen die Theorien von *Weierstrass* und *Cantor* mit Unrecht erhoben worden sind[25]). Dass im übrigen die *Weierstrass-Cantor*'schen Zahlen (einschliesslich der *irrationalen*) zur Darstellung bestimmter *Quantitäten* z. B. *Strecken* benützt werden *können,* ist von den Verfassern der betreffenden Theorien ausdrücklich gezeigt worden[26]): *jeder Strecke* entspricht (nach Fixierung einer beliebigen Einheitsstrecke) *eine* und *nur eine* bestimmte *Zahl.* Das *Umgekehrte* gilt natürlich wiederum nur für *rationale* und *spezielle irrationale* Zahlen; für *beliebige Irrationalzahlen* nur *dann,* wenn man das in Art. 4 erwähnte geometrische *Axiom* gelten lässt[27]).

6. Die Theorie von Dedekind. *Dedekind* definiert die Irrationalzahl, ohne direkte Benützung irgend eines arithmetischen Formalismus, mit Hülfe des von ihm eingeführten Begriffs des *„Schnittes“*[28]); darunter versteht er eine Scheidung aller Rationalzahlen in zwei Klassen von

---

23) Man kann, von diesem Begriffe der *eindeutigen Succession* ausgehend, zu einem *vollkommen einheitlichen* Aufbau der Zahlenlehre gelangen, wenn man von vornherein die *natürlichen* Zahlen *nicht,* wie üblich, auf Grund des Anzahlbegriffs als *Kardinal*zahlen, vielmehr (nach dem Vorgange von *H. Helmholtz* und *L. Kronecker*) als *Ordinal*zahlen einführt. Vgl. meinen Aufsatz Münch. Ber. 27 (1897), p. 325.

24) S. z. B. *R. Lipschitz,* Grundl. d. Anal., Abschnitt I, und vgl. meinen Vortrag: Über den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht. Jahresb. d. D. M.-V. 6 (1848), p. 78.

25) Math. Ann. 33 (1889), p. 155; desgl. 35, p. 451. Replik von *Cantor:* ebend. 33, p. 476. — Vgl. auch *Pringsheim,* Münch. Sitzber. 27, p. 322, Fussnote.

26) *Pincherle* a. a. O. Art. 19. *Cantor,* Math. Ann. 5, p. 127.

27) Bei *Pincherle,* dessen Darstellung der *W.*'schen Theorie freilich keineswegs als eine authentische angesehen werden kann, wird merkwürdiger Weise jenes *Axiom* (in der *Dedekind*'schen Form) wiederum als eine selbstverständliche Thatsache betrachtet (a. a. O. Art. 20).

28) A. a. O. § 4.

Individuen (a_1) und (a_2), so dass durchweg $a_1 < a_2$. Ist dann unter den Zahlen a_1 eine *grösste* oder unter den Zahlen a_2 eine *kleinste*, so ist die betreffende (*rationale*) Zahl gerade diejenige, welche den fraglichen *Schnitt* hervorbringt. Im andern Falle wird demselben ein *neu geschaffenes* Individuum α, eine *Irrationalzahl*, zugeordnet und als diesen *Schnitt* hervorbringend angesehen. Auf Grund dieser Definition lassen sich sodann die Beziehungen dieser neuen Zahlen α untereinander und zu den rationalen Zahlen a, sowie die elementaren Rechenoperationen eindeutig feststellen, wie *D.* selbst im wesentlichen durchgeführt hat. Eine ausführlichere Darstellung in mehr *geometrischem* Gewande hat *M. Pasch* in seiner „Einleitung in die Differential- und Integral-Rechnung" gegeben[29]) und dieser später einige Modifikationen hinzugefügt[30]), welche die in Wahrheit doch wesentliche *arithmetische* Grundlage jener Theorie deutlicher hervortreten lassen.

Gerade dadurch, dass die *Dedekind*'sche Einführungsart der Irrationalzahlen an keinerlei arithmetischen Algorithmus anknüpft, gewinnt sie den Vorzug einer ganz besonderen Kürze und Prägnanz. Aus dem nämlichen Grunde erscheint sie aber auch merklich abstrakter und schliesst sich dem Kalkül weniger bequem an, als die *Cantor*'sche. Nicht unzweckmässig hat daher *J. Tannery* in seiner „Introduction à la Théorie des Fonctions"[31]) eine Darstellung gewählt, welche von der *Dedekind*'schen Definition ausgehend weiterhin durch Heranziehung der *Cantor'schen Fundamentalreihen* an dessen Theorie Anschluss gewinnt.

7. Du Bois-Reymond's Kampf gegen die arithmetischen Theorien. Der Trennung des *Zahl*-Begriffs von demjenigen der *messbaren* Grösse, wie sie durch die arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen statuiert wird, ist insbesondere *P. Du Bois-Reymond* mit Entschieden-

---

29) Leipzig 1882, §§ 1—3.

30) Math. Ann. 40 (1892), p. 149.

31) Paris 1886, Chap. 1. — Übrigens begeht *Tannery* einen Irrtum, wenn er (p. IX) den eigentlichen Grundgedanken der *Dedekind*'schen Theorie *J. Bertrand* (Traité d'Arithmétique) zuschreibt, wie *Dedekind* mit Recht in der Vorrede seiner Schrift: „Was sind und was sollen die Zahlen?" hervorgehoben hat (p. XIV). *Bertrand* benützt die beiden im Texte mit (a_1), (a_2) bezeichneten Klassen thatsächlich nur, ganz wie die älteren Mathematiker, zur *angenäherten Darstellung* der *Irrationalzahl;* ihre *Definition* knüpft er keineswegs an den ihm fremden Begriff des *Schnittes,* sondern durchaus an denjenigen der *messbaren Grösse* (s. a. a. O. 11. Aufl., 1895, Art. 270. 313), und er usurpiert stillschweigend für die Begründung der Addition und Multiplikation der Irrationalzahlen (Art. 314. 315) das *Axiom* des Art. 4.

heit entgegengetreten[32]). In seiner „Allgemeinen Funktionentheorie" (Tübingen 1882) verwirft er dieselbe als formalistisch, die Analysis zu einem blossen Zeichenspiele herabwürdigend[33]), und betont aus historischen und philosophischen Gründen den untrennbaren Zusammenhang der *Zahl* mit der *messbaren* oder, wie er sie nennt, *„lineären" Grösse.* Dabei reduziert er die in dem *Axiome* des Art. 4 enthaltene *Forderung* auf *diejenige* der *Decimalbruchgrenze,* d. h. der *Existenz* einer bestimmten *Strecke,* welche (in dem oben — Nr. **3** — näher erörterten Sinne) einem beliebig vorgelegten *unendlichen Dezimalbruche* entspricht[34]). Er sieht nun diese Aussage nicht ohne weiteres als ein *Axiom* an, sondern untersucht, in wieweit sich dieselbe durch Betrachtungen wesentlich psychologischer Natur begründen lasse. Über den *erkenntnistheoretischen* Wert dieser Auseinandersetzung[35]) wird an späterer Stelle zu berichten sein[36]). Für den *Mathematiker* kommt dabei schliesslich kaum etwas anderes heraus, als dass er die fragliche Forderung als *Axiom* gelten lassen muss, wenn er die Lehre von den *Irrationalzahlen* auf diejenige von den *messbaren Grössen* begründen will. Es ist dies der Standpunkt, den in neuester Zeit *G. Ascoli* gegenüber den arithmetischen Irrationalzahltheorien als den ihm einzig natürlich erscheinenden hervorgehoben hat[37]). Immerhin dürfte sich heutzutage die bei weitem grosse Mehrzahl der wissenschaftlichen Mathe-

---

32) *Herm. Hankel* (Theorie der complexen Zahlensysteme) schrieb schon 1867, also zu einer Zeit, wo ihm höchstens die *Weierstrass*'sche Theorie durch mündliche Mitteilung bekannt sein konnte, folgendes (a. a. O. p. 46): „Jeder Versuch, die irrationalen Zahlen formal und ohne den Begriff der Grösse zu behandeln, muss auf höchst abstruse und beschwerliche Künsteleien führen, die, selbst wenn sie sich in vollkommener Strenge durchführen liessen, wie wir gerechten Grund haben zu bezweifeln, einen höheren wissenschaftlichen Wert nicht haben." Es erscheint äusserst merkwürdig, dass gerade der Schöpfer einer *rein formalen Theorie der Rationalzahlen* für die entsprechende Weiterbildung des Zahlbegriffs so wenig Verständnis gezeigt hat.

33) A. a. O. Art. 18.

34) Diese Forderung reicht in der That hin, da sich jede beliebige, arithmetisch definierte Irrationalzahl als systematischer Bruch mit beliebiger Basis darstellen lässt, s. Nr. **9**, Fussnote 48.

35) A. a. O. p. 1—168.

36) VI A 2 a, 3 a.

37) Rend. Ist. Lomb. (2) 28 (1895), p. 1060. — *A.* formuliert dabei jenes Axiom folgendermassen: „Liegt von den Segmenten $\overline{a_1 b_1}$, $\overline{a_2 b_2}$, $\overline{a_3 b_3}$, ... jedes ganz im Innern des vorhergehenden und ist $\lim\limits_{n=\infty} \overline{a_n b_n} = 0$, so giebt es *stets einen* und *nur einen* Punkt, der im Innern aller dieser Segmente liegt."

matiker einer der rein *arithmetischen* Definitionsformen der Irrationalzahlen angeschlossen haben und somit einer *Trennung* der *reinen Zahlenlehre* von der *eigentlichen Grössenlehre* zustimmen[38]). Die Einführung jenes *Axioms* wird bei dieser Auffassung erst erforderlich, wenn es sich darum handelt, die innerhalb der *reinen Arithmetik* ohne seine Mitwirkung zu Recht bestehenden Ergebnisse in die *Raumanschauung* zu übertragen[39]).

8. Die vollkommene Arithmetisierung im Sinne Kronecker's. Während die Anhänger der eben bezeichneten „*arithmetisierenden*" Richtung sich damit begnügen, die *Definition* der *Irrationalzahlen* und der damit auszuführenden Rechnungsoperationen auf die Lehre von den *rationalen*, also schliesslich von den *ganzen* Zahlen zu begründen, hat *Kronecker* einen wesentlich höheren Grad von „*Arithmetisierung*" der gesamten Zahlenlehre (Arithmetik, Analysis, Algebra) als erstrebenswertes und nach seiner Meinung auch erreichbares Ziel hingestellt[40]). Darnach sollen die arithmetischen Disciplinen alle „*Modifikationen und Erweiterungen des Zahlbegriffs* (ausser demjenigen der natürlichen Zahl) *wieder abstreifen*", insbesondere sollen also die *Irrationalzahlen* endgültig daraus verbannt werden. Dass es je dahin kommen werde, scheint mir nicht gerade wahrscheinlich[41]). Denn beachtet man, was *Kronecker* a. a. O. zur Beseitigung der *negativen* und *gebrochenen*[42]), sowie der *algebraischen* Zahlen vorschlägt, so gewinnt man den Eindruck, dass die fragliche *vollkommene Arithmetisierung* jener Disciplinen darauf hinauslaufen würde, deren wohlerprobte Ausdrucksweise und Zeichensprache, welche äusserst *verwickelte* Relationen zwischen *natürlichen* Zahlen in kürzester und vollkommen präciser Weise *zusammenfasst,* in einen höchst weitläufigen und schwerfälligen Formalismus *aufzulösen.*

---

38) Vgl. auch *Helmholtz*, Ges. Abh. 3, p. 359.

39) Vgl. *F. Klein*, Math. Ann. 37 (1850), p. 572.

40) J. f. Math. 101, p. 338. — Das inzwischen zum Terminus technicus gewordene Schlagwort „*Arithmetisierung*" ist wohl von *K.* zuerst gebraucht worden.

41) Vgl. meinen oben citierten Aufsatz: Münch. Sitzber. 27, p. 323, Fussnote. Ferner: *E. B. Christoffel,* Ann. di Mat. (2) 15 (1887), p. 253. (Der Inhalt dieses Aufsatzes ist im übrigen wesentlich zahlentheoretischer Natur.)

42) Die von *Kronecker* benützte, auf dem arithmetischen Begriffe der *Kongruenz* beruhende Methode ist übrigens genau dieselbe, welche schon von *Cauchy* zur Beseitigung der *imaginären* Zahlen entwickelt wurde: Exerc. d'anal. et de phys. math. 4 (1847), p. 87. Vgl. I A 2, Nr. 3.

9. Verschiedene Darstellungsformen der Irrationalzahlen und Irrationalität gewisser Darstellungsformen. Den einfachsten Typus von *Zahlreihen* zur *Darstellung der Irrationalzahlen* bilden die unendlichen, d. h. unbegrenzt fortsetzbaren *systematischen Brüche*[43]). Schon bei *Theon von Alexandria*[44]) findet sich eine Methode zur angenäherten Berechnung der Quadratwurzeln mit Hülfe von *Sexagesimal*-Brüchen. Die letzteren blieben auch noch im Mittelalter ausschliesslich in Gebrauch und wurden erst seit dem 16. Jahrhundert allmählich durch die *Dezimal*-Brüche verdrängt[45]). Statt der in der Praxis jetzt allgemein üblichen *Dezimal*-Brüche erweisen sich die *dyadischen*[46]), wegen ihrer ausserordentlichen formalen Einfachheit und besonderen geometrischen Anschaulichkeit, für die Zwecke analytischer Beweisführung als vorzugsweise geeignet.

Die *nicht-periodischen* unendlichen Dezimalbrüche dürfen als die ersten arithmetischen Darstellungsformen gelten, deren *Irrationalität* man (auf Grund der eindeutigen Darstellbarkeit jedes *rationalen* Bruches durch einen allemal *periodischen* unendlichen Dezimalbruch[47])) ausdrücklich erkannt hat. Dass umgekehrt *jede* Irrationalzahl durch einen unendlichen Decimalbruch (bezw. systematischen Bruch mit beliebiger Basis) eindeutig darstellbar ist, wurde von *Stolz* allgemein bewiesen[48]).

Eine zweite fundamentale Darstellungsform der Irrationalzahlen, nämlich durch unendliche *Kettenbrüche*[49]) knüpft gleichfalls an das Problem der Quadratwurzelausziehung an. Die Berechnung einer Quadratwurzel mit Hülfe eines unbegrenzt fortsetzbaren *regelmässigen Kettenbruches*[50]) lehrte zuerst (freilich nur an *Zahlen*-Beispielen) *Pietro*

---

43) Eine ausführliche Theorie derselben bei *Stolz*, Allg. Arithm. 1, p. 97 ff.

44) Um 360 n. Chr. *M. Cantor*, 1, p. 420.

45) Vgl. *M. Cantor*, 2, p. 252. 565—569. — *Siegm. Günther,* Verm. Unters. zur Gesch. der math. Wissensch. (Leipzig 1876), p. 97 ff.

46) Auf die Vorzüge des dyadischen Systems hat u. a. *Leibniz* besonders aufmerksam gemacht: Mém. Par. 1703. (Opera omnia, Ed. Dutens, 3, p. 390.)

47) *Joh. Wallisii* de Algebra Tractatus (1693), Cap. 80.

48) A. a. O. p. 119.

49) In Wahrheit wäre diese Darstellungsform durch den geometrischen Ursprung der Irrationalzahl als Verhältnis *incommensurabler* Strecken und durch die Euklidische Methode zur Feststellung der Commensurabilität bezw. Incommensurabilität (Elem. X 2, 3) unmittelbar angezeigt gewesen. Die historische Entwickelung hat indessen einen anderen Gang genommen.

50) D. h. eines solchen, dessen Teilzähler durchweg $=1$, dessen Teilnenner natürliche Zahlen sind.

Cataldi[51]), welcher darnach überhaupt als *Erfinder der Kettenbrüche* anzusehen ist[52]). Das von *Cataldi* aufgefundene *rein numerische* Verfahren erscheint unter der Form einer *allgemeinen analytischen Methode* bei *Leonhard Euler*, dem man die erste zusammenhängende Theorie der Kettenbrüche verdankt. Schon in seiner ersten Abhandlung[53]) über diesen Gegenstand zeigt er u. a. folgendes: Jeder *rationale* Bruch lässt sich durch einen *endlichen*, jeder *irrationale* durch einen *unendlichen regelmässigen* Kettenbruch darstellen. Insbesondere liefert die Entwickelung einer *Quadratwurzel* stets einen *periodischen* regelmässigen Kettenbruch; umgekehrt genügt jeder convergente Kettenbruch dieser Gattung einer *quadratischen* Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten[54]). Sodann werden die Zahlen e, $\frac{e^2-1}{2}$ u. a. durch Kettenbrüche dargestellt[55]) — zunächst freilich *rein numerisch* (d. h. indem näherungsweise gesetzt wird: $e = 2{,}71828182845904$). Das auf diesem Wege durch blosse *Induktion* gefundene Gesetz für die Bildungsweise der *unendlichen* Kettenbrüche wird aber hierauf auch *analytisch* wirklich bewiesen: damit hat in der That *Euler* die *Irrationalität* von e und e^2 zum ersten Male festgestellt[56]).

Mit Hülfe allgemeinerer Kettenbruch-Entwickelungen gelang es sodann *Joh. Heinr. Lambert*[57]), die *Irrationalität* von e^x, $\operatorname{tang} x$ und somit auch von $\lg x$, $\operatorname{arctang} x$ für *jedes rationale* x, insbesondere[58]) also diejenige von π ($= 4 \operatorname{arctang} 1$) nachzuweisen[56]). Eine Abkürzung dieser Beweise und zugleich ein allgemein nützliches Hülfsmittel zur Erkenntnis

---

51) Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri. Bologna 1613.

52) Auch die heutige *Bezeichnung* der Kettenbrüche (sowohl die gewöhnliche, als auch die gedrängtere, vgl. Fussn. 338) findet sich schon bei *C.*, mit dem einzigen Unterschiede, dass er & statt + (bezw. ·& statt $\dot{+}$) schreibt (so z. B. a. a. O. p. 70). Die Annahme, dass schon die Griechen, insbesondere *Archimedes* und *Theon von Smyrna* (um 130 n. Chr.), die Berechnung von Quadratwurzeln mit Hülfe von Kettenbrüchen im Prinzipe gekannt hätten, beruht lediglich auf Konjekturen. Vgl. *M. Cantor,* 1, p. 272. 369.

53) De fractionibus continuis. Comment. Petrop. 9 (1737), p. 98.

54) Dieser Satz bildet bekanntlich die Grundlage wichtiger Untersuchungen in der Theorie der quadratischen Formen (*Euler*, *Lagrange, Legendre, Dirichlet,* s. I C 2) und der numerischen Auflösung algebraischer Gleichungen (*Lagrange,* s. I B 3 a).

55) Die Bezeichnungen e und π stammen von *Euler,* vgl. *F. Rudio,* Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Leipzig 1892, p. 53.

56) Vgl. meine Note in den Münch. Sitzber. 1898, p. 325.

57) Hist. de l'Acad. de Berlin, Année 1761 (gedruckt 1768), p. 265.

58) A. a. O. p. 297.

des Irrationalen lieferte *Legendre*'s Satz von der *Irrationalität* eines jeden unendlichen Kettenbruches:

$$\frac{a_1|}{|b_1} \pm \frac{a_2|}{|b_2} \pm \cdots \pm \frac{a_\nu|}{|b_\nu} \pm \cdots,$$

für den Fall, dass die $\frac{a_\nu}{b_\nu}$ gewöhnliche ächte Brüche sind[59]. Mit Benützung dieses Satzes dehnte zunächst *Legendre* den Irrationalitätsbeweis noch auf π^2 aus. Auch beruht darauf z. B. der von *G. Eisenstein*[60] gegebene Beweis für die Irrationalität gewisser in der Theorie der elliptischen Funktionen vorkommender Reihen und Produkte, wie:

$$\sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{p^{\nu^2}}, \quad \sum_1^\infty{}_\nu \frac{(-1)^{\nu-1}}{p^{\nu^2}}, \quad \sum_1^\infty{}_\nu \frac{r^\nu}{p^{\nu^2}}, \quad \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{1}{p^\nu}\right),$$

(wo p eine ganze, r eine rationale positive Zahl)[61].

10. Fortsetzung. Die Ausdehnung des *binomischen* Satzes auf *gebrochene* Exponenten[62] lehrte die Wurzeln eines beliebigen Grades durch unendliche Reihen darstellen und lieferte damit zugleich den ersten allgemeinen Reihentypus von *unmittelbar* erkennbarer Irrationalität. Er scheint lange Zeit der einzige dieser Gattung geblieben zu sein. Der in die meisten Lehrbücher übergegangene *direkte* Beweis für die Irrationalität der bekannten *e-Reihe* rührt erst von *J. Fourier* her[63]. Durch Anwendung eines ganz analogen Beweisverfahrens zeigte *Stern*[64] die Irrationalität der Reihe: $\sum_\nu p^{-\nu} q^{-m_\nu}$, (wo p, q natürliche Zahlen, (m_ν) eine unbegrenzte Folge natürlicher Zahlen, für welche $m_{\nu+1} - m_\nu$ mit ν ins Unendliche wächst) und: $\sum \pm (p_1 p_2 \cdots p_\nu)^{-1}$ (wo $p_1, p_2, p_3, \ldots$ eine unbegr. Folge wachsender natürlicher Zahlen), sowie einiger ähnlicher, etwas allgemeinerer Reihen und damit äquivalenter unendlicher Produkte.

---

59) Éléments de géométrie (1794), Note IV. (Auch abgedruckt in der oben citierten Schrift von Rudio p. 161.) Vgl. Nr. **49.**

60) J. f. Math. 27 (1843), p. 193; 28 (1844), p. 39.

61) Die weiteren Untersuchungen in dieser Richtung beschäftigen sich wesentlich mit der Scheidung der Irrationalitäten in *algebraische* und *transcendente.* Hierüber (speziell auch über die *Transcendenz* von e und π) s. I C 2.

62) Um 1666 durch *Newton* (Brief an Oldenburg vom 24. Okt. 1676 — s. Opuscula, Ed. Castillioneus, 1 (1644), p. 328). *N.* fand den fraglichen Satz lediglich durch Induktion. Den ersten strengen, rein elementaren Beweis (d. h. ohne Anw. der Diff.-R.) gab *Euler:* Nov. Comment. Petrop. 19 (1774), p. 103.

63) Nach *Stainville,* Mélanges d'analyse (1815), p. 339.

64) J. f. Math. 37 (1848), p. 95; 95 (1883), p. 197.

W. L. Glaisher[65]) machte darauf aufmerksam, dass man die Irrationalität der von *Eisenstein* betrachteten Reihen $\sum p^{-\nu^2}$, $\sum (-1)^{\nu-1} p^{-\nu^2}$ und der allgemeineren: $\sum n_\nu \cdot p^{-m_\nu}$ (wo m_ν, n_ν gewissen Bedingungen genügende nat. Zahlen) ganz unmittelbar erkennt, wenn man dieselben als *systematische* (offenbar *nicht*-periodische) *Brüche* mit der Basis p auffasst. Auch weist er mit Hülfe von Kettenbruch-Entwickelungen die Irrationalität verschiedener anderer Reihen nach, die im wesentlichen mit den von *Stern* behandelten zusammenfallen.

Eine der Exponentialreihe nachgebildete, eindeutige Darstellung *jeder* ächt-gebrochenen *Irrationalzahl* durch die Reihe $\sum_1^\infty{}_\nu \frac{m_\nu}{\nu!}$ (wo m_ν eine natürliche Zahl $< \nu$) hat *Cyp. Stéphanos* angegeben[66]); die Summe der Reihe liefert dabei eine *rationale* Zahl dann und nur dann, wenn von irgend einem bestimmten ν ab durchweg $m_\nu = \nu - 1$. Übrigens erscheint diese Darstellung nur als ein spezieller Fall einer schon früher von *G. Cantor* gegebenen[67]). Eine andere ebenfalls eindeutige Darstellung *aller* zwischen 0 und 1 gelegenen Zahlen durch Reihen von der Form:

$$\frac{1}{m_1+1} + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{m_1(m_1+1)\cdots m_\nu(m_\nu+1)}$$

rührt von *J. Lüroth* her[68]). Die *rationalen* Zahlen liefern stets *periodische*, die *irrationalen* dagegen *nichtperiodische* Reihen dieser Art — *vice versa.*

Hierher gehört schliesslich noch eine von *G. Cantor*[69]) mitgeteilte eindeutige Darstellung aller über 1 liegenden Zahlen durch unendliche Produkte von der Form: $\prod_1^\infty{}_\nu \left(1+\frac{1}{m_\nu}\right)$, wo die m_ν nat. Zahlen und $m_{\nu+1} \geqq m_\nu^2$. Dabei sind die *irrationalen* Zahlen dadurch charakterisiert, dass für unendlich viele Werte von ν: $m_{\nu+1} > m_\nu^2$, während bei jeder *rationalen* Zahl von einem gewissen Werte ν an durchweg die Beziehung $m_{\nu+1} = m_\nu^2$ besteht[70]).

---

65) Philosophical Magazine 45 (London 1873), p. 191.

66) Bull. de la S. M. d. F. 7 (1879), p. 81. — Eine funktionentheoretische Anwendung dieser Darstellungsweise bei *G. Darboux,* Ann. de l'École norm. (2), 7 (1879), p. 200.

67) Z. f. Math. 14 (1869), p. 124.

68) Math. Ann. 21 (1883), p. 411. — Daselbst giebt L. auch je eine Anwendung auf Funktionentheorie und Mengenlehre.

69) Z. f. Math. 14 (1869), p. 152.

70) Eine Darstellung *spezieller* Irrationalitäten durch unendliche Produkte,

II. Grenzbegriff.

11. Der geometrische Ursprung des Grenzbegriffs. Der zum Irrationalzahlbegriffe in engster Beziehung stehende allgemeinere Begriff der *Grenze* oder des *Grenzwertes* einer irgendwie definierten, der Anzahl nach unbegrenzten *Zahlenmenge* ist aus dem schon von *Euklid* und *Archimedes* benützten Prinzipe der *Exhaustion*[71]) in Verbindung mit der erst der neueren Zeit angehörigen Anwendung des *Unendlichen* hervorgegangen. Das *Exhaustions*-Prinzip erscheint bei den Alten unter der Form eines zur Vergleichung von Flächen und Körpern dienlichen rein *apagogischen* Beweisverfahrens, dessen Kern folgendermassen formuliert werden kann[72]): „Zwei geometrische Grössen A, B sind einander gleich, falls sich zeigen lässt, dass bei Annahme $A > B$ der Unterschied $A - B$, und bei der Annahme $A < B$ der Unterschied $B - A$ kleiner wäre als jede mit A, B gleichartige Grösse." Die Auffassung eines von einer stetig gekrümmten Linie oder Fläche begrenzten Raumgebildes als eines Polygons bzw. Polyeders mit „*unendlich vielen*" und „*unendlich kleinen*" Seiten findet sich schwerlich vor dem 16. Jahrhundert. Auch hier darf wohl der oben bereits citierte *M. Stifel* als der erste gelten, welcher den *Kreis* als ein *Unendlich-Vieleck* und, noch genauer, gewissermassen als *letztes* (also nach unserer Ausdrucksweise als „*Grenze*") aller möglichen Polygone mit endlicher Seitenzahl definierte[73]). Während er aber gerade hieraus auf die *Unmöglichkeit* schloss, das Verhältnis von Peripherie und Durchmesser durch eine *rationale* oder *irrationale* Zahl darzustellen[73a]), so gelangte *Joh. Kepler*, von analogen Anschauungen

---

als deren erstes Beispiel die bekannte *Wallis*'sche Formel für $\frac{\pi}{2}$ erscheint (s. Nr. **41** Gl. [52]), gab *Ch. A. Vandermonde*, Mém. de l'Acad., Paris 1772. (In der deutschen Ausgabe von *V.*'s *Abhandl.* aus der reinen Math. [Berlin 1888], p. 67.)

71) Vgl. Art. „*Exhaustion*" in *Klügel*'s W. B., 2, p. 152. — Eine kritischere Darstellung giebt *Hermann Hankel* in *Ersch und Gruber*'s Encyklopädie, Sect. I, Bd. 90, Art. „*Grenze*".

72) *Stolz,* Zur Geometrie der Alten. Math. Ann. 22 (1883), p. 514. Allg. Arithm. I, p. 24.

73) A. a. O. Fol. 224ª. Def. 7. 8: „Recte igitur describitur circulus mathematicus esse polygonia infinitorum laterum. *Ante* circulum mathematicum sunt omnes polygoniae numerabilium laterum, quemadmodum ante numerum infinitum sunt omnes numeri dabiles.

73a) A. a. O. Fol. 224ᵇ. Def. 12. Beachtet man, dass *Stifel* den *allgemeinen* Irrationalzahlbegriff noch nicht hatte (cf. Nr. 2), so darf der obige anscheinend falsche Schluss nicht nur als vollkommen logisch, sondern geradezu als ein charakteristisches Zeichen der (*moderner* Auffassung sich nähernden) *arithmetisch-*

ausgehend, zu brauchbaren Formeln für die *Kubatur* von Rotationskörpern[74]). Kurze Zeit darauf erschien *Bonav. Cavalieri's Geometrie der Indivisibilien*[75]), welche, erheblich über *Kepler*'s Spezialuntersuchungen hinausgehend, unbeschadet der einigermassen mystischen Natur jener „Indivisibilien" als die erste grundlegende Darstellung *einer allgemeinen wissenschaftlichen Exhaustionsmethode* angesehen zu werden pflegt[76]).

12. Die Arithmetisierung des Grenzbegriffs. Zu einer *arithmetischen* Formulierung des *Grenzbegriffs*, wie sie im wesentlichen heute noch üblich ist, gelangte *John Wallis*[77]), indem er, das umständliche *apagogische* Verfahren der Alten verlassend, *Cavalieri's direkte geometrische* Methode ins *Arithmetische* übersetzte — dem Sinne nach und in heutiger Ausdrucksweise etwa folgendermassen:

Eine Zahl a gilt als *Grenze* einer unbegrenzt fortsetzbaren Zahlenreihe a_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$ in inf.), wenn die Differenz $a - a_\nu$ mit hinlänglich wachsenden Werten von ν *beliebig klein*[78]) wird.

Diese *Definition*, welche die *arithmetische* Beziehung jener *Grenze* a zu den Zahlen a_ν vollkommen fixiert, sobald die Zahl a *bekannt* ist oder zum mindesten ihre *Existenz* von vornherein feststeht, liefert aber noch *kein Kriterium*, um eventuell aus der Beschaffenheit der Zahlen a_ν auf die *Existenz* einer Grenze schliessen zu können. In dieser Hinsicht nahm man immer wieder seine Zuflucht zu *geometrischen* Vorstellungen und Analogien, aus denen man dann ohne weiteres die *Existenz* der fraglichen Grenze folgern zu können glaubte[79]). So z. B. sah man bei der *Quadratur* krummlinig begrenzter Ebenen-

---

scharfen Denkweise *Stifel*'s gelten. Jener Schluss stimmt nämlich vollkommen mit unserer heutigen Ansicht überein, dass die *Rektifikation* einer krummen Linie *ohne* den *allgemeinen* Irrationalzahlbegriff überhaupt nicht definiert werden kann. Vgl. Nr. **11. 12**.

74) Nova stereometria doliorum. Linz 1615. (Vgl. *M. Chasles,* Histoire de la Géométrie (2de éd. 1875), p. 56. *M. Cantor,* Gesch. der Math. 2, p. 750.)

75) Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota. Bologna 1635. (Ausführliches darüber bei *Klügel,* 1, Art. *„Cavalieri's Methode des Untheilbaren"*. *M. Cantor* a. a. O. p. 759.)

76) *H. Hankel* a. a. O. p. 189. *Chasles* a. a. O. p. 57.

77) Arithmetica Infinitorum (1655), Prop. 43, Lemma. (In der Gesamtausgabe der *W.*'schen Werke — Opera omnia, Oxoniae, 1695. 1, p. 383.) Vgl. *M. Cantor,* 2, p. 823.

78) „Quolibet assignabili minor." L. c. Prop. 40.

79) Ich übergehe hier wiederum absichtlich alle Versuche, den Grenzbegriff erkenntnistheoretisch und psychologisch zu begründen, als in die *Philosophie* der Mathematik (also nach VI A 2 a, 3 a) gehörig.

stücke, bei der *Rektifikation* von Kurvenbögen (mit Hülfe der Quadratur bez. Rektifikation einer Reihe unbegrenzt angenäherter Polygone) die *Existenz* einer bestimmten *Flächen-* bezw. *Längenzahl* als etwas *selbstverständliches*, auf Grund der *geometrischen* Anschauung *a priori* vorhandenes an[80]). Die *entscheidende Wendung* zur Beseitigung dieser unzulänglichen Auffassung bezeichnet *Cauchy*'s Definition und Existenzbeweis[81]) für das *bestimmte Integral* einer stetigen Funktion; hiermit wird in der That nicht nur zum ersten Male die *Notwendigkeit* deutlich gemacht, die *Existenz* einer *Flächenzahl* ausdrücklich *arithmetisch* zu beweisen, sondern dieser Nachweis *wenigstens in der Hauptsache* wirklich geliefert — d. h. es wird gezeigt, dass zur Definition jener Flächenzahl *Zahlenreihen* vorhanden sind, welche das zur *Existenz* einer bestimmten *Grenze* erforderliche (sogleich noch näher zu erörternde) *Kriterium* erfüllen[82]). Fehlt auch bei *Cauchy* (und zwar nicht nur an der betreffenden Stelle, sondern überhaupt in seinen Arbeiten) der *Beweis* dafür, dass jenes *Kriterium* für die Existenz einer bestimmten *Grenze* thatsächlich *hinreicht*, so kann man doch sagen, dass durch *Cauchy*'s genannte Leistung die wahre *arithmetische* Natur des allgemeinen Grenzproblems zum ersten Male scharf gekennzeichnet und für dessen endgültige Erledigung der Weg gewiesen worden ist.

13. Das Kriterium für die Grenzwertexistenz. Das erwähnte *Kriterium* für die Existenz einer bestimmten *Grenze* lautet in seiner *Grundform*, d. h. für eine einfache, unbegrenzt fortsetzbare Reihe reeller Zahlen (einfach-unendliche *Zahlenfolge*, einfach-*abzählbare*[83])

---

80) In der Stereometrie tritt die analoge Schwierigkeit schon bei der Kubatur der *Pyramide* auf; vgl. *R. Baltzer,* Die Elemente der Mathematik 2 (1883), p. 229. *Stolz,* Math. Ann. 22 (1883), p. 517.

81) Beides findet sich schon in dem „Résumé des leçons données à l'école polytechnique sur le calcul infinitésimal“ (Paris 1823), p. 81 (nicht erst, wie häufig angenommen wird, in den von *M. Moigno* 1840—44 herausgegebenen „Leçons sur le calcul différentiel et intégral“ 2, p. 2).

82) Zur vollen Strenge des Beweises wäre noch die Erkenntnis von der *gleichmässigen* Stetigkeit einer schlechthin stetigen Funktion erforderlich — was aber in dem hier vorliegenden Zusammenhange nicht wesentlich ins Gewicht fällt. Vgl. II A 1.

83) Vgl. I A 5, Nr. 2. — In dem vorliegenden Artikel wird im wesentlichen immer nur von den *Grenzwerten abzählbarer Zahlenmengen* gehandelt, da die Grenzwerte *nichtabzählbarer*, insbesondere *stetiger* Zahlenmengen (vgl. I A 5, Nr. **2. 13. 16**) der *Analysis* (II A, B) angehören. Natürlich lässt sich diese Trennung mit Rücksicht auf die historische Entwickelung der verschiedenen Grenzwert-

Zahlenmenge) und im Anschluss an die oben gegebene *Definition* der *Grenze* folgendermassen:

Damit die unbegrenzte Zahlenfolge (a_ν) eine bestimmte *Grenze* (einen bestimmten *Grenzwert* oder *Limes*) a besitze, in Zeichen[84]):

$$a = \lim a_\nu \quad (\nu = \infty) \qquad \text{oder:} \quad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = a,$$

ist *notwendig* und *hinreichend*, dass $a_{n+\varrho} - a_n$ für *einen hinlänglich grossen* Wert von n und *jeden* Wert von ϱ *beliebig klein* wird[85]).

Die Zahlenfolge (a_ν) heisst alsdann *konvergent*.

Dass die obige Bedingung eine *notwendige* ist, folgt unmittelbar aus der *Definition* der *Grenze* und mag wohl bekannt gewesen sein, seit man sich überhaupt mit solchen Grenzwerten beschäftigt hat. Dass sie auch *hinreicht*, wurde bis in die neueste Zeit als *selbstverständlich* angesehen, aber *niemals ausdrücklich bewiesen*. Das Verdienst, diese Notwendigkeit zuerst hervorgehoben zu haben, gebührt *Bolzano*[86]), der den entsprechenden Beweis für den besonderen Fall der Reihenkonvergenz[87]) wenigstens zu führen *versuchte*. Derselbe ist allerdings unzulänglich, wie auch ein von *Herm. Hankel* gegebener (auf den allgemeineren Fall *beliebiger* Zahlenmengen bezüglicher) Beweis[88]).

---

betrachtungen nicht immer streng einhalten (wie z. B. oben bezüglich des Citates über das bestimmte Integral oder bei den folgenden Bemerkungen über den Beweis des Grenzwertkriteriums).

84) Das uns heute völlig unentbehrlich gewordene *Zeichen lim* scheint mir zuerst von *Simon L'Huilier* (Exposition élément. des calculs supérieurs, Berlin 1786 — auch unter dem Titel: Principiorum calc. diff. et integr. expositio, Tübingen 1795) angewendet worden zu sein. Allgemein gebräuchlich ist es wohl erst seit *Cauchy* (Anal. algébr. p. 13) geworden (d. h. also seit 1821; in dem grossen Traité de calc. diff. et integr. von *Lacroix*, 1810—1819, wird noch jeder einzelne Grenzübergang umständlich mit Worten bezeichnet). Die oben genannte, in den mir bekannten histor. Darstellungen bei weitem nicht nach Gebühr geschätzte Schrift *L'Huilier*'s (von der Berl. Akademie als Lösung einer 1784 gestellten Preisfrage preisgekrönt) enthält die erste strenge Darstellung des Grenzbegriffs auf Grund der Euklidischen Verhältnislehre und der Exhaustionsmethode.

85) Dieser Satz mit seiner Übertragung auf *beliebige* (z. B. stetige) Zahlenmengen — von *Du Bois-Reymond* als das *„allgemeine Convergenzprinzip"* bezeichnet (Allg. Funct.-Theorie, pp. 6. 260) — ist der eigentliche *Fundamentalsatz der gesamten Analysis* und sollte mit genügender Betonung seines fundamentalen Charakters an der Spitze jedes rationellen Lehrbuches der Analysis stehen.

86) „Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, etc." Prag 1817. Vgl. *Stolz*, Math. Ann. 18 (1881), p. 259.

87) Vgl. auch Nr. **21** dieses Artikels.

88) *Ersch* u. *Gruber* a. a. O. p. 193; Math. Ann. 20 (1882), p. 106. Vgl. *Stolz* a. a. O. p. 260, Fussnote.

Da die Richtigkeit des fraglichen Satzes wesentlich und ausschliesslich auf der *wohldefinierten Existenz der Irrationalzahlen* beruht, so fallen die ersten strengen Beweise desselben naturgemäss mit dem Auftreten der *arithmetischen* Irrationalzahltheorien und der damit zusammenhängenden Revision und Verschärfung auch der älteren *geometrisierenden* Erklärungsweise (vgl. Nr. 7) zusammen. Bei *Cantor* erscheint der Satz als eine ganz unmittelbar aus der *Definition* der Irrationalzahlen resultierende *Folgerung*, wie von ihm selbst scharf hervorgehoben wird[89]). Auch *Dedekind* hat im Anschluss an *seine* Irrationalzahltheorie einen vollkommenen Beweis desselben (für den allgemeineren Fall *beliebiger* Zahlenmengen) geliefert[90]). Der letztere ist von *U. Dini* etwas einfacher gefasst[91]) und sodann von *Du Bois-Reymond* der von ihm vertretenen Anschauungsweise angepasst worden[92]). Andere Modifikationen jenes Beweises haben *Stolz, J. Tannery, C. Jordan*[93]) und *P. Mansion*[94]) gegeben.

Ist die Zahlenfolge (a_ν) *monoton*[95]), d. h. niemals *ab-* oder niemals *zu*nehmend, so genügt für deren *Konvergenz* die Bedingung, dass die a_ν numerisch unter einer festen Zahl bleiben (Beispiel: die system. Brüche). Man kann diese *einfachste* Form von konvergenten Zahlenfolgen auch zum Ausgangspunkte für die Lehre von den Irrationalzahlen und Grenzwerten nehmen[96]). Doch bedarf man dann, um die Subtraktion und Division definieren zu können, stets *zweier* solcher Folgen (einer niemals *ab-* und einer niemals *zu*nehmenden)[97]).

14. Das Unendlichgrosse und Unendlichkleine. Haben die Terme einer unbegrenzten Folge wohldefinierter Zahlen (a_ν) die Eigenschaft, dass, wie gross auch eine positive Zahl G vorgeschrieben werde, von einem bestimmten Index ν ab durchweg: $a_\nu > G$ (bezw. $a_\nu < -G$),

89) Math. Ann. 21 (1883), p. 124.

90) A. a. O. p. 30.

91) Fondamenti per la teorica etc. p. 27.

92) Allg. Funct.-Theorie p. 260.

93) Vgl. meine Bemerkungen in den Münch. Sitzber. 27 (1897), pp. 357, 358. — *Stolz* hat auch die Existenz des Grenzwertes durch dessen Darstellung in system. Form erwiesen: Allg. Arithm. 1, p. 115 ff. (vgl. Nr. 9 dieses Artikels).

94) Mathesis 5 (1885), p. 270.

95) Dieser Ausdruck stammt von *C. Neumann:* „Über die nach Kreis-, Kugel- und Cylinder-Funct. fortschr. Entw.“, Leipzig 1881, p. 26.

96) Vgl. *Mansion,* Mathesis 5, p. 193.

97) *Bachmann* a. a. O. pp. 12. 13. Vgl. Nr. 4, Note 20. — Wählt man zur Definition der Irrat.-Zahlen noch speciellere Zahlenfolgen, etwa die system. Brüche, so tritt schon bei der Definition der Addition und Multiplikation eine Schwierigkeit ein

so sagt man, der *Grenzwert* der a_ν sei positiv (negativ) *unendlich*, in Zeichen:

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = +\infty \qquad (\text{bezw. } \lim_{\nu=\infty} a_\nu = -\infty).$$

Die Zahlenfolge (a_ν) heisst alsdann *eigentlich divergent.*

Dieser Satz hat nach heutiger Auffassung als *Definition des Unendlichen* zu gelten[98]), während ihn ältere Analysten als einen beweisbaren *Lehrsatz* anzusehen pflegten[99]); in Wahrheit musste aber jeder solche Beweis auf einen blossen *circulus vitiosus* hinauslaufen, solange keine anderweitige *mathematisch-greifbare Definition* des *Unendlichen* existierte[100]) (was erst seit neuester Zeit der Fall ist — s. etwas weiter unten).

Auf Grund der oben gegebenen Definition *ist* unter den Zahlen a_ν, wie gross auch ν angenommen werden mag, *keine unendlich grosse*, dagegen bedient man sich der *Ausdrucksweise*, die Zahlen a_ν *werden* mit *unbegrenzt* wachsenden Werten von ν *unendlich gross.* Das *Unendliche*, welches bei dieser Definitionsform lediglich als ein *Veränderlich-Endliches*, also als ein *Werdendes*, kein *Gewordenes* erscheint, wird als *potentiales*[101]) oder *uneigentliches*[102]) *Unendlich* bezeichnet.

Aber auch *unabhängig* von jedem derartigen *Werdeprozess* lässt sich das *Unendliche* als ein *aktuales* oder *eigentliches Unendlich* streng arithmetisch definieren. *B. Bolzano*[103]) hat als eigentümliches Merkmal einer *unendlichen* Menge von Elementen hervorgehoben, dass die Elemente, welche lediglich einen gewissen *Teil* jener Menge bilden, den Elementen der *Gesamt*-Menge *eindeutig-umkehrbar* zugeordnet werden können (z. B. der *Gesamt*-Menge der Zahlen $0 \leqq y \leqq 12$ die *Teil*-Menge der Zahlen $0 \leqq x \leqq 5$ auf Grund der Festsetzung: $5y = 12x$). Die nämliche Eigenschaft hat *G. Cantor* dahin formuliert, dass bei einer *unendlichen* Menge und *nur* bei einer solchen ein *Teil* der Menge mit ihr selbst *gleiche Mächtigkeit* besitzen könne[104]). Unabhängig von den

98) Etwa seit *Cauchy:* Analyse algébr. pp. 4. 27.

99) S. z. B. *Jac. Bernoulli,* Positiones arithmeticae de seriebus infinitis (1689), Prop. II (Opera, Genevae 1744, 1, p. 379).

100) Auch was z. B. *Du Bois-Reymond* in seiner Allg. Functionen-Theorie p. 69 ff. über die Unterscheidung des „*Unendlichen*" vom „*Unbegrenzten*" sagt, erscheint unhaltbar. Vgl. meine Bemerk. Münch. Sitzber. 1897, p. 322, Fussn. 1.

101) Das *Infinitum potentia* oder *synkategorematische Unendlich* der Philosophen, im Gegensatz zu dem sogleich zu erwähnenden *Infinitum actu* oder *kategorematischen* (aktualen) *Unendlich.*

102) Nach *G. Cantor,* Math. Ann. 21 (1883), p. 546.

103) Paradoxien des Unendlichen. Leipzig 1851. § 20.

104) Journ. f. Math. 84 (1878), p. 242.

beiden genannten[105]) hat *Dedekind* diese Eigenschaft geradezu zur *Definition* des *Unendlichen* erhoben, d. h. (mit Beibehaltung der eben benützten *Cantor*'schen Ausdrucksweise): Eine Menge heisst *unendlich*, wenn sie eine *Teil*-Menge von *gleicher Mächtigkeit* enthält; im entgegengesetzten Falle heisst sie *endlich*[106]). *Dedekind beweist* sodann die *Existenz unendlicher* Mengen[107]), leitet daraus den Begriff der *natürlichen Zahlenreihe* und schliesslich denjenigen der *Anzahl* einer *endlichen* Menge ab.

Umgekehrt hat *G. Cantor*, den *Anzahl*-Begriff für *endliche* Mengen in der üblichen Weise als etwas *a priori* gegebenes ansehend, diesen Begriff auf *unendliche* Mengen übertragen und ist hierdurch zur Aufstellung eines konsequent ausgebildeten *Systems von eigentlich-unendendlichen* („*überendlichen*" oder „*transfiniten*") Zahlen geführt worden[108]).

In der *Arithmetik* erscheint das *Unendliche* immer nur als *Uneigentlich-Unendliches*, also als *Veränderlich-Endliches*, dessen absoluter Betrag an keine obere Schranke gebunden ist. In der *Funktionenlehre*, zumal für complexe Veränderliche, hat es sich indessen als zweckmässig erwiesen, neben diesem *Uneigentlich-Unendlichen* auch ein *Eigentlich-Unendliches* in der Weise einzuführen, dass man allen möglichen *endlichen* Werten, deren eine Veränderliche fähig ist, *den Wert* ∞ *wie einen einzigen, bestimmten* (geometrisch durch einen bestimmten Punkt repräsentierten) hinzufügt[109]).

---

105) Vgl. das Vorwort zur 2. Auflage der Schrift: Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1895. (Erste Auflage 1887.)

106) A. a. O. Nr. 64. *D.* bezeichnet dabei zwei Mengen von „*gleicher Mächtigkeit*" (also solche, deren Elemente sich eindeutig-umkehrbar einander zuordnen lassen) als „*ähnlich*" (oder auch ausführlicher als solche, die ineinander ähnlich abgebildet werden können). — Eine andere, in gewisser Beziehung noch einfachere Definition des Unendlichen giebt *D.* in dem oben citierten Vorwort, p. XVII. — Vgl. auch *Franz Meyer,* Zur Lehre vom Unendlichen. Antr.-Rede, Tübingen 1889; *C. Cranz*, Wundt's Philos. Studien 21 (1895), p. 1; *E. Schroeder*, Nova acta Leop. 71 (1898), p. 303.

107) Ähnlich, wie schon *Bolzano* a. a. O. § 13.

108) Math. Ann. 21 (1883), p. 545 ff. Die betr. Abhandlung enthält auch eine mit zahlreichen Citaten versehene historisch-kritische Erörterung des Unendlichkeitsbegriffs. — Weiteres über *transfinite* Zahlen s. I A 5, Nr. **3** ff.

109) Dieses eigentliche *Unendlich* der Funktionentheorie lässt sich keineswegs allemal ohne weiteres durch das *uneigentliche Unendlich* ersetzen; mit anderen Worten: das Verhalten einer Funktion $f(x)$ *für alle möglichen noch so grossen* Werte von x braucht noch keineswegs dasjenige für den Wert $x = \infty$ zu bestimmen. Setzt man z. B.

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x), \quad \text{wo:} \quad f_n(x) = \frac{n}{n+x},$$

Etwas anders verhält es sich mit dem sogenannten *Unendlichkleinen.* Ist $\lim a_\nu = 0$, so bedient man sich häufig der *Ausdrucksweise*, die Zahlen a_ν *werden* mit *unbegrenzt* wachsenden Werten von ν *unendlichklein*[110]). Wo immer in der *Arithmetik, Funktionenlehre, Geometrie* das sog. *Unendlichkleine* auftritt, ist es immer nur ein *unendlichklein werdendes*, also nach der oben gebrauchten Terminologie *Uneigentlich-Unendlichkleines*[111]). Wenn es auch neuerdings gelungen ist, in sich konsequente Systeme *eigentlich-unendlichkleiner „Grössen"* aufzustellen[112]), so handelt es sich hierbei doch lediglich um blosse *Zeichensysteme* mit *rein formal* definierten Gesetzen, welche von den für reelle Zahlen geltenden zum Teil verschieden sind. Solche fingierte *eigentlich-unendlichkleine Grössen* stehen zu den *reellen Zahlen* in keinerlei direkter Beziehung; sie finden in der eigentlichen *Arithmetik* und *Analysis* keinen Platz und können auch nicht, wie die reellen Zahlen, dazu dienen, *geometrische Grössenbeziehungen* widerspruchsfrei zu *beschreiben.* Insbesondere lässt sich aus der Möglichkeit derartiger arithmetischer Konstruktionen *keineswegs* die *Existenz unendlichkleiner geometrischer Grössen* (z. B. Linienelemente) folgern. *G. Cantor* hat vielmehr ausdrücklich gezeigt, dass aus der Annahme von Zahlen, die numerisch *kleiner* sind als *jede* positive Zahl, geradezu die *Nichtexistenz unendlichkleiner Strecken* erschlossen werden kann[113]).

15. Oberer und unterer Limes. Aus einer *uneigentlich diver-*

---

so hat man für *jedes noch so grosse* endliche x ausnahmslos:

$$f(x) = 1,$$

dagegen:

$$f_n(\infty) = 0, \quad \text{also auch:} \quad f(\infty) = 0.$$

Im übrigen ist allgemein das Verhalten einer Funktion $f(x)$ für jenen *Wert* oder *Punkt* $x = \infty$ definiert durch dasjenige von $f\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x = 0$. Vgl. II B 1. — Ein anderer Typus des Eigentlich-Unendlichen („die unendlich ferne Gerade") hat sich in der projektiven *Geometrie* als zweckmässig erwiesen.

110) *Cauchy,* Anal. algébr. p. 4. 26.

111) Mit dem *eigentlich-unendlichen* $x = \infty$ der Funktionentheorie korrespondiert *nicht* etwa ein *eigentlich-unendlichkleiner* Wert x, sondern der Wert $x = 0$.

112) *O. Stolz* hat mit Benützung *Du Bois-Reymond*'scher Untersuchungen zwei verschiedene Systeme von eigentlich-unendlichkleinen Grössen konstruiert: Ber. d. naturw.-medic. Vereins, Innsbruck 1884, p. 1 ff. 37 ff. Allg. Arithm. 1, p. 205 ff. Vgl. I A 5, Nr. **17**. — Über *P. Veronese*'s *„Infiniti* und *Infinitesimi attuali"* vgl. I A 5, Fussn. 103. 107. — Eine ausführlich historisch-kritische Darstellung der Lehre von den unendlich-kleinen Grössen giebt *G. Vivanti*'s Schrift: Il concetto d'infinitesimo, Mantova 1894.

113) Z. f. Philos. 91, p. 112. Vgl. auch *O. Stolz,* Math. Ann. 31 (1888), p. 601. *G. Peano,* Rivista di Mat. 2 (1872), p. 58.

genten, d. h. weder konvergenten, noch eigentlich divergenten Zahlenfolge (a_ν) lassen sich stets *zwei konvergente* oder *eigentlich divergente* Zahlenfolgen (a_{m_ν}), (a_{n_ν}) von folgender Beschaffenheit herausheben: Setzt man

$$\lim_{\nu=\infty} a_{m_\nu} = A, \qquad \lim_{\nu=\infty} a_{n_\nu} = a, \tag{1}$$

(wo $A > a$ und A, a entweder bestimmte Zahlen vorstellen oder auch $A = +\infty$, $a = -\infty$ sein kann), so lässt sich aus der Folge (a_ν) *keine* Folge herausheben, welche einen *grösseren Limes* als A, oder einen *kleineren Limes* als a besitzt. A heisst hiernach der *grösste* oder *obere*, a der *kleinste* oder *untere Limes* der a_ν, in Zeichen[114]):

$$\lim_{\nu=\infty} \sup a_\nu = A, \qquad \lim_{\nu=\infty} \inf a_\nu = a, \tag{2}$$

oder kürzer[115]):

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, a_\nu = A, \qquad \underline{\lim_{\nu=\infty}}\, a_\nu = a. \tag{3}$$

Vermöge dieser Verallgemeinerung des Limesbegriffs erscheinen die *konvergenten* und *eigentlich divergenten* Zahlenfolgen als derjenige Grenzfall, bei welchem *oberer und unterer Limes zusammenfallen*, sodass also:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, a_\nu = \underline{\lim_{\nu=\infty}}\, a_\nu = \lim_{\nu=\infty} a_\nu. \tag{4}$$

Der Begriff des *oberen und unteren Limes* findet sich schon bei *Cauchy*[116]), der speziell in der Reihenlehre eine äusserst wichtige Anwendung davon gemacht hat[117]). *Du Bois-Reymond* hat für *den oberen und unteren Limes* die Bezeichnung *obere und untere Unbestimmtheitsgrenze* eingeführt[118]) und wird deshalb vielfach fälschlich für den *Erfinder* des damit bezeichneten *Begriffs* gehalten. Immerhin kann man sagen, dass er als der erste die grosse und allgemeine Bedeutung jenes Begriffs für die Reihen- und Funktionenlehre ausdrücklich hervorgehoben und zu dessen konsequenter Anwendung[119]) Veranlassung gegeben hat.

---

114) Nach *Pasch*, Math. Ann. 30 (1887), p. 134.

115) Nach einer neuerdings von mir eingeführten Bezeichnung: Münch. Sitzber. 28 (1898), p. 62. Die gelegentliche Anwendung der Bezeichnung $\overline{\underline{\lim_{\nu=\infty}}}\, a_\nu$ soll bedeuten, dass in dem betreffenden Zusammenhange *sowohl der obere als der untere Limes* genommen werden darf.

116) Anal. algébr. p. 132, 151 etc. — *C.* bezeichnet den oberen Limes als „la plus grande des limites". — „La plus petite des limites" bei *N. H. Abel*: Oeuvres 2, p. 198.

117) Vgl. Nr. **23**.

118) Antritts-Progr. d. Univ. Freiburg (1871), p. 3. Münch. Abh. 12, I. Abth. (1876), p. 125. Allg. Funct.-Th. p. 266.

119) Vgl. insbesondere den oben citierten Aufsatz von *Pasch*.

16. Obere und untere Grenze. Mit dem Begriff des *oberen* (*unteren*) *Limes* zwar verwandt, dennoch scharf davon zu unterscheiden, ist der zuerst von *Bolzano*[120]) bemerkte, namentlich aber von *Weierstrass* (in seinen Vorlesungen)[121]) betonte Begriff der *oberen* (*unteren*) *Grenze*[122]): Jede Zahlenfolge (a_ν) mit endlich bleibenden (d. h. zwischen zwei bestimmten Zahlen enthaltenen) Termen besitzt eine bestimmte *obere* und *untere Grenze* G, g, d. h. man hat für *jedes* ν: $g \leqq a_\nu \leqq G$ und für mindestens je einen Wert $\nu = m$, $\nu = n$: $G - \varepsilon < a_m \leqq G$, $g \leqq a_n < g + \varepsilon$ bei beliebig klein vorgeschriebenem positivem ε. Giebt es einen Term $a_m = G$ (eventuell auch mehrere oder sogar unendlich viele), so heisst die *obere Grenze* der a_ν zugleich deren *Maximum*[123]). Giebt es *keinen* solchen, so müssen unendlich viele Terme a_{m_ν} vorhanden sein, für welche: $G - \varepsilon < a_{m_\nu} < G$, d. h. in diesem Falle ist die *obere Grenze* G gleichzeitig der *obere Limes* der a_ν. Dies findet offenbar ebenfalls statt, wenn für *unendlich viele* Werte von ν die Beziehung $a_\nu = G$ besteht.

Das analoge gilt bezüglich der unteren Grenze g.

Bleiben die a_ν *nicht* unterhalb einer bestimmten *positiven* bezw. oberhalb einer bestimmten *negativen* Zahl, so wird $G = +\infty$, bezw. $g = -\infty$. Auch in diesem Falle erscheint die obere bezw. untere *Grenze* zugleich als oberer bezw. unterer *Limes*[124]).

---

120) Beweis des Lehrs. etc. p. 41. Vgl. *Stolz*, Math. Ann. 18 (1881), p. 257.

121) *Pincherle* a. a. O. p. 242 ff.

122) *Pasch* a. a. O. bezeichnet das, was hier (nach dem Vorgange von *Weierstrass*) obere (untere) *Grenze* genannt wird, als obere (untere) *Schranke*, und verwendet den Ausdruck obere (untere) *Grenze* für den oberen (unteren) *Limes*. — Französische (und italienische) Autoren pflegen den Ausdruck *limite supérieure* (*limite superiore*) etc. bald in dem einen, bald in dem andern Sinne zu gebrauchen, was leicht zu Unklarheiten Veranlassung geben kann.

123) *Darboux* (Ann. de l'école norm. (2) 4, p. 61) nennt die obere (untere) Grenze: „*la limite maximum* (*minimum*)" — eine Bezeichnung, die nicht mit *Maximum* (*Minimum*) verwechselt werden darf. — Ich pflege im Falle $a_m = G$ die obere Grenze noch prägnanter als das *reale Maximum* der a_ν zu bezeichnen, und nenne sie deren *ideales Maximum*, falls *kein* Term die obere Grenze G erreicht (eine Annahme, die auch den Fall $G = \infty$ mit umfasst). Alsdann kann man sagen: Der obere *Limes* fällt dann und nur dann mit der oberen *Grenze* zusammen, wenn dieselbe ein *ideales* oder *unendlich oft vorkommendes reales Maximum* ist. — Analog für die untere Grenze.

124) *G. Peano* hat darauf aufmerksam gemacht, dass man in gewissen Fällen (z. B. Def. des best. Integrals, der Rektifikation etc.) mit dem Begriffe der oberen (unteren) *Grenze* leichter und präciser operiert, als mit dem des *Limes:* Ann. di Mat. (2), 23 (1895), p. 153.

17. Das Rechnen mit Grenzwerten. Die Zahl $e = \lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$. Sind (a_ν), (b_ν) konvergente Zahlenfolgen, so liefern die unmittelbar an die Definition der Irrationalzahlen anzuknüpfenden elementaren Rechnungsregeln die Relationen:

$$(5)\quad \begin{cases} \lim a_\nu \pm \lim b_\nu = \lim (a_\nu \pm b_\nu), \quad \lim a_\nu \cdot \lim b_\nu = \lim (a_\nu b_\nu), \\ \dfrac{\lim a_\nu}{\lim b_\nu} = \lim \left(\dfrac{a_\nu}{b_\nu}\right) \text{ [125]} \end{cases}$$

(wobei in der letzten Gleichung der Fall $\lim b_\nu = 0$ auszuschliessen ist), und allgemein:

$$(6)\qquad f(\lim a_\nu, \lim b_\nu, \lim c_\nu, \ldots) = \lim f(a_\nu, b_\nu, c_\nu, \ldots),$$

wenn f irgend eine Kombination der 4 Species (mit Ausschluss der Division durch 0) bedeutet.

Enthält das Rechnungssymbol f noch andere Forderungen, z. B. Wurzelausziehungen, so gilt Gl. (6) als *Definitions*-Gleichung, sofern die rechte Seite *konvergiert.* Mit Hülfe dieses Prinzips lässt sich insbesondere die Lehre von den gebrochenen und irrationalen Potenzen und deren Umkehrungen, den Logarithmen, konsequent und streng begründen[126].

Die ausgezeichneten arithmetischen Eigenschaften, welche die *natürlichen* Logarithmen (d. h. die mit der Basis e) von allen anderen voraus haben, beruhen auf den Beziehungen:

$$(7)\qquad \lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu = e, \qquad \lim\left(1+\frac{a}{\nu}\right)^\nu = e^a$$

(a eine beliebige reelle Zahl). Während die letzteren bei *Euler*[127] nur in dem Zusammenhange erscheinen, dass die Gleichheit der links stehenden Grenzwerte mit den zur *Definition* von e, e^a dienenden *Reihen* (in einer nach heutigen Begriffen freilich unzulänglichen Weise) abgeleitet wird, so hat *Cauchy*[128] die *Existenz* jener Grenzwerte direkt bewiesen und darauf die *Definition* der Exponentialgrössen und natürlichen Logarithmen gegründet — eine Methode, die seitdem in die meisten Lehrbücher der Analysis übergegangen ist[129].

---

125) Ich schreibe von jetzt ab, soweit ein Missverständnis ausgeschlossen erscheint, immer nur lim statt $\lim\limits_{\nu=\infty}$.

126) Vgl. *Stolz,* Allg. Arithm. p. 125—148.

127) Introductio in anal. inf. 1 § 115—122.

128) Résumé des leçons etc. (1823), p. 2.

129) Dabei wird gewöhnlich die Definition der Potenz mit beliebigen (event. also irrationalen) Exponenten als bereits bekannt vorausgesetzt. Man

18. Sogenannte unbestimmte Ausdrücke. Werden die in Gl. (5), (6) vorkommenden $\lim a_\nu$, $\lim b_\nu$, $\ldots = \infty$ oder 0, so entstehen auf den *linken* Seiten jener Gleichungen zum Teil sogenannte *unbestimmte Ausdrücke*[130]) (wie: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 0^0, ∞^0 etc.), als deren „*wahre Werte*" man die *rechts* stehenden *Grenzwerte* (sofern dieselben einen bestimmten Sinn besitzen) nicht gerade sehr passend zu bezeichnen pflegt. Obschon die Methoden zur Bestimmung derartiger Grenzwerte ihre volle Allgemeinheit erst durch die Einführung einer *stetigen* Veränderlichen an Stelle der veränderlichen *ganzen* Zahl ν gewinnen und in dieser Form der Differentialrechnung angehören[131]), so beruhen sie doch schliesslich (wie die ganze Lehre von den Funktionen *stetiger* Veränderlicher) auf gewissen einfachen Sätzen über Grenzwerte gewöhnlicher Zahlenfolgen. Hierhin gehören die folgenden von *Cauchy* herrührenden Beziehungen[132]).

Man hat

$$(8)\quad \lim \frac{a_\nu}{\nu} = \lim (a_{\nu+1} - a_\nu) \qquad \left(\text{Beisp. } \lim \frac{\lg \nu}{\nu} = 0, \ \lim \frac{e^\nu}{\nu} = \infty\right)$$

und für $a_\nu > 0$:

$$(9)\quad \lim a_\nu^{\frac{1}{\nu}} = \lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \qquad \left(\text{Beisp. } \lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1, \ \lim \sqrt[\nu]{\nu!} = \infty\right),$$

vorausgesetzt, dass die *rechts* stehenden Grenzwerte (im weiteren Sinne) *existieren*[133]) (aber nicht umgekehrt).

Den ersten dieser Sätze hat *Stolz* folgendermassen verallgemeinert[134]):

Ist (m_ν) *monoton* und: $\lim m_\nu = \pm \infty$ oder: $\lim m_\nu = 0$, so wird:

$$(10)\quad \lim \frac{a_\nu}{m_\nu} = \lim \frac{a_{\nu+1} - a_\nu}{m_{\nu+1} - m_\nu},$$

falls der *rechts* stehende Grenzwert (im weiteren Sinne) existiert.

---

kann aber auch die Existenz des Grenzwertes $\lim \left(1 + \frac{a}{\nu}\right)^\nu$ zur *Definition* der Potenz mit bel. reellen Exponenten benützen: vgl. *Th. Wulf,* Wiener Monatsh. 8, p. 43 ff. — Diese Methode lässt sich übrigens auch auf complexe Werte von a übertragen; vgl. *J. A. Serret,* Calcul diff. 1 (oder *Serret-A. Harnack* 1), Art. 366.

130) Bei *Cauchy:* Valeurs singulières (Anal. algébr. p. 45).

131) Vgl. II A 1.

132) Anal. algébr. p. 59. (Die betr. Sätze sind daselbst zunächst in der allgemeineren Form, wo $f(x)$ an die Stelle von a_ν tritt, bewiesen und durch Spezialisierung $x = \nu$ abgeleitet.)

133) D. h. endlich oder mit best. Vorzeichen unendlich sind.

134) Math. Ann. 14 (1879), p. 232. Allg. Arithm. 1, p. 173.

19. Graduierung des Unendlich- und Nullwerdens. Auf der Untersuchung von Quotienten der Form $\frac{\infty}{\infty}$ (d. h. von $\lim \frac{a_\nu}{b_\nu}$, wo $\lim a_\nu = \infty$, $\lim b_\nu = \infty$) beruht die *Graduierung* des Unendlichwerdens von Zahlenfolgen (bezw. von Funktionen). Ist $\lim a_\nu = +\infty$, $\lim b_\nu = +\infty$, so sind, *falls* $\lim \frac{a_\nu}{b_\nu}$ *überhaupt existiert*[135]), folgende drei Fälle zu unterscheiden:

(11) $$\lim \frac{a_\nu}{b_\nu} = 0, \quad \lim \frac{a_\nu}{b_\nu} = g > 0, \quad \lim \frac{a_\nu}{b_\nu} = \infty,$$

für welche *Du Bois-Reymond* die Bezeichnungen eingeführt hat[136]):

(12) $$a_\nu \prec b_\nu, \qquad a_\nu \sim b_\nu, \qquad a_\nu \succ b_\nu,$$

in Worten:

a_ν wird von niederer Ordnung (schwächer, langsamer) ∞, als b_ν
" " " derselben " (ebenso) " " "
" " " höherer " (stärker, schneller) " " "

oder kürzer:

a_ν ist *infinitär* kleiner, als b_ν
" " " gleich "
" " " grösser, als "

Ich pflege die Bezeichnung $a_\nu \sim b_\nu$ und den ihr entsprechenden Ausdruck auch anzuwenden, wenn nur feststeht, dass $\underline{\lim} \frac{a_\nu}{b_\nu}$ und $\overline{\lim} \frac{a_\nu}{b_\nu}$ *beide* endlich und von Null verschieden sind (also:

$$0 < g \leqq \overline{\underline{\lim}} \frac{a_\nu}{b_\nu} \leqq G < \infty),$$

und habe den obigen Bezeichnungen noch die folgende hinzugefügt[137]):

(13) $$a_\nu \cong g \cdot b_\nu, \qquad \text{falls:} \quad \lim \frac{a_\nu}{b_\nu} = g.$$

Ist (M_ν) monoton zunehmend, $\lim M_\nu = \infty$,[138]) so hat man:

(14) $$\cdots \prec (\lg_2 M_\nu)^{p''} \prec (\lg M_\nu)^{p'} \prec M_\nu^p \prec (e^{M_\nu})^{p_1} \prec (e^{e^{M_\nu}})^{p_2} \prec \cdots,$$

---

135) Dies braucht nicht einmal der Fall zu sein, wenn a_ν, b_ν *beide monoton* sind, s. z. B. *Stolz*, Math. Ann. **14**, p. 232 und vgl. Nr. **29**. **30** dieses Artikels.

136) Ann. di Mat. Ser. II 4 (1870), p. 339. Die Ausbildung und Verwertung des in (11) (12) definierten Algorithmus bildet den Inhalt des *Du Bois-Reymond'schen Infinitärkalküls.*

137) Math. Ann. 35 (1890), p. 302.

138) Im Folgenden soll das Zeichen (M_ν) ein für allemal eine Zahlenfolge dieser Art vorstellen.

wenn $p^{(\varkappa)}, p, p_\varkappa$ ganz beliebige (z. B. auch *wachsende*) positive Zahlen bedeuten und $\lg_\varkappa M_\nu$ den $\varkappa$-fach iterierten Logarithmus[139]) vorstellt. Man kann also, von einem beliebig gewählten „*Unendlich*“ lim M_ν ausgehend, eine nach beiden Seiten unbegrenzte Skala von immer *schwächeren*, bezw. immer *stärkeren* „*Unendlich*“, sog. *Ordnungstypen* des Unendlichen aufstellen. Diese Skala lässt sich auf unendlich viele Arten beliebig *verdichten*[140]). Man ist auch bei ihrer Bildung nicht auf die Logarithmen und Exponentialfunktionen angewiesen; doch sind sie die *analytisch-einfachsten* Funktionen dieser Art. Man kann aber auch Zahlenfolgen bezw. Funktionen konstruieren, die schwächer (stärker) unendlich werden nicht nur als jeder bestimmte *einzelne*, sondern als *alle möglichen* iterierten Logarithmen[141]) (Exponentialfunktionen). Das analoge gilt auch für *jede beliebige* Skala solcher Ordnungstypen[142]).

Im Anschluss an Nr. **14** sei noch bemerkt, dass es sich bei diesen „*verschiedenen Typen*“ des *Unendlich* keineswegs um *eigentliche* Unendlich in dem dort näher bezeichneten Sinne handelt. Die sog. infinitären Relationen von der Form (12) sind lediglich Zusammenfassungen einer unbegrenzten Anzahl von Beziehungen zwischen *endlichen* Zahlen, die an keine obere Grenze gebunden sind[143]).

Die analogen Betrachtungen lassen sich bezüglich des Null- oder Unendlichkleinwerdens anstellen. Nur hat naturgemäss im Falle $\lim a_\nu = 0$, $\lim b_\nu = 0$ die Beziehung $a_\nu \prec b_\nu$ die Bedeutung: a_ν wird von *höherer* Ordnung (stärker, schneller) unendlichklein, als b_ν u. s. f.[144]).

20. Grenzwerte zweifach unendlicher Zahlenfolgen. Die *Grenzwerte zweifach unendlicher* Zahlenfolgen sind meines Wissens in der Litteratur bisher nicht ausdrücklich behandelt worden; man hat nur *spezielle* Formen solcher Grenzwerte (Doppelreihen) und Grenzwerte von *Funktionen zweier Variablen* untersucht, von denen *mindestens eine*

---

139) Auf die Betrachtung solcher iterierten Logarithmen (und, als naturgemässe Ergänzung, auf diejenige iterierter Exponentialgrössen) ist man durch Untersuchungen über Reihenkonvergenz geführt worden; vgl. Nr. **26** dieses Artikels. — *Abel* war, soweit ich feststellen konnte, der erste, der von den iterierten Logarithmen in diesem Sinne Gebrauch machte: Oeuvres compl. Éd. Sylow-Lie **1**, p. 400; **2**, p. 200. — Skalen von ähnlicher Form wie (14) finden sich zuerst bei *A. de Morgan*, Diff. and integr. calculus (London 1839) p. 323.

140) *Du Bois-Reymond* a. a. O. p. 341.

141) *Du Bois-Reymond*, J. f. Math. 76 (1873), p. 88.

142) *Du Bois-Reymond*, Math. Ann. 8, p. 365, Fussnote. *Pincherle*, Mem. Acad. Bologn. (4), 5 (1884), p. 739. *J. Hadamard*, Acta math. 18 (1894), p. 331.

143) Vgl. meine Bem. in den Münch. Sitzber. 27 (1897), p. 307.

144) Weiteres über „*Unendlichkeitstypen*“ s. I A 5, Nr. **17**.

(bei den unendlichen Reihen $\sum f_\nu(x)$) als *stetig* veränderlich erscheint. Da das charakteristische der hierbei in Frage kommenden Möglichkeiten am einfachsten an Zahlenfolgen der Form $a_{\mu\nu}$ ($\mu = 0, 1, 2, \ldots$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) hervortritt[145]), so habe ich neuerdings die wichtigsten Sätze über solche Grenzwerte kurz zusammengestellt[146]). Als *Kriterium* für die Existenz eines endlichen bezw. positiv unendlichen $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} a_{\mu\nu}$ erscheint dabei eine Bedingung von der Form: $|a_{\mu+\varrho,\nu+\sigma} - a_{\mu\nu}| \leqq \varepsilon$ bezw. $a_{\mu\nu} > G$ für $\mu \geqq m$, $\nu \geqq n$. Hierdurch wird also die Existenz von $\lim\limits_{\nu=\infty} a_{\mu\nu}$ für irgend ein bestimmtes μ und $\lim\limits_{\mu=\infty} a_{\mu\nu}$ für irgend ein bestimmtes ν in keiner Weise präjudiziert. Dagegen existieren offenbar unter allen Umständen: $\varliminf\limits_{\nu=\infty} a_{\mu\nu}$, $\varlimsup\limits_{\nu=\infty} a_{\mu\nu}$ ($\mu = 0, 1, 2, \ldots$), $\varliminf\limits_{\mu=\infty} a_{\mu\nu}$, $\varlimsup\limits_{\mu=\infty} a_{\mu\nu}$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$), und es gilt der Hauptsatz:

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} a_{\mu\nu} = \lim_{\mu=\infty} \left(\overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} a_{\mu\nu}\right) = \lim_{\nu=\infty} \left(\overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty} a_{\mu\nu}\right), \tag{15}$$

falls der *erste* dieser Grenzwerte (im weiteren Sinne) *existiert.*

Zweiter Teil. Unendliche Reihen, Produkte, Kettenbrüche und Determinanten.

III. Unendliche Reihen.

21. Konvergenz und Divergenz. Den einfachsten Typus von gesetzmässig definierten Zahlenfolgen bilden die *unendlichen Reihen* (s_ν), bei welchen jeder Term s_ν aus dem vorangehenden durch eine einfache *Addition* erzeugt wird, so dass also:

$$s_\nu = s_{\nu-1} + a_\nu = a_0 + a_1 + \cdots + a_\nu.$$

Man sagt alsdann, die *unendliche Reihe* $\sum\limits_0^\infty {}^\nu a_\nu$ sei *konvergent,* eigentlich oder uneigentlich *divergent,* je nachdem die Zahlenfolge (s_ν) *konvergiert* bezw. eigentlich oder uneigentlich *divergiert.* Ist $\lim s_\nu = s$ (s eine bestimmte Zahl incl. 0), so heisst s die *Summe* der Reihe[148]).

---

145) Dies gilt z. B. auch bezüglich des fundamentalen Begriffs der gleichmässigen Konvergenz. Vgl. II A 1.

146) Münch. Ber. 27 (1897), p. 103 ff.

147) A. a. O. p. 105.

148) Einige Autoren bezeichnen s zunächst nur als den *Grenzwert* der Reihe und benützen den Ausdruck *Summe* nur dann, wenn $\lim s_\nu$ *kommutativ* ist, also die Reihe *unbedingt* (vgl. Nr. **31**) konvergiert. — Über die Bedeutung des Zeichens $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} {}^\nu a_\nu$ vgl. Nr. **59**, Fussn. 448.

Man bedient sich auch vielfach des Ausdrucks, die *Summe* der Reihe sei *unendlich gross* oder *unbestimmt* (sie *oscilliere*), wenn (s_ν) *eigentlich* oder *uneigentlich* divergiert. Als *notwendige und hinreichende* Bedingung für die *Konvergenz* der Reihe ergiebt sich nach Nr. **13**:

Es muss $|s_{n+\varrho} - s_n| \equiv |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+\varrho}|$ lediglich durch Wahl von n für *jedes* ϱ *beliebig klein* werden.

Obschon die Einführung unendlicher Reihen bis ins 17. Jahrhundert zurückreicht[149]) und ihre Behandlung in der mathematischen Litteratur des 18. einen überaus breiten Raum einnimmt, so wird man darin vergeblich nach einem derartigen *Kennzeichen* der Konvergenz suchen[150]). Wenn man *überhaupt* nach der *Konvergenz* einer durch irgendwelche formale Operationen gewonnenen Reihenentwickelung fragte (was schon an und für sich zu den Ausnahmen gehörte), so hielt man die Feststellung, dass $\lim a_\nu = 0$ sei, schon für ausreichend, obschon doch bereits *Jac. Bernoulli* die *Divergenz* der harmonischen Reihe $\sum \frac{1}{\nu}$ nachgewiesen hatte[151]). Selbst *J. L. Lagrange* steht in seiner Abhandlung über die Auflösung der litteralen Gleichungen durch Reihen noch vollständig auf diesem Standpunkte[152]).

---

149) Über die ältere Entwickelungsgeschichte der Lehre von den unendl. Reihen vgl. *Reiff* a. a. O.

150) *Reiff* (p. 119) scheint mir zu irren, wenn er eine Stelle bei *Euler* (Comm. Petrop. 7, 1734, p. 150) dahin auffasst, dass letzterer die *Konvergenzbedingung* in der (*Cauchy*'schen) Form: $\lim\limits_{n=\infty} (s_{n+\varrho} - s_n) = 0$ eigentlich schon gekannt habe. Die betreffende Stelle bei *Euler* besagt nämlich nur, dass eine Reihe *divergiert*, wenn: $\lim\limits_{n=\infty} |s_{kn} - s_n| > 0$.

151) Pos. arithm. de seriebus 1689. Prop. XVI (Opera omnia 1, p. 392). *B.* giebt daselbst *zwei* Beweise, und bezeichnet seinen Bruder *Johann* als Urheber des *ersten* (auf dem sog. *Bernoulli'schen Paradoxon* $\sum_2^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu} = \sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{\nu}$ beruhenden). Der *zweite* (mit Hülfe der Ungleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \cdots + \frac{1}{a^2} < \frac{1}{a} + \frac{a^2 - a}{a^2} = 1)$$

ist der im Prinzip heute noch übliche.

152) Berl. Mém. 24 (1770). Oeuvres 3, p. 61. „... pour qu'une série puisse être regardée comme représentant réellement la valeur d'une quantité cherchée, il faut qu'elle soit convergente a son extrémité, c'est à dire que ses derniers termes soient infiniment petits, de sorte que l'erreur puisse devenir moindre qu'aucune quantité donnée". Die nun folgende Konvergenzuntersuchung beschränkt sich auf den Nachweis, dass die einzelnen Reihenglieder schliesslich gegen Null konvergieren. — Hiernach kann es kaum verwunderlich erscheinen, dass sich z. B. in dem 1803 gedruckten 1. Bande des *Klügel*'schen W. B. p. 555 noch die

Und die Einführung des *Restgliedes* der *Taylor*'schen Reihe geschieht bei *Lagrange* keineswegs in der Absicht, deren *Konvergenz* zu beweisen (diese wird überhaupt als etwas selbstverständliches mit keinem Worte berührt), sondern lediglich, um die *Fehlergrenze* bei endlichem Abbrechen der Reihe abschätzen zu können[153]).

Die erste im wesentlichen strenge Formulierung der notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Konvergenz einer Reihe wird gewöhnlich *Cauchy*[154]) zugeschrieben. *Herm. Hankel*[155]) und *O. Stolz*[156]) haben indessen hervorgehoben, dass sich dieselbe schon einige Jahre vor *Cauchy* bei *Bolzano*[157]) findet. Des letzteren Fassung, die (abgesehen von der Bezeichnung) genau mit der oben gegebenen übereinstimmt, erscheint sogar präciser als die von *Cauchy* gegebene, welche die Möglichkeit eines Missverständnisses nicht ausschliesst[158]). Da *Bolzano*'s Schriften bis in die neueste Zeit wenig Beachtung fanden, so muss immerhin gesagt werden, dass *Cauchy* als der eigentliche Begründer einer exakten allgemeinen Reihenlehre anzusehen ist[159]).

22. Die Konvergenzkriterien von Gauss und Cauchy. Das oben angegebene *wahre Kriterium* für die Konvergenz und Divergenz einer Reihe ist nur in wenigen Fällen (z. B. bei der geometrischen Progression, bei Reihen von der Form $\sum(a_\nu - a_{\nu+1})$, bei der harmonischen Reihe) für die Feststellung der Konvergenz oder Divergenz verwendbar. Dieser Umstand führte zur Aufstellung von bequemer zu

---

folgende Definition vorfindet: „Eine Reihe ist konvergierend, wenn ihre Glieder in ihrer Folge nacheinander immerfort kleiner werden. Die Summe der Glieder nähert sich alsdann immer mehr dem Werte der Grösse, welche die Summe der ins Unendliche fortgesetzten Reihe ist."

153) Théorie des fonctions (1797). Oeuvres 9, p. 85.

154) Anal. algébr. (also 1821), p. 125.

155) *Ersch* u. *Gruber*, Art. Grenze, p. 209.

156) Math. Ann. 18 (1881), p. 259.

157) Beweis des Lehrsatzes etc. 1817.

158) Dies gilt in noch höherem Masse von einer späteren, in den Anc. exerc. 2 (1827), p. 221 auftretenden Fassung: $\lim_{n=\infty}(s_{n+\varrho} - s_n) = 0$ — die in der That auch missverstanden und infolgedessen angefochten worden ist. Vgl. meine Note in den Münch. Sitzber. 27 (1897), p. 327. — *N. H. Abel*, der sich in seiner Abh. über die binomische Reihe (J. f. Math. 1, 1826, p. 313) fast wörtlich ebenso ausdrückt, giebt in einer aus dem J. 1827 stammenden, aber erst in seinem Nachlasse vorgefundenen Note (Oeuvres 2, p. 197) eine mit der unsrigen übereinstimmende, einwandfreie Formulierung.

159) *K. F. Gauss* geht in seiner Untersuchung über die hypergeometrische Reihe (1812), welche freilich das *erste Beispiel* exakter Konvergenzuntersuchung liefert, auf *allgemeine* Konvergenzfragen nicht ein.

handhabenden *Konvergenz-* und *Divergenzkriterien*, d. h. Bedingungen, welche sich für die Konvergenz bezw. Divergenz zwar *nicht* als *notwendig*, wohl aber als *hinreichend* erweisen. Die ersten Kriterien dieser Art rühren von *Gauss* her[160]) und beziehen sich auf Reihen mit lauter positiven Gliedern a_ν, für welche:

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{\nu^m + A\nu^{m-1} + B\nu^{m-2} + \cdots}{\nu^m + a\nu^{m-1} + b\nu^{m-2} + \cdots}.$$

Die Reihe *divergiert*, wenn $A - a \geqq -1$, sie *konvergiert*, wenn $A - a < -1$.[161]) Dabei wird die *Divergenz* im Falle $A - a > 0$ bezw. $A - a = 0$ unmittelbar daraus erschlossen, dass die Glieder der Reihe ins Unendliche wachsen bezw. einer endlichen, von Null verschiedenen Grenze zustreben. Dagegen ergiebt sich im Falle $A - a < 0$ die *Divergenz* bezw. *Konvergenz* mit Hülfe des für alle weiteren Konvergenzuntersuchungen als *fundamental* anzusehenden Prinzipes der *Reihenvergleichung* (d. h. der gliedweisen Vergleichung der zu untersuchenden Reihe mit einer anderweitig, z. B. durch direkte Summation, bereits als *divergent oder konvergent erkannten Reihe*).

23. **Fortsetzung.** Nachdem *Cauchy* festgestellt hatte, dass die *Konvergenz* einer Reihe mit *positiven* und *negativen* Gliedern gesichert ist, falls die Reihe der *absoluten Beträge* konvergiert[162]), handelte es sich vor allem um die Ausbildung der Konvergenzkriterien für Reihen mit lauter *positiven Gliedern.* Durch Vergleichung mit der geometrischen Progression gewann er zunächst die beiden *Fundamentalkriterien erster und zweiter Art*[163]), nämlich:

(I) $\sum a_\nu$ *divergiert*, wenn $\overline{\lim}\sqrt[\nu]{a_\nu} > 1$; *konvergiert*, wenn $\overline{\lim}\sqrt[\nu]{a_\nu} < 1$,

(II) „ „ „ $\lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} > 1$; „ „ $\lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} < 1$.

Hervorzuheben ist die scharfe Unterscheidung in der Fassung dieser beiden Kriterien; bei (I) genügt schon die Beschaffenheit des *oberen* Limes von $\sqrt[\nu]{a_\nu}$, um — mit Ausschluss des *einzigen* Falles $\overline{\lim}\sqrt[\nu]{a_\nu} = 1$

160) S. die eben citierte Abhandlung: Opera 3, p. 139.

161) Eine Ausdehnung dieser Kriterien auf den Fall *complexer* a_ν hat *Weierstrass* angegeben: J. f. Math. 51 (1856), p. 22 ff.

162) Anal. algébr. p. 142. — Die Fassung des Beweises ist freilich unzulänglich. Strenger: Résum. analyt. p. 39.

163) A. a. O. p. 133. 134. — Wir bezeichnen ein Kriterium nach dem Vorgange von *Du Bois-Reymond* (J. f. Math. 76, p. 61) als ein solches *erster* bezw. *zweiter* Art, je nachdem es ausschliesslich von a_ν oder von $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ abhängt.

— die Divergenz oder Konvergenz zu entscheiden; bei (II) wird ausdrücklich nur der Fall betrachtet, dass *ein bestimmter* $\lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ *existiert*, d. h. es bleiben ausser dem Falle $\lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = 1$ auch noch alle diejenigen unerledigt, wo *kein bestimmter Limes* vorhanden ist[164]). Diese Überlegenheit des Kriteriums (I) über (II) ist von *Cauchy* noch speziell hervorgehoben worden[165]), und er hat ferner gezeigt, wie dasselbe dazu dienen kann, *das Konvergenzintervall*[166]) (den *Konvergenzradius*[167])) einer Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ in *jedem* Falle *genau zu fixieren*[168]). Zur eventuellen Erledigung desjenigen Falles, welchen die Anwendung des Kriteriums (I) unentschieden lässt, beweist *Cauchy* einen Hülfssatz über die *gleichzeitige* Divergenz und Konvergenz der Reihen $\sum a_\nu$ und $\sum 2^\nu \cdot a_{2^\nu - 1}$ (falls $a_{\nu+1} \leqq a_\nu$), erschliesst aus ihm die Divergenz der Reihe $\sum \frac{1}{\nu^{1+\varrho}}$ für $\varrho \leqq 0$, die Konvergenz für $\varrho > 0$ und leitet daraus ein *verschärftes Kriterium erster Art* ab:

---

164) Etwas vollständiger kann man (II) folgendermassen fassen: $\sum a_\nu$ *divergiert*, wenn $\underline{\lim} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} > 1$, *konvergiert*, wenn $\overline{\lim} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} < 1$. Unentschieden bleibt die Frage, wenn gleichzeitig:

$$\underline{\lim} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \leqq 1, \qquad \overline{\lim} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \geqq 1.$$

165) A. a. O. p. 135 „le *premier* de ces theorèmes etc."

166) A. a. O. p. 151. — Résumés analyt. (1833), p. 46.

167) A. a. O. p. 286. — Rés. analyt. p. 113. — Exerc. d'Anal. 3 (1844), p. 390.

168) Es ist eigentümlich, dass dieses für die Funktionentheorie äusserst wichtige Resultat (auf das auch *Cauchy* selbst sichtlich grossen Wert legte) vielfach vollständig übersehen worden oder in Vergessenheit geraten zu sein scheint. Erst vor einigen Jahren ist es von *J. Hadamard* (J. de Math. (4) 8 [1892], p. 107) von neuem entdeckt worden und wird seitdem öfters als „*Hadamard*'*scher* Satz" zitiert. — Auf der anderen Seite hat sich, trotz der tadellos korrekten Fassung des Kriteriums (I) und der ausdrücklichen Betonung seines *spezielleren* Charakters, zum Teil die Meinung gebildet, dass durch die drei Annahmen $\lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \lesseqgtr 1$ *alle* in Betracht kommenden Möglichkeiten erschöpft seien, oder dass zum mindesten die *Konvergenz* von $\sum a_\nu$ im Falle der *Nicht-Existenz* eines bestimmten $\lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ als eine *besondere Merkwürdigkeit* erscheine (vgl. meine Bemerkungen Math. Ann. 35 [1890], p. 308). Und man findet darnach in manchen (sogar der neuesten Zeit angehörigen) Lehrbüchern *die ganze Lehre von den Potenzreihen* auf die viel zu spezielle Annahme begründet, dass $\lim \left| \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \right|$ *existiere.*

$$(16) \qquad \lim \frac{\lg \frac{1}{a_\nu}}{\lg \nu} \begin{cases} < 0: \textit{Divergenz}, \\ > 0: \textit{Konvergenz}. \end{cases}$$

An anderer Stelle[169]) zeigt *Cauchy*, dass die Div. oder Konv. der Reihe $\sum_m^\infty {}_\nu f(\nu)$ unter gewissen Bedingungen mit derjenigen des Integrals $\int_m^\infty f(x)dx$ zusammenfällt, und gewinnt hieraus das *Kriterienpaar:*

$$(17) \qquad \begin{cases} \lim \nu \cdot a_\nu \quad > 0: \textit{Divergenz}, \\ \lim \nu^{1+\varrho} \cdot a_\nu = 0: \textit{Konvergenz}, \quad (\varrho > 0), \end{cases}$$

welches, beiläufig bemerkt, leicht als im wesentlichen *gleichwertig* mit dem *disjunktiven Doppelkriterium* (16) erkannt wird und einfacher direkt aus dem Verhalten der Reihe $\sum \frac{1}{\nu^{1+\varrho}}$ $(\varrho \geqq 0)$ hätte abgeleitet werden können. Wichtiger dünkt mir, dass *C.* hier zum ersten Male die *Divergenz* von $\sum \frac{1}{\nu \lg \nu}$, die *Konvergenz* von $\sum \frac{1}{\nu (\lg \nu)^{1+\varrho}}$ für $\varrho > 0$ beweist, womit der Weg für die weitere Verschärfung der Kriterien (16) und (17) unmittelbar vorgezeichnet erscheint.

24. Kummer's allgemeine Kriterien. Die Kriterien von *J. L. Raabe, J. M. C. Duhamel, de Morgan, Bertrand, P. O. Bonnet, M. G. v. Paucker* (deren Veröffentlichung in den Zeitraum von 1832—1851 fällt und von denen später noch die Rede sein wird) liefern lediglich derartige *Verschärfungen* der *Cauchy*'schen Kriterien, an welche sie auch nach Form und Herleitungsweise sich im wesentlichen anschliessen.

Während alle die bisher genannten Kriterien einen *speziellen* Charakter tragen, insofern sie durchweg auf der Vergleichung von a_ν mit einer der *speziellen* Zahlenfolgen a^ν, ν^p, $\nu \cdot (\lg \nu)^p$ etc. beruhen, so hat *E. E. Kummer*[170]) das folgende *Konvergenz*-Kriterium von überraschend *allgemeinem* Charakter abgeleitet: $\sum a_\nu$ *konvergiert*, wenn irgend eine positive Zahlenfolge (P_ν)[171]) existiert, so dass:

$$(18) \qquad \lim \lambda_\nu \equiv \lim \left(P_\nu \cdot \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - P_{\nu+1}\right) > 0.$$

---

169) Anc. Exerc. 2 (1827), p. 221 ff. — Der Satz über den Zusammenhang des Integrals mit der Reihe findet sich in geometrischer Form schon bei *Colin Mac Laurin* (Treatise of fluxions 1742, p. 289). — Über die Umformung dieses Krit. durch *B. Riemann,* vgl. Nr. **36**.

170) J. f. Math. 13 (1835), p. 171 ff.

171) *Kummer* fügt noch die Nebenbedingung hinzu: $\lim P_\nu \cdot a_\nu = 0$, welche jedoch in Wahrheit überflüssig ist, wie *Dini* in einer sogleich zu erwähnenden Arbeit zuerst gezeigt hat.

Zugleich zeigt *K.*, dass $\sum a_\nu$ *divergiert*, wenn:

$$(19) \qquad \lim P_\nu \cdot a_\nu = 0,^{172)} \quad \lim \lambda_\nu = 0, \quad \lim \frac{P_\nu \cdot a_\nu}{\lambda_\nu} > 0,$$

und weist nach, dass allemal wirklich (unendlich viele) Zahlenfolgen (P_ν) *existieren*, welche eins der Kriterien (18) (19) befriedigen; um sie aber in jedem Falle *bestimmen* zu können, müsste man von vornherein über die *Konvergenz* und *Divergenz* von $\sum a_\nu$ orientiert sein.

25. Die Theorien von Dini, du Bois-Reymond und Pringsheim. Erhebliche Verallgemeinerungen der ganzen Lehre von den Konvergenzkriterien bringt sodann *Dini*'s umfangreiche, zunächst unmittelbar an *Kummer*'s Untersuchung anknüpfende Abhandlung: *Sulle serie a termini positivi*[173]), welche indessen nicht die verdiente Verbreitung gefunden zu haben scheint.

Du Bois-Reymond's „Neue Theorie der Konvergenz und Divergenz von Reihen mit positiven Gliedern"[174]) scheint ganz unabhängig von *Dini*'s Arbeit entstanden zu sein. Sind auch seine Untersuchungsmethoden und Hauptresultate von denjenigen *Dini*'s nicht wesentlich verschieden, so geht er doch *prinzipiell* über *Dini* hinaus durch die ausgesprochene Tendenz, der Lehre von der Konvergenz und Divergenz „durch strengere Begründung und durch sachgemässe Verknüpfung ihrer Theoreme den bis jetzt ihr fehlenden Charakter einer mathematischen Theorie zu verleihen". Da mir indessen *Du Bois-Reymond* dieses Ziel keineswegs erreicht zu haben scheint[175]), so habe ich das von ihm gestellte Problem von neuem aufgenommen und in folgendem Sinne erledigt[176]): Es werden aus dem völlig einheitlich durchgeführten, nächstliegenden Prinzipe der Reihenvergleichung Regeln von möglichster Allgemeinheit abgeleitet, welche nicht nur alle bisher bekannten Kriterien als spezielle Fälle umfassen[177]), sondern auch ihre Tragweite

---

172) Hier ist diese Bedingung *wesentlich.*

173) Pisa 1867 (Tipogr. Nistri). Auch: Ann. dell' Univ. Tosc. 9 (1867), p. 41—76.

174) J. f. Math. 76 (1873), p. 61—91.

175) Vgl. meine krit. Bemerk. Math. Ann. 35 (1890), p. 298.

176) Math. Ann. 35 (1890), p. 297—394. — Nachtrag dazu: Math. Ann. 39 (1891), p. 125. — Ein Auszug dieser Theorie findet sich: Math. Pap. Congr. Chicago [1896] 1893, p. 305—329.

177) Eine Ausnahme bildet das *Kummer*'sche *Divergenz*-Kriterium, weil es nicht, wie alle anderen Kriterien von *einer,* sondern von *drei* Bedingungen abhängt. Dasselbe wird aber durch die allgemeineren Div.-Kriterien 2$^{\text{ter}}$ Art vollkommen entbehrlich. Vgl. meine Abh. a. a. O. p. 365, Fussn.

und ihren mehr oder weniger verborgenen Zusammenhang deutlich erkennen lassen. Insbesondere erscheint das in seiner Allgemeinheit bisher vollständig abseits stehende Konvergenzkriterium *zweiter Art* von *Kummer* als ein natürliches Glied dieser Theorie und findet sein vollständiges Analogon unter den Kriterien *erster Art.*

26. Die Kriterien erster und zweiter Art. Ich bezeichne mit $d_\nu \equiv D_\nu^{-1}$ bezw. $c_\nu \equiv C_\nu^{-1}$ das allgemeine Glied einer als *divergent* bezw. *konvergent* erkannten, mit a_ν dasjenige einer zu beurteilenden Reihe. Dann ergiebt sich als *Hauptform* der Kriterien *erster und zweiter Art:*

$$(20) \qquad \begin{cases} \lim D_\nu \cdot a_\nu > 0: & \textit{Divergenz}, \\ \lim C_\nu \cdot a_\nu < \infty: & \textit{Konvergenz}\text{[178]}. \end{cases}$$

$$(21) \qquad \begin{cases} \lim \left(D_\nu \cdot \dfrac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - D_{\nu+1}\right) < 0: & \textit{Divergenz}, \\[2ex] \lim \left(C_\nu \cdot \dfrac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - C_{\nu+1}\right) > 0: & \textit{Konvergenz}. \end{cases}$$

Man kann diesen Kriterien mannigfaltige *andere Formen* geben, wenn man nicht a_ν direkt mit d_ν, c_ν, sondern $F(a_\nu)$ mit $F(d_\nu)$, $F(c_\nu)$ vergleicht, unter F eine *monotone* Funktion verstanden. Hierauf beruht insbesondere die Umformung der *Kriterienpaare* (20) in *disjunktive Doppelkriterien*, bei denen ein *einziger* Ausdruck über Divergenz und Konvergenz entscheidet.

Versagt für irgend eine bestimmte Wahl von D_ν, C_ν eins jener Kriterien in der Weise, dass an Stelle der Zeichen $\lessgtr$ das Gleichheitszeichen auftritt, so ergiebt sich die *Möglichkeit*, *wirksamere* Kriterien zu erhalten, wenn man statt D_ν, C_ν solche $\overline{D_\nu}$, $\overline{C_\nu}$ einführt, welche der Bedingung: $\overline{D_\nu} \prec D_\nu$ bezw. $\overline{C_\nu} \succ C_\nu$ genügen, in welchem Falle die Reihe $\sum \overline{D_\nu}^{-1}$ bezw. $\sum \overline{C_\nu}^{-1}$ *schwächer* divergent bezw. konvergent heissen soll, als $\sum D_\nu^{-1}$ bezw. $\sum C_\nu^{-1}$.[179]) Man kann aber solche D_ν, C_ν nicht nur in unbegrenzter Anzahl, sondern *alle überhaupt möglichen* mit Hülfe der folgenden Sätze herstellen:

Ist $0 < M_\nu < M_{\nu+1}$, $\lim M_\nu = \infty$, so stellt jeder der drei Ausdrücke

---

178) Die Bezeichnung: $< \infty$ bedeutet: *nicht* ∞, also *unter einer endlichen Schranke.* Ferner bemerke man, dass lim hier im Sinne von $\overline{\underline{\lim}}$ steht, d. h. es braucht keineswegs *ein bestimmter Limes* von der fraglichen Beschaffenheit zu existieren.

179) Der Begriff der *„schwächeren“* Divergenz und Konvergenz lässt sich allgemeiner fassen. Vgl. a. a. O. p. 319. 327.

$$(22)\quad (a)\ M_{\nu+1} - M_\nu, \quad (b)\ \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_\nu}, \quad (c)\ \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}}$$

ein d_ν dar, und umgekehrt lässt sich jedes d_ν in der Form (a), (b) und im Falle $d_\nu < 1$ auch in der Form (c) darstellen[180]).

Ferner stellt der Ausdruck:

$$(23)\qquad \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} \cdot M_\nu}$$

ein c_ν dar — *vice versa.*

Dabei divergieren bezw. konvergieren die betreffenden Reihen um so *schwächer*, je *langsamer* M_ν mit ν zunimmt[181]).

Durch Einführung von M_ν^ϱ $(0 < \varrho < 1)$ an Stelle von M_ν erkennt man mit Hülfe der Beziehung:

$$(24)\qquad \frac{M_{\nu+1}^\varrho - M_\nu^\varrho}{M_{\nu+1}^\varrho \cdot M_\nu^\varrho} \sim \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} \cdot M_\nu^\varrho} \precsim \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}^{1+\varrho}}$$

jeden dieser Terme als allgemeines Glied einer *konvergenten* Reihe[182]). Sodann liefert die Substitution von $\lg_\varkappa M_\nu$ $(\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$ und (24), wenn man setzt:

$$(25)\qquad x \cdot \lg_1 x \cdot \lg_2 x \cdots \lg_\varkappa x = L_\varkappa(x),$$

mit Hülfe elementarer infinitärer Relationen die beiden unbegrenzt fortsetzbaren Folgen:

$$(26)\quad (a)\ \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_\varkappa(M_\nu)}, \quad (b)\ \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_\varkappa(M_{\nu+1}) \cdot (\lg_\varkappa M_{\nu+1})^\varrho} \quad \begin{pmatrix} \varrho > 0 \\ \varkappa = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$$

als allgemeine Glieder von beständig *schwächer* divergierenden bezw. konvergierenden Reihen. Diese Ausdrücke enthalten für $\varkappa = 0$ die

---

180) Die Vergleichung der Ausdrücke (22) (b) und (c) mit (a) zeigt unmittelbar, dass es zu *jeder divergenten* Reihe *schwächer* divergierende giebt. Setzt man $M_{\nu+1} - M_\nu = d_\nu$, $M_0 = 0$, also: $M_{\nu+1} = d_0 + d_1 + \cdots + d_\nu = s_\nu$, so folgt: Mit der Reihe $\sum d_\nu$ *divergiert* auch $\sum \frac{d_\nu}{s_{\nu+1}}$ (Satz von *Abel:* J. f. Math. 3 [1828], p. 81) und $\sum \frac{d_\nu}{s_\nu}$ (*Dini* a. a. O. p. 8).

181) Man kann geradezu M_ν als das *Mass* der Divergenz bezw. Konvergenz von $\sum (M_{\nu+1} - M_\nu)$ bezw. $\sum \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} \cdot M_\nu}$ bezeichnen. Vgl. *Du Bois-Reymond* a. a. O. p. 64.

182) Daraus folgt mit Anwendung der unmittelbar zuvor gebrauchten Bezeichnungen, dass $\sum \frac{d_\nu}{s_\nu^{1+\varrho}}$ *konvergiert.* Auch dieser Satz findet sich schon bei *Abel* (in der oben erwähnten nachgelassenen Note: 2, p. 198), ausserdem bei *Dini* (a. a. O. p. 8).

entsprechenden Anfangsterme in (22), (24), wenn noch $L_0(x) = \lg_0 x = x$ gesetzt wird. Auch kann man in dem Nenner des Ausdruckes (26b) $M_{\nu+1}$ ohne weiteres durch M_ν ersetzen, wenn man die für die Bildung von Kriterien sich zweckmässig erweisende Beschränkung $M_{\nu+1} \sim M_\nu$ einführt.

27. Fortsetzung. Hiernach ist die *Hauptform aller überhaupt möglichen Kriterien erster Art* in den beiden Beziehungen enthalten:

$$(27)\quad \begin{cases} \lim \dfrac{M_\nu}{M_{\nu+1} - M_\nu} \cdot a_\nu > 0: \; \textit{Divergenz}, \\[2ex] \lim \dfrac{M_{\nu+1} \cdot M_\nu}{M_{\nu+1} - M_\nu} \cdot a_\nu < \infty: \; \textit{Konvergenz}, \end{cases}$$

und es stellen die Beziehungen:

$$(28)\quad \begin{cases} \lim \dfrac{L_\varkappa(M_\nu)}{M_{\nu+1} - M_\nu} \cdot a_\nu \;\; > 0: \; \textit{Divergenz}, \\[2ex] \lim \dfrac{L_\varkappa(M_\nu) \cdot \lg_\varkappa^\varrho M_\nu}{M_{\nu+1} - M_\nu} \cdot a_\nu < \infty: \; \textit{Konvergenz} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} M_{\nu+1} \sim M_\nu \\ \varrho > 0 \end{pmatrix}$$

für $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$ eine *Skala* von immer *wirksameren* Kriterien dar. Die spezielle Wahl $M_\nu = \nu$ liefert alsdann für $\varkappa = 0$ das *Cauchy*'sche Kriterium (17), für $\varkappa = 1, 2, \ldots$ jene Serie, welche zuerst von *de Morgan*[183]), später von *Bonnet*[184]) aufgestellt wurde.

Die Kriterien (28) lassen sich auch durch die folgende Skala von *disjunktiven* Kriterien[185]) ersetzen:

$$(29)\quad \begin{cases} \text{(a)}\; \lim \dfrac{\lg \dfrac{M_{\nu+1} - M_\nu}{a_\nu}}{M_\nu} \begin{cases} < 0 \; \textit{Divergenz}, \\ > 0 \; \textit{Konvergenz}, \end{cases} \\[4ex] \text{(b)}\; \lim \dfrac{\lg \dfrac{M_{\nu+1} - M_\nu}{L_\varkappa(M_\nu) \cdot a_\nu}}{L_{\varkappa+1}(M_\nu)} \begin{cases} < 0 \; \textit{Divergenz}, \\ > 0 \; \textit{Konvergenz}. \end{cases} \quad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Spezialisiert man wiederum $M_\nu = \nu$, so liefert (a) das *Cauchy*'sche Fundam.-Kriterium (I), (b) für $\varkappa = 0$ das *Cauchy*'sche Kriterium (16), für $\varkappa = 1, 2, \ldots$ eine zuerst von *Bertrand*[186]) abgeleitete Serie.

---

183) Diff. and Integr. Calc. (1839), p. 326. *De Morgan* leitet daraus noch eine andere scheinbar allgemeinere Kriterienform ab, deren Tragweite indessen genau dieselbe ist, wie *Bertrand* und *Bonnet* (J. de Math. 7, p. 48; 8, p. 86) gezeigt haben.

184) J. de Math. 8 (1843), p. 78.

185) In etwas anderer Form abgeleitet von *Dini* a. a. O. p. 14.

186) J. de Math. 7 (1842), p. 37. — Eine elementarere Ableitung giebt *Paucker* (J. f. Math. 42 [1851], p. 139) und *Cauchy* (C. R. 1856, 2me sém., p. 638),

Schliesslich gestattet das in (a) enthaltene *Konvergenz*-Kriterium noch die folgende Verallgemeinerung:

$$(30)\qquad \lim \frac{\lg P_\nu \cdot a_\nu}{s_\nu} < 0: \textit{ Konvergenz,}^{187})$$

wo (P_ν) *jede beliebige positive* Zahlenfolge bedeuten kann und

$$s_\nu = P_0 + P_1 + \cdots + P_\nu.$$

Dieses *allgemeinste Konvergenzkriterium erster Art* bildet dann das Analogon zum *Kummer'schen Konvergenzkriterium zweiter Art.*

Durch Einsetzen des allgemeinen Ausdrucks (23) für C_ν^{-1} in das *Konvergenz*-Kriterium *zweiter* Art (21) ergiebt sich das merkwürdige Resultat, dass dasselbe auch auf die Form gebracht werden kann:

$$(31)\qquad \lim \left(D_\nu \cdot \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - D_{\nu+1}\right) > 0: \textit{ Konvergenz.}$$

Da *jede beliebige* positive Zahlenfolge (P_ν) entweder der Gattung (D_ν) oder der Gattung (C_ν) angehören muss, so findet man durch Kombination von (31) mit dem *Konvergenz*-Kriterium (21) unmittelbar das *Kummer*'sche Konvergenz-Krit. (18), mit dem *Divergenz*-Krit. (21) das *disjunktive Krit. zweiter Art:*

$$(32)\qquad \lim \left(D_\nu \cdot \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - D_{\nu+1}\right) \begin{cases} < 0: \textit{ Divergenz,} \\ > 0: \textit{ Konvergenz,} \end{cases}$$

in welches man nur aus (22a), (26a):

$$(33)\qquad D_\nu = \frac{1}{M_{\nu+1} - M_\nu} \quad \text{bezw.} \quad D_\nu = \frac{L_\varkappa(M_\nu)}{M_{\nu+1} - M_\nu} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots)$$

einzusetzen hat, um *Skalen* von immer wirksameren[188]) Kriterien zu erhalten. Für $M_\nu = \nu$ resultiert daraus der Reihe nach das *Cauchy'sche Fund.-Krit.* (II), das *Raabe'sche*[189]) und (abgesehen von einem un-

---

welcher bei dieser Gelegenheit mit Recht den Grundgedanken und die benützten Methoden für sich reklamiert.

187) Anders geschrieben:

$$\lim \left(P_\nu \cdot a_\nu\right)^{\frac{1}{s_\nu}} < 1.$$

188) Über den (hier nicht so unmittelbar wie bei den Kriterien erster Art ersichtlichen) Charakter der successive zu erzielenden *Verschärfung* s. meine Abhandl. a. a. O. p. 364.

189) Z. f. Phys. u. Math. von *Baumgartner* u. *Ettingshausen* 10 (1832), p. 63. Wieder entdeckt von *Duhamel,* J. de Math. 4 (1839), p. 214. Vgl. auch 6 (1841), p. 85. — Das fragliche Kriterium lässt sich auf die Form bringen:

$$\lim \nu \left(\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - 1\right) \begin{cases} < 1: \textit{ Divergenz,} \\ > 1: \textit{ Konvergenz.} \end{cases}$$

wesentlichen Unterschied in der Form) eine gleichfalls von *Bertrand*[190]) aufgestellte Kriterienfolge.

Neben der *Hauptform* (32) des *disjunkt. Krit. zweiter Art* habe ich als besonders einfach und von gleicher Tragweite noch die folgende hervorgehoben:

$$(34) \qquad \lim D_{\nu+1} \lg \frac{D_\nu a_\nu}{D_{\nu+1} a_{\nu+1}} \begin{cases} < 0: \text{ Divergenz}, \\ > 0: \text{ Konvergenz}. \end{cases}$$

Auch hier erweist es sich als zulässig, in dem *Konv.*-Krit. die D_ν durch die Terme einer ganz *beliebigen* positiven Zahlenfolge (P_ν) zu ersetzen, so dass ein Kriterium von gleicher Allgemeinheit wie das *Kummer'sche* resultiert.

28. Andere Kriterienformen. Die Lehre von den *Kriterien erster und zweiter Art* darf als vollkommen abgeschlossen gelten. Wenn nichtsdestoweniger von Zeit zu Zeit immer wieder „neue" solche Kriterien auftauchen, so handelt es sich dabei entweder um die Wiederentdeckung längst bekannter Kriterien oder um Spezialbildungen von untergeordneter Bedeutung.

Andererseits ergiebt sich die unbegrenzte Möglichkeit weiterer allgemeiner Kriterienbildungen, wenn man statt der a_ν oder $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ irgendwelche andere, passend gewählte Verbindungen $F(a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots)$ mit den entsprechenden der d_ν bezw. c_ν vergleicht. Auf diesem Prinzipe beruhen die von mir aufgestellten Kriterien *dritter Art* (Differenzenkrit.)[191]), sowie die *„erweiterten Kriterien zweiter Art"*, bei denen statt der Quotienten zweier *consecutiver* diejenigen zweier *beliebig entfernter* Glieder oder auch diejenigen zweier *Gliedergruppen* in Betracht gezogen werden. Ich gelange auf dem letzteren Wege zu dem folgenden *erweiterten Hauptkriterium zweiter Art*:

$$(35) \quad \begin{cases} \lim\limits_{x=\infty} \dfrac{(M_{x+h} - M_x)\cdot f(M_{x+h})}{(m_{x+h} - m_x)\cdot f(m_x)} > 1: \text{ Divergenz der Reihe } \sum f(\nu), \\ \lim\limits_{x=\infty} \dfrac{(M_{x+h} - M_x)\cdot f(M_x)}{(m_{x+h} - m_x)\cdot f(m_{x+h})} < 1: \text{ Konvergenz } \text{„ „ „} \end{cases}$$

---

190) J. de Math. 7, p. 43. Vgl. auch: *Bonnet,* J. de Math. 8, p. 89 und *Paucker,* J. f. Math. 42, p. 143. — Die *Gauss*'schen Kriterien lassen sich mit Hülfe des *Raabe*'schen und des *ersten Bertrand*'schen Kriteriums ableiten, wie *B.* a. a. O. p. 52 gezeigt hat; übrigens auch mit Hülfe der *Kummer*'schen Kriterien (*Kummer* a. a. O. p. 178). — Das analoge gilt für den etwas allgemeineren Fall: $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = 1 + \frac{c_1}{\nu} + \frac{c_2}{\nu^2} + \cdots$, nach *O. Schlömilch,* Z. f. Math. 10 (1865), p. 74.

191) A. a. O. p. 379.

wenn $M_x > m_x$ und M_x, m_x monoton zunehmende, $f(x)$ eine monoton abnehmende Funktion der positiven Veränderlichen x bedeuten. Aus demselben ergeben sich für $h = 1$ die von *G. Kohn*[192]) abgeleiteten Kriterien, für $\lim h = 0$ die durch formale Einfachheit und grosse Tragweite ausgezeichneten Kriterien von *Ermakoff*[193]):

$$(36) \qquad \lim_{x=\infty} \frac{M_x' \cdot f(M_x)}{m_x' \cdot f(m_x)} \begin{cases} > 1: \textit{ Divergenz}, \\ < 1: \textit{ Konvergenz}, \end{cases}$$

Die letzteren habe ich neuerdings in der Weise verallgemeinert, dass $f(x)$ nicht mehr als *monoton* vorausgesetzt zu werden braucht[194]).

29. Tragweite der Kriterien erster und zweiter Art. Das Anwendungsgebiet irgend eines Kriteriums *zweiter Art* ist naturgemäss ein merklich *engeres*, als dasjenige des entsprechenden (d. h. mit demselben D_ν, C_ν gebildeten) Kriteriums *erster Art*[195]). *Cauchy* hat auf Grund des in Nr. **18** Gl. (9) erwähnten Grenzwertsatzes den Zusammenhang zwischen seinen Fundam.-Krit. erster und zweiter Art genauer festgestellt. Das betreffende Resultat lässt sich in folgender Weise verallgemeinern: Liefert das disjunktive Kriterium *zweiter Art* (32) für $D_\nu^{-1} = M_{\nu+1} - M_\nu$ eine *Entscheidung* oder *versagt* es durch Auftreten des *Grenzwertes Null*, so gilt das gleiche von dem Kriterium *erster Art* (29 a). Dagegen *kann* das *letztere* noch eine Entscheidung liefern, wenn das *erstere* durch das Auftreten von *Unbest.-Grenzen versagt*[196]).

Die Grenzen für die Tragweite der gewöhnlichen *Kriterienpaare erster Art* (20) ergeben sich aus der Bemerkung, dass dieselben nicht nur versagen, wenn geradezu:

$$(A) \qquad \lim D_\nu \cdot a_\nu = 0, \quad \lim C_\nu \cdot a_\nu = \infty,$$

sondern auch dann, wenn jene Grenzwerte überhaupt *nicht existieren* und *gleichzeitig:*

$$(B) \qquad \underline{\lim}\, D_\nu a_\nu = 0, \quad \overline{\lim}\, C_\nu \cdot a_\nu = \infty.$$

---

192) Archiv f. Math. 67 (1882), p. 82. 84.

193) *Darboux* Bulletin 2 (1871), p. 250; 18 (1883), p. 142. — Das für $M_x = e^x$, $m_x = 1$ resultierende Kriterium: $\lim \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} \gtrless 1$ besitzt z. B. dieselbe Tragweite, wie die *ganze Skala* der logarithmischen Kriterien.

194) Chicago Papers p. 328. Daselbst auch ein kürzerer, auf der Theorie der bestimmten Integrale beruhender Beweis (Verbesserung des ursprünglich von *W. Ermakoff* gegebenen) und genauere Feststellung der Beziehung zwischen $\sum_m^\infty {}_\nu f(\nu)$ und $\int_m^\infty f(x)\,dx$.

195) Vgl. a. a. O. p. 308.

196) *Pringsheim* a. a. O. p. 376.

Wählt man, wie bei den in der Praxis ausschliesslich angewendeten Kriterien geschieht, die D_ν, C_ν *monoton* zunehmend[197]), so erstreckt sich ihre Anwendbarkeit offenbar nur auf solche a_ν, die entweder geradezu *monoton* oder doch „*im wesentlichen*" *monoton* abnehmen, d. h. *so*, dass die etwaigen Schwankungen innerhalb gewisser Grenzen bleiben.

30. Die Grenzgebiete der Divergenz und Konvergenz. Das erste Beispiel einer *konvergenten* Reihe, für welche die gewöhnliche logarithmische (*Bonnet*'sche) Skala nach dem Modus von Gl. (A) *versagt*, hat *Du Bois-Reymond* konstruiert[198]). Ich habe sodann einen etwas allgemeineren Reihentypus von durchsichtigerem Bildungsgesetz angegeben, welcher zugleich auch *divergente* Reihen von der fraglichen Beschaffenheit liefert[199]). Die hierbei benützte Methode lässt sich, wie *Hadamard* gezeigt hat[200]), leicht auf jede *beliebige* Kriterienskala übertragen.

Es giebt aber auch unendlich viele *monotone* a_ν, für welche eine beliebig gewählte Kriterienskala im Sinne der Gleichungen (B) vollkommen versagen muss. Die von mir in dieser Richtung angestellten Untersuchungen[201]) führen zu dem folgenden allgemeinen Satze: „Wie *stark* auch $\sum C_\nu^{-1}$ *konvergieren* möge, so giebt es stets monotone *divergente* Reihen $\sum a_\nu$, für welche: $\underline{\lim}\, C_\nu a_\nu = 0$. Wie *langsam* auch m_ν mit ν ins Unendliche wachsen möge, so existieren stets monotone *konvergente* Reihen $\sum a_\nu$, für welche: $\overline{\lim}\, \nu \cdot m_\nu \cdot a_\nu = \infty$; dagegen hat man stets: $\lim \nu \cdot a_\nu = 0$." Es giebt also überhaupt kein M_ν von *beliebig hohem Unendlich*, so dass $\lim M_\nu \cdot a_\nu > 0$ eine *notwendige* Bedingung für die *Divergenz* von $\sum a_\nu$ bildet. Andererseits bildet zwar die Beziehung $\lim \nu \cdot a_\nu = 0$ eine *notwendige*[202]) Bedingung für die

197) Z. B.
$$D_\nu = \nu, \quad \nu \lg \nu, \quad \ldots$$
$$C_\nu = \nu^{1+\varrho}, \quad \nu \cdot (\lg \nu)^{1+\varrho}, \quad \ldots$$
(*Bonnet*'sche Kriterien: s. Nr. **27**).

198) J. f. Math. 76 (1873), p. 88.

199) A. a. O. p. 353 ff.

200) Acta Math. 18 (1894), p. 325.

201) A. a. O. p. 347. 356. Math. Ann. 37 (1890), p. 600. Münch. Ber. 26 (1896), p. 609 ff.

202) Dass dieselbe für die Konvergenz stets auch *hinreiche*, ist von *Th. Olivier* (J. f. Math. 2, 1827, p. 34) behauptet, von *Abel* (a. a. O. 3, p. 79. Oeuvres 1, p. 399) durch den Hinweis auf die Reihe $\sum \frac{1}{\nu \lg \nu}$ widerlegt worden. *Kummer* hat dagegen gezeigt, dass jene Bedingung für die Konvergenz allemal dann hin-

Konvergenz von $\sum a_\nu$, dagegen *keine*[203]) Beziehung von der Form: $\lim \nu \cdot m_\nu \cdot a_\nu = 0$ bei *beliebig schwachem Unendlich* von $\lim m_\nu$. Mit anderen Worten: Es existiert, auch wenn man sich auf die Betrachtung *monotoner*[204]) a_ν beschränkt, überhaupt *keine Schranke* der *Divergenz*, d. h. *keine* Zahlenfolge (c_ν), so dass von irgend einem bestimmten ν an *beständig* $a_\nu > c_\nu$ sein müsste, wenn $\sum a_\nu$ *divergiert.* Und es bildet zwar jede Zahlenfolge von der Form $\left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right)$, wo $\varepsilon > 0$, eine *Schranke* der *Konvergenz* (d. h. es muss von irgend einem bestimmten ν an *beständig* $a_\nu < \frac{\varepsilon}{\nu}$ sein, wenn $\sum a_\nu$ *konvergieren* soll), dagegen *keine* Zahlenfolge von der Form $\left(\frac{\varepsilon_\nu}{\nu}\right)$, wie *langsam* auch ε_ν mit $\frac{1}{\nu}$ der *Null* zustreben möge.

Hiernach beruht die von *Du Bois-Reymond* eingeführte[205]) Fiktion einer *„Grenze zwischen Konvergenz und Divergenz"* von vornherein auf einer falschen Grundanschauung. Aber auch wenn man dieselbe in wesentlich engerem Sinne auffasst, nämlich als präsumtive Grenze zwischen irgend zwei *bestimmten* divergenten und konvergenten Skalen, wie: $\frac{1}{L_\varkappa(\nu)}$ und $\frac{1}{L_\varkappa(\nu)\cdot(\lg_\varkappa^\nu)^\varrho}$ $(\varkappa = 1, 2, 3, \ldots; \varrho < 0)$, erscheint sie unhaltbar, wie ich des näheren nachzuweisen versucht habe[206]).

31. Bedingte und unbedingte Konvergenz. Eine Reihe mit *positiven* und *negativen* Gliedern u_ν heisst *absolut* konvergent, wenn $\sum |u_\nu|$ *konvergiert;* dass sie unter dieser Voraussetzung wirklich auch *selbst* allemal *konvergiert,* ist, wie schon in Nr. 23 bemerkt wurde, von *Cauchy* bewiesen worden. Dass es aber auch *konvergente* Reihen $\sum u_\nu$ giebt, für welche $\sum |u_\nu|$ *divergiert,* hatte bereits das Beispiel

---

reicht, wenn $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ sich nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{\nu}$ entwickeln lässt (J. f. Math. 13, 1835, p. 178).

203) Man findet vielfach den *falschen* Satz (vgl. meine Conv.-Theorie a. a. O. p. 343), dass *allgemein:* $\lim D_\nu \cdot a_\nu = 0$ eine *notwendige* Bedingung für die *Konvergenz* bilde, während für $D_\nu \succ \nu$ in Wahrheit nur: $\underline{\lim}\, D_\nu \cdot a_\nu = 0$ zu sein braucht. Diese einzig richtige Formulierung giebt schon *Abel* in der oben zitierten nachgelassenen Note: Oeuvres 2, p. 198.

204) Für *nicht-monotone* a_ν erscheint die Existenz derartiger Konvergenz- und Divergenzschranken *a priori* ausgeschlossen; s. meine Conv.-Theorie a. a. O. p. 344. 357.

205) Münch. Abh. 12 (1876), p. XV. Math. Ann. 11 (1877), p. 158 ff.

206) Münch. Ber. 27 (1897), p. 203 ff.

der *Leibniz*'schen Reihe[207]): $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ gelehrt. Auch hat *Leibniz* allgemein die *Konvergenz* jeder Reihe von der Form $\sum(-1)^\nu \cdot a_\nu$ (wo $a_\nu \geqq a_{\nu+1} > 0$, $\lim a_\nu = 0$) erwiesen[208]). An derartige Reihen, speziell an $\sum(-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu+1}$, hat *Cauchy* die wichtige Bemerkung geknüpft[209]), dass *ihre Konvergenz wesentlich von der Anordnung der Glieder* abhängt, derart, dass sie bei gewissen Umordnungen *divergent* werden. Hiermit hat er diejenige Eigenschaft aufgedeckt, welche man heute als *bedingte* Konvergenz zu bezeichnen pflegt. *Lej.-Dirichlet* hat hinzugefügt[210]), dass bei gewissen Umordnungen die *Konvergenz* zwar erhalten bleibt, die *Summe* dagegen eine Veränderung erleidet; und er hat insbesondere scharf hervorgehoben, dass eine *absolut* konvergente Reihe stets *unbedingt*, d. h. unabhängig von der Anordnung der Glieder gegen dieselbe Summe konvergiert[211]). Durch *Cauchy* und *Dirichlet* war immerhin nur so viel erwiesen worden, dass *gewisse* nicht-absolut konvergierende Reihen nur *bedingt* konvergieren; dass dies in Wahrheit bei *jeder* nicht-absolut konvergierenden Reihe der Fall sein muss, lehrte erst ein von *Riemann* bewiesener Satz[212]), wonach sich zwei *beliebige divergente* Reihen von der Form $\sum a_\nu$, $\sum(-b_\nu)$ ($a_\nu > 0$, $b_\nu > 0$, $\lim a_\nu = \lim b_\nu = 0$) zu einer *konvergenten* Reihe mit *beliebig vorzuschreibender Summe* vereinigen lassen[213]). Damit erscheint die vollkommene Äquivalenz von

---

207) De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum. Acta erud. Lips. 1682. (Opera, Ed. Dutens 3, p. 140.) Die Reihe findet sich schon bei *James Gregory*. Vgl. *Reiff* a. a. O. p. 45. *M. Cantor* 3, p. 72.

208) Brief an *Joh. Bernoulli*, 1. Jan. 1714. (Commerc. epist. 2, p. 329.)

209) Résum. anal. p. 57.

210) Berl. Abh. 1837, p. 48. (Ges. W. 1, p. 318.)

211) Ausdrücklich bewiesen wurde dies wohl zum ersten Male von *W. Scheibner:* Über unendliche Reihen und deren Konvergenz. Gratulationsschrift, Lpzg. 1860, p. 11. — Der Ausdruck *„unbedingte"* Konvergenz dürfte von *Weierstrass* stammen (J. f. Math. 51 [1856], p. 41). — Einzelne deutsche und fast alle französischen und englischen Autoren bezeichnen die *bedingt* konvergenten Reihen als *semikonvergent.* Dieser Ausdruck ist an sich wenig passend (denn der Zusatz *„semi"* bezeichnet nicht sowohl einen besonderen *Modus,* als vielmehr die partielle *Negation* der Konvergenz) und erscheint auch schon aus dem Grunde wenig empfehlenswert, weil er (bezw. der damit synonyme *halbkonvergente* Reihe, série *demi-convergente*) nach dem Vorgange von *Legendre* (Exerc. de calc. integr. 1, p. 267) bereits eine völlig andere Bedeutung erlangt hat. Vgl. Nr. **38**.

212) Gött. Abh. 13 (1867). (Ges. W. p. 221.)

213) *Dini* hat bemerkt, dass man in analoger Weise auch eigentliche oder uneigentliche *Divergenz* erzeugen kann; Ann. di Mat. (2) 2 (1868), p. 31.

absoluter und *unbedingter*, *nicht-absoluter* und *bedingter* Reihenkonvergenz endgültig festgestellt.

32. Wertveränderungen bedingt konvergenter Reihen. Für die *Veränderung*, welche die harmonische Reihe

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu+1} = \lg 2$$

erleidet, falls man auf je p positive Glieder je q negative folgen lässt, wurde von *Mart. Ohm* (mit Hülfe der Integralrechnung) der Wert $\frac{1}{2} \lg \frac{p}{q}$ gefunden[214]. Eine unmittelbare Verallgemeinerung dieses Resultates bildet der von *Schlömilch* bewiesene[215] Satz, dass der Reihe $\sum (-1)^\nu \cdot a_{\nu+1}$ bei analoger Umstellung die Wertveränderung $(\lim \nu \cdot a_\nu) \cdot \frac{1}{2} \lg \frac{p}{q}$ zukommt. Ich habe in ganz allgemeiner Weise untersucht[216], welche Wertveränderungen eine aus den beiden divergenten Bestandteilen $\sum a_\nu$, $\sum(-b_\nu)$ zusammengesetzte konvergente Reihe erleidet, wenn die *relative Häufigkeit* der a_ν und $(-b_\nu)$ (mit Festhaltung der ursprünglichen Reihenfolge innerhalb der beiden einzelnen Gruppen (a_ν) und (b_ν)) in beliebig vorgeschriebener Weise abgeändert wird, und umgekehrt, welche derartige Umordnung erforderlich ist, um eine beliebig vorgeschriebene Wertveränderung zu erzeugen. Die hierzu erforderliche und für den Fall $\lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = 1$ vollständig durchführbare Untersuchung „*singulärer Reihenreste*" von der Form: $\lim\limits_{n=\infty} \sum\limits_{n+1}^{n+\varphi(n)}{}^{\nu} a_\nu$ lehrt, dass die fraglichen Wertveränderungen nicht von dem speziellen Bildungsgesetze der a_ν, sondern lediglich von deren Verhalten für $\lim \nu = \infty$ abhängen: Ist $\lim \sum\limits_{n+1}^{n+\varphi(n)}{}^{\nu} a_\nu = a$ (endlich), so wird auch $\lim \sum\limits_{n+1}^{n+\varphi(n)}{}^{\nu} a'_\nu = a$, falls $a'_\nu \cong a_\nu$; dagegen $\lim \sum\limits_{n+1}^{n+\varphi(n)}{}^{\nu} a'_\nu = 0$ bezw. $= \infty$, falls $a'_\nu \prec a_\nu$ bezw. $\succ a_\nu$. Das zur Erzeugung eines gewissen Restwertes (incl. 0 und ∞) erforderliche $\varphi(n)$ (d. h. schliesslich das zu einer gewissen *Wertveränderung* führende *Umordnungsgesetz*)

---

214) De nonnullis seriebus summandis. Antr.-Programm, Berlin 1839. — Eine elementare Herleitung bei *H. Simon,* Die harm. Reihe. Dissert. Halle 1886.

215) Z. f. Math. 18 (1873), p. 520.

216) Math. Ann. 22 (1883), p. 455 ff.

hängt dann in genau angebbarer Weise von der infinitären Beschaffenheit der a_ν ab. Ist $a_\nu \succ \frac{1}{\nu}$, so erleidet die Reihensumme die Änderung $0, a, \infty$, je nachdem $\lim \varphi(n) \cdot a_n = 0, a, \infty$. Das analoge findet im Falle: $a_\nu \underline{\backsim} \frac{g}{\nu}$ statt, mit dem einzigen Unterschiede, dass die Änderung, falls $\lim \varphi(n) \cdot a_n = a$, hier den Wert: $\frac{1}{g} \lg(1 + ag)$ annimmt. Ist endlich $a_\nu \prec \frac{1}{\nu}$, so liefern die *beiden* Annahmen $\lim \varphi(n) \cdot a_n = 0$ und $= a$ *keine* Wertveränderung; im Falle: $\lim \varphi(n) \cdot a_n = \infty$ resultiert dann eine bestimmte endliche oder unendlich grosse Änderung, je nach der besonderen Art des Unendlichwerdens von $\lim \varphi(n) \cdot a_n$.[217])

Einen etwas allgemeineren Typus von Umordnungen, welche die Summe einer bedingt konvergierenden Reihe *unverändert* lassen, hat *E. Borel* betrachtet[218]).

33. Kriterien für eventuell nur bedingte Konvergenz. Für die Feststellung der *einfachen*, d. h. eventuell nur *bedingten* Konvergenz einer Reihe mit positiven und negativen Gliedern besitzt man keine allgemeinen Kriterien. Das *Mass der Gliederabnahme* ist hier für die Beurteilung der Konvergenz ganz ohne Belang, wie das *Leibniz*'sche Kriterium für alternierende Reihen (Nr. **31**) erkennen lässt: $\sum (-1)^\nu \cdot a_\nu$ konvergiert, auch wenn die a_ν *beliebig langsam* monoton der Null zustreben. Ein in vielen Fällen brauchbares Hülfsmittel giebt die von *Abel*[219]) herrührende Transformation („partielle Summation"):

$$\sum_0^n {}^\nu u_\nu v_\nu = \sum_0^{n-1} {}^\nu (u_\nu - u_{\nu+1}) \cdot V_\nu + u_n V_n \tag{37}$$

$$(\text{wo: } V_\nu = v_0 + v_1 + \cdots + v_\nu),$$

welche für $\lim n = \infty$ den folgenden Konvergenzsatz liefert: „Ist $\sum (u_\nu - u_{\nu+1})$ absolut und $\sum v_\nu$ überhaupt konvergent, so konvergiert $\sum u_\nu v_\nu$ zum mindesten in der vorgeschriebenen Anordnung. Dies gilt auch, wenn $\sum v_\nu$ innerhalb endlicher Grenzen oscilliert, sofern noch $\lim u_\nu = 0$ ist." Die Anwendung der *Abel*'schen Transformation für derartige Konvergenzbetrachtungen rührt von *Dirichlet* her[220]), der obige Satz in etwas speziellerer Fassung von *Dedekind*[221]); die hier

---

217) Näheres a. a. O. p. 496 ff.

218) Bull. d. Sc. (2) 14 (1890), p. 97.

219) J. f. Math. 1 (1826), p. 314. Oeuvres 1, p. 222.

220) Vorl. über Zahlentheorie, herausgeg. von *R. Dedekind*, 3. Aufl. (1879), § 101.

221) Ebenda, Supplem. 9, § 143.

gegebene findet sich nebst einigen einfachen Modifikationen bei *Du Bois-Reymond*[222]).

Aus diesem Satze folgt z. B. unmittelbar die zuerst von *Malmsten*[223]) anderweitig bewiesene Konvergenz von $\sum a_\nu \cdot \cos \nu x$ (excl. $x = \pm 2k\pi$) und $\sum a_\nu \cdot \sin \nu x$, wenn die a_ν *monoton* der Null zustreben[224]), sowie diejenige einiger anderer trigonometrischer Reihen[225]). Auch lässt sich unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen der Konvergenzbeweis für die *Fourier*'sche Reihe auf ihn zurückführen[226]).

Die *Abel*'sche Transformation in Verbindung mit der in Nr. **26** hervorgehobenen Konvergenz der Reihe $\sum \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1} \cdot M_\nu^\varrho}$ ist von mir benützt worden[227]), um ein sehr allgemeines Kriterium für die Beurteilung der sog. *Dirichlet*'schen Reihen: $\sum k_\nu \cdot M_\nu^{-\varrho}$ (k_ν beliebig, $\varrho > 0$) zu gewinnen. Spezielle Fälle desselben sind bereits früher von *Dedekind*[228]) und *O. Hölder*[229]) auf anderen Wegen gefunden worden.

Eine nützliche Verallgemeinerung des gewöhnlichen Konvergenzsatzes über alternierende Reihen ergiebt sich aus den *Weierstrass*'schen Konvergenzuntersuchungen[230]). Darnach konvergiert $\sum (-1)^\nu \cdot a_\nu$ noch *bedingt*, wenn $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{\varkappa}{\nu} + \frac{\lambda}{\nu^2} + \cdots$ und $0 < \varkappa \leqq 1$.[231])

Die wichtigste Kategorie von Reihen, welche generell nur *bedingt* zu konvergieren brauchen, bilden die *Fourier'schen Reihen*[232]). Die allgemeinen Untersuchungen über ihre Konvergenz und Divergenz be-

---

222) Antr.-Programm, p. 10.

223) Mit der unnötigen Einschränkung $\lim \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = 1$. Nova acta Upsal. 12 (1844), p. 255. Ohne jene Einschr. und einfacher: *Hj. Holmgren,* J. de Math. 16 (1851), p. 186.

224) *G. Björling* (J. de Math. 17 (1852), p. 470) hält fälschlicher Weise die Bedingungen: $a_\nu > 0$, $\lim a_\nu = 0$ schon für ausreichend.

225) *Du Bois-Reymond* a. a. O. p. 12. 17.

226) Desgl. p. 13.

227) Math. Ann. 37 (1886), p. 41.

228) Vorl. über Zahlentheorie, Suppl. 9, § 144.

229) Math. Ann. 20 (1882), p. 545.

230) J. f. Math. 51 (1856), p. 29; Werke 1, p. 185.

231) Dies gilt auch für *komplexe* a_ν, falls der reelle Teil von $\varkappa$ der im Text angegebenen Bedingung genügt. — Für $\varkappa > 1$ *konvergiert* $\sum a_\nu$ *absolut* (am einfachsten nach dem *Raabe*'schen Kriterium), für $\varkappa \leqq 0$ *divergiert* sie. — Vgl. auch *Stolz,* Allg. Arithm. 1, p. 268.

232) Vgl. II A 8.

ruhen auf der Darstellung von s_n durch ein bestimmtes Integral und dessen Discussion für $\lim n = \infty$.

34. Addition und Multiplikation unendlicher Reihen. Für die *Addition* bezw. *Subtraktion* zweier konvergenter Reihen ergiebt sich unmittelbar aus der Beziehung: $\lim a_\nu \pm \lim b_\nu = \lim (a_\nu \pm b_\nu)$ (Nr. **17**, Gl. (15)) die Regel:

$$(38)\qquad \sum_0^\infty{}^\nu u_\nu \pm \sum_0^\infty{}^\nu v_\nu = \sum_0^\infty{}^\nu (u_\nu \pm v_\nu).$$

Für die *Multiplikation* hat *Cauchy* den Satz aufgestellt:

$$(39)\quad \Big(\sum_0^\infty{}^\nu u_\nu\Big)\cdot\Big(\sum_0^\infty{}^\nu v_\nu\Big) = \sum_0^\infty{}^\nu w_\nu \quad (w_\nu = u_0 v_\nu + u_1 v_{\nu-1} + \cdots + u_\nu u_0),$$

unter der Voraussetzung, dass $\sum u_\nu$, $\sum v_\nu$ *absolut konvergieren*[233]), und mit dem ausdrücklichen Hinweise, dass die Formel für *nicht-absolut* konvergierende Reihen *versagen* kann[234]). *Abel* hat gezeigt, dass dieselbe *gültig* ist, sobald (ausser den selbstverständlich als *konvergent* vorausgesetzten Reihen $\sum u_\nu$, $\sum v_\nu$) die Reihe $\sum w_\nu$ überhaupt *konvergiert*[235]). Da dieser Konvergenzbeweis (abgesehen von dem durch *Cauchy* erledigten Falle der *absoluten* Konvergenz von $\sum u_\nu$, $\sum v_\nu$) jedesmal besonders erbracht werden muss, so erscheint es keineswegs überflüssig, dass *F. Mertens* die Gültigkeit des Multiplikationstheorems (39) auf den Fall ausgedehnt hat, dass nur *eine* der beiden Reihen $\sum u_\nu$, $\sum v_\nu$ *absolut* konvergiert[236]). Der Fall, dass *beide* Reihen nur *bedingt* konvergieren, ist von mir des näheren betrachtet worden[237]). Besitzt die eine der beiden Reihen, etwa $\sum u_\nu$, die Eigenschaft, dass $\sum |u_\nu + u_{\nu+1}|$ konvergiert, so erscheint die Bedingung $\lim w_\nu = 0$ als *notwendig und hinreichend* für die Gültigkeit der Formel (39); daraus ergeben sich insbesondere einfache Kriterien für den Fall

233) Anal. algébr. p. 147.

234) Ebenda p. 149 — wohl die erste Stelle, an welcher das *verschiedene* Verhalten *absolut* und *nicht-absolut* konvergierender Reihen hervorgehoben wird.

235) J. f. Math. 1 (1826), p. 318. (Oeuvres 1, p. 226.) *Abel*'s Beweis beruht auf der Betrachtung der Reihen $\sum u_\nu x^\nu$, $\sum v_\nu x^\nu$ für $\lim x = 1$, also auf einem *stetigen* Grenzübergange. Einen Beweis *ohne* Benützung dieses der Funktionenlehre angehörigen Hülfsmittels hat *E. Cesaro* gegeben: Bull. d. Sc. (2) 14 (1890), p. 114. — Ähnlich *Jordan*, Cours d'Anal. 1, p. 282.

236) J. f. Math. 79 (1875), p. 182. Anderer Beweis von *W. V. Jensen*, Nouv. Corresp. math. 1879, p. 430.

237) Math. Ann. 21 (1883), p. 327.

zweier *alternierender* Reihen mit *monotonen* Gliedern[238]. Unter der allgemeineren Annahme, dass $\sum u_\nu$ *absolut* konvergent wird, wenn man die u_ν in Gruppen von p_ν Gliedern (p_ν constant oder veränderlich, aber endlich bleibend) zusammenfasst, habe ich eine *hinreichende* Bedingung angegeben, welche den *Cauchy*'schen und *Mertens*'schen Satz als speziellen Fall umfasst. Für den Fall $p_\nu = 2$ hat sodann *A. Voss*[239], für beliebige *constante*[240] und *endlich-veränderliche*[241] p_ν *F. Cajori* die *notwendigen und hinreichenden* Bedingungen aufgestellt.

35. Doppelreihen. Die Additionsformel (38) ist zwar ohne weiteres auf eine beliebige *endliche* Anzahl von Reihen:

$$\sum_0^\infty{}_\nu\, u_\nu^{(\mu)} \quad (\mu = 0, 1, \dots m),$$

aber nicht auf den Fall $m = \infty$ übertragbar, d. h. für die Gültigkeit der Beziehung:

$$\sum_0^\infty{}_\mu \Big(\sum_0^\infty{}_\nu\, u_\nu^{(\mu)}\Big) = \sum_0^\infty{}_\nu \Big(\sum_0^\infty{}_\mu\, u_\nu^{(\mu)}\Big) \tag{40}$$

erscheint es keineswegs als *hinreichend*, dass die *linke* Seite einen bestimmten Sinn hat, also schlechthin *konvergiert*. *Cauchy* hat gezeigt, dass Gl. (40) gilt, wenn auch $\sum_0^\infty{}_\mu \Big(\sum_0^\infty{}_\nu\, |u_\nu^{(\mu)}|\Big)$ konvergiert[242]; das Multiplikationstheorem (39) für zwei *absolut* konvergente Reihen erweist sich als spezieller Fall dieses Satzes[243]. Zugleich hat *Cauchy* an die Betrachtung eines *zweifach-unendlichen Schemas* von Termen $u_\nu^{(\mu)}$ (wobei etwa der Index μ die *Zeilen*, der Index ν die *Kolonnen* charakterisieren mag) den Begriff der *Doppelreihe* geknüpft. Setzt man $\sum_0^m{}_\mu \sum_0^n{}_\nu\, u_\nu^{(\mu)} = s_n^{(m)}$, so heisst die aus den Gliedern $u_\nu^{(\mu)}$ gebildete *Doppelreihe* $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\nu^{(\mu)}$ *konvergent* und s ihre *Summe*, wenn in dem

---

238) Eine Anwendung auf die Multiplikation zweier *trigonometrischen* Reihen s. Math. Ann. 26 (1886), p. 157.

239) Math. Ann. 24 (1884), p. 42.

240) Am. J. of Math. 15 (1893), p. 339.

241) N. Y. Bull. (2), 1 (1895), p. 180. — *Cajori* giebt eine kurze Analyse der von mir und *Voss* gefundenen Resultate: N. Y. Bull. 1 (1892), p. 184.

242) Anal. algébr. p 541. — Eine allgemeinere, für *Potenzreihen* geltende Form einer hinreichenden Bedingung, die von *Weierstrass* herrührt (Werke 2, p. 205), ist wesentlich *funktionentheoretischer* Natur. Vgl. II B 1.

243) *Cauchy* a. a. O. p. 542.

Nr. **20** dieses Artikels angegebenen Sinne: $\lim\limits_{m,n=\infty} s_n^{(m)} = s$ ist[244]); (in jedem anderen Falle heisst sie *divergent* und zwar *eigentlich* divergent, wenn: $\lim\limits_{m,n=\infty} s_n^{(m)} = +\infty$ bezw. $-\infty$). Auf Grundlage dieser Definition ist die Lehre von den Doppelreihen späterhin von *Stolz*[245]) und neuerdings von mir[246]) ausführlicher behandelt worden. *Stolz* hebt vor allem mit Recht hervor, dass jene Konvergenzdefinition in keiner Weise die *Konvergenz* irgend einer einzelnen *Zeile* oder *Kolonne* involviere; es braucht nicht einmal für irgend einen einzigen bestimmten Wert μ (bezw. ν): $\lim\limits_{\nu=\infty} u_\nu^{(\mu)} = 0$ (bezw. $\lim\limits_{\mu=\infty} u_\nu^{(\mu)} = 0$) zu sein, während allerdings bei einer konvergenten Doppelreihe stets: $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} u_\nu^{(\mu)} = 0$ sein muss. Ebensowenig kann aus der Konvergenz der einzelnen Zeilen (Kolonnen) und der von ihren Summen gebildeten Reihe, ja nicht einmal aus der Existenz der Gleichung (40)[247]) die *Konvergenz der Doppelreihe* gefolgert werden. Dagegen gilt der Satz: „Konvergiert ausser der Doppelreihe auch jede einzelne Zeile (Kolonne), so hat man:

$$\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\nu^{(\mu)} = \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\nu^{(\mu)} \quad \Big(\text{bezw.} = \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\nu^{(\mu)}\Big).\text{“}$$

Man kann die Terme einer Doppelreihe auch als einfach-unendliche Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ ordnen, am bequemsten nach „*Diagonalen*“, d. h. wenn man setzt: $w_\nu = u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \cdots + u_\nu^{(0)}$. Ist dann $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\nu^{(\mu)} = s$

---

244) Dies *scheint* wenigstens der Sinn der ihrem Wortlaute nach nicht ganz klaren *Cauchy*'schen Definition (a. a. O. p. 538). Freilich ist alsdann die von *Cauchy* daraus gezogene Folgerung, dass jede *Zeile* und jede *Kolonne* eine *konvergente* Reihe bilde, *unrichtig*. *Cauchy* dürfte dies später selbst bemerkt haben, da er in den Résum. anal. p. 56 eine *andere* Definition zu Grunde legt; dieselbe erscheint mir jedoch teils zu eng (da sie in Wahrheit nur den Fall der *unbedingten* Konvergenz umfasst), teils zu kompliziert und wenig prägnant (wegen der grossen Unbestimmtheit des a. a. O. mit s_n bezeichneten Ausdrucks).

245) Math. Ann. 24 (1884), p. 157 ff.

246) Münch. Ber. 27 (1897), p. 101 ff.

247) Auch wenn $\sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\nu^{(\mu)}$, $\sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\nu^{(\mu)}$ *beide* konvergieren, brauchen sie *nicht* einander *gleich* zu sein. (Vgl. *F. Arndt,* Arch. f. Math. 11 [1848], p. 319. *Pringsheim* a. a. O. p. 119.) In diesem Falle ist die betreffende *Doppelreihe* allemal *divergent.*

und $u_\nu^{(\mu)} \geqq 0$, so hat man allemal auch $\sum_0^\infty{}^\nu w_\nu = s$. Sind die $u_\nu^{(\mu)}$ beliebig, aber so beschaffen, dass die einzelnen Zeilen und Kolonnen konvergieren oder innerhalb *endlicher* Grenzen oscillieren, so kann $\sum w_\nu$ nur *oscillieren* oder *konvergieren*, und im letzteren Falle ist wiederum $\sum_0^\infty{}^\nu w_\nu = s.$[248])

Konvergiert die Doppelreihe $\sum^{\mu,\nu} |u_\nu^{(\mu)}|$, so konvergiert auch stets $\sum^{\mu,\nu} u_\nu^{(\mu)}$ und heisst dann wiederum *absolut* konvergent. Zugleich konvergiert jede Zeile (Kolonne), und es konvergiert die Reihe der Zeilen- (Kolonnen-) Summen, desgleichen diejenigen der Diagonalen. Dieses Resultat lässt sich noch folgendermassen verallgemeinern: „Von den vier Gleichungen

$$(41)\qquad \sum_0^\infty{}^{\mu,\nu} u_\nu^{(\mu)} = s, \quad \sum_0^\infty{}^\mu \sum_0^\infty{}^\nu u_\nu^{(\mu)} = s, \quad \sum_0^\infty{}^\nu \sum_0^\infty{}^\mu u_\nu^{(\mu)} = s, \quad \sum_0^\infty{}^\nu w_\nu = s$$

zieht *jede* die drei anderen nach sich, wenn die betreffende Reihe bei Vertauschung der $u_\nu^{(\mu)}$ mit $|u_\nu^{(\mu)}|$ konvergent bleibt"[249]).

Jede *absolut* konvergente Doppelreihe ist auch *unbedingt* konvergent — *vice versa*[250]).

Für die Feststellung der *absoluten* Konvergenz lassen sich analog wie bei den einfachen Reihen mit Hülfe des Prinzipes der Reihenvergleichung allgemeine Kriterien aufstellen. Als wesentlich ist hierbei hervorzuheben, dass für die *Divergenz* der Doppelreihe $\sum^{\mu,\nu} a_\nu^{(\mu)}$ (wo: $a_\nu^{(\mu)} \geqq 0$) schon die *Divergenz einer einzigen Zeile* (Kolonne) *ausreicht*, aber *keineswegs notwendig* ist, während umgekehrt für die *Konvergenz* der Doppelreihe die *Konvergenz aller möglichen Zeilen* (Kolonnen) *notwendig* ist, aber *nicht ausreicht.* Infolgedessen erscheint es zweckmässig, die *Konvergenz-* und *Divergenz*kriterien *wesentlich von*

---

248) Münch. Ber. a. a. O. p. 124. — Sind unter den Zeilen oder Kolonnen der *konvergenten* Doppelreihe solche, deren Summen *nicht endlich* bleiben, so kann $\sum w_\nu$ gegen einen von *s verschiedenen* Wert konvergieren oder *eigentlich* divergieren. (A. a. O. p. 130.)

249) A. a. O. p. 133. — In diesem Satze ist der zu Anfang erwähnte *Cauchy*'sche als Teil enthalten.

250) A. a. O. p. 138. — Beispiele *bedingt* konvergierender Doppelreihen s. *Stolz* a. a. O. p. 161. — Die von *Eisenstein* (J. f. Math. 35 (1847), p. 172 ff.) behandelten *„Doppelreihen"* fallen überhaupt nicht unter den hier gegebenen *Konvergenz*-Begriff, sie können nur in einem *erweiterten* Sinne *bedingt konvergent* genannt werden. Vgl. meine Bem. a. a. O. p. 140.

einander verschieden zu formulieren und auch die erforderlichen *Vergleichsreihen* entsprechend verschieden auszuwählen. Von diesem Gesichtspunkte ausgehend habe ich die folgenden allgemeinen Kriterien aufgestellt[251]):

$$(42)\quad \begin{cases} \textit{Konvergenz}, \text{ wenn:} \\ \lim\limits_{\mu=\infty} C_\mu \cdot a_\nu^{(\mu)} < \infty, \quad \lim\limits_{\nu=\infty} C_\nu \cdot a_\nu^{(\mu)} < \infty, \quad \lim\limits_{\mu,\nu=\infty} C_\mu \cdot C_\nu \cdot a_\nu^{(\mu)} < \infty, \\ \textit{Divergenz}, \text{ wenn:} \quad \lim\limits_{\mu,\nu=\infty} (\mu+\nu)\cdot D_{\mu+\nu} a_\nu^{(\mu)} > 0.^{252)} \end{cases}$$

36. Vielfache Reihen. Die oben für Doppelreihen aufgestellte Konvergenzdefinition lässt sich ohne weiteres auf *beliebig-vielfache* Reihen übertragen[253]). Dass eine solche allemal *überhaupt* und zwar *unbedingt* konvergiert, wenn die entsprechende Reihe der absoluten Beträge konvergiert, ist wiederum schon von *Cauchy* hervorgehoben worden[254]). Für einen speziellen Typus von p-fachen Reihen, nämlich: $\sum(\nu_1^2 + \nu_2^2 + \cdots + \nu_p^2)^{-\sigma}$ ($\nu_1, \nu_2, \ldots$ ganze Zahlen) hat *Eisenstein* die *Konvergenz* erwiesen, falls $\sigma > \frac{p}{2}$, und daraus die Konvergenz einer wesentlich allgemeineren Gattung erschlossen[255]). Behufs Untersuchung der p-fachen Thetareihen[256]) hat *Riemann* durch einfache Umformung des in Nr. **23** erwähnten *Cauchy*'schen Satzes über den Zusammenhang von $\sum\limits_m^\infty{}^\nu f(\nu)$ und $\int\limits_m^\infty f(x)\,dx$ ein zur Beurteilung einfacher, wie beliebig-vielfacher Reihen brauchbares Konvergenzkriterium gewonnen[257]). *A. Hurwitz* hat dasselbe neuerdings mit einem durchsichtigeren Beweise versehen, durch ein entsprechendes Divergenzkriterium ergänzt und auf p-fache Reihen von sehr allgemeinem Charakter angewendet, welche die *Eisenstein*'schen Reihen und p-fachen Thetareihen als spezielle Fälle enthalten[258]).

---

251) A. a. O. p. 146. 150.

252) Diese Kriterien lassen sich wiederum durch passende Wahl der C_ν, D_ν (vgl. Nr. **26**) beliebig verschärfen. — Einige Kriterien von geringerer Tragweite, darunter auch ein solches 2ter Art, welches dem *Cauchy*'schen Fundamentalkriterium entspricht, hat *O. Biermann* angegeben: Monatsh. f. Math. u. Phys. 8 (1896), p. 121 ff.

253) Eine *engere* Definition wiederum bei *Cauchy*, Résum. anal. p. 56. — Vgl. Nr. **35**, Fussn. 9.

254) Par. C. R. 19 (1844), p. 1434.

255) J. f. Math. 35 (1847), p. 157 ff.

256) Vgl. II B 7.

257) Ges. W. (1876), p. 452.

258) Math. Ann. 44 (1894), p. 83.

37. Transformation von Reihen. Wie wenig sich auch die Analysten des vorigen Jahrhunderts um die Frage nach der Konvergenz der Reihen kümmerten, so haben sie sich doch vielfach mit der *Transformation* konvergierender Reihen in *schneller* konvergierende beschäftigt[259]). Als *arithmetisch-elementare* hierher gehörige Methoden sind diejenigen von *J. Stirling*[260]) und *Euler*[261]) zu nennen. Beide beruhen im Grunde auf dem gleichen Prinzipe, nämlich auf der Umwandelung der einzelnen Reihenglieder in unendliche Reihen und der Summation des aus jenen Reihen als *Zeilen* zu bildenden zweifach-unendlichen Schemas nach *Kolonnen*. *Euler* gelangt so zu der Transformationsformel:

$$(43)\qquad \sum_0^\infty{}^{\nu} a_\nu x^\nu = a_0 + a_1 \frac{x}{1-x} + \Delta a_1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \cdots + \Delta^\nu a_1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\nu+1} + \cdots$$

(wo: $\Delta a_1 = a_2 - a_1$, $\Delta^2 a_1 = \Delta a_2 - \Delta a_1$, u. s. f.), welche für $x = -1$ die zur Berechnung gewisser numerischer Reihen nützliche Form annimmt:

$$(44)\qquad \sum_0^\infty{}^{\nu} (-1)^\nu \cdot a_\nu = a_0 - \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2^2} \Delta a_1 - \cdots + (-1)^{\nu+1} \cdot \frac{1}{2^{\nu+1}} \Delta^\nu a_1 + \cdots.$$

Die bei *Euler* selbstverständlich fehlende *Konvergenz*-Untersuchung ist später von *J. V. Poncelet* durch Aufstellung des die Entwickelungen (43), (44) vervollständigenden *Restgliedes* nachgeholt worden[262]).

Die Anwendbarkeit der *Euler*'schen Transformation ist eine verhältnismässig beschränkte. Grössere Allgemeinheit besitzt eine von *Kummer* herrührende Methode[263]), welche zugleich gestattet, durch

259) Über die sog. Transformation von *divergenten* Reihen in *konvergente* vgl. Nr. **40** Fussn. 6.

260) Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum. Lond. 1730, p. 6. — Näheres über *Stirling*'s Methode s. *Klügel* 5, Art. „Umformung der Reihen", p. 350 ff. — Ein Beispiel derselben giebt auch *Bertrand,* Calc. diff. p. 260.

261) Instit. calc. different. 1755, p. 281.

262) J. f. Math. 13 (1835), p. 1 ff. — Die bemerkenswertesten, übrigens auch schon von *Euler* (a. a. O. p. 294) angeführten, von *Poncelet* genauer diskutierten (a. a. O. p. 17—20) Beispiele für die Anwendung der Formel (44) sind:

$$\lg 2 = \sum_1^\infty{}^{\nu} (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\nu} = \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{1}{\nu \cdot 2^\nu},$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_0^\infty{}^{\nu} (-1)^\nu \cdot \frac{1}{2\nu+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{1 \cdot 2 \cdots \nu}{3 \cdot 5 \cdots (2\nu+1)}.$$

263) J. f. Math. 16 (1837), p. 206 ff.

iterierte Anwendung die *Konvergenz* der betreffenden Reihe immer weiter zu *verstärken.* Dieselbe bezieht sich zunächst auf Reihen mit lauter *positiven* Gliedern und knüpft unmittelbar an den beim *Kummer*schen Konvergenzkriterium (Nr. **24**, (18)) auftretenden Ausdruck an:

$$(45) \qquad P_\nu \cdot \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} - P_{\nu+1} = \lambda_\nu,$$

aus welchem ja für: $\lim \lambda_\nu = \lambda > 0$ die *Konvergenz* von $\sum a_\nu$ resultierte. Aus (45) folgt nämlich:

$$(46) \qquad \sum_1^\infty{}_\nu a_\nu = \frac{1}{\lambda}(P_0 a_0 - \lim_{n=\infty} P_n a_n) + \sum_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{\lambda_{\nu-1}}{\lambda}\right) \cdot a_\nu,$$

wobei die rechts auftretende Reihe wegen $\lim (\lambda - \lambda_{\nu-1}) = 0$ wesentlich *stärker* konvergiert, als $\sum a_\nu$.[264]) *Leclert* hat in einer von *E. Catalan* publizierten[265]) Mitteilung gezeigt, dass die Formel (46) ebenfalls auf Reihen mit *positiven* und *negativen* Gliedern, insbesondere auch nur *bedingt* konvergierende anwendbar ist[266]) und hat noch eine zweite, der obigen verwandte Transformationsformel angegeben.

In neuester Zeit hat sich *A. Markoff* mehrfach mit Reihentransformation beschäftigt[267]) und ist zu einer allgemeinen Transformationsformel gelangt[268]), welche, wiederum auf der Umformung der gegebenen Reihe in eine *zweifach-unendliche* beruhend, eine erhebliche Verallgemeinerung der von *Stirling* und *Euler* entwickelten Methoden darstellt und diese letzteren als spezielle Fälle umfasst.

38. Euler-Mac Laurin'sche Summenformel. Halbkonvergente Reihen. Von durchgreifenderer Bedeutung als die genannten *rein elementaren* Transformationen ist die als *Euler-Mac Laurin'sche Summenformel* bekannte Beziehung:

---

264) Bei *Kummer* werden die P_ν noch der Beschränkung unterworfen, dass $\lim P_n a_n = 0$; dieselbe ist indessen unnötig, vgl. Nr. **24**, Fussn. 1.

265) Mém. Belg. cour. et sav. étr. 33 (1865). — Vgl. auch: *G. Darboux,* Bullet. d. Sc. (2), 1 (1877), p. 356.

266) Durch dreimalige Anwendung der Formel (46) auf die überaus langsam konvergierende *Leibniz*'sche Reihe $\frac{\pi}{4} = \sum_1^\infty{}_\nu (-1)^{\nu-1} \frac{1}{2\nu-1}$ ergiebt sich z. B.:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{3} + 24 \sum_1^\infty{}_\nu \frac{(-1)^{\nu-1}}{(4\nu^2-1)^2(4\nu^2-9)};$$

eine Reihe, welche so *stark* konvergiert, dass die Summation von *nur vier* Gliedern schon π auf 4 Dezimalstellen richtig liefert.

267) S. z. B. Par. C. R. 109 (1889), p. 934.

268) Pétersb. Mém. (7), 37 (1890). Auch: Differenzenrechnung, deutsch von *Th. Friesendorff* und *E. Prümm,* Leipzig 1896, p. 178.

$$(47)\quad h\cdot\sum_{0}^{p-1}{}_{\nu} f(a+\nu h)=\int_{a}^{a+ph} f(x)\,dx-\frac{h}{2}\{f(a+ph)-f(a)\}$$
$$+\sum_{1}^{n}{}_{\nu}(-1)^{\nu-1}\cdot\frac{B_{2\nu-1}\cdot h^{2\nu}}{(2\nu)!}\{f^{2\nu-1}(a+ph)-f^{2\nu-1}(a)\}+R_{2n+1}$$

(wo R_{2n+1} ein *Restglied* bedeutet, dem man verschiedene Formen geben kann). Dieselbe gehört indessen nach Form und Herleitung der *Integralrechnung* an[269]) und findet hier nur Erwähnung, weil sich daran die Entstehung des allgemeinen Begriffs der sogenannten *Halbkonvergenz* von Reihen knüpft. Wenn in der für jedes n geltenden Gl. (47): $\lim_{n=\infty} R_{2n+1}=0$ wird, so geht die rechte Seite für $\lim n=\infty$ in eine *konvergente* Reihenentwickelung über, deren Summe genau mit dem Werte der linken Seite übereinstimmt. Dies ist aber in der Regel *nicht* der Fall. Dagegen besitzt R_{2n+1} die Eigenschaft, mit wachsenden Werten von n *zunächst* abzunehmen und für einen gewissen Wert $n=N$ einen *verhältnismässig sehr kleinen* Minimalwert zu erlangen, so dass also die Reihe $\sum_{1}^{n}{}_{\nu}$ bei wachsendem $n\leqq N$ den Wert der linken Seite mit *wachsender*, für $n=N$ mit *relativ grosser*, bei weiterer Vergrösserung von n nur zu *verringernder* Annäherung darstellt. Solche Reihen heissen dann nach dem Vorgange von *Legendre*[270]) *halbkonvergent*. *Halbkonvergente* Reihenentwickelungen sind also *divergente* Reihen von der Beschaffenheit, dass die Summe einer *passenden endlichen* Anzahl von Gliedern einen gegebenen arithmetischen Ausdruck mit *verhältnismässig grosser* (aber immerhin durch den Charakter der Reihe *definitiv begrenzter*, *nicht*, wie bei einer *konvergenten* Reihe mit *beliebig* grosser) Annäherung darstellt[271]). Die für die Analysis wichtigsten halbkonvergenten Reihen entspringen der Formel (47), z. B. die als *Stirling*'sche Formel[272]) bekannte Darstel-

---

269) Näheres darüber s. II A 2 u. 3; auch I E.

270) Vgl. Nr. **31**, Fussn. 5. Die Erscheinung der Halbkonvergenz wurde zuerst von *Euler* bemerkt; s. *Reiff* p. 100.

271) Für wirkliche numerische Berechnung erweist sich diese nur „*verhältnismässig*" grosse Annäherung häufig wertvoller, als die *theoretisch* zwar „*beliebig*" gross zu machende, in der *Praxis* aber im Verhältnis zu der aufzuwendenden Rechnung oft *geringe* Annäherung, welche durch Summation eines *konvergenten* s_n erzielt wird.

272) Dieselbe wurde schon vor Auffindung der allgemeinen Formel (47), aus welcher sie für $f(x)=\lg x$ hervorgeht, im wesentlichen von *Stirling* angegeben: a. a. O. p. 135. Übrigens bezeichnet man häufig als *Stirling*'sche Formel

lung von $\sum_0^{p-1}{}_\nu \lg(x+\nu h)$. Einen andern Typus, der sich unmittelbar durch fortgesetzte partielle Integration ergiebt, hat *Laplace* gelegentlich der angenäherten Darstellung des für die Wahrscheinlichkeitsrechnung fundamentalen Integrals $\int_0^x e^{-x^2}\cdot dx$ hervorgehoben[273]) und auch darauf hingewiesen, dass die gewöhnliche *Taylor*'sche Formel möglicherweise zu *halbkonvergenten* Entwickelungen führen kann[274]). *Cauchy* hat in ganz *elementarer* Weise gezeigt[275]), dass gewisse *divergente* Potenzreihen allemal zu den *halbkonvergenten* gehören, und einige auf Grund dieser Bemerkung ohne weiteres als *halbkonvergent* charakterisierte Entwickelungen abgeleitet, welche sonst durch die Formel (47) oder andere transscendente Hülfsmittel gewonnen zu werden pflegen[276]).

Gewisse halbkonvergente Reihen (z. B. die oben erwähnte *Stirling*'sche) haben die Eigenschaft, dass die *Annäherung* zwischen der *darzustellenden Funktion* $F(x)$ und der *Summe* $S_n(x)$ einer endlichen Gliederzahl mit *wachsendem* x in dem Grade *zunimmt*, dass

$$\lim_{x=\infty} x^n\cdot(F(x)-S_n(x))=0.$$

Man sagt alsdann, $S_n(x)$ liefere eine *asymptotische* Darstellung von $F(x)$. *H. Poincaré* bezeichnet deshalb solche Reihen schlechthin als *asymptotische* und hat verschiedene allgemeine Typen dieser Art an-

---

teils den speziellen Fall: $\sum_1^p{}_\nu \lg \nu$, teils aber auch den *allgemeineren* (von *Stirling* noch keineswegs behandelten): $\lg\Gamma(x+1)$, welcher für $x=p$ in den obigen Spezialfall übergeht. — Vgl. auch II A 3.

273) Théorie anal. des probab. Livre I, Art. 27. (Oeuvres 7, p. 104.) — Derselben Methode entspringt die von *Ch. Hermite* angegebene halbkonvergente Entwickelung von $\int_{-\infty}^x \Phi(x)\cdot e^{nx}\cdot dx$ (Tor. Atti 14 [1879], p. 107), desgl. die von *Edm. Laguerre* zum Ausgangspunkte einer konvergenten Kettenbruchentwickelung benützte von $\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx$ (Bull. S. M. d. F. T. 7 [1879], p. 72.

274) A. a. O. Art. 44, p. 179.

275) Par. C. R. 17 (1843), p. 372.

276) Weitere Untersuchungen über halbkonv. Reihen, insbesondere über zweckmässige Wahl von n, bei *T. J. Stieltjes*: Recherches sur quelques séries sémiconv. Thèse, Paris 1886.

gegeben[277][278]. Auch hat er gezeigt, dass man auf dieselben gewisse Rechnungsoperationen (z. B. Multiplikation, Integration, dagegen *nicht* Differentiation) ganz wie bei *konvergenten* Reihen anwenden kann[277].

39. Divergente Reihen. Dass eine *divergente* Reihe *nicht* nach Art einer *konvergenten* eine *bestimmte Zahl* vorstellt, folgt schon unmittelbar aus ihrer Definition. Nichtsdestoweniger bleibt zunächst die Frage offen, ob es zweckmässig und ohne Widersprüche durchführbar erscheint, einer *divergenten* Reihe eine *bestimmte Zahl als Summe zuzuordnen*, und ob (bezw. in wieweit) eine Verwendung *divergenter* Reihen als *formales Darstellungs- und Beweismittel* für zulässig gelten kann. In der Periode bis zu *Cauchy* und *Abel* ist diese Frage von der übergrossen Mehrzahl der bedeutendsten Mathematiker fast rückhaltslos bejaht worden[279]. Namentlich hat *Euler* in einer grossen Reihe von Arbeiten *divergente* Reihen prinzipiell als völlig gleichberechtigt mit *konvergenten* benützt. Als *Summe* einer *divergenten* Reihe betrachtet er den endlichen Zahlenwert *des arithmetischen Ausdruckes*, durch dessen *Entwickelung* die Reihe entstanden ist[280]. Also: Besteht für irgend welche Werte von x die *konvergente* Entwickelung:

(I) $$F(x) = \sum_0^\infty {}_\nu f_\nu(x),$$

so setzt er auch:

(II) $$\sum_0^\infty {}_\nu f_\nu(\alpha) = F(\alpha),$$

277) Acta math. 8 (1886), p. 295 ff.

278) Méth. nouvelles de la mécanique céleste 2 (Paris 1893), p. 2.

279) *Gegen* die Benützung *divergenter* Reihen erklärten sich: *Pierre Varignon* (*Reiff* p. 68), *Nic. Bernoulli* (ibid. p. 121) und mit vollkommener Klarheit *Jean Lerond d'Alembert* (p. 135): „Pour moi j'avoue que tous les raisonnements fondés sur les séries qui ne sont pas convergentes . . . me paraîtront trés suspects, même quand les résultats s'accorderaient avec des vérités connues d'ailleurs" (Opusc. math. 5, 1768, p. 183). — Am schärfsten hat sich wohl *Abel* in ähnlichem Sinne ausgesprochen: „Les séries divergentes sont en général quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on ose y fonder aucune démonstration" (Brief an Holmboe vom 16. Januar 1826; Oeuvres 2, p. 256). Doch will er allenfalls *divergente* Reihen als *symbolische Ausdrücke* zur abgekürzten Darstellung mancher Sätze gelten lassen. (In der gleichfalls von 1826 stammenden Abhandlung über die binomische Reihe: Oeuvres 1, p. 220.) — *Cauchy* versteht in dem Fussn. 275 citierten Aufsatze unter der „legitimen Anwendung *divergenter* Reihen" lediglich die Benützung als *halbkonvergent* erkannter Reihen zur angenäherten Berechnung. In einer anderen Arbeit (Par. C. R. 20, 1845, p. 329) handelt es sich um *divergente Doppelreihen*, die immerhin in *bestimmten Anordnungen* noch *konvergieren*, also um einen besonderen Fall von *bedingter* Konvergenz (ähnlich wie bei den *Eisenstein*'schen Reihen, Nr. **35**, Fussn. 250).

280) Inst. calc. diff. Pars II, Cap. I, 9 (p. 289).

wenn $\sum f_\nu(\alpha)$ *divergiert* und $F(\alpha)$ eine bestimmte Zahl vorstellt. Dass diese Definition in der von *Euler* ausgesprochenen *Allgemeinheit* auf unlösbare Widersprüche führt und somit in *dieser* Form unhaltbar ist, steht heute ausser Zweifel; weiss man doch, dass Gl. (II) *selbst dann nicht* allemal aus Gl. (I) zu folgen braucht, wenn $\sum f_\nu(\alpha)$ *konvergiert* — nämlich dann nicht, wenn $\sum f_\nu(x)$ in der Nähe der Stelle $x = \alpha$ *ungleichmässig*[281]) konvergiert, oder wenn $\sum f_\nu(x)$ in *verschiedenen Teilen* des Konvergenzgebietes *verschiedene* arithmetische Ausdrücke zur Summe hat. Und zwar kann diese Eventualität, die man zuerst an dem verhältnismässig *komplizierten* (und in diesem Falle wesentlich auf *reelle* x beschränkten) Typus der *Fourier'schen Reihen*[282]) beobachtet hat, schon eintreten, wenn die $f_\nu(x)$ *rationale Funktionen allereinfachster Art* bedeuten[283]).

Wenn nun aber $\sum f_\nu(x)$ für $x = \alpha$ *divergiert*, so liegt zunächst überhaupt kein stichhaltiger Grund vor, gerade den Wert $F(\alpha)$ als *Summe* der Reihe für *jenen einzelnen Wert* $x = \alpha$ anzusehen. Denn es giebt *unendlich viele* Entwickelungen: $\Phi(x) = \sum_0^\infty{}_\nu\, \varphi_\nu(x)$, für welche $\varphi_\nu(\alpha) = f_\nu(\alpha)$ wird, während die $\Phi(\alpha)$ unter sich und von $F(\alpha)$ durchaus *verschieden* sein können; der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, f_\nu(\alpha)$ würden dann also in Wahrheit *unendlich viele verschiedene Summen* zukommen. *Beispiel: Euler* folgert aus der für $|x| < 1$ geltenden Beziehung:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu \cdot x^\nu, \quad \text{indem er } x = 1 \text{ setzt:} \quad \sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu = \frac{1}{2}.$$ [284])

---

281) Vgl. II A 1.

282) Vgl. II A 8.

283) Beispiele solcher Reihen sind zuerst von *L. Seidel* (J. f. Math. 73 [1871], S. 297) und *E. Schroeder* (Z. f. Math. 22 [1877], p. 184) angegeben worden. Unabhängig von diesen beiden hat *Weierstrass* die grosse Tragweite der fraglichen Erscheinung für die Funktionentheorie festgestellt: Berl. Ber. 1880, p. 728 ff.; 1881, p. 228 (Werke 2, p. 210. 231). Vgl. auch meine Note: Math. Ann. 22 (1883), p. 109.

284) Novi Comment. Petrop. 5 (ad ann. 1754. 1755), p. 206. — Die Gleichung: $\sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu = \frac{1}{2}$ $\left(\text{bezw. die damit gleichwertige: } \sum_0^\infty{}_\nu (-1)^\nu \cdot \frac{l}{m} = \frac{l}{2m}\right)$ war schon von *Jac. Bernoulli* als ein „paradoxon non inelegans" auf die gleiche Art abgeleitet worden (Pos. de ser. inf. P. III (1696); Opera 2, p. 751) und hatte zu einer umfangreichen Diskussion (*Reiff* p. 65—70) geführt, in deren Verlauf

Man hat aber andererseits für $|x|<1$ (wenn $[\lambda]$ die grösste in λ enthaltene ganze Zahl bedeutet):

$$(48)\quad \begin{cases} \sum_0^\infty {}_\nu (-1)^\nu \cdot x^{\left[\frac{\nu}{2}\right]} = 1-1+x-x+x^2-x^2+\cdots=0, \\ \sum_0^\infty {}_\nu (-1)^\nu \cdot x^{\nu+(-1)^\nu} = x-1+x^3-x^2+x^5-x^4+\cdots = -\frac{1}{1+x} \\ \text{u. s. f.} \end{cases}$$

Da jede dieser Reihen für $x=1$ gleichfalls die Form $\sum_0^\infty {}_\nu (-1)^\nu$ annimmt, so könnte man nach *Euler* der letzteren Reihe eben so gut die Summe 0 oder $-\frac{1}{2}$ (oder auch unendlich viele andere Summenwerte) beilegen[285]). Wenn also *Euler* an jene angeblich zu Recht bestehende Gleichung: $\sum_0^\infty {}_\nu (-1)^\nu = \frac{1}{2}$ die unzweideutige Bemerkung knüpft[286]): man könne, wenn man *durch irgendwelche Rechnung* auf die Reihe $\sum_0^\infty {}_\nu (-1)^\nu$ geführt werde, dieselbe ohne weiteres durch die Zahl $\frac{1}{2}$ ersetzen — so enthält dieselbe eine *prinzipiell irrtümliche*, durch keinerlei analytische Hülfsmittel irgendwie annehmbar zu machende Behauptung, während allerdings der Gleichung $\sum_0^\infty {}_\nu (-1)^\nu = \frac{1}{2}$

---

insbesondere *Leibniz* für die Richtigkeit der Gleichung $\sum_0^\infty {}_\nu (-1)^\nu = \frac{1}{2}$ bedingungslos eintrat und deren wahre Natur mit Hülfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung metaphysisch zu erklären suchte: der Wert $\frac{1}{2}$ erscheine als das *arithmetische Mittel* aus den für $\sum_0^n {}_\nu (-1)^\nu$ mit *vollkommen gleicher Wahrscheinlichkeit* resultierenden Summenwerten 1 und 0. Die Reihe $\sum_0^\infty {}_\nu (-1)^\nu$ wird seitdem gewöhnlich (auch von *Euler*) schlechthin als die *Leibniz'sche* bezeichnet (neben der Nr. **31** erwähnten Reihe: $\frac{\pi}{4} = \sum_0^\infty {}_\nu (-1)^\nu \cdot \frac{1}{2\nu+1}$).

285) Der umgekehrte, schon von *Nic. Bernoulli* (*Reiff* p. 122) gemachte Einwurf, dass man für ein und dieselbe Zahl *verschiedene* divergente Entwickelungen finden könne, entbehrt offenbar der nötigen Beweiskraft.

286) L. c., p. 211. — Noch *Fourier* (Théorie analyt. de la chaleur 1822) bedient sich ohne Bedenken dieser Substitution (Oeuvres 2, p. 206).

als einer durch *eine ganz bestimmte Rechnung* abgeleiteten *cum grano salis* eine ganz vernünftige analytische Bedeutung beigelegt werden kann, nämlich: $\lim\limits_{x=1} \sum\limits_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu \cdot x^\nu = \frac{1}{2}$.[287])

40. Divergente Potenzreihen. Auch wenn man die *Euler*'sche Definition der divergenten Reihensummen nicht im Sinne der eben citierten Bemerkung[288]), sondern in dem offenbar vorteilhafteren[289]) Sinne auffasst, dass statt *einzelner numerischer Werte* α allemal ein *zusammenhängendes Divergenzgebiet* von Werten x' in Betracht kommt, so liefert dieselbe kein brauchbares Resultat, falls man nicht die $f_\nu(x)$ *sehr wesentlichen* Einschränkungen unterwirft; andernfalls kann ja, wie oben bemerkt, $\sum\limits_0^\infty {}^\nu f_\nu(x)$ in *verschiedenen Teilen* des *Konvergenz*-Gebietes ganz *verschiedene* $F(x)$ vorstellen, sodass hieraus eine *bestimmte* Definition von $\sum\limits_0^\infty {}^\nu f_\nu(x)$ für das *Divergenz*-Gebiet nicht entnommen werden kann. Als passendste Spezialisierung der $f_\nu(x)$ erweist sich aber die Annahme: $f_\nu(x) = a_\nu x^\nu$, und thatsächlich hat *Euler* seine obige *viel zu allgemeine* Definition fast ausschliesslich in diesem

287) Die von *Leibniz* hervorgehobene Eigentümlichkeit, dass hierbei gerade das *arithmetische Mittel* aus den Summen $s_n = \sum\limits_0^n {}^\nu (-1)^\nu$ zum Vorschein kommt, haben *Raabe* (J. f. Math. 15 [1836], p. 355) und *Jeppe Prehn* (ibid. 41 [1851], p. 8) in freilich unzulänglicher Weise zu verallgemeinern gesucht. Eine präcise Fassung und Begründung hat diese Verallgemeinerung erst durch *G. Frobenius* (ibid. 89 [1880], p. 262) erhalten, nämlich: „Ist $\sum\limits_0^n {}^\nu a_\nu = s_n$, so hat man:

$$\lim_{x=1} \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n},$$

falls der letztere Grenzwert *existiert.*“ Dieser Satz bildet das Anfangsglied einer ganzen Kette ähnlicher Sätze: *O. Hölder*, Math. Ann. 20 [1882], p. 535 ff.

288) Darnach würde schon jeder einzelnen *numerischen* divergenten Reihe eine *eindeutig bestimmte* Summe zukommen.

289) Hierbei treten nämlich an die Stelle der blossen *Zahlen* $f_\nu(\alpha)$ gesetzmässig gebildete *analytische Ausdrücke* $f_\nu(x')$, so dass also auch bei *numerischer Gleichheit* von $f_\nu(x')$ und $\varphi_\nu(x')$ für irgend einen bestimmten Wert $x' = \alpha$ die Reihen $\sum f_\nu(\alpha)$, $\sum \varphi_\nu(\alpha)$ immer noch als *merklich verschieden* charakterisiert erscheinen und ihnen ohne direkten Widerspruch auch *verschiedene* „Summen“ zugeordnet werden könnten.

sehr speziellen Sinne gebraucht[290]): und wenn fast alle Endresultate, bei denen ihm rein formale, nach heutigen Begriffen an sich unzulässige Operationen mit *divergenten* Reihen als Durchgangspunkt gedient haben, sich als *richtig* erweisen, so rührt das einfach davon her, dass diese Operationen (sog. Summation, Transformation, Integration) infolge *der ganz besonderen Qualitäten* der *„Potenzreihen“* $\sum a_\nu x^\nu$ sich durch *Grenzübergänge*[291]) oder durch das *Prinzip der analytischen Fortsetzung*[292]) a posteriori rechtfertigen lassen.

Hieraus ergiebt sich aber die Berechtigung, die am Anfang von Nr. **39** angedeutete Frage nunmehr in folgender Weise spezieller zu formulieren: In wieweit kann eine *Potenzreihe* $\sum a_\nu x^\nu$ auch dort, wo sie *divergiert*, zur *Definition* einer bestimmten von x abhängigen Zahl („Funktion“) $F(x)$ dienen? Und dürfen gewisse zunächst nur für *konvergente* Reihen definierte *Rechnungsoperationen* auf solche *rein formale Äquivalenzen:* $F(x) = \sum a_\nu x^\nu$ (welche nur im Falle der *Konvergenz* von $\sum a_\nu x^\nu$ den Sinn wirklicher *Gleichungen* annehmen) ohne Widerspruch angewendet werden?

H. Padé und *E. Borel* haben neuerdings in ganz verschiedener Weise versucht, diese Fragen zu beantworten. Der erstere[293]) stützt sich auf die Bemerkung, dass einer *Potenzreihe* nach einem genau definierten Gesetze unendlich viele, aus *rationalen Funktionen* zusammengesetzte unendliche *Kettenbrüche* zugeordnet werden können, von denen *jeder einzelne* umgekehrt auch die *Gesamtheit* aller übrigen und die Koefficienten der ursprünglichen *Potenzreihe vollständig bestimmt.* Sind unter diesen Kettenbrüchen solche, welche gleichzeitig mit $\sum a_\nu x_\nu$ *konvergieren*, so stimmt ihr Grenzwert mit der Summe $\sum a_\nu x^\nu$ überein. Es kann aber auch solche geben, welche *konvergieren*, wo die

---

290) Dies erklärt sich ganz naturgemäss aus dem Umstande, dass man zu jener Zeit unter *„Reihenentwickelungen“* schlechthin zunächst immer nur *Potenzreihen* verstand. Andererseits war man gerade deshalb auch sehr geneigt, jeder *anderen* Reihe ohne weiteres die Eigenschaften einer *Potenzreihe* beizulegen.

291) Vgl. Fussn. 287. — Gewisse, aus Umformungen der divergenten *harmonischen* Reihe von E. abgeleitete Resultate lassen sich einfacher mit Hülfe des Grenzüberganges: $\lim_{\varrho=0} \sum \frac{1}{\nu^{1+\varrho}}$ rechtfertigen.

292) Dies gilt insbesondere bezüglich der *Transformation* und *Summation divergenter Reihen* mit Hülfe der in Nr. **37** erwähnten *Euler*'schen Methode, da die rechte Seite der Gl. (43) dort, wo sie überhaupt konvergiert, bezw. falls sie sich auf eine *endliche* Gliederzahl reduziert, die *„analytische Fortsetzung“* (II B 1) von $\sum a_\nu x^\nu$ liefert. Vgl. Math. Ann. 50 (1898), p. 458. — Par. C. R. 126 (1898), p. 632.

293) Acta math. 18 (1894), p. 97.

Reihe *divergiert*[294]); diese letzteren können dann als *Ersatz* für die *divergente* Reihe, also gewissermassen als *Definition* für die *Summe der divergenten Reihe* dienen. Auf Grund dieser Definition lässt sich dann zeigen, dass die Regeln der Addition und Multiplikation auch für *divergente* Potenzreihen gültig bleiben[295]).

Den Ausgangspunkt der *Borel*'schen Untersuchung[296]) bildet eine direkte Verallgemeinerung des *Grenzbegriffs* mit Hülfe der Gleichung:

$$\lim_{t=+\infty} e^{-t} \sum_0^\infty {}^n s_n \cdot \frac{t^n}{n!} = \lim_{n=\infty} s_n, \tag{49}$$

deren Richtigkeit zunächst für den Fall erweisbar ist, dass $\lim\limits_{n=\infty} s_n$ (als endlich oder unendlich) *existiert.* Sind nun aber $\underline{\lim}_{n=\infty} s_n$ und $\overline{\lim}_{n=\infty} s_n$ *verschieden*, so *kann* immerhin der in Gl. (49) *links* stehende Grenzwert *existieren* und alsdann zur *Definition* einer *Verallgemeinerung von lim* s_n („*limite genéralisée*") dienen, in Zeichen etwa:

$$\lim_{n=\infty} \operatorname{gen} s_n = \lim_{t=+\infty} e^{-t} \cdot \sum_0^\infty {}^n s_n \cdot \frac{t^n}{n!}. \tag{50}$$

---

294) Dies gilt sogar, wenn $\sum a_\nu x^\nu$ *beständig divergiert.* Auf die Existenz solcher Kettenbruchentwickelungen ist man durch diejenige des Ausdrucks $e^{x^2} \cdot \int_x^\infty e^{-x^2} \cdot dx$ aufmerksam geworden, welcher andererseits eine *beständig divergente* Potenzreihe liefert. Die gewöhnlich *P. S. Laplace* zugeschriebene (Mécan. cél. 2, Livre X. Oeuvres 4, p. 254) *formale Umwandelung* dieser letzteren in jenen *konvergenten* Kettenbruch findet sich übrigens (abgesehen von einem unwesentlichen Unterschiede in der Bezeichnung) schon vollständig bei *Euler*: De ser. diverg. a. a. O. p. 236 (nebst einer konvergenten Kettenbruchentwickelung des neuerdings von *Laguerre* — vgl. Nr. **38**, Fussn. 273 — behandelten Integrals $\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$). Und während *Laplace* mit der an sich ungerechtfertigten formalen Umwandelung der *divergenten* Potenzreihe in den *konvergenten* Kettenbruch sich begnügt, lehrt *Euler* (a. a. O. p. 232 ff.) schon diejenige Methode, welche späterhin von *K. G. J. Jacobi* (J. f. Math. 12 [1834], p. 346) zur Legitimierung der *Laplace*'schen Entwickelung angegeben wurde: die Integration einer Differenzialgleichung, welche durch das betreffende bestimmte Integral (und auch *rein formal* durch die *divergente* Potenzreihe) befriedigt wird, mit Hülfe eines unendlichen Kettenbruches.

295) Im übrigen ist diese Theorie noch in vieler Beziehung unvollständig. Verschiedene lehrreiche Ergänzungen kann man den Abhandlungen von *T. J. Stieltjes* (Ann. Toul. 8 [1894], p. 1—122, 9 [1895], p. 1—47) entnehmen.

296) J. de Math. 4, 12 (1896), p. 103. Vgl. auch: Par. C. R. 122 (1896), p. 73. 805. Auch diese Theorie bedarf noch der Vervollständigung und zum Teil sogar der Berichtigung.

Substituiert man speziell: $s_n = s_n(x) = \sum_0^n {}_\nu\, a_\nu x^\nu$, so wird überall da, wo $\sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu x^\nu$ *konvergiert*, $\lim\text{gen}\, s_n(x) = \sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu x^\nu$, und die Umkehrung dieser Beziehung bietet dann wiederum die *Möglichkeit*, $\sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu x^\nu$ dort zu *definieren*, wo die Reihe (*uneigentlich*) *divergiert*. Die logische Zweckmässigkeit dieser an sich zunächst ziemlich willkürlich erscheinenden Definition ergiebt sich dann aus der Thatsache, dass (unter gewissen noch erforderlichen Einschränkungen) $\lim\text{gen}\, s_n(x)$ wirklich die *analytische Fortsetzung* $f(x)$ von $\sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu x^\nu$ liefert. Wie Gl. (50) zeigt, kann in diesem Falle $\lim\text{gen}\, s_n(x)$ für irgend eine Divergenzstelle x' sogar dann zur *numerischen* Berechnung von $f(x')$ dienen, wenn nur der *numerische* Wert der einzelnen $s_n(x')$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, d. h. schliesslich der *numerische* Wert der einzelnen *Reihenglieder*, nicht deren *analytisches* Bildungsgesetz bekannt ist.

[In diesem Artikel wurde wesentlich nur die *allgemeine* Theorie der Reihen mit *constanten* Gliedern behandelt. Über *spezielle* Reihen dieser Art, sowie *Funktional*-Reihen sind insbesondere zu vergleichen: *Arithmetische Reihen* (I D 3, I E). — *Recurrente Reihen* (I E und Entwickelung rationaler Funktionen in Potenzreihen). — *Harmonische und Dirichlet'sche Reihen* (I C 3). — *Gleichmässig und ungleichmässig konvergente Reihen* (II A 1). — *Potenzreihen* (II B 1). — *Hypergeometrische Reihen* (II B 1). — *Fourier'sche Reihen* (II A 8). — *Summation von Reihen* (II A 2, 3, 4).]

IV. Unendliche Produkte, Kettenbrüche und Determinanten.

41. Unendliche Produkte. Historisches. Auch die Einführung *unendlicher Produkte* knüpft sich unmittelbar an das für die gesamte Grenzwertlehre als grundlegend erkannte *Quadratur*-Problem, speziell an die Quadratur des Kreises. Schon *Vieta* stellte das Verhältnis des Quadrates mit der Diagonale 2 zur Fläche des umschriebenen Kreises, also die Zahl $\frac{2}{\pi}$, durch das unendliche Produkt dar[297]):

$$(51)\qquad \sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}\cdots.$$

297) Francisci Vietae opera math. Ed. Schooten, Lugd. Bat. 1646, p. 400. — Konv.-Beweis von *Rudio*, Ztschr. f. Math. 36 (1891), Hist. Abt. p. 139. — Verallgemeinerungen dieser Formel bei *Euler*, Opusc. analyt. 1 (1785), p. 346 — und *L. Seidel*, J. f. Math. 73 (1871), p. 273 ff.

Und kurze Zeit darauf gab *Wallis* die nach ihm benannte Formel[298]):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdots. \tag{52}$$

Durch ein Problem der *Wahrscheinlichkeitsrechnung*[299]) wurde *Dan. Bernoulli* auf das folgende unendliche Produkt geführt[300]):

$$\sqrt[2]{\alpha + 1} \cdot \sqrt[4]{\alpha + 2} \cdot \sqrt[8]{\alpha + 4} \cdot \sqrt[16]{\alpha + 8} \cdots. \tag{53}$$

Die prinzipielle Wichtigkeit dieses Darstellungsmittels hat indessen erst *Euler* genügend erkannt und dasselbe vielfach mit glänzendem Erfolge verwertet. Das von ihm behufs *Interpolation*[301]) von $n!$ aufgestellte unendliche Produkt[302]):

$$\frac{1^{1-\omega} \cdot 2^{\omega}}{1 + \omega} \cdot \frac{2^{1-\omega} \cdot 3^{\omega}}{2 + \omega} \cdot \frac{3^{1-\omega} \cdot 4^{\omega}}{3 + \omega} \cdots, \tag{54}$$

in Verbindung mit der gleichfalls zuerst von ihm gegebenen Darstellung der *trigonometrischen Funktionen* durch *unendliche Produkte*[303]), darf geradezu als *fundamental* für die Theorie der *eindeutigen analytischen Funktionen*[304]) gelten. Kaum minder wichtig für die *analytische Zahlentheorie*[305]) erweist sich die gleichfalls von ihm herrührende Produktdarstellung[306]):

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\nu^n} = \left(\prod_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left(1 - \frac{1}{p_\nu^n}\right) \right) \tag{55}$$

(wo (p_ν) die Reihe der Primzahlen), und eine Anzahl anderer (s. Gl. (64) — (66)).

Allgemeine Regeln über die *Konvergenz* und *Divergenz* unend-

---

298) Arithm. infin. (1659): Opera 1, p. 468. Näheres darüber bei *Reiff* p. 6 ff.

299) Vgl. I D 1.

300) De mensura sortis. Comment. Petrop. T. V (ad ann. 1730. 31), p. 188. — Konv.-Beweis in der von mir besorgten deutschen Ausgabe (Leipzig 1896), p. 53, Fuss. 12.

301) Vgl. I D 3.

302) Brief an *Chr. F. Goldbach* 13. Oct. 1729 (Corresp. math. et phys., éd. P. H. Fuss, Pétersb. 1843, p. 3). Inst. calc. diff. P. II. Cap. XVII, p. 834.

303) Introd. 1, Cap. 19, p. 120.

304) Vgl. II B 1. — Das obige Produkt stimmt *genau* überein mit demjenigen von *Gauss* (Werke 3, p. 146) für $\omega \cdot \Pi(\omega - 1) = \Pi(\omega)$, welches *Weierstrass* (Werke 2, p. 91) ausdrücklich als Vorbild der von ihm ersonnenen Produkte von *Primfunktionen* zitiert. Jenes erste *typische Beispiel* einer solchen Produktdarstellung findet sich also in Wahrheit schon bei *Euler*.

305) Vgl. I C 3.

306) Introd. 1, Cap. XV, p. 225.

licher Produkte[307]) hat zuerst *Cauchy* angegeben[308]); dieselben beruhen auf der Beziehung:

$$\lg \prod_0^\infty {}^{\nu} (1+u_\nu) = \sum_0^\infty {}^{\nu} \lg (1+u_\nu)$$

und der Entwickelung von $\lg (1+u_\nu)$ in eine Potenzreihe. *Weierstrass* hat gezeigt[309]), dass man die Fundamentalsätze über die Konvergenz und Divergenz unendlicher Produkte auch ganz direkt, *ohne* Benützung dieses transcendenten Hülfsmittels herleiten kann. Mit Festhaltung dieses Grundgedankens habe ich späterhin eine zusammenhängende elementare Theorie der unendlichen Produkte entwickelt[310]).

42. Konvergenz und Divergenz. Setzt man: $\prod_0^n {}^{\nu} (1+u_\nu) = U_n$, so heisst das *unendliche* Produkt: $\prod_0^\infty {}^{\nu} (1+u_\nu)$, wo durchweg $|1+u_\nu| > a > 0$ angenommen wird, *konvergent* und U der *Wert* desselben, wenn $\lim U_n = U$ *endlich und von Null verschieden* ist. In jedem anderen Falle heisst das Produkt *divergent*, insbesondere also auch dann, wenn $\lim U_n = 0$. Der Ausschluss der Produkte mit dem Grenzwerte 0 aus der Klasse der als *konvergent* zu bezeichnenden erweist sich als unbedingt notwendig, wenn ein *konvergentes* Produkt die *fundamentale* Eigenschaft eines *endlichen* Produktes behalten soll, *nicht* zu verschwinden, so lange *kein* einzelner Faktor verschwindet[311]). Die *zwei* für die *Konvergenz* von $\prod (1+u_\nu)$ hiernach *notwendigen und hinreichenden* Bedingungen, nämlich:

$$(56) \qquad |U_\varrho| > g > 0, \quad |U_{n+\varrho} - U_n| < \varepsilon \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots),$$

lassen sich vollständig durch die folgende *einzige* ersetzen:

$$(57) \qquad \left| \frac{U_{n+\varrho}}{U_n} - 1 \right| < \varepsilon \qquad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots),$$

welche aussagt, dass das „*Restprodukt*“: $\prod_{n+1}^{n+\varrho} {}^{\nu} (1+u_\nu)$ bei passender Wahl von n und für jedes ϱ der 1 beliebig nahe kommen muss, also den bis dahin erzielten Produktwert U_n nicht mehr wesentlich ändert.

307) Ein spezielles Kriterium für die Beurteilung unendlicher Produkte, welches im wesentlichen dem Reihenkriterium von *Gauss* (Nr. 22) entspricht, hat, wie *G. Eneström* (Jahrb. Fortschr. d. Math. 11 [1879], p. 38) bemerkte, schon *Stirling* (Method. diff. 1730, p. 37) angegeben.

308) Anal. algébr. Note 9, p. 561.

309) J. f. Math. 51 (1856), p. 18 ff. — Werke 1, p. 173 ff.

310) Math. Ann. 33 (1889), p. 119. Vgl. auch 42 (1893), p. 183.

311) Vgl. meine Bemerk. a. a. O., p. 125 Fussn., p. 140 Fussn.

Mit dem Produkte $\prod(1+|u_\nu|)$ *konvergiert* auch allemal das Produkt $\prod(1+u_\nu)$ und heisst dann *absolut* konvergent; dasselbe konvergiert in diesem Falle unabhängig von der Anordnung der Faktoren, also *unbedingt.* Umgekehrt lässt sich aber auch zeigen, dass ein *unbedingt* konvergentes Produkt auch *absolut* konvergieren muss[312]). Als *notwendig und hinreichend* für die *absolute und unbedingte Konvergenz* von $\prod(1+u_\nu)$ erweist sich die *Konvergenz* der Reihe $\sum|u_\nu|$.[313])

Ist $\sum u_\nu$ nur *bedingt* konvergent, so *konvergiert* $\prod(1+u_\nu)$ oder *divergiert nach Null,* je nachdem $\sum u_\nu^2$ *konvergiert* oder *divergiert*[314]). Im ersteren Fall *konvergiert* $\prod(1+u_\nu)$ nur *bedingt,* lässt sich in zwei Produkte von der Form $\prod(1+a_\nu)$, $\prod(1+b_\nu)$ $(a_\nu>0,\ b_\nu>0)$ zerfällen, von denen das erste nach $+\infty$, das zweite nach 0 *divergiert,* und die sich wiederum ganz nach Analogie des in Nr. **31** erwähnten *Riemann*'schen Reihensatzes zu *konvergenten* Produkten von *beliebig vorzuschreibendem* Werte vereinigen lassen. Die von mir bezüglich der Wertveränderungen bedingt konvergenter *Reihen* gefundenen Resultate lassen sich auch auf solche *Produkte* übertragen[315]).

43. Umformung von unendlichen Produkten in Reihen. Vermöge der Identität:

$$s_n = s_0 + \sum_1^n {}_\nu (s_\nu - s_{\nu-1}) \tag{58}$$

lässt sich *jeder* Grenzwert $s = \lim s_n$ durch die unendliche *Reihe:*

$$s = s_0 + \sum_1^\infty {}_\nu (s_\nu - s_{\nu-1}) \tag{59}$$

---

312) A. a. O., p. 135 ff.

313) Man kann also aus der etwa anderweitig erkannten Konvergenz oder Divergenz von $\prod(1+|u_\nu|)$ auch diejenige von $\sum|u_\nu|$ erschliessen. Vgl. *Weierstrass,* Werke 1, p. 175.

314) Die vorangehenden Sätze gelten auch für *komplexe* u_ν, der letzte in dieser Fassung nur für *reelle.* (Von *Cauchy* mit Hülfe der logarithm. Reihe bewiesen: a. a. O. p. 563; rein elementar von mir: a. a. O. p. 150, einfacher: 44, p. 413.) Eine Verallgemeinerung des Satzes für *complexe* u_ν habe ich Math. Ann. 22 (1883), p. 480 angegeben. — Auch wenn $\sum u_\nu$ *divergiert,* lassen sich noch bestimmte Aussagen über verschiedenartiges Verhalten des Produktes $\prod(1+u_\nu)$ machen, welches selbst in diesem Falle noch *konvergieren* kann (a. a. O. 33, p. 152 ff.).

315) Math. Ann. 22, p. 481.

darstellen[316]). Die Anwendung dieser Methode auf $U_n = \prod_0^n{}^{\nu} (1 + u_\nu)$ giebt die für *jedes konvergente* (oder auch nach 0 bezw. $+\infty$ *divergierende*) Produkt gültige Reihendarstellung:

$$(60)\qquad \prod_0^\infty{}^{\nu} (1 + u_\nu) = 1 + u_0 + \sum_1^\infty{}^{\nu} U_{\nu-1} \cdot u_\nu .$$

Konvergiert das Produkt und somit auch $\sum u_\nu$ *absolut*, so gestattet diese Reihe *jede beliebige Anordnung*[317]), insbesondere die folgende:

$$(61)\qquad \prod_0^\infty{}^{\nu} (1 + u_\nu) = 1 + \sum_\varkappa u_\varkappa + \sum_{\varkappa,\lambda} u_\varkappa u_\lambda + \sum_{\varkappa,\lambda,\mu} u_\varkappa u_\lambda u_\mu + \cdots,$$

wobei die Summen $\sum_\varkappa, \sum_{\varkappa,\lambda}, \sum_{\varkappa,\lambda,\mu}, \ldots$ über alle möglichen Kombinationen der u_ν zur 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten}, ... Klasse zu erstrecken sind. Ist also $u_\nu = a_\nu x$, $\sum |a_\nu|$ konvergent, so hat man für jedes endliche x:[318])

$$(62)\qquad \prod_0^\infty{}^{\nu} (1 + a_\nu x) = 1 + \sum_1^\infty{}^{\nu} A_\nu x^\nu \quad (A_1 = \sum a_\varkappa,\ A_2 = \sum a_\varkappa a_\lambda, \text{ etc.})$$

und allgemeiner:

---

316) Vermöge der (lediglich an die Beschränkung: $|s_\nu| \geqq \alpha > 0$ gebundenen) analogen Identität:

$$(58\text{a})\qquad s_n = s_0 \prod_1^n{}^{\nu} \frac{s_\nu}{s_{\nu-1}}$$

lässt sich auch jeder Grenzwert $s = \lim s_n$ durch das unendliche Produkt:

$$(59\text{a})\qquad s = s_0 \prod_0^\infty{}^{\nu} \frac{s_\nu}{s_{\nu-1}}$$

darstellen. Ist also speziell: $s_n = \sum_0^n{}^{\nu} u_\nu = s_{n-1} + u_n$, so wird

$$(60\text{a})\qquad \sum_0^\infty{}^{\nu} u_\nu = u_0 \cdot \prod_0^\infty{}^{\nu} \left(1 + \frac{u_\nu}{s_{\nu-1}}\right).$$

Hieraus ergiebt sich z. B. der Nr. **26**, Fussn. 2 erwähnte *Abel*'sche Satz, dass gleichzeitig mit der Reihe $\sum u_\nu$ (wo $u_\nu > 0$) stets auch $\sum \frac{u_\nu}{s_{\nu-1}}$ *divergiert.* Im übrigen ist aber die Transformation (60a) von wesentlich geringerer Bedeutung als die umgekehrte (60). Beispiele für ihre Anwendung giebt *Stern,* Journ. f. Math. (1834), p. 353.

317) Vgl. z. B. die *Euler*'sche Formel (55).

318) Ein solches Produkt stellt dann nach *Weierstrass'* Bezeichnung eine

$$(63) \qquad \prod_0^\infty{}_\nu \left(1 + \sum_1^\infty{}_\mu\, a_\nu^{(\mu)} x^\mu\right) = 1 + \sum_1^\infty{}_\nu\, A_\nu x^\nu,$$

so lange $\sum_0^\infty{}_\nu \sum_1^\infty{}_\mu \left| a_\nu^{(\mu)} x^\mu \right|$ konvergiert.

Bei geeigneter Spezialisierung der a_ν, $a_\nu^{(\mu)}$ lassen sich die unendlichen Reihen, welche zunächst zur Darstellung der A_ν sich ergeben, mit Hülfe von Rekursionsformeln summieren. Schon *Euler* fand durch die Substitutionen $a_\nu = q^{\nu+1}$, $a_\nu^{(\mu)} = q^{\mu(\nu+1)}$ ($|q| < 1$) die Beziehungen[319]):

$$(64) \qquad \prod_1^\infty{}_\nu (1 + q^\nu x) \quad = 1 + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{q^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}}{(1-q)\cdots(1-q^\nu)} \cdot x^\nu,$$

$$(65) \qquad \prod_1^\infty{}_\nu (1 - q^\nu x)^{-1} = 1 + \sum_1^\infty{}_\nu \frac{q^\nu}{(1-q)\cdots(1-q^\nu)} \cdot x^\nu,$$

und aus der ersten derselben für $x = -1$ und durch Entwickelung nach Potenzen von q die folgende[320]):

$$(66) \quad \prod_1^\infty{}_\nu (1 - q^\nu) = 1 + \sum_1^\infty{}_\nu (-1)^\nu \cdot \left(q^{\frac{1}{2}\nu(3\nu-1)} + q^{\frac{1}{2}\nu(3\nu+1)}\right).$$

Durch *Jacobi*'s Untersuchungen ist der enge Zusammenhang dieser von *Euler* für *zahlentheoretische*[321]) Zwecke aufgestellten Formeln und ähnlicher auf analoge Weise zu gewinnender mit der Theorie der *elliptischen Funktionen*[322]) festgestellt worden. Derselbe beruht auf dem Umstande, dass die zur Darstellung der elliptischen Funktionen

---

ganze transcendente Funktion mit den Nullstellen $x = -\frac{1}{a_\nu}$ dar. Über die *Weierstrass*'sche Verallgemeinerung dieser Formel (Nr. **41**, Fussn. 404) für den Fall, dass $\sum |a_\nu|$ *divergiert,* vgl. II B 1.

319) Introd. T. I, Cap. XVI: De partitione numerorum, p. 259. 263.

320) L. c. p. 270. Dort zunächst nur durch Induktion gefunden, bald darauf von *E.* analytisch bewiesen; Petrop. Novi Comment. 5 (ad ann. 1754. 55), p. 75. — Einfacherer Beweis von *Legendre:* Théorie des nombres (1830), T. 2, p. 128. — *Jacobi* ist mehrmals auf diese Formel zurückgekommen und hat ausser zwei *elementaren* Beweisen (J. f. Math. 21 [1840], p. 13; 32 [1846], p. 164 = Werke 6, p. 281. 303), deren zweiter eine Modifikation des *Euler*'schen ist, noch drei weitere mit Hülfe der *elliptischen Funktionen* gegeben (Fundam. nova, § 62. 63 u. 64—66 = Werke 1, p. 228 ff.; 2, p. 153. J. f. Math. 36 [1848], p. 75).

321) Über die zahlentheoretische Verwertung der Formeln (64) bis (66) vgl. I C 3.

dienlichen *Jacobi'schen Thetafunktionen*[322]) sich aus Produkten von der Form:

$$(67)\qquad \prod_1^\infty {}_\nu (1 \pm q^\nu \cdot x^{\pm 1}), \quad \prod_1^\infty {}_\nu (1 \pm q^{2\nu+1} \cdot x^{\pm 1})$$

zusammensetzen lassen[323]). Von den weiteren in dem genannten Zusammenhange von *Jacobi* abgeleiteten Reihendarstellungen unendlicher Produkte will ich als besonders merkwürdig noch die folgenden hervorheben[324]):

$$(68)\qquad \prod_1^\infty {}_\nu \frac{1-q^\nu}{1+q^\nu} = 1 - 2\sum_1^\infty {}_\nu (-1)^\nu \cdot q^{\nu^2},$$

$$(69)\qquad \prod_1^\infty {}_\nu \frac{1-q^{2\nu}}{1-q^{2\nu-1}} = 1 + \sum_1^\infty {}_\nu q^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)},$$

$$(70)\qquad \prod_1^\infty {}_\nu (1-q^\nu)^3 = 1 + \sum_1^\infty {}_\nu (-1)^\nu \cdot (2\nu+1) \cdot q^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}.$$

44. Faktoriellen und Fakultäten. *Cauchy* hat Produkte von der Form $\prod(1 + a_\nu x)$, bei welchen die a_ν wie in (67) eine *geometrische* Progression bilden, als *geometrische Faktoriellen* bezeichnet[325]) und eine allgemeine elementare Theorie derselben entwickelt[326]). Dieselbe liefert insbesondere Transformationen in unendliche Reihen, welche die *Euler*'schen Formeln und die Entwickelungen der elliptischen Funktionen als spezielle Fälle umfassen.

Als *arithmetische Faktoriellen* hätte man nach *Cauchy* solche $\prod(1 + a_\nu x)$ oder etwas allgemeiner $\prod(u + a_\nu x)$ zu bezeichnen, bei denen die a_ν eine *arithmetische* Progression bilden und die sonst zumeist numerische und analytische *Fakultäten* oder auch *Faktoriellen* schlechthin genannt werden[327]). Setzt man etwa $a_\nu = a + \nu b$ und schreibt wiederum u statt $u + a$, x statt bx, so folgt, dass man $\prod(u + a_\nu x)$ stets auf die Form $\prod(u + \nu x)$ bringen kann. Da nun solche *unendliche* Produkte offenbar stets *divergieren* müssen, so handelt es sich hierbei zunächst um *endliche* Produkte von der Form:

---

322) Vgl. II B 6a, 7.

323) *Jacobi,* Fundamenta, § 64 (Werke 1, p. 232). Vgl. auch *Gauss*' Nachlass (Werke 3, p. 434). — *Ch. Biehler,* J. f. Math. 88 (1880), p. 186.

324) Fundam. § 66 (Werke 1, p. 237). Die Formel (69) auch bei *Gauss,* Werke 2, p. 20.

325) Par. C. R. 17 (1843), p. 641.

326) Par. C. R. 17, p. 523. 640. 693. 921. 1159.

327) Die Terminologie ist sehr schwankend.

$f(u, x, n) = \prod_0^{n-1}{}_\nu (u + \nu x)$ und sodann um deren *Interpolation* für den Fall, dass eine *beliebige* Zahl y an die Stelle der *natürlichen* Zahl n tritt; diese führt auf gewisse *unendliche Produkte* (zur Darstellung von $f(u,x,y)$), welche als *analytische Fakultäten* bezeichnet zu werden pflegen.

Das fragliche Problem ist zuerst von *Euler*[328]), in speziellerer Form von *Vandermonde*[329]) behandelt worden. Die erste ausführliche Theorie der *Fakultäten* hat sodann *Kramp* geliefert[330]), an welche sich weitere Arbeiten von *Bessel*[331]), *Crelle*[332]), *Ohm*[333]) und *Öttinger*[334]) anschliessen. *Weierstrass* hat gezeigt, dass alle diese auf *rein formale* Behandlungsweise gegründeten Theorien auf mannigfache Widersprüche führen[335]), und hat eine völlig neue, wesentlich auf *funktionentheoretischer* Grundlage ruhende Theorie der *analytischen Fakultäten* entwickelt. Die letzteren werden dabei auf das von *W.* speziell als *Faktorielle* bezeichnete, für jedes endliche (reelle oder complexe) u konvergierende Produkt:

$$\text{(71)} \qquad \mathrm{Fc}(u) = u \prod_1^{\infty}{}_\nu \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^u \cdot \left(1 - \frac{u}{\nu}\right)$$

zurückgeführt, welches sich als identisch mit dem *Legendre*'schen $\frac{1}{\Gamma(u)}$ oder dem *Gauss*'schen $\frac{1}{\Pi(u-1)}$ erweist[336]) und dessen prinzipielle Bedeutung vor allem darin besteht, dass es den Ausgangspunkt für die Nr. **41**, **42**, Fussn. 304. 318 erwähnten Untersuchungen gebildet hat.

45. Allgemeine formale Eigenschaften der Kettenbrüche. Als n-gliedrigen *Kettenbruch*[337]) bezeichnet man einen Ausdruck von der Form:

---

328) Inst. calc. diff. 2, p. 832. Vgl. Nr. **41**, Formel (54).

329) Vgl. Nr. **10**, Fussn. 70. V. behandelt nur den Fall: $f(u, -1, y)$ und bezeichnet die f als *Potenzen zweiter Ordnung.*

330) Analyse des réfractions astronomiques et terrestres, Chap. III, Nr. 142 bis 203. — *Gergonne,* Ann. 3 (1812), p. 1.

331) Königsb. Archiv f. Naturw. u. Math. 1812. Abh. 2, p. 343.

332) Theorie der analyt. Facultäten, Berlin 1824. J. f. Math. 7 (1831), p. 356.

333) J. f. Math. 39 (1850), p. 23.

334) Ibid. 33 (1846), p. 1 (hier eine übersichtliche Zusammenstellung der bis dahin gebrauchten verschiedenen Definitionen und Bezeichnungsweisen). p. 117. 226. 329; 35 (1847), p. 13; 38 (1849), p. 162. 216; 44 (1852), p. 26. 147.

335) J. f. Math. 51 (1856), p. 1 ff. Der kritische Teil ausführlicher in dem Wiederabdruck dieser Abh.: Werke 1, p. 153 ff.

336) Vgl. II A 3.

337) Über die ältere Geschichte der Kettenbrüche vgl. ausser der im Ein-

$$(72)\quad \left\{ b_0 \pm \cfrac{a_1}{b_1 \pm \cfrac{a_2}{b_2 \pm \cdots \pm \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} \pm \cfrac{a_n}{b_n}}}} \quad \text{d. h. eigentlich:} \quad b_0 \pm \cfrac{a_1}{b_1 \pm \cfrac{a_2}{b_2 \pm \cdots \pm \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} \pm \cfrac{a_n}{b_n}}}} . \right.$$

Derselbe soll hier stets in der gedrängteren Form[338]):

$$(73)\qquad b_0 \pm \frac{a_1|}{|b_1} \pm \frac{a_2|}{|b_2} \pm \cdots \pm \frac{a_n|}{|b_n}$$

geschrieben oder durch das Symbol:

$$(74)\qquad \left[b_0;\ \pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$$

bezeichnet werden[339]). Die a_ν, b_ν stellen dabei ganz beliebige Zahlen

---

gange zitierten Schrift von *S. Günther* deren erweiterte italienische Bearbeitung: *Boncompagni,* Bulletino di Bibl. 7 (1874), p. 213. Ibid. p. 451: *Ant. Favaro,* Notizie storiche sulle frazioni continue. Auch: *Klügel,* T. 3, p. 88. *M. Cantor,* a. a. O. 2, p. 631. 694; 3, p. 92. 669. — Zusammenhängende Theorien der allgemeinen Kettenbrüche haben ausser *Euler* (Petrop. Comment. 9 [1737], p. 98; 11 [1739], p. 22. Introductio 1, p. 295) noch *F. A. Möbius* (J. f. Math. 6 [1830], p. 216. Werke 4, p. 505) und sehr ausführlich *M. A. Stern* (J. f. Math. 10 [1833], p. 1. 154. 241. 364; 11 [1834], p. 33. 142. 277. 311) entwickelt. *Lagrange* (Add. aux Éléments d'Algèbre d'Euler: Oeuvres 7, p. 8) und *Legendre* (Théorie des nombres [1830], 1, p. 17) haben nur aus *ganzen* Zahlen zusammengesetzte, insbesondere sog. *regelmässige* Kettenbrüche behandelt. Im übrigen vgl. die citierten Lehrbücher von *Stern, Schlömilch, Hattendorff* und *Stolz*; auch: *J. A. Serret,* Cours d'Algèbre supérieure (Paris 1885), I, p. 7.

338) Diese Schreibweise scheint mir charakteristischer, als die zumeist verbreitete: $b_0 \pm \frac{\dot{a}_1}{b_1} \pm \frac{\dot{a}_2}{b_2} \pm \cdots \pm \frac{\dot{a}_n}{b_n}$, welche nach *Baltzer*'s Angabe (El. der Math. 1, p. 189, Fussn.) von *J. H. T. Müller* (Allg. Arithm., Halle 1838) herrührt (vgl. übrigens Nr. 9, Fussn. 52).

339) Allgemein bezeichne ich also durch das Symbol $\left[b_m; + \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^n$ den Kettenbruch $b_m \pm \frac{a_{m+1}|}{|b_{m+1}} \pm \cdots \pm \frac{a_n|}{|b_n}$. Dabei schreibe ich statt $\left[0; \pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^n$ kürzer: $\left[\pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^n$, so dass also: $\left[b_m; \pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^n = b_m + \left[\pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^n$. — *Stern* bedient sich a. a. O. des allzu undeutlichen Symboles: $F(b_0, b_n)$ oder auch des wenig übersichtlichen: $F(b_0 \pm a_1 : b_1 \pm a_2 : b_2 \pm \cdots)$. *E. Heine* (Handb. der Kugelf. 1 [1878], p. 261) schreibt dafür: $\left|\begin{matrix} & \mp a_1 & \mp a_2 & \cdots & \mp a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & & b_n \end{matrix}\right|$. Ist durchweg $\pm a_\nu = 1$, so pflegt man den betreffenden Kettenbruch nach *Dirichlet* (Werke 2,

vor, nur wird man naturgemäss die $|a_\nu| > 0$ voraussetzen, während von den b_ν beliebig viele, *mit einziger Ausnahme*[340]) von b_n, auch $= 0$ sein können; im übrigen unterliegen die letzteren noch gewissen Beschränkungen, sofern der Kettenbruch überhaupt einen *bestimmten Sinn* haben, d. h. eine bestimmte *Zahl* vorstellen soll.

Man nennt a_0 das *Anfangsglied*, $\pm\frac{a_\nu}{b_\nu}$ das ν^{te} *Glied* oder den ν^{ten} *Teilbruch*, $\pm a_\nu$ bezw. b_ν den ν^{ten} *Teilzähler* bezw. *Teilnenner* des Kettenbruches. Verwandelt man den Kettenbruch $\left[b_0;\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\varkappa$ [341]) durch successives Fortschaffen der Teilnenner in einen gewöhnlichen Bruch $\frac{A_\varkappa}{B_\varkappa}$ und zwar *rein formal* (d. h. insbesondere ohne Anwendung von *Reduktionen*, falls im Laufe der Rechnung infolge *besonderer* Beschaffenheit der a_ν, b_ν *reduktible* Brüche auftreten sollten[342])), so ergiebt sich zunächst:

$$(75\text{a})\qquad \begin{aligned} A_0 &= b_0 & B_0 &= 1 \\ A_1 &= b_1\cdot A_0 + a_1 & B_1 &= b_1\cdot B_0 \end{aligned}$$

und sodann (durch vollständige Induktion) für $\nu \geqq 2$ die Rekursionsformel[343]):

$$(75\text{b})\qquad A_\nu = b_\nu\cdot A_{\nu-1} + a_\nu\cdot A_{\nu-2},\quad B_\nu = b_\nu\cdot B_{\nu-1} + a_\nu\cdot B_{\nu-2}.$$

Fällt hierbei B_ν *von Null verschieden* aus, so heisst $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ der ν^{te} *Näherungsbruch* und im Falle $\nu = n$ der *Wert* des Kettenbruches:

$$(76)\qquad K_n = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}.$$

---

p. 141) mit $(b_0, b_1, \ldots b_n)$ zu bezeichnen, während dieses nämliche Symbol bei *Möbius* a. a. O. den Kettenbruch $\frac{1|}{|b_0} - \frac{1|}{|b_1} - \cdots - \frac{1|}{|b_n}$ bedeutet.

340) Indessen darf immerhin $\lim b_n = 0$ werden, wenn man die b_ν als Funktionen einer Veränderlichen auffasst; in diesem Falle geht der Kettenbruch (73) in den folgenden über: $b_0 \pm \frac{a_1|}{|b_1} \pm \cdots \pm \frac{a_{n-2}|}{|b_{n-2}}$. (Nur auf diese Art können z. B. diejenigen Schlüsse legalisiert werden, die *Möbius* — Werke, 4, p. 507 — zieht, indem er einfach $b_n = 0$ setzt.)

341) Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn ich von jetzt ab nur a_ν statt $\pm a_\nu$ schreibe, da ja die a_ν an sich beliebiges Vorzeichen besitzen dürfen.

342) Über diese Möglichkeit vgl. *Stern* a. a. O. 2, p. 13.

343) Dem Sinne nach schon bei *Wallis*, Arithm. infinit. p. 191 (Opera 1, p. 475). — Verallgemeinerung der Rekursionsformel (75b) bei *Stolz* a. a. O. 2, p. 268.

Aus (75) ergiebt sich die für die gesamte Lehre von den Kettenbrüchen fundamentale Relation[344]):

$$(77)\qquad \frac{A_\nu}{B_\nu}-\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}=(-1)^{\nu-1}\cdot\frac{a_1\cdot a_2\cdots a_\nu}{B_{\nu-1}\cdot B_\nu}\qquad (1\leqq\nu\leqq n)$$

und in ähnlicher Weise die allgemeinere:

$$(78)\qquad \frac{A_\nu}{B_\nu}-\frac{A_\mu}{B_\mu}=(-1)^{\mu}\cdot\frac{a_1\cdot a_2\cdots\cdot a_{\mu+1}\cdot B_{\mu+1,\nu}}{B_\mu\cdot B_\nu}\qquad (\mu\leqq\nu-1),$$

wenn noch gesetzt wird:

$$(79)\qquad a_\varkappa+\frac{a_{\varkappa+1}|}{|b_{\varkappa+1}}+\cdots+\frac{a_\nu|}{|b_\nu}=\frac{A_{\varkappa,\nu}}{B_{\varkappa,\nu}}\qquad (\varkappa\leqq\nu).$$

Vermöge der Identität $\frac{a}{b+r}=\frac{ca}{cb+cr}$ lässt sich jeder Kettenbruch K_n durch unendlich viele ihm völlig *äquivalente* (d. h. durchweg *gleichwertige Näherungsbrüche* liefernde) ersetzen, nämlich:

$$(80)\qquad K_n=b_0+\frac{c_1a_1|}{|c_1b_1}+\frac{c_1c_2a_2|}{|c_2b_2}+\cdots+\frac{c_{n-1}c_na_n|}{|c_nb_n}.$$

Durch passende Wahl der c_ν kann man allemal erzielen, dass sich ergiebt:

$$(81)\qquad K_n=b_0+\frac{\alpha_1|}{|\beta_1}+\frac{\alpha_2|}{|\beta_2}+\cdots+\frac{\alpha_n|}{|\beta_n},$$

wo die α_ν *oder* die β_ν *beliebig vorgeschriebene* Zahlen sind (mit angemessenem Ausschluss von 0). Wählt man durchweg[345]) $\alpha_\nu=+1$, so mag der resultierende Kettenbruch als die *Hauptform*[346]) von K_n bezeichnet werden. Für $\alpha_\nu=-1$ kommt diejenige Form zum Vorschein, deren reciproken Wert *Möbius* als Normalform benützt hat und die von *Seidel*[347]) die *reduzierte* Form[348]) von K_n genannt worden ist.

46. Rekursorische und independente Berechnung der Näherungsbrüche. Die Rekursionsformeln (75)[349]) liefern zugleich auch die Hülfsmittel zur *independenten* Berechnung der A_ν, B_ν.

---

344) *Euler,* Petr. Comment. 9, p. 104.

345) Ibid. p. 108.

346) *Heine* (a. a. O. p. 264) gebraucht diesen Ausdruck, falls die β_ν natürliche Zahlen sind.

347) Münch. Abh. 2. Kl. 7 (1855), p. 267.

348) Hiervon wohl zu unterscheiden ist der Ausdruck „*reduzierter Kettenbruch*“, mit welchem man nach *Stern* (a. a. O. p. 4) den *Wert* des betr. Kettenbruchs, also den Näherungsbruch $\frac{A_n}{B_n}$ zu bezeichnen pflegt.

349) Bei dem entsprechenden Rekursionsverfahren wird mit dem Einrichten

Euler hat für den Fall, dass K_ν auf die Hauptform gebracht ist, einen eigenen *Algorithmus* zur Darstellung der A_ν, B_ν ersonnen[350]), der sich zwar zur Herleitung gewisser Kettenbruchrelationen als sehr nützlich erweist, dagegen für die A_ν, B_ν im Grunde genommen nur eine *symbolische*, zur effektiven Berechnung nicht genügend durchsichtige[351]) Darstellung liefert, nämlich:

$$(82) \qquad \frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{(b_0, b_1, b_2, \dots b_\nu)}{(b_1, b_2, \dots b_\nu)},$$

wobei das Symbol $(b_m, b_{m+1}, \dots b_\nu)$ durch die Rekursionsformel definiert ist:

$$(83) \quad (b_m, b_{m+1}, \dots b_\nu) = b_\nu \cdot (b_m, b_{m+1}, \dots b_{\nu-1}) + (b_m, b_{m+1}, \dots b_{\nu-2}).$$

Mit diesen *Euler*'schen Symbolen im wesentlichen identisch erweisen sich trotz der zunächst gänzlich verschiedenen Definition die von *Möbius*[352]) eingeführten Symbole $[b_0, b_1, \dots b_\nu]$ — abgesehen davon, dass sich dieselben auf Kettenbrüche von der Form:

$$(84) \quad K_n = b_0 - \frac{1|}{|b_1} - \frac{1|}{|b_2} - \dots - \frac{1|}{|b_n} \quad \left(\text{genauer gesagt: } k_n = \frac{1}{K_n}\right)$$

beziehen. Setzt man nämlich für $m \leqq \nu$:

$$(85) \qquad K_{m,\nu} = b_m - \frac{1|}{|b_{m+1}} - \frac{1|}{|b_{m+2}} - \dots - \frac{1|}{|b_\nu}$$

$$(\text{also: } \quad K_{0,\nu} = K_\nu, \quad K_{\nu,\nu} = b_\nu)$$

und definiert nach *Möbius* das fragliche Symbol durch die Gleichung:

$$(86) \qquad [b_0, b_1, b_2, \dots b_\nu] = K_{0,\nu} \cdot K_{1,\nu} \cdot K_{2,\nu} \cdots K_{\nu,\nu},$$

so lässt sich zeigen, dass diese Ausdrücke *ganze rationale* Funktionen ihrer Elemente sind, und man erkennt im übrigen unmittelbar, dass

$$K_{0,\nu} = \frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{[b_0, b_1, b_2, \dots b_\nu]}{[b_1, b_2, \dots b_\nu]}$$

in voller Analogie mit der *Euler*'schen Formel (82).

---

der Brüche *von vorn* begonnen. Man findet $\frac{A_2}{B_2}$ aus: $\frac{A_1}{B_1} = \frac{b_1 A_0 + A_1}{b_1 B_0}$ durch Substitution von $b_1 + \frac{a_2}{b_2}$ an Stelle von b_1 u. s. f. *Stern* hat a. a. O. p. 5 auch ein mit dem Bruche $\frac{A'_n}{B'_n} = \frac{b_n a_{n-1} + a_n}{b_n}$ beginnendes und *rückwärts* laufendes Rekursionsverfahren entwickelt. (Vgl. auch *Stolz* a. a. O. p. 266.)

350) Petrop. Novi Comment. 9 (1764). Vgl. auch *Gauss*, Disquis. arithm. Art. 27 (Werke 1, p. 20). *Dirichlet-Dedekind*, Vorl. über Zahlentheorie § 23.

351) D. h. etwa nach Art einer Determinante. — Eine brauchbare Regel zur Berechnung der *Euler*'schen Symbole hat übrigens *V. Schlegel* angegeben: Z. f. Math. 22 (1877), p. 402.

352) Werke 4, p. 511.

Da die A_ν, B_ν durch je ein *System linearer Gleichungen* (und zwar, abgesehen von den beiden Anfangsgleichungen (75a) durch das *nämliche* System) definiert sind, so ergiebt sich als nächstliegendes Darstellungsmittel[353]) der *Quotient zweier Determinanten*, der sich aber wegen der besonderen Form jener Gleichungen auf *eine einzige Determinante* reduciren lässt. Für den Fall $a_\nu = +1$ bezw. $a_\nu = -1$ wurde dies von *Sylvester* und *Spottiswoode* zuerst hervorgehoben[354]) Die allgemeine Auflösung der in Frage kommenden *rekurrenten dreigliedrigen Linearsysteme* mit Hülfe von Determinanten wurde aus anderweitiger Veranlassung von *Painvin*[355]) gegeben und zuerst von *S. Günther*[356]) für die Darstellung der A_ν, B_ν prinzipiell verwertet[357]). Unabhängig davon und ungefähr gleichzeitig wurde die Determinantendarstellung der A_ν, B_ν von *G. Bauer*[358]) angegeben und auch von *K. Hattendorff*[359]) in sehr einfacher Weise abgeleitet.

Während hiernach das Problem, die Näherungsbrüche eines vorgelegten Kettenbruches zu berechnen, auf die Auflösung eines rekurrenten dreigliedrigen Linearsystems führt, so kann umgekehrt jedes solche System zur *Definition* eines bestimmten *Kettenbruches* dienen. Diese schon von *Euler*[360]) gemachte Bemerkung ist von *G. Bauer*[361]), *Heine*[362]) und *Scheibner*[363]) mit Vorteil zur Herleitung von Kettenbruchrelationen benützt worden. Durch entsprechende Betrachtung

---

353) Ich übergehe hier die auf kombinatorischen Betrachtungen beruhenden Berechnungsmethoden von *Hindenburg, Eytelwein, Stern* (a. a. O. p. 5) und anderen; näheres darüber (nebst zahlreichen einschlägigen litterarischen Notizen) in *S. Günther*'s Habilitationsschrift: „Darstellung der Näherungswerte von Kettenbrüchen in independenter Form". Erlangen 1872.

354) Philos. Mag. (4) 5 (1853), p. 453; 6 (1853), p. 297. — J. f. Math. 51 (1856), p. 374.

355) J. de Math. (2) 3 (1858), p. 41.

356) Hieran wird durch die Bemerkung *Heine*'s (Kugelf. 1, p. 262, Fussn.), dass ihm der Zusammenhang des gelegentlich (J. f. Math. 56 [1859], p. 80) von ihm benützten *Painvin*'schen Resultates mit der *Kettenbruch*-Theorie keineswegs entgangen sei, nichts geändert.

357) In der oben citierten Schrift, deren zweiter Teil eine Anzahl verschiedenartiger Anwendungen jener „Kettenbruchdeterminanten" (Continuanten), vgl. I A 2 Nr. **31**, enthält.

358) Münch. Abh., 2. Kl., 11 (1872), Abt. II, p. 103.

359) Einl. in die Lehre von den Determinanten. Hannover 1872, p. 20. Auch: Algebr. Anal. p. 264.

360) Acta Petrop. 1779, 1, p. 3.

361) J. f. Math. 56 (1859), p. 105.

362) Ibid. 57 (1860), p. 235.

363) Leipz. Ber. 1864, p. 44. Vgl. auch: *Baltzer*, El. der Math. 1, p. 189.

analoger *viergliedriger* Systeme gelangte *Jacobi*[364]) zu einer Verallgemeinerung des Kettenbruchalgorithmus, die sich auch auf beliebigvielgliedrige Systeme ausdehnen lässt[365]).

Schliesslich sei hier noch auf den Zusammenhang solcher rekurrenter Systeme mit der Theorie der *Differenzengleichungen*[366]) hingewiesen. Insbesondere genügen die A_ν, B_ν, also auch die *Euler*'schen und *Möbius*'schen Symbole einer linearen Differenzengleichung zweiter Ordnung[367]).

47. Näherungsbrucheigenschaften besonderer Kettenbrüche. Die bisher betrachteten Eigenschaften der Kettenbrüche sind *rein formaler* Natur; sie bestehen völlig unabhängig von der besonderen Natur der a_ν, b_ν (unter denen man sich also statt beliebiger *reeller Zahlen* eventuell auch *complexe Zahlen* bezw. beliebige *Funktionen* denken kann). Eigenschaften anderer Art kommen zum Vorschein, wenn man die a_ν, b_ν spezialisiert. Insbesondere tritt der eigentümliche Charakter der Näherungsbrüche, welchem dieselben ihren Namen verdanken, erst hervor, wenn die a_ν unter sich, desgl. die b_ν unter sich (abgesehen von dem allemal irrelevanten b_0) *gleichbezeichnet* sind. Nimmt man durchweg $b_\nu > 0$ (was vermöge Gl. (80) keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet), so bleiben folgende zwei Möglichkeiten:

I. $a_\nu > 0$. Aus Gl. (75), (77), (78) folgt dann unmittelbar, dass die A_ν, B_ν mit ν *monoton zunehmen*, die $\frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}}$ eine *zunehmende*, die $\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}$ eine *abnehmende* Folge bilden, so dass also:

$$(87)\qquad \frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}} < \frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} < K_n < \frac{A_{2\nu+2}}{B_{2\nu+2}} < \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} \qquad \left(1 \leqq \nu < \frac{n}{2} - 1\right).$$ [368])

II. $a_\nu < 0$ — wobei es wegen der Formulierung des folgenden

364) J. f. Math. 69 (1868), p. 29. Werke 6, p. 385. (Aus *J.*'s Nachlasse von *Heine* herausgegeben.) Vgl. *E. Fürstenau,* Wiesbaden Gymn.-Progr. 1874. — Die fragliche Untersuchung ist neuerdings von *W. Fr. Meyer* erheblich vereinfacht und vervollständigt worden: Königsb. Ber. 1898, p. 1. Züricher Verh. (1898), p. 168.

365) S. die Schlussbem. einer anderen, der eben citierten unmittelbar vorangehenden Abh. von *Jacobi*: a. a. O. p. 28, bezw. 384.

366) Vgl. I E.

367) *Heine,* Kugelf. 1, p. 261.

368) Eine geometrische Deutung dieser Relation s. *Schlömilch,* Algebr. Anal. p. 268. Weitere Ausführung dieses Gedankens bei *Lieblein,* Z. f. Math. 12 (1887), p. 189; *F. Klein,* Gött. Nachr. 1895, p. 257. Andere geometrische Darstellung bei *M. Koppe,* Math. Ann. 29 (1887), p. 187. (Weiterbildung einer von *Poinsot,* J. de Math. 10 [1845], p. 50 herrührenden Methode.)

zweckmässig erscheint, $a_1 > 0$, $b_0 \geqq 0$ anzunehmen[369]). Genügen sodann die b_ν noch der Bedingung:

$$b_\nu \geqq |a_\nu| + 1 \qquad (\nu \geqq 1), \tag{88}$$

so sind die A_ν, B_ν und *alle* $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ *positiv* und mit ν *monoton zunehmend.* Definiert man ferner als ν^{ten} *Nebennäherungsbruch*[370]) den Wert des Kettenbruches:

$$\frac{A'_\nu}{B'_\nu} = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}} + \frac{a_\nu|}{|b_\nu - 1} \qquad \left(= \frac{A_\nu - A_{\nu-1}}{B_\nu - B_{\nu-1}}\right), \tag{89}$$

so hat man stets $\frac{A'_\nu}{B'_\nu} > K_n$, und es bilden die $\frac{A'_\nu}{B'_\nu}$ eine im allgemeinen *monoton abnehmende* (nur an Stellen, wo gerade $b_\nu = |a_\nu| + 1$, *konstante*) Folge, so dass also statt Ungl. (87) hier die folgende erscheint:

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} < \frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}} \leqq K_n < \frac{A'_{\nu+1}}{B'_{\nu+1}} \leqq \frac{A'_\nu}{B'_\nu} \qquad (1 \leqq \nu \leqq n-1). \tag{90}$$

Charakteristische Beziehungen von ähnlicher Einfachheit finden bei den Näherungsbrüchen sonstiger allgemeiner Kettenbruchtypen nicht statt. Dagegen ergeben sich noch *spezifisch arithmetische* Eigenschaften[371]), wenn die a_ν, b_ν *ganze* Zahlen sind[372]), namentlich wenn noch durchweg $a_\nu = \pm 1$.

Dem Typus I gehören die für $a_\nu = 1$ und positiv ganzzahlige b_ν resultierenden *regelmässigen* (auch: *einfachen* oder *gewöhnlichen*) Kettenbrüche an, deren spezielle Näherungsbrucheigenschaften den eigentlichen Anstoss zur Ausbildung der Lehre von den Kettenbrüchen ge-

---

369) Der Fall $a_1 < 0$, b_0 beliebig, ist ohne weiteres auf den im Text behandelten zurückzuführen.

370) *Stern,* von dem diese für die Beurteilung analoger *unendlicher* Kettenbrüche nützliche Bemerkung herrührt, bezeichnet die $\frac{A'_\nu}{B'_\nu}$ als *mittelbare Näherungsbrüche* (a. a. O. p. 168). Der Ausdruck *Nebennäherungsbrüche* wird sonst gewöhnlich in etwas weiterem Sinne gebraucht, nämlich für alle Brüche, welche aus $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ entstehen, wenn man den letzten Teilnenner b_ν durch $b_\nu - k$ ($k = 1, 2, \ldots$, soweit als $b_\nu - k > 0$) ersetzt. Dieselben spielen namentlich bei gewissen arithmetischen Betrachtungen über *regelmässige* Kettenbrüche eine Rolle und werden von *Stern* (a. a. O. p. 18) als *eingeschaltete Näherungsbrüche* bezeichnet. (Bei *Lagrange*, Oeuvres 2, p. 567: fractions secondaires; 7, p. 29: fractions intermédiaires.) Vgl. auch *Stern,* Algebr. Anal. p. 292. 305.

371) Vgl. I C 1.

372) Sind die a_ν, b_ν beliebige *rationale* Zahlen, so kann man den Kettenbr. mit Hülfe von Gl. (80) stets in einen äquivalenten *ganzzahligen* transformieren.

geben haben[373]). Für $a_\nu = -1$, $b_\nu \geqq |a_\nu| + 1$, d. h. $\geqq 2$ ergeben sich dem Typus II (der „*reduzierten* Form") angehörige, kaum minder einfach charakterisierte Kettenbrüche, die etwa als *reduziert-regelmässig* bezeichnet werden mögen[374]). Jede rationale (bezw. irrationale) Zahl A lässt sich *auf eine einzige Weise*[375]) durch einen begrenzten (bezw. unbegrenzt fortsetzbaren) *regelmässigen* oder auch *reduziert-regelmässigen* Kettenbruch darstellen. Setzt man: $A = b_0 + \frac{1}{r_1}$, $r_1 = b_1 + \frac{1}{r_2}$, u. s. f., so erscheint die *regelmässige*, bezw. *reduziert-regelmässige* Entwickelung, je nachdem man $\frac{1}{r_\nu}$ allemal dem Intervalle $(0, 1)$ oder $(0, -1)$ entnimmt[376]).

48. Konvergenz und Divergenz unendlicher Kettenbrüche. Allgemeines Divergenzkriterium. Aus zwei unbegrenzten Zahlenfolgen (a_ν), (b_ν) kann man, zunächst rein formal, einen „*unendlichen*" (d. h. unbegrenzt fortsetzbaren) *Kettenbruch*[377]) bilden, der mit:

$$(91) \qquad b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots \qquad \text{oder:} \quad \left[b_0; \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$$

373) Die Näherungsbrüche regelmässiger Kettenbrüche wurden zuerst von *Daniel Schwenter* zur angenäherten Darstellung von Verhältnissen grosser Zahlen benützt (Geometria practica 1625 bezw. 1641). Der durch Ungl. (87) dargestellte Charakter der Näherungsbrüche und ihre *Irreduktibilität* bei *Huygens* (Descriptio automati planetarii — Datierung unbestimmt, erst mit seinem Nachlass 1698 veröffentlicht).

374) Eine besondere Benennung scheint sich bisher nicht eingebürgert zu haben.

375) Mit der Nebenbedingung, dass bei einem begrenzten *regelmässigen* Kettenbruche das *letzte* Glied stets < 1, bei einem *reduziert-regelmässigen* nicht $= -\frac{1}{2}$ zu nehmen ist.

376) Eine andere Art der Entwickelung, bei welcher $\frac{1}{r_\nu}$ stets dem Intervalle $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$ entnommen wird, also eine solche „*nach nächsten Ganzen*", hat für einen besonderen Fall *C. Minnigerode* (Gött. Nachr. 1873, p. 160) und allgemein *A. Hurwitz* untersucht (Acta math. 12 [1889], p. 367). Vgl. auch *Hurwitz*, Math. Ann. 39 (1891), p. 281; 44 (1894), p. 429.

377) Als erstes Beispiel eines unendlichen Kettenbruches erscheint nächst der von *Cataldi* gegebenen Entwickelung von Quadratwurzeln (s. Nr. 9) die Beziehung: $\frac{4}{\pi} = \left[1, \frac{(2\nu-1)^2}{2}\right]_1^\infty$, welche Lord *Brouncker* (um 1659) auf unbekannte Weise aus der *Wallis*'schen Formel abgeleitet hat. (Einfachster Beweis von *Euler* durch Transform. der *Leibniz*'schen Reihe für $\frac{\pi}{4}$: Opusc. analyt. 2, p. 449. Im übrigen vgl. *G. Bauer*, Münch. Abh. Cl. II 11^2 [1872], p. 100.)

bezeichnet werden mag. Nennt man wiederum $K_n = \frac{A_n}{B_n}$ den Wert des betr. *n-gliedrigen* Kettenbruches, so heisst der *unendliche* Kettenbruch *konvergent* und K sein Wert, wenn $\lim K_n = K$; dagegen *eigentlich* oder *uneigentlich divergent* (im letzteren Falle auch *oscillierend*), wenn das entsprechende von der Zahlenfolge (K_ν) gilt[378]. Mit Hülfe von Gl. (77) hat man:

$$(92)\quad K_n = K_0 + \sum_1^n {}^{\nu}(K_\nu - K_{\nu-1}) = b_0 + \sum_1^n {}^{\nu}(-1)^{\nu-1} \cdot \frac{a_1 \cdots a_\nu}{B_{\nu-1} \cdot B_\nu},\text{[379]}$$

und daher:

$$(93)\qquad \left[b_0; \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = b_0 + \sum_1^\infty {}^{\nu}(-1)^{\nu-1} \cdot \frac{a_1 \cdots a_\nu}{B_{\nu-1} \cdot B_\nu},\text{[380]}$$

falls die betreffende Reihe *konvergiert*, während andererseits die *Divergenz* dieser Reihe stets diejenige des Kettenbruches nach sich zieht. Im Gegensatz zu unendlichen *Reihen* oder *Produkten* können *konvergente Kettenbrüche* lediglich *durch Weglassung einer endlichen Anzahl von Anfangsgliedern* auch *divergent* werden *und umgekehrt.* Ich nenne Kettenbrüche, deren Verhalten durch solche Weglassungen *nicht* alteriert wird, *unbedingt* konvergent bezw. divergent. Darnach ist jeder *eigentlich divergente* Kettenbruch nur *bedingt divergent;* beginnt man ihn erst mit dem Gliede $\frac{a_2}{b_2}$, so muss er gegen den Wert $-a_1$ *konvergieren.*

Die Beziehung (92) bezw. (93) liefert ein einfaches und sehr allgemeines *Divergenz*-Kriterium. Ist nämlich der Kettenbruch in der *Hauptform* vorgelegt, etwa: $\left[q_0; \frac{1}{q_\nu}\right]_1^\infty$, so lautet die gleichgeltende Reihe: $q_0 + \sum_1^\infty {}^{\nu}(-1)^{\nu-1} \cdot (Q_{\nu-1} \cdot Q_\nu)^{-1}$, wenn Q_ν den Nenner des ν^{ten} Näherungsbruches bezeichnet. Da aber offenbar

$$|Q_n| < \prod_1^n {}^{\nu}(1 + |q_\nu|),$$

so folgt, dass jene Reihe und somit auch der *Kettenbruch* allemal *di-*

---

378) Der Begriff der *Konvergenz* und *Divergenz* von *Kettenbrüchen* scheint erst von *Seidel* („Unters. über die Konv. und Div. der Kettenbr.", Habil.-Schr., München 1846) hinlänglich präzisiert worden zu sein. *Stern* (a. a. O. 10, p. 364) rechnet die innerhalb endl. Grenzen *oscillierenden* Kettenbr. zu den *konvergenten* und hat diese Anschauung erst später modifiziert (a. a. O. 37 [1848], p. 255).

379) Mit angemessener Abänderung, wenn einzelne B_ν verschwinden sollten.

380) Diese Beziehung schon bei *Euler,* Petrop. Comm. 9, p. 104.

vergiert, wenn $\sum |q_\nu|$ *konvergiert*[381]). Andererseits lässt sich der ursprünglich betrachtete Kettenbruch mit Hülfe von Gl. (80) stets auf die obige Hauptform bringen, wobei sich ergiebt: $q_0 = b_0$, $q_1 = \frac{b_1}{a_1}$ und für $\nu \geqq 2$, $\mu \geqq 1$:

$$(94)\quad q_\nu = c_\nu \cdot b_\nu, \quad c_{2\mu} = \frac{a_1 \cdot a_3 \cdots a_{2\mu-1}}{a_2 \cdot a_4 \cdots a_{2\mu}}, \quad c_{2\mu+1} = \frac{a_2 \cdot a_4 \cdots a_{2\mu}}{a_1 \cdot a_3 \cdots a_{2\mu+1}},$$

und somit *divergiert* der Kettenbruch, falls die *beiden* Reihen:

$$(95)\quad \sum \left| \frac{a_1 \cdot a_3 \cdots a_{2\mu-1}}{a_2 \cdot a_4 \cdots a_{2\mu}} \cdot b_{2\mu} \right|, \quad \sum \left| \frac{a_2 \cdot a_4 \cdots a_{2\mu}}{a_1 \cdot a_3 \cdots a_{2\mu-1}} \cdot \frac{b_{2\mu+1}}{a_{2\mu+1}} \right|$$

konvergieren. Die Untersuchung der letzteren kann dann mit Hülfe der Kriterien zweiter Art auf diejenige des Quotienten $\left| \frac{a_{\nu+2} \cdot b_\nu}{a_{\nu+1} \cdot b_{\nu+2}} \right|$ zurückgeführt werden.

49. Kettenbrüche mit positiven Gliedern. Ein Kettenbruch mit lauter *positiven* Gliedern: $\left[\frac{1}{q_\nu}\right]_1^\infty$ bezw. $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ (wo: $q_\nu > 0$, $a_\nu > 0$, $b_\nu > 0$) kann vermöge der besonderen Eigenschaften seiner Näherungsbrüche (s. Ungl. (87)) nur *konvergieren* (in welchem Falle stets: $\left[\frac{1}{q_\nu}\right]_1^\infty < 1$, $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty < \frac{a_1}{b_1}$), oder innerhalb *endlicher* Grenzen *oscillieren.* Die soeben angegebene *hinreichende Divergenz*-Bedingung erweist sich hier zugleich als *notwendig*; d. h. der Kettenbruch *konvergiert* und zwar stets *unbedingt,* wenn $\sum q_\nu$ bezw. *mindestens* eine der beiden Reihen (95) *divergiert*[382]). Da aber die *Divergenz* von $\sum q_\nu$ feststeht, wenn $\sum q_\nu \cdot q_{\nu+1}$ *divergiert* (jedoch *nicht* umgekehrt!), so liefert die *Divergenz* von $\sum q_\nu \cdot q_{\nu+1}$ bezw. diejenige von $\sum \frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}$ eine merklich einfachere *hinreichende* (aber *nicht notwendige*) Bedingung für die *Konvergenz* des Kettenbruches[383]). Bleibt dabei $\frac{b_\nu}{a_\nu}$ *über,* also $\frac{a_\nu}{b_\nu}$ *unter*

381) Für positive q_ν bei *Seidel* a. a. O.; für beliebige q_ν bei *Stolz* a. a. O. p. 279.

382) Zuerst von *Seidel* (a. a. O.) bewiesen; unabhängig auch von *Stern,* J. f. Math. 37 (1848), p. 269.

383) *Schlömilch* (Algebr. Anal. p. 290) giebt die von ihm aufgefundene allzu enge Bedingung: $\lim \frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}} > 0$ — mit dem unrichtigen Zusatze, dass man im Falle: $\lim \frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}} = 0$ über die Beschaffenheit des Kettenbruches nichts aussagen könne. Andere Lehrbücher geben für diesen Fall die gleichfalls un-

einer endlichen Grenze, so genügt schon die *Divergenz* der noch einfacheren Reihe $\sum b_\nu$. Daraus folgt insbesondere, dass jeder *ganzzahlige* Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, falls $0 < a_\nu \leqq b_\nu$, insbesondere also jeder *regelmässige konvergiert.* Sein Wert ist stets *irrational*[384]) und < 1. Über den mit Hülfe der Näherungsbrüche zu erzielenden Grad der Annäherung[384a]) geben die Formeln (77), (78), (87) Aufschluss.

Ist dagegen $a_\nu > b_\nu$ und der Kettenbruch *konvergent* (was mit Hülfe der oben angegebenen Regeln in unendlich vielen Fällen wirklich festgestellt werden kann), so kann sein Wert auch *rational* sein[385]), und man besitzt keine allgemeinen Kriterien, um seine etwaige *Irrationalität* zu beurteilen. Schon *Euler* hat bemerkt[386]), dass der Kettenbruch $\left[\frac{m+\nu}{1+\nu}\right]_1^\infty$, welcher nach dem gesagten *irrational* ausfällt für $m = 0$ und $m = 1$,[387]) einen *rationalen* Wert besitzt, wenn die ganze Zahl $m \geqq 2$ ist. Analoges Verhalten zeigt der allgemeinere Kettenbruch $\left[\frac{m+\nu}{n+\nu}\right]_1^\infty$, dessen Wert nur für $m \leqq n$ *irrational*, dagegen für $m \geqq n+1$ *rational* ist[388]).

50. Konvergente Kettenbrüche mit Gliedern beliebigen Vorzeichens. Ein Kettenbruch, dessen Teilzähler und Teilnenner beliebige Vorzeichen besitzen, kann mit Hülfe von Gl. (80) stets auf die Form gebracht werden: $\varepsilon_0 b_0 + \left[\frac{\varepsilon_\nu a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, wo: $\varepsilon_\nu = \pm 1$, $a_\nu > 0$, $b_\nu > 0$. Ein Kettenbruch dieser letzteren Art ist *unbedingt konvergent*, wenn durchweg oder zum mindesten für $\nu \geqq n$:

(96) $$b_\nu \geqq a_\nu + 1. \qquad \text{(Vgl. Ungl. (88)).}^{389})$$

---

nötig eingeengte Ergänzungsbedingung: $\sum \frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1} + b_\nu b_{\nu+1}}$ *divergent* (herrührend von *F. Arndt,* Disqu. de fractionibus continuis, Sundiae 1845).

384) Nach *Legendre;* vgl. Nr. **9**, Fussn. 59; Nr. **50**, Fussn. 391.

384a) Vgl. *Koppe* a. a. O. p. 199. *Hurwitz,* Math. Ann. 39 (1891), p. 279.

385) Einen besonderen Fall dieser Art s. Fussn. 390.

386) Opusc. anal. 1, p. 85.

387) Er hat für $m = 0$ bezw. $m = 1$ die Werte: $\frac{1}{e-2} - 1$ bezw. $e - 2$.

388) *Euler* a. a. O. p. 103. *Stern* a. a. O. 11, p. 43 ff. Vgl. auch 18, p. 74. *G. Bauer,* Münch. Abh. 11^2, p. 109.

389) In dieser allgemeinen Form (auch für complexe ε_ν, wo $|\varepsilon_\nu| = 1$) habe ich den Satz neuerdings bewiesen: Münch. Ber. 28 (1898), p. 312 (daselbst auch einige weitere Kriterienformen p. 319 ff.). — Für den besonderen Fall: $\varepsilon_\nu a_\nu = -1$ (die „reduzierte" Form der Kettenbrüche) findet er sich bei *Seidel*, Münch. Abh. 2. Kl., 7^2 (1855), p. 582; für den etwas allgemeineren: $\varepsilon_\nu = -1$, $a_\nu > 0$ — bei *Stern,* Algebr. Anal. p. 301.

Dabei ist stets: $0 < \varepsilon_1 \cdot \left[\frac{\varepsilon_\nu a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty < 1$, ausser wenn durchweg: $b_\nu = a_\nu + 1$, $\varepsilon_\nu = -1$ und $\sum a_1 a_2 \cdots a_\nu$ *divergiert*, in welchem Falle der Wert 1 resultiert[390]). Sind die a_ν, b_ν ganze Zahlen, so ist der Wert dieses Kettenbruches *irrational*[391]), sofern nicht die eben genannten Spezialbedingungen für $\nu \geqq 1$ bezw. $\nu \geqq n$ bestehen, in welchem Falle er $= 1$, bezw. ein rationaler ächter Bruch ist. In der durch Ungl. (96) charakterisierten Klasse *konvergenter* Kettenbrüche sind insbesondere die *reduziert-regelmässigen* (Nr. 47) und die von *A. Hurwitz* betrachteten Kettenbruchentwickelungen[392]) *nach „nächstgelegenen Ganzen“* enthalten. Der Konvergenzgrad der ersteren kann mit Hinzuziehung der Nebennäherungsbrüche (Ungl. (90)) genauer beurteilt werden.

Im übrigen ist die Konvergenzbedingung (96) weit davon entfernt, eine *notwendige* zu sein. *Seidel* hat gezeigt, dass es unter den Kettenbrüchen von der Form $\left[-\frac{1}{q_\nu}\right]_1^\infty$ (welche nur für $q_\nu \geqq 2$ als *reduziert-regelmässig* zu gelten haben) sowohl *konvergente*, als *divergente* giebt, falls $q_\nu < 2$, $\lim q_\nu = 2$;[393]) ja es giebt sogar *konvergente*, für welche $\lim q_\nu < 2$, z. B. $= \sqrt{2}$.[394]) *Allgemeine Kriterien* zur Beurteilung von Kettenbrüchen, welche *nicht* der Bedingung (96) genügen (abgesehen von solchen mit lauter positiven Gliedern) scheinen bisher nicht entdeckt worden zu sein.

51. Periodische Kettenbrüche. Bestimmtere Aussagen lassen sich noch bezüglich der speziellen Klasse der periodischen Kettenbrüche machen. Der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ heisst *rein periodisch* mit der *m-gliedrigen Periode* $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$, wenn für jedes λ und für $\mu = 1, 2, \ldots m$:

---

390) Man hat also in diesem Falle: $-\left[\frac{-a_\nu}{a_\nu + 1}\right]_1^\infty = 1$, dagegen $= 1 - \frac{1}{s}$, wenn $1 + \sum_1^\infty{}_\nu\, a_1 a_2 \cdots a_\nu = s$. Analog ist für $a_\nu > 1$: $\left[\frac{a_\nu}{a_\nu - 1}\right]_1^\infty = 1$ (*Stern* Journ. f. Math. 11, p. 41).

391) Schon in dieser Allgemeinheit von *Legendre* (a. a. O.) ausgesprochen, aber nur insoweit bewiesen, als der Kettenbruch ohne weiteres als *konvergent* angesehen wird. Vgl. *Pringsheim,* Münch. Ber. 28 (1898), p. 326.

392) Nr. 47, Fussn. 376.

393) A. a. O., p. 585 ff. Der fragliche Kettenbruch ist z. B. *divergent* für $q_\nu = 2 - \frac{1}{\nu}$, *konvergent* für $q_\nu = 2 - \frac{1}{\nu^{1+\varrho}}$ $(\varrho > 0)$.

394) A. a. O. p. 595.

(97) $$a_{m\lambda+\mu} = a_\mu, \quad b_{m\lambda+\mu} = b_\mu$$

(mit der selbstverständlichen Nebenbedingung, dass die Periode $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$ nicht schon in mehrere kleinere Perioden zerfällt). Ist nur der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_n^\infty$ $(n > 1)$ *periodisch*, so heisst $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *gemischt-periodisch*. Für die Konvergenzuntersuchung genügt die Betrachtung eines *rein-periodischen* Kettenbruches. Falls nun der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ mit der Periode $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$ überhaupt *konvergiert*, so bestimmt sich sein Wert x aus der Beziehung: $x = \frac{A_m + x \cdot A_{m-1}}{B_m + x \cdot B_{m-1}}$, also, wenn $|B_{m-1}| > 0$, aus der quadratischen Gleichung:

(98) $$B_{m-1} \cdot x^2 + (B_m - A_{m-1})x - A_m = 0,$$

aus deren Natur dann umgekehrt die *Konvergenz* oder *Divergenz* des Kettenbruches erschlossen werden kann, soweit dieselbe nicht schon aus den früher angegebenen Kriterien hervorgeht. Als *notwendige* Bedingung für die *Konvergenz* des Kettenbruches ergiebt sich bei *reellen* a_ν, b_ν ohne weiteres die *Realität* der Wurzeln x_1, x_2 von Gl. (98). Dieselbe ist auch *hinreichend* (und zwar hat man $x = x_1$), *wenn entweder* $x_1 = x_2$ *oder* x_1, x_2 verschieden und zugleich:

$$|B_m + x_1 B_{m-1}| > |B_m + x_2 B_{m-1}|, \quad |A_\nu - x_2 B_\nu| > 0$$
$$(\nu = 0, 1, \ldots (m-2), \; A_0 = 0, \; B_0 = 1).$$

In jedem anderen Falle *divergiert* der Kettenbruch; dies gilt insbesondere auch, wenn $B_{m-1} = 0$.[395]) Sind bei verschiedenen x_1, x_2 die obigen *Konvergenz*-Bedingungen in soweit erfüllt, dass nur für einen oder mehrere *bestimmte* Werte $\nu = p$: $A_n - x_2 B_n = 0$, so *oscilliert* der Kettenbruch in der Weise, dass: $\lim\limits_{\lambda=\infty} K_{m\lambda+p} = x_2$, im übrigen aber $\lim\limits_{\nu=\infty} K_\nu = x_1$ wird[396]).

Unter den periodischen Kettenbrüchen nehmen wiederum die *regelmässigen*, deren *Konvergenz* nach Nr. **49** *a priori* feststeht, eine bevorzugte Stellung ein[397]). Im Gegensatz zu der (im wesentlichen

---

395) Die vorstehenden Bedingungen rühren von *Stolz* her (Innsbr. Ber. 1886, p. 1. Allg. Arithm. 2, p. 302). Dieselben gelten auch für complexe a_ν, b_ν (in welchem Falle natürlich die *Realität* von x_1, x_2 als *notwendige* Konvergenzbedingung wegfällt). Ein weiteres *Divergenz*-Kriterium giebt *Stolz:* Innsbr. Ber. 1887/88, p. 1. Vgl. auch: *Mansion,* Mathesis 6 (1886), p. 80.

396) *T. N. Thiele,* Tidskr. (4) 3 (1881), p. 70.

397) Eine etwas allgemeinere Gattung, bei welcher an Stelle des Zählers 1 immer eine *beliebige* konstante ganze Zahl steht, ist von *E. de Jonquières* aus-

schon bei *Cataldi* vorhandenen) *Euler*'schen Entwickelungsform[398]):

$$(99)\qquad x = b + \frac{a|}{|b} + \frac{a|}{|b} + \cdots, \quad \text{wo:}\quad x^2 - bx - a = 0,$$

hat *Lagrange* die *regelmässige* Entwickelung[399]):

$$(100)\qquad x = b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_0} + \frac{1|}{|b_1} + \cdots, \quad \text{wo:}\quad b_1x^2 - b_0b_1x - b_0 = 0,$$

und (wegen der zuweilen damit verbundenen Abkürzung der Rechnung[400]) allenfalls eine solche von der Form: $\left[b_0;\ \pm\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ als einzig wertvolle hingestellt[401]). Von ihm rührt der Fundamentalsatz, dass sich jede reelle Wurzel einer quadratischen Gleichung mit reellen ganzzahligen Koefficienten durch einen allemal *periodischen regelmässigen* Kettenbruch darstellen lässt[402]). Den einfachen Zusammenhang zwischen den Entwickelungen *der beiden verschiedenen Wurzeln* hat *Galois* zuerst festgestellt[403]); die eine Periode ist genau die inverse der anderen[404]).

---

führlich betrachtet worden: Par. C. R. 96 (1883), p. 568. 694. 832. 1020. 1129. 1210. 1297. 1351. 1420. 1490. 1571. 1721. Insbesondere werden die Periodengesetze solcher allgemeinerer Kettenbruchentwickelungen für bestimmt klassifizierte quadratische Irrationalitäten untersucht und der Gang der Näherungsbrüche mit demjenigen der entsprechenden *regelmässigen* Entwickelungen verglichen.

398) Introductio P. I, p. 315. Der Kettenbruch wird nur dann *regelmässig,* wenn gerade $a = 1$. — Petrop. Novi comment. 11 (1765) giebt *Euler* die Entwickelung von $\sqrt{g}$ (g eine beliebige natürliche Zahl) in einen *regelmässigen* Kettenbruch. — Die Übertragung der eingliedrig-periodischen *Euler*'schen Entwickelungsform (99) auf den Fall einer *beliebigen* quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Koefficienten und reellen Wurzeln findet sich (anonym): Gergonne Ann. 14 (1823), p. 329.

399) Oeuvres 2, p. 594.

400) Ibid. p. 622.

401) In den Zusätzen zu *Euler*'s Algebra sagt er geradezu folgendes (Oeuvres 7, p. 8): „Nous ne considérons ici que les fractions continues où les numérateurs sont égaux à l'unité . . . car celles-ci sont, à proprement parler, les seules qui soient d'un grand usage dans l'Analyse, *les autres n'étant presque que de pure curiosité.*"

402) Oeuvres 2, p. 609. — Einfachere Beweise geben: *M. Charves*, Darboux (2) 1 (1877), p. 41, *Hermite*, ibid. 9 (1885), p. 11, *W. Veltmann,* Z. f. Math. 32 (1887), p. 210). — Eine zusammenhängende Darstellung der Lehre von den *regelmässigen* Kettenbruchenentwickelungen quadratischer Irrationalitäten: *Serret,* Cours d'Algèbre, Paris 1885, 1, Chap. II.

403) Gergonne Ann. 19 (1828), p. 294. Vgl. auch *Hermite, Veltmann* a. a. O. — Der entsprechende Satz für *reduziert-regelmässige* Entwickelungen bei *Möbius,* Werke 4, p. 526.

404) Eine ähnliche Art des Zusammenhanges ergiebt sich auch bei der *Hurwitz*'schen Entwickelung nach nächsten Ganzen: Acta math. 12, p. 399.

52. Transformation unendlicher Kettenbrüche. Neben der in Nr. 45 erwähnten Transformation eines Kettenbruches in einen *äquivalenten*, bei welcher der Wert *sämtlicher Näherungsbrüche ungeändert* bleibt, giebt es noch unendlich viele andere[405]), bei denen dies *nur teilweise* zutrifft; letzteres ist eo ipso allemal dann der Fall, wenn der transformierte Kettenbruch eine *grössere* oder *geringere Gliederzahl* enthält, als der ursprüngliche. Es liegt auf der Hand, dass bei Transformationen der gedachten Art ein *konvergenter* Kettenbruch sehr wohl *divergent* werden kann *und umgekehrt*[406]) (analog wie bei entsprechenden Umformungen unendlicher Reihen[407])). Immerhin können dieselben mit der nötigen Vorsicht bisweilen zur Verwandlung *konvergenter* Kettenbrüche in *schneller* konvergierende[408]) und sogar zur wirklichen *Wertbestimmung*[409]) (*„Reduktion“*, *„Darstellung in geschlossener Form“*, häufig auch — nicht recht passend — als *„Summation“* bezeichnet) oder zur Ableitung von Relationen zwischen den Werten *verschiedener* konvergenter Kettenbrüche dienlich sein[410]).

53. Umformung einer unendlichen Reihe in einen äquivalenten Kettenbruch. Die Umkehrung der Gleichung (93) liefert die Verwandlung einer *unendlichen Reihe* $\sum_1^\infty{}_\nu (-1)^{\nu-1}\cdot c_\nu$ in einen *äquivalenten Kettenbruch* $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$; dabei stimmt nicht nur der Wert des *unendlichen Kettenbruches* mit der *Summe der Reihe*, sondern auch der

---

405) *Euler*, Comment. Petrop. 9, p. 127; Opusc. analyt. 1, p. 101. *Stern* a. a. O. 10, p. 157. *Seidel* a. a. O. p. 567. *Möbius* a. a. O. p. 518. *O. Heilermann*, Z. f. Math. 5 (1860), p. 362. — Die Transformation des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, wo $b_\nu \geqq |a_\nu| + 1$, in einen positiv-gliedrigen bei *Heine*, Kugelf. 1, p. 265; diejenige eines *regelmässigen* in einen solchen *nach nächsten Ganzen* bei *Hurwitz*, Zürich. Naturf. Ges. 41 (1896), p. 62.

406) Vgl. *Seidel* a. a. O. p. 569.

407) Ist z. B. $\sum c_\nu$ konvergent und $a_\nu = c_\nu + (-1)^\nu$, so *divergiert* $\sum a_\nu$, während $\sum (a_{2\nu-1} + a_{2\nu})$ konvergiert.

408) Vgl. *Möbius* a. a. O.

409) *Stern* a. a. O. 11, p. 43.

410) Dahin gehört z. B. die schon von *Wallis* (Arithm. inf. Prop. 191: Opera 1, p. 470) behufs Ableitung des *Brouncker*'schen Kettenbruches für $\frac{4}{\pi}$ (Nr. 48, Fussn. 377) aufgestellte, aber nicht ausreichend bewiesene Formel:

$$\left[a-1,\ \frac{(2\nu-1)^2}{2(a-1)}\right]_1^\infty \cdot \left[a+1,\ \frac{2\nu-1}{2(a+1)}\right]_1^\infty = a^2$$

und deren Verallgemeinerungen; vgl. *G. Bauer* a. a. O. p. 113.

Wert jedes einzelnen *Näherungsbruches* $\frac{A_n}{B_n}$ mit demjenigen der entsprechenden *Partialsumme* $\sum_1^n{}_\nu (-1)^\nu \cdot c_\nu$ überein, so dass also durch die *Konvergenz* der *Reihe* auch diejenige des *Kettenbruches* von vornherein gesichert ist. Die zur Bestimmung der a_ν, b_ν lediglich erforderliche Auflösung der Gleichungen:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n = \sum_1^n{}_\nu (-1)^{\nu-1} \cdot c_\nu \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

gestattet entweder die a_ν oder die b_ν völlig *willkürlich* anzunehmen (mit angemessenem Ausschluss von 0 — cf. Gl. (80), (81)). Lässt man etwa die b_ν *beliebig*, so ergiebt sich, wie schon *Euler gefunden* hat[411]):

$$(101) \quad \left\{ \begin{array}{ll} & a_1 = c_1 b_1, \quad a_2 = \dfrac{c_2 b_1 b_2}{c_1 - c_2} \\ \text{und für } \nu \geqq 3: & a_\nu = \dfrac{c_{\nu-2} \cdot c_\nu \cdot b_{\nu-1} \cdot b_\nu}{(c_{\nu-2} - c_{\nu-1})(c_{\nu-1} - c_\nu)}. \end{array} \right.$$

Werden die b_ν speziell so gewählt, dass die Brüche in den Teilzählern wegfallen, d. h. setzt man: $b_1 = 1$ und für $\nu \geqq 2$: $b_\nu = c_{\nu-1} - c_\nu$, so ergiebt sich die *Euler*'sche Hauptformel[412]):

$$(102) \quad \sum_1^\infty{}_\nu (-1)^{\nu-1} \cdot c_\nu = \frac{c_1}{1} + \frac{c_2|}{|c_1 - c_2} + \cdots + \frac{c_{\nu-2} \cdot c_\nu|}{|c_{\nu-1} - c_\nu} + \cdots,$$

aus der unmittelbar noch die folgenden beiden resultieren[412]):

$$(103) \quad \sum_1^\infty{}_\nu (-1)^{\nu-1} \frac{p_\nu}{q_\nu} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^\nu = \frac{p_1 x|}{|q_1 y} + \frac{p_2 q_1^2 x y|}{|p_1 q_2 y - p_2 q_1 x} + \cdots + \frac{p_{\nu-2} p_\nu q_{\nu-1}^2 x y|}{|p_{\nu-1} q_\nu y - p_\nu q_{\nu-1} x} + \cdots,$$

$$(104) \quad \sum_1^\infty{}_\nu (-1)^{\nu-1} \frac{p_1 \cdots p_\nu}{q_1 \cdots q_\nu} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^\nu = \frac{p_1 x|}{|q_1 y} + \frac{p_2 q_1 x y|}{|q_2 y - p_2 x} + \cdots + \frac{p_\nu q_{\nu-1} x y|}{|q_\nu y - p_\nu x} + \cdots.$$

Die letzteren[413]) liefern insbesondere für $y = 1$ bezw. $x = 1$ die Entwickelung von steigenden bezw. fallenden *Potenzreihen* in *äquivalente*

411) Introductio 1, p. 302.

412) L. c. p. 303, 309, 310.

413) Dieselben enthalten u. a. alle jene Spezialentwickelungen, welche *Euler*, ohne auf diese allgemeinen Formeln zu rekurrieren, in einer eigenen Arbeit über die Verwandelung von Reihen in Kettenbrüche umständlich abgeleitet hat (Opusc. anal. 2, p. 138—177).

Kettenbrüche, deren Teilzähler und Teilnenner durchweg *ganze lineare* Funktionen von x bezw. y sind.

54. Anderweitige Kettenbruchentwickelungen unendlicher Reihen. Bei der eben betrachteten, auf der für *jedes* n geforderten Beziehung: $s_n - \frac{A_n}{B_n} = 0$ beruhenden Kettenbruchtransformation der Reihe $s = \lim s_n$, erscheint der resultierende Kettenbruch nur in soweit willkürlich, als er nach Massgabe von Gl. (80) auch durch jeden ihm *äquivalenten* ersetzt werden kann. Daneben sind aber noch unendlich viele andere Kettenbruchentwickelungen denkbar, bei denen lediglich $\lim\limits_{n=\infty}\left(s_n - \frac{A_n}{B_n}\right) = 0$. Setzt man nämlich:

$$(105)\qquad s = b_0 + \frac{a_1}{r_1},\quad r_1 = b_1 + \frac{a_2}{r_2},\quad \ldots\quad r_n = b_n + \frac{a_{n+1}}{r_{n+1}},$$

so kann man offenbar bei willkürlicher Annahme der a_ν, b_ν die r_ν, insbesondere schliesslich r_{n+1} passend bestimmen und erhält auf diese Weise[414]):

$$(106)\qquad s = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n} + \frac{a_{n+1}|}{|r_{n+1}}.$$

Bei unbegrenzter Fortsetzung dieses Verfahrens ergiebt sich eine Kettenbruchentwickelung von der Form $s = \left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, sobald der letztere Kettenbruch *konvergiert* und ausserdem $\lim\left(s - \frac{A_n}{B_n}\right) = 0$ wird[415]). Erscheint hierdurch die Willkürlichkeit bezüglich der Auswahl der a_ν, b_ν von vornherein erheblich eingeschränkt, so ergeben sich weitere Einschränkungen aus der Bemerkung, dass Kettenbruchentwickelungen mit ausgeprägten arithmetischen oder analytischen Eigenschaften auf dem gedachten Wege offenbar nur zu stande kommen werden, wenn die Art der successiven *Annäherung* der $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ an

---

414) Dabei könnte offenbar s *jede beliebige Zahl* oder *Funktion* bedeuten, d. h. man kann jedes beliebige s durch einen Kettenbruch darstellen, dessen erste n Glieder willkürlich vorgeschrieben sind.

415) Die blosse *Konvergenz* des Kettenbruches würde zur Erschliessung der Beziehung $s = \left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]$ *nicht* genügen (ähnlich wie bei der *Taylor*'schen Reihe). Dagegen involviert umgekehrt die zweite Bedingung (die sich folgendermassen schreiben lässt: $\lim\left\{\frac{r_{n+1}A_n + a_{n+1}A_{n-1}}{r_{n+1}B_n + a_{n+1}B_{n-1}} - \frac{A_n}{B_n}\right\} = 0$) offenbar die *Konvergenz* des Kettenbruches.

den Grenzwert s in irgend welcher gesetzmässigen Weise genauer präzisiert wird. Im übrigen ist die angedeutete Methode bisher lediglich zur Ableitung gewisser *spezieller* Kettenbruchtypen für *Potenzreihen* oder *Quotienten zweier Potenzreihen* verwertet worden[416]).

55. Kettenbrüche für Potenzreihen und Potenzreihenquotienten. *Lambert*[417]) hat das durch Gl. (105) charakterisierte Entwickelungsverfahren (d. h. ein successives Divisionsverfahren nach Art der *Euklidischen* Methode zur Aufsuchung des grössten Gemeinteilers) auf den Quotienten $\operatorname{tang} x = \frac{s}{s'}$

$$\left(\text{wo:}\quad s = \sum_0^\infty {}^{\nu} (-1)^\nu \cdot \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!},\quad s' = \sum_0^\infty {}^{\nu} (-1)^\nu \cdot \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}\right)$$

in der Weise angewendet, dass er setzt: $b_0 = 0$, $a_1 = 1$, im übrigen: $a_\nu = -1$, $b_\nu = (2\nu - 1)\cdot x^{-1}$, so dass sich ergiebt:

$$(107)\qquad \operatorname{tang} x = -\left[-\frac{1}{(2\nu-1)\cdot x^{-1}}\right]_1^\infty = -\frac{1}{x}\cdot\left[-\frac{x^2}{2\nu-1}\right]_1^\infty$$

und analog[418]):

$$(108)\qquad \frac{e^x-1}{e^x+1} = \left[\frac{1}{(4\nu-2)\cdot x^{-1}}\right]_1^\infty = \frac{1}{x}\cdot\left[\frac{x^2}{4\nu-2}\right]_1^\infty.$$

Als eine für die damalige Zeit ausserordentlich bemerkenswerte Leistung ist hervorzuheben, dass *Lambert* sich keineswegs mit der *formalen Ableitung* der obigen Entwickelungen begnügt hat, sondern durch eine zwar etwas umständliche, aber durchaus strenge Unter-

---

416) Ein brauchbares *allgemeines* Prinzip für die genauere Präzisierung der unendlich vielen einer *Potenzreihe* zuzuordnenden Kettenbruchentwickelungen hat *R. Padé* angegeben (Sur la réprésentation approchée d'une fonction par des fractions rationelles. Thèse de Doctorat. Paris 1892). Vgl. Nr. **40.**

417) Hist. Acad. de Berlin, Année 1761 (1768), p. 268.

418) A. a. O. p. 307. — Der Kettenbruch (108) findet sich im wesentlichen auch bei *Euler* und zwar schon in der Kettenbruchabhandlung von 1737 (Petrop. Comment. 9, p. 132); späterhin (z. B. Opusc. anal. 2, p. 216) auch der Kettenbruch (107). *Euler* gewinnt aber die fraglichen Beziehungen nicht durch *Entwickelung* jener Quotienten in Kettenbrüche, sondern gerade umgekehrt durch *Reduktion* einer bestimmten Klasse von Kettenbrüchen mit Hülfe eines Integrationsverfahrens (vgl. Nr. **9** und Münch. Sitzber. 1898, p. 327). Die arithmetischen Eigenschaften jener Klasse von Kettenbrüchen (bei denen nämlich die Teilnenner *arithmetische Reihen* bilden) sind neuerdings von *A. Hurwitz* untersucht worden, Zürich. Naturf. Ges. 41 (1896), p. 34. — Auch *Lagrange* hat die *Lambert*'schen Kettenbrüche und einige ähnliche durch Integration von Differentialgleichungen abgeleitet, Berl. Mém. 1776, p. 236 (Oeuvres 4, p. 320).

suchung von $\lim \frac{A_n}{B_n}$ wirklich deren *Gültigkeit* beweist[419]). Bei *Legendre*[420]), welcher das *Lambert*'sche *Divisions*-Verfahren durch ein kürzeres *rekursorisches* ersetzt, findet sich von einem derartigen Beweise keine Spur; auch nicht einmal bei *Gauss*[421]), der die *Legendre*'sche Methode auf Quotienten von der Form: $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$ und ähnliche übertragen hat; dabei bezeichnet das Symbol F die sog. *hypergeometrische Reihe:*

$$(109) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 \cdots.$$

Durch die Annahme $\beta = 0$ ergiebt sich sodann, wegen $F(\alpha, 0, \gamma, x) = 1$, für die Reihe:

$$(110) \qquad F(\alpha, 1, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \cdot x^2 + \cdots$$

eine Kettenbruchentwickelung von der Form[422]):

$$(111) \qquad 1 - \frac{a_1 x|}{|1} - \frac{a_2 x|}{|1} - \cdots, \quad \text{wo:} \quad a_1 = \frac{\alpha}{\gamma}, \quad a_2 = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma(\gamma+1)},$$

$$a_{2\nu+1} = \frac{(\alpha+\nu)(\gamma+\nu-\alpha)}{(\gamma+2\nu-1)(\gamma+2\nu)}, \quad a_{2\nu+2} = \frac{(\nu+1)(\gamma+\nu-\alpha)}{(\gamma+2\nu)(\gamma+2\nu+1)}.$$

Ein allgemeiner Konvergenz- und Gültigkeitsbeweis dieser Entwickelungen ist durch *Heine*'s Untersuchungen über das Bildungsgesetz der betreffenden *Näherungsbrüche*[423]) vorbereitet und von

---

419) Vgl. Münch. Ber. 28 (1898), p. 331. Auf dem *Lambert*'schen Divisionsverfahren beruhen auch die Kettenbruchentwickelungen von *Bret* (Gergonne Ann. 9 [1818], p. 45) und *Gergonne* (ibid. p. 263). Letzterer behandelt die der *Gauss*schen Reihe (110) verwandte *Stainville*'sche (ibid. p. 229):

$$f(\alpha, \gamma) = 1 + \frac{\alpha}{1} \cdot x + \frac{\alpha \cdot (\alpha+\gamma)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{\alpha(\alpha+\gamma)(\alpha+2\gamma)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \cdots$$

und gewinnt u. a. vermöge der Relation: $f(\alpha, \gamma) \cdot f(\beta, \gamma) = f(\alpha+\beta, \gamma)$ verschiedene merkwürdige Beziehungen für Produkte, Potenzen und Quotienten von Kettenbrüchen.

420) Élém. de Géom. Note IV.

421) Disquis. gen. circa seriem inf. 1812 (Werke 3, p. 134).

422) Dieselbe enthält die Kettenbruchentwickelungen für $(1+x)^m$, $\lg(1+x)$, e^x u. a. als spezielle Fälle, während der allgemeinere Fall $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$ u. a. die *Lambert*'schen Kettenbrüche liefert.

423) J. f. Math. 34 (1847), p. 301; 57 (1860), p. 231. *Heine* dehnt zugleich die Untersuchung auf die von ihm eingeführte (a. a. O. 32 [1846], p. 210) *verallgemeinerte hypergeometrische Reihe* aus:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = 1 + \frac{(q^\alpha - 1)(q^\beta - 1)}{(q-1)(q^\gamma - 1)} x + \frac{(q^\alpha - 1)(q^{\alpha+1} - 1)(q^\beta - 1)(q^{\beta+1} - 1)}{(q-1)(q^2-1)(q^\gamma - 1)(q^{\gamma+1} - 1)} x^2 + \cdots,$$

W. Thomé durch direkte Bestimmung von $\lim \frac{A_n}{B_n}$ wirklich geliefert worden[424]). Die Skizze eines anderen durchaus funktionentheoretischen Beweises hat sich in *Riemann*'s Nachlasse vorgefunden[425]). Elementare Beweise für besondere Fälle geben *Stern*[426]) und (besser) *Schlömilch*[427]) in ihren Lehrbüchern.

Die allgemeinere Aufgabe, eine *beliebige* Potenzreihe $\sum_0^\infty {}^\nu c_\nu x^\nu$, deren reziproken Wert oder den Quotienten zweier solcher Potenzreihen in einen Kettenbruch von der Form: $\left[b_0;\ \frac{x}{b_\nu}\right]_1^\infty$ (wo b_0, b_ν von x unabhängig) zu entwickeln, ist von *Stern*[428]) und mit besserem Erfolge von *O. Heilermann*[429]) behandelt worden. Letzterer giebt auch für den Quotienten von $\sum_0^\infty {}^\nu c_\nu x^{-\nu}$, $\sum_0^\infty {}^\nu d_\nu x^{-\nu}$ eine Darstellung von der Form: $\left[b_0;\ -\frac{a_\nu}{x+b_\nu}\right]_1^\infty$.[430]) Beide Arten von Entwickelungen sind (ähnlich wie die regelmässige einer Irrationalzahl) nur auf eine einzige Weise möglich. Ihren allgemeinen Charakter und gegenseitigen Zusammenhang hat *Heine* genauer festgestellt[431]).

(NB. Im vorstehenden wurden fast ausschliesslich solche Arbeiten

---

welche für $\lim q = 1$ in die *Gauss*'sche übergeht. — Vgl. auch: Kugelf. 1, p. 280. *J. Thomae,* J. f. Math. 70 (1869), p. 278.

424) Für den besonderen Fall (110), (111): J. f. Math. 66 (1866), p. 322; für den allgemeineren des Reihenquotienten: ibid. 67 (1867), p. 299. Die Kettenbrüche konvergieren für alle x mit Ausschluss des reellen Intervalles $(1, \infty)$ und stellen die durch die Reihen definierte Funktion bezw. deren analytische Fortsetzung dar.

425) Werke p. 400. Der auf complexer Integration beruhende Beweis ist vom Bearbeiter dieses Fragments *H. A. Schwarz* einigermassen ergänzt worden.

426) Algebr. Anal. p. 467.

427) Algebr. Anal. p. 321. Vgl. auch *Stolz* 2, p. 310.

428) A. a. O. 10, p. 245.

429) Ibid. 33 (1846), p. 174. *Stern* giebt nur eine *Rekursionsformel, Heilermann* dagegen eine *independente* Darstellung der b_ν. Beide haben auch das umgekehrte Problem (Umformung von $\left[b_0;\ \frac{x}{b_\nu}\right]_1^\infty$ in $\sum_0^\infty {}^\nu c_\nu x^\nu$) behandelt: a. a. O. 18 (1838), p. 69; 46 (1853), p. 88.

430) Der Fall einer einzigen Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu c_\nu x^{-\nu}$ bei *Herm. Hankel,* Z. f. Math. 7 (1862), p. 338; und *T. J. Stieltjes,* Toul. Ann. 3 (1889), p. 1.

431) Kugelf. 1, p. 268.

berücksichtigt, welche im wesentlichen mit *formalen* Methoden operieren. Die weitere Ausbildung der Beziehungen zwischen Reihen und Kettenbrüchen, sowie der entsprechenden Konvergenzbetrachtungen gehört, wie schon gelegentlich der *Gauss*'schen Reihe hervortrat, der Funktionentheorie an.)

56. Beziehungen zwischen unendlichen Kettenbrüchen und Produkten. Die Verwandelung eines unendlichen *Produktes* in einen äquivalenten Kettenbruch — und umgekehrt — kann entweder mittelst Durchganges durch die entsprechende *Reihe* oder auch *direkt* bewerkstelligt werden. Beide Methoden sind von *Stern* diskutiert worden[432]). Setzt man:

$$(112) \qquad \prod_1^n {}_\nu \frac{p_\nu}{q_\nu} = \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n = \frac{A_n}{B_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

so ergiebt sich:

$$(113) \qquad \frac{a_1}{b_1} = 1, \quad \frac{a_2}{b_2} = -\frac{p_1 - q_1}{p_1}, \quad \frac{a_3}{b_3} = -\frac{(p_2 - q_2)p_1 q_1}{p_1 p_2 - q_1 q_2},$$

$$\frac{a_{\nu+2}}{b_{\nu+2}} = -\frac{(p_{\nu-1} - q_{\nu-1})(p_{\nu+1} - q_{\nu+1}) \cdot p_\nu q_\nu}{p_\nu p_{\nu+1} - q_\nu q_{\nu+1}} \quad (\nu \geqq 2),$$

und hieraus die Entwickelung von $\prod_1^\infty {}_\nu \frac{p_\nu}{q_\nu}$ in einen konvergenten Kettenbruch, falls das Produkt selbst *konvergiert.* Da

$$\left(\prod \frac{p_\nu}{q_\nu}\right)^m = \prod \frac{p_\nu^m}{q_\nu^m},$$

so besitzt diese Gattung von Kettenbrüchen die merkwürdige Eigenschaft, dass deren m^{te} Potenz wiederum als Kettenbruch von der gleichen Form dargestellt werden kann[433]).

Umgekehrt ergiebt sich aus der Identität:

$$(114) \qquad \frac{A_n}{B_n} = \frac{A_1}{B_1} \cdot \prod_1^{n-1} {}_\nu \frac{A_{\nu+1} \cdot B_\nu}{A_\nu \cdot B_{\nu+1}}$$

die konvergente Produktentwickelung:

$$(115) \qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \prod_1^\infty {}_\nu \frac{A_{\nu+1} \cdot B_\nu}{A_\nu \cdot B_{\nu+1}},$$

---

432) A. a. O. 10, p. 266. Algebr. Anal. p. 321.

433) Man kennt keinen allgemeinen Satz über die Darstellung von Kettenbruchsummen, -produkten oder -potenzen. Über einige besondere Fälle vgl. Nr. 52, Fussn. 410; Nr. 55, Fussn. 419.

falls der betreffende Kettenbruch *konvergiert.* Mit Hülfe dieser Formel findet *Stern* u. a. aus Kettenbruchentwickelungen für e, $\frac{e}{e-1}$ eigentümliche Produktdarstellungen (nach Art der *Wallis*'schen Formel)[434]).

57. Aufsteigende Kettenbrüche. Setzt man:

$$(116)\qquad K^{(n)} = \frac{a_1 + r_1}{b_1}, \quad r_1 = \frac{a_2 + r_2}{b_2}, \quad \ldots$$
$$r_{n-2} = \frac{a_{n-1} + r_{n-1}}{b_{n-1}}, \quad r_{n-1} = \frac{a_n}{b_n},$$

so entsteht durch Elimination der r_ν ein sog. n-gliedriger *aufsteigender Kettenbruch:*

$$(117)\qquad K^{(n)} = \left\{\frac{a_\nu}{b_\nu}\right\}_1^n = \frac{a_1 + \dfrac{a_2 + \cdots + \dfrac{a_n}{b_n}}{b_2}}{b_1}.$$

Da andererseits, wie unmittelbar erkannt wird:

$$(118)\qquad \left\{\frac{a_\nu}{b_\nu}\right\}_1^n = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_1 b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_1 b_2 \cdots b_n},$$

so kann man einen solchen aufsteigenden Kettenbruch von vornherein durch dieses einfache Aggregat bezw., im Falle $\lim n = \infty$, durch die betreffende unendliche Reihe ersetzen[435]). Von bedeutenderen Mathematikern haben sich nur *Lambert*[436]) und *Lagrange*[437]) gelegentlich mit dieser Gattung von Ausdrücken beschäftigt. Letzterer hat insbesondere auf deren Zusammenhang mit den gewöhnlichen Kettenbrüchen aufmerksam gemacht, wobei es ihm (wie auch den späteren Bearbeitern dieser Theorie) entgangen zu sein scheint, dass dieser Zusammenhang schon vollständig durch die *Euler*'sche Formel (104) festgestellt erscheint. Die letztere (welche ja auch gilt, wenn man n statt ∞ setzt) liefert unmittelbar die Beziehung:

$$(119)\quad \left\{\frac{a_\nu}{b_\nu}\right\}_1^n = \frac{a_1|}{|b_1} - \frac{a_2 b_1|}{|a_1 b_2 + a_2} - \cdots - \frac{a_{\nu-2} a_\nu b_{\nu-1}|}{|a_{\nu-1} b_\nu + a_\nu} - \cdots - \frac{a_{n-2} a_n b_{n-1}|}{|a_{n-1} b_n + a_n},$$

434) Vgl. auch Nr. **44**, Fussn. 316.

435) Darnach können umgekehrt die endlichen oder unendlichen systematischen Brüche, die Potenzreihen für e^a, $\cos a$, $\sin a$, ferner die in Nr. **10** erwähnten Reihendarstellungen der rationalen und irrationalen Zahlen auch als aufsteigende Kettenbrüche betrachtet werden.

436) Beyträge zum Gebr. der Math. Teil II, Berlin 1770, p. 104.

437) Zur Lösung der Aufgabe: einen gegebenen Bruch mit möglichster Annäherung durch einen solchen mit vorgeschriebenem Zähler oder Nenner darzustellen (J. Polyt. Cah. 5 [1798], p. 93. Oeuvres 7, p. 291).

aus welcher sich mit Leichtigkeit alle weiteren Eigenschaften der aufsteigenden Kettenbrüche und ihrer Näherungsbrüche ergeben[438]).

58. Unendliche Determinanten: Historisches. Das Problem, ein System von *unendlich vielen* Lineargleichungen mit unendlich vielen Unbekannten aufzulösen[439]) und die bekannte Auflösungsmethode für ein *begrenztes* System dieser Art mit Hülfe von *Determinanten* haben naturgemäss auf die Betrachtung *„unendlicher" Determinanten* geführt. Der Versuch, diese Lösungsform *endlicher* Linearsysteme auf *unendliche* zu übertragen, ist wohl zuerst von *Th. Kötteritzsch* gemacht worden[440]). Das Wesen seiner Methode besteht darin, dass er ein beliebig vorgelegtes Linearsystem von der Form:

$$(120) \qquad \sum_1^\infty{}_\nu\, a_\mu^{(\nu)} x_\mu = y_\mu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots \text{ in inf.})$$

in ein anderes:

$$(121) \qquad \sum_1^\infty{}_\nu\, b_\mu^{(\nu)} x_\mu = z_\mu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

transformiert, wo $b_\mu^{(\nu)} = 0$, so lange: $\mu < \nu$ (d. h. wo alle Koefficienten links von der Hauptdiagonale verschwinden). Dieses letztere, dessen Determinante sich auf den einfachen Ausdruck $\prod_1^\infty{}_\nu\, b_\nu^{(\nu)}$ reduziert, kann (unter geeigneten, a. a. O. ganz unzureichend erörterten Konvergenzbedingungen) unmittelbar aufgelöst werden; und aus dem Umstande, dass diese Lösungen x_μ auch dem ursprünglichen Systeme (120) genügen müssen, lassen sich bestimmte Schlüsse auf den Wert (welcher

---

438) Im übrigen vgl. *S. Günther*, Verm. Unters. zur Gesch. der math. Wissenschaften. Leipzig 1876. (Kap. II. Die Lehre von den aufsteig. Kettenbrüchen in ihrer geschichtl. Entw. p. 93 ff.)

439) Dieses Problem kommt, allgemein zu reden, überall da zum Vorschein, wo es sich um Reihenentwickelungen nach der *Methode der unbestimmten Koefficienten* handelt. Dabei wird es in dem vorliegenden Zusammenhange so aufgefasst, dass die für ein System von n Gleichungen geltende Lösung durch einen (allemal noch speziell zu legitimierenden) *Grenzübergang* auf den Fall $n = \infty$ übertragen wird. Ein erstes Beispiel dieser Art liefert die Bestimmung der *Fourier*'schen Reihenkoefficienten auf dem von *Lagrange* vorgezeichneten (Oeuvres 1, p. 80), aber (trotz der scheinbar widersprechenden Stelle l. c. p. 553 — vgl. *Riemann*'s Bemerkungen, Werke p. 219) nicht bis zum Grenzübergange durchgeführten Wege (s. *Riemann-Hattendorff*, Part. Diff.-Gleichungen § 22). Ein anderes einfaches Beispiel ähnlicher Art (Reihenentwickelung der elliptischen Funktionen) giebt *P. Appell:* Bullet. Soc. Math. d. Fr. 13 (1885), p. 13. Vgl. auch die sich unmittelbar daran anschliessende Note von *Poincaré*.

440) Z. f. Math. 15 (1870), p. 1—15. 229—268.

$= \prod_1^\infty {}_\nu\, b_\nu^{(\nu)}$ gefunden wird) und die Eigenschaften der aus den $a_\mu^{(\nu)}$ gebildeten unendlichen Determinante und ihrer Unterdeterminanten ziehen. Obschon die fraglichen Arbeiten an mancherlei Unzulänglichkeiten und sogar wirklichen Unrichtigkeiten leiden, so haben sie schwerlich die völlige Nichtbeachtung verdient, die ihnen von allen späteren Bearbeitern dieses Gegenstandes zu teil geworden ist. Gewöhnlich wird die Einführung der unendlichen Determinanten dem amerikanischen Astronomen *G. W. Hill* zugeschrieben, der dieselben in einer Arbeit über Mondbewegung[441]) rein formal (d. h. ohne genügende analytische Begründung und die nötige Konvergenzuntersuchung, aber mit grossem praktischen Erfolge) dazu benützt hat, eine lineare Differentialgleichung durch Auflösung eines unendlichen Linearsystems zu integrieren. Die fragliche Lücke ist übrigens bald darauf durch *Poincaré* ausgefüllt worden[442]). Letzterer giebt insbesondere den Konvergenzbeweis für die in Betracht kommende Klasse unendlicher Determinanten, welche dadurch charakterisiert ist, dass die Glieder $a_\nu^{(\nu)}$ der Hauptdiagonale (mit eventuellem Ausschlusse einer endlichen Anzahl) durchweg den Wert 1 haben, während die Gesamtheit der übrigen Glieder (mit eventuellem Ausschlusse einer endlichen Anzahl von Zeilen oder Kolonnen) eine absolut konvergente Doppelreihe bilden. Dieser nämlichen Klasse von Determinanten hat sich sodann auch *Helge von Koch* zur Koefficientendarstellung der Integrale linearer Differentialgleichungen bedient[443]) und ist im weiteren Verlaufe dieser Untersuchungen auf die Betrachtung einer etwas allgemeineren, von ihm als *Normalform* bezeichneten Klasse näher eingegangen[444]); an die Stelle der Bedingung $a_\nu^{(\nu)} = 1$ tritt hier die absolute Konvergenz von $\prod_{-\infty}^{+\infty} {}_\nu\, a_\nu^{(\nu)}$. Ausser der Entwickelung ihrer Haupteigenschaften giebt er auch Anwendungen auf unendliche homogene Linearsysteme und lineare Differentialgleichungen[445]). Schliesslich hat *T. Cazzaniga*[446])

441) Acta math. 8 (1886), p. 26. (Im wesentlichen, Abdruck einer Monogr. Cambridge Mass. [U. S. A.], 1877).

442) Bullet. S. M. d. F. 14 (1886), p. 87.

443) Acta math. 15 (1891), p. 56.

444) Ibid. 16 (1892—93), p. 219.

445) Anwendungen auf nicht-homogene Linearsysteme ibid. 18 (1894), p. 377; desgl. auf Kettenbrüche (im Anschlusse an die Nr. 46 erwähnte Determinantendarstellung der A_ν, B_ν) C. R. 120 (1895), p. 144. — Einige Bemerkungen über eine etwas allgemeinere Form konvergenter Determinanten nebst Anwendungen auf die Konvergenzbestimmung gewisser Potenzreihen giebt *G. Vivanti*, Ann. di Mat. (2), 21 (1893), p. 27.

in einer umfangreichen Arbeit eine zusammenhängende Theorie der unendlichen Determinanten entwickelt, die ausser den *Koch*'schen Resultaten noch mannigfache Ergänzungen und Verallgemeinerungen enthält. Insbesondere wird hier der von *Koch* anfangs ausschliesslich betrachtete Typus (den ich Nr. 59 als „vierseitig-unendlichen" bezeichne) auf einen etwas einfacheren („zweiseitig-unendlichen"), übrigens späterhin gleichfalls von *Koch*[446a]) untersuchten zurückgeführt.

59. Haupteigenschaften unendlicher Determinanten. Es sei eine zweifach-unendliche Zahlenfolge $(a_\mu^{(\nu)})\ {\mu \atop \nu}\Big\} = -\infty \cdots +\infty$ vorgelegt und in Form eines vierseitig unbegrenzten Schemas angeordnet, derart, dass der obere Index eine bestimmte *Zeile*, der untere eine bestimmte *Kolonne* charakterisiert. Bildet man sodann die Determinante $(m+n+1)^{\text{ten}}$ Grades:

$$(122)\qquad D^{m,n} = \begin{vmatrix} a_{-m}^{(-m)} & \cdots & a_0^{(-m)} & \cdots & a_n^{(-m)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{-m}^{(0)} & \cdots & a_0^{(0)} & \cdots & a_n^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{-m}^{(n)} & \cdots & a_0^{(n)} & \cdots & a_n^{(n)} \end{vmatrix} = \left[a_\mu^{(\nu)}\right]_{-m}^{+n}{}_{(\mu,\nu)}$$

(d. h. diejenige, deren *Hauptdiagonale* aus den Termen $a_\nu^{(\nu)}$ von $\nu = -m$ bis $\nu = n$ besteht), so heisst die *vierseitig-unendliche*[447]) *Determinante der* $(a_\mu^{(\nu)})$ *konvergent* und D ihr *Wert*, wenn (im Sinne von Nr. 20) $\lim\limits_{m=\infty, n=\infty} D_{m,n} = D$ (d. h. endlich oder Null) ist[448]), in Zeichen:

---

446) Ann. di Mat. (2), 26 (1897), p. 143. Vgl. auch: *E. H. Roberts,* Ann. of Math. 10 (1896), p. 35.

446a) Stockh. Acad. Bih. 22, No. 4, 1896.

447) Das Beiwort „vierseitig" wurde in Rücksicht auf das folgende von mir hinzugefügt.

448) Diese von *Cazzaniga* (a. a. O. p. 146) gegebene Konvergenzdefinition erscheint mir konsequenter und zweckmässiger, als die ursprünglich von *Poincaré* eingeführte (a. a. O. p. 85) und auch von *Koch* acceptierte, wonach die Determinante schon *konvergent* genannt wird, wenn nur $\lim\limits_{n=\infty} D_{n,n} = D$. Man pflegt ja auch eine Reihe von der Form $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}_\nu\, a_\nu$ erst *konvergent* zu nennen, wenn $\lim\limits_{m=\infty, n=\infty} \sum\limits_{-m}^{n}{}_\nu\, a_\nu = s$, nicht aber, wenn nur: $\lim\limits_{n=\infty} \sum\limits_{-n}^{+n}{}_\nu = s$. In der That wird auf diese Weise (ganz analog wie bei einer unendlichen Reihe der genannten Art) die Unabhängigkeit der Konvergenz und des Grenzwertes *von der Wahl des Anfangsgliedes* (vgl. *Cazzaniga* a. a. O. p. 151) erzielt, und es treten überhaupt erst die nötigen Analogien mit den *endlichen* Determinanten hervor. Im übrigen genügen die von *Poincaré* betrachteten, sowie die *Koch*'schen Normaldeterminanten *eo ipso* dieser engeren Definition (vgl. *Koch,* Acta math. 16, p. 221).

(123) $$\left[a_\mu^{(\nu)}\right]_{-\infty}^{+\infty}{}_{(\mu,\nu)} = D.$$

Eine solche *konvergente unendliche* Determinante besitzt dann ganz ähnliche Fundamentaleigenschaften, wie eine *endliche;* insbesondere:

Sie bleibt ungeändert, wenn man mit Festhaltung der Hauptdiagonale die Zeilen zu Kolonnen macht.

Bei Vertauschung zweier Zeilen oder Kolonnen geht lediglich D in $-D$ über[449]), bleibt also ungeändert, wenn man gleichzeitig zwei Zeilen und zwei Kolonnen vertauscht. Infolge dessen lässt sich die *vierseitig*-unendliche Determinante durch successives Transponieren der Zeilen und Kolonnen in eine *zweiseitig*-unendliche verwandeln, z. B. in eine solche mit der Hauptdiagonale: $a_0^{(0)} a_1^{(1)} a_{-1}^{(-1)} \cdots a_\nu^{(\nu)} a_{-\nu}^{(-\nu)} \cdots$, wenn man jede Zeile und Kolonne mit *negativem* Index *unter* bezw. *hinter* die entsprechende mit *positivem* Index setzt[450]). Umgekehrt kann eine *zweiseitig*-unendliche Determinante von der Form[451]):

(124) $$D = \lim_{n=\infty} D_n = \left[a_\mu^{(\nu)}\right]_1^\infty{}_{(\mu,\nu)}, \quad \text{wo:} \quad D_n = \left[a_\mu^{(\nu)}\right]_1^n{}_{(\mu,\nu)},$$

in eine konvergente *vierseitig*-unendliche transformiert werden, falls sie selbst *unbedingt*, d. h. in *dem* Sinne konvergiert, dass ihre Konvergenz durch Vertauschung von Zeilen oder von Kolonnen nicht alteriert wird[452]). Es genügt also, für alles weitere lediglich Determinanten dieser letzteren Form in Betracht zu ziehen. Multipliziert man alle Glieder einer Zeile oder Kolonne mit einem Faktor p, so geht D in $p \cdot D$ über. Allgemeiner findet man:

(125) $$\left[p_\mu q_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)}\right]_1^\infty{}_{(\mu,\nu)} = \prod_1^\infty{}^\mu \prod_1^\infty{}^\nu p_\mu \cdot q_\nu \cdot D,$$

falls das betreffende Produkt absolut konvergiert[453]).

Als *hinreichende* Bedingung für die unbedingte Konvergenz ergiebt sich die *absolute* Konvergenz von $\sum_1^\infty{}^\nu \sum_1^\infty{}^\mu a_\mu^{(\nu)}$ $(\mu \lesseqgtr \nu)$ und $\prod_1^\infty{}^\nu a_\nu^{(\nu)}$; [454])

---

449) Man hat also, gerade wie bei endlichen Determinanten, $D = 0$, wenn zwei Zeilen oder Kolonnen einander gleich sind.

450) *Cazzaniga* a. a. O. p. 153, Nr. 5.

451) Dieser etwas einfachere Typus bildet den Ausgangspunkt der *Poincaré*'schen Betrachtungen; a. a. O. p. 83.

452) *Koch* bezeichnet diese Eigenschaft als *absolute* Konvergenz (Acta math. 16, p. 229). Später (Stockh. Acad. Bih. 22) definiert er die *unbedingte* Konvergenz in etwas anderer Weise und giebt sowohl die *notwendigen und hinreichenden,* als auch lediglich *hinreichende* Bedingungen dafür an.

453) *Cazzaniga* a. a. O. p. 155, Nr. 7.

die Determinante heisst alsdann (nach dem Vorgange von *Koch*) eine *normale*. Eine *Normal*-Determinante bleibt *konvergent*, wenn man die Glieder einer *endlichen* Anzahl von *Zeilen* bezw. Kolonnen durch *beliebige endlich bleibende* Zahlen ersetzt[454]). Bezeichnet man als *Unterdeterminante* r^{ter} Ordnung diejenige Determinante, welche entsteht, wenn man sämtliche Glieder von r willkürlich gewählten Zeilen und ebensoviel Kolonnen durch 0, nur das der ϱ^{ten} Zeile und ϱ^{ten} Kolonne ($\varrho = 1, 2, \dots r$) gemeinsame Glied jedesmal durch 1 ersetzt, so folgt unmittelbar, dass *jede Unterdeterminante* einer *Normaldeterminante* wiederum eine *normale* ist. Ihr Wert stimmt, abgesehen von dem in jedem Falle bestimmbaren Vorzeichen, mit dem Werte derjenigen Determinante überein, welche aus der ursprünglichen durch blosse *Weglassung* der betreffenden Zeilen und Kolonnen entsteht. Bezeichnet man mit $A_\mu^{(\nu)}$ die Unterdeterminante *erster* Ordnung, welche durch die angegebene Modifikation der ν^{ten} Zeile und μ^{ten} Kolonne entsteht, so hat man:

$$(126) \qquad D = \sum_1^\infty{}^{\mu} A_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)} = \sum_1^\infty{}^{\nu} A_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu^{(\nu)}$$

$$(\nu = 1, 2, 3, \dots \quad \text{bezw.} \quad \mu = 1, 2, 3, \dots).$$ [455])

Diese Entwickelung, wie auch verschiedene andere Formen ergeben sich aus der unmittelbar Gl. (124) entspringenden Beziehung:

$$(127) \qquad D = D_1 + \sum_1^\infty{}^{\nu} (D_{\nu+1} - D_\nu).$$

Alle betreffenden Entwickelungen sind *absolut* konvergent. Der Wert einer Normaldeterminante wird nicht geändert, wenn man die Glieder $a_\mu^{(n)}$ der n^{ten} Zeile durch $a_\mu^{(n)} + \sum{}^{\nu} c_\nu a_\mu^{(n_\nu)}$ ersetzt (dabei darf die Summation auch über *unendlich* viele ganze Zahlen n_ν — excl. $n_\nu = n$ — erstreckt werden, sofern nur die $|c_\nu|$ unter einer endlichen Zahl bleiben). Das *Produkt* zweier Normaldeterminanten lässt sich wiederum durch eine *Normal*-Determinante darstellen, nämlich:

$$(128) \qquad \left[a_\mu^{(\nu)}\right]_1^\infty \cdot \left[b_\mu^{(\nu)}\right]_1^\infty = \left[c_\mu^{(\nu)}\right]_1^\infty, \quad \text{wo:} \quad c_\mu^{(\nu)} = \sum_1^\infty{}^{\varkappa} a_\mu^{(\varkappa)} b_\nu^{(\varkappa)}.$$

Die in allen diesen Sätzen hervortretende Analogie mit der Lehre von den *endlichen* Determinanten erstreckt sich *mutatis mutandis* auch auf

---

454) Diese Hauptsätze (nur mit der unwesentlichen Einschränkung $a_\nu^{(\nu)} = 1$) schon bei *Poincaré*.

455) Dagegen: $\sum_1^\infty{}^{\mu} A_\mu^{(\nu)} a_\mu^{(\varrho)} = 0, \quad \sum_1^\infty{}^{\nu} A_\lambda^{(\nu)} a_\mu^{(\nu)} = 0.$

die Beziehung von $\left[a_\mu^{(\nu)}\right]_1^\infty$ zu der sog. *reziproken* Determinante[456]): $\left[A_\mu^{(\nu)}\right]_1^\infty$.[457])

Von *konvergenten* Determinanten, welche *nicht* der Normalform angehören oder durch Abänderung einer endlichen Anzahl von Zeilen (Kolonnen) in dieselbe übergeführt werden können, hat *Koch* eine dazu in naher Beziehung stehende etwas allgemeinere Klasse hervorgehoben[458]), *Cazzaniga* eine andere mit dem speziellen Grenzwerte 0 genauer untersucht[459]).

---

456) Bei *Baltzer* (Determinanten § 6) als: Determinante des adjungierten Systems bezeichnet.

457) Näheres: *Cazzaniga* p. 187.

458) A. a. O. p. 235. Vgl. auch *Cazzaniga* p. 200. Die fraglichen Determinanten sind von der Form $\left[a_\mu^{(\nu)}\right]_1^\infty$, wo (bei geeigneter Wahl der Zahlen x_μ) für $\mu \lesseqgtr \nu$: $\sum\sum \frac{x_\mu}{x_\nu} \cdot a_\mu^{(\nu)}$ und $\prod a_\nu^{(\nu)}$ als absolut konvergent vorausgesetzt werden. *Vivanti* bezeichnet a. a. O. diese Klasse von Determinanten als „*normaloide*“.

459) A. a. O. p. 205. Auf diesen nämlichen Typus, welcher mit gewissen Untersuchungen von *S. Pincherle* (Ann. di Mat. (2), 12 [1884], p. 29) im Zusammenhange steht, bezieht sich eine neuere Arbeit desselben Verfassers: Ann. di Mat. (3), 1 (1898), p. 84.

Nachträge.

Zu p. 74, Fussn. 134. Weitere Verallgemeinerungen des fraglichen Grenzwertsatzes s. *J. L. W. Jensen,* Par. C. R. 106 (1888), p. 833. 1520; *Stolz,* Math. Ann. 33 (1889), p. 237; *E. Schimpf,* Bochum, Gymn.-Progr. 1845, p. 6.

Zu p. 79, Nr. **21**. Eine genügende Definition der Reihenkonvergenz hat schon *J. Fourier* in einer Abhandlung von 1811 (also vor *Bolzano* und *Cauchy*) gegeben: s. Par. Mém. 1819—20 [24], p. 326 (auch in die Théorie analytique de la chaleur übergegangen: Oeuvres 1, p. 156. 221). Freilich rechnet *Fourier* mit divergenten (ib. p. 149) und oscillierenden (p. 206. 234) Reihen ohne Skrupel.

Zu p. 105, Fussn. 277. Über asymptotische Darstellung von Integralen linearer Diff.-Gleichungen durch halbkonvergente Reihen vgl. *A. Kneser,* Math. Ann. 49 (1897), p. 389.

Zu p. 141, Fussn. 440. Vgl. *Fürstenau* a. a. O. p. 67. *Günther,* Determ. Cap. IV, § 6.

IA 4. THEORIE DER GEMEINEN UND HÖHEREN COMPLEXEN GRÖSSEN.

VON

E. STUDY

IN GREIFSWALD.

Inhaltsübersicht.

Vorbemerkung.

Die Theorie der *gemeinen* complexen Grössen bildet die Grundlage mehrerer der wichtigsten Zweige der Analysis, namentlich der Algebra und der Funktionentheorie. Sie wird daher in allen Lehrbüchern dieser Disciplinen, wie auch in den besseren Lehrbüchern der Infinitesimalrechnung abgehandelt. Wegen der grossen Zahl dieser Werke müssen wir auf eine Zusammenstellung ihrer Titel verzichten. In der Darstellung der Theorie selbst beschränken wir uns auf die ersten Elemente, und verweisen wegen weiterer Entwickelungen auf die Abschnitte I B und II B der Encyclopädie, ferner wegen specieller geometrischer und anderer Anwendungen auf die Artikel III A 7, III B 3 und III D 5, endlich auf die Bände IV und V. —

In der Theorie der Systeme von sogenannten *höheren* complexen Grössen bleiben die eigentlich geometrischen und physikalischen Anwendungen im Geiste von *W. R. Hamilton* und seinen Nachfolgern ebenfalls ausgeschlossen, da für die einen ein besonderer Artikel (III B 3) in Aussicht genommen ist, die anderen aber ebenfalls in den Bänden IV und V zur Sprache kommen werden. Hier werden nur die allgemeinen Sätze dargelegt, auf denen diese Anwendungen im letzten Grunde beruhen. Von Lehrbuchlitteratur dieses noch ziemlich neuen Zweiges der Algebra und Gruppentheorie wird daher nur zu nennen sein:

H. Hankel, Theorie der complexen Zahlen, Leipzig 1867. *S. Lie*, Vorlesungen über endliche continuierliche Gruppen, bearbeitet von *G. Scheffers*, Leipzig 1893 (Kap. 21). Nur auf einen sehr beschränkten Abschnitt dieser Theorie (§ 11 gegenwärtigen Artikels) bezieht sich eine Monographie von *B. Berloty*, Théorie des quantités complexes à n unités principales (Thèse. Paris 1886). Einiges darüber findet man auch bei *O. Stolz*, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, Bd. II, Leipzig 1886.

---

1. Imaginäre Grössen im 17. und 18. Jahrhundert. Der ursprüngliche Begriff der Zahl ist der der positiven ganzen Zahl. Wie nun das Bedürfnis nach einer einfacheren Darstellung und allgemeineren Ausführbarkeit gewisser Operationen schon in der elementaren Arithmetik mehrere Erweiterungen dieses einfachsten Zahlbegriffs veranlasst hat, indem zu den ganzen Zahlen die gebrochenen, zu den positiven die negativen, zu den rationalen die irrationalen „Zahlen“ oder „Grössen“ hinzugefügt wurden (I A 1 und I A 3), so hat dasselbe Bedürfnis zu einer ferneren Ausdehnung des Zahlbegriffs, zur Einführung der (gemeinen) „complexen“ Zahlen oder Grössen geführt: Man postulierte, um zunächst alle quadratischen Gleichungen wenigstens der Form nach auflösen zu können, die Quadratwurzel aus der negativen Einheit, die thatsächlich nicht vorhandene „Grösse“ $\sqrt{-1}$, als ein blosses Gedankending, ein Rechnungssymbol, eine „imaginäre“, „unmögliche“ Zahl. Mit diesem Symbol arbeitete man, mit allmählich wachsender Sicherheit, wie man es mit wirklichen Zahlgrössen zu thun gewohnt war. Dabei ergab sich ein doppelter Vorteil: Erstens zeigte es sich, dass nicht nur die Auflösung der quadratischen, sondern auch die der kubischen und biquadratischen Gleichungen mit Hülfe dieses Zeichens allgemein (formal) ausführbar wurde. Zweitens gelang es, durch Vermittelung des Symbols $\sqrt{-1}$ mehrere wichtige Funktionen der Analysis miteinander in Verbindung zu bringen. Das grösste Verdienst in dieser Periode der Theorie des Imaginären hat *L. Euler*, durch seine Entdeckung des Zusammenhanges der Exponentialfunktion mit den goniometrischen Funktionen, und durch seine daraus hervorgegangene Entscheidung der (ehemals) berühmten Streitfrage „Ob auch negative Zahlen Logarithmen haben?"[1])

Die Einführung der „imaginären" Grössen begegnete anfänglich vielen Bedenken. Diese bezogen sich indessen nicht eigentlich auf die Sache selbst, sondern auf die Art ihrer Herleitung und auf die unklaren Vorstellungen, die von Vielen damit verknüpft wurden, und die namentlich in dem von *K. F. Gauss* gerügten Gebrauch des Wortes „unmöglich" ihren Ausdruck gefunden haben. *Gauss* drückt sich über den Wert der imaginären Grössen anfangs nicht sehr bestimmt aus[2]); er hat sich aber jedenfalls sehr bald von ihrer Zulässigkeit und praktischen Unentbehrlichkeit überzeugt. Seine Autorität und die von ihm selbst gemachten Anwendungen auf Algebra und Zahlentheorie[3]), ferner die Arbeiten von *N. H. Abel* und *C. G. J. Jacobi* über elliptische Funktionen [II B 6 a] haben die erhobenen Zweifel endgültig zerstreut. Leider hat *Gauss* die von ihm versprochene Rechtfertigung der Einführung der „imaginären" oder, wie er später lieber sagte, *„complexen"*[3]) Grössen niemals geliefert; und das ist wohl der Grund dafür, dass man auch heute noch in verbreiteten Lehrbüchern eine Art der Darstellung antrifft, der man schwer entnehmen kann, was nach Ansicht der Verfasser Definition und was Folgerung sein soll.

2. Rechnen mit Grössenpaaren. Bei Einführung der complexen oder imaginären Grössen verfährt man am besten nach dem Vorgang von *W. R. Hamilton*[4])[5]) in rein arithmetischer Weise, da so die Einmischung ungehöriger Vorstellungen mit Sicherheit vermieden werden kann.

Wir betrachten eine einzelne — positive oder negative, rationale oder irrationale — Grösse a als besonderen Fall eines geordneten, d. h. in bestimmter Reihenfolge gesetzten *Grössenpaares* (a, α); wir

---

1) Wegen der Geschichte der Theorie des Imaginären s. *H. Hankel,* Theorie der complexen Zahlensysteme (Lpz. 1867), Abschnitt V. *E. Kossak,* Elemente der Arithmetik (Progr. Berl. Fried. Werd. Gymn. 1872). *R. Baltzer,* J. f. Math. 94 (1883), p. 87. *L. Janssen van Raay,* Arch. Teyler 4 (1894), p. 53. *A. Ramorino,* Giorn. di mat. 35 (1897), p. 233.

2) S. *Gauss'* Dissertation (Demonstratio nova etc.) Helmstedt 1799 = Werke 3, p. 3; deutsch von *E. Netto*, in *Ostwald*'s Klassikern Nr. 14 (Lpz. 1890). Insbesondere kommt in Betracht die Anmerkung zu Nr. 3.

3) Theoria residuorum biquadraticorum II und die Selbstanzeige zu dieser Abhandlung (1831). Werke 2, p. 169. — Wegen des Vorkommens des Zeichens i für $\sqrt{-1}$ bei *L. Euler* s. die Abh. „De formulis differentialibus . . .", Petrop. Acta (5. Mai) 1777, abgedruckt in Instit. Calculi Integralis, ed. tertia, Petrop. 1845, vol. 4, p. 183, bes. p. 184; vgl. *W. Beman*, Am. Bull. 4 (1898) p. 274.

4) Dubl. Trans. 17 (1837), p. 393.

5) Lectures on Quaternions (Dublin, 1853). Vorrede.

betrachten sie nämlich als ein Grössenpaar, dessen zweite Grösse α den Wert Null hat. Wir schreiben demgemäss $a = (a, 0)$. Die Regeln des gewöhnlichen Rechnens lassen sich dann in folgender Weise auf beliebige Grössenpaare (a, α), (b, β) u. s. w. ausdehnen:

Zwei Grössenpaare (a, α) und (a', α') werden dann und nur dann einander gleich gesetzt, $(a, \alpha) = (a', \alpha')$, wenn $a = a'$ und $\alpha = \alpha'$ ist. Es wird ferner die „Summe" zweier Grössenpaare (a, α) und (b, β) definiert durch die Formel:

(1) $$(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b,\ \alpha + \beta).$$

Weiter wird das „Produkt" eines Grössenpaares (a, α) und einer einzelnen Grösse $m = (m, 0)$ (s. oben) erklärt durch die Formel

(2) $$m \cdot (a, \alpha) = (a, \alpha) \cdot m = (ma, m\alpha).$$

Aus diesen naheliegenden Festsetzungen folgt sofort, dass ein jedes Grössenpaar sich aus zwei „unabhängigen" Grössenpaaren — sogenannten *Einheiten* — durch Multiplikation dieser Grössenpaare mit einfachen Grössen und nachfolgende Addition zusammensetzen lässt. Man hat zufolge (1) und (2):

(3) $$(a, \alpha) = a \cdot (1, 0) + \alpha (0, 1);$$

oder, da nach obiger Definition $(1, 0) = 1$ ist, bei Einführung des neuen Zeichens i für die zweite Einheit $(0, 1)$

(3*) $$(a, \alpha) = a + i\alpha.$$

Alles dieses lässt sich offenbar ohne weiteres auf Grössentripel, Grössenquadrupel u. s. f. ausdehnen.

Man kann nun aber neben die gelehrte Addition der Zahlenpaare noch eine andere Art der Verknüpfung stellen, die die gewöhnliche Multiplikation zweier einfacher Grössen, sowie die durch (2) gegebene „Multiplikation" einer einfachen Grösse und eines Grössenpaares umfasst, und wegen ihrer sonstigen Analogie mit der gewöhnlichen Multiplikation ebenfalls noch als „Multiplikation" der Grössenpaare bezeichnet wird[6]): *Das „Produkt" zweier Grössenpaare* (a, α) *und* (b, β) *wird erklärt durch die Formel*

(4) $$(a, \alpha) \cdot (b, \beta) = (ab - \alpha\beta, a\beta + b\alpha),$$

oder, bei Verwendung des eben angeführten Zeichens i, durch die äquivalente Formel

(4*) $$(a + i\alpha)(b + i\beta) = ab - \alpha\beta + (a\beta + b\alpha)i. \text{ —}$$

6) In allgemeinerem Sinne noch als in der Theorie der Systeme complexer Grössen werden die Worte Produkt und Multiplikation von *H. Grassmann* und anderen verwendet. Wir verweisen auf *Grassmann*'s Ges. Werke und insbesondere auf den Aufsatz „Sur les divers genres de multiplication", J. f. Math. 49 (1855), p. 123.

Die Definition der Multiplikation der Grössenpaare durch die Formel (4) hat zunächst den Anschein der Willkür. Man sieht nicht sogleich, warum unter einer Menge verschiedener scheinbar gleichwertiger Bestimmungen gerade diese herausgegriffen wird. Dieser Anschein verschwindet indessen bei näherer Untersuchung, wobei sich zeigt, dass obige Festsetzung in der That vor anderen ausgezeichnet ist. (S. Nr. **11**.)

Die Multiplikation der Grössenpaare genügt denselben formalen Regeln wie die Multiplikation der einfachen Zahlgrössen. Stellt man zur Abkürzung das Grössenpaar (a, α) oder $a + i\alpha$ durch ein einfaches Zeichen A dar, so sind, ganz wie bei einfachen Grössen a, b, c, ..., die (durch die Formeln (1) und (4) erklärten) Gleichungen

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \tag{5}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \tag{6}$$

$$A \cdot B = B \cdot A \tag{7}$$

erfüllt, die man heute allgemein als das *associative*, das *distributive* und das *commutative Gesetz der Multiplikation* bezeichnet[7]) (vgl. I A 1, Nr. **7**). Insbesondere folgt aus (4)

$$(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 1), \quad (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \tag{8}$$

oder

$$1 \cdot i = i, \quad i \cdot i = i^2 = -1; \tag{8*}$$

und es ist deutlich, dass diese Formeln (8), zusammen mit den aus dem gewöhnlichen Zahlenrechnen herübergenommenen Regeln (5), (6), (7), die Formel (4) vollständig ersetzen können. Es gilt endlich für die erklärte „Multiplikation" der Grössenpaare ganz wie für die Multiplikation der einfachen Grössen der Satz, dass ein Produkt nicht verschwinden kann, ohne dass einer seiner Faktoren verschwindet.

Gleicht somit das Rechnen mit Grössenpaaren dem Rechnen mit einfachen Grössen in wichtigen Beziehungen, so unterscheidet es sich doch von diesem in einem wesentlichen Punkte: Die Formel (8) oder (8*) zeigt, dass im Bereiche der Grössenpaare die Gleichung $X \cdot X = (-1, 0)$ oder $X^2 = -1$ lösbar ist, während eine einfache Grösse $X = (X, 0)$, die dieser Gleichung genügte, nicht existiert. Die angeführte Gleichung wird nämlich erfüllt durch das Grössenpaar $X = (0, 1) = i$, wie auch durch das Grössenpaar $X = (0, -1) = -i$, aber durch kein weiteres Grössenpaar. Die durch die Gleichung $x^2 = a$ ausgedrückte Forderung pflegt man in der elementaren Algebra

7) Wegen des muthmasslichen Ursprungs dieser Namen s. *Hankel*, Theorie der complexen Zahlensysteme (Leipzig 1867), Anmerkung auf p. 3.

auch durch das Zeichen $x = \sqrt{a}$ darzustellen. Es steht nichts im Wege, diese Bezeichnung auf das Rechnen mit Grössenpaaren auszudehnen. Man kann daher das bisher mit i bezeichnete Grössenpaar $(0, 1)$ auch mit $\sqrt{(-1,0)}$ oder kürzer mit $\sqrt{-1}$ bezeichnen. Das Grössenpaar $-i$ oder $(0, -1)$ muss dann das Zeichen $-\sqrt{(-1,0)}$ oder $-\sqrt{-1}$ erhalten, wobei natürlich das Vorzeichen der Wurzel in allen Rechnungen festzuhalten ist, so dass das einmal mit $\sqrt{-1}$ bezeichnete Grössenpaar nicht mit $-\sqrt{-1}$ verwechselt werden kann. Es ist aber seit *Gauss*[3]) üblich geworden, die genannten beiden speciellen Grössenpaare durch die von *Euler* eingeführten Zeichen i und $-i$ darzustellen, wie wir es bereits gethan hatten.

3. Gemeine complexe Grössen. Der heute in der Analysis allgemein gebräuchliche Begriff der (gewöhnlichen) „*complexen*" oder „*imaginären*" Grösse unterscheidet sich von dem in Nr. 2 erklärten Begriff des Grössenpaares gar nicht; nur die *Terminologie* ist eine andere. Man hat es zweckmässig gefunden, dem Singularis „Grösse" einen erweiterten Sinn beizulegen, und, was wir bisher „Grössenpaar" nannten, ebenfalls noch als „Grösse" zu bezeichnen. Der Begriff des Dualis wird dann in das Beiwort „complex" verlegt: Die einfache Grösse $a = (a, 0)$, die einzige Zahlgrösse, die die elementare Arithmetik kennt, heisst nunmehr zum Unterschiede von der complexen oder imaginären „Grösse" eine „*reelle*" Grösse. Die Nützlichkeit dieser auf den ersten Blick jedenfalls befremdlichen Redeweise kann im Grunde nur durch den Aufbau der gesamten Analysis dargethan werden; wir begnügen uns hier mit dem Hinweise auf die Umgestaltung und Erweiterung, die der Fundamentalsatz der Algebra [I B 1, 3] bei Einführung dieser Terminologie erfährt. Während man im Gebiete der gewöhnlichen (sog. reellen) Grössen nur sagen kann, dass eine ganze Funktion n^{ten} Grades einer Veränderlichen x als Produkt von ganzen Funktionen ersten oder zweiten Grades dargestellt werden kann, gilt im Gebiete der complexen Grössen der einfachere Satz, dass jede solche Funktion ein Produkt von Funktionen ersten Grades ist; und zwar gilt dieser Satz auch für ganze Funktionen mit complexen Coefficienten. —

Gänzlich verschieden von der hier vorgetragenen Exposition ist der Vorschlag *A. Cauchy*'s, i als eine reelle *veränderliche* Grösse aufzufassen, und an Stelle von Gleichungen Congruenzen nach dem Modul $i^2 + 1$ zu betrachten[8]). Zwei ganze rationale Funktionen der (reellen) Veränderlichen i heissen nach dem allgemeinen Congruenzbegriff dann

8) *Cauchy*, Exercises d'analyse et de physique math. 4 (1847), p. 84.

congruent nach dem Modul i^2+1 („äquivalent" nach *Cauchy*), wenn sie, durch i^2+1 geteilt, denselben Rest lassen. An Stelle der Gleichung (4*) z. B. tritt dann die Congruenz

$$(a+i\alpha)(b+i\beta) \equiv (ab-\alpha\beta)+i(a\beta+b\alpha) \quad \text{mod.}\,(i^2+1).$$

Dieser Gedanke ist neuerdings noch von *L. Kronecker* verallgemeinert worden[9]). [Vgl. B 1, 3; C 5.] Ob und wie weit er sich ausserhalb des Bereiches der Algebra als brauchbar erweist, darüber liegen Untersuchungen zur Zeit nicht vor.

4. Absoluter Betrag, Amplitude, Logarithmus. Die Zahl Eins wird die reelle, i die *imaginäre*, auch wohl „laterale" Einheit genannt. Ist $z=x+iy$ irgend eine complexe Grösse, so heisst x *der reelle*, iy *der imaginäre Bestandteil von* z. Der reelle Bestandteil wird nach *K. Weierstrass* (Vorlesungen) vielfach mit $\Re(z)$ bezeichnet. Ist $y=0$, so heisst die Grösse z, wie gesagt, reell, ist $x=0$, so heisst sie „rein imaginär". Der positive Wert der Quadratwurzel $\sqrt{x^2+y^2}$ wird „Modul" (*Cauchy*, An. alg. 1821, cap. 7, § 2), besser — wegen der Vieldeutigkeit dieses Wortes — nach *Weierstrass „absoluter Betrag"* der Zahl z genannt, und durch mod. z, abs. z, meist aber (nach *Weierstrass*) durch das Zeichen $|z|$ dargestellt. Das Quadrat dieser reellen Grösse — also die Summe x^2+y^2 — wird nach *Gauss* die *„Norm"* von z genannt[3]) und vielfach mit $N(z)$ bezeichnet.

Je zwei complexe Grössen von der Form $x+iy$ und $x-iy$ heissen *„conjugiert-complex"* oder *„conjugiert-imaginär"*. (*Cauchy*, An. alg. cap. 7, § 1.) Wird die erste z genannt, so wird die zweite vielfach mit $\bar{z}$ bezeichnet. Das Produkt zweier conjugiert-complexer Grössen ist reell und gleich der Norm einer jeden von ihnen, $z\cdot\bar{z}=x^2+y^2$. Die eindeutig bestimmte complexe Grösse, die mit z multipliciert die Zahl Eins liefert, wird der *„reciproke Wert"* von z genannt, und mit $\frac{1}{z}$ oder z^{-1} bezeichnet; es ist

$$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2} \quad (|z| \neq 0).$$

Jede complexe Grösse $z=x+iy$ kann auf die Form

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

gebracht werden, wo $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ den absoluten Betrag, und φ einen reellen, bis auf Vielfache von 2π bestimmten Winkel bedeutet. (*Euler, Jean le Rond d'Alembert.* S. Anm. 1.) Der zweite Faktor des Ausdruckes wird zuweilen „Richtungscoefficient" genannt (expres-

9) J. f. Math. 100 (1887) p. 490, vgl. 101, p. 337. *J. Molk,* Acta Math. 6 (1884), p. 8. Vgl. ferner unsere Anmerkung 33, sowie I A 3 Anm. 42.

sion reduite n. Cauchy); der Winkel φ selbst heisst „*Amplitude*“, auch „Argument“, „Abweichung“, „Anomalie“, „Azimuth“, „Arcus“ der complexen Grösse z. „*Hauptwert*“ der Amplitude heisst der Wert von φ, der den Ungleichungen $-\pi < \varphi \leqq +\pi$ genügt. Ist

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \text{so ist}$$
$$(9) \qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Für Grössen von der besonderen Form $\cos\varphi + i\sin\varphi$ gilt die sogenannte *Moivre'sche Formel*:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) = \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi).$$

Mit Ausnahme der Null lässt sich ferner jede complexe Grösse z durch eine andere complexe Grösse ζ in der Gestalt

$$(10) \qquad z = e^{\zeta} = 1 + \zeta + \frac{1}{1\cdot 2}\cdot\zeta^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\zeta^3 + \cdots$$

darstellen (II B 1). Wegen der durch die Formeln $e^{\zeta_1}\cdot e^{\zeta_2} = e^{\zeta_1+\zeta_2}$ und $e^{2\pi i} = 1$ ausgedrückten Eigenschaften der Exponentialfunktion ist dabei die complexe Grösse ζ nur bis auf Vielfache von $2\pi i$ bestimmt. Diese unendlich vieldeutige Grösse wird der *Logarithmus* von z genannt, und durch das Zeichen $\zeta = \log z$ oder $\zeta = \lg z$ oder endlich $\zeta = \mathrm{l}\, z$ dargestellt. „*Hauptwert*“ des Logarithmus heisst der Wert von ζ, dessen imaginärer Bestandteil, geteilt durch i, grösser als $-\pi$ und kleiner als oder gleich $+\pi$ ist $\left(-\pi < \Re\left(\frac{\zeta}{i}\right) \leqq \pi\right)$. Der Hauptwert des Logarithmus einer reellen positiven Grösse ist reell und identisch mit dem *natürlichen* (Neper'schen) Logarithmus (I A 1, 3); der Hauptwert des Logarithmus einer negativen reellen Grösse hat den imaginären Bestandteil $i\pi$. Eine imaginäre Grösse, deren absoluter Betrag den Wert Eins hat, hat rein imaginäre Logarithmen und umgekehrt. Allgemeiner ist, sobald wir unter $\lg r$ irgend einen Wert des Logarithmus der positiven Grösse r verstehen,

$$(11) \qquad \begin{aligned} &\zeta \equiv \lg r + i\varphi \quad (\text{mod. } 2i\pi), \quad \text{wenn} \\ &z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (r = |z|). \end{aligned}$$

An Stelle der Congruenz tritt hier die Gleichung $\zeta = \lg r + i\varphi$, wenn man für die Amplitude φ, wie auch für den Logarithmus ζ deren Hauptwerte setzt. Für $r = 1$ ergiebt sich aus (11) die *Euler*'sche Gleichung

$$(12) \qquad e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

die übrigens auch für complexe Werte des Argumentes φ Gültigkeit hat. (*Introductio in anal. inf.*; vgl. Anm. 1.)

Durch die zusammengehörigen Formeln

$$(13) \qquad z_1\cdot z_2 = z_3, \quad \zeta_1 + \zeta_2 \equiv \zeta_3 \quad (\text{mod. } 2i\pi)$$

wird vermöge der Logarithmen die Multiplikation der complexen Grössen auf eine Addition zurückgeführt.

5. Darstellung der complexen Grössen durch Punkte einer Ebene. Das Rechnen mit den complexen Grössen lässt sich anschaulich auffassen, wenn man sich einer geometrischen Vorstellungsweise bedient[10]). Diese besteht einfach darin, dass man die complexe Grösse $z = x + iy$ durch den Punkt einer Ebene darstellt, der die rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten x und y hat. Die in § 4 eingeführten Grössen r und φ sind dann Polarcoordinaten (III B 2) desselben Punktes. (S. Fig. 1.) Die Summe zweier complexer Grössen, d. h. der Punkt, der dieser Summe entspricht, wird dann durch die aus der elementaren Mechanik bekannte Parallelogrammconstruction (Fig. 2) gefunden; eine Regel, die man als (geometrische) *Addition der Strecken* (*Vectoren* der englischen Mathematiker) bezeichnet (III B 3). Um das Produkt zweier complexer Grössen

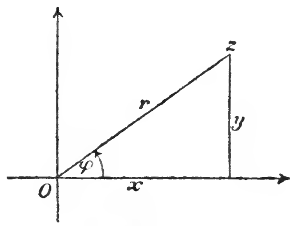


Fig. 1.

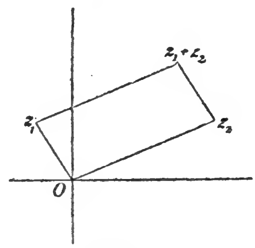


Fig. 2.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

---

10) Diese wurde bis vor kurzem *J. R. Argand* und *Gauss* zugeschrieben. Sie findet sich aber zuvor schon und zwar vollständig in einer 1797 der Dänischen Akademie eingereichten, 1798 gedruckten und 1799 erschienenen, aber erst neuerdings bekannt gewordenen Arbeit von *Caspar Wessel* (Om Directionens analytiske Betegning; reproduciert Arch. for Math. ok Nat. 18, 1896, sowie unter dem Titel: Essai sur la représentation de la direction, Copenhague 1897).

Gauss hat in seiner Dissertation (1799) die Darstellung der complexen Grössen durch Punkte einer Ebene benutzt, um daran gewisse Betrachtungen zu knüpfen, die dem heute als *Analysis situs* (III A 4) bezeichneten Gebiet angehören. Die geometrische Bedeutung der einfachsten Rechnungsoperationen wurde alsdann von *Argand* dargelegt (Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, Paris 1806), und nach *Wessel* und *Argand* auch von einer Reihe anderer Geometer (s. die zweite Ausgabe von *Argand*'s Schrift von *J. Hoüel*, Paris 1874). *Gauss* benutzt sie im Druck nicht vor 1825 (Abhandlung über Kartenprojektionen, Astron. Abh. von *Schumacher*, Heft 3, Altona 1825; Werke 4, p. 189; *Ostwald*'s Klassiker Nr. 55, Leipzig 1874). Vgl. indessen *Gauss*' Brief an *Bessel* vom 18. Dez. 1811.

Andere Darstellungsweisen des Imaginären, hierhergehörige Betrachtungen über Doppelverhältnisse, die sogenannte geometrische Theorie des Imaginären, ferner Anwendungen auf Funktionentheorie, reelle Geometrie, Zahlentheorie und Mechanik werden in den diese Gegenstände behandelnden Artikeln der Encyclopädie zu besprechen sein.

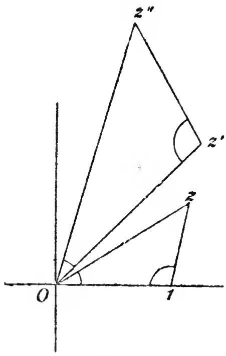


Fig. 3.

und

$$z' = r' (\cos \varphi' + i \sin \varphi')$$

darzustellen, drehe man die Strecke (r', φ') um den Winkel φ im positiven Sinn der Winkel, und vergrössere hierauf den Radius r' im Verhältnis $r:1$. Der so, mit Hülfe zweier ähnlicher Dreiecke, gefundene Punkt ist der, der das Produkt $z'' = zz'$ repräsentiert (Fig. 3).

Endlich wird der reciproke Wert von z in folgender Weise geometrisch bestimmt: Man unterwirft den Punkt z einer Transformation durch reciproke Radien (Inversion, III A 7) in Bezug auf den Kreis, der mit dem Radius Eins um den Anfangspunkt der Coordinaten beschrieben ist, und sucht hierauf das Spiegelbild des gefundenen Punktes in Bezug auf die x-Achse: der so ermittelte Punkt ist der, der die complexe Grösse $z' = \frac{1}{z}$ repräsentiert (Fig. 4).

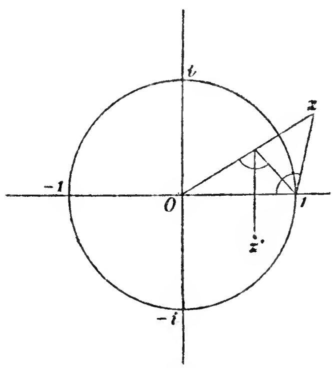


Fig. 4.

Hiernach kann man durch Construction das Bild einer jeden complexen Grösse ermitteln, die aus einer endlichen Anzahl von solchen durch die Operationen der Addition, Multiplikation und Division in endlicher Wiederholung entsteht.

6. Darstellung gewisser Transformationsgruppen mit Hülfe gewöhnlicher complexer Grössen. Die in Nr. 5 besprochene Deutung des Rechnens mit complexen Grössen durch geometrische, in einer Ebene auszuführende Operationen ist von Bedeutung geworden durch ihre zahlreichen Anwendungen in der Algebra, Funktionentheorie, Geometrie und mathematischen Physik. Wir bringen hier nur die Verwendung der gewöhnlichen complexen Grössen zur analytischen Darstellung gewisser *Transformationsgruppen* [s. durchweg Art. II A 6] einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zur Sprache.

Eine jede der Formeln

(14) $$x' = x + a,$$

(15) $$x' = ax,$$

(16) $$x' = ax + b,$$

(17) $$x' = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (ad - bc \neq 0),$$

stellt, wenn man die Grössen $a, b, \ldots$ als Parameter, x als unabhängige, x' als abhängige Veränderliche auffasst, die sämtlichen Transformationen einer nach der Terminologie von *S. Lie* endlichen continuierlichen *Gruppe* [II A 6] vor. Deutet man x etwa als Abscisse eines Punktes in einer geraden Linie, so stellt die Formel (17) die reellen Transformationen der dreigliedrigen sog. allgemeinen projectiven Gruppe dieser einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit dar, und die Formeln (14) bis (16) liefern alle „Typen" continuierlicher Untergruppen dieser Gruppe: (16) die zweigliedrige Gruppe aller der Transformationen von (17), die einen bestimmten Punkt — den Punkt ∞ — in Ruhe lassen; (15) die eingliedrige Untergruppe, bei der zwei Punkte — 0 und ∞ — in Ruhe bleiben; (14) endlich die Ausartung der letzten Gruppe, alle Transformationen der Gruppe (17) enthaltend, die einzeln einen bestimmten Punkt — den Punkt ∞ — und keinen weiteren in Ruhe lassen. Entsprechendes gilt, wenn man den Grössen x und x', wie auch den Parametern $a, b, \ldots$ complexe Werte beilegt, und, wie es gebräuchlich ist, von *„imaginären"* Punkten der Geraden spricht [III A 1, 5; B 1]: die Formeln umfassen, in dieser allgemeineren Bedeutung, alle reellen und „imaginären" Transformationen der genannten Gruppen.

Lässt man $x, x', a, b, \ldots$ wieder complexe Grössen bedeuten, bedient man sich aber der unter (5) besprochenen Darstellung dieser Grössen durch die reellen Punkte einer Ebene, so dienen dieselben Formeln zur analytischen Darstellung anderer Gruppen, und zwar zunächst zur Darstellung der *reellen* Transformationen gewisser continuierlicher Gruppen einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit. Offenbar umfasst (14) jetzt die Gesamtheit aller reellen sogenannten „Schiebungen", die Transformationen einer zweigliedrigen reellen Gruppe, bei denen ein jeder Punkt um eine Strecke von constanter Länge und Richtung fortgerückt wird; (15) stellt eine reelle zweigliedrige Gruppe von Ähnlichkeitstransformationen dar, die Gesamtheit aller „eigentlichen" Ähnlichkeitstransformationen (Transformationen ohne Umlegung der Winkel) umfassend, bei denen der Anfangspunkt — der Punkt 0 — in Ruhe bleibt; (16) bedeutet die reellen Transformationen der viergliedrigen Gruppe *aller* eigentlichen Ähnlichkeitstransformationen, die entsteht, wenn man die Transformationen (14) und (15) zusammensetzt; (17) endlich umfasst die Gesamtheit aller reellen Punkttransformationen der Ebene, die Kreise in Kreise überführen und den Sinn der Winkel ungeändert lassen[11]).

---

11) Art. über Inversionsgeometrie, III A 7. — Es ist mir nicht bekannt, wer den letzten Satz gerade in dieser Form zuerst ausgesprochen hat. In der

Zu diesen als den einfachsten geometrischen Anwendungen complexer Grössen kommen noch andere ähnlicher Art. So stellen die Formeln (17) zusammen mit den Formeln

$$\bar{x}' = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc \neq 0), \tag{17b}$$

(worin $\bar{x}'$ die zu x' conjugiert-complexe Grösse bedeutet) die Gesamtheit *aller* reellen Punkttransformationen einer Ebene vor, die Kreise in Kreise überführen, die sechsgliedrige (sog. gemischte) Gruppe der *Möbius*'schen Kreisverwandtschaften; bei Beschränkung der Parameter a, b, c, d in (17) auf reelle Werte entstehen die reellen Transformationen einer dreigliedrigen Untergruppe, die bei Beschränkung von x auf Werte mit positivem imaginärem Bestandteil aufgefasst werden kann als die Gruppe der Bewegungen in einer Nicht-Euclidischen, sog. *Lobatschewsky*'schen Ebene [III A 1; B 1]. Lässt man für a, b, c, d nur ganzzahlige Werte zu, die in der Beziehung $ad - bc = 1$ stehen, so geht aus (17) eine Gruppe von unendlich vielen discreten Transformationen hervor, die in der Theorie der elliptischen Funktionen, insbesondere der sog. Modulfunktionen auftritt [II B 6a und c]. Versteht man ferner unter $f(x)$ irgend eine analytische Funktion der complexen Veränderlichen x [II B 1], so vermitteln die Formeln $x' = f(x)$ und $\bar{x}' = f(x)$ die allgemeinste conforme Abbildung einer Ebene auf sie selbst oder auf eine andere Ebene [II B 1 und III D 6]. Ferner steht nichts im Wege, z. B. in den Formeln (14) bis (17), nachdem beiderseits die reellen und imaginären Bestandteile gesondert sind, den nunmehr reellen Parametern und Veränderlichen nachträglich von neuem complexe Werte beizulegen: die Formeln (14) bis (17) können dann aufgefasst werden als eine symbolische Darstellung sämtlicher, nämlich aller reellen und „imaginären" Transformationen der zuvor besprochenen Gruppen.

Das Feld dieser Anwendungen erweitert sich noch, wenn man an Stelle der hier zu Grunde gelegten Deutung von ξ, η als Cartesischen Coordinaten irgend eine andere zulässige geometrische Deutung dieser Grössen setzt. Unter diesen wird vielfach verwendet eine Darstellung der complexen Grössen $x = \xi + i\eta$ durch Punkte einer Kugel, eine Abbildungsart, die aus der *Wessel-Argand*'schen durch stereographische Projektion hervorgeht [II B 1, 2 b, c; III A 7, B 2, 3]. Wir erwähnen den hierdurch vermittelten Zusammenhang der Eigenschaften der regulären Körper mit gewissen Problemen der Algebra und Funk-

---

Hauptsache rührt sein Inhalt wohl von *Möbius* her (Abhandlungen aus den Jahren 1853—58, Ges. Werke 2).

tionentheorie, und neuere Anwendungen auf ein Problem der Mechanik.[12])

Alle diese Anwendungen complexer Grössen und viele andere, wie z. B. die in der Theorie der Wärmeleitung und der Minimalflächen [III D 5, 6] haben das Gemeinsame, dass bei ihnen die Eigenschaft des Rechnens mit complexen Grössen als einer Erweiterung des gewöhnlichen Zahlenrechnens in den Hintergrund tritt, und dass diese Grössen als ein sogenannter *Algorithmus* oder *geometrischer Calcul* zur Zusammenfassung und formalen Vereinfachung mehrerer Formeln der analytischen Geometrie dienen. Es ist das eben der Gesichtspunkt, von dem aus die Einführung der nunmehr von uns zu betrachtenden sogenannten höheren complexen Grössen sich als fruchtbringend erwiesen hat.

7. Allgemeiner Begriff eines Systems complexer Grössen. An das geschilderte Rechnen mit Grössenpaaren schliesst sich naturgemäss ein solches mit Tripeln, Quadrupeln u. s. w. von Grössen; und zwar kann man, nachdem das Rechnen mit den gewöhnlichen complexen Grössen einmal begründet ist, einmal reelle, sodann aber auch gewöhnliche complexe Grössen zu Paaren, Tripeln u. s. w. zusammenstellen. Je nachdem man das Eine oder das Andere thut, ergeben sich zwei verschiedene Begriffe eines „*Systems complexer Grössen*“ oder „*complexer Zahlen*“[13]).

Seien also $\varrho, a_1, a_2, \ldots a_n$ je nach der getroffenen Festsetzung entweder reelle oder gewöhnliche complexe Grössen, so wird man

12) *H. A. Schwarz,* J. f. Math. 75, p. 292 = Werke 2, p. 211. *F. Klein,* Vorlesungen über das Ikosaeder. Leipzig 1884. *H. Weber,* Algebra II. Braunschw. 1896. *F. Klein* u. *A. Sommerfeld*, Theorie des Kreisels. Leipzig 1897.

13) Die zweite Ausdrucksweise ist die üblichere. Wir ziehen die erste vor, da diesen Gebilden auch eine der gewöhnlichen Theorie der ganzen Zahlen analoge *Zahlentheorie* zukommt. (Vgl. Anmerk. 52.) — Beide Begriffe gehen im wesentlichen zurück auf *Hamilton*, der in seinen Quaternionen und Biquaternionen bereits 1843 das nach den gemeinen complexen Grössen interessanteste Beispiel geliefert hat. Doch macht *H.* (Lectures, Preface) bei der Multiplikation eine Unterscheidung zwischen Operator und Operandus, die für die Anwendungen nicht nötig ist und die Klarheit der Darstellung beeinträchtigt. Diese Unterscheidung scheint zuerst von *H. Hankel* (a. a. O.) aufgehoben worden zu sein. Mathematiker englischer Zunge gebrauchen nach dem Vorgange von *B. Peirce* (vgl. Anm. 17) den Ausdruck „*Linear Associative Algebra*“ für unseren Gegenstand, Einige verwenden auch das Wort Algebra im Pluralis. — Bei den verwandten Begriffsbildungen *Grassmann*'s (s. Anmerk. 6) fehlt ein wesentliches Moment, nämlich die Zurückleitung der Produkte auf die Grössen des Systems selbst. — Wegen der vor *Hamilton* unternommenen Versuche, complexe Grössen mit mehr als zwei Einheiten einzuführen, s. *Hankel* a. a. O., § 28 Anm.

zunächst zwei n-tupel $(a_1, a_2, \dots a_n)$ und $(b_1, b_2, \dots b_n)$ nur dann als „gleich" gelten lassen, wenn $a_1 = b_1, \dots a_n = b_n$ ist. Es wird sodann die Addition zweier Grössen-n-tupel definiert durch die Formel

$$(a_1, a_2, \dots a_n) + (b_1, b_2, \dots b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots a_n + b_n),$$

ferner die Multiplikation eines n-tupels mit irgend einer Grösse ϱ durch

$$\varrho(a_1, a_2, \dots a_n) = (\varrho a_1, \varrho a_2, \dots \varrho a_n).$$

Aus diesen beiden Definitionen folgt, dass jedes System von n Grössen sich additiv mit numerischen Coefficienten aus n passend gewählten zusammensetzen lässt, z. B.

$$(a_1, a_2, \dots a_n) = a_1(1, 0, 0, \dots 0) + a_2(0, 1, 0, \dots 0) + \cdots$$

Solche in *in mannigfacher Weise auswählbare* n-tupel werden „*Einheiten*" genannt[14]), und (wie überhaupt beliebige n-tupel) durch einfache Zeichen, etwa durch $e_1, e_2, \dots$ dargestellt, so dass

$$(a_1, a_2, \dots a_n) = a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$$

geschrieben werden kann. Die Einheiten $e_1, \dots e_n$ bilden zusammen eine sogenannte *Basis* (*Dedekind*, *Molien*, vgl. Anm. 31, 45), ihre reellen oder gewöhnlichen complexen Coefficienten $a_1, \dots a_n$ heissen *Coordinaten* oder auch *Componenten* des n-tupels.

Der specifische Begriff eines (geschlossenen) „Systems complexer Grössen" ergiebt sich hieraus erst, wenn man neben die angeführten Operationen noch eine weitere, die sogenannte *Multiplikation* zweier n-tupel stellt. Diese kann an und für sich in verschiedener Weise erklärt werden[6]), man pflegt aber an sie, wofern man von einem „System complexer Grössen" spricht, heute ziemlich allgemein die folgenden Forderungen zu stellen:

I. Das „Produkt" oder „symbolische Produkt" ab zweier n-tupel a, b, oder, was nun dasselbe bedeuten soll, zweier aus den Einheiten $e_1, \dots e_n$ ableitbarer „complexer Grössen" a, b (s. oben) soll wieder ein n-tupel derselben Art, also eine aus denselben Einheiten ableitbare complexe Grösse sein.

II. Diese („symbolische") Multiplikation soll mit der Addition durch das „distributive Gesetz" verbunden sein:

(18) $$a(b + c) = ab + ac, \quad (b + c)a = ba + ca.$$

III. Die Multiplikation soll das „associative Gesetz" erfüllen:

(19) $$(ab)c = a(bc).$$

Nicht allgemein verlangt wird das Bestehen des „commutativen Ge-

---

14) *Weierstrass* und andere gebrauchen den Ausdruck *Haupt*einheiten.

setzes" $ab = ba$ für die als Multiplikation bezeichnete Verknüpfung, weshalb auch von den beiden Forderungen (18) keine eine Folge der anderen ist. Dagegen pflegt man als weitere Forderung hinzuzufügen:

IV. Die Multiplikation soll eine im allgemeinen umkehrbare Operation sein, es soll also im allgemeinen möglich sein, aus einer Gleichung der Form $ab = c$ die Grösse a sowohl als auch die Grösse b zu bestimmen, wenn im einen Fall b und c, im anderen a und c gegeben sind. Diese Forderung der Möglichkeit beider Arten von „*Division*" ist äquivalent mit der anderen, dass eine complexe Grösse $e^0 = \varepsilon_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_n e_n$ vorhanden sein soll, die den beiden Gleichungen

$$e^0 a = a, \quad a e^0 = a \tag{20}$$

identisch (für alle Wertsysteme der Coordinaten $a_1, \dots a_n$) genügt. —

Nach dem üblichen Sprachgebrauch ist also ein „*System complexer Grössen*" erst dann vollkommen definiert, wenn die bei der Multiplikation zweier n-tupel oder Grössen $a = \sum a_i e_i$, $b = \sum b_i e_i$ anzuwendenden Rechnungsregeln bekannt sind. Die Bedingungen I und II werden in allgemeinster Weise erfüllt, wenn man setzt

$$e_i e_\varkappa = \sum_1^n {}_s \gamma_{i\varkappa s} e_s \qquad (i, \varkappa = 1 \cdots n), \tag{21}$$

und unter $\gamma_{i\varkappa s}$ reelle oder gewöhnliche complexe Grössen versteht. Die Bedingung III wird sodann erfüllt, wenn allgemein $(e_i e_\varkappa) e_l = e_i (e_\varkappa e_l)$ ist, wenn man also die n^3 Grössen $\gamma_{i\varkappa s}$ derart wählt, dass

$$\sum_1^n {}_s \gamma_{i\varkappa s} \gamma_{sjt} = \sum_1^n {}_s \gamma_{\varkappa js} \gamma_{ist} \tag{22}$$

wird $(i, \varkappa, j, t = 1, 2, \dots n)$. Die letzte Forderung IV endlich deckt sich mit der anderen, dass keine der Determinanten [I B 1]

$$\left| \sum {}_i \gamma_{i\varkappa s} a_i \right|, \qquad \left| \sum {}_\varkappa \gamma_{i\varkappa s} a_\varkappa \right| \tag{23}$$

identisch (für jede Wahl der Grössen a_i) verschwinden soll.

Sind diese beiden letzten Forderungen erfüllt, so haben die beiden Determinanten (23), als Funktionen der Grössen a_i, dieselben (im analytischen Sinne, II B 1) irreducibelen Teiler; sie verschwinden also für dieselben Wertsysteme dieser Grössen. Sind sie für ein bestimmtes Grössensystem $a_1, \dots a_n$ von Null verschieden, so haben die beiden Gleichungen

$$ax = b, \quad ya = b \tag{24}$$

jede eine und nur eine Lösung x, y; und es wird insbesondere $x = y = e^0$, wenn $b = a$ (s. Gl. 20); sind jene Determinanten dagegen gleich Null, so giebt es immer von Null verschiedene Lösungen x, y der beiden Gleichungen

$$(25) \qquad ax = 0, \quad ya = 0.$$

a, x und y heissen dann *„Teiler der Null“*, nach *K. Weierstrass*, der übrigens auch die Null $(0, 0, \dots 0)$ selbst noch unter diesen Begriff fasst. (Vgl. Anm. 30.)

Die Grösse e^0 nimmt innerhalb des betrachteten Systems complexer Grössen eine ähnliche Stellung ein, wie die Einheit unter den reellen Grössen. Sie ist deshalb die „Zahl Eins“ des Systems genannt worden, auch hat man den auf alles Mögliche angewendeten Ausdruck „Modul“ für sie ebenfalls vorgeschlagen. Wir werden sie *Haupteinheit* des Systems nennen. Unter dem *reciproken Wert* der Grösse a, dargestellt durch das Zeichen a^{-1}, verstehen wir sodann, sofern a kein Teiler der Null ist, die gemeinsame Lösung der Gleichungen

$$(26) \qquad az = e^0, \quad za = e^0.$$

Die Lösungen der Gleichungen (24) werden nunmehr dargestellt durch

$$(27) \qquad x = a^{-1}b, \quad y = ba^{-1}.$$

Sind die Grössen a und b *„vertauschbar“*, d. h. besteht die Gleichung $ab = ba$, so sind diese Grössen x, y einander gleich. —

Der auseinandergesetzte Begriff eines Systemes complexer Grössen kann in der Weise erweitert werden, dass man die Forderungen I—III aufrecht erhält, die Forderung IV aber fallen lässt. Zu den besprochenen treten dann neue *„Systeme ohne Haupteinheit“*, auch mit einem die Vorstellung eines Grenzüberganges hervorrufenden und daher nicht ganz angemessenen Ausdruck „ausgeartete“ Systeme complexer Grössen genannt. In einem jeden solchen System ist bei jeder Wahl des Divisors immer mindestens eine Art der „Division“ eine unmögliche oder unbestimmte Operation.

8. Typen, Gestalten, Reducibilität. Aus den Darlegungen der vorigen Nummer geht hervor, dass alle Eigenschaften irgend eines besonderen Systems complexer Grössen völlig bestimmt sind durch das System der n^3 Constanten $\gamma_{i\varkappa s}$. Je nachdem man nun von vorn herein gewöhnliche complexe oder nur reelle Grössen zu n-tupeln vereinigt hat, wird man nun auch für die Constanten $\gamma_{i\varkappa s}$ gewöhnliche complexe oder aber nur reelle Werte zulassen. Es ergiebt sich hieraus das eine oder andere der beiden Probleme: „Man soll alle Systeme von gewöhnlichen complexen [reellen] Grössen $\gamma_{i\varkappa s}$ finden, die den

Gleichungen (22) Genüge leisten, und ausserdem so beschaffen sind, dass keine der Determinanten (23) identisch verschwindet". — Diese Aufgaben lassen eine noch präcisere Fassung zu. Es sind nämlich zugleich mit irgend einem System complexer Grössen in gewissem Sinn bekannt alle die, die aus ihm durch eine Änderung der Basis $(e_1 \ldots e_n)$, also durch andere Auswahl der Einheiten hervorgehen. Eine solche Änderung wird analytisch ausgedrückt durch eine lineare Transformation von nicht verschwindender Determinante,

$$(26) \qquad e_i' = \sum\nolimits^n c_{i\varkappa} e_\varkappa \qquad (i, \varkappa = 1, \ldots n),$$

wobei die $c_{i\varkappa}$ im übrigen beliebige gewöhnliche complexe [reelle] Werte haben dürfen. Ferner ist mit einem gegebenen System zugleich bekannt das sogenannte *reciproke System* des ersten, ein System, das man erhält, wenn man je zwei Grössen $\gamma_{i\varkappa s}$ und $\gamma_{\varkappa is}$ vertauscht. Man wird also alle diese durch einfache Transformationen auseinander hervorgehenden Systeme durch irgend eines unter ihnen repräsentieren können.

Wir rechnen zwei Systeme complexer Grössen zu demselben „*Typus*", wenn sie durch Vertauschung der Constanten $\gamma_{i\varkappa s}$ und $\gamma_{\varkappa is}$, und ebenso, wenn sie durch eine lineare Transformation (26) mit *gewöhnlichen complexen* Coefficienten $c_{i\varkappa}$ aus einander hervorgehen. Wir sagen ferner, ein System mit reellen Constanten $\gamma_{i\varkappa s}$, kürzer ein *reelles System complexer Grössen,* sei eine *reelle Gestalt* des Typus, dem es angehört; und wir betrachten zwei reelle Gestalten desselben Typus nur dann als verschieden, wenn sie *nicht* durch eine lineare Transformation (26) mit *reellen* Coefficienten $c_{i\varkappa}$ und etwanige Vertauschung von $\gamma_{i\varkappa s}$ mit $\gamma_{\varkappa is}$ aus einander hervorgehen. Die obigen Aufgaben können nunmehr so formuliert werden:

„*Von jedem Typus von Systemen complexer Grössen mit n Einheiten einen Repräsentanten anzugeben.*"

„*Bei den Typen, die reelle Gestalten haben, von jeder Gestalt einen Repräsentanten anzugeben.*"

Hat ein Typus nur eine einzige reelle Gestalt, so wird man natürlich diese auch als Repräsentanten des Typus selbst wählen.

Das so gestellte Problem lässt eine weitere Vereinfachung zu. Hat man nämlich zwei Systeme complexer Grössen mit n und m Einheiten $(e_1 \ldots e_n)$, $(\eta_1 \ldots \eta_m)$, so geht aus ihnen ein neues mit $n + m$ Einheiten $e_1 \ldots e_n$, $\eta_1 \ldots \eta_m$ hervor, wenn man zu den Multiplikationsregeln $e_i e_\varkappa = \sum \gamma_{i\varkappa s} e_s$, $\eta_i \eta_\varkappa = \sum \delta_{i\varkappa s} \eta_s$ der einzelnen Systeme noch die weiteren $e_i \eta_\varkappa = \eta_\varkappa e_i = 0$ $(i = 1 \ldots n,\ \varkappa = 1 \ldots m)$ hinzufügt. Hieraus ergiebt sich ein Begriff der *Reducibilität* von Systemen complexer Zahlen, oder vielmehr, es ergeben sich zwei solcher Begriffe. Wir sagen, ein System complexer Grössen sei *„reducibel“* schlechthin, wenn vermöge einer linearen Transformation (26) mit *gewöhnlichen complexen* Coefficienten $c_{i\varkappa}$ die Einheiten einer Basis auf mehrere Schichten derart verteilt werden können, dass alle Produkte von Einheiten der einen Schicht mit denen aller übrigen Schichten gleich Null sind; wir nennen das System *irreducibel* im entgegengesetzten Falle. Wir nennen ferner ein System mit *reellen* Constanten $\gamma_{i\varkappa s}$ *„reell-reducibel“* oder *„reell-irreducibel“*, je nachdem sich eine solche in Schichten zerlegte Basis durch eine lineare Transformation (26) mit *reellen* Coefficienten $c_{i\varkappa}$ einführen lässt oder nicht. Ein jedes System complexer Grössen (mit Haupteinheit) kann nur auf eine Weise in irreducibele Systeme zerlegt werden, wenn man von der bei der Wahl der Basis eines jeden Teilsystemes noch vorhandenen Willkür absieht, und ebenso jedes reelle System nur auf eine Weise in reell-irreducibele Systeme. Die Eigenschaften der Reducibilität oder Irreducibilität kommen allen Systemen eines Typus, und soweit reelle Systeme in Frage kommen, allen Systemen derselben Gestalt eines Typus in gleicher Weise zu. Um die obigen beiden Aufgaben für einen bestimmten Wert der Zahl n vollständig zu lösen, hat man daher nur aufzuzählen:

I. *Alle Typen irreducibeler Systeme, bei denen die Zahl der Einheiten* $\leqq n$ *ist.*

II. *Alle verschiedenen reellen Gestalten dieser Systeme.*

III. *Alle reell-irreducibelen Gestalten von Typen reducibeler Systeme, bei denen die Zahl der Einheiten* $\leqq n$ *ist.*

Die Lösung der dritten unter diesen Aufgaben lässt sich auf die der ersten zurückführen. Ist $(\eta_1 \dots \eta_m)$ die Basis eines irreducibelen Systemes mit den Multiplikationsregeln $\eta_i\eta_\varkappa = \sum \delta_{i\varkappa s}\eta_s$, so erhält man ein zweites System mit den m Einheiten $\vartheta_1 \dots \vartheta_m$, wenn man setzt $\vartheta_i\vartheta_\varkappa = \sum \bar{\delta}_{i\varkappa s}\vartheta_s$, und unter $\bar{\delta}_{i\varkappa s}$ den conjugiert-complexen Wert von $\delta_{i\varkappa s}$ versteht. Setzt man sodann $\eta_i\vartheta_\varkappa = 0$, und führt man die neuen Einheiten

$$(27) \qquad e_\varkappa = \eta_\varkappa + \vartheta_\varkappa, \qquad e_\varkappa^* = i(\eta_\varkappa - \vartheta_\varkappa)$$

ein, so ist das so entstehende reducibele System mit der Basis $(e_1 \dots e_m,\ e_1^* \dots e_m^*)$ reell und reell-irreducibel; und man findet alle unter III verlangten Gestalten, wenn man für $(\eta_1 \dots \eta_m)$ der Reihe nach je einen Repräsentanten eines jeden irreducibelen Typus setzt, dessen Basis $\frac{n}{2}$ oder weniger Einheiten enthält.

Es bleiben also zu lösen die Probleme I und II.

Es giebt ein einfaches *Kriterium der Reducibilität* eines vorgelegten Systemes complexer Grössen mit gewöhnlichen complexen oder auch reellen Constanten $\gamma_{i\varkappa s}$: Bei jedem reducibelen [reellen und reell-reducibelen] System sind die Haupteinheiten der irreducibelen Teilsysteme solche Grössen, deren Quadrate ihnen selbst gleich sind, und die überdies mit allen Grössen des Systems vertauschbar sind. Ist umgekehrt in einem System mit n Einheiten $e_1 \dots e_n$ eine von e^0 verschiedene Grösse [reelle Grösse] ε vorhanden, für die

$$(28) \qquad \varepsilon^2 = \varepsilon, \quad \varepsilon e_\varkappa = e_\varkappa \varepsilon \qquad (\varkappa = 1 \dots n),$$

so sind ε und $\eta = e^0 - \varepsilon$ die Haupteinheiten zweier (möglicher Weise wieder reducibeler) Teilsysteme; und diese Teilsysteme werden dadurch gefunden, dass man unter den Produkten $\varepsilon e_\varkappa$ und den Produkten $\eta e_\varkappa$ je ein System von linear-unabhängigen auswählt, und diese Grössen (deren Gesamtzahl gerade n beträgt) als neue Einheiten einführt[14]).

Ausser der eben geschilderten Operation des Nebeneinandersetzens der Einheiten zweier Systeme complexer Grössen giebt es noch ein anderes als „*Multiplikation zweier Systeme miteinander*" bezeichnetes Verfahren, aus zwei solchen ein drittes herzuleiten[15]). Dieses besteht darin, dass man die formal gebildeten Produkte der Einheiten e_i, e_j' zweier Systeme als Einheiten $\eta_{ij} = e_i e_j' = e_j' e_i$ eines neuen Systems auffasst, und, wenn $e_i e_\varkappa = \sum \gamma_{i\varkappa s} e_s$, $e_i' e_\varkappa' = \sum \gamma_{i\varkappa s}' e_s'$ angenommen wird, die Produkte von zweien der neuen Einheiten gemäss der Formel

$$(29) \qquad \eta_{i\varkappa} \cdot \eta_{lm} = \sum_{s,t} \gamma_{i\varkappa s} \gamma_{lmt}' \cdot \eta_{st}$$

auf diese Einheiten zurückführt.

Das Verfahren kommt darauf hinaus, dass man als Coordinaten $a_1 \dots a_n$ einer Grösse eines vorgelegten Systems statt reeller oder *gewöhnlicher* complexer Grössen überhaupt Grössen *irgend* eines be-

---

14) Vgl. hierzu *E. Study*, Gött. Nachr. 1889, p. 237; die obigen Begriffsbildungen und Problemen zu Grunde liegende Anschauungsweise rührt von *S. Lie* her [II A 6]; das Kriterium der Reducibilität von *G. Scheffers*, Math. Ann. 39 (1891), p. 293. Dort wird der Begriff des Typus etwas anders gefasst, als im Texte, aber ebenso wie hier bei *S. Lie* u. *Scheffers*, Cont. Gruppen, Leipzig 1893.

15) Obige Ausdrucksweise braucht *Scheffers* a. a. O. Die Operation selbst ist schon von *W. K. Clifford* in ausgedehntem Masse verwendet worden: Am. J. of Math. 1 (1878), p. 350 = Math. Papers (London 1883) Nr. 30. Vgl. dazu *H. Taber*, Am. J. of Math. 12 (1890), p. 337, insbesondere § 25. Die zuletzt genannte Abhandlung ist besonders geeignet zur Orientierung über die eigentümliche Anschauungsweise und Terminologie der englisch-amerikanischen Mathematiker.

stimmten zweiten Systems nimmt. Der Zusammenhang zwischen den Eigenschaften des als „Produkt“ (Compound) bezeichneten, abgeleiteten Systems und den Eigenschaften der beiden gegebenen Systeme ist nicht einfach. Doch ergeben sich mehrere für Anwendungen besonders geeignete Systeme complexer Grössen gerade auf diese Weise.

9. Systeme mit zwei, drei und vier Einheiten. Wir erläutern die Begriffsbildungen der vorigen Nummer durch Aufzählung aller möglichen Systeme complexer Grössen mit zwei, drei oder vier Einheiten.

Systeme mit zwei Einheiten.

Es giebt nur drei reelle Systeme mit zwei Einheiten, die sämtlich das commutative Gesetz der Multiplikation befolgen. Die zugehörigen Multiplikationsregeln sind, nach geeigneter Wahl der Basis, diese:

(30) $$e_0^2 = e_0, \quad e_0 e_1 = e_1 e_0 = e_1, \quad e_1^2 = e_0,$$

(31) $$e_0^2 = e_0, \quad e_0 e_1 = e_1 e_0 = e_1, \quad e_1^2 = -e_0,$$

(32) $$e_0^2 = e_0, \quad e_0 e_1 = e_1 e_0 = e_1, \quad e_1^2 = 0.$$ [16])

Von diesen ist nur das letzte, das aus den beiden ersten durch einen Grenzübergang hergeleitet werden kann, irreducibel. Das zweite System (31) ist das der gewöhnlichen complexen Grössen; es ist *reducibel, aber reell-irreducibel* nach der Definition der Nr. 8. Es geht in das erste System (30) über durch die imaginäre Substitution $e_0' = e_0$, $e_1' = ie_1$. Die Systeme (30) und (31) sind also zwei verschiedene reelle Gestalten eines und desselben Typus (während (32) einen anderen Typus repräsentiert). Die erste dieser Gestalten, (30), ist reell-reducibel; denn führt man die neuen Einheiten $e_1' = \frac{1}{2}(e_0 + e_1)$, $e_2' = \frac{1}{2}(e_0 - e_1)$ ein, so erhält man die Multiplikationsregeln:

(30b) $$e_1'^2 = e_1', \quad e_1' e_2' = e_2' e_1' = 0, \quad e_2'^2 = e_2'.$$

Das System der gewöhnlichen complexen Grössen tritt hiernach in der allgemeinen Theorie der complexen Grössen an zwei verschiedenen Stellen auf. Bei Aufzählung der Typen irreducibeler Systeme erscheint es als das einzige System mit *einer* Einheit ($e_0^2 = e_0$); bei Aufzählung der reellen und reell-irreducibelen Systeme erscheint es unter den Systemen mit *zwei* Einheiten.

Von Systemen mit drei und vier Einheiten zählen wir nur die

16) *S. Pincherle* nach Vorlesungen von *Weierstrass*, Giorn. di mat. 18 (1880), p. 205, wo allerdings das dritte System nicht ausdrücklich aufgeführt wird, und *A. Cayley*, Lond. Math. Proc. 15 (1883—84), p. 185.

irreducibelen und reell-irreducibelen auf[17]). Wir stellen ihre Multiplikationsregeln in Gestalt quadratischer Tafeln zusammen. e_0 bedeutet in jedem Falle die Haupteinheit; der Wert des Produktes $e_i e_\varkappa$ ist in der Horizontalreihe enthalten, die links e_i, und in der Verticalreihe, die oben $e_\varkappa$ enthält.

(33) *Irreducibele Systeme mit drei Einheiten.*

$$\text{I.}\ \begin{array}{ccc} e_0 & e_1 & e_2 \\ e_1 & e_2 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \text{II.}\ \begin{array}{ccc} e_0 & e_1 & e_2 \\ e_1 & e_0 & e_2 \\ e_2 & -e_2 & 0 \end{array}, \qquad \text{III.}\ \begin{array}{ccc} e_0 & e_1 & e_2 \\ e_1 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 \end{array}.$$

(34) *Irreducibele Systeme mit vier Einheiten.*

$$\text{I.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 & 0 \\ e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \text{II.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_0 & e_2 & e_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & 0 \\ e_3 & e_3 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \text{III.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_3 & e_3 & 0 \\ e_2 & -e_3 & c\,e_3 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

$$\text{IVa.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_3 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & e_3 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \text{IVb.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_3 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & -e_3 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \text{V.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

$$\text{VIa.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & -e_0 & e_3 & -e_2 \\ e_2 & -e_3 & -e_0 & e_1 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & -e_0 \end{array}, \qquad \text{VIb.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_0 & e_3 & e_2 \\ e_2 & -e_3 & e_0 & -e_1 \\ e_3 & -e_2 & e_1 & -e_0 \end{array}, \qquad \text{VIIa.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & -e_0 & e_3 & -e_2 \\ e_2 & -e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & e_2 & 0 & 0 \end{array},$$

$$\text{VIIb.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_0 & e_3 & e_2 \\ e_2 & -e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & -e_2 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \text{VIII.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & 0 & e_3 & 0 \\ e_2 & -e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \qquad \text{IX.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & e_0 & e_2 & e_3 \\ e_2 & -e_2 & 0 & 0 \\ e_3 & -e_3 & 0 & 0 \end{array},$$

$$\text{X.}\ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}. \qquad \left\{ \begin{array}{cccc} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1 & -e_0 & e_3 & -e_2 \\ e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & -e_2 & 0 & 0 \end{array}; \quad \begin{array}{l} 2e_0' = e_0 + i e_1, \\ 2e_1' = e_2 + i e_3, \\ 2e_2' = e_0 - i e_1, \\ 2e_3' = e_2 - i e_3. \end{array} \right\}$$

---

17) *E. Study,* Gött. Nachr. 1889, p. 237. Monatsh. f. Math. 1 (1890), p. 283. Verwandte Untersuchungen hatte bereits 1870 *B. Peirce* angestellt: Am. J. of Math. 4 (1881) p. 97. Indessen ist dieser Autor nicht zu einer erschöpfenden Aufzählung der Systeme mit drei und vier Einheiten gelangt.

Die Typen sind durch römische Ziffern unterschieden, die verschiedenen Gestalten eines und desselben Typus durch diesen angehängte Indices a, b. Das zuletzt (ohne Nummer) angeführte System repräsentiert die einzige reell-irreducibele Gestalt eines reducibelen Typus, die bei vier Einheiten vorkommt. Es wird zerlegt durch Einführung der neuen Einheiten e_i'. Jedes dieser Systeme, mit Ausnahme von II, kann durch Einführung neuer Einheiten in sein reciprokes System übergeführt werden. I, IV, V und X haben das commutative Gesetz der Multiplikation. Die Tafel III stellt unendlich viele verschiedene Typen dar, entsprechend den verschiedenen Werten des Parameters c, darunter alle bei vier Einheiten vorhandenen Typen ohne reelle Gestalt, entsprechend den imaginären Werten von c. VIa ist das von *Hamilton* 1843 entdeckte System der *Quaternionen*. VIa und VIIa gehen in die Gestalten VIb und VIIb über durch die imaginäre Substitution

$$e_0' = e_0, \quad e_1' = ie_1, \quad e_2' = ie_2, \quad e_3' = -e_3,$$

ebenso IVa in IVb durch Einführung von $e_2' = ie_2$ an Stelle von e_2.

10. Specielle Systeme mit n^2 Einheiten. Bilineare Formen. Besonders untersucht worden ist eine Klasse von Systemen complexer Grössen mit einer quadratischen Zahl von Einheiten, die aus der Theorie der linearen Transformationen entspringt. Durch jedes System von n^2 reellen oder gewöhnlichen complexen Grössen $a_{i\varkappa}$ $(i, \varkappa = 1 \ldots n)$ — also durch eine (quadratische) sogenannte *Matrix* $\| a_{i\varkappa} \|$ [Art. I B 1 b] — ist eine *lineare Transformation*

$$(35) \qquad y_\varkappa = \sum_1^n {}^i \, a_{i\varkappa} x_i \qquad (\varkappa = 1 \ldots n)$$

bestimmt (deren Determinante $|a_{i\varkappa}|$ hier nicht notwendig als von Null verschieden vorausgesetzt wird), und ebenso eine *bilineare Form* [I B 1 b]

$$(36) \qquad A = \sum_1^n {}^i \sum_1^n {}^\varkappa \, a_{i\varkappa} x_i u_\varkappa .$$

Führt man nun die zu einer zweiten Matrix von n^2 Elementen $\| b_{i\varkappa} \|$ oder einer bilinearen Form B gehörige lineare Transformation nach der ersten aus, so entsteht eine neue lineare Transformation, zugehörig zu der Matrix $\| c_{i\varkappa} \|$ und der bilinearen Form C, wobei

$$(37) \qquad c_{ij} = \sum_1^n {}^\varkappa \, a_{i\varkappa} b_{\varkappa j},$$

$$(38) \qquad C = \sum \sum c_{ij} x_i u_j = \sum_\varkappa \frac{\partial A}{\partial u_\varkappa} \frac{\partial B}{\partial x_\varkappa} .$$

Die Regel, wonach hier aus zwei Matrices oder bilinearen Formen eine dritte hergeleitet wird, nennt man „*Zusammensetzung*", „*Composition*" oder auch „*Multiplikation*" der Matrices oder bilinearen Formen. Man drückt den Inhalt der Formel (38) durch die symbolische Gleichung

(39) $$A \cdot B = C$$

aus, und nennt die Form C das — in der Reihenfolge A, B genommene und von $B \cdot A$ zu unterscheidende — (sog. symbolische) *Produkt* von A und B. Offenbar ist diese Regel ganz identisch mit der Multiplikationsregel eines Systems complexer Grössen mit n^2 Einheiten $e_{i\varkappa}$. Setzt man

(40) $$e_{i\varkappa} e_{lm} = 0 \quad (\varkappa \neq l), \qquad e_{i\varkappa} e_{\varkappa l} = e_{il},$$

so sagen die obigen Formeln dasselbe aus, wie die Gleichung

(41) $$\left(\sum a_{i\varkappa} e_{i\varkappa}\right)\left(\sum b_{i\varkappa} e_{i\varkappa}\right) = \sum c_{i\varkappa} e_{i\varkappa}.$$ [18])

Es gelten daher auch alle bei dem Rechnen mit einem System complexer Grössen überhaupt anzuwendenden Regeln insbesondere für das Rechnen mit bilinearen Formen, soweit man auf solche keine anderen Operationen als die Addition, die Multiplikation mit numerischen (reellen oder gewöhnlichen complexen) Grössen, und die oben definierte Multiplikation zweier bilinearer Formen miteinander anwendet[19]). Aber auch umgekehrt lassen sich die in der Theorie der

18) Für den Fall $n = 3$ wird das obige System complexer Grössen von Mathematikern englischer Zunge als System der *Nonionen* bezeichnet. S. darüber *C. S. Peirce*, Johns Hopkins Circular, Baltimore 1882, Nr. 22; *J. J. Sylvester* ebenda Nr. 27. Vgl. auch Anm. 15. — Im allgemeinen Falle brauchen *Sylvester* u. A. für den besonderen Zweig der Algebra, der von der Zusammensetzung bilinearer Formen handelt, den Ausdruck *Universal Algebra*.

19) Die Zusammensetzung der Matrices ist so alt, als die Theorie der linearen Transformationen selbst; das obige specielle System complexer Grössen tritt auf, wo immer man es mit linearen Transformationen zu thun hat. Das Wesentliche an der im Text dargelegten Auffassung liegt aber darin, dass der ganze Complex von n^2 Grössen $a_{i\varkappa}$ als etwas Einheitliches angesehen und durch ein solches *Zeichen* dargestellt wird, das dem distributiven und associativen Gesetz der „Multiplikation" einen formal einfachen und leicht zu handhabenden Ausdruck verleiht. Diese Auffassung findet sich angedeutet schon bei *Hamilton* (Lectures), klar und deutlich bei *Cayley* (Lond. Trans. v. 148 [1858], 1859, p. 17 = Coll. Math. Papers 2, p. 475); *Cayley* muss daher wohl als Begründer dieser Theorie angesehen werden. Nach *Cayley* haben viele Mathematiker sich derselben Begriffsbildungen bedient. Für uns kommen insbesondere in Betracht Arbeiten von *Edm. Laguerre* (Ec. Polyt. t. 25, 1867, p. 215), *G. Frobenius* (J. f. Math. 84, 1878, p. 1 — die gründlichste Untersuchung über diesen Gegenstand —), *Sylvester* (Johns Hopkins Circular, Baltimore 1883, Nr. 27, 1884, Nr. 28; Am.

bilinearen Formen gewonnenen Sätze auf beliebige Systeme complexer Grössen anwenden. Die Multiplikationsregeln eines solchen Systems sind nämlich selbst nichts anderes als der Ausdruck für die Regeln der Zusammensetzung gewisser *specieller* bilinearer Formen: setzt man, von irgend einem vorgelegten System mit n Einheiten und mit den Multiplikationsregeln $e_i e_\varkappa = \sum \gamma_{i\varkappa s} e_s$ ausgehend

$$A_i = \sum_{s,t} x_s \gamma_{sit} u_t \qquad (i = 1 \dots n), \tag{42}$$

so folgt $A_i A_\varkappa = \sum \gamma_{i\varkappa s} A_s$.[20]) Die oben betrachteten speciellen Systeme mit n^2 Einheiten enthalten also, wenn man die Zahl n unbestimmt lässt, alle anderen. Offenbar kann man in derselben Weise aus jeder linearen Schaar bilinearer Formen, sofern die Produkte von je zwei Formen der Schaar selbst angehören, ein System complexer Grössen mit oder ohne Haupteinheit herleiten. So stimmt das System (40) selbst im Falle $n = 2$ mit den *Quaternionen* in ihrer zweiten reellen Gestalt VIb überein, wie man erkennt, wenn man statt der Produkte $x_i u_\varkappa$ die vier ebenfalls linear-unabhängigen Formen

$$\begin{aligned} A_0 &= x_1 u_1 + x_2 u_2, & A_1 &= - x_1 u_2 - x_2 u_1 \\ A_2 &= - x_1 u_1 + x_2 u_2, & A_3 &= x_2 u_1 - x_1 u_2 \end{aligned} \tag{43}$$

als „Einheiten" einführt[21]); dieselbe Multiplikationstafel VIb ergiebt sich aber nach Obigem u. a. auch, wenn man das folgende System von vier bilinearen Formen

$$\begin{aligned} B_0 &= x_0 u_0 + x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3, & B_1 &= x_0 u_1 + x_1 u_0 - x_2 u_3 - x_3 u_2, \\ B_2 &= x_0 u_2 + x_1 u_3 + x_2 u_0 + x_3 u_1, & B_3 &= x_0 u_3 + x_1 u_2 - x_2 u_1 - x_3 u_0 \end{aligned} \tag{44}$$

zu Grunde legt. —

Unter den (symbolischen) *Potenzen* A, $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$ u. s. w. einer bilinearen Form

$$A = \sum_1^n {}_{i,\varkappa}\, a_{i\varkappa} x_i u_\varkappa$$

J. of Math. 6, 1884, p. 270), *Ed. Weyr* (Monatsh. f. Math. 1889, p. 187) und *H. Taber* (Am. J. of Math. 12, 1890, p. 337; 13, 1891, p. 159). Da die genannten Autoren zum Teil unabhängig von einander gearbeitet haben, so haben die Hauptsätze in dieser Theorie mehrere Entdecker.

20) *Ed. Weyr*, Prag. Ber. v. 25. Nov. 1887. In anderer Form ist der Satz zuvor schon von *C. S. Peirce* ausgesprochen worden (Mem. of the Am. Acad. of Arts and Sciences 9, 1870. Am. J. of Math. 4, 1881, p. 221). Vgl. dazu Johns Hopkins Circular Nr. 13 (1882), Nr. 22 (1883).

21) *Laguerre* a. a. O. p. 230. *Cayley*, Math. Ann. 15 (1879), p. 238. *B.* u. *C. S. Peirce*, Am. J. of Math. 4 (1881); Johns Hopkins Circ. Nr. 22 (1883). *Cyp. Stéphanos*, Math. Ann. 22 (1883), p. 299.

befinden sich höchstens n linear-unabhängige, d. h. solche, zwischen denen keine für alle Wertsysteme der Grössen x_i, u_i gültige lineare Gleichung mit numerischen (reellen oder gewöhnlichen complexen) Coefficienten (Funktionen der $a_{i\varkappa}$) stattfindet. Rechnet man, wie gebräuchlich, zu diesen Potenzen als nullte die sogenannte *„Einheitsform“*

(45) $$E = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n,$$ [22])

so kann man immer die n^{te} Potenz von A durch die vorausgehenden Potenzen ($A^0 = E$, $A^1 = A$, A^2, A^3, $\ldots$ A^{n-1}) ausdrücken. Man bildet zu diesem Zweck, unter r einen unbestimmten Parameter verstehend, die Determinante der bilinearen Form $r \cdot E - A$,

(46) $$\varphi(r) = |rE - A| =$$
$$= r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_nr^0 = (r - r_1)(r - r_2)\cdots(r - r_n),$$

eine ganze Funktion n^{ten} Grades von r mit reellen oder gewöhnlichen complexen Coefficienten. Ersetzt man nun in dem Ausdruck von $\varphi(r)$ r durch A, d. h. r^0 durch $E = A^0$, r^1 durch A, r^2 durch das (symbolische) Quadrat von A, u. s. w., so findet sich $\varphi(A) = 0$.[23]) Der Ausdruck $\varphi(r)$ wird, unter Entlehnung eines Ausdruckes von *Cauchy*, nach *Frobenius* die *„charakteristische Funktion“* der Form A genannt; die Gleichung $\varphi(r) = 0$ heisst entsprechend die *„charakteristische Gleichung“* [24]). Diese Gleichung ist die Gleichung niedrigsten Grades, der die Form A genügt, so lange die Grössen $a_{i\varkappa}$ unbestimmt sind. Die Gleichung niedrigsten Grades, der eine Form A mit irgendwie specialisierten Coefficienten $a_{i\varkappa}$ genügt,

(47) $$\psi(A) = A^p + \mathfrak{a}_1A^{p-1} + \cdots + \mathfrak{a}_pA^0 = 0 \quad (p \leqq n),$$

wird von *Weyr* die *„Grundgleichung“*, von anderen die *„reducierte charakteristische Gleichung“* der Form A (oder der Matrix $\| a_{i\varkappa} \|$) genannt. Um die zugehörige ganze Funktion $\psi(r)$ zu bilden, bestimme man den grössten gemeinsamen Teiler $\vartheta(r)$ aller Unterdeterminanten $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades der Determinante $|rE - A|$. Es ist dann

---

22) Diese Bezeichnung nach *Frobenius*. Die entsprechende Matrix wird *Einheitsmatrix* oder *Scalarmatrix* genannt. Die entsprechende complexe Grösse des Systems (40) ist die Haupteinheit dieses Systems.

23) Dieser Hauptsatz der Theorie ist von *Cayley* (a. a. O.) behauptet und an einem Beispiel ($n = 3$) verificiert worden. Bewiesen haben ihn *Laguerre, Frobenius, Ed. Weyr* u. *H. Taber* (s. Anmerk. 19), ausserdem *M. Pasch* (Math. Ann. 38, 1891, p. 48), *A. Buchheim* (Lond. M. S. Proc. 16, 1885, p. 63), *Th. Molien* (Math. Ann. 41, 1893, p. 83), endlich *Frobenius*, Berl. Ber. 1896, p. 601. Der principiell einfachste Beweis ist der zweite von *Frobenius*.

24) Bei *Sylvester* u. a. heisst die Gleichung (46) *„latent equation“*, ihre Wurzeln $r_1 \ldots r_n$ heissen *„latent roots“* (der Matrix $\| a_{i\varkappa} \|$).

(48) $$\psi(r) = \frac{\varphi(r)}{\vartheta(r)}\ ^{25)}.$$

Bei beliebigen Systemen complexer Grössen bilden Grad und Beschaffenheit der niedrigsten algebraischen Gleichung, der eine allgemein gewählte Zahl a eines bestimmten Systems genügt, eines der Hülfsmittel, deren man sich zur Klassifikation dieser Gebilde bedient[17]). Der bei jedem vorgelegten System völlig bestimmte Grad p dieser Gleichung wird nach *Scheffers* „*Grad*", nach *Molien* „*Rang*" des Systems genannt; die Gleichung $\psi(a) = 0$ selbst heisst bei *Scheffers* die „*charakteristische Gleichung*", bei *Molien* die „*Ranggleichung*" des Systems[26]). So hat bei dem System (40) mit n^2 Einheiten der Rang den Wert n, und die Gleichung $\varphi(r) = 0$ (46) ist die Ranggleichung dieses Systems. Von den irreducibelen Systemen mit drei Einheiten (33) hat I den Rang 3, II und III haben den Rang 2; von denen mit vier Einheiten (34) hat I den Rang 4, II—V haben den Rang 3, VI—X den Rang 2. Die Ranggleichung der Quaternionen (34, VIa) z. B. lautet, wenn $a = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ gesetzt wird,

$$r^2 - 2a_0 \cdot r + (a_0^{\,2} + a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}) = 0. \text{ —}$$

Die linke Seite der Ranggleichung eines reducibelen Systems ist gleich dem Produkt aus den linken Seiten der Ranggleichungen seiner einzelnen irreducibelen Bestandteile. Es lassen sich daher alle Systeme complexer Grössen mit n Einheiten angeben, deren Rang den grössten möglichen Wert n erreicht. Ihre irreducibelen Bestandteile haben einzeln wiederum die genannte Eigenschaft, und alle, die aus der gleichen Zahl m $(\leqq n)$ von Einheiten gebildet sind, gehören einem einzigen Typus an; die Multiplikationsregeln eines solchen irreducibelen Systems mit den Einheiten $e_0 \ldots e_{m-1}$ lassen sich auf die Form bringen:

(49) $$e_i e_\varkappa = e_{i+\varkappa} \quad (i + \varkappa \leqq m - 1), \qquad e_i e_\varkappa = 0 \quad (i + \varkappa > m - 1).^{27)}$$

11. Specielle Systeme mit commutativer Multiplikation. Die zuletzt betrachteten Systeme complexer Grössen mit n Einheiten bilden

25) *Frobenius*, J. f. Math. 84; andere Beweise sind gegeben worden von *Ed. Weyr* (a. a. O.) und von *Frobenius*, Berl. Ber. 1896, p. 601.

26) *Scheffers*, Math. Ann. 39 (1891), p. 293, *Molien*, ebenda 41 (1893), p. 83. — Die „charakteristische Gleichung eines Systems" ist nicht zu verwechseln mit der „charakteristischen Gleichung" einer Grösse a des Systems, der Gleichung $\varphi(r) = 0$, die zu der entsprechenden bilinearen Form gehört.

27) *Study*, Gött. Nachr. 1889, p. 62 und Monatsh. f. Math. 2 (1890), p. 23. Andere Beweise bei *Scheffers*, Math. Ann. 39, p. 293, und bei *G. Sforza*, Giorn. di mat. 32—34 (1894—96), pp. 293, 80, 252.

eine sehr specielle Klasse unter denen, die das commutative Gesetz der Multiplikation befolgen. Unter ihnen sind die einfachsten die Systeme, deren irreducibele Bestandteile nur je eine Einheit enthalten; also die zu dem Typus

$$(50) \qquad e_i^2 = e_i, \quad e_i e_\varkappa = 0 \qquad (i \neq \varkappa,\ i, \varkappa = 1, 2 \dots n)$$

gehörigen Systeme. Auf diese Systeme, und ihre verschiedenen nach dem Satz in Nr. 8 ohne weiteres anzugebenden reellen Gestalten ist man gekommen durch eine Untersuchung über den inneren Grund der ausgezeichneten Stellung, die wir dem System der gemeinen complexen Grössen zuschreiben. Man hat dabei angeknüpft an eine Stelle bei *Gauss*[3]), der in Aussicht gestellt hatte, die Frage zu beantworten: „*Warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können*". Bedenkt man, dass die heute auf vielfältige Weise verwendeten gewöhnlichen complexen Grössen doch hauptsächlich und ursprünglich *nur* deshalb in die Analysis eingeführt worden sind, weil man mit ihrer Hülfe gewissen Sätzen allgemeine Gültigkeit und anderen eine einfachere Ausdrucksweise geben konnte, so entsteht die Frage, ob der Erweiterungsprocess, der von dem Gebiete der reellen Grössen in das Gebiet der gemeinen complexen Grössen führt, hiermit abgeschlossen ist, oder ob nicht das genannte Bedürfnis zu ferneren in gleichem Sinne berechtigten Erweiterungen des Gebietes der „allgemeinen Arithmetik" Anlass giebt.

Um die Zeit 1863 hat *Weierstrass* in einer an der Universität Berlin gehaltenen öffentlichen Vorlesung „über complexe Zahlgrössen" den Satz bewiesen, dass bei einem jeden (nach unserer Terminologie) reellen System complexer Grössen mit commutativer Multiplikation ein Produkt $a \cdot b$ verschwinden kann, ohne dass einer der Faktoren verschwindet, es sei denn, dass das betrachtete System nur eine Einheit ($e_0^2 = e_0$) enthält, oder mit dem aus zwei Einheiten gebildeten System der gemeinen complexen Grössen zusammenfällt[28]). Ein ähnlicher Satz gilt, nach *Frobenius* und *C. S. Peirce*, auch dann, wenn man das commutative Gesetz der Multiplikation nicht fordert: zu den genannten beiden Systemen kommen dann noch die reellen Quaternionen (VIa)[29]). Wenn man es also für unzulässig erklärt, dass eine

28) Nach mündlicher Mitteilung von *H. A. Schwarz*. Vgl. auch *E. Kossak*, Elemente der Arithmetik (Berl. 1882, Friedr. Werd. Gymn. Progr.). Ein von *H. Hankel* veröffentlichter Satz (a. a. O.) ist in dem oben angeführten enthalten.

29) *Frobenius*, J. f. Math. 84 (1878), p. 59. *C. S. Peirce*, Am. J. of Math 4 (1881), p. 225.

algebraische Gleichung (z. B. $ax + b = 0$) mit von Null verschiedenen Coefficienten unendlich viele Wurzeln haben kann, und wenn man auch das commutative Gesetz der Multiplikation nicht verletzen will, so bleiben zulässig nur die gewöhnlichen complexen Grössen. —

Etwas geringere Anforderungen an die in der „allgemeinen Arithmetik" zulässigen Grössen hat *Weierstrass* in einer Veröffentlichung aus dem Jahre 1884 gestellt[30]). Er betrachtet auch hier nur Systeme mit commutativer Multiplikation, ohne dabei von vornherein die Existenz einer Haupteinheit (nach unserer Terminologie) anzunehmen. Da in jedem solchen System eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades, deren Coefficienten alle aus einem und demselben Teiler der Null durch Multiplikation mit irgend welchen Grössen des Systems hervorgehen, unendlich viele Wurzeln haben kann, so stellt er die Frage nach allen den Systemen, bei denen *nur* solche besondere Gleichungen unendlich viele Wurzeln zulassen. Diese Frage wurde von ihm unter Zuziehung mehrerer weiterer Voraussetzungen, und von *R. Dedekind*[31]) allgemein dahin beantwortet, dass nur die verschiedenen reellen Gestalten des Typus (50) diese Eigenschaft besitzen. *Dedekind* zeigte ausserdem, dass diese Systeme vor allen anderen durch das Nicht-Verschwinden der aus den Constanten $\gamma_{i\varkappa s}$ gebildeten Determinante

$$(51) \qquad \left| \sum_{r,s} \gamma_{i\varkappa s} \gamma_{rsr} \right|$$

ausgezeichnet sind. Bei dieser Art der Fragestellung ergeben sich also ausser dem System der gemeinen complexen Grössen noch andere, aber nur triviale Systeme, nämlich solche, deren Rechnungsregeln lediglich Wiederholungen der Rechnungsregeln sind, die schon bei den reellen und den gewöhnlichen complexen Grössen vorkommen. Aus diesem Grunde erklärt *Weierstrass* die genannten Systeme zwar nicht für unzulässig, aber für überflüssig. Anderer Ansicht ist *Dedekind*. Er zeigt, dass die innerhalb der Theorie der gewöhnlichen complexen Grössen auftretenden und längst eingebürgerten algebraischen Zahlen (I C 4) bei geeigneter Auffassung genau dieselben Eigenschaften darbieten, wie die Grössen der Systeme (50). Nach ihm sind also diese Systeme weder unzulässig, noch überflüssig, sie entbehren aber des Charakters der Neuheit. — Dasselbe lässt sich übrigens noch

---

30) Gött. Nachr. 1884, p. 396 u. ff. Dazu *H. A. Schwarz*, ebenda p. 516, *O. Hölder* 1886, p. 241, *J. Petersen* 1887, p. 489. Vgl. Anm. 14.

31) Gött. Nachr. 1885, p. 141, u. 1887, S. 1. Dazu *Frobenius*, Berl. Ber. 1896, p. 601. *D. Hilbert*, Gött. Nachr. 1896, p. 179. *Study*, ebenda 1898, p. 1.

in einem anderen Sinne behaupten. Auch gewisse längst untersuchte Systeme bilinearer Formen unterscheiden sich nur in der Bezeichnung von den Systemen (50), und namentlich ist die von *Weierstrass* und seinen Nachfolgern behandelte Reduktion eines „zulässigen" Systems auf die Basis $(e_1 \ldots e_n)$ (Reduktion auf die „Teilgebiete" nach *Weierstrass*) eine aus der Theorie der bilinearen Formen wohlbekannte Operation[32]).

Eingehendere Untersuchungen über die möglichen Typen von Systemen mit commutativer Multiplikation liegen zur Zeit noch nicht vor. Eine gewisse Einsicht in die Struktur dieser Systeme wird eröffnet durch mehrere Sätze von *G. Scheffers* und *Th. Molien* (a. a. O.), sowie durch einen von *G. Frobenius*[32]) aufgestellten Satz: „Sind A und B zwei miteinander vertauschbare bilineare Formen (oder auch vertauschbare Grössen irgend eines Systems), so sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Form $\lambda A + \mu B$ lineare Funktionen der Parameter λ und μ." —

L. Kronecker hat umfangreiche, sehr abstrakt gehaltene Untersuchungen angestellt über den Zusammenhang der Systeme mit commutativer Multiplikation mit der von ihm begründeten Theorie der Modulsysteme [I B 1 c]. Er geht von der Bemerkung aus, dass die linken Seiten der Definitionsgleichungen

$$e_i e_\varkappa - \sum \gamma_{i\varkappa s} e_s = 0 \qquad (\gamma_{i\varkappa s} = \gamma_{\varkappa i s})$$

nach Ersetzung der Einheiten e_i durch unbestimmte Grössen y_i ein Modulsystem bilden, und er zeigt, dass umgekehrt jedes Modulsystem von bestimmter besonderer Beschaffenheit zur Entstehung eines Systems complexer Grössen Anlass giebt[33]).

12. Complexe Grössen und Transformationsgruppen. Wir wenden uns nun zur Betrachtung des Zusammenhangs der Systeme complexer Grössen mit gewissen *Transformationsgruppen* (vgl. Nr. 6). Fasst man in den durch die Multiplikationsregeln (21) irgend eines Systems complexer Grössen näher erklärten Gleichungen

$$x' = ax\,, \quad x' = xb \tag{52}$$

die Coordinaten x_i der complexen Grösse x als unabhängige Veränderliche auf, die Coordinaten x_i' von x' als abhängige Veränderliche, endlich die Coordinaten a_i und b_i der Grössen a und b als Parameter, so stellt jede der beiden Gleichungen (52) eine continuierliche und zwar

32) *Study*, Gött. Nachr. 1889, p. 265. Vgl. *Frobenius*, Berl. Ber. 1896, p. 601.

33) Berl. Ber. 1888, I. p. 429, 447, 557, 595; II. p. 983.

n-gliedrige Gruppe von linearen Transformationen vor[34]), eine Untergruppe der von *S. Lie* so genannten linearen homogenen Gruppe [II A 6]; andere Gruppen — Untergruppen der sog. allgemeinen linearen Gruppe — werden in entsprechender Weise dargestellt durch die Gleichungen:

$$(53)\qquad x' = x + c, \quad x' = ax + c, \quad x' = xb + c, \quad x' = axb + c.$$

Führt man in die Gleichungen der letzten und umfassendsten unter diesen Gruppen (durch eine nicht-lineare Transformation) neue Veränderliche ein, so erhält man neue Gruppen, bei denen an Stelle des commutativen Gesetzes der Addition und des distributiven und associativen Gesetzes der Multiplikation gewisse Funktionalgleichungen treten. *Fr. Schur* hat gezeigt, dass auch umgekehrt jede Gruppe, deren Transformationen diesen Funktionalgleichungen genügen, durch Einführung von geeigneten Veränderlichen und Parametern in die Form $x' = axb + c$ gesetzt werden kann[35]).

Die beiden projektiven n-gliedrigen Gruppen (52) bilden, nach der Terminologie von *S. Lie*, ein Paar von einfach-transitiven, sogenannten reciproken Gruppen [II A 6]. Sie sind aber nur *specielle* Gruppen dieser Art, da sie (mindestens) eine eingliedrige Untergruppe ($a = \lambda e^0$, $b = \lambda e^0$) mit einander gemein haben. Fasst man jedoch, abweichend von der oben gemachten Annahme, die Veränderlichen x_i, x_i' wie auch die Parameter $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ als Verhältnisgrössen (sogenannte *homogene* Grössen) auf, so verschwindet dieser specielle Charakter: Man erhält *jeden* „Typus“ von Paaren reciproker projektiver Gruppen eines Raumes von $n-1$ Dimensionen, und jeden Typus nur einmal, wenn man an Stelle des oben unbestimmt gelassenen Systems complexer Grössen der Reihe nach Repräsentanten eines jeden Typus von Systemen mit n Einheiten setzt[36]). Es ist also zugleich mit den unter Nr. 7 und Nr. 8 besprochenen Problemen ein bestimmtes Problem aus der Theorie der Transformationsgruppen gelöst.

Umfassendere Anwendungen der Systeme complexer Grössen auf die Theorie der Transformationsgruppen ergeben sich aus der besonderen analytischen Darstellung der — zufolge der getroffenen Festsetzung — $(n-1)$-gliedrigen reciproken Gruppen $x' = ax$, $x' = xb$.

---

34) Zuerst bemerkt von *H. Poincaré*: Par. C. R. 99 (1884), p. 740. Vgl. zu dieser Arbeit *Lie* u. *Scheffers* a. a. O. p. 621.

35) Math. Ann. 33 (1888) p. 49.

36) *Study*, Leipz. Ber. 1889, p. 177 = Monatsh. f. Math. 1 (1890), p. 283. *Lie* und *Scheffers*, Cont. Gruppen (Leipzig 1893) Kap. 21; siehe wegen der allgemeinen Theorie der reciproken Gruppen *Lie* und *Engel*, Theorie der Transformationsgruppen I (Leipzig 1888), Kap. 21. Vergleiche überall Art. II A 6.

Diese Gruppen sind nämlich zugleich ihre eigenen Parametergruppen. Führt man nach den obigen Transformationen die folgenden aus: $x'' = a'x'$, $x'' = x'b'$, so folgt $x'' = a''x$, $x'' = xb''$, wo

$$(54) \qquad a'' = a'a, \quad b'' = bb';$$

diese Gleichungen haben aber wiederum die Form (52). Sagen wir (mit *Study*) allgemein, dass bei einer bestimmten Darstellung einer r-gliedrigen continuierlichen (oder auch sog. gemischten) Gruppe durch $r+1$ homogene Parameter *bilineare Zusammensetzung der Parameter* stattfindet, wenn die Parameter der aus zwei Transformationen S_1 und S_2 der Gruppe zusammengesetzten Transformation $S_1 S_2$ ganze homogene lineare Funktionen der Parameter von S_1 sowohl als von S_2 sind, so folgt: „Jede $(n-1)$-gliedrige continuierliche Gruppe, die gleichzusammengesetzt ist mit einer — oder mit mehreren — der aus Systemen complexer Grössen hergeleiteten $(n-1)$-gliedrigen Gruppen (52), ist einer Darstellung durch n homogene Parameter mit bilinearer Zusammensetzung — oder mehrerer solcher Darstellungen — fähig.“ Da unter den Gruppen (52), sobald $n > 3$ ist, nicht alle möglichen Zusammensetzungen $(n-1)$-gliedriger Gruppen auftreten, so erfreuen sich nur verhältnismässig wenige continuierliche Gruppen dieser besonders einfachen Art der Parameterdarstellung; der Kreis dieser Gruppen erweitert sich aber bedeutend, wenn man auch überzählige Parameter zulässt[37]).

Zu den zuletzt betrachteten Kategorieen von continuierlichen Gruppen gehören insbesondere auch mehrere Gruppen, die — auf andere Weise als oben geschehen — aus Systemen complexer Grössen selbst hergeleitet sind[36]). Wir heben hervor die von je $2n-m-1$ und $n-m$ wesentlichen (nicht homogenen) Parametern abhängigen Gruppen

$$(55) \qquad x' = axb, \quad x' = b^{-1}xb,$$

wobei m die Zahl der linear-unabhängigen Grössen des betrachteten Systems ist, die mit allen übrigen vertauschbar sind. Die zweite dieser Gruppen ist die *adjungierte Gruppe* der $(n-1)$-gliedrigen Gruppen $x' = ax$, $x' = xb$. Bilineare Zusammensetzung der Parameter besteht ferner für die sog. gemischten Gruppen, die aus den Gruppen (55) durch Hinzufügung der Transformation $x' = x^{-1}$ hervorgehen, sobald der Rang des betrachteten Systems complexer Grössen gleich zwei ist. Endlich gehören hierher auch die unter (53) aufgeführten Gruppen,

37) Ob *jede* continuierliche Gruppe auf diese Weise dargestellt werden kann, hängt von der Entscheidung der noch offenen Frage ab, ob es projektive Gruppen von jeder beliebigen Zusammensetzung giebt.

wie man erkennt, wenn man die letzte $(3n-m)$-gliedrige Gruppe in einer der beiden Formen

$$x' = \alpha^{-1}(x\beta + \gamma), \quad x' = (\alpha x + \beta)\gamma^{-1} \tag{56}$$

schreibt, ferner die aus einem System mit commutativer Multiplikation abgeleitete $3n$-gliedrige Gruppe

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}. \text{ —} \tag{57}$$

Unter die zuletzt angestellten Betrachtungen subsumieren sich eine Reihe von Anwendungen, die man von speciellen Systemen complexer Grössen gemacht hat.

Identificiert man das zu Grunde gelegte System complexer Grössen mit dem System der *Hamiltonschen Quaternionen* (34, VIa), so sind die beiden Gruppen $x' = ax$ und $x' = xb$ dreigliedrig, und können gedeutet werden als die beiden Gruppen collinearer Transformationen des Raumes, die die eine oder andere Schaar von Erzeugenden der imaginären, aber zu einem reellen Polarsystem gehörigen Fläche 2. Grades

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

in Ruhe lassen [III C 4], oder auch als die beiden Gruppen sogenannter *Schiebungen* eines Nicht-Euclidischen („elliptischen") Raumes [III A 1]; die sechsgliedrige gemischte Gruppe $x' = axb$, $x' = ax^{-1}b$ umfasst alle eigentlichen und uneigentlichen collinearen Transformationen, die die genannte Fläche in sich selbst überführen, oder die Gesamtheit der *Bewegungen* und sog. *Umlegungen* (Transformationen mit symmetrischer Gleichheit aller Figuren) des genannten Raumes. Die dreigliedrige gemischte Gruppe $x' = a^{-1}xa$, $x' = a^{-1}x^{-1}a$ endlich besteht aus allen den collinearen Transformationen der genannten Fläche, die den Punkt allgemeiner Lage $x = e_0$ in Ruhe lassen; $x' = a^{-1}xa$ ist also bei der zweiten Auffassung die Gruppe aller *Drehungen* um einen festen Punkt des Nicht-Euklidischen Raumes[38]). Dieselben Transformationsformeln $x' = a^{-1}xa$ und $x' = a^{-1}x^{-1}a$ lassen sich aber, bei Deutung der Quotienten $\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}$ als rechtwinkliger Cartesischer Coordinaten, auch auffassen als analytische Darstellung der Drehungen und Umlegungen um einen festen Punkt des gewöhnlichen (Euklidischen) Raumes; sie decken sich vollständig mit den von *Euler* angegebenen Formeln zur Transformation rechtwinkliger Coordinatensysteme, während die zur Zusammensetzung der

38) Z. T. nach *Cayley*, J. f. Math. 50 (1855), p. 312 = Coll. Math. Papers 2, p. 214. Vgl. auch *F. Klein*, Math. Ann. 37 (1890), p. 544.

Parameter der Gruppe $x' = a^{-1}xa$ dienende Gleichung $a'' = aa'$ — das sogenannte Multiplikationstheorem der Quaternionen — mit den von *O. Rodrigues* angegebenen Formeln zur Zusammensetzung der *Euler*'schen Parameter identisch ist[39]).

In den verschiedenen Lehrbüchern der Quaternionentheorie kommen die besprochenen gruppentheoretischen Thatsachen gar nicht oder nur in unvollkommener Weise zum Ausdruck. Es muss daher hervorgehoben werden, dass die Brauchbarkeit der Quaternionen für Zwecke der Geometrie und mathematischen Physik auf eben diesen Thatsachen und auf der Bedeutung beruht, die namentlich der Gruppe der (Euklidischen) Drehungen um einen festen Punkt bei vielen Untersuchungen zukommt[40]). Wo die genannten Gruppen, oder mit ihnen isomorphe Gruppen nicht auftreten, da können auch die Quaternionen nur geringen Nutzen bringen; und hierin liegt der Grund dafür, warum gewisse Anwendungen des Quaternionencalcüls (z. B. die auf die Geometrie der Kegelschnitte) einen etwas gekünstelten Eindruck machen und zu wenig befriedigenden Ergebnissen geführt haben. Allgemein lässt sich sagen, dass das Anwendungsgebiet der Systeme höherer complexer Grössen ziemlich beschränkt ist.

Von ferneren geometrischen Anwendungen von Systemen complexer Grössen erwähnen wir eine Darstellung der elfgliedrigen continuierlichen Gruppe der eigentlichen Ähnlichkeitstransformationen in einem vierfach ausgedehnten Raume durch die Formeln (56) mit Hülfe der Quaternionen[41]), die Darstellung der sog. gemischten Gruppe der Bewegungen und Umlegungen in der Euklidischen Ebene wie auch im Raume durch Parameter mit bilinearer Zusammensetzung[41]), endlich eine Untersuchung von *R. Lipschitz* über die lineare Transformation einer Summe von n Quadraten in ein Vielfaches ihrer selbst[42]). Die zuletzt genannten Transformationen bilden eine bei ungeraden Werten von n continuierliche, bei geraden Werten von n aus zwei continuierlichen Schaaren bestehende (also „gemischte“) Gruppe, deren allgemeine Transformation von $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ homogen auftretenden Parametern abhängt [III C 7]. *Lipschitz* gelangt, unter Verwendung über-

39) *Euler,* Novi Comm. Petrop. 20, p. 217. *O. Rodrigues,* Journ. de Math. 5 (1840), p. 380. *Cayley,* Phil. Mag. 26 (1845), p. 141 = Coll. Math. Pap. 1, p. 123.

40) S. die genauere Formulierung bei *Study,* Math. Papers from the Chicago Congress, New York 1896, p. 376. Vgl. auch *H. Burkhardt,* „Über Vectoranalysis“, Deutsche Math.-Vrg. 5 (1896), p. 43, sowie *Klein* und *Sommerfeld,* Theorie des Kreisels, Leipzig 1897, I § 7.

41) Chicago Papers a. a. O. *Study,* Math. Ann. 39 (1891), p. 514.

42) Untersuchungen über die Summen von Quadraten, Bonn 1886. Vgl. Nr. 14.

zähliger Parameter, zu einer Darstellung sämtlicher Transformationen der genannten Gruppe durch Parameter mit bilinearer Zusammensetzung, indem er von gewissen Systemen complexer Grössen ausgeht, die, als Verallgemeinerungen der Quaternionen, bereits von *Clifford* aufgestellt worden waren[43]). Das erste dieser Systeme wird von 2^n Einheiten $\iota_\alpha, \iota_{\alpha\beta}, \iota_{\alpha\beta\gamma}\dots$ gebildet; es ist, wenn die Haupteinheit mit ι_0 bezeichnet wird, definiert durch die Multiplikationsregeln

$$\begin{gathered}\iota_1^2 = \iota_2^2 = \cdots = \iota_n^2 = -\iota_0, \quad \iota_\alpha\iota_\beta = -\iota_\beta\iota_\alpha = \iota_{\alpha\beta}, \\ \iota_{\alpha\beta}\iota_\gamma = \iota_\alpha\iota_{\beta\gamma} = \iota_{\alpha\beta\gamma}, \quad \dots, \quad \iota_1\iota_2\iota_3\dots\iota_n = \iota_{123\dots n} \\ (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \cdots);\end{gathered} \tag{58}$$

das zweite, in der genannten Untersuchung verwendete (von dem ersten übrigens nur durch die Zahl der Einheiten und die Wahl der Basis unterschiedene) System mit einer 2^{n-1} Einheiten umfassenden Basis besteht aus ι_0 und den eine gerade Anzahl von Indices $(\alpha\beta, \alpha\beta\gamma\delta, \dots)$ tragenden Einheiten des ersten Systems.

Die zur linearen Transformation einer Summe von n Quadraten in ein Vielfaches ihrer selbst dienenden Formeln sind, abgesehen von einer wie es scheint unvermeidlichen Unsymmetrie, vollkommen analog der von uns schon besprochenen Lösung des Problems in den Fällen $n = 3$ und $n = 4$; sie zeigen überdies, wie man alle solchen Transformationen mit rationalen Zahlencoefficienten finden kann.

13. Klassifikation der Systeme complexer Grössen. Den Zusammenhang der Systeme complexer Grössen mit der Theorie der Transformationsgruppen haben *G. Scheffers*[44]) und *Th. Molien*[45]) zur Klassifikation der genannten Systeme benutzt. *Scheffers* teilt, an Sätze von *Lie* und *Engel* anknüpfend, die Systeme complexer Grössen in „*Nicht-Quaternionsysteme*“ und „*Quaternionsysteme*“. Bei den Systemen der ersten Klasse lassen sich die n Einheiten einer geeigneten Basis auf zwei Gruppen $e_1 \dots e_r$, $\eta_1 \dots \eta_s$ $(r + s = n)$ verteilen, derart, dass $e_i^2 = e_i$, $e_i e_\varkappa = 0$ ist, dass das Produkt von irgend zweien

---

43) Am. J. of Math. 1 (1878), p. 350 = Coll. Papers (London 1882) Nr. 30, wo bereits die Entstehung der obigen Systeme durch den in Nr. 8 besprochenen Multiplikationsprocess angegeben wird. S. auch Coll. Papers Nr. 43. Neuerdings ist auch *R. Beez* auf diese Systeme gekommen in einer leider verschiedenes Irrtümliche enthaltenden Arbeit: Z. f. Math. u. Phys., Jahrg. 41 (1896), p. 35, 65.

44) Math. Ann. 39 (1891), p. 293; 41 (1893), p. 601.

45) Über Systeme höherer complexer Zahlen. Diss. Dorpat = Math. Ann. 41 (1893), p. 83; ebenda 42 (1893), p. 308. Vgl. ferner Dorp. Ber. 1897, p. 259. Der letzte Aufsatz enthält eine Anwendung der Systeme complexer Grössen auf die Theorie gewisser Gruppen von *discreten* linearen Transformationen.

der Einheiten η nur von den Einheiten η mit höherem Index abhängt, und dass alle Produkte der Einheiten e_i mit einer Einheit η_j Null sind, mit Ausnahme von zweien, für die man $e_\varkappa \eta_j = \eta_j e_\varkappa = \eta_j$ hat. Bei allen diesen Systemen, und bei ihnen allein, sind die Wurzeln der Ranggleichung lineare Funktionen der Coordinaten einer Grösse des Systems[46]). Die Quaternionsysteme lassen sich, wie indessen erst durch *Molien* klar gestellt worden ist, so schreiben, dass das System der *Hamilton*'schen Quaternionen (34, VIa oder VIb) unter den Einheiten der Basis vorkommt. Zu ihnen gehören fast alle die Systeme, die in den unter Nr. **12** besprochenen Anwendungen hervorgetreten sind. Alle Quaternionsysteme, die die Quaternionen so enthalten, dass die Haupteinheit der Quaternionen zugleich Haupteinheit des Gesamtsystems ist, gehen nach *Scheffers* aus den *Hamilton*'schen Quaternionen durch „Multiplikation" (s. oben unter Nr. 8) mit irgend einem anderen System complexer Grössen hervor. Anwendungen dieser Theorie bilden die Bestimmung aller Typen von Systemen complexer Grössen mit n Einheiten, deren Rang gleich zwei oder gleich $n-1$ ist, und im wesentlichen auch derer, deren Rang gleich $n-2$ ist, und insbesondere die Bestimmung aller *Typen von Systemen mit fünf Einheiten*[47]), ferner die Bestimmung aller Quaternionsysteme bis zu *acht* Einheiten. Es giebt bei vier und sieben Einheiten je ein irreducibeles System dieser Art, und bei acht Einheiten drei, darunter ein schon von *Clifford* angegebenes System[48]), eine von dessen verschiedenen Arten von *Biquaternionen*, dasselbe System, das zur Parameterdarstellung der Bewegungen im Euklidischen Raume dient[41]).

Molien führt eine Reihe neuer Begriffe ein, von denen wir nur einige der wichtigsten anführen können, darunter den des *begleitenden Systems* eines gegebenen. Ein solches wird von den Einheiten $e_1 \dots e_r$ einer geeignet gewählten Basis $(e_1 \dots e_r \dots e_n)$ gebildet, wenn die Produkte $e_i e_\varkappa$ für $i, \varkappa \leqq r$ sich durch $e_1 \dots e_r$ selbst ausdrücken lassen, alle anderen Produkte zweier Einheiten aber durch $e_{r+1} \dots e_n$. Hat ein System complexer Grössen kein kleineres begleitendes System, so heisst es *„ursprünglich"*. *Alle ursprünglichen Systeme werden durch die unter*

---

46) Der Satz umfasst den unter Nr. **11** angeführten Satz von *Frobenius* (s. Anm. 31). *Scheffers* benutzt jedoch nicht ausschliesslich algebraische Hülfsmittel.

47) Die vom Range zwei und vier sind auch von *H. Rohr* angegeben worden: Über die aus 5 Haupteinheiten gebildeten complexen Zahlensysteme. Diss. Marburg 1890.

48) Lond. Math. Proc. 4 (1873), p. 381 = Coll. Papers, London 1882 Nr. 20; ebenda Nr. 42.

Nr. **10** *betrachteten Systeme mit n^2 Einheiten erschöpft.* Darin liegt zugleich der gruppentheoretische Satz, dass diese Systeme die einzigen sind, deren entsprechende (im vorliegenden Falle (n^2-1)-gliedrige) Gruppen $x'=ax$, $x'=xb$ *einfach* sind [II A 6]. Allgemein lässt sich die Basis so wählen, dass als begleitende Systeme μ von einander unabhängige ursprüngliche Systeme auftreten, die zusammengenommen ein μ irreducibele Bestandteile enthaltendes (also, wenn $\mu>1$, reducibeles) begleitendes System bilden.

Verwandten und zum Teil desselben Inhalts ist eine Untersuchung von *E. Cartan*, über die zur Zeit nur vorläufige Mitteilungen (ohne Beweise) vorliegen[49]). Wir heben daraus hervor die Bestimmung aller *Gestalten* ursprünglicher Systeme. Nur die mit $4m^2$ Einheiten haben — so lässt sich *Cartan's* Behauptung ausdrücken — mehrere reelle Gestalten, und zwar zwei verschiedene. Die eine ist die uns schon bekannte (40), die andere wird erhalten, wenn man das System (40) mit m^2 Einheiten bildet, und es mit den *Hamilton*'schen Quaternionen (VIa) „multipliciert" (s. Nr. 8). Zu den „ursprünglichen" Systemen *Molien's* kommen bei Beschränkung auf reelle Systeme noch andere, die man als reell-ursprüngliche Systeme bezeichnen könnte, Systeme ohne *reelle* begleitende Systeme. Diese werden nach *Cartan* von $2n^2$ Einheiten gebildet; sie werden erhalten, wenn man die Systeme (40) mit dem reellen System der gewöhnlichen complexen Grössen multipliciert. Die Gesamtheit aller reell-ursprünglichen Systeme entsteht also, nach *Cartan*, wenn man die Reihe der Systeme (40) erstens mit dem aus einer Einheit bestehenden System, zweitens mit dem System der gemeinen complexen Grössen, drittens mit den Quaternionen „multipliciert".

14. Ansätze zu einer Functionentheorie und Zahlentheorie der Systeme höherer complexer Grössen. Nur ein sehr bescheidener Anfang liegt vor von Untersuchungen, die eine Ausdehnung von Sätzen der gewöhnlichen Funktionentheorie [II B 1; vgl. II A 7b] auf beliebige Systeme complexer Grössen zum Ziel haben. *Ed. Weyr* hat die Bedingung dafür angegeben, dass eine Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ convergiert, in der die Coefficienten a_ν gewöhnliche complexe Grössen sind, x aber eine Grösse eines beliebigen Systems bedeutet. Er findet, dass die Wurzeln $r_\varkappa$ der charakteristischen Gleichung (46) dem Convergenzgebiete der gewöhnlichen Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ angehören müssen[50]). *G. Scheffers* hat einige hierher gehörige Betrachtungen über Systeme mit commuta-

49) Par. C. R. vom 31. Mai und 8. Juni 1897.

50) Bull. des Sciences Math. 2me sér. 11 (1887), p. 205.

tiver Multiplikation angestellt[51]). Er gelangt zu einer Definition der „analytischen“ Funktionen im Gebiete eines solchen Systems und zur Darstellung dieser Funktionen durch Potenzreihen $f(x) = \sum c_\nu x^\nu$; die Operationen des Differentiierens und Integrierens gestalten sich im wesentlichen wie in der gewöhnlichen Funktionentheorie.

Die Gleichung $x' = f(x)$ definiert eine continuierliche *unendliche Gruppe*, und zwar erhält man auf diese Weise alle solche Gruppen, bei denen die Fortschreitungsrichtungen um einen Punkt „allgemeiner Lage“ herum durch eine einfach-transitive (also $(n-1)$-gliedrige) Gruppe von vertauschbaren projektiven Transformationen transformiert werden. Die grössten endlichen continuierlichen Untergruppen einer solchen Gruppe sind die $3n$-gliedrigen Gruppen (57) und die mit ihnen gleichberechtigten.

Auch zu einer *Zahlentheorie* der Systeme complexer Grössen ist erst ein Anfang gemacht. Nur die gerade in dieser Hinsicht einen Ausnahmefall darstellenden Hamilton'schen Quaternionen sind bis jetzt untersucht worden, von *Lipschitz*[42]), und — eingehender und auf anderer Grundlage — von *Hurwitz*[52]) (I C).

Nachtrag. Aus Aufzeichnungen, die sich im Nachlass von *Gauss* vorgefunden haben, geht hervor, dass er im Jahre 1819 oder 1820 schon im Besitz der *Hamilton*'schen Quaternionen und ihrer Anwendung zur Darstellung und Zusammensetzung der Drehungen (und Ähnlichkeitstransformationen) um einen festen Punkt gewesen ist, und dass er auch das Multiplikationstheorem der Quaternionen schon in Gestalt eines Produkts

$$(abcd)(\alpha\beta\gamma\delta) = (ABCD)$$

geschrieben hat. S. Gött. Nachr. 1898, p. 8, und ebenda *F. Klein*: Geschäftliche Mittheilungen p. 3.

51) Leipz. Ber. 1893, p. 828; 1894, p. 120.
52) Gött. Nachr. 1896, p. 314.

I A 5. MENGENLEHRE.

VON

A. SCHÖNFLIES

IN GÖTTINGEN.

Inhaltsübersicht.

Monographieen.

B. Bolzano, Paradoxieen des Unendlichen, 1850; 2. Auflage, Berlin 1889.
P. du Bois-Reymond, Die allgemeine Funktionenlehre, Tübingen 1882.
G. Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883, zugleich in Math. Ann. 21, p. 545 erschienen.
R. Bettazzi, Teoria delle grandezze, Pisa 1891. Zugleich in Bd. 19 der Annali delle università toscane, 1893, erschienen.

G. Veronese, Fondamenti di geometria, Padova 1891, deutsch übersetzt von *A. Schepp* unter dem Titel: Grundlagen der Geometrie, Leipzig 1894.
E. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, Paris 1898.

Eine Zusammenstellung der Hauptresultate der Mengenlehre gab *G. Vivanti* (Bibliotheca mathem., Neue Folge 6. p. 9 [1892]). Ein grosser Teil der *Cantor*'schen Arbeiten ist in Acta mat. 2 abgedruckt.

Bezeichnungen.

$\mathfrak{C}_n$ bedeutet das n-dimensionale *Continuum.* Die erste Zahlklasse (vgl. Nr. 7) wird durch Z(I), die zweite Zahlklasse (vgl. Nr. 7) durch Z(II) oder $Z(\aleph_0)$ bezeichnet; $\aleph_0$ stellt die Mächtigkeit der Reihe der ganzen Zahlen dar, d. h. der Klasse Z(I). — $\mathfrak{U}$ bedeutet das „Unendlich".

---

1. Häufungsstellen von Punktmengen und deren Ableitungen. Während *K. Fr. Gauss* gegen den Gebrauch „einer unendlichen Grösse als einer vollendeten" ausdrücklich protestiert hat[1]), ist es *G. Cantor* gelungen, die Einführung solcher Grössen in die Arithmetik zu begründen und damit die Fortsetzung der Reihe der ganzen positiven Zahlen über das Unendliche hinaus zu definieren[2]). Die Notwendigkeit hierzu ergab sich einerseits bei den Untersuchungen über den Inhalt und die Häufungsstellen von Punktmengen (Nr. **1**), andrerseits bei der Vergleichung der Mengen arithmetisch definierter Zahlgrössen (Nr. **2**). (Vgl. besonders II A 1 und II B 1.)

Für eine aus unbegrenzt vielen Punkten bestehende Menge P giebt es nach einem Satz von *Bolzano-K. Weierstrass*[3]) mindestens eine Häufungsstelle (Grenzpunkt, Verdichtungspunkt). Alle Grenzpunkte einer Menge P bilden eine Punktmenge P', die *Cantor* die *Ableitung* von P nennt[4]). Enthält die Menge P' unendlich viele Punkte[5]), so besitzt sie eine Ableitung P'', die auch zweite Ableitung von P heisst u. s. w. Jeder Punkt einer Ableitung $P^{(\nu)}$ ist in allen vorhergehenden Ableitungen enthalten. Ein Punkt p, der noch in $P^{(\nu)}$, aber nicht mehr in $P^{(\nu+1)}$ vorhanden ist, heisst Häufungsstelle νter Ordnung. *Cantor* nennt die den Mengen $P, Q, R \ldots$ gemeinsamen Punkte auch

---

1) Briefwechsel zwischen *K. Fr. Gauss* und *H. Chr. Schumacher* 2, p. 269.

2) *Cantor* bemerkt in Math. Ann. 17, p. 358, dass er schon 1870 zu dieser Überzeugung gelangt sei.

3) Über den Ursprung des bezüglichen Schlussverfahrens vgl. *Cantor* in Math. Ann. 23, p. 455.

4) Math. Ann. 5 (1872), p. 129.

5) Eine Menge dieser Art erhält man z. B., indem man für $n = 1, 2, 3 \ldots$ in jedes Intervall $\frac{1}{n} \cdots \frac{1}{n+1}$ eine Punktmenge setzt, für die $\frac{1}{n+1}$ eine Häufungsstelle ist. Vgl. auch *P. du Bois-Reymond* in J. f. Math. 79, p. 36.

ihren grössten gemeinsamen Divisor $\mathfrak{D}(P, Q, R\ldots)$[6]), und hat daher $P^{(\nu)} = \mathfrak{D}(P'P''\ldots P^{(\nu)})$.

Es kann der Fall eintreten, dass der Ableitungsprocess für kein endliches ν ein Ende nimmt; alsdann existiert eine Menge $R = \mathfrak{D}(P', P''\ldots)$, für die *Cantor* das Zeichen $P^{(\infty)}$ (später $P^{(\omega)}$) eingeführt hat[7]). Die Existenz von Punktmengen, für die $P^{(\infty)}$ selbst aus unendlich vielen Punkten besteht, führte dazu, den Ableitungen dieser Menge in konsequenter Fortbildung der Bezeichnungsweise die Symbole $P^{(\infty+1)}$, $P^{(\infty+2)}\ldots P^{(2\infty)}\ldots P^{(\infty^2)}\ldots$ zu geben.

2. Der Abzählbarkeitsbegriff und das Continuum. Bereits im Jahre 1873[8]) war *Cantor* zu dem wichtigen Fundamentalbegriff der *Abzählbarkeit* gelangt. Er bewies[8]), dass man die Gesamtheit der algebraischen Zahlen eineindeutig den positiven ganzen Zahlen zuordnen kann, d. h. dass man sie in eine Reihe bringen kann, die ein erstes Glied besitzt und in der jede bestimmte algebraische Zahl eine angebbare Stelle einnimmt. *Cantor* nennt sie deshalb *abzählbar*[9]). Alle abzählbaren Mengen heissen von gleicher *Mächtigkeit*. Es gilt der Satz, dass jede endliche oder abzählbar unendliche Menge solcher Mengen selbst wieder abzählbar ist[10]). Dagegen ist die Gesamtheit aller Zahlen (das arithmetische Zahlencontinuum $\mathfrak{C}$) resp. die Gesamtheit aller Zahlen eines bestimmten Intervalls *nicht* abzählbar, und besitzt insofern eine höhere Mächtigkeit[11]). Der Beweis beruht auf folgendem, für die Abzählbarkeitsfragen principiellen Schlussverfahren: dass eine Menge, welche ein durch einen unendlichen Process (z. B. Fundamentalreihe) definierbares Element in sich enthält, nicht abzählbar

---

6) Math. Ann. 17, p. 355.

7) Eine Menge, deren $P^{(\infty)}$ den Nullpunkt liefert, konstruiert *Cantor* so, dass er in jedes der in Anm. 5 genannten Intervalle eine Menge setzt, für die $\frac{1}{n+1}$ eine Häufungsstelle $n$ter Ordnung ist, Math. Ann. 17 (1880), p. 358. Eine Menge dieser Art giebt auch *du Bois-Reymond,* Fktl. p. 187. Vgl. auch *G. Mittag-Leffler* in Acta Math. 4, p. 58.

8) J. f. Math. 77, p. 258. Die Art, wie man die rationalen Zahlen am einfachsten in eine solche Reihe bringt, findet sich in J. f. Math. 84 (1877), p. 250.

9) Vgl. jedoch die spätere Erweiterung dieses Begriffs in Nr. 8.

10) Zuerst von *Cantor* ausgesprochen in J. f. Math. 84 (1877), p. 24. Der Satz folgt daraus, dass man eine Doppelreihe als einfache Reihe anordnen kann (ein geom. Beweis bei *Fr. Meyer*, Böklen's math. naturw. Abhdlgn. 1 [1886], p. 80) und umgekehrt, ein Gedanke, der vielen Sätzen der Mengenlehre zu Grunde liegt.

11) J. f. Math. 77, p. 259. *Bettazzi* hat gezeigt, dass man die Zahlengesamtheit nicht ausdrücken kann, wenn man eine abzählbare Menge von Zeichen verwendet, aber für jede Zahl nur eine endliche Anzahl dieser Zeichen benutzt. Per. di mat. 6 (1891), p. 14.

sein kann, wenn dies Element in der nach Annahme abzählbaren Menge nicht mit endlicher Stellenzahl erscheint[12]).

Ebenfalls 1873 fand *Cantor* den Satz, dass das n-dimensionale $\mathfrak{C}_n$ die gleiche Mächtigkeit besitzt, wie das lineare, und zwar in dem Sinne, dass jeder Zahl von $\mathfrak{C}_1$ eine bestimmte Zahlgruppe von $\mathfrak{C}_n$ zugeordnet werden kann und umgekehrt[13]). Das Gleiche gilt für das $\mathfrak{C}$ von unendlich vielen Dimensionen. Hiernach glaubte *Cantor* die Vermutung aussprechen zu sollen, dass es für alle unendlichen Punktmengen eines Raumes R_n nur zwei verschiedene Mächtigkeitsklassen giebt, nämlich entweder die Mächtigkeit der abzählbaren Zahlenreihe oder die Mächtigkeit des Continuums[14]). Diese Vermutung harrt jedoch noch des Beweises. Der von *P. Tannery*[15]) gegebene Beweisversuch ist nicht bindend.

Die eineindeutige Abbildung eines $\mathfrak{C}_n$ und $\mathfrak{C}_m$ ist niemals stetig[16]).

3. Cantor's erste Einführung der transfiniten Zahlen. Den letzten wichtigen Schritt in der Grundlegung der Mengenlehre that *Cantor* im Jahre 1882[17]). Er wurzelt in der Erkenntnis, dass man die für die Ableitungen der Punktmengen eingeführten Symbole („Unendlichkeitssymbole" in erster Bezeichnung) arithmetisch definieren und den Rechnungsgesetzen unterwerfen kann. Es beruht darauf, dass man diese Symbole als verschiedene Anordnungen der abzählbaren Zahlenmenge auffassen kann. Ist ω das Symbol für die Gesamtheit der ganzen positiven Zahlen in ihrer natürlichen Folge, resp. für die Elemente $f_1 f_2 f_3 \ldots$, so lassen sich die Mengen

---

12) *Cantor* in J. f. Math. 77 (1873), p. 260. Für dieses Schlussverfahren vgl. auch den Beweis von *du Bois,* dass man jede Ordnung des Unendlichwerdens einer Funktion übertreffen kann; J. f. Math. 76 (1873), p. 89.

13) J. f. Math. 84, p. 246. Der Beweis gründet sich auf die bezügliche Zuordnung der Irrationalzahlen des $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_n$ und benutzt dazu deren Darstellung durch einen unendlichen Kettenbruch, dessen unendlich viele Teilnenner sich in n ebenfalls unendliche Gruppen spalten lassen und so n neue Irrationalzahlen bestimmen und umgekehrt. Die analoge Spaltung ist auf Dezimalbrüche anwendbar und bildet den Beweisgrund analoger Sätze. Einen auf der Theorie der Punktmengen beruhenden Beweis gab später *J. Bendixson* in Stockh. Hndl. Bih. 9, Nr. 6 (1885).

14) J. f. Math. 84, p. 258.

15) Bull. de la Soc. de Fr. 12 (1884), p. 90.

16) Einen Beweis dieses Satzes gab 1878 *E. Netto* (J. f. Math. 86, p. 263), sodann *Cantor* in Gött. Nachr. 1879, p. 127. Aus dem Satz folgt, dass die von *B. Riemann* und *H. Helmholtz* gegebene arithmetische Definition des R_n durch n unabhängige Coordinaten dahin zu ergänzen ist, dass die Zuordnung umkehrbar eindeutig und stetig ist.

17) Math. Ann. 21, p. 535, sowie Grundlagen etc.

$$f_1 f_2 f_3 \cdots g_1, \quad f_1 f_2 f_3 \cdots g_1 g_2, \quad f_1 f_2 f_3 \cdots g_1 g_2 g_3 \cdots$$

ihrer *Anordnung* nach durch die Symbole $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + \omega$ bezeichnen (Nr. 6 und 7). Dies sind *Cantor's transfinite Zahlen.* Ihre allgemeine Konstruktion gründet er auf zwei „Erzeugungsprincipien". Das erste besteht in der Hinzufügung einer Einheit zu einer schon vorhandenen Zahl, das zweite verlangt, dass zu jeder unbegrenzten Zahlenreihe stets wachsender Zahlen eine neue *nächst* grössere Zahl existiert; es lässt z. B. auf $\omega + 1$, $\omega + 2 \ldots \omega + n \ldots$ die Zahl $\omega + \omega = \omega \cdot 2$ [18]) folgen, auf ω, $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot 3 \ldots \omega \cdot n \ldots$ die Zahl $\omega \cdot \omega = \omega^2$, auf ω, ω^2, $\omega^3 \ldots \omega^n \ldots$ die Zahl ω^ω u. s. w., u. s. w.

4. Die Mächtigkeit oder Kardinalzahl. Die genaue logische und arithmetische Analyse der vorstehenden Ideen führte *Cantor* schliesslich zu folgenden 1895 veröffentlichten Formulierungen [19]). Die Grundbegriffe sind *Menge, Mächtigkeit, Ordnungstypus, wohlgeordnete Menge.* Menge oder Mannigfaltigkeit heisst jede Zusammenfassung von bestimmten wohldefinierten und wohlunterschiedenen Objekten [20]) m zu einem Ganzen; $M = \{m\}$. Mengen heissen *äquivalent* oder von gleicher Mächtigkeit [21]), wenn sie einander eineindeutig zugeordnet werden können ($M \sim N$). Die Mächtigkeit $\overline{\overline{M}}$ einer Menge heisst auch ihre *Kardinalzahl* $\mathfrak{a}$; für endliche Mengen fällt sie mit dem Anzahlbegriff zusammen.

Bei dieser Begriffsbestimmung besteht der wesentliche Unterschied zwischen einer endlichen und unendlichen (transfiniten) Menge [22]) darin, dass eine unendliche Menge einer ihrer Teilmengen äquivalent sein kann, während dies für endliche Mengen nicht der Fall ist [23]).

---

18) Ursprünglich von *Cantor* durch 2ω bezeichnet.

19) Math. Ann. 46, p. 481; teilweise schon vorher in der Z. f. Philos. 91, p. 95 und 92, p. 240 dargestellt (1887).

20) Die genaue Begriffsbestimmung dieser Worte findet sich Math. Ann. 20, p. 114. Sie steht im Gegensatz zu *L. Kronecker*'s Forderung in den Grundzügen einer arithm. Theorie p. 11 (*M. Pasch* in Math. Ann. 40 (1892), p. 150). Vgl. auch *Borel* a. a. O. p. 3. Aber erst die Überwindung dieser Forderungen hat die Mengenlehre möglich gemacht. Vgl. auch *du Bois*, Funktionenlehre, p. 184 u. 204 ff.

21) Diesen Ausdruck hat *Cantor* von *J. Steiner* übernommen; Math. Ann. 20, p. 116.

22) *Bolzano* (Paradoxieen des Unendl. § 13) und *R. Dedekind* (Was sind und was sollen die Zahlen, Braunschw. 1888, § 1) haben sogar einen Beweis gegeben, dass es Mengen giebt, die nicht endlich sind.

23) Hierfür vgl. *Dedekind* a. a. O. p. 17, sowie *Cantor,* J. f. Math. 84, p. 242 und *Bolzano* a. a. O. § 20 u. 21. Im Anschluss an obige Definition der unendlichen Zahl wird sogar in neuerer Zeit die endliche Zahl als eine solche defi-

Dies hindert jedoch nicht, dass sich, ausser dem Gleichheitsbegriff, auch die Beziehung des „grösser und kleiner" auf beliebige transfinite Mengen, resp. ihre Kardinalzahlen $\mathfrak{a} = \overline{\overline{M}}$, $\mathfrak{b} = \overline{\overline{N}}$ übertragen lässt. Die Definition lautet so, dass $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$ heisst, falls keine Teilmenge von N mit M äquivalent ist, aber eine Teilmenge M_1 von M existiert, die mit N äquivalent ist. Diese Definition genügt der logischen Forderung, dass von den drei Möglichkeiten $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ jede die beiden andern ausschliesst. Der Beweis jedoch, dass von diesen drei Möglichkeiten stets eine erfüllt ist, dass also die transfiniten Kardinalzahlen im Sinne *H. Grassmann*'s den allgemeinsten *Grössencharakter* besitzen, hat sich bisher nicht vollständig führen lassen. Dagegen ist es in letzter Zeit gelungen, zu erweisen, dass zwei transfinite Kardinalzahlen gleich sind, wenn jede der beiden Mengen einem Teil der andern äquivalent ist[24]), was praktisch ausreicht.

Da der Mächtigkeitsbegriff von der Ordnung und Beschaffenheit der Elemente abstrahiert, so lassen sich die Definitionen und Gesetze der Addition und Multiplikation ohne Ausnahme auf die Kardinalzahlen übertragen. Die Summe der Kardinalzahlen $\mathfrak{a} = \overline{\overline{M}}$, $\mathfrak{b} = \overline{\overline{N}}$ ist als die Mächtigkeit der Vereinigungsmenge $\{M, N\}$, das Produkt als die Mächtigkeit aller Elementenpaare (m, n) zu definieren, woraus sich die Geltung des commutativen, associativen und distributiven Gesetzes ergiebt. Um zur Potenz zu gelangen, wird der Begriff der *Belegung* von N mit M benutzt[25]). Die Belegung ist ein Gesetz, das jedem Element n ein Element $m = f(n)$ zuordnet; Belegungen sind danach immer und nur dann gleich, wenn sie mit jedem n je das nämliche m verbinden. Die Gesamtheit aller Belegungen von N mit M (die Belegungsmenge) liefert die Potenz $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ und folgt den Potenzgesetzen.

Die kleinste transfinite Kardinalzahl $\aleph_0$ ist die Mächtigkeit der Reihe der positiven ganzen Zahlen; jede transfinite Menge besitzt nämlich Teilmengen von der Mächtigkeit $\aleph_0$. Da jede endliche sowie

---

niert, die nicht unendlich ist. Überhaupt haben die obigen Begriffe „Menge" und „Zuordnung" auch für die Erörterung der Grundlagen der elementaren Zahlenlehre eine grosse Bedeutung erlangt. Vgl. z. B. *Bettazzi*, Fondamenti per una teoria generale dei gruppi, Rom 1896, sowie Artikel desselben Verfassers und von *C. Burali-Forti* in den Atti di Torino 31 u. 32 (1896).

24) *Borel* a. a. O. p. 103. Der Beweis stammt von *F. Bernstein*. Zuerst bewiesen wurde der Satz 1896 von *E. Schröder*. Vgl. dazu Jahresb. d. deutsch. Math.-V. 5, p. 81, sowie Nova Acta Leop. 71 (1898), p. 303.

25) Im Keim ist diese Idee schon bei *P. Tannery* vorhanden; vgl. Anm. 15. Eine Funktion einer reellen Variabeln stellt danach eine Belegung des $\mathfrak{C}$ mit sich selbst dar, ihre Gesamtheit die Belegungsmenge von $\mathfrak{C}$ mit sich selbst.

auch jede abzählbare Menge abzählbarer Mengen selbst abzählbar ist, so bestehen für jedes endliche ν die Gleichungen

$$\nu\aleph_0 = \aleph_0, \quad \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0, \quad \aleph_0^{\nu} = \aleph_0.$$

5. Die Ordnungstypen. Besteht für die Elemente der Menge M eine *Rangordnung*, die für je zwei Elemente m_1 und m_2 bestimmt, welches dem andern vorangeht ($m_1 \prec m_2$), so heisst die Menge geordnet resp. *einfach* geordnet. Wenn $M \sim N$ ist und je zwei Elemente m_1 und m_2 die gleiche Rangordnung besitzen, wie die entsprechenden Elemente n_1 und n_2, so heissen die Mengen *ähnlich* geordnet ($M \simeq N$) oder von *gleichem Ordnungstypus.* Der Ordnungstypus von M ($\alpha = \overline{M}$) wird also durch die Art der Rangordnung bestimmt[26]). Während eine endliche Menge nur einen Ordnungstypus besitzt ($M = f_1 f_2 \ldots f_m$), ist deren Zahl bei einer transfiniten Menge selbst transfinit und bildet die zur Menge gehörige *Typenklasse.*

Der einfachste Typus ω ist derjenige der Reihe der ganzen Zahlen (Nr. 3). Teilmengen vom Typus ω resp. vom inversen Typus $^*\omega$ sind in jeder transfiniten geordneten Menge enthalten und heissen Fundamentalreihen. Mit ihnen lassen sich analog zur Theorie der Irrationalzahl Grenzelemente definieren; man hat nur die Grössenbeziehung durch eine Beziehung dem Range nach zu ersetzen (Nr. 7). Die Beziehung zwischen Fundamentalreihe und Grenzelement bleibt für alle ähnlichen Mengen erhalten.

Der Begriff des Ordnungstypus lässt sich auf *mehrfach* geordnete Mengen übertragen, d. h. auf solche, bei denen für m_1 und m_2 das Rangverhältnis in mehr als einer Hinsicht in Frage kommt. Ist die Zahl der Elemente endlich, so ist auch die Zahl ihrer Ordnungstypen endlich. Die Anzahl aller Ordnungstypen von m Elementen, die n-fach geordnet sind, ist von *Cantor* bestimmt worden[27]). Analoge Sätze und Reduktionsformeln gaben auch *H. Schwarz* und *Vivanti*[28]).

Auf die Ordnungstypen lassen sich die Definitionen der Summe und des Produkts übertragen. Die Summe $\alpha + \beta$ von $\alpha = \overline{M}$ (Augendus) und $\beta = \overline{N}$ (Addendus) ist der Ordnungstypus der Vereinigungsmenge $\{M, N\}$, in der die Rangbeziehungen für M und N bestehen

---

26) Die rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 kann man z. B. auf folgende Arten ordnen: 1) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5} \ldots$, 2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots, \frac{2}{3}, \frac{2}{5} \ldots, \frac{3}{4}, \frac{3}{5} \ldots$ 3) der Grösse nach. Bei 1) hat *jede* Zahl (ausser $\frac{1}{2}$) eine nächstfolgende und nächstvorhergehende, bei 2) nur eine nächstfolgende, bei 3) weder das eine noch das andere. Für 1) ist ω der Ordnungstypus, für 2) $\omega + \omega + \omega + \cdots = \omega \cdot \omega$ (vgl. Anm. 30).

27) Z. f. Philos. 92 (1887), p. 240.

28) Dissertation, Halle 1888, sowie Ann. di mat. (2) 17 (1889), p. 1.

bleiben und jedes Element von M niederen Rang hat, als jedes Element von N. Zum Produkt $\alpha \cdot \beta$ gelangt man so, dass in die Menge N an Stelle jedes Elementes n_ν eine der Menge M ähnliche Menge M_ν gesetzt wird und die Rangbeziehungen demgemäss definiert werden[29]); β heisst Multiplikator, α Multiplikandus; $\alpha \cdot \beta$ bedeutet also so viel als α angewandt auf oder eingesetzt in β.[30])

Da sich der Begriff des Ordnungstypus auf die Anordnung der Elemente stützt, so bleiben von den Rechnungsgesetzen nur die associativen, nicht aber die commutativen in Kraft. Im Gegensatz zu den endlichen Zahlen stellen aber Summe und Produkt unendlich vieler Ordnungstypen immer einen Ordnungstypus dar (Nr. 7).

6. Die wohlgeordneten Mengen und ihre Abschnitte. In dem Ordnungstypus und seinen Gesetzen besteht die logisch geklärte Grundlage, die *Cantor* zur Konstruktion der transfiniten Zahlen benutzt hat[31]). Diese Zahlen sind nichts andres als die Ordnungstypen wohlgeordneter Mengen. Eine geordnete Menge heisst *wohlgeordnet,* wenn sie selbst, sowie jede ihrer Teilmengen, ein dem Range nach niederstes Element besitzt. Die wichtigste Folge dieser Definition ist, dass in einer wohlgeordneten Menge F auf jedes bestimmte Element, falls es nicht das letzte ist, ein Element folgt, und dass es in ihr keine Reihe von Elementen $f \succ f' \succ f'' \succ \ldots$ giebt, die nicht abbricht. In dieser Thatsache liegt der Hauptbeweisgrund der folgenden Sätze.

Die wohlgeordneten Mengen F besitzen Grössencharakter (4). Um dies zu erweisen, bedarf man des Hülfsmittels der *Abschnitte.* Ein Abschnitt A von F ist die wohlgeordnete Menge aller Elemente von F, die niederen Rang haben als ein bestimmtes Element f; man sagt, dass A zum Element f gehört. Man beweist zunächst, dass die Abschnitte derselben Menge Grössencharakter besitzen, falls man $A < A'$ definiert, wenn A zu f, A' zu f' gehört und $f \prec f'$ ist. Sind nun F und G irgend zwei wohlgeordnete Mengen, so sind sie entweder einander ähnlich, oder es hat jeder Abschnitt A von F einen ihm ähnlichen Abschnitt B in G und es giebt einen Abschnitt B_1 von G, der F äquivalent ist, oder endlich es findet zwischen F und G das umgekehrte Verhältnis statt. Daraus folgt, dass für F und G stets eine der drei Beziehungen $\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{G}}$, $\overline{\overline{F}} < \overline{\overline{G}}$, $\overline{\overline{F}} > \overline{\overline{G}}$ statthat.

---

29) Ursprünglich durch $\beta \cdot \alpha$ bezeichnet; Math. Ann. 21, p. 551.

30) So ist unter durchsichtiger Anwendung von Indices

$$2 \cdot \omega = 1_1 1_2 2_1 2_2 \ldots = \omega, \qquad \omega \cdot 2 = 1_1 2_1 3_1 \ldots 1_2 2_2 3_2 \ldots = \omega + \omega,$$

endlich

$$\omega \cdot \omega = 1_1 2_1 3_1 \ldots 1_2 2_2 3_2 \ldots 1_3 2_3 3_3 \ldots 1_n 2_n 3_n \ldots$$

31) Für den Inhalt von Nr. 6 vgl. Math. Ann. 49 (1897), p. 207

7. Die Ordnungszahlen und die Zahlklasse $Z(\aleph_0)$. Das vorstehende besagt, dass es einen und nur einen Typus W giebt, so dass *jede* wohlgeordnete Menge einem Abschnitt dieses Typus ähnlich ist. Diese Abschnitte, resp. ihre Ordnungstypen sind *Cantor*'s *Ordnungszahlen*[32]); nach der Grösse geordnet bilden sie selbst wieder die Menge W. Die Abschnitte von W, die eine endliche Menge darstellen, die also durch das *erste* Erzeugungsprincip (Nr. 3) entstehen, liefern die erste Zahlklasse $Z(\mathrm{I})$[33]). Von den dann folgenden Abschnitten resp. Ordnungszahlen enthält die zweite Zahlklasse $Z(\mathrm{II}) = Z(\aleph_0)$ diejenigen, die auf Grund des *ersten und zweiten* Erzeugungsprincips entstehen.

Das zweite Erzeugungsprinzip fordert, dass zu jeder Reihe wachsender Ordnungszahlen $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_\nu < \cdots$ („Fundamentalreihe") eine *erste* nächstgrössere Zahl β existiert. Seine genauere Analyse führt zum Begriff der Limeszahlen, der der Irrationalzahl formal analog ist. Sind nämlich $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_\nu$ irgend welche Ordnungszahlen von $Z(\aleph_0)$, setzt man

$$\alpha_\nu = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu,$$

so dass $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_\nu$, und definiert

$$\operatorname{Lim} \alpha_\nu = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu + \cdots = \beta = \{\alpha_\nu\},$$

so ist 1) $\beta > \alpha_\nu$ für jedes ν, 2) falls $\beta' < \beta$, so giebt es stets Zahlen μ, so dass $\alpha_\mu > \beta'$. Diese Zahl β ist daher die auf alle α_ν der Grösse nach zunächst folgende Ordnungszahl. Wie für die Irrationalzahl gilt auch hier der Satz, dass zwei „Fundamentalreihen" $\{\alpha_\nu\}$ und $\{\alpha'_\nu\}$ unter den bekannten Bedingungen dieselbe Zahl β darstellen.

Da jede abzählbare Menge abzählbarer Mengen selbst abzählbar ist, so stellt jede Zahl von $Z(\aleph_0)$ eine Menge der Mächtigkeit $\aleph_0$ dar; umgekehrt lässt sich $Z(\aleph_0)$ auch als Gesamtheit der Ordnungstypen wohlgeordneter abzählbarer Mengen definieren.

Zu jeder Zahl giebt es entweder eine unmittelbar vorhergehende (Zahl erster Art) oder sie ist eine Limeszahl β, für die es eine solche Zahl nicht giebt (Zahl zweiter Art).

8. Mengen höherer Mächtigkeit. Aus dem in Nr. 2 erwähnten Schlussverfahren folgt, dass die Menge $Z(\aleph_0)$ höhere Mächtigkeit als $\aleph_0$ hat. Überdies ist jede ihrer Teilmengen entweder einem Abschnitt der Menge oder der Menge selbst ähnlich und hat daher entweder die Mächtigkeit $\aleph_0$ oder die Mächtigkeit von $Z(\aleph_0)$ selbst. Daher stellt $Z(\aleph_0)$ eine Menge nächst höherer Mächtigkeit $\aleph_1$ dar[34]).

---

32) Für den Inhalt von Nr. 7 vgl. Math. Ann. 49, p. 211 ff.

33) Vgl. Math. Ann. 21, p. 547.

34) *Cantor* in Math. Ann. 49, p. 226 (vgl. auch Grundlagen p. 39).

Um zu Mengen beliebig hoher Mächtigkeit zu gelangen, kann man eine Methode benutzen, mit der *Cantor* neuerlich bewiesen hat, dass das Continuum höhere Mächtigkeit besitzt, als die natürliche Zahlenreihe[35]). Sie beruht darin, die Darstellung einer Zahl durch einen dyadischen Decimalbruch als Zuordnung der Ziffern 0 und 1 zur abzählbaren Zahlenmenge aufzufassen und zu zeigen, dass die Gesamtheit dieser Zuordnungen nicht abzählbar ist. Ebenso folgt, dass die Belegungsmenge jeder Menge M mit sich selbst höhere Mächtigkeit als M besitzt. Insbesondere hat die Gesamtheit aller Funktionen als Gesamtheit aller Zuordnungen der Zahlen des Continuums zu einander höhere Mächtigkeit als das Continuum. Dagegen ist die Gesamtheit aller analytischen sowie aller stetigen Funktionen nur die des Continuums[36]).

Die Thatsache, dass sich alle Ordnungszahlen ihrer Grösse nach in eine Reihe bringen lassen, hat *Cantor* zur Erweiterung des Abzählbarkeitsbegriffs geführt; er nennt die Mengen der Mächtigkeit $\aleph_0$ abzählbar durch Zahlen der zweiten Klasse[37]). Der hieran anschliessende Ausblick auf eine wohlgeordnete Menge von Zahlklassen resp. Mächtigkeiten $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2 \dots \aleph_\omega \dots$, so dass auf jede Mächtigkeit die *nächsthöhere* folgt, und jede höhere Klasse der Inbegriff der Ordnungstypen der vorhergehenden Klasse ist, entbehrt noch der Ausführung.

9[38]). **Die allgemeinen Rechnungsgesetze der Ordnungszahlen.** Bedeuten $\alpha, \beta, \varphi, \psi \dots$ Zahlen von $Z(\aleph_0)$, ferner $\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \varrho, \sigma, \tau \dots$ Zahlen von $Z(\mathrm{I})$, so ergeben sich, wesentlich auf Grund dessen, dass 1) jeder Inbegriff von Zahlen von $Z(\aleph_0)$ eine kleinste besitzt und 2) jede Limeszahl die nächstgrössere zu allen Zahlen ihrer Fundamentalreihe ist (Nr. 7), die folgenden Gleichungen

$$\nu_0 + \alpha = \alpha, \quad \nu_0 \alpha = \alpha, \quad (\alpha + \nu_0)\omega = \alpha\omega$$
$$\omega^{\mu'}\nu' + \omega^\mu \nu = \omega^\mu \nu, \quad \text{falls} \quad \mu' < \mu, \quad \nu > 0, \quad \nu' > 0.$$

Aus ihnen fliessen folgende zwei Hauptsätze: 1) Jede ganze algebraische Funktion endlichen Grades von ω lässt sich und dies nur auf eine Weise in die Form

$$\varphi = \omega^\mu \nu_0 + \omega^{\mu-1}\nu_1 + \cdots + \nu_\mu; \quad \mu > 0, \quad \nu_0 > 0$$

bringen. 2) Ist

$$\varphi = \omega^\mu \varkappa_0 + \omega^{\mu_1}\varkappa_1 + \cdots + \omega^{\mu_\tau}\varkappa_\tau$$

35) Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 1 (1891), p. 75.

36) *Cantor* in Math. Ann. 21 (1883), p. 590.

37) Math. Ann. 21, p. 549.

38) Die zu diesem Paragraphen aus Math. Ann. 49, p. 229 ff. citierten Sätze hat *Cantor* teilweise schon in Math. Ann. 21 (1883), p. 584 ff. ausgesprochen.

für $\mu > \mu_1 > \mu_2 \cdots > \mu_\tau \geqq 0$, und jedes $\varkappa_\lambda > 0$, so lässt sich φ und zwar nur auf eine Art in Faktoren zerlegen,

$$\varphi = \omega^{\mu_\tau}\varkappa_\tau(\omega^{\mu_{\tau-1}-\mu_\tau}+1)\varkappa_{\tau-1}\cdots(\omega^{\mu-\mu_1}+1)\varkappa_0.$$ [39])

Für Exponenten, die der Klasse $Z(\aleph_0)$ angehören, lässt sich die Potenz durch folgenden Satz definieren. Sind ξ, γ, δ Zahlen von (I) oder (II) und ist $\delta > 0$, $\gamma > 1$, so giebt es eine und nur eine Funktion $f(\xi)$, die folgenden Bedingungen genügt: 1) $f(0) = \delta$, 2) $f(\xi') < f(\xi'')$, wenn $\xi' < \xi''$, 3) $f(\xi+1) = f(\xi)\gamma$, 4) $f(\xi) = \operatorname{Lim} f(\xi_\nu)$, wenn $\xi = \operatorname{Lim} \xi_\nu$. Die einfachste Funktion dieser Art ergiebt sich für $\delta = 1$; wird sie durch γ^ξ bezeichnet, so gelten folgende Regeln:

$$\gamma^0 = 1, \quad \gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^\alpha\gamma^\beta, \quad \gamma^{\alpha\beta} = (\gamma^\alpha)^\beta, \quad \gamma^\xi \geqq \xi,$$

und es hat die oben definierte allgemeine Funktion $f(\xi)$ den Wert

$$f(\xi) = \delta\gamma^\xi.$$

10[40]). Die Normalform der Ordnungszahlen und die ε-Zahlen. Die Einführung des Potenzbegriffs führt zur Existenz einer Normalform der Zahlen von $Z(\aleph_0)$. Sie beruht auf dem Satze, dass sich jede Zahl α und dies nur auf eine Weise in die Form

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \alpha', \quad 0 \leqq \alpha' < \omega^{\alpha_0}, \quad \alpha' < \alpha, \quad \alpha_0 \leqq \alpha, \quad \varkappa_0 > 0$$

bringen lässt. Die wiederholte Anwendung dieses Satzes liefert für α die *Normalform*

$$\alpha = \omega^{\alpha_0}\varkappa_0 + \omega^{\alpha_1}\varkappa_1 + \cdots + \omega^{\alpha_\tau}\varkappa_\tau, \quad \alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_\tau \geqq 0, \quad \text{alle } \varkappa_\lambda > 0.$$

α_0 heisst Grad, α_τ Exponent von α. Je nachdem $\alpha_\tau \gtreqqless 0$, ist α eine Zahl erster oder zweiter Art (Nr. 7). Die oben (Nr. 9) erwähnte Zerlegung einer Zahl φ gilt auf Grund der Normalform auch für beliebiges α:

$$\alpha = \omega^{\alpha_\tau}\varkappa_\tau'(\omega^{\alpha_{\tau-1}-\alpha_\tau}+1)\varkappa_{\tau-1}\cdots(\omega^{\alpha_0-\alpha_1}+1)\varkappa_0;$$

die Zahlen $\omega^\gamma + 1$ sind unzerlegbar und heissen *Primzahlen.* Insbesondere ist jede Limeszahl von der Form $\alpha = \omega^{\gamma_0}\alpha'$, wo $\gamma_0 > 0$.

Während im allgemeinen der Grad $\alpha_0 < \alpha$, so giebt es Zahlen, für die $\alpha_0 = \alpha$ und daher α Wurzel der Gleichung $\omega^\xi = \xi$ ist. Ihre Existenz ergiebt sich aus folgendem Satz: Ist γ eine Zahl, die dieser Gleichung nicht genügt, so bestimmen die Zahlen

---

39) *Cantor* benutzt a. a. O. diese Sätze, um aus ihnen Formeln für Produkt und Summe von zwei Ordnungszahlen abzuleiten.

40) Für den Inhalt dieses Paragraphen vgl. Math. Ann. 49, p. 235 ff. *Cantor* knüpft dort wieder Formeln für Summe und Produkt an, und giebt die notwendige und hinreichende Bedingung, dass $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, resp. $\alpha\beta = \beta\alpha$ ist, Im ersten Fall ist $\alpha = \gamma\mu$, $\beta = \gamma\nu$, im zweiten $\alpha = \gamma^\mu$, $\beta = \gamma^\nu$.

$$\gamma, \ \gamma_1 = \omega^\gamma, \ \gamma_2 = \omega^{\gamma_1} \cdots, \ \gamma_\nu = \omega^{\gamma_{\nu-1}} \cdots$$

eine Fundamentalreihe $\{\gamma_\nu\}$ und es ist Lim γ_ν eine derartige Zahl und heisst eine ε-Zahl; $E(\gamma) = \text{Lim}\ \gamma_\nu$. Von ihnen gilt: 1) die kleinste ε-Zahl ist $E(1) = \text{Lim}\ \omega_\nu$, wo $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega^{\omega_1}$, $\omega_\nu = \omega^{\omega_{\nu-1}} \ldots$; 2) ist ε' eine ε-Zahl, so ist $E(\varepsilon' + 1)$ die nächst grössere; 3) ist ε'' die zu ε' nächstgrössere Zahl und ist $\varepsilon' < \gamma < \varepsilon''$, so ist $E(\gamma) = \varepsilon''$; 4) sind $\varepsilon' < \varepsilon'' < \ldots \varepsilon^{(\nu)} \ldots$ sämtlich ε-Zahlen, so ist auch Lim $\varepsilon^{(\nu)}$ eine ε-Zahl und zwar diejenige, die auf alle $\varepsilon^{(\nu)}$ als nächstgrössere folgt. Die Gesamtheit der ε-Zahlen bildet daher eine wohlgeordnete Menge, die der Menge $Z(\aleph_0)$ ähnlich ist.

Die Gleichung $\alpha^\xi = \xi$ hat keine andern Wurzeln als die ε-Zahlen, die grösser sind als α; jede von ihnen genügt den drei Gleichungen:

$$\alpha + \varepsilon = \varepsilon, \qquad \alpha\varepsilon = \varepsilon, \qquad \alpha^\varepsilon = \varepsilon.$$

11. Allgemeine Definitionen und Formeln für Punktmengen. Für die Unterscheidung der Punktmengen kommen in arithmetischer Hinsicht ihre Ableitungen, in geometrischer ihre Lage in einem als *stetig* vorausgesetzten Raume in Betracht. Geometrischer Natur sind folgende Definitionen[41]). Ein Punkt p heisst isolierter[41]) Punkt von P, wenn man um ihn einen Bereich abgrenzen kann, der keinen weiteren Punkt von P enthält. Sind alle Punkte der Menge P isolierte Punkte, so heisst sie selbst isoliert[41]). Ist im Intervall $a \ldots b$ kein von Punkten freies Intervall vorhanden, so heisst P in diesem Intervall *überall dicht*[42]) (pantachisch[43])); alsdann enthält P' alle Punkte des Intervalls.

Das Verhältnis der Menge P zu ihren Ableitungen[44]) (Nr. **1**) hat *Cantor* zu folgenden Festsetzungen geführt[45]). Die Menge heisst *abgeschlossen*, wenn sie jeden Grenzpunkt enthält; sie heisst *in sich dicht*, wenn jeder ihrer Punkte ein Grenzpunkt ist; sie heisst *separiert*, wenn kein Bestandteil in sich dicht ist; zu den separierten Mengen gehören z. B. die isolierten Mengen und die abgeschlossenen Mengen der ersten Mächtigkeit[46]). Die Menge P heisst endlich *perfekt*[47]), wenn $P = P'$ ist, sie ist dann zugleich abgeschlossen und in sich dicht. Ferner

---

41) Math. Ann. 21, p. 51.

42) Nach *Cantor,* Math. Ann. 15, p. 2.

43) Diese Bezeichnung stammt von *du Bois;* Math. Ann. 15 (1879), p. 287.

44) *G. Peano* hat für lineare Punktmengen links genommene, resp. rechts genommene Ableitungen eingeführt. Riv. di mat. 4 (1894), p. 34.

45) Math. Ann. 23, p. 470 ff.

46) Math. Ann. 23, p. 472.

47) Math. Ann. 21 (1883), p. 575.

heisst P erster Art und νter Gattung[48]), falls $P^{(\nu)}$ die letzte vorhandene Ableitung ist; sie heisst dagegen zweiter Art[48]), wenn Ableitungen transfiniter Ordnungszahlen existieren, wie z. B. bei perfekten Mengen.

Da die Punkte von $P^{(\nu)}$ sämtlich in $P^{(\nu-1)}$ enthalten sind, so kann man folgende Identität aufstellen[49]):

$$P' = (P' - P'') + (P'' - P''') + \cdots + (P^{(\nu-1)} - P^{(\nu)}) + P^{(\nu)}.$$

Diese Identität kann bis zu Zahlen von $Z(\mathrm{II})$ fortgesetzt werden, und wenn man die allen $P^{(\alpha)}$ gemeinsame Menge, falls sie existiert, durch $P^{(\Omega)}$ bezeichnet[50]), so dass $P^{(\Omega)} = \mathfrak{D}(P', P'', \ldots P^{(\alpha)} \ldots)$ ist, so folgt

$$P' = \sum \{P^{(\gamma)} - P^{(\gamma+1)}\} + P^{(\Omega)}, \qquad \gamma = 0, 1 \cdots \omega \cdots \alpha \cdots.$$

Wesentlich ist, dass jede Klammer eine *isolierte* Menge darstellt.

12. Allgemeine Lehrsätze über Punktmengen. Die Einteilung der Punktmengen nach der Mächtigkeit, insbesondere die Entscheidung der Frage, ob sie abzählbar sind oder nicht, hat *Cantor* bereits früh in Angriff genommen. Die Untersuchung beruht auf folgenden Hülfssätzen: 1) Jede im unbegrenzten R_n enthaltene Menge von getrennten oder nur an den Begrenzungen zusammenstossenden stetigen Teilgebieten ist abzählbar[51]). 2) Ist für die Mengen Q und R sowohl $\mathfrak{D}(Q, R) = 0$ als $\mathfrak{D}(Q', R) = 0$ und liegt in jedem Teilgebiet H eines R_n, das weder Punkte von Q noch von Q' enthält, eine endliche oder abzählbare Menge von Punkten von R, so ist R selbst endlich oder abzählbar[52]). 3) Sind $d_1, d_2 \ldots$ der Grösse nach geordnete Intervalle im Intervall $0 \ldots 1$, so kann jede Punktmenge $\{\psi\}$ des Intervalls $0 \ldots 1$, die überall dicht ist und die erste Mächtigkeit besitzt, in eine solche Reihe gebracht werden, dass je zwei Punkte ψ_μ und ψ_ν die gleiche Lage zu einander haben, wie die Intervalle d_μ und d_ν[53]).

Mittelst der Sätze 1) und 2) und auf Grund davon, dass jede abzählbare Menge abzählbarer Punktmengen selbst abzählbar ist, er-

48) Math. Ann. 15, p. 2. Beispiele von Mengen erster Art und νter Gattung, in denen $P^{(\nu)}$ gegebene Punkte enthält, finden sich z. B. bei *G. Ascoli,* Linc. Mem. (3) 2 (1878), p. 584, sowie *U. Dini,* Fondamenti p. 17. Vgl. auch *G. Mittag-Leffler* in C. R. 94 (1882), p. 939, sowie *du Bois,* Functionenlehre p. 186.

49) Math. Ann. 21, p. 51 ff. und 23, p. 463 ff.

50) Ω ist der Ordnungstypus aller Zahlen der Klasse $Z(\aleph_0)$ in ihrer natürlichen Reihenfolge, und wird gemäss Nr. 8 von *Cantor* auch als erste Zahl der dritten Zahlklasse bezeichnet; Math. Ann. 21, p. 582.

51) Math. Ann. 20, p. 117.

52) Math. Ann. 23, p. 457.

53) Math. Ann. 23, p. 482.

geben sich folgende Theoreme[54]): 1) Jede separierte Punktmenge ist abzählbar. 2) Ist P' abzählbar, so ist auch P abzählbar. 3) Ist für eine Zahl α von Z(I) oder Z(II) $P^{(\alpha)} = 0$, so ist P' und P abzählbar oder endlich, umgekehrt, ist P' abzählbar, so giebt es eine erste Zahl α, so dass $P^{(\alpha)} = 0$ ist. Punktmengen dieser Art sind daher durch ihre Ableitungen im wesentlichen charakterisiert. 4) Ist P' von höherer als der ersten Mächtigkeit, so giebt es stets Punkte, die allen $P^{(\alpha)}$ angehören und ihr Inbegriff $S = P^{(\Omega)}$ ist perfekt; zugleich ist $P' = P^{(\Omega)} + R$, wo R eine separierte Menge ist. Ferner giebt es dann bereits eine kleinste transfinite Zahl α erster Art (Nr. 7), so dass $P^{(\alpha)} = P^{(\alpha+1)} = P^{(\Omega)}$. Die Menge R hat überdies die Eigenschaft, dass $\mathfrak{D}(R, R^{(\alpha)}) = 0$ ist[55]).

Eine Menge, für die es ein α giebt, so dass $P^{(\alpha)} = 0$ ist, heisst *reductibel;* sie lässt sich (Nr. **11**) durch successive Abtrennung isolierter Mengen erschöpfen. Ist dagegen P' von höherer Mächtigkeit, so führt diese Abtrennung schliesslich zu einer Restmenge, die perfekt ist. Für diese Charakteristik der Punktmengen bilden also die Zahlen von Z(II) das notwendige und hinreichende Beweismittel.

13. Die abgeschlossenen und perfekten Mengen. Wie die erste Ableitung einer Punktmenge eine abgeschlossene Menge ist, so lässt sich auch umgekehrt jede abgeschlossene Menge auf unendlich viele Arten als Ableitung einer andern Menge darstellen[56]). Die Sätze des vorigen Paragraphen, die bei beliebigen Mengen an die Ableitung P' anknüpfen, gelten daher, falls P abgeschlossen ist, für P selbst. Ferner gilt, dass eine abgeschlossene Menge entweder von der ersten Mächtigkeit und also reductibel ist oder die Mächtigkeit des Linearcontinuums besitzt. (Da $P = R + S$, wo S perfekt; vgl. unten.)

Da die perfekten Mengen jeden Grenzpunkt enthalten, so folgt aus dem Hauptschlussverfahren (Nr. 2), dass sie von höherer als der ersten Mächtigkeit sind[57]). Unter ihnen haben diejenigen besonderes

---

54) Vgl. Math. Ann. 21 (1883), p. 51, und 23 (1884), p. 461; ferner *Bendixson* in Acta mat. 2 (1883), p. 415.

55) Dieser Zusatz stammt von *Bendixson* (vgl. Anm. 54); zugleich findet sich a. a. O. ein lehrreiches Beispiel. Einen Beweis des Satzes 4) für Punktmengen im R_n gab *E. Phragmèn* in Acta mat. 5 (1885), p. 47.

56) Math. Ann. 23, p. 470. Ist $Q = (q_1 q_2 \ldots)$ die Adhärenz (vgl. Nr. **14**) von P, und setzt man in eine um q_ν gelegte Kugel, die ausser q_ν keinen Punkt von Q enthält, eine Menge P_ν so, dass $P'_\nu = q_\nu$ ist, so ist P die Ableitung von $P' + \Sigma P_\nu$.

57) Math. Ann. 23, p. 459.

Interesse, die nirgends überall dicht (apantachisch) sind[58]). Mit ihrer Hülfe hat *Cantor* auf Grund des Theorems 3 von Nr. **12** gezeigt, dass alle perfekten Mengen die Mächtigkeit des $\mathfrak{C}$ besitzen[59]). *Harnack* hat zuerst bemerkt, dass man das $\mathfrak{C}_1$ auf eine nirgends überall dichte Menge P so eineindeutig abbilden kann, dass sogar die Grössenordnung in beiden Mengen dieselbe ist[60]). Die von ihm aufgestellte Bedingung ist von *Bettazzi*[61]) genauer gefasst geworden. Eine perfekte Menge ist demzufolge notwendig stetig, wenn sie überall dicht ist.

Eine nirgends überall dichte perfekte lineare Menge ist stets Ableitung einer isolierten Menge, die aus Endpunkten gewisser Intervalle besteht[62]). *L. Scheeffer* hat den allgemeineren Satz[63]), dass, wenn eine Reihe von Intervallen vorliegt, die einander ausschliessen, alle Punkte, die nicht im Innern eines solchen Intervalles liegen, eine perfekte Menge bilden; umgekehrt ist auch jede perfekte Menge so darstellbar. Nach einem andern Satz von *L. Scheeffer*[63]) kann man, falls P eine nirgends überall dichte perfekte Menge und R eine abzählbare Menge ist, alle Punkte von P um geeignete Strecken so verschieben, dass keiner mit einem Punkt von R zusammenfällt. Es giebt also perfekte Mengen, die nur aus irrationalen Punkten bestehen.

14. Zerlegung einer Menge in separierte und homogene Bestandteile. Die Theorie der Punktmengen hat *Cantor*[64]) neuerlich durch Einführung der Begriffe der Adhärenz, Cohärenz und der homogenen Menge weiter gefördert. Diese Begriffe tragen dem Umstand Rechnung, dass die Mächtigkeit des $\mathfrak{C}$ noch nicht geklärt ist und man daher Punktmengen beliebiger Mächtigkeit zulassen muss. Die *Cohärenz* Pc einer Menge P ist die Gesamtheit der ihr angehörigen Grenz-

58) Diese Mengen treten in den verschiedensten Gebieten auf. Beispiele gab zuerst 1882 *A. Harnack* in Math. Ann. 19, p. 239 u. 23 (1884), p. 285, ferner *Cantor* daselbst 21, p. 590, *Bendixson* in Acta mat. 2 (1883), p. 427 u. a. Vgl. auch *R. Fricke*, Math. Ann. 44 (1894), p. 565. Vgl. auch Anm. 60 und 62.

59) Math. Ann. 23, p. 488. Vgl. *Bendixson* Bih. Sv. Vet. Handl. 9, Nr. 6.

60) Math. Ann. 23 (1884), p. 285. Diese Mengen erhält man am einfachsten, indem man von der Dezimalbruchdarstellung jeder Zahl ausgeht, und deren Ziffern Gesetze oder Beschränkungen auferlegt; vgl. *Cantor* in Math. Ann. 21, p. 590, *Peano* in Riv. di mat. 2 (1892), p. 43, *Schönflies* in Gött. Nachr. 1896, p. 255.

61) Ann. di mat. (2), 16 (1888), p. 49.

62) Dementsprechend kann man die oben genannten nirgends überall dichten perfekten Mengen auch so erhalten, dass man in ein Intervall eine Strecke einträgt, die von Punkten frei bleiben soll, in jedes der beiden übrigen Teilintervalle neue Strecken dieser Art u. s. w., und die Ableitung der so bestimmten Punktmenge bildet. Vgl. Anm. 58.

63) Acta mat. 5 (1885), p. 288 ff.

64) Für den Inhalt dieses Paragraphen vgl. Acta mat. 7 (1885), p. 105 ff.

punkte und enthält jede in sich dichte Teilmenge von P. Die übrigen, notwendig isolierten Punkte bilden die *Adhärenz* Pa. Da die Cohärenz Pc selbst wieder in eine Adhärenz Pca und eine Cohärenz Pc^2 gespalten werden kann, so dass $Pc = Pca + Pc^2$ ist, so ergiebt sich bei fortgesetzter Spaltung (analog Nr. **11**)

$$P = Pa + Pca + Pc^2a + \cdots + Pc^{\nu-1}a + Pc^{\nu},$$

resp. bei Fortsetzung bis zu transfiniten Zahlen

$$P = \sum_{\alpha} Pc^{\alpha}a + Pc^{\gamma} \qquad (\alpha = 0, 1 \ldots \omega \ldots < \gamma),$$

wo für γ auch Ω eintreten kann. Jeder in sich dichte Bestandteil von P gehört allen Cohärenzen gemeinsam an, während jede Adhärenz $Pc^{\gamma}a$ isoliert und $\sum Pc^{\gamma}a$ eine separierte Menge ist. Die in sich dichten Mengen heissen *homogen*, falls ihre Bestandteile in der Umgebung jedes Punktes gleiche Mächtigkeit haben.

Aus den obigen Formeln folgt: 1) Jede Menge erster Mächtigkeit zerfällt in zwei ihrer Natur nach verschiedene Bestandteile, von denen einer 0 sein kann, nämlich $P = R + U$, wo R separiert, U dagegen in sich dicht und homogen ist, und es giebt eine kleinste Zahl α so, dass $U = Pc^{\alpha} = Pc^{\Omega}$ ist. 2) Ist P von höherer als der ersten Mächtigkeit, so hat man im allgemeinen drei Bestandteile, $P = R + U + V$, zu unterscheiden, wo R und U die vorige Bedeutung haben, V eine Menge höherer Mächtigkeit darstellt und wiederum $U + V = Pc^{\alpha} = Pc^{\Omega}$ ist. Lässt man Mengen beliebiger Mächtigkeit zu, so hat V die Form $V = \sum Pi_{\beta}$, wo Pi_{β} eine homogene Menge βter Mächtigkeit ist. Die Menge Pi_{β} heisst auch die βte *Inhärenz* von P,[65]) $U + V = \sum Pi_{\beta}$ $(\beta = 1, 2 \ldots)$ heisst die totale Inhärenz. R heisst Rest oder Residuum von P.

15. Der Inhalt von Punktmengen. Die Erörterungen über den *Inhalt* von Punktmengen haben sich zuerst an die Theorie der Integrale und Fourier'schen Reihen, resp. an die mögliche Verteilung ihrer Unstetigkeiten angeschlossen (II A 1, 3, 8). *H. Hankel*[66]) hat zuerst die von Punkten einer Menge freie Intervallmenge zu bestimmen gesucht, freilich nicht fehlerfrei. Er meinte irrtümlich, dass sie stets gleich dem Gesamtintervall ist, falls die Menge nirgends überall dicht ist. *St. Smith*[67])

---

65) *Cantor* nennt die Punkte von Pi_{β} Punkte βter Ordnung, diejenigen von $Pc^{\alpha}a$ Punkte αter Art. Aus der Existenz von Punkten αter Art folgt diejenige der niederen Art; für die Inhärenzen besteht ein solches Verhältnis nicht.

66) Univ.-Progr. Tübingen 1873, p. 25 (Über die unendlich oft unstetigen und oscillirenden Funktionen), sowie Math. Ann. 20, p. 87.

67) Lond. Math. Soc. Proc. 6 (1875), p. 148.

und nach ihm *du Bois*, *Harnack*[68]) und *W. Veltmann*[69]) haben wohl zuerst erkannt, dass es Mengen giebt, die nirgends überall dicht sind und deren freie Intervallsumme jedem Wert $\lambda \leqq d$ beliebig nahe gebracht werden kann, wenn d das sie enthaltende Intervall ist[70]). Für $\lambda = d$ heisst die Punktmenge nach *du Bois integrierbar*[71]). *U. Dini*[72]) und *Ascoli*[73]) zeigten 1878, dass jede Menge P integrierbar ist, wenn für endliches ν $P^{(\nu)} = 0$ ist.

Die Existenz eines festen Grenzwertes für die Summe der Intervalle, in denen Punkte einer Menge P liegen, wurde für beliebige Mengen zuerst von *O. Stolz*[74]) und später von *Harnack*[75]) nachgewiesen. Bald darauf gab *Cantor*[76]) seine den Inhaltsbegriff im R_n betreffenden allgemeinen Definitionen. Wesentlich für sie ist, dass man zur Menge P die ihr nicht angehörigen Grenzpunkte hinzufügt. Legt man alsdann um jeden Punkt der so erweiterten Menge P eine Kugel $K(\varrho)$, so hat das kleinste von allen diesen Kugeln zugleich erfüllte Volumen für $\varrho = 0$ einen bestimmten, nicht negativen Grenzwert; ihn bezeichnet *Cantor* als Inhalt $I(P)$ von P. Es ist $I(P) = I(P') = I(P^\gamma)$, wo γ irgend eine transfinite Zahl ist.

Aus vorstehender Definition folgt, dass wenn P' abzählbar ist, $I(P) = 0$ ist[77]); ebenso ist $I(R) = 0$, wenn R reductibel ist. Da eine beliebige Menge P' sich in die Mengen $R + S$ spalten lässt, wo $\mathfrak{D}(RR^\alpha) = 0$ (Nr. **12**) reductibel und S perfekt ist, so ist $I(P) = I(S)$, so dass die Inhaltsbestimmung nur für perfekte Mengen in Frage steht. Auch perfekte Mengen können den Inhalt 0 haben[78]).

Nachdem bereits *Harnack*[79]) auf den Einfluss hingewiesen, den die Grenzpunkte für den Inhalt haben können, haben *Peano*[80]) und *C.*

68) Math. Ann. 16 (1880), p. 128 und 19 (1882), p. 239.

69) Zeitschr. f. Math. 27 (1882), p. 178, 193, 313. Vgl. auch *V. Volterra*, Giorn. di Mat. 19 (1881), p. 76.

70) Das Konstruktionsprincip dieser Mengen ist bei allen Autoren das gleiche und identisch mit dem in Anm. 62 genannten.

71) Allgem. Fktlehre, p. 189. *Harnack* sagt in wenig guter Bezeichnung *diskret* und nennt Mengen, für die $\lambda < d$ ist, *linear*. (Math. Ann. 19, p. 238.)

72) Fondamenti p. 18.

73) Atti Linc. (3) 2, p. 586.

74) Math. Ann. 23 (1884), p. 152.

75) Math. Ann. 25 (1885), p. 241; vgl. auch *Pasch* in Math. Ann. 30 (1887), p. 132.

76) Math. Ann. 23 (1884), p. 473.

77) Diesen Satz gab *Cantor* bereits 1883 in Math. Ann. 21, p. 54.

78) Solche Mengen sind z. B. die oben erwähnten für $\lambda = d$.

79) Math. Ann. 25, p. 243.

80) Applicazioni geom del calc. etc. (1887), p. 152.

Jordan[81]) dem Inhaltsbegriff eine präcisere Formulierung gegeben, die für ebene Punktmengen so lautet: Zerlegt man die Ebene in Quadrate mit der Seite r und ist S die Summe aller Quadrate, deren sämtliche Punkte P angehören, ist ferner $S+S'$ die Summe der Quadrate, die überhaupt Punkte oder Grenzpunkte von P enthalten, so convergieren S und $S+S'$ gegen feste, von der Teilung unabhängige Grenzen I und A. Für $I=A$ heisst P messbar und $I=A$ ihr Inhalt. Ist $I<A$, so unterscheiden *Peano* und *Jordan* einen innern und äussern Inhalt.

Ist P' abzählbar, so ist P messbar und hat den Inhalt 0, insbesondere also auch jede *reductible* Menge. Ist P abzählbar, aber P' von höherer Mächtigkeit, so ist jedenfalls die innere Fläche Null[82]).

16. Das Continuum. Den Ordnungstypus des $\mathfrak{C}_1$ hat *Cantor* dahin bestimmt, dass es eine perfekte Menge M ist, die eine Menge S der Mächtigkeit $\aleph_0$ (die rationalen Zahlen) so enthält, dass zwischen zwei Elementen von M unzählig viele Elemente von S liegen[83]). Als diejenige Eigenschaft, welche eine perfekte Menge zum Continuum macht, hat *Cantor* die auf dem geometrischen Stetigkeitsbegriff ruhende Eigenschaft des Zusammenhangs aufgestellt[84]); d. h. sind p und q zwei Punkte der Menge, so giebt es eine endliche Zahl von Zwischenpunkten $p_1, p_2, \ldots p_n$, so dass die Entfernung zweier benachbarter beliebig klein ausfällt; er definiert daher das Continuum als perfekt zusammenhängende Menge[85]).

Für den Satz, dass die Mächtigkeit des $\mathfrak{C}_n$ und sogar des $\mathfrak{C}_{\aleph_0}$ dieselbe ist, wie die des $\mathfrak{C}_1$, hat *Cantor* einen neuen einfachen Beweis gegeben, der sich auf das Rechnen mit Mächtigkeiten stützt[86]). Der Satz, dass das $\mathfrak{C}$ von der zweiten Mächtigkeit ist, harrt noch immer des Beweises; trifft er zu, so müssen sich alle Zahlen zwischen 0

81) Cours d'analyse (2), Paris 1893, 1, p. 28, sowie J. d. Math. (4) 8 (1892), p. 79.

82) *C. Garibaldi* in Palermo Rend. 8 (1894), p. 157.

83) Math. Ann. 46, p. 510.

84) Math. Ann. 21, p. 575. *Bolzano* (Paradoxieen § 38) nahm an, dass diese Eigenschaft allein ausreiche. *Dedekind*'s im Schnittprincip enthaltene Definition kommt, auf die Gesamtheit der rationalen Zahlen angewandt, auf das gleiche hinaus, wie diejenige *Cantor*'s. Vgl. jedoch Nr. **17**.

85) Eine zusammenhängende nicht perfekte Menge nennt *Cantor* ein *Semicontinuum* (Math. Ann. 21, p. 590).

86) Math. Ann. 46, p. 488. Eine merkwürdige Folge der Thatsache, dass das Continuum seine Mächtigkeit behält, wenn man daraus abzählbare Mengen entfernt, ist die, dass man aus dem stetigen R_n abzählbare Punktmengen entfernen kann, ohne dass dadurch eine stetige Bewegung unmöglich wird (*Cantor* in Math. Ann. 20, p. 121).

und 1 auf die Ordnungszahlen der Klasse $Z(\aleph_0)$ eindeutig beziehen lassen. Die Fragen über Abbildung der Continua haben in neuerer Zeit weitere Fortschritte gemacht. *Peano* hat 1890 gezeigt, dass man die Abbildung des $\mathfrak{C}_2$ auf das $\mathfrak{C}_1$ auch stetig herstellen kann, falls man die Eineindeutigkeit opfert[87]). Bald darauf hat *D. Hilbert* für den gleichen Satz eine geometrische Methode gegeben[88]).

Auch für die Geometrie ist die Mengenlehre massgebend geworden[89]); *E. Maccaferri* hat jedoch auf einen merkwürdigen Unterschied hingewiesen, der zwischen dem *Cantor*'schen Begriff des Continuums und den durch Gleichungen gegebenen continuierlichen Gebilden statthat. Sind im R_n die Coordinaten $x_1 \dots x_n$ stetige Funktionen von t, so stellt zwar der Inbegriff aller zugehörigen Punkte eine continuierliche Menge im *Cantor*'schen Sinne dar, aber umgekehrt kann, sobald $n \geqq 2$ ist, ein *Cantor*'sches Continuum nicht immer durch derartige Gleichungen dargestellt werden; die bei *Cantor* der Menge notwendig angehörenden Grenzpunkte brauchen nämlich durch das Funktionensystem nicht dargestellt zu werden[90]).

Bendixson[91]) und *Phragmèn*[92]) haben sich mit Eigenschaften von Punktmengen beschäftigt, welche die volle Grenze eines ebenen $\mathfrak{C}_2$ bilden können und zwar besonders mit Rücksicht auf *Mittag-Leffler*'s Untersuchungen über die Theorie der eindeutigen Funktionen[93]).

G. Ascoli und *C. Arzelà* haben begonnen, die Begriffe der Mengenlehre auf Mannigfaltigkeiten von Kurven zu übertragen[94]).

17. Die Unendlich ($\mathfrak{U}$) der Funktionen. Die Erörterungen über die arithmetische Natur des $\mathfrak{C}$ haben zu einer Erweiterung des

---

87) Math. Ann. 36, p. 157. *Peano* drückt sich so aus, dass die abbildenden Gleichungen $x = f(s)$, $y = f(s)$ eine Curve bestimmen, die eine Fläche erfüllt. Die Methode entspricht der in Anm. 60 erwähnten.

88) Math. Ann. 38 (1891), p. 459 ff. Ein einfaches Princip der Abbildung findet sich bei *Schönflies,* Gött. Nachr. 1896, p. 255.

89) Vgl. besonders den Cours d'analyse von *C. Jordan,* Bd. 1, sowie *W. Killing,* Grundlagen der Geometrie 2, 1898 (Paderborn).

90) Ein einfaches Beispiel liefert die Gleichung $y = \sin\frac{1}{x}$ für $0 < x \leqq M$. Die durch sie definierten Punkte stellen ein *Cantor*'sches Continuum nur dann dar, wenn die Punkte der y-Axe zwischen $+1$ und -1 hinzugefügt werden. Diese Punktmenge lässt sich aber nicht so darstellen, dass x und y stetige Funktionen von t werden. Vgl. Riv. di mat. 6 (1896), p. 97.

91) Stockh. Handl. Bih. 9 (1885), Nr. 7.

92) Acta mat. 7 (1885), p. 43.

93) Vgl. Acta mat. 4 (1884), p. 10.

94) *Ascoli* in Linc. Mem. (3) 18 (1884), p. 251 und *Arzelà* in Linc. Rend. (4) 5 (1889), p. 342.

Grössenbegriffs geführt. Ausser den (reellen) Zahlen giebt es noch andere, mächtigere Systeme von Individuen, die den allgemeinen Grössengesetzen (Nr. 4) gehorchen. Das Kennzeichen der gewöhnlichen Zahlenlehre ist, wie *Stolz*[95]) bemerkt hat, die von *Archimedes* als Postulat aufgestellte Forderung, dass, falls $A < B$ ist, immer eine ganze Zahl $\mathfrak{m}$ existiert, so dass $\mathfrak{m}A > B$ ist. Die bezüglichen allgemeineren Grössensysteme genügen dieser Forderung nicht. Nachdem bereits *Is. Newton*[96]) sich mit Grössensystemen dieser Art beschäftigt hat, sind solche in neuerer Zeit besonders von *Stolz* und *P. du Bois* betrachtet worden. Die *Momente* von *Stolz*[97]) knüpfen sich an Funktionen $f(x)$, deren jede, für $\lim x = +a$ beständig positiv bleibend, den Grenzwert 0 hat; auch soll jede rationale Funktion beliebig vieler von ihnen einen bestimmten Grenzwert besitzen. Ein einfaches System dieser Art bilden die reciproken Werte der Funktionen

$$x_1,\ E_1(x) = e^x,\ E_2(x) = e^{E_1(x)} \ldots,\ L_1(x) = \lg(x),\ L_2(x) = \lg L_1(x) \ldots$$

für $\lim x = \infty$. Jeder Funktion $f(x)$ lässt sich ein „Moment" $\mathfrak{u}(f)$ so zuordnen, dass $\mathfrak{u}(f) \gtreqless \mathfrak{u}(g)$ ist, je nachdem für $\lim x = +a$ $\lim (f:g) \gtreqless 1$ ist. Diese Momente genügen den Grössenbeziehungen und gestatten Addition und Multiplikation, bei gehöriger Erweiterung sogar auch die Division, jedoch nicht durchgehends die Subtraktion.

Ein zweites Grössensystem dieser Art bilden *du Bois' „Unendlich*[98]) (U) der Funktionen". Wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$ mit x monoton ins Unbegrenzte wachsen und für $\lim x = +\infty$ der Quotient $f(x):\varphi(x)$ den Grenzwert ∞ oder 0 hat, so hat nach *du Bois* $f(x)$ ein grösseres oder kleineres U als $\varphi(x)$ $(f > \varphi$ resp. $f < \varphi)$; wenn dieser Grenzwert von 0 und ∞ verschieden ist, so haben f und φ gleiches U $(f \sim \varphi)$. Der Gegensatz dieses Grössensystems zu den Zahlen drückt sich in folgenden zwei Sätzen aus: 1) Es giebt weder ein oberstes noch ein niederstes U, d. h. wie auch eine Reihe von wachsenden (resp. abnehmenden) Unendlich gegeben sein mag, so kann man immer Funktionen konstruieren, deren U höher resp. niederer ausfällt, als die gegebenen (analog zur zweiten Zahlklasse, resp.

95) Math. Ann. 18 (1881), p. 269, Anm..

96) Philos. natur. princ. lib. I sect. I, lemma XI, Anm. Vgl. auch *Vivanti* in Bibl. mat. 5 (1891), p. 97.

97) *Stolz,* Vorlesungen über Arithmetik 1 (Leipzig 1885), p. 205. Eine andere ebenfalls mögliche Definition findet sich p. 213.

98) Math. Ann. 8 (1875), p. 363 ff. sowie 11 (1877), p. 149. In der ersten Abhandlung werden zugleich die Unendlich für einzelne Funktionen bestimmt, die mit andern durch Funktionalgleichungen verbunden sind.

zum zweiten Erzeugungsprincip). 2) Es ist (im Gegensatz zur Theorie der Irrationalzahl) unmöglich, sich einem gegebenen $\mathfrak{U}\lambda(x)$ durch eine abzählbare Funktionenfolge $\varphi_p(x)$ so anzunähern, dass man nicht stets beliebig viele Funktionen $\psi(x)$ angeben könnte, deren $\mathfrak{U}$ für beliebiges p zwischen $\lambda(x)$ und $\varphi_p(x)$ fällt.

Die Thatsache, dass man sich jedes gegebene $\mathfrak{U}\lambda(x)$ unter dem Bilde eines Punktes der unendlich fernen Geraden (nämlich des Punktes der Curve $y = \lambda(x)$ für $x = \infty$) vorstellen kann, hat *du Bois* zu dem *Postulat* der *infinitären Pantachie*[99]) geführt, die aus der Gesamtheit der $\mathfrak{U}$ aller Funktionen so entstehen soll, dass jeder *Dedekind*'schen Zweiteilung (I A 3) der Unendlich ein neues $\mathfrak{U}$ entspricht. Doch ist zu bemerken, dass es nicht möglich ist, die $\mathfrak{U}$ aller Funktionen als ein Grössensystem (im Sinn von Nr. 4) aufzufassen[100]).

Auf Grund davon, dass mit den Funktionen $f(x)$ auch die Funktionen $\lg f(x)$ für $\lim x = \infty$ ein System ins Unbegrenzte wachsender Funktionen bilden, hat *S. Pincherle*[101]) die Definition der Unendlich folgendermassen verallgemeinert. Ist $F(x)$ eine Funktion wie $f(x)$, so soll, falls die Differenz $\delta(x) = F(f(x)) - F(\varphi(x))$ für $\lim x = \infty$ positiv unendlich wird, $f > \varphi$ sein, falls sie endlich bleibt, $f \sim \varphi$, falls sie negativ unendlich wird, $f < \varphi$ sein. Für dieses Grössensystem gelten die allgemeinen und die beiden besonderen *du Bois*'schen Sätze. Die Grössenbeziehung zweier $\mathfrak{U}$ hängt aber von der benutzten Funktion $F(x)$ ab und kann für verschiedene Funktionen verschieden ausfallen, woraus noch folgt, dass im System von *du Bois*' Unendlich, falls $f \sim \varphi$ ist, keineswegs $F(f) \sim F(\varphi)$ sein muss.

J. Thomae[102]) hat zuerst versucht, die $\mathfrak{U}$ als „Zahlen" aus unendlich vielen Einheiten zu betrachten („Ordnungsmasszahlen"). Werden die $\mathfrak{U}$ von $E_n(x)$, x, $L_n(x)$ durch η_n, 1, λ_n bezeichnet, so kann das Unendlich der Funktionsklasse, die durch

$$E_n(x)^{a_n} \ldots E_1(x)^{a_1} x^a L_1(x)^{a'} \ldots L_\nu(x)^{a^{(\nu)}}$$

gegeben ist, durch

$$a_n\eta_n + \cdots + a_1\eta_1 + a + a'\lambda_1 + \cdots + a^{(\nu)}\lambda_\nu$$

dargestellt werden, wo die Grössenbestimmung sich durch die Beziehung $\eta_n > \mathfrak{m}\eta_{n-1}$, $\lambda_\nu > \mathfrak{m}\lambda_{n+1}$ ausdrückt, für $\mathfrak{m}$ als ganze Zahl[103]).

---

99) Funktionenlehre p. 282.

100) Es giebt monoton ins unbegrenzte wachsende Funktionen, deren Quotient für $\lim x = +\infty$ unbestimmt wird; vgl. *Stolz* in Math. Ann. 14 (1878), p. 232.

101) Bologna Mem. (4) 5 (1885), p. 739.

102) Elementare Functionentheorie, Halle 1880, § 143.

103) Die Bezeichnung der Einheiten η und λ als „actual unendlich grosser

Umfassender ist das Funktionssystem, dessen $\mathfrak{U}$ *Pincherle* (a. a. O.) durch Zahlsymbole mit unendlich vielen Einheiten darstellt; ihre Reihe ist analog zu den Ordnungszahlen von $Z(\aleph_0)$. Er zeigt zugleich, dass es unmöglich ist, die $\mathfrak{U}$ aller Funktionen durch Zahlsymbole dieser Art auszudrücken.

18. Das Axiom des Archimedes und die Stetigkeit. *G. Veronese*[104]) hat zuerst bemerkt, dass die *Dedekind*'sche Definition der Stetigkeit[105]), nach der jede Zweiteilung der Klasse Π der rationalen Zahlen *eine und nur eine* Zahl definiert, das Axiom des *Archimedes* einschliesst und dass das so konstruierte arithmetische Continuum nicht die allgemeinste Erweiterung Γ von Π darstellt. Man gelangt zu ihr dann und nur dann, wenn für jede *Dedekind*'sche Teilung des erweiterten Grössengebiets Γ in zwei Klassen von Grössen p_2 resp. p_1 die Differenzen $p_2 - p_1$ kleiner als jede Grösse von Γ werden, so dass diese Bedingung mit dem Axiom des *Archimedes* gleichwertig ist. Verlangt man jedoch nur, dass für das erweiterte System die Differenz $p_2 - p_1$ kleiner als jede Grösse des zu Grunde gelegten Systems Π wird, so kann man Grössenklassen konstruieren, die dem Axiom des *Archimedes* nicht gehorchen und bei denen nicht mehr jeder Teilung *eine* Grösse entspricht, sondern sogar *unendlich viele* (Nr. **19**).

Auf diesen allgemeinen Grössenbegriff hat *P. Veronese* die Konstruktion des (*absoluten*) Continuums aufgebaut[106]). *Veronese*'s Versuch, die Individuen dieses Continuums („transfinite Zahlen") als Grundelemente der projektiven Geometrie zu benutzen, ist von *Schönflies* bestritten worden[107]).

---

resp. kleiner Zahlen" hat eine lebhafte Polemik über die Existenz ihnen entsprechender linearer Segmente hervorgerufen, an der besonders *Cantor*, *Peano*, *Veronese* und *Vivanti* teilgenommen haben und die meist in den ersten Bänden von *Peano*'s *Rivista* erschienen ist. Vgl. auch den Anhang zu *Veronese*'s Fondamenti, sowie Zeitschr. f. Philos. 91 u. 92.

104) Linc. Mem. (4) 6 (1890), p. 603. Vgl. hierzu auch *Stolz*, Math. Ann. 39 (1891), p. 107.

105) Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschw. 1872, p. 21. Vgl. I A 3.

106) Fondamenti di geometria p. 165; vgl. auch Anmerkung 109.

107) Vgl. über diese Polemik Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 5 (1896), p. 75, sowie Linc. Rend. (5) 6 (1897), p. 161 u. 362; 7 (1898), p. 79.

Für Grössen, bei denen die Zahl der Einheiten unendlich von der Mächtigkeit $\aleph_0$ ist und die entweder eine höchste oder tiefste Einheit besitzen, hat *T. Levi-Cività* ausser Addition und Subtraktion auch Multiplikation und Division in Übereinstimmung mit den Rechnungsgesetzen formal definiert (vgl. Atti Ist. Ven. [7], 4 (1893), p. 1765, sowie eine Erweiterung in Linc. Rend. (5) 7 (1898), p. 91).

19. Die allgemeinsten Grössenklassen. Eine allgemeine Untersuchung der bezüglichen Grössenklassen stammt von *Bettazzi*[108]), insbesondere derjenigen, die aus lauter positiven Grössen bestehen. Die Elemente seiner Klassen genügen ausser dem allgemeinen Grössencharakter (Nr. 4) der Forderung, dass neben A und B stets auch $A+B$ und, falls $A>B$, auch $A-B$ definiert werden kann und in der Klasse vorhanden ist. Er teilt die Grössenklassen zunächst in begrenzte resp. unbegrenzte, je nachdem in ihnen eine von 0 verschiedene Minimalgrösse M existiert oder nicht. Die Anwendung der *Dedekind*schen Zweiteilung in zwei Gruppen P_1 und P_2 führt *Bettazzi* zu folgenden Formulierungen. Ergiebt die Teilung für P_2 ein Minimum und für P_1 ein Maximum, so liegt an der Teilungsstelle eine *Folge* vor. Führt jede Teilung zu einer Folge, so ist die Klasse begrenzt und besteht, falls M ihr Minimum ist, aus den sämtlichen Vielfachen von M. Hat P_2 ein Minimum und P_1 kein Maximum oder umgekehrt, so liegt eine *Bindung* vor und die Klasse ist notwendig unbegrenzt. Hat endlich weder P_2 ein Minimum, noch P_1 ein Maximum, so ist zu unterscheiden, ob die Differenz p_2-p_1 kleiner als jede Grösse der Klasse wird oder nicht. Im ersten Fall liegt ein *Schnitt*, im zweiten ein *Sprung* vor. Alsdann kann die Klasse sowohl begrenzt als unbegrenzt sein.

Über das Verhältnis einer Klasse Γ zu jeder ihrer unbegrenzten Unterklassen Π bestehen folgende Sätze. Ist die Klasse Γ begrenzt, so enthält sie unendlich viele Sprünge und es entspricht einem Schnitt von Π entweder *keine* Grösse von Γ, die ihn ausfüllt, oder *unendlich viele.* Ferner enthält jede Unterklasse Π von Γ, die selbst unbegrenzt ist, Grössen, kleiner als jede Grösse von Γ selbst. Ist jedoch Γ selbst unbegrenzt, so kann einem Schnitt von Π entweder *keine* Grösse von Γ oder *eine* oder *unendlich viele* entsprechen. Im letzten Fall enthält Γ ebenfalls unendlich viele Sprünge.

Bettazzi nennt eine Klasse, in der jede Zweiteilung einen Schnitt

---

Sein Verfahren kommt darauf hinaus, die Grössen als Potenzreihen aufzufassen, deren Convergenz nicht in Frage steht. Ebenso muss man, wenn für *Veronese's* Transfiniten die Rechnungsoperationen gelten sollen, Zahlen zulassen der Form

$$a_0+\frac{a_1}{\eta_1}+\frac{a_2}{\eta_2}+\cdots,$$

wo die η_i die Bedeutung von Nr. 17 haben, aber die a_n *über alle Grenzen wachsen,* und die Zahlen einzig auf Grund der vorstehenden *formalen* Definition existieren.

108) Teoria delle grandezze, Pisa 1891 (sowie Univ. Toscane 19), insbesondere § 37 ff.

oder eine Bindung liefert, zusammenhängend. Diese Klassen genügen dem Axiom des *Archimedes.* Wenn es für jede Zweiteilung von Γ oder einer ihrer Unterklassen Π, die einen Schnitt verursacht, eine ihn ausfüllende Grösse giebt, so heisst die Klasse geschlossen; sie kann also, falls sie nur geschlossen ist, noch Sprünge enthalten[109]. Auf Grund hiervon definiert *Bettazzi* das Continuum als Grössenklasse, die geschlossen und zusammenhängend ist und damit Zahlencharakter besitzt.

---

109) Von *Veronese* (a. a. O.) und *Stolz* werden auch diese Klassen im allgemeinen Sinn stetig genannt (Math. Ann. 39, p. 107). Dieser Art ist z. B. *Veronese*'s absolutes Continuum (Nr. 18).

I A 6. ENDLICHE DISCRETE GRUPPEN

VON

HEINRICH BURKHARDT

IN ZÜRICH.

Inhaltsübersicht.

Lehrbücher.

C. Jordan, Traité des substitutions et des équations algébriques, Paris 1870.

E. Netto, Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra, Leipzig 1882; ital. von *G. Battaglini*, Torino 1885; engl. von *F. N. Cole*, Ann Arbor 1892.

H. Vogt, Leçons sur la résolution algébrique des équations, Paris 1895.

W. Burnside, Theory of groups of finite order, Cambridge 1897.
L. Bianchi, Teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche, Pisa 1897 (lit.).

Übrigens vergleiche man auch die einschlägigen Kapitel in den Lehrbüchern der Algebra von *Borel et Drach, Capelli e Barbieri, Chrystal, Comberousse, Petersen, Pincherle, Serret* (Bd. 2, 4. Buch; seit der 3. Aufl., 1866), *Weber* (Bd. 1, 3; Bd. 2, 1—3).

---

1. Permutationen und Substitutionen. Bereits im vorigen Jahrhundert hatte sich die Aufmerksamkeit der Mathematiker wiederholt auf die Gesamtheit derjenigen Vertauschungen von n Grössen gelenkt, bei welchen eine rationale Funktion von ihnen ihren Wert nicht ändert; bei *P. Ruffini*[1]) finden sich schon eine ziemliche Anzahl von Sätzen darüber. Seine Resultate sind dann von *A. Cauchy*[2]) geordnet und ergänzt worden.

Seien die zu vertauschenden Grössen einfach mit

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n$$

bezeichnet; irgend eine andere Anordnung[3]) von ihnen mit

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n.$$

Der Übergang von der ersten Anordnung zur zweiten heisst *Substitution*[4]) und wird mit[5]):

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & \ldots & n \\ a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, & a_n \end{pmatrix}$$

bezeichnet, in geeigneten Fällen auch durch einen einzelnen Buchstaben[6]). *Dieselbe* Substitution auf eine andere Anordnung $b_1, b_2, \ldots b_n$ ausüben heisst: diese Anordnung durch

$$a_{(b_1)},\ a_{(b_2)},\ ,\ldots\ a_{(b_n)}$$

ersetzen. Dadurch ist auch die Bedeutung des Ausdrucks definiert: „man übe auf eine Anordnung A erst die Substitution S und dann

---

1) Vgl. *H. Burkhardt,* Abh. z. Gesch. d. M. 6, 1892, p. 119 = Ann. di mat. (2) 22, 1894, p. 175.

2) J. éc. polyt. cah. 17, 1815, p. 1; exerc. d'analyse et de phys. math. 3, Paris 1844 [45/46]; Par. C. R. 21, 1845; 22, 1846.

3) „arrangement" bei *Cauchy,* exerc. d'anal. 3, p. 151. — Sonst wird „permutation" in diesem Sinne gebraucht, so bei *Cauchy,* J. éc. polyt. cah. 17, p. 3; *E. Galois,* oeuvr. p. 35 (J. de math. [1] 11, 1846 [31]). Vgl. I A 2, 2.

4) *Cauchy,* J. éc. polyt. cah. 17, p. 4; später (exerc. d'anal. 3, p. 152; Par. C. R. 21, p. 594) gebraucht er permutation als Synonym von substitution. Seitdem schwankt der Sprachgebrauch.

5) *Cauchy,* J. éc. polyt. cah. 17, p. 10; in den exerc. d'anal. und in den C. R. setzt er die erste Anordnung in die untere Zeile.

6) *Cauchy,* J. éc. polyt. cah. 17, p. 4.

auf die resultierende Anordnung B die Substitution T aus“; man erhält eine Anordnung C,[7]) die aus A auch direkt durch eine bestimmte Substitution U erhalten wird. Die damit gegebene Beziehung zwischen S, T, U ist von A unabhängig; sie wird durch die Gleichung:

$$ST = U$$

ausgedrückt[8]). Man nennt U das *Produkt*[9]) von S und T; diese Produktbildung ist associativ, aber im allgemeinen nicht commutativ. Ist $ST = TS$, so heissen S und T *vertauschbar*[10]).

Diejenige Substitution, welche kein Element versetzt, heisst die *identische*[11]) und wird mit 1 bezeichnet[12]).

2. Ordnung einer Substitution. Für SS schreibt man S^2, für SSS: S^3 u. s. f.[13]). Es giebt Zahlen n, für welche $S^n = 1$ ist; die kleinste ν unter ihnen heisst die *Ordnung*[14]) von S. Sind k, l beliebige ganze Zahlen, so ist $S^{k\nu + l} = S^l$; für nicht positive Werte von l ist das Zeichen S^l durch diese Gleichung definiert[15]). S^{-1} heisst die zu S *inverse* Substitution[16]).

3. Cykeln. Eine Substitution der Form:

$$\begin{pmatrix} x\, y\, z & \ldots & v\ w \\ y\, z\, u & \ldots & w\ x \end{pmatrix}$$

heisst *cyklisch*[17]) und wird kürzer mit $(xyzu \ldots vw)$ bezeichnet[18]). Jede Substitution kann als Produkt cyklischer Substitutionen ohne gemeinsame Elemente dargestellt werden[19]); ihre Ordnung ist dann das

---

7) *H. Wiener* (Lpz. Ber. 1889, p. 249) schreibt solche Beziehungen:

$$A\,\{S\}\,B\,\{T\}\,C.$$

8) *Cauchy*, J. éc. polyt. cah. 17, 1815, p. 10 (noch ohne die Bezeichnung der Subst. durch einzelne Buchstaben); ebenso *Jordan, Netto, Weber, Burnside*. Dagegen in den exerc. d'anal. die umgekehrte Schreibweise, ebenso bei *Serret*. Für die analytische Darstellung (Nr. 4) ist das letztere bequemer.

9) *Cauchy*, J. éc. polyt. cah. 17, p. 10.

10) *permutable* bei *Cauchy*, exerc. d'anal. t. 3, 1844, p. 154; *échangeable* bei *C. Jordan*, J. de math. (2) 12, 1867, p. 117. — Ist $ST = TSF$, so heisst F der *Commutator* von A und B (*R. Dedekind* bei *G. Frobenius*, Berl. Ber. 1896, p. 1348).

11) *Cauchy*, J. éc. polyt. cah. 17, p. 10.

12) *Cauchy*, exerc. d'anal. 3, p. 155.

13) *Cauchy*, J. éc. polyt. cah. 17, p. 11.

14) *Cauchy*, ib. p. 13 degré; *N. H. Abel*, oeuvr. t. 1, p. 76 (J. f. Math. 1, 1826) ordre; *Cauchy*, exerc. d'anal. 3, p. 157; Par. C. R. 21, p. 599 degré ou ordre.

15) *Cauchy*, exerc. d'anal. 3, p. 164; Par. C. R. 21, p. 780.

16) ib. p. 163; Par. C. R. 21, p. 780.

17) circulaire bei *Cauchy*, J. éc. polyt. cah. 17, p. 17.

18) *Cauchy*, Par. C. R. 21, p. 600; exerc. d'anal. 3, p. 157.

19) Par. C R. 21, p. 601; exerc. d'anal. 3, p. 159.

kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Ordnungen ihrer Cykeln[20]. Haben alle Cykeln gleiche Ordnungszahl, so heisst die Substitution *regulär*[21]. Zwei Substitutionen P, Q, die dieselbe Anzahl von Cykeln und in entsprechenden Cykeln gleich viele Elemente enthalten, heissen zu einander *ähnlich*[22]; es giebt dann[23] eine Substitution R von der Art, dass $Q = R^{-1}PR$ ist. Man sagt: Q entsteht aus P durch Transformation vermittelst R.[24]

4. Analytische Darstellung von Substitutionen. Ist die Anzahl n der Elemente eine Primzahl p, so kann man sie mit a_z $(z = 1, 2, \dots p)$ bezeichnen und dann jede Substitution durch eine Congruenz der Form $z' \equiv \varphi(z) \pmod p$ darstellen, wo φ eine ganze Function $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades vorstellt, die (für $n > 2$) noch gewissen Bedingungen zu genügen hat[25]. Ist n Primzahlpotenz $p^\varkappa$, so kann man die $p^\varkappa$ reellen und imaginären Wurzeln der Congruenz $x^n \equiv x \pmod n$ zu Indices nehmen[26] oder jedes Element durch einen Buchstaben mit $\varkappa$ reellen, mod. p zu nehmenden Indices bezeichnen[27].

5. Substitutionsgruppen. Hat eine Gesamtheit von Substitutionen die Eigenschaft, dass jedes Produkt von irgend zweien derselben selbst in ihr enthalten ist, so heisst sie eine *Gruppe*[28]. Die Anzahl

20) Par. C. R. 21, p. 601; exerc. d'anal. 3, (1845), p. 162.

21) Par. C. R. 21, p. 835; exerc. d'anal. 3, p. 202.

22) Par. C. R. 21, p. 840; exerc. d'anal. 3, p. 165.

23) Par. C. R. 21, p. 841; exerc. d'anal. 3, p. 168. Q entsteht dadurch, dass man R in den Cykeln von P ausführt.

24) derivata bei *E. Betti*, Ann. fis. mat. 3, 1852, p. 55; transformée bei *C. Jordan*, J. de math. (2) 12, 1867, p. 110.

25) *Ch. Hermite* bei *A. Cauchy*, Par. C. R. 21, 1845, p. 1247; *E. Betti*, Ann. fis. mat. 2, 1851, p. 17; *Ch. Hermite*, Par. C. R. 57, 1863, p. 750; *Fr. Brioschi*, Lomb. Rend. (2) 12, 1879, p. 483; *A. Grandi*, Linc. Rend. (2) 16, 1883, p. 101; *Fr. Rinecker*, Diss. Erl. 1886; *L. J. Rogers*, Lond. Math. Proc. 22, p. 37 und Mess. (2) 21, p. 44, 1891; *L. E. Dickson*, Am. J. 18, 1896, p. 210.

26) *E. Galois*, oeuvr. p. 21 (Bull. Fér. 13, 1830).

27) *E. Galois*, oeuvr. p. 27 (revue encyclop., sept. 1832); p. 53 (J. de math. 11, 1846 [31]).

28) Dass die Gesamtheit der Vertauschungen, bei denen eine rationale Funktion von n Veränderlichen ihren Wert nicht ändert, die genannte Eigenschaft hat, hat *P. Ruffini* bemerkt (teoria delle equazioni, Bol. 1799, Bd. 2, cap. 13); er nennt die Gesamtheit eine Permutation. *E. Galois* oeuvr. p. 25 (rev. enc. 1832); p. 35 (J. de math. 15, 1846 [31]) definiert: eine Gesamtheit von Permutationen (d. h. arrangements) heisst dann eine Gruppe, wenn jede Substitution, die *eine* Permutation der Gesamtheit in eine andere der Gesamtheit überführt, *jede* Permutation der Gesamtheit in eine andere der Gesamtheit überführt (Erläuterungen zu *Galois* haben *E. Betti*, Ann. fis. mat. 2—6, 1851—55, *Th. Schönemann* (auf Veranlassung von *C. G. J. Jacobi*), Wien. Denkschr. 52, 1853, p. 143, *J. A. Serret* in seinem Lehrbuch seit 1866, *C. Jordan*, Par. C. R. 60, 1865, p. 770,

N der Substitutionen, die sie enthält, heisst ihre *Ordnung*[29]); der Quotient $n!/N$, der stets eine ganze Zahl ist[30]), ihr *Index*[31]), die Anzahl der Buchstaben, auf die sie sich bezieht, ihr *Grad*[32]). Gehören alle Substitutionen einer Gruppe g zugleich einer andern Gruppe G an, so heisst g *Teiler*[33]) oder *Untergruppe*[34]) von G. Die Ordnung von g ist dann ein Teiler der Ordnung von G[35]), der Quotient beider Ordnungszahlen *Index* von g innerhalb G.[36])

6. Transitivität, Primitivität. Gestatten die Substitutionen einer Gruppe, jedes Element an jede Stelle zu bringen, so heisst sie *transitiv*[37]), sonst *intransitiv*[38]). Lassen sich die Elemente in Systeme von gleich vielen so einteilen, dass die Elemente jedes Systems bei allen Substitutionen der Gruppe immer wieder nur durch Elemente eines Systems ersetzt werden, so heisst sie *imprimitiv*[39]), sonst *primitiv*[40]).

Math. Ann. 1, 1869, p. 141, *J. König,* ib. 14, 1879 [78], p. 212, *P. Bachmann,* ib. 18, 1881, p. 449 gegeben). *A. Cauchy* sagte: *System conjugierter Substitutionen* (Par. C. R. 21, 1845, p. 605; exerc. d'anal. 3, p. 183); ebenso *Serret.* Die Ausdrucksweise des Textes hat *C. Jordan* eingeführt J. de math. (2) 12, 1867, p. 109; daneben gebraucht er auch *faisceau* (traité p. 22).

29) *diviseur indicatif* bei *A. Cauchy,* J. éc. polyt. cah. 17, 1815, p. 7; *grado* bei *E. Betti,* ann. fis. mat. 3, 1852, p. 59; *ordre* bei *A. Cauchy*, Par. C. R. 21, 1845, p. 605 und exerc. d'anal. 3, p. 183; *grado di uguaglianza* (der entspr. Funktion) bei *P. Ruffini* a. a. O.

30) Den entsprechenden Satz für die zu der Gruppe gehörenden rationalen Funktionen von n Veränderlichen hat *J. Lagrange,* oeuvr. 3, p. 373 (Berl. Mém. 1771 [73]) ausgesprochen und *P. Abbati*, soc. It. mem. 10, II, 1803 [1802], p. 38 bewiesen.

31) *A. Cauchy*, J. éc. polyt. cah. 17, p. 6.

32) *C. Jordan,* Math. Ann. 1, 1869, p. 141.

33) *E. Galois,* oeuvr. p. 58 (J. de math. 11, 1846 [31]); *G. Frobenius* und *L. Stickelberger,* J. f. Math. 86, 1879 [78], p. 220.

34) *S. Lie,* Gött. Nachr. 1874, p. 536.

35) *J. A. Serret,* cours art. 424; ein specieller Fall bei *A. Cauchy,* exerc. d'anal. 3, p. 185.

36) *F. Klein* u. *R. Fricke,* Modulfunktionen 1, Leipz. 1890, p. 310. *R. Dedekind* (Dirichlets Zahlentheorie, 4. Aufl., Braunschw. 1894, p. 475) bezeichnet diesen Quotienten mit *(G, g)*.

37) *A. Cauchy,* Par. C. R. 21, 1845, p. 669.

38) Bei *P. Ruffini: permutazione composta di prima specie.*

39) *permutazione composta di 2ª sp.* bei *P. Ruffini; fonction transitive complexe* bei *A. Cauchy,* Par. C. R. 21, 1845, p. 731; *gruppo a lettere congiunte* bei *E. Betti,* ann. fis. mat. 3, 1852; *gruppo complesso* bei dems. 6, 1855, p. 8; *grouped group* bei *T. P. Kirkman*, Manch. Mem. (3) 1, 1862 [61], p. 305; *système secondaire* bei *C. Jordan,* J. éc. polyt. cah. 38, 1861, p. 190. — Das Wort *imprimitiv* scheint nicht vor *E. Netto,* Subst.-Theorie p. 77 vorzukommen. Einen von *C. Jordan,* traité p. 34 aufgestellten Satz über „Faktoren der Imprimitivität" hat er Giorn. di mat. 10, 1872, p. 116 selbst berichtigt.

40) *permutazione composta di 3ª sp.* bei *P. Ruffini; groupe primitif* bei *E. Ga-*

7. Symmetrische und alternierende Gruppe. Die Gesamtheit aller $n!$ Substitutionen von n Elementen bildet die *symmetrische* Gruppe[41]). — Eine Substitution, die nur zwei Elemente untereinander vertauscht, heisst eine *Transposition*[42]). Jede Substitution lässt sich auf verschiedene Arten als Produkt von Transpositionen darstellen, die Anzahl derselben ist aber dabei entweder stets gerade oder stets ungerade; darnach werden die Substitutionen selbst als *gerade* und *ungerade* unterschieden[43]). Die ersteren bilden die *alternierende* Gruppe[44]); ihre Ordnung ist $\frac{1}{2}n!$

8. Mögliche Ordnungszahlen von Gruppen. Nicht jeder Teiler von $n!$ kann Ordnungszahl einer Gruppe des Grades n sein. So giebt es für $n > 4$ keine Gruppe, deren Index zugleich > 2 und $< n$ wäre[45]). Auch giebt es keine andere Gruppe vom Index 2, als die alternierende[46]), und, ausser für $n = 6$, keine anderen Gruppen vom Index n, als diejenigen, die ein Element fest lassen[47]). Ist der Index $> n$, und $n > 6$, so ist er[48]) mindestens $= 2n$; ist er grösser als $2n$, so

lois, oeuvr. p. 58 (J. de Math. 15, 1846 [31]); *équation primitive* schon p. 11 (Bull. Fér. 13, 1830).

41) *E. Netto,* Substitutionentheorie p. 33.

42) *Cauchy,* J. éc. polyt. cah. 17, p. 18.

43) Vgl. den Abschnitt I A 2, Nr. 3.

44) *groupe alterné* bei *C. Jordan,* traité p. 63.

45) *P. Ruffini* hatte bewiesen, dass es für $n = 5$ keine Gruppe giebt, deren Index zugleich > 2 und < 5 wäre (teoria delle equazioni, Bol. 1799, cap. 13); vereinfacht und auf $n > 5$ erweitert von *P. Abbati,* soc. It. mem. 10, 1803 [02]. *A. Cauchy* zeigte, dass es für $n > 5$ keine Gruppe giebt, deren Index zugleich > 2 und kleiner als die grösste Primzahl p wäre, die nicht $> n$ ist (J. éc. polyt. cah. 17, 1815, p. 9); auch für $n = 6$ keine vom Index 5 (ib. p. 20). Der Satz des Textes ist zuerst von *J. Bertrand* mittelst eines zahlentheoretischen Postulats bewiesen, J. éc. polyt. cah. 30, 1845, p. 123 (eine Ergänzung bei *J. A. Serret,* J. de math. 14, 1849, p. 135); ohne ein solches von *A. Cauchy,* Par. C. R. 21, 1845, p. 1101; *J. A. Serret,* J. éc. polyt. cah. 32, 1848, p. 147; aus der Einfachheit (Nr. 16) der alternierenden Gruppe von *J. König,* Math. Ann. 14, 1879 [1878], p. 215 und *L. Kronecker,* Berl. Ber. 1879, p. 211.

46) Für $n = 6$ *Cauchy,* J. éc. polyt. cah. 17, p. 26; allgemein (bezw. der entsprechende Satz für rationale Funktionen) *N. H. Abel,* oeuvr. 1, p. 80 (J. f. Math. 1, 1826).

47) Für $n = 5$ *N. H. Abel,* oeuvr. 1, p. 31 (1824, ohne Beweis) und p. 83 (J. f. Math. 1, 1826); allgemein auf Grund seines Postulats *J. Bertrand,* J. éc. polyt. cah. 30, 1845, p. 133; ohne ein solches *J. A. Serret,* J. de math. 15, 1850, p. 20. 23. — Die Ausnahme für $n = 6$ *Ch. Hermite* bei *Cauchy,* Par. C. R. 21, 1845, p. 1201; 22, 1846, p. 31.

48) *J. Bertrand,* J. éc. polyt. cah. 30, 1845, p. 133 (für $n > 9$); *A. Cauchy,* Par. C. R. 21, 1845, p. 1101 (ohne Bew.); *J. A. Serret,* J. de math. 15, 1850, p. 36 für $n > 8$; *E. Mathieu,* Par. thèse 1859, p. 4 für $n > 6$ (ohne Beweis).

ist er[49]) mindestens $=\frac{1}{2}n(n-1)$; ist er noch grösser und $n>8$, so ist er[50]) mindestens $=n(n-1)$.

9. Mehrfach transitive Gruppen. Eine Gruppe heisst *k-fach transitiv*, wenn ihre Substitutionen k beliebige Elemente an k beliebige Stellen zu bringen gestatten[51]). Eine Gruppe heisst *von der Klasse c*, wenn keine ihrer Substitutionen, ausser 1, weniger als c Buchstaben versetzt[52]). Zwischen Grad, Transitivitätszahl und Klasse einer primitiven Gruppe bestehen gewisse Ungleichungen[53]).

10. Lineare homogene Gruppe. Die Potenzen einer Substitution bilden eine *cyklische* Gruppe[54]). Ist die Ordnung der Substitution gleich der Anzahl der Elemente, so lassen sich die Substitutionen einer solchen Gruppe darstellen durch[55]):

$$z' \equiv z + c \pmod{n}$$

(vgl. Nr. 4). Ebenso bilden die durch:

$$z_1' \equiv z_1 + c_1, \quad z_2' \equiv z_2 + c_2, \quad \ldots \quad z_\varkappa' \equiv z_\varkappa + c_\varkappa \pmod{p}$$

dargestellten Substitutionen der $p^\varkappa$ Elemente $a_{z_1 z_2 \ldots z_\varkappa}$ eine Gruppe[56]) der Ordnung $p^\varkappa$. Ferner bilden die durch:

49) *A. Cauchy,* Par. C. R. 21, p. 1101 (ohne Bew.); *J. A. Serret,* Par. C. R. 29, 1849, p. 11; J. de math. 15, 1850, p. 43.

50) *E. Mathieu,* Par. C. R. 46, 1858, p. 1048; Par. thèse 1859, p. 4 (ohne Beweis).

Weitere Sätze über mögliche Ordnungszahlen transitiver Gruppen geben *C. Jordan,* Par. C. R. 66, 1868, p. 836; 76, 1873, p. 953; J. de math. (2) 14, 1869, p. 146; 16, 1871, p. 383; 17, 1872, p. 351; traité p. 76, 664; *L. Sylow,* Math. Ann. 5, 1872, p. 592; Acta math. 11, 1888, p. 256; *E. Netto,* J. f. Math. 83, 1877 [76] p. 43; 85, 1878, p. 327; 102, 1888 [87], p. 322; *G. Frobenius,* J. f. Math. 101, 1887 [86], p. 290; *A. Bochert,* Math. Ann. 33, 1889 [88], p. 584; 40, 1892, p. 57; 49, 1897, p. 112; *E. Maillet,* Par. C. R. 119, 1894, p. 362; *G. A. Miller,* N. Y. Bull. (2) 4, 1897, p. 144.

51) *E. Mathieu,* Par. thèse 1859, p. 16.

52) *C. Jordan,* Par. C. R. 72, 1871, p. 854; 73, 1871, p. 853.

53) *C. Jordan,* J. de math. (2), 16, 1871, p. 383; 17, 1872, p. 351; (5) 1, 1895, p. 35; Bull. soc. math. 1, 1873, p. 175; Par. C. R. 76, 1873, p. 952; 78, 1874, p. 1217; J. f. Math., 79, 1874, p. 248; *A. Bochert,* Diss. Breslau 1877; Math. Ann. 29, 1887 [86], p. 27; 33, 1889, p. 572; 40, 1892 [91], p. 176; 49, 1897 [96] p. 133; *E. Netto,* J. f. Math. 85, 1878, p. 334; *F. Rudio,* J. f. Math. 102, 1887, p. 1; *B. Marggraff,* Diss. Giessen 1889; Progr. Soph. Gymn. Berlin 1895; *E. Maillet,* Toul. Ann. 9, 1895, p. D 9. — Fünffach transitive Gruppen für $n=12$ und $n=24$ hat *E. Mathieu* angegeben, J. de math. (2) 6, 1861, p. 270; 18, 1873, p. 25; dazu *C. Jordan,* Par. C. R. 79, 1874, p. 1149.

54) *permutazione semplice* bei *P. Ruffini.*

55) *E. Galois,* oeuvr. p. 22 (Bull. Fér. 13, 1830), p. 47 (J. de math. 11, 1846 [31]); *A. Cauchy,* exerc. d'anal. 3, 1844 [45], p. 232 (arithmetische Substitutionen).

56) *E. Galois,* oeuvr. p. 54 (J. de math. 11, 1846 [31]).

$$\left.\begin{array}{l} z_1' \equiv c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + \cdots + c_{1\varkappa}z_\varkappa \\ z_2' \equiv c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + \cdots + c_{2\varkappa}z_\varkappa \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_\varkappa' \equiv c_{\varkappa 1}z_1 + c_{\varkappa 2}z_2 + \cdots + c_{\varkappa\varkappa}z_\varkappa \end{array}\right\} \pmod{p}$$

dargestellten Substitutionen, deren Determinante von 0 verschieden ist, eine Gruppe, die *lineare* (homogene) Gruppe[57]); ihre Ordnung ist[58]), wenn p Primzahl:

$$(p^\varkappa - 1)(p^\varkappa - p) \cdots (p^\varkappa - p^{\varkappa-1});$$

diejenigen von ihnen, deren Determinante $\equiv 1 \pmod{p}$ ist, eine Untergruppe derselben[59]).

11. Gruppe der Modulargleichung. Die lineare homogene Gruppe lässt das Element $a_{00\ldots 0}$ unversetzt und zerlegt die $p^\varkappa - 1$ übrigen in Systeme der Imprimitivität von je $p-1$, die in den Werten der Verhältnisse $z_1 : z_2 : \cdots : z_\varkappa$ übereinstimmen[60]). Für $\varkappa = 2$ sind die $p+1$ Systeme durch je einen Index $z_1 : z_2 = z$ zu bezeichnen, der mod p die Werte $0, 1, 2, \ldots p-1, \infty$ annimmt; die Gruppe der Systeme ist dann[61]):

$$z' \equiv \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \pmod{p}.$$

Diejenigen von diesen Substitutionen, für die $\alpha\delta - \beta\gamma$ quadratischer Rest ist, bilden die „Gruppe der Modulargleichung" (vgl. II B 6 b)[62]).

---

57) *E. Galois*, oeuvr. p. 27 (revue encyclopéd., sept. 1832), p. 47 ($\varkappa = 1$), 53 ($\varkappa = 2$) (J. de math. 11, 1846 [31]). Für $\varkappa = 1$ auch *A. Cauchy* a. zuletzt a. O. (geometrische Substitutionen). *L. Kronecker*, Berl. Ber. 1879, p. 217 nennt die lineare Gruppe für die zu $\varkappa = 1$ gehörenden Funktionen *„metacyklisch"*. — Ausführlich behandelt von *C. Jordan*, traité p. 91—249. — Ursprünglich hatte *Galois* imaginäre Indices (vgl. Nr. 4, Note 3) eingeführt und Substitutionen betrachtet, die sich durch lineare Funktionen von diesen ausdrücken; vgl. dazu *E. Betti*, Ann. fis. mat. 3, 1852, p. 52; *E. Mathieu*, Par. C. R. 48, 1859, p. 841; J. de math. (2) 5, 1860, p. 38; 6, 1861, p. 261; Ann. di mat. 4, 1861, p. 113; *W. Burnside*, Lond. M. Proc. 25, 1894, p. 113; *E. H. Moore*, Chicago congress papers, 1896 [93] p. 208.

58) Satz bei *E. Galois*, oeuvr. p. 27 (rev. enc., sept. 1832); Bew. bei *E. Betti*, Ann. fis. mat. 3, 1852, p. 76. — Für nicht primzahlige Moduln *C. Jordan*, traité p. 96.

59) *C. Jordan*, traité p. 106.

60) Für $\varkappa = 2$ *E. Galois*, oeuvr. p. 27 (revue encyclop. sept. 1832, aus der Theorie der elliptischen Funktionen); p. 59 (J. de math. 11, 1846 [31]; für beliebige $\varkappa$ *E. Betti*, Ann. fis. mat. 3, 1852, p. 74.

61) *E. Galois*, oeuvr. p. 27; p. 59.

62) ib. p. 28; vgl. dazu *E. Betti* a. a. O. u. 4, 1853, p. 90; *J. A. Serret*, Par. C. R. 48, 1859, p. 112, 178, 237; *Ch. Hermite*, ib. p. 49, p. 110; der Sache, nicht der Bezeichnung nach auch *E. Mathieu*, Par. thèse 1859, p. 38 und *T. P. Kirkman*, Manch. Mem. (3) 1, 1862 [61], p. 365; 2, 1865 [62], p. 204.

Sie besitzt für $p=5, 7, 11$, und nur für diese Primzahlen, Untergruppen vom Index p.[63])

12. Andere Untergruppen der homogenen linearen Gruppe werden gebildet von denjenigen Substitutionen, die je eine homogene Funktion der Indices in sich transformieren[64]), z. B. die Summe ihrer Quadrate (orthogonale Gruppe)[65]) oder, für $\varkappa = 2n$, die Bilinearform

$$\sum_{m=1}^{n} (z_m \zeta_{m+n} - \zeta_m z_{m+n}),$$

in der die ζ zu den z cogrediente Grössen (II B 2) bedeuten[66]).

13. Aufzählungen von Gruppen der niedrigsten Grade. Alle, bezw. alle transitiven oder alle primitiven Gruppen von gegebenem Grad aufzuzählen ist vielfach unternommen worden[67]); fast jede der betr. Arbeiten stellt Versehen der vorhergehenden richtig.

---

63) *E. Galois,* oeuvr. p. 28 (rev. enc. 1832, p. 12; Bull. Fér. 1830, noch nicht richtig) ohne Beweis. Beweis der ersten Hälfte von *E. Betti,* Ann. fis. mat. 4, 1853, p. 90; von *Ch. Hermite,* J. f. Math. 40, 1850, p. 280 angekündigt, Par. C. R. 49, 1859, p. 110 ausgeführt; der zweiten Hälfte von *C. Jordan,* Par. C. R. 66, 1868, p. 308; von *L. Sylow,* Christ. Forh. 1870, p. 387; von *J. Gierster,* Diss. Leipz. = Math. Ann. 18, 1881, p. 368 auf Grund einer Aufzählung sämtlicher Untergruppen (Math. Ann. 26, 1885, p. 309 auch für eine ungerade Primzahlpotenz als Modul). Vgl. *F. Klein* u. *R. Fricke,* Modulfunktionen, Bd. 1, Leipz. 1890, p. 409—491. — Ein allgemeinerer Satz bei *L. Sylow,* Christ. Skrifter 1897, no. 9.

Lineare gebrochene Substitutionen unter Galois'schen Imaginären bei *E. Mathieu,* J. de math. (2) 5, 1860, p. 38; 6, 1861, p. 261; Ann. di mat. 4, 1861, p. 113; *W. Burnside*, Lond. M. Proc. 25, 1894, p. 113; *E. H. Moore,* Chicago congress papers, 1896 [93], p. 226.

64) *C. Jordan,* traité p. 219.

65) ib. p. 155.

66) ib. p. 171; Par. C. R. 68, 1869, p. 656. Die Gruppe tritt in der Theorie der Transformation der mehrfach periodischen (Abelschen) Funktionen auf; *Jordan* nennt sie daher Abelsche Gruppe, in anderm Sinne, als **20**. Zwei Untergruppen (für $p=2$), bei denen bezw. eine gerade und eine ungerade Thetacharakteristik in sich übergeht, nennt er „hypoabéliens“ (traité p. 195). — Andere Untergruppen der linearen Gruppe traité p. 219, 319, 606.

67) Für $n=2, 3, 4, 5, 6$ *A. Cauchy,* Par. C. R. 21, 1845, p. 1363, 1401; 22, 1846, p. 2;

$n=7, 8$. *E. Mathieu,* ib. 46, 1859, p. 1048, 1208; *E. H. Askwith,* Qu. J. 24, 1890, p. 111, 263; *A. Cayley,* philos. mag. 18, 1859, p. 34 = coll. pp. 4, p. 88; Qu. J. 25, 1891, p. 71, 137; *F. N. Cole,* N. Y. Bull. 2, 1893, p. 184; *G. A. Miller,* ib. 3, 1894, p. 169. Vgl. auch *O. Hölder*, Math. Ann. 40, 1892, p. 83.

$n=9$. *E. H. Askwith,* Qu. J. 26, 1892, p. 79; *F. N. Cole,* ib. p. 372; N. Y. Bull. 2, 1893, p. 250; *G. A. Miller,* ib. 3, 1894, p. 242 ($n=8, 9$);

$n=10$. *T. P. Kirkman,* Manch. Proc. (3) 3, 1864 [63] p. 142; 4, 1865, p. 171;

14. Isomorphismus. Zwei Gruppen G, Γ heissen *homomorph* auf einander bezogen, wenn ihre Substitutionen einander so zugeordnet sind, dass, sobald A der A und B der B entspricht, auch AB der AB entspricht[68]); entsprechen dabei z. B. jeder Substitution von G 4 von Γ und jeder von Γ 2 von G, so heisst G zu Γ *ditetramorph*. Entspricht jeder von G nur eine von Γ und jeder von Γ nur eine von G, so heissen G und Γ holoedrisch *isomorph*[69]).

15. Allgemeiner Gruppenbegriff. Sieht man von der Bedeutung der einzelnen Operationen ab und achtet nur auf die Gesetze der Zusammensetzung, so sind zwei isomorphe Gruppen überhaupt nicht verschieden[70]). Aus dieser Auffassung hat sich die *allgemeine Definition einer Gruppe*[71]) entwickelt als eines Systems von Elementen (resp. von Operationen), das folgenden Bedingungen genügt:

F. N. Cole, Qu. J. 27, 1893, p. 39; *G. A. Miller*, ib. p. 99; N. Y. Bull. (2) 1, 1894, p. 67.

$n = 11$. *F. N. Cole*, ib. p. 49;

$n = 12$. *G. A. Miller*, Par. C. R. 122, 1896, p. 372; Qu. J. 28, 1896, p. 193; N. Y. Bull. (2) 1, 1895, p. 255;

$n = 13, 14$. *G. A. Miller*, Quart. J. 29, 1897, p. 224.

$n = 32$. *R. Levavasseur*, Par. C. R. 122, 1896, p. 182;

$n = 8p$. *R. Levavasseur*, Par. C. R. 122, 1896, p. 516; *G. A. Miller*, ib. 123, p. 591.

Eine Aufzählung der *primitiven* Gruppen bis $n = 17$ giebt *C. Jordan*, Par. C. R. 75, 1872, p. 1754.

Eine besondere Klasse von Substitutionsgruppen sind die *Tripelgruppen;* vgl. *M. Nöther*, Math. Ann. 15, 1879, p. 87; *E. Netto*, Subst.-Theorie p. 220; Math. Ann. 42, 1893 [92], p. 143; *E. H. Moore*, ib. 43, 1893, p. 271; 50, 1898 [97], p. 225; Pal. Rend. 9, 1895, p. 86; N. Y. Bull. (2), 4, 1897, p. 11; *J. de Vries*, Pal. Rend. 8, 1894, p. 222; *G. A. Miller*, N. Y. Bull. (2) 2, p. 138; *L. Heffter*, Math. Ann. 49, 1897 [96], p. 101; *W. Burnside*, theory p. 213. Vgl. auch I A 2, **10**.

68) *A. Capelli*, Giorn. di mat. 16, 1878, p. 32; der Name bei *F. Klein*, Math. Ann. 41, 1892, p. 22.

69) *C. Jordan*, traité (1870), p. 56. — Entspricht jeder Substitution von G nur eine von Γ, aber jeder von Γ mehrere von G, so nennt *C. Jordan* Γ zu G *meriedrisch* isomorph; *E. Netto*, Subst.-Th. p. 97 sagt: *mehrstufig* is., *W. Burnside*, theory p. 29: multiply isomorphic.

70) Vgl. *E. Galois*, oeuvr. p. 40, scolie II (J. de math. 11, 1846 [31]).

71) *A. Cayley*, coll. pp. 2, p. 123 (Phil. mag. 4, 1854); 10, p. 323 (Lond. Math. Proc. 9, 1878) (dazu vgl. man die Ausführungen von *W. Dyck*, Math. Ann. 20, 1881, p. 1); *L. Kronecker*, Berl. Ber. 1870, p. 883. Gruppen von Bewegungen hat *C. Jordan* untersucht, Par. C. R. 65, 1867, p. 229; Ann. di Mat. (2) 2, 1868, p. 167. Dann haben *F. Klein* u. *S. Lie* den Gruppenbegriff in den Mittelpunkt ihrer Untersuchungen gestellt, vgl. *S. Lie*, Christ. Forh. 1871, p. 243; Gött. Nachr. 1874, p. 529; *F. Klein*, Progr. Erlangen 1872. Vgl. auch *G. Frobenius* und *L. Stickelberger*, J. f. Math. 86, 1878, p. 217; *H. Weber*, Math. Ann. 20, 1882,

1. Es ist eine Vorschrift gegeben, nach der je zwei Elemente a, b des Systems ein drittes $ab = c$ eindeutig bestimmen.

2. Diese Komposition (Multiplikation) der Elemente ist associativ.

3. Aus $ab = ac$ folgt $b = c$, ebenso aus $ba = ca$.

Umfasst die Gruppe nur eine endliche Anzahl Elemente, so heisst sie eine *endliche*, genauer mit Rücksicht auf II A 6 eine *endliche discrete oder discontinuierliche*[72]). Für eine solche folgt aus (1) — (3): zu zweien ihrer Elemente a, b kann stets auf eine und nur auf eine Weise ein Element c so bestimmt werden, dass $ac = b$ ist; die Gruppe enthält ein Element e, die *Einheit*[73]), das mit jedem andern a $ae = a$ und $ea = a$ ergiebt; zu jedem Elemente a giebt es ein zu ihm inverses $b = a^{-1}$, für das $ab = e$ ist[74]).

Jede Gruppe G der Ordnung N lässt sich als Substitutionsgruppe des Grades N darstellen[75]); diese Darstellung ist imprimitiv in Bezug auf jede Untergruppe von G.[76]) Enthält G einen Teiler H vom Index k, so ist G auch zu einer transitiven Substitutionsgruppe des Grades k $(l, 1)$-stufig homomorph, wenn l die Ordnung des grössten in H enthaltenen Normalteilers von G ist[77]).

16. Normalteiler. Kann ein Element P' einer Gruppe G aus einem andern P durch Transformation (Nr. **3**) vermittelst eines Elementes Q von G abgeleitet werden, so heissen P und P' innerhalb G *conjugiert*[78]) oder *gleichberechtigt*[79]). Durchläuft dann P einen Teiler H von G, so durchläuft P' einen zu H conjugierten oder mit H *gleichberechtigten Teiler* H'.[80]) Eine nur mit sich selbst gleichberechtigte Operation heisst *ausgezeichnet*. Ein nur mit sich selbst gleichberechtigter Theiler heisst

---

p. 302, sowie die Definition von *G. Frobenius*, Berl. Ber. 1895, p. 164: ein Complex G heisst eine Gruppe, wenn G durch G^2 teilbar ist; endlich auch *R. Dedekind* in *P. G. Lejeune-Dirichlet*'s Zahlentheorie, 4. Aufl. (Braunschw. 1894), p. 484.

72) Übertragung des aus der Theorie der continuierlichen Gruppen stammenden Begriffs *Parametergruppe* auf discontinuierliche bei *E. Maillet*, Ann. di Mat. (2) 23, 1895, p. 199.

73) *Hauptgruppe* nach *G. Frobenius* u. *E. Stickelberger*, J. f. Math. 86, 1879 [78], p. 219.

74) Diese Eigenschaften können auch an Stelle von (3) in die Definition aufgenommen werden; so bei *Burnside*, theory p. 11.

75) *C. Jordan*, traité p. 57; *W. Dyck*, Math. Ann. 22, 1882, p. 84 („*reguläre Form der Gruppe*"); *groupe normal* bei *Borel* et *Drach* p. 261.

76) *W. Dyck*, a. a. O. p. 89.

77) *A. Capelli*, Giorn. di mat. 1878, p. 48; *Dyck* a. a. O. p. 91.

78) „conjugierte Gattungen rationaler Funktionen" bei *L. Kronecker*, Berl. Ber. 1879, p. 212.

79) *F. Klein*, Math. Ann. 14, p. 430.

80) *equivalent groups* bei *T. P. Kirkman*, Manch. Mem. 2, 1862 [61] p. 78.

eigentlicher[81]) oder *Normalteiler*[82]), ausgezeichnete[83]), invariante[84]) oder monotypische[85]) Untergruppe. Die mn Arrangements, die von einer Gruppe G mn^{ter} Ordnung unter sich vertauscht werden, zerfallen einem Normalteiler H vom Index m und der Ordnung n gegenüber in m Systeme zu je n; die Operationen von H vertauschen die Arrangements in jedem einzelnen System, die übrigen von G die Systeme als ganze[86]). Die verschiedenen Vertauschungen der Systeme bilden eine Gruppe[87]) der Ordnung m, die mit G/H bezeichnet wird[88]). — Hat G keinen von G und H verschiedenen Normalteiler, der H enthält, so heisst H ein *grösster Normalteiler* von G[89]).

Eine Gruppe heisst *einfach*[90]), wenn sie keinen von ihr selbst und von der Einheit verschiedenen Normalteiler hat; sonst *zusammengesetzt.*

Hat eine Gruppe G zwei verschiedene Normalteiler G_1, G_2, die nur die 1 gemein haben, und ist jede Operation von G_1 mit jeder von G_2 vertauschbar, so heisst G das *direkte* Produkt[91]) von G_1 und G_2.

Die *alternierende* Gruppe ist einfach, ausser für $n = 4$.[92])

---

81) *E. Galois*, der die Bedeutung dieser speciellen Art Teiler für die Theorie der algebraischen Gleichungen zuerst erkannt hat, spricht von „*decomposition propre*“ einer Gruppe von Permutationen (d. h. arrangements), oeuvr. p. 25 (revue encyclop. 1832).

82) *H. Weber*, Algebra, 2, p. 11.

83) *S. Lie*, Gött. Nachr. 1874, p. 535; *F. Klein*, Math. Ann. 9, 1876 [75], p. 186.

84) *J. König*, Math. Ann. 21, 1883, p. 431.

85) *G. Frobenius*, J. f. Math. 101, 1887 [86], p. 285.

86) *E. Galois* a. a. O.; vgl. auch oeuvr. p. 45 (J. de math. 11, 1846 [31]).

87) Vgl. *E. Betti*, Ann. fis. mat. 3, 1852, p. 61 („gruppo delle permutazioni sopra i derivati“), wo aber nicht alles klar ist.

88) *C. Jordan*, Bull. soc. math. 1, 1873, p. 40; *O. Hölder*, Math. Ann. 34, 1889 [88], p. 33.

89) vgl. *C. Jordan*.

90) *indécomposable* bei *E. Galois*, oeuvr. p. 26 (revue encyclop., 1832); *primo* bei *E. Betti*, Ann. fis. mat. 3, 1852, p. 62; groupe de permutations *inséparables* bei *M. Despeyrous*, J. de math. (2) 6, 1861, p. 433; *non-modular* bei *T. P. Kirkman*, Manch. Mem. (3) 1, 1862 [61], p. 283; *équation simple* bei *C. Jordan*, J. de math. 14, 1869, p. 139; *groupe simple* bei dems., traité p. 41.

91) *O. Hölder*, Math. Ann. 43, 1893, p. 330; *zerlegbar* bei *G. Frobenius* u. *L. Stickelberger*, J. f. Math. 86, 1879 [78], p. 221; *eigentlich zerfallend* bei W. *Dyck*, Math. Ann. 17, 1880, p. 482. *O. Hölder*, Math. Ann. 43, p. 335 lässt „eigentlich“ weg.

92) *C. Jordan*, traité p. 66; *L. Kronecker*, Berl. Ber. 1879, p. 208; *F. Klein*, Ikosaeder, Leipz. 1884, p. 18; *W. Burnside*, theory p. 153; *L. Bianchi*, teoria p. 61; *E. Beke*, Math. Ann. 49, 1897, p. 581.

Ein Normalteiler einer primitiven Gruppe ist notwendig transitiv[93]).

17. Kompositionsreihe. Eine Reihe von Gruppen:

$$G, H, J, \ldots L, M = 1,$$

von denen jede grösster Normalteiler der vorhergehenden ist, heisst[94]) *Kompositionsreihe* von G. Die Gruppen G/H, $H/J, \ldots L/M = L$ sind in allen Kompositionsreihen von G bis auf ihre Reihenfolge dieselben (im Sinne von Nr. **15**)[95]). Eine Reihe:

$$G_1 G_2 \cdots G_{\varkappa-1} G_\varkappa \cdots G_{n-1} G_n = 1,$$

in der jedes $G_\varkappa$ Normalteiler von $G_{\varkappa-1}$ und G_1 ist und in die nicht noch weitere Glieder eingeschoben werden können, ohne dass die Reihe diese Eigenschaft verliert, heisst[96]) *Hauptreihe der Zusammensetzung* von G. Auch die Gruppen G_1/G_2, $G_2/G_3, \ldots G_{n-1}/G_n = 1$ sind in allen solchen Reihen bis auf die Reihenfolge dieselben[97]). Kann man zwischen zwei Gliedern $G_{\varkappa-1}$, $G_\varkappa$ einer Hauptreihe zur Bildung einer Kompositionsreihe noch Glieder $H_1, H_2, \ldots H_n$ einschieben, so sind die Gruppen $G_{\varkappa-1}/H_1$, $H_1/H_2, \ldots H_n/G_\varkappa$ einander gleich und die Gruppe $G_{\varkappa-1}/G_\varkappa$ ist ihr direktes Produkt[98]).

18. Isomorphismen einer Gruppe mit sich selbst. Eine Gruppe G kann isomorph auf sich selbst bezogen werden, jedenfalls dadurch, dass man jeder ihrer Operationen A die transformierte $BA^{-1}B$ zuordnet, unter B eine bestimmte Operation von G selbst verstanden. Solche *Isomorphismen einer Gruppe in sich* heissen *cogredient;* giebt es noch andere, so heissen diese *contragredient*[99]). Die cogredienten Isomorphismen bilden eine zu G homomorphe Gruppe, speciell eine isomorphe, wenn G keine ausgezeichnete Ope-

93) Der Sache nach bei *P. Ruffini,* soc. It. mem. 9, 1802 [01], art. 29.

94) *C. Jordan,* J. de math. (2) 14, 1869, p. 139; der *Name* bei *E. Netto,* Subst.-Theorie p. 86.

95) *O. Hölder,* Math. Ann. 34, 1889 [88], p. 37; *G. Frobenius,* Berl. Ber. 1895, p. 169. Den Satz, dass die Ordnungszahlen der genannten Gruppen („Faktoren der Zusammensetzung") constant sind, hatte schon *C. Jordan* bewiesen, J. de math. (2) 14, 1869, p. 139; einfacher *E. Netto,* J. f. Math. 78, 1874, p. 84.

96) *E. Netto,* Subst.-Th. p. 92; J. f. Math. 78, 1874, p. 82: „Grundreihe". Vgl. *Burnside,* theory p. 123.

97) *O. Hölder,* Math. Ann. 34, 1889 [88], p. 38; die Constanz der Zahlenfaktoren schon bei *C. Jordan,* traité p. 663.

98) *O. Hölder* a. a. O.; vgl. auch *C. Jordan,* traité p. 48 und *E. Netto,* Subst.-Th. p. 95.

99) In einem speciellen Falle *F. Klein,* Ikosaeder, Leipzig 1882, p. 232; allgemein *O. Hölder,* Math. Ann. 43, 1893, p. 314.

ration ausser der 1 enthält[100]). Die sämtlichen Isomorphismen bilden eine Gruppe, von der die der cogredienten Normalteiler ist[101]). Eine Gruppe G, die keine contragredienten Isomorphismen in sich zulässt und keine ausgezeichnete Operation ausser der 1 enthält, heisst *vollkommen*[102]); ist eine solche Normalteiler einer andern Gruppe H, so ist H direktes Produkt von G und H/G.[103]) Ein Teiler von G heisst *charakteristischer Teiler*[104]), wenn er bei jedem Isomorphismus von G in sich übergeht.

19. Erzeugende Operationen. Geometrische Bilder von Gruppen. Können alle Operationen einer Gruppe aus q unter ihnen: $S_1, S_2, \dots S_q$ durch successive Produktbildung abgeleitet werden, so sagt man, diese Operationen *erzeugen*[105]) die Gruppe. q Operationen, die durch keine andere Relation als:

$$S_1 S_2 \dots S_q = 1$$

verbunden sind, erzeugen eine unendliche discontinuierliche Gruppe. Man kann sie als Gruppe linearer Substitutionen einer complexen Variabeln darstellen (II B 1); z. B. indem man mit $T_\varkappa$ die Spiegelung am $\varkappa^{\text{ten}}$ von $n+1$ Kreisen mit gemeinsamem Orthogonalkreis bezeichnet und $S_\varkappa = T_{\varkappa-1} T_\varkappa$ setzt; man erhält so eine Einteilung des Orthogonalkreisinnern in Gebiete, deren gegenseitige Lage die Beziehungen zwischen den Operationen der Gruppe veranschaulicht[106]). Zu ihr ist die (unendliche oder endliche) Gruppe G homomorph, die von q Operationen erzeugt wird, die ausser (1) noch andern Relationen der Form

$$S_a^\alpha S_b^\beta S_c^\gamma \dots = 1$$

---

100) *W. Burnside,* theory p. 225.

101) *O. Hölder* a. a. O.

102) *O. Hölder,* Math. Ann. 46, 1895 [94], p. 325.

103) ib. — Die symmetrische Gruppe ist für jedes n vollkommen, ausser für $n = 6$ (ib. p. 345); ebenso die lineare Gruppe für einen Primzahlmodul (für $\varkappa = 1$ ib. p. 348, allg. *W. Burnside*, theory p. 239. 245). — Ist G als reguläre Substitutionengruppe von N Elementen dargestellt, so besteht die Gruppe H der Isomorphismen aus denjenigen Substitutionen derselben Elemente, die mit G vertauschbar sind (*G. Frobenius,* Berl. Ber. 1895, p. 185). Die Gruppe $GH = HG$ nennt *W. Burnside „the holomorph of G“* (ib. p. 228).

104) *G. Frobenius,* Berl. Ber. 1895, p. 184. — Von einer *„lückenlosen Reihe charakteristischer Teiler“* gelten analoge Sätze, wie die der Nr. **17** (*G. Frobenius,* ib. p. 1027).

105) *dérivé* bei *A. Cauchy,* exerc. d'anal. 3, 1844 [45], p. 183; Par. C. R. 21, 1845, p. 605. — Beispiele von nicht zerfallenden Gruppen, die nicht aus zwei Operationen erzeugt werden können, giebt *O. Hölder,* Math. Ann. 43, 1893, p. 341. 398.

106) *W. Dyck,* Math. Ann. 20, 1881, p. 7. — Vgl. übrigens II A 6c.

genügen[107]). Der Identität von Γ entspricht dabei ein Normalteiler H von G und es ist $\Gamma = G/H$. Die zuerst abgegrenzten Gebiete lassen sich dann zu grösseren Bereichen so zusammenfassen, dass die Einteilung des Orthogonalkreises in diese Bereiche ein Bild von H, die Einteilung eines solchen Bereiches in die kleineren Gebiete ein Bild von Γ giebt[107a]). Die Kanten eines Bereiches sind dabei paarweise einander zugeordnet; fügt man je zwei zugeordnete aneinander, so entsteht eine Fläche von bestimmtem Geschlecht (III A 4). Die kleinste dabei mögliche Geschlechtszahl p heisst *Geschlecht der Gruppe*[108]); ist $p > 1$, so ist[109]) die Ordnung der Gruppe $\leqq 84(p-1)$.

20. Abel'sche Gruppen. Ist die Composition der Elemente einer Gruppe commutativ, so heisst die Gruppe eine *Abel*'sche[110]). In jeder solchen lassen sich q Erzeugende A, B, C der Ordnungen $a, b, c \dots$ so auswählen, dass die Formel:

$$\Theta = A^\alpha B^\beta C^\gamma \dots$$

jedes Element der Gruppe gerade einmal darstellt, wenn $\alpha, \beta, \gamma \dots$ bezw. volle Restsysteme nach den Moduln a, b, c durchlaufen[111]). Ein solches System von Erzeugenden heisst eine *Basis*[112]) der Gruppe, der kleinste mögliche Wert von q ihr *Rang*[113]). Man kann die Basis stets so wählen, dass $a, b, c \dots$ Primzahlpotenzen werden; für alle solchen Basen sind diese Werte abgesehen von der Reihenfolge die-

---

107) ib. p. 16.

107a) ib. p. 11.

108) ib. p. 31; vgl. *F. Klein,* ib. 14, 1878, p. 171.

109) *A. Hurwitz,* Math. Ann. 41, 1893, p. 424. — Eine andere geometrische Versinnlichung von Gruppen giebt *A. Cayley,* coll. pp. 10, p. 324 (Lond. Math. Proc. 9, 1878); (Amer. J. Math. 1, 1878, p. 574; 11, 1888, p. 139); vgl. auch *A. B. Kempe,* Lond. Trans. 177 I, 1886, p. 37. Über den Zusammenhang zwischen dieser und der des Textes vgl. *H. Maschke,* Amer. J. Math. 18, 1896 [95], p. 155; *W. Burnside,* theory, p. 306. — Noch eine andere Darstellung, für metacyklische Gruppen, bei *L. Heffter,* Math. Ann. 50, 1898 [97], p. 261.

110) Abelsche Gleichungen bei *L. Kronecker*, Berl. Ber. 1870, p. 882; *J. Perott,* Amer. J. 11, 1889, p. 99; 13, 1891 [89], p. 235 sagt „groupes eulériens".

111) Der Satz ist implicite in *N. H. Abel*'s Untersuchungen über Gleichungen enthalten, ges. W. 1, p. 499 (J. f. Math. 4, 1839); andererseits in den Sätzen über die Composition der quadratischen Formen im Nachlasse von *C. F. Gauss,* ges. W. 2, p. 266 [a. d. J. 1801], und bei *E. Schering,* Gött. Abh. 14, 1868, p. 13; abstract bei *Kronecker,* Berl. Ber. 1870, p. 882. — *R. Levavasseur,* Par. C. R. 122, 1896, p. 180 benutzt auch Galoissche Imaginäre als Exponenten.

112) *G. Frobenius* und *L. Stickelberger,* J. f. Math. 86, 1879 [78], p. 219. *Kronecker* a. a. O. sagt „Fundamentalsystem".

113) *Frobenius* u. *Stickelberger* a. a. O.

selben, also *Invarianten* der Gruppe[114]). Man kann jeder Operation einer Abelschen Gruppe einen Zahlwert (eine Einheitswurzel) $\chi(A)$ so zuordnen, dass stets $\chi(AB) = \chi(A)\chi(B)$ wird; jedes System solcher Zahlen heisst ein *Charakter* der Gruppe[115]). Die Charaktere bilden selbst eine zur gegebenen isomorphe Gruppe; diejenigen, die in dieser Gruppe Elemente der Ordnung 2 sind, heissen *zweiseitig* (ancipites)[116]). Alle Elemente, für die alle zweiseitigen Charaktere dieselben Werte haben, bilden ein *Geschlecht* (genus); diejenigen, für die sie alle $= 1$ sind, das *Hauptgeschlecht*[117]).

Eine Gruppe, deren sämtliche Teiler Normalteiler sind, lässt sich in der Form:

$$R = PQ$$

darstellen, in der P eine Abel'sche Gruppe, Q eine bestimmte Gruppe 8. Ordnung ist[117a]).

21. Die Sylow'schen Sätze. Eine Gruppe G, deren Ordnung N durch eine Primzahlpotenz $p^\varkappa$ teilbar ist, hat[118]) mindestens einen Teiler der Ordnung $p^\varkappa$. Ist $p^\varkappa$ die höchste Potenz von p, die in N aufgeht, so hat die Gruppe Teiler der Ordnung $p^\varkappa$; ihre Anzahl ist $\equiv 1 \pmod{p}$, sie sind alle unter sich gleichberechtigt, und es ist $N = p^\varkappa rj$, wenn $p^\varkappa r$ die Ordnung des grössten Teilers von G ist, von dem ein solcher Teiler Normalteiler ist[119]). Auf diesen Sätzen

---

114) *H. Weber*, Algebra 2, p. 42; anders bei *Frobenius* und *Stickelberger* a. a. O. p. 236.

115) *H. Weber*, Math. Ann. 20, 1882, p. 307; vgl. übrigens *C. F. Gauss*, Disquis. arithm., 1801, art. 230 (ges. W. 1, p. 232); *R. Dedekind* in *P. G. L. Dirichlet*'s Vorl. ü. Zahlentheorie, 1. Aufl., Braunschw. 1863, p. 349. — Verallgemeinerung für beliebige Gruppen bei *G. Frobenius*, Berl. Ber. 1896, p. 985.

116) *H. Weber*, Algebra 2, p. 52.

117) ib. p. 53. — Auch diese Begriffe stammen aus den disqu. arithm.

Den Abelschen Gruppen nahe stehen die Gruppen, deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist; vgl. *E. Mathieu*, Ann. di mat. 4, 1861, p. 119; *L. Sylow*, Math. Ann. 5, 1872, p. 588; *A. Capelli*, Giorn. di mat. 10, 1878, p. 69; *E. Netto*, J. f. Math. 103, 1888 [87], p. 331; *J. W. A. Young*, Amer. J. 15, 1893 [92], p. 124; *G. Frobenius*, Berl. Ber. 1895, p. 173; sowie *Burnside*, theory cap. V.

117a) *R. Dedekind*, Math. Ann. 48, 1897 [96], p. 548. Er nennt Q die *„Quaterniongruppe"*, R eine *„Hamilton'sche Gruppe"*.

118) Für $\varkappa = 1$ *A. Cauchy*, Par. C. R. 21, 1845, p. 850; exerc. d'anal. 3, p. 250; allg. *L. Sylow*, Math. Ann. 5, 1872, p. 584; dazu *E. Netto*, ib. 13, 1878 [77], p. 249; *G. Frobenius*, J. f. Math. 100, 1886 [84], p. 179; 101, 1887 [86], p. 282; Berl. Ber. 1895, p. 987.

119) *L. Sylow* a. a. O.; specielle Fälle bei *E. Mathieu*, J. de math. (2) 6, 1861, p. 308; *L. Sylow*, Christ. Förh. 1867, p. 109. 114. Noch nähere Angaben über j *L. Sylow*, Acta math. 11, 1888, p. 215; *G. Frobenius*, Berl. Ber. 1895, p. 174.

beruht die Diskussion der möglichen Typen von Gruppen gegebener Ordnungszahl.

22. Einfache Gruppen. Keine Primzahlpotenz kann Ordnung einer einfachen Gruppe sein[120]); ferner keine Zahl der Form $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_q^{\alpha_q}$, wenn für jedes $\varkappa$: $p_{\varkappa-1} > p_\varkappa^{\alpha_\varkappa} p_{\varkappa+1}^{\alpha_{\varkappa+1}} \cdots p_q^{\alpha_q}$ ist[121]); kein Produkt aus lauter verschiedenen Primfaktoren[122]); keine Zahl der Form $p^\alpha q^\beta$, wenn $p < q$ und β kleiner ist, als das Doppelte des Exponenten m, zu dem $q \pmod p$ gehört[123]); keine Zahl der Form $p^\alpha q^2$, wenn[124]) $p < q$; keine Zahl der Form $p^2 q^2 r^2$;[124a]) kein Produkt von weniger als sechs Primzahlen, ausser 60, 168, 660 und 1092;[125]) keine gerade Zahl, die weder durch 12, noch durch 16, noch durch 56 teilbar ist[126]).

Unter den zusammengesetzten Zahlen $\leqq 1092$ sind nur die folgenden Ordnungszahlen einfacher Gruppen (und zwar nur von je einer[127]): 60, 168, 360, 504, 660, 1092.

Andererseits ergeben sich Typen von Ordnungszahlen einfacher Gruppen aus der Untersuchung der Zusammensetzung der in den Nrn. **10**—**12** besprochenen Gruppen[128]).

— Verallgemeinerung auf Teiler der Ordnung p^α, $\alpha < \varkappa$, bei *G. Frobenius*, ib. p. 988; *E. Maillet*, Par. thèse 1892, p. 114; Par. C. R. 118, 1894, p. 1187; Toul. Ann. 9, 1895, p. D 7.; auf Teiler der Ordnung $p^\alpha q^\beta$, *G. A. Miller*, N. Y. Bull. (2) 4, 1898, p. 326.

120) *L. Sylow*, Math. Ann. 5, 1872, p. 589.

121) ib.

122) *G. Frobenius*, Berl. Ber. 1893, p. 337.

123) Für $\beta = 1$ der Satz bei *G. Frobenius*, Berl. Ber. 1893, p. 340, Beweis Berl. Ber. 1895, p. 185 (eine Verallgemeinerung p. 192); für $\beta = m$ ib. p. 190; für $\beta = 4$, $q > p$ ib. 1893, p. 344; allgemein *W. Burnside*, theory p. 345.

124) *W. Burnside*, theory p. 348.

124a) *E. Maillet*, Quart. J. 29, 1897, p. 263.

125) *W. Burnside*, Lond. Math. Proc. 26, 1895, p. 211; p. 207 auch noch einige andere Formen; *G. Frobenius*, Berl. Ber. 1895, p. 335, p. 1041 (als Vermuthung ib. 1893, p. 338).

126) *W. Burnside*, Lond. Math. Proc. 26, 1895, p. 332. — Man kennt bis jetzt keine einfache Gruppe ungerader Ordnung (*W. Burnside*, theory p. 379).

127) Bis $N = 60$ *E. Galois*, oeuvr. p. 26 (revue encyclopédique, sept. 1832), ohne Bew.; bis 200 *O. Hölder*, Math. Ann. 40, 1892 [91], p. 55; bis 500, bezw. 560 *F. N. Cole*, Amer. J. 14, 1892, p. 388 und 15, 1893, p. 302 (über $N = 432$ vgl. auch *G. Frobenius*, Berl. Ber. 1893, p. 344); bis $N = 1092$ *W. Burnside*, Lond. Math. Proc. 26, 1895, p. 333. — Die Gruppen $N = 60$ und $N = 360$ sind die alternierenden Gruppen für $n = 5, 6$; die Gruppen $N = 60, 168, 660, 1092$ die der Modulargleichungen (Nr. **11**) für $n = 5, 7, 11, 13$; nur die Einfachheit einer Gruppe $N = 504$ war neues Ergebnis dieser Untersuchungen. Die Gruppe selbst gehört zu einem von *E. Mathieu*, J. de math. (2) 6, 1861, p. 262 aufgestellten Typus.

128) Vgl. die Zusammenstellung von *E. H. Moore*, Chicago congress papers, 1896 [93], p. 208; dann *L. E. Dickson*, Quart. J. 29, 1897, p. 169.

23. Auflösbare Gruppen. Eine Gruppe, deren Faktoren der Zusammensetzung (Nr. **17**) sämtlich Primzahlen sind, heisst *auflösbar*[129]. Bei der Untersuchung solcher Gruppen hat man nicht nach der Ordnung, sondern nach dem Grad geordnet, mit Rücksicht auf die Anwendung zur Auflösung von Gleichungen durch Radikale. Eine transitive Gruppe, deren Grad zwei verschiedene Primzahlen enthält, kann nur auflösbar sein, wenn sie imprimitiv ist[130]. Eine transitive Gruppe, deren Grad Primzahl ist, ist dann und nur dann auflösbar, wenn sie in der linearen Gruppe für $\varkappa = 1$ enthalten ist[131]. Eine primitive Gruppe, deren Grad Primzahlpotenz $p^\varkappa$ ist, kann nur auflösbar sein, wenn sie in der linearen Gruppe enthalten ist[132].

Über die Bildung zusammengesetzter Gruppen aus gegebeneren einfachen vgl. man *O. Hölder,* Math. Ann. 46, 1895 [94], p. 321; *E. Maillet,* Par. thèse.

Aufzählung aller Gruppen bestimmter Ordnung geben:

für $N = 2$—12 *A. B. Kempe,* Lond. Trans. 177 I, 1886, p. 37; *A. Cayley,* Amer. J. 11, 1889, p. 144 = coll. pp. 12, p. 639.

$N = 24$ *W. Burnside,* theory p. 101;

bis $N = 32$ *G. A. Miller,* Par. C. R. 122, 1896, p. 370;

bis $N = 48$ *G. A. Miller,* Qu. J. 28, 1896, p. 232;

für $N = p, p^2, pq$ *E. Netto,* Subst.-Th. p. 133;

für $N = p^3, p^2q, pqr$ *F. N. Cole* und *J. W. Glover,* Amer. J. Math. 15, 1893 [92], p. 191; O. *Hölder,* Math. Ann. 43, 1893, p. 301; *R. Levavasseur,* Par. C. R. 120, 1895, p. 822;

für $N = p^4$ *O. Hölder* a. a. O.; *J. Young,* Amer. J. Math. 14, 1893 [92], p. 124;

für $N = 2^\omega$ *Levavasseur,* Par. C. R. 120, 1895, p. 899;

für quadratfreie Ordnungszahlen *O. Hölder,* Gött. Nachr. 1895, p. 211.

129) *résoluble* bei *C. Jordan,* J. de math. (2) 12, 1867, p. 111. *H. Weber,* Algebra 1, p. 598; 2, p. 27 gebraucht „metacyklisch" in diesem Sinne.

130) *E. Galois,* oeuvr. p. 11 (Bull. Fér. 13, 1830); p. 27 (rev. encycl. 1832); Bew. skizziert p. 51 (J. de math. 11, 1846 [31]; ausgeführt von *E. Betti*, Ann. mat. fis. 3, 1852, p. 71. 107, u. *C. Jordan,* J. éc. polyt. cah. 38, 1861, p. 190. Vgl. den entsprechenden Satz über Gleichungen bei *N. H. Abel,* oeuvr. 2, p. 222 (a. d. J. 1828, publ. 1839), p. 262 (a. d. J. 1826).

131) *E. Galois,* oeuvr. p. 11 (Bull. Fér. 13, 1830), p. 23 (ib.); Bew. p. 46 (J. de math. 11, 1846 [31]). Der Satz von *N. H. Abel,* oeuvr. 2, p. 222. 233 [a. d. J. 1828, publ. 1839]; vgl. auch p. 256. 260. 262. 266. 270. 279) sagt für die Gruppen aus: eine Gruppe von Primzahlgrad ist nur auflösbar, wenn ihre Klasse $\geqq p - 1$ ist. Ableitung des Galoisschen Kriteriums aus dem Abelschen bei *E. Betti,* Ann. mat. fis. 2, 1851, p. 9.

132) *E. Galois,* oeuvr. p. 27 (revue encyclop. 1832); Bew. für $\varkappa = 2$ p. 53 (J. de math. 11, 1846 [31]) (vorher p. 11. 22 unrichtige Angaben). *C. Jordan* hat das Problem, alle auflösbaren Gruppen des Grades $p^\varkappa$ zu finden, die nicht in noch umfassenderen solchen Gruppen enthalten sind, auf die Lösung desselben Problems für kleinere Gradzahlen zurückgeführt, Par. C. R. 64, 1867, p. 269. 586. 1179; 72, 1871, p. 283; J. de math. (2) 12, 1867, p. 105. 109; traité p. 383—662.

24. Gruppendeterminante. Ordnet man jeder Operation R einer Gruppe eine Variable x_R zu und bildet die Determinante:

$$|x_{PQ^{-1}}| \quad (P, Q = R_0, R_1, R_2, \dots R_{N-1}),$$

so heisst sie *die Determinante der Gruppe*[133]). Ist die Gruppe eine Abelsche, so ist die Determinante gleich einem Produkt von Linearfaktoren[134]), die die Charaktere zu Coefficienten haben[135]). Im allgemeinen zerfällt sie in eine Reihe von Faktoren, deren Anzahl gleich ist der Anzahl nicht gleichberechtigter Operationen der Gruppe[136]), jeder zu einer Potenz erhoben, deren Exponent seinem Grade f gleich ist[137]). Jedem solchen Factor entspricht eine „primitive" Darstellung der Gruppe durch lineare homogene Substitutionen zwischen f Variabeln[138]).

Ausgeführte Aufzählung für $\varkappa = 2$ J. de math. (2) 13, 1868, p. 111; andererseits auch implicite bei *J. Gierster,* Math. Ann. 18, 1881, p. 319. Vgl. auch *E. Betti,* Par. C. R. 48, 1859, p. 182.

133) *R. Dedekind* bei *G. Frobenius,* Berl. Ber. 1896, p. 986. 1343.

134) *W. Burnside,* Mess. (2) 23, 1894 [93], p. 112; specielle Fälle sind schon länger bekannt, vgl. die Citate bei *G. Frobenius* a. a. O. p. 1008, sowie I A 2, Nr. 26.

135) *G. Frobenius* a. a. O. p. 1363.

136) ib. p. 1368.

137) ib. p. 1375.

138) ib. 1897, p. 994. — Vgl. Abschnitt I B 3 f.

23. Auflösbare Gruppen. Eine Gruppe, deren Faktoren der Zusammensetzung (Nr. **17**) sämtlich Primzahlen sind, heisst *auflösbar*[129]). Bei der Untersuchung solcher Gruppen hat man nicht nach der Ordnung, sondern nach dem Grad geordnet, mit Rücksicht auf die Anwendung zur Auflösung von Gleichungen durch Radikale. Eine transitive Gruppe, deren Grad zwei verschiedene Primzahlen enthält, kann nur auflösbar sein, wenn sie imprimitiv ist[130]). Eine transitive Gruppe, deren Grad Primzahl ist, ist dann und nur dann auflösbar, wenn sie in der linearen Gruppe für $\varkappa = 1$ enthalten ist[131]). Eine primitive Gruppe, deren Grad Primzahlpotenz $p^\varkappa$ ist, kann nur auflösbar sein, wenn sie in der linearen Gruppe enthalten ist[132]).

Über die Bildung zusammengesetzter Gruppen aus gegebeneren einfachen vgl. man *O. Hölder,* Math. Ann. 46, 1895 [94], p. 321; *E. Maillet,* Par. thèse.

Aufzählung aller Gruppen bestimmter Ordnung geben:

für $N = 2$—12 *A. B. Kempe,* Lond. Trans. 177 I, 1886, p. 37; *A. Cayley,* Amer. J. 11, 1889, p. 144 = coll. pp. 12, p. 639.

$N = 24$ *W. Burnside,* theory p. 101;

bis $N = 32$ *G. A. Miller*, Par. C. R. 122, 1896, p. 370;

bis $N = 48$ *G. A. Miller,* Qu. J. 28, 1896, p. 232;

für $N = p, p^2, pq$ *E. Netto,* Subst.-Th. p. 133;

für $N = p^3, p^2q, pqr$ *F. N. Cole* und *J. W. Glover,* Amer. J. Math. 15, 1893 [92], p. 191; *O. Hölder,* Math. Ann. 43, 1893, p. 301; *R. Levavasseur,* Par. C. R. 120, 1895, p. 822;

für $N = p^4$ *O. Hölder* a. a. O.; *J. Young,* Amer. J. Math. 14, 1893 [92], p. 124;

für $N = 2^\omega$ *Levavasseur,* Par. C. R. 120, 1895, p. 899;

für quadratfreie Ordnungszahlen *O. Hölder,* Gött. Nachr. 1895, p. 211.

129) *résoluble* bei *C. Jordan,* J. de math. (2) 12, 1867, p. 111. *H. Weber,* Algebra 1, p. 598; 2, p. 27 gebraucht „metacyklisch" in diesem Sinne.

130) *E. Galois,* oeuvr. p. 11 (Bull. Fér. 13, 1830); p. 27 (rev. encycl. 1832); Bew. skizziert p. 51 (J. de math. 11, 1846 [31]; ausgeführt von *E. Betti*, Ann. mat. fis. 3, 1852, p. 71. 107, u. *C. Jordan,* J. éc. polyt. cah. 38, 1861, p. 190. Vgl. den entsprechenden Satz über Gleichungen bei *N. H. Abel,* oeuvr. 2, p. 222 (a. d. J. 1828, publ. 1839), p. 262 (a. d. J. 1826).

131) *E. Galois,* oeuvr. p. 11 (Bull. Fér. 13, 1830), p. 23 (ib.); Bew. p. 46 (J. de math. 11, 1846 [31]). Der Satz von *N. H. Abel,* oeuvr. 2, p. 222. 233 [a. d. J. 1828, publ. 1839]; vgl. auch p. 256. 260. 262. 266. 270. 279) sagt für die Gruppen aus: eine Gruppe von Primzahlgrad ist nur auflösbar, wenn ihre Klasse $\geqq p - 1$ ist. Ableitung des Galoisschen Kriteriums aus dem Abelschen bei *E. Betti,* Ann. mat. fis. 2, 1851, p. 9.

132) *E. Galois,* oeuvr. p. 27 (revue encyclop. 1832); Bew. für $\varkappa = 2$ p. 53 (J. de math. 11, 1846 [31]) (vorher p. 11. 22 unrichtige Angaben). *C. Jordan* hat das Problem, alle auflösbaren Gruppen des Grades $p^\varkappa$ zu finden, die nicht in noch umfassenderen solchen Gruppen enthalten sind, auf die Lösung desselben Problems für kleinere Gradzahlen zurückgeführt, Par. C. R. 64, 1867, p. 269. 586. 1179; 72, 1871, p. 283; J. de math. (2) 12, 1867, p. 105. 109; traité p. 383—662

Sn. Burnside and *W. Panton*, Theory of equations. 3. ed. Dublin 1892. New-York 1893.
A. Capelli, Lezioni di Algebra complementare. 2. Aufl. Napoli 1898.
P. Gordan, Vorlesungen über Invariantentheorie, herausgeg. von *G. Kerschensteiner.* I. Determinanten. Leipzig 1885. II. Binäre Formen. Leipzig 1887.
H. Laurent, Traité d'Algèbre. 4. et 5. éd. Paris 1887—1894.
E. Netto, Vorlesungen über Algebra. I. Leipzig 1896. II. Leipzig 1898/99.
S. Pincherle, Algebra complementare. Milano 1893—1894.
G. Salmon, Modern higher Algebra. 4. ed. Dublin 1885. Deutsch von *W. Fiedler.* 2. Aufl. Leipzig 1877.
J.-A. Serret, Algèbre supérieure. 5. éd. Paris 1885. Deutsch von *G. Wertheim.* 2. Aufl. Leipzig 1878.
O. Stolz, Allgemeine Arithmetik. 2. 4. Abschn. Leipzig 1886.
C. Chrystal, Algebra. Edinburgh. 1. 1886. 2. 1889.
E. Cesàro, Corso di Analisi algebrica. Torino 1894.
H. Weber, Lehrbuch der Algebra. 2. Aufl. I. Braunschweig 1898. II. ib. 1899.
N. Cor et *J. Riemann,* Traité d'algèbre élémentaire. Paris 1898.

---

1. Definitionen. Ein Ausdruck von der Form

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n,$$

in welchem die a Konstanten und z eine Veränderliche bedeuten, heisst eine *ganze Funktion* (gz. F.) *der Variablen z* vom *Grade n*; die $a_0, a_1, \ldots a_n$ heissen ihre *Koeffizienten* (Koeff.). Der Ausdruck Funktion rührt in diesem und in allgemeinerem Sinne von *G. W. Leibniz* her[1]); die symbolische Bezeichnung $f(z)$ hat nach *R. Baltzer*'s Angabe[2]) zuerst *A. Cl. Clairaut* angewendet. Der Quotient zweier ganzer Funktionen heisst eine *gebrochene Funktion* (gbr. F.); gz. und gbr. F. werden als *rationale Funktionen* (rat. F.) zusammengefasst[3]). Haben die Koeff. a keinen gemeinsamen Teiler, dann heisst f eine *primitive* F.[4]). Das Produkt zweier primitiver F. ist eine ebensolche F.[5]). Setzt man $y^n f(x:y)$ an, so wird dies homogen und heisst eine *binäre Form* n^{ten} Grades (vgl. Nr. **24**).

2. Konstantenzählung. Interpolationsproblem. Partialbrüche. $f(z)$ enthält $(n+1)$ Konstanten und ist daher bestimmt, wenn man

---

1) Acta Eruditorum Lips. 1694, p. 306. Ganz modern definiert schon *Joh. Bernoulli I.* (Paris Mém. 1718, p. 100 = Oeuvres [Laus. et Genève 1742] 2, p. 241): „On appelle ici fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes." *Leibniz* schloss sich dem an; Commerc. epist. I, p. 386.

2) Elemente d. Math. 1, Leipzig 1872, p. 214 [7. Aufl. 1885, p. 236].

3) *L. Euler,* Introductio in anal. infin. Lausannae 1748. Lib. I. Cap. I. § 1—9.

4) Eingeführt von *C. F. Gauss,* Disq. arithm. § 226. — *H. Weber,* Algebra. 1, § 2. — *L. Kronecker,* Grundzüge einer arithm. Theorie der algebr. Grössen, J. f. Math. 92 (1882), p. 49.

5) Vgl. Nr. **9**; (*Gauss*' Satz).

den Werten $z_0, z_1, \ldots z_n$ des Argumentes z $(n+1)$ Werte $u_0, u_1, \ldots u_n$ der F. zuordnet. Die Bestimmung kann durch die Lösung eines Systems linearer Gleichungen (Gl.) mit der Determinante $|z_\lambda^\varkappa|$ bei $(\varkappa, \lambda = 0, 1, \ldots n)$ geschehen und ist, da für verschiedene z_λ die Determinante $\neq 0$ wird, stets eindeutig möglich.

Dieses *Interpolationsproblem* findet seine Erledigung durch mancherlei Interpolationsformeln. Eine solche stammt von *J. Newton* her[6]); sie hat die Gestalt

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)(z-z_1) + c_3(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2) + \cdots,$$

$$c_0 = u_0;\ c_1 = \frac{u_0}{z_0-z_1} + \frac{u_1}{z_1-z_0};\ c_2 = \frac{u_0}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)} + \cdots + \frac{u_2}{(z_2-z_0)(z_2-z_1)};\ \cdots$$

Eine andere Formel, die sich aus dieser leicht ableiten lässt (wie auch umgekehrt), hat *J. L. Lagrange* gegeben[7]). Setzen wir

$$g(z) = (z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_n)$$

und bezeichnen mit $g'(z)$ die *Ableitung* (vgl. Nr. **6**) von $g(z)$, so ist

$$f(z) = \sum u_\lambda \frac{g(z)}{(z-z_\lambda)\,g'(z_\lambda)} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots n),$$

wobei die Bedeutung jedes einzelnen Gliedes klar ist. Aus ihr folgen, wenn man $u_\lambda = f(z_\lambda)$ setzt, die *Euler*'schen Formeln[8])

$$\sum_\lambda \frac{z_\lambda^\varkappa}{g'(z_\lambda)} = \begin{cases} 0 & (\varkappa < n) \\ 1 & (\varkappa = n) \end{cases} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots n),$$

aus denen man umgekehrt die *Lagrange*'sche Formel herleiten kann. In beiden müssen die z_λ ihrer Bedeutung nach von einander verschieden sein. *Jacobi* gab Ausdehnungen für den Fall gleicher Werte z_λ.[9]) Über den Fall $\varkappa > n$ vgl. *F. Brioschi*, J. f. Math. 50 (1855), p. 239.

Die Formeln reichen zur Zerlegung einer gebr. F. in *Partialbrüche* aus, d. h. in Brüche, deren Nenner nur für je einen einzigen Wert von z verschwinden, und deren Zähler zugleich konstant sind[10]). Vgl. Nr. **5**, sowie den Schluss von Nr. **14**.

---

6) Princip. Phil. Nat. ed. Amstelod. 1723, Lib. III, lemma 8; p. 446. Vgl. auch *J. Fr. Encke*, Berl. Astr. Jahrb. für 1830, p. 265 (1828).

7) J. Éc. polyt. cah. 8 (1812), p. 277 = Oeuvres 7, p. 285.

8) Instit. Calc. Integr. Petrop. 1768—1770, 2, § 1169.

9) Diss. Berol. 1825 = Werke 3, p. 1. — Auch *Ch. Hermite* hat (J. f. Math. 84 [1878], p. 70) eine Erweiterung in analytischer Behandlung geliefert, nämlich die, eine Funktion $F(x)$ des Grades $(n-1)$ herzustellen, welcher n Werte

$$F^{(\varkappa)}(z_\lambda) \quad \text{für} \quad \lambda = 1, 2, \ldots, l; \quad \varkappa = 1, 2, \ldots k_\lambda \quad \left(\sum k_\lambda = n\right)$$

vorgeschrieben sind, wenn dabei $F^{(\varkappa)}(z)$ die $\varkappa^{\text{te}}$ Ableitung von $F(z)$ bedeutet.

10) Diese Art der Zerlegung stammt von *Leibniz*, Acta Erud. Lips. 1702, p. 210; 1703, p. 19 = Op. 3, p. 65, 66. Weiter siehe *Euler*, Introd. Cap. 2. u. 12;

A. L. Cauchy lieferte eine Erweiterung der Interpolationsformel auf gebr. F.[11]), ohne einen Beweis für sie zu geben; *K. G. J. Jacobi* gab ihn[12]) und diskutierte eingehend verschiedene Darstellungsformen für Zähler und Nenner. *Kronecker* zeigte, dass die *Cauchy*'sche Aufgabe nicht stets lösbar sei, und stellte die Bedingungen fest, unter denen sie es ist[13]). An die *Cauchy*'sche Formel lassen sich, ähnlich wie an die *Lagrange*'sche andere vom Charakter der obigen *Euler*'schen anknüpfen[14]).

L. Stickelberger verallgemeinert die Interpolationsaufgabe in der Weise, dass er die Reste $\varphi_\lambda(z)$ vorschreibt, welche $f(z)$ bei der Division durch gegebene Funktionen $h_\lambda(z)$ haben soll[15]).

3. Interpolations- und Ausgleichungs-Rechnung. Die charakteristische Aufgabe für Interpolationsformeln liegt darin, an die Stelle einer F., deren analytischer Ausdruck unbekannt oder unbequem ist, eine bekannte oder bequemere aus gegebenen numerischen Werten gebildete zu setzen, die sich innerhalb gewisser Grenzen statt jener zu numerischen Zwecken benutzen lässt[16]). Das einfachste und zugleich wichtigste Problem tritt auf, wenn die z_λ äquidifferent sind, $z_1 - z_0 = h$, $z_2 - z_1 = h, \cdots$. Setzt man, wie in der *Differenzenrechnung* (vgl. Nr. 4) als Symbole für Differenzen erster und höherer Ordnungen

$$\varDelta u_\mu = u_{\mu+1} - u_\mu; \quad \varDelta^2 u_\mu = \varDelta u_{\mu+1} - \varDelta u_\mu; \quad \varDelta^3 u_\mu = \varDelta^2 u_{\mu+1} - \varDelta^2 u_\mu; \cdots$$

dann liefert die *Newton*'sche Formel aus Nr. 2 in der Gestalt

$$f(z) = u_0 + (z - z_0)\frac{\varDelta u_0}{h} + \frac{(z-z_0)(z-z_1)}{1 \cdot 2}\frac{\varDelta^2 u_0}{h^2} + \cdots$$
$$+ \frac{(z-z_0)\cdots(z-z_{n-1})}{n!}\frac{\varDelta^n u_0}{h^n}$$

Inst. calc. diff. 2, Cap. 18. — Ausführliche Litteraturangaben liefert *A. L. Crelle,* J. f. Math. 9 (1832) p. 231; 10 (1833), p. 42. Ferner siehe *Jacobi* (Anm. 9) und *Gauss,* Werke 3; Nachlass p. 265, § 3. — *Jacobi* dehnt die Zerlegung auch auf den Fall aus, dass als die Nenner der einzelnen Partialbrüche die Produkte mehrerer Wurzelfaktoren $(z - z_\lambda)(z - z_\mu)$ auftreten.

11) Cours d'analyse, Paris 1821, Note V.

12) J. f. Math. 30 (1846), p. 127 = Werke 3, p. 479. Vgl. auch Nr. **16**, *F. Rosenhain.*

13) Berl. Ber. 1881 Juni, p. 535, bes. § II. Vgl. auch *Netto,* Math. Ann. 42 (1893), p. 453.

14) *Netto,* Zeitschr. Math. Phys. 41 (1896), p. 107.

15) Math. Ann. 30 (1887), p. 405.

16) *S. F. Lacroix,* Traité des différences et des séries; Paris 1800. — *J. Stirling,* Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum, Lond. 1730; unvollst. schon Lond. Trans. 1718. — *Lagrange,* Leçons élementaires (V leç.). Oeuvres 7. — *A. Markoff,* Differenzenrechnung, St. Petersb. 1891 (deutsch von *Th. Friesendorff* und *E. Prümm.* Leipzig 1896, Teil I), wo ausführliche Litteraturangaben zu finden sind.

die Lösung des Problems durch Angabe einer interpolierenden Funktion n^{ten} Grades[17]). *J. F. Encke*[18]) bearbeitete eine von *J. Stirling*[19]) gegebene Methode, von der Mitte der gegebenen Werte aus zu interpolieren; diese ist deshalb von Wichtigkeit, weil der Fehler der Interpolation am kleinsten wird, wenn man das z des gesuchten u möglichst nahe an die Mitte der gegebenen Werte legt. Man vgl. I D 3.

Auf Interpolation durch periodische Reihen und durch Exponentialfunktionen sei hingewiesen[20]). Die Interpolation des Integrals einer F. aus einzelnen Werten derselben heisst „*mechanische Quadratur*" und gehört in den Bereich der Integralrechnung[21]). [II A 2 Nr. **50** u. f.]

Mit der Interpolationsrechnung steht die *Ausgleichungsrechnung* insofern in Zusammenhang, als bei ihr zur Bestimmung einer Funktion n^{ten} Grades f *mehr* als $(n+1)$ Werte u_α gegeben sind; dabei handelt es sich dann um Herstellung einer Funktion f, welche sich den gegebenen Werten „möglichst gut" anschmiegt. Siehe I D 2, wo auch darzulegen sein wird, in welcher Art diese unbestimmt gehaltene Forderung bei willkürlichen u_α zu präzisieren ist.

4. Differenzenrechnung. Die Differenzenrechnung untersucht den Zusammenhang zweier F. $F(x)$ und $f(x)$, die in der Beziehung stehen

$$f(x) = \Delta F(x) = F(x+h) - F(x),$$

wobei h eine gegebene Zahl bedeutet; und deshalb gehört, soweit F oder f ganze F. sind, ein Hinweis an diese Stelle[22]). Für eine willkürliche Reihe von Grössen $u_0, u_1, u_2, \ldots$ gelten die Einführungen $\Delta u, \Delta^2 u, \Delta^3 u, \ldots$ der vorigen Nummer. Man kann symbolisch setzen

$$\Delta^n u_\alpha = (u-1)^{(n)} u^{(\alpha)}; \quad u_{n+\alpha} = (1+\Delta)^{(n)} u_\alpha,$$

wobei nach Unterdrückung der Exponentenklammern und Ausführung des Potenzierens $u_\varkappa$ statt $u^\varkappa$ zu setzen und $\Delta^\varkappa u_\alpha$ als $\varkappa^{\text{te}}$ Differenz aufzufassen ist.

Die m^{te} Differenz $\Delta^m F$ einer gz. F. des Grades $n (\geqq m)$ ist eine

---

17) Brief an *H. Oldenburg,* Okt. 24. 1676; auf mehrere Variable ausgedehnt von *Lacroix,* l. c. § 894; umgeformt von *P. S. Laplace,* Théorie anal. des probab. Paris 1812 = Oeuvres 3, p. 13.

18) Berl. astron. Jahrb. für 1837 (1835), p. 251.

19) l. c. Anm. 16, Propos. 20.

20) *Gauss,* Werke 3, p. 279 ff.; *F. W. Bessel,* Abhandl. 2, p. 364, 393; *Encke,* Berl. astron. Jahrb. für 1860 (1857), Abh. I. — *M. R. de Prony,* J. Éc. Polyt. cah. 2 (1795, an IV.), p. 24.

21) *Markoff,* l. c. Anm. 16, Kap. V.

22) *J. Fr. W. Herschel,* Collect. of exampl. of the applic. of the calcul. of finite differences. Cambr. 1820.

gz. F. des Grades $(n - m)$. Ist $f(x)$ eine gz. F. von x des Grades n, so ist $F(x)$ eine solche des Grades $(n + 1)$.

Eine allgemeine Differenzengleichung ist von der Form

$$\Phi(x, f(x), \Delta f(x), \Delta^2 f(x), \ldots \Delta^m f(x)) = 0,$$

in der Φ eine gegebene und $f(x)$ die unbekannte F. bedeutet; man kann ihr die Form geben, in welcher h bekannt ist:

$$\Psi(x, f(x), f(x + h), \ldots f(x + mh)) = 0.$$

Das Problem, $f(x)$ zu finden, findet seine Besprechung in I E.[23])

5. Wurzeln und ihre Multiplizität. Nullstellen. Die Differenz $f(z) - f(z_1)$ ist durch $(z - z_1)$ teilbar, und der Quotient $f_1(z)$ wird dabei eine gz. F. $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grades, deren höchster Koeff. wieder a_0 ist. Falls also $f(z_1) = 0$ wird, hat man $f(z) = (z - z_1) f_1(z)$. Wird ebenso für einen Wert z_2 wieder $f_1(z_2) = 0$, so folgt ebenso $f(z) = (z - z_1)(z - z_2) f_2(z)$, wo f_2 vom Grade $(n - 2)$ ist, u. s. f. So kommt man möglicherweise zu einer Zerlegung in n Linearfactoren

$$f(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Einen Wert z_1, der $f(z_1) = 0$ macht, nennt man eine *Wurzel* (W.) der Gl. $f(z) = 0$, häufig auch eine *Nullstelle* von $f(z)$. Mehr als n W. kann eine Gl. n^{ten} Grades nicht haben, ohne dass ihr Polynom identisch verschwindet. Dies war schon *Newton* bekannt[24]). Ob eine Zerlegung in n Linearfaktoren stets möglich ist, steht noch dahin (vgl. Nr. 7). Aus dem Satze über die Maximalanzahl der W. folgt, dass zwei gz. F. n^{ten} Grades gleiche Koeff. haben, wenn ihre numerischen Werte für $(n + 1)$ Argumente übereinstimmen.

Findet obige Zerlegung statt, so können mehrere z_λ gleich werden. Ist $f(z)$ durch $(z - z_1)^{\mu_1}$ aber durch keine höhere Potenz von $(z - z_1)$ teilbar, dann heisst z_1 eine μ_1-*fache* W. oder eine W. *von der Multiplizität* μ_1. Ordnet man nach den von einander verschiedenen Wurzeln, so kann man mit Hervorhebung der Multiplizität schreiben

$$f(z) = a_0 (z - z_1)^{\mu_1} (z - z_2)^{\mu_2} \cdots \quad (\mu_1 + \mu_2 + \cdots = n).$$

Hat bei einer Partialbruch-Zerlegung der Nenner die μ-fache W. z_1, so treten μ Brüche auf, deren Nenner für $z = z_1$ Null ist,

$$\frac{c_0}{(z - z_1)^\mu} + \frac{c_1}{(z - z_1)^{\mu - 1}} + \cdots + \frac{c_{\mu - 1}}{z - z_1}.$$

---

23) Vgl. *Laplace,* Anm. 17. — *Lagrange,* Recherches sur les suites récurrentes. Berlin, Mém. 1775 = Oeuvres 4, p. 149. — *Lacroix,* Anm. 16. — *O. Schlömilch,* Theorie d. Differenzen u. der Summen. Halle 1848. — *G. Boole,* A treatise on the calculus of finite differences. Lond. 1872; 1880. — *Markoff,* Anm. 16. (Teil II.)

24) Arithm. univers. ed. s'Gravesande; Lugd. 1732, p. 181.

Sind alle Koeff. a_λ von $f(z)$ reell, und ist ein $z_\lambda = x_\lambda + iy_\lambda$ komplex, so folgt aus $f(x_\lambda + iy_\lambda) = 0$ auch $f(x_\lambda - iy_\lambda) = 0$.[25]) Daher gehört zu jeder μ_λ-fachen W. $(x_\lambda + iy_\lambda)$ von $f = 0$ eine μ_λ-fache W. $(x_\lambda - iy_\lambda)$; zu jedem Faktor $(z - x_\lambda - iy_\lambda)^{\mu_\lambda}$ von $f(z)$ der konjugiert komplexe $(z - x_\lambda + iy_\lambda)^{\mu_\lambda}$. — Jede gz. F. einer W. z_1 kann so umgeformt werden, dass sie höchstens bis zum Grade $(n-1)$ aufsteigt.

6. Ableitung und Stetigkeit. Entwickelt man $f(z+h)$ nach Potenzen von h und schreibt

$$f(z+h) = f(z) + hf'(z) + \frac{h^2}{1\cdot 2} f''(z) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(z),$$

dann heisst $f^{(\lambda)}(z)$ die λ^{te} *Ableitung* von $f(z)$ (vgl. II A 2). Die μ^{te} Ableitung der ν^{ten} Ableitung ist die $(\mu+\nu)^{\text{te}}$ Ableitung.

Aus dieser Darstellung fliesst der Satz, dass $f(z)$ eine *stetige* F. (II A 1, Nr. 9) von z ist, d. h. dass $|f(z+h) - f(z)|$ mit $|h|$ zur Null konvergiert. Dabei bedeutet nach *C. Weierstrass* $|a|$ den absoluten Betrag oder den Modul von a. Sowohl bei reellen wie bei komplexen Werten von h entscheidet das Verhalten von $f'(z)$ über den Sinn der Änderung von $f(z)$.[26])

Bei einer Anzahl algebraischer Beweise wird folgende Stetigkeitseigenschaft benutzt: Setzt man $z = x + yi$, $f(z) = u + vi$, dann lässt sich stets, wenn $|f(z)| = \sqrt{u^2 + v^2}$ von Null verschieden ist, ein Paar hinlänglich kleiner reeller Werte h, k so bestimmen, dass

$$|f(x + h + iy + ik)| < |f(x + iy)|$$

wird[27]).

7. Fundamentaltheorem der Algebra. Handelt es sich um die Frage, ob die allgemeine Gl. $f(z) = 0$ W. besitzt, so reicht es aus, die Koeff. reell anzunehmen; denn bei komplexen Koeff. braucht man nur $f(z)$ mit der konjugiert komplexen F. $f_1(z)$ zu multiplizieren und die Gl. mit reellen Koeff. $f(z) f_1(z) = 0$ zu betrachten.

Unter der Annahme reeller Koeff. folgt aus Stetigkeitsbetrachtungen (II A 1, Nr. 9), dass jede Gl. ungeraden Grades stets eine reelle W. besitzt; ebenso, dass jede Gl. geraden Grades, in welcher das Produkt $a_0 a_n$ negativ ist, eine positive und eine negative reelle W. hat[28]).

Besitzt jede Gl. eine W., dann folgt aus Nr. 3, dass eine jede

---

25) *Euler,* Introductio etc. Cap. 2.

26) Siehe z. B. *Serret-Wertheim,* Algebra, 2. Aufl. 1, § 51—52.

27) *A. M. Legendre,* Théorie des nombres, 2. éd. Paris 1808, p. 149.

28) *Euler,* Introduct. Cap. 2; ebenda finden sich weitere elementare Eigenschaften von Funktionen zusammengestellt.

Gl. n^{ten} Grades genau n W., reelle oder gewöhnliche komplexe Zahlen habe, wenn jede W. so oft gezählt wird, als ihre Multiplizität angiebt. Der Satz, dass dies wirklich der Fall ist, heisst nach *Gauss* das *algebraische Fundamentaltheorem.*

Die Existenz einer W. für jede algebraische Gl. schlossen die Mathematiker des vorigen Jahrhunderts zunächst aus der Betrachtung besonderer Gl., z. B. der binomischen, ferner derjenigen von ungeradem Grade und derjenigen von geradem Grade mit sgn $(a_0 a_n) = -1$. Der Nachweis im allgemeinen Falle kostete grosse Mühe; *J. d'Alembert, Euler, Daviet de Foncenex, Lagrange* versuchten vergeblich ihn zu liefern. Der erste, strengeren Anforderungen genügende Beweis des Fundamentaltheorems wurde im Jahre 1797 von *C. F. Gauss* gefunden und 1799 in seiner Dissertation[29]) unter Vermeidung der Benutzung komplexer Grössen veröffentlicht. Ebenda (Werke 3, p. 7—20) befindet sich eine eingehende Besprechung der früheren ernsthaften Versuche einer Begründung des Fundamentaltheorems. *Gauss* hat in der Folge noch *drei* andere Beweise des Satzes gegeben[30]). Jetzt liegen so viele Beweise vor, dass eine Aufzählung nicht möglich ist; wir müssen uns darauf beschränken, die gelieferten zu gruppieren und die Gruppen zu charakterisieren. Dabei sehen wir von solchen Beweisen ab, welche sich auf Lehren der Integralrechnung oder der Funktionentheorie stützen[31]).

Hat $f(z) = 0$ nicht zufällig eine rationale W. (vgl. Nr. **10**, *Newton*), dann ist es nicht möglich, eine W. der Gl. durch eine endliche Anzahl von rationalen Operationen darzustellen; ebensowenig gelingt es, die Existenz der W. ohne Benutzung von Stetigkeitsbetrachtungen (analytischer oder geometrischer Natur) oder von unendlich fortgesetzten Operationen nachzuweisen.

Die eine Gruppe von Beweisen wendet derartige Hülfsmittel an. Bei ihrer Beurteilung ist der Standpunkt, den man gegenüber der Auffassung der geometrischen Stetigkeit und des Irrationalen einnimmt, von entscheidender Bedeutung. Solange ohne Bedenken jeder Strecke

29) Helmstädt 1799 = Werke 3, p. 1: „Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi ordinis resolvi posse.“ Über die früheren Beweisversuche vgl. *G. Loria,* Riv. di mat. 1 (1891), p. 185, Bibl. math. (2) 5 (1891) p. 99.

30) Comment. Götting. 3, 1816; (1815, 7. Dez. und 1816, 30. Jan.). — Götting. Abh. 4, 1850. Der vierte Beweis kann als eine Neuredaktion des ersten unter Benutzung der komplexen Grössen angesehen werden; er weist zugleich die Existenz aller n W. der Gl. gleichzeitig nach.

31) Hierher gehört der dritte *Gauss*'sche Beweis, einer der *Cauchy*'schen Beweise u. s. f.

eine entsprechende Zahl zugeordnet wurde (vgl. I A 3, Nr. 4), galten die geometrischen Beweise als bindend. Mit der Erkenntnis, dass solche Zuordnung ein geometrisches Axiom involviere, änderte sich diese Meinung. — Ebenso steht es bei den Beweisen, die sich auf eine explizit-ausführbare Annäherung an den „Wurzelwert“ stützen, gegenüber der Auffassung des Irrationalen. Einen extremen Standpunkt nahm in dieser Hinsicht *Kronecker* (J. f. Math. 101 [1887], p. 337) ein, der die „sogenannte Existenz der reellen irrationalen Wurzeln algebraischer Gleichungen einzig und allein in der Existenz von Intervallen sieht“, die beliebig geringe Ausdehnung haben, an deren Anfangs- und End-Punkt $f(z)$ entgegengesetzte Vorzeichen besitzt, und innerhalb deren $|f(z)|$ gewisse obere Grenzen nicht überschreitet. — Entsprechend definiert *F. Mertens*, Monatsh. f. Math. 3 (1892), p. 293: die W.-Existenz beweisen, heisse, eine Methode zur Bestimmung eines rationalen komplexen Wertes für z geben, durch den beide „Koordinaten“ der F. $f(z)$ von gewünschter Kleinheit würden. — *D. Hilbert* dagegen nennt diese Definition geradezu inkorrekt, Fortschr. d. Math. 24 (1895), p. 87.

Die andere Gruppe bedient sich solcher Hülfsmittel nicht und reduziert daher das Problem nur so weit, als es bei dieser Einschränkung geschehen kann: es wird gezeigt, dass jede Gl. dann eine W. besitzt, wenn dies für jede Gl. ungeraden Grades der Fall ist. So wird der arithmetische Teil scharf vom „transcendenten“ getrennt, wie *Gordan* sich treffend ausdrückt[32]).

Die Beweise der ersten Gruppe können in solche unterschieden werden, welche geometrische Stetigkeit benutzen und in solche, welche ein Verfahren angeben, durch das man sich einem W.-Werte asymptotisch nähert.

Zu den charakteristischen geometrischen Beweisen zählen vor allem der erste bezw. der vierte *Gauss*'sche. Ihr Prinzip beruht darauf, $f(x+iy)=u+iv$ zu setzen, (x, y) als Punkt der komplexen (*Gauss*'schen) Ebene zu deuten und dann zu zeigen, dass die Kurven $u(x, y)=0$, $v(x, y)=0$ Schnittpunkte haben. Dies folgt aus ihrer für grosse Moduln $\sqrt{x^2+y^2}$ leicht zu überblickenden Konfiguration[33]). Andere Beweise stützen sich auf die Umschlingung des Nullpunktes durch die Kurve (u, v) in einer zweiten imaginären Ebene, wenn

32) Vorles. über Invariantentheorie 1, herausgeg. v. *Kerschensteiner*, Leipzig 1885, p. 166.

33) Vgl. dazu *Kronecker*, Berl. Ber. 1878, p. 151, 152, welcher als Kernpunkt den Übergang zu „reinen“ oder „binomischen“ Gl. heraushebt.

(x, y) in der seinigen eine passend gewählte geschlossene Kurve durchläuft[34]).

Der erste Beweis von *Cauchy*[35]), der sich im wesentlichen auf eine von *Legendre*[36]) herrührende Idee stützt, benutzt die Gestaltung der Fläche $w = u^2(x, y) + v^2(x, y)$, wobei x, y, w rechtwinklige Raumkoordinaten bedeuten, setzt die (als selbstverständliche Annahme angreifbare) Existenz eines Minimums für das niemals negative w voraus und weist mit Hülfe des Schlusssatzes in Nr. **6** nach, dass dieses Minimum nicht von 0 verschieden sein kann; so wird für das entsprechende (x, y) gefunden $u = 0$, $v = 0$, d. h. $f = u + iv = 0$.

Der zweite *Cauchy*'sche Beweis[37]) bringt ein eigenartiges Element in die Betrachtung, nämlich das Verhalten des Quotienten $u : v$ beim Umkreisen eines W.-Punktes: „Verfolgt man die Wertänderung des Quotienten $u : v$ beim Durchlaufen einer einfachen geschlossenen Kurve der xy-Ebene, indem man dabei ihr Inneres zur Linken lässt, dann geht der Quotient so oft vom Positiven durch Null zum Negativen, als die doppelte Anzahl der im Innern der Kurve liegenden W.-Stellen beträgt.“ Von diesem allgemeinen Satze kommt *Cauchy* dann auf das Fundamentaltheorem durch Betrachtung eines hinlänglich grossen (*Gauss*'schen) Kreises an Stelle der geschlossenen Kurve.

Die zweite Unterabteilung der Beweise erster Gruppe giebt analytische Vorschriften zur Annäherung an einen Wert z_1, für den $f(z)$ verschwindet. Eine Reihe von Beweisen der ersten Unterabteilung lässt sich bei geänderter Darstellung direkt in diese Form bringen.

Der *d'Alembert*'sche Beweis[38]), der erste, welcher für das Fundamentaltheorem versucht wurde, gehört hierher; er beruht auf der analytischen Umkehrung der F. $y = f(z)$. *Gauss*, der ihn in einigen Punkten als unzureichend nachweist, giebt zugleich an, wie er zu voller Strenge umgestaltet werden könne[39]).

---

34) Vgl. z. B. *C. Ullherr,* J. f. Math. 31 (1846), p. 231.

35) Exerc. de Math. 4, Paris 1829, p. 98. — Vgl. Cours d'Analyse, Chap. X. Siehe auch *J. R. Argand,* Gergonne Ann. 5 (1815), p. 201. Wegen der Existenz des Minimums vgl. z. B. *Weber* 1, § 41.

36) Théorie des nombres, Paris 1808, p. 149 ff.

37) J. Éc. polyt. Cah. 25 (1837), p. 176. — Vgl. *Ch. Sturm* u. *J. Liouville,* J. de Math. 1 (1836), p. 278 u. p. 290. *F. N. M. Moigno,* ibid. 5 (1840), p. 75. Auf eine Lücke in diesem Beweise hat *F. Rudio,* Naturf.-Ges. Zürich 38 (1894) aufmerksam gemacht; es wird nämlich die Zerlegbarkeit der Ebene in Teilgebiete von bestimmter Eigenschaft unbewiesen angenommen.

38) Berlin Hist. de l'Acad. 1746, p. 182.

39) l. c. Werke 3, p. 29. — Vgl. *Ch. v. Staudt,* J. f. Math. 29 (1845), p. 97.

In rein analytischer Form giebt *R. Lipschitz* einen Beweis[40]), der sich auf das Schlusstheorem von Nr. **6** stützt.

Zwei in ihrem Gedankengange ähnliche, aber in ihrer Durchführung von einander völlig verschiedene Beweise sind die von *F. Mertens*[41]) und von *C. Weierstrass*[42]); beide benutzen die *Newton*sche Näherungsformel als Algorithmus, vgl. I B 3a.

Unter den Beweisen der zweiten Gruppe ist zunächst der zweite *Gauss*'sche Beweis zu nennen[43]). Hier wird ein systematisch wichtiges Hülfsmittel benutzt: Eine Reihe von Eigenschaften einer Gl. n^{ten} Grades mit n W. $g(z) = 0$ lässt sich durch Relationen ausdrücken, welche selbst in den W. symmetrisch und also durch die Koeff. von $g(z)$ rational darstellbar sind; diese Koeff. darf man nun durch die entsprechenden Koeff. einer Gl. $f(z) = 0$, über deren W.-Existenz nichts bekannt ist, ersetzen und kann aus dem Bestehen der Relationen auf die jener Eigenschaften auch bei f schliessen[44]). Eine Umgestaltung des Beweises rührt von *Kronecker* her[45]). Beide Beweise zeigen, wie unter der Voraussetzung von W. jeder Gl. des Grades $2^\mu \cdot \nu$ (ν ungerade) die Existenz von W. der Gl. des Gr. $2^{\mu+1} \cdot \nu_1$ (ν_1 ungerade) folgt. Nach *Gordan* (Anm. 32) heisst μ der „Grad der Auflösbarkeit".

Auf andere, einfachere Art führt *Gordan*[46]) den Existenzbeweis, indem er Resultanteneigenschaften benutzt (vgl. Nr. **18**).

Eine neue Darstellung giebt *E. Phragmen*[47]) dem Beweise dadurch, dass er eine algebraische Kongruenz (vgl. Nr. **15**) herleitet,

$$f(z) \equiv F(w, r)z + G(w, r) \qquad \text{mod. } (z^2 - 2wz + r^2),$$

bei der $r = \varrho$ durch eine Gl. mit vermindertem Auflösbarkeitsgrade so bestimmt wird, dass $F(w, \varrho) = 0$, $G(w, \varrho) = 0$ eine gemeinsame W. $w = \omega$ besitzen; demnach ist $f(z)$ durch $z^2 - 2\omega z + \varrho^2$ teilbar.

Vgl. hierzu auch die von *Kronecker* aufgestellten Kongruenzen (Nr. **15**), welche zur Zerlegung von $f(z)$ in Linearfaktoren führen.

---

40) Lehrbuch d. Analysis, Bonn 1877, 1, § 61. — Eine nach *Dedekind* und *G. Frobenius* vereinfachte Darstellung findet sich in *Weber*'s Algebra 1, § 42, p. 143.

41) Wien. Abh. 1888 Dez. Abt. II^a. — Monatsh. f. Math. 3 (1892), p. 291.

42) Berl. Ber. 1891, p. 1085. — Vgl. auch *Ch. Méray,* Bull. d. scienc. math. (2) 15 (1891), p. 236.

43) Werke 3, p. 31.

44) Ausführlich dargestellt bei *J. Molk,* Acta math. 6 (1885), p. 1. — Zu dieser Gruppe gehört der Beweis von *Th. Vahlen,* Acta math. 21 (1897), p. 287.

45) Grundzüge einer arithm. Theorie u. s. w., J. f. Math. 92 (1882), § 13.

46) Math. Ann. 10 (1876), p. 572; Invariantentheorie 1, p. 166. — Vgl. auch *E. B. Elliott,* Lond. Math. Soc. Proc. 25 (1894), p. 173.

47) Stockholm Öfv. 16 (1891), p. 113. — Siehe ferner *D. Seliwanoff,* Bull. Soc. Math. de France 13 (1885), p. 119.

8. Zerlegung in Faktoren. Durch den Nachweis der W.-Existenz ist der Anschluss an Nr. 5 gewonnen; damit ist der Satz bewiesen, dass jede gz. F. n^{ten} Grades sich, abgesehen von a_0, in lineare Faktoren

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n) \\ &= a_0(z-z_1)^{\mu_1}(z-z_2)^{\mu_2}\cdots(z-z_r)^{\mu_r} \quad (\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_r=n) \end{aligned}$$

zerlegen lässt. Wir setzen $a_0=1$. Multipliziert man die erste Form aus und vergleicht die Koeff. gleicher Potenzen von z, so folgt

$$\sum z_\lambda = -a_1, \quad \sum z_\lambda z_\mu = +a_2, \quad \sum z_\lambda z_\mu z_\nu = -a_3, \cdots$$

d. h. es ergeben sich fundamentale Beziehungen zwischen den Koeff. und den symmetrischen F. der W. Auf diese wird in der Theorie der symmetrischen Funktionen I B 3 b eingegangen; wir brauchen hier nur den Satz, dass jede gz. symmetrische F. der W. eine gz. F. der a_λ ist. Er zeigt z. B. sofort, dass jede rat. F. aller W. z_λ als gz. F. derselben darstellbar ist, die in den a_λ gebr. Koeff. haben.

Setzt man $f_\lambda = (z-z_\lambda)(z-z_{\lambda+1})\cdots(z-z_n)$ für $\lambda = 1, 2, \cdots n-1, n$, so folgt, dass jede W.-Potenz $z_\lambda^{\varkappa}$, in der $\varkappa > (n-\lambda)$ ist, eine gze. gz.-zahlige F. von $z_\lambda, \ldots z_n$ wird, die in z_λ nur bis zur Potenz $(n-\lambda)$ steigt. Das ergiebt weiter, dass gze. gz.-zahlige F. der W. sich gz. und gz.-zahlig als Aggregate der $n!$ Potenzprodukte

$$z_1^{h_1} z_2^{h_2} \ldots z_{n-1}^{h_{n-1}} \quad (h_k = 0, 1, \cdots n-k;\ k = 1, 2, \cdots n-1)$$

darstellen lassen, wobei die Koeff. gze. gz.-zahlige F. von $a_1, a_2, \ldots a_n$ sind[48]). Ein solches System heisst ein *Fundamentalsystem.*

9. Rationalitätsbereich. Bei allen Fragen nach Zerlegbarkeit und Unzerlegbarkeit eines Ausdrucks ist zunächst festzustellen, was als rational bekannt gelten soll. Da mit jeder rational bekannten Grösse zugleich auch alle ihre rationalen F. rational bekannt sind, so genügt es, die Elemente $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots$ anzugeben, deren rationale F. den *Rationalitätsbereich* $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ ausmachen. Die rat. F. sind dabei stets mit gz. gz.-zahligen Koeff. zu bilden[49]).

Eine gz. F. kann in einem Rationalitätsbereiche (Rat.-Ber.) unzerlegbar, irreduktibel (irred.) sein, während sie in einem erweiterten zerlegbar, reduktibel (red.) ist. Im Bereiche der reellen Zahlen ist nach dem Fundamentaltheorem jede gz. gz.-zahlige F. $f(z)$ in Faktoren ersten oder zweiten Grades, im Bereiche der komplexen Zahlen in Faktoren

---

48) *Kronecker*, l. c. § 12.

49) *Abel* hat zuerst die Notwendigkeit dieser Festsetzungen erkannt: „Sur la résol. algébr. etc.", Oeuvres (éd. *Sylow* u. *Lie*) 2, p. 217. Die weitere Ausbildung stammt von *Kronecker,* Berl. Ber. 1853, p. 365; 1873, p. 117; 1879, p. 205; Grundzüge u. s. w. 1882, p. 3.

ersten Grades zerlegbar. *Gauss* hat gezeigt[50]), dass für Zerlegungen gz. gz.-zahliger F. $f(z)$ der Rat.-Ber. der rat. gebrochenen Zahlen sich durch den der rat. gz. Zahlen ersetzen lässt; mit anderen Worten, dass das Produkt zweier primitiver F. wieder eine primitive F. wird.

10. Reduktibilität. Irreduktibilität. Die Frage, ob eine gz. gz.-zahlige F. $f(z)$ im „natürlichen" Rat.-Ber. $(\mathfrak{R}') = (1)$ zerlegbar ist, kann so entschieden werden, dass man alle W.-Faktoren $(z - z_\lambda)$ bestimmt und einzeln betrachtet, oder zu je zwei, drei, ... multipliziert; Zerlegung findet dann und nur dann statt, wenn dabei eins der Produkte eine gz. gz.-zahlige F. wird. — Die direkte Behandlung der Frage führt auf Eliminationsprobleme und wandelt sie in die andere um, ob gewisse Gl. gz. gz.-zahlige W. haben[51]). Beide Methoden sind praktisch nicht verwendbar. — Nimmt man die W.-Existenz als bewiesen an, dann lässt sich eine Grenze für den absoluten Betrag der Moduln der Koeff. der Faktoren aus den absoluten Beträgen der Koeff. von $f(z)$ herleiten[52]). Damit kann man die Frage durch eine endliche Anzahl von Versuchen bequemer erledigen.

Ohne Voraussetzung des Fundamentaltheorems, welches er aus Gründen der Systematik an eine spätere Stelle setzt, gelangt *Kronecker* zur Lösung des Problems, indem er mit Hülfe der *Lagrange*'schen Interpolationsformel alle F. aufstellt, die überhaupt als Teiler von $f(z)$ in Frage kommen[53]). Diese Methode ist von *Runge* weiter durchgearbeitet und zu praktischem Gebrauche verwendbar gemacht worden[54]).

M. Mandl[55]) ersetzt das *Heine*'sche Eliminationsverfahren (Anm. 51) durch die Lösung einer Reihe diophantischer Gleichungen.

Schon *Newton* hat den Fall linearer Faktoren erledigt[56]), derart dass er für eine Reihe von Argumentwerten die Glieder einer arithmetischen Reihe annimmt; er hat auch die Erweiterung auf Faktoren höherer Ordnung angedeutet; hierbei tritt eine nahe Verwandtschaft der *Kronecker*'schen mit der *Newton*'schen Methode zu Tage.

G. Eisenstein hat einen Satz aufgestellt[57]), durch welchen aus der formalen Beschaffenheit der Koeff. einer F. ein Schluss auf ihre Irred.

---

50) Disq. arithm. Lips. 1801, § 42 = Werke 1, p. 34. Vgl. ibid. § 11.

51) *E. Heine,* J. f. Math. 48 (1854), p. 267.

52) *K. Runge,* J. f. Math. 99 (1886), p. 93, 94; vgl. I B 3 a, Nr. 2.

53) Grundzüge u. s. w. § 4, p. 11.

54) J. f. Math. 99 (1886), p. 89.

55) J. f. Math. 113 (1894), p. 252.

56) Arithmetica universalis, Lugd. 1732.

57) J. f. Math. 39 (1850), p. 160.

gezogen werden kann: sind bei $a_0 = 1$ alle Koeff. $a_1, a_2, \dots a_n$ durch die Primzahl p, und ist a_n durch keine höhere Potenz von p als die erste teilbar, dann ist f irreduktibel. — *L. Königsberger*[58]) hat eine Verallgemeinerung dieses Theorems durch eine ganze Reihe von Sätzen gegeben; an diese schliessen sich andere in derselben Richtung an, die *Netto* fand[59]).

Der *Eisenstein'*sche Satz liefert einen unmittelbaren Beweis für die Irred. der „Kreisteilungsgl." $z^{p-1} + z^{p-2} + \cdots + z + 1 = 0$ für eine Primzahl p und ebenso für eine Primzahlpotenz (l. c.). Der erste Beweis für die Irreduktibilität der Kreisteilungsgl. stammt von *Gauss* (Disq. arith. Sect. VII, § 341); in der Folgezeit wurde eine ganze Anzahl weiterer Beweise gegeben[60]). — Ein einfacher Beweis für die Irreduktibilität von $z^p - a$, falls a keine p^{te} Potenz ist (*Abel:* Sur la résol. alg. § 2), stammt von *Mertens*, und ein rein arithmetischer Beweis von *A. Kneser*[61]).

Die Behandlung der Reduktibilität in einem willkürlichen Rat.-Ber. fordert genaues Eingehen auf die Theorie der Elimination und der algebraischen Grössen. Man findet eine grundlegende Untersuchung bei *Kronecker* („Grundzüge") und Erläuterungen dazu bei *Molk* (l. c.) und bei *A. Kneser*, Math. Ann. 30 (1887), p. 179, § 3. Die Irreduktibilität der Kreisteilungsgl. in allgemeineren Rat.-Gebieten findet sich in den, Anm. 60 zitierten Arbeiten gleichfalls behandelt.

Über die Irreduktibilität von Funktionen $f(z) = \theta_1(\theta_2(z))$ hat *A. Capelli* Untersuchungen angestellt[62]). Dabei gehören die Koeffizienten der Funktionen $\theta_1(y)$, $\theta_2(z)$ einem beliebigen Rationalitätsgebiete $(\mathfrak{R})$ an. Für die Irreduktibilität von f ist es charakteristisch, dass $\theta_1(y)$ in $(\mathfrak{R})$ und $\theta_2(z) - y_1$ in $(\mathfrak{R}, y_1)$ irreduktibel ist; y_1 bedeutet hier eine Wurzel von $\theta_1(y) = 0$.

Mit Hülfe dieses allgemeinen Satzes erledigt *Capelli* die Frage nach der Irreduktibilität der binomischen Gleichung $z^n - a = 0$ für beliebige Rationalitätsbereiche. Die Potenzen von 2, für n genommen, treten bei den Resultaten in eine Ausnahmestellung.

---

58) J. f. Math. 115 (1895), p. 53 und weiter Berl. Ber. 1898, p. 735.

59) Algebra 1, p. 61.

60) *Kronecker,* J. f. Math. 29 (1845), p. 280; J. de Math. 19 (1845), p. 177; ibid. (2) 1 (1856), p. 399 [= Werke 1, p. 1, 75, 99]; J. f. Math. 100 (1887), p. 79. *Serret,* J. de Math. 15 (1850), p. 296. *Th. Schönemann,* J. f. Math. 32 (1846), p. 93. *Dedekind,* ibid. 54 (1857), p. 27. *F. Arndt,* ibid. 56 (1859), p. 178. *V.-A. Lebesgue,* J. de Math. (2) 4 (1859), p. 105.

61) *F. Mertens,* Monatsh. f. Math. 2 (1891), p. 291; *A. Kneser,* J. f. Math. 106 (1890), p. 48.

62) Napoli Rend. (1897, Dez.; 1898, Febr., Mai).

11. Teilbarkeitseigenschaften. Den Irreduktibilitäts- können *Teilbarkeits*-Eigenschaften gegenübergestellt werden, bei denen es sich darum handelt, dass gewisse F. durch andere geteilt werden können. Bei Umformungen in der Determinantentheorie begegnet man häufig solchen Formeln. Hervorzuheben ist eine Arbeit von *W. Fr. Meyer*[63]) über die Teilbarkeit ganzer Funktionen höherer Differentialquotienten $\varDelta_k$, wo $k!\,\varDelta_k$ den Zähler der k^{ten} Ableitung eines Bruches $g(z):f(z)$ bedeutet. Es mag hier angemerkt werden, dass alle Determinanten $|\varDelta_{i+k}|$ sehr leicht als solche dargestellt werden können, deren Elemente Ableitungen der f, g sind, woraus allgemeinere Teilbarkeits-Eigenschaften entspringen. Ferner sei auf den Zusammenhang dieser Formeln mit den Entwickelungen der C_ϱ gegen Ende von Nr. **12** hingewiesen.

Teilbarkeits-Eigenschaften sind ferner für Resultanten und Diskriminanten (Nr. **19**) in grosser Anzahl entwickelt.

D. Hilbert giebt in eleganter Weise die charakteristischen Bedingungen dafür, dass eine binäre Form eine vollständige Potenz einer anderen binären Form sei; hier knüpft *C. Weltzien* an, leitet in den einfachsten Fällen diese Bedingungen elementar ab und erweitert die Untersuchung auf ternäre Formen[64]).

12. Grösster gemeinsamer Teiler. Sind $f(z)$ vom Grade n, und $f_1(z)$ vom Grade $(n - n_1)$ gz. gz.-zahlige Funktionen, dann liefert das *Euklid*'sche Schema des *grössten gemeinsamen Teilers* (gr. gm. T.) eine endliche Reihe von Gleichungen [I B 3a]

$$f_{\lambda-1} = f_\lambda g_\lambda - f_{\lambda+1} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots r;\ f_0 = f),$$

in denen der Grad von $f_{\lambda+1}$ kleiner als der von f_λ ist, und $f_{r+1} = 0$ wird. Das Vorzeichen des Restes wird anderer Untersuchungen halber (*Sturm*'sche Reihe) negativ gewählt. Der Grad von f_λ sei $(n - n_\lambda)$, so dass $n_{\lambda+1} > n_\lambda$ und $n_1 \geqq 0$ wird. Jedes f_λ lässt sich in der Form

$$f_\lambda = f_1 \psi_{\lambda-1} - f \varphi_{\lambda-1}$$

darstellen, wobei ψ_λ und φ_λ bezw. die Grade n_λ und $(n_\lambda - n_1)$ besitzen. Die Koeff. in den f_λ brauchen nicht ganzzahlig zu sein; durch Benutzung von Konstanten, mit denen vor der Division multipliziert wird, kann man ganzzahlige F. $\bar{f}_\lambda$, $\bar{g}_\lambda$ erhalten, so dass

$$r_{\lambda-1}\bar{f}_{\lambda-1} = \bar{f}_\lambda \bar{g}_\lambda - s_{\lambda+1}\bar{f}_{\lambda+1}$$

gesetzt wird, wo alle $\bar{f}_{\lambda+1}$ primitive F. werden. Die fremden

63) Math. Ann. 36 (1890), p. 435.

64) *Hilbert,* Math. Ann. 27 (1886), p. 381; vgl. *F. Brioschi,* Pal. C. M. R. 10 (1896), p. 153; *C. Weltzien,* Progr. d. Friedr. Werd. Ober-Realsch., Berlin 1892.

durch $r_{\lambda-1}$ eingeführten Faktoren fallen durch $s_{\lambda+2}$ wieder heraus, indem $s_{\lambda+2}$ ein Multiplum von $r_{\lambda-1}$ wird[65]). Wir wollen aber bei der ersten Darstellung mit gebrochenen Koeff. bleiben.

Das *Euklid*'sche Schema liefert die Kettenbruchentwickelung

$$\frac{f_1}{f} = 1/g_1 - 1/g_2 - \cdots - 1/g_r$$

und ferner die Darstellung desselben Bruches als Summe von Primbrüchen

$$\frac{f_1}{f} = \frac{1}{\psi_0\psi_1} + \frac{1}{\psi_1\psi_2} + \cdots + \frac{1}{\psi_{r-1}\psi_r};$$

das wichtigste Ergebnis des Verfahrens aber ist die Herstellung des gr. gm. T., der freilich mit gebrochenen Koeff. behaftet auftritt,

$$f_r = f_1\psi_{r-1} - f\varphi_{r-1}.$$

Die Reihe der für die f_λ oben aufgestellten Gl. führt zu der Aufgabe, zwei gz. F. Ψ und Φ so zu bestimmen, dass wenn $f_1\Psi - f\Phi = F$, und die Grade von Ψ, Φ, F gleich ν, $\nu - n_1$, ϱ werden, dann $\nu + \varrho < n$ ist, wie dies bei $\psi_{\lambda-1}$, $\varphi_{\lambda-1}$, f_λ der Fall war. Diese Aufgabe kann man durch Reihenentwickelung

$$\frac{f_1}{f} = c_0 z^{-1} + c_1 z^{-2} + c_2 z^{-2} + \cdots$$

lösen; bezeichnen wir $|c_{p+q}|$ mit C_σ $(p, q = 0, 1, \cdots \sigma - 1)$, so können eindeutige Lösungen nur für solche Gradzahlen von Ψ auftreten, welche gleichzeitig Ordnungszahlen nicht verschwindender C_σ sind. Durch das Verschwinden derartiger Determinanten wird zugleich der Grad des gr. gm. T. der Funktionen f, f_1 bestimmt. Die f_λ, ψ_λ, φ_λ lassen sich durch ähnlich gebildete, mit den C_ϱ verwandte Determinanten darstellen. Die Umwandlung in Determinanten, deren Elemente die Koeff. von f und f_1 statt der c_λ sind, lässt sich auf verschiedene Weise durchführen[66]).

Über die Darstellung des gr. gm. T. vgl. auch den Schlusssatz von Nr. **18.**

13. Irreduktible Funktionen. Haben f und f_1 keinen gem. T. ausser einer Konstanten, dann heissen sie *relativ prim* zu einander oder *teilerfremd.* Für solche kann

$$f \cdot F_1 + f_1 \cdot F = 1$$

gesetzt werden, wo F und F_1 passend gewählte gz. F. höchstens von den Graden $(n - n_1 - 1)$ und $(n - 1)$ mit gebrochenen Koeff. sind.

---

65) *Netto,* J. f. Math. **116** (1896), p. 45.

66) Vgl. zu dieser Nummer: *Kronecker,* Berl. Ber. 1881, p. 535. — *Netto,* Algebra 1, Vorles. 6 und 7.

Aus diesem fundamentalen Satze folgt[67]): Hat f mit einer irred. F. φ einen gem. T., so ist f selbst durch φ teilbar. — Wenn weder f_1 noch f_2 durch die irred. F. φ teilbar ist, dann wird auch $f_1 f_2$ nicht durch φ teilbar. — Ist $f_1 f_2$ durch ein f teilbar, welches keinen gem. T. mit f_2 hat, dann ist f_1 durch f teilbar. — Ist f ein Vielfaches von f_1 und von f_2, und haben f_1 und f_2 keinen gem. T., dann ist f auch ein Vielfaches von $f_1 f_2$. — Jede F. lässt sich auf wesentlich nur eine Art, d. h. abgesehen von konstanten Faktoren, in ein Produkt von irred. Faktoren zerlegen. Hier treten Analogien zur Zahlentheorie heraus; die irredukt. Faktoren übernehmen die Rolle von Primzahlen und die Konstanten diejenige von Einheiten.

14. Trennung vielfacher Wurzeln. Aus der in Nr. 8 gegebenen Form von $f(z)$ folgt, wenn z_λ die Multiplizität μ_λ hat,

$$f'(z) = \sum \frac{\mu_\lambda f(z)}{z - z_\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \dots r),$$

und daraus ergiebt sich, dass f und f' als gr. gm. T. das Produkt

$$f_1(z) = (z - z_1)^{\mu_1 - 1}(z - z_2)^{\mu_2 - 1} \cdots (z - z_r)^{\mu_r - 1}$$

haben, d. h. das Produkt aller Wurzelfaktoren, jeden in einer um 1 verminderten Multiplizität gegenüber $f(z)$.

Verfahren wir ebenso mit f_1 und f_1', so wird deren gr. gm. T.:

$$f_2(z) = (z - z_1)^{\mu_1 - 2}(z - z_2)^{\mu_2 - 2} \cdots (z - z_r)^{\mu_r - 2},$$

wo alle Faktoren mit negativen Exponenten zu unterdrücken sind; u. s. f. Es enthält $f(z)$: $f_1(z) = 0$ alle W. von $f = 0$, und zwar eine jede einfach; $f_1(z)$: $f_2(z) = 0$ alle W. von $f = 0$, die mindestens die Multiplizität 2 haben, und zwar eine jede einfach; u. s. w. Ferner liefern

$$\frac{f(z) f_2(z)}{f_1^{\,2}(z)} = 0, \qquad \frac{f_1(z) f_3(z)}{f_2^{\,2}(z)} = 0, \cdots$$

alle einfachen, alle Doppel-W., ... und zwar jede in der Multiplizität 1.[68])

Jede μ-fache W. von $f(z) = 0$ ist zugleich W. von $f'(z) = 0$, $\dots f^{(\mu-1)}(z) = 0$ und umgekehrt[69]).

Setzen wir unter Wahrung der Bedeutung von f, f' und f_1

$$f(z) = f_1(z) \cdot g(z), \qquad f'(z) = f_1(z) \cdot h(z),$$

---

67) Diese Analoga zu Sätzen der Zahlentheorie sind in jedem Lehrbuche der Algebra zu finden; vgl. auch *Molk* l. c.

68) Vgl. z. B. *Serret-Wertheim* Algebra, 2. Aufl., 1, § 50.

69) *J. Hudde*, Brief an *F. van Schooten* (Epist. II) in dessen Ausgabe von Descartes Geometrie, Amstelod. 1658. — *Euler*, Inst. Calc. Diff. 2, § 249.

so folgt, dass $g(z) = 0$ keine vielfachen W. habe, aus dem Fundamentaltheorem. *Fr. Engel*[70]) hat ohne Voraussetzung desselben den gleichen Satz bewiesen, indem er von einer Bemerkung von *Gauss* ausging[71]).

Ist eine gz. F. $f(z)$ so in Faktoren zerlegt, $f = M^m P^p \ldots S^s$, dass die Gl. $M \cdot P \cdots S = 0$ nur einfache W. besitzt, dann giebt es, wie *Ch. Hermite* gezeigt hat[72]), eine Zerlegung jedes Bruches

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \frac{\mathfrak{M}}{M^m} + \frac{\mathfrak{P}}{P^p} + \cdots + \frac{\mathfrak{S}}{S^s},$$

wobei die Zähler $\mathfrak{M}, \mathfrak{P}, \ldots \mathfrak{S}$ rat. gz. Funktionen sind. Diese Darstellung, welche auf rationalem Wege durchgeführt werden kann, ist für die Integration des Bruches von Wichtigkeit. [II A 2.]

Bestehen unter den W. einer Gl. μ Relationen $z_\alpha = z_\beta$, dann nennt *J. J. Sylvester* (Phil. Mag. [4] 3 [1852], p. 375 u. 460) μ die *Multiplizität der Gl.*; diese kann je nach dem Zusammenhange der W. sehr verschiedenen Charakter haben. Für alle bestehen gewisse nur von μ abhängige (Evectanten-) Eigenschaften. (Über die Definition der Evectanten vgl. *G. Salmon*, Higher Algebra § 134, sowie I B 2.) Vgl. weiter Nr. 22.

15. Algebraische Kongruenzen. Ist

$$F(z) = f(z) + g(z) \cdot \varphi(z),$$

dann heissen $F(z)$ und $f(z)$, in Analogie zu Bezeichnungen der Zahlentheorie, einander kongruent nach dem Modul $g(z)$. Dies liefert die „*algebraische Kongruenz*“

$$F(z) \equiv f(z) \quad (\text{mod. } g(z)),$$

deren erste Behandlung von *Cauchy* stammt[73]), und deren weitere Erforschung durch Arbeiten von *J.-A. Serret*[74]), von *Th. Schönemann*[75]) und von *R. Dedekind*[76]) gegeben wurde. Sind alle auftretenden Zahlenkoeff. in F und g gz. Zahlen, dann kann man sie nach einem Zahlenmodul k betrachten. Demnach lassen sich auch alle ganzen, ganzzahligen Funktionen sowohl mod. $g(z)$ als auch mod. k, also nach dem *Doppelmodul* $(g(z); k)$ betrachten. $g(z)$ heisst dabei nach *Serret* die *Modularfunktion.* Man kann die Anzahl der Modularfunktionen eines vor-

70) Leipz. Ber. 49 (1897), p. 603.
71) Demonstr. nova altera, § 10, Werke 3, p. 44.
72) Cours d'Analyse 1 (1873), p. 265.
73) Exerc. d'anal. 3 (1844), p. 87.
74) *Serret,* Paris Mém. 35 (1866), p. 617 und Algèbre 2, Section 3.
75) J. f. Math. 31 (1846), p. 269.
76) J. f. Math. 54 (1857), p. 1.

geschriebenen Grades bei gegebenem Modul k bestimmen; ebenso die Anzahl der Reste $f(z)$, bei denen weder Grad noch Betrag der Koeff. mod. $(g(z); k)$ erniedrigt werden kann.

Die Fassung der Begriffe Irreduktibiliät und Teilbarkeit, von Kongruenzwurzeln, u. s. w. ist klar. Bei den binomischen Kongruenzen

$$x^n - 1 \equiv 0 \qquad \text{mod. } (g(z); k)$$

treten die Wurzeln, die zu gewissen Exponenten *„gehören"*, zusammen; dieser Begriff sowie derjenige der *primitiven* W. entspricht dem in der Zahlentheorie gebräuchlichen.

Auch in diesem Gebiete ist das Problem der Zerlegung einer gegebenen F. $F(z)$ in irred. Faktoren zu lösen[77]. —

Hier seien ferner die *Kronecker*'schen[78] Untersuchungen erwähnt, durch welche zu jeder gz. F. von z ein Modul gefunden wird, für welchen sie in lineare Faktoren von z zerfällt werden kann. So ist z. B.

$$4 \cdot (9c)^3 (z^3 - c) \equiv (9cz - t^4)(18cz + 9ct + t^4)(18cz - 9ct + t^4)$$
$$\text{mod. } (t^6 + 27c^2).$$

16. Resultantendarstellung. Sind zwei Gl., $f(z) = 0$ vom Grade m mit den Koeff. $a_0, \dots a_m$ und den W. $\alpha_1, \dots \alpha_m$, und $g(z) = 0$ vom Grade n mit den Koeff. $b_0, \dots b_n$ und den W. $\beta_1, \dots \beta_n$ gegeben, (wo $m \geqq n$ sei), dann schliesst bei unbestimmten a, b die Kette des *Euklid*'schen Algorithmus mit einem konstanten aus den a, b gebildeten Bruche. Das Verschwinden seines Zählers giebt die Bedingungen für einen gm. T. von f und g. Nach *Brill-Noether*, Deutsche Math. Ver. 3 (1892—93), p. 134 stammt diese Methode von *J. P. de Gua.*

Die Frage nach diesem gm. T. wird auch durch die Betrachtung des Produkts (erste *Euler*'sche Methode)

$$R(f, g) = a_0^n b_0^m \prod (\alpha_\varkappa - \beta_\lambda) \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots m;\ \lambda = 1, 2, \dots n)$$

erledigt; der Faktor vor dem Π bewirkt, dass die symmetrische F. R sich als gz. F. der a, b ausdrücken lässt.[79] Es ist

$$R(f, g) = a_0^n g(\alpha_1) \dots g(\alpha_m) = (-1)^{mn} b_0^m f(\beta_1) \dots f(\beta_n) = (-1)^{mn} R(g, f).$$

$R = 0$ liefert die charakteristische Bedingung für einen gm. T.

R heisst die *Resultante* (R.) von f und g.[80] *Euler* gab eine Me-

77) In engem Zusammenhange hiermit steht die Theorie der *Galois*'schen imaginären Wurzeln. Vgl. Bull. Férussac 13 (1830), p. 428 = J. de Math. 11 (1846), p. 399 = Oeuvres publ. p. *É. Picard*, Paris 1897, p. 15. [I C 1].

78) Mathesis, Mai 1885, p. 102; J. f. Math. 100 (1887), p. 490.

79) *Euler,* Berl. Hist. 1748, p. 243. — *G. Cramer,* Introduct. à l'Analyse des lignes courbes etc. Genf 1750.

80) *Newton*, Arithm. univers 1. Über d. Elimination; *Bézout*, Paris Mém. 1764, p. 286. — Von englischen Mathematikern wird auch die Bezeichnung Eliminante gebraucht. Vgl. über diese Nomenklatur I B 1 b, Nr. **13** u. **14**.

thode[81]), die Berechnung von R bei $n = m$ auf das gleiche Problem für $(m - 1)$ zu reduzieren; *Bézout* erweiterte sie[82]) und führte die Aufgabe auf ein Eliminationsproblem für lineare Gleichungen zurück, indem er (*Bézout*'sche Methode)

$$\varphi_\alpha = a_0 z^\alpha + a_1 z^{\alpha-1} + \cdots + a_\alpha, \quad \psi_\alpha = b_0 z^\alpha + b_1 z^{\alpha-1} + \cdots + b_\alpha,$$

$$\psi_\alpha f - \varphi_\alpha g = d_{\alpha 1} z^{m-1} + d_{\alpha 2} z^{m-2} + \cdots + d_{\alpha m} = 0 \quad (\alpha = 0, 1, \cdots m-1)$$

setzte und aus dem letzten Gl.-Systeme die Potenzen $1, z, z^2, \cdots z^{m-1}$ eliminierte[83]). *Jacobi* hat diese Methode durchgearbeitet[84]) und zuerst das Verschwinden der Determinante $S = |d_{\mu\nu}|$ als die Bedingung eines gm. T. angegeben[85]). *Rosenhain*[86]) erweitert die Methode auf den Fall $m > n$; *Cayley*[87]) kommt durch die Betrachtung der Koeff. von $\zeta^{m-1}, \zeta^{m-2}, \cdots 1$ in

$$[f(z)g(\zeta) - f(\zeta)g(z)] : (z - \zeta)$$

zu denselben $\psi_\alpha f - \varphi_\alpha g$ wie *Bézout*.

Die Elemente der Determinante $S = |d_{\mu\nu}|$ sind noch F. der Koeff. *O. Hesse*[88]) hat zuerst die Bedingung in die Form einer verschwindenden Det. gebracht, deren Elemente die Koeff. selbst sind. Die einfachste Herleitung dieses Resultates wurde von *Sylvester*[89]) mittels seiner „dialytischen" Methode geliefert: Multipliziert man $f = 0$ und $g = 0$ mit $1, z, z^2, \cdots z^{n-1}$ bezw. $1, z, z^2, \cdots z^{m-1}$, so entstehen $(n + m)$ lineare Gl. mit den $(n + m - 1)$ Unbekannten $z, z^2, \cdots z^{m+n-1}$; ihre Elimination aus diesen Gl. ergiebt die Determinante

$$T = \begin{vmatrix} a_\varkappa & a_{\varkappa+1} & \cdots & a_{\varkappa+m+n-1} \\ b_\lambda & b_{\lambda+1} & \cdots & b_{\lambda+m+n-1} \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix} \varkappa = 0, -1, \cdots, -n+1 \\ \lambda = 0, -1, \cdots, -m+1 \end{pmatrix}$$

(alle $a_\varkappa$, b_λ, deren Indices negativ oder grösser als m bez. n werden, sind 0). Es lässt sich zeigen, dass $T = 0$ auch hinreichende Bedingung für einen gm. T. ist. *Hesse* hat[90]) die Übereinstimmung von

81) Introd. in Anal. Inf. 2; § 474 ff. — Berlin Hist. 1764, p. 96.

82) *Bézout*, l. c. Anm. 80.

83) *Euler* benutzt zu seiner Reduktion nur die Gl. mit $\alpha = 0$ und $\alpha = m - 1$ (sogen.: „Zweite *Euler*'sche Methode"); diese findet sich übrigens bereits in der Arithm. univers. von *Newton* dargelegt.

84) J. f. Math. 15 (1836), p. 101 = Werke 3, p. 295.

85) Von *Sylvester*, Phil. Trans. 143 (1853), p. 407 als *Bézoutiante* bezeichnet.

86) J. f. Math. 28 (1844), p. 268.

87) J. f. Math. 53 (1857), p. 366 = Pap. 4, p. 38; dazu Zeichenerläuterungen v. *Borchardt* ib. p. 367. Vgl. auch *Borchardt*, J. f. Math. 57 (1860), p. 111, 183 = Werke p. 391.

88) J. f. Math. 27 (1844), p. 1 = Werke, p. 83.

89) Phil. Mag. 1840, Nr. 101; wesentlich nur eine andere Darstellung der Methode von *F. J. Richelot*, J. f. Math. 21 (1840), p. 226 und *Hesse*, l. c. Anm. 88.

90) Kritische Zeitschr. f. Math. (1858), p. 483 = Werke, p. 475; auf andere Weise *Borchardt*, J. f. Math. 57 (1860), p. 183 = Werke, p. 145.

$R(f, g)$ und T direkt nachgewiesen; ferner *Baltzer*[91]) die Gleichung $S = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} T$ (bei $m = n$).

W. Stahl liefert für $n = m$ eine Determinante, welche nur von der Ordnung $(m-1)$ ist[92]).

Die erste *Euler*'sche Darstellung benutzt die Werte α und β, für welche die F. f bez. g verschwinden; *G. Rosenhain* löst das allgemeinere Problem, die Resultante aus den Werten $f(\gamma_1), \dots f(\gamma_{m+n})$; $g(\gamma_1), \dots g(\gamma_{m+n})$ darzustellen, welche beide F. für willkürliche Argumente $\gamma_1, \dots \gamma_{m+n}$ annehmen[93]). Mit Hülfe seines Resultats kann man die *Cauchy*-sche Interpolationsformel herleiten. Diese „interpolatorische" Darstellung wurde von *Borchardt* folgendermassen modifiziert[94]): bei *Rosenhain* sind die Werte $f(\gamma_1), \dots f(\gamma_{m+n})$ und ebenso $g(\gamma_1), \dots g(\gamma_{m+n})$ nicht von einander unabhängig (vgl. Nr. 2); *Borchardt* nimmt bei $m = n$ die von einander unabhängigen Werte von f und g für willkürliche $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_{n+1}$ und bestimmt daraus die R.

Hervorzuheben ist hier noch eine Arbeit von *P. Gordan* (Math. Ann. 7 [1874], p. 433), in der eine Determinantenformel von *A. Brill* (Math. Ann. 4 [1871], p. 530) zur Aufstellung von Relationen zwischen Wurzel-Potenz-Determinanten und Koeffizienten einer Gleichung benutzt wird; diese liefern dann nicht nur die R. in ihrer Determinantenform, sondern auch eine Erweiterung derselben, bei welcher eine Determinante aus den Koeffizienten dreier Gleichungen gebildet wird, deren Verschwinden gleichfalls von der Existenz gemeinsamer Wurzeln abhängt. In derselben Abhandlung wird eine explicite Darstellung für den gr. gm. T. zweier F. geliefert.

17. Bedingungen für gemeinsame Teiler. Weiter noch trägt die Frage nach den Bedingungen dafür, dass f und g einen Faktor von vorgeschriebenem Grade k gemeinsam haben. Sie lässt sich nach der zweiten *Euler*'schen Methode behandeln und führt dabei auf die Bedingungen, dass ausser R auch $(k-1)$ einfach gebildete Subdeterminanten von R verschwinden müssen. Sehr übersichtlich sind diese Ergebnisse von *W. Scheibner*[95]) hergeleitet.

---

91) Determinanten § 11. Conziser dargestellt von *Gordan-Kerschensteiner* 1, p. 153. Ein anderer Beweis von *Netto* (Algebra 1, § 144) erstreckt sich auch auf die Umformung entsprechender Subdeterminanten der Res.

92) Math. Ann. 35 (1890), p. 395.

93) J. f. Math. 30 (1846), p. 157.

94) J. f. Math. 57 (1860), p. 111 = Berl. Ber. 1859, p. 376 = Werke p. 131. Erweitert wurden diese Formeln durch *Kronecker*, Berl. Ber. 1865 Dez., p. 686.

95) Leipz. Ber. 40 (1888), p. 1. Vgl. auch *Faà di Bruno* l. c. § 5 ff., besonders § 11. — *Gordan-Kerschensteiner*, l. c. Nr. 129 ff. Weitere Untersuchungen

Nach derselben Richtung gehen die in Nr. 12 erwähnten *Kronecker*schen Untersuchungen, welche an die Entwickelung von $f:g$ nach fallenden Potenzen von z anknüpfen[96]). Setzt man, wie dort, $|c_{p+q}| = C_\varrho$ $(p, q = 0, 1, \ldots \varrho - 1)$, dann folgen für $n = m - 1$ als charakteristische Bedingungen für die Existenz eines gr. gm. T. k^{ten} Grades von f und g und keines höheren Grades:

$$C_n = 0, \quad C_{n-1} = 0, \ldots \quad C_{n-k+1} = 0, \quad C_{n-k} \neq 0.$$

Netto hat die direkte Umwandlung dieser Determinanten in S und in die entsprechenden Subdeterminanten gegeben[97]).

18. Eigenschaften der Resultanten. Aus den Darstellungen der R. lässt sich eine Reihe von Eigenschaften ablesen (I B 2): die R. ist homogen in den a vom n^{ten} und in den b vom m^{ten} Grade; sie ist *isobarisch* in den a und b vom Gewichte $m \cdot n$. Es ist $R(f, g_1 g_2) = R(f, g_1) \cdot R(f, g_2)$; und $R(f, g + \varkappa f) = R(f, g)$, wenn $\varkappa$ eine Konstante bedeutet; ferner ist für $m = n$, wenn $\varkappa, \lambda, \varkappa', \lambda'$ Konstanten bedeuten, $R(\varkappa f + \lambda g, \varkappa' f + \lambda' g) = (\varkappa\lambda' - \varkappa'\lambda)^m \cdot R(f, g)$, (Invariantencharakter).[98]) Für die Resultanten bestehen Differentialgleichungen[99]), z. B. die beiden folgenden:

$$m a_0 \frac{\partial R}{\partial a_1} + (m-1) a_1 \frac{\partial R}{\partial a_2} + \cdots + n b_0 \frac{\partial R}{\partial b_1} + (n-1) b_1 \frac{\partial R}{\partial b_2} + \cdots = 0,$$

$$b_0 \frac{\partial R}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial R}{\partial a_1} + \cdots + b_m \frac{\partial R}{\partial a_m} = 0,$$

die zur numerischen Berechnung der in R eintretenden Konstanten benutzt werden können. *M. Nöther* hat bewiesen (*Faà di Bruno-Walter*, l. c. p. 281), dass alle hier möglichen Differentialgleichungen Folgen der einen charakteristischen sind:

$$\sum (a_{\varkappa+1} b_0 - a_0 b_{\varkappa+1}) \frac{\partial R}{\partial a_\varkappa} + b_1 R = 0.$$

Sind die a, b allgemeine Grössen, dann ist R. irreduktibel[100]); sind dieselben aber Funktionen anderer Variablen $u, v, \ldots$, so kann R in Faktoren zerfallen, deren einige von $u, v, \ldots$ frei sind; *Sylvester*

---

sind von *V. Hioux*, Ann. Éc. Norm. (2) 10 (1881), p. 389; von *B. Igel*, Wien. Ber. 75 (1877), p. 145; *G. Darboux*, Bull. scienc. math. 10 (1876), p. 56 u. (2) 1 (1877), p. 54, ohne wesentlich Neues zu fördern, angestellt worden.

96) Berl. Ber. 1881, p. 535. *N. v. Szütz*, Monatsh. Math. Phys. 9 (1898), p. 34.

97) J. f. Math. 116 (1896), p. 33.

98) *Jacobi*, J. f. Math. 15 (1836), p. 101 = Werke 3, p. 295.

99) Von *F. Brioschi* aufgestellt J. f. Math. 53 (1857), p. 372; Ann. di mat. 2 (1859). Weiter behandelt von *Faà di Bruno*, J. f. Math. 54 (1857), p. 283; später von *Noether* genauer untersucht in der Übersetzung von *Faà di Bruno*.

100) *Netto*, Algebra 1, § 153.

nennt sie (Anm. 85) „spezielle Faktoren" und den zurückbleibenden Teil, welcher ihm aus geometrischen Gründen wichtig ist, die *reduzierte* R.[101]). — Haben $f = 0$, $g = 0$ nur eine W. ζ gemeinsam, dann ist für beliebige λ, μ, $\varkappa$ und σ[102])

$$\zeta^\lambda : \zeta^\mu = \frac{\partial R}{\partial a_{m-\lambda-\varkappa}} : \frac{\partial R}{\partial a_{m-\mu-\varkappa}} = \frac{\partial R}{\partial b_{n-\lambda-\sigma}} : \frac{\partial R}{\partial b_{n-\mu-\sigma}}.$$

Dieser Satz lässt sich auf mehrere gemeinsame Wurzeln ausdehnen.

Setzt man mit einem Parameter ϱ

$$f = a_0\varrho^k + a_1\varrho^{k-1}z + \cdots + a_{k-1}\varrho z^{k-1} + a_k z^k + a_{k+1}z^{k+1} + \cdots + a_m z^m,$$
$$g = b_0\varrho^l + b_1\varrho^{l-1}z + \cdots + b_{l-1}\varrho z^{l-1} + b_l z^l + b_{l+1}z^{l+1} + \cdots + b_n z^n$$
$$\varphi = a_0 + a_1 z + \cdots + a_k z^k; \qquad \varphi' = b_0 + b_1 z + \cdots + b_l z^l,$$
$$\psi = a_k + a_{k+1}z + \cdots + a_m z^{m-k}; \quad \psi' = b_l + b_{l+1}z + \cdots + b_n z^{n-l},$$

so wird $R(f, g)$, nach steigenden Potenzen von ϱ entwickelt, mit dem Gliede $R(\varphi, \varphi') \cdot R(\psi, \psi') \cdot \varrho^{kl}$ beginnen[103]). —

Mit Hülfe der *Kronecker*'schen Entwickelungen von $f : g$ (Nr. **12**) kann die Theorie der R. ohne Voraussetzung des Fundamentaltheorems durchgeführt, und dann darauf der Beweis dieses Theorems gestützt werden. Das ist der *Gordan*'sche Gang (vgl. Nr. **5**) des W.-Existenzbeweises. — *Gordan* fasst[104]) die R. auch als bilineare Form $\sum \pm A_\varkappa B_\varkappa$ auf, wobei nach dem *Laplace*'schen Zerlegungssatze die $A_\varkappa$ Determinanten der a, und die $B_\varkappa$ Determinanten der b bedeuten. Die Determinante dieser bilinearen Form hat dann den Wert ± 1.

J. Lüroth[105]) leitet die Hauptsätze über R. mittels des Begriffes des kleinsten gemeinsamen Vielfachen, statt, wie es gewöhnlich geschieht, des grössten gemeinsamen Teilers her.

19. Berechnung der Resultanten. Die Berechnung der Resultanten ist umständlich. *Cayley*[106]) bedient sich einer Art geometrischer Darstellung der R., um ihre Koeff. übersichtlich anzuordnen. Die erste von ihm benutzte Berechnungsmethode hatte schon *Cramer* (Anm. 79) angewendet; sie stützt sich auf die *Cramer-Poisson*'sche Produkt-

101) *Cayley,* J. f. Math. 34 (1847), p. 30 = Coll. Pap. 1, p. 143. Über eine andere Bedeutung dieses Ausdrucks siehe I B 1 b Nr. **15**.

102) *Richelot,* J. f. Math. 21 (1840), p. 226.

103) *W. Fr. Meyer,* Gött. Nachr. 1895, p. 119 u. 135; Acta math. 19 (1895), p. 385. (Analog für $D(f)$, vgl. Nr. **20** u. f.) *Netto,* Gött. Nachr. 1895, p. 209. Andere Bemerkungen über die Struktur der R. liefert *A. Brill,* Math. Ann. 16 (1880), p. 348.

104) Math. Ann. 45 (1894), p. 405. Die Bedeutung des Satzes erhellt erst aus einer Arbeit von *A. Hurwitz,* ibid. 45 (1894), p. 401.

105) Zeitschr. Math. Phys. 40 (1895), p. 247.

106) Lond. Trans. 147 (1857), p. 703 = Coll. Pap. 2, p. 440.

darstellung und auf die Benutzung symmetrischer F.; *Cayley*'s zweite Methode knüpft an die Determinanten-Form an und benutzt die Nr. **18** gegen Ende erwähnte Darstellung $\sum \pm A_\varkappa B_\varkappa$. Dieselbe Form wertet *E. Dr. Roe* jr.[107]) aus, indem er die R. als vierfache Summe darstellt; die Glieder der R. zerfallen in „Normalformen“ und in „reducible Formen“. — Schon *Newton* giebt in der „Arithmetica universalis“ die einfachsten Resultate an. In *Salmon*'s „Higher algebra“ finden sich die R. für $(m, n) = (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2); (3, 3), (4, 3); (4, 4)$. Bei (4, 4) giebt es bereits 217 Terme. Eine ähnliche Tabelle giebt *Faà di Bruno* in seinen „Binären Formen“. *Gordan*[108]) liefert die Untersuchungen zur allgemeinen invariantentheoretischen Berechnung, sowie die fertigen Formeln für $(m, n) = (6, 2); (5, 3); (5, 4)$; *Clebsch*[109]) für $(m, 2)$ mittels symbolischer Produkte; *Roe* (l. c.) wieder für $(m, 2)$ und (5, 4); *E. Pascal*[110]) für $(m, 3)$.

Bei manchen geometrischen Untersuchungen handelt es sich lediglich darum, den Grad einer Resultante oder Diskriminante (siehe folgende Nummer) abzuzählen. Solche Bestimmungen finden sich bei *W. Fr. Meyer*[111]), wo die Grade bei einer Anzahl von speziellen, geometrisch wichtigen Gleichungen angegeben werden.

Ebenda wird auf *Reduktibilitätsfragen* bei R. und Diskriminanten (Nr. **20**) eingegangen; aus der Natur der Singularitäten von ebenen wie räumlichen Kurven schliesst man, dass das Zusammenrücken zweier singulärer Elemente meistens noch dasjenige eines weiteren singulären Elementes zur Folge hat. Daher haben die Diskriminanten und R. der Gl., von denen die einfachsten Singularitäten abhängen, Faktoren miteinander gemeinsam. Die Zerlegung solcher R. und Diskriminanten wird in den beiden Arbeiten geliefert. (Vgl. noch *Brill*, Math. Ann. 16, 1880, p. 348.)

Die R. gewisser, aus einer Stammform abgeleiteter Formen sind durch die Diskriminante der Form (Nr. **20**) teilbar[112]). Ebenso werden in einer ausgedehnten Reihe von Fällen die Invarianten und Kovarianten binärer Formen durch gewisse Potenzen der R. oder der Diskriminante der Stammform teilbar[113]).

107) „Die Entwickelung der Sylvester'schen Determinante nach Normalformen“. Leipz., Teubner (1898).

108) Math. Ann. 3 (1871), p. 389.

109) J. f. Math. 58 (1861), p. 273.

110) Gi. di mat. 25 (1887), p. 257; Nap. Rend. (2) 2 (1888), p. 67.

111) Math. Ann. 38 (1891), p. 369 und ibid. 43 (1893), p. 286.

112) *P. Gordan,* Math. Ann. 4 (1871), p. 169.

113) *G. Kohn,* Wien. Ber. 100 (1891), p. 865 u. 1013; ib. 102 (1893), p. 801. — *E. Waelsch,* ibid. 100 (1891), p. 574.

20. Diskriminante. Nimmt man $g(z) = f'(z)$ und setzt $R(f, f') = a_0 D(f)$, so heisst D die *Diskriminante* (D.) von f.[114]) Es wird

$$D = a_0^{m-2} f'(\alpha_1) \cdots f'(\alpha_m) = (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} a_0^{2m-2} \Pi(\alpha_\lambda - \alpha_\mu)^2 .$$

$D = 0$ ist charakteristisch dafür, dass f und f' einen gm. T. haben, dass also $f = 0$ mehrfache Wurzeln besitzt (Nr. **14**). Aus der Determinantenform von R folgt hier

$$D = \frac{1}{a_0} \begin{vmatrix} a_\varkappa & a_{\varkappa+1} & \cdots a_{2m-2+\varkappa} \\ (m-\lambda) a_\lambda & (m-\lambda-1) a_{\lambda+1} & \cdots (-m+2-\lambda) a_{2m-2+\lambda} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varkappa = 0, -1, \cdots -m+1 \\ \lambda = 0, -1, \cdots -m \end{pmatrix}$$

($a_\varkappa$ ist 0, wenn $\varkappa$ negativ oder grösser als n genommen wird).

Man kann die D. in Gestalt einer Determinante $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung darstellen. Macht man bei $z = \frac{x}{y}$ durch Multiplikation mit y^m die F. $f\left(\frac{x}{y}\right)$ ganz und homogen, so ist

$$D = \frac{1}{m^{m-2}} R\left(\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Führt man die Koeffizienten der Entwickelung von $f'(z) : f(z)$ ein (vgl. die C_ϱ in Nr. **17**), welche hier (vgl. die erste Formel in Nr. **14**) Summen der Wurzelpotenzen werden $c_0 = s_0, c_1 = s_1, \ldots,$ so folgt die *Cayley*'sche Darstellungsform, J. de Math. 11 (1846), p. 298 = Coll. Pap. 1, p. 306

$$D = (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} a_0^{2m-2} \cdot | s_{\varkappa+\lambda} | \quad (\varkappa, \lambda = 0, 1, \cdots m-1).$$

21. Eigenschaften der Diskriminante. Die D. ist in den Koeff. von $f(z)$ homogen vom Grade $(2m-2)$ und isobarisch vom Grade $m(m-1)$. — Ist ζ eine Doppelw. von $f = 0$, so gilt die Gl.

$$1 : \zeta : \zeta^2 : \cdots = \frac{\partial D}{\partial a_m} : \frac{\partial D}{\partial a_{m-1}} : \frac{\partial D}{\partial a_{m-2}} : \cdots;$$

dieser Satz lässt sich auf Wurzeln von höherer Multiplizität, entsprechend modifiziert, ausdehnen[115]). — Es ist ferner

$$D(f_1 f_2) = (-1)^{m_1 m_2} D(f_1) \cdot D(f_2) \cdot R^2(f_1, f_2),$$

wenn m_1, m_2 die Ordnungen von f_1 und von f_2 bedeuten. — Für die D. gelten partielle Differentialgl., wie z. B.

---

114) *Sylvester*, Phil. Mag. (4) 2 (1851) II, p. 406; Cambr. a. Dubl. M. J. 6 (1847), p. 52. — *Gauss* gebraucht dafür die Bezeichnung: „Determinante", Disq. arithm. Sect. V, § 154 = Werke 1, p. 122.

115) Vgl. *Jacobi*, J. f. Math. 15 (1836), p. 106; *Richelot*, J. f. Math. 21 (1840), p. 228. — *C. Brioschi*, Teor. dei Determinanti, Pavia 1854.

$$m a_0 \frac{\partial D}{\partial a_1} + (m-1) a_1 \frac{\partial D}{\partial a_2} + \cdots + a_{m-1} \frac{\partial D}{\partial a_m} = 0;$$

auch hier hat *Noether* (l. c. Nr. **18**) nachgewiesen, dass alle möglichen Differentialgl. aus einer einzigen abgeleitet werden können. — *Serret*[116]) benutzt solche Differentialgl. zur Berechnung der Zahlenfaktoren der D.

Hilbert[117]) löst die Aufgabe, zwei binäre Formen f_1, f_2 des Grades n so zu bestimmen, dass $D(\varkappa f_1 + \lambda f_2)$ eine gegebene Form des Grades $(2n-2)$ von $\varkappa$ und λ wird.

Für die Gleichungen niederer Grade ist es gelungen, D durch „fundamentale" Invarianten (niedrigeren Grades) auszudrücken (I B 2). *G. Boole*[118]) hat D von $az^4 + 4bz^3 + 6cz^2 + 4dz + e = 0$ auf die Form $D = 16(I^3 - 27J^2)$ gebracht, wobei für I und J die Invarianten

$$I = ae - 4bd + 3c^2, \quad J = ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3$$

zu setzen sind. Für Gl. 5ten, 6ten, 7ten Grades ist ähnliches durch *G. Salmon*[119]), *F. Brioschi*[120]), *G. Maisano*[121]), *Gordan*[122]) geleistet. Ein systematisches Verfahren hierfür hat *Gordan* angegeben[123]).

G. Bauer knüpft im Anschluss an *A. Cayley* die Berechnung der D. binärer Formen an die Gestalt $D = a_1{}^2 V + a_0 U$ an[124]).

22. Diskriminantenfläche. Deutet man bei $a_0 = 1$ die unbestimmt gedachten Koeff. $a_1, a_2, \ldots a_n$ von $f(z)$ als Koordinaten eines Punktes P im Raume von n Dimensionen, dann liefert $D(a_1, \ldots a_n) = 0$ die *Diskriminantenfläche.* Ändern sich bei der Bewegung des Punktes P die Realitätsverhältnisse der Gl.-W., so ist dies nur möglich, wenn P, auch den Multiplizitäts-Charakter ändernd (Nr. **14**), $D = 0$ passiert[125]). $D = 0$ teilt den Raum in Gebiete von invariantem Realitäts-Charakter. Hierauf hat *Kronecker* im Anschluss an seine Charakteristikentheorie aufmerksam gemacht (vgl. I B 1 b, Nr. **25**). Er untersucht

116) *Serret,* Alg. supér. 1, Nr. 202.

117) Math. Ann. 31 (1887), p. 482.

118) Cambr. M. J. 2 (1841), p. 70. Siehe ferner *Cayley,* Cambr. M. J. 4 (1845), p. 193 = Coll. Pap. 1, p. 94: weiter Lond. Trans. 148 (1858), p. 429, § 129 = Coll. Pap. 2, p. 527; vgl. auch *Clebsch,* J. f. Math. 64 (1865), p. 95.

119) Cambr. a. Dubl. M. J. 9 (1854), p. 32.

120) Ann. di Mat. (2) 1 (1867), p. 159.

121) Math. Ann. 30 (1885), p. 442.

122) Math. Ann. 31 (1888), p. 566.

123) *Gordan-Kerschensteiner,* Vorlesungen 2, p. 108.

124) *G. Bauer*, Münch. Ber. (1886), p. 189; *Cayley,* J. f. Math. 47 (1854), p. 109 = Coll. Pap. 2, p. 164. Vgl. noch Anm. 103.

125) *Brill,* Math. Ann. 12 (1877), p. 87; *Kerschensteiner,* Diss. Erl. 1888.

nach dieser Methode die Gl. vierten Grades[126]). *Hilbert* zeigt, dass die Bestimmung der mannigfaltigen Ausartungen einer f durch die D. und ihre Polaren allein schon möglich sei[127]). Seine Arbeit steht mit früheren von *Cayley*[128]) und *Sylvester*[129]) im Zusammenhange, wo „Evektanten" (vgl. Nr. **14** Schluss) und deren Struktur zu gleichem Zwecke verwendet werden.

23. Funktionen mit reellen Nullstellen. Realitätsverhältnisse. Die Frage nach den Gebieten, in welche die $D(a_1, \ldots) = 0$ den Raum teilt, führt zu der Frage nach dem Gebiete, welches die Funktionen mit nur reellen Nullstellen bestimmt. Von den hierüber bekannten Theoremen führen wir an: Das *Legendre*'sche Polynom, d. h. die n^{te} Ableitung von $(z(z-1))^n$ hat lauter getrennte, reelle, zwischen 0 und 1 liegende Nullstellen; die „Säkulargleichung" (vgl. I A 2, Nr. 26, Anm. 100) hat reelle Wurzeln; das Gleiche gilt für die *Biehler*'schen Gleichungen $U = 0$, $V = 0$, wobei $U + iV = \prod (z - a_\lambda - i b_\lambda^2)$ ist. Es giebt nach dieser Richtung hin eine Fülle von Spezialuntersuchungen[130]), auf die wir nur hindeuten können.

Die Theorien über die Realitätsverhältnisse der W. einer Gl. fallen in die Behandlung der Gl. (vgl. I B 3a). — Hier seien noch die Arbeiten von *Fr. Meyer* erwähnt[131]), welche folgendes Problem erledigen: Welchen Änderungen sind die Anzahlen der reellen Singularitäten von Kurven unterworfen, wenn bei Variation der Kurven ein Zusammenfallen zweier Singularitäten durch das Verschwinden gewisser Faktoren der D. oder der R. stattfindet, welche den Singularitätsgleichungen angehören. Wenn man ferner jedesmal noch die D. der quadratischen Gl., deren W. näherungsweise die beiden koincidierenden W. sind, auf ihr Vorzeichen untersucht, kann man daraus wesentliche Schlüsse auf gewisse bei jener Variation invariante Zahlen ziehen. Die Methode geht offenbar über die besprochene Aufgabe hinaus.

24. Hinweise auf angrenzende Gebiete. Die Theorie der binären Formen ist lediglich wegen der Verschiedenheit der verwendeten Hülfs-

---

126) Berl. Ber. 1878, Febr. p. 119; siehe auch *C. Faerber,* Dissert. Berl. 1889; *R. E. Hoppe,* Arch. f. Math. u. Phys. 14 (1896), p. 398; *Brill,* Math. Ann. 20 (1882), p. 330.

127) Math. Ann. 30 (1887), p. 437.

128) Lond. Trans. 147 (1857), p. 727 = Coll. Pap. 2, p. 465.

129) Phil. Mag. (4) 3 (1852), p. 375 u. 460.

130) Ausführliche Angaben finden sich in *Netto,* Algebra I, Abschnitt 2.

131) *A. Brill*, Math. Ann. 16 (1880), p. 345 u. 348; *W. Fr. Meyer*, ibid. 38 (1891), p. 369; 43 (1893), p. 286; Gött. Nachr. 1888, p. 74; 1890, p. 366 u. 493; 1891, p. 14 u. 88; Monatsh. f. Math. Phys. 4 (1893), p. 229 u. 331.

mittel der Forschung an anderer Stelle untergebracht (I B 2). — Die Fragen nach der Umwandlung rationaler F. durch lineare Substitutionen gehören gleichfalls zum Gebiete der Invariantentheorie I B 2. — Die Ketten von F., welche in Nr. **12** als $f, f_1, f_2, \ldots f_r$ aufgeführt sind, werden als *Sturm*'sche Reihen in I B 3 a besprochen werden. — Erwähnt seien die Untersuchungen von *P. L. Tschebyscheff* über gz. rat. F., die sich innerhalb eines bestimmten Intervalles gegebenen F. möglichst genau anschmiegen, also z. B. die gz. F., welche dem Wert des Bruches $\frac{1}{a-z}$ in einem Intervalle möglichst nahe bleibt; diese Aufgabe ist für die Integration gewisser F. von Wichtigkeit [II A 2]. Damit im Zusammenhange stehen seine Arbeiten über gz. F. $g(z)$, deren grösste absolute Werte in gegebenen Intervallen möglichst klein werden[132]) [I D 2, 3; I E]; wenn nämlich $\varphi(z)$ die gegebene F. und $F(z)$ das annähernde Polynom ist, dann wird dieses durch die Bedingung bestimmt, dass $\varphi(z) - F(z)$ für alle Wurzeln von $g(z)$ verschwindet.

132) St. Petersb. Denkschr. 61 (1889); 64 (1891), p. 1; St. Petersb. Abh. 72 (1893), p. 1; St. Pétersb. Mém. 22 (1873); Moscou Soc. Philom. 4 (1870). Acta math. 18 (1894), p. 113; *E. Vallier* C. R. 116 (1893). p. 712.

Verzeichnis der Abkürzungen.

D = Diskriminante
F = Funktion
gbr = gebrochen
Gl = Gleichung
gm = gemeinsam
gr = grösster
gz = ganz
irred = irreduktibel
Koeff = Koeffizient
R = Resultante
rat = rational
Rat.-Br = Rationalitäts-Bereich
red = reduktibel
T = Teiler
W = Wurzel

IB1b. RATIONALE FUNKTIONEN MEHRERER VERÄNDERLICHEN

VON

E. NETTO

IN GIESSEN.

Inhaltsübersicht.

Hinsichtlich der Litteratur muss auf die beim vorigen Abschnitte aufgeführten Werke verwiesen werden; speziell für rationale Funktionen mehrerer Variablen giebt es keine Monographien.

1. Definitionen. Ein Ausdruck

$$(1)\qquad f(z_1, z_2, z_3, \ldots z_m) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma\ldots} c_{\alpha\beta\gamma\ldots} z_1^\alpha z_2^\beta z_3^\gamma \ldots z_m^\delta,$$

in welchen die m *Veränderlichen, Variablen* $z_1, z_2, \ldots z_m$ und die Konstanten $c_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ eintreten, und in dem die Summe $(\alpha + \beta + \cdots + \delta)$ alle Werte $0, 1, 2, \ldots n$ durchläuft, während die $\alpha, \beta, \ldots$ ganze nicht negative Zahlen sind, heisst eine *ganze Funktion* n^{ter} *Dimension* (gz. F.) der m Variablen z_λ. Sie hat[1]) im allgemeinen Falle

$$N(n, m) = \binom{n+m}{m} = N(m, n)$$

Terme (Potenzprodukte). Die Anzahl derjenigen Terme unter ihnen, die durch keins der Monome $z_1^{a_1}, z_2^{a_2}, \ldots z_m^{a_m}$ teilbar sind, beträgt in der Bezeichnung der Differenzenrechnung $\Delta^{(m)}_{a_1,\ldots a_m} N(n, m)$.

Man kann vermittelst der Auflösung linearer Gleichungen für die c durch $N(n, m)$ vorgeschriebene Werte $f^{(\varrho)}$ von (1) für eben so viele Wertsysteme $(z_1, z_2, \ldots z_m) = (\zeta_{1\varrho}, \zeta_{2\varrho}, \ldots \zeta_{m\varrho})$ „im allgemeinen" die F. (1) bestimmen, d. h. dann und nur dann, wenn das System $(\zeta_{1\varrho}, \ldots)$ eine gewisse Determinante nicht zu Null macht[2]). Das naturgemäss hierher gehörige Interpolationsproblem kann erst in Angriff genommen werden, wenn weitere Vorbereitungen erfolgt sind (vgl. Nr. **24**).

Kommen in (1) nur Terme vor, bei denen $(\alpha + \beta + \gamma + \cdots)$ denselben Wert n besitzt, dann heisst f eine *homogene* gz. F. der n^{ten} Dimension (*Euler*, Introductio 1, cap. 5).

2. Wurzeln. Identisches Verschwinden. Einen Wertkomplex $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_m)$, welcher (1) zu Null macht, nennen wir eine *Wurzel* (W.) (Auflösung, solutio) von $f = 0$ oder eine Nullstelle von f; $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_m$ heissen nach gebräuchlicher geometrischer Bezeichnung die *Koordinaten*. Die in Nr. **1** besprochenen Eigenschaften zeigen, dass

1) Derartige Abzählungen zum Zwecke der Elimination hat *É. Bézout* angestellt, Théorie générale des équations, Paris 1779. Weitere Ausführungen stammen von *J.-A. Serret:* Algèbre supérieure 1 (troisième édit. Paris 1866), p. 142 ff. und von *E. Netto*, Algebra 2, 1 (Leipzig 1898).

2) Aus der Nichtberücksichtigung dieses Umstandes folgt das *Euler*'sche Paradoxon. *L. Euler,* Berl. Mém. 1748, p. 219 schliesst z. B., dass durch 9 Punkte einer Ebene *stets eine* und *nur eine* Kurve dritter Ordnung gelegt werden könne; dies stehe dann im Widerspruch zu dem Umstande, dass zwei Kurven dritter Ordnung sich in 9 Punkten schneiden (Nr. **6**). Vgl. auch *G. Cramer,* Analyse etc. § 48, p. 78; *C. G. J. Jacobi,* J. f. Math. 15 (1836), p. 285 = Werke **3**, p. 329. Das Paradoxon löst sich sofort, wenn man das Verschwinden jener Determinante aus Potenzprodukten der Koordinaten beachtet.

zwischen je $N(n, m)$ W. von (1) Relationen bestehen, so dass also (anders als für $m = 1$) die Gesamtheit der W. einer Gl. $f(z_1, z_2, \ldots) = 0$ nicht willkürlich gewählt werden kann (vgl. Nr. **24**).

Ist jedes beliebige Wertsystem $(\zeta_1, \ldots \zeta_m)$ eine W. von (1), dann sind alle c gleich Null, d. h. es ist $f \equiv 0$. — Wenn ein Produkt mehrerer gz. F. für jedes Wertsystem $(\zeta_1, \ldots \zeta_m)$ verschwindet, dann ist mindestens einer der Faktoren identisch gleich Null.

3. Potenzentwickelung gewisser rationaler Funktionen. Über die Entwickelung gewisser rationaler F. mehrerer Var. nach steigenden und fallenden Potenzen derselben stellt *C. G. J. Jacobi*[3]) Untersuchungen an, deren Wesen aus dem folgenden, für zwei Var. gegebenen Resultate klar wird. Der erste (zweite) Bruch des Produktes

$$R(x, y) = \frac{1}{ax + by - t} \cdot \frac{1}{b_1 y + a_1 x - t_1}$$

wird nach fallenden Potenzen von x (von y) entwickelt; dann liefert $R(x, y)$ dreierlei Arten von Gliedern: α) solche, in denen x und y; β) solche, in denen nur x; endlich γ) solche, in denen nur y in negativen Potenzen auftreten. Man kann $R = L_\alpha + L_\beta + L_\gamma$ derart bestimmen, dass die Entwickelung der einzelnen L_α, L_β, L_γ alle und nur die einzelnen Glieder α) bezw. β) und γ) liefert. — Ferner werden Theoreme abgeleitet, wie das folgende: Die Koeffizienten von $x^{-\mu} y^{-\nu}$ und von bezw. $t^m t_1^n$ in

$$\frac{1}{(ax + by)^{m+1}} \cdot \frac{1}{(b_1 y + a_1 x)^{n+1}} \quad \text{und in} \quad \frac{(b_1 t - b t_1)^{\mu - 1} (a t_1 - a_1 t)^{\nu - 1}}{(a b_1 - a_1 b)^{\mu + \nu - 1}}$$

stimmen überein. — Weitergeführt sind diese Untersuchungen nicht.

4. Mehrfache Wurzeln. — Unendlich grosse Wurzeln. Man kann durch eine lineare, umkehrbare Transformation eine gegebene F. f so zubereiten, dass dadurch jede der neuen Var. zu einem Grade aufsteigt, die der Dimension der F. gleich wird. Dadurch werden Besonderheiten der Gl.-Form vermieden, z. B. die, dass Wurzeln von $f = 0$ vorkommen, bei denen nur einzelne Koordinaten unendlich gross werden. Vgl. Nr. **11**.

Ist nämlich, nach fallenden Potenzen von z_1 geordnet,

$$f = \varphi_0(z_2, \ldots z_m) z_1^{\nu} + \varphi_1(z_2, \ldots z_m) z_1^{\nu - 1} + \cdots + \varphi_\nu(z_2, \ldots z_m),$$

und bedeutet $(\zeta_2, \ldots \zeta_m)$ eine W. von $\varphi_0 = 0$, so nennt man auf Grund einer Grenzbetrachtung oder der Einführung von $y_1 = 1 : z_1$ auch $(\infty, \zeta_2, \ldots \zeta_m)$ eine W. von $f = 0$. Durch die erwähnte Substitution kann man es erreichen, dass keine W. existiert, welche gleichzeitig endliche und unendliche Koordinaten hat.

3) J. f. Math. 5 (1830), p. 344 = Werke 3, p. 67.

Ist f homogen, und $(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_m)$ eine W. von $f = 0$, so ist für jedes ϱ auch $(\zeta_1\varrho, \zeta_2\varrho, \dots \zeta_m\varrho)$ eine W. von $f = 0$.

Ist f nicht homogen, und ordnet man es nach homogenen Komplexen von Gliedern fallender Dimensionen:

$$f = g_n(z_1, z_2, \cdots z_m) + g_{n-1}(z_1, z_2, \cdots z_m) + \cdots + g_0,$$

ist ferner $(\zeta_1, \zeta_2, \dots \zeta_m)$ eine W. der homogenen Gl. $g_n = 0$, dann ist für $\varrho = \infty$ auch $(\zeta_1\varrho, \zeta_2\varrho, \dots \zeta_m\varrho)$ eine W. von $f = 0$; oder auch, $\zeta_1 : \zeta_2 : \cdots : \zeta_m$ giebt das Verhältnis der Koordinaten einer unendlich grossen W. von $f = 0$. Ist g_n eine „definite Form", d. h. hat es ausser $(0, 0, \dots)$ keine reellen Nullstellen, dann liegt $f = 0$ ganz im Endlichen.

Der Teilbarkeit von $f(z)$ durch $(z - \zeta)$, wenn ζ eine W. von $f(z) = 0$ ist, stellt sich hier als Analogon zur Seite, dass wenn $(\zeta_1, \dots \zeta_m)$ eine W. von (1) ist, dann Gleichungen der Form

$$f(z_1, \cdots z_m) = (z_1 - \zeta_1)\chi_1 + (z_2 - \zeta_2)\chi_2 + \cdots + (z_m - \zeta_m)\chi_m$$

bestehen[4]). Hat jedes $\chi_1 = 0, \dots \chi_m = 0$ wieder dieselbe W. $(\zeta_1, \dots \zeta_m)$, dann kann ähnlich weiter auf verschiedene Weise

$$f = \sum_{(\alpha, \beta)} (z_\alpha - \zeta_\alpha)(z_\beta - \zeta_\beta)\psi_{\alpha, \beta}$$

gesetzt werden. In diesem Falle heisst $(\zeta_1, \dots \zeta_m)$ eine *Doppelwurzel*. In gleicher Weise kann man Wurzeln *höherer Multiplizitäten* definieren. Für eine ϱ-fache W. verschwinden mit f zugleich alle Ableitungen bis inclusive der $(\varrho - 1)^{\text{ten}}$. Vgl. Nr. **11** und Nr. **17**.

5. Reduktibilität und Irreduktibilität. f heisst *reduktibel* (red.) oder *irreduktibel* (irred.), je nachdem es als ein Produkt ähnlicher Faktoren wie f dargestellt werden kann oder nicht. Anders als bei einer einzigen Var. gilt hier der Satz, dass auch bei beliebig erweitertem Rationalitätsbereiche allgemeine F. nicht in (lineare) Faktoren zerlegbar sind[5]). Ob eine gegebene F. red. ist oder nicht, kann prak-

4) *L. Kronecker*, Berl. Ber. 1865, p. 687 hat diese Form seinen Untersuchungen über Interpolation zu Grunde gelegt.

5) Über die Zerlegbarkeit bei $m = 2$ vgl. *S. H. Aronhold*, J. f. Math. 55 (1858), p. 97; *F. Brioschi*, Ann. di mat. (2) 7 (1875/76), p. 189; *A. Thaer*, Math. Ann. 14 (1879), p. 545. Die Frage nach den Bedingungen des Zerfallens, sowie nach den Faktoren der zerfällbaren Formen wird mit Hülfe der Theorie der symmetrischen Funktionen mehrerer Grössenreihen von *Fr. Junker* behandelt, Math. Ann. 45 (1894), p. 1, der an Untersuchungen von *A. Brill*, Gött. Nachr. Dez. 1893, p. 757 anknüpft. Das gleiche Problem behandelt *P. Gordan*, Math. Ann. 45 (1894), p. 410, unter Verwendung gewisser Differentialprozesse, besonders für ternäre Formen. Vgl. weiter *Brill*, Math. Ann. 50 (1898), p. 157; ferner *J. Hadamard*, Bull. soc. math. 27 (1899), p. 34.

tisch entweder so untersucht werden, dass man substituiert: $z_1 = t$, $z_2 = t^q$, $z_3 = t^{q^2}, \ldots$ und dabei q so hoch nimmt, dass alle Potenzprodukte in f als Potenzen von t verschiedene Exponenten erhalten; dann die neue F. der einen Var. t auf ihre Reduktibilität untersucht, und von den etwa gefundenen Faktoren in t auf solche in den z zurück zu gehen sucht[6]); oder man kann das *Kronecker*'sche Verfahren bei einer Var., welches sich auf die *Lagrange*'sche Interpolationsformel stützt[7]), direkt auf den Fall mehrerer Var. erweitern.

Die Ableitung des grössten gemeinsamen Teilers (gr. gm. T.) ist auch für $m > 1$ mit Hülfe des *Euklid*'schen Algorithmus möglich (vgl. I B 1a Nr. **12**). Bei den hier nötigen Divisionen wird eine der Var. etwa z_1 bevorzugt; dadurch treten gebrochene F. der anderen $z_2, z_3, \ldots$ auf, deren sonst störender Einfluss durch eine vorläufige Transformation (Nr. **4**) beseitigt werden kann (vgl. auch Nr. **10** das *Labatie*'sche Theorem). Über die bei dem Algorithmus der fortgesetzten Division auftretenden Hülfsfunktionen gelten ähnliche Sätze wie bei einer Var. (I B 1a Nr. **12**). Dasselbe gilt für die Darstellung des gr. gm. T. als einer homogenen linearen F. der gegebenen F.

Durch Erweiterung kommt man zu dem Satze, dass wenn T der gr. gm. T. von $f_1, f_2, f_3, \ldots$ ist, dann Polynome $P_1, P_2, \ldots$ gefunden werden können, welche eine Gl.

$$f_1 P_1 + f_2 P_2 + f_3 P_3 + \cdots = T \,.\, \Phi$$

befriedigen, in der Φ *nicht mehr alle* Var. z enthält.

Jetzt ist die Ableitung der Hauptsätze über irred. F. möglich; sie gestaltet sich in diesem Gebiete viel umständlicher als bei einer Var. und sie wird im allgemeinen auf den Schluss von n auf $(n+1)$ aufgebaut[8]).

Es zeigt sich, dass die Zerlegung in irred. Faktoren eindeutig ist. — Eine irred. F. g teilt entweder die beliebige F. f oder ist zu ihr teilerfremd. — Ist $(f_1 \cdot f_2)$ durch eine irred. F. g teilbar, so ist mindestens einer der Faktoren f_1, f_2 durch g teilbar. — Ist f in zwei Faktoren zerlegbar, die in z_1 ganz und in $z_2, z_3, \ldots$ rational aber gebrochen sind, dann giebt es auch eine Zerlegung von f, in welcher beide Faktoren gz. F. aller z sind; *Gauss*'scher Satz (vgl. I B 1a Nr. **13**). — Verschwindet $f(z_1, \ldots)$ für alle W. von $g(z_1, \ldots) = 0$, dann ist f durch jeden einzelnen irred. Faktor von g teilbar[9]), und also

---

6) *L. Kronecker*, Grundlagen einer arithm. Theorie u. s. w. § 4.

7) *Netto*, Algebra 2, 1. Vgl. I B 1a Nr. **3** und Nr. **10**.

8) *J. Molk*, Acta math. 6 (1885), p. 1; *H. Weber*, Algebra 1; *Netto*, Algebra 2, 1.

9) *J. J. Sylvester*'s „logic of characteristics", Cambr. Dubl. Math. J. 6 (1851), p. 186; bewiesen von *O. Hölder*, Böklen math. nat. Mitt. 1 (1884), p. 60; von

wird eine Potenz von f durch g selbst teilbar werden. Dieser Satz hat eine wesentliche Erweiterung durch *D. Hilbert* erfahren[10]); wir heben hier den für geometrische Anwendungen wichtigsten Fall seines allgemeinen Theorems heraus: Wenn f für alle Wertsysteme $z_1, z_2, \ldots z_n$ verschwindet, welche $g_1 = 0, g_2 = 0, \ldots g_m = 0$ machen, dann giebt es einen Exponenten r derart, dass die Potenz f^r linear und homogen durch $g_1, g_2, \ldots g_m$ darstellbar wird.

Ein anderer wichtiger, auf die Irreduktibilität bezüglicher Satz stammt gleichfalls von *Hilbert*[11]): Wenn $f(z_1, z_2, \ldots; p, q, \ldots)$ eine irred. gz. ganzzahlige F. der Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots$ und der Parameter $p, q, \ldots$ bezeichnet, so ist es stets auf unendlich viele Weisen möglich, für die Parameter $p, q, \ldots$ gz. rationale Zahlen einzusetzen, so dass dadurch die Funktion in eine irred. F. der Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots$ übergeht. Dieses Theorem ist z. B. für die *Galois*'sche Theorie der Gleichungen von grundlegender Bedeutung.

Hier muss ferner ein Satz von *E. Bertini*, Lomb. Rend. (2) 15, p. 24 (1882, Jan.) angeführt werden, mit dem sich auch *J. Lüroth*, Math. Ann. 42 (1893), p. 457; 44 (1894), p. 539 beschäftigt: Zerfällt $f(z_1, \ldots; \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots)$ in Bezug auf die z bei unbestimmten Parametern $\varkappa$, so lässt sich von f ein Faktor abspalten, der nur die z enthält, oder f kann mit Hülfe einer Gl., deren Koeffizienten linear in den $\varkappa$ sind, in ein Produkt von gz. F. zerlegt werden, die einem und demselben Büschel angehören.

6. Elimination. Bézout'sche Methode. Sind allgemein m Gl. $f_1 = 0, \ldots f_m = 0$ von den Dimensionen $n_1, n_2, \ldots n_m$ mit m Unbekannten $z_1, \ldots z_m$ vorgelegt, so heisst $(\zeta_1, \ldots \zeta_m)$ eine *Wurzel dieses Gleichungssystems*, wenn die Substitution $(z_1, \ldots z_m) = (\zeta_1, \ldots \zeta_m)$ alle Gl. $f_\lambda = 0$ befriedigt. Es fragt sich, ob jedes System W. besitzt, wie viele, und wie sie bestimmt werden können.

Der *Bézout*'sche Satz besagt, dass im allgemeinen Falle W. existieren, und dass die Zahl dieser W. gleich dem Produkte $(n_1 \cdot n_2 \cdots n_m)$

Weber, Netto. — Über die Reduktibilität vgl. den eingehenden Aufsatz von *W. Fr. Meyer*, Math. Ann. 30 (1887), p. 30, in welchem es sich um die Lösung folgenden Problems handelt: Sind $f_0(\lambda), \ldots f_d(\lambda)$ linear unabhängige, ganze F. von λ, so sollen die Grössen $u_0, \ldots u_d$ als gz. F. von n Variabeln $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ so bestimmt werden, dass $u_0 f_0 + u_1 f_1 + \cdots + u_d f_d$ reduktibel in λ wird. Siehe auch *W. Fr. Meyer,* Münch. Ber. 1885, p. 415.

10) Vgl. *M. Noether,* Math. Ann. 6 (1872), p. 351; *E. Bertini,* ib. 34 (1889), p. 450; *E. Netto,* Acta math. 7 (1885), p. 101; *D. Hilbert,* Math. Ann. 42 (1892), p. 320.

11) J. f. Math. 110 (1892), p. 104. Der Beweis stützt sich auf Reihenentwickelungen der Wurzeln; vgl. Nr. 10.

der Dimensionen $n_1, n_2, \ldots$ der gegebenen Gl. sei. Für den Fall $m = 2$ wurde das Theorem zuerst von *C. Mac Laurin* ausgesprochen[12]); *G. Cramer*[13]) und *Euler*[14]) versuchten, Beweise für diesen Fall zu geben. Der erste, wenigstens seinem Prinzipe nach ausreichende Beweis für den allgemeinen Satz wurde von *Bézout* geliefert[15]); dieser erkannte zuerst und sprach es aus, „dass nicht eine allmälige, sondern nur eine gleichzeitige Elimination von $(m-1)$ der m Variablen zum richtigen Grade der *Endgleichung* oder der *Eliminante* führen könne". Bei allmählicher Elimination treten nämlich stets fremde Lösungen auf[16]). *Bézout* zeigt durch eine Konstantenabzählung (vgl. Nr. **1**) die Möglichkeit, m gz. F. $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$ der Var. so zu bestimmen, dass die Summe

$$f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2 + \cdots + f_m\varphi_m = R(z_1)$$

von $z_2, z_3, \ldots z_m$ frei wird. Die W. von $R(z_1) = 0$ geben dann die z_1-Koordinaten der W. des Gleichungssystems. Die Bestimmung der φ_λ hängt von linearen Gl. ab, deren Anzahl diejenige der Unbekannten übertrifft. Aus einem besonderen, einfachen Falle wird dann die Auflösbarkeit des Systems der linearen Gl. erschlossen[17]). *J. Liouville*[18]) bemerkte zuerst, dass noch zur Vervollständigung der Methode zu beweisen bleibt, dass zu jeder einfachen W. ζ_1 von $R(z_1) = 0$ auch eine einzige W. $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_m)$ des Systems gehöre, und füllte diese Lücke aus. *Bézout* wendete (l. c.) seine Methode gleichfalls auf unvollständige Gl. und auf Gl. von besonderer Form an. Es ist dabei der Satz unerlässlich, dass jede gz. F. der W. so reduziert werden kann, dass ζ_1 höchstens bis zum Grade $(n_1 - 1)$, ferner ζ_2 höchstens bis zum Grade $(n_2 - 1), \ldots$ aufsteigt[19]).

Das obige $R(z_1)$ wird passend als *Eliminante* bezeichnet; natürlich kann sich die Bildung der Eliminante auf jede der Var. beziehen.

---

12) Geometria organica (Lond. 1720), Sect. V. Lemn. 3. Cor. 1.

13) Introduction à l'analyse etc. (Génève 1750.) Append. V.

14) Berl. Hist. 1748, p. 234—248.

15) Cours de math. à l'usage des Gardes du Pavillon, an. 1764/69, p. 209. — Théorie générale des équat. algébr. (Paris 1779.)

16) Vgl. *Netto*, Algebra 2, 1, p. 98.

17) Vgl. *C. Schmidt*, Zeitschr. f. Math. 31 (1886), p. 214, wo nachgewiesen wird, dass dieser Schluss nicht ohne weiteres richtig ist, und wo eine Ergänzung desselben geliefert wird.

18) J. de Math. 6 (1841), p. 359. Auch die *Liouville*'schen Schlüsse bedürfen einer Präzisierung, die *C. Schmidt* ebenfalls (l. c.) giebt.

19) *Serret-Wertheim*, Algebra 1, § 69. Dieses Theorem lässt sich nicht, wie z. B. *H. Laurent* es unternimmt (Traité d'Algèbre, Paris 1894), durch allmälige Elimination erledigen, und tritt in dieser Beziehung dem *Bézout*'schen Satze zur Seite.

7. Poisson'sche Methode. — Eliminante. *S. D. Poisson*[20]) veröffentlichte 1804 eine andere Methode, die er selbst in der Einleitung seiner Abhandlung für eine Erweiterung der von *Cramer* (l. c.) bei $m = 2$ benutzten erklärt. Er stützt sich bei der Durchführung der Elimination auf die Theorie der von *Ch. A. Vandermonde*[21]) untersuchten symmetrischen F. mehrerer Reihen von Grössen (vgl. Nr. **25**) und verwendet gleichzeitig den von *Cramer* (l. c.) eingeführten Begriff des Gewichtes (I B 2) einer F. — *Poisson* denkt sich die $(m-1)$ ersten Gl. $f_\lambda = 0$ nach $z_2, z_3, \ldots z_m$ aufgelöst. Ihre W. $(\zeta_{2\varkappa}, \zeta_{3\varkappa}, \ldots \zeta_{m\varkappa})$ werden sämtlich in f_m eingetragen, und da sie algebraische F. von z_1 sind, so wird das über alle W. erstreckte symmetrische Produkt

$$\Pi f_m(z_1, \zeta_{2\varkappa}, \zeta_{3\varkappa}, \ldots \zeta_{m\varkappa})$$

rational durch die Koeffizienten von $f_1, \ldots f_m$ und durch z_1 darstellbar. Es ist dies die *Eliminante*. Schwierigkeiten treten bei der Ableitung dadurch auf, dass die ganzen symmetrischen F. der $(\zeta_{2\varkappa}, \ldots \zeta_{m\varkappa})$ gebrochene Ausdrücke der Koeffizienten von $f_1, \ldots f_{m-1}$ werden, bei denen Potenzen einer nur von den Konstanten abhängigen gz. F. ϱ_0 in den Nenner treten können.

8. Cayley'sche und Sylvester'sche Methode. *A. Cayley*[22]) hat die zweite *Euler*'sche Methode der Elimination bei einer Gl. einer Var. auf Systeme von Gl. mit mehreren Unbekannten auszudehnen versucht (vgl. I B 1a Nr. **16**). Er multipliziert in Erweiterung jener Methode sämtliche gegebenen F. f_λ der Reihe nach mit allen Potenzprodukten aller Unbekannten von $0^{\text{ter}}, 1^{\text{ter}}, \ldots$ Dimensionen, bis er Gl. in solcher Anzahl erhält, dass sie die Anzahl der Potenzprodukte in denselben übertrifft, was nach den Abzählungen in Nr. **1** stets möglich ist. Betrachtet man die einzelnen Potenzprodukte als unabhängige Var., so entsteht ein System linearer Gleichungen; eliminiert man alle Potenzprodukte aus einer passenden Zahl dieser Gl., dann erhält man ein *Vielfaches der Eliminante*. Es kommt aber darauf an, sie selbst frei von fremden Faktoren darzustellen. Dies wird von *Cayley* auf folgende Frage der Theorie homogener, linearer Gl. hinausgespielt: „Zwischen n Unbekannten bestehen n_1 homogene lineare Gl.; zwischen deren Polynomen bestehen n_2 homogene lineare Relationen; zwischen deren Polynomen wiederum n_3 Relationen u. s. f.

20) J. Éc. Polyt. 4, Cah. 11 (an X), p. 199.

21) Par. Mém. 1772, II prt., p. 516 = Abhandlungen, deutsch von *C. Itzigsohn*, Berl. 1888, p. 85.

22) Cambr. Dubl. Math. J. 2 (1847), p. 52; ibid. 3 (1848), p. 116 = Coll. Pap. 1, p. 259, 370.

bis n_r. Dabei ist $n < n_1$; $n > n_1 - n_2$; $n < n_1 - n_2 + n_3, \cdots$ $n = n_1 - n_2 + n_3 - \cdots \pm n_r$. Es sollen die charakteristischen Bedingungen dafür aufgesucht werden, dass das System durch n von 0 verschiedene Werte der Unbekannten befriedigt werden kann." *G. Salmon* giebt[23]) eine ungenügende Herleitung für das *Cayley*'sche Resultat; dies ist wahrscheinlich richtig, aber noch unbewiesen. Das Kriterium besteht in dem Verschwinden eines Quotienten aus zwei Determinantenprodukten. In dieser Gestalt tritt dann auch die reine Eliminante des Gl.-Systems bei *Cayley* auf.

J. Sylvester[24]) hat in anderer Art, aber gleichfalls nicht bindend, die Eliminations-Aufgabe für $m = 3$; $n_1 = n_2 = n_3$ und $m = 4$; $n_1 = \cdots = n_4 = 2$ gelöst. Er ordnet die Terme in verschiedener Weise an, bildet lineare, homogene Gl. aus ihnen und zieht die Determinanten der Aggregate zu Hülfe. Es fehlt hierbei jedoch der notwendige Nachweis dafür, dass die erhaltenen Relationen von einander unabhängig seien[25]).

9. Kronecker'sche Methode. — Stufenzahl. *Kronecker*[26]) hat das Eliminations-Problem so aufgefasst, dass er über die Zahl der Gl. und die der Unbekannten keine Voraussetzungen macht, sondern die allgemeine Frage formuliert: Welche Einschränkungen üben die vorgelegten Gl. auf die sonst unbeschränkte Mannigfaltigkeit $(z_1, z_2, \ldots z_m)$ aus? Dazu tritt die zweite Frage: Wie viele Gl. sind höchstens notwendig, um jede durch Gl. definierte Mannigfaltigkeit *rein* d. h. ohne fremde Punkte $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_m)$ darzustellen.

Die *Kronecker*'sche Methode geht so vor: Es wird $f_1 = R_1 F_1$, $f_2 = R_1 F_2, \cdots f_m = R_1 F_m$ gesetzt, wobei R_1 der gr. gm. T. der f sein mag; von vielfachen Faktoren soll stets abgesehen werden. Dann liefern die $F = 0$ nebst $R_1 = 0$ das Gleiche wie die $f_\lambda = 0$, abgesehen von der Multiplizität der W. Mit Hülfe unbestimmter Parameter werden die beiden Gl. $u_1 F_1 + u_2 F_2 + \cdots + u_m F_m = 0$ und $v_1 F_1 + v_2 F_2 + \cdots + v_m F_m = 0$ gebildet, und aus beiden wird z. B. z_m eliminiert. Man

23) Lessons introd. to the modern higher Algebra (4. ed.). Dublin 1885, § 93.

24) Cambr. Dublin Math. J. 7 (1852), p. 68.

25) „Über e. Eliminations-Problem nach *Sylvester*'scher Methode behandelt" siehe *Sylvester,* Cambr. Math. J. 2 (1841), p. 232. *Th. Muir,* Edinb. Proc. 20 (1895), p. 300. *Cayley,* ibid. 306 = Pap. 13, p. 545. Es handelt sich dabei um die Elimination aus den Gl. $ay^2 - 2c_1 xy + bx^2 = 0$, $bz^2 - 2a_1 yz + cy^2 = 0$, $cx^2 - 2b_1 zx + az^2 = 0$; und die Eliminante tritt als Diskriminante von $a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2a_1 \eta\zeta + 2b_1 \zeta\xi + 2c_1 \xi\eta = 0$ auf.

26) Grundzüge einer arithm. Theorie u. s. f. J. f. Math. 92 (1882), p. 1. Vgl. auch die ausführlichen Erläuterungen von *J. Molk* (l. c.).

ordnet die Eliminante nach Potenzprodukten der u und v und bezeichnet die dabei auftretenden Koeffizienten mit $g_1, g_2, \ldots$. Dann geben die so erhaltenen Gl. $g_\lambda = 0$ dasselbe wie die Gl. $F_\lambda = 0$. Es wird nun wieder $g_1 = R_2 G_1$, $g_2 = R_2 G_2$, $g_3 = R_2 G_3, \cdots$ gesetzt; auch hier wird von vielfachen Faktoren abgesehen. Dann sind die $f_\lambda = 0$ durch $R_1 \cdot R_2 = 0$ nebst $G_1 = 0$, $G_2 = 0, \cdots$ ersetzt, u. s. f. Hierdurch entsteht schliesslich die *Gesamteliminante* in der Form $R_1 \cdot R_2 \cdots R_m = 0$, wobei $R_\alpha(z_1, \cdots z_{m-\alpha+1}) = 0$ eine Mannigfaltigkeit der α^{ten} Dimension liefert; diese einzelnen R_α sind die *Teileliminanten.* Die Gesamteliminante zerfällt also hierbei nach den Dimensionen aller verschiedenen durch die $f_\lambda = 0$ gleichzeitig dargestellten Gebilde.

So kommt der Begriff der *Stufe des Modulsystems* $f_1, f_2, \ldots f_n$ zu stande[27]). Es heisst ein System $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \ldots$ *von der* m^{ten} *Stufe*, wenn sämtliche Wurzeln feste Koordinaten haben, d. h. eine Mannigfaltigkeit 0^{ter} Dimension bilden. Das System heisst *von der* $(m-1)^{\text{ten}}$ *Stufe*, wenn die Wurzeln eine Mannigfaltigkeit erster Dimension ausmachen; kommen ausser dieser Mannigfaltigkeit, mit ihr verbunden noch einzelne W. mit festen Koordinaten vor, dann heisst das System *gemischt*, andernfalls ist es ein *reines* System. In gleicher Weise kann man weiter gehen. Vgl. Nr. **11**.

Wie schon angedeutet wurde, leidet die *Kronecker*'sche Behandlung an dem Mangel, dass die Multiplizität der Lösungen nicht genügend berücksichtigt wird.

Auf die zweite der oben aufgeworfenen Fragen erhält man die Antwort, dass vermittelst $(m+1)$ Gl. jedes durch eine beliebige Anzahl von Gl. definierte Gebilde von m Var. *rein* dargestellt werden könne; es tritt natürlich $(m+1)$ nur als Maximalzahl auf. Ein Beispiel hierzu giebt für $m=3$ *K. Th. Vahlen*, J. f. Math. 103 (1891), p. 346.

10. Minding'sche Regel. — Labatie's Theorem. Nach diesen allgemeinen Erörterungen über Elimination wollen wir zwei für zwei Gl. $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ mit zwei Var. wichtige Untersuchungen hervorheben. Zunächst gehen wir auf die *Minding*'sche Regel ein[28]). Diese Regel stellt den Grad der Eliminante bei gegebenen Gl. fest; sie stützt sich auf die Entwickelung aller einzelnen W. z_1 einer der Gl. etwa $f_1(z_1, z_2) = 0$, nämlich $\zeta_{11}, \zeta_{12}, \ldots$ *nach fallenden Potenzen von* z_2. Eine solche Entwickelung geschieht am einfachsten nach dem Schema,

---

27) *Kronecker,* Grundzüge § 20 u. § 21; J. f. Math. 99 (1886), p. 336. *J. Molk,* Acta math. 6 (1885), Chap. III.

28) J. f. Math. 22 (1841), p. 178; ibid. 31 (1846), p. 1; *L. J. Magnus,* ibid. 26 (1843), p. 365; *E. F. A. Minding,* ibid. 27 (1844) p. 379.

welches durch das *Newton'sche Polygon* gegeben wird[29]). Meist reicht für den angegebenen Zweck die Kenntnis der Ordnung des Anfangsgliedes jeder Entwickelung aus. Hat man die ersten Glieder der Entwickelungen berechnet, dann liefert nach Substitution derselben in das *Poisson*'sche Produkt $f_2(\zeta_{11}, z_2) f_2(\zeta_{12}, z_2) \ldots$ eine Abzählung den Grad der Eliminante nach z_2. Man kann die Eliminante selbst berechnen, wenn man die Entwickelungen soweit benutzt, als in das Produkt positive Potenzen von z_2 eintreten. Die Bestimmung ist hier bequemer als bei den übrigen Methoden, welche sämtlich kompliziertere Rechnungen erfordern.

Eine andere Regel, welche *Minding* giebt (J. f. Math. 31), zeichnet sich dadurch vor dei ersten aus, dass sie eine Formel liefert, welche die Koeffizienten von f_1 und f_2 symmetrisch enthält.

Das *Labatie*'sche Theorem[30]) ist wichtig für die Elimination, weil es die Methode des gr. gm. T. benutzt, dabei aber die fremden Faktoren, welche bei den fortgesetzten Divisionen auftreten, wieder zu entfernen weiss (vgl. Nr. 5). Es tritt zugleich die Zerlegung der Eliminante in Faktoren ein. Die Methode gilt auch noch, wenn die beiden Gl. vielfache W. besitzen. Sie beruht auf folgendem: Sind $f_0(z_1, z_2)$, $f_1(z_1, z_2)$ die gegebenen F., so führt das Schema des gr. gm. T. nach z_1 auf eine Reihe von Gl. der Form:

$$f_\lambda \psi_\lambda = f_{\lambda+1} q_{\lambda+1} - f_{\lambda+2} \varphi_{\lambda+2} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots),$$

in denen die f und die q gz. in z_1, z_2; die φ und die ψ gz. in z_2 und gebrochen in z_1 sind. Bezeichnet man den gr. gm. T. von

$$\psi_1, \varphi_3 \text{ mit } d_1; \text{ von } \frac{\psi_1 \psi_2}{d_1}, \varphi_4 \text{ mit } d_2; \text{ von } \frac{\psi_1 \psi_2 \psi_3}{d_1 d_2}, \varphi_5 \text{ mit } d_3; \ldots$$

dann gilt der Satz, dass jede W. von $f_0 = 0$, $f_1 = 0$ auch eines der Systeme $f_\lambda = 0$, $\dfrac{\varphi_{\lambda+1}}{d_{\lambda+1}} = 0$ befriedigt, und dass umgekehrt die W. aller dieser Systeme auch sämtliche W. von $f_0 = 0$, $f_1 = 0$ geben.

---

29) Opuscula ed. Castillon 1, p. 12 u. 39; Method of fluxions, ed. *J. Colson,* London 1736, § 29. Vgl. *Br. Taylor,* Method. incrementorum, Lond. 1715. — *J. P. de Gua* ersetzte das Parallelogramm durch ein Dreieck „le triangle algébrique", Usage de l'Analyse, Paris 1740, p. 24ff.; *G. Cramer,* Introduct. à l'Analyse, Genève 1750, benutzt dasselbe als „triangle analytique" (Chap. VII) und bezieht sich dabei (§ 92) auf *Newton* und *Stirling,* Lineae 3ⁱ ordinis, Oxon. 1717. — Vgl. die Darstellung von *C. Jordan* in seinem „Cours d'analyse" 1, Paris 1882, p. 89; 2. Aufl. 1893, p. 90; von *R. Baltzer,* „Analyt. Geometrie", Leipzig 1882, § 39, von *F. Lindemann-A. Clebsch,* Geometrie, Leipzig 1876, p. 331 und von *E. Netto,* Algebra 2, § 369.

30) Méthode d'élimination par le plus grand commun diviseur. Paris 1835.

11. Vielfache und unendliche Wurzeln eines Gleichungssystems. In die Behandlung des Eliminations-Problems führte gelegentlich *S. D. Poisson*[31]) und später bei seinen Untersuchungen systematisch *J. Liouville*[32]) eine wesentliche Vereinfachung ein durch die Substitution einer Grösse x vermittelst der Gl.

$$x = \varkappa_1 z_1 + \varkappa_2 z_2 + \cdots + \varkappa_m z_m,$$

in welcher die $\varkappa$ unbestimmte Parameter bedeuten. Substituiert man nämlich x an Stelle einer der Var., z. B. an Stelle von z_1 in die vorgelegten Gl., und eliminiert aus ihnen $z_2, \ldots z_m$, so bleibt eine Eliminante R in x zurück. $R(x) = 0$ hängt in den Koeffizienten von $\varkappa_1, \ldots \varkappa_m$ ab; setzt man $\varkappa_\alpha = 1$ und die übrigen $\varkappa$ gleich Null, so entsteht die Eliminante für z_α. Ist $R(x) = 0$ gelöst, wobei sich zeigt, dass $R(x)$ in lineare Faktoren nach $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_m$ zerfällt, dann liefert dieselbe Substitution aus den W. $x_1, x_2, \ldots$ die W.-Koordinaten der z_α. Die Darstellung der $\zeta_{1\alpha}, \zeta_{2\alpha}, \ldots \zeta_{m\alpha}$ aus x_α ist auch in der Form $\zeta_{\varrho\alpha} = H_\alpha(x_\alpha)$ möglich. Damit ist auch das dritte Problem aus Nr. **6** erledigt.

Die Einführung des x ist ausserdem dadurch von Wichtigkeit, dass $R(x)$ in relativ einfacher Weise die symmetrischen Funktionen der Grössen $\zeta_{1\alpha}, \zeta_{2\alpha}, \ldots \zeta_{m\alpha}$, $(\alpha = 1, 2, \ldots k)$ giebt, sobald man die Koeffizienten von $R(x)$ als Formen der $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_m$ auffasst.

Ferner bietet sich bei der Einführung von $R(x)$ die Definition der Multiplizität einer W. des Systems von selbst dar. Hat $R(x) = 0$ eine q-fache W. $x = \xi$, so ist das zugehörige $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_m)$ *eine q-fache Wurzel der Gl.* $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $\ldots f_m = 0$; vgl. Nr. **17**. — Ist $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_m)$ eine q_1-fache W. von $f_1 = 0$, eine q_2-fache W. von $f_2 = 0$, u. s. f., dann ist es eine mindestens $(q_1 \cdot q_2 \cdots q_m)$-fache W. des gesamten Gl.-Systems[33]). Dieser Satz ist für die Theorie der Schnittpunkte bei geometrischen Gebilden von Wichtigkeit.

Über die verschiedenen Arten der „Multiplizität“ und ihre Unterscheidungen ist auf I B 1a, Nr. **14** zu verweisen; die erwähnten Untersuchungen *J. J. Sylvester*'s[34]) beziehen sich auch auf mehrere Var., zumal die Sätze über Evektanten (*Salmon*, Higher Algebra § 134, u. I B 2).

Die Anzahl der W. kann für besondere Systeme von Gl. nur dann unter die nach dem *Bézout*'schen Theorem vorhandene Anzahl

---

31) J. Éc. Polyt. Cah. 11 (an X), p. 199.

32) J. de Math. 12 (1847), p. 68.

33) Vgl. *P. Gordan-G. Kerschensteiner* 1, § 142, p. 148, wo die Forderung nach einer rein algebraischen Begründung dieses allgemeinen Satzes ausgesprochen ist. Dieser wird genügt bei *Netto*, Algebra 2, § 400 durch Einführung einer Erweiterung des Begriffes „Gewicht eines Terms“.

34) Phil. Mag. (4) 3 (1852), p. 375 u. p. 460.

$(n_1 \cdot n_2 \cdots n_m)$ sinken, wenn der erste Koeffizient von $R(x)$ oder mehrere der ersten verschwinden. In diesem Falle können und müssen wir wieder den Begriff von unendlich grossen W. einführen. Die Existenz solcher unendlich grossen W. fordert, dass die homogenen Gl., welche entstehen, wenn man bei allen $f = 0$ nur die Glieder höchster Dimension beibehält, von $(0, \ldots 0)$ verschiedene W. haben, vgl. Nr. 4. Erst *L. Euler*[35]) nimmt bei der Abzählung von W. sowohl auf die vielfachen als auch auf die unendlichen W. gebührende Rücksicht. Frühere Mathematiker wurden durch das Auftreten solcher Wurzeln vom Aussprechen des *Bézout*'schen Satzes zurückgehalten.

Es ist ferner möglich, dass die $f_\lambda = 0$ überhaupt keine W. haben; dies tritt ein, wenn sich $R(x)$ auf eine Konstante reduziert, und ist demnach so aufzufassen, als ob alle $(n_1 \cdot n_2 \cdots n_m)$ W. des allgemeinen Systems in diesem besonderen Falle unendlich gross geworden wären. Beispiele hierzu lassen sich leicht konstruieren, wie $f_1(z_1, z_2) = 0$, $f_2(z_1, z_2) \equiv f_1(z_1, z_2) + \text{const.} = 0$ zeigt.

Endlich ist die Möglichkeit vorhanden, dass die Gl. $f_\lambda = 0$ unendlich viele W. miteinander gemein haben. Charakteristisch ist dafür der Umstand, dass die Eliminante $R(x)$ identisch verschwindet. Es ist zu beachten, dass aus dem identischen Verschwinden von $R(x)$ nicht der scheinbar plausible Schluss gezogen werden kann, dass alle Koordinaten $z_1, z_2, \ldots z_m$ unendlich viele Werte annehmen können. Die einschlägigen Verhältnisse klärt die *Kronecker*'sche Eliminations-Methode (Nr. 9) durch die Einführung der *Stufenzahl*, durch welche bei den Lösungen eines Systems, geometrisch gesprochen, die gemeinsamen Punkte, Kurven, Flächen u. s. w. getrennt werden. Entscheidend ist dabei folgendes: Das Gl.-System $f_\lambda = 0$ von m Unbekannten ist von der m^{ten} Stufe, wenn $R(x)$ nicht identisch verschwindet. — Das System wird von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Stufe, wenn zwar $R(x) \equiv 0$ ist, aber bei unbestimmten z_m und bei der Elimination von $z_2, z_3, \ldots z_{m-1}$ aus $(m-1)$ passend gewählten Gl. des Systems wenigstens ein $R_1(x, z_m)$ nicht identisch Null wird. Hierbei kann man dann die Unbekannte z_m beliebig wählen, x durch Lösung von $R_1 = 0$ bestimmen und dadurch die übrigen Koordinaten festlegen, so dass die W. eine Mannigfaltigkeit *erster Dimension* bilden; kommen ausser diesen keine anderen vor, so heisst das System der f_λ ein *reines System* der $(m-1)^{\text{ten}}$ Stufe; kommen noch andere mit festen Koordinaten vor, dann heisst es ein *gemischtes* System dieser Stufe. In derselben Weise kann man fortgehen, wenn auch alle $R_1 \equiv 0$ sind. Man lässt

35) Berl. Hist. 1748, p. 234.

dann nämlich z_{m-1} und z_m unbestimmt und eliminiert $z_2, z_3, \ldots z_{m-2}$ aus je $(m-2)$ der Gl. $f_\lambda = 0$; u. s. f. — Bei diesem Verfahren ist eine vorläufige Transformation (vgl. Nr. **4**) nötig, durch welche vermieden wird, dass etwa zu festen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{m-1}$ unendlich viele Werte ζ_m gehören[36]).

R. Perrin untersucht mit Hülfe seiner Eliminantendarstellung (vgl. Nr. **14**, Anm. 60) die Kriterien der verschiedenen Arten gemeinsamer, vielfacher Lösungen zweier Gleichungen mit einer, sowie dreier Gleichungen mit zwei Unbekannten[37]); er bestimmt also z. B., wann die Polynome $f_1(z)$ und $f_2(z)$ die Gestalten $f_1 = \alpha^2\beta^2\varphi_1$, $f_2 = \alpha^2\beta\varphi_2$ annehmen, wobei α, β lineare Faktoren sind, und φ_1, φ_2 keinen gemeinsamen Teiler besitzen. In gleicher Weise wird eine ganze Reihe von Kriterien abgeleitet, und gleichzeitig wird die allgemeine Methode der Behandlung des Problems für m Var. gegeben.

W. End beschäftigt sich[38]) bei der Erweiterung eines *Jacobi*'schen Satzes (vgl. Nr. **22**) mit dem Falle, dass die $f_i(z_1, z_2, z_3)$ $(i = 1, 2, 3)$ ausser für eine endliche Anzahl einzelner Werte noch für ein einfach unendliches Wertsystem verschwinden; geometrisch also mit dem Falle, dass drei Flächen ausser einer endlichen Anzahl diskreter Punkte noch eine Kurve gemeinsam haben.

12. Auflösung linearer Gleichungen. — Spezielle Eliminationsprobleme. Das einfachste Eliminations-Problem liefert die Aufgabe, m lineare Gl. für m Unbekannte aufzulösen; dies war der Ausgangspunkt für die Einführung und das Studium der Determinanten [I A 2]. *Leibniz*[39]) war der erste, welcher sich mit dieser Frage beschäftigte; ihm folgten *Cramer*[40]), *Vandermonde*[41]) und *Laplace*[42]). *C. G. J. Jacobi* bespricht den allgemeinen Fall[43]), ohne auf alle möglichen Besonderheiten einzugehen; er erklärt dies (l. c. Ende von § 7) für ein „paullo prolixum negotium". Weiter sind *Cauchy*[44]) und *H. Grassmann*[45]) zu erwähnen. Man überwindet alle Schwierigkeiten durch

36) „Grundzüge" u. s. w. § 10. Ferner: J. f. Math. 99 (1886), p. 336. — Vgl. auch *Molk* l. c.

37) Par. C. R. 106 (1888), p. 1789; ibid. 107 (1888), p. 22 u. p. 219.

38) Math. Ann. 35 (1890), p. 82; Auszug aus e. Tübinger Dissertation (1887).

39) Brief an *G. F. de l'Hôpital* (1693); Acta Erudit. 1700, p. 200.

40) Introduction etc., Append. 1750.

41) Paris Mém. 1772, II part., p. 516.

42) Ibid. p. 294.

43) J. f. Math. 22 (1841), p. 285.

44) „Analyse algébrique", Paris 1821, Chap. 3, § 2. — J. Éc. Polyt. Cah. 17 (1812), p. 69. — Résumés analytiques, Paris 1833, § 4, p. 19.

45) „Lineale Ausdehn.-Lehre", Leipz. [1844] 1878, p. 71 u. 72.

die Einführung des Begriffes vom *Range*[46]) eines Systems aus $p \cdot q$ Grössen. *Baltzer*[47]) giebt *Kronecker*'s erste Resultate in der vollständigen Behandlung des Problems; die späteren sind aus anderen Darstellungen[48]) zu entnehmen. Vielfach findet sich hierbei die Zurückführung des allgemeinen Problems auf homogene Gl. Das erscheint nicht zweckmässig, weil dadurch die Erkenntnis der Bedingungen für die Existenz *endlicher* Lösungen gehindert wird. Deshalb haben auch z. B. *P. Gordan*[49]) und *H. Weber*[50]) diese Fälle getrennt behandelt. Wir wollen eine Übersicht über die Lösung derart geben, dass umgekehrt die Behandlung homogener Gl. als besonderer Fall des allgemeinen erledigt wird[51]).

Liegen die pq Grössen a_{ik} $(i=1, 2, \cdots p;\ k=1, 2, \cdots q)$ vor, so heisst das System der a_{ik} vom *Range* r, wenn r die grösste Zahl ist, für welche nicht alle aus r Zeilen und r Spalten der a_{ik} gebildeten Determinanten verschwinden. In diesem Falle kann man die Grössen a_{ik} so angeordnet denken, dass die Determinante $D=|a_{ik}|\,(i, k=1, 2, \cdots r)$ von Null verschieden ist. Sind nun p homogene lineare F. in den Unbekannten $z_1, z_2, \ldots z_q$ mit jenen Koeffizienten a_{ik} gegeben:

$$f_\alpha = a_{\alpha 1} z_1 + a_{\alpha 2} z_2 + \cdots + a_{\alpha q} z_q \quad (\alpha = 1, 2, \cdots p),$$

dann ist jedes f_α durch $f_1, f_2, \cdots f_r$ linear und homogen darstellbar, wie die leicht ersichtliche Relation

$$|f_k \quad a_{k1} \quad a_{k2} \cdots a_{kr}| = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots r;\ \alpha)$$

zeigt; denn der Koeffizient von f_α ist D, also $\neq 0$. Sollen nun

---

46) Diesen Begriff hat der Sache wie dem bezeichnenden Worte nach *G. Frobenius* eingeführt. Er hat seine Bedeutung bereits J. f. Math. 82 (1877), p. 290, § 3 „über lineare Gleichungen u. alternierende bilineare Formen" ins rechte Licht gerückt. Die Bezeichnung „Rang" ist von ihm zum ersten Male ib. 86 (1879), p. 1 benutzt: „Wenn in einer Determinante alle Unterdeterminanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, die m^{ten} Grades aber nicht sämtlich Null sind, so nenne ich m den *Rang* der Determinante." — *Kronecker* hat (Berl. Ber. 1884, p. 1071, 1179) diesen von *Frobenius* bereits mehrfach durchgearbeiteten Begriff übernommen. Hiernach ist die Bemerkung I A 2, Nr. **24** nebst Anm. 91 richtig zu stellen. — *J. J. Sylvester* nennt Amer. J. of Math. 6 (1884), p. 271, Lect. 1 eine Determinante n^{ter} Ordnung, bei der alle Subdeterminanten $(n-i+1)^{\text{ter}}$ Ordnung verschwinden, aber nicht alle der $(n-i)^{\text{ten}}$ Ordnung, eine Determinante von der „Nullität" (nullity) i.

47) *Baltzer,* Determin. 2. Aufl., Leipz. 1864, p. 60.

48) J. für Math. 99 (1886), p. 342.

49) *Gordan-Kerschensteiner* l. c., p. 101.

50) *Weber*, Algebra 1 (2. Aufl.), p. 97 u. p. 104.

51) *Kronecker* behandelt die linearen Kongruenzen ähnlich, J. f. Math. 99 (1886), p. 340.

die nicht homogenen Gl. $f_\alpha + a_{\alpha 0} = 0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots p)$ erfüllbar sein, so muss auch das System a_{ik} $(i = 1, 2, \cdots p;\ k = 0, 1, 2, \cdots q)$ vom Range r werden. Dann ergiebt sich aus der Erfüllung der geforderten Gl. für $\alpha = 1, 2, \cdots r$ die Erfüllung aller vorgelegten p Gleichungen.

Die Betrachtung der Determinante

$$|a_{\varrho 1} z_1 + a_{\varrho, r+1} z_{r+1} + \cdots + a_{\varrho, q} z_q + a_{\varrho 0}, a_{\varrho 2}, \cdots a_{\varrho r}| = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots r)$$

zeigt, dass $(z_1 \cdot D)$ durch die willkürlich bleibenden $z_{r+1}, \cdots z_q$ bestimmt wird. Das gleiche gilt für $(z_2 \cdot D), \cdots (z_r \cdot D)$. Also hat das System *eine Mannigfaltigkeit* $(q - r)^{\text{ter}}$ *Dimension von Lösungen.* Man erkennt die enge Beziehung zwischen Rang und Stufenzahl.

Das gleiche gilt, wenn die $a_{\alpha 0} = 0$, also die Gl. homogen sind, nur dass die auf den Rang bezügliche Lösbarkeitsbedingung fortfällt. Wird dabei $q = r$, so müssen sämmtliche z verschwinden. Ist $q = r + 1$, dann folgt die Proportionalität der $z_1, z_2, \cdots z_q$ zu den entsprechenden ersten Subdeterminanten des Koeffizienten-Systems. —

Von weiteren Spezialuntersuchungen, die sich auf Elimination bei Gleichungen höherer Grade beziehen, mögen die folgenden erwähnt werden: Die Behandlung von drei Gleichungen zweiten Grades mit drei Unbekannten, welche *O. Hesse*[52]) durchgeführt und zum grossen Nutzen für die Geometrie auf das Studium der Kurven dritter Ordnung angewendet hat; ferner die von *Serret*[53]) ohne wesentlich neue Resultate gelieferte Diskussion der gleichen Aufgabe; endlich das von *A. Clebsch*[54]) wieder zu geometrischen Zwecken gelöste Problem der Elimination bei m homogenen Gleich., von denen $(m - 2)$ linear, eine quadratisch und die letzte von beliebigem Grade ist. Andere weitere Untersuchungen bietet die Geometrie reichlich dar; vgl. für darauf bezügliche Litteratur auch Anmerkung 57.

13. Eigenschaften der Eliminante. Bei der *Poisson*'schen, wie bei der *Bézout*'schen Methode zeigt sich, dass für allgemeine Gl.-Systeme mit unbestimmten Koeffizienten der Grad der Eliminante gleich dem Produkte der Dimensionen der Gl. des Systems wird (*Bézout*'scher Satz). Weiter bemerkt man, dass die Eliminations-Gl. $R(x) = 0$ für $x = \varkappa_1 z_1 + \varkappa_2 z_2 + \cdots$ in den Koeffizienten der Funkt. f_λ homogen von einem Grade wird, welcher dem Produkte der Dimensionen der übrigen f gleichkommt. — Ferner ist R *„isobarisch"* von einem Gewichte gleich dem Produkte der Dimensionen der m Funk-

52) J. f. Math. 28 (1844), p. 68 = Werke p. 89.

53) Algèbre supérieure 1, § 70 ff.

54) J. f. Math. 58 (1861), p. 273.

tionen f_λ (IB 2). — Der Grad von R kann nur durch das Verschwinden der ersten Koeffizienten in R verringert werden. Sind nun ϱ_0, ϱ_1, $\cdots$ diese Koeffizienten der höchsten Potenzen von x in R, so sagt $\varrho_0 = 0$ aus, dass die m homogenen Gl., welche entstehen, wenn man in jedem $f_\lambda = 0$ die Glieder höchster Dimension beibehält, eine von $(0, \ldots 0)$ verschiedene W. haben, oder mit anderen Worten, dass das System $f_\lambda = 0$ unendlich grosse W. besitzt. — Bei allgemeinen Gl. $f_\lambda = 0$ ist R irreduktibel[55]), und bei ihnen ist $\varrho_0 \neq 0$. Werden bei einer besonderen Gl. $\varrho_0 \equiv 0$, $\varrho_1 \equiv 0$, $\cdots$ $\varrho_{\mu-1} \equiv 0$, so ist jeder von x_1, x_2, $\ldots$ abhängige Faktor des ϱ_μ in $\varrho_{\mu+1}$, $\varrho_{\mu+2}$, $\ldots$ als Teiler enthalten[56]). — Die Eliminante von

$$f_1 = 0;\ f_2 + q_{2,1} f_1 = 0;\ f_3 + q_{3,2} f_2 + q_{3,1} f_1 = 0;\ \cdots$$

stimmt mit derjenigen von $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, $\cdots$ überein für beliebige gz. F. $q_{\alpha\beta}$; gleichwohl besitzt das erste System gegenüber dem zweiten im allgemeinen noch unendliche Wurzeln. — Bei der *Poisson*'sche Methode ergiebt sich stets das gleiche R, welche der Gleichungen man auch an das Ende setzen und bei der Produktbildung benutzen mag.

Ein Theorem von *Liouville* ist von Bedeutung für die Geometrie geworden; ihm zufolge sind die ersten Koeffizienten der Eliminante nur von gewissen ersten Koeffizienten der einzelnen F. abhängig; es bleibt bei Änderung der übrigen Gl.-Koeffizienten eine von jenen abhängige Reihe von Eliminations-Eigenschaften ungeändert, deren geometrische Bedeutung verwertet werden kann[57]).

14. Resultante und ihre Eigenschaften. Sind $(m + 1)$ Gleichungen $f_\alpha = 0$ $(\alpha = 0, 1, \cdots m)$ zwischen den m Unbekannten z_1, z_2, $\ldots$ z_m gegeben; bestimmt man sämtliche W. $(\zeta_{1x}, \zeta_{2x}, \ldots \zeta_{mx})$ der letzten m von diesen Gl.; setzt man diese W. in f_0 ein und nimmt das Produkt aller $f_0(\zeta_{1x}, \ldots \zeta_{mx})$; multipliziert man endlich dieses Produkt mit der einfachsten Konstanten, welche es zu einer gz. F. der Koeffizienten macht, so erhält man eine ganze F. der Gleichungskoeffizienten, deren Verschwinden charakteristisch für das Bestehen

---

55) *Laurent*, Traité d'Algèbre 4 (Compléments), Paris 1894, und *Netto*, Algebra 2, 1, p. 79.

56) *Netto* l. c., 2, p. 86.

57) *Liouville*, J. de Math. (1), 6 (1841), p. 359. Weitere Arbeiten hierüber lieferten: *E. Laguerre*, Par. C. R. 60 (1865), p. 71; Bull. soc. math. 8 (1879), p. 52; *G. Humbert*, J. de math. (4), 3 (1887), p. 327; 5 (1889), p. 81 u. 129; 6 (1890), p. 233; *G. Fouret*, Nouv. Ann. (3), 9 (1890), p. 258; *J. Hadamard*, Acta math. 20 (1896), p. 201.

gemeinsamer W. der $(m+1)$ Gl. $f_\alpha = 0$ ist. Diese Funkt. heisst „*die Resultante* (Res.) *der* $(m+1)$ *Gleichungen*"[58]). — Macht man die Gl. $f_\alpha = 0$ durch Einführung einer $(m+1)^{\text{ten}}$ Var. u homogen, dann ist die Eliminante derselben nach u gleich jener Res., abgesehen von einer Potenz von u als Faktor. — Fasst man in den $f_\alpha = 0$ die Koeffizienten als gz. F. einer neuen Var. z_0 auf, dann ist die Res., wie sie für die m Var. definiert wurde, die Eliminante nach z_0; der Unterschied von Res. und Eliminante liegt in der Auffassung der Koeffizienten als Konstante oder als gz. F. einer weiteren Var. Daher finden viele Eigenschaften der Eliminante (aus Nr. **13**) hier ihre Analoga.

Mertens[59]) giebt in Parallele zu der *Bézout*'schen Formel eine Ableitung der Result., welche von der Verwendung des Eliminationsprozesses absieht, indem er, falls die $f_\alpha = 0$ keine gem. W. haben, die Existenz eines bestimmten linearen, homogenen Aggregates der Polynome $f_0, f_1, \ldots$ von gewissen Gradeigenschaften nachweist, welches die Var. nicht mehr enthält.

Hinsichtlich dieser Form $R = \sum f_\lambda \varphi_\lambda$ weist *R. Perrin*[60]) nach, dass die Multiplikatoren φ_λ als gz. F. der gegebenen F. f_α gewählt werden können. Er benutzt den Umstand, dass, wenn $g_0, g_1, \ldots$ die Werte sind, die $f_0, f_1, \ldots$ für ein willkürliches Var.-System annehmen, dann die Gl. $f_\alpha - g_\alpha = 0$ gemeinsame W. und also eine verschwindende Res. haben; da diese in den Koeffizienten der $(f_\alpha - g_\alpha)$ ganz ist, so folgt daraus der Satz.

Bei der obigen *Poisson*'schen Produktform der Res. nimmt f_0 eine Ausnahmestellung ein; es giebt demgemäss, je nach der Wahl der ersten Gl. $(m+1)$ verschiedene Formen der Res., deren Übereinstimmung nicht so einfach zu erkennen ist, wie bei $m = 1$. Mit diesen verschiedenen Formen beschäftigt sich *O. Biermann*[61]) und eingehender *J. Hadamard*[62]).

Eine ausführliche Theorie der Res. findet man in einer umfangreichen Abhandlung von *L. Schläfli*[63]), der zu früher bekannten Eigenschaften neue hinzufügt. Er zeigt z. B., dass wenn $f_1, f_2, \ldots$ nume-

---

58) Es erscheint nicht unpassend, im Anschluss an englische Autoren die sonst unterschiedlos gebrauchten Bezeichnungen „Eliminante" und „Resultante" begrifflich so zu trennen, wie hier geschehen ist.

59) Wien. Ber. 93 (1886), p. 527.

60) Par. C. R. 106 (1888), p. 1789.

61) Monatsh. f. Math. u. Phys. 5 (1894), p. 17.

62) Acta math. 20 (1896), p. 201.

63) Wien. Denkschr. 1852, Abt. 2, p. 1.

rische Koeffizienten haben, R in lineare Faktoren zerfällt, die in den Koeffizienten von f_0 ganz sind; er fasst die z als rationale F. anderer Var. $y_1, y_2, \ldots y_m$ auf; er untersucht die Struktur der Res.; er stellt gewisse partielle Differential-Gl. her, denen die Res. genügen, u. s. f. — Eine in dem oben, Anm. 52, zitierten Aufsatze von *Hesse* angedeutete allgemeine Eliminationsmethode wird von *Schläfli* [p. 9] als unzureichend nachgewiesen.

K. Th. Vahlen[64]) setzt die Koeffizienten der f_α gleich gz. F. einer zweiten Variablenreihe und untersucht die Dimension der Res. in diesen; es ist das erlangte Resultat für die Theorie der algebraischen Korrespondenzen wichtig.

Die Berechnung von Resultanten nach den angegebenen Methoden ist sehr umständlich. Einige Erleichterung gewährt die Benutzung der eben erwähnten Differentialgleichungen für die Herstellung der numerischen Koeffizienten. — *P. Gordan* hat[65]) die Resultanten ternärer Formen allgemein invariantiv, d. h. durch Überschiebungen dargestellt (I B 2).

Über die Teilbarkeit von Result. verweisen wir auf die in I B 1 a Nr. **19** gegebenen Auseinandersetzungen. Ebendort findet man die Litteraturangaben.

15. Reduzierte Resultante. Die in I B 1 a Nr. **14** gemachte Bemerkung über die *Cayley*'sche *„reduzierte Resultante“* gehört auch hierher. — Ferner sind hier (und auch dort) noch andere von *A. Brill* gemachte Untersuchungen[66]) zu erwähnen. Haben m Gleichungen von $(m - 1)$ Var. eine bestimmte Anzahl von W. gemeinsam, dann kann man nach den Bedingungen fragen, unter denen die Gl. noch eine weitere gemeinsame W. besitzen. Diese Bedingungen werden durch das Verschwinden der sogenannten *„Brill'schen reduzierten Resultante“* gegeben. Die Existenz eines solchen Gebildes wird begründet; seine Konstitution wird untersucht; dasselbe wird als gm. T. gewisser Glieder einer Entwickelung erkannt, die durch einen einfachen Algorithmus hergestellt werden kann; seine Wichtigkeit für Fragen der Geometrie wird nachgewiesen.

16. Reduktibilität und Teilbarkeit von Gleichungssystemen. In der *Kronecker*'schen Eliminations-Theorie heisst ein F.- oder ein Gl.-System irreduktibel oder reduktibel, wenn die Gesamteliminante

64) J. f. Math. 113 (1894), p. 348.

65) Math. Ann. 50 (1898), p. 113; J. de math. (3), 5 (1897), p. 195; Züricher Kongress (1898), p. 143.

66) Math. Ann. 4 (1871), p. 510; Münch. Abhandl. 17 (1892), p. 89.

(Nr. **9**) es ist. Es folgt die Zerlegung eines reduktiblen Systems in irreduktible; ebenso die Begriffe des Teilers eines Gl.-Systems, der teilerfremden Systeme und des gr. gm. T. zweier Systeme. Es ist zu bemerken, dass Analogieschlüsse gegenüber den F. einer Var. nur mit Vorsicht zu verwenden sind. *J. Molk*[67]) hat analytisch diese Ideen behandelt, die in der Raumgeometrie bereits geläufig waren.

17. Diskriminante eines Gleichungssystems. Eine Erweiterung des Begriffes der *Diskriminante* (Diskr.) einer Gl. $f(z) = 0$ mit einer Var. kann auf verschiedene Arten für mehrere Var. durchgeführt werden, je nachdem man für eine solche Verallgemeinerung diese oder jene Eigenschaft der Diskr. einer Gl. mit einer Unbekannten benutzt. Für $f(z) = 0$ drückt das Verschwinden der Diskr. die Bedingung aus, dass die Gl. vielfache W. besitze. Ist ein Gl.-System $f_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2, \dots m)$ mit den Unbekannten $z_1, \dots z_m$ gegeben, so kann man ebenso fragen, wann eine W. $(\zeta_1, \dots \zeta_m)$ als vielfache W. der Gl. gilt. Eine solche Bedingung ist Nr. **11** im Anschluss an die Eliminante $R(x)$ angeführt: $R(x) = 0$ muss eine vielfache W. haben. Eine andere folgt daraus, dass die *Funktionaldeterminante*[68]) (Funkt.-Det.)

$$J(z_1, \cdots z_m) = \frac{\partial(f_1, \dots f_m)}{\partial(z_1, \dots z_m)} = \begin{pmatrix} f_1 \cdots f_m \\ z_1 \dots z_m \end{pmatrix} = \left| \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\beta} \right| \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots m)$$

für $(\zeta_1, \dots \zeta_m)$ verschwindet. Bildet man nämlich das über alle W. des Systems erstreckte Produkt $\prod J(\zeta_{1\varkappa}, \zeta_{2\varkappa}, \dots \zeta_{m\varkappa})$, so wird dies eine rationale F. der Koeffizienten, welche nur verschwindet, wenn das System $f_\alpha = 0$ mindestens eine mehrfache W. besitzt. In dem sogenannten allgemeinen Falle, in dem die Zahl der W. gleich dem Produkte der Gl.-Dimensionen ist, kann jenes Produkt bis auf einen konstanten Faktor in das Quadrat einer Determinante umgewandelt werden, deren Elemente Potenzprodukte der W. sind. Es tritt also eine Analogie mit den Gl. $f(z) = 0$ einer einzigen Unbekannten auf[69]), wo die Ableitung der F. an der Stelle der hier auftretenden Funkt.-Det. erscheint; vgl. I B 1 a Nr. **20**.

18. Diskriminante einer Gleichung. Dieser Erweiterung steht eine zweite zur Seite, welche an eine andere Diskr.-Eigenschaft bei

67) *Molk* (l. c.) Chap. 5, § 3, p. 155. Vgl. auch *Netto*, Algebra 2, 1 § 435.

68) Eingeführt von *Jacobi*, J. f. Math. 22 (1841), p. 319 = Werke 3, p. 193; vgl. Nr. **19** u. **20**. Die Engländer bezeichnen sie nach *Cayley*, J. f. Math. 52 (1856), p. 276 = Coll. Pap. 4, p. 30 als „Jacobian". Die zweite Schreibweise im Text stammt von *W. F. Donkin*, Phil. Trans. 1854, 1, p. 72; die dritte von *Gordan-Kerschensteiner* 1, p. 121; *Hesse* gebraucht gelegentlich eine noch kürzere, nämlich: $(f_1, \dots f_m)$.

69) *H. Laurent*, Traité d'analyse, Paris 1885, 1, p. 305.

Gl. mit einer Var. anknüpft. Man legt am einfachsten eine homogene F. $\varphi(z_1, z_2, \ldots z_m)$ zu grunde, und bezeichnet die Res. der n ersten Ableitungen $\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial z_2}, \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial z_m}$ als *Diskriminante*[70]) *von* φ (Diskr.). Verschwindet die Diskr. für irgend einen Punkt des Gebildes $\varphi = 0$, so ist dies ein *singulärer Punkt;* ein solcher lässt, geometrisch gesprochen, mehr als eine Tangentialebene zu. Hierin liegt gleichfalls eine Verallgemeinerung der Diskr.-Eigenschaft der F. mit einer Var. Hat φ die Dimension n, so ist die Diskr. in den Koeffizienten von φ homogen von der Dimension $m(n-1)^{m-1}$ und hat das Gewicht $n(n-1)^{m-1}$.[71]) Ferner besitzt sie Invarianteneigenschaft [I B 2].

Ist φ eine homogene, nicht lineare F. anderer F. $g_1, g_2, \ldots$ der Var., und sind die F. derart, dass das System $g_\alpha = 0$ unendlich viele W. besitzt, dann verschwindet die Diskr. von φ identisch. — Hat φ nur einen einzigen singulären Punkt, so kann dieser durch Differentiation der Diskr. gefunden werden[72]), vgl. I B 1 a, Nr. **21**.

19. Unabhängigkeit von Funktionen. Sind q F. von m Var. z gegeben $f_\alpha(z_1, \ldots)$, so heissen sie *von einander unabhängig*[73]), wenn keine rationale Gl. $F(f_1, \ldots f_q) = 0$ besteht, deren Koeffizienten von den Var. unabhängig sind, und die nicht für beliebige Werte von $f_1, \ldots f_q$, also nicht identisch erfüllt ist. Ist $q > m$, dann giebt es stets solche Gl. $F = 0$, d. h. $q > m$ F. f_α sind nie von einander unabhängig. Ist $q \leq m$, dann bestimme man alle Eliminanten für je $(q-1)$ Var. aus den q Gl. $f_\alpha(z_1, \ldots) - \varphi_\alpha = 0$, in denen die φ_α Symbole für die f_α sind; wird eine dieser Eliminanten von den übrigen Var. unabhängig, dann und nur dann bilden die f_α ein abhängiges F.-System; diese Eliminante geht für $\varphi_\alpha = f_\alpha$ in eine Relation $F = 0$ über[74]). *Jacobi* hat (l. c.) folgendes Kriterium anderer Art für die Unabhängigkeit eines F.-Systems in dem Falle $m = q$ aufgestellt: Die charakteristische Bedingung für die Abhängigkeit besteht in dem identischen Verschwinden von $J = \frac{\partial(f_1, \ldots f_m)}{\partial(z_1, \ldots z_m)}$. Dieses Kriterium beschränkt sich nicht auf den Fall, dass die f_λ gz. F. der Var. sind.

70) Von *Hesse* (l. c.) und *Schläfli* (l. c.) als Determinante der F. φ bezeichnet.

71) Diese und die folgenden nebst weiteren Eigenschaften hat *Schläfli* (l. c.) angegeben.

72) Offenbar sind beide in den Nrn. **17** und **18** gegebenen Erweiterungen nur die Grenzfälle einer allgemeinen, die sich auf willkürliche Gl.-Systeme bezieht. Ihre Behandlung steht noch aus.

73) *Jacobi*, J. f. Math. 22 (1841), p. 319 = Werke 3, p. 393.

74) *Netto*, Algebra 2, 1.

20. Unabhängigkeit von Gleichungen. *Jacobi* definiert (l. c.) Gleichungen $f_1 = 0, \ldots f_q = 0$ als unabhängig oder als abhängig von einander, je nachdem es möglich oder unmöglich ist, aus ihnen q der Unbekannten ($m \geqq q$) durch die übrigen auszudrücken. Statt dessen kann man sagen: $f_q = 0$ heisst dann und nur dann abhängig von $f_1 = 0, \ldots f_{q-1} = 0$, wenn jede W. dieses letzten Systems auch $f_q = 0$ befriedigt (vgl. dazu Nr. 5).

21. Funktionaldeterminante. Die F. J spielt in der Theorie der F. mehrerer Var. eine ähnlich bedeutende Rolle, wie die Ableitung $f'(z)$ bei einer F. $f(z)$ einer Var. *Jacobi* hat sie eingeführt und analytisch erforscht[75]). *Bertrand*[76]) giebt von ihr folgende Definition, deren Charakter als Erweiterung der Ableitung klar ist: er setzt statt eines Differential-Quotienten den Quotienten von zwei mit m Differentialen gebildeten Determinanten m^{ter} Ordnung $J = | d_\varkappa f_\lambda | : | d_\varkappa z_\lambda |$, wobei die f Funktionen, ferner die z Variable und $d_1, \ldots d_m$ von einander unabhängige Inkremente bedeuten. — *Jacobi* leitet die Bildung von J bei explicit und implicit gegebenen F., sowie bei F. von F. ab; er untersucht den Einfluss linearer Substitutionen; er zeigt ihre Bedeutung bei der Transformation mehrfacher Integrale [II A 2, Nr. **41**]. — Die Funkt.-Det. J von m homogenen Gl. $\varphi_\alpha = 0$ mit m Unbekannten verschwindet für jede W. des Gl.-Systems. — Sind die homogenen F. φ_α dabei von gleichen Dimensionen, dann verschwinden auch die Ableitungen von J für jede W.[77]). — Stets dann und nur dann, wenn J als homogene lineare F. der homogenen φ_α dargestellt werden kann, haben die Gl. eine von $(0, 0, \ldots 0)$ verschiedene W. gemein[78]). — Ist eine solche Darstellung bei beliebigen Gl. $f_\alpha = 0$ für die Funkt.-Det. derjenigen homogenen Gl. $\varphi_\alpha = 0$ möglich, welche durch Nullsetzen der Terme höchster Dimension der f_α entstehen, so haben die $f_\alpha = 0$ weniger als $n_1 n_2 \cdots n_m$ endliche W. — Sind $(m+1)$ homogene Gl. $\varphi_\alpha = 0$ gleicher Dimension mit m Unbekannten gegeben, bildet man aus je m unter ihnen die Funkt.-Det. $J_1, J_2, \ldots J_{m+1}$; ferner aus je m der F. J_λ die Funkt.-Det. $I_1, I_2, \ldots I_{m+1}$, dann ist $I_\alpha = M \varphi_\alpha$, wo M einen von α unabhängigen Wert besitzt[79]).

Zu erwähnen ist die Behandlung der Funkt.-Det. von *Gordan*-

75) J. f. Math. 22 (1841), p. 319 = Werke 3, p. 393.

76) *J. L. F. Bertrand*, J. de math. 16 (1851), p. 213. [Der Satz wird von „Genocchi-Peano“, dtsch. Ausg. (s. II A 2), Anm. zu Nr. 122, p. 329 angefochten.]

77) *Hesse*, J. f. Math. 28 (1844), p. 68 = Werke, p. 87.

78) *Kronecker*, Berl. Ber. 1859, Dez.-Heft, p. 687.

79) *Clebsch*, J. f. Math. 69 (1868), p. 355; ibid. 70 (1869), p. 175 wird auf Grund einer Mitteilung von *Gordan* die Grösse M bestimmt.

Kerschensteiner (l. c. p. 120 ff.), bei der besonders gewisse Ähnlichkeiten mit Brüchen hervorgehoben werden. So ist (vgl. die Bezeichnung der vorigen Nummer)

$$\begin{pmatrix} y_1\, y_2 \ldots y_m \\ x_1\, x_2 \ldots x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1\, z_2 \ldots z_m \\ y_1\, y_2 \ldots y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1\, z_2 \ldots z_m \\ x_1\, x_2 \ldots x_m \end{pmatrix}.$$

Ebenda werden die Subdeterminanten der Funkt.-Det. wieder als Funkt.-Det. dargestellt; die Funkt.-Det. wird als Produkt partieller Differentialquotienten gegeben u. s. w.

Auch in der Theorie der Charakteristiken (vgl. Nr. **25**) nimmt die Funkt.-Det. eine wichtige Stellung ein, indem sie die Ausdehnung gewisser Sätze über Wurzeln einer Gl. auf Systeme von Gl. ermöglicht. (Vgl. I B 3 a, Nr. **7**, sowie III A 4.)

22. Hesse'sche Determinante. Ist jedes $f_\alpha = \frac{\partial F}{\partial z_\alpha}$, wobei F eine homogene gz. F. der Var. $z_1, z_2, \ldots$ bedeutet, dann wird J zur symmetrischen Determinante der zweiten Ableitungen von F, nämlich gleich $H = \left| \frac{\partial^2 F}{\partial z_\varkappa \partial z_\lambda} \right|$; sie heisst die *Hesse'sche Determinante*[80]. *O. Hesse* hat sie eingeführt und ihre Bedeutung für verschiedene Fragen der Geometrie erkannt. Führt man in eine homogene Funkt. F statt der $z_1, z_2, \ldots z_m$ durch lineare homogene Substitutionen andere Variable $y_1, y_2, \ldots y_m$ ein, und ist eine solche Wahl der y möglich, dass F von höchstens $(m - 1)$ der neuen Variablen abhängig wird, dann ist $H \equiv 0$. *Hesse* versuchte die Umkehrung dieses Satzes zu beweisen[81], *M. Pasch* begründete ihre Gültigkeit für kubische Formen von drei und vier Var.[82], *Gordan* allgemein für ternäre, *Noether* für quaternäre Formen[83]. Endlich wurde von *Gordan* und *Noether* gezeigt[84], dass im allgemeinen Falle die Umkehrung des Satzes nicht richtig sei [I B 2, Nr. **27**].

Die *Hesse*'sche Grundform H steht in engen Beziehungen zur F, deren ausgezeichneten und singulären Punkten. Ist etwa $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots)$ eine k-fache Nullstelle für F, so ist sie zugleich eine $(3k - 4)$-fache für H, und $F = 0$, $H = 0$ haben k „Tangenten" in $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots)$ gemeinsam. Bei $k = 2$ z. B. fallen (geometrisch gesprochen) in diesem

80) *Hesse,* J. f. Math. 28 (1844), p. 68; die Engländer bezeichnen sie nach *Cayley* (Phil. Transact. 146 [1856], p. 627 = Coll. Pap. 2, p. 627) als *Hessian.* Vgl. auch *J. J. Sylvester,* Cambr. Dubl. M. J. 6, 1851, p. 194.

81) J. f. Math. 42 (1851), p. 117 u. ibid. 56 (1859), p. 263 = Werke p. 289, 481.

82) ibid. 80 (1875), p. 169.

83) Erlang. Ber. 1875, 13. Dez.

84) Math. Ann. 10 (1876), p. 547.

Punkte die Tangenten von $F=0$ mit denen von $H=0$ zusammen, so dass dieser Punkt als Lösung von $F=0$, $H=0$ sechsfach zählt[85]).

23. Jacobi's Erweiterung einer Euler'schen Formel. Die Analogie zwischen der Funkt.-Det. J und der Ableitung bewährt sich auch bei einem von *Jacobi* gefundenen Satze[86]), welcher als eine Erweiterung der *Euler*'schen Formeln (vgl. I B 1a Nr. 2) zu bezeichnen ist. Bedeutet $g(z_1, \dots z_m)$ eine gz. F. der Var. z_α von einer Dimension $\mu < (\sum n_\alpha - m)$, dann gilt für die über alle W. $(\zeta_{1k}, \dots \zeta_{mk})$ des Systems $f_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2, \dots m)$ erstreckte Summe

$$\sum_k \frac{g(\zeta_{1k}, \dots \zeta_{mk})}{J(\zeta_{1k}, \dots \zeta_{mk})} = 0,$$

vorausgesetzt, dass $k = n_1 \cdot n_2 \cdots n_m$ wird, d. h. dass die Gl. $f_\alpha = 0$ überhaupt nur endliche (und von einander verschiedene) W. besitzen[87]).

Dieses Theorem ist auf mancherlei Arten bewiesen worden. *Jacobi* und nach ihm *E. Betti*[88]) leiten es (für ein beliebiges m) aus der Theorie der symmetrischen Funktionen mehrerer Variablenreihen her; *Kronecker* (l. c.) schliesst es aus seiner Verallgemeinerung der *Lagrange*'schen Interpolationsformel; *J. Liouville*[89]) folgert es aus der Bemerkung, dass die Eliminante sich nicht ändert, wenn die Folge der F. bei dem *Poisson*'schen Verfahren geändert wird. — *Liouville* erhält in seiner Arbeit eine scheinbar allgemeinere Formel; doch lässt sich diese aus der *Jacobi*'schen einfach dadurch herleiten, dass für eine der F. f_α ein Produkt zweier F. eingesetzt wird[90]).

---

85) Von der reichhaltigen, hierher gehörigen Litteratur führen wir an: *Hesse*, J. f. Math. 28 (1844), p. 68 u. 97 = Werke p. 89, 123; ibid. 38 (1849), p. 257 = Werke p. 211; ibid. 40 (1850), p. 316 = Werke p. 257 (Brief an *Jacobi* nebst Antwort); ibid. 41 (1851), p. 272 = Werke p. 263; *Clebsch*, J. f. Math. 58 (1861), p. 229; *Cayley*, J. f. Math. 34 (1847), p. 30 = Coll. Pap. 1, p. 337; *Clebsch-Lindemann*, Geometrie 1, p. 176, 191, 206 u. s. w.

86) J. f. Math. 14 (1835), p. 281 = Werke 3, p. 285, wo zunächst $m = 2$ angenommen ist. Die Erweiterung auf beliebige m giebt dann *Jacobi*, J. f. Math. 15 (1836), p. 285, § 6—10 = Werke 3, p. 329; ferner *E. Betti*, Ann. di mat. 1 (1853), p. 1 und *Clebsch*, J. f. Math. 63 (1863), p. 189.

87) *Kronecker*, Berl. Ber. 1865, Dez., p. 687 = Werke 1, p. 133 hat diese Einschränkung betont; übrigens hat *Jacobi* selbst ihre Nothwendigkeit erkannt, wie sich sowohl aus der Arbeit J. f. Math. 15 (1836), p. 285 indirekt, als auch direkt aus einer Bemerkung in *Jacobi*'s Nachlass, abgedruckt: Werke 3, p. 610, ergiebt.

88) Ann. di mat. 1, 1858 [I B 3 b, Nr. **24**].

89) J. de math. 6 (1841), p. 345 und Par. C. R. 13 (1841), p. 467.

90) *A. Harnack*, Math. Ann. 9 (1896), p. 371; vgl. *Clebsch-Lindemann*, Vorles. üb. Geom. 1, p. 826.

24. Wurzelrelationen eines Gleichungssystems. — Interpolation. An anderer Stelle zeigt *Jacobi*[91]), dass die eben erhaltenen Summenrelationen, wenn in ihnen für g der Reihe nach alle Potenzprodukte $(z_1^\alpha z_2^\beta \ldots z_m^\delta)$ eingesetzt werden $(\alpha + \beta + \cdots + \delta < \sum n_\alpha - m)$, nicht sämtlich von einander unabhängig sein können. Die hierbei auftretenden Relationen werden von ihm für $m = 2$, $n_1 = n_2$ genauer untersucht. Die sich anschliessenden allgemeinen Fragen hängen mit dem schon von *Euler*[92]) und *Cramer*[93]) bemerkten Umstande zusammen, dass die $n_1 \cdot n_2 \cdots n_m$ Schnittpunkte von $f_1 = 0, \cdots f_m = 0$ nicht willkürlich gewählt werden dürfen, da ihre Anzahl grösser ist, als die zur Bestimmung eines f_α verfügbaren Konstanten, d. h. als die Koeffizientenanzahl (vgl. Nr. **1** Anm. 2). Es knüpften *J. Plücker*[94]) und *Jacobi* (l. c.) an dieses Problem an, welches dadurch zum Ausgangspunkte für umfassende Arbeiten algebraisch-geometrischer Natur wurde[95]), auf die hier nur hingewiesen werden kann.

Erst nach der Feststellung dieser Beziehungen zwischen den W eines Gl.-Systems ist es möglich, der Frage nach dem Interpolationsprobleme näher zu treten. Stellt man die F. f_α, $(\alpha = 1, 2, \ldots m)$, deren Nullstellen wir wieder durch $(\zeta_{1\varkappa}, \ldots \zeta_{m\varkappa})$ bezeichnen, gemäss Nr. **4** in der Form

$$f_\alpha = \sum_{\varrho=1}^{m} (z_\varrho - \zeta_{\varrho\varkappa})\,\chi_{\alpha\varkappa\varrho}$$

dar, dann stehen die Determinanten aus den χ in enger Beziehung zu der Funkt.-Det. Sie treten bei der *Kronecker*'schen Behandlung des Interpolationsproblems (l. c.) an die Stelle der Nenner in der *Lagrange*schen Formel. Die Interpolationsformel selbst ist von ähnlicher Konstitution wie die für eine einzige Variable. (Vgl. auch *H. Laurent*, Algèbre.)

25. Charakteristik eines Funktionensystems. Wir haben in Nr. **14** auf die Analogie zwischen der Ableitung $f'(z)$ einer Funktion $f(z)$ einer Var. und zwischen der Funkt.-Determ. J für m Funkt. von m Var. aufmerksam gemacht. Nun ist I B 1 a Nr. **4** darauf hingewiesen worden, dass das Verhalten der Ableitung $f'(z)$ in engster Beziehung zu der Art der Änderung der F. $f(z)$ selbst steht. Ähnliches war also bei einem Systeme von F. hinsichtlich der Funkt.-Det.

91) J. f. Math. 15 (1836), p. 285 = Werke 3, p. 329.

92) Berl. Mém. 1748, p. 219.

93) Introd. à l'analyse p. 78.

94) J. f. Math. 16 (1837), p. 47.

95) Vgl. D. M.-V. 3 (1892—93), p. 347 ff.

zu vermuten. Darauf hindeutende Bemerkungen finden sich bereits bei *J. J. Sylvester*[96]); später hat *Kronecker* in seiner *Charakteristikentheorie* gezeigt[97]), dass diese Analogien in umfassender Weise platz greifen. Auch hier dient das Verschwinden von J dazu, die Gebiete von einander abzugrenzen, in denen die Realitätsverhältnisse der W. des Gl.-Systems verschieden sind. Wir verweisen auf I B 1 a, Nr. **22**; I B 3 a, Nr. **7** und auf III 4.

26. Modul- oder Divisorensysteme. Eine Erweiterung des von *Gauss* in die Zahlentheorie eingeführten Begriffs eines *Modul* ist von *Kronecker* für das Gebiet beliebig vieler ganzer F. mit beliebig vielen Var. gegeben worden. Diese Erweiterung führt zu dem Begriffe des *Modulsystems* oder *Divisorensystems,* auf welchen *Kronecker* die arithmetische Behandlung der ganzen rationalen F. eines Rationalitätsbereiches gründet[98]) [I B 1 c, Nr. **13, 14**]. Das Modulsystem $(f_1, f_2, \ldots f_m)$ ist der Inbegriff aller F. von der Gestalt $\sum \varphi_\lambda \cdot f_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots m)$, wobei die φ gze. ganzzahlige Funktionen bedeuten. Dieses Modulsystem umfasst gewissermassen alles, was seinen einzelnen Elementen an Eigenschaften gemeinsam ist. Daher ist es auch als Verallgemeinerung des Divisionsbegriffes aufzufassen, indem das bei einer Funktion auftretende Produkt $\varphi \cdot f$ hier durch $\sum \varphi_\lambda \cdot f_\lambda$ ersetzt wird. — Unabhängig von *Kronecker* und nicht so tief eindringend wie dieser, kam *H. Laurent* zu ähnlichen Entwickelungen[99]).

27. Weitere Hinweise. Gewisse Untersuchungen über gz. F. mehrerer Var. werden an anderen Stellen besprochen. So ist z. B. hier nicht behandelt worden die Theorie der *Anzahl der Werte,* welche eine gz. F. bei allen möglichen Permutationen der Var. untereinander annimmt [I A 6]. Die hierzu gehörigen einwertigen oder symmetrischen F. (von einer oder von mehreren Var.-Reihen) haben wir mehrfach streifen müssen. Diese Theorie hängt eng mit der *Galois*'schen Gleichungstheorie zusammen; wir verweisen auf I B 3 b. — Eine beson-

---

96) Lond. Trans. 143 (1853), part. III, p. 407.

97) Berl. Ber. 1869, p. 159 u. 688; ibid. 1878, p. 145. Über die weitere analytische Ausbildung der Theorie vgl. *E. Picard*; J. de math. (4), 8 (1892), p. 5; Par. C. R. 113 (1891), p. 356, 669, 1012; *W. Dyck,* Par. C. R. 119 (1894), p. 1254; ibid. 120 (1895), p. 34; Münch. Ber. 1898, p. 203. Vgl. I B 3 a.

98) Grundzüge u. s. w. II. Abschn. — Die oben citierte *Molk*'sche Abhandlung kann als eine Art von Monographie für die Theorie der Divisorensysteme gelten. — Siehe ferner eine ganze Reihe von Arbeiten von *K. Hensel* im J. f. Math. und die Arbeit von *G. Landsberg,* Gött. Nachr. 1897, Heft 3 [I B 1 c, Nr. **21**].

99) Nouv. Ann. (3) 2 (1883), p. 145; ibid. 5 (1886), pp. 432 u. 456.

dere Art der zweiwertigen F. von n Variablenreihen aus je n Grössen sind die Determinanten n^{ter} Ordnung; ihre Behandlung findet sich I A 2.

In diesen und in den vorigen Artikel gehört weiter auch dem Begriffe nach die gesamte Theorie der Formen, welche aber hauptsächlich wegen der verschiedenartigen Betrachtungsweise und mancher nicht algebraischen Hülfsmittel hier losgetrennt und in I B 2 untergebracht worden ist. Wir müssen jedoch hier wenigstens den sogenannten „*Euler*'schen Satz über homogene Funktionen" hervorheben[100]), da derselbe für viele der oben angedeuteten Beweise unentbehrlich ist. Ist $\varphi(z_1, \dots z_m)$ eine homogene F. der n^{ten} Dimension, so hat man

$$\sum_{\lambda=1}^{m} z_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z_\lambda} = m\varphi.$$

Mit der Formentheorie im Zusammenhange steht die der *linearen Substitutionen,* auf welche hier nur verwiesen werden kann.

Auf den polynomischen Satz ist schon I A 1 Nr. **13** in der Theorie der Kombinatorik hingewiesen worden.

An Einzelheiten seien noch zwei Arbeiten von *F. Mertens*[101]) über gewisse Arten von Funktionen mehrerer Variablen erwähnt.

Ferner gehört hierher ein Hinweis auf die Differenzenrechnung bei mehreren Variablen (vgl. I B 1a Nr. **4**).

Ebenso treten Beziehungen zur Theorie der Funktionalgleichungen auf, sobald diese in unserem Gebiete ihre Lösung finden; so z. B. das Problem der „algebraischen Reversibilität"[102]), bei dem es sich um die Bestimmung einer F. $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ handelt, für welche aus den für $y_1, \dots y_n$ angenommenen Gleichungen

$$\frac{f(x_1, x_2, \dots x_n)}{y_1} = \frac{f(x_2, x_3, \dots x_n, x_1)}{y_2} = \dots = \frac{f(x_n, x_1, \dots x_{n-1})}{y_n}$$

auch umgekehrt folgen soll

$$\frac{f(y_1, y_2, \dots y_n)}{x_1} = \frac{f(y_2, y_3, \dots y_n, y_1)}{x_2} = \dots = \frac{f(y_n, y_1, \dots y_{n-1})}{x_n}.$$

100) Calc. diff. 1, § 225, p. 154. Ticini 1787. [Nach *M. Cantor,* Gesch. d. Math. 3, p. 733/34 schon in der 1. Aufl., Berol. 1755.]

101) Krakauer Abhandl. 2, I (1891), p. 333; Krakauer Denkschr. 17 (1891), p. 143.

102) *D. André,* Bull. soc. math. 24 (1896), p. 135.

Verzeichnis der Abkürzungen.

Diskr.	=	Diskriminante
F.	=	Funktion
Funkt.-Det.	=	Funktional-Determinante
Gl.	=	Gleichung
gz.	=	ganz
gr. gm. T.	=	grösster gemeinsamer Teiler
irred.	=	irreduktibel
red.	=	reduktibel
Res.	=	Resultante
Var.	=	Variable
W.	=	Wurzel.

I B 1 c. ALGEBRAISCHE GEBILDE.

I C 5. ARITHMETISCHE THEORIE ALGEBRAISCHER GRÖSSEN.

VON

G. LANDSBERG

IN HEIDELBERG.

Inhaltsübersicht.

Vorbemerkung.

Die Artikel I B 1 c und I C 5 sind, um Wiederholungen zu vermeiden, unter I B 1 c vereinigt worden. Da die Untersuchung der algebraischen

Gebilde bis zu einem gewissen Grade die arithmetische Theorie der algebraischen Grössen voraussetzt, so ist die letztere (in den Nr. **1—11**) vorangestellt und die erstere (in den Nr. **12—23**) an sie angeschlossen worden. Die allgemeine Theorie der algebraischen Gebilde und Modulsysteme erscheint hiernach als der im rationalen Gebiete zu erledigende Teil der arithmetischen Theorie algebraischer Grössen.

Da dieser Zweig der Algebra in allen wesentlichen Teilen modernen Ursprungs ist, so kann nur im allgemeinen auf die Lehrbücher der *Algebra* von *H. Weber*, Braunschweig, Bd. I u. II, 1. Aufl. 1895/96, 2. Aufl. 1898/99 (bes. drittes Buch), *E. Netto* (bisher erschienen Bd. I u. II, Lief. 1, Leipzig 1896/98), *E. Borel* und *J. Drach*, Paris 1894, und auf die *Vorlesungen über Zahlentheorie* von *Lej. Dirichlet-R. Dedekind*, Braunschweig, 2. Aufl. 1871, 3. Aufl. 1879, 4. Aufl. 1894; bes. Supplement XI von *Dedekind*, hingewiesen werden.

---

1. Aufgabe der arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. Die Zahlentheorie im engsten Sinne des Wortes (I C 1) stellt dem umfassenderen Gebiete $\mathfrak{R}$ der rationalen Zahlen das engere und ursprünglichere Gebiet $\mathfrak{G}$ der ganzen Zahlen gegenüber und untersucht in erster Linie die Teilbarkeitseigenschaften der ganzen Zahlen. In zahlreichen algebraischen Untersuchungen findet sich der Gegensatz zwischen „rational" und „ganz" in verallgemeinerter Form wieder, und es sind die „ganzen" Grössen vor den „rationalen" durch „Teilbarkeitseigenschaften" ausgezeichnet. Die Wissenschaft, welche die höchste Verallgemeinerung der Begriffe „rationale Grösse", „ganze Grösse", „Teilbarkeit" aufsucht und die daraus entspringende Bearbeitung algebraischer Probleme nach zahlentheoretischen Methoden anstrebt, ist von *L. Kronecker* „arithmetische Theorie der algebraischen Grössen" genannt worden [1]).

2. Körper oder Rationalitätsbereiche. Unter Grösse verstehen wir im folgenden ebensowohl irgend welche *Zahlen* als auch irgend welche *Funktionen* einer oder mehrerer unabhängiger Veränderlichen. Ein System von Grössen, welches in der Weise abgeschlossen ist, dass die Anwendung der vier rationalen Rechenoperationen, Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (wobei man von der Division

1) Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen; Festschrift zu Herrn Ernst Eduard Kummer's fünfzigjährigem Doctor-Jubiläum. Berlin 1882 (J. f. Math. 92, p. 1 = Werke 2, p. 237, weiterhin als „Festschrift" citiert).

durch Null abzusehen hat) nie über das System hinausführt, heisst nach *R. Dedekind*[2]) ein *Körper* (*Zahlkörper* oder *Funktionenkörper*), nach *Kronecker* ein *Rationalitätsbereich* (früher auch *Rationalitätsbezirk*). Wenn alle Grössen eines Körpers D auch einem Körper M angehören, so heisst D ein Divisor, Teiler[3]), Unterkörper[4]) von M, M ein Vielfaches, Multiplum[3]), Oberkörper[4]) von D.

Unter den *Zahl*körpern ist der einfachste der Körper $\mathfrak{R}$ der rationalen Zahlen, der in jedem anderen Körper enthalten ist; der umfassendste der Körper $\mathfrak{Z}$ *aller* Zahlen, der jeden anderen Zahlkörper enthält. Das Hauptinteresse nehmen die *algebraischen* Zahlkörper[5]) in Anspruch, welche durch eine oder mehrere algebraische Zahlen (Wurzeln ganzzahliger Gleichungen) und deren rationale Verbindungen gebildet werden (I C 4). Jeder algebraische Zahlkörper kann schon durch eine einzige Zahl konstituiert werden[6]).

Unter den Funktionenkörpern ist der einfachste der Körper R der rationalen Funktionen von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$, wobei die Koeffizienten dieser Funktionen einem beliebigen Zahlkörper zugewiesen werden dürfen; der umfassendste Funktionenkörper ist der Körper *aller* Funktionen von n Veränderlichen. Von besonderem Interesse sind die *algebraischen* Funktionenkörper, welche durch eine oder mehrere algebraische Funktionen (Wurzeln von Gleichungen, deren Koeffizienten dem Körper R angehören) und deren rationale Verbindungen gebildet werden (II B 2). Jeder algebraische Funktionenkörper kann schon durch eine einzige algebraische Funktion konstituiert werden[6]). Auch aus transcendenten Funktionen können Körper gebildet werden, z. B. der Körper aller elliptischen Funktionen mit gleichen Perioden oder der Körper aller elliptischen Modulfunktionen u. s. w.

Kronecker fasst die Körper $\mathfrak{R}$ und R unter der Bezeichnung „*natürliche*“ Rationalitätsbereiche zusammen und stellt ihnen die algebraischen Zahl- und Funktionenkörper als „*Gattungsbereiche*“ gegenüber[7]). Der Bereich, aus welchem der Gattungsbereich hervorgeht,

---

2) *Dirichlet-Dedekind,* Vorlesungen über Zahlentheorie, 2. 3. 4. Auflage, Braunschweig 1871, 1879, 1894, Supplement XI von *Dedekind* über die Theorie der algebraischen Zahlen, § 160. (Die Citate beziehen sich durchweg auf die 4. Auflage.)

3) *Dedekind* l. c. § 160, *Kronecker* (l. c. § 2) sagt dafür: M enthält D.

4) *D. Hilbert,* Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper 1897, im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 4, § 14.

5) Auch *endliche* Körper genannt, bei *Dedekind* l. c. § 164, VII.

6) Nach *Kronecker*; Beweis z. B. bei *Weber,* Algebra 1, § 143.

7) Festschrift §§ 2 und 3.

heisst *Stammbereich.* — Steigt man von einem Körper D zu einem Oberkörper M dadurch auf, dass man zu D eine oder mehrere ursprünglich nicht in D enthaltene Grössen hinzunimmt, so heisst dieser Prozess der Körpererweiterung *Adjunktion*[8]).

Die frühesten Spuren des Körperbegriffs finden sich in *N. H. Abel*'s Untersuchungen über algebraische Gleichungen[9]), die Erkenntnis der Bedeutung der Adjunktion für die Theorie der Gleichungen gebührt *E. Galois*[10]).

Der Körperbegriff ist nach *H. Weber* noch weitergehender Verallgemeinerung fähig, wenn man ihn dem allgemeinsten Gruppenbegriff (I A 6, Nr. **15**; II A 6) unterordnet und definiert: ein Körper ist eine Gruppe mit einer zweifachen Art kommutativer Komposition. Hierdurch werden z. B. auch „*Kongruenzkörper*" der gleichen Methode zugänglich, bei welchen alle Relationen zwischen Elementen des Körpers nur im Sinne einer Kongruenz modulo einer Primzahl statthaben[11]).

3. Ganze Grössen eines Rationalitätsbereiches; Irreduktibilität. In den natürlichen Rationalitätsbereichen $\mathfrak{R}$ und R kann man das Gebiet der *ganzen* Grössen aussondern, wobei in $\mathfrak{R}$ die ganzen Zahlen, in R die ganzen Funktionen als ganze Grössen den blos rationalen Grössen gegenübergestellt werden. Die ganzen Grössen bilden den in $\mathfrak{R}$, resp. R enthaltenen *Integritätsbereich*; sie reproduzieren sich durch die Operationen der Addition, der Subtraktion und der Multiplikation.

Eine ganze Zahl heisst eine Primzahl, wenn sie nicht in zwei von der Einheit verschiedene ganzzahlige Faktoren zerlegbar ist; ebenso heisst eine ganze Funktion von n Variabelen eine *Primfunktion* oder *irreduktibele* Funktion, wenn sie nicht in zwei von der Einheit verschiedene Faktoren, welche ganze Grössen des Bereiches sind, zerlegt werden kann[12]). Diese Definition ist wesentlich davon

8) In dieser Allgemeinheit fasst den Begriff *Weber,* Algebra 1, § 140.

9) Oeuvres ed. *Sylow-Lie,* 1, p. 479 = J. f. Math. 2, p. 220 (1828); 4, p. 132 (1829).

10) Journ. de math. 11, p. 418 (1830, publiziert 1846).

11) *Weber*, Math. Ann. 43, p. 521 (1893). Algebra 2, § 64. Die Bedingungen, unter welchen endliche Gruppen mit einer zweifachen Art commutativer Komposition auf Kongruenzkörper zurückgeführt werden können (d. h. ihnen holoedrisch isomorph sind), untersucht *E. H. Moore* (Chicago Papers, p. 210 ff.) (1896 [1893]).

12) *Kronecker* fordert hier wie bei allen Definitionen (l. c. § 4 und anderwärts), dass eine Methode angegeben werde, durch welche im einzelnen Falle mit Hilfe einer endlichen Anzahl von Operationen entschieden werden könne, ob eine vorgelegte Grösse unter den Begriff zu subsumieren ist oder nicht, eine

abhängig, welchem Zahlkörper die Koeffizienten der ganzen Funktionen angehören. Ist dies der Körper $\mathfrak{R}$, so gilt der Satz: Jede ganze Grösse kann auf eine und nur eine Weise in Primfunktionen zerlegt werden[13]. Bei Zulassung anderer Zahlkörper für die Zahlkoeffizienten ist der Satz im allgemeinen nur dann richtig, wenn Funktionen, die sich nur um *Zahl*faktoren unterscheiden, nicht als wesentlich verschieden betrachtet werden.

D. Hilbert hat bewiesen, dass man in einer irreduktibelen ganzen ganzzahligen Funktion von n Variabelen stets und auf unendlich viele Arten die m letzten Variabelen so gleich ganzen Zahlen setzen kann, dass eine *irreduktibele* Funktion der ersten $n - m$ Variabelen entsteht; dieser Satz bleibt auch noch richtig, wenn der Bereich der Koeffizienten der ganzen Funktion ein beliebiger algebraischer Zahlkörper ist[14].

Setzt man eine irreduktibele Funktion gleich Null, so entsteht eine irreduktibele Gleichung, durch welche, wenn nur eine Variabele auftritt, eine algebraische Zahl, wenn mehrere Variabele auftreten, eine der Variabelen (x) als algebraische Funktion der übrigen bestimmt wird; wenn in dieser Gleichung überdies der Koeffizient der höchsten Potenz von x gleich 1 ist, so ist x eine *ganze* algebraische Grösse (Zahl oder Funktion)[15]. Ganze algebraische Funktionen sind

---

Forderung, deren prinzipieller Berechtigung *Dedekind* entgegengetreten ist. (Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig, 2. Aufl. 1893, Anm. auf p. 2.) Methoden zur Entscheidung [I B 1 a, Nr. **13**, I B 1 b, Nr. **5**] haben für ganzzahlige Funktionen einer Veränderlichen *K. Runge* (J. f. Math. 99, 1886, p. 89) und *M. Mandl* (J. f. Math. 113, 1894, p. 252), für Funktionen mehrerer Veränderlichen *W. Fr. Meyer* (Math. Ann. 30, 1887, p. 30) angegeben. Specielle Irreduktibilitätskriterien bei *Th. Schönemann* (J. f. Math. 31, 1846, § 6), *G. Eisenstein* (ib. 39, 1850, p. 166), *L. Königsberger* (ib. 115, 1895, p. 53), *Netto* (Algebra 1, § 52—60; Math. Ann. 48, 1896, p. 82).

13) *Kronecker*, J. f. Math. 94, p. 344 = Werke 2, p. 408. *J. Molk*, Acta math. 6, p. 1 (1885), chap. 2, § 1.

14) J. f. Math. 110, p. 104 (1892). Gewissermassen ein Gegenstück zu diesem Satze bildet der ebenfalls von *Hilbert* geführte Nachweis, dass es ganze ganzzahlige irreduktibele Funktionen einer Veränderlichen giebt, welche modulo jeder Primzahl und modulo jeder Primzahlpotenz zerlegt werden können. Gött. Nachr., Febr. 1897.

15) *Kronecker*, J. f. Math. 91, p. 301 (1862, veröffentlicht 1881), *Dedekind* seit 1871, s. Zahlentheorie § 173. Infolge der Sätze über die eindeutige Zerlegbarkeit ist eine algebraische Grösse auch dann ganz, wenn *irgend eine* der Gleichungen, denen sie genügt, zum höchsten Koeffizienten die 1 und im übrigen ganze rationale oder ganze algebraische Grössen zu Koeffizienten hat. Diese Definition der ganzen algebraischen Grösse bezeichnet den eigentlichen Fortschritt der modernen Theorieen und steht im Gegensatze zu der formalen Defini-

auch dadurch zu charakterisieren, dass sie nirgends im Endlichen unendlich werden. Ist eine ganze algebraische Grösse zugleich rational, so ist sie eine ganze rationale Grösse im früher bestimmten Sinne des Wortes.

Eine irreduktibele Gleichung hat mit einer anderen Gleichung endlichen Grades entweder alle Wurzeln oder keine gemein; mit einer Gleichung unendlich hohen Grades aber (einer gleich Null gesetzten Potenzreihe) kann eine irreduktibele Gleichung sehr wohl eine einzige Wurzel gemein haben[16]). Die Definition der Irreduktibilität lässt sich auch auf *Systeme* übertragen: ein System von Gleichungen mit mehreren Variabelen, dessen Koeffizienten einem bestimmten Rationalitätsbereiche angehören und dessen sämtliche Lösungen eine k-fache Mannigfaltigkeit bilden, heisst irreduktibel, wenn jedes andere Gleichungssystem, das mit ihm eine k-fache Mannigfaltigkeit von Lösungen gemein hat und dessen Koeffizienten dem gleichen Rationalitätsbereiche angehören, durch *alle* seine Lösungen befriedigt wird und wenn überdies alle mehrfachen Lösungen des Systemes eine weniger als k-fache Mannigfaltigkeit bilden[17]).

4. Konjugierte Körper; Diskriminanten. Ist $F(x) = 0$ eine Gleichung n^{ten} Grades, deren Koeffizienten einem Körper Ω angehören und welche in eben diesem Körper irreduktibel ist, und ξ eine Wurzel dieser Gleichung, so bildet die Gesamtheit aller rationalen Funktionen von ξ, welche mit Koeffizienten aus Ω gebildet sind, einen dem Bereiche Ω entstammenden Gattungsbereich (*Kronecker*), einen Körper über Ω (*Weber*). Jedes Element dieses Körpers K kann in eindeutig bestimmter Weise als ganze Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von ξ mit in Ω rationalen Koeffizienten dargestellt werden. Sind $\xi', \xi'', \ldots \xi^{(n-1)}$ die übrigen Wurzeln jener Gleichungen und ersetzt man überall die Wurzel ξ bezüglich durch $\xi', \xi'', \ldots \xi^{(n-1)}$, so gelangt man zu den *konjugierten Körpern* $K', K'', \ldots K^{(n-1)}$, von jeder Grösse $\varphi(\xi)$ zu den $(n-1)$ *konjugierten Grössen* $\varphi(\xi'), \ldots \varphi(\xi^{(n-1)})$. Der Übergang von einem Körper zu einem der konjugierten kann nach *Dedekind*

---

tion der älteren (*Kummer* etc.), bei welchen durchweg mit ganzen ganzzahligen Funktionen einer willkürlich gewählten Ausgangsgrösse operiert, die Untersuchung also von vornherein auf eine gewisse Spezies von Zahlen oder Funktionen (s. Nr. **7**) beschränkt wird.

16) *Königsberger*, J. f. Math. 95, p. 193 (1883); *A. Hurwitz*, Acta math. 14, p. 211 (1890); *Dedekind* im Jahresbericht d. deutschen Math.-Ver. 1, p. 23 (1892).

17) In dieser Weise ist eine von *G. Frobenius* mitgeteilte Definition (J. f. Math. 84, 1878, p. 46) zu vervollständigen. Eine einfachere Definition erfolgt später (Nr. **14**).

als ein Abbildungsprozess aufgefasst werden, bei welchem alle rationalen Beziehungen erhalten bleiben[18]); als rational ist hier (und im folgenden) jede Grösse des Stammbereichs Ω anzusehen.

Symmetrische Funktionen der Konjugierten sind Grössen des Stammbereiches Ω; insbesondere heisst die Summe der Konjugierten einer Grösse η des Körpers K die *Spur* ($S(\eta)$), das Produkt der Konjugierten die *Norm* ($N(\eta)$) von η.[19]) Sind $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ n Grössen des Körpers K, so ist auch das Determinantenquadrat

$$\Delta(\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n) = \left| \eta_\nu^{(g)} \right|^2 \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \cdots n \\ g = 0, 1, \cdots n-1 \end{pmatrix}$$

eine Grösse in Ω, welche die *Diskriminante* des Systemes $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ genannt wird; je nachdem die Diskriminante verschwindet oder nicht verschwindet, je nachdem ist eine homogene lineare Relation mit Koeffizienten des Körpers Ω zwischen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ vorhanden oder ausgeschlossen. Sind $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_n$ die n ersten Potenzen der Grösse η, so heisst die Diskriminante $\Delta(1, \eta, \eta^2, \ldots \eta^{n-1})$ *die Diskriminante von* η; dieselbe ist bis aufs Vorzeichen gleich der Norm der dem Körper K angehörigen Grösse

$$(\eta - \eta')(\eta - \eta'') \cdots (\eta - \eta^{(n-1)}),$$

welche nach *Hilbert* die *Differente* von η heisst[20]).

Jede Grösse $\eta = \varphi(\xi)$ des Körpers K genügt einer bestimmten Gleichung n^{ten} Grades

$$N(x - \varphi(\xi)) = (x - \varphi(\xi))(x - \varphi(\xi')) \cdots (x - \varphi(\xi^{(n-1)})) = 0;$$

die linke Seite der Gleichung ist entweder irreduktibel, wenn nämlich die Diskriminante von η von Null verschieden ist, oder aber die e^{te} Potenz einer ganzen Funktion f^{ten} Grades von x ($n = ef$), wenn die Diskriminante von η gleich Null ist[21]). Wenn die Gleichungen aller Grössen η, die zu K, aber nicht zu Ω gehören, irreduktibel sind, so heisst der Körper K *primitiv*, anderenfalls *imprimitiv*[22]). Im letzteren Falle bilden die rationalen Funktionen von η einen Körper $\overline{K}$ über Ω vom f^{ten} Grade und es ist K ein Körper über $\overline{K}$ vom e^{ten} Grade.

---

18) Zahlentheorie § 161.

19) „Spur" zuerst bei *Dedekind-Weber* (J. f. Math. 92, 1882, p. 188) u. *Dedekind*, Gött. Abhandlgn. 1882. Der Ausdruck „Norm" geht auf *K. F. Gauss* (1831), (Werke 2, p. 103) und *E. E. Kummer* (1844) (J. de math. 12, p. 187) zurück.

20) Bericht üb. d. Th. d. alg. Z. § 3.

21) *Th. Schönemann*, J. f. Math. 31, p. 273 (1845) scheint zuerst diesen später oftmals bewiesenen Satz im Gebiete der algebraischen Zahlkörper aufgestellt zu haben.

22) *Weber*, Algebra § 144. Die Bezeichnung ist von der entsprechenden Eigenschaft der Gruppe hergenommen.

Nimmt man insbesondere als Stammbereich Ω den Körper aller symmetrischen rationalen Funktionen der ν Variabelen $x_1, x_2, \ldots x_\nu$, welcher identisch ist mit dem Körper aller rationalen Funktionen der elementaren symmetrischen Verbindungen $f_1, f_2, \ldots f_\nu$ dieser ν Variabelen (I B 3 b, Nr. **1**), und als Oberkörper K den Körper *aller* rationalen Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_\nu$, so genügt jede Grösse φ von K einer Gleichung des Grades $n = \nu!$ mit Koeffizienten des Körpers Ω:

$$(x - \varphi)(x - \varphi') \cdots (x - \varphi^{(n-1)}) = \Theta(x, f_1, f_2, \ldots f_\nu) = 0,$$

worin $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots \varphi^{(n-1)}$ die aus φ durch die $\nu!$ Permutationen der Variabelen x hervorgehenden Funktionen bedeuten. Wenn aber φ bei einer Gruppe von e Permutationen ungeändert bleibt und somit bei allen Permutationen der Variabelen nur $f = \frac{\nu!}{e}$ Werthe annimmt, so wird $\Theta(x)$ die e^{te} Potenz einer im Körper Ω irreduktibelen Funktion f^{ten} Grades $\Theta_1(x, f_1, \ldots f_\nu)$, ein Satz, welcher bereits von *J. L. Lagrange* aufgestellt worden ist[23]) (I B 3 c, d, Nr. **1**).

5. Beziehungen zur Galois'schen Theorie der Gleichungen. Die Körpertheorie ist nach heutiger Auffassung die eigentliche Grundlage der *Galois*'schen Theorie der algebraischen Gleichungen (I B 3 c, d). Zu einer vorgelegten Gleichung n^{ten} Grades $F(x) = 0$, die auch in Ω reduktibel sein, aber keine gleichen Wurzeln enthalten darf, gehören n konjugierte Körper $K, K', \ldots K^{(n-1)}$, und es ist stets möglich, denjenigen Körper L von möglichst niedrigem Grade zu bestimmen, welcher alle n Körper $K, K', \ldots K^{(n-1)}$ enthält. Es geschieht dies durch Aufstellung der irreduktibelen Gleichung ϱ^{ten} Grades, welcher die mit den Unbestimmten $u, u', \ldots u^{(n-1)}$ gebildete Grösse

$$\Theta = u\xi + u'\xi' + \cdots + u^{(n-1)}\xi^{(n-1)}$$

genügt; diese Gleichung heisst die *Galois'sche Resolvente.* Den Unbestimmten $u, u', \ldots u^{(n-1)}$ dürfen auch solche individuelle Werte des Körpers Ω beigelegt werden, dass die Wurzeln der Gleichung ϱ^{ten} Grades für Θ von einander verschieden ausfallen. Der Körper L ist alsdann ein *Normalkörper* oder *Galois*'scher Körper, d. h. er ist mit allen seinen konjugierten Körpern identisch; jede rationale Funktion von $\xi, \xi', \ldots \xi^{(n-1)}$ ist eine Grösse in L und umgekehrt. Der Körper L gestattet ϱ Abbildungen in sich selbst, bei welchen die Wurzel Θ der Galois'schen Resolvente in irgend eine

23) Berlin Mém. 1770 p. 134, 1771 p. 138 (= Oeuvres t. 3, p. 204, § 86 ff.). *Ev. Galois,* J. de math. t. XI, p. 420 (1846); *C. Jordan,* Traité des substitutions, Paris 1870, Art. 352; *Netto,* Substitutionentheorie, Leipzig 1882, § 51 und etwas allgemeiner § 100.

zweite Wurzel dieser Gleichung übergeführt wird. Die Wurzeln $\xi, \xi', \dots \xi^{(n-1)}$ der Gleichung $F(x) = 0$ erleiden bei diesen ϱ Abbildungen ϱ Vertauschungen, die in ihrer Gesamtheit eine Gruppe $\mathfrak{G}$ bilden. Diese Gruppe $\mathfrak{G}$ heisst die *Gruppe der Gleichung;* jede rationale Funktion der Grössen $\xi, \xi', \dots \xi^{(n-1)}$, welche bei Anwendung der ϱ Substitutionen der Gruppe ihren Wert ungeändert erhält, ist eine Grösse in Ω, und jede rationale Funktion von $\xi, \xi', \dots \xi^{(n-1)}$, welche eine Grösse in Ω ist, gestattet die Substitutionen der Gruppe. Die algebraische Theorie der Gleichungen gründet sich auf die Kenntnis der Eigenschaften des Normalkörpers L.[24]) Die Gruppe der allgemeinen Gleichungen n^{ten} Grades mit unbestimmten Koeffizienten ist die symmetrische Gruppe aller $n!$ Substitutionen; besondere Gleichungen sind dadurch charakterisiert, dass eine unter der Gattung der symmetrischen Funktionen enthaltene Gattung von Funktionen der Wurzeln zum Rationalitätsbereiche (zum Körper Ω) gehört, nämlich diejenige Gattung, welche bei den ϱ Substitutionen der Gruppe der Gleichung ungeändert bleibt. Diesen besonderen Gleichungen spricht man nach *Kronecker* einen *Affekt*[25]) zu und nennt eine bei den ϱ Substitutionen invariante Funktion φ der Wurzeln, welche den Affekt charakterisirt, eine *Affektfunktion.* Die Affektfunktion φ geht aus dem Körper der symmetrischen Funktionen durch eine Gleichung des Grades $\frac{n!}{\varrho}$ hervor, welche bei einer allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades irreduktibel ist (Nr. **4**), für die spezielle Gleichung $F(x) = 0$ aber eine rationale Wurzel hat; die Zahl $\frac{n!}{\varrho}$ heisst die *Ordnung des Affektes.* Diese Thatsache kann man nach *Kronecker* auch unter folgendem Gesichtspunkte erfassen: ist $F(x) = x^n - c_1 x^{n-1} + \cdots \pm c_n = 0$ die vorgelegte Gleichung und bedeuten $f_1, f_2, \dots f_n$ die elementaren symmetrischen Funktionen der Wurzeln, so kann das Gleichungs*system* $f_1 = c_1,\ f_2 = c_2, \cdots f_n = c_n$ reduktibel sein, selbst wenn $F(x)$ irreduktibel ist (s. Nr. **3**); durch Hinzufügung einer Gleichung $\varphi = c$, die den (rationalen) Wert c der Affektfunktion φ angiebt, wird das System irreduktibel, und eine Affektfunktion ist eine solche, durch deren Hinzufügung das Gleichungssystem irreduktibel wird[26]).

---

24) *Dedekind,* Zahlentheorie § 166; *Weber,* Algebra 1, Abschn. 13.

25) *Kronecker* gebraucht den Terminus „*Affekt*" zum ersten Male Berl. Monatsber. 1858, p. 288. [I B 3 b, Nr. **15**, **20**].

26) Festschrift § 11 u. 12; J. f. Math. 100, p. 490 (1886). Die Definition „Ordnung des Affektes" ist im Anschluss an *Weber,* Algebra 1, § 149 gegeben, während *Kronecker* in § 12 der Festschrift die Zahl ϱ als O. d. A. bezeichnet.

Aus dem in Nr. **3** angegebenen Satze von *Hilbert* folgt, dass man unbegrenzt viele Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten konstruieren kann, deren Gruppe im Bereiche der rationalen Zahlen die symmetrische oder die alternierende Gruppe ist[27]). Dieser Satz bleibt bestehen, wenn der Stammbereich Ω nicht der Körper $\mathfrak{R}$, sondern ein beliebig vorgegebener Zahlkörper sein soll.

6. Fundamentalsysteme. In einem dem Bereiche Ω entstammenden Gattungsbereiche K von der n^{ten} Ordnung (einem Körper über Ω) lassen sich die *ganzen* algebraischen Grössen von den gebrochenen aussondern. In jedem solchen Gattungsbereiche kann man m ganze Grössen $y_1, y_2, \ldots y_m$ so bestimmen, dass man *alle* ganzen Grössen des Bereiches erhält, wenn man in der Linearform

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_m y_m$$

für $u_1, u_2, \ldots u_m$ alle möglichen ganzen Grössen des Stammbereiches Ω nimmt[28]); ein solches System von m Grössen heisst ein *Fundamentalsystem* (*Kronecker*) oder eine *Basis* (*Dedekind*); die Linearform y heisst die *Fundamentalform.* Die Zahl m ist, allgemein zu reden, grösser als n, indess kann man drei Fälle angeben, in welchen $m = n$ ist und in welchen also die Koeffizienten $u_1, u_2, \ldots u_m$ für ein gegebenes Fundamentalsystem durch Angabe der ganzen Grösse y *eindeutig* bestimmt sind. Es tritt dies ein:

1) wenn der Körper K ein algebraischer Zahlkörper und Ω der Körper der rationalen Zahlen ist[29]). (Hingegen trifft es im allgemeinen nicht mehr zu, wenn K ein Zahlkörper und Ω ein beliebiger in K enthaltener algebraischer Zahlkörper, d. h. wenn K nach *Hilbert*'scher Bezeichnung ein *Relativkörper*[30]) ist.)

2) wenn der Körper K ein algebraischer Funktionenkörper und Ω der Körper der rationalen Funktionen *einer* Veränderlichen ist[31]) (bei algebraischen Funktionen mehrerer Veränderlichen ist im allgemeinen $m > n$).

3) wenn der Körper Ω der Körper aller symmetrischen Funktionen von ν Variabelen $x_1, x_2 \ldots . x_\nu$ mit rationalen Zahlkoeffizienten und der Körper K aller derjenigen rationalen Funktionen von $x_1, \ldots x_\nu$

27) J. f. Math. 110, p. 123 ff. (1892). Einen Teil des Satzes beweist auf ganz elementarem Wege *H. Weber* (Chicago Congr. Papers [1896 (1893)], p. 401).

28) Festschrift § 6.

29) *Dirichlet-Dedekind,* Zahlentheorie § 175.

30) Bericht über d. Theorie der alg. Zahlkörper § 14.

31) *Kronecker,* J. f. Math. 91, p. 308 ff.; *Dedekind-Weber,* J. f. Math. 92, p. 193 f.

mit rationalen Zahlkoeffizienten ist, welche eine bestimmte Gruppe von $\frac{\nu!}{n}$ Substitutionen gestatten (s. Nr. 4 Ende); hierbei werden also für eine ganze Grösse des Bereiches die Koeffizienten $u_1, u_2, \ldots u_n$ ganze Funktionen der elementaren symmetrischen Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_\nu$ mit rationalen Zahlkoeffizienten[32]).

Wenn $m = n$ ist, so ist die Diskriminante des Fundamentalsystemes

$$D = |y_g^{(h)}|^2 \qquad (g, h = 1, 2, \cdots n)$$

eine ganze Grösse in Ω, welche bei Transformation des Fundamentalsystemes ungeändert bleibt und der grösste gemeinschaftliche Teiler aller Diskriminanten von irgend n ganzen Grössen des Körpers ist; D heisst die *Diskriminante der Gattung* oder *des Körpers.*

Die Diskriminante eines Körpers ist ein Vielfaches der Diskriminante jedes Unterkörpers[33]).

Wenn $m > n$ ist, so hat man in der Matrix

$$\| y_1^{(h)}, y_2^{(h)}, \ldots y_m^{(h)} \| \qquad (h = 1, 2, \cdots n)$$

noch $m - n$ Zeilen unbestimmter Elemente hinzuzufügen, das Quadrat der so entstehenden Determinante heisst alsdann die *Diskriminantenform* der *Gattung.* Unter der *Diskriminante der Gattung* hat man alsdann den grössten gemeinsamen Teiler der Koeffizienten der Diskriminantenform zu verstehen; dieser grösste Teiler braucht aber alsdann keine Grösse des Körpers Ω zu sein, sondern er ist im allgemeinen nur durch das aus allen Koeffizienten gebildete Divisorensystem (s. Nr. 8) darzustellen.

Betrachtet man die Diskriminanten der Gattungen rationaler Funktionen von ν Variabelen, welche bei einer Gruppe von $\frac{\nu!}{n}$ Substitutionen ungeändert bleiben, so ergiebt sich zunächst die Diskriminante der *Galois'*schen Gattung, welche aus allen rationalen Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ besteht, gleich $\vartheta^{\frac{1}{2}\nu!}$, worin

$$\vartheta = \Pi(x_g - x_h) \qquad \begin{pmatrix} g, h = 1, 2, \cdots \nu \\ g \neq h \end{pmatrix}$$

ist. Da jede andere Funktionsgattung $\mathfrak{G}$ unter der Galois'schen Gattung enthalten ist, so ist ihre Diskriminante ebenfalls eine Potenz von ϑ. Der Potenzexponent einer Gattung n-wertiger Funktionen ist

32) Festschrift § 12.
33) ibid. § 9.

von *E. Netto* gleich $\frac{1}{2}n - \frac{nq}{\nu(\nu-1)}$ bestimmt worden, worin q die Anzahl der Transpositionen der Gruppe von $\mathfrak{G}$ bedeutet[34]).

7. Arten oder Species. Aus den ganzen Grössen des Körpers K lassen sich engere Gebiete aussondern, welche ebenfalls die Eigenschaft haben, dass man bei Anwendung der Operationen der Addition, Subtraktion und Multiplikation das Gebiet nicht überschreitet. Man erhält solche, wenn man dem Körper K irgend k ganze Grössen $\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_k$ entnimmt und alle ganzen Funktionen von $\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_k$ bildet, deren Koeffizienten ganze Grössen des Stammbereiches Ω sind. Ein solches Grössengebiet heisst nach *Kronecker* eine *Species* oder *Art*, nach *Dedekind* eine *Ordnung*, nach *Hilbert* ein *Ring* algebraischer Grössen[35]). Für diese Arten gelten ähnliche Gesetze wie für die „Hauptart", welche aus allen ganzen Grössen des Körpers K besteht, es giebt Fundamentalsysteme etc.

8. Zerlegung der ganzen Grössen in Primdivisoren oder Primideale. Die ganzen algebraischen Grössen des Gattungsbereiches K gestatten eine Zerlegung in Primfaktoren in ähnlicher Weise, wie die ganzen Grössen eines natürlichen Rationalitätsbereiches; indess ist es, um diese Analogie zu einer vollkommenen zu machen, erforderlich, dem Körper K neue Elemente zu associieren. Es sei der Stammbereich Ω ein natürlicher und es sei ferner der Körper K in Bezug auf Ω vom n^{ten} Grade, so heisst eine mit irgend welchen neuen Unbestimmten $u_1, u_2, \ldots$ gebildete ganze rationale Funktion, deren Koeffizienten ganze Grössen des Körpers K sind, nach *Kronecker* eine *Form des Körpers K.* Dabei ist abweichend von der gewöhnlichen Terminologie auch eine nicht homogene Funktion als Form bezeichnet, damit die ganzen Grössen des Körpers K ebenfalls mit darunter begriffen sind. Eine Form ist als analytisches Äquivalent für die Darstellung des grössten gemeinschaftlichen Teiler ihrer Koeffizienten anzusehen; die Berechtigung dieser Auffassung ergiebt sich aus den folgenden Sätzen. Eine Form, deren Koeffizienten dem Stammbereiche Ω angehören, heisst eine *rationale Form.* Multipliziert man eine Form F des Körpers K mit den konjugierten Formen $F', F'', \ldots F^{(n-1)}$, so ist das Produkt $F, F', \ldots F^{(n-1)}$ (die *Norm* von F) eine rationale Form, und ihre Koeffizienten besitzen also einen bestimmten, dem Stammbereiche Ω angehörigen grössten gemeinsamen Teiler[36]). Wenn

34) J. f. Math. 90, p. 164 (1881), Acta math. 1, p. 371 ff. (1882).

35) Festschrift p. 15; *Dedekind*'s Zahlentheorie § 170; *Hilbert*'s Bericht § 31.

36) *Hilbert* bezeichnet (Bericht § 6) diesen Teiler als Norm von F.

dieser Teiler gleich 1 ist, so heisst die Form F eine *primitive* oder *Einheitsform.* Wenn zwei Formen des Körpers K sich zu einander wie zwei Einheitsformen verhalten, so heissen sie *absolut äquivalent*; zwei solche Formen sind im Sinne einer Zerlegung als nicht wesentlich von einander verschieden zu betrachten. Formen, deren Koeffizientensysteme übereinstimmen und welche sich nur durch die Potenzprodukte der Unbestimmten unterscheiden, mit welchen die gleichen Koeffizienten multipliziert sind, sind äquivalent. Eine Form heisst *irreduktibel* oder eine *Primform* (*Primdivisor*), wenn sie nicht einem Produkte zweier Formen, von denen keine eine Einheitsform sein darf, äquivalent ist. Dann gilt der Satz: *Jede Form F des Körpers K lässt sich auf eine und im wesentlichen nur auf eine Weise als Produkt von Primdivisoren darstellen, wenn äquivalente Divisoren als nicht verschieden betrachtet werden*[37]).

An Stelle der Formen betrachtet *Dedekind* unendliche Systeme von ganzen Grössen des Körpers K. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ganze Grössen des Körpers K, so heisst der Inbegriff aller Grössen, welche durch die Linearform $\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma + \cdots$ dargestellt werden können, wenn $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ ganze Grössen des Körpers K sein sollen, ein *Ideal* des Körpers K. Falls dieses Ideal durch eine einzige Grösse α festgelegt werden kann, heisst es ein *Hauptideal* (α). Unter dem Produkte zweier Ideale

$$\mathfrak{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r), \qquad \mathfrak{b} = (\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_s)$$

ist das Ideal

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b} = (\alpha_1\beta_1, \cdots \alpha_1\beta_s, \alpha_2\beta_1, \cdots \alpha_2\beta_s, \cdots \alpha_r\beta_s)$$

zu verstehen. Ein Ideal, welches nicht als Produkt zweier Ideale dargestellt werden kann, von denen keines das Hauptideal (1) sein darf, heisst ein Primideal. Dann lautet der Zerlegungssatz: *Jedes Ideal ist auf eine und nur eine Weise in Primideale zerlegbar*[38]). Der Vergleich mit der Kronecker'schen Formentheorie wird durch folgende Erwägungen gegeben: Jeder Form des Körpers K entspricht dasjenige

37) Festschrift §§ 14—18. Die *Kronecker*'sche Formentheorie ist mit einigen Modifikationen in *Weber*'s Algebra (Bd. 2, Abschn. 16) aufgenommen. *Weber* betrachtet auch *gebrochene* rationale Funktionen der Unbestimmten mit Koeffizienten des Körpers K und nennt dieselben *Funktionale.* Wenn ein Funktional durch Multiplikation mit einer Einheitsform in eine (*Kronecker*'sche) Form des Körpers K verwandelt werden kann, heisst es ein *ganzes* Funktional. Dann lautet der Zerlegungssatz: ein ganzes Funktional kann auf eine und nur eine Weise in Primfunktionale zerlegt werden, wenn associierte (äquivalente) Funktionale als nicht verschieden betrachtet werden.

38) Zahlentheorie §§ 177—179, *Dedekind-Weber,* J. f. Math. 92, §§ 7—9.

Ideal, welches durch die Koeffizienten der Form bestimmt wird. Äquivalenten Formen entspricht dasselbe Ideal, und Formen, welche einer Grösse des Körpers K äquivalent sind, entspricht ein Hauptideal. Dem Produkte zweier Formen entspricht das Produkt der zugehörigen Ideale, den Primdivisoren entspricht ein Primideal. Hieraus geht die Identität beider Zerlegungssätze hervor. Das Ideal $\mathfrak{a}$ erscheint hierbei als grösster gemeinschaftlicher Teiler der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$, die es bestimmen; der grösste gemeinschaftliche Teiler der Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist das Ideal $(\alpha_1, \ldots \alpha_r, \beta_1, \ldots \beta_s)$, welches durch Zusammenstellung beider Ideale entsteht.

9. Darstellung der Primdivisoren durch Association enthaltender Gattungen oder durch Association transcendenter Funktionen. Wenn das Ideal $\mathfrak{a}$ kein Hauptideal ist, so ist der grösste gemeinschaftliche Teiler der Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_r$ keine Grösse des Körpers K, sondern eben nur durch eine dem Körper K associierte Form darstellbar. Man kann aber in gewissen Fällen durch eine andere Art der Association die Ideale auch als *Grössen* darstellen, die aber alsdann nicht dem Körper K, sondern einem erweiterten Bereiche angehören. Diese Art der Darstellung idealer Elemente ist bisher vorzugsweise in folgenden beiden Fällen durchgeführt worden.

Ist K ein imaginärer quadratischer Zahlkörper, so liefern die Transformationsgleichungen [II B 4 a, 6] der Theorie der elliptischen Funktionen einen Zahlkörper $\mathfrak{K}$, der K enthält und dessen Ordnung in Bezug auf K gleich der Klassenzahl des Körpers K ist. In dem Körper $\mathfrak{K}$ werden alle Ideale des Körpers K zu Hauptidealen; jedes Ideal von K kann also durch eine *Zahl* von $\mathfrak{K}$ dargestellt werden. Der Körper $\mathfrak{K}$ heisst der *Klassenkörper* von K.[39]) Die allgemeine Theorie der Klassenkörper ist neuerdings von *H. Weber* und *D. Hilbert* in Angriff genommen worden[40]).

Ist K ein Körper algebraischer Funktionen [II B 2] einer Veränderlichen, welche über einer Riemann'schen Fläche $\mathfrak{R}$ ausgebreitet sind, so liefert die Theorie der Abel'schen Integrale das Mittel, um die sämtlichen Ideale von K zu Hauptidealen zu machen. Ist das Geschlecht von $\mathfrak{R}$ gleich p, so giebt es auf $\mathfrak{R}$ p linear unabhängige Integrale erster Gattung $u_1, u_2, \ldots u_p$; ist ferner $\mathfrak{a}$ ein willkürlicher aber fester Punkt auf $\mathfrak{R}$, so giebt es p linear unabhängige Normalintegrale zweiter

39) *Kronecker*, Berl. Monatsberichte 1857, p. 455; *Weber,* Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen, Braunschweig 1891, Teil III, bes. § 110; *Weber,* Math. Ann. 48 (1897), p. 433; 49 (1897), p. 83; 50 (1898), p. 1.

40) *Weber,* ibid.; *Hilbert,* Jahresber. d. Dtsch. Math.-Ver. 6, p. 88 u. Math. Ann. 51 (1898), p. 1.

Gattung $v_1, v_2, \dots v_p$, welche nur in $\mathfrak{a}$ unendlich werden und nicht auf algebraische Funktionen reduziert werden können. Ist nun Π ein Elementarintegral dritter Gattung, welches in $\mathfrak{a}$ und einem zweiten Punkte $\mathfrak{p}$ mit den Residuen -1 und $+1$ logarithmisch unendlich wird, so kann man zu Π eine lineare homogene Funktion von $u_1, \dots u_p, v_1, \dots v_p$ so hinzufügen, dass das entstehende Integral $\overline{\Pi}$ nur noch die von den logarithmischen Unstetigkeiten herrührende Periode $2\pi i$, aber keine cyklische Periode hat, und es ist also $e^{\overline{\Pi}} = P$ eine *einwertige* Funktion auf $\mathfrak{R}$, welche in $\mathfrak{p}$ in erster Ordnung verschwindet und in $\mathfrak{a}$ eine wesentlich singuläre Stelle hat. Eine solche Funktion heisst nach *Weierstrass* eine *Primfunktion*; dieselbe entspricht genau einem Primideale des Körpers K, d. i. der Gesamtheit der Funktionen des Körpers, welche in $\mathfrak{p}$ Null und in vorgeschriebener Weise unendlich werden. Jede Funktion φ des Körpers K von der Ordnung r kann auf eine und nur eine Weise in die Form gesetzt werden:

$$\varphi = c \cdot \frac{P_1 P_2 \dots P_r}{P_1' P_2' \dots P_r'},$$

wo c eine Konstante und $P_1, P_2, \dots P_r$ die zu den Nullpunkten, $P_1', P_2', \dots P_r'$ die zu den Unendlichkeitspunkten der Funktion φ gehörigen Primfunktionen bedeutet. Umgekehrt stellt jeder derartige Quotient eine Funktion des Körpers dar, falls die Null- und die Unendlichkeitsstellen so gewählt werden, dass der Punkt $\mathfrak{a}$ nicht mehr wesentliche Singularität der Funktion ist; die hierzu erforderlichen Bedingungen werden durch die Gleichungen des Abel'schen Theoremes gegeben[41]).

An Stelle der Weierstrass'schen Prim*funktion* führt *F. Klein* Prim*formen* ein, indem die unabhängige Variabele $x = \frac{x_1}{x_2}$ in einen Zähler und einen Nenner gespalten wird und homogene transcendente Funktionen von x_1, x_2 gebildet werden. Ist $P_{xy}^{\xi\eta} = P_{\xi\eta}^{xy}$ ein Integral dritter Gattung mit den Parametern ξ, η und den Argumenten x, y, welches Vertauschung von Parameter und Argument gestattet, setzt man ferner die Riemann'sche Fläche als eine „kanonische" voraus, auf welcher eine nur in den Verzweigungspunkten verschwindende ganze algebraische Form $G(x_1, x_2)$ existiert, und wird $\frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{G(x_1, x_2)} = d\zeta_x$ gesetzt, so ist die Klein'sche Primform

41) *K. Weierstrass,* Werke 2, p. 235; vgl. auch *F. Schottky,* J. f. Math. 101 (1887), p. 227; *A. Brill* u. *M. Noether,* Die Entwickelung d. Theorie der algebraischen Funktionen, deutsche Math.-Ver. 3 (1894), p. 428. Eine Veröffentlichung der bisher nur in Vorlesungen bekannt gegebenen Theorie von *Weierstrass* ist in nahe Aussicht gestellt worden; bei der gegebenen Darstellung benutzte ich eine mündliche Mitteilung von *A. Hurwitz.*

$$P(x, y) = \lim \sqrt{-\,d\zeta_x\, d\zeta_y\, e^{-p_{xy}^{x+dx,\, y+dy}}} \qquad (\lim dx = 0,\ \lim dy = 0).$$

Dieselbe ist eine von x_1, x_2, y_1, y_2 abhängende Form, welche in jeder der beiden Variabelenreihen die Dimension 1 hat und für $x = y$ in erster Ordnung verschwindet. Dieselbe hat im Unterschiede von der Weierstrass'schen Primfunktion keine Singularität, erhält aber bei geschlossenen Umläufen der Variabelen transcendente Exponentialfaktoren. Durch Einführung von „Mittelformen" können die letzteren kompensiert werden[42]).

10. Die Fundamentalgleichung. Die Zerlegung der Grössen des Stammbereiches Ω in Primdivisoren des Körpers K wird durch die Untersuchung der *Fundamentalgleichung* geliefert; die Fundamentalgleichung ist diejenige Gleichung n^{ten} Grades, welcher die Fundamentalform

(1) $$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_m y_m$$

und ihre Konjugierten genügen, also die Gleichung:

$$\mathfrak{F}(x;\, u_1, u_2, \cdots u_m) = (x - y')(x - y'') \cdots (x - y^{(n)}) = 0.$$

Ist P ein Primelement des Stammbereiches, so ist es zu diesem Zwecke erforderlich, die Funktion $\mathfrak{F}$, welche eine mit den Unbestimmten $x;\, u_1, \ldots u_n$ gebildete ganze rationale Form des Stammbereiches ist, nach dem Modul P in Primfaktoren zu zerlegen. Dabei heisst eine Funktion $\mathfrak{F}$ nach dem Modul P zerlegbar, wenn eine Kongruenz

$$\mathfrak{F} \equiv XY \pmod{P}$$

aufgestellt werden kann, d. h. wenn $\mathfrak{F} - XY$ durch P teilbar ist; X und Y sind ebensolche Funktionen wie $\mathfrak{F}$. Ist nämlich bei der Zerlegung in Primideale $P = \mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r}$, so gilt die Kongruenz

(2) $$\mathfrak{F} \equiv P_1^{e_1} P_2^{e_2} \cdots P_r^{e_r} \pmod{P},$$

wo $P_1 \ldots P_r$ nach dem Modul P nicht weiter zerlegbar sind und die Funktion P_h dem Primideal $\mathfrak{p}_h$ in der Weise entspricht, dass sie durch Einsetzen des Wertes (1) von y in eine durch $\mathfrak{p}_h$ teilbare Form des Körpers K übergeht[43]).

42) *F. Klein*, Math. Ann. 36 (1890), p. 1; *Klein-Fricke*, Vorlesungen über die Theorie der Modulfunktionen, Leipzig 1892, 2, Abschn. 6, Kap. 1, § 9; *E. Ritter*, Math. Ann. 44 (1894), p. 261.

43) *Kronecker*, Festschrift § 25 für *unbestimmt* bleibende $u_1 \ldots u_m$. *Dedekind*, Gött. Abh. 1878; *Dedekind-Weber*, J. f. Math. 92, § 11 für individuelle Werte von $u_1, u_2, \ldots u_m$, wo dann der Satz gewisse Einschränkungen erfordert.

Die Diskriminante der Fundamentalgleichung ist eine rationale Form mit den Unbestimmten $u_1, \ldots u_m$, für welche der grösste gemeinschaftliche Teiler der Koeffizienten gleich der Diskriminante der Gattung ist. Hieraus, in Verbindung mit der Gleichung (2), folgt, dass die Gattungsdiskriminante alle und nur diejenigen Primelemente des Stammbereiches als Faktoren enthält, welche durch das Quadrat eines Primdivisors teilbar sind. Wenn in Gleichung (2) die zu dem Divisor $P_1 P_2 \ldots P_r$ gehörige algebraische Form des Körpers K eine Norm besitzt, welche mit P^k äquivalent ist, so ist die in der Gattungsdiskriminante aufgehende Potenz von P im allgemeinen gleich P^{n-k}; doch lässt der letzte Satz gewisse Ausnahmen zu, wenn P gleichzeitig ein Teiler eines der Exponenten $e_1, e_2, \ldots e_r$ ist[44]).

11. Ausführung der arithmetischen Theorie im Einzelnen. Die dargelegten Grundzüge der arithmetischen Theorie algebraischer Grössen ist in ihren Prinzipien aus der Theorie der algebraischen Zahlen abstrahiert und hat hier in erster Linie ihre Kraft bewährt (s. I C 4). Eine Ausführung im einzelnen ist sodann denjenigen Körpern algebraischer Funktionen zu Teil geworden, welche von *einer* Veränderlichen abhängen[45]), wodurch diese Theorie mit der der Riemann'schen Flächen in Wechselbeziehung tritt (s. II B 2). Ist $f(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$ die irreduktibele Gleichung, durch welche eine über der z-Ebene ausgebreitete n-blättrige Riemann'sche Fläche bestimmt wird, so gehört zu jedem im Endlichen gelegenen Punkte $\mathfrak{P}$ der Riemann-schen Fläche ein Primideal $\mathfrak{p}$ des Körpers der rationalen Funktionen von s und z; die Norm dieses Primideals ist der zugehörige Primdivisor $z - c$ des Stammbereiches der rationalen Funktionen von z. Hängen in $\mathfrak{P}$ α Blätter der R. Fl. zusammen, so ist $z - c$ durch die α^{te} Potenz von $\mathfrak{p}$ teilbar, und die Gattungsdiskriminante D erhält also (nach Nr. **10**) die Potenz $(z - c)^{\alpha - 1}$ als Faktor; die Gattungsdiskriminante D enthält hiernach die Normen aller im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkte, jede in einer bestimmten durch die Ordnung der Verzweigung angegebenen Potenz. Diese Beziehung wird eine noch engere, wenn man mit *K. Hensel* die Elementarteiler der Determinante $\sqrt{D}$ in Betracht zieht, welche stets gewissen Wurzeln aus ganzen Funktionen von z äquivalent sind. Giebt es nämlich für $z = c$ je einen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$-blättrigen Verzweigungspunkt, so enthalten die

44) Die in 43) genannten Abhandlungen und *Dedekind,* Gött. Abh. 1882; *K. Hensel,* J. f. Math. 113 (1894), p. 61, 128; Gött. Nachr. 1897, p. 247; J. f. Math. 117 (1898), p. 333.

45) *Dedekind-Weber* l. c.

Elementarteiler von $\sqrt{D}$ gebrochene Potenzen von $z - c$, deren Exponenten, abgesehen von der Reihenfolge, durch die Sequenzen

$$0,\ \frac{1}{\alpha},\ \frac{2}{\alpha},\ldots\frac{\alpha-1}{\alpha},\ 0,\ \frac{1}{\beta},\ldots\frac{\beta-1}{\beta},\ 0,\ \frac{1}{\gamma},\ldots\frac{\gamma-1}{\gamma},\ldots$$

angegeben werden[46]). Die unendlich fernen Punkte der Riemann'schen Fläche können entweder durch lineare Transformation von z oder indem man $z = \frac{z_1}{z_2}$ in zwei homogene Variabele spaltet, in die Untersuchung einbezogen werden. Die weitere Verfolgung dieser Gesichtspunkte in der Theorie der algebraischen Funktionen führt zur Aufstellung der überall endlichen Integrale des Körpers[47]), sowie zur Beherrschung des Riemann-Roch'schen Satzes[48]) und seiner Konsequenzen, und zur Auflösung der dem algebraischen Gebilde $f(s, z) = 0$ eigenen Singularitäten[49]).

Auf die Theorie der zu einem Systeme von Grundformen gehörigen Invarianten hat die Körpertheorie *D. Hilbert* angewandt [II B 2, Nr. **6**]. Die Gesamtheit dieser Invarianten bildet einen Körper, aus welchem man $\varkappa$ ganze rationale Invarianten $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$ so auswählen kann, dass jede weitere ganze rationale Invariante eine ganze algebraische Funktion eines durch $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$ und eine weitere Invariante J bestimmten Funktionenkörpers ist. Die Zahl $\varkappa$ ist dabei gleich dem Überschuss der Anzahl der Koeffizienten der Grundform über die Anzahl der Parameter der kontinuierlichen Gruppe der linearen Transformationen; der Grad k des Invariantenkörpers lässt sich mit Hilfe der später zu erwähnenden charakteristischen Funktion eines Formensystemes in den einfachsten Fällen bestimmen. Da die Invarianten $J_1, J_2, \ldots J_\varkappa$ hiernach die Eigenschaft haben, dass ihr Verschwinden das Verschwinden aller Invarianten zur Folge hat, so kann die Aufgabe der Bestimmung eines vollständigen Systemes der Invarianten der Grundform zurückgeführt werden auf die Aufstellung gewisser „kanonischer Nullformen", welche dadurch charakterisiert sind, dass ihre sämtlichen Invarianten verschwinden und dass umgekehrt jede

46) J. f. Math. 115, p. 254 (1895). Analoge Sätze gelten nach noch nicht vollständig publicierten Untersuchungen *K. Hensel*'s auch in dem Falle, dass der Stammbereich Ω der Körper der rationalen Funktionen *mehrerer* Veränderlicher oder ein Gattungsbereich ist. J. f. Math. 117, p. 333, 346; 118, p. 173 (1897, 98).

47) *Hensel,* J. f. Math. 117, p. 29 (1896).

48) *G. Landsberg,* Math. Ann. 50, p. 333, 577 (1897).

49) *Kronecker,* J. f. Math. 91, p. 301 (1881) = Werke 2, p. 193; vgl. *F. Klein*'s autographierte Vorlesung über Riemann'sche Flächen 1891—92, Gött., I. Teil, Abschnitt 4 u. 5.

Form mit verschwindenden Invarianten in eine von ihnen transformiert werden kann[50]).

12. Zusammenhang mit der Theorie der Modulsysteme und algebraischen Gebilde. Die Sätze von Nr. **10** lehren, dass die Zerlegung eines Primdivisors P des Stammbereiches Ω in algebraische Primdivisoren des Körpers K zurückgeführt werden kann auf die Zerlegung ganzer *rationaler* Funktionen nach dem Primmodul P. Die Theorie der algebraischen Körper tritt hierdurch in Beziehung mit der ganz im rationalen Gebiete operierenden *Theorie der Modulsysteme,* von welcher auch die weitere Ausgestaltung der Körpertheorie abhängig erscheint.

13. Elementare Eigenschaften der Modulsysteme. Sind M, $M_1, M_2, \dots M_k$ ganze Funktionen der unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_n$, so heisst M durch das *Modulsystem*

$$\mathfrak{M} = (M_1, M_2, \dots M_k)$$

teilbar, falls eine Gleichung besteht:

$$M = X_1 M_1 + X_2 M_2 + \cdots + X_k M_k, \tag{1}$$

in welcher $X_1, X_2, \dots X_k$ ebenfalls ganze Funktionen von $x_1, x_2, \dots x_n$ sind[51]). Dabei können die Koeffizienten von $X_1, X_2, \dots X_k$ entweder einem bestimmten Rationalitätsbereiche oder einem bestimmten Integritätsbereiche zugewiesen werden, welchem auch die Koeffizienten von $M_1, \dots M_k$ angehören müssen. Diesen beiden Fällen entsprechend unterscheiden wir gelegentlich zwischen einer *Teilbarkeit erster Art* und *zweiter Art*[52]). Wenn die Differenz zweier Funktionen $M - M'$ durch $\mathfrak{M}$ teilbar ist, so heissen M und M' einander kongruent nach dem Modulsystem $\mathfrak{M}$: $M \equiv M'$ (mod. $\mathfrak{M}$).

Das Modulsystem $\mathfrak{N} = (N_1, N_2, \cdots N_h)$ heisst *durch* $\mathfrak{M}$ *teilbar,* falls jede seiner Funktionen durch $\mathfrak{M}$ teilbar ist. Sind zwei Modulsysteme durch einander teilbar, so heissen sie (absolut) *äquivalent,* weil die Gesamtheit der durch das eine und der durch das andere Modulsystem teilbaren Funktionen dieselbe ist. Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ beliebige Modulsysteme, so hat man hiernach unter dem *grössten gemeinsamen Teiler* der beiden Modulsysteme das Modulsystem

$$\mathfrak{D} = (\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = (M_1, M_2, \cdots M_k, N_1, \cdots N_h)$$

---

50) Math. Ann. 42, p. 313 (1892).

51) Festschrift § 20.

52) Diese Unterscheidung, welche von Kronecker nicht ausdrücklich gemacht wird, wird notwendig, sobald es sich um die strenge Einführung des Stufenbegriffes handelt.

zu verstehen. Andererseits hat man unter dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ dasjenige Modulsystem zu verstehen, welches der grösste gemeinsame Teiler aller sowohl durch $\mathfrak{M}$ als durch $\mathfrak{N}$ teilbaren Modulsysteme ist.

Aus zwei Modulsystemen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ kann man ein *Produkt* bilden:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{N} = (M_1 N_1, \cdots M_k N_1,\ M_1 N_2, \cdots M_k N_2, \cdots, M_k N_h),$$

durch welches jedes Produkt einer durch $\mathfrak{M}$ und einer durch $\mathfrak{N}$ teilbaren Funktion und jede Summe solcher Produkte teilbar ist. Das Produkt zweier Modulsysteme ist durch jeden seiner Faktoren teilbar; aber wenn ein Modulsystem $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{M}$ teilbar ist, braucht es nicht als Produkt von $\mathfrak{M}$ und einem zweiten Modulsystem $\mathfrak{N}$ darstellbar zu sein[53]).

14. Der Stufenbegriff. Primmodulsysteme. Für die weitere Untersuchung ist die Einführung des Begriffes der *Stufe* oder des *Ranges* fundamental. Mit jedem Modulsystem $\mathfrak{M}$ ist ein System von Gleichungen $M_1 = 0$, $M_2 = 0, \cdots M_k = 0$ gegeben, durch welches ein *algebraisches Gebilde* aus der Mannigfaltigkeit der Variabelen $x_1, \ldots x_n$ ausgeschieden wird. Werden durch diese Gleichungen ν Variabele als algebraische Funktionen der frei bleibenden $n - \nu$ übrigen Variabelen bestimmt, so heisst das Gleichungssystem von der ν^{ten} *Stufe*, und es definiert alsdann eine $(n - \nu)$-fache Mannigfaltigkeit. Das Gleichungssystem kann aber auch Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimension nebeneinander definieren, in welchem Falle das Modulsystem ein gemischtes heisst und mehrere Stufenzahlen erhält. Wenn insbesondere die Funktionen $M_\varkappa$ *lineare homogene* Funktionen der Variabelen $x_1, \ldots x_n$ sind, so ist die Stufenzahl des Gleichungssystemes identisch mit der in der Determinantentheorie angewendeten Stufen- oder Rangzahl der Matrix der Koeffizienten: $\left|\frac{\partial M_\varkappa}{\partial x_\nu}\right| \quad \begin{pmatrix}\varkappa = 1, 2, \ldots k\\ \nu = 1, 2, \ldots n\end{pmatrix}$, (dem höchsten Grade nicht verschwindender Unterdeterminanten, vgl. I A 2, Nr. **24**; I B 1 b, Nr. **9**, **26**).

Die Bestimmung der Stufenzahl geschieht durch die allgemeine Theorie der Elimination [s. I B 1 b, Nr. **6**—**9**][54]). Kronecker führt, um die

53) Festschrift §§ 20 u. 21.

54) *Kronecker* legt im wesentlichen die allgemeine Eliminationstheorie *Et. Bezout*'s (Théorie générale des équations algébriques, Paris 1779) zu Grunde, welche in den Lehrbüchern von *J. A. Serret* (Algebra, deutsch v. Wertheim 1868, 1, Kap. 4) und *Faà di Bruno* (Théorie générale de l'élimination, Paris 1859) in modernerer Weise durchgeführt ist. Ausführungen zur allgemeinen Theorie der Elimination, welche in neuerer Zeit wenig bearbeitet zu sein scheint, geben

Gleichungssysteme verschiedener Stufe von einander zu sondern, eine mit n Unbestimmten $u_1, \dots u_n$ gebildete Hilfsgrösse $x = u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n$ ein, eine Operation, welche der Einführung der „Gleichung" eines Punktes in der analytischen Geometrie analog ist[55]), und verfährt dann folgendermassen. Es wird mit Hilfe der Grösse x aus den Gleichungen $M_1 = 0, \cdots M_k = 0$ die Variabele x_n eliminiert und aus den entstehenden Gleichungen ihr grösster gemeinschaftlicher Teiler $F_1(x; x_1, \dots x_{n-1})$ herausgehoben; derselbe giebt, gleich Null gesetzt, die *Resolvente erster Stufe*, da x als algebraische Funktion von $x_1, \dots x_{n-1}$ dargestellt wird. Aus dem von dem gemeinsamen Faktor befreiten Gleichungssystem werden mit Hilfe neuer Unbestimmter $U_1, \dots U_k$, $V_1, \dots V_k$ zwei lineare homogene Verbindungen gebildet; sodann wird x_{n-1} eliminiert und aus den Koeffizienten der als Eliminationsresultat entstehenden Funktion der U und V wieder der grösste gemeinsame Teiler $F_2(x; x_1, \dots x_{n-2})$ herausgehoben; derselbe giebt, gleich Null gesetzt, die *Resolvente zweiter Stufe*, da x_{n-1} und x_n als algebraische Funktionen der übrigen Variabelen bestimmt werden. So fortfahrend, erhält man die Resolventen erster, zweiter, ... ν^{ter} Stufe

$$F_1(x; x_1, \cdots x_{n-1}) = 0,\ F_2(x; x_1, \cdots x_{n-2}) = 0, \cdots F_\nu(x; x_1, \cdots x_{n-\nu}) = 0$$

und ihr Produkt $F_1 F_2 \dots F_\nu$, die *Gesamtresolvente* des Systemes. Setzt man in einer Resolvente für x seinen Wert $\sum u_h x_h$, so erhält man durch die Koeffizienten der so erscheinenden Funktion von $u_1, \dots u_n$ ein jener Resolvente äquivalentes Gleichungssystem. Da man in der Gesamtresolvente für die Unbestimmten $u_1, \dots u_n$ stets $n+1$ Wertsysteme $u_1 = a_1^{(h)} \cdots u_n = a_n^{(h)}$ $(h = 1, 2, \cdots n+1)$ so einsetzen kann, dass die entstehenden $n+1$ Gleichungen nur durch das Verschwinden aller Koeffizienten befriedigt sein können, so folgt: Jedes Gleichungssystem mit n Variabelen ist stets durch ein System von höchstens $(n+1)$ Gleichungen ersetzbar[56]).

J. Molk, Acta math. 6, p. 1 (1885) und *J. Hadamard,* Acta math. 20, p. 201 (1896); vgl. auch *Borel* et *Drach,* Introduction à l'étude de la théorie des nombres et de l'algèbre supérieure, Paris 1895, p. 205 ff. Eine vollständige Übersicht über alle bisherigen Ergebnisse der Eliminationstheorie giebt neuerdings *Netto* in der 1. Lief. des 2. Bandes seiner Algebra.

55) Die Einführung dieser Hilfsgrösse geht bereits auf *S. D. Poisson* (Éc. polyt. J. cah. XI, p. 199 [1811]) und *J. Liouville* (J. de math. t. XII, p. 68 [1847]) zurück.

56) Festschrift § 10. *K. Th. Vahlen* hat an dem Beispiele einer rationalen Raumkurve 5. Ordnung mit einer Quadrisekante ($n = 3$), welche erst als Schnitt von vier Flächen isoliert werden kann [III C 7], gezeigt, dass die Maximalzahl $n+1$ unter Umständen wirklich erreicht wird (J. f. Math. 108, p. 346, 1891).

Das Modulsystem $\mathfrak{M} = (M_1, M_2, \ldots M_k)$ erhält dieselbe Stufenzahl, wie das zugehörige Gleichungssystem, falls es sich um die Teilbarkeit erster Art handelt. Sind aber $M_1, \ldots M_k$ ganze *ganzzahlige* Funktionen und sollen auch die Koeffizienten $X_1, \ldots X_k$ in Gleichung (1) der Nr. **13** als ganze ganzzahlige Funktionen bestimmt werden, so erhält man die Stufenzahl des Modulsystems, indem man die des Gleichungssystemes um eine Einheit erhöht. Während also im ersten Falle die höchste Stufenzahl n ist, ist sie im Falle der Teilbarkeit zweiter Art $n + 1$.[57])

Der Stufenbegriff ist für die Definition des *Primmodulsystemes* massgebend. Betrachtet man die Modulsysteme mit einer bestimmten Anzahl von Veränderlichen und von bestimmter Stufe, so heisst ein solches ein *Primmodulsystem* oder ein *irreduktibeles System*, falls alle Modulsysteme, die in ihm enthalten sind, entweder mit ihm äquivalent oder von höherer Stufe sind[58]). Wenn ein Produkt zweier Faktoren durch ein Primmodulsystem teilbar ist, so ist einer der beiden Faktoren durch das Primmodulsystem teilbar.

Ein Gleichungssystem heisst irreduktibel, falls das zugehörige Modulsystem irreduktibel ist, eine Definition, welche die früher gegebene ersetzen kann (s. Nr. **3**).

Der Fall, dass ein Gebilde ν^{ter} Stufe zu seiner Darstellung mehr als ν Gleichungen erfordert, tritt besonders häufig dann auf, wenn das Gebilde durch das Verschwinden sämtlicher Determinanten r^{ter} Ordnung einer gegebenen Matrix bestimmt wird. Die Theorie derartiger „beschränkter Gleichungssysteme“ ist vorzugsweise von *A. Cayley, G. Salmon, S. Roberts, A. Brill* ausgebildet worden[59]). Das Hauptinteresse war hierbei der Bestimmung der „Ordnung“ eines derartigen Gleichungssystemes zugewendet; Ordnung eines Gleichungssystemes ν^{ter} Stufe ist die Anzahl der Punkte, welche das zugehörige algebraische Gebilde mit einem linearen Gleichungssystem $(n - \nu)^{\text{ter}}$ Stufe gemein hat. Dasselbe Ziel verfolgt mit abzählenden Methoden

---

Für $n = 2$ steht der Satz in Übereinstimmung mit dem *Dedekind-Weber*'schen Satze, dass jedes Ideal des Funktionenkörpers als grösster gemeinsamer Teiler zweier Hauptideale dargestellt werden kann (J. f. Math. 92, § 9, 2).

57) Festschrift § 21 (Ende), § 22 VII. J. f. Math. 99 (1886), p. 336.

58) So ist die inkorrekte Begriffsbestimmung der Festschrift (§ 21, VI) im J. f. Math. 99, p. 337 (1885) modifiziert worden.

59) *A. Cayley,* Math. Papers 1, p. 457 = Camb. and Dubl. math. J. 4, p. 132 (1849); *G. Salmon,* Lessons introductory to the modern higher Algebra, 2. ed. l. XXII u. XXIII (deutsch v. *W. Fiedler,* 2. Aufl. 1877); *S. Roberts*, J. f. Math. 67 (1867), p. 266; *A. Brill,* Math. Ann. 5, p. 378 (1872); 36, p. 321 (1890). S. noch *W. Fr. Meyer,* Bremer Naturf.vers. Verh. 1890.

in seiner Geometrie der Anzahl *H. Schubert*, dessen Resultate aber genauerer Nachprüfung bedürfen[60]).

15. Zerlegung in Primmodulsysteme. Diskriminante eines Modulsystemes. Es entsteht die Frage, ob ein gegebenes Modulsystem als ein Produkt von Primmodulsystemen darstellbar ist. Dies ist im allgemeinen nicht möglich, gelingt aber unter gewissen Bedingungen, deren wichtigste die folgende ist. Bildet man zu einem reinen Modulsystem[61]) $\mathfrak{M} = (M_1, \cdots M_k)$ ν^{ter} Stufe die Resolvente $\mathfrak{F}(x; x_1, \ldots x_{n-\nu})$ und ermittelt die Diskriminante der Resolvente (in Bezug auf x), so ist dies eine Funktion von $x_1, \ldots x_{n-\nu}$, welche die *Diskriminante des Modulsystemes* heisst[62]) und deren identisches Verschwinden charakteristisch dafür ist, dass die mehrfachen Punkte der Mannigfaltigkeit $M_1 = \cdots = M_k = 0$ eine Mannigfaltigkeit gleich hoher Stufe bilden. Verschwindet die Diskriminante des Modulsystemes nicht, so kann man dasselbe als Produkt von Primmodulsystemen darstellen, eine Zerlegung, welche der Zerlegung der Resolvente in Primfaktoren genau parallel verläuft[63]).

Wenn der Rang des Modulsystemes $\mathfrak{M}$ gleich n ist, so hat *E. H. Moore* gezeigt, dass man dasselbe stets — einerlei ob seine Diskriminante von Null verschieden ist oder nicht — als ein Produkt von „einfachen" Modulsystemen darstellen kann; ein einfaches Modulsystem ist hierbei ein solches, dessen Funktionen nur für einen einzigen Punkt $(\xi_1, \ldots \xi_n)$ Null werden[64]) (vgl. Nr. **21**).

Verschwindet die Diskriminante eines Modulsystemes $\mathfrak{M}$, so giebt es stets eine ganze Funktion X, die selbst nicht durch $\mathfrak{M}$ teilbar ist, von welcher aber eine Potenz durch $\mathfrak{M}$ teilbar wird — und umgekehrt. Charakteristische Eigenschaft der Nicht-Primmodulsysteme

60) Kalkül der abzählenden Geometrie, Leipzig 1879. Das Prinzip der „Erhaltung der Anzahl", welches den Schubert'schen Abzählungen zu Grunde liegt, ist nach einer Bemerkung *F. Klein*'s algebraisch formulierbar; s. *Weber,* Algebra **1**, § 51.

61) Es handelt sich von jetzt ab bis auf weiteres um Teilbarkeit erster Art.

62) *J. Molk,* Acta math. 6, chap. IV.

63) Die Diskriminante eines Modulsystemes kann auch als Eliminationsresultante besonderer Gleichungssysteme definiert werden; *Kronecker,* Berl. Sitzungsber. 1888, p. 451 X. Der hier definierte Begriff der Diskriminante ist übrigens genau zu scheiden von dem, was man in der analytischen Geometrie die Diskriminante einer Kurve, Fläche (allgemein einer Mannigfaltigkeit erster Stufe) nennt; dies ist diejenige irreduktible Funktion der Koeffizienten, deren Verschwinden das Auftreten von Singularitäten, d. i. die Existenz einer Mannigfaltigkeit mehrfacher Punkte von *höherer* Stufe anzeigt.

64) N. Y. Bull. (2) 3 (1897); 10, p. 372.

ist es hiernach, dass stets zwei ganze Funktionen existieren, die nicht durch das Modulsystem teilbar sind, in deren Produkt aber das Modulsystem aufgeht[65]).

Verschwindet die Diskriminante des Modulsystemes $\mathfrak{M}$ nicht, so giebt sie, gleich Null gesetzt, diejenigen Werte von $x_1, \dots x_{n-\nu}$, zu welchen mehrfache Punkte der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ gehören. Diese, die *Diskriminantenmannigfaltigkeit* (*Diskriminantenfläche*) ist alsdann eine unter $\mathfrak{M}$ enthaltene Mannigfaltigkeit höherer Stufe. In dem besonderen Falle einer Gleichung n^{ten} Grades mit einer Unbekannten und $n+1$ homogenen unbestimmten Koeffizienten (wobei die n Wurzeln als Funktionen der $n+1$ Gleichungskoeffizienten zu betrachten sind) hat *Hilbert*[66]) die Diskriminantenmannigfaltigkeit auf Ordnung und Beschaffenheit ihrer Singularitäten untersucht; die Bedeutung der Diskriminantenmannigfaltigkeit für die Realität der Wurzeln hat *Kronecker* in Betracht gezogen[67]).

16. Anwendungen der Modulsysteme. Komplexe Zahlen mit mehreren Einheiten. Wenn zwei Modulsysteme $\mathfrak{M} = (M_1, M_2, \cdots M_k)$ und $\mathfrak{M}' = (M_1', \cdots M_{k'}')$ äquivalent sind, so sind auch die zugehörigen Gleichungssysteme äquivalent, d. h. jede Lösung des einen Systemes ist auch eine solche des anderen. Umgekehrt führen oftmals Gleichungssysteme, deren Äquivalenz von vornherein bekannt ist, auf äquivalente Modulsysteme. Z. B. lässt sich die Bedingung dafür, dass zwei quadratische Systeme von je n^2 Elementen reciprok sind, in zweifacher Weise durch n^2 Gleichungen ausdrücken und die entsprechenden Modulsysteme von je n^2 Funktionen lassen sich als äquivalent erweisen[68]). Ebenso führt die Annahme, dass ein quadratisches System von n^2 Elementen orthogonal ist, auf zwei verschiedene Modulsysteme von je $\frac{1}{2}n(n+1)$ Elementen, deren Äquivalenz erwiesen werden kann[69]). In ähnlicher Weise lässt sich die Bedingung dafür, dass zwei ganze Funktionen n^{ten} Grades $\mathfrak{V}(x)$ und $V(x)$ von x einen grössten gemeinsamen Teiler m^{ten} Grades $W^{(m)}(x)$ haben, so umsetzen, dass bei unbestimmten Koeffizienten $W^{(m)}(x)$ als grösster gemeinschaftlicher Teiler von $\mathfrak{V}(x)$ und $V(x)$ nach einem gewissen Modul-

65) *Kronecker,* Berl. Sitzungsber. 1888, p. 453 ff., XII—XV.

66) Math. Ann. 30 (1887), p. 437 (I B 1 b, Nr. **18**).

67) Berl. Monatsberichte 1878, p. 95 = Werke 2, p. 37 (Ende). Vgl. *Weber,* Algebra 1, § 78.

68) *Kronecker,* J. f. Math. 107 (1890), p. 254; *Netto,* J. f. Math. 108, p. 144 f. (1891).

69) *Kronecker,* Berl. Sitzungsber. 1890, IX u. X; J. f. Math. 107 l. c.

systeme $\mathfrak{M}$ dargestellt werden kann, dessen Elemente aus ganzen Funktionen der Koeffizienten von $\mathfrak{V}(x)$ und $V(x)$ bestehen, welche, gleich Null gesetzt, eben jene Bedingung für die Existenz des Teilers m^{ter} Ordnung ergeben[70]). Der Gewinn dieser Betrachtungsweise besteht darin, dass man die für den grössten gemeinsamen Teiler zweier ganzer Funktionen geltenden Sätze ohne weiteres auf Kongruenzen nach irgend welchem Primmodulsysteme übertragen, also z. B. die Bedingung dafür aufstellen kann, dass zwei ganze ganzzahlige Funktionen von x modulo einer Primzahl p einen grössten gemeinsamen Teiler m^{ten} Grades haben. —

Eine andere Anwendung der Modulsysteme besteht in der Aufstellung aller Systeme komplexer Zahlen mit mehreren Einheiten, in welchen kommutative Multiplikation stattfindet (s. I A 4). Jedes reine Modulsystem $\mathfrak{M}$ n^{ter} Stufe mit n Variabelen besitzt ein endliches Restsystem, d. h. es giebt ν ganze Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_\nu$, sodass jede ganze Funktion f der n Variabelen auf eine und nur eine Weise in die Form gesetzt werden kann:

$$f \equiv c_0 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_\nu f_\nu \pmod{\mathfrak{M}},$$

wo $c_0, c_1, \ldots c_\nu$ Konstanten bedeuten. Da hiernach auch jedes Produkt $f_g f_h$ einer linearen Funktion von $f_1, \ldots f_\nu$ kongruent ist, so erhält man, wenn man $f_1, \ldots f_\nu$ durch ν komplexe Einheiten $e_1, \ldots e_\nu$ und die Kongruenz durch eine Gleichung ersetzt, ein komplexes Zahlsystem mit $(\nu + 1)$ Einheiten $1, e_1, \ldots e_\nu$ und vertauschbarer Multiplikation. Umgekehrt hat *Kronecker* gezeigt, dass jedes derartige Zahlsystem auf ein Modulsystem ν^{ter} Stufe mit ν Variabelen führt[71]). Die von *K. Weierstrass*[72]), *R. Dedekind*[73]), *J. Petersen*[74]) vorher betrachteten Fälle komplexer Zahlsysteme beziehen sich auf solche Modulsysteme, deren Diskriminante von Null verschieden ist.

17. Dedekind's Theorie der Moduln. An die Stelle der Modulsysteme tritt in der *Dedekind*'schen Theorie die Theorie der Moduln, welche jedoch nicht in gleicher Allgemeinheit ausgearbeitet vorliegt, sondern dem jeweiligen Zwecke der Untersuchung angepasst ist.

---

70) *Kronecker,* J. f. Math. 99, p. 328 (1886) für die Methode der rekurrenten Reihen; *Netto,* J. f. Math. 104, p. 321; 106, p. 81 (1889/90); Hamburger Festschrift 1890, p. 36 für die *Euler*'sche Eliminationsmethode (I B 1 b, Nr. 9).

71) *Kronecker,* Berl. Sitzungsber. 1888: zur Theorie der allgemeinen komplexen Zahlen und der Modulsysteme (p. 429. 447. 557. 595. 983).

72) Gött. Nachr. 1884, p. 395 = Werke 2, p. 311.

73) Gött. Nachr. 1885, p. 141; 1887, p. 1.

74) ibid. 1887, p. 489.

Ein System von unendlich vielen Zahlen heisst ein (*Zahlen-*) *Modul*, falls mit irgend zwei Zahlen auch ihre Summe und ihre Differenz dem Systeme angehört[75]. Von besonderer Wichtigkeit sind die *endlichen Moduln* $[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n]$, welche aus allen Summen ganzzahliger Vielfacher von $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ bestehen. Zwei Zahlen ϱ und σ heissen einander kongruent nach dem Modul $\mathfrak{a}$ ($\varrho \equiv \sigma \pmod{\mathfrak{a}}$), falls die Differenz $\varrho - \sigma$ dem Modul $\mathfrak{a}$ angehört; alle Zahlen, welche einander kongruent sind, werden in eine Zahl*klasse* mod. $\mathfrak{a}$ zusammengefasst. Ein Modul $\mathfrak{a}$ heisst durch einen Modul $\mathfrak{b}$ teilbar, wenn jede Zahl von $\mathfrak{a}$ auch dem Modul $\mathfrak{b}$ angehört. Zu irgend zwei Moduln $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ giebt es einen grössten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{d}$ und ein kleinstes gemeinsames Vielfaches $\mathfrak{m}$; der erste Modul ($\mathfrak{d}$) besteht aus allen Zahlen, welche als Summe einer Zahl aus $\mathfrak{a}$ und einer Zahl aus $\mathfrak{b}$ dargestellt werden können (in Zeichen $\mathfrak{d} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$), der zweite ($\mathfrak{m}$) aus allen Zahlen, welche sowohl dem Modul $\mathfrak{a}$ als dem Modul $\mathfrak{b}$ angehören (i. Z. $\mathfrak{m} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$). Aus irgend zwei Moduln $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ kann man ein Produkt $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und einen Quotienten $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ bilden; das Produkt besteht aus allen Produkten einer Zahl aus $\mathfrak{a}$ und einer Zahl aus $\mathfrak{b}$ und allen Summen derartiger Produkte, der Quotient besteht aus allen Zahlen μ, für welche der Modul $\mu\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar wird. Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, wenn zwei Moduln $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zu einander in einer solchen Beziehung stehen, dass der Modul $\mathfrak{a}$ in eine endliche Anzahl von s Zahlklassen aufgelöst werden kann, deren jede lauter einander nach dem Modul $\mathfrak{b}$ kongruente Zahlen enthält; die Zahl s wird dann durch $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ bezeichnet[76]. Auf diesen grundlegenden Begriffen und den daraus folgenden Gesetzen beruht die Dedekind'sche Theorie der in einem Zahlkörper enthaltenen Ideale.

In der Theorie der Zahlkörper treten während der ganzen Dauer einer Untersuchung überhaupt nur solche endliche Moduln auf, welche Vielfache eines als fest anzunehmenden Moduls $\mathfrak{o} = [\omega_1, \omega_2, \dots \omega_n]$ sind. Jedem derartigen Modul $[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r] = \mathfrak{a}$ entspricht eine bestimmte Matrix A der zu den Zahlen α gehörigen ganzzahligen Koeffizienten und wenn $\mathfrak{a}$ teilbar durch $\mathfrak{b}$ ist, so stehen auch die ent-

75) Zahlentheorie §§ 168—172.

76) Eine Verallgemeinerung des Modulbegriffes und des Symboles $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ in dem Sinne, dass in der Linearform $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$, die zu dem Modul $[\alpha_1, \dots \alpha_n]$ gehört, die Koeffizienten $x_1, \dots x_n$ beliebige ganze Zahlen eines Zahlkörpers sein dürfen, giebt *Dedekind* in den Gött. Nachrichten v. 1895 (p. 183).

sprechenden Matrices A und B in einer Teilbarkeitsbeziehung. Die Theorie der Moduln tritt hierdurch in Zusammenhang mit der von *G. Frobenius* ausgebildeten Theorie der linearen Formen mit ganzzahligen Koeffizienten [I C 1]; die hieraus für die Theorie der Moduln zu gewinnenden Resultate hat *E. Steinitz* einer Bearbeitung unterzogen[77]).

Analoge Sätze gelten auch für *Funktionenmoduln.* Hier haben *Dedekind* und *Weber* den Fall behandelt, dass die Basis des Moduls $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n]$ aus algebraischen Funktionen einer Veränderlichen x besteht, und dass die Koeffizienten $x_1, \ldots x_n$ der Linearform $x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n$ irgend welche ganze rationale Funktionen von x sind[78]).

18. Sätze von Hilbert. Einen wesentlichen Fortschritt hat die Theorie der Modulsysteme durch einige Sätze von *D. Hilbert* erfahren, welche die Bedingungen feststellen, unter denen ein vorgelegtes System von unendlich vielen Funktionen auf ein Modulsystem zurückführbar ist. Die Sätze von Hilbert beziehen sich, ihren invariantentheoretischen Zwecken gemäss, zunächst auf ganze rationale *homogene* Funktionen von n Variabeln, und es ist also der Ausdruck „Form" im folgenden wieder in der üblichen Bedeutung der Invariantentheorie zu verstehen. Ein System von Formen wird ein Modul genannt, wenn jedes Produkt einer Form des Systemes mit einer beliebigen anderen, nicht notwendig zum Systeme gehörigen Form, sowie jede in den Veränderlichen $x_1, \ldots x_n$ homogene Summe solcher Produkte wiederum dem Systeme angehört. Nun gelten folgende drei Hauptsätze[79]):

I. Aus jedem beliebigen Formensysteme (also auch aus jedem Modul) lassen sich stets m Formen $F_1, F_2, \ldots F_m$ so auswählen, dass jede andere Form F des Systemes durch lineare Kombination jener ausgewählten Formen erhalten werden kann:

$$F = A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_mF_m.$$

Dieser Satz gilt auch noch, wenn das Formensystem aus *ganzzahligen* Formen besteht und wenn die Koeffizienten $A_1, \ldots A_m$ der gleichen Forderung unterworfen werden[80]).

---

77) *G. Frobenius,* J. f. Math. 86, p. 174; 88, p. 96 (1878/79); *E. Steinitz,* Math. Ann. 52, p. 1 (1899).

78) J. f. Math. 92, p. 194—206 (§§ 4—6).

79) Satz I und II und seine Konsequenzen in Math. Ann. 36, p. 473 (1890); Satz III und seine Anwendungen Math. Ann. 42, p. 313 (1892) [I B 2, Nr. 6].

80) Weitere Ausführungen zu diesem Satze geben *P. Gordan,* Math. Ann. 42, p. 132 (1892); *A. Capelli,* Nap. R. (3) 2 (1896), p. 198, 231 (Erweiterung auf Potenzreihen).

Jeder Modul ist hiernach auf ein Modulsystem zurückführbar; z. B. ist das System der durch eine algebraische Raumkurve hindurchgelegten Flächen von der Art, dass die zugehörigen algebraischen Formen einen Modul bilden und also durch lineare Kombination einer endlichen Anzahl unter ihnen erhalten werden können. Eine weitere Konsequenz ist der auf lineare Gleichungen bezügliche Satz:

Die sämtlichen ganzen Lösungen eines vorgelegten Gleichungssystemes:

$$(1)\quad F_{t1}X_1 + F_{t2}X_2 + \cdots + F_{tm^{(1)}}X_{m^{(1)}} = 0 \qquad (t = 1, 2, \cdots m),$$

in welchem die Koeffizienten $F_{t1}, \ldots F_{tm^{(1)}}$ gegebene Formen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, lassen sich aus einer endlichen Anzahl von Lösungen

$$(2)\quad X_1 = X_{1s},\; X_2 = X_{2s}, \cdots X_{m^{(1)}} = X_{m^{(1)},\,s} \qquad (s = 1, 2, \cdots m^{(2)})$$

linear und homogen in der Gestalt

$$(3)\quad X_h = A_1 X_{h1} + A_2 X_{h2} + \cdots + A_{m^{(2)}} X_{h,\,m^{(2)}} \qquad (h = 1, 2, \cdots m^{(1)})$$

zusammensetzen. Dabei erscheint jedes Lösungssystem im allgemeinen in mehreren Arten in der Gestalt (3), indess lässt sich die Mannigfaltigkeit der verschiedenen Darstellungen eines und desselben Lösungssystemes vermöge des folgenden zweiten Hauptsatzes übersehen.

II. Ist ein Gleichungssystem der Gestalt (1) vorgelegt, so führt die Aufstellung der Bedingungen, unter welcher eine Lösung von (1) einer mehrfachen Darstellung (3) fähig ist, zu einem zweiten Systeme von $m^{(1)}$ Gleichungen der nämlichen Gestalt

$$(4)\quad X_{h1}U_1 + X_{h2}U_2 + \cdots + X_{h,m^{(2)}}U_{m^{(2)}} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots m^{(1)});$$

aus diesem zweiten Gleichungssysteme entspringt in gleicher Weise ein drittes abgeleitetes Gleichungssystem u. s. f. Das so begonnene Verfahren erreicht bei weiterer Fortsetzung *stets ein Ende* und zwar ist spätestens das n^{te} abgeleitete Gleichungssystem ein solches, welches keine Lösung mehr besitzt. Durch diesen Satz wird es möglich, die Gesamtheit der durch ein gegebenes Modulsystem $[F_1, F_2, \ldots F_m]$ teilbaren Formen in der Weise zu übersehen, dass man entscheiden kann, welche Formen *in mehrfacher Weise* als lineare homogene Funktionen von $F_1, \ldots F_m$ dargestellt werden können. Es gelingt infolge dessen auch, die Anzahl der *von einander unabhängigen* Bedingungen zu bestimmen, welchen die Koeffizienten einer Form der Ordnung R genügen müssen, damit sie in dem Modul $[F_1, \ldots F_m]$ gelegen sei. Diese Zahl ist für genügend grosse Werte der Zahl R eine ganze Funktion von R mit rationalen Zahlkoeffizienten; sie wird *charakteristische Funktion* des Moduls genannt und mit $\chi(\mathrm{R})$ bezeichnet. Ist *d* die Dimension des durch die Gleichungen $F_1 = 0, \cdots F_m = 0$ bestimmten algebraischen Gebildes, so ist

$$\chi(\mathrm{R}) = \chi_0 + \chi_1\binom{\mathrm{R}}{1} + \chi_2\binom{\mathrm{R}}{2} + \cdots + \chi_d\binom{\mathrm{R}}{d};$$

hierbei bedeutet $\binom{\mathrm{R}}{s}$ die Binomialfunktion $\frac{\mathrm{R}\cdot(\mathrm{R}-1)\cdots(\mathrm{R}-s+1)}{1\cdot 2\cdots s}$, $\chi_0, \chi_1, \ldots \chi_d$ sind ganze, dem Modul $[F_1, F_2, \ldots F_m]$ eigentümliche Zahlen, und zwar ist χ_d die Ordnung des algebraischen Gebildes, d. i. die Anzahl der Wertsysteme, welche das algebraische Gebilde mit einer linearen Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1-d$ gemein hat, während $\chi_0, \chi_1, \ldots \chi_{d-1}$ mit den Geschlechtszahlen des algebraischen Gebildes in Zusammenhang stehen.

Die charakteristische Funktion steht in Wechselbeziehung zu den fundamentalen Anzahlbestimmungen der analytischen Geometrie, z. B. ist für eine doppelpunktslose Raumkurve C von der Ordnung m und dem Geschlechte p $\chi(\mathrm{R}) = -p + 1 + m\mathrm{R}$ die Anzahl der Bedingungen, welche einer Fläche R^{ter} Ordnung auferlegt werden müssen, damit sie durch C gehe [III C 5, 7]. Bildet man aus zwei Moduln $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ den grössten gemeinsamen Teiler $\mathfrak{Q}$ und das kleinste gemeinsame Vielfache $\mathfrak{K}$, so ist $\chi_{\mathfrak{M}}(\mathrm{R}) + \chi_{\mathfrak{N}}(\mathrm{R}) = \chi_{\mathfrak{Q}}(\mathrm{R}) + \chi_{\mathfrak{K}}(\mathrm{R})$. Gehören $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zu zwei doppeltpunktslosen Raumkurven C_m^p und $C_{m'}^{p'}$, welche zusammengenommen den vollständigen Schnitt zweier Flächen F_μ und $F'_{\mu'}$ bilden, so ist der Modul $\mathfrak{Q} = [F, F']$ das System aller Flächen durch C und C', der Modul $\mathfrak{K}$ das System aller Flächen durch die Schnittpunkte von C und C' und die zuletzt angegebene Relation liefert die Bestimmung der Anzahl dieser Schnittpunkte aus den Ordnungszahlen μ und μ' und den Geschlechtszahlen p und p' (III C 7). Bringt man ein zu dem Modul $[F_1, F_2, \ldots F_m]$ gehöriges algebraisches Gebilde zum Schnitt mit q *allgemeinen* Formen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_q$ der Ordnungen $n_1, n_2, \ldots n_q$, so ist die charakteristische Funktion $\chi_q(\mathrm{R})$ des Schnittgebildes ausdrückbar durch die charakteristische Funktion $\chi(\mathrm{R})$ des Moduls $[F_1, \ldots F_m]$:[81])

81) *W. Wirtinger,* Untersuchungen über Thetafunktionen, Leipzig 1895. *W.* bestimmt daselbst die charakteristische Funktion $\chi(\mathrm{R})$ des durch Verallgemeinerung der Kummer'schen Fläche ($p = 2$) entstehenden algebraischen Gebildes, welches man erhält, wenn man 2^p linear unabhängige Thetafunktionen 2. Ordnung von $v_1 \ldots v_p$ mit der Charakteristik $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ als homogene Punktkoordinaten eines linearen Raumes von $2^p - 1$ Dimensionen betrachtet:

$$\chi(\mathrm{R}) = 2^{p-1}(\mathrm{R}^p + 1).$$

$$\chi_q(\mathrm{R}) = \chi(\mathrm{R}) - \sum_{i=1}^{q} \chi(\mathrm{R} - n_i) + \sum_{i,\,k} \chi(\underset{(i<k)}{\mathrm{R} - n_i - n_k})$$
$$- \sum_{i,\,k,\,l} \chi(\underset{(i<k<l)}{\mathrm{R} - n_i - n_k - n_l}) + \cdots$$

III. Zu diesen Sätzen tritt nun noch ein dritter, durch welchen *allgemein* die Frage entschieden wird, welcher Zusammenhang zwischen zwei Modulsystemen aufgestellt werden kann, falls die entsprechenden Gleichungssysteme äquivalent sind. Dieser Satz lautet: Sind $G, G', G'', \ldots$ irgend welche ganze rationale homogene Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, die für alle diejenigen Wertsysteme dieser Veränderlichen verschwinden, welche die Funktionen des Modulsystemes $(F_1, F_2, \ldots F_m)$ zu Null machen, so ist es stets möglich, eine ganze Zahl r so zu bestimmen, dass jedes Produkt $\Pi^{(r)}$ von r beliebigen Funktionen der Reihe $G, G', G'', \ldots$ durch das Modulsystem teilbar ist:

$$\Pi^{(r)} = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_m F_m.$$[82]

Auf diese drei Hauptsätze hat Hilbert den Beweis der Endlichkeit des zu einem System ganzer rationaler Formen gehörigen Invariantensystemes, den Beweis der Endlichkeit der zwischen den Invarianten bestehenden irreduktibelen Syzygien, den Satz von der Syzygienkette, welche im Endlichen abbricht, und die Untersuchung des Invariantenkörpers gegründet (vgl. Nr. **11** und I B 2, Nr. **6**, **7**).

19. Verallgemeinerung des Teilbarkeits- und Äquivalenzbegriffes. Der Satz III von Hilbert zeigt, dass aus der Äquivalenz zweier Gleichungssysteme nicht unbedingt die Äquivalenz der entsprechenden Modulsysteme gefolgert werden darf. Diese Thatsache ward bereits von *Kronecker* an folgendem Beispiele bemerkt: Sind $A_0, A_1, \ldots A_r$, $B_0, B_1, \ldots B_s$ irgend welche (auch nicht homogene) ganze Funktionen mehrerer Veränderlichen $x_1, \ldots x_n$ und setzt man mit Einführung einer Unbestimmten X

$$(1)\quad (A_0 X^r + A_1 X^{r-1} + \cdots + A_{r-1} X + A_r)(B_0 X^s + B_1 X^{s-1} + \cdots + B_s)$$
$$= C_0 X^{r+s} + C_1 X^{r+s-1} + \cdots + C_{r+s},$$

so stellen die $(r+1)(s+1)$ Gleichungen

$$A_0 B_0 = A_0 B_1 = \cdots = A_0 B_{s-1} = A_1 B_0 = \cdots = A_r B_s = 0$$

an die Veränderlichen $x_1, \ldots x_n$ dieselben Anforderungen, wie die

82) Ein spezieller Fall dieses Satzes ($n = 3$) wurde bereits früher von *Netto* erwiesen (Acta math. 7, p. 101 [1886]). *Netto* bestimmt in diesem Falle die Zahl r als die höchste bei den Schnittpunkten der Kurven auftretende Multiplizität; vgl. auch *Netto*, Algebra 2, §§ 427 ff.

$(r + s + 1)$ Gleichungen: $C_0 = C_1 = \cdots = C_{r+s} = 0$. Betrachtet man aber die zugehörigen Modulsysteme

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (A_0, A_1, \cdots A_r)(B_0, B_1, \cdots B_s) = (A_\varrho B_\sigma) \quad \begin{pmatrix} \varrho = 0, 1, \cdots r \\ \sigma = 0, 1, \cdots s \end{pmatrix}$$

und

$$\mathfrak{C} = (C_0, C_1, \cdots C_{r+s}),$$

so ist zunächst nur ersichtlich, dass $\mathfrak{C}$ durch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ teilbar ist. Zur Erklärung der Äquivalenz stellt Kronecker den Satz auf: Unter Voraussetzung der Geltung der Gleichung (1) ist jedes Element $A_\varrho B_\sigma$ des Modulsystemes $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ Wurzel einer Gleichung:

$$(2) \qquad V^m + G_1 V^{m-1} + G_2 V^{m-2} + \cdots + G_m = 0,$$

deren Koeffizienten $G_1, \ldots G_m$ der Reihe nach durch $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}^2, \ldots \mathfrak{C}^m$ teilbar sind[83]). Der gleiche Satz ward, unabhängig von Kronecker, von Dedekind in der Form aufgestellt: Sind unter Voraussetzung der Geltung der Gleichung (1) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ die drei Moduln

$$\mathfrak{a} = [A_0, A_1, \cdots A_r], \ \mathfrak{b} = [B_0, B_1, \cdots B_s], \ \mathfrak{c} = [C_0, C_1, \cdots C_{r+s}],$$

so ist

$$\mathfrak{a}^{s+1}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^s \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{r+1} = \mathfrak{b}^r \mathfrak{c}.$$ [84])

Man kann eine Funktion V, welche einer Gleichung der Form (2) genügt, ebenfalls durch $\mathfrak{C}$ teilbar nennen, wenn man den Teilbarkeitsbegriff erweitert, und dann sagt der Satz von Kronecker einfach wieder die Äquivalenz der beiden Modulsysteme $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ aus. Bei dieser Verallgemeinerung des Teilbarkeits- und Äquivalenzbegriffes bleiben die früheren Fundamentalsätze im wesentlichen bestehen. *A. Hurwitz* hat aus dem Satze von Kronecker den Satz abgeleitet: Bedeuten in der Gleichung (1) $A_0, \ldots A_r, B_0, \ldots B_s$ ganze algebraische Zahlen und sind die Zahlen $C_0, \ldots C_{r+s}$ durch eine ganze algebraische Zahl ω teilbar, so ist auch jedes Produkt $A_\varrho B_\sigma$ durch ω teilbar. Auf diesem Satze lässt sich in sehr einfacher Weise die Theorie der Ideale eines Zahlkörpers (oder Funktionenkörpers) aufbauen[85]).

20. Fundamentalsatz von Noether. Wenn eine ganze Funktion $f(x, y)$ zweier Veränderlichen für alle Wertsysteme verschwindet, welche die beiden ganzen Funktionen $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ zu Null machen, so folgt aus dem III. Satze von Hilbert nur, dass $f^r \equiv 0$

---

83) Berl. Ber. 1883, p. 957 = Werke 2, p. 417; *Molk,* Acta math. 6 (1885), p. 71 ff.

84) Prag Deutsche Math. G. M., 1892, p. 1; Gött. Nachr. 1895, p. 106.

85) Gött. Nachr. 1894, p. 291, 1895, p. 230.

(modd. φ, ψ) ist; es entsteht die Frage, unter welchen Bedingungen der Exponent $r = 1$ angenommen werden darf. *M. Noether* hat als notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen der Gleichung

$$f = A\varphi + B\psi$$

die folgende erwiesen: Denkt man sich für irgend einen gemeinsamen Punkt ($x = a$, $y = b$) der beiden Kurven $\varphi = 0$, $\psi = 0$ die Funktionen f, φ, ψ, A, B nach Potenzen von $x - a$ und $y - b$ entwickelt, so müssen die linearen Gleichungen, welche sich für die noch unbestimmten Koeffizienten von A und B einstellen, *für jeden einzelnen* der Schnittpunkte erfüllbar sein. Wenn insbesondere φ einen i-fachen, ψ einen k-fachen Punkt mit getrennten Tangenten in $x = a$, $y = b$ besitzt, so ist das Vorhandensein eines $(i + k - 1)$-fachen Punktes für f eine hinreichende Bedingung[86]). Da dieser Satz für die *Brill-Noether*'sche Theorie der algebraischen Funktionen grundlegend ist, so wird er als „Fundamentalsatz" bezeichnet. Spätere Untersuchungen haben sich mit Vereinfachung des Beweises[87]) und mit Bestimmung derjenigen Dimensionenzahl beschäftigt, bis zu welcher die Vergleichung der Koeffizienten erfolgen muss; *E. Bertini* findet diese Zahl $\alpha' = (\alpha - ik) + (i + k - 2)$, wenn φ einen i-fachen, ψ einen k-fachen Punkt besitzt und die Multiplicität der Schnittstelle $= \alpha$ ($\geq ik$) ist[88]).

21. Modulsysteme zweiter Stufe; ihre Normalformen. Soll der Fundamentalsatz von Noether und die analogen Sätze im Raume von mehr als zwei Dimensionen mit Hilfe der rein arithmetischen Theorie der Modulsysteme gewonnen werden, so ist hierzu eine eingehendere Untersuchung der Modulsysteme zweiter Stufe notwendig. Die hier vorliegenden Untersuchungen knüpfen an diejenigen Modulsysteme zweiter Stufe

$$\mathfrak{M} = (A_1(x), \cdots A_n(x), m)$$

an, welche aus n ganzen ganzzahligen Funktionen von x und einer Zahl m, die mit jenen keinen gemeinsamen Teiler hat, bestehen und bei welchen es sich um Teilbarkeit zweiter Art handelt (s. Nr. **13**). Die Hauptresultate sind von hier auf beliebige Modulsysteme zweiter Stufe leicht zu übertragen. Der einfachste Fall ist der, dass die Zahl m eine Primzahl p ist. Dann können die Funktionen $A_1, \ldots A_n$ stets durch eine einzige Funktion $M(x)$ (den grössten gemeinsamen

86) Math. Ann. 6, p. 351 (1873).

87) *A. Voss,* Math. Ann. 27 (1886), p. 527; *Noether,* Math. Ann. 30 (1887), p. 410; *L. Stickelberger,* ibid. p. 401; *A. Brill,* Math. Ann. 39 (1891), p. 129.

88) Math. Ann. 34 (1889), p. 447 und Lomb. Ist. R. (2), 24 (1891), p. 1095; *Noether,* Math. Ann. 40 (1892), p. 140.

Teiler nach dem Modul p) ersetzt werden und es gelingt, die Gesetze der gewöhnlichen Zahlentheorie auf diese Modulsysteme zu übertragen, was von *C. F. Gauss, J. A. Serret, Schönemann, Dedekind*[89]) in verschiedenen Richtungen durchgeführt worden ist. Unter diesen Modulsystemen sind die von der Form (P, p), in welcher die Funktion P nach dem Modul p nicht mehr in Faktoren zerlegt werden kann, von besonderer Wichtigkeit, weil diese Modulsysteme und diese allein *Primmodulsysteme* sind.

Wenn die Zahl m keine Primzahl ist, so handelt es sich in erster Linie darum, das Modulsystem auf eine Normalform zu bringen, vermöge deren es *durch einfache Divisionen* entschieden werden kann, ob eine vorgelegte ganze ganzzahlige Funktion X durch das Modulsystem $\mathfrak{M}$ teilbar ist oder nicht. Nach *K. Hensel* und *G. Landsberg*[90]) kann jedes Modulsystem zweiter Stufe in ein äquivalentes Modulsystem in der Normalform:

$$\mathfrak{N} = (F_1, e_1 F_2, e_2 F_3, \cdots e_{r-1} F_r, e_r)$$

umgewandelt werden, dessen Elemente die folgenden vier charakteristischen Eigenschaften haben:

1) Die höchsten Koeffizienten der Funktionen $F_1, \ldots F_r$ sind gleich 1.

2) Ihre Grade $\gamma_1, \ldots \gamma_r$ bilden eine absteigende Reihe.

3) Jede der Zahlen e_ϱ ist ein eigentlicher Teiler der nächstfolgenden $e_{\varrho+1}$.

4) Wenn $r > 1$, so ist die Funktion F_ϱ (für $\varrho = 1, 2, \cdots r-1$) durch das Modulsystem teilbar:

$$\mathfrak{N}_\varrho = \left(F_{\varrho+1}, \frac{e_{\varrho+1}}{e_\varrho} F_{\varrho+2}, \cdots \frac{e_{r-1}}{e_\varrho} F_r, \frac{e_r}{e_\varrho}\right),$$

welches ebenfalls die Normalform hat. Soll eine Funktion X durch das Modulsystem $\mathfrak{N}$ teilbar sein, so muss der Rest, den X bei der Division durch F_1 ergiebt, den Faktor e_1 haben und nach Weglassung dieses Faktors muss die so entstehende Funktion X_1 durch $\mathfrak{N}_1$ teilbar sein; die Entscheidung, ob X_1 durch $\mathfrak{N}_1$ teilbar ist, wird dann in gleicher Weise auf die Frage der Teilbarkeit einer Restfunktion X_2 durch das Modulsystem $\mathfrak{N}_2$ zurückgeschoben u. s. f. Alle einfachen auf das Modulsystem bezüglichen Fragen (z. B. welche Modulsysteme

89) *Gauss,* Werke 2, p. 197 (Nachlass); *Serret,* Algebra 2^3; *Schönemann,* J. f. Math. 31, p. 269; 32, p. 92 (1846); *Dedekind,* J. f. Math. 51, p. 1 (1856).

90) *Hensel,* J. f. Math. 118, p. 234; 119, p. 114, 175 (1897/98); *Landsberg,* Gött. Nachr. 1897, p. 277 [I B 1 b, Nr. 26].

in $\mathfrak{M}$ enthalten sind, wieviel inkongruente Funktionen es giebt) finden durch Aufstellung einer solchen Normalform ihre Beantwortung.

Jedes Modulsystem kann auf eine und nur eine Weise in eine Reihe „einfacher“ Modulsysteme zerlegt werden. Ein einfaches Modulsystem ist dadurch charakterisiert, dass nur ein einziges Primmodulsystem (P, p) in ihm aufgeht. Wenn eine Funktion X durch alle in dem Modulsysteme $\mathfrak{M}$ aufgehenden einfachen Modulsysteme teilbar ist, so ist sie auch durch das Modulsystem $\mathfrak{M}$ teilbar.

Stellt man die analogen Sätze für diejenigen Modulsysteme zweiter Stufe auf, welche aus ganzen Funktionen zweier Veränderlichen bestehen und bei welchen es sich um Teilbarkeit erster Art handelt, so ergiebt der letzte Satz den *Noether*'schen Fundamentalsatz.

22. Darstellung algebraischer Gebilde durch rationale Parameter; Satz von Lüroth. Unter den algebraischen Gebilden beherrscht man am vollständigsten die von *einer* Dimension (Kurven im Raume von $2, 3, \ldots n$ Dimensionen), weil hier die wohlausgebildete Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen das Mittel abgiebt, alle Eigentümlichkeiten des Gebildes vollständig zu untersuchen[91]). Unter diesen Kurven sind diejenigen ausgezeichnet, deren Koordinaten sich als *rationale* Funktionen eines Parameters darstellen und welche sich also umkehrbar eindeutig auf eine gerade Linie beziehen lassen. Solche Kurven heissen *rationale* oder (nach *A. Cayley*)[92]) *Unikursalkurven*. Ist die Kurve eben und von der n^{ten} Ordnung, so besitzt sie $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkte oder eine Anzahl von Singularitäten, welche jenen äquivalent sind, und umgekehrt ist eine Kurve n^{ter} Ordnung mit $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Doppelpunkten stets eine rationale Kurve. Diese charakteristische Eigenschaft kann auch dahin ausgesprochen werden, dass es kein auf die Kurve bezügliches Abel'sches Integral erster Gattung giebt oder dass das Geschlecht Null ist, und diese Begriffsbestimmung hat den Vorzug, dass sie für Kurven mit beliebigen Singularitäten gilt, und ohne weiteres auf Kurven im Raume von mehr als zwei Dimensionen übertragen werden kann (s. II B 2).

R. F. A. Clebsch hat sich nächst den rationalen Kurven auch mit den Flächen beschäftigt, welche umkehrbar eindeutig auf eine Ebene

91) Grundlegend für die Untersuchung der Raumkurven mit Hilfe d. Th. d. alg. F. sind die Arbeiten von *Noether*, Berl. Abh. 1883, Auszug in J. f. Math. 93, p. 271 (1882) u. *G. Halphen*, J. Éc. polyt. vol. 33, cah. 52, p. 1 (1882).

92) London Math. Soc. 1, p. 1, Oct. 1865 = Coll. Pap. 6, p. 1. Vgl. *W. Fr. Meyer*, Apolarität und rationale Kurven, Tüb. 1883 [III C 3].

abbildbar sind und deren Koordinaten hiernach als rationale Funktionen zweier Parameter dargestellt werden können[93]). Die allgemeinen Bedingungen, welche eine Fläche erfüllen muss, damit ihre Koordinaten eine derartige Darstellung zulassen, hat *M. Noether* angegeben[94]). Es muss erstens auf der Fläche eine Schar rationaler Kurven existieren; unter dieser Voraussetzung ist das sogenannte *Flächengeschlecht* gleich Null[95]) und es lassen sich die Koordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes der Fläche als rationale Funktionen dreier Parameter u, v, w so darstellen, dass zwischen den beiden ersten Parametern u, v eine algebraische Gleichung $\varphi(u, v) = 0$ besteht[96]). Das Geschlecht dieser Gleichung wird dann als das *Kurvengeschlecht* der Fläche bezeichnet, und wenn dieses Kurvengeschlecht ebenfalls Null ist, so lässt sich an Stelle der beiden algebraischen Parameter u, v ein rationaler Parameter einführen und die Fläche ist rational.

Mannigfaltigkeiten, deren Koordinaten als rationale Funktionen mehrerer Parameter dargestellt werden können, treten mehrfach in der Algebra auf. Insbesondere sind nach *L. Euler* und *A. Cayley* die n^2 Elemente eines quadratischen orthogonalen Systemes als rationale Funktionen von $\frac{1}{2} n (n - 1)$ Parametern darstellbar[97]). Ebenso können nach *Frobenius* und *A. Voss*[98]) die Elemente einer Substitution, welche eine bilineare Form von nicht verschwindender Determinante kogredient in sich überführt, im allgemeinen durch rationale Parameter dargestellt werden. Gewisse hierbei auftretende Ausnahmefälle sind von *Frobenius, Kronecker, A. Loewy*[99]) untersucht worden [I B 2, Nr. 3].

93) J. f. Math. 64 (1865), p. 43; Math. Ann. 1 (1869), p. 253.

94) Gött. Nachrichten 1869, p. 298; Math. Ann. 2 (1870), p. 293 u. 8 (1875), p. 495.

95) Das Flächengeschlecht kann ebenfalls ganz allgemein als die Anzahl der von einander linear unabhängigen, auf die Fläche bezüglichen Doppelintegrale erster Gattung definiert werden; s. *É. Picard* et *G. Simart,* Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, 1, Paris 1897, p. 191 ff.

96) *Picard* beweist (J. f. Math. 100 [1887], p. 71) den hieher gehörigen Satz: Wenn alle ebenen Schnitte einer algebraischen Fläche Unikursalkurven sind, so ist die Fläche entweder eine unikursale Regelfläche oder eine Steiner'sche Fläche. Über die bez. Untersuchungen italienischer Geometer s. III C 6.

97) *Euler,* Nov. Comm. Petrop. 15 (1770), p. 75; 20, p. 217; *Cayley,* J. f. Math. 32, p. 119 (1846) = Coll. Pap. 1, p. 332; *Baltzer,* Determinantentheorie, 5. Aufl., Leipzig 1881, § 14, 6 [I B 2, Nr. 3].

98) *Frobenius,* J. f. Math. 84, p. 1 (1878) für symmetrische und alternierende, *Voss,* Münch. Abh. II. Kl., 17 (1890) für beliebige Bilinearformen.

99) *Frobenius,* J. f. Math. 84, p. 1 (1878); *Kronecker,* Berl. Sitzungsber. 1890, p. 525. 602. 692. 873. 1063; *Loewy,* Math. Ann. 48, p. 97 (1897).

Ist im Raume von n Dimensionen eine rationale Kurve in der Parameterdarstellung gegeben: $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, $\cdots x_n = \varphi_n(t)$, so hat sich *J. Lüroth* die Frage nach der algebraischen Beziehung gestellt, welche zwischen dem Parameter t und den Koordinaten $x_1, \ldots x_n$ besteht. Es ergiebt sich, dass stets eine rationale Funktion von t: $\tau = r(t)$ als rationale Funktion von $x_1, \ldots x_n$ dargestellt werden kann. Ist $\tau = t$ oder eine lineare Funktion von t, so ist die Kurve direkt *umkehrbar* eindeutig auf eine Gerade bezogen; ist τ eine Funktion höheren Grades von t, so kann man $x_1, \ldots x_n$ auch als rationale Funktion von τ darstellen, wodurch der zweite Fall auf den ersten zurückgeführt wird[100]).

23. Transformation algebraischer Gebilde. Die in voriger Nr. behandelten Sätze über die rationale Darstellung algebraischer Gebilde behandeln nur ein spezielles Problem der allgemeinen Theorie der Transformation algebraischer Gebilde. Werden die Koordinaten $x_1, \ldots x_n$ eines algebraischen Gebildes einer Transformation $x_1 = \Theta_1(y_1, \ldots y_n), \ldots x_n = \Theta_n(y_1, \ldots y_n)$ unterworfen, in welcher $\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n$ rationale Funktionen von $y_1, \ldots y_n$ sind, so lassen sich vermöge der zwischen den Koordinaten $x_1, \ldots x_n$ bestehenden Gleichungen im allgemeinen auch $y_1, \ldots y_n$ als rationale Funktionen von $x_1, \ldots x_n$ darstellen, und die beiden Gebilde, deren Punkte die Koordinaten $y_1, \ldots y_n$ und $x_1, \ldots x_n$ besitzen, entsprechen einander umkehrbar eindeutig. Alle algebraischen Gebilde, welche sich in einander umkehrbar eindeutig transformieren lassen, werden in eine *Klasse* gerechnet, und es entsteht die Aufgabe, diejenigen Eigenschaften eines algebraischen Gebildes zu ermitteln, welche jeder umkehrbar eindeutigen Transformation gegenüber invariant sind und also der ganzen Klasse algebraischer Gebilde zukommen.

Das vorstehend dargelegte Prinzip ist im Falle $n = 2$ von *B. Riemann*[101]) aufgestellt und in umfassender Weise zur Geltung gebracht worden. Das Hilfsmittel der Untersuchung bilden in erster Linie die auf das Gebilde bezüglichen, von einander linear unabhängigen Integrale erster Gattung, deren Anzahl gleich dem Geschlechte p des algebraischen Gebildes ist[102]); die Zahl p ist selbst eine Invariante bei birationaler Transformation. Die Übertragung des Prinzipes auf den Fall $n = 3$ (und höheres n) ist Gegenstand der Untersuchung von

100) *Lüroth,* Math. Ann. 9, p. 163 (1875), für $n = 2$; *Weber,* Algebra 2, § 107 für beliebiges n.

101) Theorie der Abel'schen Funktionen § 12 (1857), (J. f. Math. 54 = Werke, p. 88).

102) *Noether,* Math. Ann. 17, p. 263 (1880).

Noether, *H. Poincaré*, *Picard*[103]) geworden. Die im einzelnen gewonnenen Resultate fallen in das Gebiet der Theorie der algebraischen Funktionen (II B 2) und der Theorie der algebraischen Transformationen und Korrespondenzen (III C 8).

Eine ganz analoge Entwickelung wie die allgemeine Theorie der algebraischen Funktionen hat seit *Clebsch* (s. o.) die algebraische *Geometrie* genommen. Die Resultate dieser Theorie stellen für die Algebra in erster Linie das Hilfsmittel der *Cremona*transformationen zur Verfügung. Eine ebene *Cremona*transformation n^{ter} Ordnung ist eine umkehrbar eindeutige Beziehung zweier Ebenen auf einander, bei welcher den Geraden der einen Ebene eine lineare Schar von ∞^2 rationalen Kurven mit festen Singularitäten entspricht[104]). Bei jeder solchen Transformation giebt es, ebenso wie bei den Abbildungen rationaler Flächen auf eine Ebene, „Fundamentalpunkte", denen in der Bildebene nicht Punkte, sondern Kurven („Fundamentalkurven") entsprechen. Jede ebene Cremonatransformation n^{ter} Ordnung kann durch eine Folge von Transformationen 2^{ter} Ordnung ersetzt werden[105]). Die Cremonatransformationen können auf den Raum übertragen und können in dem Sinne verallgemeinert werden, dass man überhaupt irgend welche Abbildung zweier Flächen (zweier Gebilde) auf einander nach gleicher Methode untersucht[106]). Durch derartige algebraische Transformation kann jedes algebraisches Gebilde mit Singularitäten umkehrbar eindeutig auf ein singularitätenfreies Gebilde bezogen werden, wenn man nämlich nötigenfalls die Dimension des linearen Raumes, in welchem das zweite Gebilde gelegen ist, hinreichend gross wählt[107]). Die weitere Verfolgung dieser analytisch geometrischen Methoden hat in neuester Zeit bei den italienischen Geometern zu dem Versuche einer allgemeinen Theorie der algebraischen Gebilde zweiter Dimension geführt[108]) [III C 5, 9]. Ein Überblick über die für die Algebra hieraus abfliessenden gesicherten Resultate ist zur Zeit noch nicht angängig.

103) *Noether,* die in 94) citierten Abhandlungen. *Poincaré,* Acta Math. 2, p. 97 (1883) u. 9, p. 321 (1887); *Picard* et *Simart,* Fonctions algébriques.

104) *L. Cremona,* G. di mat. 1, p. 305 (1863) u. 3, p. 269 (1865), od. Bol. Mem. (2), 2 u. 5.

105) *Noether,* Math. Ann. 3, p. 167 (1870); *Cayley,* Lond. Math. Soc. Pr. 3, p. 161 (1870) = Coll. Pap. 7, p. 253; *J. Rosanes,* J. f. M. 73, p. 97 (1870).

106) *Noether,* Math. Ann. 2, p. 293 (1870); 3, p. 547 (1871); Ann. di mat. (2) 5, p. 163 (1872); *Cremona,* Ann. di mat. (2) 5, p. 131 (1871); Lomb. Istit. R. (2) 4, p. 269, 315 (1871).

107) *Picard* et *Simart,* Fonctions algébriques, chap. 4, 1.

108) Eine Übersicht über den gegenwärtigen Stand der Untersuchung und die bisherige Litteratur giebt die Abhandlung von *F. Enriques* und *G. Castelnuovo,* Math. Ann. 48, p. 241 (1897); vgl. *Enriques,* Zürich Congr. Verh. 1898, p. 145.

IB 2. INVARIANTENTHEORIE

VON

W. FR. MEYER

IN KÖNIGSBERG I./PR.

Inhaltsübersicht.

25. Resultanten und Diskriminanten.
26. Realitätsfragen.
27. Weitere spezielle Formen und Gruppen.

Monographien.

J. J. Sylvester, On the Principles of the Calculus of Forms. Cambr. Dubl. math. J. 7 (1852), p. 52, 179; 8 (1853), p. 62, 256; 9 (1854), p. 85. Dazu als Einleitung ib. 6 (1851), p. 186, 289.

A. Cayley, Memoirs upon Quantics, Lond. Tr.: I, 144 (1854), p. 244; II, III, 146, (1856), p. 101, 627; IV, V, 148 (1858), p. 415, 429; VI, 149 (1859), p. 61; VII, 151 (1861), p. 277; VIII, 157 (1867), p. 513; IX, 161 (1871), p. 17; X 169 (1878), p. 603. Abgedruckt (mit Zusätzen des Verf.) in Coll. Papers 2: I, p. 221; II, p. 250; III, p. 310; IV, p. 513; V, p. 527; VI, p. 561; 4: VII, p. 325; 6: VIII, p. 147; 7: IX, p. 334; 10: X, p. 339. Dazu die numerischen Tafeln zu II in Pap. 2 (1889), p. 276, und die Tafeln für Formen der f_5 ib. p. 282.

G. Salmon, Lessons introductory to the modern higher algebra, Dublin 1. ed. 1859, 4. ed. 1885 (hauptsächlich binäre Formen; citiert unter „Salmon"). Deutsch bearb. von *W. Fiedler:* Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen, Leipzig, 1. Aufl. 1863; 2. Aufl. 1877 („Salmon-Fiedler").

F. Brioschi, Teorica dei Covarianti, Roma 1861 (Binäre Formen).

W. Fiedler, Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen, Leipzig 1862.

G. Battaglini, Gi. di mat. 9 (1871), p. 1, 76; 14 (1876), p. 54 (Binäre Formen). Ib. 8 (1870), p. 38, 129; 10 (1872), p. 152, 193 (Ternäre Formen); ib. 21 (1883), p. 50, 293; 25 (1887), p. 281 (Bilineare Formen).

A. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig 1872 („Clebsch").

Faà di Bruno, Théorie des formes binaires, Turin 1876. Deutsch bearb. von *Th. Walter* mit Unterst. von *M. Noether,* Einleitung in die Theorie der binären Formen, Leipzig 1881 („Bruno").

P. Gordan, Über das Formensystem der binären Formen, Univ.-Progr. Erlangen, Leipzig 1875 („Programm"). Vorlesungen über Invariantentheorie, herausg. von *G. Kerschensteiner,* 1. Determinanten, 2. Binäre Formen, Leipzig 1885, 1887 („Gordan").

A. Capelli, Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche, Rom. Linc Mem. 12 (1882), p. 1.

G. Rubini, Teorica delle forme in generale, especialmente delle binarie. I. Esposizione dell' algoritmo fondamentale di questa teoria, Lecce 1886.

E. Study, Methoden zur Theorie der ternären Formen, Leipzig 1889 („Study").

J. Deruyts, Essai d'une théorie générale des formes algébriques, Bruxelles 1891 (Seminvarianten) („Deruyts").

W. Fr. Meyer, Bericht über die Fortschritte der proj. Invariantentheorie, deutsche Math.-Vereinigg., 1, 1892 („Inv. Ber."); französ. Ausgabe von *H. Fehr,* Paris 1897; ital. Ausgabe von *G. Vivanti,* Napoli 1899.

E. B. Elliott, An Introduction to the algebra of Quantics, Oxford 1895 („Elliott").

P. Muth, Grundlagen für die geom. Anwendung der Invariantenth., Leipzig 1895.

— Theorie der Elementarteiler, Leipzig 1899 („Muth"). (Äquivalenz der bilinearen und quadratischen Formen).

H. Andoyer, Théorie des Formes, Paris 1898.

Vgl. noch die einschlägigen Kap. in *A. Clebsch* u. *F. Lindemann,* Vorlesungen über Geometrie 1, Leipzig 1875/76, franz. v. *A. Benoist,* Paris 1879/83; 2^1, Leipzig 1891; *W. S. Burnside* u. *A. W. Panton,* Theory of Equations, 3. ed., Dublin 1892, New-York 1893; *H. Weber,* Höhere Algebra, Braunschweig 1895/96 1, 2; 1, 2. Aufl. 1898 („Weber"); franz. v. *J. Gries*, Paris 1898; *A. Capelli,* Algebra complementare, 2. ed., Napoli 1898.

Bezeichnungen.

Eine binäre Form n^{ter} Ordnung wird mit f_n, g_n, ... bezeichnet, eine ternäre mit C_n, eine quaternäre und höhere mit F_n; die dualistischen Formen entspr. mit griechischen Buchstaben. Sind $x_1, x_2, \ldots x_m$ die Variabeln, a die Koeffizienten, so ist die genauere Bezeichnung $F_n = F_n(x_1, \ldots x_m \mid a) = F_n(x \mid a)$, dualistisch $\Phi_\nu(u \mid \alpha)$. Analog bei mehreren Variabelnreihen; so z. B. ist $F_{11} = F_{11}(x; y \mid a)$ eine bilineare Form. Das Wort „Ordnung" bezieht sich stets auf die Variabeln, „Grad" auf die Koeffizienten. Die i^{te} Überschiebung (Nr. **14**) von f über g hat das Zeichen $(f, g)_i$, entspr. allgemein von $F(x)$ über $\Phi(u) : (F, \Phi)_i$; eine lineare Substitution hat das Zeichen S.

---

1. Keime der Theorie. *J. Lagrange*[1]) konstatiert, aus Anlass der Darstellung einer ganzen Zahl (I C 2) durch eine quadratische Form $f_2(x, y) = a_0x^2 + 2a_1xy + a_2y^2$, dass sich die „Diskriminante"[2]) („Determinante")[3]) $a_0a_2 - a_1{}^2$ von f_2 beim Übergange von x zu $x + \lambda y$ nicht ändert. — Bei *K. F. Gauss*[3]) bildet bereits die allgemeine lineare „Substitution" („Transformation") S der homogenen Variabeln die Grundlage für die Zahlentheorie der f_2 und C_2, deren Diskriminanten (Nr. **25**) als „Invarianten"[4]) nachgewiesen werden, d. i. als Ausdrücke in den Koeffizienten der f_2 resp. C_2, die sich nach Ausübung von S nur um eine (die zweite) Potenz der Substitutionsdeterminante (I B 1 b, Nr. **12**) oder des „Moduls"[5]) Δ ändern.

---

1) Berl. Mém. 1773, p. 265 bes. p. 268 = Oeuvr. 3, p. 699, 701.

2) Der Ausdruck von *J. J. Sylvester,* Cambr. Dubl. m. J. 7 (1852), p. 52.

3) Disquis. arithmeticae, Braunschweig, 1801 = Werke 1; deutsch von *H. Maser,* Berlin 1889; frz. v. *A. C. M. Poullet-Delisle,* Par. 1807. *G.* nennt eine ganze, rationale, homogene Funktion von 2, 3, ... Variabeln eine „binäre, ternäre, ... Form", art. 266. Die Determinante der f_2: art. 157, der C_2: art. 267. Zwei Formen, die durch (ganzzahlige) S wechselseitig in einander überführbar sind, heissen „äquivalent": art. 157, 270. Als einfachste weitere Invarianten treten auf bei *G. Boole,* Cambr. math. J. 3 (1841), p. 7 die Diskr. der f_3; bei *G. Eisenstein* die quadratische Invariante i und die kubische j der f_4: J. f. Math. 27 (1844), p. 81; die Ausdrücke (ohne Erkenntnis der Invarianz) schon bei *A. Cauchy,* J. Éc. pol. 16 (1815), p. 457.

4) Der Ausdruck von *J. J. Sylvester,* Cambr. Dubl. m. J. 6 (1851), p. 290.

5) Der Ausdruck von *J. J. Sylvester,* Cambr. Dubl. m. J. 6 (1851), p. 188; für $\Delta = 1$ heisst die S „unimodular", ib. 7 (1852), p. 52.

Der von *A. Cauchy*[6]) und *J. Binet*[6]) allgemein bewiesene Satz über die Multiplikation zweier Determinanten (I A 2, Nr. **21**) sagt aus, dass sich eine Determinante „invariant verhält", d. h. sich nur um eine (die erste) Potenz von Δ ändert, wenn die Elemente je einer Reihe (oder Kolonne) der nämlichen S unterworfen werden.

Andere Keime unserer Theorie finden sich in den Entwickelungen[7]) französischer und englischer Mathematiker und Physiker über orthogonale (Nr. **3**) Transformation der F_2 in Aggregate von Quadraten. Ferner in der durch *V. Poncelet* und *J. D. Gergonne* ins Leben gerufenen, durch *M. Chasles, F. Möbius, J. Plücker, J. Steiner* und *Ch. v. Staudt* weiter ausgebildeten projektiven Geometrie[8]); das Doppelverhältnis und die Polarreziprozität lehrten, dass gewisse Ausdrücke resp. gewisse Eigenschaften von Figuren bei linearen Transformationen der Koordinaten erhalten bleiben.

2. Entwickelung des Invariantenbegriffes. *G. Boole*[9]) wies nach, dass die Diskriminante D einer Urform $F_n(x \mid a)$ eine „Invariante" $J = J(F)$ von F ist, d. h. wenn vermöge einer S vom Modul Δ sich

---

6) *Cauchy* in J. Éc. pol. 9, cah. 16 (1815) (lu Nov. 1812), p. 286; *Binet,* ib. 10 (1815), cah. 17 (lu Nov. 1812), p. 29 bes. p. 81, 107. Eine unmittelbare Anwendung des Satzes ist die Multipl. zweier Funktionaldeterminanten (vgl. I B 1 b, Nr. **21**) bei *C. G. J. Jacobi,* J. f. Math. 22 (1841), p. 319 = Werke 3, p. 393, deutsch von *P. Stäckel,* Ostwalds Klassiker, Leipzig, Nr. 78. Die Funktionaldet. erscheint invariant gegenüber beliebigen Transformationen der Variabeln [Anm. 271, 369 a]. Wegen der Anwendung auf die Transf. vielfacher Integrale s. II A 2, Nr. **41**, Anm. 253.

7) Vgl. die Litteraturangaben in *R. Baltzer*'s Determinanten, 5. Aufl., Leipzig 1881; auch bei *G. Boole,* Cambr. Math. J. 1 (1843), p. 1.

8) Vgl. *A. Clebsch,* Gött. Abh. 15 (1872), p. 1 = *J. Plücker*'s Ges. Math. Abh. 1, Leipzig 1875, p. 1; sowie bes. *E. Kötter,* Bericht über die Entw. der synth. Geom., Deutsche Math.-Vereinig. 5^2 (1898), p. 1; *A. Schönflies* in *J. Plücker*'s Math. Abh. (Anhang). Wegen anderer Vorstufen der Theorie vgl. *P. Gordan,* Math. Ann. 7 (1873), p. 38; sowie, auch bez. des indirekten Eingreifens von *E. Galois* und *H. Grassmann* „Inv. Ber." p. 81, 84. — Über die symbol. Bezeichnung bei der Taylor'schen Reihe s. II A 2, Nr. **12**.

9) Cambr. math. J. 3 (1841) (dat. 28. April), p. 1. *B.* studiert die Äquivalenz zweier Formenpaare F_n, G_n; F'_n, G'_n; die Gleichungen $D(F+\lambda G) = 0$, $D(F'+\lambda G') = 0$ müssen dann übereinstimmen. Im Falle von Paaren ungleicher Ordnung reduziert *B.* in Cambr. math. J. 3 (1841), p. 106 die Aufgabe durch totale Differentiation (vgl. noch ib. 2 [1841], p. 61) auf die Äquiv. von Differentialformen gleicher Ordnung.

10) w wird von *B.* auf Grund eines Satzes von *Sylvester* genauer bestimmt, Cambr. math. J. 4 (1844), p. 167, als $n(n-1)^{m-1}$, wenn m die Anzahl der Variabeln. w heisst nach *Cayley,* II. Mem., das „Gewicht" der Invariante

$F(x\,|\,a)$ ändert in $F'(x'\,|\,a')$, so ist $J(a') = \Delta^w J(a)$, wo w[10]) eine gewisse natürliche Zahl ist. *B.* bedient sich des „*Aronhold*'schen Prozesses“[11]) $\sum b_i \frac{\partial J}{\partial a_i}$ (Nr. **13**), um aus J eine Simultaninvariante von $F_n(x\,|\,a)$, $G_n(x\,|\,b)$ herzuleiten. Es lässt sich[12]) die Definition einer (in den $a, b, \ldots$ ganz-rationalen) Invariante dahin einschränken, dass sie sich nach Ausübung von S um einen Faktor ändert, der nur von den S-Koeffizienten σ abhängen soll.

G. Boole[13]), *G. Eisenstein*[13]) und *O. Hesse*[14]) zogen schon „Kovarianten“ C von $F_n(x\,|\,a)$ in Betracht, d. s. Formen der x und der a, die der Forderung $C(x'\,|\,a') = \Delta^w C(x\,|\,a)$ genügen, *Gauss*[15]) schon analoge „Kontravarianten“ $\Gamma(u\,|\,a)$, die statt der x die u (s. unten) enthalten, zu denen u. a. *Ch. Hermite*'s[16]) „adjungierte Formen“ (Nr. **12**, **13**, **18**) gehören. — *A. Cayley*[17]) giebt Prozesse an, um beliebig viele

---

(Nr. **9**, **18**, **23**). J heisst gerade resp. ungerade (schief), je nachdem w gerade oder ungerade ist.

11) J. f. Math. 62 (1863), p. 281.

12) *A. Clebsch,* Bin. Formen, p. 306; *P. Gram,* Math. Ann. 7 (1874), p. 234; *E. d'Ovidio,* Gi. d. mat. 15 (1877), p. 187; *A. Capelli,* Rom. Linc. Mem. 1882, p. 582; *O. Hölder,* Böklen Mitt. 1 (1884), p. 59; *E. B. Elliott,* Mess. 16 (1885), p. 5; *P. Mansion,* ib. p. 127: „Study“ p. 32; „Deruyts“ p. 49; *Kronecker,* Berl. Ber. (1889), p. 609. — Dass für gewisse Untergruppen von S die Definition des Textes zu eng ist, betont wohl zuerst *Klein* im „Erlanger Programm“ (1872); man vgl. die Ausführungen von *Study* für die „Inversionsgruppe“ Math. Ann. 49 (1897), p. 497 [Nr. **23**, **27**].

13) Die quadratische Kov. H der f_3 bei *G. Boole,* Cambr. math. J. 3 (1842), p. 115; bei *G. Eisenstein,* J. f. Math. 27 (1844), p. 75, 89. *Boole* betrachtet auch schon (l. c.) (binäre) Polaren (Nr. **13**) und simultane Kovarianten.

14) *H.* studiert die nach ihm benannte Determ. der zweiten Ableitungen einer C_n und deckt ihre Rolle in der geom. Theorie der C_n, bes. der C_3, auf: J. f. Math. 28 (1844), p. 68 = Werke, p. 123 [I B 1 b, Nr. **22**]. Bez. der Leistungen von *H.* vgl. *M. Noether,* Zeitschr. Math. Phys. 20 (1875), p. 77; *Klein,* Progr. Münch. Polyt. 1875; *G. Bauer,* Münch. Abh. 1882.

15) In den Disquis. arithm. artt. 267, 268 (vgl. Anm. 1) zeigt *G.*, dass sich die „Adjungierte“ einer C_2 (d. i. ihr dualistisches Äquivalent) bei der „transponierten“ S. invariant verhält. Vgl. *P. Bachmann,* Arithmetik der quadratischen Formen, 1, Leipzig 1898, Abschn. 2, Kap. 5.

16) J. f. Math. 40 (1850), p. 272, 292; s. Anm. 18.

17) Cambr. math. J. 4 (1845), p. 193 = Coll. Pap. 1, p. 80. Ist F_n multilinear (vgl. *Sylvester,* Cambr. Dubl. math. J. 7 [1852], p. 93), so werden vermöge einer Subst. S_i $(i = 1, 2, \cdots n)$ einer Variabelnreihe die Koeff. von F_n nur linear geändert, sodass man auf Grund des Determ.-Mult.-Satzes sofort Bildungen (darunter „Höhere Determinanten“ [I A 2, Nr. **32**], vgl. *Sylvester,* Cambr. Dubl. math. J. 7 [1852], sect. 3, p. 75) angeben kann, die sich gegenüber S_i, weiterhin aber auch solche, die sich geg. allen S invariant verhalten. Speziell hat jede f_{2n} eine quadratische Invariante. In Cambr. Dubl. math. J. 1 (1846), p. 104 = Coll. Pap. 1,

Invarianten J („Hyperdeterminanten", Nr. **12**) von $F_n(x \mid a)$ zu bilden, und erweitert den Begriff von J auf multilineare („n-partite") Urformen F_n, die linear sind in n Variabelnreihen, die auch verschiedenen („unabhängigen") S unterworfen werden. — *Sylvester* ordnet die Begriffe systematisch. Er beschränkt sich, was oft zweckmässig ist, auf „unimodulare" S i. e. vom Modul $\Delta = 1$. Die „universale" Form $u_x = u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n$ ändert sich nicht[18]), wenn man die Variabeln x einer S, und zugleich die „kontragredienten"[19]) Variabeln u der „inversen" („reziproken") Substitution unterwirft. „Kogredient"[19]) heissen Variabelnreihen, die der nämlichen S unterliegen.

Die Kovarianten, Kontravarianten und Zwischenformen[20]) (die die x und u zugleich enthalten) lassen sich[21]) als Simultaninvarianten auffassen, wenn man den Urformen eine, oder mehrere Formen vom Typus u_x hinzufügt. Alle invarianten Bildungen umfasst *Sylvester* als „Konkomitanten"[22a]), (wir sagen mit *K. Reuschle*[22b]) „Komitanten"); er giebt eine Reihe von Prozessen an (Nr. **16**), wie man aus Bildungen des einen Typus solche eines andern erzeugt. Allgemein ist eine Komi-

---

p. 95 wird zur Erzeugung von inv. Bildungen der Prozess $\Omega = \left| \frac{\partial}{\partial x_i^{(k)}} \right|$ $(i, k = 1, 2, \cdots n)$ eingeführt (wo nach Ausmultiplikation je die bez. n^{te}, bei Ω^l die ln^{te} Ableitung zu substituieren ist); die Funktionaldet. von n Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$ der $x_1, x_2, \ldots x_n$ entsteht, wenn das Produkt $f_1(x^{(1)}) \cdot f_2(x^{(2)}) \cdots f_n(x^{(n)})$ dem Prozesse Ω unterwerfen wird. Hinterher kann man die Variabelnreihen wieder gleichsetzen. So liefert für $f_2(x) = a_0 x_1^2 + 2 a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$, $g_2(x) = b_0 x_1^2 + 2 b_1 x_1 x_2 + b_2 x_2^2$ $\Omega^2 f_2(x)\, g_2(y)$ die Inv. $a_0 b_2 - 2 a_1 b_1 + a_2 b_0$ resp. $2(a_0 a_2 - a_1^2)$. Bez. der Leistungen *Cayley*'s vgl. *M. Noether*, Math. Ann. 46 (1895), p. 462; *A. R. Forsyth* in *Cayley*'s Pap. 8 (1895), p. IX = Lond. Roy. Pr. 58 (1895).

18) Cambr. Dubl. math. J. 7 (1852), p. 56. Ist also F_n eine Urform (oder die Kovariante einer solchen), J eine Invariante von F, so ist $J(F + \lambda u_x^n)$ für jeden Wert von λ eine Kontravariante von F. Der Faktor von λ heisst die erste „Evektante" (ib. p. 57) von J [Nr. **18**]; der erzeugende Prozess hat z. B. für eine $C_3 = a_{111} x_1^3 + 3 a_{112} x_1^2 x_2 + \cdots$ die Gestalt: $u_1^3 \frac{\partial}{\partial a_{111}} + 3 u_1^2 u_2 \frac{\partial}{\partial a_{112}} + \cdots$. Ist J die Diskriminante von F, so entstehen die „adjungierten Formen" von *Hermite* (vgl. Anm. 16), z. B. aus f_3 die kubische Kovariante.

19) Der Ausdruck ib. 7 (1852), p. 53.

20) Der Ausdruck von *S. Aronhold*, J. f. Math. 62 (1863), p. 281.

21) Cambr. Dubl. Math. J. 8 (1853) p. 64, 259. Bez. der Leistungen *Sylvester*'s vgl. *M. Noether*, Math. Ann. 50 (1898), p. 133. Die Auffassung von *Sylv.* bringt für besondere Gruppen auch Nachteile mit sich: *H. Burkhardt*, Math. Ann. 43 (1893), p. 199.

22a) Der Ausdruck eingeführt ib. 6 (1851), p. 290. b) Zürich Kongr. Verh. 1898, p. 123.

tante einer Komitante wieder eine solche[23]). *Sylv.* charakterisiert auch den Typus der „Kombinanten"[24]) (Nr. **24**), d. s. Formen, die in Bezug auf zwei Reihen von m resp. n Variabeln zugleich invariant sind.

Bei *Cayley* erscheinen[25]) die J resp. C als ganz-rationale Lösungen ihrer Differentialgleichungen (Nr. **18**).

S. Aronhold[26]) erschliesst aus den Differentialgleichungen (Nr. **18**) die Existenz gewisser Brüche φ als der „absoluten Invarianten", die sich bei einer S vom Modul Δ gar nicht ändern, denen die früheren, die Zähler und Nenner der φ, als „relative" gegenüberstehen.

Bei *A. Clebsch*[27]) erscheinen die J als Aggregate symbolischer Produkte (Nr. **12**). *Clebsch* erweitert den Begriff von J, indem er die „Zwischenvariabeln"[28]) (Nr. **12**) einführt, die den linearen Stufen des n-ären Gebietes entsprechen.

P. Gordan[29]) und *A. Capelli*[30]) ziehen, wie schon *Cayley* für multilineare Urformen, unabhängige S mehrerer Variabelnreihen in Betracht.

„Irrationale" Invarianten, d. s. Wurzeln irreducibler Gleichungen [I B 1 b, Nr. **5**] mit rationalen J als Koeffizienten, drängen sich auf, wenn sich Urformen in irrational-kanonischer Gestalt (Nr. **11**) darbieten, wenn also der „Rationalitätsbereich" (I B 1a, Nr. **9**) der Koeffizienten passend erweitert wird.

E. Study[31]) hat die Stufen des Invariantenbegriffes in Parallele gesetzt zu *L. Kronecker*'s[32]) arithmetischer Begründung der Arten algebraischer Grössen. Bei *S. Lie*[33]) (II A 6 und Nr. **12**) liegt eine allgemeine Auffassung anderer Art vor. Unterwirft man die Variabelnreihen

23) Cambr. Dubl. math. J. 6 (1851), p. 291; 7 (1852), p. 57.

24) ib. 8 (1853), p. 256; 9 (1854), p. 85. *S.* betrachtet auch Kombinanten von Formen ungleicher Ordnung, die später von *H. S. White* genauer untersuchten „Semikombinanten", Am. J. 17 (1895), p. 235 [Nr. **24**].

25) I. u. II. Mem. = Pap. 2, p. 221, 250.

26) J. f. Math. 62 (1863), p. 281.

27) J. f. Math. 59 (1860), p. 1. Bez. der invariantentheor. Leistungen von *Clebsch,* bes. auch der geometrischen Anwendungen vgl. *Gordan* in Math. Ann. 7 (1874), p. 37.

28) Gött. Abh. 17 (1872), p. 1.

29) Math. Ann. 13 (1878), p. 379 (bei Auflösung der $f_5 = 0$); bei *F. Klein* u. *R. Fricke,* Modulfunktionen 2, Leipzig 1892, p. 127 finden sich Anwendungen zur Aufstellung von Modulargleichungen, ib. p. 690 von Modularkorrespondenzen [II B 4 a; c].

30) Gi. di mat. 17 (1879), p. 69 ($f_2(x \mid y)$ s. Anm. 218, 237). — *C. le Paige* behandelt die multilinearen Formen bei unabh. S systematisch, s. Anm. 195 und bez. der Seminvarianten [Nr. **23**] Belg. Bull. (3) 2 (1881), p. 40.

31) Leipz. Ber. 1886, p. 137; „Study" p. 1.

32) Festschrift, Berlin 1881 = J. f. Math. 92, p. 1.

33) „Vorl. über endl. kont. Transf.gruppen", v. *S. Lie* und *F. Engel,* Leipzig

$(x), (y), \cdots$ von Urformen $F^{(i)}(x; y; \cdots | a^{(i)})$ einer gewissen „Gruppe" G von S, so induzieren die S eine holoedrisch isomorphe Gruppe G' von S' der $a^{(i)}$: der Zusammenhang zwischen G und G' stellt sich symbolisch am einfachsten dar (Nr. **12**). Eine analytische und in den $a^{(i)}$ je homogene Funktion, die G' gegenüber unveränderlich ist, ist eine „absolute" Invariante der F. Ist G die allgemeine projektive Gruppe, und sind auch die a allgemein, so sind die rationalen absoluten J von G' die *Aronhold*'schen Brüche φ. Die relativen J erscheinen als absolute, wenn man G durch die Untergruppe vom Modul 1 ersetzt.

E. B. Christoffel[34]) und *L. Maurer*[35]) haben Gruppen G von rationalen Substitutionen berücksichtigt, während die G' projektiv bleiben; die charakteristische Gestalt der Differentialgleichungen für die J bleibt erhalten. Die „Seminvarianten" (Nr. **23**) i. e. „Leitglieder"[36]) der Komitanten sind Invarianten einer gewissen Untergruppe von G'.

Unter den ganz-rationalen Invarianten gegebener Urformen ragen hervor die „Grundformen" (Nr. **6**) und die „assoziierten Formen" (Nr. **7**), aus denen sich alle übrigen ganz-rational resp. rational ableiten lassen.

3. Äquivalenz von quadratischen und bilinearen Formen und Formenscharen. Als Ausgang dient das wegen seiner Anwendungen auf Mechanik und Geometrie vielfach behandelte Problem, eine (allgemeine) $F_2(x_1, \cdots x_n) = \sum a_{ik} x_i x_k = a_x^2$ $(|a_{ik}| = D(F) \neq 0)$ durch eine S der x auf eine Summe (Aggregat) von (n) Quadraten

$$y_1^2 + \cdots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \cdots - y_n^2$$

zu bringen[37]). Für ein und dieselbe F_2 ist nach *Sylvester* die Anzahl

1893; eingehender: „Vorl. über endl. kont. Transf.gruppen mit geom. Anwendungen", v. *S. Lie* und *G. Scheffers,* Leipzig 1893, Kap. 23.

34) Math. Ann. 19 (1881), p. 280.

35) Münch. Ber. 1888, p. 103; J. f. Math. 107 (1890), p. 89; Münch. Ber. 1894, p. 297.

36) *Cayley,* I. Mem. = Pap. 2, p. 221.

37) *J. L. Lagrange,* Misc. Taur. 1 (1759), p. 18 = Oeuvr. 1, p. 3 bes. p. 7 [$F_2(dx_1, dx_2, dx_3)$]; Mécan. anal., Paris 1788 (deutsch v. *H. Servus,* Berlin 1887). 1, III [II A 2, Nr. 18, Anm. 126]. *K. F. Gauss,* Disq. ar. art. 271; Comm. Gott. 5, § 31 = Werke 4, p. 29 bes. p. 37; Theoria motus, Hamburg 1801. *G. Boole,* Cambr. math. J. 2 (1840), p. 64. *J. Plücker,* J. f. Math. 24 (1842), p. 283 = Ges. Abh. 1, p. 399. *O. Hesse,* J. f. Math. 57 (1860), p. 175 = Werke p. 489; *Hesse,* Anal. Raumgeom., Leipzig 1861, 1869, 1876 (3. Aufl. mit Zusätzen von *S. Gundelfinger*). Bes. eingehend bei *S. Gundelfinger* (nach *Plücker*) J. f. Math. 91 (1881), p. 221. Die kanonischen Koeff. in Det.form bei *J. Studnička,* Prag. Ber. 1888, p. 256. Kriterien der Darstellbarkeit von F als Summe von $m\,(<n)$ Quadraten: *Benoît,* Par. C. R. 101 (1885), p. 869; Nouv. Ann. (3) 5 (1886), p. 30; *de Presle,* Par. Soc. math. Bull.

k konstant („Trägheitsgesetz[38]) der F_2“). Insbesondere hat man eine Quadratsumme $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ durch „orthogonale“[39]) S in sich („automorph“[40])) transformiert.

Cayley[41]) stellt die Koeffizienten einer (eigentlichen) orthogonalen S rational durch $\frac{n(n-1)}{2}$ unabhängige Parameter λ_{ik}, die Elemente einer „halb- oder schiefsymmetrischen“ Determinante ($\lambda_{ik} + \lambda_{ki} = 0$) dar (I A 2, Nr. 28). *Ch. Hermite* erweitert das Verfahren auf die automorphe Transformation einer allgemeinen C_2,[42]) sodann einer allge-

14 (1886), p. 98. *D. André,* ib. 15 (1887), p. 188. *J. Valyi,* Arch. f. Math. (2) 6 (1888), p. 445. Im übrigen vgl. *R. Baltzer,* Determinanten, 5. Aufl., Leipzig 1881, sowie I C 2. — Für $k = 0$ (oder n) heisst nach *Gauss* (l. c.) die F_2 definit, sonst indefinit (Kriterium: II A 2, Nr. 23). — Wegen der arithmetischen Äquivalenzmethoden sei bez. der ganzen Nr. auf I C 2, auf *P. Bachmann,* Die Arithmetik der quadratischen Formen, 1, Leipzig 1898, sowie auf „Muth“ verwiesen.

38) *J. J. Sylvester,* Phil. Mag. (4) 4 (1852), bes. p. 140; Lond. Tr. 143 (1853) bes. p. 481, 484. Nach *C. W. Borchardt* (J. f. Math. 53 [1857], p. 281) schon 1847 im Besitze von *K. G. J. Jacobi* vgl. *J.* (Nachlass) ib. p. 275 = Werke 3, p. 591; *Ch. Hermite,* ib. p. 271; *Brioschi,* Nouv. Ann. 15 (1856), p. 264; *de Presle,* Par. Soc. math. Bull. 15 (1857), p. 179. Geom. Deutung u. arithm. Beweis bei *E. Netto*, J. f. Math. 110 (1892), p. 184. — Auf Grund des Gesetzes haben *Hermite,* Par. C. R. 1853, p. 294; J. f. Math. 52 (1856), p. 39 bes. p. 43, *Jacobi* (l. c.) und *Sylvester,* Lond. Trans. 143 (1853), p. 407 bes. p. 484 mittels der „Bezoutiante“ (I B 3 a, Nr. 8) die Zahl der reellen Wurzeln einer algebr. Gleichung zwischen geg. Grenzen ermittelt. Vgl. noch *K. Hattendorff,* Die Sturm'schen Funktionen, Gött. 1862; *L. Kronecker*, Berl. Ber. 1873, p. 117 = Werke 1, p. 303; *Weber* 1, Abschn. 5, 6, 7, und bes. die historische Darstellung bei *M. Noether*, Math. Ann. 50 (1898), p. 139. — Wes. mit Hülfe des Trägheitsgesetzes hat *K. Hensel* die $F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n = 1)$ in reelle Typen eingeteilt, J. f. Math. 113 (1894), p. 113.

39) *L. Euler,* Petr. Nov. Comm. 15 (1770) = (Comm. Arithm. Coll. 1, p. 427), bes. p. 75, 101 ($n = 3$, ohne Beweis für $n = 4$); *A. Cauchy,* Exerc. de math. Paris 1829, bes. p. 140; *Jacobi,* J. f. Math. 12 (1834), p. 7 = Werke 3, p. 199, Werke (Nachlass) 3, p. 599; *O. Hesse* ($n = 4$), J. f. Math. 45 (1853), p. 93 = Werke, p. 307; ib. 99, p. 110 (Nachlass) = Werke p. 663. Vgl. weiter Anm. 41 und I B 1 c, Nr. 22. Der Fall $k > 0$ kommt auf $k = 0$ zurück.

40) Der Ausdruck von *A. Cayley,* Lond. Tr. 148 (1858), p. 39 = Papers 2, p. 497.

41) J. f. Math. 32 (1846), p. 119 = Papers 1, p. 332. Für $n = 3$ schon im wes. bei *Euler* (Anm. 39), bei *O. Rodrigues*, J. de math. 5 (1840), p. 380 bes. p. 405. *C.*'s Darstellung versagt, wenn -1 eine Wurzel der char. Gleichung ist; vgl. die Ergänzungen bei *J. Rosanes,* J. f. Math. 80 (1875), p. 52; *G. Frobenius,* ib. 84 (1878), p. 1 (Grenzprozess); *L. Kronecker,* Berl. Ber. 1890, p. 525, 602, 691, 873, 1063, 1375; 1891, p. 9, 33; *H. Taber,* Chic. Congr. 1896, p. 395, s. noch Anm. 70. Das Analoge gilt von Anm. 42, 43.

42) J. f. Math. 47 (1853), p. 307. Eine Weiterführung und Ergänzung bei *P. Bachmann,* ib. 76 (1873), p. 331 und *J. Tannery,* Bull. sci. math. 11 (1876),

meinen F_2,[43]) durch Vermittelung der $\frac{x_i+y_i}{2}$, wenn $F_2(x) \equiv F_2(y)$. *A. Cayley*[44]) stellt *Hermite*'s Ergebnis in „Matrices[45])-Gestalt" dar; die fragliche S ist $D^{-1}(D-Y)(D+Y)^{-1}D$, wenn D die Matrix der a_{ik}, Y eine willkürliche schiefsymmetrische Matrix ist. *Cayley*[46]) überträgt auch schon das Ergebnis auf eine allgemeine $F_{1,1}(x_1 \ldots x_n; y_1 \ldots y_n \mid a_{ik})$ bei unabhängigen S der x und y, und charakterisiert die Stellung der symmetrischen $(a_{ik} = a_{ki})$ und alternierenden $(a_{ik} = -a_{ki})$ $F_{1,1}$.

Die Transformation der ϑ-Funktionen (II B 7) führte auf die Aufgabe, eine $F_{1,1}$ auf die „normale" Gestalt einer gewissen Summe von Produkten zu bringen. Falls $D(F) = |a_{ik}| \neq 0$, zeigt *L. Kronecker*[47]) mittels der „beigeordneten" Form, dass die Lösung einer „Resolvente" n. Ordnung (I B 3c, d, Nr. **10**) ausreicht, und erledigt damit auch die „automorphe" Transformation von F für identische („kongruente") S der x und y. *L. Christoffel*[48]) führt den Beweis mit *Aronhold*'s Methoden (Nr. **18**) und zeigt, dass die Zahl der in den Koeffizienten von S enthaltenen Parameter gleich der der absoluten Invarianten von F ist.

A. Cauchy und *K. G. J. Jacobi* haben[49]) simultan zwei (allgemeine) F_2: a_x^2, b_x^2 (speziell *eine* F_2 durch orthogonale S) in Aggregate von Quadraten übergeführt. Die Lösung hängt von der „charakteristischen" Gleichung (*Cauchy*) $|a_{ik} + \lambda b_{ik}| = 0$ ab. Bei *Boole*[50]) ordnet sich die

---

p. 221; vgl. das Grenzverfahren von *Hermite*, ib. 83 (1877), p. 325. Eine allgemeingültige Ableitung giebt (vermöge einer Normalform der C_2) zuerst *G. Cantor*, Hab.schr. Halle 1869, s. das Buch von *Bachmann* l. c. — Die Cayley'sche Darstellung hat *F. Prym*, Gött. Abh. 38 (1892) auf die involutorischen S ausgedehnt, vgl. *A. Cornely*, Diss. Würzburg 1892.

43) Cambr. Dubl. math. J. 9 (1854), p. 63. *Cayley* wendet die Methode auf der F_2 $(n = 4)$ umschriebene Polygone an, Phil. mag. 96 (1853), p. 326 = Pap. 2, p. 105; ib. 4 (7) (1854), p. 208 = Pap. 2, p. 133; cf. *A. Voss*, Math. Ann. 25 (1885), p. 39; 26 (1885), p. 231; *R. Sturm*, ib. 26 (1886), p. 465 [III C 4].

44) *Cayley*, J. f. Math. 50 (1855), p. 288, 299 = Pap. 2, p. 192, 202.

45) *Cayley*, Lond. Tr. 148 (1858), p. 17 = Pap. 2, p. 475.

46) Lond. Tr. 148 (1858), p. 39 = Pap. 2, p. 497. Einfacher bei *Th. Muir*, Am. J. 20 (1898), p. 215.

47) Berl. Ber. 1866, p. 597 = J. f. Math. 68, p. 273 = Werke 1, p. 143.

48) J. f. Math. 68 (1867), p. 253. Vgl. *Clebsch-Gordan*, Abel'sche Funktionen, Leipzig 1866, Abschn. 12. Die absol. Inv. einer $F_{11}(x; u)$ schon bei *C. W. Borchardt*, J. f. Math. 30 (1846), p. 38.

49) *A. Cauchy*, Exerc. de math. 1829, 4, bes. p. 140; *Jacobi*, J. f. Math. 12, p. 1 = Werke 3, p. 191; *Brioschi*, Ann. di mat. 1 (1868), p. 158.

50) *G. Boole*, Cambr. Dubl. math. J. 3 (1841), p. 1, 106.

Aufgabe der simultanen Transformation von zwei F_n unter, *Cayley*[51]) vereinfacht seine Methode.

K. Weierstrass[52]) untersucht die Anderungen, die die *Cauchy-Jacobi*'schen Formeln für die Reduktion zweier F_2 auf Quadratsummen erleiden, wenn die Wurzeln von $|a_{ik} + \lambda b_{ik}| = 0$ nicht mehr alle ungleich sind, insbesondere für reelle S reeller F.

Weierstrass[53]) begründet das Kriterum für die Äquivalenz zweier

---

51) *Cayley*, Cambr. Dubl. math. J. 4 (1849), p. 47 = Pap. 1, p. 428; Quart. J. 2 (1858), p. 192 = Pap. 3, p. 129.

52) Berl. Ber. 1858, p. 207 = Werke 1, p. 233. *W.* präzisiert hier den Begriff des „allgemeinen" Falles. Dazu die Erweiterungen von *E. B. Christoffel*, J. f. Math. 63 (1864), p. 255.

53) Berl. Ber. 1868, p. 310 = Werke 2, p. 19 (mit Zusätzen). Über eine „Lücke" im Beweise und deren allmähliche arithmetisch-algebraische Ausfüllung durch *Stickelberger, Frobenius* u. A. s. „Muth", Einleitung. [Die Elementarteiler und ihre Invarianz im wes. schon bei *Sylvester*, Phil. Mag. (4) 1 (1851), p. 119, 295, 415, vgl. die historische Darstellung bei *M. Noether*, Math. Ann. 50 (1898), p. 137]. Die Theorie bei *S. Gundelfinger*, in *Hesse*'s Raumgeom. 3. Aufl. 1876; *L. Sauvage*, Ann. éc. norm. (3) 8 (1891), p. 285; 10 (1893), p. 9; „Muth"; Verallgemeinerungen bei *K. Hensel*, J. f. Math. 115 (1895), p. 254; 117 (1897), p. 129, 333, 346.] Vgl. die geometrischen Anwendungen bei *F. Klein*, Diss. Bonn, 1868 = Math. Ann. 23, p. 539 auf die Einteilung der Linienkomplexe 2. Ordg, bei *W. Killing* auf den Schnitt von $2F_2$, Diss. Berlin 1872 (s. auch *Sylvester* l. c. und Cambr. Dubl. math. J. 5 [1850], p. 262). — Bez. modifizierter Darstellungen des Äquivalenzkriteriums vgl. *L. Stickelberger*, Diss. Berlin 1874; J. f. Math. 86 (1879), p. 20; *L. Maurer*, Diss. Strassburg 1887; *Ed. Weyr*, Böhm. Ges. d. W. 1889, Jubelb.; Auszug in Monatsh. f. Math. 1 (1890), p. 163 (mittels der Matrices); *B. Calò*, Ann. di mat. (2) 23 (1895), p. 159 (rational durch Det.-Umformungen); *G. Landsberg*, J. f. Math. 116 (1896), p. 331 (rat. Überführung der Scharen in ein. mittels *Kronecker*'s Fundamentalsysteme [I B 1 c, Nr. 6]. — Nach *Frobenius* ist eine Schar von $F_{1,1}$ noch durch eine S mit $\geqq n$ arbiträren Parametern in sich überführbar, Zürich. Nat. G. 41 (1896), p. 20. Äquivalenz von ∞^λ Scharen bei *S. Kantor*, Münch. Ber. 27 (1897), p. 367. Alternierende Scharen bei kongruenten S: *E. v. Weber*, Münch. Ber. 28 (1898), p. 369. „Ähnliche" $F_{1,1}$: *G. Sforza*, Giorn. di mat. 32 (1894), p. 293; 33 (1895), p. 80; 34 (1896), p. 252. Eine spezifische Äquivalenz beim Hauptaxenproblem der C_2: *S. Gundelfinger*, Anal. Geom. der C_2, hrsg. von *F. Dingeldey*, Leipzig 1895, Abschn. 1, §§ 8—10, danach ausführlicher *Ph. Brückel*, J. f. Math. 119 (1898), p. 210, 313. Die Äquivalenz zweier F_{11} mit ihren „reziproken" bei *C. Segre*, Giorn. di mat. 22 (1884), p. 29; die zweier f_4 bei *Frobenius*, J. f. Math. 106 (1890), p. 125; *Klein-Fricke*, Modulfunktionen, Leipzig 1890, § 4; die zweier $f_2(x; y)$ bei *Frobenius* l. c. *Study* untersucht den Zusammenhang der F_{11} mit den rekurrierenden Reihen, Monatsh. f. Math. 2 (1891), p. 1. — Die Äquivalenz einer F_{11} $(n = 3)$ für konjugierte Koeffizienten und Variable studieren *H. Poincaré*, Par. C. R. 98 (1884), p. 344; *É. Picard*, ib. p. 416; allgemein *A. Loewy*, Nova Acta Leop. 71 (1898), p. 1 (Auszug in Math. Ann. 50, p. 557). — Anwendungen der Äquivalenz

Scharen $F_2 + \lambda G_2$, $F_2' + \lambda G_2'$: „dass deren Determinanten D, D' in ihren Elementarteilern (I C 2) ε, ε' übereinstimmen müssen". Dabei geben die ε an, ob und wie oft ein mehrfacher Teiler von D in allen Minoren $(n-1)^{\text{ten}}$, $(n-2)^{\text{ten}}$ ... Grades aufgeht. Die Koeffizienten von $|a_{ik} + \lambda b_{ik}| = 0$ sind rationale[54]), die ε irrationale Invarianten der Schar $F_2 + \lambda G_2$.

Behufs Entscheidung über die Äquivalenz von zwei gegebenen Schaaren reduziert sie *Weierstrass* auf sachgemässe kanonische[55]) Gestalten, deren Variabeln von den ε resp. ε' abhängen. Sollen die ε, ε' existieren, darf D resp. D' nicht (in λ) $\equiv 0$ sein. *L. Kronecker*[56]) erledigt auch diesen Fall durch geeignete Teilung der Variabeln in zwei Gruppen. Für Scharen, die wenigstens eine „definite" Form (d. i. von konstantem Vorzeichen [I C 2]) enthalten, führt *Kronecker* die Reduktion direkt durch, und leitet erst daraus die Äquivalenzeigenschaft der ε, ε' ab. Die ε ersetzt *Kronecker*, für F_2, wie für $F_{1,1}$, durch rationale Invarianten, die grössten gemeinsamen Teiler τ_i aller Minoren von $D(F_2 + \lambda G_2)$ je derselben Ordnung i.

Die Gleichheit der τ_i und τ_i'[57]) reicht nicht immer als Äquivalenzkriterium hin; ein solches leisten aber stets die „elementaren" Scharen,

---

auf „Schwingungen" finden sich bei *F. Pockels*, Über die part. Diffgl. $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig 1891, p. 44; *E. B. Christoffel*, J. f. Math. 63 (1864), p. 273; *Weierstrass* l. c. *E. J. Routh*, Dynamics ... 5. ed., London 1891, Part. VII (deutsch v. *A. Schepp*, Leipzig 1898). — Diesen Anwendungen auf Schwingungen entsprechen rein mathematisch solche auf lineare Differentialgleichungen, vgl. dazu noch *Weierstrass* (Berl. Ber. 1875 = Werke 2, p. 75), sowie *L. Heffter*'s „Lineare Differentialgleichungen", Leipzig 1894, Kap. 9 [II B 3 c].

54) *Weierstrass*, 1868 l. c.; vgl. *J. Rosanes*, J. f. Math. 80 (1875), bes. p. 54. Für $G_2 \equiv \sum x^2$ schon bei *L. Fuchs*, J. f. Math. 66 (1866), bes. p. 132; *Christoffel*, ib. 68 (1867), bes. p. 270; *M. Hamburger*, ib. 76 (1873), bes. p. 115; *F. Siacci*, Ann. di mat. (2) 4 (1873), p. 296.

55) Über den Begriff des Kanonischen vgl. *Kronecker*, Berl. Ber. 1874, p. 72. — *W.* gelangt dazu, für beliebiges n F_2-Scharen hinzuschreiben, deren D vorgeschriebene ε haben.

56) Berl. Ber. 1868, p. 339 = Werke 1, p. 163. *Kronecker* folgend bringt *A. Kneser* ausnahmslos eine F_2 durch orthog. S auf eine Quadratsumme: Arch. f. Math. (2) 15 (1897), p. 225. — Wegen der Reduktion einer $F_{1,1}$ durch biorthogonale S s. *E. Beltrami*, Gi. di mat. 11 (1873), p. 89; *E. Cosserat*, Toul. Ann. 3 (1889), p. 1; *Sylvester*, Par. C. R. 108 (1889), p. 651; Mess. (2) 19, p. 1, 42.

57) Berl. Ber. 1874, p. 59, 149, 206 = Werke 1, p. 349. Weitere Ausführung ib. 1890, p. 1225, 1375; 1891, p. 9, 33. Einfacher mittels Partialbruchzerlegung bei *Frobenius*, Berl. Ber. 1896, p. 7; hier deckt *F.* auch den inneren Grund des Weierstrass-Kronecker'schen Satzes auf, dass 2 äquivalente F_2-Scharen auch kongruent sind.

für die $D \equiv 0$ oder die Potenz einer Linearform ist. Eine Schar von $F_{1,1}$ ist stets, und im wesentlichen nur auf eine Art, als Aggregat von elementaren darstellbar; diese, nebst ihrer Anzahl, sind die „wahren“[58]) Invarianten der Äquivalenz.

Kronecker bedarf dabei der Ausdehnung der von ihm (s. oben) für besondere Scharen gegebenen Reduktion auf beliebige, indem jetzt ganze Gruppen[59]) von Variabeln zugleich entfernt und durch „kanonische“ ersetzt werden. Bei geeigneter Anordnung bleibt die *Weierstrass*'sche Reduktion selbst für $D = 0$ gültig[60]). *Kronecker* nimmt nunmehr die automorphe Transformation einer $F_{1,1}$ bei identischen S (vgl. oben) wieder auf[61]). Für $D \equiv 0$ hängt $F_{1,1}$ von einer geringeren Zahl von Variabeln ab und kann als Form mit $D \not\equiv 0$ geschrieben werden. Es ordnen sich die kanonischen Gestalten der $F_{1,1}$ unter vier „reduzierte“ Typen[62]) ein. Wie oben, wird mit rationalen, „arithmetischen“ Invarianten operiert[63]). Die arithmetische und formentheoretische Behandlung hat *H. Rosenow*[64]) für eine $F_{1,1}(x_1, x_2, x_3;\ y_1, y_2, y_3)$ gegenübergestellt. — Die *Weierstrass-Kronecker*'schen Sätze von 1868 leitet *G. Darboux*[65]) auf der Grundlage der geänderten Schardeterminanten $D, D_1, D_2, \ldots$ ab, die sich analog verhalten, wie die *Sturm*'schen Funktionen (I B 3 a, Nr. 5); die Formenschar wird als Quotient $D_{i+1} \mid D_i$ dargestellt und durch Partialbruchzerlegung auf die kanonische Gestalt gebracht.

Umgekehrt hat man nach der Untergruppe Γ von S gefragt, die überhaupt irgend eine F_2 resp. $F_{1,1}$ automorph transformiert; die Formen werden nachträglich ermittelt.

Die „Fundamentalgleichung“[66]) einer solchen S: $|\sigma_{11} - \varrho, \sigma_{12}, \cdots| = 0$

58) l. c. (1874), p. 60.

59) Vgl. die (für *J.* erfolglose) Polemik zwischen *Jordan* und *Kronecker: J.* in Par. C. R. 77 (1873), p. 1487, *Kr.* ib. p. 71; *J.* (1874) in J. de math. (2) 19, p. 35; Par. C. R. 78 (1874), p. 614, 1763; J. de math. (2) 19, p. 397 (korrekt); *Kr.* 1874, l. c., p. 206.

60) Die Methode von *Jacobi* (J. f. Math. 53, p. 265 = Werke 3, p. 585) galt nur für symm. u. altern. $F_{1,1}$.

61) Berl. Ber. 1874, p. 397 = Werke 1, p. 421.

62) l. c. p. 430.

63) Vgl. die unter Anm. 59 citierten Ergänzungen von *Kr.* 1890, 1891.

64) J. f. Math. 108 (1890), p. 1; Progr. Berlin. 4. höh. Bürgersch. 1891, 1892.

65) J. de math. (2) 19, p. 347. Für $n = 3$ vereinfacht bei *H. Vogt,* Nouv. Ann. (3) 15 (1896), p. 441.

66) *Kronecker*, J. f. Math. 68 (1866), bes. p. 276 = Werke 1, p. 143; *E. B. Christoffel*, ib. 68 (1867), p. 253. Für orthog. S schon bei *F. Brioschi*, Ann. sc. mat. fis. 5 (1854), p. 201; *L. Schläfli*, J. f. Math. 65 (1866), p. 185.

ist nach *Kronecker*[67]) „reziprok". *J. Rosanes*[67]) zeigt, dass zu jeder reziproken Fundamentalgleichung im allgemeinen eine S und damit eine F_2 gehört.

In diesem Sinne hat *G. Frobenius*[68]) die Γ der F_2, und darüber hinaus der „symmetrischen" und „alternierenden" $F_{1,1}$, mit allen Ausnahmen untersucht. Die a_{ik} repräsentieren[69]) eine S einer Variabelnreihe; die Transformationen einer $F_{1,1}$ erscheinen so als „Multiplikationen" von S; der Algorithmus beherrscht auch gewisse Multiplikationen von höheren komplexen Zahlen[70]) (I A 4, Nr. **10**). Solange $D \not\equiv 0$, befolgen die ε der „charakteristischen Funktion" ein einfaches Gesetz; bei $D \equiv 0$ hat die Funktion einer Teilbarkeitsbedingung zu genügen. Die *Cayley-Hermite*'schen Formeln (s. oben) werden durch ein theoretisches Grenzverfahren auf die Ausnahmefälle ausgedehnt[71]). — Von *Frobenius*[72]) rührt auch ein formentheoretisches Kriterium des „*Pfaff*schen Problems" (II A 5) her, i. e. der Äquivalenz von zwei n-gliedrigen linearen Differentialformen bei allgemeinen Punkttransformationen. *L. Stickelberger*[73]) untersucht die Γ der eine definite F_2 invariant

---

67) J. f. Math. 80 (1875), p. 52. *R.* bringt die bez. S auf die „antisymmetrische" Gestalt: $\sum \sigma_{ik} x_i = \varepsilon \sum \sigma_{ki} x_k$ $(\varepsilon = \pm 1)$.

68) J. f. Math. 85 (1877), p. 1. Vgl. dazu noch: ib. 86 (1879), p. 44, 146; 88 (1880), p. 96. Die autom. Transf. der F_2 $(n = 4)$ hat *F. Lindemann* [Vorl. über Geom. von *A. Clebsch,* Leipzig 1891, Abschn. II, 17] durch lineare Zuordnung eines linearen Komplexes incl. der Ausnahmen durchgeführt; *A. Loewy* danach (im Umriss) für n Var.: Nova Acta Leop. 65 (1895), p. 1, mit Anwendungen auf Linien- u. Kugelgeometrie. *A. Voss* legt den algebraischen Kern des Verfahrens bloss Münch. Ber. 26 (1896), p. 1, 211; *Lindemann,* ib. p. 31 geht auf die Ausnahmefälle ein, und führt die verschiedenen Äqu.bedingungen in ein. über.

69) Vgl. *Cayley,* Anm. 45.

70) Vgl. darüber *R. Lipschitz,* „Untersuchungen über die Summe von Quadraten", Bonn 1886; J. de math. (4) 2 (1886), p. 373; Berl. Ber. 1890, p. 485; *Kronecker* s. Anm. 41; *E. Study,* Chicago Congr. Pap. 1896 (1893), p. 367, wo weitere Litteratur, und vor allem noch *A. Hurwitz,* Gött. Nachr. 1896, p. 314; *E. Cartan,* Toul. Ann. 12 B (1898), p. 1 [I A 4, Nr. **14**]. Die komplexen Zahlsysteme formentheor. bei *Cyp. Stéphanos,* Athen, Jubil.-Band, 1888.

71) Wie das Grenzverfahren bei den orthog. S zu umgehen sei, hat *H. Taber* eingehend verfolgt Lond. M. S. Pr. 24 (1893), p. 290; 26 (1895), p. 364; N. Y. B. 3 (1894), p. 251; Math. Ann. 46 (1895), p. 561, Am. Ac. P. 31 (1896), p. 181, 336; Chic. Congr. P. 1896 (1893), p. 395. *T.* stützt sich dabei auf einen Satz von *Sylvester* (Par. C. R. 94 [1882], p. 55), und teilt die orth. S in 2 Klassen, je nachdem sie durch Wiederholung einer infin. orth. S erzeugbar sind oder nicht, vgl. Anm. 77.

72) J. f. Math. 82 (1877), p. 230; *R. Forsyth,* Diff. equations 1, Cambridge 1890, Chap. 11 (deutsch v. *H. Maser,* Leipzig 1892); *G. Morera,* Tor. A. 18 (1883), p. 383. Für $n = 2$ schon bei *Christoffel,* J. f. Math. 70 (1870), p. 46, 241.

73) Progr. Zürich Polyt. 1877, p. 1. Die einfachen ε verwendet implicite schon *Cauchy* l. c. (1829).

lassenden S, die auf eine trigonometrische Normalform gebracht werden; die charakteristische Funktion hat nur einfache ε.

Die Methode von *Frobenius* hat *A. Voss*[74]) auf beliebige $F_{1,1}$ ausgedehnt, so, dass die Hülfsprozesse *rational* durchführbar werden. Das System der in den a_{ik} quadratischen Transformationsrelationen lässt sich durch ein lineares ersetzen; die symmetrischen und alternierenden $F_{1,1}$ sind dabei ausgezeichnet. Löst eine S das Problem, so hat man nur noch alle mit S „vertauschbaren" Substitutionen $T\,(ST = TS)$ zu suchen[75]). Die Endformeln werden den *Cayley-Hermite*'schen analog.

Auch *C. Jordan*[76]) überträgt die durch die ε bedingte Einteilung der F_2 in kanonische Klassen und Unterklassen auf die S selbst.

Der Charakter der Gruppe der eine $F_{1,1}$ invariant lassenden S, sowie von deren Untergruppen, ist noch wenig[77]) für die Äquivalenz nutzbar gemacht. In *S. Lie*'s Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen (II A 6) ist die dreigliedrige Gruppe Γ von Bedeutung, die eine $F_2(x_1, x_2, x_3)$ invariant lässt. Die Transformationsgruppen zerfallen[78]) in „integrable" und „nicht integrable", je nachdem in ihnen Γ als Untergruppe enthalten ist oder nicht[79]).

4. Äquivalenz von Formen höherer als der zweiten Ordnung. *G. Boole*[80]) erweitert die orthogonale Transformation der F_2 (Nr. **1**, **3**),

74) Math. Ann. 13 (1878), p. 320; Gött. Nachr. 1887, p. 425; Münch. Abh. 17 (1890), p. 3. [Insbes. die „konjugierten" S: Münch. Ber. 19 (1889), p. 175; 26 (1896), p. 273; *A. Loewy* ibid. 26 (1896), p. 25.] Wegen gewisser „singulärer" Fälle vgl. *Frobenius,* J. f. Math. 84 (1878), p. 1; *Kronecker,* Berl. Ber. 1890, p. 525. 602. 692. 873. 1063; *A. Loewy,* Math. Ann. 48 (1876), p. 97; 49 (1897), p. 448 [I B 1 c, Nr. **22**].

75) Auf anderem Wege bei *Voss,* Münch. Ber. 19 (1889), p. 283.

76) J. de math. (4) 4 (1888), p. 349.

77) *S. Lie,* Christ. Abh. 1885; *H. Werner*, Math. Ann. 35 (1889), p. 113; *W. Killing,* ib. 36 (1890), p. 239. *F. Engel* hat betont, dass nicht jede S der, eine gewisse F_2 invariant lassenden proj. Gruppe, durch Wiederholung der infin. S der Gruppe erzeugbar ist, Leipz. Ber. 44 (1892), p. 279; 45 (1893) [mit *E. Study*] p. 659 [Nr. **6**, Anm. 145, Schluss]. Für $F_2 = \sum x^2$ bei *Taber* s. Anm. 71.

78) *S. Lie,* Norw. Arch. 3 (1874), p. 112; *F. Engel,* Leipz. Ber. 1887, p. 95; *W. Killing,* Math. Ann. 36 (1890), p. 161.

79) Geometrisches über bil. resp. tril. Formen noch bei *M. Pasch,* Math. Ann. 38 (1891), p. 24; *P. Muth,* ib. 40 (1892), p. 89; 42 (1893), p. 257; *A. del Ré,* Rom. Linc. R. (4) 6 (1890), p. 237; 7 (1891), p. 88; *Battaglini* (s. Monographien) [III C 9]. — Die $f_{1,1}$ eingehend, mit Anwendungen auf die Drehungen des Raumes um einen festen Punkt, bei *Cyp. Stéphanos,* Math. Ann. 25 (1883), p. 299. — Von besonderem Interesse sind die Untersuchungen von *Rosanes* über „abhängige Punktsysteme", J. f. Math. 88 (1880), p. 241; 90 (1881), p. 303; 95 (1883), p. 247; 100 (1887), p. 311.

80) Vgl. Anm. 9.

indem er frägt, wann zwei Formenpaare F_n, G_n; F'_n, G'_n äquivalent sind. Einmalige totale Differentiation der Äquivalenzen liefert die Bedingung, dass die gleich Null gesetzten Diskriminanten von $F + \lambda G$, $F' + \lambda G'$ zu den nämlichen Gleichungen in λ führen (Nr. **25**). Hierauf wird der Fall von mehr als zwei Urformen, auch ungleicher Ordnung, zurückgeführt. *S. Aronhold*[81]) macht das „Äquivalenzproblem" erst für C_3, dann überhaupt für zwei allgemeine[82]) Formen $F_p(x \mid a)$, $F'_p(x' \mid a')$ zum Kern der ganzen Theorie. Eine Abzählung ergiebt, dass, abgesehen von $p = 2$; $p = 3$, $n = 2$ Transformierbarkeitsbedingungen existieren; sie lassen sich im Verlauf der Elimination der S-Koeffizienten σ so anordnen, dass ihre rechten Seiten von den σ unabhängig werden. Das führt zu n^2 Differentialgleichungen[83]) (Nr. **13**, **18**), die wiederum so umgestaltet werden, dass die σ in ihnen nicht mehr auftreten. Daraus lässt sich rückwärts schliessen, dass die Bedingungen als Gleichheiten von Brüchen $\varphi(a) = \varphi(a')$ (Nr. **2**) geschrieben werden können, wo die φ die rationalen Lösungen der n^2 Differentialgleichungen sind, aus deren linearer Unabhängigkeit[84]) auch entnommen wird, wieviel unter den φ rational unabhängig sind.

Der „Aronhold'sche Prozess" $\sum b_i \frac{\partial}{\partial a_i}$ (Nr. **2**, **13**) erlaubt die Ausdehnung auf eine Reihe von Urformen F und führt zu den Zusammenhängen zwischen den Arten von Komitanten. Das Operieren mit den Differentialprozessen wird durchsichtiger, wenn man die F symbolisch (Nr. **12**) als volle Potenzen von Linearformen ansetzt.

Wenn F_p, G_p auf die nämliche „typische" Gestalt (Nr. **7**) gebracht werden können, so existiert auch eine S, die F in G überführt. Daraus leitet *Clebsch*[85]) als Kriterium für die Äquivalenz von zwei f_p her, dass ausser gleichen absoluten Invarianten ein paar über-

---

81) J. f. Math. 62 (1863), p. 281; für C_3 schon ib. 55 (1858), p. 97.

82) l. c. 1855, bes. p. 160. Modifikationen für nicht allgemeine F_n bei *W. Veltmann*, Zeitschr. f. Math. 22 (1877), p. 277; ib. 34 (1889), p. 321.

83) Umg. geht *L. Maurer* von den Differentialgleichungen aus: Münch. Ber. 18 (1888), p. 103; 24 (1894), p. 297; 29 (1899), p. 147.

84) Einfachere Beweise bei *Aronhold*, J. f. Math. 69 (1868), p. 185; *Christoffel*, Math. Ann. 19 (1881), p. 280. Höhere Abhängigkeiten zwischen den Differentialgleichungen bei „Study" p. 167.

85) Math. Ann. 2 (1870), p. 373; Beispiele (f_5, f_6) bei *Clebsch-Gordan*, Ann. di mat. (2) 1 (1867), p. 23. *Cayley* nahm irrtümlicherweise das Gegenteil an, Math. Ann. 3 (1870), p. 268. Für f_6, deren Ausartung die einer dreifachen Wurzel nicht erreicht, genügt die Gleichheit der abs. Invarianten: *O. Bolza*, Math. Ann. 30 (1887), p. 546, ausführlicher in Amer. J. 10 (1887), p. 47.

einstimmender, in x_1, x_2 linearer bezw. quadratischer Kovarianten existiert; die Typik wird dann ermöglicht. *P. Gram*[86]) knüpft an *Aronhold* an. Um bei der Herleitung der Gleichheit der absoluten Invarianten die Differentialgleichungen zu vermeiden, werden, in Anlehnung an *Gauss*[87]), die Resultanten aus den Transformationsrelationen für ein Paar F_p, G_p, dann für ein zweites F_p, H_p aufgestellt, und die Koeffizienten von F eliminiert. Jede Komitante von F wird aus Polarenbildungen bezüglich der σ (Nr. **13**) ganz-rational komponiert; hieraus fliesst als Äquivalenzkriterium ausser der Gleichheit der absoluten Invarianten das identische Verschwinden derselben Kovarianten. Wann aber reicht das erstere hin? Indem *E. B. Christoffel*[88]) *alle* zu einer gegebenen Form F äquivalenten sucht, „normiert" er den Gang der Elimination der σ; die Anzahl der in den Schlussgleichungen verbleibenden σ wird von der Folge der Eliminationen unabhängig. Der Maximalwert dieser Anzahl ist n^2; die Äquivalenz von F_p, G_p hängt dann nur von der Übereinstimmung der n^2 absoluten Invarianten ab. Die ausgeschlossenen Fälle gehören ausgearteten[89]) Grundformen an, deren allgemeine invariantentheoretische Beherrschung noch offen steht (Nr. **6**, **11**, **15**).

5. Automorphe Formen. Invarianten endlicher Gruppen. Bei der Frage nach den algebraischen Integralen der hypergeometrischen Differentialgleichung $D_2(x, y) = 0$ (II B 4 c) stiess *H. A. Schwarz*[90]) auf automorphe Gleichungen $f_n = 0$. Der Quotient η zweier Partikularlösungen y_1, y_2 genügt einer Differentialgleichung 3. Ordnung: die positive „x-Halbebene" bildet sich konform ab auf ein Kreisbogendreieck Δ auf der Kugel, das durch „symmetrische Wiederholung" über die Seiten hinaus „fortsetzbar" ist. Die Anzahl der Δ ist endlich, wenn η algebraisch von x abhängt, und umgekehrt.

Es giebt für die Typen von Δ eine begrenzte Anzahl; die zu-

---

86) Math. Ann. 7 (1874), p. 230. Vgl. *Gundelfinger* bei „Salmon-Fiedler" (1877), p. 452; „Study" p. 104.

87) Disquis. arithm., Abschn. 5.

88) Math. Ann. 19 (1881), p. 280, vgl. *Study* l. c.

89) Für solche Formen verschwinden alle Invarianten. Welche Rolle diese „Nullformen" für die ganze Theorie spielen, zeigt *Hilbert*, Math. Ann. 42 (1893), p. 313 [Nr. **6**, Schluss].

90) Zürich. Naturf. G. 1871, p. 74; J. f. Math. 75 (1873), p. 292 = Ges. Abh. p. 172, 211 (dort frühere Cit. in Abschn. 6). Vgl. für die ganze Nr. *L. Schlesinger*, Lineare Differentialgleichungen, Leipzig 1895/97; ferner I B 3 f, wo die Frage nach den Normalgleichungen massgebend ist.

gehörigen automorphen f_n [91]) werden nebst der jeweils herrschenden Syzygie entwickelt.

F. Klein [92]) gelangt direkt zu allen automorphen f_n, oder, was auf dasselbe hinauskommt, zu allen endlichen Gruppen binärer S, und führt die formentheoretischen Gesichtspunkte ein.

Die S einer (komplexen) Variabeln x werden vermöge ihrer Deutung auf der „Riemann'schen Kugel" [93]) (II B 1) den nichteuklidischen „Bewegungen" [94]) des Raumes (mit der Kugel als Fundamentalfläche) (III A 1) eindeutig zugeordnet, deren endliche Gruppen G der Anschauung zugänglich sind; bei den endlichen Gruppen bleibt ein Punkt des Kugelinnern fest (s. die Verallg. Anm. 115), den man in den Mittelpunkt der Kugel werfen kann. Exclusive zwei triviale Fälle, sind es die G_{12}, G_{24}, G_{60} der Drehungen, die die regulären Körper (Tetraeder, Oktaeder resp. Würfel, Ikosaeder resp. Dodekaeder) mit sich zur Deckung bringen.

Wendet man die S, etwa der G_{60}, auf zwei Werte x, x' an, so entstehen je 60 Werte als Wurzeln zweier Gleichungen $\pi_{60}=0$, $\pi'_{60}=0$; in der Schar $\pi + k\pi'$ befinden sich gerade drei volle Potenzen von Formen f_{12}, h_{20}, t_{30} [wo $h = (f, f)_2$, $t = (f, h)_1$], die nebst einer Invariante i das „volle System" (Nr. **6**) von G_{60} bilden. Zwischen f, h, t besteht eine Syzygie.

Die drei Formen f, sc. f_4, f_6, f_{12} sind durch $(f, f)_4 \equiv 0$ nebst Angabe ihrer bez. Ordnung charakterisiert [95]). Die „Ikosaedergleichung"

---

91) Insbes. tritt l. c. p. 330 die „Ikosaederform" in der kanon. Gestalt $s(1 - 11s^5 - s^{10})$ auf.

92) Erlang. Ber. 1874 Juli (unabh. v. *Schw.*), Dez. Die Syzygie erscheint als ein bekannter Satz über Funktionaldet. Ib. 1875 (Juli) die Resolventen der Ikosaedergl. Die zusammenfassende Arbeit in Math. Ann. 9 (1875), p. 183. Modifizierte Darst. (ohne die nicht-euklidischen Bewegungen) bei *G. Fano,* Monatsh. f. Math. 7 (1896), p. 297. Erweiterungen auf höhere Räume bei *O. Biermann,* Wien. Ber. 95 (1887), p. 523; *E. Goursat,* Par. C. R. 106 (1888), p. 1786. Vgl. „Clebsch-Lindemann" 2^1, Abt. 3, IX, X.

93) Das Doppelverhältniss von 4 Kugelpunkten studiert *L. Wedekind,* Diss. Erlangen 1874; Math. Ann. 9 (1875), p. 209. Für die ganze Auffassung vgl. *Klein,* Progr. Erlangen 1872. f_n (bes. f_3) mit komplexen Koeff. werden systematisch zuerst von *E. Beltrami,* Bol. Mem. 10 (1870) untersucht.

94) Vgl. z. B. *F. Lindemann,* Math. Ann. 7 (1874), p. 56. Für gewöhnliche Massbestimmung waren die bez. Gruppen von *C. Jordan* bestimmt, Ann. di mat. (2) 2 (1868), p. 168, 320. Vgl. *A. Schoenflies,* Math. Ann. 28 (1887), p. 319; 29 (1887), p. 50; 34 (1889), p. 172.

95) *L. Wedekind,* Habilitationsschrift, Karlsruhe 1876; *Brioschi,* Ann. di mat. (2) 8 (1877), p. 24; *G. Halphen,* Par. Sav. Ét. (2) 28 (1880/83). Vgl. „Gordan" 2, § 19. Die f_n mit $(n-1)$-fachem Linearfaktor sind uneigentliche Lösungen. [Die Beziehung $(f, f)_4 \equiv 0$ schon bei *Klein* l. c.] *Hilbert* untersucht allgemeiner

$f_{12} = 0$ ist eine Resolvente der allgemeinen Gleichung 5. Ordnung, und bildet den Kern von deren „Auflösungstheorie“ [96]).

Ein anderer Weg zu diesen Formen ist folgender. Das allgemeine Integral y einer linearen Differentialgleichung $D_n(x, y) = 0$, mit rationalen Koeffizienten, ist eine Linearform von n partikulären $y_1, y_2, \ldots y_n$ (II B 4). Umkreist x eine „singuläre“ Stelle von $D_n = 0$, so erleiden die y_i nach *L. Fuchs* [97]) eine S mit konstanten Koeffizienten. Der Inbegriff der S bildet die „Gruppe“ G von $D_n = 0$; die Endlichkeit von G ist das Kriterium, dass $D_n = 0$ lauter algebraische Integrale besitzt. Das Kriterium sei für eine $D_2 = 0$ erfüllt, so existieren, wie *L. Fuchs* [98]) nachweist, gegenüber G automorphe Formen von y_1, y_2, als Wurzeln aus rationalen Funktionen von x; diese „Primformen“ decken sich mit den obigen $\pi + k\pi'$. Für die Primformen niederster Ordnung n verschwinden alle Kovarianten [99]) von einer Ordnung $< n$; n ist daher nur einer endlichen Anzahl von Werten fähig [100]), nämlich $n = 2, 4, 6, 8, 10, 12$.

Klein [101]) stellt alle derartigen Typen von $D_2 = 0$ auf, ausgehend von den (5) möglichen Integralgleichungen für $s = y_1/y_2$; die bez. Differentialgleichungen 3. Ordnung für s entstehen durch beliebige rationale Substitution aus den von *Schwarz* (s. oben) erhaltenen.

Math. Ann. 30 (1887), p. 561 *Büschel* $\varphi_n + \lambda\psi_n$, für die $(\varphi, \psi)_s \equiv 0$. Bei „Gordan“ 2, § 13 resultieren die reg. Körper, wenn von einer Reihe von $\varphi_2^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. verlangt wird, dass $\left(\varphi_2^{(i)}, \varphi_2^{(k)}\right)_1 = \pm$ const. (incl. 0) ist. Bei *Brioschi* der analoge Fall einer f_8, wo $(f, f)_4 \equiv cf$: Chelini, Coll. M. 1881, p. 213; Par. C. R. 96 (1883), p. 1689.

96) Vgl. die zusammenfassende Darst. bei *F. Klein,* Ikosaeder, Leipzig 1884, sowie *Gordan,* Math. Ann. 28, p. 152; 29, p. 318 (1887), sowie I B 3 f und Nr. **11**, Anm. 219.

97) J. f. Math. 66 (1866), p. 121; 68 (1868), p. 354 [der Grundgedanke schon bei *Riemann*]. S. das Handbuch von *L. Schlesinger.*

98) Gött. Nachr. 1875 (Aug.), p. 568, 612; J. f. Math. 81 (1876), p. 97. Die Primformen systematisch ib. 85 (1878), p. 1; eine Weiterentwickelung des Begriffes bei *C. Jordan,* J. f. Math. 84 (1877), p. 85; *L. Schlesinger,* ib. 110 (1892), p. 130.

99) Die Umkehrung bei *Gordan,* Math. Ann. 12 (1877), p. 147.

100) l. c. (1876), p. 126. Einige der Fälle können nicht eintreten: *Klein,* Math. Ann. 11 (1876), p. 118, sodass nur die der regulären Körper $n = 2, 4, 6, 12$ verbleiben.

101) Erlang. Ber. 1876; Math. Ann. 11 (1876), p. 115; 12 (1877), p. 167. *Jordan*'s Typen (Par. C. R. 82, p. 605; 83, p. 1033 (1876), waren unvollständig, s. *Klein,* Math. Ann. 11 (1876), p. 118. In der *Schwarz*'schen Gleichung ersetzt *Klein* x durch eine rat. Funktion $R(x)$. Umgekehrt wird $R(x)$ bei gegebener Differentialgl. für η bestimmt. Weiteres s. „Inv.-Ber.“ p. 127.

Mit *Hermite*'s associierter Darstellung (Nr. 7) hat *F. Brioschi*[102]) die vollen Systeme der Primformen hergeleitet.

Rein algebraisch hat die automorphen f_n *Gordan*[103]) untersucht. Ist S auf die Gestalt $\frac{y-\alpha}{y-\beta} = e^{2i\varphi}\frac{x-\alpha}{x-\beta}$ gebracht, so resultiert S^n für $n\varphi$ statt φ; soll S einer endlichen Gruppe angehören, muss $n\varphi$ ein Multiplum von π sein und umgekehrt. Auf Grund einer einfachen Relation zwischen den φ der Substitutionen $S, T, ST, S^{-1}T$ wird die Aufgabe dahin reduziert, die Gleichung $1 + \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 = 0$ durch rationale Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ zu befriedigen. Die 5 resultierenden Gruppen von S werden auf eine kanonische Gestalt gebracht.

Die endlichen Gruppen G von $S(y_1, y_2, \ldots y_n)$ hat *C. Jordan*[104]) substitutionentheoretisch erforscht und die Methode auf $n = 3$ angewandt. Unter den S sind s, die die y_i nur um multiplikative Einheitswurzeln ändern. Die mit einer s vertauschbaren Untergruppen G' von G werden „durch G transformiert" (I A 6, Nr. **3**, **16**); zwischen den Ordnungen der G' und von G besteht eine diophantische Gleichung. Deren umständliche und undurchsichtige Diskussion führt für $n = 3$ zu 11 Typen, von denen aber nur einer wesentlich über den Fall $n = 2$ hinausgeht: d. i. die „*Hesse*'sche" G_{216},[105]) die die Figur der 4 Wendedreiseite einer C_3 (III C 3) invariant lässt.

Rechenfehler liessen *Jordan* dabei 2 neue ternäre G übersehen. Einmal eine G_{168},[106]) die *Klein* von der Transformation 7. Ordnung der elliptischen Funktionen her entdeckte (II B 6a). Durch eine isomorphe (I A 6, Nr. **14**) ternäre G_{168} geht die $C_4 \equiv x_1^3x_2 + x_2^3x_3 + x_3^3x_1 = 0$

102) Math. Ann. 11 (1876), p. 401.

103) Math. Ann. 12 (1877), p. 23. Die *Fuchs*'sche Eigenschaft der Primformen niederster Ordnung benutzt *Gordan* zu deren unabhängiger Aufstellung.

104) Par. C. R. 84 (1877), p. 1446; J. f. Math. 84 (1877), p. 85; Preisschrift Nap. Atti 8 (1888).

105) Das volle System bei *H. Maschke*, Math. Ann. 33 (1889), p. 324. Die vier fund. Inv. der Gruppe berechnet *A. Boulanger*, Par. C. R. 122 (1896), p. 178 auf Grund eines allgem. Satzes von *P. Painlevé* über tern. endliche Gruppen, ib. 104, p. 1829; 105, p. 58 (1887). — Die „monomiale" ternäre Gruppe, die ein Dreieck invariant lässt, studiert *Maschke*, Amer. J. 17 (1895), p. 168. Eine wichtige „uneigentliche" quat. Gruppe ist die der „*Kummer*'schen Konfiguration" (III C 6), vgl. *E. Study*, Leipz. Ber. 1892, p. 122; die Untersuchung ist typisch wegen der Methode der „Reihenentwickelungen" (Nr. **17**) und der „Apolarität" (Nr. **24**).

106) Math. Ann. 14 (1879), p. 428 bes. 438; ib. 17 (1881) (mit Berücksichtigung der u). Ausführlich in *Klein-Fricke*'s „Modulfunktionen", Leipzig 1890, 1, Abschn. 3, Kap. 6. Die *Klein-Riemann*'sche Fläche [II B 2, III A 4, III C 2] von $f = 0$ genauer bei *W. Haskell*, Am. J. 13 (1890), p. 1.

in sich über. Das volle System der C_4 (oder auch der Gruppe) besteht aus C_4 und 3 durch eine Syzygie verknüpften Kovarianten. Die „Galois'sche Resolvente" (I B 3 c, d, Nr. **10**, **23**) besitzt eine Resolvente 7. und 8. Ordnung, und umgekehrt hat *Gordan* jede[107]) $f_7 = 0$ mit einer G_{168} explicite darauf zurückgebracht (II B 6 a). Sodann hat *G. Valentiner* bei Vereinfachung und Revision der *Jordan*'schen Untersuchung eine neue ternäre G_{360}[108]) aufgefunden. *A. Wiman*[109]) hat deren Natur erforscht; sie ist einfach und holoedrisch isomorph mit der G_{360} der geraden Vertauschungen von 6 Dingen. *R. Fricke*[110]) hat einen funktionentheoretischen Zugang zu der Gruppe eröffnet. —

Einzelne endliche quaternäre Gruppen fand *Klein*: bei der „Auflösung" (I B 3 f) der allgemeinen $f_6 = 0$ resp. $f_7 = 0$ mit liniengeometrischen Hülfsmitteln eine $G_{6!}$ resp. $G_{\frac{1}{2}7!}$;[111]) liniengeometrisch eine $G_{32.6!}$,[112]) eine „Erweiterung" der $G_{6!}$; endlich, von den „Jacobi'schen Funktionen 3. Ordnung" aus (II B 6 a) eine G_{25920},[113]) die nach *H. Maschke*[114]) in einer $G_{2.25920}$ enthalten ist. *Klein*[114a]) leitet aus

107) Math. Ann. 17 (1880), p. 217, 359; 19 (1882), p. 529; 20 (1882), p. 487, 515; 25 (1885), p. 459. Die Koeffizienten der beiden Gleich. 7. Ord. bilden ein volles System von „Affektfunktionen" [I B 3 b, Nr. **15**, **23**]. Über den Zusammenhang mit den 28 Doppeltangenten der C_4 s. *M. Noether,* Math. Ann. 15 (1879), p. 89.

108) Kjöb. Skrift. (6) 5 (1889), p. 64. Die Methode beruht auf Wiederholung von S (vgl. *Sylvester,* Par. C. R. 94 (1882), p. 55 (Anm. 71); *R. Lipschitz,* Acta math. 10 (1887), p. 137; *W. Bermbach,* Diss. Bonn 1887).

109) Math. Ann. 47 (1896), p. 531. Die Gruppe ist weiter verfolgt von *F. Gerbaldi,* Pal. Rend. 12 (1898), p. 23; Zürich. Kongr.-Verh. 1898, p. 242; Math. Ann. 50 (1898), p. 473; *L. Lachtin,* Math. Ann. 51 (1898), p. 463. Auch die G_{60} und G_{168} des Textes sind einfache Gruppen, vgl. I A 6, Nr. **22**.

110) Gött. Nachr. 1896, p. 199; Deutsche Math.-Ver. 5^1 (1896), p. 55.

111) Math. Ann. 28 (1887), p. 499; vgl. *F. N. Cole,* Am. J. 8 (1886), p. 265. Die $G_{\frac{1}{2}7!}$ liniengeom. bei *Maschke,* Math. Ann. 36 (1890), p. 190, eine Untergruppe $G_{2\cdot168}$ formentheor. bei dems., Chic. Congr. P. 1896 (1893), p. 175.

112) Math. Ann. 4 (1871), p. 346. Das volle System bei *Maschke*, Math. Ann. 30 (1887), p. 496. Eine Untergruppe ist die der „*Borchardt*'schen Moduln" [II B 4 b], vgl. *W. Reichardt,* Math. Ann. 28 (1887), p. 84; das volle System bei *Maschke* l. c.

113) Math. Ann. 29 (1887), p. 157; vgl. *Reichardt* l. c. Die Gr. ist isomorph mit der der Dreiteilung der hyperell. Funktionen 1. Ordnung [II B 4 b] und mit der Gr. der Gleichung 27. Ordnung, von der die 27 Geraden einer F_3 abhängen; *C. Jordan,* Traité des substitutions, Paris 1871. Wegen des Zusammenhangs beider Probleme s. *Klein,* J. de math. (4) 4 (1888), p. 169, ausgeführt von *H. Burkhardt,* Gött. Nachr. 1892, p. 1; Math. Ann. 41 (1892), p. 313 (II B 4 b, III C 6).

114) *Maschke* stellt für beide Gruppen das volle System auf, Math. Ann. 33 (1889), p. 317.

114a) Leipz. Abh. 1885, Nr. 4, sowie anschl. Arbeiten in den Math. Ann.

der Theorie der elliptischen Normalkurven endliche Gruppen in $\frac{p-1}{2}$ und $\frac{p+1}{2}$ Variabeln her (p Primzahl).

Nach *Fuchs*[115]), *A. Loewy*[115]) und *E. H. Moore*[115]) gehört zu jeder endlichen Gruppe von S eine „Hermite'sche" F_2 (mit konjugierten Koeffizienten und Variabeln).

Maschke[116a]) und *Moore*[116b]) haben endliche Gruppen arithmetisch charakterisiert.

Automorphe F_n mit willkürlichen Parametern hat *S. Maurer*[117]) im Anschluss an *Aronhold* (Nr. **18**) untersucht, indem er *Lie*'s Behandlung „vollständiger Systeme" (II A 6) zu den Elementarteilern in Beziehung setzt. F_n hat gewissen unabhängigen Differentialgleichungen $\sum_{\lambda,\mu} c_{\lambda\mu} \frac{\partial F}{\partial x_\lambda} x_\mu = 0$ zu genügen, wo die c ausgezeichnete Zahlensysteme sind. Wegen der Untersuchungen über endliche resp. endliche kontinuierliche Gruppen höherer eindeutiger Transformationen, sowie über automorphe Kurven und Flächen s. III C 2, 5, 9; II A 6.

6. Endlichkeit. *Cayley*[118]) formuliert (Nr. **9**) das von ihm bis $n = 4$ incl.[119]) erledigte Problem allgemein, die (ganz-rationalen) Komitanten c einer f_n durch eine endliche Anzahl von „Grundformen"[3]) g unter ihnen ganz-rational darzustellen.

Eigenschaften des Gewichtes (Nr. **18, 23**) von c führen ihn zu einem Systeme linearer diophantischer Gleichungen; unter der irrtümlichen Annahme von deren Unabhängigkeit (Nr. **8, 9**) erschliesst er die Unlösbarkeit des Problems.

Gordan[120]) beweist auf einem beschwerlichen kombinatorischen

---

115) *Fuchs,* Berl. Ber. 1896, p. 753; Par. C. R. 113 (1896), p. 289; *Loewy,* ib. p. 168; Nova Acta Leop. 71 (1898), p. 379. Wegen des einfachen Beweises von *Moore* vgl. *Klein,* Deutsche Math.-Ver. 5^1 (1896), p. 67 [der Fall $n = 2$ schon bei *Klein* s. oben bei Anm. 94]. Wegen der Datierung s. *Moore,* Math. Ann. 50 (1898), p. 214.

116 [a]) Math. Ann. 50 (1898), p. 220, 492; 51 (1898), p. 253 ($n = 3, 4$). [b]) Math. Ann. 50 (1898), p. 213.

117) Münch. Ber. 1888, p. 103; auf rationale Transformationen ausgedehnt J. f. Math. 107 (1890), p. 89 [Nr. **2**].

118) II. und IX. Mem., sowie wegen des fehlerhaften Schlusses VIII. Mem. und Nr. **9** Anm. 184.

119) Wegen der Formensysteme selbst vgl. etwa „Clebsch-Lindemann" 1^1, p. 210, 228, sowie Nr. **8**, Anm. 169.

120) J. f. Math. 69 (1868), p. 343. Nach *Kronecker* bilden die c einen „Integritätsbereich", „Festschrift" p. 14.

Wege, dass einer f_n im obigen Sinne ein „volles System“ [121]) von g zukommt; dies „Endlichkeitsproblem“, zugleich für höhere Formen, ist ein Kernpunkt der Theorie geworden. Jedes symbolische Produkt (Nr. **12**) vom Grade m ist eine (numerisch) ganze lineare Kombination von Formen, die mittels Überschiebung (Nr. **14**) von Formen f_{m-1} mit f gebildet sind. Greift man von diesen, für $m = 1, 2, 3, \ldots$ gebildeten Überschiebungen die linear unabhängigen „T“ heraus, durch die jede weitere Form *eindeutig* darstellbar ist, so hat man ein volles System der T nachzuweisen. Ein solches existiere für eine Urform f_{n-1}, so entspricht jeder Komitante von f_{n-1} eine solche von $f = f_n$; indem man diese, aus f_{n-1} „herübergenommenen“ Formen genügend oft über die $(f, f)_k$ überschiebt, entstehen die übrigen Komitanten von f_n, die nach dem Werte von k in Klassen zerfallen. Für jede Klasse wird die Endlichkeit bewiesen.

Der Beweis liefert aber zugleich die Mittel, die vollen Systeme zu bilden, oder wenigstens zu begrenzen. Für eine f_5 und f_6 gelingt die Reduktion auf ein „kleinstes“ System von 23 resp. 26 Grundformen g (Nr. **9**).

Gordan giebt die Ausdehnung auf mehrere f, [121]) insbesondere im Fall der Kombinanten [122]) (Nr. **24**); auf eine C_3, [123]), und auf zwei C_2. [124]) Besitzen zwei Formenreihen je ein volles System, so auch das „kombinierte“ [125]), das durch Überschiebung der Formen und Formenprodukte beider Systeme entsteht. Im „Programm“ [126]) ersetzt *Gordan* die Überschiebungen durch die allgemeineren „Faltungen“ [127]) (Nr. **14**), er führt die unsymbolischen „Reihenentwickelungen“ (Nr. **17**) ein, aus deren Vergleichung Relationen zwischen symbolischen Produkten fliessen.

Der Beweis für Urformen f stützt sich jetzt auf den „Hülfssatz“ [128]), dass die positiven, ganzzahligen Lösungen eines gewissen

121) Math. Ann. 2 (1870), p. 227; ib. 5 (1872), p. 595.

122) Math. Ann. 5 (1872), p. 95.

123) Math. Ann. 1 (1869), p. 90.

124) Bei „Clebsch-Lindemann“ 1^1, p. 291, ausgeführt in Math. Ann. 19 (1882), p. 529 (Anm. 145).

125) Math. Ann. 5 (1872), p. 595; „Programm“ (s. Anm. 9) bes. p. 50. Weitere Anwendungen auf höhere Formen bei *F. Mertens,* Wien. Ber. 95 (1887), p. 942; 97 (1888), p. 437, 519; 98 (1889), p. 691; 99 (1890), p. 367; Monatsh. f. Math. 1 (1890), p. 13, sowie bei *J. Kleiber,* Zeitschr. Math. Phys. 37 (1892), p. 79.

126) S. die Monographien.

127) Vgl. auch die Hülfsbegriffe „Stufe, Rang, Dimension“, „Programm“ p. 3—6.

128) Die Bezeichnung des Textes ist der Kürze halber eingeführt. Wegen des Beweises s. „Gordan“ 1 § 15 und *J. Petersen* Nr. **12**, Anm. 243.

Systems linearer diophantischer Gleichungen aus einer endlichen Anzahl von ihnen linear komponiert werden. Die für eine f_7 und f_8 angegebenen vollen Systeme hat *A. v. Gall*[129]) reduziert.

Der Beweis bei „Gordan“[130]) wird durch neue Begriffe vereinfacht. Ein „relativ vollständiges“ System geht durch Faltung in sich über mod. $(ab)^k$, d. h. bis auf Glieder, die mit $(ab)^k$ (Nr. **12**) multipliziert sind. Ein „Reduzent“ ist ein symbolisches Produkt, dessen Reduzierbarkeit auf Bildungen niedrigeren Charakters abgelesen werden kann. Da sich eine Komitante c von $f = f_n$ so schreiben lässt, dass die höchste Potenz von (ab) eine gerade ist, so ordne man alle Formen von f in $g+1$ $\left(g = \frac{n}{2} \text{ resp. } \frac{n-1}{2}\right)$ Klassen $A_0 = f$, A_1, $A_2, \ldots A_g$ ein, so, dass A_k mod. $(ab)^{2k+2}$ relativ vollständig ist.

Man konstruiere mittels der $(f, f)_{2k+2}$ endliche Systeme B_0, $B_1, \ldots B_{g-1}$, sodass B_k relativ vollständig mod. $(ab)^{2k+4}$ ist, und A_{k+1} durch Überschiebung von A_k mit B_k entsteht. So ergiebt sich successive die Endlichkeit von $A_1, A_2, \ldots A_g$, wo A_g alle Komitanten von f umfasst[131]).

Der Beweis ist vermöge der „Reihenentwickelung“ (Nr. **17**) auf Urformen mit kongredienten Variabelnreihen übertragbar.

G. Peano[132]) beweist durch vollständige Induktion, auf Grund der Reihenentwickelung nach Polaren (Nr. **14**), die Endlichkeit für Urformen $f, g, \ldots$ von m Reihen von Variabeln $x_1, x_2; y_1, y_2$; etc., die unabhängigen S unterworfen werden. Insbesondere gilt der Satz von den „Korrespondenzen“[133]) $f(x_1, x_2; y_1, y_2)$.

Gordan[134]) führt den Beweis auf Grund des „erweiterten“ Formensystems, das man erhält, etwa im Falle *einer* f_n, wenn man das volle

---

129) Math. Ann. 17 (1880), p. 31, 139, 456; 31 (1888), p. 318.

130) „Gordan“ 2, § 20, 21. Eine Ausdehnung des Beweises auf höhere Formen (C_n, F_n, ...) scheitert daran, dass die symbolischen Ausdrücke der Komitanten unübersehbar werden. Vgl. *Study,* Leipz. Ber. 1890, p. 172. *E. Waelsch* hat mit Erfolg *Grassmann*'sche Symbole (Math. Ann. 7 [1874], p. 538) [Nr. **12**] eingeführt: Math. Ann. 37 (1890), p. 141.

131) Excl. $n = 4$ besteht A_1 stets aus den 3 Formen f, $(f, f)_2$, $\{f, (f, f)_2\}$. Für $(f, f)_4 \equiv 0$, i. e. für die Formen der regulären Körper (Nr. **5**) stellt A_1, nebst noch einer Invariante, das volle System von f dar. So ist für $n = 5$ $A_0 = f$, $B_0 = (f, f)_2$, $A_1 = f, (f, f)_2$, $\{f, (f, f)_2\}$, während B_1 aus $(f, f)_4 = \varphi_2 = \varphi_x^2$ und $(\varphi\varphi')^2$ besteht. Die Überschiebungen von A_1 über B_1 liefern das volle System der f_5.

132) Tor. Atti 17 (1881), p. 73.

133) Gi. di mat. 20 (1882), p. 79.

134) Erlang. Ber. 1887, p. 389; Math. Ann. 33 (1888), p. 372. Für Reihen von f_2 bereits bei *Study,* Erl. Ber. 1887, p. 385.

System einer beliebigen Anzahl von Formen $f_n^{(i)}$ als Überschiebungen bildet, und die Indices $i, k, \ldots$ weglässt.

Peano[135]) zeigt die Endlichkeit der „Typen" einer beliebigen Anzahl von $f_n^{(i)}$; die Formen eines Typus erwachsen aus einander vermöge des *Aronhold*'schen Prozesses. Der Beweis beruht auf dem „Entwickelungssatze" von *A. Capelli* (Nr. 17).

F. Mertens[136]) beweist die Endlichkeit für eine Reihe von Urformen $(f_n, g_p, h_r, \ldots)$ auf unsymbolischem Wege. Linearformen kommt ein volles System zu; ist also der Satz richtig für die Urformen $(f_{n-1}, g_p, h_r, \ldots)$, so darf man sie um eine Linearform l_1 vermehren. Von den nunmehrigen Komitanten besitzen die, die in den Koeffizienten von l_1 und f_{n-1} je von gleichem Grade sind, nach *Gordan*'s „Hülfssatz" (s. oben) ein volles System. Für l_1 nehme man successive die Linearfaktoren von f_n; durch symmetrische Kombinierung der vollen Systeme entsteht das der Ur-Reihe $(f_n, g_p, h_r, \ldots)$. — Ähnlich verfährt *D. Hilbert*[137]). Sei etwa $f_n = \prod_i (\alpha_i x + \beta_i y)$ die Urform, und $\alpha_i \beta_k - \alpha_k \beta_i = \varepsilon_{ik}$, dann ist eine Invariante i von f ein Aggregat von Bildungen $\omega = \prod_{i,k} \varepsilon_{ik}^{e_{ik}}$ (e_{ik} positiv-ganz), wo $e_{i1} + \cdots + e_{i,i-1} + e_{i,i+1} + \cdots + e_{in}$ für $i = 1, 2, \ldots n$ den nämlichen Wert hat. Nach dem „Hülfssatz" ist jede brauchbare Lösung e_{ik} von der Form $e_{ik} = \sum_{r=1}^{r=m} p_r e_{ik}^{(r)}$, wo die p wiederum natürliche Zahlen sind. Setzt man $e_{ik}^{(r)}$ für e_{ik}, so geht ω in eine (irrationale) Invariante ω_r über, die einer (rationalen) Gleichung von der Ordnung $n!$ genügt. $\omega_r^{p_r}$ ist darstellbar (I C 4) als lineare Form von $\omega_r^0, \omega_r^1, \ldots \omega_r^{n!-1}$; i wird eine symmetrische Summe $\sum \omega_1^{p_1} \omega_2^{p_2} \ldots \omega_m^{p_m}$, und damit eine ganze Funktion einer endlichen Anzahl analoger Bildungen, für die kein $p_r > n!$ ist.

Hilbert[138]) dehnt den Endlichkeitssatz auf Reihen von Urformen

---

135) Tor. Atti 17 (1882), p. 580. Die „Typen" hat *Clebsch* für f_1 und f_2 eingeführt, „Binäre Formen" § 58. Die Endlichkeit der Typen der orthog. Gruppe von 3 Var. zeigt *Burkhardt,* Math. Ann. 43 (1893), p. 204.

136) J. f. Math. 100 (1886), p. 223; Wien. Ber. 98 (1889), p. 1. Wegen der abzählenden Beweise von *C. Jordan* und *Sylvester* s. Nr. 9, Anm. 191.

137) Math. Ann. 33 (1888), p. 223.

138) Math. Ann. 36 (1890), p. 473. Vgl. die Darstellung bei *H. Weber* 2, Abschn. 6; die arithmetischen Beweise bei *Gordan,* Math. Ann. 42 (1893), p. 132 und *Capelli,* Nap. R. (3) 2 (1896), p. 198 (nebst Erweiterung auf Potenzreihen ib. p. 231), sowie die symbolische Fassung bei *H. S. White,* Amer. J. 14 (1892), p. 283. Eine Anwendung auf höhere komplexe Zahlen giebt *Hilbert,* Gött. N.

mit n Variabeln aus, vermöge Zurückführung auf einen allgemeineren Satz über unendliche Formensysteme[138]) [I B 1 c, Nr. 18].

Sei ein System $F_r^1(x_1, \dots x_n \mid a^{(1)}), F_{r_2}^{(2)}, F_{r_3}^{(3)}, \dots$ in inf. vorgelegt, wo die a einem Rationalitätsbereiche R (I B 1 a, Nr. 9; I B 1 c, Nr. 2) angehören. Es soll jedes F aus einer endlichen Anzahl unter ihnen linear komponiert werden, mittels Faktoren, die Formen der x sind. Ist F_r eine bestimmt ausgewählte der Formen F, so lässt sich (wie beim Aufsuchen des grössten gemeinsamen Teilers [I B 1 a, Nr. 12]), eine Hülfsform B so finden, dass in $F - BF_r$ x_n^r herausfällt, also $F = BF_r + g^{(1)} x_n^{r-1} + g^{(2)} x_n^{r-2} + \cdots + g^{(r)}$ wird, wo die g Formen der $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ sind, für die unser Satz richtig sei. Wendet man ihn auf die Kolonne der $g^{(1)}$[139]) an, indem F alle Systemformen durchläuft, so erscheint F als lineare Kombination von F_r, einer endlichen Anzahl weiterer $F^{(s)}$ und einer Form, die bez. x_n von einer Ordnung $\leqq r - 2$ ist. So gelangt man nach höchstens r Schritten zur Darstellung: $F + A^{(1)} F^{(1)} + A^{(2)} F^{(2)} + \cdots + A^{(m)} F^{(m)}$, wo die $F^{(i)}$ m geeignete Systemformen sind, und wo die Koeffizienten der $A^{(i)}(x_1, x_2, \dots x_n)$ R angehören. Für $n = 1$ ist aber der Satz trivial. — Behufs Anwendung auf die Invarianten liege etwa eine ternäre Urform $C(x \mid a)$ vor. Die Invarianten J, als Formen der a, lassen sich in einer Reihe, wie die $F^{(i)}$, anordnen, sodass jedes J die Darstellung $J = \sum_1^m A^{(k)} J_k$ gewinnt. Die $A(a)$ sind noch durch Invarianten zu ersetzen. Seien J vom Grade g in den a, $J^{(k)}$ vom Grade g_k; die Gewichte p, p_k. Durch eine S mit dem Modul Δ gehe $C(x \mid a)$ über in $C'(x' \mid a')$, dann folgt (Nr. 2) $\Delta^g J = \sum_1^m \Delta^{g_k} A^{(k)}(a') J^{(k)}$. Nach *Gordan*[140]) und *Mertens*[140]) unterwerfe man beide Seiten der Gleichung g-mal dem Ω-Prozess $\sum \pm \left| \frac{\partial}{\partial a_{11}} \frac{\partial}{\partial a_{22}} \frac{\partial}{\partial a_{33}} \right|$ (Nr. 14), so ändert sich J nur um einen

1896, p. 179. Aus *Hilbert's* Satz folgt u. a., dass zu jeder endlichen Gruppe von S ein volles System von Invar. gehört (Nr. 5). *Kronecker* hat einen analogen Satz, Festschrift p. 18, aber für associierte Systeme (Nr. 7). — *L. Maurer* beweist, dass die charakt. linearen part. Diff.gleichungen (Nr. 5, 18) der J umgekehrt deren „Endlichkeit" involvieren: Münch. Ber. 29 (1899), p. 147.

139) Der Prozess lässt sich auch in umgekehrter Richtung vornehmen, wodurch Nenner vermieden werden, sodass nur ganze ganzzahlige Verbindungen der Koeffizienten eingehen. In diesem Sinne hat *Weber* für die f_4 ein volles System aufgestellt, Gött. Nachr. 1893, p. 108. Cf. „Weber" 1, Abschn. 5.

140) *Gordan* für $q = 0$ in „Gordan" 2, § 9; *Mertens* allg. in Wien. Ber. 95 (1887), p. 942. Für Urformen F_1 schon bei *Clebsch,* J. f. Math. 59 (1861), p. 7 u. f. Derartige Differentiationsprozesse ausführlich bei *W. E. Story,* Lond. M. S. Pr. 23 (1892), p. 267; Math. Ann. 41 (1893), p. 469.

positiv-ganzzahligen Faktor, während jeder Faktor von $J^{(k)}$ eine Invariante $J'^{(k)}$ von C wird, mithin ist (von Zahlenfaktoren abgesehen) $J = \sum_1^m J'^{(k)} J^{(k)}$, wo die Grade und Gewichte der J' unter denen von J liegen. Durch analoge Darstellung der J' u. s. f. gelangt man nach einer endlichen Anzahl von Schritten zu einem vollen Systeme von Invarianten $J^{(1)}, J^{(2)}, \dots J^{(n)}$.[141]) Der Beweis gilt ebenso für eine Reihe von Urformen $F(x; y; \dots | a)$ von Variabelnreihen, (x), $(y), \dots$, mögen sie denselben, oder auch unabhängigen S unterliegen.

Die linken Seiten („Syzyganten") der in den a identisch erfüllten Relationen („Syzygien 1. Art" [Nr. 8]) zwischen den J sind (nicht homogene) Formen der Grundformen $J^{(1)}, J^{(k)}, \dots J^{(n)}$; auch sie besitzen demnach ein volles System. Zwischen den Syzygien 1. Art herrschen in den $J^{(k)}$ identisch erfüllte Relationen („Syzygien 2. Art") u. s. f. Allen diesen „Syzyganten" kommt je ein volles System zu, der Prozess der Syzygienbildung bricht aber auch nach höchstens m Schritten ab[142]).

Behufs wirklicher Aufstellung voller Systeme beachte man[143]), dass sich aus den J einer Reihe von F eine endliche Anzahl σ algebraisch unabhängiger $J^{(1)}, J^{(2)}, \dots J^{(\sigma)}$ so aussondern lässt, dass alle übrigen ganze algebraische Funktionen (I B 1 c, Nr. **3**) der σ Formen J werden, d. i. zugleich mit den J verschwinden. Durch die J wird ein „Körper" (I B 1 c, Nr. **2**; I C 4) bestimmt, dessen „Basis" $i^{(1)}$, $i^{(2)}, \dots i^{(k)}$ sich nach *Kronecker*[144]) auf arithmetischem Wege finden lässt; dann aber bilden die J mit den i ein volles System.

Für eine einzelne f_n kann man die J durch Resultantenbildung erhalten, und dann vermöge des *Aronhold*'schen Prozesses (Nr. **13**) auf eine Reihe von f übergehen.

Aber auch für $F(x_1, x_2, \dots x_n | a)$ lassen sich die J durch eine endliche Anzahl rationaler Prozesse gewinnen; das beruht darauf, dass eine $F(x | a)$ mit numerischen a, die vermöge einer S mit dem Modul Δ in $F'(x' | a')$ übergehe, dann und nur dann noch eine J ($\neq 0$) besitzt, wenn Δ eine *ganze* algebraische Funktion der a' ist.

141) *Hurwitz* hat mit Erfolg einen Integrationsprozess eingeführt, Gött. Nachr. 1897, p. 71 und hat damit zuerst die Endlichkeit der orthogonalen Invarianten einer Reihe von Urformen allgemein nachgewiesen. Wegen der systematischen Stellung dieser „Integralinvarianten" vgl. *S. Lie,* Leipz. Ber. 49 (1897), p. 342, 367.

142) Ein Beispiel bei *A. Schönflies,* Gött. Nachr. 1891, p. 339.

143) Math. Ann. 42 (1893), p. 313. Einen Selbstbericht giebt *Hilbert*, Chic. Congr. P. 1896 (1893), p. 116; vgl. ferner den Bericht von *H. S. White,* N. York B. (2) 5 (1899), p. 161.

144) J. f. Math. 92 (= Festschrift) 1881, § 6.

Daraufhin lassen sich auch nur von n abhängige obere Grenzen für Anzahl und Gewicht der Grundformen auf rationalem Wege ermitteln[145]).

7. Associierte Formen und typische Darstellung. *Hermite*[146]) hat die Komitanten einer f_n durch eine endliche Anzahl unter ihnen, die „associierten Formen", *rational* ausgedrückt. Führt man in $f(x) = f_n(x_1, x_2)$ die Kovarianten $\xi_1 = y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\xi_2 = x_1 y_2 - x_2 y_1$ — wo die y mit den x kogredient sind — als neue Variable ein, wodurch $f^{n-1}(x) f(y)$ übergeht in $\varphi(\xi) = (1, 0, \varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}, \ldots \varphi^{(n)})(\xi_1, \xi_2)^n$, so bilden die $\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}, \ldots \varphi^{(n)}$ nebst f nach Sätzen von *Boole* und *Sylvester* (Nr. **2**, **16**) ein associiertes System von f. Ersetzt man im Leitgliede (Nr. **23**) einer Komitante c von f die Koeffizienten von $f(x)$ durch die von $\varphi(\xi)$, und macht mit f homogen, so hat man c durch f und die $\varphi^{(i)}$ rational dargestellt. Als Anwendung erscheint *Cayley*'s Syzygie (Nr. 8) zwischen den Formen einer f_4, die wiederum zu einer „typischen" (s. unten) Transformation des elliptischen Integrals erster Gattung verwandt wird.

Hermite[147]) setzt auch die „Tschirnhausentransformation" von $f = 0$

---

145) Wegen der vielen Einzeluntersuchungen über volle Systeme vgl. „Inv.-Bericht" II A 6, p. 150. Nachträge: Das System von $2\,C_2$ (Anm. 124) leitet einfach *K. Reuschle* ab, Zürich. Kongr.-Verh. 1898, p. 123; durch Eliminationen aus den *Euler*'schen Formeln [I B 1 a, Nr. **27**] für die Diff.quotienten von Formen erhält er Komitanten incl. ihrer Syzygien. — Das System von $3 f_3$ bei *v. Gall,* Math. Ann. 45 (1894), p. 207. Die Systeme der f_5, f_6 übersichtlich bei *E. McClintock,* N. York. B. 1 (1892), p. 85. Die f_5 mittels einer typischen Darstellung [Nr. **7**] bei *J. Hammond,* Lond. M. S. P. 27 (1896), p. 392; vgl. *Cayley,* X. Mem. Das System von $3\,C_2$ auch bei *H. F. Baker,* Cambr. Tr. 15[1] (1889), p. 62 und, nach der Methode von *Mertens,* bei *E. Fischer* und *K. Mumelter,* Monatsh. f. Math. u. Phys. 8 (1897), p. 97. — Bes. sei noch auf eine Arbeit von *Study,* Leipz. Ber. 49 (1897), p. 443 hingewiesen, der das System der ganzen Invarianten der Gruppe von S, die eine F_2 $(D \neq 0)$ in ein Vielfaches von F_2 überführen [Nr. **3**, Anm. 77], in den Grundzügen behandelt. *St.* präzisiert hier auch die Stellung derartiger „spezieller" Probleme zur allgemeinen Theorie von *Lie.*

146) J. f. Math. 52 (1856), p. 1; das Wort „associiert" p. 23. Die φ sind die „Schwesterformen", vgl. „Gordan" 2, § 34, s. noch Anm. 148, 149, 151. Eine andere Begründung bei *B. Igel,* „Über die associierten Formen", Wien 1889. Ausdehnungen auf n Variable bei *Brioschi,* Ann. di mat. (1) 1 (1858), p. 158; *H. Grassmann,* Math. Ann. 7 (1874), p. 538, wo auch der Zusammenhang mit dem Satze der Nr. **15** hervortritt. Für $n = 3$ ausführlicher bei *W. E. Brunyate,* Quart. J. 25 (1891), p. 155. Die Subst. von *Hermite* dient bei *Brioschi* zur Kanonisierung des hyperelliptischen Integrals 1. Gattung, Rom. Linc. R. (5), 4[1] (1895), p. 363. S. die historische Darstellung bei *M. Noether,* Math. Ann. 50 (1878), p. 477. — *Deruyts* hat die vollen und associierten Systeme auf seine „primären Kovarianten" übertragen [Nr. **23**].

147) Par. C. R. 46 (1858), p. 961; vgl. *Cayley,* J. f. Math. 58 (1861), p. 259

(I B 3 f) in invariante Gestalt um, sodass zugleich der invariante Charakter der transformierten Gleichung $\psi = 0$ — die überdies von möglichst wenigen Parametern abhängen soll — hervortritt. Ist $\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - \alpha}$, wo $f(\alpha) = 0$, so schreibt *Hermite* die α zugeordnete Wurzel von ψ symbolisch $\varphi(\zeta) - \frac{1}{n} f'(\zeta)$, wo $\zeta^0, \zeta^1, \dots \zeta^{n-2}$ durch $n - 1$ Parameter t zu ersetzen sind.

Die Koeffizienten ψ werden Polarenbildungen von Kovarianten von f; der zweite ist $= 0$, der dritte die „Bezoutiante“ [I B 3 a, Nr. 8]. Die neuen Koeffizienten werden von möglichst geringem Grade in den alten. *Clebsch*[148]) führt die „Schwesterformen“ $\varphi^{(i)}$ zurück auf die $\psi^{(k)} = (f, f)_k$ und $\chi^{(k)} = (f, \psi^{(k)})_1$; er zeigt in einfachen Fällen, *S. Gundelfinger*[149]) allgemein, dass die $\varphi^{(i)}$ in den ψ, χ und in f *ganz* sind, und dehnt die associierte Darstellung auf zwei, *Sylvester*[150]) auf beliebig viele f aus.

Gordan[151]) führt die gemeinte Darstellung der φ explicite aus; die ψ, χ treten in a priori angebbaren Produkten auf; deren numerische Koeffizienten C hängen von quadratischen Gleichungen ab, die aber in in den C lineare überführbar sind. *S. Kohn*[152]) operiert anstatt der $\varphi^{(i)}$ mit den Wurzeln von $\varphi(\xi, 1) = 0$ und findet so die Teilbarkeit (Nr. **25**) der Resultanten und Diskriminanten von Kovarianten von f durch eine Potenz der Diskriminante von f, und entsprechend für mehrere Urformen.

R. Perrin[153]) hat für $F_n(x_1, x_2, \dots x_p)$ ein associiertes System konstruiert. Sei $F = (a, F_1, F_2, \dots F_n)(x_1, 1)^n = f(x_1, 1)$, so bilde man die $\psi^{(k)}$, $\chi^{(k)}$ für f, deren Leitglieder $\psi_0^{(k)}$, $\chi_0^{(k)}$ Formen der $x_2, x_3, \dots x_p$ sind. Ist in gleichem Sinne C_0 das Leitglied einer Kovariante C von F, so wird C_0, bis auf eine Potenz von a im Nenner, ganz-rational in Komitanten der ψ_0, χ_0. Von C_0 kann man zu C zurückkehren. Das Prinzip des Beweises reicht hin für die Kontravarianten von F, sowie für mehrere Urformen.

= Coll. Pap. 4, p. 259, sowie die Darstellung bei „Weber“ 1, Abschn. 6, 7 und Nr. **19**, Anm. 321. Die Bezoutiante ist von *Sylvester* genauer untersucht, Lond. Tr. 143 (1853), p. 543 [I B 3 a, Nr. **8**].

148) Gött. Nachr. 1870, p. 405 = Math. Ann. 3, p. 265.

149) J. f. Math. 74 (1871), p. 87; einfacher bei „Salmon-Fiedler“ p. 87. Vgl. *B. Igel*, Monatsh. f. Math. u. Phys. 5 (1894), p. 287.

150) Par. C. R. 86 (1878), p. 448; Amer. J. 1 (1878), p. 118.

151) Math. Ann. 41 (1892), p. 1.

152) Wien. Ber. 100 (1851), p. 865, 1013; vgl. *E. Waelsch*, ib. p. 574. Der Ausdruck für die Wurzeln von $\varphi = 0$ implicite schon bei *Hermite* (s. Anm. 147).

153) Par. C. R. 104 (1888), p. 108, 220, 280.

Weiter reicht die Methode von *R. Forsyth*[154]). Es liege etwa eine (ternäre) C_n vor, $=(a, f_1, f_2, \ldots f_n)(x_1, 1)^n$; $T_{m,p} = T(\overset{m}{x}; \overset{p}{u}) = T_{00} x_1^m u_1^p + \cdots$ sei eine Komitante („Ternariante") von C. Dann genügt das Leitglied T_{00} von T zwei charakteristischen linearen partiellen Differentialgleichungen [Nr. 18], die aussagen, dass T_{00} zugleich das Leitglied einer Simultankovariante der f_i ist. Das associierte System von C besteht, incl. u_x, aus $\frac{1}{2}(n+4)(n-1)+1$ Individuen, für die allgemeinere Urform $C(\overset{n}{x}; \overset{\nu}{u})$ aus $\frac{1}{4}(n+1)(n+2)(\nu+1)(\nu+2)-2$.

Bei $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ sind noch die „Zwischenvariabeln" $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$ zu berücksichtigen. Das Leitglied Q_{000} einer „Quaternariante" Q von F genügt jetzt sechs charakteristischen Gleichungen u. s. f.

Von Einzelfällen höherer Gebiete haben durchgeführt *Clebsch* und *Gordan*[155]) die C_3, *Gordan*[156]) die C_4 mit einer G_{168} in sich (Nr. 5).

Der associierten „Kovariantentypik" gegenüber steht die Methode der „(Invarianten-)Typik", in $i^k f$ (wo i eine Invariante von f) vermöge einer kovarianten Tschirnhausentransformation die Koeffizienten zu Invarianten zu machen.

Zuerst bringt *Hermite*[157]) durch Einführung zweier linearer Kovarianten c_1, c_1' von f_n als neuer Variablen f_n auf eine typische Gestalt f_n'. Ursprünglich sind bei *Hermite* c_1, c_1' irrational, die Faktoren einer rationalen Kovariante c_2; f_n' nimmt eine „kanonische" Gestalt an, und erst jede ganze Funktion ihrer Koeffizienten, die bei den S unverändert bleibt, die c_2 in sich überführen, wird, bis auf eine Potenz der Diskriminante von c_2 im Nenner, eine ganz-rationale Invariante von f_n. Im weiteren Verlaufe werden zwei rationale c_1, c_1' verwandt (n ungerade); f_n' wird zur „typischen Form". Der Fall $n=5$ wird durchgeführt; die schiefe Invariante (Nr. 2) von f_5 wird durch die drei andern ausgedrückt. *Hermite* gelangt so zu einer invariantentheoretischen „Auflösung" der $f_5 = 0$ und zu Kriterien für die Realitätsverhältnisse[158]) der Wurzeln. *Clebsch* und *Gordan*[159]) umgehen die

154) Amer. J. 12 (1889), p. 1, 115 („Ternarianten"), vgl. *W. E. Brunyate,* Quart. J. 25 (1891), p. 155; Cambr. Tr. 14 (1889), p. 409 („Quaternarianten") [Anm. 228]. Weitere Ausführungen, bes. für $F_3(x_1 x_2 x_3 x_4)$, bei *D. B. Mair,* Cambr. Tr. 16 (1896), p. 1.

155) Math. Ann. 1 (1869), p. 57; vgl. *Forsyth,* Anm. 154.

156) Math. Ann. 17 (1880), p. 359; vgl. die Vorarbeit Anm. 155.

157) Cambr. Dubl. m. J. 9 (1854), p. 172.

158) Vgl. die Übersicht bei *Klein,* „Ikosaeder", Abschn. 2, sowie *J. McMahon* bei *R. A. Harris,* Ann. of math. 5 (1891), p. 217.

159) Ann. di mat. (2) 1 (1867), p. 23; vgl. „Gordan" 2, § 24, 29.

direkte Einführung der c_1, c_1' durch symbolische Rechnung (Nr. **12**). Es liege etwa eine $f_5 = a_x^5$ vor, und seien α_x, β_x zunächst überhaupt zwei Linearformen, so ist $(\alpha\beta)a_x \equiv (a\beta)\alpha_x - (b\alpha)\beta_x$. Erhebt man auf die 5te Potenz, so ist $(\alpha\beta)^5 f_5$ als Form der Variabeln α_x, β_x dargestellt; man hat noch die Koeffizienten als simultane Invarianten von f, α_x, β_x auszudrücken. Hinterher nehme man für α_x, β_x zwei geeignete Kovarianten von f_5. Es lassen sich so auch alle Ausnahmefälle der f_5 erledigen. — Für $f = f_6 = a_x^6 = (a_x^2)^3$ wird mit drei Quadratformen α_x^2, β_x^2, γ_x^2 entsprechend operiert; $(\alpha\beta\gamma)a_x^2$ wird linear in α_x^2, β_x^2, γ_x^2 und $(\alpha\beta\gamma)^3 f_6$ zu einer typischen $C_3(\alpha_x^2, \beta_x^2, \gamma_x^2)$ u. s. f. Analog wird eine f_{2n} eine $C_n(\alpha_x^2, \beta_x^2, \gamma_x^2)$. Die Form C_n lässt sich nach *F. Lindemann*[160]) durch das identische Verschwinden einer gewissen Kovariante charakterisieren; hier ist eine Quelle der Apolaritätstheorie (Nr. **24**).

Einzelfälle: $2 f_3$ als Ableitungen einer f_4 bei *Hermite*[161]), durch *Clebsch*[162]) und einfacher durch *Gundelfinger*[163]) ausgeführt; $3 f_4$ als Ableitungen einer f_6 nach *Lindemann*[164]); $3\,C_2$ als Ableitungen einer C_3 bei *Hermite*[161]), von *Gundelfinger*[165]) durchgeführt und auf die Transformation eines längs einer C_3 erstreckten elliptischen Integrals 1. Gattung angewendet[166]); endlich die C_4 mit einer G_{168} in sich (Nr. **5**), zusammen mit einer C_2 bei *Gordan*[167]).

Vermöge typischer Darstellung werden nach *E. Stroh*[168]) die Kombinanten (Nr. **24**) von f_n, φ_n zu Komitanten einer $f_{2(n-1)}$.

8. Syzygien. Zwischen den Grundformen g von Urformen bestehen rationale Relationen, „Syzygien“ (1. Art), [Nr. **6**]. Seien etwa $g_1 = g_1(x_1, x_2)$, $g_2 = g_2(x_1, x_2)$, $g_3 = g_3(x_1, x_2)$ drei Grundformen einer f_n, so führt die Elimination der x_1, x_2 zu einer Syzygie zwischen g_1, g_2, g_3.

160) Par. Bull. S. M. 5 (1877), p. 113; 6 (1878), p. 195.

161) J. f. Math. 57 (1860), p. 371.

162) J. f. Math. 67 (1867), p. 371.

163) Math. Ann. 7 (1874), p. 452, s. die Verallgemeinerungen bei *F. de Astis*, Gi. di mat. 36 (1898), p. 161; $2 f_n$ bei *Ph. Wiederhold*, ib. 8 (1875), p. 444.

164) „Clebsch-Lindemann“ 1, p. 900.

165) J. f. Math. 80 (1875), p. 73. Allgemeiner hat *J. Rosanes* $3\,F_{1,1}$ $(n = 3)$ durch eine S zugleich in symmetrische Formen übergeführt, J. f. Math. 95 (1887), p. 247; vgl. *Igel*, Monatsh. f. Math. 5 (1894), p. 284, sowie die Ergänzungen bei *Ph. Maennchen*, Diss. Giessen 1898.

166) Math. Ann. 7 (1874), p. 449. Vgl. die Weiterführung bei *G. Pittarelli*, Rom. Linc. Rend. (4) 4 (1888), p. 509, 703.

167) Math. Ann. 20 (1882), p. 529.

168) Math. Ann. 34 (1889), p. 321.

Bei einer f_3 wie f_4 existiert nur eine Syzygie, vermöge deren *Cayley*[169]) die $f_3 = 0$ resp. $f_4 = 0$ „invariantentheoretisch auflöst". Die associierten Formen (Nr. 7) liefern eine theoretische Herstellung der Syzygien zwischen den Komitanten von Urformen; man drücke die Grundformen durch die associierten aus und eliminiere letztere.

So haben *Cayley*[170]) und *Brioschi*[171]) die f_5 behandelt. *Cyp. Stéphanos*[172]) legt einen Satz von *Clebsch*[173]) zu Grunde: von einer (endlichen) Reihe von Formen $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots$ bilde man die $(f^{(i)}, f^{(k)})_1 = g_{ik}$, dann sind die Produkte je zweier g, wie auch die $(f^{(l)}, g_{ik})_1$ zurückführbar auf die g und die $(f^{(i)}, f^{(k)})_2$. So bestehen die (26) Grundformen einer f_6 aus 5 Invarianten, 8 geraden Kovarianten c und 13 schiefen c'; die c' sind ersetzbar durch 13 von den 28 $(c^{(i)}, c^{(k)})_1$,

---

169) V. Mem. Vgl. etwa die Darstellung bei „Clebsch-Lindemann" 1, p. 210, 228; übersichtlicher, unter wesentlicher Zugrundelegung irrationaler Komitanten, mit Anwendungen auf elliptische Integrale, bei *Study,* Amer. J. 17 (1895), p. 185, 216. Über den prinzipiellen Wert derartiger Auflösungen s. „Invariantenber.", p. 92. — Bei der $f_3 = f$ giebt es 4 Grundformen: f, $h_2 = h = (f, f)_2$, $q_3 = q = (f, h)_1$, $\delta_0 = \delta = (h, h)_2$. Die Syzygie ist: $-\frac{h^3}{2} = q^2 + \frac{\delta}{2} f^2$. Zerlegt man rechts in $\left(q + f\sqrt{-\frac{\delta}{2}}\right)\left(q - f\sqrt{-\frac{\delta}{2}}\right)$, sowie h in $2\xi\eta$, so folgt durch Vergleichung $2\xi^3 = q + f\sqrt{-\frac{\delta}{2}}$, $2\eta^3 = q - f\sqrt{-\frac{\delta}{2}}$, also $f\sqrt{-\frac{\delta}{2}} = \xi^3 - \eta^3$, und damit $f = \frac{1}{\sqrt{-\frac{\delta}{2}}}(\xi - \eta)(\xi - \varepsilon\eta)(\xi - \varepsilon^2\eta)$. — Im Falle der $f_4 = f$ existieren 5 Grundformen: f, $h_4 = h = (f, f)_2$, $\vartheta_6 = \vartheta = (f, h)_1$, $i_0 = i = (f, f)_4$, $j_0 = j = (f, h)_4$. Die Syzygie lautet: $-2\vartheta^2 = h^3 - \frac{1}{2} i h f^2 + \frac{1}{3} j f^3$. Man zerlege rechts in $(h + m_1 f)(h + m_2 f)(h + m_3 f)$, links denke man sich ϑ gespalten in $-2\varphi_2\psi_2\chi_2$, so folgt durch Vergleichung $H + m_1 f = -2\varphi^2$, $H + m_2 f = -2\psi^2$, $H + m_3 f = -2\chi^2$, und hieraus $f = 2\frac{\chi^2 - \psi^2}{m_2 - m_3} = 2\frac{\psi^2 - \varphi^2}{m_1 - m_2} = 2\frac{\varphi^2 - \chi^2}{m_3 - m_1}$. Im Übrigen s. *Study* l. c., und für f_4 noch *S. White*, N. Y. B. (2) 3, p. 250.

170) II., III., V., VIII., X. Mem. Die Liste der Syzygien geht bis zum Grade 14 incl.; weitere Ergänzungen bei *Sylvester,* Amer. J. 4 (1881), p. 41; *J. Hammond,* ib. 8 (1885), p. 19.

171) Ann. di mat. (2) 11 (1883), p. 291, mit Anwendungen auf kanonische Gestalten der f_5 und f_6; auf C_n ib. 15 (1887), p. 235.

172) Par. C. R. 96 (1883), p. 232, 1564.

173) „Clebsch" § 54, vgl. „Gordan" 2, § 4, mit Anwendung auf die Syzygien einer Reihe von f_2: § 11, 12. Erweiterungen des Satzes von *Clebsch* bei: *E. d'Ovidio,* Tor. A. 14 (1879), p. 963; *C. le Paige,* Belg. Bull. (2) 49 (1880), p. 113; (3) 1 (1881), p. 480; Par. C. R. 92 (1881), p. 688; *G. Torelli,* Nap. Rend. 25 (1886), p. 125.

während die 15 übrigen durch die Grundformen darstellbar sind. Auf diese 15 Darstellungen wird das Verfahren von *Clebsch* angewandt. — *v. Gall*[174]) verknüpft diese Methode mit dem *Aronhold*'schen Prozesse (Nr. **13**), und vermag so auch die nicht auf einfachere zurückführbaren „irreducibeln“ oder „Grundsyzygien“ herauszuschälen. Die Fälle der f_6, zwei f_3, zwei f_4 werden eingehend verfolgt.

R. Perrin[175]) vereinfacht die Syzygien einer $f_n = (a_0, \ldots)(x_1, x_2)^n$. Man ersetze in jeder Syzygie jede Komitante c durch ihr Leitglied c_0 (Nr. **23**), und c_0 weiter durch das „Residuum“ c_{00}, das aus c_0 für $a_0 = 0$ entsteht; diese verkürzte Darstellung der Syzygien ist immer noch eine eindeutige, da c_0 durch c_{00} bestimmt ist. — *E. Stroh*[176]) eröffnet eine systematische Einsicht in den Kreis der (binären) Syzygien. Für 4 Formen f, g, h, k gelten (Nr. **14**) die Überschiebungs-Identitäten ($i = 1, 2, 3, \ldots$):

$$[f, g, h, k]_i = \sum_{\lambda=0}^{i} \binom{i}{\lambda} (f, g)_\lambda (h, k)_{i-\lambda} - \sum_{\lambda=0}^{i} \binom{i}{\lambda} (f, k)_\lambda (h, g)_{i-\lambda} = 0,$$

die sich bei den 24 Vertauschungen der Formen auf 3 allgemeine Typen reduzieren; einige weitere entstehen durch Spezialisierung. Man hat nur noch die Grundformen als Überschiebungen einer kleinsten Anzahl unter ihnen darzustellen. So fliessen für eine f_6 aus *einer* Quelle die den 20 associierten Formen parallel laufenden 20 „fundamentalen“ Syzygien: die linke Seite jeder weiteren Syzygie — Syzygante — ist, bis auf eine Potenz von f_6, eine lineare Kombination jener, mit Grundformen als Faktoren. Alle bis dahin entdeckten (204) Syzygien der f_6 ordnen sich unter 11 Typen unter und lassen sich unabhängig von einander berechnen.

Ein „volles System“ (Nr. **6**) von „Grundsyzyganten“ ist freilich auch damit noch nicht gewonnen. Die experimentierenden, aber nicht allgemein gültigen Methoden, wie sie besonders die englische Schule ausbildete, dürfen wir übergehen[177]) (Nr. **9**). Für höhere als binäre

---

174) Math. Ann. 31 (1888), p. 424 ($2 f_3$); 33 (1888), p. 197; 34 (1889), p. 332, 43 (1893), p. 550 ($2 f_4$); 35 (1889), p. 63 (f_6). Für f_6 vgl. noch *E. d'Ovidio*, Pal. R. 7 (1893), p. 1; Tor. A. 28 (1893), p. 447. Bei $2 f_4$ verwendet *Brioschi* eine Grundsygyzie zur Darst. der Resultante; Tor. A. 31 (1896), p. 441 [Nr. **25**]. Die f_8 behandelt ausführlich *R. Alagna*, Pal. R. 10 (1896), p. 41.

175) Par. S. M. Bull. 11 (1883), p. 88; Par. C. R. 96 (1883), p. 426, 479, 563, 1717, 1776, 1842. Wegen der Methode s. *Sylvester*, Amer. J. 5 (1882), p. 79.

176) Math. Ann. 33 (1888), p. 61; vgl. noch 31 (1888), p. 444; 34 (1890), p. 306, 354; 36 (1890), p. 262.

177) Vgl. „Inv.-Ber.“ 2 A d., p. 163. Syzygien zwischen „Perpetuanten“ bei *P. A. Mac Mahon*, Amer. J. 10 (1887), p. 149. — Über Syzygien in der Trigo-

Urformen sind erst Ansätze da (s. *Stroh*, Math. Ann. 36 l. c. Schluss).

9. Abzählende Richtung. *Cayley*[178]) behandelt das Problem, für eine Urform $f_i(x\,|\,a)$ die Anzahl der linear unabhängigen („asyzygetischen") Komitanten, deren Grad j und Ordnung g vorgegeben sind, zu ermitteln. Eine Kovariante c von f_i ist durch ihr Leitglied φ (Nr. 2, 23) ersetzbar, während eine Invariante ihr eigenes Leitglied φ ist; φ genügt der charakteristischen Differentialgleichung [I B 3 b, Nr. 8]:

$$\delta\varphi \equiv \sum_{k=0}^{k=i} k\, a_{k-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_k} = 0 \quad (\text{Nr. } \mathbf{18}).$$

Führt man noch die „Gewichtszahl" $w = \frac{1}{2}(ij - g)$ (Nr. 2, 18, 23) ein, und bezeichnet die Anzahl der Koeffizienten von φ mit $(w;\, i, j)$, so stellt sich die der Koeffizienten von $\delta\varphi$ als $(w - 1;\, i, j)$ heraus. Die Koeffizienten von $\delta\varphi$ sind, wie *Cayley* annahm, *Sylvester*[179]) später bewies, linear unabhängig. Dann existieren, bei gegebenen i, j, w, $\Delta(w;\, i, j) = (w;\, i, j) - (w - 1;\, i, j)$ asyzygetische Komitanten von f_i. — Ist const. $a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_i^{\alpha_i}$ ein Term von φ, so sind j und w definiert durch: (Nr. 2, 18, 23) $j = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_i$, $w = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + i\alpha_i$; $(w;\, i, j)$ giebt danach an, wie oft w als Summe von j Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots i$ mit Wiederholungen gebildet werden kann, und ist nach *L. Euler*[180]) der Koeffizient von $x^w z^j$ in der Entwickelung der „erzeugenden Funktion" $1/(1-z)(1-xz)(1-x^2z)\ldots(1-x^iz)$ nach steigenden Potenzen von x und z. *Sylvester*[181]) führt

---

nometrie [III A 2] s. *G. Chisholm*, Gött. Diss. 1875; *Study*, Leipz. Ber. 47 (1895), p. 553; *W. Fr. Meyer*, J. f. Math. 115 (1895), p. 209; Deutsche Math.-Ver. 7[1] (1899), p. 147. — Die mit dem Pascal'schen Satze der C_2 [III C 1] verknüpften Syzygien behandelt *Study*, Leipz. Ber. 47 (1895), p. 532.

178) II. Mem., weitergeführt im IX. und X. Mem. Zu dieser Nr. vgl. den Bericht über kombin. Analysis von *P. A. Mac Mahon*, Lond. Math. S. Proc. 28 (1897), p. 5, sowie den Bericht über Invar. von *H. S. White*, N. York. B. (2) 5 (1899), p. 161.

179) Phil. Mag. 1878, p. 1; J. f. Math. 85 (1878), p. 89; vgl. die Beweise von *Capelli*, Rom. Linc. M. 12 (1881), p. 1; *Hilbert*, Math. Ann. 30 (1887), p. 15; *Stroh*, ib. 31 (1888), p. 441; „Study" § 9 (p. 197); *E. B. Elliott*, Lond. Math. S. Proc. 23 (1892), p. 298; 24 (1893), p. 21. Wegen der Erweiterungen auf Reciprokanten s. Nr. 20.

180) „Introd. in anal." 1, Laus. 1748, deutsch v. *H. Maser*, Berlin 1885, § 304 (I C 3).

181) 11 Noten in Par. C. R. 84, 85 (1877); J. f. Math. 95 (1878), p. 89; 7 Noten in Par. C. R. 86, 87 (1878); Amer. J. of Math. 1 (1878), p. 370; 2 (1879), p. 71, 98; Par. C. R. 87 (1879), p. 395; Amer. J. of Math. 5 (1883), p. 241. Vgl.

die Ordnung g statt w ein und ersetzt demgemäss $\Delta(w; i, j)$ durch $\Delta(i, j; g)$; dann rechnet sich *Euler*'s Funktion um in die „rohe" (crude) erzeugende Funktion:

$$\psi(x, a) = (1 - x^{-2}) / (1 - a x^i)(1 - a x^{i-2}) \cdots (1 - a x^{-(i-2)})(1 - a x^{-i}),$$

d. h. deren Entwickelung nach steigenden Potenzen von a liefert $\Delta(i, j; g)$ als Faktor von $a^j x^g$. — *Cayley*[178]) hatte *Euler*'s Funktion so umgeformt, dass man auch die Totalanzahl der „irreducibeln" Komitanten von f_i, d. i. der nicht durch solche von geringerem Grade ganz-rational ausdrückbaren, in gewissen Fällen abliest. So erhält er für $i = 3$ die Funktion $(1 - x^6) / (1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4)$; somit existieren 4 irreducible Bildungen von den Graden 1, 2, 3, 4, die durch eine Syzygie 6. Grades verknüpft sind. *Cayley* setzt irrtümlicherweise allgemein die lineare Unabhängigkeit eines gewissen Systems linearer Gleichungen voraus (Nr. 6 Anm. 118, und diese Nr. Anm. 184). — *Sylvester*[181]) geht weiter. Durch Zerlegung in Partialbrüche und Streichung irrelevanter Glieder wird die rohe erzeugende Funktion $\psi(x, a)$ auf eine „reduzierte"[182]) Gestalt gebracht, und dann in einer Reihe von Fällen durch eigentümliche Umformungen in die „repräsentierende" erzeugende Funktion $\varrho(x, a)$ übergeführt, deren Zähler eine endliche[183]) ganze Funktion $\zeta(x, a)$ ist, während der Nenner $\nu(x, a)$ das Produkt aus $1 - a x^i$ mit einer endlichen Anzahl von Faktoren des Typus $1 - a^k$ und $1 - a^2 x^l$ bildet. Z. B. für $i = 5$ resultiert:

$$\nu = (1 - a^4)(1 - a^8)(1 - a^{12})(1 - a x^5)(1 - a^2 x^2)(1 - a^2 x^6),$$

$$\begin{aligned}\zeta = 1 &+ a^3(x^3 + x^5 + x^9) + a^4(x^4 + x^6) + a^5(x + x^3 + x^7 - x^{11}) \\ &+ a^6(x^2 + x^4) + x^7(x + x^5 - x^9) + a^8(x^2 + x^4) + \cdots - a^{23} x^{11}.\end{aligned}$$

Die repräsentierende erzeugende Funktion $\varrho(x, a)$ ist eine gemeinsame Quelle für die Anzahl (und den Typus) der Grundformen und Syzygien aller Arten. Die Nennerfaktoren repräsentieren die einfachsten, sicher irreducibeln Grundformen, für die $g = 0, 1, 2$ ist. Für eine gegebene „Gradordnung" („deg-order") stelle man vorab durch „Siebung" („tamisage") alle Potenzen und Produkte niedrigerer

---

die zusammenfassende Darstellung von *F. Franklin,* Amer. J. of Math. 3 (1880), p. 128, nebst Tabellen: Amer. J. of Math. 2 (1879), p. 223, 293; 3 (1880), p. 221; 4 (1881), p. 41; 5 (1882), p. 241. — Für erzeugende Funktionen im ternären Gebiete finden sich bei *Sylv.* Beispiele; die Grundzüge einer Theorie giebt *Forsyth,* Lond. Math. S. Proc. 29 (1898), p. 487.

182) Ein instruktives Beispiel bei *Cayley,* Amer. J. of Math. 2 (1879), p. 71 = Coll. Pap. 10, p. 408.

183) Wegen scheinbarer Ausnahmefälle vgl. *J. Hammond,* Math. Ann. 36 (1890), p. 255.

Grundformen — excl. der durch $\nu(x, a)$ repräsentierten — auf, und ziehe deren Anzahl vom Koeffizienten von $a^j x^g$ in $\zeta(x, a)$ ab. Das liefert die Zahl $[j, g]$ der Grundformen (j, g), vermehrt um die der Syzygien gerader, vermindert um die der Syzygien ungerader Art. Da der Zähler $\zeta(x, a)$ abbricht, erhält man eine untere Grenze für $[j, g]$. So erhält man für $i = 5$ mindestens je eine Grundform (3, 3), (3, 5), (3, 9); (4, 4), (4, 6); etc. und damit eine Minimalzahl 23 von Grundformen der f_5; da diese mit *Gordan's* oberer Grenze (Nr. **6**) coincidiert, so ist das deren wahre Anzahl. Syzygien 1. Art existieren für (5, 11), (7, 9) etc. Im Falle (6, 6) etwa verschwindet der Koeffizient von $a^j x^g$; da aber $(6, 6) = 2 \cdot (3, 3)$, und eine Grundform (3, 3) existiert, so besteht eine Syzygie 1. Art. — Beachtenswert ist der Fall (8, 14). Hier liest man die Zahl 5 von linear unabhängigen Formen ab, andererseits führt die Siebung zu 10 Produkten von Grundformen. Nun lassen sich 6 Syzygien 1. Art sofort hinschreiben; „mithin sind jene durch eine einzige Syzygie 2. Art[184]) verknüpft". — *Cayley*[185]) macht die repr. erz. Funktion $\varrho(x, a)$ durch wirkliche Einführung der Grundformen $a, b, c, \ldots$ zur „realen" erz. Funktion, die auch die Typen der Bildungen liefert. — Andererseits lässt sich $\varrho(x, a)$, bei Kenntniss der Grundformen, nach *J. Hammond*[186]) zu einer direkten erz. Funktion für die Syzygien umgestalten, doch so, dass man jetzt für irgend eine Gradordnung eine obere Grenze für die Anzahl der Syzygien 1. Art abliest, die mit *Sylvester's* unterer Grenze zu vergleichen ist.

Das „Fundamentalpostulat"[187]) *Sylvester's*, wonach für jede Gradordnung Grundformen und Syzygien sich ausschliessen sollten, hat *Hammond*[188]) als nicht allgemeingültig erkannt. *P. A. Mac Mahon*[189]) hat eine erz. Funktion für die Anzahl der irreducibeln „Perpetuanten" (Nr. **12**, **23**) konstruiert, und *E. Stroh*[190]) den Beweis dafür geliefert.

Theoretische Formeln für obere Grenzen von Grad und Ordnung binärer Grundformen haben[191]) *Jordan* und *Sylvester* aufgestellt. Die

184) Die Nichtberücksichtigung dieser Syzygie 2. Art hatte *Cayley* zu einem Irrtum veranlasst. Vgl. Nr. **6** Anm. 118.

185) X. Mem.

186) Amer. J. of Math. 8 (1885), p. 19.

187) Vgl. etwa *F. Franklin,* Amer. J. of Math. 3 (1880), p. 130.

188) Amer. J. of Math. 5 (1883), p. 218; vgl. „Inv.-Ber." p. 174.

189) Amer. J. of Math. 7 (1884), p. 26.

190) Math. Ann. 36 (1890), p. 262, § 10, 11. S. noch Anm. 249.

191) *Jordan,* J. de math. (3) 2 (1876), p. 177; 5 (1879), p. 345; *Sylvester,* Lond. Math. S. Proc. 27 (1878), p. 11; Par. C. R. 86 (1878), p. 1437, 1491, 1519. Beide leiten aus ihren Anzahlbestimmungen einen „Endlichkeitsbeweis" ab; vgl. Nr. **6** Anm. 136.

Anzahlen von *Jordan* — der, nach *Gordan* (Nr. **6**) die kleinsten Lösungen diophantischer Gleichungen zahlentheoretisch diskutiert — für die Ordnung g der Kovarianten in den Fällen $i = 1$ bis 12 (excl. 11) werden thatsächlich erreicht. *Sylvester*'s ohne Beweis aufgestellte Formeln sind theoretisch einfacher, praktisch weniger brauchbar. Die Cayley-Sylvester'sche Formel $\Delta(w; i, j)$ für asyzygetische Formen ist auf Urformen $F, G, H, \ldots$ mit kogredienten Reihen von n Variabeln ausgedehnt worden. Eine Komitante φ lässt sich, wie *A. Capelli*[192]) auf Grund seines „Entwickelungssatzes" (Nr. **17**) darthut, darstellen als Aggregat von Produkten $\Omega \Phi$ von identischen Kovarianten Ω mit Formen Φ von $n-1$ Variabelnreihen, die $n-1$ charakteristischen linearen partiellen Differentialgleichungen $D_i = 0$ genügen. Die Aufgabe für die φ reduziert sich auf die für die Φ. Für die Anzahl der einer *einzelnen* Gleichung $D_i = 0$ genügenden asyzygetischen Bildungen Φ mit vorgegebenen Gradordnungszahlen ergiebt sich ein zu $\Delta(w; i, j)$ analoger Ausdruck; da aber zwischen den durch sämtliche $D_i = 0$ involvierten Bedingungen *lineare Abhängigkeiten* bestehen, begnügt sich *Capelli* mit unteren Grenzen. — *J. Deruyts*[193]) löst die Aufgabe allgemein. Die Φ von vorgegebenen „Gewichtszahlen" werden durch ihre Leitglieder Φ_0 ersetzt, und diese symbolisch geschrieben (Nr. **23**); dadurch gelangt man zu einem System linearer diophantischer Gleichungen mit einer Anzahl Π von *linear unabhängigen* Lösungen. Ein analoges System existiert für die Anzahl Π' der zu einer Form Φ gehörenden $\Omega \Phi$. Dann ist, entsprechend den verschiedenen Gewichtszahlen, die Summe der Produkte $\Pi \Pi'$ zu bilden, um die gewünschte Anzahl zu erhalten.

10. Kanonisierung. *Sylvester*[194]) begründet die Lehre von den „kanonischen" Formen, insofern sich eine f_{2n+1} auf nur eine Art in der Gestalt darstellen lässt: $f = \sum_1^{n+1} a_i (\lambda - \alpha_i \mu)^{2n+1}$, wobei der Fall

192) „Fondamenti"; Gi. di mat. 20 (1882), p. 293. Für unabhängige S: Rom. Linc. M. 15 (1884). Wegen einer verwandten Frage bei *Study* vgl. „Inv.-Ber." p. 177.

193) „Deruyts" Chap. 7; allgemein Brux. Belg. B. (3) 21 (1891), p. 437.

194) Cambr. Dubl. math. J. 6 (1851), p. 186; Phil. Mag. (2) 1 (1851), p. 408. *S.* zieht auch das Verschwinden der Diskr. der Kanoniz. in Betracht. Das Wort „kanonisch" von *Hermite,* bei *Sylvester* Cambr. Dubl. math. J. 6 (1851), p. 193; „Kanonizante" von *Sylvester,* ib. 7 (1852), p. 67, 195; desgl. „Katalektikante", ib. 7 (1852), p. 62. Eine gewisse (mehrdeutige) kanonische Darst. der f_6 [Anm. 392] und f_8 bei *Sylvester,* ib. (1852), p. 123, 293; 9 (1854), p. 93 (sect. 8). — Eine eigenartige Anwendung von *Sylvester*'s Darstellung der f_{2n+1} auf mechanische Quadratur durch *K. Heun* (*A. Hurwitz*) findet sich II A 2 Nr. **52**, Anm. 331.

$n = 2$ eingehend untersucht wird. Die α_i sind die Wurzeln der „Kanonizante" c, der Determinante der $(2n)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von f. Bei f_{2n} wird c eine Invariante, die „Katalektikante", deren Verschwinden das Kriterium der Darstellbarkeit von f als Summe von n Potenzen liefert.

Cayley[195]) geht hierauf näher ein, und weist nach, wenn $c \neq 0$, dass f_{2n} auf $\infty^1, \infty^3, \cdots$ Arten in eine Summe von $(n+1), (n+2), \cdots$ Potenzen linear transformiert werden kann. Erst *S. Gundelfinger*[196]) berücksichtigt alle Ausnahmefälle, indem er nach Umgestaltung des Differentialausdrucks für $(f_n, \varphi_m)_k$ (Nr. **14**) die Theorie der linearen Differentialgleichungen (II B 3 c) heranzieht. Für $f_n = f(x \mid a)$ bilde man die Kovarianten $c, c', c'' \ldots$ mit den Leitgliedern

$$a_0, \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

Das Kriterium für die Darstellbarkeit von f_n als $\sum_{i=1}^{i=k} b_i(\lambda - \alpha_i)^n$ ist einmal $c^{(k)} \equiv 0$, $c^{(k-1)} \not\equiv 0$, — dann existiert eine Form γ_k, so dass $(\gamma_k, f_n)_k \equiv 0$, — zudem darf γ_k nur ungleiche Wurzeln α_i besitzen. Koinzidieren dagegen Wurzeln von γ_k, so modifiziert sich die Darstellung von f zu $\sum_i (\lambda - \alpha_i)^{k_i} \varphi_{n-k_i}$. — Die Form γ_k hatte schon *J. Rosanes*[197]) als die „zu f konjugirte" eingeführt, und n Urformen f_n, wie Formen F untersucht. Die Potenzdarstellungen von F werden in Beziehung gesetzt zu den Polpolygonen, Polpolyedern etc. (Nr. **24**). Hierzu ist auch *Th. Reye*[198]) von mechanischen Gesichtspunkten aus gelangt, und beweist[199]) (und erweitert) so den Satz *Sylvester*'s[200]) über das

195) J. f. Math. 54 (1857), p. 48, 292 = Pap. 4, p. 43, 53. — Eine formentheoretische Ausführung im Sinne der Apolarität (Nr. **24**) giebt *G. Bauer*, Münch. Ber. 22 (1892), p. 3. Die Darst. von *Sylvester* und *Cayley* dehnt *C. le Paige* auf multilineare Formen aus („Inv.-Ber." p. 179); Tor. A. 17 (1882), p. 299; Rom. Linc. Pont. 35 (1882), p. 54, 140.

196) Gött. Nachr. 1883, p. 115; ausgeführt in J. f. Math. 100 (1887), p. 413. Die nämlichen Leitglieder liegen einem Realitätssatze von *W. Fr. Meyer* zu Grunde, s. Nr. **26**, Anm. 428.

197) J. f. Math. 75 (1873), p. 172; 76 (1873), p. 312; Math. Ann. 6, p. 264.

198) J. f. Math. 72 (1870), p. 293 [Nr **24**].

199) J. f. Math. 78 (1874), p. 114, 123. Die $F_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ wird als Summe von 10 vierten Potenzen dargestellt.

200) Cambr. Dubl. math. J. 6 (1851), p. 198, wo der Beweis skizziert wird [III C 6]. — Über die *Hesse*'sche Kanonisierung einer C_3 s. Nr. **11**, Anm. 210, über die Potenzsummendarst. einer C_3 s. Nr. **24**, Anm. 384.

„Pentaeder" der $F_3(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (III C 6), wonach F_3 auf nur eine Art als Summe von fünf Kuben geschrieben werden kann. Eine Verbindung zwischen den Arbeiten von *Rosanes* und *Reye* hat *W. Fr. Meyer*[201]) hergestellt vermöge einer Reihe von kanonischen „Übertragungsprinzipien" (Nr. **24**).

Von *D. Hilbert*[202]) stammt ein Invariantenkriterium für die Darstellung $f_{mn} = (\varphi_m)^n$. *Hilbert* hat ferner ein gemeinsames Prinzip[203]) für verschiedenartige kanonische Darstellungen, indem er alle φ_ν sucht, so dass $(\varphi_\nu, f_{2n})_i = \lambda f_{2n}$ wird, wo λ eine irrationale Invariante (Nr. **11**) von f ist; es lassen sich so die Ausartungen von f verfolgen.

Eigenartige kanonische resp. typische Darstellungen der f_6 finden sich bei *A. Brill*[204]), *W. Fr. Meyer*[204]), *Brioschi*[205]), *Maschke*[205]), *E. Growe*[206a]), *H. B. Newson*[206b]). *Hilbert*[207]) stellt eine definite $F_4(x_1, x_2, x_3)$ als Summe von drei Quadraten dar; für eine definite $F_n(x_1, x_2, \ldots x_m)$ können indess — excl. $n = 2$, resp. $m = 2$ — stets Fälle eintreten, wo die gemeinte Darstellung versagt. Eine definite C_n lässt sich aber stets als ein Bruch von Quadratsummen darstellen[208]).

11. Umkehrfragen. Irrationale Formen. Hierher gehört das zahlentheoretische Problem von *Hermite*[209]), das ihn u. a. zu den

---

201) „Apolarität u. rationale Kurven", Tübg. 1883, wo weitere Litteratur.

202) Math. Ann. 27 (1886), p. 158; vgl. *Brioschi*, Pal. R. 10 (1896), p. 153. Für einfachere Fälle schon bei *G. Maisano*, Rom. Linc. A. (3) 7 (1883), p. 231. Elementar bei *C. Weltzien*, Progr. Berlin, Fr. Werder'sche Oberrealsch. [I B 1 a, Nr. **11**].

203) Leipz. Ber. 1885, p. 427; Math. Ann. 28 (1887), p. 381; Beispiele für C_n und F_n in J. de math. (4) 4 (1888), p. 249.

204) Math. Ann. 20 (1882), p. 330. Die bez. $f_6 = x^6 + 2px^5 + 3qx^4 + 4rx^3 + 3x^2 + 2px + q$ und $x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + 1$ hängen mit den 3 Doppelpunkten und 4 Doppeltangenten einer rat. C_4 eng zus. Vgl. *W. Fr. Meyer*, Apolarität, p. 312 [Nr. **24**]. *Brill* diskutiert die Realität der Wurzeln einer f_6.

205) $f_6 = x^6 + \alpha x^4 + \beta x^3 + \frac{\alpha^2}{4} x^2 + \gamma x + \delta$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die 4 Inv. von f_6 sind. Die Wurzeln von f_6 werden ganze Funktionen von 4 ϑ-Funktionen: *Maschke*, Gött. Nachr. 1887, p. 421; Math. Ann. 30 (1887); p. 496; Rom. Linc. A. (4) 4 (1888), p. 181; *Brioschi*, Acta math. 12 (1888), p. 83. Eine andere typische Form der f_6 (ohne x^5 und x^3) bei *Brioschi* mittels Syzygien: Ann. di mat. (2) 11 (1883), p. 291. Eine $f_6 = H(f_5)$ ist der bez. „Multiplikatorgl." [II B 4 a] äquivalent: *Lindemann*, Math. Ann. 21 (1883), p. 71.

206a) Kans. Qu. J. 6 (1897), p. 201. 206b) Kans. Qu. J. 7 (1898), p. 125.

207) Math. Ann. 32 (1888), p. 342. — Speziell eine resp. zwei f_n als Quadratsummen bei *H. Laurent*, J. de math. spéc. (5) 21 (1897), p. 51.

208) Acta math. 17 (1893), p. 169.

209) J. f. Math. 40 (1850), p. 261, 279. Das Problem hat erst *C. Jordan* erledigt: Par. C. R. 90 (1880), p. 598, 1422.

„Evektanten" (Nr. **18**) führte, nachzuweisen, dass die Anzahl der „Klassen", in die die F_n mit vorgegebenen Werten für die Invarianten zerfallen, eine endliche ist.

Aus einer $C_3 = 0$ schneidet nach *Hesse*[210]) $H(C_3) \equiv H_3 = 0$ die Wendepunkte aus; umgekehrt gehören zu gegebener H_3 drei C_3, die *Aronhold*[211]) genauer untersucht hat. Später hat man alle nicht äquivalenten „Typen" von Büscheln $f_n + \varkappa\varphi_n$ gesucht, deren $(f, \varphi)_1$ eine gegebene $f_{2(n-1)}$ ist; *Brill*[212]) bewies, dass es eine endliche Zahl von Typen gebe. Für $n = 4$ sind es fünf, die von einer f_5 abhängen, die *C. Stéphanos*[213]) in invarianter Gestalt aufstellte; *Brill*[212]) untersucht die Beziehungen der fünf Lösungen zur Theorie mehrerer f_2 und der f_6, *W. Fr. Meyer*[212]) die zu den rationalen C_4 und C_6, und zu den kubischen Raumkurven. *M.* fand geometrisch die Anzahl ν der Typen bei beliebigem n, $= 2(2n-3)!/n!(n-2)!$, die algebraisch durch *Stéphanos*[214]) und anzahlgeometrisch durch *H. Schubert*[215]) bestätigt wurde. *Hilbert*[216]) bildete auf Grund eines Überschiebungsprinzips (Nr. **10**) die Gleichung für die ν Lösungen, und erledigte auch das analoge Problem der Büschel mit gegebener Diskriminante[217]). — Für zwei unabhängige Variable hat *H. Hurwitz*[218]) funktionentheoretisch die Urformen bestimmt, wenn die Diskriminante oder vielmehr deren

---

210) J. f. Math. 28 (1844), p. 68 = Werke p. 123. Dem Büschel $\varkappa C_3 + \lambda H_3$ gehören 4 Dreiseite an, die „Wendedreiseite" [III C 3, 4]; eine C_3 kann daher auf 4 Arten in die „Hesse'sche Normalform" $x_1{}^3 + x_2{}^3 + x_3{}^3 + 6kx_1x_2x_3$ gebracht werden [Anm. 392, 434]. Die bez. $f_4 = 0$ ist für die Formentheorie der C_3 nach *Aronhold* fundamental [Anm. 211, 434]. Vgl. „Clebsch-Lindemann" 1².

211) J. f. Math. 55 (1858), p. 97.

212) Math. Ann. 20 (1882), p. 330. Vgl. *W. Fr. Meyer,* Apolarität p. 320. Eine einfache Deutung der 5 Lösungen liefern nach *Brill* die 5 vollständigen Vierecke der *Desargues*'schen Konfiguration [III A 3] von 2 perspektiven Dreiecken, die in Bezug auf eine feste $C_2 = N_2$ zu sich selbst polar ist; die 5 bez. C_2-Büschel schneiden aus N_2 die f_4-Büschel des Textes aus. — Für $n = 3$ bei *H. Caporali,* Nap. R. 22 (1883), p. 95; vgl. *L. Berzolari,* Nap. R. (2) 5 (1891), p. 35, 71.

213) Preisschrift Par. Sav. Étr. 1883. Auszug: Par. C. R. 93 (1881), p. 994. Ist das f_4-Büschel das der Polaren einer f_5, giebt es nur eine Lösung: *Lindemann,* Math. Ann. 21 (1883), p. 72.

214) Thèse, Paris 1884.

215) Acta math. 8 (1886), p. 97.

216) Leipz. Ber. 1887, p. 112; Math. Ann. 33 (1888), p. 217.

217) Math. Ann. 31 (1888), p. 482 [I B 1 a, Nr. **21**, Anm. 117].

218) Math. Ann. 39 (1891), p. 1 (wo weitere Litter.); vgl. *É. Picard,* Traité d'analyse 2 (1892), Chap. 6. — *Frobenius* bestimmt die ∞^2-Schar der $f_2(x \mid y)$, deren beide Diskriminanten (d. s. binäre Formen f_4) gegeben sind: J. f. Math. 106 (1890), p. 125.

„wesentliche" Teiler gegeben sind [I B 1 c, Nr. **6**; I C 4]. Bei ihrer Behandlung der $f_5 = 0$, und auch gewisser $f_7 = 0$ (Nr. **5**) hatten *Klein*[219]) und *Gordan*[219]) die Gleichungen für die Urformen aufzustellen, wenn man den bez. Grundformen feste (sc. erlaubte) Zahlenwerte beilegt.

Irrationalen Formen begegnet man bei den elliptischen und *Abel*schen Funktionen. Nach *Klein*[220]) ist das elliptische Integral J_1 1ter Gattung ∞ vieler „kanonischer" Gestalten fähig, je nach der bez. „Normalkurve"; der Modul von J_1 ist eine absolute irrationale Invariante der Kurve. Für $p = 3$[221]) liegt eine C_4 zu Grunde; dem Rationalitätsbereich werden irrationale Teile der Systeme der „Berührungskurven" (III C 2, 3) „adjungiert", wodurch sich die Form der Integrale, ϑ-Funktionen und deren Differentialgleichungen reguliert; die eindeutig-rationale Transformation der bez. algebraischen Funktionen wird äquivalent mit der Kollineation der „φ" d. i. der Ebene. Insbesondere[222]) benötigt man dabei gewisser Kombinanten.

Wegen verwandter Untersuchungen vgl. Nr. **7**, **14**, und II B 4 a, b.

12. Symbolik und graphische Darstellung. *Cayley*[223]) erzeugt mittels eines symbolischen Prinzips („Hyperdeterminantenkalkül") beliebig viele Invarianten einer Urform F. Die Invarianz erscheint als

---

219) S. Anm. 96, 107. — Überhaupt ist die „Lösung" einer $f_n = 0$ mit beliebiger *Galois*'scher Gruppe nach *Klein* in dem „Formenproblem" enthalten: „Gegeben eine endliche Gruppe G von $S(x_1, x_2, \ldots x_n)$; die x aus den Invarianten von G zu berechnen". *Klein* „reduziert" so die $f_5 = 0$ auf das binäre „Ikosaederproblem", die allg. $f_6 = 0$ und $f_7 = 0$ auf quaternäre Formenprobleme [Nr. **5**, Anm. 96, 111, 112]. Von $n > 7$ an ist eine entsprechende Reduktion (auf Formenprobleme von $< n - 2$ Dimensionen) nicht möglich: *A. Wiman,* Gött. Nachr. 1897, p. 55, 191 [I B 3 f, Nr. **15**]; Math. Ann. 52 (1899), p. 243.

220) Math. Ann. 17 (1880) p. 133; Leipz. Abh. 1885, p. 339; Vgl. *G. Pick,* Math. Ann. 28 (1887), p. 309; 29 (1887), p. 259; 32 (1888), p. 443. Vgl. noch die verwandten Untersuchungen von *Bruno,* Amer. J. of Math. 5 (1882), p. 1; *Burkhardt,* Diss. München 1887, sowie die Darstellung bei *Halphen,* Fonctions elliptiques 2, Par. 1888 und die Formeltabelle bei *J. Stringham,* Chic. Pap. 1896 (93), p. 350 [II B 4 a].

221) *Pick,* Math. Ann. 29 (1887), p. 259; *Klein* s. Anm. 222; *E. Wiltheiss,* Math. Ann. 38 (1890), p. 1; *E. Pascal,* Ann. di mat. (2) 17 (1889) p. 81, 197, 257; ib. 18 (1890), p. 1, 131; ib. 20 (1892), p. 163; ib. 24 (1896), p. 193. — Für *Abel*'sche Integrale s. etwa *H. S. White,* Nova Acta Leop. 62^2 (1887), p. 43 [II B 4 b].

222) *Klein,* Gött. Nachr. 1888, p. 191; Math. Ann. 36 (1890), p. 1; ausgeführt von *H. Wirtinger*, Math. Ann. 40 (1892), p. 361. Vgl. *Klein,* Lineare Diff.gleichungen d. 2. Ordn., Aut. Vorl., Gött. 1890/91, 1894; und „Inv.-Ber." II B 6, p. 185.

223) Cambr. math. J. 4 (1845), p. 193 = Pap. 1, p. 80. Vgl. Anm. 17.

Erweiterung des Determinantenmultiplikations-Theorems (Nr. **1**); einmal werden Determinanten „höheren Ranges“ [224]) („Kommutanten“) aus $(k!)^n$ Gliedern gebildet, andererseits wird ein Aggregat von Determinanten unter der Form einer „Matrix“ [223]) zusammengefasst. Die Abkürzung in der Bezeichnung ist eine erste Art von Symbolik. Dabei wird eine Urform $F_n(x_1, x_2, \ldots x_m)$ ersetzt [225]) durch eine allgemeinere („n-partite“), die in n Reihen von m Variabeln, die alle verschiedenen S unterworfen werden können, je linear ist; eine Invariante von F ändert sich dabei um eine Potenz des Produktes der Moduln (Nr. **2**). Nachträglich lassen sich einige oder alle n Variabelnreihen identifizieren. Bald darauf [226]) formuliert *Cayley* sein Erzeugungsprinzip real. Er fasst die Funktionaldeterminante $\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\right|$ von n Funktionen $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ auf als das Resultat eines Prozesses Ω (Nr. **14**), ausgeübt auf das Produkt der φ, jede in einer andern Variabelnreihe geschrieben. Durch Iterirung entstehen invariantive Prozesse, die aus Urformen Komitanten erzeugen. Die zugehörige Symbolik ist eine Abkürzung in der Darstellung realer Prozesse. *Cayley* schreibt:

$$\Omega = \overline{1 \cdot 2 \cdots n} = \left| \frac{\partial}{\partial x_{i1}}, \frac{\partial}{\partial x_{i2}}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_{in}} \right|_{(i=1,2,\ldots n)},$$

d. i. $\sum \pm \frac{\partial^n}{\partial x_{11}\, \partial x_{22} \cdots \partial x_{nn}}$, wo die ersten (zweiten) Indices wie bei einer Determinante permutiert werden.

Von dieser Symbolik weicht die von *Aronhold* [227]) begründete, von *Clebsch*, *Gordan* [228]) u. a. ausgebildete materiell nicht wesentlich

224) Vgl. Anm. 17, 226.

225) Cambr. Trans. 8 (1843), p. 1 = Pap. 1, p. 63. S. auch *Sylvester*, Cambr. Dubl. m. J. 7 (1852), p. 75 (Sect. III). Vgl. Anm. 17.

226) Cambr. Dubl. m. J. 1 (1846), p. 104 = Pap. 1, p. 95.

227) J. f. Math. 62 (1863), p. 281. Das Prinzip schon bei *Sylvester*, Cambr. Dubl. m. J. 7 (1852), p. 94. Die symb. Bezeichnung dient *Hermite* ib. 9 (1854), p. 173 als Beweisgrund des „Reciprozitätsgesetzes“ (cf. Anm. 233[a] und Nr. **16**).

228) Vgl. Anm. 27. Über den formalen Unterschied zwischen der englischen und deutschen Symbolik s. *Cayley*, Pap. 1 (1889), p. 585. — Über die Verwandtschaft von *Clebsch*'s binärer Symbolik mit der der Quaternionen s. etwa *J. B. Shaw*, N. Y. Bull. (2) 4 (1897), p. 6. — Im binären Gebiet lässt sich eine analoge „Wurzelsymbolik“ aufbauen, die mit den wirklichen Linearfaktoren der Formen operiert, und somit für die explicite Berechnung der In- und Kovarianten besonders geeignet erscheint. Beide Arten von „Symbolik“ sind in einander überführbar. Man vgl. bes. *A. L. Mackinnon*, Ann. of Math. 9 (1895), p. 95, dazu Tabellen ib. 12 (1898), p. 95, auch *Mertens*, Krak. Abh. 22 (1892), p. 141, sowie die Endlichkeitsbeweise von *Mertens* und *Hilbert* in Nr. **6**. Das ternäre, ... Gebiet wird durch Entwickelung nach Potenzen

ab (Nr. **14**), wohl aber in der Auffassung und der allmählich erlangten bequemeren Handhabung. Nach Analogie der Kummerschen idealen Zahlen (I C 3), von denen erst ein gewisses Produkt wieder real ist, setzt man[229]), um die Invarianten J einer Urform $F_\nu(x_1, x_2, \ldots x_n \,|\, a) = F_\nu(x \,|\, a)$ auf die von Linearformen zurückzuführen, F_ν gleich einem Produkte von ν n-gliedrigen idealen oder „symbolischen" Linearformen $\alpha_x\, \beta_y \ldots \nu_w$, und ersetzt nach Ausrechnung die Produkte der Koeffizienten resp. Variabeln durch die entsprechenden Terme in F. Der Rückgang zur realen Urform F bleibt eindeutig, wenn man die Linearformen identifiziert, also mit *Aronhold*[227]) $F_\nu = \alpha_x^\nu = \beta_x^\nu = \cdots$ schreibt; zur Darstellung einer Form p^{ten} Grades in den a sind gerade p „Symbole" $\alpha, \beta, \ldots$ erforderlich. Dabei ist F eine „allgemeine" Form ihrer Ordnung, insofern lineare Relationen zwischen den a ausgeschlossen sind. — Geht durch eine S der x $F(x \,|\, a)$ über in $F'(x' \,|\, a')$, also symbolisch α_x^ν in $\alpha'^{\nu}_{x'}$, *so hängen die α' von den α, bis auf die Transposition der Substitutionskoeffizienten gerade so ab, wie die x von den x'* (Nr. **2**). Jedes aus den n-reihigen Determinanten $(\alpha, \beta, \ldots)$ der $\alpha, \beta, \ldots$ derart gebildete Produkt, dass jede Symbolreihe ν-mal vorkommt, ist eine ganz-rationale Invariante J von F. *Clebsch*[230]) bewies die Umkehrung, dass jedes J als ein Aggregat solcher Produkte darstellbar ist, mit Ausdehnung auf mehrere Urformen F. Für $n > 3$ aber, wo noch die Zwischenvariabeln (Nr. **2**, **18**) $p_{ik}, p_{ikl}, \ldots$ zu berücksichtigen sind, lässt sich, trotz mancher Einzeldarstellungen[231]), die Gesamtheit des Formen-

---

von x_1 resp. x_2 resp. x_3 ... auf das binäre zurückgeführt; ternäre, ... Komitanten erscheinen so als binäre Simultaninvarianten, woraus sich auch ihre Differentialgleichungen (Nr. **18**) ableiten lassen. S. *Brioschi* (für eine C_4) Ann. di mat. (2) 7 (1876), p. 202; *Brill*, Math. Ann. 13 (1878), p. 175; *Forsyth*, Amer. J. 12 (1889), p. 1, 115; Cambr. Trans. 14 (1889), p. 409 (vgl. Anm. 154); *R. Perrin*, Paris Soc. M. Bull. 18 (1890), p. 1 und „Elliott".

Allgemeiner führt *E. Wölffing* die Invarianten einer ganzen bezw. rationalen, bezw. irrationalen Funktion von Urformen auf Simultaninvarianten der letzteren zurück; Math. Ann. 43 (1893), p. 26, in besonderen Fällen schon in der Tübinger Diss. 1890 = Math. Ann. 36, p. 97. Der Formenkreis gliedert sich hierdurch nach Typen, Stämmen, Familien; die Theorie der Seminvarianten (Nr. **23**) wird so erweitert, u. s. f.

229) „Study" 1, § 5; 2, §§ 2, 5, 6.

230) J. f. Math. 59 (1861), p. 1. „Clebsch" § 12. Weitere Beweise bei „Gordan" 2, § 9; „Study" § 5.

231) *Clebsch*, Gött. Abh. 17 (1872), p. 1; insbes. für Linienkomplexe Math. Ann. 2 (1869), p. 1; weiter entwickelt mit Grassmann'schen Symbolen von *E. Waelsch*, ib. 37 (1890), p. 141, vgl. Anm. 244. Wegen der fragl. Schwierigkeiten vgl. *Gordan* „Programm", Anhang; *Study*, Leipz. Ber. 1890, p. 172.

kreises nicht mehr übersehen, sondern nur der Teil, der, wie auch die F selbst, nebst mehreren cogredienten Reihen von (x) noch contragrediente Reihen (u) enthalten kann. — Die n-reihigen Determinanten der $\alpha, \beta, \ldots$ sind durch ein System von Relationen $R_1 = 0$, $R_2 = 0, \ldots$ verknüpft, die zu identischen Umformungen von Invarianten verwandt werden. Umgekehrt, wie *Gordan*[232]) für $n = 2$, *Study* für $n = 3$, *E. Pascal* allgemein[232]) bewiesen, lässt sich die linke Seite jeder, durch Einsetzen der $a, b, \ldots$ erfüllten Invariantenidentität als eine mit den R verschwindende Form darstellen. Die Zwischenvariabeln sind wiederum auszuschliessen.

Von *Hermite*[233a]) rührt das „Reziprocitätsgesetz" her, wonach jeder Kovariante einer f_n (von der Ordnung m und) vom Grade g eine Kovariante einer f_g (von der Ordnung m und) vom Grade n entspricht. — *Clebsch* stellte ein für die Geometrie fruchtbares „Übertragungsprinzip"[233b]) auf, das an einem besondern Falle erklärt und in geometrischer Fassung lautet: Sei i eine Invariante von $f_n = a_x^n = b_x^n = \cdots$, so ersetze man in i jeden „Klammerfaktor" (ab) durch (abu), so erhält man eine Kontravariante $\Gamma(u)$ von $C_n = a_x^n = b_x^n = \cdots$. Dann ist $\Gamma(u) = 0$ der Ort der Geraden (u), die aus $C_n = 0$ die Punkt-n-tupel mit der projektiven Eigenschaft $i = 0$ ausschneiden." Ein anderes Übertragungsprinzip hat *Gordan*[234]) zum Aufbau voller Systeme (Nr. **6**) benützt. „Sei etwa G eine Komitante von $C_n(x \mid a) = a_x^n = b_x^n = \cdots$, vom Grade $m - 1$ in den a, so ersetze man in G λ Faktoren $b_x, c_x, \ldots$ durch $(bau), (cau), \ldots$; $\varkappa$ Faktoren $(bcu), (bdu), \ldots$ durch $(bca), (bda), \ldots$ und multipliziere mit $a_x^{n-(\lambda+k)}$, so erscheint eine Reihe von Formen H vom Grade m in den a. Ist

---

232) „Gordan" 2, Nr. 117; *E. Study*, Math. Ann. 30 (1887), p. 120; „Study" § 6; *E. Pascal*, G. di mat. 26 (1888), p. 33, 102; Rom. Linc. R. (4) 4 (1888), p. 119; ib. Mem. (4) 5 (1888), p. 375. Im binären Gebiet giebt es nur die eine Identität $a_x b_y - a_y b_x - (ab)(xy) \equiv 0$. Es gilt die nämliche Einschränkung wie oben: „Study" p. 204.

233a) Cambr. Dubl. m. J. 9 (1854), p. 172 (Anm. 227). S. die Beweise bei „Gordan" 2, Nr. 93. *J. Deruyts* hat das Gesetz auf (in Linearformen) zerfallende F_n ausgedehnt: Brux. Bull. (3) 22 (1891), p. 11; s. den kurzen arithmetischen Beweis von *Gordan*, Gött. Nachr. 1897, p. 182. [Eine bemerkenswerte Anwendung des Satzes von *Deruyts* auf das Kriterium für das Zerfallen von C_n in Linearfaktoren macht *Gordan* s. I B 1 b, Nr. **5**, I B 3 b, Nr. **26**, desgl. auf die invariante Darst. der Resultante von 3 C s. Nr. **25**, Anm. 405]. — Wegen einer weitergehenden Ausdehnung durch *Hurwitz* vgl. Nr. **16**, Anm. 294.

233b) Vgl. z. B. „Clebsch-Lindemann" 1[1], p. 274. Erweiterungen bei *Gundelfinger*, Math. Ann. 6 (1872), p. 16; „Study" 2, § 19 [Nr. **24**].

234) Math. Ann. 1 (1869), p. 90; 17 (1880), p. 217.

dann ein System von Formen G „linear vollständig“, sodass jede Form vom Grade $m-1$ linear durch die G ausdrückbar ist, so ist es auch das System der Formen H.“

E. Stroh[235]) hat die Symbolik von *Aronhold-Clebsch* vereinfacht. Sei die Urform $f_n = (a_\lambda x_1 + \alpha_\lambda x_2)^n$ $(\lambda = 1, 2, \ldots)$, so darf man die Symbole α gleich 1 setzen. Das Leitglied c_0 einer Kovariante c vom Grade i und vom Gewicht g (Nr. **18**) genügt der charakteristischen Gleichung $\sum\limits_{\lambda=1}^{i} \frac{\partial c_0}{\partial a_\lambda} = 0$. Deren allgemeinste ganz-rationale Lösung c_0 ist nach *Hesse*[236]) die allgemeinste Form der $a_2 - a_1$, $a_3 - a_1, \ldots a_i - a_1$ von einer Ordnung $g \leqq n$, die auch ersetzbar sind durch ebensoviel „Grundsymbole“ $A_\lambda = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_i a_i \left(\sum \lambda = 0\right)$. Nimmt man n hoch genug, so werden die c_0 zu „Seminvarianten“ (Nr. **9**, **23**); diese sind bei festen i, g durch Grundsymbole linear ausdrückbar; insbesondere lassen sich so alle irreducibeln (i. e. die „Perpetuanten“) [vgl. unten Anm. 249 u. Nr. **23**] der Anzahl und Form nach ermitteln.

Eine erweiterte Symbolik tritt bei Formen mit mehreren unabhängigen Variabelnreihen z. B. bei Kombinanten[237]) auf (Nr. **24**), wo Urformen $a_x^n \alpha_\xi^\nu$ zu Grunde gelegt werden.

Die beiden Hauptsymbole der Lie'schen Theorie [II A 6], Xf und $(X_i X_k)$, hat *Study*[238]) als invariante Prozesse eingeführt.

Die atomistischen Strukturformeln der Chemie sind den symbolischen für die Formen c einer $f_n(x)$ nach *Sylvester*[239]) analog. Die Wertigkeit des Elements ist n, die Anzahl der gebundenen Wertigkeitseinheiten entspricht dem Gewicht von c; die gesättigten Verbindungen den Invarianten, die ungesättigten den Kovarianten etc.

Clifford[240]) hat eine mehr geometrische Graphik. Jede Wurzel x_i von f_n wird durch einen Punkt einer Ebene, jedes $x_i - x_k$ durch eine

---

235) Math. Ann. 36 (1890), p. 262. Für die C_n l. c. § 12.

236) J. f. Math. 42 (1851), p. 117 = Werke p. 289. Der Satz vermittelt bei *Stroh* auch den Zusammenhang mit den Syzygien (Nr. 8, Anm. 176).

237) *Stroh,* Math. Ann. 22 (1883), p. 393; *Gordan,* ib. 5 (1872), p. 95. Für Komb., die von den x und u abhängen, vgl. „Study“ 2, § 13; *Stroh,* Progr. Münch. Realsch. 1894. Eine analoge Symbolik für $f_2(x \mid y)$ bei *A. Capelli,* Gi. di mat. 17 (1879), p. 69 [Anm. 30]; allg. für $f(\overset{m}{x} \mid \overset{n}{y})$ bei *Gordan,* Math. Ann. 33 (1889), p. 372. Für multilineare Formen bei *C. le Paige,* Brux. Bull. (3) 2 (1881), p. 40.

238) „Study“ 2, § 15. „Lie-Scheffers, Kontin. Transf.-Gruppen“ Kap. 23.

239) Amer. J. of Math. 1 (1878), p. 63 (Anwendungen in den Appendices). Die wirkliche Zuordnung bei *W. K. Clifford* ib. p. 126; vgl. *J. W. Mallet* ib. p. 277.

240) Lond. Math. S. Proc. 10 (1879), p. 124, 214; vgl. *W. Spottiswoode* ib. p. 204.

Verbindungslinie dargestellt. Die Reducibilität[241]) von Formen zeigt sich als Überlagerung von Bildern[242]) („graphs"). *J. Petersen*[243]) beweist so den diophantischen Hülfssatz *Gordan*'s (Nr. **6**, Anm. 128) anschaulich.

Die Formentheorie haben[244]) *H. Grassmann* und *Clifford*[245]) der extensiven Algebra untergeordnet. So erhält man aus $f_{1,1} = \sum a_{ik} x_i y_k$, $g_{1,1} = \sum b_{ik} x_i y_k$ $(i, k = 1, 2)$: $(f, \varphi)_2 = a_{11} b_{22} - a_{12} b_{21} - a_{21} b_{12} + a_{22} b_{11}$, wenn man im Produkte $f\varphi$ die „Einheitenprodukte" den Gesetzen unterwirft: $x_i^2 = y_i^2 = 0$, $x_1 x_2 = - x_2 x_1 = y_1 y_2 = - y_2 y_1 = 1$.

Mac Mahon[246]) und *Cayley*[247]) haben eine binäre Symbolik auf die symmetrischen Funktionen basiert. Sei $f_m(x \mid a)$ die Urform, c_0 irgend ein Leitglied (Nr. **23**), so bleibt c_0 ein solches für jede $f_n (n > m)$, die mit f_m die ersten $m + 1$ Koeffizienten gemein hat; c_0 heisst eine Sem-(Sub-)invariante (Nr. **23**) der $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$ Man schreibe $f_n = 1 + \frac{b}{1} x + \frac{c}{1.2} x^2 + \cdots = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)(1 - \gamma x) \cdots$ Dann ist nach *Mac Mahon* jede ganze Funktion der $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, die sie symmetrisch und vom Grade > 1 enthält („nicht-unitär" ist), eine Seminvariante der $a = 1, b, c, \ldots$ So ist z. B. $\sum \alpha^2 = -(c - b^2)$, $2 \sum \alpha^3 = -(d - 3bc + 2b^3)$. Schreibt man „partitionssymbolisch"[248]) $2 = \sum \alpha^2$, $3 = \sum \alpha^3$, $6552 = \sum \alpha^6 \beta^5 \gamma^5 \delta^2$ etc., so gelten die Verknüpfungsregeln der symmetrischen Funktionen [I B 3 b, Nr. **2**, **13**]: $lm = (l + m) + (lm)$ $(l \gtrless m)$ etc. Jede Syzygie (Nr. **8**) erzeugt weitere, indem z. B. 552 geändert wird in resp. 5552, 6552, 7552 etc. *Cayley* leitet so die erzeugende Funktion (Nr. **9**) $\dfrac{x^j}{(1 - x^2)(1 - x^3) \cdots (1 - x^j)}$ ab, nach deren Entwickelung der Koeffizient von x^w die Zahl der asyzygetischen Seminvarianten vom Grade j und Gewichte w ist. *Mac Mahon*[249]) konstruiert induktiv die erz. Funktion $x^{2^{j-1}} - 1 \mid 2.3.4 \ldots j$

241) Über den sog. „Zerlegungssatz" von *Clebsch* vgl. „Clebsch" p. 257.

242) *A. Buchheim,* Lond. Math. S. Proc. 17 (1886), p. 80; *A. B. Kempe* ib. p. 107; 24 (1893), p. 97 „rechnet" mit den Bildern der Invarianten.

243) Acta math. 15 (1891), p. 193.

244) Math. Ann. 7 (1874), p. 12, 538. Vgl. *R. Sturm* in Math. Ann. 14 (1879), p. 9.

245) Lond. M. S. Proc. 10 (1879), p. 124, 214; vgl. *W. Spottiswoode* ib. p. 204.

246) Amer. J. of Math. 7 (1884), p. 26. Bez. der daran sich anschliessenden „neuen" Theorie der symmetrischen Funktionen desselben Verf. s. I B 3 b, Nr. **10**.

247) Amer. J. of Math. 7 (1884), p. 1, 59; Quart. J. 20 (1884), p. 212.

248) Die Beziehung zur universellen Algebra *Sylvester*'s bei *Sylv.,* Amer. J. of Math. 5 (1883), p. 79; ib. 6 (1883), p. 270; *B. Peirce,* ib. 4 (1881), p. 97.

249) l. c. Einen andern, mehr verifizierenden Beweis für *Stroh*'s Formel (Anm. 235) giebt *P. Mac Mahon,* Lond. Math. S. Proc. 26 (1895), p. 262 (Anm. 336). Vgl. *Cayley,* Anm. 250.

für die „Perpetuanten" i. e. irreducibeln Seminvarianten, die von *Stroh*[249]) bewiesen wurde (diese Nr. oben). *Cayley*[250]) hat diese Richtung ausgebildet und ausgedehnte Tabellen hinzugefügt.

13. Aronhold's Prozess. Polaren. Der „Aronhold'sche Prozess" lautet: $D_{pq} = \sum q_i \frac{\partial}{\partial p_i}$, unter p_i, q_i 2 kogrediente Grössenreihen verstanden; sind die p_i, q_i Variable, so sagt man meist „Polarenprozess"[251]). — Sind b_i, a_i gleichstellige Koeffizienten von 2 Formen F_n, G_n, so vermittelt D_{ba}[251a]) nach *Aronhold* und *Clebsch* die symbolische Darstellung einer Invariante g^{ten} Grades einer Urform als Simultaninvariante von g Linearformen (Nr. **12**). — Solange die b von den a unabhängig sind, lässt sich D_{ba} direkt iterieren; besteht aber zwischen den b, a eine invariante Verknüpfung, so zieht man mit *Gordan*[252]) Rekursionsformeln resp. Reihenentwickelungen (Nr. **17**) heran. — Wenn $D_{ba}J = 0$ ist, ist J eine Kombinante (Nr. **24**) von $F_n(x \mid a)$, $G_n(x \mid b)$; Abhängigkeiten zwischen den a und b sind hier schwer zugänglich[253]).

D_{ba} wird zum „Evektantenprozess"[254]), wenn $F(x \mid a)$ die reale μ^{te} Potenz von u_x, $G(b)$ eine Invariante μ^{ten} Grades von F ist. Sei f_n die Urform, Ei die erste Evektante der Invariante i, so ist $(f, Ei)_{n-1} \equiv 0$, $(f, Ei)_n = ci$, wo c ein Zahlenfaktor; diese beiden Eigenschaften sind nach *Gordan*[255]) den beiden Differentialgleichungen für i äquivalent.

Sind die p_i, q_i irgend 2 Kolonnen der S-Koeffizienten und geht $F(x \mid a)$ durch S über in $F'(x' \mid a')$, $J(a)$ in $J'(a')$, so sind $D_{pq}J' = 0$ nach *Aronhold*[256]) die Differentialgleichungen für eine

250) Amer. J. of Math. 15 (1893), p. 1.

251) Vgl. wegen der Bedeutung des Polarenprozesses für die Geometrie z. B. *H. Thieme*, Math. Ann. 28 (1887), p. 133, sowie die ausführlicheren Lehrbücher über neuere Geometrie z. B. „Clebsch-Lindemann".

251a) Über eine bemerkenswerte Anwendung des Prozesses D_{ba} bei *Aronhold* auf die Umformung des Integrals $\int R(x, y)\,dx$, wo R eine rationale Funktion, und x, y an eine Relation $C_2(x, y, 1) = 0$ gebunden sind, s. II A 2, Nr. **29**, Anm. 175, 179.

252) „Gordan" 2, § 5.

253) l. c. § 6, bes. p. 74. Ein besonderer Fall bei *Gundelfinger*, Math. Ann. 4 (1871), p. 164.

254) „Gordan" 2, p. 128; „Study" p. 41.

255) „Gordan" 2, p. 129; für C_n: „Study" p. 170. Vgl. Nr. **18**, Anm. 316.

256) J. f. Math. 62 (1863), bes. p. 287, 293; weiter entwickelt bei *P. Gram*, Math. Ann. 7 (1874), p. 230.

Invariante J (Nr. **18**). *F. di Bruno*[257]) hat die direkte Überführung in die übliche Form vollzogen.

Gordan[258]) entwickelt ein symbolisches Produkt mit 2 Variabelnreihen (x_1, x_2), (y_1, y_2) in eine Summe von Polaren, die nach Potenzen von (xy) fortschreitet. Man schreibe die Urform $f_{m+n}(x)$ symbolisch $= a_x^m b_x^n$; die k^{te} Polare P von f bez. der (y) wird eine Summe von $k+1$ Gliedern $G_1, G_2, \ldots$, dann besitzt $G_i - G_k$, wie auch $G_i - P$ selbst, den Faktor $(xy)(ab)$; bei geeigneter Erweiterung stellt G jedes symbolische Produkt in $(x), (y)$ dar. Der Satz ist ausdehnbar auf m Variabelnreihen, auf ternäre Formen etc.

A. Capelli[259]) hat den Polarenprozess zum Kern der Formentheorie gemacht; bei n Reihen von ν Variabeln $(x), (y), \ldots (v)$ frägt er nach den Verknüpfungen zwischen den $n^2 = N$ „elementaren" Operationen $D_{xx}, D_{xy}, \ldots D_{yx}, D_{yy}, \ldots$ So ist der „Klammerausdruck" $D_{ik}D_{lm} - D_{lm}D_{ik}$ eine lineare Form der D u. s. f. Identitäten der Art führen zu den charakteristischen Differentialgleichungen für die Polaren[260]). — Allgemeiner, wenn $D_1, D_2, \ldots D_N$ die D in irgend einer festen Folge bezeichnen, lässt sich jede Form F der D — die von der Folge der D in jedem Gliede abhängt — in die Gestalt bringen $\sum c D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_N^{\alpha_N}$. Soll F mit jeder analogen Operation i. e. mit allen D vertauschbar sein, so wird F in den n Variabelnreihen symmetrisch und eine beliebige Form von n einfachsten, linear unabhängigen Operationen. Damit werden andere invariantive Prozesse, vor allem „Ω" (Nr. **2, 14**) auf die D reduziert. Für Δ als Determinante der $(x), (y), \ldots (v)$ wird $\Omega\Delta$ die Determinante der $D_{xx}, D_{xy}, \ldots$, nur dass[261]) in der Diagonalreihe noch die Zahlen $0, 1, 2, \cdots n-1$ additiv hinzutreten[262]).

14. Überschiebungs- und Ω-Prozess. Normierung einer linearen Differentialgleichung. *Sylvester*[263]) konstatiert (Nr. **16**), dass, wenn

257) „Bruno" p. 152.

258) „Gordan" 2, § 2, bes. p. 26; vgl. *E. Pascal,* Nap. R. (2) 1 (1887), p. 200.

259) „Fondamenti". Vgl. Nr. **9**, Anm. 192. Die späteren Untersuchungen hat *Capelli* zusammengefasst in Math. Ann. 37 (1891), p. 1. S. „Inv.-Ber." p. 200.

260) Math. Ann. 37, p. 4. Über eine Anwendung auf die Hesse'sche Form H s. Nr. **27**.

261) Nap. Atti (2) 1 (1888); Nap. Rend. (2) 2 (1888), p. 45, 189; ib. (2) 7 (1893), p. 29, 155; Gi. di mat. 32 (1894), p. 376 = Chic. Congr. P. 1896 (1893), p. 35.

262) In den Arbeiten von 1893/94 (l. c.) geht *Capelli* auch näher ein auf die Syzygien (Nr. **8**) zwischen vertauschbaren Polaroperationen, auf „volle Systeme" (Nr. **6**) von solchen u. dgl.

263) Cambr. Dubl. m. J. 7 (1852), p. 179, 194 [vgl. *Boole* ib. 6 (1851), p. 96]. *Gordan,* s. Anm. 234.

in $F = F_m(x \mid a)$ jedes Potenzenprodukt $x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n}$ ersetzt wird durch $\frac{\partial^{e_1+e_2+\cdots+e_n}}{\partial u_1^{e_1} \partial u_2^{e_2} \dots \partial u_n^{e_n}} \Phi_\mu(u \mid \alpha)$, wo $\mu \geqq m$, eine Kontravariante von F und Φ entsteht, die „m^{te} Überschiebung" (nach *Gordan*) $(F, \Phi)_m$. Speziell für $\mu = m$ resultiert die „bilineare Invariante"[264]) $\sum p_i a_i \alpha_i$, wo die p_i die bez. Polynomialkoeffizienten sind. Sollen die p_i herausfallen, so hat man entweder eine der beiden Urformen F, Φ ohne p_i anzusetzen, oder aber[265]) in beiden — dann „präpariert" genannten, — die $\sqrt{p_i}$ als numerische Koeffizienten einzuführen (Nr. **16**). Allgemeiner, wenn $F_{y(k)}$, $\Phi_{v(k)}$ die k^{ten} Polaren von $F = F_m(x \mid a)$, $\Phi = \Phi_\mu(u \mid \alpha)$ bez. (y) resp. (v) sind, und man sieht $F_{y(k)}$, $\Phi_{v(k)}$ als Urformen k^{ter} Ordnung resp. Klasse in (y) resp. (v) an, so ist nach *Sylvester*[266]) $(F_{y(k)}, \Phi_{v(k)})_k$ eine Komitante von F, Φ, die *Gordan*[267]) als „k^{te} Überschiebung von F und Φ" bezeichnet und zur Grundlage der Formentheorie gemacht hat. Schreibt man $F = a_x^m$, $\Phi = u_\alpha^\mu$, so wird $(F, \Phi)_k = a_x^{m-k} u_\alpha^{\mu-k} (a\alpha)^k$ i. e. „$(F, \Phi)_k$ entsteht aus dem Produkte $F\Phi = a_x^m u_\alpha^\mu$, indem man k-mal ein Faktorenpaar $a_x u_\alpha$ durch den „Klammerfaktor"[268]) $(a\alpha)$ ersetzt, oder wie *Gordan* sagt, $F\Phi$ k-mal „faltet"."[268]) Man kann sich auch auf kogrediente Variabelnreihen (x), (y), (z), ... beschränken[269]); für 3 ternäre Urformen etwa $F_m = a_x^m$, $G_p = b_y^p$, $H_q = c_z^q$ wird $(F, G, H)_k = (abc)^k a_x^{m-k} b_y^{p-k} c_z^{q-k}$. Spezialisiert man, indem man $p = q$ und $b_y c_z$ als alternierende Form der y, z nimmt, so kehrt man zu $(F, \Phi)_k$ zurück. Andererseits liefert *Cayley*'s Prozess (Nr. **12**, Anm. 226) $\Omega = \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \frac{\partial}{\partial z_3} \right|$, auf $a_x^m b_y^p c_z^q$ k-mal ausgeübt, bis auf einen Zahlenfaktor, gerade $(abc)^k a_x^{m-k} b_y^{p-k} c_z^{q-k}$ i. e.: „Der Prozess Ω^k, auf ein symbolisches (ternäres) Produkt $a_x^m b_y^p c_z^q$ ausgeübt, ist äquivalent der k-maligen Faltung des Produktes oder der k^{ten} Überschiebung der Formen a_x^m, b_y^p, c_z^q (und entspr. allgemein)". Überschiebt man 2 Produkte binärer symbolischer Faktoren, so ergeben sich bei *Gordan*[270]) analoge Sätze, wie beim Polarenprozess

264) Das Verschwinden der bilinearen Invariante ist eine Hauptquelle der Apolarität [Nr. **24**].

265) *Clebsch,* Gött. Abh. 17 (1872), p. 14; *Sylvester,* J. f. Math. 85 (1878), p. 89 [Nr. **16**].

266) S. Anm. 263. Implicite schon bei *Cayley* (Nr. **2**, Anm. 17).

267) Für f_n im J. f. Math. 69 (1868), p. 323 (besondere Fälle in unsymbolischer Behandlung bei *Cayley*, IV. Mem.); für F_n: Math. Ann. 1 (1868), p. 90.

268) „Gordan" 2, p. 33. Das Wort „Faltung" im „Programm". Für C_n: *Gordan,* Math. Ann. 17 (1881), p. 217.

269) Nach *W. Fr. Meyer*, „Inv.-Ber." p. 206.

270) „Gordan" 2, § 3; Math. Ann. 17 (1881), p. 217.

(Nr. **13**); speziell wird jedes symbolische Produkt eine Summe einfacher, nur noch 2 Symbole enthaltender Überschiebungen. Eine häufige Überschiebung ist die „Funktionaldeterminante"[271] $\left|\dfrac{\partial F^{(i)}}{\partial x_k}\right|$ von n Formen $F^{(i)}(x_1, x_2, x_n)$, die zur „Hesse'schen Determinante"[272] von G für $F^{(i)} = \dfrac{\partial G}{\partial x_i}$ wird.

Bei festem φ stellt $(f, \varphi)_k = 0$ eine lineare Differentialgleichung k^{ter} Ordnung $D_k = 0$[273] für $f = f(x) = f(x_1, x_2)$ dar. Umgekehrt lässt sich jedes (homogenisierte) D_k mit rationalen Koeffizienten als Aggregat von Überschiebungen einer Form f mit Formen φ schreiben. *E. Waelsch*[273]) weist das nach, indem er in $D_k \equiv \sum_{r=0}^{r=k} \psi^{(r)} \dfrac{\partial^k y}{\partial x_1^r \, \partial x_2^{k-r}} = 0$ symbolisch $y = a_x^n$ setzt, und die Form $D_k(x_1, x_2; -a_2, a_1)$ nach Potenzen von a_x entwickelt (Nr. **17**); für $n + \nu = m$ resultiert

$$D_k \equiv \nu_0(\varphi_m, f)_n + \nu_1(\varphi_{m-2}, f)_{n-1} + \nu_2(\varphi_{m-4}, f)_{n-2} + \cdots = 0,$$

wo die φ gewisse Formen sind und über die numerischen ν geeignet verfügt wird. Diese „Normierung" von $D_k = 0$ ist für das Aufsuchen der ganz-rationalen[274] Lösungen spezieller Typen von $D_k = 0$ brauchbar. Vgl. Anm. 203. So haben *G. Pick*[275] und *F. Klein*[276] die „Lamé'sche Differentialgleichung" untersucht; *Pick* die „gewöhnliche" $(\varphi_4, f)_2 = \varphi_0 f$; *Klein* die „allgemeine" $(\varphi_m, f)_2 = \varphi_{m-4} f$, die bei einer gewissen Ausartung von φ_m zur allgemeinen $D_2 = 0$ wird[277].

Deutet man mit *E. Waelsch*[278] in der normierten $D_k = 0$ f als

---

271) Vgl. I B 1 b, Nr. **17, 19, 21**.

272) Vgl. I B 1 b, Nr. **22**.

273) Prag Deutsche Math. Ges. 1892, p. 78.

274) *Hilbert,* Diss. Königsb. 1885; Math. Ann. 28 (1887), p. 381; 30 (1887), p. 15; *R. Perrin,* Par. Soc. Math. Bull. 16 (1888), p. 82; *A. Hirsch,* Diss. Königsb. 1892.

275) Wien. Ber. 96 (1887), p. 872; Math. Ann. 38 (1891), p. 139.

276) Gött. Nachr. 1890, p. 85; Math. Ann. 38 (1891), p. 144; „Über lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung". Autogr. Vorl., Göttingen 1890/91, 1894.

277) Wegen einer damit zusammenhängenden Verallgemeinerung des Überschiebungsbegriffes durch *Pick* s. Anm. 285. Zur Normierung der D_n vgl. noch *M. Bôcher,* Göttinger Preisarbeit 1891, ausführlicher in „Über die Reihen der Potentialtheorie", Leipzig 1893; *G. Fano,* Rom. Linc. R. (5) 4 (1895), p. 18, 51, 232, 292, 322.

278) Anschliessend hat *Waelsch,* bes. für den Fall der f_5, Zusammenhänge studiert zwischen den Lamé'schen Formen, den Schwesterformen (Nr. 7), den Raumkurven und Flächen 3. Ordnung, mit Ausblicken auf eine allgemeine „Binäranalyse höherer Räume" (Nr. **24**, Anm. 388 u. Nr. **27**, Anm. 440); Monatsh. f. Math. 6 (1895), p. 261, 375; Wien. Ber. 105 (1896), p. 741; Deutsche Math.-Ver. 4 (1897), p. 113.

eine *wirkliche* Form $f_\pi\,(\pi \geqq n)$, wodurch D_k in eine Form d_μ übergeht, so gewinnt man eine für die Geometrie nützliche projektive Zuordnung von Formen f_π und d_μ.

15. Substitution einseitiger Ableitungen. Die Normierung von $D_k = 0$ (Nr. **14**) ist auch durch einen — überhaupt für die Formentheorie grundlegenden — Satz erreichbar, den *Bruno*[279]) für Urformen f, *Hilbert*[280]) und *Perrin*[281]) allgemein für F aufgestellt haben. Man nehme in der Urform $f = f_n(x \mid a) = f^{(0)}(x)\ x_2 = 1$, setze $f^{(1)} = \frac{1}{n} f'(x)$, $f^{(2)} = \frac{1}{n(n-1)} f''(x)$ etc., „so ist, für $c_0(a_i)$ als Leitglied (Nr. **23**) einer Kovariante c von f, $c = c_0(f^{(i)})$“, i. e. jede isobare (Nr. **18**) Form der $f^{(i)}$ vom Gewichte p und vom Grade g, die der Bedingung $D \equiv f^{(0)} \frac{\partial}{\partial f^{(1)}} + 2 f^{(1)} \frac{\partial}{\partial f^{(2)}} + \cdots = 0$ genügt, ist eine Kovariante von f der Ordnung $m = ng - 2p$. Der Satz ist plausibel, da c durch Überschiebungen aus f entsteht (Nr. **14**), also eine Form der $f^{(i)}$ wird, die für $x_2 = 0$ die nämliche Form c_0 der a_i wird. Der Satz macht ausgeartete[282]) Urformen zugänglich. *Hilbert*[282]) hat damit die endlichen hypergeometrischen Reihen $f(\alpha, \beta, \gamma, x)$ invariantiv fixiert; $-\alpha$ (resp. $-\beta$) ist die Ordnung von f. Die $D_2 = 0$ für f wird normiert in $(\varphi_3, f)_2 + (\varphi_1, f)_1 = 0$; hier sind φ_3, φ_1 einfache Hülfsformen, nach deren Elimination f durch $\gamma \equiv 0$, wo γ eine gewisse Kovariante, charakterisierbar ist. Für $\Delta \doteq n f^{(1)} \frac{\partial}{\partial f^{(0)}} + (n-1) f^{(2)} \frac{\partial}{\partial f^{(1)}} + \cdots$ wird, wenn c_0 wieder eine isobare Form der $f^{(i)}$, $\Delta c_0 = \frac{d c_0}{dx}$. Zwischen

---

279) J. f. Math. 90 (1880), p. 186; Amer. J. of Math. 3 (1880), p. 154; Math. Ann. 18 (1881), p. 280. Vgl. *Sylvester,* Amer. J. of Math. 2 (1879), p. 357; *E. Stroh,* Math. Ann. 22 (1885), p. 402. Der Satz von *Bruno* erscheint bei *J. Wellstein,* Nova Acta Leop. 74 (1899), p. 281 (§ 2) [Auszug in Math. Ann. 52, p. 70] als Spezialfall eines Satzes über die (binären) Schwesterformen (Nr. **7**, Anm. 146). Eine andere Anwendung der f_i giebt *A. B. Kempe,* Lond. Math. S. Proc. 24 (1893), p. 97: eine Seminvariante (Nr. **23**) von f ist eine Simultaninvariante der f_i, vgl. noch *Elliott,* Mess. (2) 23 (1893), p. 91; Lond. Math. S. Proc. 26 (1895), p. 185.

280) Diss. Königsb. 1885; Math. Ann. 30 (1887), p. 15. In anderer Form erscheint die Verallgemeinerung schon bei *H. Grassmann,* Math. Ann. 7 (1874), p. 538 (Anm. 146). — Der Fall $f(x) = 0$ bei *Brioschi* behufs Transf. d. Gl.: Math. Ann. 29 (1887), p. 327.

281) Par. Soc. Math. Bull. 16 (1888), p. 82.

282) Math. Ann. 30 (1887), p. 21 (Nr. **14**, Anm. 274). — In allgemeinerer Gestalt tritt der Satz $\Delta c_0 = \frac{d c_0}{d x}$ bei den Differentialinvarianten auf, s. Nr. **20**, Anm. 326.

D, Δ und deren Iterationen herrschen einfache Rekursionsgesetze. Eine isobare Form ϱ der $f^{(i)}$ ist eine „Semikovariante“[283]) vom Range r, wenn in der Reihe $D\varrho$, $D\varrho^2, \ldots$ zuerst $D\varrho^{r+1} \equiv 0$ ist; für $r = 0$ resultiert die Kovariante. ϱ kann vermöge der D, Δ aus Kovarianten erzeugt werden; es führt das zu einer Verallgemeinerung[284]) des Überschiebungsprozesses[285]).

16. Substitution homogener Ableitungen. *G. Boole*[286]) bemerkt, dass die S vom Modul Δ, die x_1, x_2 überführt in x_1', x_2', auch $\frac{\partial}{\partial x_2}$, $-\frac{\partial}{\partial x_1}$, angewandt auf eine willkürliche Funktion χ, überführt in $\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial x_2'}$, $-\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial x_1'}$ i. e. dass die x_1, x_2 mit den $\frac{\partial}{\partial x_2}$, $-\frac{\partial}{\partial x_1}$ kogredient sind, was sich unschwer auf die höheren Ableitungen von χ ausdehnen lässt. Aus einer Identität $\varphi(x_1, x_2) \equiv \psi(x_1', x_2')$ folgt daher symbolisch $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \equiv \psi\left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial x_2'}, -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial x_1'}\right)$, so dass jedes Produkt $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{k_2}$ durch $\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x_1^{k_1}\,\partial x_2^{k_2}}$ zu ersetzen ist. Das ist bereits der Überschiebungsprozess (Nr. **14**). Ist S eine orthogonale[287]) Substitution von x_1, x_2, x_3, so folgt aus $\varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv \psi(x_1', x_2', x_3')$ symbolisch $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \equiv \psi\left(\frac{\partial}{\partial x_1'}, \frac{\partial}{\partial x_2'}, \frac{\partial}{\partial x_3'}\right)$; Kogredienz und Kontragredienz fallen hier zusammen.

J. J. Sylvester[288]) dehnt das Prinzip „der gegenseitigen Differentiation“ auf n Variable $x_1, x_2, \ldots x_n$ aus, die bequemer einer „unimodularen“ S ($\Delta = 1$) unterworfen werden, während die n kontragredienten Variabeln $u_1, u_2, \ldots u_n$ invers (reciprok) transformiert

---

283) Vgl. die verwandten Begriffsbildungen von *J. Deruyts* in Nr. **23**.

284) Bei *R. Perrin* finden sich Ausdehnungen der Hilbert'schen Sätze und Begriffe auf höhere Gebiete Par. S. M. Bull. 16 (1888), p. 82.

285) Vgl. Anm. 277. Eine andersartige Erweiterung des Überschiebungsprozesses, auf Gebilde $p > 0$, findet sich bei *Pick*, Gött. Nachr. 1894, p. 311; Math. Ann. 50 (1898), p. 381. Verwandte Untersuchungen stellt *J. Wellstein* an, s. Anm. 277.

286) Cambr. math. J. 3 (1842), p. 106; ausführlicher in Cambr. Dubl. m. J. 6 (1851), p. 87.

287) Anwendungen von diesen und analogen Sätzen auf Fragen der mathematischen Physik geben *W. J. M. Rankine* und *W. Thomson*, Lond. Trans. $146^{1,2}$ (1856); *C. Niven*, Edinb. Trans. 27 (1876), p. 423; *W. J. C. Sharp*, Lond. Math. S. Proc. 13 (1882), p. 216; *B. Élie*, Thèse Bordeaux 1892; *H. Burkhardt* (vgl. auch Nr. **6**, **20**), Gött. Nachr. 1893, p. 155; Math. Ann. 43 (1893), p. 197; Deutsche Math.-Ver. 5 (1897), p. 42; *C. Somigliana*, Rom. Linc. R. (5) 4^1 (1895) p. 25.

288) Cambr. Dubl. M. J. 7 (1872), p. 179.

werden, sodass u_x ungeändert bleibt (Nr. 2). Dann sind die x und $\frac{\partial}{\partial u_i}$, wie die u_i und $\frac{\partial}{\partial x_i}$ kogredient, und aus $\varphi(x_i) \equiv \psi(x_i')$ folgt symbolisch $\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \equiv \psi\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)$ (Nr. **14**). *Sylvester* betont[289]), dass diese Identität auch in *realem* Sinne gültig bleibt. In der Anwendung auf die Formentheorie lautet das Prinzip: „Sind $F(x_i)$, $\Phi(u_i)$ 2 Urformen, so sind, symbolisch und unsymbolisch, $F\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u_i}\right)$, $\Phi\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)$ simultane Komitanten von F, Φ, und das bleibt richtig, wenn die Zeichen F, Φ vor den Klammern durch die von 2 beliebigen Komitanten von F, Φ ersetzt werden, wo F, Φ die x, u auch zugleich enthalten dürfen."

Zu einer andern Art von Differentiationsprinzip gelangt man nach *Sylvester*[290]), wenn man eine Invariante J von $F_m(x \mid a) + k u_x^m$ nach Potenzen von k entwickelt, deren Faktoren dann Kontravarianten von F sind. Es erzeugt also der „Evektantenprozess" $E = u_1^m \frac{\partial}{\partial a_1} + u_1^{m-1} u_2 \frac{\partial}{\partial a_2} + \cdots$, nebst seinen Iterationen, aus J Kontravarianten (allgemeiner Komitanten) von F, die successiven „Evektanten". Ist J speziell die Diskriminante von F, so gelangt man zu den vorher von *Hermite* entdeckten „adjungierten Formen" (Nr. **2**, **3**, **18**). — $F(x \mid a)$ sei eine „präparierte" Urform (Anm. 265). Dann inducieren, wie *Sylvester*[291]) successive für $n = 2, 3, \ldots$ nachweist, 2 reciproke S der x 2 reciproke S der a. Ist also $C(x \mid a)$ eine Kovariante, $\Gamma(u \mid a)$ eine Kontravariante von F, so ist auch $C\left(u \,\middle|\, \frac{\partial \Gamma}{\partial a}\right)$ eine Kontravariante. Ähnlich geht aus 2 Kovarianten eine neue Kovariante hervor. Der Prozess ist auf die Leitglieder übertragbar (Nr. **23**). *R. Lipschitz*[292]) beweist den Satz von *Sylvester* direkt, indem er ihn in Beziehung setzt zu dem analogen, dass auch 2 transponierte S der x 2 transponierte S der a nach sich ziehen. Das letztere wird von *Study*[293]) auf Konnexe $F(\overset{n}{x}; \overset{\nu}{u}; \mid a)$, $\Phi(\overset{\nu}{x}; \overset{n}{u}; \mid b)$

289) l. c. p. 194.

290) l. c. p. 56, 181.

291) J. f. Math. 85 (1878), p. 89.

292) Amer. J. 1 (1878), p. 336; vgl. *Sylvester* ib., p. 341. Der Satz über die transpon. Subst. symb. bewiesen bei *C. le Paige*, Math. Ann. 15 (1879), p. 206. *F. Franklin* vergleicht die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der inducierten S mit denen der char. Gl. der ursprünglichen S: Amer. J. of Math. 16 (1894), p. 205.

293) „Study" p. 36. S. Anm. **) auf p. 220 des „Inv.-Ber.".

ausgedehnt, wo man die Dualität als den inneren Grund erkennt; denn $\sum a_i b_i$ ist genau so als identische Komitante aufzufassen, wie $\sum x_i u_i$. Es sind also auch die $\frac{\partial}{\partial a}$ zu den b kogredient, was zum Evektantenprozess für Konnexe führt.

A. Hurwitz[294]) erweitert und vervollständigt die Boole-Sylvester-Cayley'schen Differentiationsprozesse unter dem Gesichtspunkt des Rechnens mit Substitutionen; eine bemerkenswerte Anwendung davon ist die Ausdehnung des Hermite'schen Reciprozitätsgesetzes (Anm. 233[a]) auf höhere Gebiete; es gelingt, aus den Invarianten eines beliebigen Formensystems Invarianten eines zweiten, aus ebensoviel beliebigen Formen bestehenden Systems abzuleiten, so, dass einem vollständigen System linear unabhängiger Invarianten dort stets ein ebensolches hier entspricht und umgekehrt.

17. Reihenentwickelungen. Ist $f(\overset{m}{x}; \overset{n}{y})$ eine doppelt binäre Form, und lässt man in die Prozesse $D_{xy} = \Delta$, $D_{yx} = D$, Ω (Nr. **13**, **14**) noch Zahlenfaktoren eingehen: $m\Delta = y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$, $nD = x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$, $mn\Omega = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_1}$, so hat man sofort nach *Clebsch*[295]) und *Gordan* $f = \Delta D f + \frac{m}{m+1}(xy)\Omega f$, und durch Iteration die (endliche) „Reihenentwickelung"[296]) von f nach Potenzen von (xy)

I. $f \equiv \Delta^n D^n f + \alpha_1 (xy) \Delta^{n-1} D^{n-1} \Omega f + \alpha_2 (xy)^2 \Delta^{n-2} D^{n-2} \Omega^2 f + \cdots$,

wo die $D^n f$, $D^{n-1}\Omega f$, $D^{n-2}\Omega^2 f, \ldots$ nur noch von den (x) abhängen, und die α numerisch sind; umgekehrt giebt es keine zweite Entwickelung von f nach Potenzen von (xy) mit Koeffizienten, die Polaren von Formen der (x) sind. Schreibt man $f = r_x^m s_y^n$ (Nr. **12**), und bildet die „Elementarkovarianten" $E_i = (rs)^i r_x^{m-i} s_x^{n-i}$ $(i = 0, 1, \ldots)$, so sind die Glieder der rechten Seite von I. die n^{te}, $(n-1)^{\text{te}}, \ldots$ Überschiebung von $E_0, E_1, \ldots$ mit $(xy)^n$. Mithin ist $f(x; y)$ hinsichtlich des Systems der invarianten Formen ersetzbar durch die E. — *Clebsch*[297]) leitet direkt aus I. eine analoge Formel ab für eine doppelt-

294) Math. Ann. 45 (1894), p. 381.

295) „Clebsch" § 7.

296) „Gordan" 2, § 7, bes. p. 23. Vgl. die Darstellung bei *H. S. Baker*, Mess. (2) 19 (1889), p. 91. Die Formel I. lässt sich in gewissem Sinne nach *Gordan* als Erweiterung der Taylor'schen Reihe ansehen.

297) Gött. Abh. 17, p. 22; *Gordan*, Math. Ann. 5 (1872), p. 95. Der Begriff der „reducierten" Urformen lässt Modifikationen zu (Beispiele bei *Forsyth*, Quart. J. 23 [1888], p. 102). Anwendung auf volle Systeme für F_n, unter Benützung des Ω-Prozesses, bei *F. Mertens*, Wien. Ber. 98 (1889), p. 691.

ν-äre Form r_ξ; man spezialisiere f zu $x_1^m \cdot y_2^n$ und setze $x_1 = r_\xi$, $y_1 = r_\eta$, $x_2 = s_\xi$, $y_2 = s_\eta$, mithin $(xy) = r_\xi s_\eta - r_\eta s_\xi$. Hieraus folgert *Clebsch*, dass eine Reihe von Urformen $F(x_1, \dots x_r, y_1, \dots y_r$ etc.) hinsichtlich ihrer Komitanten ersetzbar ist durch eine einfachere Reihe von Urformen G, die von jeder Art von „Zwischenvariabeln“[298]) x_i, $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$, $p_{ikl} = \sum \pm x_i y_k z_l$ etc. höchstens je eine Reihe enthält. Die G können noch „reduziert“ werden, d. i. den Bedingungen $\sum \frac{\partial^2}{\partial p_{ikl\dots} \partial p_{i'k'l'\dots}} = 0$ unterworfen werden, wo sich die $p_{ikl\dots}$, $p_{i'k'l'\dots}$ dualistisch gegenüberstehen. — Bei *Gordan*[299]) dient die Reihenentwickelung als Hauptmittel der symbolischen Rechnung (Nr. **13**, **14**). *Capelli*[300]) verdankt man die Ausdehnung auf Formen F mit kogredienten Reihen von ν Variabeln. Die Reihen gehören nicht sowohl der Formentheorie, als der spezifischen Theorie der Polarenprozesse D_{xy} an (Nr. **13**). — Der Unterfall der „Konnexe“ $F(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{u}) = a_x^m u_\alpha^\mu$ erlaubt nach *Gordan*[301]) und *E. Study*[302]) eine direktere Behandlung. Ist $\Delta^\varkappa F = (a\alpha)^\varkappa a_x^{m-\varkappa} u_\alpha^{\mu-\varkappa}$ die $\varkappa^{\text{te}}$ Überschiebung von F mit sich (Nr. **14**), so ist $G_0(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{u}) \equiv F + \alpha_1 u_x \Delta F + \alpha_2 u_x^2 \Delta^2 F + \cdots$ bei numerischen α eine in den Koeffizienten von F lineare Komitante von F. Die α sind eindeutig so bestimmbar, dass $\Delta G_0 \equiv \sum \frac{\partial^2 G_0}{\partial x_i \, \partial u_i} \equiv 0$, i. e. G_0 ein „Normalkonnex“ wird; successive auf F, ΔF, $\Delta^2 F, \dots$ angewandt, liefert das Verfahren die „Elementarkonnexe“ G_0, G_1, $G_2, \dots$ Dann lassen sich die numerischen β eindeutig so bestimmen, dass

II. $$F \equiv G_0 + \beta_1 u_x G_1 + \beta_2 u_x^2 G_2 + \cdots$$

wird. Die Koeffizienten der G_i sind — bis auf die Bedingungen $\Delta G_i \equiv 0$ — von einander unabhängig. Nennt man mit *Rosanes*[303]) die Konnexe

---

298) l. c. § 12. *J. Deruyts* untersucht entsprechend Formen mit mehreren verschiedenen Reihen der p_i, p_{ik}, $p_{ikl} \dots$; die Invarianten solcher Formen werden reduciert auf einfachere, die von jeder Art von Variabeln höchstens eine Reihe enthalten; Brux. Bull. (3) 25 (1893), p. 450 (Nr. **18**, **23**).

299) Für C_n bei „Study“ 2, § 3. Vgl. Nr. **5** Anm. 105.

300) Für C_n: G. di mat. 18 (1880), p. 17. Allgemein „Fondamenti“; Pal. Rend. 1 (1886), p. 1; Math. Ann. 37 (1891), p. 1; Rom. Linc. R. 1 (1891), p. 161; 8 (1892), p. 3.

301) Math. Ann. 5 (1872), p. 94, bes. § 4, 5.

302) „Study“ 2, §§ 3, 8, 12. *St.* bezeichnet die Formeln I., II. als „Erste“, bezw. „Zweite Gordan'sche Reihenentwickelung“.

303) J. f. Math. 75 (1873), p. 172; 76 (1873), p. 312; Math. Ann. 6 (1873), p. 264 [Nr. **24**, Anm. 378].

$F = a_x^m u_\alpha^\mu$, $\Phi = b_x^\mu u_\beta^m$ „konjugiert", wenn $(F, \Phi) \equiv a_\beta^m b_\alpha^\mu = 0$, und entwickelt auch $\Phi = \Gamma_0 + b_1 u_x \Gamma_1 + \cdots$, so ist stets $u_x^i G_i$ konjugiert zu $u_x^k \Gamma_k (i \gtrless k)$. Analoge Entwickelungen gelten für Formen $F = a_x^m b_x^n$. — *Study*[304]) hat den Reihenentwickelungen eine begriffliche Deutung gegeben, auf Grund der Eigenschaften, die die Mannigfaltigkeit der S-Koeffizienten besitzt[305]).

18. Differentialgleichungen der Komitanten. Als Ausfluss eines verallgemeinerten Satzes über Unterdeterminanten (Nr. 2, Anm. 17; **12**, Anm. 224) erscheint bei *Cayley*[306]) die Existenz linearer partieller Differentialgleichungen für die Hyperdeterminanten. — *Sylvester, Cayley, Aronhold* haben fast gleichzeitig[307]) die charakteristischen linearen partiellen Differentialgleichungen für die einfacheren Komitanten — die noch die x und u enthalten können — von Urformen aufgestellt. — *Sylvester*[308]) bedient sich hierbei, als Vorgänger *Lie*'s, des allgemeinen Prinzips der „infinitesimalen Variation" der Variabeln. Ist etwa $i(a)$ eine Invariante von $f_n(x|a)$, so bediene man sich der S, S_1: $x_1' = x_1 + \varepsilon x_2$ (ε unendlich klein), $x_2' = x_2$, resp. der andern, S_2: $x_1' = x_1$, $x_2' = \varepsilon x_1 + x_2$. Setzt man in $i(a)$ die transformierten a' ein, und entwickelt nach Potenzen von ε, so liefert das Verschwinden des Faktors von ε die beiden Gleichungen für binäre Invarianten i:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} Di \equiv a_0 \dfrac{\partial i}{\partial a_1} + 2a_1 \dfrac{\partial i}{\partial a_2} + 3a_2 \dfrac{\partial i}{\partial a_3} + \cdots = 0, \\ \Delta i \equiv a_n \dfrac{\partial i}{\partial a_{n-1}} + 2a_{n-1} \dfrac{\partial i}{\partial a_{n-2}} + 3a_{n-2} \dfrac{\partial i}{\partial a_{n-3}} + \cdots = 0. \end{cases}$$

Dass diese i als Invariante von f charakterisieren, erhellt aus der Zu-

304) l. c. § 12.

305) Vgl. dazu „Lie-Scheffers", Kont. Transformationsgruppen, Kap. 23.

306) Cambr. math. J. 4 (1845), p. 193 = Pap. 1, p. 80.

307) Vgl. die Bemerkungen von *Sylvester*, Cambr. Dubl. m. J. 7 (1852), p. 205 und von *Cayley,* Coll. Pap. 2 (1889), p. 600. Die systematischen Darstellungen finden sich bei *Sylvester,* Cambr. Dubl. m. J. 7 (1852) sect. 6, p. 204; bei *Cayley* im I. und II. memoir und J. f. Math. 47 (1854), p. 109 = Pap. 2, p. 164; vgl. *Brioschi,* Ann. di mat. 1 (1858), p. 160; Ann. fis. mat. 9 (1859), p. 82; bei *Aronhold,* J. f. Math. 62 (1863), p. 281. Letzterer stellt die Differentialgleichungen in allgemeinster Gestalt auf und beweist, dass sie die invarianten Bildungen charakterisieren. *Sylvester* giebt in Cambr. Dubl. m. J. 8 (1853), p. 256 die Differentialgleichungen für die Kombinanten (Nr. **24**); vgl. *E. Betti,* Ann. di mat. 1 (1858), p. 344. Bez. der Diff.gleichungen für die Seminvarianten s. Nr. **23**, für die Reciprokanten Nr. **20**.

308) Cambr. Dubl. m. J. 7 (1852), p. 96, 204 (sect. 6). Vgl. „Lie-Scheffers", Kap. 23.

sammensetzbarkeit einer beliebigen (unimodularen) S aus S_1 und S_2. Ist i eine Kovariante von f, so erleidet I eine leicht angebbare Modifikation. *Cayley*[309]) der die Differentialgleichungen zur Grundlage seiner „memoirs“ macht, geht anders vor. Für eine Urform $f_n(x \mid a) = f$ lässt sich $x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}$ auch durch Differentiation nach den a erhalten, nämlich durch den Prozess $\left\{x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right\} \equiv Df$. Mithin ist $\left\{x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right\} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}$ ein „Annihilator“ von f, d. h. er macht f zu Null, und desgl. $\left\{x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right\} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \equiv \Delta - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$. Bei $x_1, x_2, \ldots x_n$ hat man $\frac{n(n-1)}{2}$ analoge Operatoren $\left\{x_i \frac{\partial}{\partial x_k}\right\} - x_i \frac{\partial}{\partial x_k}$. Aber auch jede Kovariante genügt diesen Differentialgleichungen, und umgekehrt. — Die Ausdehnung auf eine Reihe von Urformen und mehrere Variabelnreihen (x) resp. (u) ist unschwer vorzunehmen.

Mittelst des Poisson'schen „Klammerausdrucks“[310]) zeigt *Cayley*, dass eine Invariante i von $f(x \mid a)$ „isobar“ ist, d. h. wenn const. $a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n}$ ein Term von i ist, und g der Grad in den a, so ist das „Gewicht“ $w = \sum i\alpha_i = \frac{1}{2} ng$ konstant; nach Ausübung von S mit dem Modul Δ ändert sich i um den Faktor Δ^w [Nr. 2]. In einer Kovariante c von der Ordnung μ und vom Grade g bilden die Gewichte der Koeffizienten eine arithmetische Reihe mit der Differenz 1, und $w = \frac{1}{2}(ng + \mu)$ wird das „Gewicht“ von c.

S. Roberts[311]) hat in die Differentialgleichungen für i resp. c die Wurzeln von f als unabhängige Variable eingeführt. *Aronhold*[312]) leitet n^2 Differentialgleichungen für eine absolute, wie relative Invariante J einer Urform $F(x \mid a)$ aus seinem „Äquivalenzproblem“ (Nr. 2, 4) vermöge Elimination her; von den n^2 Gleichungen sind $\frac{n(n-1)}{2}$ mit den früheren äquivalent, während die übrigen nur aussagen, dass J in den a homogen und isobar ist. Beide Gleichungssysteme sind

309) Vgl. die Bemerkungen von *Cayley*, Coll. Pap. 2 (1889), p. 600 (Anhang).

310) I. Mem. Vgl „Lie-Scheffers“, Kap. 23.

311) Ann. fis. mat. 5 (1854), p. 409; *Br.* stellt ib. p. 422 ein System von part. Differentialgleichungen für die symmetrischen Funktionen von n Grössen auf, das später von *E. Netto* eingehend diskutiert ist: Zeitschr. Math. Phys. 38 (1893), p. 357; 40 (1895), p. 375 [I B 3 b, Nr. 8]. Wegen der Leistungen *Brioschi*'s s. *Noether*, Math. Ann. 50 (1898), p. 477.

312) J. f. Math. 62 (1863), p. 281.

je linear unabhängig, und bilden nach *Clebsch*[313]) ein „vollständiges System", d. h. durch Differentiation und Elimination lassen sich keine neuen Gleichungen gewinnen. Im Sinne von *Lie*[314]) sagt das aus, dass die „infinitesimalen" S der a, die J gestattet, eine Gruppe bilden.

A. R. Forsyth[315]) stellt die Differentialgleichungen auf für eine Komitante C einer Urform $F(x_1, \dots x_n \mid a)$, wo C von allen $p_{ikl\dots}$ (Nr. **17**, Anm. 298) je eine Reihe enthalten darf. Indem er, wie *Sylvester*, „infinitesimale" S zu Grunde legt, gelangt er z. B. für $n = 4$ zu 6 Gleichungen des Typus:

$$\sum i\, a_{i-1,\, k+1,\, l,\, m} \frac{\partial C}{\partial a_{iklm}} = x_1 \frac{\partial C}{\partial x_2} + p_{14} \frac{\partial C}{\partial p_{24}} - p_{31} \frac{\partial C}{\partial p_{23}} - u_2 \frac{\partial C}{\partial u_1} = 0,$$

die einfache Modifikationen erleidet, wenn F die $p_{ikl\dots}$ selbst noch enthält.

Study[316]) hat, an *Gordan* anknüpfend (Nr. **13**, Anm. 258) erkannt, dass gewissen Zusammenfassungen der Differentialgleichungen für J eine formentheoretische Bedeutung zukommt, dadurch, dass er jeder infinitesimalen S der x eine endliche S (mit $\Delta = 0$) eindeutig umkehrbar zuordnet. Eine gewisse Evektante (Nr. **16**, Anm. 290) von J unterscheidet sich dann von Fu_x nur um einen Zahlfaktor. Hierbei haben die ganz-rationalen J nichts mehr vor den rationalen resp. algebraischen resp. analytischen voraus. Die Anzahl der Differentialgleichungen lässt sich „reduzieren"[317]), insofern aus zweien vermöge des „Klammerprozesses" (Nr. **12**, Anm. 238 und II A 6) die übrigen hervorgehen. *Kronecker*[318]) reduziert anders; er setzt die allgemeine S von $x_1, \dots x_n$ aus einfacheren, bei denen jeweils nur 2 x Teil nehmen, zusammen. *Kronecker* gelangt so zu $2n-2$ „Dekompositionssystemen" $S^{(i)}$ mit numerischen Koeffizienten; die $2n-2$ bez. Differentialgleichungen (für absolute J tritt noch eine weitere hinzu) sagen aus, dass J bei $S^{(i)}$ invariant bleibt und, indem sie

---

313) J. f. Math. 65 (1865), p. 257. Vgl. II A 5a, 6.

314) *Lie-Scheffers*, Kontin. Transformationsgruppen, Kap. 23 (Anm. 316).

315) Lond. Math. S. Proc. 19 (1888), p. 24. In besonderen Fällen schon bei *Capelli*, „Fondamenti". — Die Reduktion des allgemeineren Falles, wo C von jeder Art von p mehrere Reihen enthalten darf, auf den Fall des Textes führt *J. Deruyts* aus, Brux. Bull. (3) 25 (1893), p. 450 [Anm. 298].

316) „Study" 2, § 18 (Anm. 255, 314).

317) Nach „Study" § 15 ist für $n = 3$ die Minimalzahl unabhängiger Differentialgleichungen gleich 2. *Kronecker* behandelt den Gegenstand substitutionentheoretisch Berl. Ber. 1889, p. 504 = Werke 3, p. 315.

318) Berl. Ber. 1889, p. 349, 479, 603 = Werke 3, p. 293, 315. Wegen der verwandten Untersuchungen von *J. Deruyts* s. Nr. **23**.

das Kriterium für eine Invariante darstellen, geben sie Aufschluss über die inneren Beziehungen zwischen *Aronhold*'s Gleichungen. Die Differentialgleichungen sind praktisch[319]) für die Berechnung der J nützlich, theoretisch[320]) für unsymbolische Beweise wichtig.

19. Höhere Transformationen[321]). *Gordan*[322]) hat die Formentheorie der binären rationalen Transformation T auf die projektive Theorie zurückgebracht. Auf die Urform $f_n(x, 1)$ wird die T_m: $z_1 = \varphi_m(x, 1)$, $z_2 = \psi_m(x, 1)$ ausgeübt, indem man die Resultante $f^{(1)}$ (bez. x) von f und $z_1\psi - z_2\varphi$ bildet. Man hat die In- und Kovarianten der „transformierten" Urform $f^{(1)}$ durch simultane Formen der f, φ, ψ auszudrücken, oder auch von f und der Kombinante (Nr. 24) $\vartheta(x; y) = \varphi(x)\psi(y) - \varphi(y)\psi(x)$; umgekehrt ist eine solche Simultanform erst dann eine Komitante von $f^{(1)}$, wenn sie noch gewissen partiellen Differentialgleichungen genügt, die *Clebsch*[323]) aufgestellt und als vollständiges System (Nr. 18, Anm. 313) charakterisiert hat.

---

319) Wegen der Anwendungen s. die Memoirs von *Cayley*; *Netto*, Zeitschr. Math. Phys. 38 (1893), p. 357; 40 (1895), p. 375, sowie die Lehrbücher, bes. „Elliott". — Analoge Eigenschaften kommen den Differentialgleichungen der symmetrischen Funktionen zu, s. I B 3 b, Nr. **8**, **9**, **24**, **25**.

320) Durch die Untersuchungen von *Hilbert* (Nr. **6**) ist dagegen der arithmetische Gesichtspunkt in den Vordergrund gerückt worden.

321) Wegen der invarianten Gestaltung der Tschirnhausen-Transformation durch *Hermite* s. Nr. **7**, Anm. 147. *Brioschi* hat für die Koeffizienten der transformierten Gleichung part. Differentialgleichungen aufgestellt, Lomb. Ist. A. 1 (1858), p. 231; die Potenzsummen der Wurzeln der transf. Gl. stellt er durch simult. Invarianten von f_n und gewissen f_{n-2} dar: Par. C. R. 124 (1897), p. 661. — *Klein* bezieht die Tschirnhausen-Transf. auf ein „typisches" Koordinatensystem, s. z. B. „Ikosaeder" Abschn. 2, Kap. 2. — Im besondern setze man $z = g(x, 1) / f'(x, 1)$, so geht $f(x, 1) = f_n$ über in eine Form $F_n(z, 1)$, deren Koeffizienten Invarianten sind, falls g eine Kovariante der Ordnung $n-2$ von f ist: *Hermite*, Par. C. R. 1865; *J. Rahts*, Math. Ann. 28 (1886), p. 34. Bei „Bruno" p. 191 ist f_n selbst eine Kovariante von f (Einschränkungen bei *J. Junker*, Diss. Freiburg 1887). *Brioschi* reduziert *Hermite*'s Ergebnisse auf den Fall, dass eine Wurzel von f substituiert wird (Nr. **15**, Anm. 280), Math. Ann. 29 (1887), p. 327; Ann. di mat. (2) 16 (1888), p. 181, 329; Lond. Math. S. Proc. 20, (1889), p. 127, und normiert so die hyperelliptischen Integrale: Rom. Linc. R. (5) 4^1 (1895), p. 363.

322) J. f. Math. 71 (1870), p. 164. $\vartheta(x; y)$ ist die erzeugende Funktion R der Kombinanten von φ und ψ. *Cayley* führt die quadratische Transf. einer f_4 durch, Math. Ann. 3 (1871), p. 359 = Pap. 8, p. 398.

323) Gött. Abh. 15 (1870), p. 65. Die kubische Transf. einer f_3 (u. a.) lässt sich unmittelbar auf eine lineare zurückführen; vgl. noch *G. Torelli*, Nap. Acc. P. A. 11 (1888), p. 215; Pal. R. 2 (1888), p. 165.

Clebsch[324]) hat die T_m von f zu den S eines mehrfach ausgedehnten Raumes in Beziehung gesetzt. Seien z. B. λ_i die Wurzeln einer $f_5(\lambda, 1)$, die einer T_2: $\xi = y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 / x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 = \varphi_2 / \psi_2$ unterworfen wird. Fasst man die (y), (x) als 2 Punkte einer Ebene auf, so sind die Wurzeln ξ_i der transformierten Gleichung $f_5^{(1)}(\xi, 1) = 0$ die Schnittpunkte der Geraden $\bar{z} = \overline{(y)\,(x)}: z_k = y_k - \xi x_k (k = 0, 1, 2)$ mit den 5 Geraden $z_0 + \lambda_i z_1 + \lambda_i^2 z_2 = 0$, Tangenten der $C_2 : z_1^2 - 4 z_0 z_2 = 0$. Das letztere zeigt, warum man für das Studium der $f_5 = 0$ noch mit T_2 ausreicht. Die (linearen) S, die $f_5^{(1)}$ noch zulässt, entsprechen der Verschiebung der Punkte (y), (x) auf der Geraden $\bar{z}$, i. e. die Formen von $f^{(1)}$ sind Kombinanten (Nr. 24) von φ, ψ. Die der T_2 spezifisch angehörigen Elemente erscheinen so gesondert von dem Einfluss einer nachträglichen S. Als Anwendung erscheint bei *Clebsch* eine Übersicht über die formalen Zusammenhänge zwischen einer f_5 und ihren Resolventen, besonders der „Jerrard'schen“ Form (I B 3 f) und der Modulargleichung (II B 4 c). *L. Maurer*[325]) untersucht allgemein eindeutige rationale T von Urformen $F_m(x_1, x_2, \ldots x_n \mid a)$ einer bestimmten Ordnung m, mit Berücksichtigung der Ausartungen der F. Die F_m werden in Klassen Ω_i eingeteilt; Ω_0 umfasst alle F_m; Ω_1 die durch ein bestimmtes irreducibles System algebraischer Gleichungen zwischen den a ausgeschiedenen F_m; Ω_2 die durch ein weiteres solches System bedingten, u. s. f. Die Klasse Ω_i charakterisiert sich dadurch, dass die a (homogene) algebraische Funktionen von t arbiträren Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_t$ werden, sodass F die Gestalt $F(x \mid \lambda)$ annimmt. Die x und λ werden einer Gruppe (II A 6) von (homogenen) Transformationen T: $x_i = X_i(x' \mid p)$, $\lambda_k = L_k(\lambda' \mid p)$ unterworfen, wo die x' rational, die λ' und die „Parameter“ p algebraisch eingehen. Die T sollen eindeutig umkehrbar sein: $x' = X'(x \mid p')$, $\lambda' = L'(\lambda \mid p')$, wo die p' algebraisch von den p abhängen.

Es existieren Gruppen G von T, sodass für alle Werte der p $F(x \mid \lambda)$ übergeht in $F^{(1)}(x' \mid \lambda')$; die Gesamtheit der G führt zu einer bestimmten Klasse Ω_i und zu deren Invarianten J. Der Beweis basiert, abgesehen von Sätzen der Lie'schen Theorie, auf einem Satze von

---

324) Gött. Nachr. 1871, p. 335; Math. Ann. 4 (1871), p. 284, cf. „Clebsch-Lindemann“ 2[1], Abt. 3, Nr. 11. Wegen der inversen Transf. einer $f_5(\xi)$ in eine $g_{10}(\lambda)$ s. noch *Spottiswoode,* Rom. Linc. R. (3) 7 (1883), p. 218; Lond. Math. S. Proc. 16 (1885), p. 148; *G. Pittarelli,* Rom. Linc. R. (4) 1 (1885), p. 327, 374.

325) J. f. Math. 107 (1890), p. 89 (vgl. Anm. 35, 117). — Bez. der algebraisch-geometrischen Theorie der eindeutigen Transformationen von 2 und mehr Variabeln s. I B 1 c Nr. 23, III C 9.

Christoffel (Nr. **4**, Anm. 88). F und die X', L' genügen je einer Anzahl von d analogen charakteristischen linearen partiellen Differentialgleichungen; es lauten etwa die für F:

$$\text{(F)} \qquad \sum_1^n \Xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_1^t \Lambda_k \frac{\partial F}{\partial \lambda_k} = 0,$$

wo die Ξ nur von den x, die Λ nur von den λ abhängen. Die J von Ω_i sind bestimmt durch die d Gleichungen $\sum_1^t \Lambda_k \frac{\partial J}{\partial \lambda_k} = 0$; sind d' von ihnen „wesentlich", so hat Ω_i $t - d'$ „unabhängige" J. Jede von $F(x \mid \lambda)$ verschiedene Lösung von (F) ist als „Kovariante" von F anzusehen. Demnach bleibt der wesentliche Charakter der n^2 Differentialgleichungen *Aronhold*'s (Nr. **18**) für Ω_0 auch für die Ω_i erhalten.

20. Die erweiterte projektive Gruppe. Reciprokanten und Differentialinvarianten[326]). Bedeuten $y_1, y_2, y_3, \ldots$ die Ableitungen einer Funktion $y(x)$, so geht *Sylvester*[327]) aus von rationalen Funktionen $R(y_1, y_2, y_3, \ldots)$, die sich nach Vertauschung von y mit x der Form nach nur um einen, in den y_i rationalen Faktor ändern. Das ist der ursprüngliche Begriff der (binären) „Reciprokante" R. Ist R ganz-

---

326) Die Untersuchungen dieser Nr. lassen sich auch auffassen als Spezialfälle der Lie'schen Theorie der erweiterten Gruppen oder der Differentialinvarianten kontinuierlicher endlicher (speziell projektiver) Gruppen (vgl. II A 6; „Lie-Scheffers" 1893, Kap. 23, ausführlicher bei *A. Stöckert*, Progr. Chemnitz, Realgymn. 1895); ein Teilgebiet dieser Theorie bilden wiederum die Invarianten linearer Differentialgleichungen (II A 4), auf die am Schluss dieser Nr. hingewiesen wird. Auf der andern Seite beanspruchen die hier zu besprechenden Arbeiten von formentheoretischem Gesichtspunkt aus ein selbständiges Interesse; sie erfordern spezifische, wesentlich algebraische Methoden und erscheinen ihrerseits als Verallgemeinerungen fundamentaler Sätze der Theorie der Invarianten und Seminvarianten (Nr. **23**). Hier ist *G. Halphen* als Hauptvorläufer von *Sylvester* zu bezeichnen: J. de math. (3) 2 (1876), p. 257, 371; Thèse, Paris 1878; J. Éc. Pol. cah. 47 (1880); Par. Sav. [Étr.] (2) 28^1 (1880—83); Acta math. 3 (1884), p. 325. *H.* macht bes. von dem Satze Gebrauch, dass eine Differentialinvariante durch Differ. nach der unabh. Var. x wieder in eine solche übergeht [Anm. 282, 329]; cf. *Sylvester,* Amer. J. 9 (1887), p. 297; *Elliott,* Mess. (2) 19 (1889), p. 7. Die Anwendungen *Halphen*'s auf lineare Differentialgleichungen und Raumkurven hat *L. Berzolari* verallgemeinert: Ann. di mat. (2) 26 (1897), p. 1. — Im übrigen vgl. zur ganzen Nr. das Handbuch von *L. Schlesinger* über lineare Differentialgleichungen, Leipzig 1895/97.

327) 1885: Mess. 15, p. 74, 88; Par. C. R. 101, p. 1042, 1110, 1225, 1460. Bearb. von *J. Hammond*: Amer. J. of Math. 8 (1886), p. 196; 9, p. 1; ib. 9 (1887), p. 113, 297; 10 (1887), p. 1.

rational, $= G(y_1, y_2, y_3, \ldots)$, so ist der Faktor $= \pm y_1^\mu$ (μ ganz); je nach dem Vorzeichen ist der „Charakter" von G gerade oder ungerade, für $\mu = 0$ heisst G „absolut". Ist G homogen, $= F(y_1, y_2, y_3, \ldots)$, so ist F auch isobar; legt man y_k das Gewicht $k - 2$ bei, und ist i der Grad, w das Gewicht von F, so wird $\mu = 3i + w$. F ändert sich auch bei den S der „Translationsgruppe" $x' = x + a$, $y' = y + b$ nur um einen, in y_1 linearen Faktor, und heisst „Translationsreciprokante". — Ist F absolut, so ist $\frac{dF}{dx}$ wieder eine Reciprokante; ist F nicht absolut, so ist es doch $y_1^{-\frac{\mu}{2}} F$. Das führt zu einem linearen Differentialoperator ξ, der aus F unendlich viele solcher Formen erzeugt. Ist F, wie $\frac{\partial F}{\partial y_1}$ eine Reciprokante, so wird F zu einer „orthogonalen",[327a] i. e. F bleibt der orthogonalen Gruppe (Nr. **3**) gegenüber invariant.

$\frac{\partial F}{\partial y_1} \equiv 0$ ist das Kriterium für eine „affine" oder „reine" Reciprokante — im Gegensatz zu den „gemischten" — die bei der affinen Gruppe $x' = ax + by + c$, $y' = dx + ey + f$ invariant bleibt. Zwischen den reinen Reciprokanten und den (binären) Seminvarianten (Nr. **23**) bestehen Analogien. Beide genügen je einer charakteristischen linearen partiellen Differentialgleichung[328]; für beide existieren ähnliche „Generatoren", die Formen derselben Art erzeugen; der Cayley'schen Formel $(w : i, j) - (w - 1 : i, j)$ (Nr. **9**) entspricht hier $(w : i, j) - (w - 1 : i + 1, j)$, wo $j + 2$ der höchste Index eines y_k ist; für beide hat man ähnliche „associierte Systeme" (Nr. **7**) oder „Protomorphe", nur dass deren Grad bei den reinen Reciprokanten beliebig hoch steigt, während er bei den Seminvarianten nur 2 oder 3 zu sein braucht. — Während aber die rationalen Faktoren einer zerfallenden Seminvariante wieder Seminvarianten sind, trifft das bei den reinen Reciprokanten nicht zu. Bei gegebenem i, aber unbeschränktem j, giebt es nur eine endliche Anzahl reiner Reciprokanten, bei Seminvarianten nicht, u. s. w. — Ist F zugleich reine Reciprokante und Seminvariante, so wird F zur „projektiven Reciprokante" oder „Prinzipiante" — nach *G. Halphen*[329] „Differential-

---

327a) Vgl. *H. Burkhardt*, Math. Ann. 43 (1893), p. 210 (§ 9).

328) Berechnungen bei *Cayley*, Quart. J. 26 (1872), p. 169; ib. 26 (1893), p. 195; Amer. J. of Math. 15, p. 75; *E. B. Elliott*, Lond. Math. S. Proc. 23 (1892), p. 298; 24 (1894), p. 21.

329) Vgl. Anm. 326. *Halphen* untersucht auch (J. Éc. Pol. 47 (1880), p. 257, 371) ternäre Differentialinvarianten bez. zweier abhängiger Variablen.

invariante" bez. x —, ist also invariant bei der allgemeinen projektiven Gruppe in x, y. Es lässt sich eine Kette $a_0, a_1, a_2, \ldots$ von reinen Reciprokanten bilden, derart, dass nach Bildung der Protomorphe für die Seminvarianten der Reihe $a_0, a_1, a_2, \ldots$ (Nr. **23**) jede ganz-rationale Funktion der Protomorphe, durch eine passende Potenz von y_2 dividiert, eine Differentialinvariante wird, und umgekehrt. — *Sylvester* begründet so eine systematische Integration von gleich Null gesetzten Differentialinvarianten, wie sie die Geometrie[330]) oft darbietet.

P. A. Mac Mahon[331]) hat alle bei den binären Invarianten und Reciprokanten vorkommenden linear-partiellen Differentiationsprozesse in einem Symbol zusammengefasst, in das 4 arbiträre ganze Zahlen eingehen; alle diese Prozesse bilden ein „vollständiges System".

R. Perrin[332]) hat seine Residuentheorie (Nr. 8, **23**) auf die Reciprokanten übertragen.

E. B. Elliott[333]) hat die Reciprokanten ausgedehnt auf mehrere Funktionen $y, z, \ldots$ von x, mit Beschränkung auf cyklische Vertauschung der $x, y, z, \ldots$, und hat allgemein die ternär-projektiven[334]) Reciprokanten untersucht, *Forsyth*[335]) die letzteren dagegen für den Fall, dass zwei abhängige Variable linear transformiert werden. *Mac Mahon*[336]) stellt für die ersten 6 Grade die „perpetuierenden" reinen Reciprokanten auf — die sich nicht als Linearformen anderer von geringerem Grad und Gewicht darstellen lassen. — *C. Leudesdorf*[337]) giebt ein Kriterium dafür an, dass eine vorgelegte Funktion von

---

330) Z. B. die Aufstellung der Differentialgleichung einer $C_3\,(C_n)$, die *Halphen* nur auf indirektem Wege gelingt.

331) Lond. Math. S. Proc. 18 (1887), p. 61; vgl. *Cayley*, Quart. J. 26 (1893), p. 195; ib. 19 (1888), p. 112 wird von *Mac Mahon* eine Verbindung mit den symmetrischen Funktionen hergestellt [I B 3 b, Nr. **10**]. Ternäre Analoga des Prozesses bes. bei *Elliott*, Lond. Trans. 181 (1890), p. 19. Eine allgemeine Transformationstheorie solcher Differentialoperatoren entwickelt *Elliott*, Lond. Math. S. Proc. 29 (1898), p. 439.

332) Par. C. R. 102 (1886), p. 351.

333) Lond. Math. S. Proc. 17 (1886), p. 172; 18 (1887), p. 142; 19 (1888), p. 6, 377; 20 (1889), p. 131. Für die reinen tern. Recipr. werden 6 charakt. Differentialgleichungen aufgestellt (1887), und deren Bedeutung klargelegt.

334) Lond. Math. S. Proc. 20 (1889), p. 131.

335) Lond. Trans. 180 (1889), p. 71; *Hammond*, Lond. Math. S. Proc. 17 (1886), p. 128 verwertet gewisse integrable Recipr. für die Geometrie.

336) Lond. Math. S. Proc. 17 (1886), p. 139 [Anm. 249].

337) Lond. Math. S. Proc. 17 (1886), p. 197, 329; 18 (1887), p. 235; cf. *J. Griffiths*, Ed. Times 51 (1889), p. 137.

$y_1, y_2, \ldots$ eine Reciprokante ist. — *A. Berry*[338]) zieht „simultane" Reciprokanten in Betracht, mit Berücksichtigung solcher, die die Variabeln selbst noch enthalten.

L. J. Rogers[339]) bildet „homographische" Reciprokanten i. e. Differentialinvarianten der quadratischen Transformation T_2: $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$, $y' = \frac{ey+f}{gy+h}$, *A. R. Forsyth*[340]) stellt ein „volles System" für sie auf. — Ist $yu_1 = u_2$, wo u_1, u_2 2 Partikularlösungen einer $D_n(x, y) = 0$, und differenziert man $(2n-1)$-mal nach x, und eliminiert die $u_2^{(i)}$, so resultieren n lineare homogene Relationen in den $u_1^{(k)}$. Die Resultante des Systems, eine „Quotientenableitung"[341]), ist eine homographische Reciprokante, denn sie ändert sich bei der bez. T_2 nur um den Faktor $\left(\frac{dy'}{dy}\right)^n \left(\frac{dx'}{dx}\right)^{-n^2}$. So entsteht aus $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$ der „Schwarz'sche Ausdruck" $3y_2{}^2 - 2y_1 y_3$. — Allgemeiner übt *Forsyth*[342]) auf eine $D_n(x, y \mid a) = 0$ die Transformationen aus, die deren Ordnung und linearen Charakter nicht ändern d. s. eine S der abhängigen y, und eine arbiträre T der unabhängigen Variabeln x. *Forsyth* frägt nach den algebraischen Funktionen der $y, y_1, y_2, \ldots$ und der a, die nach der Transformation von $D_n = 0$ nur einen Faktor, eine Potenz von $\frac{dx'}{dx}$, annehmen. Aus einer endlichen Anzahl solcher Funktionen gehen alle übrigen durch rein algebraische Prozesse hervor[343]).

21. Projektive Invarianten der Krümmungstheorie[344]). *Voss*[345]) geht davon aus, dass sich der Inhalt T eines Tetraeders bei Kollineation nur um einen einfachen Faktor ändert. Auf einer Fläche

338) Quart. J. 22 (1888), p. 260; 23 (1889), p. 289.

339) Lond. Math. S. Proc. 17 (1886), p. 220, 344; 18 (1887), p. 130; 20 (1889), p. 161.

340) Mess. (2) 17 (1888), p. 154.

341) Lond. Trans. 1888, p. 377. Der Name „Schwarz'scher Ausdruck" stammt von *Cayley*, Cambr. Trans. 13 (1883), p. 6 = Pap. 11, p. 149.

342) Lond. Trans. 1889, p. 71 (dort frühere Litt.). Vgl. die systematische Darst. in *Schlesinger*'s „Linearen Differentialgleichungen".

343) Vgl. *C. Platts*, Quart. J. 25 (1891), p. 300. Wegen besonderer Fälle bei früheren Autoren s. *Forsyth* l. c.

344) Man vgl. noch *G. Darboux* „Surfaces", Paris 1887/89 1. 2, sowie die Anwendungen, die *Elliott* von den Reciprokanten im Sinne des Textes macht, Lond. Math. S. Proc. 17 (1886), p. 172. Die Grössen α, β des Textes sind die beiden Invarianten der „Laplace'schen" Differentialgleichung, s. *Darboux* l. c. 2, § 23.

345) Math. Ann. 39 (1891), p. 179. *Voss* betrachtet auch analog beliebige Transformationen.

(III D 3) $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ schneiden sich je 2 benachbarte Linien u_0, $u_0 + h$; v_0, $v_0 + k$ in 4 Ecken $P = (u_0, v_0)$, $P_1, P_2, P_3 = (u_0 + h, v_0 + k)$ eines Tetraeders T, während P, P_1, P_2 ein Parallelogramm Π bestimmen. P_3 soll sich P längs einer analytischen Kurve (III D 1) $u = u_0 + h' t + \cdots$, $v = v_0 + k' t + \cdots$ nähern.

Dann tritt $\lim\limits_{t=0} \mathsf{T} / \Pi^2$ bei ausgezeichneten Koordinatensystemen (u, v) zu den Krümmungsverhältnissen der Fläche in Beziehung; sind z. B. die $u =$ const. Haupttangentenkurven, so wird der Grenzwert $= \sqrt{-K}$, wo K das Krümmungsmass in P ist (III D 3, 6). — Es sei das Linienelement $\overline{PP_3} = ds = \sqrt{e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2}$, ferner seien E, F, G die „Fundamentalgrössen 2. Ordnung“, und $H = eg - f^2$ (III D 6). Nimmt man (u, v) als ein „konjugiertes“ System an (für das $F \equiv 0$), so wird $\lim\limits_{t=0} \frac{\mathsf{T}}{\Pi^2 ds^2} = \frac{1}{72\sqrt{H}} \frac{E\alpha h'^2 + G\beta k'^2}{eh'^2 + 2fh'k' + gk'^2}$, wo die α, β nur von e, f, g abhängen. — Übt man eine Kollineation aus mit dem Nenner $t(x, y, z)$ und dem Modul Δ, so sind α, β absolute Invarianten, während E, F, G übergehen in $E' = \frac{\lambda}{t} E$, $F' = \frac{\lambda}{t} F$, $G' = \frac{\lambda}{t} G$, wo λ ein nur von den ersten Differentialquotienten der Fläche algebraisch abhängender Ausdruck ist; endlich H in $H' = \frac{\Delta^2}{\lambda^2 t^6} H$, K' in $\frac{(\lambda t)^4}{\Delta^2} K$. Hieraus fliessen zahlreiche geometrische Anwendungen, u. a. der Satz von *R. Mehmke* [346]): „Berühren sich 2 Flächen in P, so ist der Quotient $\frac{K_1}{K_2}$ der Krümmungsmasse in P eine absolute (projektive) Invariante.

22. Differentialformen und Differentialparameter der Flächentheorie [III D 3]. Die Flächentheorie wird beherrscht von der Transformation [347]) der beiden Differentialformen (Nr. **21**)

346) Zeitschr. f. Math. Phys. 36 (1891), p. 56; vgl. *E. Wölffing*, Zeitschr. Math. Phys. 40 (1895), p. 31; *C. Segre*, Rom. Linc. R. (5) 6^2 (1897), p. 168. Analoge Sätze für allgemeine Punkttransformationen resp. Berührungstransformationen (II A 6) stellt *Mehmke* auf ib. 36 (1891), p. 206; 31 (1892), p. 186; 38 (1894), p. 7. *Mehmke* bedient sich zur Ableitung seiner Sätze der Grassmann'schen Methoden. — Verallgemeinerungen solcher Sätze finden sich bei *M. Rabut*, Par. C. R. 115 (1892), p. 926; J. Éc. Pol. (2) 4 (1897), p. 137.

347) Wegen weiterer Ausführungen sei verwiesen auf *J. Knoblauch*, „Flächentheorie“, Leipzig 1888; *G. Darboux*, „Surfaces“, Paris, 3 (1894), 4 (1896); *L. Bianchi*, „Superficie“, Pisa 1894 (deutsch v. *M. Lucat*, Leipzig 1896—99), sowie insbesondere auf *G. Ricci*, „Superficie“, Padova 1898. — *Knoblauch* untersucht analog kubische Differentialformen, J. f. Math. 103 (1888), p. 25; er trennt systematisch in der Theorie der Differentialparameter das Invariante von den

$$ds^2 = A = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,$$
$$\frac{ds^2}{\varrho} = B = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

(wo ϱ der Krümmungsradius). Statt der u, v werden eindeutige und eindeutig umkehrbare, im übrigen arbiträre[348]) Funktionen u', v' der u, v eingeführt. Daher transformieren sich die du, dv linear:

$$du' = \frac{\partial u'}{\partial u} du + \frac{\partial u'}{\partial v} dv, \quad dv' = \frac{\partial v'}{\partial u} du + \frac{\partial v'}{\partial v} dv;$$

der Modul sei Δ. Geht hierdurch eine quadratische Form

$$\mathsf{A} = \alpha_{11} du^2 + 2\alpha_{12} du\,dv + \alpha_{22} dv^2$$

über in A', so geschieht das Analoge für die bilineare Form

$$\mathsf{A}_1 = \alpha_{11}\, du\,\delta u + \alpha_{12}(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \alpha_{22}\, dv\,\delta v,$$

wo die du, dv; $\delta u, \delta v$ auch durch zu den du, dv cogrediente Grössen ersetzt werden dürfen (Nr. **16**). Für $\alpha = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2$ ist $\alpha = \Delta^2 \alpha'$, oder $\sqrt{\alpha} = \Delta \sqrt{\alpha'}$; ist also $\chi(u, v)$ irgend eine Funktion der u, v, so erkennt man mit *Boole* (l. c.) sofort, dass $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\partial \chi}{\partial v}, -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\partial \chi}{\partial u}$ mit du, dv cogredient sind, also in die Identität $\mathsf{A}_1 = \mathsf{A}_1'$ für die $\delta u, \delta v$ substituiert werden können, wodurch sie die Gestalt $U du + V dv = U' du' + V' dv'$ annimmt, i. e. $U du + V dv$ ist eine lineare Kovariante von A. Differentiation führt zu der Invariante

$$\Delta_\alpha^2(\chi) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u} \right),$$

und ebenso, wenn ω eine zweite Funktion der u, v, und du, dv durch $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\partial \omega}{\partial v}, -\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\partial \omega}{\partial u}$ ersetzt werden, zu der Invariante $\Delta_\alpha(\chi, \omega)$, die speziell für $\chi = \omega$ in $\Delta_\alpha{}^1(\chi)$ übergehe. Für $\mathsf{A} = A$ werden $\Delta^1(\chi)$, $\Delta^2(\chi)$, $\Delta(\chi, \omega)$ *E. Beltrami*'s[349]) „Differentialparameter 1. und 2. Ordnung von χ" und „Zwischenparameter von χ, ω".

Koordinatenbesonderheiten, ib. 111 (1893), p. 329; er untersucht im Sinne des Textes „Biegungskovarianten": das sind Ausdrücke, die sich aus den Ableitungen willkürlicher Funktionen von u, v und aus den e, f, g und deren Ableitungen zusammensetzen, und die bei Einführung neuer Variablen in die formell gleichgebildeten übergehen, ib. 111 (1893), p. 277; 113 (1894), p. 58; 115 (1895), p. 185; vgl. *P. Stäckel*, ib. 113 (1894), p. 58.

348) Die Gruppe ist nach *Lie* die „unendliche" (II A 6), s. Leipz. Ber. 1891, p. 316, 353.

349) Bologna Mem. (2) 8 (1868), p. 549; man vgl. die allgemeinere Auffassung bei *Lie-Scheffers*, Kont. Transformationsgruppen, Kap. 22. — Die Transformation derartiger Differentialausdrücke bei Einführung neuer Veränderlicher

Ist n der „Multiplikator" von A i. e. $nA = dp\,dq$, so berechnet sich K (Nr. **21**) zu $\frac{1}{2}\Delta \lg n$. Die beiden absoluten Simultaninvarianten von A, B hängen direkt mit den „Hauptkrümmungen" ϱ_1, ϱ_2 zusammen, insofern

$$H = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{eG - 2fF + Eg}{eg - f^2}, \quad \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = K = \frac{EG - F^2}{eg - f^2}.$$

Die Funktionaldeterminante von A, B, dividiert durch $4\sqrt{eg - f^2}$, ist die „Krümmungslinienform" Γ; die Algebra liefert die Syzygie

$$\Gamma^2 = -KA^2 + HAB - B^2.$$

Das Quadrat des Linienelements $d\sigma$ auf der „*Gauss*'schen Kugel" ist eine Kovariante von A, B: $d\sigma^2 = -KA + HB$.

23. Seminvarianten. Bei *Cayley*[350]) erscheint eine binäre Kovariante c durch ihren ersten (resp. letzten) Koeffizienten c_0 — leading term, source, Leitglied, Quelle — bestimmt, insofern aus c_0 durch Iteration eines Differentiationsprozesses die weiteren Koeffizienten von c hervorgehen. c_0 hat nur noch *einer* charakteristischen Differentialgleichung zu genügen (Nr. **2**, **9**, **15**, **18**). *M. Roberts*[351]) hat hierauf eine ganze Theorie gegründet und im Besondern auf die f_5 angewendet; da das Leitglied eines Produktes von Kovarianten das Produkt der Leitglieder ist, so kann jede Syzygie zwischen Kovarianten (Nr. **8**) durch eine solche zwischen deren Leitgliedern unzweideutig ersetzt werden. — Analoges gilt vom Leitgliede C_0 einer Komitante C von Urformen F.

Eine allgemeinere Auffassung liegt bei *S. Lie*[352]) vor. Danach erscheint eine „Seminvariante" C_0 von Urformen F als relative Invariante einer Untergruppe der allgemeinen projektiven Gruppe (Nr. **2**). Es liege eine Reihe von binären Urformen $f_m(x \mid a)$, $g_n(x \mid b), \ldots$ vor, so beschränkt man sich von vornherein auf Formen c_0, die in den Reihen

behandeln nach formentheoretischen Prinzipien *Christoffel*, J. f. Math. 70 (1869), p. 46 und bes. *Gundelfinger*, ib. 85 (1878), p. 295, s. II A 2, Nr. **47**.

350) I. Memoir. = Pap. 2, p. 244.

351) Quart. J. 4 (1861), p. 168, 324; die f_5 in Ann. di mat. (1) 3 (1860), p. 340.

352) *Lie-Scheffers*, Kont. Transformationsgruppen, Leipzig 1893, Kap. 23; vgl. auch *Klein*, Erlanger Programm 1872. Zu jeder proj. Untergruppe gehört eine specifische Invariantentheorie (s. Anm. 12, Schluss; Anm. 353). Tabellen solcher Untergruppen in endlicher Form nach Tabellen von *Lie*, der die infin. Variationen der Gruppen aufstellt (s. „Lie-Engel" 3; „Lie-Scheffers") bei *W. Fr. Meyer*, Chic. Congr. P. 1896 (1893), p. 187; vgl. die geometrischen Ableitungen dort und bei *H. B. Newson*, Kans. U. Q. 7 (1898), p. 125. Ein Buch von *Newson* über diesen Gegenstand ist in nahe Aussicht gestellt worden.

der $a, b, \ldots$ je homogen und isobar sind (Nr. **18**), sich nämlich bei Ausübung einer S der Gruppe (A) $x_1 = \alpha x_1'$, $x_2 = \delta x_2'$ „invariant verhalten" i. e. nur um eine (ganzzahlige)[353]) Potenz des Moduls $\alpha\delta$ ändern. c_0 wird zur Seminvariante, wenn es auch gegenüber der Gruppe (B) $x_1 = x_1' + \beta x_2'$, $x_2 = x_2'$ invariant bleibt, und genügt dann der charakteristischen Gleichung[354])

$$D \equiv \sum_i i a_{i-1} \frac{\partial}{\partial a_i} + \sum_k k b_{k-1} \frac{\partial}{\partial b_k} + \cdots = 0.$$

Die Ausdehnung auf höhere Gebiete stösst auf keine prinzipiellen Schwierigkeiten (Nr. **18**). c_0 ist, wie *Sylvester*[355]) bemerkt, zugleich Leitglied einer Kovariante von Urformen $f_{m'}, g_{n'}, \cdots$ $(m' \geqq m, n' \geqq n, \cdots)$, die mit $f_m, g_n, \cdots$ die ersten $(m+1), (n+1), \cdots$ Koeffizienten gemein haben; c_0 erscheint so als Seminvariante der beliebig fortsetzbaren „Elementreihen" $(a), (b), \cdots$. Wie $D = 0$ zeigt, wird, wenn man $a_0 = b_0 = \cdots = 0$ setzt, der „Rest" der Seminvariante eine solche der neuen Reihe $a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \cdots; b_1, \frac{b_2}{2}, \frac{b_3}{3}, \cdots$ etc.; das erleichtert die Aufstellung der Grundformen und ihrer Syzygien (Nr. **8**, **9**).

So bilden nach *R. Perrin*[356]) die Leitglieder der Grundformen einer $f_n(x \mid a)$, vermehrt um eine gewisse „Restform" der a, ein volles System (Nr. **6**) der Restformen einer f_{n+1}. — *Sylvester*[357]) begründet die Auffassung von c_0 als binärer Funktion von a_n: in diesem Sinne ist jede Kovariante von Leitgliedern wieder ein Leitglied. c_0 besitzt selbst ein Leitglied — germ, Keim —, den Koeffizienten der höchsten Potenz von a_n; *Sylvester* und *Perrin* wenden das auf die Struktur von vollen Systemen und Syzygien an (Nr. **6**, **8**). *M. d'Ocagne*[358]) denkt sich symbolisch a_0 als Funktion einer Variabeln ξ, und $a_1, a_2, \ldots$

---

353) Bei komplizierteren Gruppen, z. B. bei der Gruppe der Inversionen, kann der Faktor auch von anderer Beschaffenheit sein: vgl. *Klein* l. c.; *E. Study,* Math. Ann. 49 (1897), p. 497, wo das „Apollonische" Problem formentheoretisch untersucht wird [Nr. **2**, Anm. 12].

354) *Cayley* l. c. vgl. Nr. **9**, Anm. 178; Nr. **18**.

355) Amer. J. of Math. 5 (1882), p. 79; (1883), p. 97. Insbesondere werden die Perpetuanten [Nr. **12**, Anm. 235, 249] untersucht. Tabellen bei *Cayley,* Quart. J. 19 (1883), p. 131 = Pap. 12, p. 22.

356) Par. Soc. math. B. 11 (1873), p. 88. *P.* sagt „péninvariant" für „seminvariant".

357) l. c. Weitere Ausbildung bei *J. Petersen,* Tidsskr. (4) 4 (1880), p. 177; 5 (1881), p. 33; (5) 6 (1888), p. 152.

358) Par. C. R. 102 (1886), p. 916; Brux. S. sc. 10 B, p. 75; 11 (1887), p. 314. Verwandt sind die Untersuchungen von *Bruno* [Nr. **15**, Anm. 279] und *Mac Mahon* [Nr. **12**, Anm. 246].

als die succ. Ableitungen von a_0. Dann bilden die $\frac{d^i l a_0}{d\xi^i}$ $(i = 1, 2, \cdots n-1)$ ein associiertes (Nr. 7) System von Seminvarianten; der Zusammenhang mit *Hermite*'s System wird bei *M. d'Ocagne*[359]) und *E. Cesàro*[360]) klargelegt. $\frac{d}{d\xi}$, auf eine Funktion der a ausgeübt, ist nur eine symbolische Abkürzung für den Prozess $\sum a_{i+1} \frac{\partial}{\partial a_i}$; in diesem Sinne haben[361]) *d'Ocagne, Perrin, J. Deruyts, S. Roberts* eine Reihe solcher „Differentialgeneratoren" konstruiert. *Deruyts*[361]) hat die Verwandtschaft des Prozesses $\sum a_{i+1} \frac{\partial}{\partial a_i} + \sum b_{k+1} \frac{\partial}{\partial b_k} + \cdots$ mit *Cayley*'s D- und Δ-Prozess verfolgt.

Deruyts[362]) hat aber weiter allgemein die Theorie der Seminvarianten von Urformen F mit (cogredienten) Reihen von n Variabeln begründet.

Er setzt die S von $x_1, x_2, \cdots x_n$ aus 2 Reihen einfacherer zusammen von den Typen

$$(S_h)\colon x_h = \varepsilon X_h,\ x_k = X_k \quad \text{und} \quad (S_{h,l})\colon x_l = X_l + \eta X_h,\ x_k = X_k,$$

und legt Formen Φ der Koeffizienten und Variabelnreihen zu Grunde, die sich gegenüber S_h, $S_{h,l}$ nur um eine Potenz des Moduls ε resp. 1 ändern. Die Forderung bez. der S_h sagt aus, dass Φ „hinsichtlich der einzelnen[363]) Indices $1, 2, \cdots n$ isobar" — und damit auch homogen —

359) Par. Soc. math. B. 16 (1888), p. 183; Brux. S. sc. 12 B (1888), p. 185.

360) Nouv. Ann. (3) 7 (1888), p. 464.

361) *M. d'Ocagne*, Par. C. R. 104 (1887), p. 961, 1364; *Cayley*, Quart. J. 20 (1885), p. 212 = Pap. 12, p. 326; *Mac Mahon*, ib. p. 362; Amer. J. of Math. 8 (1885), p. 1; *R. Perrin*, Par. C. R. 104 (1887), p. 1097, 1258; *Deruyts*, Brux. Bull. 13 (1887), p. 226; *S. Roberts*, Lond. Math. S. Proc. 21 (1889), p. 219.

362) 1887—1891, zusammengefasst in der Théorie gén. des formes alg., Brux. 1891. Ergänzungen, in denen *D.* die Reduktion der invarianten Funktionen weiterführt, finden sich Brux. Bull. (3) 26 (1893), p. 258; 28 (1894), p. 157; Brux. Mém. 51 (1893), 20 S.; Brux. Mém. Sav. Ét. 52 (1894), p. 1. *Kronecker* [Nr. 18, Anm. 318] ersetzt auch die allgemeine S durch eine Reihe spezieller, deren jeder eine Differentialgleichung für die Invarianten entspricht; *Deruyts* verwendet nur einen Teil der speziellen S für die Differentialgleichungen, während der Rest durch arithmetische Gleichheiten zwischen den Gewichten ersetzt wird. — *C. le Paige* untersucht die Seminvarianten für Formen $f_1(x \mid y \mid z \mid \ldots)$ bei unabhängigen S, Brux. Bull. (3) 2 (1881), p. 40 [Nr. 2, Anm. 30].

363) So schreibt sich eine C_4:

$$x_0^4 a_{400} + x_1^4 a_{040} + x_2^4 a_{004} + 4 x_0^3 x_1 a_{310} + \cdots,$$

dagegen nach der üblichen Weise:

$$x_0^4 a_{0000} + x_1^4 a_{1111} + x_2^4 a_{2222} + 4 x_0^3 x_1 a_{0001} + \cdots.$$

wird. Sei etwa die Urform $C_n = \sum a_{ikl} x_1^i x_2^k x_3^l$, so heisst Φ, ein Aggregat von Produkten $\prod a_{ikl}^{\alpha_{ikl}}$, „bez. der Indices 1, 2, 3 isobar", wenn $\sum\limits_i i\alpha_{ikl}$, $\sum\limits_k k\alpha_{ikl}$, $\sum\limits_l l\alpha_{ikl}$ je einen konstanten Wert — das „Gewicht" π_1, π_2, π_3 — besitzt; Φ ändert sich bei Anwendung von S_h um ε^{π_h}. Die $S_{h,l}$ lassen sich auf $n-1$ solche: $S_{i,i+1}$ $(i = 1, 2, \cdots n-1)$ beschränken; das Kriterium für die Invarianz von Φ gegenüber $S_{i,i+1}$ ist, dass Φ einer linearen partiellen Differentialgleichung[364]) $[i, i+1] = 0$ genügt. „Seminvariante Funktion" ist Φ bei Erfülltsein von $[i, i+1] = 0$ $(i = 1, 2, \cdots n-1)$, speziell „Seminvariante", wenn sie von den Variabeln frei ist; für $\pi_1 = \pi_2 = \cdots = \pi_n$ wird Φ zur Komitante (Nr. **2**). Die *Clebsch-Aronhold*'sche Symbolik (Nr. **12**) wird auf seminvariante Funktionen Φ übertragen, wobei eine in den einzelnen Symbolen symmetrische — „kanonische" — Gestalt bevorzugt wird. Φ schreibt sich so als Summe von Produkten $\delta\delta' a_x$, wo die δ, δ' Determinanten sind, die aus den n ersten Kolonnen des Schemas der (symbolischen) Koeffizienten, resp. aus den n letzten Kolonnen des Variabelnschemas entnommen werden. Der *Aronhold*'sche Prozess (Nr. **13**) wird zugleich auf die Koeffizientensymbole und die Variabelnreihen ausgeübt. Das „Leitglied" einer Komitante, die n Variabelnreihen zu den Ordnungen $\pi_1, \pi_2, \cdots \pi_n$ enthält, ist eine Seminvariante von den Gewichten $\pi_1, \pi_2, \cdots \pi_n$, und umgekehrt —. Die seminvariante Funktion Φ ist $\delta_n'^{\pi_n}\chi$, wo δ_n' die Determinante der Variabeln ist; diese „primären Kovarianten"[365]) χ, der Kern der Theorie, sind allseitig isobare Formen von $n-1$ Variabelnreihen, die den $n-2$ Gleichungen $[i, i+1] = 0$ $(i = 1, 2, \cdots n-2)$ genügen. So ergiebt sich *Capelli*'s Hauptsatz über Reihenentwicklungen (Nr. **17**); weiter, dass die χ ein volles System besitzen (Nr. **6**); ferner Verallgemeinerungen von *Sylvester*'s „gegen-

Dieser Begriff des Isobarismus ist die ersichtliche Verallgemeinerung des gewöhnlichen, wenn die Gewichte einander gleich sind [Nr. **18**].

364) Die $n-1$ Gleichungen $[i, i+1] = 0$ für eine isobare Form ziehen die übrigen $[h, l] = 0$ $(h < l)$ nach sich. Besondere Fälle dieser Gleichungen schon bei *J. B. Mathews,* Quart. J. 25 (1891), p. 127, der sich auf einen Hülfssatz von *Sylvester* stützt, Par. C. R. 98 (1884), p. 779, 858. Vgl. I B 3 b, Nr. 8.

Eine rationale seminvariante Funktion ist, wie bei den gewöhnlichen Invarianten [Nr. **2**], als Quotient zweier ganzer seminvarianter Funktionen darstellbar: *Hilbert,* Math. Ann. 36 (1890), p. 473; vgl. *G. Gallucci,* Gi. di mat. 35 (1897), p. 206.

365) Diese finden sich in spezieller Form schon bei *Capelli,* vgl. Nr. **17**, Anm. 300. Wegen der Anwendung der χ auf abzählende Fragen s. Nr. **9**, Anm. 192, 193.

seitiger Differentiation“ (Nr. **16**) u. a. Die χ bleiben auch anwendbar bei „partikulären“[366]) i. e. invariantiv ausgearteten Urformen.

24. Kombinanten[367]) **und Apolarität.** Sind $F_m^{(1)}, F_m^{(2)}, \cdots F_m^{(k)}$ Urformen in n Variabeln $x_1, x_2, \cdots x_n$, so wird eine Komitante nach *J. Sylvester*[368]) zur „Kombinante“, wenn sie sich auch gegenüber einer S der F invariant verhält; sie hängt nur von den Determinanten gleichstelliger Koeffizienten der F ab und genügt daher noch spezifischen Differentialgleichungen[369]). So ist die Resultante[369a]) (Nr. **25**) von Formen gleicher Ordnung, allgemeiner die Funktionaldeterminante von n $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$, eine Kombinante.

Der Begriff der Kombinante wird von *Sylvester*[370]) auf Urformen G ungleicher Ordnung ausgedehnt — sie heisst nach *H. S. White*[371]) dann besser „Semikombinante“ —: man multipliziere die G mit Hülfsformen niedrigster Ordnung, bis man zu Urformen F gleicher Ordnung gelangt, und greife dann die Kombinanten der F heraus, die von den Koeffizienten der Hülfsformen unabhängig sind.

Bei *Gordan*[372]) und *E. Stroh*[373]) erscheinen die Kombinanten der $F_m^{(i)}$ als die Komitanten der einen Urform $F = \sum u_i F_m^{(i)}$ bei unabhängigen

366) Brux. Bull. (3) 23 (1892), p. 152. Vgl. *Maurer*, Nr. **19**, Anm. 325. „Study“ 2 § 10 ersetzt solche „invarianten Gleichungssysteme“ beim Äquivalenzproblem durch eine Reihe verschwindender Invarianten und identisch verschwindender Kovarianten.

367) Vgl. für diese Nr., auch wegen weiterer Nomenklatur und früherer Litteratur, *W. Fr. Meyer*, Apolarität und rationale Kurven, Tübingen 1883 (Litteraturverzeichnis am Schluss), sowie „Inv.-Ber.“ II D 6. Zur Begründung der Theorie s. noch *Clifford*, Lond. Math. S. Proc. 2 (1868), p. 116 = Pap. p. 115; *Darboux*, Bull. sci. math. 1 (1870), p. 348.

368) Cambr. Dubl. math. J. 8 (1853), p. 63, 256.

369) *Sylvester*, l. c., p. 257; vgl. *E. Betti*, Ann. di mat. (1) 1 (1858), p. 344 [Nr. **18**].

369a) Die Kombinanteneigenschaft der Resultante, auch höheren Transformationen gegenüber, findet sich bei *Sylvester*, Cambr. Dubl. math. J. 6 (1851), p. 187; für spezielle Fälle schon bei *Jacobi*, J. f. Math. 22 (1841), p. 319 = Werke 3, p. 393. Vgl. die systematische Darstellung bei „Gordan“ 1, § 11, der die Resultante als besondern Fall der Funktionaldeterminante [Anm. 6, 271] behandelt. — Die Funktionaldet. der Funktionaldet. von n $F(x_1, x_2, \ldots x_n)$, die im besondern Polaren einer Form f sind, sind den F proportional: *Clebsch*, J. f. Math. 69 (1868), p. 355; 70 (1869), p. 175; *Rosanes*, ib. 75 (1872), p. 166; *M. Pasch*, ib. 80 (1875), p. 177.

370) Cambr. Dubl. math. J. 9 (1854), p. 86.

371) Amer. J. of Math. 17 (1895), p. 235, wo die Semikombinanten zur Typik [Nr. **7**, Anm. 160] und Apolarität in engere Beziehung gesetzt werden.

372) Math. Ann. 5 (1872), p. 95, bes. p. 116; vgl. *Voss*, Münch. Ber. 1888, p. 15.

373) Math. Ann. 22 (1883), p. 393.

S der u und x, die die u nicht enthalten. Fällt die letztere Beschränkung weg, so entstehen nach *A. Brill*[374]) „Kombinanten der $F_m^{(i)}$ in weiterem Sinne". Den Kombinanten kommt nach *Hilbert* (Nr. **6**) die Endlichkeit zu. Eine ausgezeichnete Kombinante R ist $|F_m^{(i)}(x^{(r)})| \binom{i=1,2,\cdots k}{r=1,2,\cdots k}$, wo die $x^{(r)}$ cogrediente Variabelnreihen sind; *Gordan*[375]) beweist, dass jede Kombinante der $F_m^{(i)}(x)$ eine Komitante von R ist, indem er die *Clebsch-Aronhold*'sche Symbolik (Nr. **12**) mit den Reihenentwicklungen (Nr. **17**) kombiniert. *Stroh*[376]) ersetzt im Sinne der Dualität R durch die Determinante Q, die entsteht durch Ergänzung der Koeffizientenreihen mittels entsprechender Potenzprodukte einer Anzahl zu den (x) kontragredienter Variabelnreihen $(v), (w), \cdots$. Q ist eine Kombinante der F, und R eine Komitante von Q. Die Anzahl der $(v), (w), \cdots$ ist $N-k$, wenn N die Anzahl der Koeffizienten von F_m ist. *Stroh* stellt den k „Ordnungsformen" $F_m^{(i)}(x \mid a)$ $N-k$ „Klassenformen" $\Phi_m^{(l)}(u \mid \alpha)$ — diese aber ohne Polynomialkoeffizienten geschrieben — gegenüber; die Komitanten der F gehen in die der Φ über, indem man an Stelle der Determinanten der a die adjungierten von denen der α setzt und umgekehrt. Hier greift durch Spezialisierung der Φ die Apolaritätstheorie[377]) ein. $F_m(x)$ und $\Phi_m(u)$ heissen „apolar"[378]) (Nr. **10**), wenn $(F, \Phi)_m = 0$. Einem Systeme von k linear unabhängigen $F_m^{(i)}(x)$ „entspricht" gerade ein solches von $N-k$ $\Phi_m^{(l)}(u)$, sodass stets $(F_m^{(i)}, \Phi_m^{(l)})_m = 0$ ist: beide Systeme heissen dann „zu einander apolar"; die „Allgemeinheit" des einen Systems bedingt nach *A. Brill*[379]) die des andern. *B.*[380]) beweist, dass je zwei der

---

374) Math. Ann. 20 (1882), p. 335.

375) l. c. p. 116, für f_n in § 11.

376) l. c. Für f_n p. 403; eine zweite erzeugende Funktion stellt *S.* auf: München Progr. Ludw. Kreisrealsch. 1894.

377) S. Anm. 367. Für geometrische Zwecke, besonders für die projektive Untersuchung rationaler Raumkurven, hat *L. Berzolari* die Apolarität weiter ausgebaut: Ann. di mat. (2) 19 (1891), p. 269; 20 (1892), p. 101; 21 (1893), p. 1; 26 (1897), p. 1; Pal. Rend. 5 (1891), p. 9; 7 (1893), p. 5; Rom. Linc. Mem. (4) 7 (1893), p. 305. — Behufs Erzeugung und Konstruktion algebraischer Flächen hat *G. v. Escherich* den Begriff der Apolarität geeignet erweitert, Wien. Ber. 75 (1877), p. 523; 82 (1882), p. 526, 893; 90 (1884), p. 1036 [III C 5, 6].

378) Nr. **10**, Anm. 197, 198. *Rosanes* sagt „konjugiert", „Clebsch-Lindemann" „vereinigt liegend"; *Reye* scheidet noch: „F stützt Φ, Φ ruht auf F".

379) Math. Ann. 20 (1882 dat. April), p. 335, wo zugleich die Erweiterung auf n Variable gegeben wird.

380) Math. Ann. 4 (1871), p. 530 [I B 1 a, Nr. **16**]. Implicite steht der Satz schon bei *H. Grassmann*, Ausdehnungslehre, Leipzig 1862, Nr. 112. An-

adjungierten Determinanten der a, α proportional sind, woraus das „Kombinantenprinzip“[381]) fliesst, dass die Kombinanten von zwei apolaren Formensystemen der Anzahl und Form nach übereinstimmen.

Die F seien jetzt binär, $= f_m^{(i)}(x_1, x_2) = f_m^{(i)}(x, 1)$. *Brill*[382]) sondert aus R das Differenzenprodukt der $x^{(r)}$ ab, und setzt dann alle $x^{(r)} = x$. So entsteht eine Kombinante $W_{k(m-k+1)}(x, 1)$ die R insofern ersetzt, als jede Kombinante der f eine irrationale Form (Nr. **11**) von W ist. Die Allgemeinheit der f zieht die von W nach sich; will man umgekehrt eine gegebene $f_{k(m-k+1)}$ in die Gestalt von W bringen, so bedarf es der Adjunktion einer irrationalen Funktion der Koeffizienten.

Die Quelle der Apolaritätstheorie entspringt der Ausdehnung von *Sylvester*'s Kanonisierung der f (Nr. **10**) auf Formensysteme. Bei *J. Rosanes*[383a]) liegt der symbolisch bewiesene Satz zu Grunde, dass $(f_m, \varphi_m)_m = 0$ das Kriterium bildet für die Darstellung von $f(\varphi)$ als Potenzsumme der Linearfaktoren von $\varphi(f)$. Speziell sind m f_m darstellbar als Aggregate m^{ter} Potenzen derselben m Linearformen. Das Prinzip lässt sich ausdehnen[383b]): $F_m(y_1, y_2, \cdots y_n) = 0$ sagt aus, dass $F_m(x_1, x_2, \cdots x_n)$ apolar ist zu u_y^m.

---

wendungen des Satzes bei *Clebsch*, Gött. Abh. 17 (1872), p. 1; *Gordan*, Math. Ann. 7 (1874), p. 433; *W. Fr. Meyer*, „Apolarität“; *W. Stahl* (Anm. 397). — Wegen Verwendung des Satzes in der Zahlentheorie s. *Bachmann*, Quadratische Formen 1, Leipzig 1898, Abschn. 6, Kap. 3.

381) *Cyp. Stéphanos*, Par. Sav. [Étr.] 1880—83 [dat. Dez. 1881]. Auszug Par. C. R. 93 (Dez. 1881, p. 994). Allgemein für n Variable bei *Brill*, Math. Ann. 20 (1882), bes. p. 335 [Anm. 379]; *W. Fr. Meyer*, Apolarität § 11. Vgl. die Dissertationen: *Ph. Friedrich*, Giessen 1886; *W. Gross*, Tüb. 1887 (= Math. Ann. 31, p. 136); *E. Meyer*, Königsb. 1888.

382) Math. Ann. 20 (1882), p. 330. Weiter untersucht von *B. Igel*, Wien. Denkschr. 46 (1883), p. 350; 49 (1885), p. 277; 53 (1887), p. 155; Wien. Ber 89 (1884), p. 218; 92 (1885), p. 1153.

383a) J. f. Math. 75 (1872), p. 172. Geometrische Anwendungen auf „Normkurven“ (Kurven n^{ter} Ordnung im Linearraum von n Dimensionen) bei *W. Fr. Meyer*, Apolarität; auf abwickelbare Flächen bei *W. Stahl*, J. f. Math. 101 (1886), p. 73; ib. (1887), p. 300; 104 (1888), p. 38; ib. (1889), p. 302. Rein geometrisch ist die binäre Apolarität untersucht von *H. Wiener*, Habilitationsschrift, Darmstadt 1885; vgl. *W. Thieme*, Zeitschr. Math. Ph. 24 (1879), p. 221, 276; Math. Ann. 23 (1884), p. 597.

383b) J. f. Math. 75 (1873) p. 312. Vgl. *H. Grassmann*, Gött. Nachr. 1872, p. 567; J. f. Math. 84 (1878), p. 273. Lineare Relationen zwischen gleich hohen Potenzen von Linearformen untersucht schon *P. Serret* geometrisch, Géom. de direction, Paris 1869. — So z. B. bestimmen 3 Punkte P_1, P_2, P_3 in der Ebene eindeutig einen vierten P_4 so, dass das C_2-Büschel (P_1, P_2, P_3, P_4) apolar ist zu einem Klassenkegelschnitt N_2. Bezieht man die P auf N_2 als Normkegelschnitt, so entsprechen ihnen 4 f_2; zwischen den f_2 und $f_2{}^2$ herrscht je eine

Hiermit wird der Polarenprozess kombiniert. Man bilde die successiven Polaren von $F = a_x^m$ i. e. $a_x^{m-1} a_y$, $a_x^{m-2} a_y a_z, \cdots, a_x a_y a_z \cdots a_w$; verschwindet die letzte, so bilden die m „Punkte" $(x), (y), \cdots (w)$ ein „Pol-m-eck" (Nr. **10**) von F, dessen Gleichung real lautet $u_x u_y u_z \cdots u_w = 0$. Das Kriterium für ein Pol-m-eck von F ist die Apolarität von F und $u_x u_y \cdots u_w$; ein „(volles) Pol-$(m+1)$-eck" ist ein solches, von dem je m Ecken ein Pol-m-Eck bilden u. s. f.

Algebraisch sind das Sätze wie: eine C_m ist mittels der „Seiten" eines Pol-$(m+1)$-ecks als Summe von $\frac{m(m+1)}{2}$ Potenzen (von Linearformen) darstellbar. — Zur Apolaritätstheorie irreduzibler Formen in höheren Gebieten hat *O. Hesse*[384]) den Grund gelegt, insofern $(C_2, K_2)_2 = 0$ das Kriterium dafür ist, dass vermöge einer (und dann auch unendlich vieler) S die eine Form nur die Quadrate, die andere nur die Produkte der Variabeln aufweist. *Rosanes*[385]) und *Reye*[386]) haben

---

lineare Relation [Anm. 204, 212]. Artet N_2 aus in das Kreispunktepaar, so ergiebt sich, dass alle gleichseitigen Hyperbeln durch P_1, P_2, P_3 noch durch einen vierten Punkt P_4 gehen [*Cayley,* Phil. Mag. 13 (1857), p. 423 = Pap. 3 p. 254]. Dieser Satz, verbunden mit der durch das C_2-Büschel festgelegten ein-eindeutigen quadratischen Verwandtschaft [III C 9], beherrscht einen wesentlichen Teil der elementaren Dreiecksgeometrie [III A 2]. — Analog bestimmt im Raume ein Tetraeder $(P_1, \ldots P_4)$ ein-eindeutig ein zweites $(P_5, \ldots P_8)$ so, dass die $P_1, \ldots P_8$ die Grundpunkte eines Netzes von F_2 bilden, das zu einer festen kubischen Raumkurve apolar ist. Algebraisch heisst das, dass vier gegebene f_3 ein-eindeutig vier weitere f_3 derart bestimmen, dass zwischen allen f_3 und $f_3{}^2$ je 4 lineare Relationen herrschen.

384) J. f. Math. 45 (1853), p. 82. Eine Ausdehnung auf C_3 giebt *O. Schlesinger,* Math. Ann. 30 (1887), p. 453. Das Kriterium von $(C_3, K_3)_3 = 0$ lautet, dass die C_3 ∞ Polfünfecke der K_3 enthält (vgl. *R. de Paolis,* Rom. Linc. Mem. (4) 3 (1886), p. 265). Damit ist eine Übertragung der Apolarität auf (elliptische) C_3 verbunden, s. *O. Schlesinger,* Math. Ann. 30 (1887), p. 453; 31 (1888), p. 183; 33 (1889), p. 315. Im Anschluss hieran stellt *F. London,* Math. Ann. 36 (1890), p. 535 eine resp. mehrere C_3 als Summen von Kuben linearer Formen dar; s. die Ergänzung bei *G. Scorza,* Math. Ann. 51 (1898), p. 154. Wegen entsprechender Untersuchungen über C_4 s. *G. Scorza,* Ann. di mat. (3) 2 (1899), p. 155.

385) Math. Ann. 6 (1873), p. 264. Anwendungen auf linear abhängige Punktsysteme: J. f. Math. 88 (1880), p. 241; 90 (1881), p. 303; 95 (1883), p. 247; 100 (1887), p. 311 [Nr. **3**, Anm. 79].

386) J. f. Math. 72 (1870), p. 293; 77 (1874), p. 269; 78 (1874), p. 114, 345; 79 (1875), p. 159; 82 (1877), p. 1, 54, 173 (vgl. Anm. 198). Weiterhin hat *Reye* vom Gesichtspunkte der Apolarität aus eine systematische Theorie der linearen Mannigfaltigkeiten projektiver Büschel, Bündel u. s. f. aufgestellt: Berl. Ber. 1889, p. 833; J. f. Math. 104 (1889), p. 211; 106 (1890) p. 30, 315; 107 (1890), p. 162; 108 (1891), p. 89 [Anm. 440]. *E. Timerding* liefert eine Weiterbildung und zugleich Vereineinfachung von *Reye*'s Theorie: Gött. Nachr. 1898, Heft 3.

daraus, mittels des Kombinantenprinzips, eine Apolaritätstheorie für Systeme von C_2 resp. im Raume von F_2 und Kurven 3. Ord. entwickelt. *W. Fr. Meyer*[387]) hat die Apolaritäts- und Kombinantentheorie höherer Gebiete der der binären Kombinanten untergeordnet, insbesondere vermöge einer Reihe von Übertragungsprinzipien[388]); auf Grund von kanonischen[389]) Koordinatensystemen werden die Polarenprozesse umgesetzt in Umwandlungen elementar-symmetrischer Funktionen. So nimmt die Bedingung, dass zwei Punkte bez. einer C_2 konjugiert sind (III C 1), eine in deren Koordinaten linear-symmetrische Gestalt an, die je nach Spaltung der Argumente verschiedene geometrische Deutungen liefert. *O. Schlesinger*[390]) und *W. Fr. Meyer*[390]) sehen dabei mit Vorteil die nämliche Form, etwa eine C_2, einmal als Ordnungs-, einmal als Klassengebilde an. Ist die Ordnung einer f_m zerlegbar $= m_1 m_2$, so greift ein anderes Hülfsprinzip ein: die Wurzeln von f_m werden gedeutet als „Punkte" einer „Normkurve"[391]) [Anm. 383ª]:

$$x_0 : x_1 : x_2 : \cdots : x_{m_1} = 1 : \lambda : \lambda^2 : \cdots : \lambda^{m_1}$$

im m_1-fach ausgedehnten Linearraum.

Dies gestattet z. B. *Sylvester*'s Kanonisierung einer f_9 und einer $F_3(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (Nr. **10**) als invariantiv äquivalent[392]) anzusehen. Bei zwei Scharen apolarer f_m wird die Kanonisierung der einen äquivalent mit dem Auftreten gemeinsamer[393]) Faktoren bei der andern. Für die erweiterten Kombinanten (s. oben) von k Urformen f_m ersetzt

---

387) „Apolarität".

388) „Apolarität" bes. Kap. 3. Vgl. noch Math. Ann. 21 (1883), p. 434, 441, 528. Eine weitere Ausbildung, auch für nicht apolare Gebilde, giebt *Study,* Leipz. Ber. 1890, p. 172; s. auch *E. Waelsch,* Deutsche Math.-V. 4 (1897) [1895], p. 113; Wien Anz. 1895 [Anm. 278, 391].

389) Vgl. damit die symbolische Behandlung für allgemeine Urformen bei *O. Schlesinger* (Ebene), Diss. Breslau, 1882 = Math. Ann. 22, p. 520; *F. Lindemann* (Raum), Math. Ann. 23 (1884), p. 111 (s. Nr. **7**, Anm. 160).

390) l. c.

391) Hierbei wird ein systematischer Gebrauch vom „Prinzip des Projicierens" gemacht, vgl. dazu *G. Veronese,* Math. Ann. 19 (1882), p. 161, und *W. Fr. Meyer,* „Apolarität" [Anm. 423ª]. Die Normkurven sind seitdem vielfach behufs binärer Behandlung höherer Räume benutzt worden, insbes. von *E. Waelsch,* Monatsh. f. Math. 6 (1895), p. 261, 375; Wien. Ber. 105 (1896), p. 741 (Nr. **14**, Anm. 278; oben Anm. 388).

392) „Apolarität" § 32. Analog ist die vierdeutige Hesse'sche Kanonisierung [Nr. **11**, Anm. 210; **27**, Anm. 434] der C_3: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + k x_1 x_2 x_3$ äquivalent mit *Sylvester*'s Kanonisierung der f_6: $l_1^6 + m_1^6 + n_1^6 + k l_1^2 m_1^2 n_1^2$ [Nr. **10**, Anm. 194].

393) l. c. § 34.

Brill[394]) *Gordan's* erzeugende Kombinante R durch eine andere, die aus R entsteht, wenn man successive für $1, 2, \cdots k$ Reihen der f kogrediente Variabelnreihen substituiert. Geometrisch ist das die projektive[395]) Theorie der „rationalen Curven" R_n^d (III C 3, 4, 6, 7, 8) $x_0 : x_1 : x_2 : \cdots : x_d = f_m^{(1)} : f_m^{(2)} : \cdots : f_m^{(d)}$. Die „projektive Erzeugung" dieser Kurven durch solche niedrigerer Ordnung hat *W. Fr. Meyer*[396]) auf eine besondere Reducibilität ternärer Formen zurückgeführt; *W. Stahl*[397]) giebt für eine Reihe von Fällen explizite Determinantenformeln.

25. Resultanten R und Diskriminanten[398]) D. In einer Reihe besonderer Fälle hat man R[399]) und D[400]) durch einfachere Invarianten (Grundformen) dargestellt [I B 1 a, Nr. **19, 21**].

---

394) Bei *W. Gross,* Diss. Tüb. 1887 (Auszug Math. Ann. 32, p. 136).

395) Math. Ann. 30 (1887), p. 30. Ein erst von *Hilbert* (Gött. Nachr. 1887, p. 30; Math. Ann. 36 (1890), p. 516 [Nr. **6**]) allgemein bewiesenes Postulat setzt die Erzeugung der R_n^d als möglich voraus, d. h. es sei möglich, für ein System von $d + 1$ Formen $f_n(\lambda)$ d Systeme von $d + 1$ Formen $\varphi_{\nu_i}(\mu)$ $(i = 1, 2, \ldots d)$ so zu bestimmen, dass jede Summe $\sum f(\lambda)\,\varphi(\mu)$ durch $\lambda - \mu$ teilbar wird und $\sum \nu = n$ ist. Ein besonderer Fall dieses „Teilungsprinzipes" [Anwendung auf Reducibilitätskriterien: I B 1 b, Nr. **5**, Anm. 9] bei *Brill,* Math. Ann. 36 (1890), p. 230, Abdruck (mit Zusätzen) aus den Münch. Ber. 1885.

396) Für R_4^3 Math. Ann. 29 (1887), p. 447; für R_4^2 ib. 31 (1888), p. 96. Hierbei sind alle Ausnahmefälle berücksichtigt.

397) Math. Ann. 38 (1891), p. 561; 40 (1892), p. 1 (Anm. 380). Vgl. noch *R. Schumacher,* ib. 38 (1891), p. 298; *St. Jolles,* Habilitationsschrift, Aachen 1886.

398) Man vgl. für diese Nr. I B 1 a, Nr. **11, 16** bis **23** und I B 1 b, Nr. **11, 12, 16** bis **21**, wo die R und D vom Standpunkt der Algebra überhaupt behandelt werden, während hier nur das Formentheoretische in Betracht kommt; einige Wiederholungen waren unvermeidlich. Wegen der Differentialgleichungen der R und D s. I B 1 a Nr. **18, 21** wegen der Kombinanteneigenschaften der R Nr. **24**, Anm. 369[a]. — Über die Struktur der R und D von f_n s. *W. Fr. Meyer,* Gött. Nachr. 1895, p. 119, 155 (bez. der R vgl. *Netto,* ib. p. 209) [I B 1 a, Nr. **18**, Anm. 103]; allgemeinere Ansätze für Invarianten von f_n bei *Elliott,* Mess. (2) 26 (1896), p. 105. — Über die verschiedenen Formen der R von F bei *J. Hadamard* und *O. Biermann* s. I B 1 b Nr. **14**, Anm. 61, 62. — Über die R von $2f$ als bilineare Form mit $D = 1$ bei *Gordan* s. I B 1 a Nr. **18**, Anm. 104.

399) $R(f_3, f_4)$: *Brioschi,* Chelini coll. m. 1881, p. 221; $R(f_4, \varphi_4)$: *E. d'Ovidio,* Tor. A. 15 (1880), p. 385; *Brioschi*, Tor. A. 31 (1896), p. 441; $R(f_5, \varphi_{<5})$: *d'Ovidio,* Nap. Mem. 11 (1883); Rom. Linc. M. (4) 4 (1888), p. 607; $R\left(C_2^{(1)}, C_2^{(2)}, C_2^{(3)}\right)$ (als Kombinante): *Sylvester,* Cambr. Dubl. math. J. 8 (1853), p. 256, sect. 7; *Cayley,* J. f. Math. 57 (1860), p. 139 = Pap. 4, p. 349; *S. Gundelfinger,* J. f. Math. 70 (1875), p. 73; *F. Mertens,* Wien. Ber. 93 (1886), p. 62; Inv.-Kriterien für mehrere gem. Wurzeln von $2f_n$: *Pascal,* Nap. R. (2) 2 (1888), p. 402; Ann. di mat. (2) 16 (1888), p. 85; *R. Perrin,* Par. C. R. 107 (1888), p. 22.

Darüber hinaus suchte die Formentheorie allgemein vorab nach durchsichtigen symbolischen Ausdrücken für die R und D. *Clebsch*[401]) leistet das für die $R(f_n, f_2)$ so weit, dass die reale Zurückführung auf eine Reihe intermediärer In- und Kovarianten ausführbar wird; es finden sich bei ihm auch Ansätze für eine $R(F_n, F_2, F_1^{(1)}, F_1^{(2)} \cdots)$ bei m Variabeln.

Gordan[402]) bildet die Methode aus für die $R(f_m, f_n)$. Mit Hülfe der „Bezout-Cayley'schen" Resultantenform[403]) (I B 1a, Nr. **16**) und der Reihenentwicklungen (Nr. **17**) wird R für $m = n$ durch blosse Überschiebungen (Nr. **14**) gewonnen; es werden Kovarianten aufgestellt, deren identisches Verschwinden das Kriterium für eine vielfache Wurzel von f_m liefert etc.

Im Falle $m \gtrless n$ erscheint R als Quotient von zwei symbolischen Ausdrücken; für $R(f_m, f_3)$ gelingt *E. Pascal*[404]) noch eine direkte Lösung. Neuerdings hat *Gordan*[405]) R ganz allgemein durch Überschiebungsprozesse ganz rational dargestellt.

Über die simultanen In- und Kovarianten von zwei f mit gemeinsamem Linearfaktor hat *Brioschi* einen einfachen Satz aufgestellt: Par. C. R. 121 (1895), p. 582; Erl. Ber. 1896, p. 116; vgl. *J. Lüroth,* Erl. Ber. 1896, p. 119; *Noether* 16, p. 110.

400) f_4: *G. Boole* bei *Cayley*, Cambr. math. J. 4 (1845), p. 209 = Pap. 1, p. 94; [$f_{1,1,1,1}$ bei *L. Schläfli,* Wien. Denkschr. 1852, Abt. 2, p. 1]; f_5: *Salmon,* Cambr. Dubl. math. J. 9 (1854), p. 32; f_6: *Brioschi,* Ann. di mat. (2) 1 (1867), p. 159, ausgeführt bei *G. Maisano,* Math. Ann. 30 (1887), p. 442 [Krit. f. mehrfache Wurzeln ib. 31 (1888), p. 493; *d'Ovidio*, Tor. A. 24 (1888), p. 164, allgemeiner bei *Perrin*, Par. C. R. 106 (1888), p. 1789; ib. 107 (1888), p. 22, 219 (I B 1 b Nr. **11**, Anm. 27)]; f_7: *Gordan*, Math. Ann. 31 (1888), p. 566, vereinfacht von *Brioschi,* Ann. di mat. (2) 26 (1897), p. 255; f_8: *Maisano*, Pal. R. 3 (1889), p. 33; 4 (1890), p. 1; C_3: *S. Aronhold,* J. f. Math. 55 (1858), p. 97; vgl. *Sylvester,* Cambr. Dubl. math. J. 7 (1852), p. 75 (sect. 3; Analogie zwischen f_4 und C_3 [Nr. **27**, Anm. 434]); p. 179 (sect. 4; mittels höherer Determinanten); C_4: *Klein,* Math. Ann. 36 (1890), p. 1, § 19.

401) J. f. Math. 58 (1861), p. 273; vgl. *Gordan,* ib. 71 (1870), p. 164. Bei „Salmon-Fiedler" Nr. 309, 310 eine Hyperdeterminanten-Lösung. Kriterium der Teilbarkeit einer f_n durch eine f_2 „Clebsch" p. 91; durch eine f_m *B. Igel,* Wien. Ber. 1880 (mittels eines Eliminationsprinzips von *J. Koenig,* Math. Ann. 15 [1879], p. 168).

402) Math. Ann. 3 (1871), p. 355.

403) *Cayley,* J. f. Math. 53 (1857), p. 366 = Pap. 4, p. 38; Mess. 2 (1864), p. 88 = Pap. 5, p. 555.

404) Gi. di mat. 25 (1887), p. 257; Nap. R. (2) 2 (1888), p. 67.

405) Für $3C$: Math. Ann. 50 (1897), p. 113; Zürich Kongr. Verh. 1898, p. 143; explicite für $3C_2$: J. de math. (5) 3 (1897), p. 195. Die wesentlichsten Hülfsmittel sind das von *Deruyts* erweiterte Reciprozitätsgesetz [Nr. **12**, Anm. 233 [a]] und

Für die $D(f_n)$ hat *Gordan*[406]) ein symbolisches Verfahren angegeben, D durch Grundformen auszudrücken: bis $n = 7$[407]) incl. liess sich die Rechnung noch durchführen. D wird $= 0$ gedacht, für den bez. Doppelfaktor α_x von f kommt man durch successive Überschiebungen und Divisionen zu Gleichungen zweiten Grades in den α, deren Resultante dann D ist. Die $D(C_n)$[407a]) stellt *Gordan* in invarianter Determinantenform dar.

F. Brioschi[408]) hat spezifische partielle Differentialgleichungen für die binären R resp. D aufgestellt; *M. Noether*[409]) wies nach, dass deren schon je eine einzige hinreicht. Als eine lineare Kombination von *Brioschi*'s D-Gleichungen erscheint bei *E. Wiltheiss*[410]) die Differentialgleichung der hyperelliptischen θ-Funktionen [II B 4 b]. Auf Beziehungen zwischen binären R und D ging *Gordan*[411]) ein, wonach die R gewisser Kovarianten von f_n den Faktor $D(f_n)$ enthalten. Führt man mit *S. Kohn*[412]) die Wurzeln von *Hermite*'s typischer Gestalt von f (Nr. 7) ein, so ergiebt sich, dass das Gewicht einer Kovariante c von f unter einer gewissen Grenze liegt, und daher $R(c, f)$, wie $D(c)$ je eine gewisse Potenz von $D(f)$ als Faktor enthalten. Entsprechendes gilt für Systeme von Urformen. Später weist *Kohn*[413]) nach, dass überhaupt den Invarianten von gewissen Kovarianten von f eine angebbare Potenz von $D(f)$ als Faktor zukommt.

Für einzelne partikuläre Systeme von f, wie sie die Geometrie liefert, ist der Konnex zwischen den R und D genauer untersucht.

Es sind das solche f, von denen die Singularitäten einer alge-

---

invariante Kriterien des Zerfallens einer C_n in Gerade; derartige Kriterien hat mit Hülfe der symmetrischen Funktionen von Variabelnpaaren aufgestellt *Brill*, Gött. Nachr. 1893, p. 757; Deutsche Math.-Ver. 5 (1897), p. 52; Math. Ann. 50 (1898), p. 157; vgl. die systematische Ausführung bei *F. Junker*, Math. Ann. 43 (1893), p. 222; 45 (1894), p. 1. *Gordan* hat die bez. Prozesse formal vereinfacht: Math. Ann. 45 (1894), p. 410 [I B 1 b, Nr. **5**; I B 3 b, Nr. **26**].

406) „Gordan" 2, Nr. 99. — D ist der letzte Koeff. der Gl., deren Wurzeln die Differenzen der Wurzeln von f sind. Der vorletzte Koeff. ist das Leitglied einer Kov. von f, der von *Perrin* untersuchten „Subdiskriminante" von f: J. de math. (4) 20 (1894), p. 129.

407) Math. Ann. 31 (1888), p. 568 [Anm. 400].

407a) Münch. Ber. 17 (1887).

408) J. f. Math. 53, p. 372; für $R(f_m, f_n)$ $(m \gtreqless n)$ erst bei *Gordan*, Gött. Nachr. 1870, p. 427. S. „Inv.-Ber." p. 94, Anm. ***).

409) „Bruno" § 25.

410) Math. Ann. 33 (1888), p. 279.

411) Math. Ann. 3 (1871), p. 169.

412) Wien. Ber. 100 (1891), p. 865, 1013, vgl. *Waelsch*, ib. 100 (1891), p. 574.

413) Wien. Ber. 102 (1893), p. 801.

braischen, insbesondere rationalen Kurve n^{ter} Ordnung R_n^2, R_n^3 der Ebene, resp. des Raumes (III C 2, 7) abhängen. Die R und D zerfallen je in eine Anzahl von Potenzen irreduzibler invarianter Faktoren, und haben letztere in verschiedener Vielfachheit gemein. Für eine kanonische Art von R_n^2 hat *A. Brill*[414]), für allgemeine R_n^2 und R_n^3 hat *W. Fr. Meyer*[415]) die Zerlegungen ausgeführt, deren Bedeutung für die Geometrie der Kurvensingularitäten überhaupt ersichtlich ist. — Insbesondere zerfällt die D der Funktionaldeterminante[416]) mehrerer f_m in zwei Faktoren; *Cayley*[417]) zeigte schon früher, dass die D der D eines Büschels $\varkappa f_m + \lambda g_m$ ein Produkt AB^2C^3 ist. Allgemeiner bildet *Brill*[418]) die R von n Formen $F(x_1, x_2, \cdots x_n, 1)$ bez. $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$, dann zeigt sich $D(R)$ durch die Resultante von den F und deren Funktionaldeterminante teilbar.

Hilbert[419]) hat alle Ausartungen einer $f_n(x \mid a)$ aus der Potenzreihenentwicklung von $D(f)$ erschlossen. Verschwindet D, als Form der a_i, nebst allen $(n-k-1)$ ersten Polaren identisch, so zerfällt die $(n-k)^{\text{te}}$ in $n-k$ Linearfaktoren. Koinzidieren von diesen je $\mu_i - 1$ $(i = 1, 2, \cdots k)$, so auch die Linearfaktoren von f zu je μ_i, und umgekehrt. Überdies lassen sich alle Singularitäten[420]) des Gebildes $D = 0$ diskutieren.

F. Mertens[421]) hat den Begriff der R vom Eliminationsprozess abgelöst; wenn die Urgleichungen $F(x \mid a) = 0$ keine Lösung gemein haben, so existiert R als lineare Kombination der F (mit Hülfsformen der x, a als Koeffizienten) von vorgegebenem Grade in den a, die von

---

414) Math. Ann. 16 (1880), p. 345 [vgl. noch ib. 12 (1877), p. 90].

415) $n = 2$: Gött. Nachr. 1888, p. 74; Math. Ann. 38 (1891), p. 369; $n = 3$: Gött. Nachr. 1890, p. 366, 493; 1891, p. 14; eingehender in Monatsh. f. Math. 4 (1893), p. 229, 331; Auszug in Math. Ann. 43 (1893), p. 286.

416) Math. Ann. 20 (1882), p. 336.

417) Phil. mag. 11 (1856), p. 425 = Pap. 3, p. 214, vgl. *R. Russel*, Quart. J. 21 (1886), p. 373; *Hilbert*, Math. Ann. 31 (1888), p. 482. Weitere Fälle, mit Anwendungen auf algebraische Kurven bei *J. Maddison*, Quart. J. 24 (1893), p. 307; auf singuläre Lösungen von Differentialgleichungen ib. 28 (1896), p. 311.

418) Gött. Nachr. 1892, p. 89.

419) Math. Ann. 30 (1887), p. 437 [Verallg. einer Identität zwischen Potenzen von f_n: *W. Fr. Meyer*, „Apolarität" p. 350; Math. Ann. 21 (1882), p. 441]. Für Evektanten schon bei *Sylvester*, Phil. mag. (4) 3 (1852), p. 375, 460; *Cayley*, Lond. Trans. 147 (1857), p. 727 = Pap. 2, p. 465 [I B 1a, Nr. **22**].

420) I B 1c, Nr. **15**.

421) Wien. Ber. 93 (1886), p. 527. Für f_n bei *Kronecker*, Berl. Ber. 1881, p. 535 = Werke 2, p. 113. Der Gedanke geht auf *Bezout* zurück [I B 1b, Nr. **6**].

den x frei ist. *R. Perrin*[422]) uud *Brill*[423]) haben die „reduzierte" Resultante R' der F untersucht, deren Verschwinden besagt, dass die $F = 0$ ausser gewissen von vornherein gemeinsamen Lösungen noch eine weitere besitzen: R' erscheint bei *Brill* als gemeinsamer Faktor gewisser Entwicklungsglieder, für die ein Berechnungsalgorithmus gegeben wird[423a]).

26. Realitätsfragen[424]). Die Sturm'schen Funktionen (I B 3 a, Nr. **5**), die durch ihre Zeichenwechsel und -Folgen die Anzahl der reellen Wurzeln einer f_n zwischen gegebenen Grenzen ablesen lassen, werden von *H. Schramm*[425]) ersetzt einmal durch eine Reihe von Kovarianten, sodann durch eine Reihe von Invarianten. Insbesondere sind, wenn alle Wurzeln von $f(x \mid a)$ reell sind, die von $H = (f, f)_2$ komplex und umgekehrt; *Sylvester*[426]) dehnt den Satz auf die Kovarianten 2. Grades in den a aus. — *Edm. Laguerre*[427]) hat die Prozesse behufs Separation und Approximation [I B 3 a, Nr. **4**, Anm. 9] der reellen Wurzeln von f unter Benutzung von Kovarianten (H u. a.) verallgemeinert. — *W. Fr. Meyer*[428]) hat ein „Trägheitsgesetz" für

422) Par. C. R. 106 (1888), p. 1789; 107, p. 22, 219. Ein Beispiel bei *Cayley,* Quart. J. 11 (1871), p. 211 = Pap. 8, p. 46.

423) Math. Ann. 4 (1871), p. 510, 527; Münch. Ber. 17 (1889), p. 91.

423a) Die Theorie der Kombinanten [Nr. **24**] hat *Cyp. Stéphanos* für die Bildung von R verwertet: Par. Thèse 1883; vgl. *W. Fr. Meyer,* Math. Ann. 38 (1891), p. 369 (§ 8); Bremer Naturf.-Vers. Verh. 1891, p. 9. Geometrisch sind das gewisse Projektionsmethoden [Anm. 391].

424) Wegen invarianter Realitätskriterien für die Wurzeln von $f_n = 0$, insbes. der $f_5 = 0$, durch *Hermite, Sylvester* und *Jacobi* s. Anm. 38, 147. Vgl. noch *Sylvester,* Lond. Trans. (1864), p. 579; *Cayley,* VIII. Mem.; *E. Laguerre,* Anm. 427 [I B 1 a, Nr. **23**; I B 3 a, Nr. 8]. Vorher hatte schon *Cayley* im V. Mem. die $f_3 = 0$ und $f_4 = 0$ erledigt, s. die Ergänzung von *Noether* bei „Bruno" § 20, der die beiden Fälle von 4 komplexen und 4 reellen Wurzeln invariantiv trennt. *K. Rohn* hat Fadenmodelle konstruiert, die alle Realitätskriterien der $f_4 = 0$ veranschaulichen, s. Leipz. Ber. 43 (1891), p. 1 (Anm. 433). — Über die Untersuchung der „D-Mannigfaltigkeit" $D = 0$ durch *Kronecker, Brill, Gordan* u. a. s. I B 1 a, Nr. **22**, I B 1 c; Nr. **15**, Anm. 67; s. noch Nr. **10**, Anm. 204 ($f_6 = 0$), Nr. **25**, Anm. 419 (Ausartungen der D-Mannigfaltigkeit). — Mit der reellen Transformation reeller F_2 resp. $F_{1,1}$ haben sich besonders *Weierstrass* (Anm. 52, 53), *Sylvester* (Anm. 56), *Lipschitz* (Anm. 70), *Stickelberger* (Anm. 73), *Voss* (Anm. 74), *Hensel* (Anm. 38, Ende), *Taber* (Anm. 71) beschäftigt.

425) Ann. di mat. (2) 1 (1867), p. 259; 3 (1869), p. 41. Bez. der H s. noch *F. Gerbaldi,* Pal. Rend. 3 (1889), p. 22; *P. H. Schoute,* ib. p. 160.

426) J. f. Math. 87 (1879), p. 217.

427) Par. C. R. 1879/82, zusammengefasst in J. de math. (3) 9 (1883), p. 99 = Oeuvres p. 3.

428) Gött. Nachr. 1891, p. 272 [Nr. **10**, Anm. 196].

$f_{2n+1}(x \mid a)$ aufgestellt. Es existiert eine geschlossene Reihe von Kovarianten $f = f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots f^{(n)}$, deren D (Nr. **25**), excl. die erste und letzte, in 2 Faktoren zerfallen, so, dass je 2 successive einen Faktor gemein haben. Die Reihe der $f^{(i)}$ hat, von singulären Übergängen abgesehen, eine von den a unabhängige Anzahl reeller Wurzeln. — Realitätsfragen drängen sich auf, wenn man den Bereich der Variabeln einer Form in das komplexe Gebiet verlegt. So hat *Klein*[429]) die Gruppe der einen regulären Körper (Nr. **5**) mit sich zur Deckung bringenden S von $z = x + iy$ auf der Kugel verfolgt: ist z ein beliebiger, der Gruppe unterworfener Kugelpunkt, so erhält man z. B. im Ikosaederfalle 4 reelle Werte. *Wedekind*[430]) konstatiert u. a., dass das Doppelverhältnis von vier z nur dann reell sein kann, wenn sie in einer Ebene liegen.

In der Theorie der Kurvensingularitäten spielt die Realität eine wesentliche Rolle. *Brill*[431]) lässt die in ihre Faktoren zerspaltenen D der bezüglichen Gleichungen (Nr. **25**) durch Null hindurchgehen und beobachtet die Realitätsveränderungen der Wurzeln; so beweist er algebraisch eine von *Klein*[432]) anschaulich erhaltene Realitätsrelation zwischen Singularitätenanzahlen (III C 2, 3). *W. Fr. Meyer*[433]) hat derartige Realitätsänderungen für Raumkurven systematisch untersucht.

27. Weitere spezielle Formen[434]) **und Gruppen**[435]). 1. Die „Zu-

429) Erl. Progr. 1872; Math. Ann. 9 (1875), p. 183, s. Anm. 93. Über verwandte Untersuchungen von *J. Steiner* s. III A 3. — *C. Segre* und *C. Juel* haben die projektiven Eigenschaften der einfachsten ebenen und räumlichen Gebilde untersucht, wenn die Punktkoordinaten, wie die S-Koeffizienten komplex sind: *Segre,* Tor. A. 1890: 25, p. 276, 430; 26, p. 35, 592; Math. Ann. 40 (1892), p. 413; *Juel,* Acta math. 14 (1890), p. 1.

430) Math. Ann. 9 (1875), p. 209. Vgl. *G. Holzmüller,* Isogonale Verwandtschaften, Leipz. 1882, § 21 (wo auch frühere Litter.).

431) Math. Ann. 16 (1880), p. 345, bes. § 7; s. Anm. 414.

432) Math. Ann. 10 (1876), p. 199. *H. G. Zeuthen* hatte vorher die Realitätsverhältnisse der 28 Doppeltangenten und 24 Wendetangenten einer $C_4 = 0$ untersucht, Math. Ann. 7 (1874), p. 410. Die Maximalzahl der reellen Wendungen ist 8 (die auch existieren). Nach *A. Harnack,* Math. Ann. 10 (1876), p. 189 hat eine $C_n = 0$ höchstens $p + 1$ reelle Züge, die auch erreicht werden können. Vgl. *L. S. Hulburt,* N. Y. Bull. 1 (1892), p. 197; Amer. J. of Math. 14 (1892), p. 246. Die entsprechende Anzahl für Raumkurven (nebst Erweiterungen für ebene Kurven) hat *Hilbert* festgestellt, Math. Ann. 38 (1891), p. 115, das Maximum kann gleichfalls erreicht werden. — *Klein* untersucht Realitätsverhältnisse auf „Riemann'schen Flächen", Autogr. Vorl., Gött. 1891/92; Math. Ann. 42 (1893), p. 1, wo weitere Litteratur angegeben.

433) Gött. Nachr. 1891, p. 1, s. Anm. 415.

434) S. „Inv.-Ber." p. 275, 276. Wegen der algebraisch-geometrischen Theorie der C_2, F_2 und damit verknüpfter Gebilde s. „Clebsch-Lindemann" und

sammensetzung“ einer „r-gliedrigen Gruppe“ (II A 6) wird bei *Lie*[436]) definiert durch Relationen $(X_i X_k) = \sum_{s=1}^{s=r} c_{iks} X_s$, wo die c quadratischen

III C 1, 4. — Bez. der geom. Deutung von invarianten Gebilden auf rationalen Kurven durch *Lindemann, Sturm, d'Ovidio, W. Fr. Meyer, Berzolari* u. a. s. die in den Anm. 367, 377 citierte Litteratur. — Bez. der C_3 [„Clebsch-Lindemann“ 1 und III C 1, 3, 4] und $F_3(x_1, \ldots x_4) = F_3$ [III C 6] beschränken wir uns auf Folgendes. Das volle System der C_3 von 34 Komitanten zuerst bei *Gordan,* Math. Ann. 1 (1869), p. 90, vgl. *Clebsch* und *Gordan,* ib. 6 (1873), p. 436 [dort frühere Litt.]; einfacher bei *Gundelfinger,* Math. Ann. 4 (1871), p. 144. Eine explicite Tabelle des Systems für die C_3 in der Hesse'schen Normalform [Nr. **11**, Anm. 210] $ax^3 + by^3 + cz^3 + 6dxyz$ liefert *Cayley,* Amer. J. 4 (1881), p. 1 = Pap. **11**, p. 342; für gewisse andere kanonische Formen *F. Dingeldey,* Math. Ann. 31 (1888), p. 157. — Über associierte Systeme der C_3 s. Nr. **7**, Anm. 155. — Über Apolaritätseigenschaften der C_3 s. Nr. **24**, Anm. 384. — *H. Poincaré* erledigt die algebraische (und daraufhin die arithmetische) Äquivalenz der C_3, wie F_3, J. éc. pol. 50, p. 199; 51, p. 45 (1883), insbes. für reelle Koeffizienten und S; die zerfallenden C_3 werden analog untersucht, ib. 56 (1886), p. 79. Die algebraischen Ausartungen der C_3 hatte schon *Gundelfinger* invariantiv fixiert, Math. Ann. 4 (1871), p. 561; Ann. di mat. (2) 5 (1872), p. 223, vgl. *Gordan,* Math. Ann. 3 (1871), p. 631. Wegen der Kriterien für das Zerfallen einer C_3 (allgemein C_n) in Linearfaktoren s. Anm. 405; I B 1 b, Nr. **5**; I B 3 b, Nr. **26**. — Parallelismus zwischen C_3 und f_4: *Sylvester,* Cambr. Dubl. math. J. 8 (1853), p. 256 (sect. 7); *Hesse* [Anm. 14, 210]; *Aronhold,* J. f. Math. 39 (1849), p. 140 [Anm. 211]; *Brioschi,* Ann. di mat. (2) 7 (1875), p. 52; *Hilbert,* J. de math. (4) 4 (1888), p. 249 [Anwendung auf die Transf. 3. Ordg. der zur f_4 resp. C_3 gehörigen ellipt. Funktionen bei *Brioschi* l. c., vgl. die geom. Behandlung bei *Cayley,* Quart. J. 13 (1875), p. 211 = Pap. 9, p. 522; Zurückführung auf die Theorie der kubischen Involution $\varkappa f_3 + \lambda g_3$ bei *O. Bolza,* Math. Ann. 50 (1898), p. 68]. — Eine C_3 mit $D = 0$ wird von *F. Dingeldey* auf eine kanon. Form gebracht, Math. Ann. 30 (1888), p. 177. — Das „syzygetische“ Büschel $\varkappa C_3 + \lambda H_3$ bei *Battaglini,* Chelini Coll. Math. 1881, p. 27. — *A. Harnack* untersucht Diff.gleichungen, die nach *Clebsch* mit gewissen Zwischenformen der C_3 verknüpft sind, Math. Ann. 9 (1875), p. 218.

Über das Pentaeder der F_3 und damit verknüpfte Apolaritätseigenschaften s. Nr. **10**, Anm. 199; Nr. **14**, Anm. 278; Nr. **24**, Anm. 392 [III C 6]. Das Pentaeder als Komitantenform, nebst Beweis des Pentaedersatzes, bei *Gordan,* Math. Ann. 5 (1872), p. 376. — Die wichtigsten Komitanten der F_3 bei *Salmon,* Lond. Trans. 150 (1860), p. 229, und *Clebsch,* J. f. Math. 58 (1861), p. 93, 109; weiteres Formenmaterial bei *R. de Paolis,* Rom. Linc. M. (2) 10 (1880/81), p. 123. — Associierte Systeme der F_3: s. Nr. **7**, Anm. 154. — Die wichtigsten Invarianten der F_3 studiert geometrisch *K. Bobek,* Monatsh. f. Math. 8 (1897), p. 145. — Die Erzeugung der F_3 durch 3 trilinear reciprok verknüpfte Strahlenbündel führt *M. Pannelli* formentheoretisch aus, Ann. di mat. (2) 22 (1894), p. 237. — Das algebraische Kriterium dafür, dass ein F_2-Gebüsch Polarengebüsch einer F_3 wird, bei *E. Toeplitz,* Math. Ann. 11 (1877), p. 432; *W. Frahm,* ib. 7 (1874), p. 635. [Geometrisch bei *H. Thieme,* Math. Ann. 28 (1886), p. 133.]

435) Über die orthogonale Gruppe, allgemeiner die eine F_2, resp. $F_{1,1}$ invariant lassende Gruppe von S vgl. Nr. **3** und Nr. **6**, Anm. 145, Schluss. —

Bedingungen genügen, und die $X_s = X_s f$, die infinitesimalen Transformationen der Gruppe, linear geändert werden können, ohne die Zusammensetzung zu ändern. In diesem Sinne ist[437]) die trilineare Form $F(x, y; X) = (\sum x_i X_i, \sum y_k X_k) = \sum c_{iks} x_i y_k X_s$, gegenüber kogredienten S der x, y, kontragredienten der X, eine Invariante der Zusammensetzung. Die Bedingungen für die c sagen aus, dass 2 gewisse Kovarianten von F identisch verschwinden, und das bedeutet einmal, dass F bez. der (x), (y) alternierend ist, dann, dass auch jede infinitesimale Transformation der „adjungierten" Gruppe F invariant lässt.

2. *Gordan* und *Noether*[438]) haben ein Kriterium dafür angegeben, wann eine $F(x_1, \ldots x_n)$ vermöge S in eine F von weniger Variabeln übergeführt werden kann, und, wenn das der Fall, die S ermittelt. Damit wird ein Satz von *Hesse*[439]) eingeschränkt, wonach das Kriterium durch $H(F) \equiv 0$ [Nr. **14**, Anm. 272] ausgedrückt sei: *Hesse*'s Satz gilt allgemein nur für $n = 2, 3, 4$ und für die $F_2(x_1, \ldots x_n)$, während für $n > 4$ ganze Klassen von Formen angegeben werden können, für die $H \equiv 0$ ist, ohne dass zwischen ihren Polaren lineare

---

Zu Nr. **3** und Nr. **5** seien noch folgende Ergänzungen gegeben. Anm. 42: Die Cayley'sche Darstellung durch Parameter hat *G. Rost,* Dissert. Würzburg 1892, auf S von beliebiger Periode ausgedehnt [I B 3 f, Nr. **1**]; Anm. 54: *F. Klein,* Vorl. über Gleichungen, Gött. 1891/92, bringt Df_n auf die typische Gestalt $|a_{ik} + \lambda b_{ik}|$; Anm. 79: Bez. der Leistungen von *Battaglini* s. *E. d'Ovidio,* Rom. Linc. M. (4) 1 (1895), p. 558; Anm. 116[a]: Math. Ann. 52 (1899), p. 363. — Ferner sei noch erwähnt, dass *H. S. White,* N. Y. Bull. (2) 4 (1897), p. 17 das Kriterium für eine S-Gruppe aufstellt, die eine $C_2 = 0$ resp. $C_3 = 0$ (und damit zugleich eine ganze Schar von $C_2 = 0$ resp. $C_3 = 0$) in sich überführt. — Über andere projektive Untergruppen s. Nr. **23**, Anm. 352. — Über ausgeartete Kollineationen und Korrelationen der Geometrie (*Hirst, Visalli*) s. III C 9. — Über die Inversionsgruppe (Gruppe der reziproken Radien in der Ebene) und ihre Anwendung auf das Apollonius'sche Problem bei *Study* s. Nr. **2**, Anm. 12, Nr. **23**, Anm. 353. — Die $f(\overset{m}{x} \mid \overset{n}{y})$ (Anm. 30) bei unabhängigen S untersucht geometrisch mittels Normkurven *Waelsch,* Deutsche Math.-V. 5[1] (1897), p. 58, eingehend den Fall $m = 3$, $n = 3$ (System von zwei kubischen Raumkurven) Math. Ann. 52 (1899), p. 293.

436) *Lie-Engel,* Kont. Transf.gruppen 1, Leipzig 1888.

437) *F. Engel,* Leipz. Ber. 1886, p. 83. Bez. der Invariantentheorie der trilinearen Formen s. *Le Paige,* Par. C. R. 92 (1881), p. 1099 und Anm. 30, 195.

438) *Gordan,* Erl. Ber. 1876, p. 89 ($n = 3$); *Noether,* ib. p. 51 ($n = 4$); *Gordan* und *Noether,* Math. Ann. 10 (1876), p. 547 bes. p. 561 [I B 1 b, Nr. **22**]. Für die C_3 und $F_3(x_1, \ldots x_4)$ hatte *Pasch* den Satz mittels Determ.-Relationen bewiesen, J. f. Math. 80 (1875), p. 169. — Es sei noch erwähnt, dass nach *Voss* für F_3 $H(H)$ eine lineare Kombination von F und H ist, Math. Ann. 27 (1886), p. 515 [für $n = 4$ schon bei *G. Bauer,* Münch. Abh. 1883, p. 1 (III C 6)].

439) J. f. Math. 42 (1851), p. 117 [vgl. *Sylvester,* Phil. Mag. (4) 5 (1853), p. 119]; 56 (1859), p. 263 [I B 1 b, Nr. **22**].

Relationen existieren. Die Untersuchung von *Gordan* und *Noether* beruht auf einer linearen partiellen Differentialgleichung, der F und ihre Polaren genügen [Nr. **13**, Anm. 260], und deren Koeffizienten selbst wieder von einem System partieller Differentialgleichungen abhängen. Aus der Zahl der Systemlösungen sind die auszuscheiden, die ganze Funktionen der Variabeln sind. Zu dem Behuf werden die Variabeln „uneigentlich" rational transformiert, d. h. so, dass die Determinante der Transformation nebst einer Reihe ihrer Minoren verschwindet[440]).

---

440) Uneigentliche S spielen bei *Hilbert,* Math. Ann. 42 (1893), p. 313 [Nr. **6**, Schluss] eine fundamentale Rolle in der Theorie der vollen Systeme; desgl. bei *Study,* Nr. **18**, Anm. 316, in der formentheoretischen Untersuchung der Differentialgleichungen der Invarianten; bei *Waelsch* [Nr. **14**, Anm. 278], der durch Nullsetzen eines Aggregates von binären Überschiebungen Mannigfaltigkeiten verschiedener Dim. in Beziehung setzt; endlich in der algebraischen und geometrischen Theorie der linearen Scharen von S [Nr. **3** und Nr. **24**, Anm. 336]. — Die Ausübung einer uneig. $S\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$ vom „Range" r [I B 2, Nr. **24**] ist geom. äquivalent der Projektion eines Linearraumes R_n in einen R_{n-r} von einem R_r aus, verbunden mit einer Kollineation des R_{n-r}. Während im allg. Falle $r = 0$ [Nr. **2**] die transformierte Inv. durch die ursprüngliche teilbar wird, werden jetzt lineare Systeme von transformierten Inv. Modulsysteme [I B 1 b, Nr. **26**; I B 1 c, Nr. **13**] der ursprünglichen, wobei die Koeffizienten von den r^{ten} Minoren des S-Moduls ganz-rational abhängen. Im übrigen findet eine analoge Weiterentwicklung statt, wie in Nr. **2**.

Nachträge.

Zu Anm. 38, Z. 2, p. 328: *Borchardt* = Werke p. 469.
Zu Anm. 48, Z. 3, p. 329: *Borchardt* = Werke p. 3.
Zu Anm. 239, p. 364: *Clifford* = Pap. p. 255.
Zu Anm. 240, p. 364: *Clifford* = Pap. p. 258, 277.
Zu Anm. 287, p. 371: *Rankine*, Thomson l. c., p. 261, 481.
Zu Anm. 328, p. 381: *Cayley* [statt 1872 lies 1892] = Pap. 13, p. 333, 366, 405.

IB 3. GLEICHUNGEN.

IB 3a. SEPARATION UND APPROXIMATION DER WURZELN

VON

C. RUNGE

IN HANNOVER.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

Vergleiche die betreffenden Kapitel in den Lehrbüchern der Algebra, wie:

J. A. Serret, Cours d'algèbre supérieure. 4. Aufl. Paris 1877. Deutsch von *G. Wertheim,* Leipzig 1868. 2. Aufl. 1878.

J. Petersen, De algebraiske Ligningers theori. Kjöbnhavn 1877, deutsch 1878, franz. 1896.

E. Netto, Vorlesungen über Algebra, Leipzig, I, 1896; II, 1, 1898.

H. Weber, Lehrbuch der Algebra. Braunschweig, 1, 1895. 2. Aufl. 1898. 2, 1896; franz. von *J. Griess,* Paris 1898.

A. Capelli, Algebra complementare. Napoli, Pellerano 1895. 2. Aufl. 1898.

Die zahlreichen Monographieen über numerische Auflösung behandeln immer nur besondere Methoden.

Einleitung.

1. In vielen praktischen Fällen, wo die Werte einer Veränderlichen gesucht werden, die einer gegebenen transcendenten oder algebraischen Gleichung genügen oder die Werte mehrerer Veränderlichen, die mehreren solchen Gleichungen genügen, sind uns durch die Natur der Sache Näherungswerte der gesuchten Grössen schon bekannt, und es handelt sich nur darum, genauere Annäherungen zu finden. Newton hat dafür eine Methode angegeben[1]), die ursprünglich für den Fall einer Veränderlichen erfunden, sich auch auf den Fall beliebig vieler Veränderlichen übertragen lässt. Der Gedanke besteht darin, dass, wenn a der erste Näherungswert einer Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ist und p die Verbesserung bedeutet, die Funktion $f(a + p)$ nach Potenzen von p entwickelt wird. Vernachlässigt man dann die Glieder zweiter Ordnung, so ergiebt sich für p die Gleichung ersten Grades: $f(a) + f'(a)p = 0$, aus der p gefunden wird. Mit der auf diese Weise ermittelten zweiten Annäherung wiederholt man dieselbe Rechnung u. s. w. Dasselbe Verfahren lässt sich auf zwei oder mehr Veränderliche übertragen, die zwei oder mehr Gleichungen genügen sollen. Sind z. B. die beiden Gleichungen $f(xy) = 0$ und $g(xy) = 0$ zu erfüllen und ist $x = a$, $y = b$ ein Wertsystem, das den Gleichungen angenähert genügt, so setze man $x = a + h$, $y = b + k$ und entwickle die beiden Funktionen $f(xy)$ und $g(xy)$ nach Potenzen von h und k. Mit Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung erhält man so zwei Gleichungen ersten Grades für h und k, die nach h und k aufgelöst ein verbessertes Wertsystem liefern, mit dem man dieselbe Rechnung wiederholen kann u. s. w.

Auf diese Weise berechnen z. B. die Seeleute aus den Höhenbeobachtungen zweier Gestirne die Verbesserungen ihrer Länge und Breite, deren Näherungswerte ihnen aus der Loggerechnung bekannt sind und zwar meistens genau genug, um nur ein System von Verbesserungen zu erfordern. Die Auflösung der beiden linearen Gleichungen kann dabei auch graphisch geschehen durch Zeichnung der beiden Graden (Sumner-Linien), deren Gleichungen sie darstellen.

Für viele praktische Zwecke werden diese Bemerkungen genügen, wenn wir noch hinzufügen, wie die Genauigkeit der Näherungen beurteilt werden kann. Es habe die als stetig vorausgesetzte Funktion $f(x)$ für $x = a$ das entgegengesetzte Zeichen wie für $x = b$, während

---

1) *J. Newton*, Analysis per aequationes numero terminorum infinitas, London 1711. Ferner Brief an Oldenburg v. 13. Juni 1676 und Methodus fluxionum, Lond. 1736, introductio.

die Ableitung $f'(x)$ für alle Werte $x = a$ bis $x = b$ zwischen zwei endlichen Grössen m und M gleichen Zeichens liegt. Dann liegt eine und nur eine Wurzel zwischen a und b. Sind nun x_1 und x zwei beliebige Werte, die dem Intervall a bis b angehören, so ist $f(x_1) - f(x) = \int_x^{x_1} f'(x)\,dx$. Mithin liegt $f(x_1) - f(x)$ zwischen den Grenzen $m(x_1 - x)$ und $M(x_1 - x)$. Wenn also für x der Wert der zwischen a und b liegenden Wurzel eingesetzt wird, so ergiebt sich, dass $f(x_1)$ zwischen $m(x_1 - x)$ und $M(x_1 - x)$ liegt, und mithin, dass $x_1 - x$ zwischen $\frac{f(x_1)}{m}$ und $\frac{f(x_1)}{M}$ liegt. Ist m die dem absoluten Betrage nach kleinere der beiden Grössen m, M, so ist also der Fehler der Näherung x_1 absolut genommen nicht grösser als $\frac{f(x_1)}{m}$. Berechnet man mit x_1 die folgende Näherung $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$, so liegt $x_1 - x_2 = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ ebenfalls zwischen den Grenzen $\frac{f(x_1)}{m}$ und $\frac{f(x_1)}{M}$; folglich ist der Fehler von x_2 absolut genommen nicht grösser als $f(x_1)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{M}\right)$.

Die Auffindung der Grössen m und M wird sehr erleichtert, wenn auch $f''(x)$ in dem Intervall a bis b nur Werte eines Zeichens hat. Denn dann erreicht $f'(x)$ seine äussersten Werte an den Grenzen a und b. Es sei z. B. $f(x) = \sin x - x \cos x$. In dem Intervall $4\pi + \frac{\pi}{4}$ bis $4\pi + \frac{\pi}{2}$ liegt eine und nur eine Wurzel. Denn $f(x)$ hat an den Grenzen des Intervalls entgegengesetzte Zeichen, und $f'(x) = x \sin x$ liegt zwischen $\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $4\pi + \frac{\pi}{2}$. Nach dem Newton'schen Verfahren erhält man nun:

	$f(x)$	$f'(x)$	$\frac{f(x)}{f'(x)}$
1. Näherung: $4.5\,\pi$	1	14	$0.023\,\pi$
2. Näherung: $4.477\,\pi$	-0.018	14.03	$-0.00041\,\pi$
3. Näherung: $4.47741\,\pi$	0.00006		

Der Fehler des dritten Näherungswertes ist kleiner als $\frac{f(x)}{m}$. Für m können wir $\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = 9.4$ annehmen, wonach also der Fehler weniger als 7 Einheiten der 6^{ten} Decimale beträgt. Ähnliche Betrachtungen können wir auch anstellen, wenn es sich um mehrere Gleichungen mit mehreren Unbekannten handelt, wovon unten weiter die Rede sein wird.

Die Separation der Wurzeln.

2. Grenzen für die Wurzeln. Wenn keine Näherungswerte der Wurzeln von vorne herein bekannt sind, so geht der eigentlichen Berechnung das Aufsuchen der rohen Näherungswerte voraus. Hat man Intervalle aufgefunden, in denen je eine Wurzel liegt, so sagt man, die Wurzeln seien *separiert.* Wenn es sich um die Nullstellen einer ganzen rationalen Funktion $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ handelt, so kann man zunächst eine obere Grenze des absoluten Betrages der Wurzeln angeben. Ist M der grösste unter den absoluten Beträgen von $a_1, a_2, \ldots a_n$, so ist

$$\left|\frac{f(x)}{x^n}\right| > |a_0| - M(|x|^{-1} + |x|^{-2} + \cdots + |x|^{-n}) = |a_0| - M\frac{1-|x|^{-n}}{|x|-1}.$$

Sobald daher für einen Wert von $|x|$ die rechte Seite positiv ist, so ist dieser Wert eine obere Grenze für die absoluten Beträge der Wurzeln. So ist insbesondere $1 + \frac{M}{|a_0|}$ eine obere Grenze. In manchen Fällen wird man eine kleinere obere Grenze finden können, wenn man diese Formel nicht auf x selbst anwendet, sondern $x = mu$ setzt, die obere Grenze für u ermittelt und diese mit m multipliziert. Bedeutet M' den grössten unter den absoluten Beträgen von $a_1, a_2m^{-1}, a_3m^{-2}, \ldots a_nm^{-n+1}$, so ist $m + \frac{M'}{|a_0|}$ eine obere Grenze der Wurzeln. Setzt man $x = \frac{1}{z}$, so erhält man für z die Gleichung $a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0 = 0$. Die obere Grenze für $|z|$ liefert den reciproken Wert einer unteren Grenze für $|x|$. — Für die positiven und negativen Wurzeln allein kann man im allgemeinen noch engere Grenzen finden. Ist a_q der erste negative Koeffizient in der Reihenfolge $a_0a_1 \ldots a_n$ und a_r der grösste negative Koeffizient, so ist für positive Werte von x:

$$f(x)x^{-n+q-1} > a_0x^{q-1} + a_1x^{q-2} + \cdots + a_{q-1} + a_r(x^{-1} + \cdots + x^{-n+q-1})$$

$$= a_0x^{q-1} + \cdots + a_{q-1} + a_r\frac{1-x^{-n+q-1}}{x-1}.$$

Da die rechte Seite mit wachsendem x wächst, so ist jeder positive Wert von x, für den sie positiv ist, eine obere Grenze der positiven Wurzeln, z. B. wenn $a_0x^{q-1} > \frac{|a_r|}{x-1}$ $(x > 1)$ und also a fortiori, wenn

$a_0(x-1)^{q-1} > \frac{|a_r|}{x-1} (x > 1)$ oder $x - 1 > \sqrt[q]{\frac{|a_r|}{a_0}}$. Verwandelt man x in $-x$, so liefert derselbe Satz eine untere Grenze der negativen Wurzeln. Es ist indessen nicht lohnend, viel Zeit auf eine genauere Bestimmung der Grenzen zu verwenden, die besser den unten zu entwickelnden Methoden der Separation und Approximation geschenkt wird.

3. Die Differenzengleichung. Um nun innerhalb des so bestimmten endlichen Gebietes die Wurzeln zu trennen, hat *Waring*[2]) und nach ihm *Lagrange*[2]) die Gleichung betrachtet, der die Differenzen je zweier Wurzeln genügen. Für eine Gleichung n^{ten} Grades genügen die Differenzen einer Gleichung vom $(n^2 - n)^{\text{ten}}$ Grade, die aber nur gerade Potenzen der Unbekannten enthält und sich daher als Gleichung vom Grade $\frac{n \,.\, n-1}{2}$ für die Quadrate der Differenzen darstellen lässt. Denkt man sich diese Gleichung nach bekannten Methoden gebildet und bestimmt eine untere Grenze ihrer positiven Wurzeln, so giebt die Quadratwurzel aus dieser Zahl eine untere Grenze für den Abstand zweier reeller Wurzeln der Gleichung an. Sei die Quadratwurzel nicht kleiner als $\varDelta$, so kann also in einem Intervall von der Grösse $\varDelta$ nicht mehr als eine einzige Wurzel der Gleichung liegen. Man separiert daher die Wurzeln eines Intervalls a bis b, indem man die Werte von $f(a)$, $f(a + \varDelta)$, $f(a + 2\varDelta)$ etc. bis $a + n\varDelta \geqq b$ ausrechnet. Da sich nun ein Intervall angeben lässt, in dem alle reellen Wurzeln liegen, so ist damit die Aufgabe, die reellen Wurzeln zu separieren, „auf eine endliche Anzahl von Operationen zurückgeführt". Dies Verfahren ist zwar ausführbar, und mit Hülfe der Differenzenrechnung [I E] lässt sich die Berechnung der Werte $f(a)$, $f(a + \varDelta)$, $f(a + 2\varDelta)$ etc. auf Additionen zurückführen; aber die Bildung der Gleichung, der die Quadrate der Wurzeldifferenzen genügen, wird für höhere Grade sehr umständlich. Nun hat *A. Cauchy* gelehrt, mit Hülfe der oberen Grenze für die absoluten Beträge der Wurzeln aus dem Differenzenprodukt allein eine untere Grenze des kleinsten Unterschiedes zweier Wurzeln zu finden[3]). Ist nämlich P das Produkt der $\frac{n \,.\, n-1}{2}$ Differenzen und ϱ die obere Grenze der Wurzeln, so ist jede Differenz absolut nicht grösser als

---

2) *E. Waring,* Medit. algebr. Cambr. 1770, Lond. Trans. 1779. *J. L. Lagrange,* de la resolution des équations numériques de tous les degrés. Paris 1798. Chap. 1.

3) *A. Cauchy,* Analyse algébrique [note III]; vgl. *A. Cauchy,* Exercises de mathématiques, 4. année, Paris 1829, p. 65.

2ϱ und daher, wenn $\varDelta$ der absolute Betrag der kleinsten Differenz ist, $|P| < \varDelta \cdot (2\varrho)^{\frac{n.n-1}{2}-1}$ oder $\varDelta > |P|(2\varrho)^{-\frac{n.n-1}{2}+1}$. Dieser Wert wird aber im allgemeinen sehr viel zu klein sein und verlangt viel unnötige Rechnung.

4. Descartes' Zeichenregel und Budan-Fourier's Satz. Die Berechnung einer ganzen rationalen Funktion $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ für irgend einen Wert p lässt sich folgendermassen ausführen. Man berechnet nacheinander die Grössen $b_1, b_2, \ldots b_n$ durch die Kette: $b_1 = a_1 + a_0 p$, $b_2 = a_2 + b_1 p$, $b_3 = a_3 + b_2 p, \ldots,$ $b_n = a_n + b_{n-1}p$. Das geschieht am besten nach dem Schema[4]):

$$\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \ldots & a_{n-1} & a_n \\ & a_0 p & b_1 p & b_2 p & b_{n-2} p & b_{n-1} p \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 \ldots & b_{n-1} & b_n \end{array}$$

Dann ist

$$f(x) = b_n + (x-p)(a_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \cdots + b_{n-2}x + b_{n-1})$$

und daher $b_n = f(p)$. Die Grösse b_n ist der Rest, der bei der Division von $f(x)$ durch $x - p$ bleibt, und $a_0 b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$ sind die Koeffizienten des Quotienten. Für genäherte Rechnungen, für welche die Genauigkeit des Rechenschiebers [I F] ausreicht, ist die Ausführung besonders bequem, da alle Multiplikationen bei derselben Stellung des Schiebers abgelesen werden. Wendet man auf den Quotienten dasselbe Verfahren noch einmal an:

$$\begin{array}{ccccc} a_0 & b_1 & b_2 \ldots & b_{n-1} & b_n \\ & a_0 p & c_1 p & c_{n-2} p & \\ \hline & c_1 & c_2 & c_{n-1} & \end{array}$$

so ist

$$f(x) = b_n + c_{n-1}(x-p) + (x-p)^2(a_0(x-p)^{n-2} + c_1(x-p)^{n-1} + \cdots + c_{n-2}),$$

und man sieht, dass auf diese Weise nach und nach $f(x)$ nach Potenzen von $(x-p)$ entwickelt wird. Die Zahlen $b_n, c_{n-1}, d_{n-2}, \ldots$ sind gleich $f(p), f'(p), \frac{f''(p)}{2!}, \ldots$.

Unter der *Anzahl der Zeichenwechsel* einer Zahlenreihe $a_0 a_1 \ldots a_n$ versteht man die Anzahl, welche angiebt, wievielmal zwei benachbarte Grössen der Reihe verschiedenes Zeichen haben. Wenn einige der Grössen Null sind, so sind sie dabei als nicht vorhanden anzusehen, so dass zwei von Null verschiedene Grössen auch dann als

4) *W. G. Horner,* Lond. Trans. Part I. 1819, p. 308.

benachbart gelten, wenn sie durch Nullen getrennt sind. Wenn nun eine der Grössen z. B. a_α durch $a_\alpha + pa_{\alpha-1}$ ersetzt wird, wo p eine positive Grösse bedeuten soll, so kann dadurch offenbar die Zahl der Zeichenwechsel niemals zunehmen. Denn eine Änderung kann nur so eintreten, dass $a_\alpha + pa_{\alpha-1}$ Null wird oder dasselbe Zeichen annimmt wie $a_{\alpha-1}$, während a_α das entgegengesetzte Zeichen hat. Der Zeichenwechsel $a_{\alpha-1}a_\alpha$ geht dabei verloren. Wenn auf a_α noch eine von Null verschiedene Grösse folgt, so bleibt die Anzahl der Zeichenwechsel entweder ungeändert oder nimmt um zwei Einheiten ab. Wenn dagegen a_α die letzte von Null verschiedene Zahl ist, so wird für den Fall, dass $a_\alpha + pa_{\alpha-1}$ Null ist oder ein anderes Zeichen hat wie a_α, ein Zeichenwechsel verloren gehen. Daraus folgt, dass beim Übergange von $a_0a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n$ zu $a_0b_1b_2\ldots b_{n-1}a_n$, wo $b_1b_2\ldots b_{n-1}$ die oben definierten Werte haben, die Anzahl der Zeichenwechsel entweder unverändert bleibt oder sich um eine gerade Anzahl vermindert, wofern nur a_n von Null verschieden vorausgesetzt wird. Wenn ferner b_n entweder Null ist oder entgegengesetztes Vorzeichen hat wie a_n, so wird beim Übergang von $a_0a_1\ldots a_n$ zu $a_0b_1b_2\ldots b_{n-1}b_n$ entweder ein Zeichenwechsel oder eine ungerade Anzahl von Zeichenwechseln verloren gehen. Betrachten wir zuerst den Fall $b_n = 0$. Hier ist p eine positive Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ und $a_0b_1b_2\ldots b_{n-1}$ sind die Koeffizienten der ganzen Funktion $n - 1^{\text{ten}}$ Grades, die nach dem Wegheben des Faktors $x - p$ übrig bleibt. Sind noch mehr positive Wurzeln vorhanden und hebt man nach einander die ihnen entsprechenden Faktoren fort, so vermindert sich dabei die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe der Koeffizienten mindestens um die Zahl der positiven Wurzeln. Daher ist *die Zahl der positiven Wurzeln einer Gleichung höchstens gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe der Koeffizienten.* Dieser Satz ist als *Descartes'*[5]) *Zeichenregel* bekannt. Nach dem Wegheben der den positiven Wurzeln entsprechenden Faktoren sind nur noch negative oder complexe Wurzeln übrig und daher keine Zeichenwechsel mehr in der Reihe der Koeffizienten vorhanden. Man kann daher Descartes' Zeichenregel dahin vervollständigen, dass die Zahl der positiven Wurzeln entweder gleich der Zahl der Zeichenwechsel oder um eine gerade Zahl geringer ist[6]).

Wenn man $f(p + h)$ nach Potenzen von h entwickelt, so wird

---

5) *R. Descartes,* Geometria, Lugd. Bat. 1649, liber III; deutsch v. *L. Schlesinger,* Berlin 1894.

6) *K. F. Gauss,* Werke 3, p. 67.

die Reihe der Koeffizienten gleich: $\frac{f^n(p)}{n!}, \frac{f^{n-1}(p)}{(n-1)!}, \ldots, f'(p), f(p)$. Nach Descartes' Zeichenregel ist die Anzahl der positiven Wurzeln h der Gleichung $f(p+h)=0$ oder, was dasselbe ist, die Anzahl der den Wert p übersteigenden Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ höchstens gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe jener Koeffizienten. Jene Koeffizienten können, wie oben gezeigt wurde, aus der Reihe der Koeffizienten $a_0 a_1 \ldots a_n$ berechnet werden, indem man wiederholt zu einer der Grössen die mit p multiplizierte vorhergehende Grösse hinzufügt. Daraus folgt, wenn p positiv ist, dass die Anzahl der Zeichenwechsel beim Übergang von $a_0 a_1 \ldots a_n$ zu jenen Koeffizienten d. i. von $\frac{f^n(0)}{n!}, \frac{f^{n-1}(0)}{(n-1)!}, \ldots, f'(0), f(0)$ zu $\frac{f^n(p)}{n!}, \frac{f^{n-1}(p)}{(n-1)!}, \ldots, f'(p), f(p)$ nicht zunehmen kann und mindestens um eine Einheit oder eine grössere ungerade Zahl abnimmt, wenn das Vorzeichen von $f(p)$ dem von a_n entgegengesetzt ist. Setzt man in der Gleichung $f(x)=0$ das Binom $a+h$ an Stelle von x ein und wendet denselben Satz auf h an, so ergiebt sich, dass die Anzahl der Zeichenwechsel von $\frac{f^n(x)}{n!}, \frac{f^{n-1}(x)}{(n-1)!}, \ldots, f'(x), f(x)$ beim Übergang von $x=a$ zu $x=a+p$, sobald das Vorzeichen von $f(a+p)$ dem von $f(a)$ entgegengesetzt ist, mindestens um eine Einheit abnimmt, oder mit andern Worten, dass mit wachsendem x die Anzahl der Zeichenwechsel beim Passieren einer Wurzel der Gleichung um eine ungerade Zahl abnimmt und sonst nur um eine gerade Zahl abnehmen kann. Mithin ist die Zahl der Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$, die zwischen einer beliebigen Zahl x_1 und einer grösseren Zahl x_2 liegen, entweder gleich der Anzahl der beim Übergang von x_1 zu x_2 in der Reihe $\frac{f^n(x)}{n!}, \frac{f^{n-1}(x)}{(n-1)!}, \ldots, f'(x), f(x)$ verlorenen Zeichenwechsel oder um eine gerade Anzahl geringer[7]). Für absolut grosse Werte von x überwiegt in jeder Funktion das Glied mit der höchsten Potenz. Für grosse negative Werte sind daher n Zeichenwechsel vorhanden, die beim Übergang zu grossen positiven Werten von x alle verloren gehen. Es gehen also genau so viel Zeichenwechsel verloren, wie die Gleichung reelle und imaginäre Wurzeln hat. Da nun für jede reelle Wurzel ein Zeichenwechsel verloren geht, so stimmt die Zahl der

7) *Dés. Budan*, Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques, 2. éd. Paris 1822. *J. B. J. Fourier,* Analyse des équations déterminées, Paris 1831, livre I. Über die Zeitfolge betr. *Budan* und *Fourier* vgl. *G. Darboux* in *Fourier*'s ges. W. 2, p. 311. *J. P. de Gua,* Par. Mém. in 4°, 1741, p. 459 u. f.

übrigen verlorenen Zeichenwechsel, die immer paarweise verloren gehen, mit der Zahl der komplexen Wurzeln, die ebenfalls paarweise zusammengehören. Fourier lässt jedem dieser Paare verlorener Zeichenwechsel ein ganz bestimmtes Paar konjugierter Wurzeln entsprechen[8]). Er hat aber einen solchen Zusammenhang nicht nachgewiesen, wenn er auch vermutlich vorhanden ist.

Die Werte $\frac{f^n(p)}{n!}, \frac{f^{n-1}(p)}{(n-1)!}, \ldots, f'(p), f(p)$ werden, wie oben gezeigt, auch aus der Reihe $a_0 b_1 b_2 \ldots b_{n-1} b_n$ durch fortgesetztes Addieren der mit p multiplizierten, jedesmal vorhergehenden Grösse abgeleitet. Da dabei, wie wir oben sahen, bei positivem p die Anzahl der Zeichenwechsel sich zwar vermindern aber nicht vergrössern kann, so folgt sofort, dass die Zahl der positiven Wurzeln, die den Wert p nicht übersteigen, höchstens gleich der Anzahl der Zeichenwechsel von $a_0 b_1 b_2 \ldots b_n$ oder um eine gerade Anzahl kleiner ist. Dasselbe gilt von der Reihe $a_0 c_1 c_2 \ldots c_{n-1} b_n$ u. s. w.[9]). — Descartes' Zeichenregel giebt auch über die negativen Wurzeln der Gleichung einen gewissen Aufschluss. Man ersetze x durch $-x$. Dann gehen die positiven Wurzeln in negative über und umgekehrt. Wenn alle Koeffizienten von Null verschieden sind, so ergänzen sich die Anzahlen, die man in beiden Fällen erhält, zu n. Wenn aber einzelne Glieder fehlen, so können die beiden Anzahlen zusammen kleiner sein als n. Es muss dann eine entsprechende Anzahl komplexer Wurzeln vorhanden sein. — Wenn man den reciproken Wert von x in die Gleichung einführt, so kehrt sich die Reihenfolge der Koeffizienten um: $t^n f(t^{-1}) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$. Berechnet man mit dieser neuen Reihenfolge $a_0 a_1 \ldots a_n$ in derselben Weise wie oben durch Addieren der mit p multiplizierten vorhergehenden Grösse nach dem Schema:

$$\begin{array}{llll} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \;\ldots & a_0 \\ 0 & a_n p & B_1 p & B_{n-1} p \\ \hline a_n & B_1 & B_2 & B_n \end{array}$$

die Grössen $a_n B_1 B_2 \ldots B_n$, so ist die Anzahl der Wurzeln von t, die den positiven Wert p übersteigen oder, was dasselbe ist, der positiven Wurzeln x, die nicht grösser sind als $\frac{1}{p}$, höchstens gleich der Anzahl der Zeichenwechsel dieser Reihe[10]). Auch die Koeffizienten der Ent-

8) *J. B. J. Fourier*, l. c. livre I, art. 43.

9) Vergl. für diese Sätze *E. Laguerre*, J. de Math. (3) 9, (1883), p. 99 = oeuv. p. 3. Acta math. 4 (1884), p. 97 = oeuv. p. 184 [I B 2, Nr. **26**, Anm. 424, 427].

10) *E. Laguerre*, J. de Math. (3) 9.

wicklung nach Potenzen von $(t-p)$ liefern ebenfalls eine obere Grenze, die, wie Nr. 2 gezeigt ist, zwar kleiner als jene sein kann, aber umständlicher zu berechnen ist. Wenn man erst $a+h$ statt x und dann $\frac{1}{t}$ statt h einführt, erhält man eine obere Grenze für die Wurzeln x zwischen a und $a+\frac{1}{p}$.[11]) *Laguerre*[12]) hat Descartes' Zeichenregel auf unendliche Reihen ausgedehnt. Es möge die Reihenentwicklung $f(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ nur für $u<|x|<v$ konvergieren, und es sei p ein Wert zwischen u und v, für den $f(x)$ verschwindet. Dann ist auch $\frac{f(x)}{x-p}$ für denselben Konvergenzbereich entwickelbar:

$$\frac{f(x)}{x-p}=\sum_{-\infty}^{+\infty} b_n x^{n-1} \quad \text{wo} \quad \begin{aligned} b_n &= a_n + a_{n+1}p + \cdots \\ &= -a_{n-1}p^{-1} - a_{n-2}p^{-2} - \cdots. \end{aligned}$$

Für die Anwendung von Descartes' Zeichenregel kommt nur der Fall in Betracht, wo die Koeffizienten a eine endliche Anzahl von Zeichenwechseln darbieten, wo also von einem gewissen positiven Index r ab in der Reihe $a_r, a_{r+1}, a_{r+2} \ldots$ kein Zeichenwechsel mehr vorkommt und ebenso von einem negativen Index $-s$ ab in der Reihe $a_{-s}, a_{-s-1}, a_{-s-2} \ldots$ kein Zeichenwechsel mehr vorkommt. Dann haben auch alle Grössen der Reihe $b_r, b_{r+1}, b_{r+2}, \ldots$ dasselbe Zeichen wie $a_r, a_{r+1}, \ldots$, und alle Grössen der Reihe $b_{-s+1}, b_{-s}, b_{-s-1}, \ldots$ das entgegengesetzte Zeichen wie $a_{-s}, a_{-s-1}, a_{-s-2}, \ldots$. Die Zeichenwechsel in der Reihe der Koeffizienten a sind daher dieselben, wie die in der endlichen Reihe $b_r a_{r-1} a_{r-2} \ldots a_0 a_{-1} \ldots a_{-\lambda}$, wo λ nicht kleiner als s und so gewählt sein soll, dass $a_{-\lambda}$ nicht Null ist. Ebenso sind die Zeichenwechsel in der Reihe der Koeffizienten b dieselben, wie die in der endlichen Reihe $b_r b_{r-1} \ldots b_0 b_{-1} \ldots b_{-\lambda}$. Nun ist $b_n = a_n + p b_{n+1}$. Also ist der Übergang von der einen zur andern Reihe ein solcher, wie er oben betrachtet wurde. Da nun das Vorzeichen von $b_{-\lambda}$ dem von $a_{-\lambda}$ entgegengesetzt ist, so geht dabei eine ungerade Zahl von Zeichenwechseln verloren. Liegen zwischen u und v mehrere Wurzeln, und hebt man in derselben Weise die entsprechenden linearen Faktoren weg, so ergiebt sich demnach eine Entwicklung, bei der die Anzahl der Zeichenwechsel mindestens um die Anzahl der Wurzeln geringer ist. Die Funktion hat dann in dem

11) *K. G. J. Jacobi*, Werke 3, p. 279 (J. f. Math. 13 [1834], p. 340) spricht denselben Satz in etwas anderer Form aus.

12) *E. Laguerre* l. c.

Intervall u bis v überall das gleiche Zeichen, und da in der Nähe von $x = u$ die Glieder mit grossem negativen Index, in der Nähe von $x = v$ die mit grossem positiven Index überwiegen, so müssen beide Gruppen von Koeffizienten das gleiche Zeichen besitzen. Mithin kann die Entwicklung nur eine gerade Zahl von Zeichenwechseln besitzen. Die Zahl der positiven Nullstellen der ursprünglichen Entwicklung ist daher der Anzahl ihrer Zeichenwechsel gleich oder um eine gerade Zahl geringer.

Man kann in der Entwicklung nach Potenzen von x auch gebrochene oder auch irrationale Exponenten zulassen. Auch für den Fall, wo die Glieder mit positiven Exponenten oder die mit negativen Exponenten nur in endlicher Anzahl vorhanden sind, bleibt der Beweis bestehen. Laguerre hat von dieser Erweiterung der Zeichenregel zahlreiche Anwendungen gemacht. Sei $f(x)$ eine ganze rationale Funktion von x, und u und v zwei positive Zahlen $(u < v)$, welche die Gleichung $f(x) = 0$ nicht befriedigen. Dann kann man $\frac{f(x)}{(x-u)(x-v)}$ in eine Reihe nach positiven und negativen Potenzen von x entwickeln, die für $u < |x| < v$ und nicht weiter konvergiert. Die Anzahl der Wurzeln zwischen u und v ist dann höchstens gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe der Koeffizienten.

Entwickelt man $\frac{f(x)}{x-u}$ nach fallenden Potenzen von x, so ergeben sich die Koeffizienten $a_0 b_1 b_2 b_3 \ldots b_n,\ b_{n+1} \ldots$, wo $b_{n+\lambda} = b_n u^\lambda$. Von b_n ab sind keine Zeichenwechsel mehr vorhanden, so dass wir den schon oben abgeleiteten Satz wieder erhalten, dass die Anzahl der positiven Wurzeln, die grösser sind als u, die Zahl der Zeichenwechsel in der Reihe $a_0 b_1 \ldots b_n$ nicht übersteigen kann. Nun kann man aber auch wiederholt durch $x - u$ dividieren nnd erhält z. B.

$$\begin{array}{cccc} a_0 & b_1 & b_2 & b_3 \ldots \\ & +\, a_0 u, & +\, c_1 u, & +\, c_2 u \\ \hline a_0 & c_1 & c_2 & c_3 \ldots \end{array}$$

Die Anzahl der Zeichenwechsel kann dabei nur abnehmen, bildet aber ebenfalls eine obere Grenze für die Anzahl der positiven Wurzeln, die den Wert u übersteigen. Bei irgend einem c z. B. c_α kann man auch schräg in die Reihe der b hinaufsteigen $\ldots c_\alpha b_{\alpha+1} b_{\alpha+2} \ldots$, wodurch wie oben gezeigt die Zahl der Zeichenwechsel nur zunehmen kann, also auch dann eine obere Grenze der Wurzeln darstellt. Denkt man sich durch immer höhere Potenzen von $(x - u)$ dividiert, zugleich aber den Wert von u immer kleiner angenommen dergestalt, dass in $\frac{x^r f(x)}{(x-u)^r}$ das Produkt ur einen konstanten Wert z behält, so nähert sich für sehr grosse Werte von r der Ausdruck dem Grenzwert $f(x) \cdot e^{\frac{z}{x}}$. Die Zahl der positiven Wurzeln kann also nicht grösser sein, als die Anzahl der Zeichenwechsel in der Entwicklung von $f(x) \cdot e^{\frac{z}{x}}$ nach fallenden Potenzen von x. Den Wert z vergrössern heisst bei gleichem u den Wert von r vergrössern. Dabei kann die Anzahl der Zeichenwechsel nur abnehmen. Laguerre zeigt, dass für einen hinreichend grossen Wert von z die Zahl der Zeichenwechsel gerade gleich der Anzahl der positiven Wurzeln wird. Statt nach fallenden Potenzen von x kann man auch nach steigenden entwickeln, was mit der Vertauschung von x mit seinem reciproken Wert gleichbedeutend ist.

Newton[13]) hat für die Gleichung $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ den Satz aufgestellt, dass sie mindestens so viele komplexe Wurzeln besitzt, wie in der Reihe a_0^2, $\frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{2} a_1^2 - a_0a_2$, $\frac{2}{n-1} \cdot \frac{n-2}{3} a_2^2 - a_1a_3$, $\ldots$, $\frac{n-1}{2} \cdot \frac{1}{n} a_{n-1}^2 - a_{n-2}a_n$, a_n^2 Zeichenwechsel vorkommen. Sylvester[14]) fand den Beweis in einem allgemeineren Satze, der sich zu dem Newton'schen verhält wie das Theorem von Budan und Fourier zu Descartes' Zeichenregel.

Bei der Anwendung des Theorems von Budan und Fourier wird es häufig vorkommen, dass in einem Intervall zwei Zeichenwechsel verloren gehen und man nun nicht weiss, ob ihnen zwei reelle Wurzeln entsprechen oder nicht. Es mögen z. B. die letzten drei Zeichen der Reihe $f^{(n)}(x)$, $f^{(n-1)}(x)$, $\ldots$ $f'(x)$, $f(x)$ für $x = a$: $+ - +$, für $x = b$: $+ + +$ sein, während alle vorhergehenden Zeichen in beiden Reihen dieselben sind. Dann weiss man nach dem Vorhergehenden, dass $f'(x)$ in dem Intervall eine und nur eine reelle Wurzel hat; aber es ist nicht sicher, ob auch $f(x)$ in dem Intervall zwei reelle Wurzeln besitzt oder keine. $f''(x)$ kann in dem ganzen Intervall nur positiv sein; die Curve $y = f(x)$ ist mithin nach der Seite der wachsenden y konkav. Die beiden Ordinaten $f(a)$ und $f(b)$ sind positiv, und es fragt sich, ob nun die Kurve in dem Intervall ganz über der x-Achse liegt oder die x-Achse schneidet. Fourier[15]) denkt sich die Tangenten konstruiert, deren Berührungspunkte zu den Ab-

13) *J. Newton,* Arithmetica universalis. Cambr. 1707. 2. ed. Lond. 1722. Cap. II.

14) *J. J. Sylvester,* Phil. Mag. (4) 31 (1866), p. 214.

15) *J. B. J. Fourier,* Analyse des équ. déterminées. Paris 1831. Liv. I, art. 25.

scissen a und b gehören, und sucht deren Schnittpunkte mit der x-Achse auf. Die Abscissen der Schnittpunkte sind $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ und $b - \frac{f(b)}{f'(b)}$ (zugleich die Näherungswerte nach Newton's Verfahren). Wenn $b > a$, dagegen $a - \frac{f(a)}{f'(a)} > b - \frac{f(b)}{f'(b)}$, so kreuzen sich die Tangenten vor der x-Achse und die Gleichung hat keine reellen Wurzeln zwischen a und b. Wenn $a - \frac{f(a)}{f'(a)} < b - \frac{f(b)}{f'(b)}$, so können zwischen diesen beiden Werten immer noch zwei Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse liegen. Man kann dann diese neuen engeren Grenzen an Stelle von a und b nehmen und analog mit ihnen verfahren; es sei denn, dass $f'(x)$ für die beiden neuen Werte das gleiche Vorzeichen hätte, woraus sogleich erhellen würde, dass keine Wurzeln in dem Intervall liegen. Besser ist es noch, einen Näherungswert c für die Wurzel von $f'(x)$, die zwischen a und b liegt, zu benutzen. Ist $f'(c) > 0$, so kann man mit Vorteil gleich c an Stelle von b nehmen, für $f'(c) < 0$ dagegen an Stelle von a. Analog ist die Untersuchung, wenn $f(a)$ und $f(b)$ beide negativ und $f''(x)$ in dem Intervall negativ ist.

Wenn zwischen a und b das Zeichen von $f''(x)$ noch wechselt, so geht man in der Reihe der Ableitungen zurück und verengert das Intervall, das eine Wurzel von $f'(x)$ einschliesst, zuerst so, dass kein Zeichenwechsel mehr eintritt. Das kann man durch genäherte Berechnung der Wurzel von $f''(x)$ u. s. w.

Das Verfahren kann langwierig werden, wenn die x-Achse nahe mit einer zu ihr parallelen Tangente zusammenfällt, und es wird illusorisch, wenn die Kurve die x-Achse berührt. Wollte man sich vergewissern, dass dieser Fall nicht eintritt, so müsste man zunächst feststellen, dass $f(x)$ und $f'(x)$ nicht gleichzeitig verschwinden. Durch genäherte Berechnungen würde dies schwer zu machen sein, falls die Wurzeln von $f(x)$ und $f'(x)$ einander nahe rücken, und wenn sie übereinstimmen, so kann man dies durch Näherungsrechnungen überhaupt nicht beweisen.

5. Der Sturm'sche Satz. Für den Fall, dass $f(x)$ eine ganze rationale Funktion ist, lässt sich durch das Verfahren des gemeinsamen Teilers volle Sicherheit gewinnen. Zugleich führt dies, wie Sturm[16]) gezeigt hat, zu einem vollkommenen Mittel, die Zahl der reellen Wurzeln, die innerhalb eines Intervalls liegen, anzugeben und

---

16) *J. K. Fr. Sturm,* Bulletin de Férussac **11**, **1829**. — Par. Mém. Sav. [Étr.] 6 (1835).

sie dadurch auch zu trennen. Das Verfahren, den gemeinsamen Teiler zu finden, besteht darin, die folgende Kette von Gleichungen zu bilden:

$$\begin{aligned} f(x) &= q_1(x) f'(x) - r_1(x) \\ f'(x) &= q_2(x) r_1(x) - r_2(x) \\ r_1(x) &= q_3(x) r_2(x) - r_3(x) \\ &\text{etc.,} \qquad [\text{I B 1 a, Nr. } \mathbf{12}] \end{aligned}$$

wo $q_1, q_2, \ldots$ die Quotienten und $-r_1, -r_2, \ldots$ die Reste der Division sind. Ist der letzte von Null verschiedene Rest r_ν eine Konstante, so haben $f(x)$ und $f'(x)$ keinen gemeinsamen Teiler. Im andern Fall stellt dieser Rest r_ν den grössten gemeinsamen Teiler dar. Im ersten Fall giebt es keinen Wert von x, für den zwei benachbarte Funktionen der Reihe $f(x), f'(x), r_1(x), r_2(x), \ldots r_\nu$ gleichzeitig verschwinden. Zugleich geht aus der Kette von Gleichungen hervor, dass beim Verschwinden einer der Funktionen $f', r_1, r_2, \ldots, r_{\nu-1}$ die beiden benachbarten Glieder der ganzen Reihe $f, f', r_1, \ldots r_\nu$ entgegengesetztes Zeichen haben. Daher wird die Anzahl der Zeichenwechsel nur beim Verschwinden von f geändert und zwar geht mit wachsendem x jedesmal ein Zeichenwechsel verloren. Ist daher $x_2 > x_1$, so ist die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe $f(x_2)$, $f'(x_2), r_1(x_2), \ldots r_\nu$ vermindert um die Anzahl in der Reihe $f(x_1)$, $f'(x_1), r_1(x_1), \ldots r_\nu$, gleich der Anzahl der Wurzeln zwischen x_1 und x_2. Wenn in dem Intervall x_1 bis x_2 schon r_α sein Zeichen nicht wechselt, so braucht man offenbar nur die Reihe $f, f', r_1, \ldots r_\alpha$ zu betrachten. Wenn r_ν nicht konstant ist, so ist die Anzahl der verlorenen Zeichenwechsel auch gleich der Zahl der Wurzeln zwischen x_1 und x_2, wobei aber jede mehrfache Wurzel nur einmal gerechnet ist. Der Sturm'sche Satz ist nicht auf das Verfahren des grössten gemeinsamen Teilers beschränkt. Er gilt für jede Funktionsreihe $f f_1 f_2 \ldots f_n$, wenn 1) f_1 beim Verschwinden von f das Vorzeichen von f' hat, 2) beim Verschwinden einer der Funktionen $f_1 \ldots f_{n-1}$ die benachbarten entgegengesetztes Zeichen haben und 3) f_n in dem betrachteten Intervall sein Zeichen nicht ändert. So bilden z. B. für die Säkulargleichung (I A 2, Nr. **26**)

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x, & a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}-x, & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots & a_{nn}-x \end{vmatrix} = 0 \qquad a_{ik} = a_{ki}$$

die Funktionen

$$f_\alpha = (-1)^\alpha \begin{vmatrix} a_{11}-x, & a_{12}, & \ldots & a_{1\,n-\alpha} \\ a_{21}, & a_{22}-x, & \ldots & a_{2\,n-\alpha} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-\alpha,1}, & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & a_{n-\alpha,\,n-\alpha}-x \end{vmatrix}, \qquad f_n = (-1)^n$$

eine Sturm'sche Reihe, wie aus der Theorie der Determinanten gefolgert werden kann. Daraus ergiebt sich sofort die Realität aller Wurzeln[17]). — Die praktische Ausführung des Verfahrens des grössten gemeinsamen Teilers ist nicht beschwerlich, wenn man die Koeffizienten nur genähert berechnet, was im allgemeinen genügt. Man bedient sich dabei mit Vorteil des Rechenschiebers[18]).

Betrachtet man die Koeffizienten einer Gleichung als veränderlich, so kann sich die Anzahl der reellen Wurzeln nur ändern, wenn zwei Wurzeln zusammenfallen, d. h. wenn die Discriminante (I B 1 a, Nr. **20**—**22**; I B 2, Nr. **25**, **26**) verschwindet. Das Gebiet der Veränderlichen wird durch das Gebilde, auf dem die Discriminante verschwindet, in Teile geteilt, die den verschiedenen Anzahlen reeller Wurzeln entsprechen[19]).

6. Cauchy's Integral. Zieht man komplexe Werte mit in Betracht, so giebt Cauchy's Integral Aufschluss über die Zahl der in einem Gebiete liegenden Wurzeln. Nach Cauchy (II B 1) ist die Zahl N der Nullpunkte einer Funktion $f(x)$ in einem Gebiete, wo sie sich regulär verhält,

$$N = \frac{1}{2\pi}\int \frac{f'(x)}{f(x)}\frac{dx}{i};$$

dabei ist das Integral über den Rand des Gebietes im positiven Sinne zu erstrecken und die Funktion ist auch auf dem Rande regulär und von Null verschieden vorausgesetzt. Man braucht nur die reellen Teile des Integrals zu beachten und hat, wenn φ das Argument von $f(x)$ bedeutet, $f(x) = \varrho e^{\varphi i}$ und daher

$$\frac{f'(x)}{f(x)}\frac{dx}{i} = \frac{1}{i} d(\log f(x)) = \frac{1}{i} d(\log \varrho) + d\varphi.$$

Der reelle Teil des Integrals drückt also die Zunahme des Argumentes von $f(x)$ aus. Um den Wert des Integrals zu finden, hat man nur das Argument von $f(x)$ für eine hinreichende Anzahl von Punkten des Randes auszurechnen. Die Punkte sind so dicht zu wählen, dass über die Zunahme des Arguments keine Zweideutigkeit bestehen kann. Bezeichnet M die obere Grenze von $\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|$ in irgend einem Teil des Randes von der Länge s, so kann der Beitrag jedes unendlich kleinen Randteilchens zum reellen Teil des Integrals nicht grösser sein als Mds, und der ganze Beitrag des Randteiles s kann daher nicht

17) Siehe den Beweis bei *H. Weber,* Algebra 1, 2. Aufl. p. 307.

18) Vergl. das Beispiel in Nr. 9.

19) Vergl. *L. Kronecker,* Berl. Ber. 1878, p. 145 und *L. Kronecker,* Journ. für Mathematik 92 (1882), pag. 121 = Werke 2, p. 71, 386. *C. Faerber,* Dissertation. Berlin 1889.

grösser sein als Ms. Wählt man nun die Punkte des Randes so dicht, dass von einem Punkt zum nächsten Ms kleiner als π ist, so kann über die Zunahme des Argumentes keine Zweideutigkeit mehr existieren. Ferner braucht die Genauigkeit, mit der man das Argument von $f(x)$ für die einzelnen Punkte ausrechnet, nur so gross zu sein, dass die Summe der Änderungen des Argumentes bis auf einen Fehler von weniger als π bekannt ist. — Man kann die Änderung von φ auch allein durch Betrachtung der Vorzeichen des reellen und imaginären Teiles von $f(x)$ beurteilen. Denn es ist, wenn $f(x) = U + Vi$, $U = \varrho \cos \varphi$ und $V = \varrho \sin \varphi$. Das Vorzeichen von U und V bestimmt den Quadranten, in dem sich φ befindet. Da $\cos \varphi$ der Differentialquotient von $\sin \varphi$ ist, so wird V mit wachsendem φ wachsen, wenn U positiv ist, und abnehmen, wenn U negativ ist. Beim Verschwinden von V wird mithin die Kombination der Vorzeichen von V und U mit wachsendem φ einen Zeichenwechsel verlieren, mit abnehmendem φ einen Zeichenwechsel gewinnen. Wenn daher beim Durchlaufen des Randes im positiven Sinne die Funktion V p-mal ihr Zeichen so wechselt, dass V, U einen Zeichenwechsel verliert und q-mal so, dass V, U einen Zeichenwechsel gewinnt, so ist die Gesamtänderung von φ gleich $(p - q)\pi$ und die Zahl der Wurzeln im Gebiete also gleich $\frac{p-q}{2}$. Denn φ geht alsdann p-mal im wachsenden Sinne durch 0^0 oder 180^0 und q-mal im abnehmenden Sinne. Man kann in diesem Lehrsatze auch V mit U und U mit $-V$ vertauschen, da $if(x) = -V + Ui$ dieselben Nullstellen hat wie $f(x)$. Für den Fall, dass $f(x)$ eine ganze Funktion n^{ten} Grades ist, kann man auch schreiben:

$$f(x) = x^n [a_0 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + \cdots + a_n x^{-n}].$$

Für grosse Werte von $|x|$ wird der Klammerausdruck nahezu konstant. Die Änderung des Argumentes von $f(x)$ wird daher sehr nahe gleich der Änderung des Argumentes von x^n. Es folgt daraus, dass für ein Gebiet, auf dessen Rande $|x|$ hinreichend gross ist [Nr. 2], die Anzahl der Wurzeln gleich der Änderung des Argumentes von x^n dividiert durch 2π, also gleich n sein muss. Wenn das Gebiet auf der einen Seite von einer Geraden, auf der andern Seite von einem Kreisbogen begrenzt wird, der mit einem sehr grossen Radius um den Nullpunkt beschrieben ist und zwei Punkte der Geraden verbindet, so ist die Änderung von φ auf dem Kreisbogen für einen hinreichend grossen Radius beliebig wenig von $n\pi$ verschieden. Lässt man den Radius unendlich werden, so erhält man also den Satz, dass die Zahl der auf der einen Seite der Geraden liegenden Wurzeln gleich $\frac{n}{2}$ plus der durch 2π dividierten Änderung des Argumentes von $f(x)$ längs der betrachteten Geraden ist. Die betreffende Seite der Geraden ist die zu dem Sinne, in dem sie durchlaufen wird, positive. Oder, wenn $f(x) = U + Vi$, so ist die Zahl der Wurzeln auf dieser Seite gleich $\frac{n}{2} + \frac{p-q}{2}$, wo p die Anzahl der Male angiebt, dass V sein Zeichen beim Durchlaufen der Geraden wechselt, während V, U einen Zeichenwechsel verliert, und q die Anzahl der Male, dass V sein Zeichen wechselt, während V, U einen Zeichenwechsel gewinnt. Die Zahl $p - q$ findet man durch das Verfahren des grössten gemeinsamen Teilers ähnlich wie beim Sturm'schen Satz. Man setzt auf der Geraden $x = a + bt$, wo a und b zwei im allgemeinen komplexe Zahlen sind und t von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft. U und V werden dann ganze rationale Funktionen von t. Im allgemeinen werden U und V von gleichem Grade sein; dann kann man das Verfahren durch Division von V durch U beginnen oder auch durch Division von U durch $-V$. Wenn dagegen eine von ihnen von höherem Grade ist, so hat man nur eine Möglichkeit. Man bildet nun die Kette von Gleichungen z. B.

$$V = q_1 U - r_1$$
$$U = q_2 r_1 - r_2$$
$$\text{etc.}$$

Die Reihe $V, U, r_1, r_2 \ldots r_\alpha$ kann dann mit wachsendem t nur dann die Anzahl der Zeichenwechsel ändern, wenn V verschwindet. Dabei wird, je nachdem V, U einen Zeichenwechsel verliert oder gewinnt, auch die Reihe einen Zeichenwechsel verlieren oder gewinnen. Folglich ist $p - q$ der Unterschied in der Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe für $t = -\infty$ vermindert um die Anzahl für $t = +\infty$. Das Analoge gilt, wenn $U, -V$ an die Stelle von V, U gesetzt wird. Besonders einfach wird das Verfahren für den Fall reeller Koeffizienten von $f(x)$, wenn es auf irgend eine Senkrechte zur reellen Achse angewendet wird. Man setzt $x = a + ti$, wo a eine reelle Zahl ist. Da nun $f(x) = f(a) + f'(a)\,ti + \frac{f''(a)}{2} t^2 i^2 + \cdots$, so wird U nur grade Potenzen von t enthalten und V nur ungrade. Dadurch wird das Teilverfahren wesentlich abgekürzt. Für $n = 4$ wird z. B.:

$$U = At^4 - A_1 t^2 + A_2, \quad -V = Bt^3 - B_1 t,$$
$$r = Ct^2 - C_1, \quad r_2 = Dt, \quad r_3 = E,$$

wo

$$C = A_1 - \frac{AB_1}{B}, \quad C_1 = A_2, \quad D = B_1 - \frac{BC_1}{C}, \quad E = A_2.$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass von den Grössen B, C, D, E keine verschwindet. Andernfalls würde das Verfahren sich noch abkürzen. Die Anzahl der Wurzeln, deren reeller Teil kleiner ist als a, muss nun gleich $\frac{n}{2}$ vermehrt um die Hälfte der Zahl sein, die angiebt, wie viel Zeichenwechsel beim Übergang von $A, -B, C, -D, E$ zu A, B, C, D, E verloren gehen. Ist $\mathfrak{F}$ die Zahl der Zeichenfolgen, $\mathfrak{W}$ die der Zeichenwechsel in der Reihe A, B, C, D, E, so ist die Anzahl jener Wurzeln also gleich $\frac{n}{2} + \frac{\mathfrak{F} - \mathfrak{W}}{2}$ oder, da $n = \mathfrak{F} + \mathfrak{W}$, gleich $\mathfrak{F}$.

Es scheint zunächst, als wenn sich diese Betrachtungen bei einer reellen Funktion auf die reelle Achse selbst nicht anwenden liessen, weil hier der imaginäre Teil längs der ganzen Geraden verschwindet. Man kann aber eine Gerade annehmen, die der reellen Achse parallel ist, und kann sie ihr beliebig nahe rücken lassen. Setzt man $x = t - \varepsilon i$, wo ε eine sehr kleine positive Zahl sein soll, so wird mit Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung $f(x) = f(t) - f'(t) \cdot \varepsilon \cdot i$ und daher $U = f(t)$, $-V = f'(t) \cdot \varepsilon$. Das Verfahren wird also mit dem Sturm'schen Verfahren identisch. $\frac{n}{2} + \frac{p-q}{2}$ liefert die Anzahl der reellen Wurzeln vermehrt um die Anzahl der komplexen Wurzelpaare. $p - q$ ist die Anzahl der reellen Wurzeln und $\frac{n-(p-q)}{2}$ ist die Anzahl der komplexen Wurzelpaare.

Auch für irgend ein gradlinig begrenztes Gebiet kann man in ähnlicher Weise die Wurzeln feststellen. Nur muss man dann für jede Seite die Werte von t, die den beiden Endpunkten entsprechen, einsetzen und die Änderung in der Zahl der Zeichenwechsel feststellen.

Den Ausnahmefall, dass U und V einen gemeinsamen Teiler haben, kann man ebenfalls einschliessen. Beim Durchgang durch eine Wurzel des gemeinsamen Teilers werden dann alle Funktionen der Reihe verschwinden und die Zahl der Zeichenwechsel wird dadurch nicht geändert. Man denke sich nun diese Wurzeln auf der Geraden durch kleine Ausweichungen vermieden, welche die Wurzeln auf der positiven Seite lassen. Bei jeder Wurzel erfährt dann das Argument von $f(x)$ einen Zuwachs von π, bei einer m-fachen Wurzel einen Zuwachs von $m\pi$. Ist daher $p - q$ die Zahl der bei dem ganzen Umgang verlorenen Zeichenwechsel und λ die Zahl der Wurzeln auf dem Rande (mehrfache Wurzeln mehrfach gerechnet), so ist die Änderung des Argumentes von $f(x)$, wenn alle auf dem Rande liegenden Wurzeln mit in das Gebiet eingeschlossen werden, gleich $(p-q)\pi + \lambda\pi$. Die Zahl der Wurzeln im Gebiet ist mithin $\frac{p-q}{2} + \frac{\lambda}{2}$. Für eine unendliche Gerade würde zu dieser Zahl, wie oben gezeigt, noch $\frac{n}{2}$ hinzuzufügen sein, um die Anzahl der auf der positiven Seite der Geraden liegenden Wurzeln zu erhalten, und λ würde einfach gleich dem Grade des grössten gemeinsamen Teilers sein.

7. Charakteristiken-Theorie. Alle diese Sätze sind spezielle Fälle einer allgemeineren Theorie, die sich auf die gemeinsamen Wertsysteme von mehreren Gleichungen zwischen mehreren reellen Veränderlichen bezieht[20]) (I B 1 b, Nr. 6 u. fg.). Es seien drei Gleichungen zwischen zwei reellen Veränderlichen gegeben $f(xy) = 0$, $g(xy) = 0$, $h(xy) = 0$. f, g, h seien stetige Funktionen von x und y, die nur längs gewisser Kurven verschwinden, welche die Teile der Ebene von einander trennen, in denen die Funktionen verschiedene Zeichen haben. Die Kurven sollen aus einem oder mehreren geschlossenen Zügen bestehen, und es soll keinen Punkt geben, in dem gleichzeitig f, g, h verschwinden. Es handle sich zunächst um die Schnittpunkte der Kurven $f = 0$ und $g = 0$. Wir gehen auf der Curve $f = 0$ entlang und betrachten die Schnittpunkte mit $g = 0$. Die Richtung, in der wir auf der Kurve $f = 0$ fortschreiten, möge so bestimmt sein, dass das Gebiet, wo $f(xy)$ negativ ist, auf der positiven Seite liegt, d. h. es soll, wenn die Bogenlänge s in der Richtung des Fortschreitens wachsend angenommen wird,

$$\frac{dx}{ds} = -\frac{f_2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{f_1}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}$$

sein (unter $f_1 f_2$ die partiellen Ableitungen nach x und y verstanden und die Wurzel positiv genommen). Dann ist

$$dg = g_1 dx + g_2 dy = (f_1 g_2 - f_2 g_1) \frac{ds}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}.$$

Es wird mithin g zu- oder abnehmen, je nachdem $f_1 g_2 - f_2 g_1$ positiv oder negativ ist. Versteht man unter sign $\{\ \}$ das Vorzeichen der zwischen den Klammern stehenden Grösse, so kann man schreiben

$$\operatorname{sign}\{dg\} = \operatorname{sign}\{f_1 g_2 - f_2 g_1\}.$$

Dabei ist zunächst angenommen, dass $f_1 g_2 - f_2 g_1$ in keinem der Schnittpunkte von $f = 0$ und $g = 0$ verschwindet. Durchläuft man nun die ganze Kurve $f = 0$ einmal und achtet bei allen Schnittpunkten mit der Kurve $g = 0$ darauf, ob g beim Durchgange zunimmt

20) *L. Kronecker,* Berl. Ber. 1869, p. 159, 668 und 1878, p. 145 = Werke 1, p. 175, 213; 2, p. 71. Der Fall mehrerer reeller Veränderlichen kann auch durch Elimination auf den einer Veränderlichen zurückgeführt werden. Die Bestimmung der Anzahl reeller Wurzelsysteme führt dabei auf den Sturm'schen Satz; vergl. *E. Phragmén,* Par. C. R. 114 (1892), p. 205; *É. Picard,* ib. p. 208.

oder abnimmt, so muss für alle Schnittpunkte $\sum \operatorname{sign}\{dg\} = 0$, also $\sum \operatorname{sign}\{f_1 g_2 - f_2 g_1\} = 0$ sein, weil g auf jedem geschlossenen Zug wieder zu seinem ursprünglichen Wert zurückkehrt. Werden an Stelle der Schnittpunkte mit der Kurve $g = 0$ zugleich die mit $g = 0$ und $h = 0$ betrachtet, so hat man nur gh an die Stelle von g zu setzen und hat

$$\sum_{f=0,\ gh=0} \operatorname{sign}\{d(gh)\} = 0,$$

oder, wenn man die Schnittpunkte $f = 0$, $g = 0$ von den Schnittpunkten $f = 0$, $h = 0$ trennt:

$$\sum_{f=0,\ g=0} \operatorname{sign}\{d(gh)\} + \sum_{f=0,\ h=0} \operatorname{sign}\{d(gh)\} = 0,$$

Oder, da $d(gh) = hdg + gdh$ und folglich für $g = 0$ $d(gh) = hdg$, für $h = 0$ $d(gh) = gdh$ ist,

$$\sum_{f=0,\ g=0} \operatorname{sign}\{hdg\} + \sum_{f=0,\ h=0} \operatorname{sign}\{gdh\} = 0,$$

oder

$$\sum_{f=0,\ g=0} \operatorname{sign}\{h(f_1 g_2 - f_2 g_1)\} = \sum_{f=0,\ h=0} \operatorname{sign}\{g(h_1 f_2 - h_2 f_1)\},$$

Betrachten wir ebenso die Durchschnittspunkte der Kurve $g = 0$ mit den Kurven $f = 0$ und $h = 0$, so finden wir auf dieselbe Weise:

$$\sum_{g=0,\ h=0} \operatorname{sign}\{f(g_1 h_2 - g_2 h_1)\} = \sum_{g=0,\ f=0} \operatorname{sign}\{h(f_1 g_2 - f_2 g_1)\},$$

oder beide Resultate vereinigend:

$$\sum_{g=0,\ h=0} \operatorname{sign}\left\{\begin{vmatrix} f & g & h \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix}\right\} = \sum_{h=0,\ f=0} \operatorname{sign}\left\{\begin{vmatrix} f & g & h \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix}\right\} = \sum_{f=0,\ g=0} \operatorname{sign}\left\{\begin{vmatrix} f & g & h \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix}\right\}.$$

Die Zahl, die in diesen drei Formen dargestellt ist, muss grade sein. Denn zerlegt man die Summe $\sum \operatorname{sign}\{h(f_1 g_2 - f_2 g_1)\}$ in die beiden Teile, für welche h einmal positiv und einmal negativ ist, so ist offenbar

$$\sum_{f=0,\ g=0} \operatorname{sign}\{h(f_1 g_2 - f_2 g_1)\} = \sum_{h>0,\ f=0,\ g=0} \operatorname{sign}\{f_1 g_2 - f_2 g_1\} - \sum_{h<0,\ f=0,\ g=0} \operatorname{sign}\{f_1 g_2 - f_2 g_1\}.$$

Oben fanden wir aber

$$0 = \sum_{h>0,\ f=0,\ g=0} \operatorname{sign}\{f_1 g_2 - f_2 g_1\} + \sum_{h<0,\ f=0,\ g=0} \operatorname{sign}\{f_1 g_2 - f_2 g_1\},$$

folglich ist:

$$\sum_{f=0,\ g=0} \operatorname{sign}\{h(f_1 g_2 - f_2 g_1)\} = -2 \sum_{h<0,\ f=0,\ g=0} \operatorname{sign}\{f_1 g_2 - f_2 g_1\} = -2K.$$

Die Zahl K nennt *Kronecker* die *Charakteristik des Funktionensystems* f, g, h. Wenn man die Schnittpunkte der Kurven $f=0$ und $g=0$, die in das Gebiet $h<0$ fallen, betrachtet und jeden je nach dem Vorzeichen von $f_1 g_2 - f_2 g_1$ positiv oder negativ rechnet, so ist die Charakteristik gleich der algebraischen Summe. Die Charakteristik kann nun nach dem obigen auch in der Form

$$-\frac{1}{2} \sum_{h=0,\ f=0} \operatorname{sign}\{g(h_1 f_2 - h_2 f_1)\} = -\frac{1}{2} \sum_{h=0,\ f=0} \operatorname{sign}\{g df\}$$

dargestellt werden. D. h. mit andern Worten, die Charakteristik ist nicht nur durch die Durchschnittspunkte von $f=0$ und $g=0$ im Gebiete $h<0$ bestimmt, sondern kann auch aus den Vorzeichen von f und g auf dem Rande des Gebietes $h<0$ berechnet werden. Da $\operatorname{sign}\{g df\}$ gleich $+1$ oder -1 ist, je nachdem das Funktionenpaar f, g beim Passieren des Schnittpunktes $h=0$, $f=0$ einen Zeichenwechsel verliert oder gewinnt, so ist die Charakteristik gleich der halben Differenz der gewonnenen und der verlorenen Zeichenwechsel f, g, wenn man den Rand $h=0$ in dem angegebenen Sinne durchläuft und die Schnittpunkte mit der Kurve $f=0$ beachtet, oder auch gleich der halben Differenz der verlorenen und gewonnenen Zeichenwechsel f, g, wenn man die Schnittpunkte mit der Kurve $g=0$ beachtet. Wenn f und g auf dem Rande $h=0$ als ganze rationale Funktionen einer reellen Veränderlichen ausgedrückt werden können oder mit ganzen rationalen Funktionen auf dem ganzen Rande das gleiche Zeichen haben, so braucht man also nur auf diese ganzen Funktionen das Verfahren des gemeinsamen Teilers anzuwenden, um die Charakteristik zu finden. So ist es z. B., wenn f und g ganze Funktionen von x und y sind, für ein gradlinig begrenztes Gebiet möglich, den Wert der Charakteristik zu finden. Auf die analytische Darstellung der Funktion $h(xy)$ kommt dabei gar nichts an. Auch brauchen die Kurven $f=0$ und $g=0$ den Bedingungen der Kontinuität nur in dem Gebiet $h<0$ unterworfen zu sein. — Von der Voraussetzung, dass die Determinanten, z. B. $f_1 g_2 - f_2 g_1$, in den Schnittpunkten $f=0$ und $g=0$ nicht verschwinden sollen, kann man sich befreien. Man setze $f - v_1 h$ und $g - v_2 h$ an die Stelle von f und g. Dadurch wird die Determinante

$$\begin{vmatrix} f & g & h \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix}$$

nicht geändert. Die Schnittpunkte $f=0$, $h=0$ und die Schnittpunkte $g=0$, $h=0$ werden auch nicht geändert, wohl aber die Schnittpunkte $f=0$, $g=0$. Ihre Koordinatenänderungen $dx\,dy$, die den Änderungen $dv_1\,dv_2$ entsprechen, ergeben sich aus den Gleichungen:

$$(f_1 - v_1 h_1)\,dx + (f_2 - v_1 h_2)\,dy = h\,dv_1,$$
$$(g_1 - v_2 h_1)\,dx + (g_2 - v_2 h_2)\,dy = h\,dv_2.$$

Gesetzt nun, es bliebe die Determinante dieses Systems Null für alle Werte von v_1 und v_2, die als Funktionen von x und y durch die Gleichungen $f - v_1 h = 0$, $g - v_2 h = 0$ mit x und y zusammenhängen, so müssten die Werte von $\frac{f}{h}$ und $\frac{g}{h}$ von einander abhängig sein. Da man nun aber v_1 und v_2 beliebige Werte geben kann, so würde man dann die Wahl so treffen können, dass die Gleichungen $\frac{f}{h} = v_1$ und $\frac{g}{h} = v_2$ keine gemeinsamen Lösungen hätten. Mithin kann man durch passende Annahme von v_1 und v_2 bewirken, dass, wenn überhaupt Schnittpunkte der Kurven $f - v_1 h = 0$, $g - v_2 h = 0$ vorhanden sind, die Funktionaldeterminante [I B 1 b, Nr. **21**] in ihnen von Null verschieden ist. Das kann offenbar auch durch beliebig kleine Werte von v_1 und v_2 erreicht werden, da ja nur die Befriedigung gewisser Gleichungen zu vermeiden ist. Die Kurven $f=0$ und $g=0$ brauchten also nur beliebig wenig geändert zu werden. Nun kann man definieren, wie ein gemeinsamer Punkt der Kurven $f=0$, $g=0$ für die Charakteristik gezählt werden soll, wenn $f_1 g_2 - f_2 g_1$ für ihn verschwindet. Wenn für kleine Werte von v_1 und v_2 die Kurven $f - v_1 h = 0$, $f - v_2 g = 0$ keinen Schnittpunkt gemein haben, so ist der Punkt nicht zu zählen. Wenn dagegen aus diesem Punkt einer oder mehrere Schnittpunkte der Kurven $f - v_1 h = 0$, $g - v_2 h = 0$ hervorgehen, so ist jeder von ihnen je nach dem Zeichen der Funktionaldeterminante mit $+1$ oder -1 zu rechnen, und ihre algebraische Summe giebt die Zahl, die dem Schnittpunkt von $f=0$ und $g=0$ zukommt. Analoges gilt von den Punkten $f=0$, $h=0$ und $g=0$, $h=0$. Wenn dies geschieht, bleibt der Satz erhalten:

$$-\frac{1}{2}\sum_{f=g=0 \text{ oder } g=h=0 \text{ oder } f=h=0} \operatorname{sign}\left\{\begin{vmatrix} f & g & h \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix}\right\} = \sum_{h<0,\ f=g=0} \operatorname{sign}\{f_1 g_2 - f_2 g_1\} = \text{etc.}$$

Bei kontinuierlichen Änderungen der drei Kurven kann sich die Charakteristik nicht ändern, wenn nicht alle drei Kurven sich in einem Punkte schneiden. Denn man kann, wie eben gezeigt, ohne Änderung der Charakteristik nötigenfalls die Kurven $f=0$ und $g=0$ so abändern, dass $f_1 g_2 - f_2 g_1$ von Null verschieden ist. Dann kann die Charakteristik sich nur dadurch ändern, dass bei der Änderung eines Schnittpunktes h sein Zeichen ändert. Je nachdem dabei $h(f_1 g_2 - f_2 g_1)$ abnimmt oder zunimmt oder, wie man auch sagen kann, je nachdem das Funktionenpaar h, $f_1 g_2 - f_2 g_1$ beim Übergang einen Zeichenwechsel gewinnt oder verliert, wird die Charakteristik um eine Einheit grösser oder kleiner. Denkt man sich die Koeffizienten von f, g, h als rationale Funktionen eines Parameters t, durch dessen Änderung die Veränderung der Kurven sich vollzieht, so kann die Bedingung, dass f, g, h gleichzeitig verschwinden, in der Form $R(t)=0$ ausgedrückt werden, wo $R(t)$ eine ganze rationale Funktion von t ist (I B 1 b, Nr. **14**). Lässt man t sich verändern, so wird sich die Charakteristik nur beim Passieren einer Wurzel von $R(t)=0$ ändern. Andrerseits kann man nun eine rationale Funktion bilden, die beim Passieren irgend einer der Wurzeln dasselbe Zeichen hat wie $h(f_1 g_2 - f_2 g_1)$. Man braucht nur die Summe

$$\sum \frac{1}{h(f_1 g_2 - f_2 g_1)}$$

über die sämtlichen reellen und komplexen Lösungen der Gleichungen $f=0$ und $g=0$ zu erstrecken. Diese rationale Funktion wird für $R(t)=0$ unendlich, ist also in der Form $\frac{F(t)}{R(t)}$ darstellbar, wo $F(t)$ nicht mehr für $R(t)=0$ unendlich wird. Ist $F(t)$ selbst keine ganze Funktion von t, so kann bekanntlich [I B 1 a, Nr. 2] eine ganze Funktion $G(t)$ gebildet werden, die für $R(t)=0$ mit $F(t)$ übereinstimmt:

$$G(t) = \sum \frac{F(t_\nu)}{R'(t_\nu)} \cdot \frac{R(t)}{t - t_\nu}.$$

Durch Anwendung des Teilerverfahrens auf $G(t)$ und $R(t)$ kann berechnet werden, um wieviel Einheiten die Charakteristik bei einer Änderung von t zugenommen hat. Die Änderung ist gleich der Änderung in der Anzahl der Zeichenwechsel der Sturm'schen Reihe. Alle diese Sätze lassen sich auf beliebig viele Veränderliche ohne wesentliche Änderung übertragen[21]). Kronecker hat die Charakteristik auch durch ein Integral dargestellt, das über die Grenzen des Gebietes erstreckt wird analog dem Cauchy'schen Integral. Mit einem zweiten

21) *L. Kronecker*, Berl. Ber. 1878, p. 145 = Werke 2, p. 71.

von Kronecker angegebenen Integral gelingt es, die algebraische Summe der Werte einer beliebigen Funktion in den Nullstellen des Funktionensystems, die in das betrachtete Gebiet fallen, darzustellen. Der Wert der Funktion ist dabei in jeder Nullstelle mit dem Zeichen der Funktionaldeterminante [I B 1 b, Nr. **21**] multipliziert. *Picard*[22]) hat zu dem von Kronecker betrachteten System noch eine weitere Veränderliche z und eine weitere Gleichung $zD =$ Const. hinzugezogen, wo D die Funktionaldeterminante bedeutet. Dadurch wird die Funktionaldeterminante des neuen Systems gleich D^2 und die Charakteristik wird gleich der absoluten Anzahl der Wertsysteme, die das von Kronecker betrachtete System zum Verschwinden bringen. Wie *Dyck*[23]) gezeigt hat, kann man sich bei der Kronecker'schen Verallgemeinerung des Cauchy'schen Integrals von dem Zeichen der Funktionaldeterminante frei machen, wenn man die Funktion mit einem Faktor versieht, welcher an den Nullstellen des Funktionensystems den Wert $+1$ oder -1 annimmt, je nachdem das Vorzeichen der Funktionaldeterminante positiv oder negativ ist. Als speziellen Fall erhält Dyck dann auch Picard's Formel für die absolute Anzahl der Wertsysteme.

8. Die quadratischen Formen im Zusammenhang mit dem Sturm'schen Satz. *Hermite*[24]) ersetzt das Sturm'sche Verfahren durch die Betrachtung gewisser quadratischer Formen. Sind $x_1 x_2 \ldots x_n$ die Wurzeln der Gleichung $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, die von einander verschieden vorausgesetzt werden, so bildet er die quadratische Form

$$\varphi = \sum_\lambda (y_0 + x_\lambda y_1 + x_\lambda^2 y_2 + \cdots + x_\lambda^{n-1} y_{n-1})^2.$$

Als symmetrische Funktionen der Wurzeln sind die Koeffizienten dieser quadratischen Form reell, wenn $a_0 a_1 \ldots a_n$ reell sind. Statt $y_0 y_1 \ldots y_{n-1}$ werden nun neue reelle Veränderliche $u_1 u_2 \ldots u_n$ eingeführt, indem für eine reelle Wurzel x_λ $u_\lambda = y_0 + x_\lambda y_1 + \cdots + x_\lambda^{n-1} y_{n-1}$, für ein Paar konjugierter komplexer Wurzeln x_μ, x_ν dagegen $u_\mu + u_\nu i = y_0 + x_\mu y_1 + \cdots + x_\mu^{n-1} y_{n-1}$ und $u_\mu - u_\nu i = y_0 + x_\nu y_1 + \cdots + x_\nu^{n-1} y_{n-1}$ gesetzt wird. Da $x_1 x_2 \ldots x_n$ von einander

22) *É. Picard,* Par. C. R. 113 (1891), p. 356, 669, 1012; *L. Kronecker,* ib. p. 1006; *É. Picard,* Journ. de Math. (4) 8 (1892), p. 5.

23) *W. Dyck,* Par. C. R. 119 (1894), p. 1254 u. ib. 120 (1895), p. 34, Münch. Ber. 25 (1895), p. 261, 447 u. ib. 28 (1898), p. 203.

24) *Ch. Hermite,* Par. C. R. 36 (1853), p. 294; vergl. auch *K. G. J. Jacobi*'s nachgelassene Abhandlung Journ. f. Math. 53 (1857), p. 275 = Werke 3, p. 591. *Ch. Hermite,* ib. 52 (1856), p. 39 [I B 2, Nr. **3**, Anm. 38].

verschieden sind, so ist die Determinante der linearen Funktionen u_λ, $u_\mu \pm u_\nu i$ von Null verschieden, und es lassen sich $y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$ auch als lineare Funktionen von $u_1 u_2 \ldots u_n$ ausdrücken. Nun ist $(u_\mu + u_\nu i)^2 + (u_\mu - u_\nu i)^2 = 2u_\mu^2 - 2u_\nu^2$. Die quadratische Form φ besteht also nach der Einführung der Veränderlichen $u_1, u_2 \ldots u_n$ aus einer Summe von Quadraten mit positiven oder negativen Vorzeichen. Jede reelle Wurzel führt zu einem positiven Vorzeichen, jedes Paar komplexer Wurzeln zu einem positiven und einem negativen Vorzeichen, so dass die Anzahl der komplexen Paare gleich der Anzahl der negativen Vorzeichen und die Anzahl der reellen Wurzeln gleich dem Überschuss der Zahl der positiven über die der negativen Vorzeichen ist. Die Substitution der Veränderlichen $u_1 u_2 \ldots u_n$ an Stelle von $y_0 y_1 \ldots y_{n-1}$ kann man nun freilich ohne Kenntnis der Wurzeln nicht machen; aber es genügt, irgend eine reelle lineare Transformation der Veränderlichen zu machen, bei der die quadratische Form auf n Quadrate reduziert wird. Denn es gilt der Satz, dass dabei die Anzahlen der positiven und negativen Vorzeichen immer erhalten bleiben [I B 2, Nr. 3]. Bezeichnet s_γ die Summe $x_1^\gamma + x_2^\gamma + \cdots + x_n^\gamma$, so ist

$$\varphi = \sum_{\alpha, \beta} s_{\alpha+\beta}\, y_\alpha\, y_\beta.$$

Nun kann man, wie in der Determinantentheorie [I A 2, I B 2, Nr. 3, I C 2] gezeigt wird, die quadratische Form z. B. auf die Form bringen

$$D_1 X_1^2 + \frac{D_2}{D_1} X_2^2 + \cdots + \frac{D_n}{D_{n-1}} X_n^2,$$

wo

$$D_\varkappa = |s_{\alpha+\beta}| \quad \begin{pmatrix}\alpha = 0, 1, \ldots \varkappa - 1\\ \beta = 0, 1, \ldots \varkappa - 1\end{pmatrix}.$$

Da nun $D_1 = n$ positiv ist, so ist die Anzahl der Paare komplexer Wurzeln gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe $D_1 D_2 \ldots D_n$. Dies gilt auch noch, wenn von den Grössen $D_2 \ldots D_{n-1}$ einige verschwinden, obgleich dann die Transformation in dieser Form nicht durchführbar ist. Die Grössen $D_\varkappa$ lassen sich auch durch die Wurzeln ausdrücken. Denn $D_\varkappa$ entsteht nach dem Multiplikationstheorem der Determinantentheorie [I A 2, Nr. **21**] durch die Komposition der beiden rechteckigen Systeme:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \ldots 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \ldots x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \ldots x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ x_1^{\varkappa-1} & x_2^{\varkappa-1} & x_3^{\varkappa-1} & \ldots x_n^{\varkappa-1} \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} 1 & x_1 & x_1^2 \ldots x_1^{\varkappa-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 \ldots x_2^{\varkappa-1} \\ \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 \ldots x_n^{\varkappa-1}. \end{matrix}$$

Folglich ist

$$D_\varkappa = \sum |x_\lambda^\alpha|^2 = \sum \Pi (x_{\lambda_\alpha} - x_{\lambda_\beta})^2.$$

Jedes Glied der Summe bezieht sich dabei auf je $\varkappa$ Wurzeln aus der Reihe $x_1 x_2 \ldots x_n$ und die Summe ist über alle Kombinationen von je $\varkappa$ von einander verschiedenen Wurzeln zu erstrecken[25]).

Für die quadratische Form

$$\varphi = \sum_\lambda \frac{1}{t - x_\lambda} (y_0 + x_\lambda y_1 + x_\lambda^2 y_2 + \cdots + x_\lambda^{n-1} y_{n-1})^2$$

können analoge Betrachtungen durchgeführt werden. Statt $y_0 y_1 \ldots y_{n-1}$ werden wieder die Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots u_n$ eingeführt. Einem Paar konjugierter Wurzeln x_μ, x_ν entsprechen die beiden Glieder

$$(t - x_\mu)^{-1}(u_\mu + u_\nu i)^2 + (t - x_\nu)^{-1}(u_\mu - u_\nu i)^2 = [(t - x_\mu)^{-1} + (t - x_\nu)^{-1}](u_\mu^2 - u_\nu^2) + [i(t - x_\mu)^{-1} - i(t - x_\nu)^{-1}]\, 2 u_\mu u_\nu.$$

Transformiert man diese Glieder für sich auf zwei Quadrate, so tritt immer ein positiver und ein negativer Koeffizient auf. Denn es ist, wenn $A \gtrless 0$,

$$A(u_\mu^2 - u_\nu^2) + 2 B u_\mu u_\nu = A\left(u_\mu + \frac{B}{A} u_\nu\right)^2 - A\left(1 + \frac{B^2}{A^2}\right) u_\nu^2$$

und, wenn $A = 0$ ist:

$$2 B u_\mu u_\nu = \frac{B}{2} (u_\mu + u_\nu)^2 - \frac{B}{2} (u_\mu - u_\nu)^2.$$

Einer reellen Wurzel x_λ entspricht das Glied $(t - x_\lambda)^{-1} u_\lambda^2$. Das giebt ein positives Zeichen, wenn $t > x_\lambda$, ein negatives, wenn $t < x_\lambda$ ist. Folglich ist die Anzahl aller negativen Zeichen gleich der Anzahl der reellen Wurzeln, die grösser sind als t, vermehrt um die Anzahl der Paare konjugierter Wurzeln. Setzt man daher erst einen Wert t_1 ein, dann einen grösseren Wert t_2, so ist die Anzahl der negativen Vorzeichen für t_2 um die Zahl der zwischen t_1 und t_2 gelegenen reellen Wurzeln kleiner. Die Anzahl der negativen Vorzeichen erfährt man durch irgend eine reelle Transformation auf Quadrate. Dies kann z. B. wie oben geschehen. Setzt man

$$s_\alpha' = \sum_\lambda (t - x_\lambda)^{-1} x_\lambda^\alpha \quad \text{und} \quad D_\varkappa = |s'_{\alpha+\beta}| \quad {\scriptstyle (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots \varkappa - 1)},$$

so ergiebt sich die Anzahl der reellen Wurzeln zwischen t_1 und t_2 gleich der Anzahl der in der Reihe $1, D_1, D_2, \ldots D_n$ beim Übergang von t_1 zu t_2 verlorenen Zeichenwechsel. Statt $(t - x_\lambda)^{-1}$ kann man

25) Vergl. die Formen, die *Sylvester* den Sturm'schen Funktionen gegeben hat: *Sylvester,* Phil. Mag. 15 (1839), p. 428; Lond. Trans. 1853, p. 511, wo für φ der Name „Bezoutiante" eingeführt wird; *J. K. Fr. Sturm,* J. de Math. 7 (1842), p. 356.

auch irgend eine andere ungrade positive oder negative Potenz von $(t - x_\lambda)$ einsetzen. Für die erste Potenz wird $s_\varkappa' = s_\varkappa t - s_{\varkappa+1}$ und daher

$$D_\varkappa = \left| s_{\alpha+\beta} t - s_{\alpha+\beta+1} \right| = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots s_{\varkappa-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \dots s_\varkappa & t \\ \vdots & & & \\ s_\varkappa & s_{\varkappa+1} & \dots s_{2\varkappa-1} & t^\varkappa \end{vmatrix} \text{[26]}.$$

Die Anwendung des Sturm'schen Verfahrens auf zwei beliebige ganze rationale Funktionen U und V kann ebenfalls durch die Betrachtung quadratischer Formen ersetzt werden. Man setzt

$$\varphi = \sum_\lambda \frac{U(x_\lambda)}{V'(x_\lambda)} (y_0 + x_\lambda y_1 + x_\lambda^2 y_2 + \cdots + x_\lambda^{n-1} y_{n-1})^2.$$

Bei Einführung der Veränderlichen $u_1 u_2 \dots u_n$ entsprechen einem Paar konjugierter Wurzeln der Gleichung $V(x) = 0$ die Glieder

$$\frac{U(x_\mu)}{V'(x_\mu)} (u_\mu + u_\nu i)^2 + \frac{U(x_\nu)}{V'(x_\nu)} (u_\mu - u_\nu i)^2 = A(u_\mu^2 - u_\nu^2) + 2 B u_\mu u_\nu,$$

die wieder, wie oben gezeigt, bei der Transformation auf Quadrate ein positives und ein negatives Vorzeichen liefern. Einer reellen Wurzel x_λ entspricht das Glied

$$\frac{U(x_\lambda)}{V'(x_\lambda)} u_\lambda^2.$$

Da nun in der Nähe von x_λ die Funktion $V(x)$ das Zeichen von $V'(x_\lambda)(x - x_\lambda)$ hat, so verliert oder gewinnt bei x_λ das Funktionenpaar V, U einen Zeichenwechsel, je nachdem $\frac{U(x_\lambda)}{V'(x_\lambda)}$ positiv oder negativ ist. Mithin ist für die ganze quadratische Form der Überschuss der Anzahl der positiven über die der negativen Quadrate gleich dem Verlust der Zeichenwechsel, den die Sturm'schen Funktionen erleiden, wenn x von $-\infty$ zu $+\infty$ übergeht. Wenn man den Quotienten $U(x)$ durch $V(x)$ nach fallenden Potenzen von x entwickelt:

$$\frac{U(x)}{V(x)} = g(x) + c_0 x^{-1} + c_1 x^{-2} + c_2 x^{-3} + \cdots,$$

so ist

$$\varphi = \sum c_{\alpha+\beta} y_\alpha y_\beta .$$

26) Auch hier kann man ähnlich wie bei den oben aufgestellten Determinanten die Wurzeln einführen und alles durch Summen von Differenzenprodukten ausdrücken.

Denn es ist

$$\frac{U(x)}{V(x)} = g(x) + \sum \frac{U(x_\lambda)}{V'(x_\lambda)} \frac{1}{x - x_\lambda}$$

$$= g(x) + \sum \frac{U(x_\lambda)}{V'(x_\lambda)} x^{-1} + \sum \frac{U(x_\lambda)\, x_\lambda}{V'(x_\lambda)} x^{-2} + \cdots.$$

Die Zahl der verlorenen Zeichenwechsel ist dann gleich dem Überschuss der Zeichenfolgen über die Zeichenwechsel in der Reihe

$$1,\ D_1,\ D_2,\ \ldots\ D_n, \quad \text{wo} \quad D_\varkappa = |c_{\alpha+\beta}|\,^{27)} \quad (\alpha, \beta = 0, 1, \ldots \varkappa - 1).$$

9. Numerisches Beispiel für die Separation. Es soll nun ein Beispiel der Separation der reellen und komplexen Wurzeln einer Gleichung gegeben werden:

$$f(x) = 3.22x^6 + 4.12x^4 + 3.11x^3 - 7.25x^2 + 1.88x - 7.84 = 0,$$
$$f'(x) = 19.32x^5 + 16.48x^3 + 9.33x^2 - 14.50x + 1.88.$$

Das Sturm'sche Verfahren wird mit dem Rechenschieber ausgeführt, was die Multiplikation einer ganzen Reihe von Zahlen mit einem Quotienten sehr schnell ausführen lässt. Die letzte Stelle der hingeschriebenen Koeffizienten ist nicht mehr sicher; sie ist aber auch zur Entscheidung über die Lage der Wurzeln nicht nötig.

$$\begin{aligned}
r_1 &= -\ 1.37x^4 - 1.55x^3 + 4.84x^2 - 1.57x + 7.84\\
r_2 &= -\ 109x^3 + 89.9x^2 - 121x + 123\\
r_3 &= -\ 4.16x^2 + 0.15x - 4.83\\
r_4 &= -\ 8.8x - 23.3\\
r_5 &= +\ 34.4.
\end{aligned}$$

Das ergiebt die Vorzeichen

$$\begin{array}{lllllllll}
x = -\infty: & + & - & - & + & - & + & +\\
x = \quad 0: & - & + & + & + & - & - & +\\
x = +\infty: & + & + & - & - & - & - & +.
\end{array}$$

Es giebt daher nur zwei reelle Wurzeln, von denen die eine positiv, die andere negativ ist.

Um die komplexen Wurzeln zu trennen, werde zunächst $x = it$ eingesetzt und das Sturm'sche Verfahren auf den reellen und imaginären Teil angewendet:

$$\begin{aligned}
U &= -\ 3.22t^6 + 4.12t^4 + 7.25t^2 - 7.84\\
-V &= \quad 3.11t^3 - 1.88t\\
r_1 &= -\ 8.56t^2 + 7.84\\
r_2 &= -\ 0.97t\\
r_3 &= -\ 7.84.
\end{aligned}$$

27) *A. Hurwitz,* Math. Ann. 46 (1895), p. 273 u. f. zeigt, wie die Grössen $D_\varkappa$ direkt durch die Koeffizienten von U und V in Determinantenform ausgedrückt werden können.

Die Vorzeichen sind

$$t = -\infty : - \; - \; - \; + \; -$$
$$t = +\infty : - \; + \; - \; - \; -,$$
$$\text{also } p - q = 0, \quad \frac{n}{2} + \frac{p-q}{2} = 3.$$

Es sind daher 3 Wurzeln mit negativem reellen Teil und folglich 3 Wurzeln mit positivem reellen Teil vorhanden. Je eine davon ist reell. Nun werde zunächst eine obere Grenze für den absoluten Betrag der Wurzeln bestimmt. Sobald

$$3.22|x|^6 > 7.84 \frac{|x|^5 - 1}{|x| - 1},$$

sind keine Wurzeln mehr möglich. Wenn $|x| > 1$, ist dies a fortiori für

$$3.22|x|^6 > 7.84 \frac{|x|^5}{|x| - 1}$$

oder

$$3.22|x| > \frac{7.84}{|x| - 1}$$

der Fall. Das liefert die obere Grenze 2.2. Um die komplexen Wurzeln zu isolieren, lege man durch den um den Nullpunkt mit dem Radius 2.2 beschriebenen Kreis die geraden Linien $x = 1 + ti$ und $x = -1 + ti$ und bestimme für beide die Anzahlen der Wurzeln auf der positiven Seite. Für $f(1 + ti) = U + Vi$ wird:

$$\begin{aligned}
U &= -3.22t^6 + 52.42t^4 - 75.10t^2 - 2.76 \\
-V &= -19.32t^5 + 83.99t^3 - 32.51t \\
r_1 &= -38.44t^4 + 69.69t^2 + 2.76 \\
r_2 &= -49.0t^3 + 33.9t \\
r_3 &= -43.2t^2 - 2.76 \\
r_4 &= -37.0t \\
r_5 &= +2.76.
\end{aligned}$$

Die Vorzeichen sind:

$$t = -\infty : - \; + \; - \; + \; - \; + \; +$$
$$t = +\infty : - \; - \; - \; - \; - \; - \; +$$
$$p - q = 4, \quad \frac{n}{2} + \frac{p-q}{2} = 5.$$

Für $f(-1 + ti) = U + Vi$ wird:

$$\begin{aligned}
U &= -3.22t^6 + 52.42t^4 - 56.44t^2 - 12.74 \\
-V &= 19.32t^5 - 77.77t^3 + 10.09t \\
r_1 &= -39.47t^4 + 54.7t^2 + 12.74 \\
r_2 &= 51.0t^3 - 16.3t \\
r_3 &= -42.1t^2 - 12.74 \\
r_4 &= 31.7t \\
r_5 &= +12.74.
\end{aligned}$$

Die Vorzeichen sind:

$$t = -\infty: \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; +$$
$$t = +\infty: \; - \; + \; - \; + \; - \; + \; +$$
$$p - q = -4, \quad \frac{n}{2} + \frac{p-q}{2} = 1.$$

Die negative Wurzel ist daher algebraisch kleiner als -1, ein Paar konjugierter Wurzeln liegt zwischen den Geraden $x = -1 + ti$ und $x = ti$ und das zweite Paar zwischen den Geraden $x = ti$ und $x = 1 + ti$. Die positive Wurzel ist grösser als 1. Alle Wurzeln sind absolut kleiner als 2.2.

Die Approximation der Wurzeln.

10. Das Newton'sche Verfahren. Anstatt durch die bisher auseinandergesetzten Methoden die Isolation der Wurzeln vorzunehmen, kann man auch ohne weitere Vorbereitung durch eine überschlägige tabellarische Berechnung der zum Verschwinden zu bringenden Funktion oder auf graphischem Wege Näherungswerte gewinnen[28]). Für die reellen Wurzeln wird dies im allgemeinen vorzuziehen sein. Sobald die Wurzeln angenähert bekannt sind, lassen sich durch das Newton'sche Verfahren, wie oben bemerkt, genauere Werte finden. Die Annäherung ist eine rasche, sobald es sich nur noch um Intervalle handelt, in denen die Funktion sehr nahe linear ist. Auch für die Berechnung komplexer Wurzeln bleibt das Verfahren gültig, und der Überschlag der erreichten Genauigkeit ist ähnlich zu machen.

Statt wie beim Newton'schen Verfahren die Funktion durch eine lineare Funktion zu ersetzen[29]) und dadurch einen Näherungswert zu finden, könnte man auch eine ganze Funktion zweiten oder höheren Grades an Stelle von $f(x)$ nehmen und als Näherungswert eine der Wurzeln der Gleichung zweiten oder höheren Grades annehmen. Das würde z. B. mit Vorteil angewendet werden können, wenn zwei oder mehr Wurzeln nahezu einander gleich sind.

11. Allgemeinere Verfahren. Eine allgemeinere Art der successiven Annäherung, von der das Newton'sche Verfahren als spezieller

---

28) *R. Mehmke,* Civilingenieur (2) 35, p. 617 und Zeitschrift Math. Phys. 36 (1891), p. 158; vergl. ferner den Art. I F über graphisches Rechnen.

29) Geometrisch gesprochen ersetzt Newton die Kurve $y = f(x)$ durch ihre Tangente. Man kann sie auch durch eine Sehne ersetzen, z. B. indem man zwei Punkte der Kurve berechnet (Regula falsi). Vgl. die Darstellung bei *H. Weber.* Wegen des Ausdrucks „Regula falsi" s. *M. Cantor,* Gesch. d. Math. 1 (1. Aufl.), p. 524, 628.

Fall betrachtet werden kann, ist das folgende. Es habe die Gleichung die Form $x = \varphi(x)$, und es werde vorausgesetzt, dass die rechte Seite sich für Werte von x, die in der Umgebung einer der Wurzeln liegen, nur langsam ändern möge. Ist $|\varphi'(x)|$ für alle Werte von x, die der Wurzel näher liegen als ein Näherungswert a, kleiner als m, so liegt $\varphi(x)$ zwischen $\varphi(a) + m(x - a)$ und $\varphi(a) - m(x - a)$. Setzt man also $a_1 = \varphi(a)$, so ist für die Wurzel $|x - a_1| < m\,|x - a|$. *Wenn daher m ein echter Bruch ist*[30]*, so muss der Fehler von a_1 ein Bruchteil des Fehlers von a sein.* Wenn man mit a_1 ebenso verfährt, so erhält man für einen dritten Näherungswert $a_2 = \varphi(a_1)$:

$$|x - a_2| < m_1\,|x - a_1|,$$

wo $m_1 \leqq m$. Sei z. B. eine Wurzel der Gleichung $x = \operatorname{arctg} x$ zu berechnen. Der Differentialquotient der rechten Seite ist $(1 + x^2)^{-1}$. Kommen also z. B. nur Werte von x in Betracht, deren absoluter Betrag grösser ist als 10, so ist $m < 0.01$. Der Fehler wird sich dann bei jedem Schritt auf weniger als den hundertsten Teil des vorigen Fehlers vermindern. Wird $a = 10$ angenommen, so ist $a_1 = \operatorname{arctg} 10 = 3.46828\,\pi$ und $a_2 = \operatorname{arctg} a_1 = 3.47087\,\pi$. Die Wurzel liegt zwischen 3π und 4π, da die Tangente in diesem Intervall alle Werte durchläuft. Folglich ist der Fehler von a kleiner als π und mithin der von a_2 kleiner als $0.0001\,\pi$. Das erlaubt aber wieder den Schluss, dass der Fehler von a kleiner ist als $3.48\,\pi - 10$, also kleiner als $0.3\,\pi$ und daher der Fehler von a_2 kleiner als $0.00003\,\pi$, abgesehen von dem Fehler, der durch die Abkürzung der Rechnung auf 5 Dezimalen hinzutritt.

Diese Methode wird in der Astronomie häufig angewendet. Wenn man z. B. aus einer Monddistanz die Greenwicher Zeit berechnet, so kommt in der Reduktion der Distanz selbst die Greenwicher Zeit vor. Aber das Resultat ändert sich nur wenig, wenn dabei eine etwas andere Greenwicher Zeit benutzt wird. Man rechnet daher mit einem Näherungswert, und wenn sich dann als Resultat eine Greenwicher Zeit ergiebt, die wesentlich von dem Näherungswert abweicht, so wiederholt man die Rechnung mit der gefundenen Greenwicher Zeit. Dabei ist der Wert von m in der Regel so klein, dass höchstens *eine* Wiederholung nötig ist.

Das Newton'sche Verfahren kann als spezieller Fall dieser Rech-

---

30) *W. Wagner,* Best. der Genauigkeit des Newton'schen Verfahrens. Berlin, lat. 1855, deutsch 1860. *E. Schroeder,* Math. Ann. 2 (1870), p. 317. Dieselben Resultate sind später von *C. Isenkrahe,* Math. Ann. 31 (1888), p. 309 gefunden; vergl. auch *E. Netto,* Math. Ann. 29 (1887), p. 141.

nungsweise angesehen werden, indem man statt der Gleichung $f(x)=0$ die gleichwertige Gleichung setzt:

$$x = x - \frac{f(x)}{f'x}.$$

Der Differentialquotient der rechten Seite ist

$$\frac{f \cdot f''}{f'^2},$$

der, sobald eine hinreichende Annäherung an die Wurzel erreicht ist, beliebig klein wird. Liegt für die betrachteten Werte von x der absolute Betrag von $f'(x)$ zwischen zwei von Null verschiedenen Grenzen $\varkappa < |f'(x)| < K$ und ist $|f''(x)| < M$, so ist, wenn x eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ bedeutet, $|f(a)| < K|x - a|$ und daher

$$\left|\frac{f(a) f''(a)}{f'(a)^2}\right| < \frac{K \cdot M}{\varkappa^2} |x - a|.$$

Mithin ist für den nächsten Näherungswert a_1

$$|x - a_1| < \frac{K \cdot M}{\varkappa^2} |x - a|^2 \text{ }^{31)}$$

oder

$$\frac{K \cdot M}{\varkappa^2} |x - a_1| < \left(\frac{K \cdot M}{\varkappa^2} |x - a|\right)^2$$

und daher für den $n + 1^{\text{ten}}$ Näherungswert a_n

$$\frac{K \cdot M}{\varkappa^2} |x - a_n| < \left(\frac{K \cdot M}{\varkappa^2} |x - a|\right)^{2^n}.$$

Der Exponent auf der rechten Seite wächst z. B. nach zehn Schritten auf 1024. Sobald also $\frac{KM}{\varkappa^2} |x - a|$ nur einigermassen kleiner ist als 1, so ist die Konvergenz rasch. Zugleich lässt diese Formel überschlagen, auf wie viel Dezimalen es sich bei jedem einzelnen Schritte lohnt die neue Annäherung auszurechnen. Dabei kommt es auf eine genaue Bestimmung von $\varkappa$, K und M nicht an. Sei z. B. die positive Wurzel der Gleichung

$$3.22x^6 + 4.12x^4 + 3.11x^3 - 7.25x^2 + 1.88x - 7.84 = 0$$

zu berechnen. Die Wurzel liegt, wie wir oben fanden, zwischen 1 und 2.2. Der erste Näherungswert werde gleich 1 genommen. Dann

---

31) Vgl. *J. B. J. Fourier,* Analyse des équations déterminées, Paris 1831, livre II, art. 22. Bis auf Grössen höherer Ordnung ist sogar $x - a_1 = -\frac{(x-a)^2}{2} \cdot \frac{f''(x)}{f'(x)}$, was man bei grosser Annäherung statt $|x - a_1| < \frac{K \cdot M}{\varkappa^2} |x - a|^2$ nehmen kann.

ist $-\frac{f(1)}{f'(1)} = \frac{2.76}{32.51}$, und da $f'(x)$ mit wachsendem x zunimmt, so ist der Fehler des Näherungswertes 1 kleiner als $\frac{2.76}{32.51}$, sagen wir kleiner als 0.1. Nun kann für $\frac{KM}{\varkappa^2}$ etwa 5, also für $\frac{KM}{\varkappa^2}|x - a|$ etwa $\frac{1}{2}$ gesetzt werden. Der Fehler der Annäherungen nimmt also ungefähr ab wie die Reihe: 2^{-1}, 2^{-3}, 2^{-7}, 2^{-15}, 2^{-31}. Man wird daher bei den ersten beiden Annäherungen nur auf ein oder zwei Dezimalen genau rechnen, bei der vierten auf 5 oder 6 Dezimalstellen und bei der fünften würde es sich lohnen, auf 10 Stellen genau zu rechnen:

a	$f(a)$	$f'(a)$
$a_1 = 1.1$	$+ 1.32$	$+ 50.3$
$a_2 = 1.07$	$- 0.086$	$+ 44.3$
$a_3 = 1.072$	$+ 0.0028$	$+ 44.7$
$a_4 = 1.07194$		

Die geringere Genauigkeit der ersten Annäherung erlaubt die Anwendung des Rechenschiebers.

12. Horner's Schema. Diese Betrachtungen galten für beliebige Funktionen. Für den Fall einer ganzen rationalen Funktion hat Horner[32]) ein bequemes Schema zur Ausführung des Newton'schen Verfahrens gegeben. Schon oben Nr. 4 ist das Horner'sche Schema gegeben, nach dem bei einer ganzen rationalen Funktion nach einander die Koeffizienten $f(p)$, $f'(p)$, $\frac{f''(p)}{2!}$ etc. gefunden werden können. Sie sind die Koeffizienten der Gleichung, der die Verbesserung $x - p$ der Annäherung p genügen muss. Enthält p nur eine von Null verschiedene Ziffer, so sind alle Multiplikationen einfach, und wenn nun p der Wurzel hinreichend nahe ist, so liefert $-\frac{f'(p)}{f(p)}$ die nächste Ziffer q, die nun für die Koeffizienten der neuen Gleichung dieselbe Rolle spielt wie p für die Koeffizienten der ursprünglichen Gleichung. So fortfahrend findet man Ziffer auf Ziffer.

32) *W. G. Horner*, Lond. Trans. 1819, part. I, p. 308, ferner Mathematical Repository 5, 2. Teil (London 1830). *J. R. Young*, on the theory and solution of algebraical equations. 1. Aufl. London 1835. 2. Aufl. London 1843.

Beispiel:

$$3.22\,x^6 + 4.12x^4 + 3.11x^3 - 7.25x^2 + 1.88x - 7.84 = 0,$$

$p = 1$

3.22	0	4.12	3.11	— 7.25	1.88	— 7.84
	3.22	3.22	7.34	10.45	3.20	5.08
	3.22	7.34	10.45	3.20	5.08	— 2.76
	3.22	6.44	13.78	24.23	27.43	
	6.44	13.78	24.23	27.43	32.51	
	3.22	9.66	23.44	47.67		
	9.66	23.44	47.67	75.10		
	3.22	12.88	36.32			
	12.88	36.32	83.99			
	3.22	16.10				
	16.10	52.42				
	3.22					
	19.32					

Es ist nicht nötig, die neuen Koeffizienten noch einmal hinzuschreiben. Es geschieht hier nur der Auseinandersetzung wegen.

$$q = \frac{2.76}{32.51} = 0.08$$

3.22	19.32	52.42	83.99	75.10	32.51	— 2.76
	0.2576	1.5662	4.3189	7.0647	6.5732	3.1267
	19.5776	53.9862	88.3089	82.1647	39.0832	+

Das positive Zeichen beweist, dass die Verbesserung $q = 0.08$ zu gross ist. Die Rechnung wird nun nach Horner mit 0.07 wiederholt. In den ersten Koeffizienten führen wir nur 4 Dezimalen.

3.22	19.32	52.42	83.99	75.10	32.51	— 2.76
	0.2254	1.3682	3.7652	6.1429	5.68700	2.673790
	19.5454	53.7882	87.7552	81.2429	38.19700	— 0.086210
	0.2254	1.3840	3.8621	6.4132	6.13593	
	19.7708	55.1722	91.6173	87.6561	44.33293	
	0.2254	1.3997	3.9600	6.6904		
	19.9962	56.5719	95.5773	94.3465		
	0.2254	1.4155	4.0591			
	20.2216	57.9874	99.6364			
	0.2254	1.4313				
	20.4470	59.4187				
	0.2254					
	20.6724					

Beim weiteren Rechnen vermindert sich nun der Einfluss der vorhergehenden Koeffizienten auf die folgenden immer mehr, so dass man sich bei den ersten Koeffizienten auf immer weniger Stellen beschränken kann, ohne die Genauigkeit der letzten zu beeinträchtigen. Die nächste Verbesserung ist 0.001.

3.22	20.67	59.42	99.64	94.346	44.3329	— 0.086210
	0.00	0.02	0.06	0.100	0.0944	0.044427
	20.67	59.44	99.70	94.446	44.4273	— 0.041783
		0.02	0.06	0.100	0.0945	
		59.46	99.76	94.546	44.5218	
		0.02	0.06	0.100		
		59.48	99.82	94.646		
		0.02	0.06			
		59.50	99.88			
		0.02				
		59.52				Verbesserung: 0.0009
3.22	20.7	59.5	99.9	94.646	44.5218	— 0.041783
			0.05	0.090	0.0853	0.040146
			100.	94.736	44.6071	— 0.001637
				0.090	0.0853	
				94.826	44.69	
				0.09		
				94.9		Verbesserung: 0.0000366
3.22	20.7	59.5	100	94.9	44.69	— 0.001637
					0.00	1341
						296
						268
						28

Die letzten Ziffern werden durch fortgesetzte Division gefunden, da jetzt der vorletzte Koeffizient 44.69 so weit, wie er hier in Betracht kommt, durch die vorhergehenden nicht geändert wird. Die Wurzel ist 1.0719366.

Horners Verfahren lässt sich auch vortrefflich mit der Methode von *Lagrange* [33]) verbinden, wonach die Wurzel in einen Kettenbruch entwickelt wird. Man bestimmt jedesmal die nächst kleinere ganze Zahl a, setzt $x = a + \frac{1}{y}$ und betrachtet dann die Gleichung für y.

33) *J. L. Lagrange*, de la résol. des équations numériques de tous les degrés. Paris 1798. Chap. III.

Hier kommt es dann auf die grösste Wurzel an, für die wieder die nächst kleinere ganze Zahl bestimmt wird. Die Rechnung ist wie bei Horner, nur sind bei jedem Schritt die Koeffizienten in der umgekehrten Reihenfolge zu nehmen. Der zweite Koeffizient dividiert durch den ersten giebt einen Näherungswert für die grösste Wurzel.

13. Bernoulli's Verfahren. Für den Fall, dass $f(x)$ eine ganze rationale Funktion ist, hat D. Bernoulli[34]) eine Methode zur Berechnung der Wurzeln gegeben, welche die Separation nicht voraussetzt. Sind $x_1 x_2 \ldots x_n$ die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ und bedeutet s_λ die Summe $x_1^\lambda + x_2^\lambda + \cdots + x_n^\lambda$, so kann man schreiben:

$$\frac{s_\lambda}{s_{\lambda-1}} = x_1 \frac{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^\lambda + \cdots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^\lambda}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\lambda-1} + \cdots + \left(\frac{x_n}{x_1}\right)^{\lambda-1}}.$$

Ist nun x_1 dem absoluten Betrage nach grösser als $x_2 \ldots x_n$, so wird für grosse Werte von λ der Quotient $\frac{s_\lambda}{s_{\lambda-1}}$ sehr wenig von x_1 verschieden sein. Bedeutet andrerseits σ_λ die Summe $x_1^{-\lambda} + x_2^{-\lambda} + \cdots + x_n^{\lambda-1}$ und ist x_n die absolut kleinste Wurzel, so folgt ebenso, dass für grosse Werte von λ der Quotient $\frac{\sigma_{\lambda-1}}{\sigma_\lambda}$ sehr wenig von x_n verschieden ist. Die Werte der Grössen s_λ und σ_λ erhält man durch Entwicklung von $\frac{f'(x)}{f(x)}$ nach negativen und positiven Potenzen von x. Denn es ist [I B 3 b Nr. 4]:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = nx^{-1} + s_1 x^{-2} + s_2 x^{-3} + \cdots$$
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\sigma_1 - \sigma_2 x - \sigma_3 x^2 - \cdots.$$

Entwickelt man $\frac{f'(p+h)}{f(p+h)}$ nach Potenzen von h, so liefert der Quotient der Koeffizienten von $h^{\lambda-1}$ und h^λ einen Näherungswert für den absolut kleinsten Wert von h, der der Gleichung $f(p+h) = 0$ genügt, und $p + h$ stellt die Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ dar, die dem Wert p am nächsten kommt.

Dem Bernoulli'schen Verfahren liegt ein allgemeiner Satz zu Grunde, der so ausgesprochen werden kann: Es sei $\varphi(x)$ eine Funktion einer komplexen Veränderlichen [II B 1 a], die sich in der Nähe von $x = p$

34) *D. Bernoulli,* Petrop. Comm. 3, 1728 [32], p. 92. *Euler,* Introd. 1, Laus. 1748, cap. 17, deutsch v. *A. C. Michelson,* Berl. 1788, *F. Maser,* Berl. 1885.

regulär verhält. Es werde die Funktion nun nach Potenzen von $x-p$ entwickelt

$$\varphi(x) = c_0 + c_1(x-p) + c_2(x-p)^2 + \cdots.$$

Auf der Peripherie des Konvergenzkreises muss mindestens eine singuläre Stelle liegen. Giebt es nun auf dem Kreise *nur* eine singuläre Stelle a und ist diese *ausserwesentlich* singulär, so ist für hinreichend grosse Werte von λ der Quotient $\frac{c_{\lambda-1}}{c_\lambda}$ sehr wenig von $a-p$ verschieden[35]). Die Bernoulli'sche Methode ist eine spezielle Anwendung dieses Satzes; denn die Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ sind ausserwesentlich singuläre Stellen der Funktion $\frac{f'(x)}{f(x)}$. Man sieht, dass man die Wurzeln aber auch erhalten würde, wenn man statt $f'(x)$ irgend eine andere ganze Funktion, die für die Wurzeln von $f(x)$ nicht oder nicht von gleich hoher Ordnung wie $f(x)$ verschwindet, durch $f(x)$ dividierte[36]).

14. Graeffe's Verfahren. Die Bernoulli'sche Methode wird wohl kaum eine praktische Bedeutung erlangen, weil die Konvergenz nur dann beträchtlich ist, wenn die zu berechnende Wurzel dem Werte p wesentlich näher ist als die übrigen Wurzeln; dann lässt sich die Berechnung aber im allgemeinen besser mit der Newton'schen Methode machen. Dagegen hat Graeffe[37]) ein Verfahren angegeben, das auf einem ähnlichen Gedanken beruhend, wesentlich schneller zur Ermittelung *aller* Wurzeln einer ganzen rationalen Funktion führt, ohne die Separation der Wurzeln vorauszusetzen.

Es werde die ganze Funktion n^{ten} Grades $f(x)$ in der Form geschrieben:

$$f(x) = a_0x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \cdots \pm a_n.$$

Das Produkt $f(x)f(-x)$ wird nur gerade Potenzen von x enthalten, da es beim Verwandeln von x in $-x$ sich nicht ändert. Es kann als ganze Funktion n^{ten} Grades von x^2 dargestellt werden:

$$f(x)f(-x) = A_0x^{2n} - A_1x^{2n-2} + A_2x^{2n-4} - \cdots \pm A_n.$$

---

35) *J. König,* Math. Ann. 23 (1884), p. 447.

36) Die Bernoulli'sche Methode ist auch zu Reihenentwicklungen für die Wurzeln verwendet worden. Siehe *E. Schroeder,* Math. Ann. 2 (1870), p. 317; *C. Runge,* Acta Math. 6 (1885), p. 305; *W. F. Meyer,* Math. Ann. 33 (1889), p. 511; *F. Cohn,* Math. Ann. 44 (1894), p. 473.

37) *C. H. Graeffe,* Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen. Zürich 1837. Vergl. dazu *J. F. Encke,* Journ. f. Math. 22 (1841), p. 193. *E. Carvallo,* méthode pratique pour la résol. num. complète des équations algébr. ou transcendantes, Thèse, Paris 1890.

Die Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, \ldots$ sind die Summen der Kolonnen in dem Schema:

$+a_0^2$	$-2a_0a_2$	$+2a_0a_4$	$-2a_0a_6$	$\ldots$
	$+a_1^2$	$-2a_1a_3$	$+2a_1a_5$	$\ldots$
		$+a_2^2$	$-2a_2a_4$	$\ldots$
			a_3^2	$\ldots$
				$\ldots$
A_0	A_1	A_2	A_3	$\ldots$

Die Wurzeln der Gleichung $A_0z^n - A_1z^{n-1} + A_2z^{n-2} - \cdots \pm A_n = 0$ sind die Quadrate der Wurzeln der ersten Gleichung $f(x) = 0$. Wenn man nun mit der neuen Gleichung ebenso verfährt u. s. f., so erhält man die Gleichungen, deren Wurzeln die 4ten, 8ten, 16ten etc. Potenzen der Wurzeln der ersten Gleichung sind. Es sei $B_0u^n - B_1u^{n-1} + \cdots \pm B_n = 0$ die Gleichung, der die $2^{r\text{ten}}$ Potenzen genügen. Dann ist, wenn $2^r = \lambda$ geschrieben wird:

$$\frac{B_1}{B_0} = \sum x_\alpha^\lambda, \quad \frac{B_2}{B_0} = \sum x_\alpha^\lambda x_\beta^\lambda, \quad \frac{B_3}{B_0} = \sum x_\alpha^\lambda x_\beta^\lambda x_\gamma^\lambda, \text{ etc.}$$

Nun sei $|x_1| > |x_2| > |x_3| > \ldots > |x_n|$. Dann kommen für grosse Werte von λ gegen x_1^λ alle übrigen Grössen x_α^λ nicht in Betracht, gegen $x_1^\lambda x_2^\lambda$ kommen alle übrigen $x_\alpha^\lambda x_\beta^\lambda$ nicht in Betracht, gegen $x_1^\lambda x_2^\lambda x_3^\lambda$ alle übrigen $x_\alpha^\lambda x_\beta^\lambda x_\gamma^\lambda$ u. s. f. Es wird demnach bis auf einen kleinen Bruchteil seines Betrages $x_1^\lambda = \frac{B_1}{B_0}$ und ebenso $x_1^\lambda x_2^\lambda = \frac{B_2}{B_0}$, $x_1^\lambda x_2^\lambda x_3^\lambda = \frac{B_3}{B_0}$ u. s. f. Mithin bis auf einen kleinen Bruchteil seines Betrages $x_1^\lambda = \frac{B_1}{B_0}$, $x_2^\lambda = \frac{B_2}{B_1}$, $x_3^\lambda = \frac{B_3}{B_2}$ u. s. f., und die Wurzeln selbst sind λ^{te} Wurzeln aus den Quotienten $\frac{B_1}{B_0}, \frac{B_2}{B_1}, \frac{B_3}{B_2}$ u. s. f. Sind die Wurzeln reell, so können sie dadurch bis auf ihr Vorzeichen berechnet werden. Das Vorzeichen ergiebt sich dann daraus, dass für den mit dem richtigen Zeichen genommenen Wert $f(x)$ sehr klein werden muss. Der Wert von $f(x)$ giebt dann zugleich mit der Kenntnis eines genäherten Wertes von $f'(x)$ das Mass der erlangten Genauigkeit. Die Genauigkeit kann dann durch das Newton'sche Verfahren rasch gesteigert werden.

Es ist zweckmässig, die Erörterung etwas allgemeiner zu machen. Es werde nur vorausgesetzt, dass $x_1x_2 \ldots x_p$ absolut grösser sind als $x_{p+1}x_{p+2} \ldots x_n$, während

$$|x_1| \geqq |x_2| \geqq \ldots \geqq |x_p| \quad \text{und} \quad |x_{p+1}| \geqq |x_{p+2}| \geqq \ldots \geqq |x_n|.$$

Die $2^{r\text{ten}}$ Potenzen von $x_1, x_2 \ldots x_n$ sollen der Kürze wegen mit $b_1 b_2 \ldots b_n$ bezeichnet werden, und wir wollen r so gross annehmen, dass b_{p+1} sehr klein gegen b_p ist. Dann sind $b_1 b_2 \ldots b_p$ nur um sehr kleine Bruchteile ihrer Beträge von den Wurzeln der Gleichung $B_0 u^p - B_1 u^{p-1} + B_2 u^{p-2} - \cdots \pm B_p = 0$ und $b_{p+1} \ldots b_n$ sind um sehr kleine Bruchteile ihrer Beträge von den Wurzeln der Gleichung $B_p u^{n-p} - B_{p+1} u^{n-p-1} + \cdots \pm B_n = 0$ verschieden. Denn es ist, wenn $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n$ die absoluten Beträge von $b_1 \ldots b_n$ bezeichnen, $B_0 u^p - B_1 u^{p-1} + B_2 u^{p-2} - \cdots \pm B_p$ bis auf einen sehr kleinen Bruchteil von $B_0 \beta_p (|u| + \beta_1)(|u| + \beta_2) \ldots (|u| + \beta_{p-1})$ gleich $B_0(u - b_1)(u - b_2) \ldots (u - b_p)$. Läge nun u z. B. dem Werte b_2 am nächsten und wäre nicht nur um einen sehr kleinen Bruchteil von b_2 verschieden, so wäre $u - b_1$ absolut genommen ein beträchtlicher Bruchteil von β_1 und $u - b_2 \ldots u - b_p$ wären beträchtliche Bruchteile von β_2. Dann könnte $B_0(u - b_1)(u - b_2) \ldots (u - b_p)$ sich nicht gegen einen sehr kleinen Bruchteil von $B_0 \beta_p (|u| + \beta_1)(|u| + \beta_2) \ldots (|u| + \beta_{p-1})$ wegheben, d. h. u könnte keine Wurzel der Gleichung $B_0 u^p - B_1 u^{p-1} + \cdots \pm B_p = 0$ sein. Ferner ist bis auf einen sehr kleinen Bruchteil von $b_1 b_2 \ldots b_p$ die Grösse $B_p = b_1 \ldots b_p$, $B_{p+1} = b_1 b_2 \ldots b_p (b_{p+1} + \cdots + b_n)$,

$$B_{p+2} = b_1 b_2 \ldots b_p (b_{p+1} b_{p+2} + b_{p+2} b_{p+3} + \cdots + b_{n-1} b_n) \text{ etc.}$$

und mithin bis auf sehr kleine Beträge $\frac{B_{p+1}}{B_p} = b_{p+1} + \cdots + b_n$ $\frac{B_{p+2}}{B_p}$ gleich der Summe der Produkte von je zweien der Grössen $b_{p+1} b_{p+2} \ldots b_n$ u. s. f. und daher die Wurzeln der Gleichung $B_p u^{n-p} - B_{p+1} u^{n-p-1} + \cdots \pm B_n = 0$ bis auf kleine Beträge gleich $b_{p+1} \ldots b_n$.

Sobald also b_p gross gegen b_{p+1} ist, so zerfällt die Gleichung $B_0 u^n - B_1 u^{n-1} + \cdots \pm B_n = 0$ in zwei Gleichungen. Die Wurzeln $b_{p+1} \ldots b_n$ werden im Vergleich zu $b_1 \ldots b_p$ Null gesetzt, das giebt

$$B_0 u^n - B_1 u^{n-1} + \cdots \pm B_p u^{n-p} = 0$$

und die Wurzeln $b_1 \ldots b_p$ werden im Vergleich zu $b_{p+1} \ldots b_n$ unendlich gesetzt; das giebt:

$$B_p u^{n-p} - B_{p+1} u^{n-p-1} + \cdots \pm B_n = 0.$$

Beim praktischen Rechnen merkt man von selbst diesen Zerfall daran, dass die Koeffizienten der einen Gleichung aufhören, die der andern, so weit man ihre Beträge berechnet, zu beeinflussen, und dass B_p bei jedem Schritt nur zum Quadrat erhoben wird. Die Rechnung verläuft gerade so, als ob man es mit zwei getrennten Gleichungen zu thun hätte. Diese Gleichungen zerfallen von neuem, wenn wieder unter ihren Wurzeln die einen sehr klein gegen die andern werden. Schliesslich sind nur noch lineare Gleichungen übrig, es sei denn, dass gleiche Wurzeln oder gleiche absolute Beträge der Wurzeln vorkommen. Für ein Paar konjugierter Wurzeln z. B. wird im allgemeinen eine Gleichung zweiten Grades sich ergeben, der die $2^{r\text{ten}}$ Potenzen der beiden Wurzeln genügen. Hieraus können die $2^{r\text{ten}}$ Potenzen gefunden werden. Die Wurzeln selbst können aber nicht unmittelbar hieraus berechnet werden, weil die $2^{r\text{te}}$ Wurzel im Gebiete der komplexen Zahlen 2^r verschiedene Werte hat. Nur der absolute Betrag kann sogleich gefunden werden. Man kann nun zwar die Wurzeln eindeutig auf folgende Weise finden. Wenn man in $f(x)$ die geraden und ungeraden Potenzen von einander trennt, so kann man schreiben $f(x) = \varphi(x^2) + x\psi(x^2) = 0$, wo $\varphi(x^2)$ und $\psi(x^2)$ ganze Funktionen von x^2 sind. Ist nun der Wert von x^2 gefunden, so muss $x = -\frac{\varphi(x^2)}{\psi(x^2)}$ sein[38]). Ebenso folgt, dass aus dem Wert von x^4 der Wert von x^2, aus x^8 der von x^4 u. s. f. eindeutig berechnet werden kann. Aber diese Art der Berechnung von x aus x^{2^r} würde bei beträchtlichen Werten von r beschwerlich werden. Wenn nur ein Paar konjugierter Wurzeln vorhanden sind, während alle übrigen Wurzeln reelle Werte haben, so liefert, wenn diese bestimmt sind, die Summe

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{a_0}{a_1}$$

den doppelten reellen Teil der konjugierten Wurzeln, der dann mit dem absoluten Betrage zusammen die Wurzeln bestimmt. Sind zwei Paare konjugierter Wurzeln vorhanden, so liefert die Summe der Wurzeln eine lineare Gleichung zwischen den reellen Teilen der Wurzelpaare. Aber die Summe der reziproken Werte der Wurzeln, die gleich $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ ist, liefert eine zweite lineare Gleichung, da die absoluten Beträge ja bekannt sind.

Sind mehrere Paare konjugierter Wurzeln vorhanden, so kann man die Werte dadurch finden, dass man für irgend einen Wert p $f(p+h)$ nach Potenzen von h entwickelt und das Verfahren auch auf die Gleichung in h anwendet. Für die Paare konjugierter Wurzeln erhält man dann ihren Abstand vom Punkte $x = p$. Dann sind die Wurzeln als Durchschnittspunkte von Kreisen bestimmt. Oder man

38) *E. Carvallo,* l. c.

kann den folgenden von *Encke*[39]) vorgeschlagenen Weg betreten. Es sei der Grad n der Gleichung gerade vorausgesetzt. Wäre n nicht gerade, so kann man es gerade machen, indem man die Gleichung mit x multipliziert. Wir schreiben $n = 2m$ und bringen durch Division mit x^m die Gleichung auf die Form:

$$a_0 x^m - a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{2m} x^{-m} = 0.$$

Indem man nun $x = re^{\varphi i}$ setzt und den reellen und imaginären Teil für sich der Null gleich macht, ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$(a_0 r^m + a_{2m} r^{-m}) \cos m\varphi - (a_1 r^{m-1} + a_{2m-1} r^{-m+1}) \cos (m-1)\varphi + \cdots \pm a_m = 0,$$

$$(a_0 r^m - a_{2m} r^{-m}) \sin m\varphi - (a_1 r^{m-1} - a_{2m-1} r^{-m+1}) \sin (m-1)\varphi + \cdots \pm (a_{m-1} r - a_{m+1} r^{-1}) \sin \varphi = 0.$$

Setzt man $\cos \varphi = t$, so lassen sich $\cos 2\varphi$, $\cos 3\varphi$, ... und $\frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}$, $\frac{\sin 3\varphi}{\sin \varphi}$, ... als ganze Funktionen von t darstellen. So erhält man, wenn die zweite Gleichung durch $\sin \varphi$ dividiert wird, zwei Gleichungen für t, und durch das Verfahren des gemeinsamen Teilers wird dann t rational aus den Koeffizienten der Gleichungen bestimmt.

Was sonst zu bemerken ist, knüpft sich am besten an die Ausführung eines Beispiels an:

$$3.22x^6 + 4.12x^4 + 3.11x^3 - 7.25x^2 + 1.88x - 7.84 = 0.$$

Es sind nun mit der Rechenmaschine [I F] die Koeffizienten der Gleichungen gebildet, denen die 2, 4, 8, 32, 64, 128ten Potenzen der Wurzeln genügen[40]). Dabei werden nur die Koeffizienten selbst zu Papier gebracht, nicht die Glieder, aus denen sie bestehen. Die Maschine liefert die Summen der Quadrate und Produkte, ohne dass man die einzelnen Quadrate oder Produkte hinzuschreiben braucht. So findet man z. B. die Grössen $A_0, A_1 \ldots A_7$

$$\overset{1}{+1.0368}, \quad \overset{1}{-2.6533}, \quad \overset{1}{-2.9716}, \quad \overset{2}{+1.1990}, \quad \overset{1}{-2.3733}, \quad \overset{2}{-1.1015},$$

$$\overset{1}{+6.1466}.$$

Die darüber geschriebenen Zahlen geben die Potenz von 10 an, mit der man sich die Werte multipliziert denken muss. Das ist bei den

39) *J. F. Encke,* Journ. f. Math. 22 (1841), p. 193.

40) Bei logarithmischer Rechnung wird man Tabellen der Additionslogarithmen benutzen und die Numeri werden überhaupt nicht aufgeschlagen. Über Additionslogarithmen für komplexe Grössen vergl. einen Vorschlag von *R. Mehmke,* Zeitschr f. Math. u. Phys. 40 (1895), p. 15.

sehr grossen Zahlen, mit denen man es alsbald zu thun hat, eine notwendige Bezeichnung. Die Koeffizienten der Gleichung, der die Wurzelquadrate genügen, sind $A_0, -A_1, A_2, -A_3, A_4, -A_5, A_6$. Eine Zeichenfolge in der Reihe A_0 bis A_6 ist also ein Zeichenwechsel in der Reihe der Koeffizienten. Durch Descartes' Zeichenregel schliesst man daher aus den beiden Zeichenfolgen, dass die Gleichung der Wurzelquadrate nicht mehr als zwei positive Wurzeln, die erste Gleichung mithin nicht mehr als zwei reelle Wurzeln hat. Für die Gleichung der 128^{ten} Potenzen findet man die Grössen $B_0 B_1 \ldots B_6$ gleich:

$$\begin{array}{ccccccc} 65 & 82 & 101 & 117 & 120 & 117 & 114 \\ 1.013 & +\,3.051 & +\,2.081 & +\,1.125 & +\,8.179 & -\,2.912 & +\,2.968 \end{array}$$

Hier haben sich nun die Wurzeln, deren absolute Beträge verschieden sind, schon von einander getrennt. Der $1^{\text{te}}, 3^{\text{te}}, 4^{\text{te}}, 5^{\text{te}}, 7^{\text{te}}$ Koeffizient werden beim nächsten Schritt beinahe gleich den Quadraten der hingeschriebenen Zahlen. Nur der 3^{te} Koeffizient erfährt in den ersten 4 Ziffern noch eine kleine Änderung, weshalb es noch lohnt, für den ersten und dritten Koeffizienten allein einen Schritt weiter zu gehen,

$$\begin{array}{ccc} 130 & & 202 \\ 1.026, & -, & 4.324. \end{array}$$

Der 3^{te}, 4^{te} und 5^{te} Koeffizient bestimmen die 128^{ten} Potenzen der beiden reellen Wurzeln. Der 1^{te} und 3^{te} bestimmen den absoluten Betrag des einen konjugierten Paares, der 5^{te} und 7^{te} den des andern:

$$\sqrt[512]{\frac{4.324}{1.026}\cdot 10^{72}} = 1.38626, \quad \frac{\sqrt[128]{1,125\cdot 10^{117}}}{\sqrt[256]{4,324\cdot 10^{202}}} = 1.32714,$$

$$\sqrt[128]{\frac{8.179}{1.125}\,10^{3}} = 1.07193, \quad \sqrt[256]{\frac{2.968}{8.179}\,10^{-6}} = 0.94372.$$

Die Substitution der Werte zeigt, dass die beiden reellen Wurzeln -1.32714 und $+1.07193$ sind. Die Summe der Wurzeln und die Summe der reziproken Werte liefern für die reellen Teile u_1, u_2 der beiden komplexen Paare die beiden Gleichungen

$$2u_1 + 2u_2 = 0.25521,$$

$$\frac{2u_1}{r_1^2} + \frac{2u_2}{r_2^2} = 0.06040,$$

aus denen $u_1 = +0.18769$, $u_2 = -0.06009$ gefunden werden. Aus u_1, u_2 und den bekannten absoluten Beträgen werden nun die imaginären Teile $v_1 = \sqrt{r_1^2 - u_1^2}$, $v_2 = \sqrt{r_2^2 - u_2^2}$ berechnet. So ergeben sich die beiden konjugierten Paare

$$0.18769 \pm 1.37350i, \quad -0.06009 \pm 0.94181i.$$

Die Substitution der Wurzeln und die Berechnung der Ableitung (oder des Differenzenproduktes) zeigt, dass die Wurzeln bis auf etwa eine Einheit der 5ten Dezimale richtig sind[41]).

15. Die Approximation für den Fall mehrerer Veränderlichen. Das Newton'sche Verfahren kann, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, auf die Bestimmung mehrerer Unbekannten, die mehreren Gleichungen genügen, angewendet werden. Auch die Horner'sche Anordnung zur Berechnung der Koeffizienten lässt sich in dem Fall ganzer rationaler Funktionen der Veränderlichen verwerten[42]). Es möge hier noch über die Genauigkeit der Annäherung eine Bemerkung hinzugefügt werden.

Es seien zwei Gleichungen in der Form $x = \varphi(xy)$ und $y = \psi(xy)$ gegeben, und es seien die Funktionen φ und ψ nur langsam mit x und y veränderlich, so kann man ähnlich wie bei einer Veränderlichen successive Annäherungen finden, indem man rechts Näherungswerte für x und y einsetzt und damit neue Näherungswerte berechnet. Bedeuten a und b Näherungswerte von x und y und sind a_1 und b_1 die nächsten daraus berechneten Näherungswerte, so ist

$$x - a_1 = \varphi(xy) - \varphi(ab) = \varphi_1(x-a) + \varphi_2(y-b),$$
$$y - b_1 = \psi(xy) - \psi(ab) = \psi_1(x-a) + \psi_2(y-b),$$

wo wir uns in den partiellen Ableitungen φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 Werte der Veränderlichen zu denken haben, die zwischen den Näherungswerten und den wahren Werten liegen. Daraus folgt

$$|x - a_1| \leqq |\varphi_1| \cdot |x-a| + |\varphi_2| \cdot |y-b|,$$
$$|y - b_1| \leqq |\psi_1| \cdot |x-a| + |\psi_2| \cdot |y-b|,$$

und durch Addition

$$|x-a_1| + |y-b_1| \leqq (|\varphi_1| + |\psi_1|) \cdot |x-a| + (|\varphi_2| + |\psi_2|) \cdot |y-b|.$$

---

41) Das *Graeffe*'sche Verfahren ist im allgemeinen wohl das schnellste, wenn alle Wurzeln berechnet werden sollen. Für besondere Formen von Gleichungen sind besondere Methoden der numerischen Auflösung entwickelt worden. Die Gleichungen 3ten Grades führt man auf die Gleichung zwischen $\cos\varphi$ und $\cos 3\varphi$ zurück oder auf die Gleichung zwischen dem hyperbolischen Cosinus oder Sinus von φ und 3φ. Für die trinomischen Gleichungen hat *K. F. Gauss*, Gött. Abh. 1850 = Werke 3, p. 85 ein Verfahren angegeben. Vergl. ferner *S. Gundelfinger,* Tafeln zur Ber. der reellen W. sämtl. trinomischer Gl. Leipzig (1896); die reellen Wurzeln viergliedriger Gl. behandelt *A. Wiener,* Zeitschr. f. Math. Phys. 31 (1886), p. 65, 192.

42) *H. Scheffler,* Auflösung der alg. Gleich. Braunschw. 1859. *W. Wagner,* Best. der Genauigkeit des Newton'schen Verfahrens. Berlin 1860. *R. Mehmke,* Zeitschr. f. Math. Phys. 35 (1890), p. 174.

Sind nun $|\varphi_1| + |\psi_1|$ und $|\varphi_2| + |\psi_2|$ nicht grösser als ein echter Bruch m, so ist

$$|x - a_1| + |y - b_1| \leq m(|x - a| + |y - b|),$$

und folglich wird man dem gesuchten Wertsystem xy bei fortgesetzter Rechnung beliebig nahe kommen.

Beim Newton'schen Verfahren nimmt man, für $f(xy) = 0$, $g(xy) = 0$, die Verbesserungen h, k eines Systems von Näherungswerten a, b so, dass

$$f(ab) + f_1(ab)h + f_2(ab)k = 0,$$
$$g(ab) + g_1(ab)h + g_2(ab)k = 0.$$

Das heisst, man setzt

$$h = \frac{gf_2 - fg_2}{f_1 g_2 - g_1 f_2}, \quad k = \frac{fg_1 - gf_1}{f_1 g_2 - g_1 f_2}.$$

Man kann diese Rechnung als speziellen Fall der eben betrachteten Rechnung auffassen, wenn man in den Gleichungen $x = \varphi(x, y)$ und $y = \psi(x, y)$ die rechten Seiten so definiert:

$$\varphi(xy) = x + \frac{g(xy) f_2(xy) - f(xy) g_2(xy)}{f_1(xy) g_2(xy) - g_1(xy) f_2(xy)},$$
$$\psi(xy) = y + \frac{f(xy) g_1(xy) - g(xy) f_1(xy)}{f_1(xy) g_2(xy) - g_1(xy) f_2(xy)}.$$

Man erhält dann, indem man Δ für die Funktionaldeterminante $f_1 g_2 - g_1 f_2$ schreibt:

$$\varphi_1 = \frac{gf_{21} - fg_{21}}{\Delta} - \frac{gf_2 - fg_2}{\Delta^2} \frac{\partial \Delta}{\partial x} = Af + Bg,$$

wo A und B Brüche sind, deren Nenner Δ^2 und deren Zähler aus den ersten und zweiten Ableitungen von f und g nur durch Addition, Subtraktion und Multiplikation gebildet sind. Ähnliche Ausdrücke ergeben sich für φ_2, ψ_1, ψ_2. Ist für alle in Betracht kommenden Werte von x und y die Funktionaldeterminante dem absoluten Betrage nach grösser als eine von Null verschiedene Zahl und sind zugleich alle ersten und zweiten Ableitungen von f und g absolut genommen nicht grösser als eine feste Zahl, so sind offenbar A und B absolut genommen nicht grösser als eine feste Zahl. $\varphi_1(ab)$ wird daher mindestens von derselben Ordnung klein wie $f(ab)$ und $g(ab)$, d. h. von der Ordnung $\varrho = |x - a| + |y - b|$. Daher ist auch m von der Ordnung ϱ und es lässt sich eine Zahl M finden der Art, dass $m < M \cdot \varrho$. Wird nun $|x - a_1| + |y - b_1|$ mit ϱ_1 bezeichnet, so ist, wie oben gezeigt, $\varrho_1 < M\varrho^2$ oder $M\varrho_1 < (M\varrho)^2$. Daraus folgt, dass nach n Schritten $M\varrho_n < (M\varrho)^{2^n}$ ist. Wenn $M\varrho$ ein echter Bruch ist, ergiebt sich daher eine rasche Konvergenz.

Bei der praktischen Berechnung wird man im allgemeinen sich des Beweises der Konvergenz entschlagen. Man wird eben darauf los rechnen und dann das Resultat dadurch verifizieren, dass man die Werte in f und g einsetzt und zusieht, wie klein f und g dadurch werden. Da

$$h = \frac{gf_2 - fg_2}{\Delta}, \quad k = \frac{fg_1 - gf_1}{\Delta}$$

die wirklichen Abweichungen liefern, wenn rechts in $f_1 f_2 g_1 g_2 \Delta$ gewisse zwischen den Näherungswerten und den wahren Werten liegende Zahlen eingesetzt werden, so kann man durch die Kenntnis oberer Grenzen von $|f_1|$, $|f_2|$, $|g_1|$, $|g_2|$ und einer unteren Grenze von $|\Delta|$ aus den Werten von f und g obere Grenzen für $|h|$ und $|k|$ ermitteln.

Auf mehrere Gleichungen mit mehreren Veränderlichen lassen sich dieselben Betrachtungen ohne weiteres übertragen. Lineare Gleichungen auf diese Weise durch successive Annäherungen zu lösen, ist zuerst von *Seidel*[43]) für den Fall einer grossen Zahl von Unbekannten vorgeschlagen worden. Seidel's Verfahren kann als spezieller Fall des hier erörterten aufgefasst werden, wenn man die linearen Gleichungen $\sum a_{ik} x_i = c_k$ in der Form schreibt:

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}} (c_k - \sum{}' a_{ik} x_i).$$ [44])

---

43) *Ph. L. Seidel,* Münchener Akad. Abhandl. **11** (1874), p. 81.

44) *R. Mehmke* u. *P. A. Nekrassof,* Mosk. Math. Samml. **16** (1892) haben die Konvergenz des Seidel'schen Verfahrens und seiner Modifikationen untersucht.

B 3 b. RATIONALE FUNKTIONEN DER WURZELN; SYMMETRISCHE UND AFFEKTFUNKTIONEN.

VON

K. TH. VAHLEN.

Inhaltsübersicht.

Litteratur s. I B 1 a.

1. Symmetrische Funktionen einer Grössenreihe; Definition, Hauptsatz, Bezeichnung; Anzahlen. Eine rationale Funktion der n von einander unabhängigen Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, welche bei einer beliebigen Vertauschung dieser Grössen ihre Form, also auch ihren Wert nicht ändert, heisst eine „symmetrische" oder „einwertige" Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Insbesondere heissen die Funktionen

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -a_1, \; x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = a_2, \cdots,$$
$$x_1x_2 \cdots x_n = (-1)^n a_n$$

die „elementaren" symmetrischen Funktionen.

Die Gleichung

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

hat die n Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$[1]).

Jede symmetrische Funktion ist Quotient zweier ganzen symmetrischen Funktionen[2]).

Jede ganze symmetrische Funktion ist eine ganze Funktion von den elementaren symmetrischen Funktionen.

Um diesen Hauptsatz gruppiert sich die ganze Theorie.

Jede ganze symmetrische Funktion zerfällt in ein Aggregat von „Typen", d. h. solcher Funktionen, welche aus einem Gliede $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}$ durch Summation aller durch Vertauschung der Exponenten daraus hervorgehenden verschiedenen Glieder entstehen. Eine solche typische oder eintypige (*Netto*) Funktion wird mit $(i_1 i_2 i_3 \ldots)$ bezeichnet[3]), und zur Abkürzung z. B. $(i_1 i_1 i_1 i_2 i_2 i_3) = (i_1^3 i_2^2 i_3)$ gesetzt[4]).

Die Anzahlen aller möglichen typischen symmetrischen Funktionen bis zur Exponentensumme $\sum i = 30$ hat *Forsyth*[5]) berechnet.

2. Formeln und Verfahren von Cramer, Newton, Girard, Waring, Faà di Bruno. Das Produkt zweier typischen symmetrischen Funktionen zerfällt in eine Summe solcher; hierdurch kann man Typen höherer Ordnung als ganze Funktionen von Typen niedrigerer Ordnungen, schliesslich durch die Typen der niedrigsten Ordnungen in jeder Wurzel: (1), (1^2), (1^3), ... d. h. durch die elementaren symmetrischen Funktionen darstellen[3]).

---

1) *Alb. Girard,* Invention nouvelle en l'algèbre, Amsterdam 1629.

2) *A. Th. Vandermonde,* Paris Mém. de l'ac. d. sc. 1771; *Ch. Biehler,* Nouv. ann. d. math. (3) 3, 1884, p. 218 ff.; *Éd. Amigues,* Nouv. ann. (3) 14, 1895, p. 494 ff.

3) *G. Cramer,* Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Genf 1750.

4) *Meier Hirsch,* Aufgabensammlung zur Buchstabenrechnung und Algebra. Berlin 1809.

5) *A. R. Forsyth,* Messenger of math. (2) 10, 1881, p. 44.

Die symmetrische Funktion $(i_1 i_2 \dots i_\nu)$ heisst „ν-förmig". Die einförmige Funktion (i) heisst die i^{te} Potenzsumme und wird mit s_i bezeichnet. Man drückt die Potenzsummen durch die elementaren symmetrischen Funktionen aus vermöge der „Newton'schen Formeln":

$$
\begin{aligned}
&s_1 + a_1 = 0\\
&s_2 + a_1 s_1 + 2a_2 = 0\\
&s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_1 + 3a_3 = 0\\
&\vdots\\
&s_n + a_1 s_{n-1} + a_2 s_{n-2} + \cdots + n a_n = 0\\
&s_{n+1} + a_1 s_n + a_2 s_{n-1} + \cdots + s_1 a_n = 0\ ^{6)}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

oder explicite durch die „Girard'sche Formel":

$$s_i = i \sum_{\sum\limits_{\varkappa=1}^{n} \varkappa\lambda_\varkappa = i} (-1)^{\sum\limits_1^n \lambda_\varkappa} \frac{\left(\sum\limits_1^n \lambda_\varkappa - 1\right)!}{\prod\limits_{\varkappa=1}^{n} \lambda_\varkappa!} \prod_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa^{\lambda_\varkappa};\ ^{7)}$$

umgekehrt ist:

$$a_i = \sum (-1)^{\sum\limits_1^n \lambda_\varkappa} \prod_{\varkappa=1}^{n} \frac{\left(\frac{s_\varkappa}{\varkappa}\right)^{\lambda_\varkappa}}{\lambda_\varkappa!}.$$

Die mehrförmigen Funktionen werden auf die einförmigen zurückgeführt durch die „Waring'schen Formeln"[8]):

$$(i_1 i_2) = (i_1)(i_2) - (i_1 + i_2)$$

$$(i_1 i_2 i_3) = (i_1)(i_2)(i_3) - (i_1)(i_2+i_3) - (i_2)(i_1+i_3) - (i_3)(i_1+i_2) + 2(i_1+i_2+i_3),$$

u. s. w. $\vdots$

welche *Faà di Bruno* in die symbolische Determinante zusammenfasst:

---

6) *Girard* l. c.; *I. Newton,* Arithmetica universalis, edit. s'Gravesande, p. 192; vgl. ferner: *J. Petersen,* Tidsskr. f. Math. (3) 6, 1876, p. 9; *J. Farkas,* Archiv f. Math. u. Phys. 65, 1880, p. 433; *Adolph Steen,* Tidsskr. f. Math. (5) 3, 1885, p. 30; *V. Janni,* Gi. di mat. 23, 1885, p. 34; *M. d'Ocagne,* Jorn. de sc. math. astr. 7, 1885, p. 133; *L. Schendel,* Zeitschr. f. M. u. Ph. 31, 1886, p. 316; *J. Duran Loriga,* Progreso mat. 2, 1892, p. 221; *C. Tweedie,* Edinb. Math. Soc. Proc., 1893, p. 61.

7) *Girard* l. c.; s. ferner *Ed. Waring,* Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis et curvarum proprietatibus, Cambridge 1762, p. 1 u. Meditationes algebraicae, Cambr. 1782, p. 1; *Claude Pellet,* Nouv. Ann. (2) 14, 1875, p. 259; *Schendel* 6); *F. Gomes Teixeira,* Nouv. ann. (3) 7, 1888, p. 382 ff.; *A. Cayley,* Mess. of Math. (2) 21, 1892, p. 133 = Coll. Pap. 13, p. 213; *Worontzoff,* Nouv. ann. (3) 12, 1893, p. 116.

8) *Waring,* Misc. anal. p. 6 u. Med. alg. p. 8.

$$(i_1 i_2 i_3 \cdots) = \begin{vmatrix} s_{i_1} & s^{i_2} & s^{i_3} & \cdots \\ s^{i_1} & s_{i_2} & s^{i_3} & \cdots \\ s^{i_1} & s^{i_2} & s_{i_3} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

in welcher nach der Entwickelung die Exponenten von s in Indices zu verwandeln sind. Für je h gleiche Exponenten i ist die rechte Seite dieser Gleichungen durch $h!$ zu dividieren[9]).

3. Reduktion einer Funktion nach Waring und Gauss, nach Cauchy und Kronecker. Ordnet man eine beliebige ganze symmetrische Funktion so, dass das Glied $c_{i_1 i_2 i_3 \ldots}\, x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} \cdots$ dem Gliede $c_{i_1' i_2' i_3' \ldots}\, x_1^{i_1'} x_2^{i_2'} x_3^{i_3'} \cdots$ vorausgeht, wenn die erste der nicht verschwindenden Differenzen der Reihe $i_1 - i_1'$, $i_2 - i_2'$, $i_3 - i_3'$, $\cdots$ positiv ausfällt, und ist dann $c_{i_1 i_2 i_3 \ldots}\, x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} \cdots$ das höchste Glied der gegebenen Funktion, so erhält man eine Funktion mit einem höchsten Gliede niedrigerer Ordnung, wenn man von der gegebenen Funktion das Glied

$$(-1)^{i_1 + i_2 + \cdots}\, c_{i_1 i_2 i_3 \ldots}\, a_1^{i_1 - i_2}\, a_2^{i_2 - i_3}\, a_3^{i_3 - i_4} \cdots$$

subtrahiert. Durch Fortsetzung solcher Subtraktionen wird die gegebene Funktion schliesslich als ganze Funktion der elementar-symmetrischen Funktionen dargestellt. Dieses von *Waring* und *Gauss* angegebene Reduktionsverfahren lässt die Eindeutigkeit dieser Darstellung erkennen, sowie, dass in die Koeffizienten keine Brüche eingeführt werden[10]).

Setzt man:

$$f_{h+1}(x) = \frac{f(x)}{(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_{n-h})}, \qquad (h = 0, 1, \ldots, n-2),$$

so sind die Koeffizienten in $f_{h+1}(x)$ ganze Funktionen von $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-h}$. Eine beliebige ganze Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lässt sich jetzt successive vermittelst der Gleichungen:

$$f_{n-1}(x_1) = 0,\;\; f_{n-2}(x_2) = 0,\;\; f_{n-3}(x_3) = 0, \ldots, f(x_n) = 0$$

reduzieren auf eine von x_1 freie, in x_2 lineare, in x_3 quadratische u. s. w. Funktion, also auf ein Aggregat von $n!$ Gliedern

---

9) *Faà di Bruno,* Einleitung in die Theorie der binären Formen, deutsch von Th. Walter, Leipzig 1881, p. 9; *M. Auric,* Nouv. ann. (3) 9, 1890, p. 561.

10) *Waring,* Meditationes algebraicae, ed. III, p. 13; *K. F. Gauss,* Demonstratio nova altera etc., Comment. Gotting. 3 (1816) 1815 = Werke 3, p. 31.

$$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}, \qquad \begin{pmatrix} i_1 = 0 \\ i_2 = 0, 1 \\ i_3 = 0, 1, 2 \\ \vdots \\ i_n = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

und eine ganze symmetrische Funktion wird dadurch auf ein von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ freies Glied zurückgeführt [11]).

4. Das Cauchy'sche Verfahren und seine Verallgemeinerung durch Transon. Die Girard'sche wie die Newton'schen Formeln ergeben sich aus der Identität:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i} = \frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \cdots,$$

die man auch dahin ausdrücken kann, dass s_h der Koeffizient von $\frac{1}{x}$ in der Entwickelung von $\frac{f'(x)}{f(x)} x^h$ nach fallenden Potenzen von x ist. Bedeutet also $\varphi(x)$ eine beliebige ganze Funktion, so ergiebt sich $\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)$ als Entwickelungskoeffizient von $\frac{1}{x}$ in der Entwickelung von $\frac{f'(x)}{f(x)} \varphi(x)$ nach fallenden Potenzen von x.

Dieses von *Cauchy* [12]) aus seiner Residuenrechnung gefolgerte Verfahren ist von *Transon* [13]) verallgemeinert worden. Um den Wert von $\sum \varphi(x_i x_k)$ zu ermitteln, wo φ eine ganze Funktion ist und sich die Summation auf alle Wurzelpaare x_i, x_k $(i \gtrless k)$ bezieht, nehme man den Koeffizienten $\psi(x_1)$ von $\frac{1}{x}$ in der Entwickelung von

$$\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x - x_1}\right)}{\frac{f(x)}{x - x_1}} \varphi(x_1, x);$$ dann ist $\sum \varphi(x_i x_k)$ der Koeffizient von $\frac{1}{x}$ in der Entwickelung von $\frac{f'(x)}{f(x)} \psi(x)$ u. s. w.

5. Erzeugende Funktionen von Borchardt und Kronecker. Wie sich aus der Entwickelung von

11) *A. Cauchy,* Exercices d. math. 4, Paris 1829, p. 103; *L. Kronecker,* Berl. Ber. 1873, p. 117 = Werke 1, p. 303; Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, Berlin 1882, p. 39 = Werke 2, p. 290; *E. Blutel,* Par. Soc. math. Bull. 20, 1892, p. 92.

12) *Cauchy,* Exercices d. math. 1, Par. 1826.

13) *Abel Transon,* Nouv. ann. 9, 1850, p. 75; *J. Dienger,* Arch. f. Math. u. Ph. 16, 1850, p. 471.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t-x_i} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

nach fallenden Potenzen von t durch Koeffizientenvergleichung die Werte der Potenzsummen als Funktionen der $a_1, a_2, \ldots a_n$ ergeben, so ergeben sich aus der Entwickelung der Borchardt'schen erzeugenden Funktion:

$$\sum \frac{1}{(t_1 - x_{i_1})(t_2 - x_{i_2}) \cdot \cdot (t_m - x_{i_m})}$$
$$= (-1)^m \frac{f(t_1) f(t_2) \cdot \cdot f(t_m)}{\Pi(t_i - t_k)} \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} \cdot \cdot \frac{\partial}{\partial t_m} \left(\frac{\Pi(t_i - t_k)}{f(t_1) f(t_2) \cdot \cdot f(t_m)} \right)$$

die Werte aller m-förmigen Funktionen der $x_1, \ldots, x_n$. Die Summation bezieht sich auf alle Möglichkeiten, die verschiedenen Indices $i_1, i_2, \ldots, i_m$ aus $1, 2, \ldots, n$ auszuwählen, das Produkt $\Pi(t_i - t_k)$ auf alle Werte $i, k = 1, 2, \ldots, m$, für welche $i < k$ ist[14]).

Eine andere erzeugende Funktion hat *Kronecker*[15]) angegeben. Sind $-b_1, +b_2, -b_3, \ldots, \pm b_m$ die elementaren symmetrischen Funktionen von $y_1, y_2, \ldots, y_m$, so ist $\prod_{i,k} (1 - x_i y_k)$ gleich

$$\prod_k (1 + a_1 y_k + a_2 y_k^2 + \cdots + a_n y_k^n) = \prod_i (1 + b_1 x_i + b_2 x_i^2 + \cdots + b_m x_i^m)$$
$$\begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}.$$

Nimmt man $m < n$ und setzt voraus, dass man die symmetrischen Funktionen von weniger als n Grössen durch die elementaren ausdrücken könne, so ergiebt die Entwickelung des linksstehenden Produktes, wenn man für die symmetrischen Funktionen der y ihre Werte als Funktionen der b einsetzt, als Koeffizienten von $b_1^{i_1} b_2^{i_2} \ldots b_m^{i_m}$ den Ausdruck der symmetrischen Funktion $(1^{i_1} 2^{i_2} \ldots m^{i_m})$ der x als Funktion der a. Für $m = n - 1$ erhält man alle symmetrischen Funktionen der x, in denen kein Exponent grösser als $n - 1$ ist. Hierin liegt keine Beschränkung, da jede beliebige symmetrische Funktion durch die Gleichungen:

$$f(x_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

auf eine solche zurückgeführt wird, in welcher jeder Exponent kleiner als n ist.

---

14) *C. W. Borchardt,* Berl. Ber. 1855, p. 165 = J. f. Math. 53, 1857, p. 193 = Werke, p. 97; *Faà di Bruno,* J. f. Math. 81, 1875, p. 217; *C. Kostka,* J. f. Math. 82, 1875, p. 212; *W. Řehořovský,* Casopis 11, 1882, p. 111.

15) *Kronecker,* Berl. Ber. 1880, p. 936.

6. Fundamentalsysteme. Unter einem „Fundamentalsystem“ für symmetrische Funktionen versteht man ein System rationaler symmetrischer Funktionen der Art, dass jede andere rationale symmetrische Funktion eine rationale Funktion der Funktionen des Systems ist. Ausser den elementaren symmetrischen Funktionen bilden, wie aus den Newton'schen Formeln hervorgeht, die Potenzsummen $s_1, s_2, .., s_n$ ein Fundamentalsystem. *Borchardt*[16]) hat gezeigt, dass auch die Potenzsummen $s_1, s_3, s_5, .., s_{2n-1}$ ein Fundamentalsystem bilden, und *Vahlen*[17]), dass überhaupt diejenigen n ersten Potenzsummen ein Fundamentalsystem bilden, deren Indices nicht Vielfache einer gegebenen ganzen Zahl sind.

7. Sätze über Grad und Gewicht; Klassifikationen. Das Glied $a_1^{k_1} a_2^{k_2} .. a_n^{k_n}$ hat das „Gewicht“ $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots + nk_n$. Haben alle Glieder der Funktion $\sum C_{k_1 k_2 .. k_n} a_1^{k_1} a_2^{k_2} .. a_n^{k_n}$ dasselbe Gewicht ϱ so heisst die Funktion „isobar“ vom Gewichte ϱ [I B 2, Nr. **18**].

Eine typische symmetrische Funktion $(i_1 i_2 .. i_n)$ ist als Funktion der Koeffizienten isobar vom Gewichte $i_1 + i_2 + \cdots + i_n$. Ihr Grad in den Koeffizienten ist gleich dem höchsten der Exponenten $i_1, i_2, .., i_n$.[18]) Umgekehrt, ersetzt man in einer ganzen Funktion der $a_1, a_2, .., a_n$ diese durch die elementaren symmetrischen Funktionen, so ist in jedem Gliede der erhaltenen Funktion von $x_1, x_2, .., x_n$ der höchste Exponent höchstens gleich dem Grade der Funktion in den a, und die Anzahl der Wurzeln, die in einem Gliede vorkommen, höchstens gleich dem Gewichte der Funktion[19]).

Diese Sätze über Grad und Gewicht sind spezielle Fälle eines allgemeineren von *G. Kohn*[20]) aufgestellten Satzes. Bezeichnet man nämlich mit g_r den Grad der Funktion:

$$(i_1 i_2 \cdots i_n) = \sum C_{k_1 k_2 \cdots k_n} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}$$

in r Wurzeln, so ist die Summe

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots + (r-1)k_{r-1} + r(k_r + k_{r+1} + \cdots + k_n)$$

im allgemeinen grösser als g_r und für bestimmte stets vorhandene Glieder gleich g_r; und es ist die Summe

---

16) *Borchardt*, Berl. Ber. 1857, p. 301 = Werke, p. 107.

17) *Vahlen,* Acta math. 23, 1899 (erscheint demnächst).

18) *Sylvester,* Phil. Mag. (4) 5, 1853, p. 199; *Brioschi,* Ann. mat. fis. 5, 1854, p. 313; *Faà di Bruno,* Ann. mat. fis. 6, 1855, p. 338.

19) *Cayley,* Lond. Trans. 147, 1857, p. 490 = Coll. Pap. 2, p. 418.

20) Wien. Ber. 102, 2ª, 1893, p. 199.

$$r k_n + (r-1) k_{n-1} + \cdot\cdot + 2 k_{n-r} + k_{n-r-1}$$

im allgemeinen kleiner als g_r und für bestimmte stets vorhandene Glieder gleich g_r.

Ausser nach Grad und Gewicht sind die symmetrischen Funktionen in verschiedener Weise klassifiziert worden. Die Funktion $(1^{i_1} 2^{i_2} 3^{i_3} \ldots)$ heisst „$(i_1 + i_2 + i_3 + \cdot\cdot)$-förmig“. Sie heisst „unitär“, wenn $i_1 > 0$, sonst „nonunitär“; sie heisst „binär“, wenn $i_1 = 0$, $i_2 > 0$; „ultrabinär“, wenn $i_1 = 0$, $i_2 = 0$, u. s. w. *G. Mathews* empfiehlt in eine Klasse zusammenzufassen die $(2^i + k)$-nären Funktionen, für $k = 0, 1, 2, \ldots$, $2^i - 1$, da es für diese gemeinsame Fundamentalsysteme giebt (s. Nr. 8).

Mit Hülfe der Sätze über Grad und Gewicht ist man im Stande, den Ausdruck einer symmetrischen Funktion als Funktion der elementaren symmetrischen Funktionen, abgesehen von den Werten der Zahlenkoeffizienten, aufzustellen. Die Zahlenkoeffizienten bestimmt man entweder durch eine hinreichende Anzahl spezieller Wertsysteme der Wurzeln, oder aus den namentlich von *Brioschi*[21]) aufgestellten partiellen Differentialgleichungen für eine symmetrische Funktion φ.

8. Partielle Differentialgleichungen und Differentialoperatoren. Die Brioschi'schen Differentialgleichungen zerfallen in die beiden Serien:

$$\text{I.} \quad \sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda^i \frac{\partial \varphi}{\partial x_\lambda} = -\sum_{\lambda=1}^{n} (s_i a_{\lambda-1} + s_{i+1} a_{\lambda-2} + \cdot\cdot) \frac{\partial \varphi}{\partial a_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda s_{\lambda+i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial s_\lambda},$$

$$\text{II.} \quad \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{x_\lambda^i + a_1 x_\lambda^{i-1} + \cdot\cdot + a_i}{f'(x_\lambda)} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_\lambda} = -\sum_{k=n-i}^{n} a_{k-n+i} \frac{\partial \varphi}{\partial a_k} = (n-i) \frac{\partial \varphi}{\partial s_{n-i}} \text{ }^{22});$$

der erste Ausdruck in II ist von *Netto*[23]) hinzugefügt worden. Netto hat ferner beide Serien aus einer gemeinsamen Quelle hergeleitet,

---

21) *F. Brioschi,* Ann. mat. fis. 5, 1854, p. 422 [Nr. 8].

22) Auf folgenden Unterschied ist aufmerksam zu machen: während es in $\sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda s_{\lambda+i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial s_\lambda}$ gleichgültig ist, durch welche und wie viele Potenzsummen φ ausgedrückt wird, bleibt II im allgemeinen nur richtig, wenn in $(n-i) \frac{\partial \varphi}{\partial s_{n-i}}$ die Funktion φ durch $s_1, s_2, \ldots, s_n$ dargestellt ist. Man erkennt dies z. B. an dem Falle $n = 3$, $i = 1$, $\varphi = s_4 = a_1^4 - 4 a_1^2 a_2 + 2 a_2^2 + 4 a_1 a_3 = \frac{1}{6} \{ s_1^4 - 6 s_1^2 s_2 + 8 s_1 s_3 + 3 s_2^2 \}$. Hier wird $-\left\{ \frac{\partial s_4}{\partial a_2} + a_1 \frac{\partial s_4}{\partial a_3} \right\} = -4 a_2$ und $2 \frac{\partial s_4}{\partial s_2} = 0$, aber $2 \frac{\partial}{\partial s_2} \frac{1}{6} \{ s_1^4 - 6 s_1^2 s_2 + 8 s_1 s_3 + 3 s_2^2 \} = 2(s_2 - s_1^2) = -4 a_2$.

23) *E. Netto*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 38, 1893, p. 357; 40, 1895, p. 375.

durch Substitution von $x_k + \frac{x_k^i}{f'(x_k)} t$ für x_k $(k = 1, 2, .., n)$ in die Funktion φ, diese als Funktion einmal der x, zweitens der a, drittens der s genommen; die Vergleichung der Koeffizienten von t liefert eine Formelserie, aus der sich beide Serien I und II folgern lassen. Diese beiden Serien sind also nur der Form, nicht dem Inhalte nach von einander verschieden. Vermöge der Newton'schen Formeln und der Identitäten

$$x_\lambda^{n+k} + a_1 x_\lambda^{n+k-1} + \cdots + a_n x_\lambda^k = 0 \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, .., n \\ k = 0, 1, .., \infty \end{pmatrix}$$

lassen sich alle Formeln von I aus den n ersten (für $i = 0, 1, .., n-1$) zusammensetzen, sodass es im wesentlichen nur n verschiedene solcher Formeln giebt. Die n Differentialgleichungen

$$-\sum_{k=n-i}^{n} a_{k-n+i} \frac{\partial \varphi}{\partial a_k} = (n-i) \frac{\partial \varphi}{\partial s_{n-i}} \qquad (i = 0, 1, .., n-1)$$

werden benutzt, um die Zahlenkoeffizienten symmetrischer Funktionen zu berechnen, deren litteraler Teil in den $a_1, a_2, .., a_n$ und vermöge der Newton'schen Formeln in den $s_1, s_2, .., s_n$ vorliegt. Dass die Anzahl der erhaltenen Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten ausreicht, hat *Netto* gezeigt (l. c.).

Die aus I für $\varphi = s_k$ und $\varphi = a_k$ folgenden Gleichungen:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda^i \frac{\partial s_k}{\partial x_\lambda} = k s_{k+i-1}$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda^i \frac{\partial a_k}{\partial x_\lambda} = s_i a_{k-1} + s_{i+1} a_{k-2} + \cdots$$

nebst den Newton'schen Identitäten sind nur dann charakteristisch für die Potenzsummen und für die elementaren symmetrischen Funktionen, wenn die Bedingungen $a_{n+1} = 0$, $a_{n+2} = 0, ..,$ hinzugenommen werden (*Netto* l. c.).

Die Differentialgleichungen gelten auch für nichtsymmetrische Funktionen. Z. B. erhält man aus I für $\varphi = x_k$ die Raabe'sche Differentialgleichung [II A 5 a, 7 c]:

$$-x_k^i = \sum_{\lambda=1}^{n} (s_i a_{\lambda-1} + s_{i+1} a_{\lambda-2} + \cdots) \frac{\partial x_k}{\partial a_\lambda}\ ^{24)}.$$

24) *J. L. Raabe*, J. f. Math. 48, 1854, p. 167.

Aus I erhält man für $i = 0, 1, 2$:

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\lambda} = -\sum_{\lambda=1}^{n} (n-\lambda+1)\, a_{\lambda-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\varrho} \lambda s_{\lambda-1} \frac{\partial \varphi}{\partial s_\lambda}$$

$$\varrho \varphi = \sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{n} \lambda a_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial a_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\varrho} \lambda s_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial s_\lambda}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{n} (-a_\lambda a_1 + (\lambda+1) a_{\lambda+1}) \frac{\partial \varphi}{\partial a_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\varrho} \lambda s_{\lambda+1} \frac{\partial \varphi}{\partial s_\lambda},$$

wenn ϱ das Gewicht der Funktion φ ist. Aus der letzten Gleichung folgt für $\varphi = s_p$ und $\varphi = a_p$:

$$s_{p+1} = \frac{1}{p} \sum (-a_\lambda a_1 + (\lambda+1) a_{\lambda+1}) \frac{\partial s_p}{\partial a_\lambda}$$

$$a_{p+1} = \frac{1}{p+1} \left\{ s_1 a_p - s_2 \frac{\partial a_p}{\partial s_1} - 2 s_3 \frac{\partial a_p}{\partial s_2} - 3 s_4 \frac{\partial a_p}{\partial s_3} - \cdots \right\}.$$

Hieraus erhält man, von $s_1 = -a_1$ ausgehend, successive die Potenzsummen als Funktionen der elementaren symmetrischen Funktionen und umgekehrt[25]).

Aus der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \cdots + a_{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} + \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} = 0$$

folgt, dass das Integral der Gleichung:

$$\left(\frac{\partial}{\partial a_1} + a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \cdots + a_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_n} \right) \varphi = 0$$

eine blosse Funktion von $s_2, s_3, \ldots, s_n$ ist. Allgemeiner hat *Sylvester*[26]) gezeigt, dass das Integral von

$$\left(\frac{\partial}{\partial a_1} + a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} + \cdots + a_{n-1} \frac{\partial}{\partial a_n} \right)^i \varphi = 0$$

eine Funktion von der Form:

$$\varphi = F(s_{i+1}, \cdot\cdot, s_n) + F_1(s_{i+1}, \cdot\cdot, s_n) \cdot s_1 + \cdots + F_{i-1}(s_{i+1}, \cdot\cdot, s_n) \cdot s_1^{i-1} \text{ ist.}$$

Bezeichnet man den Operator

$$\frac{\partial}{\partial a_\lambda} + a_1 \frac{\partial}{\partial a_{\lambda+1}} + a_2 \frac{\partial}{\partial a_{\lambda+2}} + \cdots$$

mit d_λ, so ergiebt sich umgekehrt[27]):

---

25) *F. Junker*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 41, 1896, p. 199.

26) *Sylvester*, Par. C. R. 98, 1884, p. 858.

27) *P. A. Mac Mahon*, Brit. Ass. Rep. 1883; Lond. Math. Soc. Proc. 15, 1884, p. 20.

$$\frac{\partial}{\partial a_\lambda} = d_\lambda + \aleph_1 d_{\lambda+1} + \aleph_2 d_{\lambda+2} + \cdot\cdot,$$

wo $\aleph_i$ die Alephfunktion[28]) i^{ten} Grades ist.

Mit den Alephfunktionen stehen die symmetrischen Funktionen

$$s_{i+k}^{(i)} = \sum x_1^{1+g_1} x_2^{1+g_2} \cdot\cdot x_i^{1+g_i} \qquad \left(\sum_{h=1}^{i} g_h = k\right)$$

in Zusammenhang; es ist nämlich

$$(-1)^i s_{i+k}^{(i-1)} = \binom{i}{1} a_i \aleph_k + \binom{i}{2} a_{i+1} \aleph_{k-1} + \cdot\cdot,$$

und die Anwendung von Differentialoperatoren führt *MacMahon* zu der Verallgemeinerung der Newton'schen Formeln:

$$s_{i+k}^{(i)} + a_1 s_{i+k-1}^{(i)} + a_2 s_{i+k-2}^{(i)} + \cdot\cdot + (-1)^i a_{i+k} \frac{(i+k)!}{i!\,k!} = 0.\,^{29})$$

Eine nichtunitäre Funktion ist eine blosse Funktion von $s_2, s_3, \ldots, s_n$, genügt also der Differentialgleichung:

$$\left(\frac{\partial}{\partial a_1} + a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \cdot\cdot\right) \varphi = 0,$$

und diese Differentialgleichung ist charakteristisch für eine nichtunitäre Funktion[30]).

Eine ultrabinäre Funktion ist eine blosse Funktion von $s_3, s_4, \ldots, s_n$, genügt also den Differentialgleichungen:

$$\left(\frac{\partial}{\partial a_1} + a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \cdot\cdot\right) \varphi = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial a_2} + a_1 \frac{\partial}{\partial a_3} + \cdot\cdot\right) \varphi = 0$$

und diese Differentialgleichungen sind charakteristisch für eine ultrabinäre Funktion u. s. w.

Zu dem obigen Satz, betreffend nichtunitäre Funktionen, hat *J. Hammond*[30]) einen anderen über die Darstellbarkeit dieser Funktionen hinzugefügt: Eine nichtunitäre Funktion ist ganze Funktion von den Grössen

$$a'_{2h+i} = (-1)^h (2^{h-1}, 2+i) \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1 \\ a_0' = 1 \\ a_1' = 0 \end{pmatrix}.$$

Diese beiden Sätze hat *Mathews*[31]) verallgemeinert:

---

28) Vgl. Nr. **12**.

29) *Mac Mahon* l. c.; *R. Lachlan,* Lond. Math. Soc. Proc. 18, 1887, p. 39 19, 1888, p. 294.

30) *Hammond,* ebenda 1882, p. 79; Amer. J. of math. 5, 1882, p. 218.

31) *G. B. Mathews,* Quart. Journ. 25, 1891, p. 127.

Eine ultraternäre Funktion, als Funktion der a_k', genügt den beiden Differentialgleichungen:

$$\left(a_0' \frac{\partial}{\partial a_2'} + a_1' \frac{\partial}{\partial a_3'} + \cdots\right) \varphi = 0,$$
$$\left(a_0' \frac{\partial}{\partial a_3'} + a_1' \frac{\partial}{\partial a_4'} + \cdots\right) \varphi = 0;$$

und umgekehrt, eine ganze Funktion der a_k', welche diesen beiden Differentialgleichungen genügt, ist ultraternär. Ferner: Eine ultraternäre Funktion ist ganze Funktion von den Grössen

$$a''_{4h+i} = (-1)^h (4^{h-1},\ 4+i) \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, 3 \\ a_0'' = 1 \\ a_1'' = a_2'' = a_3'' = 0 \end{pmatrix}.$$

Eine ultraseptenäre Funktion, als Funktion der a_k'', genügt den vier Differentialgleichungen:

$$\left(a_0'' \frac{\partial}{\partial a_4''} + a_1'' \frac{\partial}{\partial a_5''} + \cdots\right) \varphi = 0,$$
$$\left(a_0'' \frac{\partial}{\partial a_5''} + a_1'' \frac{\partial}{\partial a_6''} + \cdots\right) \varphi = 0,$$
$$\left(a_0'' \frac{\partial}{\partial a_6''} + a_1'' \frac{\partial}{\partial a_7''} + \cdots\right) \varphi = 0,$$
$$\left(a_0'' \frac{\partial}{\partial a_7''} + a_1'' \frac{\partial}{\partial a_8''} + \cdots\right) \varphi = 0;$$

und umgekehrt, eine ganze Funktion der a_k'', welche diesen vier Differentialgleichungen genügt, ist ultraseptenär. Ferner: Eine ultraseptenäre Funktion ist ganze Funktion von den Grössen

$$a'''_{8h+i} = (-1)^h (8^{h-1},\ 8+i) \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ a_0''' = 1 \\ a_1''' = a_2''' = \cdots = a_7''' = 0 \end{pmatrix},$$

u. s. w.

9. Tabellen; tabellarische Gesetze. Das Cayley-Betti'sche Symmetriegesetz und seine Verallgemeinerung durch MacMahon. Tabellen für symmetrische Funktionen sind zuerst von *Vandermonde* (l. c.), später von *Meier Hirsch* (l. c.), *Bruno*, *Cayley*, *Řehořovský*, *Mac Mahon*, *Junker*, *Durfee*[32]) u. a. aufgestellt worden; vom letzt-

32) *Faà di Bruno*, Par. Compt. Rend. 76, 1873, p. 163; Gött. Nachr. 1875; *G. Metzler*, Die symm. Funkt., Darmstadt 1870; *W. Řehořovský*, Wien. Denkschr. 1882; math.-nat. Cl. 46, p. 51; *Cayley*, Amer. J. of math. 7, 1885, p. 47; *Mac Mahon*, Amer. J. of math. 6, 1884, p. 289; *W. P. Durfee*, Amer. J. of math. 5, 1882, p. 45; J. Hopk. Circ. 2, 1882, p. 23; ebenda 2, 1883, p. 72; Amer. J. of math. 5, 1882, p. 348; 9, 1887, p. 278; *Junker*, Wien. Denkschr. 64, 1896, p. 439.

genannten bis zum Gewichte 14. Die Anordnung solcher Tabellen ist aus dem Beispiel der Tafel vom Gewichte 3 ersichtlich:

	a_3	$a_1 a_2$	a_1^3
$\sum x_1^3$	-3	$+3$	-1
$\sum x_1^2 x_2$	$+3$	-1	
$\sum x_1 x_2 x_3$	-1		

Ist ϱ das Gewicht der Tafel, so sind die Elemente der Nebendiagonale gleich $(-1)^\varrho$, die Elemente rechts derselben gleich Null und es ist die Tafel bezüglich der Hauptdiagonale symmetrisch. Damit dies stattfindet, müssen die „konjugierten" der Glieder der Kopfzeile, mit $a_0 = 1$ homogen gemacht und $a_0 = A$, $a_1 = B$, $a_2 = C, \cdot\cdot$ gesetzt, sich von rechts nach links in alphabetischer Ordnung befinden und die Glieder der Kopfkolonne der Reihe nach „associiert" denen der Kopfzeile sein[33]). Associiert zu $a_\lambda^{\lambda'} a_\mu^{\mu'} a_\nu^{\nu'} \dots$ heisst die symmetrische Funktion $(\lambda'^\lambda \mu'^\mu \nu'^\nu \cdot\cdot)$; konjugiert zu $a_\lambda^{\lambda'} a_\mu^{\mu'} a_\nu^{\nu'} \cdot\cdot$ $(\lambda > \mu > \nu \cdot\cdot)$ das Glied $a_{\lambda'}^{\lambda-\mu} a_{\lambda'+\mu'}^{\mu-\nu} a_{\lambda'+\mu'+\nu'}^{\nu-\varrho} \cdots$.

Ausser diesem Cayley'schen Symmetriegesetz giebt es einige andere Gesetze, welche die Aufstellung der Tafeln erleichtern. Z. B. ist die Summe der Koeffizienten der zu der symmetrischen Funktion $(i_1^{k_1} i_2^{k_2} \dots)$ gehörigen Zeile gleich $(-1)^{\Sigma k} \frac{(\Sigma k)!}{k_1!\, k_2! \dots}$. Ferner, wenn ϱ das Gewicht der Tafel ist, und man multipliziert die zu $a_{k_1} a_{k_2} \dots$ gehörige Kolonne mit $\frac{\varrho!}{k_1!\, k_2! \dots}$, so giebt jede Zeile die Summe Null, mit Ausnahme der letzten[34]).

Das Cayley'sche Symmetriegesetz ist von *Mac Mahon* verallgemeinert worden.

Setzt man:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= (1)\, \xi_1, \\ \chi_2 &= (2)\, \xi_2 + (1^2)\, \xi_1^2, \\ \chi_3 &= (3)\, \xi_3 + (21)\, \xi_2 \xi_1 + (1^3)\, \xi_1^3 \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

und wird:

$$\begin{aligned} \xi_{p_1} \xi_{p_2} \cdot\cdot &= \sum \theta \cdot (q_1 q_2 \cdot\cdot)\, \chi_{s_1} \chi_{s_2} \cdot\cdot, \\ \chi_{q_1} \chi_{q_2} \cdot\cdot &= \sum \eta \cdot (p_1 p_2 \cdot\cdot)\, \xi_{s_1} \xi_{s_2} \cdot\cdot, \end{aligned}$$

so ist der Zahlenkoeffizient θ gleich dem Zahlenkoeffizienten η. Das

---

33) *Cayley,* Lond. Trans. 147, 1857, p. 489 = Coll. Pap. 2, p. 417; *Bruno,* Par. Compt. Rend. 76, 1873, p. 163; *Kohn,* Wien. Ber. 102, 1893, p. 199.

34) *Řehořovský,* l. c. 32); *J. Tzitzeica,* J. de math. spéc. (4) 4, 1895; p. 85.

Cayley'sche Gesetz ergiebt sich aus diesem, wenn man nur die Koeffizienten der Potenzen von ξ_1 betrachtet [34a]).

10. Mac Mahon's neue Theorie der symmetrischen Funktionen. Das Mac Mahon'sche Symmetriegesetz kommt in dessen „neuer Theorie“ der symmetrischen Funktionen zur Geltung. Dieselbe beruht auf folgendem Theorem.

Man fasse das Symbol der monomen symmetrischen Funktion $(p_1 p_2 p_3 \ldots)$ als „Partition“ der Zahl $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots$ auf [I B 2, Nr. **12**]. Die Symbole der zusammengesetzten symmetrischen Funktionen $(p_1 p_2)(p_3 p_4) p_5 \ldots$, $(p_1 p_2 p_3)(p_4 p_5) \ldots$, u. s. w. repräsentieren dann zugleich „Separationen“ jener Partition. Ferner gehört zu jeder Separation eine Spezialpartition, z. B. zu $(p_1 p_2)(p_3 p_4) p_5$ diese: $(p_1 + p_2, p_3 + p_4, p_5)$, und zu $(p_1 p_2 p_3)(p_4 p_5) p_6$ diese: $(p_1 + p_2 + p_3, \; p_4 + p_5, p_6)$. Nunmehr besteht der Satz:

Die Funktion $(p_1 + p_2 + p_3 + \cdots, q_1 + q_2 + q_3 + \cdots, r_1 + r_2 + r_3 + \cdots, \cdots)$ ist als lineares Aggregat der Separationen von $(p_1 p_2 p_3 \ldots q_1 q_2 q_3 \ldots r_1 r_2 r_3 \ldots)$ darstellbar; und zwar treten diese Separationen nur in denjenigen Verbindungen und mit den Koeffizienten auf, die sie in den zugehörigen χ-Produkten haben. Z. B. hat $\xi_1^3 \xi_2$ in $\chi_2 \chi_3$ den Koeffizienten $(21)(1^2) + (1^3)(2)$, ferner $\xi_1^3 \xi_2$ in $\chi_2^2 \chi_1$ den Koeffizienten $2(2)(1^2)(1)$. Durch die Separationen (21^3), $(21^2)(1)$, $(21)(1^2) + (1^3)(2)$, $(21)(1)^2$, $2(2)(1^2)(1)$, $(2)(1)^3$ von (21^3) lassen sich also die zugehörigen Spezialpartitionen: (5), (41), (32), (31^2), $(2^2 1)$, (21^3) ausdrücken und umgekehrt. Beide Koeffiziententafeln werden bei geeigneter Anordnung symmetrisch, z. B.:

	(5)	(41)	(32)	(31^2)	$(2^2 1)$	(21^3)
(21^3)						1
$(21^2)(1)$				1	2	3
$(21)(1^2) + (1^3)(2)$			1	3	2	4
$(21)(1)^2$		1	3	4	6	6
$2(2)(1^2)(1)$		2	2	6	1	6
$(2)(1)^3$	1	3	4	6	6	6

Auf die gewöhnliche Theorie der symmetrischen Funktionen kommt man zurück, wenn man nur die Separationen von $(1\,1\,1\,1\ldots)$ einführt. Jeder Formel der gewöhnlichen Theorie entspricht eine allgemeinere Formel der neuen Theorie.

34a) *W. H. Metzler*, Lond. Math. S. Proc. 28, 1897, p. 390 stellt drei Gesetze auf, die gewisse symmetrische Funktionen durch schon bekannte ausdrücken.

An die Stelle der Newton'schen Formeln:

$$s_1 - (1) = 0,$$
$$s_2 - (1)\, s_1 + 2(1^2) = 0$$
$$\vdots$$

treten die allgemeineren:

$$s_\lambda - (\lambda) = 0,$$
$$s_{\lambda+1} - (1)\, s_\lambda + (\lambda\; 1) = 0,$$
$$s_{\lambda+2} - (1)\, s_{\lambda+1} + (1^2)\, s_\lambda - (\lambda\; 1^2) = 0,$$
$$\vdots$$

zusammenzufassen in die eine:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^\lambda\, x^\lambda}{1 - x_i\, x} = s_\lambda\, x^\lambda + s_{\lambda+1}\, x^{\lambda+1} + \cdots = \frac{(\lambda)\, x^\lambda - (\lambda\; 1)\, x^{\lambda+1} + (\lambda\; 1^2)\, x^{\lambda+2} - \cdot}{1 - (1)\, x + (1^2)\, x^2 - \cdots}.$$

Aus diesen Formeln ergiebt sich s_k, ausgedrückt durch Separationen von $(\lambda\; 1^{k-\lambda})$.

Setzt man zur Abkürzung:

$$\sigma_\lambda^{(h)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^\lambda\, x^\lambda}{(1 - x_i\, x)^h} = s_\lambda\, x^\lambda + \frac{h(h+1)}{1\,.\,2}\, s_{\lambda+1}\, x^{\lambda+1} + \cdots,$$

so ergiebt sich allgemeiner:

$$\sigma_\lambda'\, \sigma_\mu' - \sigma_{\lambda+\mu}'' = \frac{(\lambda\,\mu)\, x^{\lambda+\mu} - (\lambda\,\mu\; 1)\, x^{\lambda+\mu+1} + \cdots}{1 - (1)\, x + \cdots},$$

$$\sigma_\lambda'\, \sigma_\mu'\, \sigma_\nu' - \sigma_\lambda'\, \sigma_{\mu+\nu}'' - \sigma_\mu'\, \sigma_{\lambda+\nu}'' - \sigma_\nu'\, \sigma_{\lambda+\mu}'' + 2\sigma_{\lambda+\mu+\nu}'''$$
$$= \frac{(\lambda\,\mu\,\nu)\, x^{\lambda+\mu+\nu} - (\lambda\,\mu\,\nu\; 1)\, x^{\lambda+\mu+\nu+1} + \cdots}{1 - (1)\, x + \cdots}$$

u. s. w., analog den Waring'schen oder der Faà di Bruno'schen Formel. Aus diesen Formeln ergeben sich die Potenzsummen ausgedrückt durch Separationen von $(\lambda\,\mu\; 1\; 1\; 1\, . \,.)$, von $(\lambda\,\mu\,\nu\; 1\; 1\; 1\, .\, .)$, u. s. w. Für das Gleichwerden einiger von den Indices $\lambda, \mu, \nu\, . \,.$ erleiden die Formeln dieselbe Modifikation wie die Waring'schen.

Durch die Separationen einer beliebigen Partition $(\lambda^l\, \mu^m\, .\, .)$ von h lässt sich s_h ausdrücken vermöge einer der Girard'schen analoge Formel:

$$(-1)^{l+m+\cdots}\, \frac{(l+m+\cdots-1)!}{l!\; m! \cdots}\, s_h$$
$$= \sum (-1)^{j_1+j_2+\cdots}\, \frac{(j_1 + j_2 \cdots - 1)!}{j_1!\; j_2! \cdots}\, (J_1)^{j_1} (J_2)^{j_2} \ldots,$$

in welcher sich die Summation auf alle Separationen $(J_1)^{j_1} (J_2)^{j_2}\, .\, .$ von $(\lambda^l\, \mu^m\, .\, .)$ bezieht.

Auch die auf die Tabellen bezüglichen Gesetze haben ihre Analoga in der neuen Theorie. Z. B.: im Ausdruck der symmetrischen Funktion

$(p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_1} \ldots)$ durch die Separationen von $(t_1^{\tau_1} t_2^{\tau_2} \ldots)$ ist die Koeffizientensumme in jeder Gruppe gleich Null, wenn die Partition $(p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \ldots)$ keine Separationen der Spezialpartition $(\tau_1 t_1, \tau_2 t_2, \ldots)$ besitzt. In eine Gruppe werden dabei z. B. die vier Separationen

$$(\lambda^2)(\lambda\mu)(\mu), \quad (\lambda^2)(\lambda)(\mu)^2, \quad (\lambda^2\mu)(\lambda)(\mu), \quad (\lambda^2\mu)(\lambda\mu)$$

gerechnet, weil aus jeder von ihnen nach Fortlassung von λ die Separation $(\mu)^2$, nach Fortlassung von μ die Separation $(\lambda^2)(\lambda)$ entsteht[35]).

11. Beziehungen zur Zahlentheorie. Bezeichnet man mit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine für eine beliebige Elementenzahl definierte symmetrische Funktion, und setzt:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k) + \sum f(x_2, x_3, \ldots, x_k) + \sum f(x_3, x_4, \ldots, x_k) + \cdots + \sum f(x_k) + f(0),$$

wo die $\sum$ kombinatorische Summen bedeuten, so ist umgekehrt:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \sum F(x_2, \ldots, x_n) + \sum F(x_3, \ldots, x_n) + \cdots + (-1)^{n-1} \sum F(x_n) + (-1)^n F(0).$$

Dieser Satz von *Baker*[36]) ist eine Verallgemeinerung bekannter zahlentheoretischer Sätze. Sind z. B. die x die Primfaktoren einer durch kein Quadrat teilbaren Zahl n und $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f(x_1 x_2 \ldots x_k)$, so ergiebt sich $f(n) = \sum F\left(\frac{n}{d}\right) \mu(d)$ als Folge von $F(n) = \sum f(d)$, wo sich die Summationen auf alle Divisoren d von n beziehen und μ den Möbius'schen Faktor bezeichnet [I C 1].

Hieran anknüpfend zeigt *Gegenbauer*[37]) an mehreren Beispielen, dass überhaupt Theoreme der Zahlentheorie, welche in letzter Linie auf der Zerlegung ganzer Zahlen in Primfaktoren fussen, Analoga im Gebiete der Funktionen mehrerer Veränderlichen haben. *Gegenbauer* zeigt aber auch, dass diese Sätze nicht auf symmetrische Funktionen beschränkt sind.

12. Spezielle symmetrische Funktionen. Von speziellen symmetrischen Funktionen sind bemerkenswert die von *Jacobi*, *Johnson*, *Nägelsbach*, *Kostka*, *Wronski* u. a. betrachteten und von letztgenanntem

35) Über *Mac Mahon*'s neue Theorie vgl. namentlich: *Mac Mahon*, Amer. J. of math. 11, 1889, p. 1; 12, 1890, p. 61. Ferner: Amer. J. of math. 10, 1888, p. 42; 13, 1891, p. 193; 14, 1892, p. 15; Quart. J. 22, 1887, p. 74; 23, 1889, p. 139; Lond. Math. Soc. Proc. 19, 1888, p. 220; Lond. Trans. 181, 1890, p. 181.

36) *H. F. Baker*, Lond. Math. Soc. Proc. 21, 1890, p. 30.

37) *L. Gegenbauer*, Wien. Ber. 102, 2ª, 1893, 951.

als „Alephfunktionen" bezeichneten Funktionen. Bezeichnet man mit $\aleph_m(x_1, x_2, .., x_n)$ die Summe aller Produkte m^{ter} Ordnung, die sich aus $x_1, x_2, .., x_n$ bilden lassen, so ist dies die Alephfunktion m^{ter} Ordnung. Dieselbe ist auch zu definieren durch:

$$\aleph_{r-n+1} = \frac{|x_i^h|}{|x_i^k|} = \sum_i \frac{x_i^r}{f'(x_i)} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, .., n \\ h = 0, 1, .., n-2, r \\ k = 0, 1, .., n-2, n-1 \end{pmatrix},$$

woraus insbesondere für $r \leqq n-1$ die Euler'schen Formeln folgen.

Diese Funktionen sind in vielen Beziehungen analog den elementaren symmetrischen Funktionen; z. B. ist:

$$\aleph_m(x_1, .., x_n) = \aleph_m(x_1, .., x_k) + \aleph_{m-1}(x_1, .., x_k)\aleph_1(x_{k+1}, .., x_n) + \cdots + \aleph_m(x_{k+1}, .., x_n),$$

ferner, entsprechend der Newton'schen und der Girard'schen Formel:

$$\aleph_r + a_1 \aleph_{r-1} + \cdots + a_n \aleph_{r-n} = 0,$$

$$\aleph_r = \sum_{(i_1 + 2i_2 + \cdots + n i_n = r)} (-1)^{i_1 + i_2 + \cdots + i_n} \frac{(i_1 + i_2 + \cdots + i_n)!}{i_1!\, i_2! \cdots i_n!} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \cdots a_n^{i_n}.$$

Ein anderes Analogon der Newton'schen Formel ist die von *Crocchi*:

$$\aleph_{r-1} s_1 + \aleph_{r-2} s_2 + \cdots + \aleph_1 s_{r-1} + s_r = r \aleph_r.$$

Die allgemeinere Funktion

$$\frac{|x_i^{m_k}|}{|x_i^k|} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, .., n \\ k = 0, 1, .., n-1 \end{pmatrix}$$

lässt sich durch Alephfunktionen ausdrücken; sie ist gleich

$$|\aleph_{m_k - i}| \qquad (i, k = 0, 1, .., n-1),$$

dieselbe lässt sich auch als Determinante der Koeffizienten $a_1, .., a_n$ darstellen.

Man kann dies zur Darstellung einer beliebigen ganzen symmetrischen Funktion durch die Koeffizienten benutzen; denn eine solche zerfällt durch Multiplikation mit

$$|x_i^k| \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, .., n \\ k = 0, 1, .., n-1 \end{pmatrix}$$

in derartige Funktionen: $|x_i^{m_k}|$.[38])

---

38) *K. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 22, p. 360 = Werke 3, p. 439; *H. Nägelsbach*, Üb. eine Klasse symm. Funkt., Zweibrücken 1872; J. f. Math. 81, 1875, p. 281; *N. Trudi*, Gi. di mat. 3, 1865; *L. Crocchi*, Gi. di mat. 17, 1879, p. 218; 18, 1880, p. 377; 20, 1882, p. 301; *Sylvester*, Johns Hopk. Circ. 2, 1882, p. 2; *F. Franklin*, ebenda 2, 1882, p. 24; *O. H. Mitchell*, ebenda 2, 1882, p. 242; Amer.

13. Symmetrische Funktionen von Wurzeldifferenzen; Seminvarianten. Besondere Bedeutung haben diejenigen symmetrischen Funktionen erlangt, welche zugleich symmetrische Funktionen der Wurzeldifferenzen sind. Sind $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ Produkte von Wurzeldifferenzen und ist $\Phi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots$ eine derartige Funktion, so ist Φ eine Invariante [I B 2, Nr. 2], wenn jede Wurzel in jedem Gliede φ_i gleich oft, ϱ-mal, vorkommt; Φ ist dann offenbar vom Gewichte $\frac{n\varrho}{2}$. Andernfalls heisst Φ eine Seminvariante [I B 2, Nr. 23] (Semi-Invariante, Subinvariante, péninvariant). Eine Seminvariante Φ der Gleichung:

$$x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} + \cdots = 0$$

ändert sich der Definition zufolge nicht bei der Substitution

$$x_k \parallel x_k + \theta, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

also, als Funktion der Koeffizienten betrachtet, nicht bei der Substitution

$$\begin{aligned} a_1 &\parallel a_1 + \theta \\ a_2 &\parallel a_2 + 2a_1\theta + \theta^2 \\ a_3 &\parallel a_3 + 3a_2\theta + 3a_1\theta^2 + \theta^3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

die man zusammenfassen kann in:

$$1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{2!\,x^2} + \frac{a_3}{3!\,x^3} + \cdots \parallel e^{\frac{\theta}{x}} \left(1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{2!\,x^2} + \frac{a_3}{3!\,x^3} + \cdots\right).$$

Die Heranziehung der Identität:

$$1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{2!\,x^2} + \cdots = e^{\frac{s_1}{x} + \frac{s_2}{2x^2} + \frac{s_3}{3x^3} + \cdots}$$

zeigt, dass sich bei jener Substitution von den Potenzsummen $s_1, s_2, s_3, \ldots$ der Gleichung:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \frac{a_2}{2!} x^{n-2} + \frac{a_3}{3!} x^{n-3} + \cdots = 0$$

nur s_1 ändert, sodass die Seminvariante Φ von s_1 unabhängig, eine nicht-unitäre Funktion der Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \frac{a^2}{2!} x^{n-2} + \cdots = 0$$

J. of math. 4, 1881, p. 341; *W. Kapteyn,* Archiv f. Math. u. Phys. 67, 1882, p. 102; *C. Kostka,* J. f. Math. 93, 1882, p. 89; *A. H. Anglin,* J. f. Math. 98, p. 175; *W. W. Johnson,* Quart. J. 21, 1886, p. 92; *S. Dickstein,* Krak. Denkschr. 12, 1886; *M. Martone,* La funzione alef di Hoëné Wronski, 1891, Catanzaro; *E. Sadun,* Per. di mat. 9, 1894, p. 1.

ist. Dieser Sylvester'sche Satz gilt allgemeiner auch für solche symmetrische Funktionen der Wurzeln, welche unsymmetrische Funktionen der Wurzeldifferenzen sind (*Netto*), wie aus der obigen Herleitung hervorgeht. Die Seminvariante Φ genügt den Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial \Phi}{\partial a_3} + \cdots = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \sum \lambda s_{\lambda-1} \frac{\partial \Phi}{\partial s_\lambda} = 0,$$

charakteristisch für symmetrische Funktionen, die unsymmetrisch in den Wurzeldifferenzen sind[39]).

Über die hierhergehörigen Sturm'schen Funktionen vgl. I B 3 a, Nr. 5.

14. Zweiwertige und alternierende Funktionen. Eine rationale Funktion von $x_1, x_2, .., x_n$, welche bei allen $n!$ Permutationen der $x_1, x_2, .., x_n$ w Werte annimmt, heisst eine w-wertige Funktion.

Sind φ_1 und φ_2 die beiden Werte einer zweiwertigen Funktion, so ist auch $\varphi_1 - \varphi_2$ eine zweiwertige Funktion; die beiden Werte derselben $\varphi_1 - \varphi_2$ und $\varphi_2 - \varphi_1$ unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen. Eine solche Funktion heisst „alternierend". Das Differenzenprodukt:

$$\Pi (x_i - x_k) \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2, .. \; n \\ i < k \end{pmatrix}$$

ist eine alternierende Funktion, sein Quadrat eine symmetrische Funktion:

$$\Delta (x_1, x_2, .., x_n).$$

Jede alternierende Funktion ist in der Form $B\sqrt{\Delta}$ enthalten, wo B eine symmetrische Funktion.

Jede zweiwertige Funktion ist in der Form $A + B\sqrt{\Delta}$ enthalten, wo A und B symmetrische Funktionen sind; und umgekehrt. Die beiden Werte einer zweiwertigen Funktion φ sind die Wurzeln einer quadratischen Gleichung

---

39) *Sylvester,* Amer. J. of math. 5, 1882, p. 79; *Cayley,* Quart. J. 19, 1883, p. 131 = Pap. 12, p. 22; *Mac Mahon,* Amer. J. of math. 6, 1884, p. 131; Quart. J. 19, p. 337; *Sylvester,* Par. C. R. 98, 1884, p. 779, 858; *J. Tannery,* Par. C. R. 98, 1884, p. 1420; *Sylvester* u. *W. S. Curran Sharp,* Educ. Times 42, 1885, p. 86; *Cayley,* Quart. J. 20, 1885, p. 212 = Pap. 12, p. 326; *Mac Mahon,* ebenda 20, 1885, p. 362; *Cayley,* ebenda 21, 1886, p. 92 = Pap. 12, p. 344; *D. F. Seliwanow,* Mosk. Math. Samml. 16, 1891; *Cayley,* Lond. Trans. 158, 1868 = Pap. 6, p. 292; Amer. J. of math. 15, 1893, p. 1. — Weitere Litteratur s. namentlich bei *W. F. Meyer,* Bericht über die Fortschritte der projektiven Invariantentheorie im letzten Vierteljahrhundert, Deutsche Math.-Ver. 1, 1892, p. 245 ff. [I B 2, Nr. 23].

$$\varphi^2 - P\varphi + Q = 0,$$

deren Koeffizienten P und Q symmetrische Funktionen sind; aber nicht umgekehrt [*Cauchy, Abel,* s. I A 6, Anm. 46].

15. Mehrwertige Affektfunktionen. Gruppe [I A 6, Nr. 5]. Die sämtlichen Permutationen der Wurzeln, bei denen eine w-wertige Funktion ungeändert bleibt, bilden eine Gruppe: die „Gruppe der Funktion". Umgekehrt heisst die Funktion eine „Funktion der Gruppe".

16. Allgemeine Sätze von Lagrange, Galois, Jordan [I A 6, Nr. 5]. Die w Werte einer w-wertigen Funktion sind die w Wurzeln einer Gleichung w^{ten} Grades, deren Koeffizienten rationale Funktionen von $a_1, a_2, .., a_n$ sind[40]).

Ist die Gruppe der Funktion φ unter der von ψ enthalten, so ist ψ eine rationale Funktion von φ mit Koeffizienten, welche rationale Funktionen von $a_1, a_2, .., a_n$ sind[41]).

Funktionen mit einer gemeinsamen Gruppe sind rationale Funktionen von einander, mit Koeffizienten, welche Funktionen der Gruppe sind[42]).

17. Mögliche Wertezahlen [I A 6, Nr. 8]. Die Wertezahl w muss offenbar $\leq n!$ sein; dass sie stets ein Teiler von $n!$ sein muss, hat *Lagrange* (a. a. O.) gezeigt. Aber nicht alle Teiler von $n!$ können Wertezahlen sein. Die ersten einschränkenden Sätze fanden *Ruffini, Abbati, Cauchy*: es giebt keine 3- oder 4-wertige Funktionen von 5 Elementen; es giebt keine 3- oder 4- oder 5-wertige Funktionen von 6 Elementen; eine weniger als 5-wertige Funktion ist 2- oder 1-wertig; eine weniger als p- (grösste Primzahl unter n) wertige Funktion ist 2- oder 1-wertig.

Diese Sätze sind besondere Fälle des Bertrand'schen Satzes: eine weniger als n-wertige Funktion von n Elementen ist 2- oder 1-wertig; ausgenommen $n = 4$, in welchem Fall es 3-wertige Funktionen giebt.

Bertrand bewies diesen Satz auf Grund des Postulates: zwischen $a + 1$ und $2a$ $(a > 2)$ liegt eine Primzahl, welches erst später von *L. Tchebicheff* bewiesen wurde [I C 3].

Ausser den Sätzen, welche die Wertezahl beschränken, giebt es Sätze, welche für gegebene Wertezahl die Form der Funktion bestimmen; z. B. eine n-wertige Funktion ist symmetrisch in $n - 1$ Elementen, ausgenommen $n = 6$ (*Bertrand*).

---

40) *L. Lagrange,* Paris. Ac. Hist. 1771; *Vandermonde,* ebenda [I A 6, Anm. 30].
41) *É. Galois,* J. de math. 1846, p. 381.
42) *C. Jordan,* Traité des substitutions, Paris 1870.

Weitere Sätze sind von *Serret*, *Mathieu*, *Jordan*, *Bochert* u. a. aufgestellt worden[43]).

18. Herstellung von Affektfunktionen, Kirkman's Problem. Die Summe aller derjenigen Glieder einer ganzen w-wertigen Funktion, welche durch die Permutationen der Gruppe aus einem derselben hervorgehen, bildet eine „Elementarfunktion" (*Kirkman* l. c.). Eine Elementarfunktion, welche einen Teil der symmetrischen Funktion $(i_1^{\mu_1} i_2^{\mu_2} \ldots)$ bildet, wird mit $[i_1^{\mu_1} i_2^{\mu_2} \ldots]$ bezeichnet. Alle aus einer Elementarfunktion durch Änderung der Exponenten $i_1, i_2, i_3 \ldots$ (wobei aber stets $i_h \neq i_k$) hervorgehenden Funktionen haben dieselbe Gruppe und bilden eine „Familie" $(\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots)$. Die Aufgabe: alle zu einem System $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots$ und alle zu einer Gruppe gehörenden Familien zu finden, bezeichnet *Jordan* (l. c.) als „Kirkman's Problem". Einige Beispiele hierzu hat *Kirkman* gegeben.

19. Aufzählungen. Aufzählungen aller möglichen Funktionen bzw. Gruppen sind von *Cayley*, *Askwith*, *Miller* u. a.[43]) bis zu $n = 14$ vorgenommen worden (vgl. I A 6, Nr. **13**).

20. Rationalwerden von Affektfunktionen; Affekt einer Gleichung. Wenn eine w-wertige Funktion einer Gleichung niedrigeren als w^{ten} Grades genügt, so giebt es w'-wertige Funktionen, welche linearen Gleichungen genügen. Alsdann sagt *Kronecker*[44]), in Anlehnung an *Jacobi*, die Gleichung $f(x) = 0$ habe einen „Affekt"; die Funktionen, deren Rationalwerden den Affekt bedingt, heissen „Affektfunktionen". Die Gruppe der Affektfunktionen ist die Gruppe der Gleichung.

21. Cyklische, cykloïdische, metacyklische Funktionen. Funktionen, welche sich nicht bei den Substitutionen

$$\begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+k'} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} k, k' = 0, 1, .., n-1 \\ x_{k+n} = x_k \end{pmatrix}$$

43) *Cauchy*, J. éc. pol. 10, 1815, cah. 17, p. 1, 29; *J. Bertrand*, J. éc. pol. 18, 1845, cah. 30, p. 123; *J. A. Serret*, J. d. Math. (1) 15, 1850, p. 1 u. 45; *E. Mathieu*, J. d. Math. (2) 5, 1860, p. 9; Par. Compt. Rend. 1858, p. 46; *Jordan*, J. éc. pol. 22, 1861, cah. 38, p. 113; *E. Mathieu*, J. d. Math. (2) 6, 1861, p. 241; *Th. P. Kirkman*, Theory of groups and manyvalued functions, Manchester 1861; Memoirs of the lit. and phil. soc. of Manchester, Lond. u. Par. 1862; *Netto*, J. f. Math. 85, 1878, p. 327; *A. Bochert*, Math. Ann. 33, 1889, p. 584; *E. H. Askwith*, Quart. J. 24, 1890, p. 111 u. 263; *Cayley*, ebenda 25, 1891, p. 71 u. 137 = Pap. 13, p. 117; *G. B. Mathews*, ebenda 25, 1891, p. 127; *A. Bochert*, Math. Ann. 40, 1892, p. 157; *E. Cartan*, Paris Compt. Rend. 119, 1894; *Bochert*, Math. Ann. 49, 1897, p. 113.

44) *Kronecker*, Arithm. Theorie d. alg. Grössen, 1881, p. 34 = Werke 2, p. 284.

ändern, heissen „cyklische"; Funktionen von den $n_1 n_2 \ldots n_h$ Grössen

$$x_{k_1 k_2 \cdots k_h} \quad \begin{pmatrix} k_1 = 0, 1, \ldots, n_1 - 1 \\ k_2 = 0, 1, \ldots, n_2 - 1 \\ \vdots \\ x_{k_1 + n_1, k_2, \ldots} = x_{k_1, k_2 + n_2, \ldots} \\ = x_{k_1, k_2, \ldots} \end{pmatrix},$$

solche, welche sich nicht bei den Substitutionen

$$\begin{pmatrix} x_{k_1, k_2, \ldots, k_n} \\ x_{k_1 + k_1', k_2 + k_2', \ldots, k_h + k_h'} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} k_1, k_1' = 0, 1, \ldots, n_1 - 1 \\ k_2, k_2' = 0, 1, \ldots, n_2 - 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ändern, heissen „cykloidische"[45]).

Ist n prim, so heisst eine Funktion, welche sich nicht bei den Substitutionen

$$\begin{pmatrix} x_k \\ x_{rk+s} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots, n - 1 \\ s = 0, 1, \ldots, n - 1 \\ r = 1, 2, \ldots, n - 1 \\ x_{k+n} = x_k \end{pmatrix}$$

ändert, eine „metacyklische"[46]). Beschränkt man die Werte von r auf die quadratischen Reste von n, so heisst die zugehörige Funktion „hemimetacyklisch"[47]) [I A 6, Nr. **10**].

22. Durch Wurzeln auflösbare Gleichungen. Durch Quadratwurzeln auflösbare Gleichungen [I B 3 c, d, Nr. **28**]. Für die Auflösbarkeit einer Gleichung von Primzahlgrad durch Radikale ist das Rationalwerden der metacyklischen Funktionen notwendig und hinreichend.

Für die Auflösbarkeit einer Gleichung durch Quadratwurzeln ist das Rationalwerden derjenigen Affektfunktionen erforderlich und hinreichend, welche die grösstmögliche ungrade Wertezahl haben. Die Ordnung der Gruppe ist die grösste in $n!$ enthaltene Potenz von 2 [I B 3 c, d, Nr. **14**].

23. Gleichungen 7ten Grades, deren 30-wertige Affektfunktionen rational sind [I B 3 f, Nr. **16**]. Von Gleichungen höheren Grades, welche einen Affekt haben, sind insbesondere diejenigen 7ten Grades, deren 30-wertige Affektfunktionen rational sind, untersucht worden. Dieselben

45) Von *Kronecker* in seinen Vorlesungen gebraucht.

46) Zuerst von *Kronecker* im Sinne des Textes, später von *H. Weber* in allgemeinerem Sinne gebraucht; s. *Weber,* Algebra 1.

47) *Kronecker.*

sind die Resolventen der bei der Transformation 7[ter] Ordnung der elliptischen Funktionen auftretenden Modulargleichung 8[ten] Grades[48]).

24. Funktionen von mehreren Variabelreihen, Wurzeln von Gleichungssystemen. Berechnung symmetrischer Funktionen nach Poisson, v. Escherisch. Eine Funktion von n Systemen von je k Grössen:

$$\begin{array}{c} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \\ \vdots \end{array}$$

heisst eine „symmetrische Funktion der n Systeme", wenn sie sich bei Vertauschung derselben nicht ändert.

Eine rationale symmetrische Funktion ist Quotient zweier ganzen symmetrischen Funktionen (*Mertens*).

Eine ganze symmetrische Funktion zerfällt in „typische" oder „eintypige" Funktionen, d. h. in solche, welche aus einem Gliede durch Summation aller daraus durch Vertauschung der Systeme hervorgehenden verschiedenen Glieder entstehen. Man beschränkt sich auf die Betrachtung solcher symmetrischen Funktionen im engeren Sinne.

Eine solche Funktion heisst „r-förmig", wenn in jedem Gliede Elemente aus r Systemen vorkommen. Sie heisst „elementar", wenn sie linear in den Elementen jedes Systems ist. Sie heisst „h-reihig", wenn in jedem Gliede Elemente aus h Reihen vorkommen. Sie heisst „primitiv", wenn sie linear in den Elementen jeder Reihe ist (*Junker*).

Bezüglich der Berechnung symmetrischer Funktionen von mehreren Grössenreihen tritt eine Zweiteilung des Problems ein, je nachdem die Grössen als Wurzelsysteme von Gleichungssystemen gegeben sind oder nicht.

In beiden Fällen werden zunächst die mehrförmigen Funktionen durch die Waring'schen Formeln auf einförmige zurückgeführt; setzt man

$$\sum x_i^{p_1} y_i^{q_1} \cdots x_k^{p_2} y_k^{q_2} \cdots = (\overline{p_1 q_1 \cdots}, \overline{p_2 q_2 \cdots})$$

u. s. w., so wird:

---

48) *Kronecker,* Berl. Ber. 1858, p. 287; *Hermite,* Annal. di mat. 1859; Par. C. R. 57, 1863, p. 750; *Brioschi,* Gött. Nachr. 1869; *Klein,* Math. Ann. 14, 1879, p. 428; 15, 1879, p. 251; *Noether,* ebenda 15, 1879, p. 89; *Brioschi,* ebenda 15, 1879, p. 241; Par. C. R. 95, 1882, p. 665, 814, 1254; *P. Gordan,* Math. Ann. 20, 1882, p. 515 (auch Bd. 17 u. 19), der p. 527 ein „volles System" von Affektfunktionen aufstellt [I B 2, Nr. **5**, Anm. 107]; *Cayley,* J. f. Math. 113, 1894, p. 42 = Pap. 13, p. 473. Des weiteren vgl. I B 3 c, d, Nr. **23**). — Der Fall des Textes ist als ein bes. charakteristisches Beispiel gewählt worden.

$$(\overline{p_1 q_1 \cdot\cdot}, \overline{p_2 q_2 \cdot\cdot}) = (\overline{p_1 q_1 \cdot\cdot})(\overline{p_2 q_2 \cdot\cdot}) - (\overline{p_1 + p_2, q_1 + q_2 \cdot\cdot})$$

u. s. w., analog den Formeln für Funktionen einer Grössenreihe.

Um ferner die einförmigen Funktionen:

$$\sum x_i^p y_i^q \cdot\cdot = s_{pq..}$$

durch die Koeffizienten des Gleichungssystems

$$f_i(x, y, \cdot\cdot) = 0 \qquad (i = 1, 2, .., k)$$

auszudrücken, berechne man die Potenzsummen der Wurzeln t der Gleichung, die sich durch Elimination von $x, y, ..$ aus den Gleichungen

$$t = ux + vy + \cdot\cdot$$
$$f_i(x, y, \cdot\cdot) = 0 \qquad (i = 1, 2, .., k)$$

ergiebt. Dann ist $s_{pq..}$ der Koeffizient von $\frac{(p+q+\cdot\cdot)!}{p!\, q!\, .}\, u^p v^q ..$ in der Entwickelung von $\sum\limits_i t_i^{p+q+\cdot\cdot}$ nach Potenzen von $u, v, ..$ (*Poisson*, *Schläfli*, *Hess*).

Anders verfährt *Waring* (l. c.): er bildet die Gleichung für $t = x^p y^q ..$ und sucht deren Wurzelsumme.

So kommt man zu dem Satze: Jede symmetrische Funktion der Wurzelsysteme eines Gleichungssystems ist rationale Funktion der Koeffizienten des Gleichungssystems (*Cayley*, *Schläfli*).

Die Methoden von *Cauchy*, *Transon*, *Borchardt* hat *G. v. Escherich* auf Gleichungssysteme ausgedehnt.

Es seien

$$F_1(x) = 0, \quad F_2(y) = 0, ..$$

die Endgleichungen vom Grade n, die sich aus den Gleichungen

$$f_i(x, y, ..) = 0 \qquad (i = 1, 2, .., k)$$

durch Elimination von je $k-1$ der Grössen $x, y, ..$ ergeben. Ferner sei $D(x, y, ..)$ die Funktionaldeterminante [I B 1 b, Nr. **21**] der Funktionen $f_i(x, y, ..)$. Die Funktion $\Phi(x, y, ..)$ werde durch die Gleichung definiert:

$$\frac{\Phi(x, y, ..)}{F_1(x)\, F_2(y) ..} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{D(x_i, y_i, ..)(x - x_i)(y - y_i) ..}.$$

Dann ergiebt sich die „einförmige“ Funktion $\sum\limits_i \Psi(x_i, y_i, ..)$ als Koeffizient von $\frac{1}{xy ..}$ in der Entwickelung von:

$$\frac{\Psi(x, y, ..)\, \Phi(x, y, ..)\, D(x, y, ..)}{F_1(x)\, F_2(y) ..}.$$

Um den Wert der „zweiförmigen“ Funktion

$$\sum_{i,h} \Psi(x_i, y_i, \ldots; x_h, y_h, \ldots) \qquad \begin{pmatrix} i, h = 1, 2, \ldots, n) \\ i \lessgtr h \end{pmatrix}$$

zu finden, nehme man den Koeffizienten $\psi(x_i, y_i, \ldots)$ von $\frac{1}{xy\ldots}$ in der Entwickelung von

$$\Psi(x_i, y_i, \ldots; x, y, \ldots) \left\{ \frac{\Phi(x, y, \ldots) D(x, y, \ldots)}{F_1(x) F_2(y) \ldots} - \frac{1}{D(x_i, y_i, \ldots)(x - x_i)(y - y_i) \ldots} \right\};$$

derselbe ist gleich

$$\sum_h \Psi(x_i, y_i, \ldots, x_h, y_h, \ldots), \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, n \\ h \neq i \end{pmatrix}$$

und die gesuchte Funktion ist der Koeffizient von $\frac{1}{xy\ldots}$ in der Entwickelung von

$$\frac{\psi(x, y, \ldots) \Phi(x, y, \ldots) D(x, y, \ldots)}{F_1(x) F_2(y) \ldots}$$

u. s. w.

Eine erzeugende Funktion für die symmetrischen Funktionen der Grössensysteme

$$x_i, y_i, \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ist offenbar:

$$\sum \frac{1}{(u_1 - x_i)(v_1 - y_i) \ldots (u_2 - x_k)(v_2 - y_k) \ldots},$$

zu summieren über alle Permutationen der Systeme

$$u_i, v_i, \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Den Wert dieser erzeugenden Funktion findet *von Escherisch* gleich:

$$\frac{D(u_1, v_1, \ldots) D(u_2, v_2, \ldots) \ldots \Phi(u_1, v_1, \ldots) \Phi(u_2, v_2, \ldots) \ldots D(u_1, u_2, \ldots)}{F_1(u_1) F_1(u_2) \ldots F_2(v_1) F_2(v_2) \ldots D(x_1, x_2, \ldots)}.$$ [49)]

25. Symmetrische Funktionen von Reihen von Variabeln, die von einander unabhängig sind. Sätze, Formeln, Verfahren von Mertens, Waring, Schläfli, Mac Mahon, Junker. Will man dagegen die einförmigen Funktionen durch die elementaren:

$$\sum x_1 x_2 \cdots x_p y_{p+1} \cdots y_{p+q} \cdots = c_{pq\ldots}$$

ausdrücken, so hat man nur die Newton'schen oder die Girard'schen Formeln auf die Potenzsummen und Koeffizienten der Gleichung für

$$t = ux + vy + \cdots$$

anzuwenden und die Koeffizienten der einzelnen Glieder $u^p v^q \ldots$ zu annullieren. So erhält man z. B.

$$s_{100..} = c_{100..}$$
$$s_{200..} = c^2_{100..} - 2c_{200..}$$
$$s_{1100..} = c_{100..}c_{0100..} - c_{1100..}$$
$$2s_{11100..} = c_{11100} - c_{0010..}c_{1100..} - c_{0100..}c_{10100..} - c_{100..}c_{01000..}$$
$$+ 2c_{100..}c_{0100..}c_{00100..},$$

allgemein:

$$(-1)^{p+q+\cdots-1}\frac{(p+q+\cdots-1)!}{p!\,q!\,..}s_{pq..}$$
$$=\sum(-1)^{\sum\pi_i-1}\frac{(\sum\pi_i-1)!}{\pi_1!\,\pi_2!\,..}c^{\pi_1}_{\varkappa_1\lambda_1..}c^{\pi_2}_{\varkappa_2\lambda_2..}\cdots$$

und umgekehrt:

$$(-1)^{p+q+\cdots-1}c_{pq..}$$
$$=\sum\left(\frac{(\varkappa_1+\lambda_1+\cdots-1)!}{\varkappa_1!\,\lambda_1!\,..}\right)^{\pi_1}\left(\frac{(\varkappa_2+\lambda_2+\cdots-1)!}{\varkappa_2!\,\lambda_2!\,..}\right)^{\pi_2}\cdots\frac{(-1)^{\sum\limits_i\pi_i-1}}{\pi_1!\,\pi_2!\,..}s^{\pi_1}_{\varkappa_1\lambda_1..}s^{\pi_2}_{\varkappa_2\lambda_2..}\cdots$$

(*Mac Mahon*). Die Summationen beziehen sich auf alle Glieder, deren „Partialgewichte"

$$\pi_1\varkappa_1+\pi_2\varkappa_2+\cdots$$
$$\pi_1\lambda_1+\pi_2\lambda_2+\cdots$$

bzw. die Werte $p, q, ..$ haben. So erhält man den Satz: Jede symmetrische Funktion eines Grössensystems ist rationale Funktion der elementaren Funktionen des Systems.

Kürzer als der angegebene Weg ist die Methode der unbestimmten Koeffizienten. Da nämlich jede eintypige Funktion isobar in allen Partialgewichten ist (*L. Schläfli*, *E. Betti*), kann man die litterale Form einer eintypigen Funktion als Funktion der elementaren aufstellen. Die Koeffizienten bestimmt man dann aus einer hinreichenden Anzahl spezieller Wertsysteme oder durch Koeffizientenvergleichung der eintypigen Funktionen, nachdem man die elementaren Funktionen durch $x_1, y_1, .., x_2, y_2, ..$ ausgedrückt hat.

Mac Mahon hat seine „neue Theorie" [Nr. **10**] auch auf symmetrische Funktionen von Grössensystemen ausgedehnt. An die Stelle der Partitionen des Gewichts tritt ein System von Partitionen der Partialgewichte:

$$p = p_1 + p_2 + \cdots$$
$$q = q_1 + q_2 + \cdots$$
$$\vdots$$

welche man symbolisch zusammenfasse in

$$\overline{pq\cdots} = \overline{p_1q_1\cdots} + \overline{p_2q_2\cdots} + \cdots.$$

Dann ist die symmetrische Funktion $\left(\sum\limits_i\overline{p_{1i}q_{1i}\cdots},\ \sum\limits_i\overline{p_{2i}q_{2i},\cdots}\right)$ ausdrückbar als lineares Aggregat der Separationen von

$$(\overline{p_{11}\,q_{11}\cdot\cdot},\ \overline{p_{12}\,q_{12}\cdot\cdot},\cdot\cdot,\ \overline{p_{21}\,q_{21}\cdot\cdot},\ \overline{p_{22}\,q_{22}\cdot\cdot},\cdot\cdot)$$

und die Koeffizienten befolgen ein analoges Symmetriegesetz wie im Falle $k=1$. Insbesondere ist:

$$(-1)^{\sum_i \pi_i - 1}\frac{\left(\sum_i \pi_i - 1\right)!}{\pi_1!\,\pi_2!\,..}\, s_{(\overline{p_1 q_1\cdot\cdot}^{\pi_1}\,\overline{p_2 q_2\cdot\cdot}^{\pi_2}\cdot\cdot)}$$

$$= \sum (-1)^{\sum_i j_i - 1}\frac{\left(\sum_i j_i - 1\right)!}{j_1!\,j_2!\,..}(J_1)^{j_1}(J_2)^{j_2}\cdot\cdot$$

und umgekehrt:

$$(-1)^{\sum_i \pi_i - 1}(\overline{p_1 q_1\cdot\cdot}^{\pi_1}\ \overline{p_2 q_2\cdot\cdot}^{\pi_2})$$

$$\sum (-1)^{\sum_i j_i - 1}\frac{\left(\sum_i \pi_{1i} - 1\right)!\ \left(\sum_i \pi_{2i} - 1\right)!\,..}{j_1!\,j_2!\,..\,\pi_{11}!\,\pi_{12}!\,..\,\pi_{21}!\,\pi_{22}!\,..}\, s_{(\overline{p_{11} q_{11}\cdot\cdot}^{\pi_{11}}\,\overline{p_{12} q_{12}\cdot\cdot}^{\pi_{12}}\cdot\cdot)}\, s_{(\overline{p_{21} q_{21}\cdot\cdot}^{\pi_{21}}\,\overline{p_{22} q_{22}\cdot\cdot}^{\pi_{22}}\cdot\cdot)}$$

Hier bedeutet $s_{(\overline{p_1 q_1\cdot\cdot}^{\pi_1}\,\overline{p_2 q_2\cdot\cdot}^{\pi_2}\cdot\cdot)}$ den Ausdruck von $s_{pq\cdot\cdot}$, wo

$$p = \pi_1 p_1 + \pi_2 p_2 + \cdot\cdot,\ q = \pi_1 q_1 + \pi_2 q_2 + \cdot\cdot, \cdots$$

durch die Separationen von $(\overline{p_1 q_1\cdot\cdot}^{\pi_1}\ \overline{p_2 q_2\cdot\cdot}^{\pi_2}\cdot\cdot)$ und die Summation bezieht sich in der ersten Formel auf alle Separationen $(J_1)^{j_1}(J_2)^{j_2}\cdot\cdot$ von $(\overline{p_1 q_1\cdot\cdot}^{\pi_1}\ \overline{p_2 q_2\cdot\cdot}^{\pi_2}\cdot\cdot)$, in der zweiten auf alle Separationen

$$(\overline{p_{11}\,q_{11}\cdot\cdot}^{\pi_{11}}\ \overline{p_{12}\,q_{12}\cdot\cdot}^{\pi_{12}}\cdot\cdot)^{j_1}\ (\overline{p_{21}\,q_{21}\cdot\cdot}^{\pi_{21}}\ \overline{p_{22}\,q_{22}\cdot\cdot}^{\pi_{22}}\cdot\cdot)^{j_2}\cdot\cdot$$

von $(\overline{p_1 q_1\cdot\cdot}^{\pi_1}\ \overline{p_2 q_2\cdot\cdot}^{\pi_2}\cdot\cdot)$. Die Separationen lassen sich analog wie im Falle $k=1$ in Gruppen zusammenfassen und es besteht der Satz Im Ausdruck der symmetrischen Funktion $(\overline{p_1 q_1\cdot\cdot}^{\pi_1}\ \overline{p_2 q_2\cdot\cdot}^{\pi_2}\cdot\cdot)$ durch Separationen von $(\overline{a_1 b_1\cdot\cdot}^{\alpha_1}\ \overline{a_2 b_2\cdot\cdot}^{\alpha_2}\cdot\cdot)$ ist die Koeffizientensumme in jeder Gruppe Null, wenn die Partition $(\overline{p_1 q_1\cdot\cdot}^{\pi_1}\ \overline{p_2 q_2\cdot\cdot}^{\pi_2}\cdot\cdot)$ keine Separation der Spezialpartition (Spezifikation) $(\overline{\alpha_1 a_1, \alpha_1 b_1,\cdot\cdot,\ \alpha_2 a_2,\ \alpha_2 b_2,\cdot\cdot})$ besitzt[49]).

26. Relationen zwischen den elementar-symmetrischen Funktionen: Brill und Junker. Auf einen wesentlichen Unterschied in

---

49) *F. Mertens*, Wien. Ber. 81^2, 1880, p. 988; Krak. Ak. 17, 1890, p. 143; (2) 1, 1891, p. 333; *S. D. Poisson*, J. éc. pol. 4, an X, cah. 11, p. 199; *E. Hess*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 15, 1870, p. 326; *Schläfli*, Wien. Ber., math.-nat. Kl. 4^2, 1852, p. 1; *Cayley*, Lond. Trans. 147, 1857, p. 717 = Pap. 2, p. 454; *Mac Mahon*, ebenda 181 A, 1890, p. 481; *E. Betti*, Ann. mat. fis. 4, 1853; *G. v. Escherich*, Wien. Ber., math.-nat. Kl. 36^2, 1876, p. 251; *A. Brill*, Gött. Nachr. 1893, p. 757; *Fr. Junker*, Über alg. Korrespondenzen, Diss. Tübingen 1889; Math. Ann. 38, 1891, p. 91; 43, 1893, p. 225; 45, 1894, p. 1.

der Theorie der symmetrischen Funktionen für $k = 1$ und $k > 1$ scheint zuerst *Schläfli* aufmerksam gemacht zu haben. Während im ersten Fall die Anzahl der elementaren Funktionen mit der der Variablen übereinstimmt, sind im zweiten Fall weniger Variable als elementar-symmetrische Funktionen vorhanden, die letzteren also durch eine Anzahl identischer Relationen verbunden.

Unter den elementaren Funktionen bilden die folgenden kn:

$$\begin{array}{llll} c_{100..}, & c_{200..}, & c_{300..}, \;..,\; & c_{n\,00..} \\ c_{010..}, & c_{110..}, & c_{210..}, \;..,\; & c_{n-1,\,10..} \\ c_{0010..}, & c_{1010..}, & c_{2010..}, \;..,\; & c_{n-1,\,010..} \\ c_{00010..}, & c_{10010..}, & c_{20010..}, \;..,\; & c_{n-1,\,0010..} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

ein Fundamentalsystem, da jede symmetrische Funktion durch die Gleichungen:

$$y f'(x) = \sum_i y_i \frac{f(x)}{x - x_i} = c_{010..}\, x^{n-1} - c_{110..}\, x^{n-2} + \cdots$$

$$z f'(x) = \sum_i z_i \frac{f(x)}{x - x_i} = c_{0010..}\, x^{n-1} - c_{1010..}\, x^{n-2} + \cdots$$

$$\vdots$$

auf eine symmetrische Funktion von $x_1, x_2, .., x_n$, und durch die Gleichung:

$$f(x) = x^n - c_{100..}\, x^{n-1} + c_{200..}\, x^{n-2} - \cdots = 0$$

auf einen von den x freien Ausdruck reduziert wird, der nur von den obigen kn Grössen abhängt. Insbesondere entstehen durch die Darstellung der übrigen c durch die angegebenen $\binom{n+k}{k} - kn - 1$ rationale Relationen unter den elementaren symmetrischen Funktionen. Diese sind von einander unabhängig und alle überhaupt vorhandenen Relationen sind durch sie rational darstellbar (*Netto*).

Auf anderem Wege hat *Brill* ein vollständiges Relationensystem aufgestellt. Es sei $k = 2$. Setzt man

$$t_i = u x_i + v y_i \qquad (i = 1, 2, .., n)$$

so wird

$$\begin{aligned} \sum t_i \quad &= c_{10}\, u + c_{01}\, v, \\ \sum t_{i_1} t_{i_2} &= c_{20}\, u^2 + c_{11}\, uv + c_{02}\, v^2 \\ \vdots \quad & \quad\quad \vdots \end{aligned}$$

und die Bedingungen dafür, dass die Grössen c_{ik} die elementaren symmetrischen Funktionen der n Grössenpaare $x_1, y_1,\; x_2, y_2, ..$ sind, müssen übereinstimmen mit den Bedingungen dafür, dass die Ternärform

$$\sum c_{ik}(-t)^{n-i-k}u^i v^k$$

in Linearfaktoren zerfällt [I B 1 b, Nr. 5]. Die Bedingungen hierfür bestehen in dem identischen Verschwinden der Formen:

$$\binom{p}{p}\left(\sum t_i^\alpha, \sum t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_p}\right)_p$$

$$-\binom{p+1}{p}\left(\sum t_i^{\alpha-1}, \sum t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_{p+1}}\right)_p \cdots (-1)^{n-p}\binom{n}{p}\left(\sum t_i^{\alpha-n+p}, t_1 t_2 \ldots t_n\right)_p$$

$(\alpha > p)$; hierin bedeutet $(P, Q)_p$ die p^{te} Überschiebung [I B 2, Nr. **14**] der Formen P und Q, und die Funktionen der t sind durch die Koeffizienten der Form $\sum c_{ik}(-t)^{n-i-k}u^i v^k$, also als Formen von u und v auszudrücken. Setzt man zur Abkürzung

$$c_{10}u + c_{01}v = f_1,$$
$$c_{20}u^2 + c_{11}uv + c_{02}v^2 = f_2,$$
$$\vdots$$

so ergiebt sich für $n = 2$ als Bedingung das Verschwinden der Invariante:

$$(f_1^2 - 2f_2, f_2)_2;$$

für $n = 3$ das identische Verschwinden der Covarianten:

$$(f_1^3 - 3f_1f_2 + 3f_3, f_2)_2 - 3(f_1^2 - 2f_2, f_3)_2 = 0,$$
$$(f_1^4 - 4f_1^3f_2 + 2f_2^3 + 4f_1f_3, f_2)_2 - 3(f_1^3 - 3f_1f_2 + 3f_3, f_3)_2 = 0$$

u. s. w.

Am ausführlichsten hat diese Relationen *Junker* behandelt. Er erhält dieselben z. B. folgendermassen: Entwickelt man die symmetrische Funktion

$$\varphi(x, y, \ldots) = \sum (x - x_1)^{\alpha_1}(y - y_1)^{\beta_1} \cdots (x - x_2)^{\alpha_2}(y - y_2)^{\beta_2} \cdots$$

nach Potenzen der $x, y, \ldots$:

$$\varphi(x, y, \ldots) = \varphi(0, 0, \ldots) - \left(x\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + y\sum \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} + \cdots\right)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(x^2 \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} + 2xy\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i y_i} + y^2 \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_i^2}\right),$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

so ergiebt sich, wegen $\sum \varphi(x_i, y_i, \ldots) = 0$, die Relation:

$$0 = n\varphi(0, 0, \ldots) - \left(\sum x_i \cdot \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \sum y_i \sum \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}\right) + \cdots,$$

in der man $\sum x_i = c_{100\ldots}$, $\sum y_i = c_{010\ldots}$, u. s. w. und

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial c_{pq\ldots}} \cdot (n - p + 1)\, c_{p-1, q, \ldots} \text{ u. s. w.}$$

zu setzen hat.

Junker zeigt ferner, dass das niedrigste Gewicht für diese Relationen $n+2$ ist. Daraus folgt insbesondere, dass es Relationen, die für jeden Wert von n gültig sind, nicht geben kann. Bei unbestimmtem n giebt es daher keine Relationen zwischen den elementaren symmetrischen Funktionen, sodass sich in diesem Falle jede symmetrische Funktion nur auf eine Art durch die elementaren darstellen lässt. Diese Darstellung braucht bei einer ganzzahligen Funktion nicht notwendig ganzzahlig zu sein, wie z. B. aus der verallgemeinerten Girard'schen Formel hervorgeht.

Aus jeder Relation zwischen symmetrischen Funktionen lassen sich nach *Junker* neue herleiten, indem man folgende Prozesse anwendet. Durch eine Substitution der Art:

$$x = x' x'' x''' \,..$$
$$y = y' y'' y''' \,..$$

wird eine Funktion in eine andere von mehr Reihen von Grössen verwandelt. Die elementaren Funktionen gehen dadurch in elementare Funktionen der neuen Grössen über.

Durch Koincidenz mehrerer Reihen, z. B.

$$x_i = y_i \qquad (i = 1, 2, .., n)$$

wird eine Funktion in eine andere von weniger Reihen von Grössen verwandelt. Die einförmigen Funktionen bleiben einförmig.

Beide Prozesse, nebst den Beziehungen zwischen den einförmigen und den elementaren Funktionen genügen offenbar, um aus den Ausdrücken der primitiven Elementarfunktionen:

$$\sum x_1 y_2 \quad = s_{100..} s_{010..} - s_{110..}$$
$$\sum x_1 y_2 z_3 = s_{100..} s_{010..} s_{0010..} - \cdots + 2 s_{1110..}$$

successive die Ausdrücke aller eintypigen symmetrischen Funktionen zu erhalten.

Andere derartige Prozesse sind die Differentialoperatoren:

$$\sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \sum_{p, q, ..} \frac{\partial \varphi}{\partial c_{pq..}} (n - p + 1) c_{p-1, q, ..} = \sum_{p, q, ..} \frac{\partial \varphi}{\partial s_{pq..}} p s_{p-1, q, ..},$$

$$\sum_i y_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \sum_{p, q, ..} (1 + p) \frac{\partial \varphi}{\partial c_{pq..}} c_{p-1, q..} = \sum_{p, q, ..} p \frac{\partial \varphi}{\partial s_{p, q, ..}} s_{p-1, q, ..}.$$

Die letzteren können z. B. dazu dienen, aus dem Ausdruck einer eintypigen Funktion durch die elementaren oder die einförmigen Funktionen den Ausdruck jeder anderen eintypigen Funktion von demselben Totalgewicht abzuleiten.

Die Mehrdeutigkeit in der Darstellung einer eintypigen Funktion durch die elementaren macht die Einführung einer „kanonischen" Form erforderlich. *Junker* definiert als solche diejenige Form einer h-förmigen Funktion, in welcher die h-förmigen Elementarfunktionen im höchstmöglichen Grad homogen auftreten. Er lehrt die kanonische Form herzustellen und beweist, dass der Grad, in welchem die h-förmigen Elementarfunktionen auftreten, dem kleinsten Teilgewicht höchstens gleich sein kann. Unter Teilgewicht der Funktion $\sum x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} \ldots x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \ldots$ versteht *Junker* die Summen

$$\begin{gathered} \alpha_1 + \beta_1 + \cdots \\ \alpha_2 + \beta_2 + \cdots \\ \vdots \end{gathered}$$

während er die Partialgewichte als „Reihengewichte" bezeichnet[49]).

27. Allgemeinere Funktionen. *Junker* macht auf eine neue Art von Funktionen, doppeltsymmetrische Funktionen, aufmerksam; dieselben sind nicht nur symmetrisch in Bezug auf die Vertauschungen von Kolonnen, sondern auch in Bezug auf diejenige der Reihen[49]).

Ähnlich spricht *Muir*[50]) von symmetrisch-alternierenden Funktionen. Determinanten sind alternierend-alternierende Funktionen. Allgemeinere Funktionen dieser Art sind bisher nicht betrachtet worden. Auch ist die Untersuchung derselben in einer *erschöpfenden* Behandlung der Funktionen *einer* Grössenreihe mit enthalten.

50) *Th. Muir,* Edinb. Trans. 33, 1887, p. 309.

IB3c,d. GALOIS'SCHE THEORIE MIT ANWENDUNGEN.

VON

O. HÖLDER

IN LEIPZIG.

Inhaltsübersicht.

Lehrbücher.

J. A. Serret, Cours d'algèbre supérieure, Paris, 3. éd. 1866, 4. éd. 1879, 5. éd. 1885 (t. 2, section 5, chap. 5); deutsch v. Wertheim, Leipzig 1868, 2. Aufl. 1878.
C. Jordan, Traité des substitutions et des équations algébriques, Paris 1870.
J. Petersen, de algebraiske ligningers theori, Kjöbenhavn 1877; deutsch 1878 (p. 299 ff.); ital. von *G. Rozzalino* u. *G. Sforza,* Napoli 1891; franz. 1896.
E. Netto, Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra, Leipzig 1882; ital. v. *G. Battaglini,* Torino 1885; engl. v. *F. N. Cole,* Ann Arbor 1892.
H. Vogt, Leçons sur la résolution algébrique des équations, Paris 1895.
H. Weber, Lehrbuch der Algebra, Braunschweig 1. Bd. 1895, 2. Bd. 1896 (besonders Bd. 1, drittes Buch); zweite Aufl. 1. Bd., 1898.

---

1. Einleitung. *Évariste Galois* hat eine Theorie der Gleichungen geschaffen[1]), die ein Kriterium für die Auflösbarkeit spezieller Gleichungen durch Wurzelzeichen ergiebt, aber zugleich weit über dieses Ziel hinausführt. Diese Theorie knüpft an den Begriff der Irreducibilität an.

Eine Gleichung $f(x) = 0$ wird *reducibel* genannt, wenn die ganze Funktion $f(x)$, welche die linke Seite bildet, so in Faktoren gespalten werden kann, dass die Koeffizienten der Faktoren „rational bekannt" sind; im andern Fall heisst die Gleichung *irreducibel* [I B 1 a, Nr. **10**]. Die Eigenschaft der Irreducibilität kommt also einer Gleichung nur mit Rücksicht auf eine vorher zu machende Festsetzung zu. Man hat gewisse Grössen $R, R', \ldots$ zu bezeichnen, die als rational bekannt angesehen werden sollen. Zugleich sind auch diejenigen Grössen als rational bekannt zu betrachten, die sich aus $R, R', \ldots$ mit Hülfe der Operationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division ergeben. Alle diese Grössen bilden den Rationalitätsbereich $[R, R', \ldots]$.[2]) Die Grössen $R, R', \ldots$ können bis auf einen gewissen Grad willkür-

1) Oeuvres mathématiques *d'Évariste Galois,* Abdruck aus J. d. math. 11 (1846), p. 381; neu hsg. von *É. Picard,* Par. 1897; deutsche Ausg. von *Maser,* Berlin 1889. Die wichtigste Arbeit p. 33, die vor 1846 nicht gedruckt war, ist im Jahre 1831 niedergeschrieben. Einige Resultate waren von *Galois* im Bulletin des sciences mathém. von *Férussac* 13 (1830), p. 271 veröffentlicht worden. Besonders bemerkenswert ist auch p. 24 der oeuvres, der Brief an *Chevalier,* der nach *Galois'* Tod 1832 in der Revue encyclopédique erschien.

2) Vgl. *L. Kronecker,* Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, Berlin 1882, p. 3 (J. f. M. 92 [1882]) = Werke 2, p. 250. Vgl. auch *Galois,* mém. sur les cond. de resol., principes: „on pourra convenir de regarder" etc; *N. H. Abel,* Bd. 1, p. 479 Fussn.; 2, p. 220, Z. 3 v. o.; p. 330, Z. 24 v. o. Andere Autoren nennen eine solche Gesamtheit von Grössen einen „Körper"; vgl. *R. Dedekind*'s 11. Supplement zu den Vorlesungen von *P. G. Lejeune-Dirichlet* über Zahlentheorie, 3. Aufl. 1879 [I B 1 c, Nr. 2].

lich angenommen werden, es müssen nur die Koeffizienten von $f(x)$ selbst dem Rationalitätsbereich angehören. Der einfachste Rationalitätsbereich ist der „absolute", der nur aus den rationalen Zahlen besteht.

Wenn die Gleichung $g(x) = 0$ für eine Wurzel der irreducibeln Gleichung $f(x) = 0$ erfüllt ist, so ist $g = 0$ erfüllt für alle Wurzeln der irreducibeln Gleichung[3]). Voraussetzung ist dabei, dass ein Rationalitätsbereich zu Grunde liegt, dem die Koeffizienten der beiden Gleichungen angehören, und in dem die zweite Gleichung irreducibel ist. Der genannte Satz besagt, dass *in gewissem Sinn* von jeder Wurzel einer irreducibeln Gleichung ausgesagt werden kann, was von einer Wurzel gilt. Anders verhält sich die Sache, wenn man Paare von Wurzeln betrachtet. Es hat z. B. die im absoluten Rationalitätsbereich irreducible Gleichung $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ die Wurzeln $x_1 = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, $x_2 = e^{\frac{4\pi i}{5}}$, $x_3 = e^{\frac{8\pi i}{5}}$, $x_4 = e^{\frac{6\pi i}{5}}$, und es besteht die Relation $x_1^2 - x_2 = 0$. Diese Relation würde nicht bestehen bleiben, wenn wir für das Wurzelpaar x_1, x_2 das Paar x_3, x_1 setzen wollten, dagegen ist

$$(1) \qquad x_2^2 - x_3 = 0, \quad x_3^2 - x_4 = 0, \quad x_4^2 - x_1 = 0.$$

Es gilt also nicht für jedes Wurzelpaar, was für ein Wurzelpaar gilt. Ähnliches findet man, wenn man Relationen aus Wurzeltripeln bildet. So ist

$$(2) \quad x_1 - x_2 x_3 = 0, \quad x_2 - x_3 x_4 = 0, \quad x_3 - x_4 x_1 = 0, \quad x_4 - x_1 x_2 = 0,$$

während der Ausdruck $x_2 - x_1 x_3$ einen von Null verschiedenen Wert hat.

Die Relationen (1) gehen durch die cyklische Vertauschung $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ [I A 6, Nr. 3] aus einander hervor, und es gilt dasselbe von den Relationen (2). Besteht nun *vermöge der speziellen Werte* der Grössen x_1, x_2, x_3, x_4 irgend eine Relation $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, in welche ausserdem nur noch Grössen des Rationalitätsbereichs als Koeffizienten eingehen, so lässt sich zeigen, dass auch in dieser Relation die Vertauschung (x_1, x_2, x_3, x_4) ausgeführt werden darf, ohne dass die Relation aufhört, zu bestehen; dagegen giebt es ausser den Wiederholungen (Potenzen) des genannten Cyklus keine Substitution, die in allen Relationen $\varphi = 0$ der genannten Art ausgeführt werden dürfte.

So ergiebt sich eine aus den Potenzen der Substitution $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ gebildete Gruppe[4]), welche der vorgelegten Gleichung zugehört.

Galois hat nun die Entdeckung gemacht, dass in dieser Weise

3) *N. H. Abel,* J. f. M. 4 (1829), p. 131, oeuvr. nouv. éd. publ. par *L. Sylow* et *S. Lie* (1881) 1, p. 480.

4) Vgl. Anm. 11.

jeder speziellen Gleichung, nachdem ein Rationalitätsbereich zu Grunde gelegt ist, eine völlig bestimmte Gruppe von Substitutionen zugehört[5]). Aus der „*Galois*'schen Gruppe einer Gleichung" kann man die wesentlichsten Eigenschaften der Gleichung erkennen. Von Gleichungen, welche dieselbe Gruppe besitzen, sagt man, dass sie den gleichen „Affekt" haben[6]) [I B 3 b, Nr. **20**].

Einen Keim der *Galois*'schen Theorie kann man bei *Lagrange* finden. Dieser knüpft an die Betrachtungen an, welche *Hudde* und *Waring* über solche Gleichungen angestellt hatten, in welchen zwischen den Wurzeln gewisse einfache Relationen bestehen[7]). *Lagrange* denkt sich an jener bemerkenswerten Stelle eine Relation, welche zwischen einem Teil der Wurzeln vermöge der numerischen Werte dieser Wurzeln besteht, und unterscheidet nun den Fall, in welchem diese Relation „nur für diese Wurzeln und nur auf eine Weise" statt hat, von dem andern, in welchem in der Relation gewisse Vertauschungen vorgenommen werden können. Die Wichtigkeit der zwischen den Wurzeln bestehenden Relationen trat später noch mehr durch die von *Gauss* über die Kreisteilung[8]) ausgeführten Untersuchungen hervor, auf welche *Galois* auch Bezug genommen hat[9]).

2. Definition der Gruppe einer Gleichung. Die Gleichung $f(x)=0$ werde vom n^{ten} Grad und ohne Doppelwurzel, dagegen nicht notwendig als irreducibel angenommen. Die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ der Gleichung sind von einander verschieden. Nun wähle man eine Irrationalität w, in welcher jede der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ rational ausgedrückt, und die selbst in allen den Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zusammen rational dargestellt werden kann; eine solche Irrationalität lässt sich immer finden, z. B. indem man $w = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n$ setzt und $m_1, m_2, \ldots m_n$ als ganze Zahlen so bestimmt, dass die $n!$ Ausdrücke, die aus $m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n$ durch die sämmt-

5) Oeuvr. p. 37.

6) *L. Kronecker,* Berl. Ber. 1858, p. 288 und 1861, p. 615.

7) *J. L. Lagrange,* réflexions sur la résolution algébrique des équations (nouveaux mémoires de l'acad. roy. de Berlin 1770, p. 134 ff., 1771, p. 138 ff.), oeuvr. publ. par *J. A. Serret,* Paris 1869, 3, p. 403 ff. *Johannis Huddenii* epistola prima de reductione aequationum (1657). Dieser Brief ist der Geometria a *Renato Des-Cartes* op. atque stud. *F. a Schooten,* Amstelodami (1. Aufl. 1649, 2. Aufl. 1659, 3. Aufl. 1683) beigedruckt und findet sich in der 3. Aufl. dieser lat. Übersetzung der „Géométrie" auf S. 401. Man vgl. besonders p. 426. *Ed. Waring,* miscellanea analytica, Cantabrigiae 1762, p. 26.

8) Vgl. Nr. **22**.

9) Oeuvr. p. 25.

lichen Vertauschungen der Grössen x entstehen, verschieden sind[10]). Drückt man die Wurzeln x in w aus, so erhält man

$$(3) \qquad x_1 = \psi_1(w), \quad x_2 = \psi_2(w), \; \ldots \; x_n = \psi_n(w).$$

Jetzt bedeute $G(x) = 0$ die in dem zu Grunde gelegten Rationalitätsbereich $[R, R', \ldots]$ irreducible Gleichung, der die Grösse w genügt, und seien $w, w', w'', \ldots w^{(r-1)}$ die sämtlichen Wurzeln der Gleichung $G = 0$. Es gehen nun aus (3) im ganzen r Grössenreihen

$$(4) \qquad \psi_1(w^{(\alpha)}), \quad \psi_2(w^{(\alpha)}), \; \ldots \; \psi_n(w^{(\alpha)}), \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots r-1)$$

hervor, die nichts anderes sind, als r verschiedene Anordnungen (Permutationen) jener selben Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$. Bedeutet wieder $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$ eine zwischen den Grössen x vermöge der speziellen Werte dieser Grössen bestehende Relation, deren Koeffizienten dem Rationalitätsbereich $[R, R', \ldots]$ angehören, so kann in der Relation $\varphi = 0$ für $x_1, x_2, \ldots x_n$ jede der Anordnungen (4) eingesetzt werden, ohne dass die Relation aufhörte, richtig zu sein. Das ist eine Folge des in Nr. **1** erwähnten Satzes. Man darf also in der Gleichung $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$ alle die in der Formel

$$\begin{pmatrix} \psi_1(w) & \psi_2(w) & \ldots \psi_n(w) \\ \psi_1(w^{(\alpha)}) & \psi_2(w^{(\alpha)}) & \ldots \psi_n(w^{(\alpha)}) \end{pmatrix}$$

für $\alpha = 0, 1, 2, \ldots r-1$ enthaltenen r Substitutionen ausführen. Es lässt sich beweisen, dass diese Substitutionen eine *Gruppe* bilden[11]), und dass eine in dieser Gruppe nicht enthaltene Substitution jedenfalls nicht in *allen* Relationen $\varphi = 0$ ausgeführt werden darf. Die so definierte Gruppe ist, wenn der Rationalitätsbereich $[R, R', \ldots]$ zu Grunde gelegt wird, die „*Galois'sche Gruppe*" der Gleichung $f(x) = 0$. Die hier angeführten Eigenschaften dieser Gruppe zeigen, dass sie nur durch die Gleichung selbst und durch den Rationalitätsbereich bestimmt und von der zu ihrer Konstruktion benutzten Grösse w unabhängig ist[12]).

---

10) *Galois,* oeuvr. p. 36.

11) d. h. dass je zwei solche Substitutionen, wenn man sie auf die eine oder die andere Art zusammensetzt, wieder eine solche Substitution ergeben. *Galois* hat das nicht bewiesen; man vgl. den Beweis bei *E. Betti,* Ann. mat. fis. 3 (1852), p. 87, 88. Hinsichtlich aller gruppentheoretischen Begriffe vgl. man auch I A 6.

12) Eine andere Auffassung der *Galois*'schen Gruppe einer Gleichung hat *L. Kronecker* gegeben, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, Berlin 1882, p. 32—34 = Werke 2, p. 281—285. Diese Auffassung ist von *A. Kneser,* J. f. Math. 102 (1888), p. 20 näher ausgeführt worden. Wieder anders hat *H. Weber* die Gruppe einer Gleichung eingeführt, indem er für die

Die zur Definition der Gruppe benutzte Gleichung $G = 0$ wird als „*Galois*'sche Resolvente" der Gleichung $f = 0$ bezeichnet[13]). Der Grad r dieser Resolvente ist gleich der Anzahl der Substitutionen der *Galois*'schen Gruppe, d. h. gleich der „Ordnung" dieser Gruppe.

3. Weitere Eigenschaften der Gruppe. Man kann die Eigenschaften der *Galois*'schen Gruppe einer Gleichung auch etwas anders formulieren. Es sei $\chi(x_1, x_2, \dots x_n)$ eine ganze Funktion der Wurzeln $x_1, x_2, \dots x_n$ der Gleichung, und es soll χ für jede Substitution der Gleichungsgruppe seinen numerischen Wert behalten. Man kann dann den Wert von χ folgendermassen berechnen. Man drücke $x_1, x_2, \dots x_n$ durch w aus, wodurch $\chi(x_1, x_2, \dots x_n) = \omega(w)$ wird. Diejenigen Werte, die aus der Funktion $\chi(x_1, x_2, \dots x_n)$ durch die Substitutionen der Gruppe hervorgehen, sind $\omega(w)$, $\omega(w')$, $\omega(w'')$, $\dots$ $\omega(w^{(r-1)})$. Diese Werte müssen hier einander gleich sein, und es ist somit

$$\chi(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{1}{r}\{\omega(w) + \omega(w') + \omega(w'') + \cdots + \omega(w^{(r-1)})\}.$$

Die rechte Seite der erhaltenen Gleichung stellt sich als Grösse des Rationalitätsbereichs dar [I B 3 b Nr. **1**]. Eine Funktion χ, welche bei den Substitutionen der Gruppe numerisch ungeändert bleibt, hat also einen rational bekannten Wert. Die Umkehrung dieses Satzes ist gleichfalls richtig, was im Grunde schon in Nr. **2** enthalten ist[14]).

Ausserdem lässt sich noch beweisen: wenn eine Gruppe Γ von Substitutionen der Wurzeln $x_1, x_2, \dots x_n$ existiert von der Eigenschaft, dass jede ganze Funktion der Wurzeln, die bei den Substitutionen von Γ numerisch ungeändert bleibt, rational bekannt ist, und jede ganze Funktion der Wurzeln, deren Wert rational bekannt ist, bei den Substitutionen von Γ numerisch ungeändert bleibt, so ist Γ die *Galois*'sche Gruppe der Gleichung $f(x) = 0$, der die Wurzeln $x_1, x_1, \dots x_n$ angehören[15]).

Die Koeffizienten der Funktionen sind hier stillschweigend als rational bekannt angenommen worden.

---

sämtlichen Grössen eines „Normalkörpers" Substitutionen definirt hat, Acta math. 8 (1886), p. 196 u. Lehrbuch der Algebra, 1. Aufl. 1, p. 467 ff., 476 ff.

13) *Betti,* a. a. O. p. 86.

14) *Galois,* oeuvr. p. 37.

15) *J. A. Serret,* Cours d'algèbre 3. éd., 2, p. 612. Man vgl. auch die Behandlung der *Galois*'schen Fundamentalsätze bei *C. Jordan,* Math. Ann. 1 (1869), p. 141; *J. König,* Math. Ann. 14 (1879), p. 212; *Th. Söderberg,* Acta math. 11 (1888), p. 297; *O. Hölder,* Math. Ann. 34 (1889), p. 26 u. 454; *O. Bolza,* Am. J. of math. 13 (1891), p. 1.

4. Wirkliche Herstellung der Gruppe. Will man in einem gegebenen Falle die *Galois*'sche Gruppe rechnerisch aufstellen, so kann man folgendermassen verfahren. Man bilde das Produkt

$$F(x) = \prod_{(i)} (x - u_1 x_{i_1} - u_2 x_{i_2} - \cdots - u_n x_{i_n})$$

über alle die $n!$ Permutationen $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_n}$ der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$. Die Gleichung $F(x) = 0$ hat eine Diskriminante [I B 1 a, Nr. **20**], die als Funktion von $u_1, u_2, \ldots u_n$ nicht identisch verschwindet. Setzt man jetzt für $u_1, u_2, \ldots u_n$ solche ganze Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_n$, für welche die Diskriminante von Null verschieden ist[16]), so erfüllen $m_1, m_2, \ldots$ die in Nr. **2** ausgesprochene Bedingung. Das *Galois*'sche Verfahren[17]) kann dann so durchgeführt werden, dass die rationalen Ausdrücke

$$(5) \qquad \psi_1(w), \ \psi_2(w), \ \ldots \ \psi_n(w),$$

die $x_1, x_2, \ldots x_n$ in $w = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n$ darstellen, wirklich fertig gerechnet werden. Man kann auch die linearen Ausdrücke $m_1 x_{i_1} + m_2 x_{i_2} + \cdots + m_n x_{i_n}$ in w berechnen, so dass also

$$m_1 x_{i_1} + m_2 x_{i_2} + \cdots + m_n x_{i_n} = \chi_i(w).$$

Die Funktion $F(x)$, deren Koeffizienten nach Einsetzung der Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_n$ dem Rationalitätsbereich angehören, ist nun in ihre irreducibeln Faktoren zu zerlegen, was durch eine endliche Zahl von Operationen geschehen kann[18]). Die Rechnungen, die wir uns im vorhergehenden durchgeführt dachten, setzen, wie eine nähere Überlegung zeigt, noch nichts darüber voraus, welche der Wurzeln der vorliegenden speziellen Gleichung $f(x) = 0$ mit x_1, welche mit x_2 u. s. f. bezeichnet sein soll. Man kann deshalb einen beliebigen irreducibeln Faktor $G(x)$ der Funktion $F(x)$ wählen und annehmen, dass w eine Wurzel der Gleichung $G = 0$ sein soll. Von den Ausdrücken $\chi_i(w)$ kann man dann diejenigen aussuchen, welche die Gleichung $G = 0$ befriedigen. Diese Ausdrücke $\chi_i(w)$ sind in (5) für w einzusetzen. Dadurch entstehen gewisse Permutationen, die man wirklich mit einander vergleichen kann und die deshalb die gewünschte *Galois*'sche Gruppe in völlig ausgerechneter Form ergeben[19]).

---

16) Vgl. z. B. *Weber*, Algebra 1. Aufl. 1, p. 457. Vgl. den Satz von *D. Hilbert*, J. f. Math. 110 (1892), p. 104.

17) Oeuvr. p. 36.

18) Die oben genannte epistola *Huddenii* enthält schon eine Methode für die Zerlegung der Gleichungen. Für jeden beliebigen Rationalitätsbereich ist diese Zerlegung von *L. Kronecker* behandelt worden, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, p. 10 ff. = Werke 2, p. 256 ff. Man vgl. auch *K. Runge*, J. f. Math. 99 (1886), p. 89 [I B 1 a, Nr. **10**].

19) Liegt eine Gleichung von 2., 3. oder 4. Grad gegeben vor, so kann man die Gruppe in besonders einfacher Weise finden, vgl. *F. Hack*, Diss. Tübingen 1895.

5. Monodromiegruppe. Sind die Koeffizienten einer Gleichung rationale Funktionen einer Variabeln ξ (oder auch mehrerer), etwa mit rationalen Zahlkoeffizienten, so sind unter den verschiedenen Arten, wie der Rationalitätsbereich angenommen werden kann, zwei besonders bemerkenswert. Entweder man rechnet zum Rationalitätsbereich nur rationale Funktionen von ξ mit rationalen Koeffizienten, oder man rechnet dazu alle rationalen Funktionen von ξ, gleichviel wie die Koeffizienten dieser Funktionen beschaffen sein mögen; man „adjungiert" in diesem Fall gewissermassen alle numerischen Grössen. Die Gruppe, welche sich bei der zweiten Annahme ergiebt, kann man auch so definieren. Man suche für einen variabeln Wert ξ die sämtlichen Wurzeln der Gleichung und setze nun diese Funktionen von ξ gleichzeitig auf demselben Wege fort, indem ξ eine kontinuierliche Reihe komplexer Werte von einem festen Wert ξ_0 bis wieder nach ξ_0 zurück annimmt. Schliesslich werden sich die Wurzeln im allgemeinen vertauscht haben. Alle Vertauschungen, die man so durch Benutzung verschiedener Wege erhalten kann, bilden zusammen die Gruppe, um die es sich handelt. Diese Gruppe wird *„Monodromiegruppe"* genannt[20]) zum Unterschied von der *„algebraischen* Gruppe", die sich bei der ersten Annahme über den Rationalitätsbereich oder auch bei der Adjunktion von nur einigen bestimmten Irrationalitäten ergiebt.

Die aus dem Fortsetzungsprinzip sich ergebenden Substitutionen hat zuerst *V. Puiseux* studiert[21]). *Ch. Hermite* hat dann gezeigt, dass die Gesamtheit dieser Substitutionen nichts anderes ist, als — bei einer gewissen Annahme über den Rationalitätsbereich — die *Galois*'sche Gruppe der Gleichung[22]). *C. Jordan* hat bewiesen, dass die Monodromiegruppe eine ausgezeichnete [I A 6, Nr. **16**] Untergruppe von der algebraischen Gruppe der Gleichung ist[23]).

6. Transitivität und Primitivität. Es wurde schon erwähnt, dass die Gleichung $f(x) = 0$ nicht irreducibel zu sein braucht. Wenn sie es ist, und nur dann, ist die Gruppe transitiv[24]), d. h. es erlauben die Substitutionen der Gruppe, von jedem x_h zu jedem x_i überzugehen; in diesem Falle ist auch die Ordnung der Gruppe durch den Grad der Gleichung teilbar[25]). Der äusserste Fall der Reducibilität der

20) *C. Jordan,* traité p. 277.

21) J. d. math. 15 (1850), p. 365.

22) Par. C. R. 1851, 1. sém. p. 458.

23) Traité p. 278. Ausgezeichnete Untergruppe vgl. hier Nr. **11**.

24) *C. Jordan,* J. de math. (2) 12 (1867), p. 111 [I A 6, Nr. **23**]; Math. Ann. 1 (1869) p. 147 u. traité p. 259.

25) Begriff der Transitivität zuerst bei *P. Ruffini* [I A 6, Nr. **6**], der Name

Gleichung ist derjenige, in welchem die Gleichung in lauter Linearfaktoren zerfällt, deren Koeffizienten dem Rationalitätsbereich angehören. In diesem Falle reduziert sich die Gruppe auf die „identische" Substitution, die jedes x_h durch x_h selbst ersetzt.

Die Gruppen von Buchstabenvertauschungen, welche transitiv sind, werden in primitive und imprimitive eingeteilt[26]). Eine solche Gruppe heisst „imprimitiv", wenn man die Buchstaben $x_1, x_2, \ldots x_n$ in Systeme so einteilen kann, dass jede Substitution die Buchstaben eines und desselben Systems wieder in Buchstaben eines einzigen Systems verwandelt. Im andern Falle heisst die Gruppe „primitiv". Die Gruppe Γ unserer Gleichung n^{ten} Grades ist, wie *H. Weber* gezeigt hat, imprimitiv oder primitiv, je nachdem man aus x_1 und den Grössen des Rationalitätsbereichs eine Irrationalität rational zusammensetzen kann oder nicht, für welche der Grad der im gegebenen Rationalitätsbereich irreducibeln Gleichung > 1 und $< n$ ist[27]).

7. Adjunktion einer natürlichen Irrationalität. Der Rationalitätsbereich, der bei der Betrachtung einer gegebenen Gleichung zu Grunde gelegt wird, ist noch bis auf einen gewissen Grad willkürlich; er unterliegt nur der einen Bedingung, dass ihm die Koeffizienten der Gleichung angehören. Insbesondere kann also der Rationalitätsbereich durch Zufügung von Irrationalitäten, d. h. durch „Adjunktion" erweitert werden[28]). Durch eine solche Adjunktion kann die Gruppe der Gleichung sich ändern.

Zunächst ergiebt eine einfache Überlegung, dass jedenfalls alle Substitutionen der neuen Gruppe auch der alten angehören müssen. Tritt also überhaupt eine Änderung ein, so besteht die neue Gruppe aus einem Teil der Substitutionen der alten Gruppe, d. h. die neue Gruppe ist eine „Untergruppe" der alten [I A 6, Nr. 5.].

Will man die neue Gruppe, die nach der Adjunktion der Gleichung zukommt, berechnen, so kann man wieder dieselbe Irrationalität w wie früher benutzen, um die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ in ihr auszudrücken. Als *Galois*'sche Resolvente hat man nun die im neuen, erweiterten Rationalitätsbereich irreducible Gleichung $G_1 = 0$ anzuwenden, der w genügt. Man hat also G_1 als einen der irreducibeln Faktoren zu bestimmen, in die nach der Adjunktion $G(x)$ zerfällt.

bei *A. Cauchy*, Par. C. R. 1845, 2. sém. p. 668 (oeuvr. [1] 9, p. 294), hier auch der Satz über die Ordnung der transitiven Gruppe.

26) *C. Jordan*, traité p. 34. Die Sache schon bei *Ruffini* [I A 6, Nr. **6**].

27) Algebra 1, p. 483—487.

28) *Galois*, oeuvr. p. 34.

Diese Zerfällung ist wieder durch eine endliche Zahl von Operationen ausführbar.

Die einfachste Adjunktion ist die einer „natürlichen" Irrationalität. Dies ist eine solche Irrationalität, die sich als ganze Funktion $g(x_1, x_2, \ldots x_n)$ der Wurzeln ausdrücken lässt[29]), wobei die Koeffizienten der Funktion dem Rationalitätsbereich angehören. Nach einer solchen Adjunktion besteht die neue Gruppe Δ aus denjenigen Substitutionen der alten Gruppe Γ, die den Ausdruck $g(x_1, x_2, \ldots x_n)$ numerisch nicht ändern[30]). Dabei ist zu bemerken, dass diejenigen Substitutionen, welche einen gegebenen Ausdruck numerisch nicht ändern, eine Gruppe bilden unter der Voraussetzung, dass man sich auf Substitutionen der Gleichungsgruppe Γ beschränkt[31]). Ohne diese Voraussetzung bilden sie nicht immer eine Gruppe.

Nun seien zwei Funktionen der Wurzeln $g(x_1, x_2, \ldots x_n)$ und $g_1(x_1, x_2, \ldots x_n)$ gegeben, und es soll die Funktion $g_1(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ihren numerischen Wert mindestens bei allen den Substitutionen der Gruppe Γ beibehalten, welche die Funktion $g(x_1, x_2, \ldots x_n)$ numerisch nicht ändern. In diesem Falle bleibt $g_1(x_1, x_2, \ldots x_n)$ numerisch ungeändert bei jeder Substitution der Gruppe Δ, die nach Adjunktion von g der Gleichung zugehört. g_1 ist also eine Grösse des neuen Rationalitätsbereichs, d. h. g_1 setzt sich aus den Grössen des alten Rationalitätsbereichs und aus g rational zusammen. Es gestatten auch hier die früher erwähnten Mittel, bis zur wirklichen Berechnung vorzuschreiten.

Bleibt eine Funktion $g_0(x_1, x_2, \ldots x_n)$ numerisch ungeändert bei allen Substitutionen der Gruppe Γ, die mehrere Funktionen $g(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $g_1(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $\ldots$ $g_\varrho(x_1, x_2, \ldots x_n)$ gleichzeitig numerisch nicht ändern, so kann g_0 aus $g, g_1, \ldots g_\varrho$ und den Grössen des ursprünglichen Rationalitätsbereichs zusammengesetzt werden.

Diese Sätze sind mit gewissen Sätzen von *Lagrange*, die sich auf Funktionen von Veränderlichen beziehen, analog[32]); man kann die *Lagrange*'schen Sätze aus den eben genannten ableiten[33]).

---

29) *L. Kronecker* hat zuerst den Unterschied zwischen diesen Irrationalitäten und anderen betont, Berl. Mon.-Ber. 1861, p. 609; man vgl. dazu *F. Klein*, Vorlesungen über das Ikosaeder etc. Leipzig 1884, p. 157.

30) *Galois*, oeuvr. p. 41; der Beweis ist hier unvollständig, man vgl. dazu *Serret*, Cours d'algèbre 3. éd., 2, p. 625.

31) *C. Jordan*, Math. Ann. 1 (1869), p. 148; traité p. 261.

32) *Lagrange*, oeuvr. 3 (1869), p. 374 ff.; *Klein*, Ikosaeder p. 86.

33) Vgl. Nr. **16**. Das Umgekehrte ist schwieriger, man vgl. *Söderberg*, Acta math. 11 (1888), p. 297. Dabei hat man die Ausführungen von *Lagrange*,

8. Cyklische Gleichungen. Wenn die Gruppe der Gleichung $f(x) = 0$ aus den Potenzen des Cyklus $(x_1 x_2 \dots x_n) = S$ besteht[34]), kann die Gleichung durch Wurzelzeichen aufgelöst werden. Der einfachste Fall ist der, in dem n eine Primzahl ist. Adjungiert man in diesem Falle $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, so ändert sich die Gruppe (Nr. **11**) nicht. Die Funktion

$$g_k(x_1, x_2, \cdots x_n) = x_1 + \alpha^k x_2 + \alpha^{2k} x_3 + \cdots + \alpha^{(n-1)k} x_n,$$

deren Koeffizienten dem so erweiterten Rationalitätsbereich angehören, wird durch die Substitution S in $\alpha^{-k} \cdot g_k$ übergeführt; es wird also g_k^n für die Substitutionen der Gruppe numerisch unveränderlich sein und dem erweiterten Rationalitätsbereich angehören. Somit ergiebt sich g_k durch Radizieren. Falls nun k eine Zahl von 1 bis $n-1$ bedeutet, und g_k nicht etwa gleich Null ist, wird g_k durch jede nichtidentische Substitution der Gruppe numerisch geändert. Somit müssen (Nr. 7) $x_1, x_2, \dots x_n$ sich in g_k, α und den Grössen des alten Rationalitätsbereichs darstellen lassen. Dies geschieht genauer so. Es sei $kk' \equiv 1 \bmod p$ [I C 1], dann ist $g_l g_k^{(n-l)k'}$, was auch l bedeuten möge, für die Substitutionen der Gruppe unveränderlich, also in dem erweiterten Rationalitätsbereich enthalten. Man kann so g_l berechnen. Aus den Gleichungen:

$$\begin{array}{l}
x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = g_0 \\
x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \cdots + \alpha^{(n-1)} x_n = g_1 \\
x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^4 x_3 + \cdots + \alpha^{2(n-1)} x_n = g_2 \\
x_1 + \alpha^3 x_2 + \alpha^6 x_3 + \cdots + \alpha^{3(n-1)} x_n = g_3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

kann man dann $x_1, x_2, \cdots x_n$ finden. Die Forderung, dass g_k von Null verschieden sein soll, ist jedenfalls für einen der Indices $1, 2, \dots n-1$ erfüllt.

9. Reine Gleichungen. Eine Gleichung von der Form $x^n - a = 0$ wird eine „reine Gleichung" genannt. Der Rationalitätsbereich muss hier a enthalten, es soll ihm aber auch $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ angehören. Die Wurzeln der reinen Gleichung sind

$$x_1 = x_1, \; x_2 = \alpha x_1, \; x_3 = \alpha^2 x_1, \; \cdots \; x_n = \alpha^{n-1} x_1.$$

Wenn n eine Primzahl ist, so sind entweder alle Wurzeln

---

oeuvr. 3, p. 379 ff. zu benutzen; man vgl. auch *O. Hölder*, Math. Ann. 34 (1889), p. 454.

34) Diese Gleichungen decken sich mit den gewöhnlichen *Abel*'schen Gleichungen (Nr. **21**).

Grössen des Rationalitätsbereichs, oder es ist die Gleichung irreducibel[35]). Im ersten Falle besteht die Gruppe aus der identischen Substitution allein. Im zweiten Falle kann man die Gruppe bestimmen (Nr. 2), indem man alle Wurzeln in x_1 ausdrückt, so dass also die Gleichung ihre eigene *Galois*'sche Resolvente ist. Die Gruppe besteht dann aus den Potenzen des Cyklus $(x_1 x_2 x_3 \dots x_n)$.

10. Zerlegung des Gleichungsproblems durch Resolventenbildung. Die Bestimmung der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ wird oft dadurch vereinfacht, dass man zuerst einen aus den Wurzeln kombinierten Ausdruck bestimmt. Es sei wieder $g_1(x_1, x_2, \dots x_n)$ eine ganze Funktion der Wurzeln, deren Koeffizienten dem Rationalitätsbereich angehören. Durch die Substitutionen der *Galois*'schen Gruppe Γ sollen aus g_1 die verschiedenen Werte $g_1, g_2, \dots g_\nu$ entstehen, alsdann hat die Gleichung

$$(6) \qquad (x - g_1)(x - g_2) \dots (x - g_\nu) = 0,$$

nachdem sie entwickelt ist, lauter dem Rationalitätsbereich angehörende Koeffizienten. Diese Gleichung wird als „rationale Resolvente“ der Gleichung $f(x) = 0$ bezeichnet. Die *Galois*'sche Gruppe dieser Resolvente wird so bestimmt[36]): Man führe in der Reihe $g_1, g_2, \dots g_\nu$ die Substitutionen der Gruppe Γ aus, wodurch gewisse Anordnungen der Grössen g entstehen. Die Gesamtheit der Substitutionen, welche den Übergang der ursprünglichen Reihenfolge $g_1, g_2, \dots g_\nu$ in die neuen Anordnungen darstellen, konstituieren eine transitive Gruppe Γ'. Diese Gruppe gehört der Resolvente an[37]), und diese ist somit auch irreducibel (Nr. 6).

Jetzt sollen die sämtlichen Substitutionen von Γ betrachtet werden, die $g_1(x_1, x_2, \dots x_n)$ numerisch nicht ändern. Sie bilden eine Gruppe Δ; auf diese Gruppe Δ reduziert sich die Gleichungsgruppe, wenn man die Grösse g_1 adjungiert. Die Gruppe Δ enthält den ν^{ten} Teil der Substitutionen der Gruppe Γ, was man auch dadurch ausdrückt, dass man sagt, Δ besitze als Untergruppe von Γ den „Index“ ν. Dieser Index ist also gleich der Zahl der numerisch verschiedenen Werte, die aus g_1 entstehen [I A 6, Nr. 5.].

Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, in dem Δ eine „aus-

---

35) *Abel,* oeuvr. 1, p. 73. *Kronecker,* Berl. Mon.-Ber. 1879, p. 206 nimmt einen allgemeineren Standpunkt ein, indem bei ihm α dem Rationalitätsbereich nicht anzugehören braucht; es ist dann im Falle der Reducibilität der reinen Gleichung *eine* Wurzel rational bekannt.

36) *Klein,* Ikosaeder p. 88.

37) Der Beweis ergiebt sich leicht aus Nr. 3.

gezeichnete" oder „invariante" Untergruppe von Γ ist[38]), und dieser Fall soll allein weiter verfolgt werden. Es seien $T_1, T_2 \ldots T_\mu$ die Substitutionen von Δ, so lassen diese in dem nunmehr betrachteten Falle auch $g_2, g_3, \ldots g_\nu$ ungeändert.

Man wähle nun die Substitutionen $1, S_1, S_2, \ldots S_{\nu-1}$ so aus, dass in der Tabelle der Produkte [I A 6, Nr. **1**]:

$$\begin{array}{llll} T_1 & T_2 & T_3 & \ldots T_\mu \\ T_1 S_1 & T_2 S_1 & T_3 S_1 & \ldots T_\mu S_1 \\ T_1 S_2 & T_2 S_2 & T_3 S_2 & \ldots T_\mu S_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ T_1 S_{\nu-1} & T_2 S_{\nu-1} & T_3 S_{\nu-1} & \ldots T_\mu S_{\nu-1} \end{array}$$

jede Substitution der Gruppe Γ genau einmal enthalten ist. Wenn nun Δ eine *ausgezeichnete* Untergruppe von Γ ist, so gilt folgendes. Wählt man aus der h^{ten} und aus der i^{ten} Horizontalreihe je eine Substitution beliebig aus und multipliziert die erste auf ihrer rechten Seite mit der zweiten, so entsteht eine Substitution einer nur durch h und i bestimmten Horizontalreihe. Man erhält dadurch ein Multiplikationsprinzip von Reihen, durch das eine neue Gruppe definiert wird[39]), die man mit Γ/Δ bezeichnet.

Die Substitutionen, die in derselben Horizontalreihe stehen, bewirken in dem betrachteten Falle dieselbe Substitution der Grössen $g_1, g_2, \ldots g_\nu$, und solche, die in verschiedenen Horizontalreihen stehen, bewirken verschiedene Substitutionen. Es ergiebt sich so, dass die Gruppe Γ/Δ mit der Gruppe Γ' holoedrisch isomorph ist[40]).

Ist der Index ν eine Primzahl, so tritt eine Vereinfachung ein[41]). Bedeutet nämlich jetzt S irgend eine Substitution von Γ, die nicht in Δ enthalten ist, so kann die obige Tabelle in die Form

$$\begin{array}{llll} T_1 & T_2 & T_3 & \ldots T_\mu \\ T_1 S & T_2 S & T_3 S & \ldots T_\mu S \\ T_1 S^2 & T_2 S^2 & T_3 S^2 & \ldots T_\mu S^2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ T_1 S^{\nu-1} & T_2 S^{\nu-1} & T_3 S^{\nu-1} & \ldots T_\mu S^{\nu-1} \end{array}$$

gesetzt werden. Die Gruppe Γ/Δ ist nunmehr mit der aus

$$1, S, S^2, \ldots S^{\nu-1}$$

38) Vgl. Nr. **11**. Man vgl. auch I A 6, Nr. **16**.

39) I A 6, Nr. **16**; *C. Jordan,* Par. soc. math. Bull. 1 (1873), p. 48; *O. Hölder,* Math. Ann. 34 (1889), p. 31.

40) I A 6, Nr. **14**, die Substitutionen der beiden Gruppen lassen sich eineindeutig aufeinander beziehen.

41) *Serret,* Cours d'algèbre, 3. éd. 2, p. 627.

bestehenden Gruppe holoedrisch isomorph und dasselbe muss somit von Γ' gelten. Es ergiebt sich in diesem Falle noch, dass Γ' eine cyklische Gruppe[42]) sein muss, und zwar kann man bei geeigneter Bezeichnung der Grössen g annehmen, dass Γ' aus den Potenzen des Cyklus $(g_1 g_2 \dots g_\nu)$ besteht.

Die Auflösung der Resolvente geschieht also nach Nr. 8 durch Berechnung der ν^{ten} Einheitswurzeln und eines Radikals mit dem Exponenten ν. Durch Adjunktion einer Wurzel der Resolvente reduziert sich die Gruppe der ursprünglichen Gleichung auf die ausgezeichnete Untergruppe Δ vom Index ν. So oft eine ausgezeichnete Untergruppe vom Primzahlindex vorhanden ist, lässt sich die genannte Vereinfachung vornehmen, weil eine Funktion $g_1(x_1, x_2, \dots x_n)$, die nur für die Substitutionen von Δ unverändert bleibt, sich bilden lässt[43]).

11. Adjunktion einer accessorischen Irrationalität. Eine Irrationalität, die nicht in der Form $g(x_1, x_2, \dots x_n)$ ausgedrückt werden kann, wird „accessorisch" genannt[44]). Es sei $F(x) = 0$ die irreducible Gleichung, der die accessorische Irrationalität h genügt und $h, h', \dots h^{(s-1)}$ die Wurzeln dieser Gleichung, d. h. es seien $h', h'', \dots h^{(s-1)}$ die „Konjugierten" von h [I B 1 c, Nr. 4]. Ist nun Γ die ursprüngliche Gleichungsgruppe, Δ die Gleichungsgruppe nach Adjunktion der einzigen Irrationalität h, Δ' die Gleichungsgruppe nach Adjunktion der einzigen Irrationalität h' u. s. f., so besteht die Reihe $\Delta, \Delta', \dots \Delta^{(s-1)}$ aus den sämtlichen Gruppen, die entstehen, wenn Δ mit den Substitutionen von Γ „transformiert" wird[45]). In der Reihe $\Delta, \Delta', \dots \Delta^{(s-1)}$ kann eine und dieselbe Gruppe mehrmals auftreten.

Der Index (Nr. **10**), der der Gruppe Δ als einer Untergruppe der Gruppe Γ zukommt, ist ein Teiler von dem Grad s der Gleichung $F = 0$.

Ist die Gleichung $F = 0$ so beschaffen, dass von ihren Wurzeln $h, h', \dots$ jede in jeder rational ist, so bedeutet z. B. die Adjunktion

42) Hier soll dies heissen, dass die Grössen g cyklisch vertauscht werden; bisweilen wird auch jede Gruppe irgend welcher Operationen cyklisch genannt, wenn sie aus den Potenzen einer Operation besteht [I A 6, Nr. 3].

43) *J. A. Serret,* Cours d'algèbre supérieure, 3ème édit., 2, p. 629—630 *C. Jordan*, Math. Ann. 1 (1869), p. 143, traité p. 258.

44) *Klein,* Ikosaeder p. 157.

45) *Galois,* oeuvr. p. 39, 40; *J. A. Serret,* Cours d'algèbre, 3. Aufl., 2, p. 619. Man „transformiert" die Gruppe der Substitutionen $T_1, T_2, T_3, \dots$ mit der Substitution S, indem man $S^{-1}T_1S$, $S^{-1}T_2S$, $S^{-1}T_3S, \dots$ bildet, wobei S^{-1} die Umkehrung der Substitution S bedeutet [I A 6, Nr. **3**].

von h' dasselbe, wie die Adjunktion von h, und es müssen die Gruppen $\Delta, \Delta', \Delta'', \ldots \Delta^{(s-1)}$ sämtlich miteinander identisch sein. Man nennt nun eine Gruppe in einer umfassenderen dann „ausgezeichnet" enthalten, wenn sie bei allen Transformationen, die man mit Substitutionen der umfassenderen Gruppe ausführen kann, in sich übergeht. Es ist also in dem eben angenommenen Fall Δ eine ausgezeichnete oder „invariante" Untergruppe von Γ, womit übrigens nicht gesagt sein soll, dass nicht Δ mit Γ zusammenfallen kann.

Adjungiert man einer Gleichung die *sämtlichen* Wurzeln irgend einer Gleichung $F = 0$, so kann man statt dessen eine Wurzel der *Galois*'schen Resolvente (Nr. 2) der Gleichung $F = 0$ adjungieren, und es liegt dann der eben angenommene besondere Fall vor.

Es sollen nun $f(x) = 0$ und $f_0(x) = 0$ zwei Gleichungen bedeuten, die beide ohne Doppelwurzeln sind; sie werden in demselben Rationalitätsbereich betrachtet und besitzen beziehungsweise die Gruppen Γ und Γ_0. Nach der Adjunktion aller Wurzeln der zweiten Gleichung soll die erste die Gruppe Δ, nach Adjunktion aller Wurzeln der ersten die zweite die Gruppe Δ_0 besitzen; es sind dann Δ und Δ_0 ausgezeichnete Untergruppen beziehungsweise von Γ und Γ_0. Es lässt sich nun folgendes beweisen:

I. Der Index (Nr. **10**), welcher Δ als einer Untergruppe von Γ zukommt, ist gleich demjenigen, der Δ_0 als einer Untergruppe von Γ_0 angehört; er sei gleich m.

II. Die Gruppen Γ/Δ und Γ_0/Δ_0 sind holoedrisch isomorph (Anm. 40)); ihre Ordnung ist m.

III. Es existiert eine Irrationalität σ, deren Adjunktion gleichzeitig die Gruppe der ersten Gleichung auf Δ und die der zweiten auf Δ_0 reduziert; die irreducible Gleichung, der σ genügt, hat lauter ineinander rationale Wurzeln und eine mit Γ/Δ und Γ_0/Δ_0 holoedrisch isomorphe Gruppe[46]); der Grad dieser Gleichung ist gleich m.

Ist die zweite Gleichung „einfach", d. h. Γ_0 eine „einfache Gruppe"[47]), so kann, falls überhaupt Reduktion eintritt, Δ_0 nur aus der identischen Substitution bestehen. Reduziert sich also die Gruppe einer Gleichung bei der Adjunktion der sämtlichen Wurzeln einer zweiten und zwar einfachen Gleichung, so sind alle Wurzeln dieser

46) *C. Jordan,* Math. Ann. 1 (1869), p. 155, traité p. 269; *P. Bachmann,* Math. Ann. 18 (1881), p. 460; *O. Hölder,* Math. Ann. 34 (1889), p. 47. Man vgl. auch die etwas anderen hierher gehörenden Sätze bei *H. Weber,* Algebra 1, p. 516.

47) d. h. eine solche, die ausser sich selbst und der Identität keine ausgezeichnete Untergruppe besitzt. Vgl. I A 6, Nr. **16**.

Gleichung in denen der ersten und den Grössen des ursprünglichen Rationalitätsbereichs rational (Nr. **6**)[48]).

Die Gruppe Γ erscheint in gewissem Sinn in die Faktoren Γ/Δ und Δ gespalten, deren erster mit Γ_0/Δ_0 und somit in dem angenommenen besonderen Falle mit Γ_0 holoedrisch isomorph ist. Wird somit die Gruppe einer Gleichung durch die Adjunktion der sämtlichen Wurzeln einer zweiten Gleichung, die einfach ist, reduziert, so ist die Gruppe der zweiten Gleichung als „Faktorgruppe" in der Gruppe der ersten enthalten.

12. Adjunktion eines Radikals. Man adjungiere der Gleichung $f(x) = 0$ das Radical $\sqrt[p]{a}$, worunter ein völlig bestimmter von den p Werten dieses Wurzelausdrucks zu verstehen ist. Die Grösse a muss schon vor der Adjunktion dem Rationalitätsbereich angehören, und dasselbe soll von $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ gelten. p sei eine Primzahl. Das Resultat des letzten Paragraphen lässt sich nun anwenden, indem $f(x) = 0$ die erste und die reine Gleichung $x^p - a = 0$ die zweite Gleichung vorstellt. Wenn das Radikal $\sqrt[p]{a}$ die Gruppe Γ der Gleichung $f(x) = 0$ bei der Adjunktion wirklich reduziert, so kann $\sqrt[p]{a}$ nicht dem ursprünglichen Rationalitätsbereich angehören. Dann hat aber (Nr. **9**) die reine Gleichung eine cyklische Gruppe p^{ter} Ordnung. Also muss (Nr. **11**) Γ, wenn $\sqrt[p]{a}$ adjungiert wird, sich auf eine invariante Untergruppe vom Index p reduzieren. Zugleich ist ersichtlich, dass sich das Radikal in den Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ ausdrücken lässt.

13. Begriff der Auflösung. Unter „Auflösung" einer Gleichung versteht man gewöhnlich[49]) die Darstellung der Wurzeln der Gleichung durch Radikale, wobei die Radikale beliebig zusammengesetzt und ineinander eingeschachtelt sein können. Nicht jede Gleichung ist auflösbar. Die Berechnung der Wurzeln einer auflösbaren Gleichung besteht, wenn wir nur die irrationalen Rechnungsoperationen hervorheben, darin, dass gewisse Radikale in einer gewissen Reihenfolge

$$\sqrt[p_1]{a_1},\quad \sqrt[p_2]{a_2},\quad \ldots\quad \sqrt[p_m]{a_m}$$

---

48) *C. Jordan*, traité p. 270; dieser Satz entspricht demjenigen, den *Abel* für auflösbare Gleichungen bewiesen hat (Nr. **18**).

49) „Auflösen" heisst also hier durch *Radikale* auflösen oder, wie man auch sagt, „algebraisch" auflösen. In allgemeinerem Sinn kann man auch die Reduktion einer Gleichung auf irgend eine Normalform als Auflösung bezeichnen.

berechnet werden. Die Exponenten p_ν der Radikale kann man als Primzahlen annehmen; ferner hat man sich zu denken, dass die Grösse a_ν, die im ν^{ten} Radikal $\sqrt[p_\nu]{a_\nu}$ vorkommt, aus den Grössen des Rationalitätsbereichs und den $\nu - 1$ vorangehenden Radikalen durch die vier Spezies sich berechnen lässt. Aus den sämtlichen m Radikalen und den Grössen des Rationalitätsbereichs kann man dann die Wurzeln der Gleichung rational zusammensetzen.

Man kann die Reihe der Radikale so einrichten, dass für jedes ν die p_ν^{ten} Einheitswurzeln sich aus den ersten $\nu - 1$ Radikalen und den Grössen des Rationalitätsbereichs rational bilden lassen. Hat nämlich die Reihe der Radikale diese besondere Eigenschaft nicht, so hat man zu bedenken, dass nach den Resultaten von *Gauss*[50]) die Einheitswurzel $e^{\frac{2\pi i}{p_\nu}}$ sich durch Radikale ausdrücken lässt, deren Indices kleiner als p_ν sind; eine genauere Überlegung zeigt dann, dass man durch Einschiebung von Radikalen die erwähnte besondere Eigenschaft herstellen kann.

14. Kriterium der Auflösbarkeit. Es soll jetzt angenommen werden, dass die Reihe der Radikale

$$\sqrt[p_1]{a_1}, \quad \sqrt[p_2]{a_2}, \quad \ldots \quad \sqrt[p_m]{a_m}$$

die besprochene besondere Eigenschaft schon besitzt. Man adjungiere nun der aufzulösenden Gleichung das Radikal $\sqrt[p_1]{a_1}$, nachher adjungiere man ausserdem noch $\sqrt[p_2]{a_2}$, dann adjungiere man ausser den beiden ersten Radikalen noch $\sqrt[p_3]{a_3}$ und fahre so fort. Bei jeder neuen Adjunktion kann möglicherweise die Gruppe der Gleichung sich ändern und zwar reduziert sie sich in diesem Falle nach dem Resultat von Nr. 12 auf eine invariante Untergruppe von Primzahlindex. Nachdem das letzte Radikal adjungiert ist, sollen alle Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch die vier Spezies berechnet werden können, man hat also dann eine Gruppe, die sich auf die identische Substitution reduziert und mit 1 bezeichnet werden kann (Nr. 6).

Ist Γ die ursprüngliche Gruppe der Gleichung und sind $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ die *verschiedenen* Gruppen, auf welche die successiven Adjunktionen führen, so kommt man zu einer Reihe

$$(7) \qquad \Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_{\varrho-1}, 1$$

50) Disquisitiones arithmeticae, Lipsiae 1801, sectio septima = Werke 1 (1870), p. 412 ff. Man vgl. auch hier Nr. 22.

von Gruppen. Diese Reihe ist eine „Reihe der Zusammensetzung“ für die Gruppe Γ, womit gesagt ist, dass jedes Glied Γ_ν der Reihe im vorhergehenden $\Gamma_{\nu-1}$ ausgezeichnet enthalten ist, und dass keine Gruppe eingeschaltet werden kann, die umfassender wäre als Γ_ν und in $\Gamma_{\nu-1}$ ausgezeichnet enthalten und von dieser Gruppe verschieden wäre[51]). Der letzte Umstand folgt in unserem Falle daraus, dass der Quotient der Ordnungen von $\Gamma_{\nu-1}$ und Γ_ν eine Primzahl ist.

Die Quotienten der Ordnungen von aufeinanderfolgenden Gruppen einer Reihe der Zusammensetzung werden als „Faktoren der Zusammensetzung“ bezeichnet[52]). Jede Gruppe hat ein — abgesehen von der Ordnung der Faktoren — völlig bestimmtes Aggregat von Faktoren der Zusammensetzung, das unabhängig ist von der zur Aufsuchung der Faktoren verwendeten Reihe der Zusammensetzung[53]) [I A 6 Nr. **17**.]. So ergiebt sich also der Satz, dass für die *Galois*'sche Gruppe einer auflösbaren Gleichung die Faktoren der Zusammensetzung Primzahlen sind. Diese Bedingung ist auch hinreichend, wie sich aus dem Resultat von Nr. **10** ergiebt[54]).

Man nennt eine Gruppe von der eben genannten Beschaffenheit auch selbst „auflösbar“ [I A 6, Nr. **23**], und es gilt der Satz, dass jede Untergruppe einer auflösbaren Gruppe auflösbar ist[55]). Liegt eine Gruppe vor, so kann über ihre Auflösbarkeit durch eine endliche Zahl von Operationen entschieden werden, es gilt also (Nr. **4**) dasselbe, wenn eine Gleichung vorliegt, deren Auflösbarkeit untersucht werden soll.

Die Bedingung der Auflösbarkeit lässt sich noch in verschiedenen Formen aussprechen. *C. Jordan* hat ein besonderes Verfahren angegeben, für einen gegebenen Grad die umfassendsten Gruppen zu berechnen, die auflösbaren Gleichungen zukommen; dabei ist dieselbe Aufgabe zuvor für die vorangehenden Grade zu lösen[56]).

15. Behandlung nicht auflösbarer Gleichungen. Ist die Gleichung $f(x) = 0$ nicht auflösbar, so stellt man wiederum für ihre

51) *C. Jordan,* traité p. 41 ff.; *E. Netto,* Substitutionentheorie p. 87.

52) ebendaselbst.

53) *Jordan* a. a. O.; *Netto,* Substitutionentheorie p. 90.

54) Man kann auch eine Bedingung dafür aufstellen, dass *eine* Wurzel der Gleichung durch Radikale gefunden werden kann; ist die Gleichung irreducibel, so kann dann nachher jede Wurzel der Gleichung gefunden werden. Vgl. *Abel* oeuvr. 2, p. 221; *O. Hölder,* Math. Ann. 38 (1891), p. 311 u. 312, wo ein spezieller Fall behandelt ist; *D. Selivanoff,* Acta math. 19 (1895), p. 73.

55) *C. Jordan,* traité p. 387. *H. Weber* nennt die auflösbaren Gleichungen metacyklisch; man vgl. dazu Nr. **25**.

56) ebendaselbst p. 385 ff.

Gruppe Γ die Reihe $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots \Gamma_{\varrho-1}, 1$ der Zusammensetzung her. Diese Reihe ergiebt gewisse Gruppen $\Gamma/\Gamma_1, \Gamma_1/\Gamma_2, \Gamma_2/\Gamma_3, \ldots \Gamma_{\varrho-1}$, die „Faktorgruppen" der Gruppe Γ. Diese Faktorgruppen sind einfach, aber nicht alle von Primzahlordnung, denn sonst wäre die Gleichung auflösbar. Die Gruppe Γ der Gleichung kann (Nr. **10**) auf Γ_1 reduziert werden durch Adjunktion einer natürlichen Irrationalität. Diese genügt dabei einer Gleichung, deren Gruppe mit Γ/Γ_1 holoedrisch isomorph und einfach ist. Durch eine zweite Adjunktion reduziert man die Gruppe auf Γ_2; die dazu nötige Irrationalität genügt einer Gleichung, deren Gruppe mit Γ_1/Γ_2 holoedrisch isomorph und einfach ist. So fährt man fort. Man kann also die ursprüngliche Gleichung durch eine Kette von Gleichungen ersetzen. In dieser Kette besitzt jede Gleichung eine einfache Gruppe. Diese einfachen Gruppen, die Faktorgruppen der Gruppe Γ, lassen sich bei der Behandlung der vorliegenden Gleichung absolut nicht vermeiden, auch dann nicht, wenn man accessorische Irrationalitäten herbeizieht[57]). Die Faktorgruppen müssen immer wieder in den Gruppen auftreten, die den Gleichungen der zugezogenen Irrationalitäten zugehören.

Die Gleichungen mit einfacher Gruppe können insofern noch weiter behandelt werden, als man sie auf Normalgleichungen mit derselben Gruppe zurückführen kann; man vergl. Nr. **24**[58]).

---

16. Allgemeine Gleichungen. Eine Gleichung n^{ten} Grades wird „allgemein" genannt, wenn die Koeffizienten als willkürliche Variable angesehen werden. Der Rationalitätsbereich besteht dabei aus den rationalen Funktionen dieser Variabeln. Man kann zugleich noch verschiedene Auffassungen annehmen, von denen die beiden extremsten am wichtigsten sind. Entweder nimmt man die Koeffizienten dieser rationalen Funktionen als rationale Zahlen an oder man lässt ganz beliebige Koeffizienten in diesen Funktionen zu, so dass man also gewissermassen alle numerischen Irrationalitäten adjungiert. Die letzte Auffassung ist die bequemste, weil alle die etwa notwendig werdenden Einheitswurzeln dadurch mit zum Rationalitätsbereich ge-

---

57) Dies hat im Grund schon *Galois* erkannt: man vgl. oeuvr. p. 25, wo es wenigstens für eine Gleichung mit einfacher Gruppe ausgesprochen ist. Der allgemeine Beweis beruht auf einem Satz von *C. Jordan*, Math. Ann. 1 (1869), p. 157, traité p. 271; vgl. auch oben den Schluss von Nr. **11**. Ausführlicher ist der Sachverhalt bei *O. Hölder*, Math. Ann. 34 (1889), p. 49 ff. dargestellt.

58) Hinsichtlich der Reduktion der Gleichungen auf Normalgleichungen und der sich darauf beziehenden Litteratur vgl. man allgemein I B 3 f.

hören. Es entspricht auch diese Auffassung dem schon von *Abel* eingenommenen Standpunkt[59]).

Unter der Auflösung der allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades oder der „litteralen" Lösung der Gleichung n^{ten} Grades versteht man die Darstellung der Wurzeln durch „explicite algebraische Ausdrücke", d. h. durch Ausdrücke, die sich aus Radikalen zusammensetzen (Nr. **13**), wobei diese Ausdrücke die variabeln Koeffizienten der Gleichung enthalten und für willkürliche Werte der Variabeln die Gleichung befriedigen müssen. Die litterale Lösung der Gleichungen ist bis zum 4^{ten} Grade möglich. Diese Lösung fügt sich vollständig der *Galois*schen Theorie ein. Da die Koeffizienten der Gleichung jetzt unabhängige Variable sind, so gilt dasselbe von den Wurzeln. Die *Galois*'sche Gruppe besteht hier aus der Gesamtheit der $n!$ Substitutionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, fällt also mit der „symmetrischen Gruppe" [I A 6, Nr. 7] zusammen. Das Resultat von Nr. **7** besagt jetzt, dass von zwei Funktionen der Variabeln x die zweite in der ersten ausgedrückt werden kann, wenn die zweite Funktion bei allen den Substitutionen *formal* ungeändert bleibt, bei denen die erste formal ungeändert bleibt. Jener für spezielle Gleichungen gültige Satz geht also hier in den *Lagrange*'schen Satz über[60]).

17. Gleichungen der ersten vier Grade. Die Auflösung der Gleichung 2^{ten} Grades beruht darauf, dass für $n = 2$ die aus der Identität bestehende Gruppe eine invariante Untergruppe der symmetrischen Gruppe von Primzahlindex ist. Die Funktion $x_1 - x_2$ bleibt nur für die identische Substitution ungeändert und man kann deshalb mit ihrer Hilfe x_1 und x_2 ausdrücken, während sie selbst durch eine Quadratwurzelausziehung gefunden wird.

Auch für $n = 3$ hat die symmetrische Gruppe nur eine ausgezeichnete Untergruppe von Primzahlindex, die Gruppe der „geraden" Substitutionen[61]). Die Adjunktion von $P = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ reduziert die Gruppe der Gleichung auf die Gruppe der geraden Substitutionen, die hier aus den Potenzen des Cyklus $(x_1 x_2 x_3)$ bestehen. Die ursprüngliche Gleichung ist nach der Adjunktion cyklisch und die Methode von Nr. **8** führt zur Lösung. Man bildet mit Hilfe der dritten Einheitswurzel α die Funktionen

$$x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 \quad \text{und} \quad x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^4 x_3,$$

59) Oeuvr. 2, p. 219, 220.

60) Vgl. Nr. 7.

61) I A 6, Nr. 7.

deren dritte Potenzen und deren Produkt dem durch die genannte Adjunktion erweiterten Rationalitätsbereich angehört. Ist die Gleichung $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, so findet man

$$(8)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p \\ x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 = \sqrt[3]{-p^3 + \frac{9}{2}pq - \frac{27}{2}r - \frac{3}{2}(\alpha^2 - \alpha)P} \\ x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3 = \sqrt[3]{-p^3 + \frac{9}{2}pq - \frac{27}{2}r + \frac{3}{2}(\alpha^2 - \alpha)P} \end{cases}$$

$$(9)\qquad (x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3)(x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3) = p^2 - 3q.$$

Die Grössen x_1, x_2, x_3 bestimmen sich aus (8) und es wird

$$(10)\qquad 3x_1 = -p + \sqrt[3]{-p^3 + \frac{9}{2}pq - \frac{27}{2}r - \frac{3}{2}(\alpha^2 - \alpha)P} + \sqrt[3]{-p^3 + \frac{9}{2}pq - \frac{27}{2}r + \frac{3}{2}(\alpha^2 - \alpha)P},$$

wobei wegen (9) das Produkt der beiden dritten Wurzeln gleich $p^2 - 3q$ sein muss. Wählt man im übrigen auf der rechten Seite von (10) die dritten Wurzeln auf alle Arten, so erhält man ausser x_1 noch x_2 und x_3 aus derselben Formel. Es ist P^2 gleich der Diskriminante D der Gleichung und

$$D = -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2.$$

Bedenkt man noch, dass $\alpha^2 - \alpha = \pm i\sqrt{3}$, so erhält man für $p = 0$ die gewöhnliche *Cardanische* Formel[62])

$$x = \sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}}}$$

als Lösung der Gleichung $x^3 + qx + r = 0$.

Der Fall, in welchem die Koeffizienten q und r reell sind und $\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}$ negativ ist, ist bemerkenswert. Es sind in diesem Falle die drei Wurzeln x_1, x_2, x_3 reell und ergeben sich aus der *Cardanischen* Formel auf imaginärem Wege[63]). Man kann diesen Fall, welcher der *casus irreducibilis* genannt wird, mit der Trisektion des Winkels [III A 2] in Verbindung bringen. Zu diesem Zweck hat man die Gleichung

62) Zuerst von *G. Cardano* wider den Willen des Entdeckers (p. 503) publiziert.

63) Dass die Formel auch in diesem Falle die Wurzeln liefert, hat *Rafaello Bombelli* bemerkt (l'algebra 1579), der hierdurch veranlasst wurde, die imaginären Grössen einzuführen. Man vgl. auch Nr. 27.

$x^3 + px + q = 0$ auf diejenige, welche $\sin \frac{\varphi}{3}$ in Funktion von $\sin \varphi$ definiert, d. h. auf $x^3 - \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} \sin \varphi = 0$ zurückzuführen[64]).

Für den Grad $n = 4$ hat man zunächst wieder die *Galois*'sche Gruppe der allgemeinen Gleichung auf die der geraden Substitutionen zu reduzieren, was durch Adjunktion von

$$P = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4),$$

d. h. durch Adjunktion der Quadratwurzel aus der Diskriminante geschieht. Die Gruppe der geraden Vertauschungen hat auch nur eine invariante Untergruppe von Primzahlindex. Diese Untergruppe besteht aus den vier Substitutionen 1, $(x_1 x_2)(x_3 x_4)$, $(x_1 x_3)(x_2 x_4)$ und $(x_1 x_4)(x_2 x_3)$. Die Funktion $x_1 x_2 + x_3 x_4 = y_1$, welche bei diesen Substitutionen ungeändert bleibt und bei allen anderen *geraden* Substitutionen sich ändert, ist Wurzel der Resolvente

$$(y - x_1 x_2 - x_3 x_4)(y - x_1 x_3 - x_2 x_4)(y - x_1 x_4 - x_2 x_3) = 0.$$

Diese Resolvente ergiebt sich in der Form

$$(11) \qquad y^3 - q y^2 + (pr - 4s) y - [s(p^2 - 4q) + r^2] = 0,$$

wenn als Gleichung 4^{ten} Grades

$$(12) \qquad x^4 + p x^3 + q x^2 + r x + s = 0$$

angenommen worden ist. Die Koeffizienten dieser Resolvente sind also rational in den Koeffizienten der Gleichung 4^{ten} Grades und erfordern die Quadratwurzel aus der Diskriminante zu ihrer Darstellung nicht. Durch die Adjunktion dieser Quadratwurzel erscheint die Resolvente als *cyklische* Gleichung dritten Grades.

Durch die Adjunktion der Grösse y_1, die noch zu der Adjunktion von P hinzukommt, wird die Gruppe der Gleichung (12) auf die Gruppe Δ jener vier Substitutionen reduziert. Die vier Substitutionen sind „vertauschbar", d. h. es geben zwei von ihnen T und S dasselbe Produkt, ob man die Produktbildung nach der Formel TS oder nach der Formel ST vornimmt. Es konstituieren deshalb die beiden Substitutionen 1 und $(x_1 x_2)(x_3 x_4)$ eine *invariante* Untergruppe Δ_1 der Gruppe Δ. Die Funktion $x_1 x_2$ bleibt für die Substitutionen von Δ_1 ungeändert und ändert sich bei jeder andern Substitution von Δ in $x_3 x_4$. Die Funktion $x_1 x_2$ genügt also einer Gleichung 2^{ten} Grades, nämlich der Gleichung

64) Zuerst findet sich diese trigonometrische Lösung bei *Vieta,* man vgl. *F. Vieta,* Opera mathematica op. atque stud. *F. a Schooten,* Lugduni Batavorum 1646, p. 91, wozu noch die ebendaselbst sich befindende appendix ab *Alexandro Andersono* operi subnixa p. 159 beizuziehen ist.

$$(z - x_1x_2)(z - x_3x_4) = z^2 - (x_1x_2 + x_3x_4)z + x_1x_2x_3x_4 = 0,$$

deren Koeffizienten dem zweimal erweiterten Rationalitätsbereich angehören. Wir erweitern den Rationalitätsbereich zum dritten Mal, indem wir zu den früher adjungierten Grössen noch x_1x_2 hinzu adjungieren. Die Gruppe der Gleichung (12) ist nun die Gruppe Δ_1. Die Funktion $x_1 - x_2$ geht für die nichtidentische Substitution von Δ_1 in ihr Entgegengesetztes über, lässt sich also durch eine Quadratwurzelausziehung bestimmen. In $x_1 - x_2$ und den früher adjungierten Grössen und den Koeffizienten p, q, r, s kann man x_1, x_2, x_3 und x_4 selbst darstellen.

Statt der Funktion $y_1 = x_1x_2 + x_3x_4$ kann man auch die Funktion $\theta_1 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2$ benutzen, die bei genau denselben Substitutionen ungeändert bleibt. Nach Nr. **7** und Nr. **16** kann man y_1 in θ_1 ausdrücken und umgekehrt. Es ergiebt sich

$$y_1 = \frac{\theta_1 - p^2 + 4q}{4},$$

und es geht durch diese Substitution die Resolvente (11) in

$$\theta^3 - (3p^2 - 8q)\theta^2 + (3p^4 - 16p^2q + 16q^2 + 16pr - 64s)\theta \\ - (p^3 - 4pq + 8r)^2 = 0$$

über. Die drei Wurzeln $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ dieser neuen Resolvente sind Quadrate ganzer Funktionen der x, wodurch nahe gelegt wird, die Quadratwurzeln $\sqrt{\theta_1}$, $\sqrt{\theta_2}$, $\sqrt{\theta_3}$ einzuführen. Es ist dann

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -p \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= \sqrt{\theta_1} \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= \sqrt{\theta_2} \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= \sqrt{\theta_3}. \end{aligned}$$

Hierdurch ergeben sich x_1, x_2, x_3, x_4 gleich zusammen. Trotz dieser Veränderung in der Anordnung liegt *vom substitutionentheoretischen Standpunkt* keine wesentlich neue Lösung vor. Die Adjunktion von $x_1 + x_2 - x_3 - x_4$ bedeutet genau dasselbe wie die Adjunktion von x_1x_2. Die gleichzeitige Adjunktion von $x_1 + x_2 - x_3 - x_4$ und $x_1 - x_2 + x_3 - x_4$ bedeutet dasselbe, was die gleichzeitige Adjunktion von P, x_1x_2 und $x_1 - x_2$ besagt, denn in beiden Fällen ist die identische Substitution die einzige, die alle adjungierten Funktionen ungeändert lässt. So braucht nun auch $x_1 - x_2 - x_3 + x_4$ nicht mehr besonders eingeführt zu werden. Es ist

$$(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) \\ = -p^3 + 4pq - 8r.$$

Hierdurch ist auch die Willkürlichkeit in jenen Quadratwurzeln beschränkt[65]).

Die Auflösung der Gleichung 2[ten] Grades war schon im Altertum bekannt. Die Gleichung vom 3[ten] Grad ist zuerst von *Scipione dal Ferro* (1496—1525) und 1535 durch *Nicolo Tartaglia*, die vom 4[ten] bald nachher von *Lodovico Ferrari* gelöst worden. Andere Lösungen sind später von *Réné Des-Cartes*, von *Walter von Tschirnhausen* und *L. Euler* gegeben worden. *Lagrange*[66]) hat, indem er die älteren Lösungsmethoden analysierte, bemerkt, dass die Radikale, vermittelst deren die Lösung erreicht wird, sich in den Wurzeln $x_1, x_2, \ldots$ der zu lösenden Gleichung rational ausdrücken lassen. Indem er die Resolvente bildete, der eine solche Funktion von $x_1, x_2 \ldots$ genügt und dabei die anderen Funktionen von $x_1, x_2, \ldots$, welche dieselbe Resolvente befriedigen, aufstellte, wurde er zur Anwendung der Substitutionen geführt. Er konnte nun direkt Lösungen aufbauen; diese unterscheiden sich in der Form kaum von den soeben gegebenen. Da nun bei der Gleichung 3[ten] Grades der Ausdruck $x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3$ und beim 4[ten] Grad der Ausdruck $x_1 - x_2 + x_3 - x_4$ auftrat, so kam *Lagrange* dazu, den Ausdruck $x_1 + \varrho x_2 + \varrho^2 x_3 + \cdots + \varrho^{n-1} x_n$ zu betrachten, in dem ϱ eine n^{te} Einheitswurzel bedeutet. Dieser Ausdruck führte auf die nach *Lagrange* benannte Resolvente[67]). Wenn nun auch die Auflösung der Gleichung n^{ten} Grades auf diesem Wege nicht gelingen konnte, so hat diese Betrachtung doch in hohem Masse die Entwicklung der Gleichungstheorie gefördert. Ausser *Lagrange* sind hier noch besonders *Waring*[68]) und *Aug. Vandermonde*[69]) zu nennen als solche, welche die Theorie der symmetrischen Funktionen [I B 3 b, Nr. **1**—**3**] und der Resolventenbildung [I B 3 f] entwickelt haben.

---

65) Hinsichtlich der älteren Auflösungsmethoden für die Gleichungen 3[ten] und 4[ten] Grades vgl. man *L. Matthiessen*, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen, Leipzig 1878. Hier finden sich auch die vielfachen modernen Formen der Lösungen, insbesondere auch diejenigen, die sich auf die Invariantentheorie [I B 2, Nr. 8, Anm. 169] gründen, und ein chronologisches Verzeichnis der Gesamtlitteratur.

66) Réflexions etc. oeuvr. 3, p. 205 ff. (nouv. mém. d. l'Acad. de Berlin 1770, 1771).

67) Oeuvr. 3, p. 331 ff.; man vgl. auch die ausführliche Darstellung bei *J. A. Serret*, 1. Aufl. p. 229, 3. Aufl. 2, p. 454, 5. Aufl. 2, p. 483.

68) Miscellanea analytica, Cantabrigiae 1762, p. 34. Meditationes algebraicae, Cantabrigiae 1782, p. 1—30, wo die allgemeine Theorie der symmetrischen Funktionen behandelt ist; ausserdem beachte man noch besonders p. 36, 81, 84, wo verschiedene einfache Resolventen gebildet werden.

69) Histoire de l'Académie des sciences de Paris 1771, p. 365 ff.; diese Arbeit ist schon im Jahr 1770 gelesen worden.

18. Nichtauflösbarkeit der allgemeinen Gleichungen höherer Grade. Die Auflösung der allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades ist für $n \geqq 5$ nicht mehr durch Wurzelzeichen möglich. Die *Galois*'sche Gruppe der Gleichung ist zunächst die symmetrische Gruppe, und diese hat nur *eine* invariante Untergruppe von Primzahlindex, die Gruppe der geraden Substitutionen oder die „alternierende" Gruppe [I A 6, Nr. 7]. Diese aber besitzt keine ausgezeichnete Untergruppe mehr, die von ihr selbst und der Identität verschieden wäre[70]. Die Faktoren der Zusammensetzung sind also für die symmetrische Gruppe 2 und $\frac{1}{2}n!$, sobald $n \geqq 5$ ist. Nach dem *Galois*'schen Kriterium ist also die Auflösung nicht möglich.

Den ersten wirklichen Beweis für die Nichtauflösbarkeit der allgemeinen Gleichungen, deren Grad den vierten übersteigt, hat 1826 *Abel* gegeben[71]. Sein Beweis besteht aus zwei Teilen. In dem ersten Teil wird gezeigt, dass die Lösung, wenn sie überhaupt möglich ist, so gestaltet werden kann, dass alle Radikale sich in den Wurzeln $x_1, x_2, \dots x_n$ der zu lösenden Gleichung rational ausdrücken lassen. Damit war also die Allgemeingiltigkeit der Bemerkung bewiesen, die *Lagrange* an den bekannten Auflösungen der Gleichungen 3^{ten} und 4^{ten} Grades gemacht hatte. Der zweite Teil des *Abel*'schen Beweises ist substitutionentheoretischer Natur. Es wird hier gezeigt, dass das innerste Wurzelzeichen — von einer numerischen Konstanten abgesehen — mit dem Differenzenprodukt der Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ übereinstimmen müsste; dasjenige Wurzelzeichen, welches nur das eine innerste Wurzelzeichen enthielte, führt dann für $n = 5$ auf eine Funktion von $x_1, x_2, \dots x_5$ mit widersprechenden Eigenschaften. Nun wird noch auf die Nichtauflösbarkeit der allgemeinen Gleichungen von höherem als fünftem Grad geschlossen. Einen Vorläufer hat *Abel* an *P. Ruffini* gehabt[72]. *Ruffini* setzt ohne Beweis voraus, dass die in die Lösung eingehenden Radikale sich rational in $x_1, x_2, \dots x_5$ ausdrücken lassen; dagegen führt er den substitutionentheoretischen Teil des Beweises einwandsfrei durch, zugleich in derjenigen ein-

---

70) *L. Kronecker*, Berl. Ber. 1879, p. 208—210; *C. Jordan*, traité p. 63, 64.

71) J. f. Math. 1 (1826), p. 65 = oeuvres, nouv. éd. 1, p. 66; einen nicht vollständig ausgeführten Beweis hatte *Abel* bereits im Jahr 1824 veröffentlicht, s. oeuvr. 1, p. 28.

72) Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebriche generali, Modena 1813. Hinsichtlich dieser und der früheren Arbeiten von *Ruffini* vgl. *H. Burkhardt*, „die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini", Zeitschr. Math. Phys. 37 (1892), Suppl. p. 119; ital. Ann. di Mat. (2) 22 (1894), p. 175 [I A 6, Nr. 1].

facheren Form, die meist als „*Wantzel*'sche Modifikation des *Abel*'schen Beweises" bezeichnet worden ist. *Kronecker* hat den ersten Teil des *Abel*'schen Beweises noch erheblich vereinfacht[73]).

19. Gleichungen mit regulärer Gruppe. Eine irreducible Gleichung mit der Eigenschaft, dass von ihren Wurzeln jede in jeder rational ist, wird von *Kronecker* eine „*Galois*'sche Gleichung" genannt[74]); die *Galois*'schen Resolventen besitzen die Eigenschaft. Die Gruppe Γ einer solchen Gleichung muss (Nr. 6) transitiv sein, und da x_i in x_k ausgedrückt werden kann, so muss jede Substitution der Gruppe, die x_k ungeändert lässt, auch x_i ungeändert lassen. Eine genauere Überlegung ergiebt, dass die Zahl der Operationen von Γ, d. h. die Ordnung der Gruppe, mit der Zahl der Buchstaben $x_1, x_2, \dots x_n$, d. h. mit dem Grad der Gleichung, also dem „Grad der Substitutionsgruppe", übereinstimmen muss. Es giebt dann genau *eine* Substitution, die einen gegebenen Buchstaben in einen gegebenen Buchstaben überführt. Eine solche Gruppe wird als „regulär" bezeichnet.

20. Gleichungen mit commutativer (permutabler) Gruppe. Eine Gleichung $f(x) = 0$, deren Gruppe aus vertauschbaren[75]) Operationen besteht, ist auflösbar[76]). Es lassen sich nämlich aus einer solchen Gruppe gewisse Operationen $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ mit den Ordnungen $m_1, m_2, m_3, \dots$ so aussuchen, dass $m_1 \geqq m_2 \geqq m_3 \geqq \cdots$, dass ferner m_1 ein Vielfaches von m_2, dieses ein Vielfaches von m_3 ist u. s. f., und dass in der Formel

$$\theta_1^{\mu_1}\,\theta_2^{\mu_2}\,\theta_3^{\mu_3}\dots$$

für $\mu_1 = 0, 1, \dots m_1 - 1$; $\mu_2 = 0, 1, \dots m_2 - 1$; $\mu_3 = 0, 1, \dots m_3 - 1, \dots$ jede Operation der Gruppe einmal und nicht häufiger enthalten ist[77]). Ist nun p ein Primteiler von m_1, so bilden die Operationen

$$\theta_1^{\nu_1 p}\,\theta_2^{\mu_2}\,\theta_3^{\mu_3}\dots \left(\begin{array}{l} \nu_1 = 0, 1, \cdots \frac{m_1}{p} - 1 \\ \mu_2 = 0, 1, \cdots m_2 - 1 \\ \mu_3 = 0, 1, \cdots m_3 - 1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right)$$

eine ausgezeichnete Untergruppe vom Index p.

---

73) Berl. Ber. 1879, p. 205.

74) Andere Schriftsteller nennen so die Gleichungen von Nr. 25; *Weber* nennt die obigen Gleichungen „Normalgleichungen".

75) Die Operationen T und S sind vertauschbar, wenn $TS = ST$ ist.

76) *C. Jordan,* traité p. 287 ff.

77) *E. Schering,* Gött. Abh. 14 (1868), math. Cl. p. 3; *L. Kronecker,* Berl. Ber. 1870, p. 881 = Werke 1, p. 271; *G. Frobenius* u. *L. Stickelberger*, J. f. Math. 86

Nun bilde man eine Funktion $g(x_1, x_2, \ldots x_n)$ der Wurzeln der Gleichung, die sich bei den Substitutionen der Untergruppe nicht ändert und bei allen anderen Substitutionen der Gleichungsgruppe sich numerisch ändert. Die Grösse g genügt nach Nr. **10** einer cyklischen Gleichung und kann nach Nr. 8 durch Wurzelausziehungen gefunden werden. Durch die Adjunktion von g wird die Gruppe der Gleichung $f(x) = 0$ auf die genannte ausgezeichnete Untergruppe reduziert. Durch Wiederholung des Verfahrens wird die Gleichung aufgelöst.

21. Abel'sche Gleichungen. In seinem „mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement" hat *Abel* im wesentlichen drei Sätze aufgestellt, die so formuliert werden können[78]):

Erster Satz: Wenn von zwei Wurzeln x_1 und x_2 einer irreducibeln Gleichung die zweite in der ersten rational ausgedrückt werden kann, so dass $x_2 = \theta(x_1)$ ist, wenn ferner unter den Grössen

$$x_1,\ \theta(x_1),\ \theta(\theta(x_1)),\ \theta\big(\theta(\theta(x_1))\big),\ \ldots$$

die n ersten von einander verschieden und die $n+1^{\text{te}}$ gleich x_1 ist, so ist $m \cdot n$ der Grad der irreducibeln Gleichung, und diese lässt sich in m Gleichungen n^{ten} Grades zerlegen, deren Koeffizienten von je einer Wurzel einer Gleichung m^{ten} Grades abhängen.

Zweiter Satz: Wenn die n verschiedenen Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades in der Form $x_1,\ \theta(x_1),\ \theta(\theta(x_1)), \ldots$ dargestellt werden können, wo θ eine rationale Funktion bedeutet, für deren n^{te} Iteration $\theta^{(n)}$ die Relation $\theta^{(n)}(x_1) = x_1$ besteht, so ist die Gleichung auflösbar.

Dritter Satz: Die Wurzeln einer Gleichung seien alle in einer von ihnen x_1 rational ausdrückbar. Falls irgend zwei Wurzeln durch $\theta(x_1)$ und $\theta_1(x_1)$ dargestellt sind, so sei immer $\theta_1(\theta(x_1)) = \theta(\theta_1(x_1))$. Die Gleichung ist dann auflösbar.

Von den im ersten Satz auftretenden Gleichungen n^{ten} Grades hat *Abel* ausserdem bewiesen, dass jede nach Adjunktion jener Wurzel der Gleichung m^{ten} Grades die Voraussetzungen des zweiten Satzes erfüllt, also lösbar ist. Die Gleichungen des dritten Satzes heissen „*Abel*'sche Gleichungen", die des zweiten Satzes bilden einen Spezialfall davon und heissen „*einfache Abel*'sche Gleichungen"[79]).

(1879), p. 217; *Netto,* Substitutionentheorie p. 143; *H. Weber,* Math. Ann. 20 (1882), p. 301, Algebra 2, p. 32 [I A 6, Nr. **20**].

78) J. f. Math. 4 (1829), p. 131 ff. u. *N. H. Abel,* oeuvr. nouv. éd. p. 487, 491, 499.

79) *L. Kronecker,* Berl. Ber. 1877, p. 846.

Die Sätze lassen sich mit der *Galois*'schen Theorie leicht in Verbindung setzen, was hier nur für den zweiten ausgeführt werden mag. Die Gleichung kann als irreducibel angesehen werden, da der andere Fall sich auf diesen zurückführen lässt. Nun können die Wurzeln so mit $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezeichnet werden, dass

$$x_2 = \theta(x_1),\ x_3 = \theta(x_2),\ x_4 = \theta(x_3) \ldots$$

ist. Es giebt, wenn k beliebig vorgeschrieben wird, eine Substitution der Gleichungsgruppe, die x_1 in x_{1+k} überführt. Diese Substitution muss, wenn sie in den vorigen Relationen ausgeführt wird, wieder richtige Relationen ergeben, sie muss also x_2 in x_{2+k}, x_3 in x_{3+k} u. s. f. verwandeln. Die Gruppe besteht somit aus den Wiederholungen (Potenzen) der cyklischen Substitution $(x_1 x_2 x_3 \ldots x_n)$. Nun kann aus Nr. **8** oder Nr. **20** auf die Auflösbarkeit geschlossen werden.

Die Gleichungen des dritten Satzes ergeben sich als solche mit permutabler Gruppe und lassen sich also unter Nr. **20** subsumieren. Umgekehrt sind alle Gleichungen mit permutabler Gruppe, wenigstens dann, wenn sie irreducibel sind, *Abel*'sche Gleichungen[80]).

Den allgemeinen Ausdruck für die Wurzeln *Abel*'scher Gleichungen hat *Kronecker* gefunden[81]); zugleich ergab sich ihm das Resultat, dass alle Wurzeln *Abel*'scher Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten gleich rationalen Funktionen von Einheitswurzeln sind mit rationalen Koeffizienten[82]).

22. Kreisteilungsgleichungen. Es sei p eine Primzahl. Die p^{ten} Einheitswurzeln genügen der Gleichung $x^p - 1 = 0$. Nimmt man aus der linken Seite den rationalen Faktor $x - 1$ heraus, so bleibt die Gleichung $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x^2 + x + 1 = 0$ übrig. Diese Gleichung ist irreducibel[83]); dabei ist angenommen, dass zum

---

80) *C. Jordan,* traité p. 286 ff.; *E. Netto,* Substitutionentheorie (1882), p. 206; *H. Weber,* Algebra 1, p. 534 ff.

81) Berl. Ber. 1853, p. 371 für einfache *Abel*'sche Gleichungen und 1877, p. 849, für „mehrfaltige". Man vgl. auch *G. P. Young,* Am. J. of math. 9 (1887), p. 225 u. p. 238; *H. Weber,* Marburger Ber. 1892, p. 58; *E. Netto,* Math. Ann. 42 (1893), p. 447; *H. Weber,* Algebra 2, p. 107.

82) Für einfache *Abel*'sche Gleichungen Berl. Ber. 1853; ausführliche Beweise bei *H. Weber,* Acta math. 8 (1886), p. 193 u. *D. Hilbert,* Gött. Nachr. 1896, p. 29. In den Berl. Ber. von 1877, p. 845 hat *Kronecker* gezeigt, wie dies Resultat auf die mehrfaltigen *Abel*'schen Gleichungen ausgedehnt wird, die durch Komposition aus den einfachen gebildet werden können. Hinsichtlich dieser Komposition vgl. man noch *Kronecker,* Berl. Ber. 1882, p. 1059.

83) *Gauss,* Werke 1, p. 317. Vgl. hierzu auch *Eisenstein,* J. f. Math. 39 (1850), p. 167 u. *L. Kronecker,* J. f. Math. 29 (1845), p. 280, J. de math. [1] 19 (1854), p. 177, [2] 1 (1856), p. 392 = Werke (1895) 1, p. 1, 75, 99.

Rationalitätsbereich nur die rationalen Zahlen gehören, dass also der „absolute“ Rationalitätsbereich zu grunde gelegt ist [I B 1 c, Nr. 2]. Die genannten Gleichungen sind von *Gauss* ausführlich behandelt worden [I C 4]. Da die p^{ten} Einheitswurzeln durch p äquidistante Punkte eines Kreises geometrisch repräsentiert werden, so hängt von diesen Gleichungen die Teilung des Kreises in p gleiche Teile ab, man nennt sie deshalb Kreisteilungsgleichungen[84]).

Setzt man $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{p}}$, so sind die sämtlichen Wurzeln der Gleichung

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 = 0 \tag{13}$$

durch $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^{p-1}$ dargestellt. Diese Grössen heissen die „primitiven p^{ten} Einheitswurzeln“. Man kann eine ganze Zahl g auf mehrere Arten so bestimmen, dass die Potenzen $g, g^2, g^3, \ldots g^{p-1}$ mit p dividiert, abgesehen von der Ordnung, die Reste $1, 2, \ldots p-1$ ergeben[85]); dabei giebt g^{p-1} stets den Rest 1.[86]) Man nennt g eine „Primitivwurzel“ der Primzahl p [I C 1]. Die primitiven p^{ten} Einheitswurzeln können nun auch in der Form

$$\alpha^{g^\mu} \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots p-2)$$

geschrieben werden.

Gauss hat für die Behandlung der Kreisteilungsgleichungen zwei Verfahren angegeben. Das eine dient dazu, die Gleichung (13) auf Gleichungen niedrigerer Grade zu reduzieren und beruht auf der Einführung der Perioden[87]). Unter einer „Periode“ versteht *Gauss* im Grund eine Summe

$$\alpha^\lambda + \alpha^{\lambda g^e} + \alpha^{\lambda g^{2e}} + \alpha^{\lambda g^{3e}} + \cdots + \alpha^{\lambda g^{(f-1)e}}, \tag{14}$$

wo f ein Teiler von $p-1$ und $ef = p-1$ ist. Der Wert dieser Summe hängt von der Wahl von g nicht ab und wird daher von *Gauss* mit (f, λ) bezeichnet. *Gauss* beweist nun, dass die verschiedenen zu demselben f gehörigen, d. h. aus f „Gliedern“ bestehenden Perioden $(f, \lambda), (f, \lambda'), (f, \lambda''), \ldots$ alle in einer von ihnen rational dargestellt werden können[88]). Die eine Periode, die zur Darstellung

---

84) Ausführlich wird die Kreisteilung behandelt von *P. Bachmann*, die Lehre von der Kreisteilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie, Leipzig 1872. Vgl. auch *E. Netto*, Vorlesungen über Algebra, Leipzig 1896, 1, p. 259 ff.

85) Existenz und Eigenschaften der Primitivwurzeln hat zuerst *Gauss* bewiesen in den Disqu. arithm. (1801), vgl. Werke 1, p. 45; die Eigenschaften waren *Lambert* und *Euler* schon bekannt.

86) Satz von *Fermat*, opera math. (Tolosae 1679), p. 163.

87) *Gauss*, Werke 1, p. 420. Man vgl. auch p. 421 Anm.

88) a. a. O. p. 424.

der übrigen benutzt wird, ergiebt sich als Wurzel einer Gleichung e^{ten} Grades, der die genannten Perioden genügen. Ist ferner $f = e'f'$, so reduziert sich die Berechnung der aus f' Gliedern bestehenden Perioden auf die Berechnung einer Wurzel einer Gleichung e'^{ten} Grades, deren Koeffizienten in jener früheren schon als berechnet gedachten f-gliedrigen Periode sich ausdrücken[89]. So wird dann fortgefahren.

Im Besitz der *Galois*'schen Theorie kann man dies Verfahren so auffassen. Falls $x_\mu = \alpha^{g^\mu}$ gesetzt wird, besteht die Gruppe der Gleichung (13) aus den Potenzen der Substitution $S = (x_1 x_2 \ldots x_{p-1})$. Die Potenzen $1, S^e, S^{2e}, \ldots S^{(f-1)e}$ bilden eine ausgezeichnete Untergruppe vom Index e. Die Periode (f, λ) ist eine Funktion der Wurzeln, die für die Substitutionen der Untergruppe ungeändert bleibt und bei allen anderen Substitutionen der Gruppe sich numerisch ändert; dies lässt sich auch direkt beweisen. So wird also (f, λ) einer Gleichung e^{ten} Grades genügen, und die Adjunktion der Periode wird die Gruppe auf die genannte Untergruppe reduzieren. Diese ist überdies intransitiv, und es zerfällt die Gleichung.

Das zweite *Gauss*'sche Verfahren[90] dient dazu, die im vorigen genannten Gleichungen e^{ten}, e'^{ten} Grades auf reine Gleichungen zu reduzieren. Man kann auch mit Hilfe des Verfahrens gleich die ganze Gleichung (13) auf reine Gleichungen reduzieren. Sind $a, b, c, \ldots m$ die Wurzeln der Gleichung e^{ten} Grades und ist R eine e^{te} Einheitswurzel, so wird der Ausdruck

$$a + Rb + R^2 c + \cdots + R^{e-1} m$$

gebildet. Die e^{te} Potenz dieses Ausdrucks berechnet sich in R rational. Es spielt also hier der Ausdruck eine Rolle, den *Lagrange* aus den Betrachtungen über Gleichungen 3^{ten} und 4^{ten} Grades gewonnen und seiner Resolvente der Gleichung n^{ten} Grades zu Grunde gelegt hatte.

Die Verallgemeinerung des zweiten *Gauss*'schen Verfahrens führte vermutlich *Abel* auf den in Nr. **21** genannten zweiten Satz. Als Verallgemeinerung des ersten *Gauss*'schen Verfahrens kann der erste *Abel*'sche Satz von Nr. **21** angesehen werden. Mit Hilfe dieser beiden Sätze hat dann *Abel* den dritten Satz entwickelt.

23. Teilungs- und Transformationsgleichungen der elliptischen Funktionen [II B 4 a]. In der Gleichung $x^p - a = 0$ kann man $a = e^u$ setzen, dann erscheint die Teilungsgleichung für die Exponentialfunktion,

89) p. 426—430.

90) a. a. O. p. 449.

indem die eine Wurzel $x_0 = e^{\frac{u}{p}}$ ist[91]). Die sämtlichen Wurzeln sind $x_\nu = e^{\frac{u+2\nu\pi i}{p}}$, wo $\nu = 0, 1, 2, \ldots p-1$. Hier fasst man u als variabel auf und nimmt als Rationalitätsbereich die rationalen Funktionen der Variabeln e^u mit rationalen Koeffizienten. Die Gleichung ist irreducibel. Adjungiert man noch die p^{ten} Einheitswurzeln, so besteht (s. o. Nr. 9) die Gruppe der Gleichung aus den Potenzen derjenigen Substitution, die x_ν in $x_{\nu+1}$ überführt. Nachdem man also die Grössen $e^{\frac{2\nu\pi i}{p}}$, d. h. die Wurzeln der „Periodenteilungsgleichung" berechnet hat, braucht man (Nr. 8), falls p eine Primzahl ist, nur noch eine p^{te} Wurzel auszuziehen, um die allgemeine Teilungsgleichung zu lösen. Die Gleichung für die Teilung der Perioden ist eben die in der vorigen Nummer betrachtete Kreisteilungsgleichung.

Die Teilungsgleichungen für die elliptischen Funktionen ergeben sich, indem man aus den elliptischen Funktionen mit dem Argument u die Funktionen mit dem Argument $\frac{u}{p}$ bestimmt; dabei mag p wieder als Primzahl angenommen sein. Die betrachteten Funktionen gehören alle zu demselben Periodensystem, und dieses soll sich aus den beiden „primitiven" Perioden 2ω und $2\omega'$ ableiten. Die genannte Bestimmung kann nun für ein gegebenes p von einer einzigen Gleichung $G(w) = 0$ abhängig gemacht werden. In die Koeffizienten der Gleichung gehen noch gewisse, lediglich von den Perioden abhängige Grössen, die „Invarianten" — beziehungsweise der „Modul" — ein[92]); diese Grössen sind ebenso wie die Perioden als variabel anzusehen. Die Gleichung, die für variable Invarianten irreducibel ist, hat p^2 Wurzeln $w_{\nu,\nu'}$ $(\nu, \nu' = 0, 1, 2, \ldots p-1)$, die den Argumenten

---

91) Der Name „Teilungsgleichung" wird verständlicher, wenn man die Integrale betrachtet, durch deren Umkehrung die Funktionen — sei es nun die Exponentialfunktion oder die elliptischen Funktionen — entstehen. Sei $e^u = a$ und $e^{\frac{u}{p}} = x$, so bedeutet die Bestimmung von x die Bestimmung der oberen Grenze in einem Integral $\int_1^x \frac{dx}{x}$, dessen Wert gleich dem p^{ten} Teil des Integrals $\int_1^a \frac{dx}{x}$ werden soll.

92) Hinsichtlich der Begriffe aus der Theorie der elliptischen Funktionen vgl. man *G. H. Halphen,* traité des fonctions elliptiques, Paris 1886, insbesondere 1, p. 3 ff. u. p. 25 ff.

$\frac{u+2\nu\omega+2\nu'\omega'}{p}$ entsprechen. Die Werte, die aus den Grössen $w_{\nu,\nu'}$ dadurch hervorgehen, dass $u=0$ gesetzt wird, sollen $v_{\nu,\nu'}$ heissen; es sind diese Werte die Wurzeln der Periodenteilungsgleichung, wobei aber $v_{0,0}$ wegzulassen ist. *Abel* hat bereits gezeigt[93]), dass die allgemeine Teilungsgleichung durch Radikale gelöst werden kann, wenn man die Wurzeln der Periodenteilungsgleichung als bekannt ansieht. Vom Standpunkt der *Galois*'schen Theorie erklärt sich dies so. Nach Adjunktion der Grössen $v_{\nu\nu'}$, welche der Teilung der Perioden entsprechen, ergiebt sich die Gruppe der allgemeinen Teilungsgleichung dadurch, dass die Substitution $\begin{pmatrix} w_{\nu,\nu'} \\ w_{\nu+1,\nu'} \end{pmatrix}$ mit der Substitution $\begin{pmatrix} w_{\nu,\nu'} \\ w_{\nu,\nu'+1} \end{pmatrix}$ auf alle Arten kombiniert wird. Diese Gruppe ist kommutativ, weshalb die Auflösung der allgemeinen Teilungsgleichung nunmehr durch Radikale möglich ist (Nr. **20**).

Die Wurzeln der Periodenteilungsgleichung bestimmen sich durch $p+1$ Gleichungen vom Grade $p-1$;[94]) diese Gleichungen enthalten in ihren Koeffizienten je eine Wurzel einer und derselben Gleichung $p+1^{\text{ten}}$ Grades[95]). Wenn man diese Gleichung $p+1^{\text{ten}}$ Grades als gelöst annimmt, so sind die $p+1$ Gleichungen $p-1^{\text{ten}}$ Grades sämtlich durch Wurzelzeichen lösbar[96]). Von der Gleichung $p+1^{\text{ten}}$ Grades hat *Abel* vermutet, dass sie für $p>3$ nicht durch Wurzelzeichen gelöst werden kann. *Galois* hat dazu den Beweisgrund beigebracht; seine in dem Briefe an *Chevalier* nur angedeuteten Überlegungen sind von *Betti* ergänzt worden[97]). Die Wurzeln $v_{\nu,\nu'}$ der Periodenteilungsgleichung lassen sich in Systeme ordnen und zwar kommen allgemein die Wurzeln

$$v_{\nu,\nu'} \quad v_{2\nu,2\nu'} \quad v_{3\nu,3\nu'} \quad \cdots \quad v_{(p-1)\nu,(p-1)\nu'} \tag{15}$$

in ein System. So entstehen $p+1$ Systeme von je $p-1$ Grössen v. Die Substitutionen der Gruppe der Periodenteilungsgleichung führen die Wurzeln eines Systems in solche über, die gleichfalls zu einem

---

93) Oeuvr. 1, p. 294—305; man vgl. auch *K. G. J. Jacobi,* J. f. Math. 3 (1828), p. 86 (Werke 1 [1881], p. 243); *E. Betti,* Ann. mat. fis. 4 (1853), p. 81 u. *C. Jordan,* traité p. 337.

94) Dies ist im wesentlichen bei *Abel* a. a. O. bewiesen; bei ihm ist der Grad allerdings $\frac{p-1}{2}$, da er bei seiner Darstellung das Quadrat der Unbekannten als neue Unbekannte einführen kann.

95) *Abel,* oeuvr. 1, p. 305—310.

96) *Abel,* a. a. O. p. 310—314.

97) *Galois,* oeuvr. p. 26 ff.; *E. Betti,* Ann. mat. fis. 4 (1853), p. 81; man vgl. auch *C. Jordan,* traité p. 342 u. *L. Kronecker,* Berl. Ber. 1875, p. 498.

System zusammengehören; die Systeme werden dadurch unter einander vertauscht. Die Wurzeln $v_{1,0}$ und $v_{0,1}$ können in irgend zwei solche Wurzeln $v_{\mu,\mu'}$ und $v_{\nu,\nu'}$, die verschiedenen Systemen angehören, übergeführt werden, und es wird dann allgemeiner $v_{\alpha,\alpha'}$ durch $v_{\alpha\mu+\alpha'\nu,\,\alpha\mu'+\alpha'\nu'}$ ersetzt. Die Wurzeln eines Systems, z. B. die Grössen

$$v_{0,1} \quad v_{0,2} \quad v_{0,3} \quad \ldots \quad v_{0,p-1} \tag{16}$$

genügen einer Gleichung $p-1^{\text{ten}}$ Grades, deren Koeffizienten sich in einer symmetrischen Funktion s derselben Grössen (16) ausdrücken; diese Gleichung ist cyklisch und daher durch Wurzelzeichen lösbar, wobei natürlich s als adjungiert zu denken ist Die Grösse s bestimmt sich aus einer Gleichung $p+1^{\text{ten}}$ Grades. Die Gruppe Γ dieser Gleichung ergiebt sich aus der Art, wie die Systeme mit einander vertauscht wurden. Die zum Systeme (15) gehörende Grösse s werde mit $s_{\frac{\nu}{\nu'}}$ bezeichnet, wo der mod p zu verstehende uneigentliche Bruch[98]) die Werte $0, 1, 2, \ldots p-1, \infty$ erhält. Die oben genannte Substitution führt nun jedes $s_{\frac{\alpha}{\alpha'}}$ in $s_{\frac{\mu\frac{\alpha}{\alpha'}+\nu}{\mu'\frac{\alpha}{\alpha'}+\nu'}}$ über, wo μ, ν, μ', ν' vier Reste des Moduls p bedeuten, für die $\mu\nu'-\mu'\nu$ nicht durch p teilbar ist. Alle Substitutionen von dieser Art in der Anzahl $(p-1)p(p+1)$ bilden die Gruppe Γ.[99]) Nach Adjunktion einer Quadratwurzel reduziert sich die Gruppe jener Gleichung $p+1^{\text{ten}}$ Grades auf $\frac{(p-1)p(p+1)}{2}$ Substitutionen [I A 6, Nr. **11**] und diese Gruppe ist für $p \geqq 5$ einfach[100]), weshalb die Gleichung nicht durch Radikale gelöst werden kann.

Bei der Transformation p^{ter} Ordnung der elliptischen Funktionen lässt sich der neue Modul in dem alten Modul und den Grössen $v_{\nu,\nu'}$ ausdrücken, was schon von *Abel* und *Jacobi* erkannt worden ist[101]). Zwischen den vierten Wurzeln der beiden Moduln besteht eine Gleichung, die „Modulargleichung"[102]); diese stellt daher im wesentlichen

98) *Gauss,* Werke 1, p. 23.

99) Diese Gruppe ist auch von *E. Mathieu,* J. de math. [2], 5 (1860), p. 24 behandelt worden.

100) *Galois,* oeuvr. p. 27 ohne Beweis; vgl. dazu *C. Jordan,* traité p. 105. Die sämtlichen Untergruppen dieser Gruppe hat *J. Gierster,* Math. Ann. 18 (1881), p. 319 bestimmt.

101) *Abel*, Werke 1, p. 363 (J. f. M. 3 [1828]) *K. G. J. Jacobi,* Werke 1, Berlin 1881, p. 102 (fundamenta nova 1829).

102) *Jacobi,* J. f. M. 3 (1828), p. 192 (Werke 1, p. 251); *Ad. Sohncke*, J. f. Math. 16 (1837), p. 97; *H. Schröter*, de aequationibus modularibus diss. Regiomonti Pr.

dasselbe Problem wie die betrachtete Teilungsgleichung vor. Für die Modulargleichung hat *Jacobi* eine andere, gleichwertige Gleichung eingeführt, die ebenfalls vom Grade $p+1$ ist, die sogenannte „Multiplikatorgleichung"[103]). Durch die Eigenschaften dieser Gleichungen ist eine besondere Art algebraischer Gleichungen $p+1^{\text{ten}}$ Grades definiert, die wir jetzt „*Jacobi*'sche Gleichungen" nennen und unabhängig von der Theorie der elliptischen Funktionen betrachten[104]).

24. Reduktion von Gleichungen auf Normalformen. *Galois* hat gefunden, dass für $p=5, 7, 11$ und nur für diese Werte der Primzahl $p \geqq 5$ die Modulargleichung durch eine Gleichung von nur p^{tem} Grade ersetzt werden kann; *Betti* hat den Beweis dafür ausgeführt[105]). Für $p=5$ ist die Gruppe der Gleichungen, um die es sich hier handelt, mit der Gruppe der geraden Vertauschungen von fünf Dingen holoedrisch isomorph. So erscheinen spezielle Gleichungen 6. und 5. Grades, welche dieselbe Gruppe besitzen wie — nach Adjunktion einer Quadratwurzel — die allgemeine Gleichung 5. Grades. Durch Untersuchungen von *Kronecker*, *Hermite* und *Brioschi* ist bewiesen, dass die genannten speziellen Gleichungen als Normalgleichungen benutzt werden können, auf die man die allgemeine Gleichung 5. Grades zurückführt[106]). *Klein* hat dann die sogenannte Ikosaedergleichung als Normalgleichung eingeführt[107]).

1854; *Ch. Hermite,* sur la théorie des équations modulaires et la résolution de l'équation du cinquième degré, Paris 1859 (Par. C. R. 1859, 1. sém. p. 940, 1079, 1095 u. 2. sém. p. 15, 110, 141); *H. Schröter*, J. f. Math. 58 (1861), p. 378; *F. Müller,* de transformatione functionum ellipticarum diss. Berlin 1867; *L. Königsberger,* die Transformation, die Multiplikation u. die Modulargleichungen der elliptischen Funktionen, Leipzig 1868, vgl. insbesondere p. 141; *C. Jordan,* traité p. 344; *F. Müller,* über die Transformation vierten Grades der elliptischen Funktionen, Berlin, Jub.schrift der Realschule 1872; *F. Brioschi,* Par. C. R. 79 (1874), p. 1065 u. 80 (1875), p. 261; *R. Dedekind,* J. f. Math. 83 (1877), p. 265; *F. Klein,* Math. Ann. 14 (1879), p. 129, 15 (1879), p. 533, 17 (1880), p. 68, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, ausgearbeitet von *R. Fricke,* 2. Bd. (Leipzig 1892), p. 56. Vgl. II B 6 a und c.

103) *Jacobi,* J. f. M. 3 (1828), p. 308 (Werke 1, p. 261); *L. Kiepert*, J. f. M. 87 (1879), p. 199; *F. Klein,* Math. Ann. 14 (1879), p. 146, 15 (1879), p. 86; *A. Hurwitz*, Math. Ann. 18 (1881), p. 528; *W. Dyck,* ebendaselbst p. 507.

104) Man vgl. die nachher zu nennenden Arbeiten von *Kronecker* u. *Brioschi,* ferner *F. Klein,* Ikosaeder p. 147 ff., *A. Cayley,* Math. Ann. 30 (1887), p. 78 = Pap. 12, p. 493.

105) *Galois,* oeuvr. p. 27, 28; *E. Betti* a. a. O.; *C. Jordan,* traité p. 347; *F. Klein,* Math. Ann. 14 (1879), p. 417. [Vgl. I A 6, Anm. 63.]

106) *Ch. Hermite,* Par. C. R. 46 (1858), p. 508; *L. Kronecker*, ebenda p. 1150; Berl. Mon.-Ber. 1861, p. 609 und 1879, p. 220. *Hermite* und *Brioschi* haben ihre zerstreuten Arbeiten nachher gesammelt: *Ch. Hermite*, Par. C. R. 1865, 2. sém. p. 877,

Für $p = 7$ ist die Gruppe der Modulargleichung — nach der Adjunktion einer Quadratwurzel — von der Ordnung 168. Es entstehen nun Gleichungen 8. und 7. Grades mit einer Gruppe der Ordnung 168.[108]) Jede Gleichung 7. und 8. Grades mit der betreffenden Gruppe lässt sich, wie *Klein* gezeigt hat, auf die Modulargleichung zurückführen[109]). Die Gleichungen 7. Grades, um die es sich hier handelt, besitzen diejenige Gruppe, welche die Funktion

$$x_0 x_1 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_2 x_3 x_5 + x_3 x_4 x_6 + x_4 x_5 x_0 + x_5 x_6 x_1 + x_6 x_0 x_2$$

der Wurzeln $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ in sich überführt[110]), woraus sich zugleich ergiebt, dass diese Gruppe die hier auftretenden sieben Tripel von Wurzeln 0, 1, 3; 1, 2, 4 u. s. f. in einander überführt [I A 2, Nr. **10**; I A 6, Note 67]. Auf diesen Tripelcharakter der betreffenden Gleichungen 7. Grades hat *M. Noether* zuerst aufmerksam gemacht[111]). Das rechnerische Detail, das erforderlich ist, um solche Gleichungen auf die von *Klein* eingeführten kanonischen Formen zu reduzieren, ist von *P. Gordan* entwickelt worden[112]).

Die Trisektion der hyperelliptischen Funktionen erster Ordnung führt auf eine Gleichung, deren Gruppe einfach ist und die Ordnung $(3^4 - 1)\, 3^3 (3^2 - 1)\, 3$ besitzt. Man kann dabei die Gleichung so wählen, dass sie vom 27. Grade ist[113]). *Klein* hat gezeigt, dass auf

---

965, 1073 u. 1866, 1. sém. p. 65, 157, 245, 715, 919, 959, 1054, 1161, 1213; *F. Brioschi,* Math. Ann. 13 (1878), p. 109. Man vgl. auch *C. Jordan,* traité p. 372 ff.; *H. Weber,* Algebra 2, p. 403 ff. Das Nähere s. I B 3 f, Nr. **9** ff.

107) Vgl. insbesondere Math. Ann. 12 (1877), p. 559 und die Vorlesungen über das Ikosaeder. Hier findet sich auch zur Gleichung 5. Grades weitere Litteratur. Im übrigen ist auf I B 3 f, Nr. **9** ff. zu verweisen.

108) *E. Betti* a. a. O.; *L. Kronecker,* Berl. Mon.-Ber. 1858, p. 287; hier hat Kronecker bereits die Vermutung ausgesprochen, dass alle Gleichungen 7. Grades mit der betreffenden Gruppe sich auf die Modulargleichung für die Transformation 7. Ordnung der elliptischen Funktionen reduzieren lassen; *Ch. Hermite,* a. a. O.; *E. Mathieu,* J. d. math. [2], 5 (1860), p. 24; *F. Klein,* Math. Ann. 14 (1879), p. 428.

109) Math. Ann. 15 (1879), p. 251. Allgemeine Gleichungen 6. u. 7. Grades hat *Klein,* Math. Ann. 28 (1887), p. 499 betrachtet.

110) *P. Gordan,* Math. Ann. 25 (1885), p. 459.

111) Math. Ann. 15 (1879), p. 89. Über Tripelgleichungen vgl. man noch *E. Netto,* Substitutionentheorie p. 220 ff. und *H. Weber,* Algebra 2, p. 342 ff.

112) Math. Ann. 20 (1882), p. 515; 25 (1885), p. 459.

113) *C. Jordan,* Par. C. R. 68 (1869), p. 868, traité p. 365; *A. Witting,* Math. Ann. 29 (1887), p. 157; *H. Maschke,* Math. Ann. 33 (1889), p. 317. Hinsichtlich der Transformation und der Modulargleichungen vgl. man *Ch. Hermite,* sur la théorie de la transformation des fonctions Abéliennes, Par. C. R. 1855, 1. sém. p. 249, 304, 365, 427, 485, 536, 704, 784; *L. Königsberger,* J. f. M. 64 (1865), p. 17; 67 (1867), p. 97 u. Math. Ann. 1 (1869), p. 161.

diese spezielle Gleichung 27. Grades jede andere Gleichung 27. Grades, welche dieselbe Gruppe besitzt, sich zurückführen lässt. Der Beweis wird auf eine andere Normalform des Trisektionsproblems gestützt[114]). Zu den Gleichungen, die sich auf das genannte Problem zurückführen lassen, gehört auch diejenige, durch welche die 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung bestimmt werden[115]).

25. Irreducible Gleichungen von Primzahlgrad. Für irreducible Gleichungen von Primzahlgrad, die auflösbar sind, hat *Galois* die Gruppen explicite aufgestellt[116]). Es seien $x_1, x_2, x_3, \ldots x_p$ die Wurzeln einer solchen Gleichung. Die Substitutionen der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots x_p \\ x_{a+b} & x_{2a+b} & x_{3a+b} & \ldots x_{pa+b} \end{pmatrix},$$

in der a eine Zahl von 1 bis $p-1$ und b eine Zahl von 0 bis $p-1$ bedeutet, und in der die Indices bloss hinsichtlich des Restes betrachtet werden sollen, den sie bei der Division mit p ergeben, sind in der Zahl $p(p-1)$. Diese Substitutionen bilden eine Gruppe, welche als „lineare" oder auch „metacyklische" Gruppe bezeichnet wird[117]). Diese Gruppe kann auch aus den beiden cyklischen Substitutionen $(x_1 x_2 x_3 \ldots x_p)$ und $(x_1 x_g x_{g^2} x_{g^3} \ldots x_{g^{p-2}})$ erzeugt werden, wobei g eine Primitivwurzel (Nr. **22**) der Primzahl p bedeutet. Die Faktoren der Zusammensetzung für diese Gruppe sind Primzahlen. Die Gleichung ist also auflösbar, wenn ihre *Galois*'sche Gruppe mit der metacyklischen Gruppe übereinstimmt oder (Nr. **14**) in ihr enthalten ist. Wenn andererseits eine irreducible Gleichung vom Primzahlgrad p auflösbar ist, so kann man ihre Wurzeln in einer solchen Ordnung mit $x_1, x_2, \ldots x_p$ bezeichnen, dass nachher die oben aufgestellte metacyklische Gruppe die Gruppe der Gleichung enthält.

Ein anderer Satz, der auch von *Galois* herrührt, ergiebt sich hieraus: Eine irreducible Gleichung von Primzahlgrad ist dann und nur dann auflösbar, wenn alle ihre Wurzeln sich in zwei bestimmten Wurzeln rational ausdrücken lassen[118]). Ferner folgt, dass für solche

114) J. de math. [4], 4 (1888), p. 169; die Durchführung bei *H. Burkhardt,* Math. Ann. 41 (1892), p. 313, wo weitere Litteratur angegeben.

115) *C. Jordan* a. a. O. [Anm. 140].

116) *E. Galois,* oeuvr. p. 47.

117) *C. Jordan*, traité p. 92; der Name „metacyklisch" ist von *L. Kronecker* (Berl. Ber. 1879, p. 217) für diese Gruppen eingeführt, während *H. Weber* neuerdings mit dem Namen „metacyklisch" die auflösbaren Gruppen bezeichnet (man vgl. Anm. 55). *J. A. Serret* hat in Par. C. R. 1859, 1. sém. p. 112, 178, 237 die lineare Gruppe genauer studiert [I A 6, Nr. **10**].

118) Oeuvr. p. 48; vgl. auch *E. Betti*, Ann. fis. mat. 2 (1851), p. 5. Eine

Gleichungen die Resolvente von *Lagrange* eine rationale Wurzel besitzt, was schon *Abel* ausgesprochen hatte[119]).

Abel hat für die Wurzeln der betrachteten Gleichungen die Formel

$$x = A + \sqrt[p]{R_1} + \sqrt[p]{R_2} + \cdots + \sqrt[p]{R_{p-1}}$$

gefunden, wobei $R_1, R_2, \ldots R_{p-1}$ die Wurzeln einer Gleichung $p - 1^{\text{ten}}$ Grades bedeuten[120]); *Kronecker* hat dazu bemerkt, dass diese Gleichung $p - 1^{\text{ten}}$ Grades eine einfache *Abel*'sche Gleichung sein muss[121]). Explicite Ausdrücke für die Koeffizienten einer auflösbaren Gleichung fünften Grades, die in der *Bring*'schen Form[122]) $x^5 + ux + v = 0$ vorausgesetzt wird, haben *C. Runge*[123]) und *G. P. Young*[124]) gegeben. Fälle nichtauflösbarer Gleichungen fünften Grades sind von *C. Runge*[125]) und *D. Selivanoff*[126]) gegeben worden[127]).

26. Sylow'sche Gleichungen. Bisweilen kann die Auflösbarkeit einer Gleichung schon an der Ordnung ihrer *Galois*'schen Gruppe erkannt werden. So sind, wenn p eine Primzahl bedeutet, alle Gleichungen auflösbar, deren Gruppe Γ von der Ordnung p^n ist [I A 6, Nr. 22].

---

andere Form des Kriteriums hat *L. Kronecker,* Berl. Ber. 1853, p. 369 gegeben, die *P. Bachmann,* Math. Ann. 18 (1881), p. 468 hergeleitet hat; vgl. auch *G. P. Young,* Am. J. of math. 6 (1883), p. 103 u. 7 (1885), p. 270.

119) *Abel,* oeuvr. 2, p. 223 ohne Beweis. Für den 5. Grad vgl. man die Herleitung von *E. Luther,* J. f. Math. 34 (1847), p. 244. Bei der Bildung dieser Resolvente adjungiert man die p^{ten} Einheitswurzeln.

120) A. a. O. p. 222; Bew. bei *C. J. Malmsten,* J. f. Math. 34 (1847), p. 46 und für den 5. Grad bei *E. Luther,* a. a. O. p. 250.

121) A. a. O. p. 368; hier ist zugleich eine nähere Bestimmung der Grössen R gegeben, und damit die hinreichende Bestimmung für die Wurzeln einer auflösbaren Gleichung p^{ten} Grades. Für $p = 5$ ist die in Frage stehende Formel von *Abel* in einem Briefe an *Crelle* aufgestellt worden, oeuvr. 2, p. 266; diese Formel hat *H. Weber* in den Marburger Ber. 1892, p. 3 bewiesen und in etwas berichtigt. Man vgl. auch *Kronecker,* Berl. Ber. 1856, p. 203.

122) Meletemata quaedam mathematica etc., quae praeside *E. S. Bring* modeste subjicit *S. G. Sommelius,* Lund. 1786. Gewöhnlich wird diese Form nach *G. B. Jerrard* genannt. Man vgl. hierzu auch *C. J. Hill,* Stockholm Forh. 1861 u. *Klein,* Ikosaeder p. 143 [I B 3 f, Nr. 9].

123) Acta math. 7 (1885), p. 173. Vgl. auch *Weber,* Algebra 1, p. 624.

124) Am. J. of m. 7 (1885), p. 170; allgemeiner ebendaselbst 10 (1888), p. 99. Einzelne auflösbare Gleichungen höherer Grade sind schon früher von *R. Perrin,* S. M. F. Bull. 10 (1881/82), p. 139, 11 (1882/83), p. 61 gegeben worden.

125) Acta math. 7 (1885), p. 180.

126) S. M. F. Bull. 21 (1893), p. 97.

127) Mit auflösbaren primitiven Gleichungen beschäftigt sich ein Fragment von *Galois,* oeuvr. p. 50, wobei übrigens zu bemerken ist, dass *Galois* den Begriff der Primitivität etwas anders fasst, als jetzt üblich ist.

Dieses von *L. Sylow* gefundene Resultat[128]) ergiebt sich aus der Betrachtung der ausgezeichneten oder invarianten Operationen der Gruppe. Eine Operation S ist invariant, wenn für jede Operation T der Gruppe

$$T^{-1}ST = S$$

ist, und jede Gruppe von der Ordnung p^n enthält stets invariante Operationen, auch abgesehen von der Identität. Alle invarianten Operationen von Γ mit Einrechnung der Identität bilden eine invariante Untergruppe Δ von der Ordnung p^m. Man kann nun für die Gleichung eine Resolvente (Nr. **10**) bilden, deren Gruppe Γ/Δ von der Ordnung p^{n-m} ist, derart, dass die Adjunktion einer Wurzel der Resolvente die Gruppe der Gleichung auf Δ reduziert. Nach dieser Adjunktion besitzt also die Gleichung eine kommutative Gruppe und kann dann nach Nr. **20** durch Wurzelzeichen aufgelöst werden. Da man nun die Resolvente wieder ebenso behandeln kann wie die ursprüngliche Gleichung, wird schliesslich die Auflösung der Gleichung von Anfang an durch die Operationen der vier Spezies und durch Radizieren geleistet. Eine genauere Überlegung ergiebt, dass man dabei die p^{ten} Einheitswurzeln berechnen und nach einander n Wurzeln mit dem Exponenten p ausziehen muss. Ist $p = 2$, so wird die Gleichung durch blosse Quadratwurzeln aufgelöst. Umgekehrt muss eine Gleichung, die so gelöst werden kann, eine Gruppe von der Ordnung 2^n besitzen. Ist die Gleichung zugleich irreducibel, so ist die Gruppe transitiv und die Ordnung der Gruppe durch den Grad teilbar (Nr. **6**). Es muss also in diesem Falle der Grad eine Potenz von 2 sein[129]).

Eine irreducible Gleichung 3. Grades ist also nie durch Quadratwurzeln auflösbar. Eine Gleichung 4. Grades ist dann und nur dann durch Quadratwurzeln auflösbar, wenn ihre Resolvente 3. Grades eine rationale Wurzel hat[130]); dabei kann die eine oder die andere der in Nr. **17** genannten Resolventen genommen werden.

27. Casus irreducibilis der kubischen Gleichung. Sind die Wurzeln einer Gleichung alle reell, besteht der zu Grunde gelegte Rationalitätsbereich aus reellen Grössen, und kann die Gleichung bei dem angenommenen Rationalitätsbereich durch Quadratwurzeln aufgelöst werden, so könnten immer noch imaginäre Quadratwurzeln in

---

128) Math. Ann. 5 (1872), p. 588.

129) *J. Petersen,* om de Ligninger, der kunne löses ved Kvadratrod, Kjöbenhavn 1871. Hier findet sich für den genannten Satz ein elementarer Beweis, der nicht von gruppentheoretischen Hülfsmitteln Gebrauch macht.

130) Vgl. z. B. *K. Th. Vahlen,* Acta math. 21 (1897), p. 293.

die Lösung eingehen; man kann dann jedoch stets Darstellungen der Wurzeln durch reelle Quadratwurzeln finden. Liegt umgekehrt eine in einem reellen Rationalitätsbereich irreducible Gleichung vor mit lauter reellen Wurzeln, und kann eine der Wurzeln überhaupt durch reelle Radikale dargestellt werden, so ist die Gleichung durch *Quadratwurzeln* lösbar[131]). Insbesondere kann also dann die Gleichung nicht vom 3. Grade sein. Hieraus folgt auch, dass keine Lösung der allgemeinen Gleichung 3. Grades existiert, die im Falle reeller Koeffizienten und positiver Diskriminante die in diesem Falle reellen drei Wurzeln durch Radikale in reeller Form lieferte[132]). Dass die Cardanische Formel (Nr. **17**) in diesem Falle die drei reellen Wurzeln in imaginärer Form giebt, war längst bekannt, weshalb der Fall als *casus irreducibilis* bezeichnet wurde.

28. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Bereits *Des-Cartes*[133]) hatte bemerkt, dass die Frage, ob eine geometrische Grösse mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann, hinauskommt auf die andere Frage, ob die Grösse sich durch Quadratwurzeln berechnen lässt. Die Konstruktion ist also jedenfalls unmöglich, wenn die Grösse einer irreducibeln Gleichung genügt, deren Grad einen ungeraden Faktor enthält. Hierauf beruht der Beweis dafür, dass gewisse vom Altertum auf uns gekommene Konstruktionsaufgaben nicht mit Zirkel und Lineal gelöst werden können, die Trisektion eines beliebigen Winkels und das Delische Problem, d. h. die Verdoppelung des Würfels [III A 2]. Es ergiebt sich hieraus auch die Unmöglichkeit, den Kreis mit Zirkel und Lineal in n gleiche Teile zu teilen für andere Zahlen n als für diejenigen, welche *Gauss* behandelt hat, dass z. B. die Teilung in sieben Teile nicht möglich ist[134]).

29. Geometrische Gleichungen. Die allgemeine Kurve dritter Ordnung besitzt neun Wendepunkte; dabei liegt auf der Verbindungslinie von je zwei Wendepunkten immer ein dritter Wendepunkt[135]). Die Bestimmung der Wendepunkte hängt ab von einer Gleichung

131) *O. Hölder,* Math. Ann. 38 (1891), p. 312.

132) *V. Mollame,* Nap. Rend. (2) 4, 1890, p. 167; *O. Hölder* a. a. O.; *A. Kneser,* Math. Ann. 41 (1893), p. 344.

133) La géométrie, Leyde 1638, livre premier; deutsch v. *L. Schlesinger,* Berlin 1894.

134) *Gauss,* Werke 1, p. 412 ff., besonders p. 462; man vgl. über diese Probleme auch *F. Klein*, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, ausgearbeitet von *F. Tägert,* Leipzig 1895.

135) *J. V. Poncelet,* J. f. M. 8 (1832), p. 130; *O. Hesse,* J. f. M. 28 (1844), p. 68, 34 (1847), p. 193 = Werke p. 123, 137; *G. Salmon,* J. f. M. 39 (1850), p. 365 [III C 3].

9. Grades $f(\lambda) = 0$, wobei man λ so wählen wird, dass sich λ in den beiden Koordinaten eines Wendepunktes rational ausdrücken lässt und dass umgekehrt diese Koordinaten sich beide in λ ausdrücken lassen. Den neun Wendepunkten entsprechen die neun Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_9$. Gehören nun λ_1, λ_2 und λ_3 zu drei Wendepunkten, die auf einer Geraden liegen, so ist jede der drei Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ in den beiden anderen rational. Entsprechend den Beziehungen zwischen den Wendepunkten lässt sich nun für die neun Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_9$ ein System von Tripeln so bilden, dass jedes Wurzelpaar gerade in einem Tripel auftritt. Man kann aus neun Grössen, wenn man von einer Vertauschung unter diesen Grössen absieht, nur ein solches Tripelsystem bilden[136]). Dieses wird, indem nur Indices geschrieben werden, in der Form

$$123,\ 145,\ 167,\ 189,\ 246,\ 259,\ 278,\ 348,\ 357,\ 369,\ 479,\ 568$$

dargestellt. Die *Galois*'sche Gruppe der Gleichung $f(\lambda) = 0$ besteht aus solchen Substitutionen, welche die Tripel des obigen Systems unter einander vertauschen. Die Gesamtgruppe der Substitutionen von dieser Eigenschaft ist von der Ordnung 432 und hat zu Faktoren der Zusammensetzung lauter Primzahlen[137]). Die Gleichung $f(\lambda) = 0$, von der die neun Wendepunkte abhängen, ist also auflösbar. Dieses Resultat ist von *Hesse* auf etwas anderem Wege entdeckt worden[138]).

Von anderen geometrischen Gleichungen, deren Gruppen studiert worden sind, mögen nur genannt werden die Gleichungen:

1) der 28 Doppeltangenten einer ebenen Kurve 4. Ordnung[139]),

2) der 27 Geraden einer Fläche 3. Ordnung[140]),

3) der 16 Geraden einer Fläche 4. Ordnung mit Doppelkegelschnitt[141]),

4) der 16 Knotenpunkte der *Kummer*'schen Fläche[142]).

---

136) *E. Netto,* Substitutionentheorie p. 220 ff.; *H. Weber,* Algebra 2, p. 342 ff.

137) *C. Jordan*, traité p. 304. Man vgl. auch *Netto*, Substitutionentheorie p. 232 ff.; *Weber,* Algebra 2, p. 322 ff.

138) A. a. O.

139) *M. Noether*, Math. Ann. 15 (1879), p. 89, hat das Problem mit den Gleichungen 7. Grades, die Tripeleigenschaft, und mit den Gleichungen 8. Grades, die Quadrupeleigenschaft besitzen, in Zusammenhang gebracht [III C 3].

140) *Salmon* und *Cayley,* Camb. Dubl. M. J. 4 (1849), p. 118; s. *Cayley,* Math. Pap. 1, p. 445, 456; *J. Steiner*, J. f. Math. 53 (1856), p. 133 = Werke 2, p. 651; *C. Jordan,* traité p. 316. Man vgl. auch Nr. **24** und III C 6.

141) *Clebsch,* J. f. Math. 69 (1861), p. 229; *C. Jordan,* traité p. 309 [III C 6].

142) *E. Kummer,* Berl. Ber. 1864, p. 246; *Jordan,* J. f. Math. 70 (1869), p. 182, traité p. 313 [III C 6].

Keine dieser Gleichungen kann direkt durch blosse Radikale gelöst werden; die dritte kann es, wenn die Wurzeln einer Gleichung 5., die vierte, wenn die Wurzeln einer Gleichung 6. Grades schon bekannt sind[143]). Das Studium der Gleichungsgruppen beruht hier auf den Eigenschaften geometrischer Konfigurationen, und es stellen sich zwischen den Gruppen der Gleichungen 1), 2) und 3) verschiedene Beziehungen heraus[144]).

---

143) *C. Jordan,* traité p. 309 u. 315. Die letztere Reduktion auf eine Gl. 6. Grades hängt mit *Klein*'s Theorie der sechs linearen Fundamentalkomplexe (Math. Ann. 2 [1870], p. 216) zusammen; adjungiert man einen dieser Komplexe, so bilden sich die ihm angehörigen Doppeltangenten der Kummer'schen Fläche auf eine F_4 mit Doppelkegelschnitt ab, und es entsteht aus dem vierten Problem des Textes das dritte; vgl. *Klein,* Math. Ann. 4 (1871), p. 357, zweite Anm. und die Citate bei *S. Lie,* Math. Ann. 5 (1872), p. 250, 251.

144) *E. Pascal,* Ann. di mat. (2) 20 (1892), p. 163, 269 u. 21 (1893), p. 85.

I B 3e. GLEICHUNGSSYSTEME.

Der Inhalt dieses Artikels ist in die Artt. I B 1 b und I B 3 b mit aufgenommen worden.

IB3f. ENDLICHE GRUPPEN LINEARER SUBSTITUTIONEN

VON

A. WIMAN

IN LUND.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

Eine Reihe von Berührungspunkten mit dem folgenden Referat bietet *W. Franz Meyer*'s Bericht über die Fortschritte der projektiven Invariantentheorie, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1, Berlin 1892 [franz. Ausg. von *H. Fehr,* Par. 1897; ital. Ausg. von *G. Vivanti,* Napoli 1899], nämlich p. 121—132 dortselbst, wo es sich um „Formen mit linearen Transformationen in sich" handelt. Vgl. I B 2, Nr. 5.

Lehrbücher.

F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade, Leipzig 1884.

H. Weber, Lehrbuch der Algebra 2, Braunschweig 1896, 2. Aufl. 1899.

---

1. Periodische Substitutionen. Die *endlichen Gruppen linearer Substitutionen* spielen jetzt für die *Algebra* und die Theorie der algebraisch integrierbaren *linearen Differentialgleichungen* sowie auch gerade bei den schönsten und merkwürdigsten *geometrischen Konfigurationen* eine besonders wichtige Rolle. Ehe noch eine eigentliche Theorie anfing, kannte man doch von den fraglichen Gruppen zwei ausgedehnte Arten: die *Gruppen von Buchstabenvertauschungen* und die *periodischen Substitutionen.* Über die letzteren hat *C. Jordan* [1]) den Satz ausgesprochen, dass sie, falls die Periode μ ist, auf die kanonische Form: $t_\nu = \omega_\nu u_\nu$ $(\nu = 1, \cdots n)$, wo die ω_ν μ^{te} Einheitswurzeln sind, gebracht werden können. Diese Bedingungen hat späterhin *R. Lipschitz* [2]) so formuliert, dass die zugehörige charakteristische Determinante nur μ^{te} Einheitswurzeln als Wurzeln besitzt, und dass ihre sämtlichen Elementarteiler von der ersten Ordnung sein sollen [I B 2, Nr. 3]. Beweise für die Möglichkeit dieser Reduktion auf die kanonische Form haben *Lipschitz* [2]) und *Kronecker* gegeben, sodann aber auch betreffend involutorische Substitutionen *Prym* und *Cornely* und für beliebige Periode *Rost* [3]); die letzteren drei Verfasser haben dabei auch die zugehörigen Substitutionen durch eine geeignete Anzahl frei beweglicher Parameter rational dargestellt.

2. Endliche binäre Gruppen. Ohne noch sein Interesse dem Gruppenproblem zuzuwenden, gab *H. A. Schwarz* zuerst die zu den endlichen Gruppen einer Veränderlichen gehörigen fundamentalen Funktionen, sowie die zwischen diesen stattfindenden identischen Relationen [I B 2, Nr. 8]. Dies gelang ihm bei der Aufsuchung der algebraisch

---

1) J. f. Math. 84 (1878), p. 112.

2) Acta math. 10 (1887), p. 137.

3) *L. Kronecker,* Berl. Ber. 1890, p. 1081; *F. Prym,* Gött. Abh. 38^3 (1892), p. 1; *A. Cornely,* Diss. Würzb. (1892); *G. Rost,* Diss. Würzb. (1892). Vgl. *H. Maschke,* Math. Ann. 50 (1898), p. 220 und *E. H. Moore,* ebenda p. 215.

integrierbaren hypergeometrischen Differentialgleichungen [4]). Dabei betrachtete er die konforme Abbildung, welche der Quotient s zweier Integrale von der unabhängigen Variabeln Z entwirft. Er fand so die positive Z-Halbebene auf ein Kreisbogendreieck abgebildet, wobei die analytische Fortsetzung sich durch Spiegelung an den drei Seiten ergab. Für eine algebraische Abhängigkeit zwischen s und Z erwies es sich somit (nach *Riemann*'schen Prinzipien [II B a]) als erforderlich, dass man auf diese Weise nur eine endliche Zahl von Gebieten erhielt [5]).

Erst bei *F. Klein* findet man aber den Gesichtspunkt der endlichen Substitutionsgruppe, ebenso wie den Begriff und die Bildung des zugehörigen vollen Formensystems [I B 2, Nr. 6]. Ohne noch die besprochene Arbeit von *Schwarz* zu kennen, hat *Klein* direkt die *endlichen linearen Substitutionsgruppen einer Veränderlichen* und die zugehörigen invarianten Formen bestimmt [6]). Dabei betrachtete er nach *B. Riemann* die Kugel als Trägerin der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ und reduzierte in dieser Weise die Aufgabe auf die Bestimmung der endlichen Gruppen von Drehungen im gewöhnlichen Raume; diese sind aber keine anderen als diejenigen, welche die *regulären Körper* in sich überführen [7]). So erhielt er die folgenden 5 Lösungen: 1) die Wiederholung einer periodischen Substitution, die *cyklische Gruppe;* 2) die Erweiterung der vorigen durch Vertauschung der beiden bei ihr festen Punkte (Pole) oder die *Diedergruppe;* 3) die *Tetraedergruppe;* 4) die *Oktaedergruppe;* 5) die *Ikosaedergruppe.* Für die Gradzahlen der Gruppen ergab sich bez.: n, $2n$, 12, 24, 60; doch so, dass die Gruppen, mit Ausnahme der cyklischen und der Diedergruppen mit ungeradem n, sich *homogen* [8]) mit weniger als der doppelten

---

4) Zürich. Viertelj. (1871), p. 74; J. f. Math. 75 (1873), p. 292 = Ges. Abh. 1, p. 172, 211.

5) Die fraglichen Gebietseinteilungen werden (s. weiter unten) auf der Kugel durch die Symmetrieebenen der regulären Körper begrenzt. Der Zusammenhang mit den binären Gruppen beruht natürlich darauf, dass die Integrale nach der Umkreisung der singulären Punkte sich nach irgend einer solchen linear substituieren müssen; dass dies aber hier nach allen vorkommenden endlichen Gruppen möglich ist, kann man in gewisser Weise als zufällig betrachten.

6) Erl. Ber. 1874; Math. Ann. 9 (1875), p. 183.

7) Wozu noch das ebene reguläre n-Eck, das „Dieder", hinzugerechnet wird. Über eine verwandte Untersuchung von *J. Steiner* s. III A 3. Wegen der Invarianz eines Punktes im Kugelinneren bei diesen endlichen Gruppen vgl. Nr. 8.

8) Durch das von *Klein* hier eingeführte Hülfsmittel der *homogenen Variabeln* entstehen (s. weiter unten) statt der invarianten Funktionen invariante Formen, und es werden die Prozesse der *Invariantentheorie* verfügbar, um aus einer solchen Form andere zu berechnen.

Zahl von Substitutionen nicht schreiben lassen. Die Tetraedergruppe ist mit der alternierenden [I A 6, Nr. 7] und die Oktaedergruppe mit der symmetrischen Gruppe von 4 Dingen holoedrisch isomorph, entsprechend den bezüglichen Vertauschungen der 4 Geraden (= Würfeldiagonalen), die je eine Ecke des Tetraeders mit der gegenüberliegenden des Gegentetraeders verbinden. Von den letzteren Operationen führen vier jede der drei Oktaederdiagonalen in sich über; ihnen entspricht die *Vierergruppe*. Von grösserer Bedeutung für die Algebra ist es aber, dass die Ikosaedergruppe, als 5 gleichberechtigte Tetraedergruppen enthaltend, mit der Gruppe der geraden Vertauschungen von 5 Dingen holoedrisch isomorph [I A 6, Nr. **14**] ist.

Betreffend die Bestimmung der *Formen*, welche bei den einzelnen Substitutionsgruppen bis auf einen Faktor invariant bleiben, erwies *Klein*, dass das allgemeinste bei der Gruppe sich geschlossen permutierende Punktsystem sich durch eine Gleichung $\varkappa \Pi + \varkappa' \Pi' = 0$ darstellen lässt. Die Anzahl der Punkte eines solchen Systems ist im allgemeinen gleich dem Grade N der Gruppe; doch giebt es für besondere Werte des Parameters $\varkappa : \varkappa'$ Systeme von geringerer Punktezahl. Dieselben sind bei den cyklischen die beiden Fixpunkte, bei den übrigen giebt es aber immer drei derartige Systeme, so dass die definierenden Formen, wie schon *Schwarz* gefunden hatte, durch eine identische Relation mit einander verknüpft sein müssen. Solche Systeme sind bei den Diedergruppen: die n Ecken des Dieders, die n Kantenhalbierungspunkte und das Polepaar; bei der Tetraedergruppe: die Ecken des Tetraeders und des Gegentetraeders sowie die Kantenhalbierungspunkte, welche die Ecken eines Oktaeders darstellen[9]); bei der Oktaedergruppe: die Ecken des Oktaeders und des Polarwürfels und die 12 Kantenhalbierungspunkte; bei der Ikosaedergruppe: die Ecken des Ikosaeders und des reziproken Pentagondodekaeders sowie die 30 Kantenhalbierungspunkte. Für die Formen, welche die Ecken eines Tetraeders, Oktaeders oder Ikosaeders darstellen, fand *Klein*, dass die vierte Überschiebung $(f, f)_4$ identisch verschwindet. Diesen Satz vervollständigte *L. Wedekind*[10]) dahin, dass es, von trivialen Fällen abgesehen, keine anderen binären Formen mit dieser Eigenschaft giebt.

Ohne Hülfe geometrischer Anschauungen bestimmte zuerst *P. Gordan*

---

9) Die Tetraederform ist eine biquadratische Form mit äquianharmonischem Doppelverhältniss, die Gegentetraederform ihre Hesse'sche Kovariante und die Oktaederform die Jacobi'sche Kovariante dieser beiden [I B 2, Nr. 7, Anm. 169]; in gleicher Weise hängen auch die Formen bei der Oktaeder- und der Ikosaedergruppe zusammen.

10) Hab.-Schr. Karlsruhe (1876).

die endlichen binären Gruppen[11]). Er benutzte dabei als Ausgangspunkt eine besondere Normalform der linearen Substitution und reduzierte die Frage auf die Lösung der Gleichung $1 + \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 = 0$ durch Winkel, welche in rationalem Verhältnis zu π stehen[12]).

3. Erweiterungen. Die linearen Substitutionsgruppen einer Veränderlichen können dadurch *erweitert* werden, dass man noch Operationen der folgenden Art: $z' = \frac{\alpha\bar{z} + \beta}{\gamma\bar{z} + \delta}$ hinzunimmt, wo $\bar{z}$ den konjugiert imaginären Wert $(x - iy)$ von z bezeichnet. Diese Substitutionen „zweiter Art“ sind geometrisch durch die Umlegung der Winkel charakterisiert, die auf der Kugel die Vertauschung der beiden geraden Erzeugendensysteme involviert. In jeder erweiterten Gruppe bildet selbstverständlich die ursprüngliche eine ausgezeichnete Untergruppe vom Index 2. Die Ikosaedergruppe, Oktaedergruppe, Tetraedergruppe und die Diedergruppen können stets durch *Spiegelungen an den Symmetrieebenen* der betreffenden Konfiguration erweitert werden; für die Tetraedergruppe und die Diedergruppen giebt es aber noch eine *zweite Erweiterung*, bei welcher die Operationen 2. Art das Tetraeder in das Gegentetraeder, bez. das reguläre n-Eck (= Dieder) in das durch die Seitenhalbierungspunkte gebildete Polygon überführen. Die cyklischen Gruppen können auf *dreierlei Weisen* erweitert werden: durch Spiegelungen an einer Meridianebene oder an einer Parallelebene oder endlich durch eine Drehung um die Axe von der Grösse $\frac{\pi}{n}$, kombiniert mit einer Spiegelung der letzteren Art. Von involutorischen Operationen der zweiten Art giebt es ausser der *Spiegelung* noch eine, nämlich die *Inversion* [III A 7] vom Centrum aus[13]).

---

11) Math. Ann. 12 (1877), p. 28. Hieran anknüpfend *A. Cayley*, Math. Ann. 16 (1880), p. 260, 439; Quart. J. 27 (1895), p. 236 = Coll. Pap. 11, p. 237; 13, p. 552.

12) Übersichtliches über die Gegenstände der Nummern 2—4 bei *Klein*, Vorl. üb. d. Ikosaeder I: Kap. 1, 2, 3, 5 (1884). In enger Beziehung zu *Klein's* ursprünglichen Arbeiten sind die endl. Gruppen einer Veränderlichen aus den endl. Bewegungsgruppen der elliptischen Ebene bei *A. Clebsch-F. Lindemann*, Vorlesungen üb. Geometrie 2^1, Abt. 3: 9—13 (Leipzig 1891), abgeleitet.

13) Bemerkenswert sind die durch die Symmetrieebenen der jedesmaligen Konfigurationen bewirkten Gebietseinteilungen (vgl. die Schwarz'schen Kreisbogendreiecke), wodurch man *Fundamentalbereiche* [II B 6 c] für die fraglichen Gruppen erhält, so dass je zwei durch Operationen 2. Art aus einander hervorgehende Bereiche einen Fundamentalbereich für die ursprüngliche Gruppe liefern (Figuren bei *Klein-Fricke*, Modulf. 1, I. Abschn. 3 [Leipzig 1890]). Diese Gebietseinteilungen kommen von der geometrischen Seite her schon bei *F. Moebius*

4. Algebraisch integrierbare lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung. Die Bestimmung der allgemeinsten *algebraisch integrierbaren linearen Differentialgleichungen* mit rationalen Koeffizienten wurde der Gegenstand mehrerer Arbeiten von *L. Fuchs*[15]); dabei wurde die Bedingung massgebend, dass die Integrale bei beliebiger Umkreisung der singulären Punkte sich nach irgend einer *endlichen Gruppe* substituieren müssen. Hieraus erschloss *Fuchs* die Existenz sog. *Primformen,* d. h. solcher Formen der Integrale $y_1, y_2, \ldots y_n$, welche in geeigneter Potenz rationale Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x darstellen. Da die Kovarianten der Primformen auch Primformen sein müssen, fand er die merkwürdige Eigenschaft, dass für die niedrigsten Primformen alle Kovarianten noch niedrigerer Ordnung verschwinden müssen[14]). Für die Differentialgleichungen 2. Ordnung stellte nun *Fuchs* die Gradzahlen der möglichen niedrigsten Primformen auf[15]). Beim Vergleich mit den niedrigsten Kovarianten der endlichen binären Gruppen fand *Klein,* dass *Fuchs'* Tafel zwar alle in Betracht kommenden, daneben aber noch überflüssige Fälle enthielt. Es wurde weiter von *Klein* nachgewiesen, wie durch Vermittlung der Differentialgleichung 3. Ordnung[16]), welcher der Quotient $\eta = y_1 : y_2$ zweier Integrale genügt, aus den 5 Schwarz'schen hypergeometrischen Typen alle übrigen algebraisch integrierbaren linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung durch einfache Transformation sich ableiten lassen[17]).

(Werke II, p. 653) vor. Man vergleiche, wegen der in Rede stehenden Symmetrieverhältnisse *A. Schoenflies,* Krystallsysteme und Krystallstruktur (Leipz. 1891). Wir verweisen noch auf die arithm. Herleitung sowohl der ursp. als der erw. Gruppen (im Anschluss an die ternären eig. und uneig. orthog. Subst.) bei *H. Weber,* Algebr. 2: 7, 8 (1896).

14) Umgekehrt fand *Gordan,* Math. Ann. 12 (1877), p. 147, dass von triv. Fällen abgesehen, die einzigen binären Formen mit dieser Eigenschaft eben die Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaederform sind.

15) *Fuchs*, Gött. Nachr. (1875), p. 568, 612; J. f. Math. 81 (1876), p. 97; 85 (1878), p. 1. Weiteres über die Primformen bei *F. Brioschi,* Lomb. Rend. (2) 10 (1877), p. 48 und Math. Ann. 11 (1877), p. 401. An die Fuchs'schen Arbeiten schliesst sich naturgemäss die Abh. über die alg. Int. der Diff.-Gl. 2. Ordn. von *Th. Pepin,* Rom. Acc. Pont. 34 (1882), p. 243.

16) Von der Gestalt: $\eta'''/\eta' - \frac{3}{2}\eta''^2/\eta'^2 = r(x)$ [rat. Funkt. von x]. *Cayley* nennt bei seiner Behandlung der Schwarz'schen Polyederfunktionen (Cambr. Trans. 13 [1880], p. 5 = Pap. 11, p. 149) das linke Glied den „Schwarz'schen Differentialausdruck".

17) *Klein,* Erl. Ber. 1876; Math. Ann. 11 (1876), p. 115; 12 (1877), p. 23; Diff.-Gl. 2. Ordn. (1894), p. 159 (Gött. autogr. Vorl.). Vgl. *E. Goursat,* Ann. Éc. norm. (3) 2 (1885), p. 37; J. d. math. (4) 3 (1887), p. 255.

5. Endliche ternäre Gruppen. Ein *allgemeiner Ansatz* zur Bestimmung der endlichen linearen Substitutionsgruppen bei beliebiger Variablenzahl rührt von *C. Jordan* her[18]). Er betrachtet die verschiedenen in einer Gruppe G enthaltenen Scharen von gleichberechtigten Substitutionen und die mit den letzteren vertauschbaren Gruppen $F, F_1, \ldots,$ welche in G enthalten sind. Es ergiebt sich so eine Gleichung zwischen dem Grad von G und den Gradzahlen von F, $F_1, \ldots,$ deren Diskussion auf eine endliche Zahl verschiedener möglicher Gruppen führt. Diese Methode hat *Jordan* für die binären und *ternären* Gruppen durchgeführt[18]); aber schon bei den quaternären erhielt er eine so komplizierte Fundamentalgleichung[19]), dass ihre Diskussion kaum möglich scheint. Um zu entscheiden, ob den in der obigen Weise erhaltenen „möglichen" ternären Gruppen auch wirkliche Lösungen entsprechen, beschränkt sich *Jordan* zuerst auf die Bestimmung der wirklich vorkommenden *einfachen* [I A 6, Nr. **16**] Gruppen und untersucht sodann, in welchen zusammengesetzten Gruppen solche einfache Gruppen als ausgezeichnete Untergruppen auftreten können, und steigt von diesen in ähnlicher Weise zu neuen zusammengesetzten Gruppen auf. Ausser solchen trivialen Gruppen, bei denen entweder *eine Gerade stets in sich übergeht* oder auch *drei Punkte sich geschlossen permutieren*[20]), erhielt *Jordan* nur *4 Lösungen*, und unter diesen nur eine einfache Gruppe, nämlich die *ternäre Ikosaedergruppe*. Nach derselben substituieren sich $\mathsf{A}_0 = y_1 y_2$, $\mathsf{A}_1 = y_1^2$, $\mathsf{A}_2 = -y_2^2$, wenn y_1, y_2 die binäre Ikosaedergruppe erleiden; es bleibt also ein Kegelschnitt $A = \mathsf{A}_0^2 + \mathsf{A}_1 \mathsf{A}_2 = 0$ invariant[21]). Von den anderen Gruppen war die wichtigste die von *Jordan* als *„Hesse'sche Gruppe"* bezeichnete *vom Grade* 216, welche den syzygetischen durch eine C_3 und ihre Hesse'sche Kurve bestimmten Büschel $\lambda_1 F_3 + \lambda_2 H_3 = 0$ in sich überführt, und zwar in der Weise, dass F_3 und H_3 nach einer *Tetraedergruppe* substituiert werden, durch welche je 12 Kurven des Büschels mit derselben absoluten Invariante in einander übergeführt werden. Die Hesse'sche Gruppe besitzt eine *ausgezeichnete* G_{72}, welche den

18) J. f. Math. 84 (1878), p. 89.

19) Nap. Atti 1880.

20) Vgl. über endliche ternäre Gruppen, bei denen ein Dreieck unverändert bleibt, *Maschke*, Am. J. 17 (1895), p. 168.

21) Dieser Kegelschnitt ist das Bild des binären Gebietes. Für die 6 Paare gegenüberliegender Ikosaederecken bilden die Pole der Verbindungsgeraden ein zehnfach *Brianchon*'sches Sechseck. Vgl. *A. Clebsch*, Math. Ann. 4 (1871), p. 33[illegible] I B 2, Nr. **19**]. Das zehnfach *Brianchon*'sche Sechseck ist übrigens nur eine Zentralprojektion des Ikosaeders; vgl. *Klein*, Math. Ann. 12 (1877), p. 530.

innerhalb der Tetraedergruppe ausgezeichneten Vierergruppe zugeordnet ist; den 3 G_2 in der letzteren Gruppe entsprechen innerhalb der G_{216} 3 G_{36},[22]) und der Identität eine ausgezeichnete G_{18}, welche jede Kurve des Büschels invariant lässt. Gerade diese G_{72} und G_{36} liefern die übrigen von *Jordan* aufgezählten Gruppen[23]).

Indessen hatte *Jordan* bei dieser Diskussion *die beiden interessantesten einfachen Gruppen* von Kollineationen in der Ebene übersehen. Eine von diesen, *die* G_{168}, wurde alsbald von *Klein*[24]) durch Betrachtung der Transformation 7. Ordnung der elliptischen Funktionen abgeleitet [II B 6 a]. Die andere aber, *die* G_{360}, wurde erst von *H. Valentiner*[25]) aufgestellt. Die Methode von *Valentiner*, welcher die vorangehenden Arbeiten von *Jordan* und *Klein* nicht kannte, zielt ebenfalls auf die Aufstellung und Diskussion einer Fundamentalgleichung. Das Wesentliche in der Struktur der G_{360}, nämlich holoedrischer Isomorphismus mit der alternierenden Gruppe von 6 Dingen, wurde zuerst von *A. Wiman*[26]) erkannt. Auf Grund dieser Eigenschaft enthält die G_{360} als Untergruppen sowohl zwei Systeme von je 6 Ikosaedergruppen[27]) als auch

---

22) Jede von diesen G_{36} ist die Kollineationsgruppe zweier harmonischen C_3, welche von einander gegenseitig Hesse'sche Kurven sind.

23) Das vollständige Formensystem der G_{216} hat *Maschke* gegeben, Gött. Nachr. 1888, p. 78; Math. Ann. 33 (1890), p. 324. Dasselbe besteht aus 5 Formen, von denen drei die 4 Wendepunktsdreiseite, die 4 äquianharmonischen und die 6 harmonischen Kurven des Büschels darstellen; dieselben entsprechen den in Nr. 2, Anm. 9 aufgezählten Grundformen der binären Tetraedergruppe und sind auch durch eine ähnliche Identität mit einander verbunden. Die beiden übrigen definieren eine C_6 und die 9 harmonischen Polaren der Wendepunkte; das Quadrat der letzteren ist durch die C_6, die äquianharmonischen und harmonischen C_3 genau so ausdrückbar, wie das *Weierstrass*'sche $\wp'$ durch $\wp$, g_2 und g_3 [II B 6 a].

24) Erl. Ber. (1878); Math. Ann. 14 (1878), p. 438.

25) Kjöb. Skr. (5) 5 (1889), p. 64. Die G_{216} fehlt bei *Valentiner*.

26) Math. Ann. 47 (1896), p. 531. Es ist dort auch nachgewiesen, dass man in gleicher Weise das vollständige Formensystem der G_{360} erhält, wie *Klein* dasjenige der G_{168} abgeleitet hat (Math. Ann. 14 [1879], p. 448). Man geht bei der G_{168} (bez. G_{360}) von einer Grundform f_4 (bez. f_6) aus, bestimmt dann die Hesse'sche Kovariante X_6 (bez. X_{12}), dann die durch die Derivierten von X geänderte Hesse'sche Determinante Φ_{12} (bez. Φ_{30}) und endlich die Funktionaldeterminante Ψ_{21} (bez. Ψ_{45}) dieser drei Formen, welche letztere die harmonischen Perspektivitäten der bez. Gruppe darstellt und sich als Quadratwurzel einer ganzen rationalen Funktion der drei übrigen Formen ausdrücken lässt. Weitere Ausführungen über die G_{360} bei *F. Gerbaldi,* Pal. Rend. (1898, 1899); Zürich Congr.-Verh. 1898, p. 242; Math. Ann. 50 (1898), p. 473.

27) Diesen G_{60} sind Kegelschnitte zugeordnet, so dass je zwei Kegelschnitte desselben Systems sich nach äquianharmonischen Doppelverhältnissen schneiden, je zwei Kegelschnitte verschiedener Systeme einander doppelt berühren. Von

10 G_{36}. Die G_{60} und die G_{168} lassen sich auch homogen in 60 bez. 168 Substitutionen schreiben; die *homogene Darstellung* der 4 übrigen Gruppen erfordert mindestens dreimal so viele Substitutionen, also bez. 648, 216, 108, 1080.

6. Algebraisch integrierbare lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung. *Jordan* hatte sich als eigentliches Ziel seiner Arbeit über die endlichen ternären Gruppen die Bestimmung der algebraisch integrierbaren linearen Differentialgleichungen gesetzt. Später hat man insbesondere den allgemeineren Typus von linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung behandelt, zwischen deren Integralen homogene algebraische Relationen existieren[28]). Die algebraische Integrierbarkeit ist hier wesentlich davon abhängig, ob die durch jene Relationen dargestellten Gebilde eine endliche oder unendliche Gruppe von Kollineationen in sich besitzen. Aber auch in dem letzteren Falle giebt es algebraisch integrable Gleichungen, nämlich wenn sich die Integrale als homogene Formen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung aus den Lösungen y_1, y_2 einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung darstellen[28]).

7. Gruppen aus den regulären Körpern in höheren Räumen. In gleicher Weise wie im dreidimensionalen Raume R_3 erhalten wir auch in höheren Räumen R_n aus den *endlichen Bewegungsgruppen* (mit oder ohne „Erweiterung"), welche die dort befindlichen *regulären Körper* in sich überführen, endliche lineare Substitutionsgruppen, und zwar auch in einem R_{n-1}, nämlich als *endliche orthogonale Substitutionsgruppen*[29]), da ja die Bewegungen das Gebilde $x_{n+1}=0,\ \sum_1^n x_i^2 = 0$ invariant lassen. Dieses Gebilde lässt sich ein-eindeutig auf einen R_{n-2} abbilden; die auf diesen R_{n-2} übertragene Gruppe ist aber im allgemeinen nicht, wie im Falle $n=3$, linear, sondern man muss für die Herstellung derselben auch quadratische Transformationen hinzu-

---

einem solchen Kegelschnittsysteme war *Gerbaldi* ursprünglich ausgegangen, Tor. Atti 17 (1882), p. 566.

28) Vgl. *Fuchs*, Berl. Ber. 1882, p. 703; Acta math. 1 (1883), p. 321; Berl. Ber. 1890, p. 469; *Goursat,* Par. Soc. math. Bull. 11 (1883), p. 144; Par. C. R. 1889, p. 232; *G. Halphen,* Par. sav. [étr.] 28, 1 (1883); Acta math. 3 (1883), p. 348; *H. Poincaré,* Par. C. R. 97 (1883), p. 984, 1189; *P. Painlevé*, Par. C. R. 104 (1887) p. 1829; 105, p. 68; 106 (1888), p. 535; *Brioschi,* Ann. di mat. 13 (1885), p. 1; *Ludw. Schlesinger*, Diss. Berl. 1887; *Lipm. Schlesinger*, Diss. Kiel (1888); *S. Lie,* Leipz. Ber. 43, p. 253 (1891); *G. Wallenberg,* J. f. Math. 111 (1893), p. 83; 113 (1894), p. 1; *Max Meyer,* Diss. Berl. 1893; *G. Fano,* Rom. Linc. Rend. (5), 4 (1895), p. 18, 51, 232, 292, 322.

29) Die „Erweiterung" im R_{n-1} geschieht durch uneigentlich orthogonale Substitutionen von der Determinante -1.

nehmen. Nun sind die regulären Körper in einem Raume von beliebiger Dimension n durch *J. Stringham* bestimmt worden[30]): *für* $n = 4$ *giebt es deren* 6, *für* $n > 4$ *aber nur* 3, welche letzteren sich in 3 Reihen einordnen, deren Anfangsglieder bez. das Tetraeder, Oktaeder und der Würfel sind. Der erste Körper $K_n(n+1)$ ist durch $n+1$ $K_{n-1}(n)$ begrenzt; als Bewegungsgruppe hat man hier die alternierende und als ihre Erweiterung die symmetrische Vertauschungsgruppe dieser $n+1$ Grenzkörper. Die beiden übrigen Körper, $K_n(2^n)$ und $K_n(2n)$ sind zu einander reziprok und haben als Grenzkörper bez. 2^n $K_{n-1}(n)$ und $2n$ $K_{n-1}(2n-2)$; die letzteren $2n$ Grenzkörper stehen einander paarweise gegenüber, und die Bewegungsgruppe lässt sich durch Kombination der Gruppe, wo jedes Paar in sich übergeht, aber die Glieder einer geraden Zahl von ihnen sich vertauschen, mit der symmetrischen Vertauschungsgruppe der n Paare erzeugen[31]), ist also vom Grade $n!\,2^{n-1}$; die Erweiterung entsteht dadurch, dass die Glieder auch einer ungeraden Zahl von Paaren vertauscht werden.

Im R_4 existieren noch drei regelmässige Körper: $K_4(24)$, $K_4(600)$ und $K_4(120)$, von denen die beiden letzteren zu einander reziprok sind. Dieselben sind bez. durch 24 Oktaeder, 600 Tetraeder und 120 Dodekaeder begrenzt, und die zugehörigen Bewegungsgruppen sind bez. von den Gradzahlen 576 und 7200. Eine analytische Grundlage der Theorie der regelmässigen vierdimensionalen Körper hat *Goursat* durch seine Untersuchungen über endliche Gruppen orthogonaler Substitutionen von vier Veränderlichen gegeben[32]). Die letzteren Gruppen sind alle von ihm bestimmt[33]), und zwar giebt es deren 32, welche jedes der Erzeugendensysteme der Fläche $\sum_1^4 x_i^2 = 0$ in sich überführen; werden aber jene Systeme vertauscht, kommen noch 19 hinzu[33]).

Nach dem Vorgange von *Klein* bei den endlichen Gruppen einer Veränderlichen suchte *O. Biermann* die linearen Substitutionsgruppen

30) Am. J. of math. 3 (1880), p. 1.

31) Bei der Bewegungsgruppe müssen also die n Paare alle möglichen, die $2n$ Grenzkörper aber nur gerade Vertauschungen erleiden. Vgl. hierzu *A. Puchta,* Wien. Ber. 89 (1884), p. 806; 90 (1884), p. 168. Es mag bemerkt werden, dass diese Gruppen die endlichen Bewegungsgruppen in den betreffenden Räumen keineswegs erschöpfen.

32) Ann. éc. norm. (3) 6 (1889), p. 9.

33) Ebenda p. 50—79. Die Erzeugendensysteme werden natürlich nach binären Gruppen transformiert, und diese Gruppen müssen nach irgend einem Isomorphismus mit einander in Verbindung gesetzt werden.

von zwei komplexen Veränderlichen mit den Bewegungsgruppen der regelmässigen Körper im R_5 in Verbindung zu setzen, aber es zeigte sich dies nur für triviale Untergruppen möglich[34]).

Die Gruppen der regulären Körper (sowie überhaupt die endlichen linearen Substitutionsgruppen) können auch durch Hinzufügung dualistischer Transformationen erweitert werden, wie dies *E. Hess* für den dreidimensionalen Raum durchgeführt hat[35]).

8. Invariante definite Hermite'sche Formen. Bei der Übertragung einer komplexen Veränderlichen auf die *Riemann*'sche Kugelfläche werden den beiden Systemen geradliniger Erzeugenden die konjugiert imaginären Veränderlichen $z = x + iy$ und $\bar{z} = x - iy$ zugeordnet. Eine *definite Hermite'sche quadratische Form* von diesen Veränderlichen (mit konjugiert imaginären Koeffizienten) definiert dann nach bekannten Eigenschaften der Flächen 2. Grades, gleich Null gesetzt, eine reelle Ebene, welche mit der Kugel keine reellen Punkte gemein hat[36]). Aus der Invarianz der unendlich fernen Ebene bei den Gruppen der regulären Körper folgt also unmittelbar die Invarianz einer definiten Hermite'schen Form bei den endlichen Gruppen einer Veränderlichen. Für die *ternären Gruppen* haben *Picard* und *Valentiner* ähnliche invariante Formen hergestellt[37]). Den *allgemeinen Satz,* dass bei jeder endlichen linearen Substitutionsgruppe von beliebig vielen Veränderlichen mindestens eine definite Hermite'sche quadratische Form invariant bleibt, haben später fast gleichzeitig *Fuchs, Moore* und *Loewy*[38]) veröffentlicht. *Fuchs* gelangt zu dem Satze bei der Betrachtung der Fundamentalsubstitutionen der Integrale einer algebraisch integrierbaren linearen Differentialgleichung. *Moore* geht einfach von einer beliebigen definiten Hermite'schen Form aus und er-

34) Wien. Ber. 95 (1887), p. 523. Vom Gesichtspunkte der synthetischen Geometrie sind die regelmässigen Körper auch von anderen Verfassern (*Schlegel, Hoppe, Rudel*) untersucht worden [III A 3]. Vgl. die im Brill'schen Verlage (Darmstadt 1886) erschienenen Modelle von *V. Schlegel.*

35) Marb. Ber. 1894, p. 11.

36) Vgl. *J. Plücker,* J. f. Math. 34 (1847), p. 341 = Ges. Abh. 1, p. 417.

37) *É. Picard*, Par. Soc. math. Bull. 15 (1887), p. 152; *Valentiner*, Kjöb. Skr. (6) 5 (1889), p. 138, 218. Vgl. auch für einen Fall (die ternäre Ikosaedergruppe), wo *Picard* keine Form der gesuchten Art gefunden hatte, die sogleich zu citierenden Arbeiten von *Fuchs* und *Loewy.*

38) *Fuchs,* Berl. Ber. (9. Juli 1896), p. 753; *E. H. Moore*, Chic. Univ. Rec. (24. Juli 1896 vorgelegt der Chic. Math. Ges. 10. Juli); Math. Ann. 50 (1898), p. 213; *A. Loewy,* Par. C. R. (20. Juli 1896), p. 168. Wegen der gegenseitigen Beziehungen vergl. *Moore,* Math. Ann. 50, p. 214; *Loewy,* ebenda, p. 56; *Klein,* Deutsche M.-V. 5¹ (1896), p. 67.

hält dann in der Summe der aus ihr durch die Gruppe entstehenden Formen eine invariante Form der gesuchten Art.

9. Erste Auflösung der Gleichungen 5. Grades. Einen vollständigen Beweis für die Unmöglichkeit, die allgemeine Gleichung von höherem als dem 4. Grade durch Radikale aufzulösen, hat bekanntlich *N. H. Abel* gegeben[39]. Von *Ch. Hermite* wurde zuerst nachgewiesen, dass man die allgemeine Gleichung 5. Grades auf solche Normalgleichungen, welche bei der Transformation 5. Ordnung der elliptischen Funktionen auftreten, zurückführen kann. Dies gelang ihm durch Untersuchung der *Modulargleichungen* zwischen $\sqrt[4]{\varkappa} = u$ und $\sqrt[4]{\lambda} = v$, wobei $\varkappa$ den ursprünglichen *Legendre*'schen Modul und λ den aus ihm durch die Transformation hervorgehenden bezeichnen. Die Modulargleichungen bei der Transformation n^{ter} Ordnung, wo n eine ungerade Primzahl bedeutet, sind nach *C. G. J. Jacobi* und *Ad. Sohncke*[40] vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade sowohl in u als in v. Durch Untersuchung der Gruppen dieser Gleichungen hatte aber schon *Ev. Galois* erschlossen, dass dieselben für $n = 5, 7, 11$ Resolventen n^{ten} Grades besitzen müssen[41]. Für $n = 5$ wurde nun eine solche Resolvente von *Hermite* wirklich gebildet[42], und zwar erwies sich dieselbe von der Form $y^5 + ay + b = 0$, wobei a und b vom Parameter u abhängen. Anderseits hatte schon *E. S. Bring*[43] (und später *Jerrard*) die allgemeine Gleichung 5. Grades durch Benutzung von *Tschirnhausen*-Transformation [I B 2, Nr. **19**] auf die obige spezielle Form reduziert, doch zunächst mit völlig beliebigen a und b; es erwies sich aber, dass für die Reduktion der allgemeinen Bring'schen Gleichung auf die Hermite'sche Form und die Bestimmung des zugehörigen Parameters u nur aus Quadratwurzeln zusammengesetzte Irrationalitäten erforderlich sind. Hiernach geben also die Formeln von *Her-*

---

39) J. f. Math. 1 (1826), p. 65 = Oeuv. éd. *Sylow-Lie* p. 66 [I B 3 c, d, Nr. **18**].

40) *Jacobi,* Fundamenta nova (1829) = Werke 1, p. 128; *Sohncke,* J. f. Math. 16 (1836), p. 97.

41) *Galois*, Brief an Chevalier (zuerst veröff. in Rev. enc. 1832). Der erste bekannte Beweis des Galois'schen Satzes ist wohl von *E. Betti*, Ann. mat. fis. 3 (1852), p. 74 [I A 6, Nr. **11**; I B 3 c, d, Nr. **24**].

42) Par. C. R. 46 (1858), p. 508. Vgl. *Ch. Briot-J. Cl. Bouquet,* Th. d. f. ell. (Par. 1875), p. 654; *H. Krey,* Ztschr. Math. Phys. 25 (1880), p. 129.

43) *Bring*'s Beweis, welcher in einer von Sommelius verteidigten Promotionsschrift (Lund 1786) erschien, wurde erst 1861 (durch *J. Hill*) beachtet. Das Resultat war inzwischen von *G. B. Jerrard* (Math. Researches, Bristol-London 1834) auf's neue gefunden worden. Vgl. *Hermite,* Par. C. R. 61, 62 (1865, 66) [I B 3 c, d, Nr. **24**, Anm. 106]; *J. Rahts,* Math. Ann. 28 (1886), p. 34.

mite Ausdrücke für die Wurzeln der allgemeinen Gleichung 5. Grades durch die Wurzeln v der Modulargleichung. Die Rolle der elliptischen Funktionen bei dieser Lösung ist analog mit derjenigen der Logarithmen bei den binomischen Gleichungen, wie namentlich *Klein*[44]) hervorgehoben hat.

10. Lösung durch Vermittelung der Jacobi'schen Gleichungen 6. Grades. Die Transformationstheorie der elliptischen Funktionen liefert noch eine andere Art von Gleichungen, welche in der Theorie der Gleichungen 5. Grades eine Rolle spielen, nämlich die von *Jacobi* betrachteten *Multiplikatorgleichungen* [I B 3c, d, Nr. **23**; II B 6 a][45]). Für diese fand er die merkwürdige Eigenschaft, dass die Quadratwurzeln ihrer $n+1$ Wurzeln sich mit Hülfe blos numerischer Irrationalitäten aus $\frac{n+1}{2}$ Bestandteilen folgendermassen linear zusammensetzen lassen:

$$(1)\quad \sqrt{z_\infty}=\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,n\,\mathsf{A}_0},\quad \sqrt{z_\nu}=\mathsf{A}_0+\varepsilon^\nu\mathsf{A}_1+\cdots+\varepsilon^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\nu}\mathsf{A}_{\frac{n-1}{2}}$$
$$\left(\nu=0,1,\cdots n-1,\ \varepsilon=e^{\frac{2i\pi}{n}}\right).$$

Die allgemeinste Jacobi'sche Gleichung 6. Grades wurde von *Brioschi* aufgestellt[46]) und erwies sich von der Gestalt:

$$(2)\quad (z-A)^6-4A(z-A)^5+10B(z-A)^3-C(z-A)+5B^2-AC=0,$$

wobei A, B, C Funktionen in A_0, A_1, A_2 von den bezüglichen Gradzahlen 2, 6, 10 bedeuten. Um eine Resolvente 5. Grades herzustellen, ging *Brioschi* (dem Vorgange von *Hermite* bei den Modulargleichungen folgend) von der Substitution $y_\nu=(z_\infty-z_\nu)(z_{\nu+2}-z_{\nu+3})(z_{\nu+4}-z_{\nu+1})$ aus ($\nu+m$ nach dem Modul 5 genommen); er bemerkte aber, dass schon die $\sqrt{y_\nu}$ in den A rational sind und zu Gleichungen 5. Grades Anlass geben[47]), nämlich für $x_\nu=\frac{y_\nu^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{5}}$:

$$(3)\qquad x^5+10Bx^3+5(9B^2-AC)x-D=0,$$

wobei D die 4. Wurzel aus der durch 5^5 dividierten Diskriminante [I B 1 a, Nr. **20**] der Jacobi'schen Gleichung darstellt. Die Multiplikatorgleichung, welche bei *Jacobi* den Ausgangspunkt der Theorie bildete, fand *Brioschi* durch die Bedingung $B=0$ charakterisiert;

44) Man sehe etwa *Klein*, Ikos. (1884), p. 131.

45) J. f. Math. 3 (1829), p. 308 = Werke 1, p. 261.

46) Ann. di mat. (1) 1 (Juni 1858), p. 256.

47) Ann. di mat. (1) 1 (Sept. 1858), p. 326. Vgl. *Joubert* Par. C. R. 64 (1867), p. 1025, 1081, 1237.

ihre Resolvente (3) ist also eine *Bring*'sche Gleichung. Von noch grösserer Bedeutung wurde aber späterhin der von *Kronecker* zuerst betrachtete Fall $A = 0$.

Kronecker (und nach ihm *Brioschi*) haben das Problem in Angriff genommen[48]), aus einer beliebigen Jacobi'schen Gleichung durch Tschirnhausentransformation neue abzuleiten. Es ergaben sich hier zwei Möglichkeiten: der eine Fall erledigte sich für den Grad 6 in allgemeinster Weise durch die Substitution $\sqrt{z} = \lambda\sqrt{z} + \mu\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial A} + \nu\frac{\partial\sqrt{z}}{\partial B}$; der andere Fall (durch die Ersetzung von ε durch ε^2 in den Formeln (1) charakterisiert) in entsprechender Weise, nachdem eine erste Lösung, etwa $Z = \frac{1}{z-A} + \frac{C}{5B^2 - AC}$, bekannt ist. Aus dem Umstande, dass der Ausdruck A eine quadratische Funktion von λ, μ, ν wird, zog man die Folgerung, dass letztere Grössen auf verschiedene Weisen ohne eine andere Irrationalität als eine Quadratwurzel so gewählt werden können, dass die *Bedingung* $A = 0$ erfüllt wird.

Von durchgreifender Bedeutung für die allgemeine Gleichung 5. Grades war die Entdeckung *Kronecker*'s[49]), dass man von der Gleichung nach Adjunktion der Quadratwurzel aus der Diskriminante als *rationale Resolventen Jacobi'sche Gleichungen 6. Grades* aufstellen kann. Dazu trat noch der Satz[50]), dass man mit Hülfe nur einer hinzutretenden Quadratwurzel eine solche Resolvente mit $A = 0$ erhalten kann, welche nur einen wesentlichen Parameter $B^5 : C^3$ enthält und durch elliptische Funktionen lösbar ist. Weitere Entwickelungen über diese Kronecker'sche Auflösungsmethode unternahm insbesondere *Brioschi*[51]); von ihm wurde ein allgemeines Bildungsgesetz für die Wurzeln der betreffenden Resolvente 6. Grades gegeben[52]).

---

48) *Kronecker,* Berl. Ber. 1861, p. 222; *Brioschi,* Ann. di mat. (2), 1 (1867), p. 222; Nap. Atti (1866).

49) Par. C. R. 46 (Juni 1858), p. 1150.

50) Letzterer Satz hängt natürlich mit dem entsprechenden betreffend die Transformation der Jacobi'schen Gleichungen in solche mit $A = 0$ eng zusammen.

51) Lomb. Atti (Nov. 1858). Die zu den betreffenden Jacobi'schen Gleichungen gehörigen A_0, A_1, A_2 erwiesen sich als rationale Ausdrücke der Wurzeln der Gl. 5. Grades. Hierdurch wurde die Möglichkeit erkannt, letztere Gleichung nach Adjunktion der Quadratwurzel aus der Diskriminante in eine Gl. (3) (also mit verschwindenden Koeffizienten von x^4 und x^2) rational überzuführen, insbesondere nach Adjunktion einer neuen Quadratwurzel in eine solche mit $A = 0$. Die betreffende Tschirnhausentransformation hat *Hermite* (Par. C. R. 62 [1866]) [I B 3 c, d, Nr. 24, Anm. 106] durchgeführt. Vgl. auch ver-

11. Satz betreffend die Möglichkeit von Resolventen mit nur einem Parameter. Später machte *Kronecker*[53]) auf eine wesentliche Unterscheidung bei den Irrationalitäten, welche behufs der Reduktion algebraischer Gleichungen eingeführt werden, aufmerksam: diejenigen der ersten Art, die *„natürlichen" Irrationalitäten* [I B 3 c, d, Nr. **7**], hängen rational von den zu bestimmenden Wurzeln x ab, wie etwa die Quadratwurzel aus der Diskriminante; daneben stellen sich die *„accessorischen" Irrationalitäten* [I B 3 c, d, Nr. **11**], die irrationale Funktionen der x sind[54]). Auf die Thatsache hinweisend, dass bei den durch Wurzelziehen lösbaren Gleichungen die accessorischen Irrationalitäten vermieden werden können, postuliert *Kronecker* das Gleiche für die Auflösung der höheren Gleichungen. Betreffend die allgemeinen Gleichungen 5. Grades stellte *Kronecker* jetzt die Behauptung auf, dass es *ohne Zuhülfenahme accessorischer Irrationalitäten unmöglich* sei, aus derselben *eine Resolvente mit nur einem wesentlichen Parameter* (wie die Jacobi'sche Gleichung mit $A = 0$) herzustellen. Nach *Kronecker* würde man sich also darauf zu beschränken haben, Resolventen mit zwei wesentlichen Parametern aufzustellen, wie etwa die allgemeinen Jacobi'schen Gleichungen mit den Parametern $B : A^3$ und $C : A^5$, und diese Resolventen der Auflösung der Gleichungen 5. Grades als Normalgleichungen zu Grunde zu legen.

Ein *Beweis des Kronecker'schen Satzes* über die Gleichungen 5. Grades wurde *von Klein* gegeben. Zuerst wurde nachgewiesen, dass, wenn eine Gleichung ohne Affekt [I B 3 b, Nr. **20**; I B 3 c, d, Nr. **1**] durch Adjunktion blos natürlicher Irrationalitäten auf eine solche mit nur einem Parameter reduziert wird, die Wurzeln der letzteren bei Variation des Parameters im Raume der x eine rationale Kurve [III C 3] im Raume der x durchlaufen müssen. Den Punkten dieser Kurve ist ein Parameter λ eindeutig zugeordnet, welcher sich nach einem

---

schiedene Arbeiten von *Brioschi,* Par. C. R. 63 (1866), p. 685, 785; 73 (1871), p. 1470; 80 (1875), p. 753, 815; Ann. di mat. (2) 16 (1888), p. 181. Die fraglichen Transformationen von *Hermite* und *Brioschi* stehen andererseits in enger Beziehung zur Invariantentheorie der binären Formen 5. Grades. Eine Zusammenfassung der Brioschi'schen Untersuchungen über die Auflösung der Gleichungen 5. Grades findet man in Math. Ann. 13 (1878), p. 109.

52) Vgl. weiter *Cayley,* Math. Ann. 30 (1887), p. 78 = Pap. 12, p. 493, über die Fundamentalrelationen zwischen den $\sqrt{z}$ der Jacobi'schen Gl. 6. Grades; J. f. Math. 113 (1894), p. 42 = Pap. 13, p. 473, über dieselben als Resolventen der Gleichungen 5. Grades.

53) Berl. Ber. 1861 = J. f. Math. 59 (1861), p. 306.

54) Die Benennungen „accessorisch" und „natürlich" sind von *Klein.* Vgl. „Ikos." p. 157.

Satze von *J. Lüroth*[55]) als rationale gebrochene Funktion $\varphi : \psi$ der Wurzeln der letzteren (und also auch der ursprünglichen) Gleichung ausdrücken lassen muss. Bei den Wurzelvertauschungen müssen also φ und ψ sich nach einer isomorphen binären Gruppe substituieren; aber es giebt (Nr. 2) *keine homogene binäre* (dagegen wohl eine homogene ternäre) *Gruppe*, welche *mit der alternierenden Gruppe von 5 Dingen holoedrisch isomorph* ist. Hiermit ist aber auch der Satz bewiesen[56]).

12. Lösung durch die Ikosaederirrationalität. Der Beweis des Kronecker'schen Satzes war nur ein Schlussresultat der Bestrebungen von *Klein* und *Gordan, die Gleichungen 5. Grades mit der Theorie des Ikosaeders in Verbindung* zu setzen. Zunächst griff *Klein* die Aufgabe an[57]): wenn die fundamentale Kovariante f_{12} und also auch H_{20} und T_{30} als Funktionen von z_1, z_2 gegeben sind (f_{12} nicht in kanonischer Form[58]), sondern nur der definierenden Identität $(ff)_4 = 0$ genügend), die Gleichung $f_{12} = 0$ in 6 quadratische Faktoren zu spalten, welche den 6 Paaren einander gegenüberliegender Ikosaederecken entsprechen. Es wurden sowohl die nötige Gleichung 6. Grades als ihre Resolvente 5. Grades aufgestellt. Hier trat nun eine Übereinstimmung mit den Formeln von *Kronecker* und *Brioschi* hervor, indem jene Gleichung 6. Grades im wesentlichen sich als eine Jacobi'sche Gleichung mit $A = 0$ erwies.

Später nahmen aber die Arbeiten von *Klein* und *Gordan* die umgekehrte Richtung. Die durch die Gleichung 60. Grades $H^3(z) : 1728 f^5(z) = Z$[59]) definierte Ikosaederirrationalität $z = z_1 : z_2$ wurde neben den Radikalen als *neue selbständige algebraische Irrationalität* betrachtet, und zwar als die einfachste mögliche. Durch die Ikosaeder-

55) Math. Ann. 9 (1875), p. 163 [I B 1 c, Nr. **22**].

56) *Klein*, Erl. Ber. (Jan. 1877); Math. Ann. 12 (1877), p. 559; Vorl. üb. d. Ikos. (1884), p. 254. Auf Grund der Eigenschaften der homogenen binären Gruppen gilt ein *ähnlicher Satz schon für die Gl. 4. Grades*; weil aber hier die alternierende Gruppe nicht einfach ist, reichen jetzt *Partialresolventen* mit nur einem Parameter (nämlich binomische Gleichungen) aus. Einen mehr elementar gehaltenen Beweis gab später *Gordan*, Math. Ann. 29 (1887), p. 318.

57) Erl. Ber. (Juli 1875); Math. Ann. 9 (1875), p. 183.

58) Die gewöhnlich angewandten kanonischen Formen sind: $f_{12} = z_1 z_2 (z_1^{10} + 11 z_1^5 z_2^5 - z_2^{10})$; $H_{20} = -(z_1^{20} + z_2^{20}) + 228 (z_1^{15} z_2^5 - z_1^5 z_2^{15}) - 494 z_1^{10} z_2^{10}$; $T_{30} = z_1^{30} + z_2^{30} + 522 (z_1^{25} z_2^5 - z_1^5 z_2^{25}) - 10005 (z_1^{20} z_2^{10} + z_1^{10} z_2^{20})$ mit der Identität $T^2 + H^3 - 1728 f^5 = 0$.

59) Hier ist f in kanonischer Form vorausgesetzt. Neben der Ikosaedergleichung stellt sich *das Formenproblem*: z_1 und z_2 für gegebene numerische Werte von f, H und T, welche der Identität $T^2 + H^3 - 1728 f^5 = 0$ genügen, zu bestimmen [I B 2, Nr. **11**, Anm. 219].

substitutionen werden nämlich die 60 Wurzeln jener Gleichung rational durch eine beliebige von ihnen ausgedrückt; die fragliche Gleichung ist also *ihre eigene Galois'sche Resolvente*, falls man nämlich die 5. Einheitswurzeln, welche ja bei den Ikosaedersubstitutionen auftreten, adjungiert [I B 1 c, Nr. 2; I B 3 c, d, Nr. 5], und nach unserer Aufzählung der binären Gruppen kann es keine andere neue Irrationalität geben, welche nur auf ein binäres Problem führt[60]). Das Prinzip, nach welchem die genannten Autoren jetzt die Theorie entwickelten, war dieses, dass *die Gleichungen 5. Grades durch die Ikosaederirrationalität ihre naturgemässe Lösung finden.*

Unter den verschiedenen Resolventen 5. Grades der Ikosaedergleichung zog *Klein* insbesondere die *Hauptresolvente* in Betracht, welche durch die Substitution $y_\nu = m v_\nu + n u_\nu v_\nu$, wo $u_\nu = 12 t_\nu f^2 : T$, $v_\nu = 12 W_\nu f : H$, und t_ν und W_ν die zu den Tetraederuntergruppen gehörigen Oktaeder- und Würfelformen darstellen. Hier wurde es besonders wichtig, dass einerseits in der Hauptresolvente die vierte und dritte Potenz der Unbekannten gleichzeitig fehlen, anderseits *jede Hauptgleichung 5. Grades*, $y^5 + ay^2 + by + c = 0$, *direkt mit einer Hauptresolvente zu identifizieren* ist, wobei m, n und Z sich rational durch a, b, c und die Quadratwurzel aus der Diskriminante ausdrücken lassen[61]).

Hiernach ergiebt sich eine *erste Auflösungsmethode der allgemeinen Gleichung 5. Grades*: *zuerst* die Gleichung durch Tschirnhausentransformation *auf eine Hauptgleichung* zu reduzieren, wozu eine nach dem Kronecker'schen Satze nicht zu vermeidende accessorische Quadratwurzel erforderlich ist; *dann* nach Adjunktion der Quadratwurzel aus der Diskriminante *eine Ikosaedergleichung als Resolvente* aufzustellen, endlich durch die zugehörige Ikosaederirrationalität die Wurzeln der Gleichung 5. Grades auszudrücken. *Klein* stellt die ganze Sache in geometrischem Gewande dar[62]): die Wurzeln, für welche von vornherein

60) Nach den Untersuchungen von *O. Hölder* (Math. Ann. 40 [1892], p. 55) und *F. N. Cole* (Amer. J. 14 [1892], p. 378) sind auch (von cykl. Gr. abges.) die im bin. und tern. Gebiete auftretenden G_{60}, G_{168} und G_{360} die einfachen Gruppen von den niedrigsten Gradzahlen [I A 6, Nr. 22].

61) Die Hauptresolvente wurde zuerst von *Klein*, Math. Ann. 12 (1877), p. 525, mitgeteilt. Direkter Vergleich der Hauptresolvente mit der Hauptgleichung zuerst bei *L. Kiepert*, Gött. Nachr. (Juli 1878, p. 424); Ann. di mat. (2), 9, p. 119; J. f. Math. 87 (1878), p. 114.

62) Die Deutung von Wurzelvertauschungen durch Kollineationen von *Klein* findet sich schon Math. Ann. 4 (1871), p. 346. Die Verbindung der Auflösung der Gl. 5. Grades mit der Ikosaedertheorie von *Klein* zuerst Erl. Ber. (Nov. 1876, Jan. und Juli 1877); Math. Ann. 12 (1877), p. 503. Vgl. dazu besonders *Klein*,

$\sum x = 0$, werden als überzählige homogene Koordinaten eines Punktes im R_3 betrachtet; die Tschirnhausentransformation, welche den Koeffizienten von x^3 wegschaffen soll, wird als die Aufsuchung eines kovarianten Punktes y auf der *Hauptfläche* $\sum x^2 = 0$ gedeutet, was nicht rational, sondern nur vermittelst einer (accessorischen) Quadratwurzel geschehen kann; die beiden Erzeugendensysteme der Hauptfläche gehen bei den geraden Vertauschungen der x jedes in sich über, werden aber bei den ungeraden vertauscht; durch die Adjunktion der Quadratwurzel aus der Diskriminante wird also ein erstes von diesen ausgewählt, und eben die 60 Erzeugenden erster Art, welche durch die 60 bei den geraden Vertauschungen der x sich permutierenden Punkte y hindurchgehen, hängen nach geeigneter Fixierung eines Parameters λ von der aufzustellenden Ikosaedergleichung ab[62a]).

Gordan befriedigte die Hauptgleichung direkt durch $y_\nu = \varepsilon^{4\nu}\lambda_1\mu_1 + \varepsilon^{3\nu}\lambda_2\mu_1 + \varepsilon^{2\nu}\lambda_1\mu_2 + \varepsilon^{\nu}\lambda_2\mu_2$, wo $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$. Sein Verfahren gestaltet sich übrigens vermöge der geometrischen Einkleidung von *Klein* folgendermassen[63]): für beide Arten von Erzeugenden[64]) werden geeignete homogene Parameter $\lambda_1, \lambda_2;\ \mu_1, \mu_2$ eingeführt; durch diese werden als doppelt binäre Formen zuerst die Koeffizienten a, b, c und die Quadratwurzel ∇ aus der Diskriminante der Hauptgleichung, dann aber auch die in der Hauptresolvente 5. Grades der Ikosaedergleichung auftretenden Konstanten m_1, n_1 und Z_1[65]) ausgedrückt;

Vorl. üb. d. Ikos. und d. Aufl. d. Gl. 5. Grades (1884): Referat über die früheren Methoden (2) 1; Resolventenbildung für die Ikosaedergl. und ihre transcendente Auflösung (1) 3, 4, 5; Lösung der Gl. 5. Grades durch das Ikosaeder (2) 2, 3, 5. Ein Referat dieser Arbeit von *F. N. Cole,* Amer. J. of math. 9 (1886), p. 45; *F. Giudice,* Tor. Atti 28 (1893), p. 664. Für den Beweis des Kronecker'schen Satzes und die Lösung der Gl. 5. Grades durch die Hauptresolvente vgl. weiter *H. Weber,* Algebra (2) 13 (1896).

62a) Man setzt etwa:

$$\lambda = -\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_3}{p_4}, \quad \mu = \frac{p_1}{p_3} = -\frac{p_2}{p_4}, \quad \text{wo } p_\nu = y_0 + \varepsilon^{4\nu} y_1 + \varepsilon^{3\nu} y_2 + \varepsilon^{2\nu} y_3 + \varepsilon^{\nu} y_4.$$

63) *Gordan,* Erl. Ber. (Juli 1877); Math. Ann. 13 (1878), p. 375. Vgl. auch *Klein,* Vorl. über das Ikosaeder 2, Kap. 3 (1884). *Gordan* hat (Math. Ann. 13 l. c. § 3 ff.) *das volle System* einer gewissen invarianten doppelt-binären Form aufgestellt, wenn $\lambda_1, \lambda_2;\ \mu_1, \mu_2$ bei isomorpher kontragredienter Zuordnung eine Ikosaedergruppe erleiden [I B 2, Nr. 2, Anm. 30].

64) Wie oben angedeutet, hatte *Klein* schon früher die Hauptgleichung mit Hülfe der Erzeugenden auf eine Ikosaedergleichung zurückgeführt; vgl. Erl. Ber. (Nov. 1876).

65) Statt Z_1, m_1, n_1 erhalten wir, wenn ∇ sein Vorzeichen ändert, Z_2, m_2, n_2; dadurch geht man von der Ikosaedergleichung für $\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$ zu derjenigen für $\mu = \mu_1 : \mu_2$ über.

vermittelst zweckmässiger Rechnungen gelingt es nun, m_1, n_1 und Z_1 rational durch a, b, c und ∇ herzustellen[66]).

Nun wir nach Adjunktion von ∇ für die Hauptgleichung eine Ikosaedergleichung als Resolvente erhalten haben, ist es einleuchtend, dass wir die letztere ohne neue Irrationalität durch Tschirnhausentransformation in jede rationale Resolvente 5. Grades der bez. Ikosaedergleichung überführen können, also auch durch Variation von m und n in unendlich viele Hauptgleichungen. Um sie aber in eine *Bring'sche Gleichung* zu transformieren (falls man hierauf Wert legen sollte), ist die Lösung einer kubischen Hülfsgleichung für $m:n$ (also eine *neue accessorische Irrationalität*) *erforderlich*, welche geometrisch als die Aufsuchung eines Schnittpunktes einer Erzeugenden 1. Art mit der Diagonalfläche [III C 6] $\sum x^3 = 0$ gedeutet wird[67]).

13. Zurückführung der Gleichungen 5. Grades auf ein ternäres Formenproblem. *Klein* giebt noch eine *zweite Lösung der allgemeinen Gleichungen 5. Grades durch das Ikosaeder*[68]), die unmittelbar an die Theorie von *Kronecker* und *Brioschi* (Nr. **10**) anknüpft, nur dass statt der Jacobi'schen Gleichungen 6. Grades das „*Problem der* A“, d. h. das Formenproblem der ternären Ikosaedergruppe, als der Mittelpunkt der ganzen Theorie betrachtet wird; dies Problem besteht darin, für gegebene Werte der Kovarianten A, B, C, D, welche bez. von den Gradzahlen 2, 6, 10, 15 sind, und von denen D^2 eine gegebene ganze rationale Funktion der drei anderen darstellt, A_0, A_1, A_2 zu bestimmen. Die Jacobi'schen Gleichungen 6. Grades (und Analoges gilt für die höheren Jacobi'schen Gleichungen) sind in der That nichts anderes als Resolventen dieses Problems, vorausgesetzt nämlich, dass nicht nur die Quadratwurzel, was immer der Fall ist, sondern auch die vierte Wurzel D aus der Diskriminante rational bekannt ist[69]); letzteres trifft aber auch immer zu, wenn jene Gleichungen

66) Behandlung der Gleichungen 5. Grades unter Anlehnung an die *Klein-Gordan*'sche Theorie von *W. Heymann,* Ztschr. Math. Phys. 39 (1894), p. 162, 193, 257, 321; 42 (1897), p. 81, 113. Es treten hier in den Vordergrund zwei koordinierte „η-Resolventen“, d. h. zwei Hauptgleichungen, deren Wurzeln durch die Relation $\eta_1 \eta_2 = \eta_1 + \eta_2$ einander zugeordnet sind. Jede Hauptgleichung lässt sich dann nach Adjunktion von ∇ durch eine Substitution $y = p\eta_1 + q\eta_2$ in ein solches Paar zerfällen. Zweck ist hier die Lösung durch transcendente Funktionen.

67) Vgl. *Gordan,* Math. Ann. 13 (1878), p. 400; *Klein,* Vorl. Ikos. (1884), p. 207, 244.

68) Erl. Ber. (Nov. 1876); Math. Ann. 12 (1877), p. 503 (insbes. Abschn. 2); Vorl. Ikos. 2, Kap. 4, 5 (1884).

69) Die Transformation der Jacobi'schen Gleichungen in andere solche wird hier von der Ermittelung von Funktionen B_0, B_1, B_2 abhängig, welche

als Resolventen von Gleichungen 5. Grades erhalten sind[70]). Für die Punkte des Fundamentalkegelschnitts $A = \mathsf{A}_0^2 + \mathsf{A}_1 \mathsf{A}_2 = 0$ lässt sich nun durch die Substitutionen $\mathsf{A}_0 = \lambda_1 \lambda_2$, $\mathsf{A}_1 = \lambda_1^2$, $\mathsf{A}_2 = -\lambda_2^2$ ein Parameter $\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$ einführen; die Formen B, C, D gehen dann in die binären Ikosaederformen f_{12}, H_{20}, T_{30} über. Wenn $A = 0$, löst sich also das Problem der A durch eine Ikosaedergleichung. Um aber zu einem beliebigen Punkte der A-Ebene einen kovarianten Punkt von $A = 0$ (etwa auf der Polargeraden des Punktes) aufzusuchen, ist immer die Lösung einer quadratischen Gleichung erforderlich. Hiernach ergiebt sich die folgende Lösungsmethode der Gleichungen 5. Grades: *zuerst* wird nach Adjunktion der Quadratwurzel aus der Diskriminante *ein Gleichungssystem der* A substituiert; *dann* aber wird nach Adjunktion einer accessorischen Quadratwurzel *eine Ikosaedergleichung* als Resolvente aufgestellt.

Doch sind die beiden Lösungsmethoden der Gleichungen 5. Grades durch das Ikosaeder *nicht wesentlich verschieden.* In der That lässt sich auch bei der ersten Lösung die Einführung der accessorischen Quadratwurzel verschieben. Es werden da etwa durch eine zu dem Punkte x kovariante Gerade zwei Punkte der Hauptfläche bestimmt. Wir brauchen jetzt nicht sogleich den einen von diesen auszuwählen, sondern können zuerst für die symmetrischen Funktionen

$$\left(-\lambda_1 \lambda_1', \; -\frac{1}{2}(\lambda_1 \lambda_2' + \lambda_2 \lambda_1'), \; \lambda_2 \lambda_2'\right)$$

der zugehörigen Erzeugenden erster Art λ, λ' ein Gleichungssystem der A aufstellen[71]).

14. Auflösung durch elliptische Transformationsgrössen und hypergeometrische Funktionen. Entwicklungen für die Wurzeln der

---

sich isomorph (kogredient oder kontragredient) mit den A substituieren. Vgl. *Klein,* Vorl. Ikos. (1884), p. 227.

70) Die Wurzelausdrücke der Jacobi'schen Gleichungen stellen zusammen ein zehnfach Brianchon'sches Sechsseit dar, und reciprok die Pole mit Bezug auf $A = 0$ ein eben solches Sechseck. Letztere Punkte bilden nach *Clebsch* [Math. Ann. 4 (1871), p. 331] die Fundamentalpunkte bei der ebenen Abbildung der Diagonalfläche $\sum_1^5 x^3 = 0$, $\sum_1^5 x = 0$. Vgl. weiter über diese Konfiguration und ihre Beziehung zu den Gl. 5. Grades *Clebsch-Lindemann*, Vorl. Geom. 2^1 (1891), p. 593.

71) *Klein,* Vorl. Ikos. p. 239. Wie man aus der Hauptgleichung unmittelbar durch Tschirnhausentransformation die Brioschi'sche Resolvente der Jacobischen Gleichungen mit $A = 0$ (Nr. **10**, Gl. 3) erhält, hat *Gordan* gezeigt, J. d. math. (4) 1 (1885), p. 455; Math. Ann. 28 (1886), p. 152.

allgemeinen Gleichung 5. Grades durch elliptische Funktionen bieten sich durch die von *Hermite* und *Kronecker* (Nr. **9, 10**) geleistete Zurückführung der Gleichung auf die elliptischen Transformationsgleichungen 5. Stufe. Wie *Klein* bemerkt, bewährt auch hier die Thatsache, dass die Herstellung der Hermite'schen Normalgleichung einen grösseren Aufwand von accessorischen Irrationalitäten erfordert, ihre Bedeutung, indem sich die *Kronecker'sche Resolvente*, wie *Kiepert* und *Klein* dargethan haben, schon als rationale Transformationsgleichung ergiebt, wenn man mit den *rationalen Invarianten* g_2, g_3 *und* Δ operiert, die *Hermite'sche* aber an die Anwendung des *Legendre'schen Moduls* $\varkappa^2$ gebunden ist; für die rationale Herstellung der Hermite'schen Resolvente ist die Adjunktion der Irrationalität erforderlich, durch die $\varkappa^2$ mittels $g_2{}^3 : \Delta$ ausgedrückt wird[72]). Die *Ikosaederirrationalität* ist aber die *Hauptfunktion*, durch welche alle zur 5. Stufe rational gehörigen Modulfunktionen rational dargestellt werden können; das bezügliche *Transformationsproblem* ist also auch *auf die Lösung einer Ikosaedergleichung* $H_{20}^3 : 1728\, f_{12}^5 = Z = g_2{}^3 : \Delta$ zurückgeführt. In gleicher Beziehung zu den elliptischen Transformationsproblemen 2., 3. und 4. Stufe stehen bez. die Diedergruppe D_3, die Tetraedergruppe und die Oktaedergruppe[73]).

Weil andererseits nach *Schwarz'* grundlegender Abhandlung (Nr. 2) die zu den endlichen Gruppen einer Veränderlichen gehörigen Irrationalitäten durch *hypergeometrische Funktionen* ausdrückbar sind[74]), vermittelt also die Ikosaederirrationalität auch von dieser Seite einen Zusammenhang zwischen den Wurzeln einer Gleichung 5. Grades und bekannten Reihenentwickelungen der Analysis. Es sind auch die von *Gordan* gegebenen bilinearen Ausdrücke für die *Wurzeln einer Hauptgleichung* (Nr. **12**) *aus Produkten der Integrale* λ_1, λ_2; μ_1, μ_2 zweier hypergeometrischen Differentialgleichungen zusammengesetzt[75]).

---

72) *Klein,* Math. Ann. 14 (1878), p. 147; 15 (1879), p. 86; Ikos. p. 209, 244; *Kiepert,* Gött. Nachr. (1878, p. 424); Ann. di mat. (2), 9 (1878), p. 119; J. f. Math. 87 (1878), p. 114. Betreffend die Lösung der Gl. 5. Grades durch elliptische Funktionen vgl. *Halphen,* Traité fonct. ell. Par. 3 (1891), p. 1.

73) Vgl. *Klein,* Math. Ann. 14 (1878), p. 157. Auf die betreffenden Fragen nehmen *Klein-Fricke's* „Modulfunktionen" mehrmals Bezug [insbes. 1 (1890) Abschn. 3, Kap. 4; 2 (1892) Abschn. 4].

74) Vgl. *Klein,* Ikos. (1) 3. Die Oktaederirrationalität und die Gl. 4. Grades behandelt *Puchta,* Wien. Denkschr. 41^2 (1879), p. 57. Vgl. die grosse Monographie über die durch hypergeometrische Funktionen auflösbaren algebraischen Gleichungen von *L. Lachtine,* Mosk. math. Samml. 16 (1893), p. 597; 17 (1894), p. 1.

75) Als „Differentialresolventen" bezeichnet man nach *J. Cockle* Differentialgleichungen, die für irgend welche Funktionen der Wurzeln einer vorgelegten

15. Die allgemeinen algebraischen Formenprobleme. Die Lösung durch transcendente Funktionen steht natürlich in keiner Beziehung zur algebraischen Theorie der Gleichungen, welche letztere sich mit ihrer Reduktion auf *möglichst einfache Normalgleichungen* zu beschäftigen hat. Das Problem der algebraischen Gleichungen ist aber von *Klein* verallgemeinert, indem er in allgemeinster Weise das Problem formulierte, *aus den Invarianten einer gegebenen endlichen Gruppe homogener linearer Substitutionen von n Veränderlichen die letzteren zu berechnen*[76]). Die algebraische Behandlung dieser Klasse von Aufgaben und also der algebraischen Lösung der algebraischen Gleichungen wird in der Reduktion der isomorphen Formenprobleme auf ein *Normalproblem* bestehen. Unter den Aufgaben mit isomorphen Gruppen darf man aber die von der *möglichst geringen Dimensionenzahl* als die einfachste, also als das *Normalproblem* betrachten[77]). Ein *typisches Beispiel* zu dieser allgemeinen Behandlungsweise liefert die *Zurückführung der Gleichungen 5. Grades auf das binäre Ikosaederproblem.*

Behufs dieser Zurückführung von isomorphen Formenproblemen auf einander wurde von *Klein* eine Methode angegeben, um solche homogene ganze Funktionen $Y_1, Y_2, \ldots Y_\mu$ von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu bilden, welche sich nach einer vorgegebenen Gruppe G_1 homogener linearer Substitutionen transformieren, wenn die x eine isomorphe Gruppe G solcher Substitutionen erfahren. Einen möglichen Einwand gegen diese Methode, dass nämlich die so erhaltenen Grössen vielleicht identisch verschwinden, beseitigte *H. Burkhardt*[78]).

Gleichung gelten. Für die Gl. 5. Grades liefern wohl die betreffenden hypergeometrischen Differentialgleichungen die einfachsten Differentialresolventen. Über Erweiterungen auf algebraische Gleichungen höheren Geschlechts s. *Lachtine,* Mosk. Math. Samml. 19 (1897), p. 211, 393.

76) Zwischen den Invarianten können natürlich fundamentale Identitäten bestehen. Einen Beweis für die *Endlichkeit des Invariantensystems* einer endlichen linearen Substitutionsgruppe gab *D. Hilbert,* Math. Ann. 36 (1890), p. 473. Vgl. *Weber*, Algebra 2 (1896), p. 165 [I B 2, Nr. **6**, Anm. 138].

77) Die allgemeine Problemstellung von *Klein* zuerst Math. Ann. 15 (1879), p. 251. Vgl. die orientierende Übersicht von *Klein,* Evanston Coll. (1894), Lect. 9. Man sehe auch *H. Weber,* Algebra (2) 6 (1896) [I B 2, Nr. **11**, Anm. 219].

78) *Klein,* Math. Ann. 15 (1879), p. 253; *Burkhardt,* Math. Ann. 41 (1892), p. 309. Wenn die *Galois'sche Gruppe* einer Gleichung (nach etwaiger Adjunktion geeigneter Irrationalitäten) mit einer *Kollineationsgruppe* holoedrisch isomorph ist, muss man also fragen, ob auch eine holoedrisch isomorphe *homogene Substitutionsgruppe* existiert oder nicht. Im ersten Falle lässt sich die Gleichung auf das Formenproblem nach dem im Texte besprochenen Verfahren rational zurückführen; im zweiten Falle muss man dagegen accessorische Irrationali-

Es werden hier $Y_1, Y_2, \ldots Y_\mu$ solche numerische Irrationalitäten enthalten, welche in der Gruppe G_1 auftreten[79]).

16. Gleichungen 7. Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen. Ein weiteres Beispiel von Gleichungen, welche sich auf solche mit nur einem Parameter reduzieren lassen, bieten *Gleichungen 7. und 8. Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen* dar; doch ist hier die zugehörige Galois'sche Resolvente nicht rational, sondern hat das Geschlecht [III C 2] $p = 3$. *Betti* und *Kronecker*[80]) hatten die Existenz solcher Gleichungen 7. Grades erkannt; übrigens gehört hieher *das Transformationsproblem 7. Ordnung der elliptischen Funktionen*, für welches ja nach einem *Galois*'schen Satze[81]) Resolventen 7. Grades existieren. Für das letztere Problem fand aber *Klein*, dass die zur 7. Stufe gehörenden Moduln sich rational durch drei Grössen x, y, z ausdrücken lassen, welche einer Relation $f_4 = x^3y + y^3z + z^3x = 0$ genügen, und zwar trat dabei *die G_{168} als eine Kollineationsgruppe* auf[82]). Weil letztere Gruppe sich durch eine holoedrisch isomorphe homogene Substitutionsgruppe darstellen lässt, müssen also (nach der vorigen Nr.) alle *Gleichungen mit einer isomorphen Gruppe* sich auf das *ternäre Formenproblem dieser G_{168}* zurückführen lassen. *Klein* führte aber die Reduktion noch einen *Schritt weiter*, indem er nachwies, dass man vermittelst einer Hülfsgleichung 4. Grades einem beliebigen Punkte der Ebene einen *kovarianten Punkt auf $f_4 = 0$* (etwa auf der Polargeraden des Punktes) zuordnen kann. *Die Gleichungen mit einer G_{168} lassen sich also nach Adjunktion der durch die Gleichung 4. Grades eingeführten accessorischen Irrationalität auf das ternäre Formenproblem mit $f_4 = 0$,*[83]) *d. h. das Transformationsproblem 7. Ordnung reduzieren;* diese Gleichungen sind mithin *durch elliptische Funktionen lösbar.* Die obige Lösungsmethode der Gleichungen 7. Grades mit einer G_{168} wurde von

täten zu Hülfe ziehen, wie bei der Reduktion der allgemeinen Gl. 5. Grades auf das binäre Ikosaederproblem.

79) Dass die Substitutionskoeffizienten endlicher linearer Gruppen sich immer als rationale Funktionen von Einheitswurzeln darstellen lassen, ist neuerdings von *Maschke* bewiesen, Math. Ann. 50 (1898), p. 492.

80) *Kronecker*, Berl. Ber. 1858, p. 287; *Betti*, Ann. mat. fis. 4 (1853), p. 81 [I B 3 c, d, Nr. **24**].

81) Über die Beweise dieses Satzes vgl. *Klein*, Math. Ann. 14 (1878), p. 417, sowie I A 6, Nr. **11**; I B 3 c, d, Nr. **24**.

82) *Klein*, Math. Ann. 14 (1878), p. 428. Vgl. *Klein-Fricke*, Modulfunktionen 1 (1890), p. 692.

83) Für $f_4 = 0$ ist als Resolvente des Formenproblems eine lineare Differentialgleichung 3. Ordnung aufgestellt worden, nämlich von *Halphen*, Math. Ann. 24 (1884), p. 461 und *A. Hurwitz*, Math. Ann. 26 (1885), p. 117.

Klein nur in allgemeinem Umrisse skizziert, später von *Gordan* durchgeführt[84]).

Die Gruppe der *Jacobi'schen Gleichungen 8. Grades* ist zwar auch eine G_{168}. Weil aber die entsprechende *homogene quaternäre Substitutionsgruppe der* A mindestens 2.168 Operationen enthält, können die allgemeinen Gleichungen mit einer G_{168} erst nach Adjunktion von accessorischen Irrationalitäten auf Jacobi'sche Gleichungen 8. Grades reduziert werden[85]).

17. Kollineationsgruppen der elliptischen Normalkurven. Eine *einfach unendliche Reihe* von endlichen Gruppen linearer Substitutionen liefern die *Kollineationsgruppen* der von *Klein* eingeführten *elliptischen Normalkurven.* Die homogenen Koordinaten einer Normalkurve in einem R_{n-1} sind n-gliedrigen σ-Produkten proportional mit, bis auf ganzzahlige Vielfache der Perioden ω_1, ω_2 konstanter Residuensumme[86]). Letztere bleibt nun bei den n^2 Transformationen $u' = u + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}$ invariant, wo u das Integral 1. Gattung bezeichnet. Hierzu kommen noch, weil $\sigma(-u) = -\sigma(u)$, n^2 Operationen $u' = -u + \frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}$, welche sich algebraisch in Kollineationen der Normalkurve in sich umsetzen lassen. Für den harmonischen und den äquianharmonischen Fall treten noch weitere Kollineationen hinzu, bei denen $\pm u$ durch $\pm iu$ bez. $\pm \varrho u$, $\pm \varrho^2 u$ $\left(\varrho = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$

---

84) *Klein,* Erl. Ber. 1878; Math. Ann. 15 (1879), p. 266; *Gordan,* Math. Ann. 17 (1880), p. 219, 359 (das volle Formensystem von f_4, auch Kontravarianten und Zwischenformen); 19 (1882), p. 529; 20 (1882), p. 487, 515; 25 (1885), p. 459. Vgl. auch *H. Weber,* Algebra (2) 14, 15 (1896), sowie *E. M. Radford,* Quart. J. 30 (1898), p. 263, und I B 2, Nr. 5, Anm. 107. Die beiden Resolventen 7. Grades des ternären Formenproblems finden ihre geometrische Repräsentation durch zwei Systeme von je 7 bei der G_{168} gleichberechtigten Kegelschnitten; diejenige 8. Grades durch 8 gleichberechtigte Wendepunktsdreiecke von $f_4 = 0$. Vgl. etwa *M. Noether,* Math. Ann. 15 (1879), p. 89 [III C 3].

85) Das volle Formensystem der quaternären Substitutionsgruppe $G_{2.168}$ hat *Maschke* gegeben, Chic. Congr. Pap. 1896 (1893), p. 175. Für $f_4 = 0$ erhält man aus den Wurzelausdrücken, welche zu einem bei der ternären G_{168} ausgezeichneten Systeme von Berührungskurven 3. Ordnung gehören, das quaternäre Modulsystem der A; vgl. *Klein,* Math. Ann. 15 (1879), p. 270; *Klein-Fricke,* Modulf. 1, p. 716. Über die Jacobi'schen Gleichungen 8. Grades vgl. *Brioschi,* Lomb. Rend. (2) 1 (1868), p. 68; Math. Ann. 15 (1879), p. 241.

86) Es ist hier ein von *Hermite,* J. f. Math. 32 (1844), p. 277 aufgestellter Satz von Bedeutung, nach welchem jedes n-gliedrige σ-Produkt von gegebener Residuensumme linear und homogen durch n solche linear-unabhängige σ-Produkte darstellbar ist.

ersetzt wird. *Die Kollineationsgruppe der allgemeinen elliptischen Normalkurve* C_n in einem R_{n-1} ist also *eine* G_{2n^2}, der *harmonischen* bez. der *äquianharmonischen* aber eine G_{4n^2} bez. G_{6n^2}.[87])

18. Gruppen aus der elliptischen Transformationstheorie. Jetzt betrachten wir die in der vorigen Nummer eingeführten σ-Produkte $X_1, \ldots X_n$ in ihrer Abhängigkeit von den Perioden ω_1, ω_2. Hier findet man zuerst, dass die X_α, *wenn man* ω_1 *und* ω_2 *einer beliebigen homogenen Modulsubstitution unterwirft, selbst eine homogene lineare Substitution erleiden. Für ungerade n erweisen sich die* X_α *als zur* n^{ten} *Stufe gehörend*[88]), d. h. sie bleiben bei allen modulo n mit der Identität kongruenten Modulsubstitutionen unverändert. Nun ist die *Zahl der modulo n verschiedenen Modulsubstitutionen* $n^3\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{q^2}\right)\cdots$ (für $n = p^\alpha q^\beta \cdots$), welche sich paarweise nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Diesen gegenüber stellt sich eine *endliche Gruppe* von eben so vielen X_α-Substitutionen. Kombinieren wir die letztere Gruppe mit der durch die Substitutionen der u erhaltenen, so ergiebt sich *im* R_{n-1} *eine endliche Gruppe von* $n^5\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{q^2}\right)\cdots$ *Kollineationen.* Für $n = 3$ haben wir hier wieder *die Hesse'sche Gruppe;* wir sehen auch an diesem einfachen Beispiele, wie durch eine *ausgezeichnete* G_{2n^2} ein System von Normalkurven jede in sich übergeführt wird, und wie *durch die Gesamtgruppe* je $\frac{1}{2}n^3\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{q^2}\right)\cdots$ *Normalkurven mit gleicher absoluter Invariante vertauscht* werden.

Bei der Entwicklung der X_α nach u müssen natürlich die zu derselben Potenz gehörigen Koeffizienten die Eigenschaft besitzen, dass sie sich bei der der Modulgruppe nach unendlich hoher Meriedrie [I A 6, Nr. **14**] isomorph zugeordneten $G_{n(n^2-1)}$ (n der Kürze wegen als eine ungerade Primzahl angenommen) homogen linear substituieren. Nun wies *Klein* nach, dass für gerade Potenzen jene Koeffizienten sich aus $\frac{n-1}{2}$, für ungerade aber aus $\frac{n+1}{2}$ linear zusammensetzen. Hieraus erhielt er mit der $G_{n(n^2-1)}$ isomorphe lineare *Substitutionsgruppen von* $\frac{n-1}{2}$ *Moduln* z_α *und* $\frac{n+1}{2}$ *Moduln* y_α.[89]) Der

87) Vgl. über die elliptischen Normalkurven *Klein,* Münchn. Ber. 1880, p. 533; Math. Ann. 17 (1880), p. 133; Leipz. Abh. 13 (1885), Nr. 4, p. 335; *Klein-Fricke,* Modulf. (2) 5, Kap. 1; für $n = 3$ und 5 *L. Bianchi,* Math. Ann. 17, p. 234.

88) Für gerade n zur $2n^{\text{ten}}$ bez., wenn n durch 4 nicht teilbar ist, $4n^{\text{ten}}$ Stufe. Man sehe *Hurwitz,* Math. Ann. 27 (1885), p. 198.

89) Math. Ann. 15 (1879), p. 275. Für die Gruppen der y_α liegen bereits

Isomorphismus ist holoedrisch oder, wenn die betreffenden Moduln von gerader Dimension in den ω_1, ω_2 sind, hemiedrisch; letzteres ist für die z_α, wenn $n \equiv 3 \bmod. 4$, für die y_α, wenn $n \equiv 1 \bmod. 4$, der Fall. *Für $n = 5, 7$ bilden die z_α- und die y_α-Substitutionen uns schon bekannte homogene Gruppen,* nämlich die binäre Ikosaedergruppe und die ternäre G_{168}, bez. die ternäre Ikosaedergruppe und die quaternäre $G_{2.168}$.

Für höhere Primzahlen n erhalten wir in gleicher Weise *einfache Gruppen $G_{\frac{n(n^2-1)}{2}}$*, welche *den Hauptkongruenzgruppen n^{ter} Stufe* [II B 6 c] *zugehörig* sind, und dieselben lassen sich durch die z_α- bez. y_α-Substitutionen im $R_{\frac{n-3}{2}}$ bez. $R_{\frac{n-1}{2}}$ als *Kollineationsgruppen* darstellen. So z. B. liefert der nächst höhere Fall $n = 11$ eine einfache G_{660}, und das zugehörige Transformationsproblem [90]), welches nach einem Galois'schen Satze (Nr. 9) Resolventen 11. Grades besitzt, lässt sich auf ein quinäres Formenproblem zurückführen, ebenso wie die allgemeinen Gleichungen mit einer G_{660}; doch hat man hier keine Methode, die letzteren mit Hülfe von Gleichungen niederen Grades auf die speziellen Gleichungen des elliptischen Transformationsproblems zu reduzieren, wie für $n = 5$ und $n = 7$.

19. Mit den Gleichungen 6. und 7. Grades isomorphe quaternäre Formenprobleme. Durch *Heranziehung der Liniengeometrie* hat *Klein* mehrere *quaternäre endliche Substitutionsgruppen* erhalten. Zuerst wurde nachgewiesen, dass nach Einführung der *Plücker*'schen homogenen Linienkoordinaten [III B 2] x_i ($i = 1, \cdots 6$), zwischen denen eine quadratische Relation $F_2 = 0$ identisch erfüllt ist, *jede lineare Substitution der x_i, welche $F_2 = 0$ in sich überführt,* sich im Punktraume R_3 *entweder in eine Projektivität oder eine dualistische Transformation* umsetzt, je nachdem, bei Deutung der x_i als Punktkoordinaten im R_5, die beiden Scharen von $\infty^3 R_2$ auf $F_2 = 0$, welche bez. den Punkten und Ebenen im R_3 entsprechen, jede in sich übergehen oder vertauscht werden [91]). Bringt man nun $F_2 = 0$

---

alle Ansätze in *Jacobi*'s Entwicklungen über die $\frac{n+1}{2}$ Grössen A vor (vgl. Nr. 10). Über entspr. Gruppen bei geradem n vgl. *Hurwitz* l. c.

90) Vgl. über das Transformationsproblem 11. Ordnung *Klein,* Math. Ann. 15 (1879), p. 533. Über dem Inhalte dieser Nummer naheliegenden Fragen sowie auch zahlreiche weitere Litteraturnachweise vgl. *Klein-Fricke,* Modulfunktionen, besonders (1) 2 und (2) 5.

91) Vgl. *Klein,* Diss. (Bonn 1868) = Math. Ann. 2, p. 198.

auf die Normalform $\sum_1^6 x_i^2 = 0$, so liefern also die geraden Vertauschungen der x_i unmittelbar Kollineationen[92]) und auch die ungeraden, wenn man mit der linearen Substitution kombiniert, welche aus dem Übergange zu den mit Bezug auf den linearen Komplex $\sum_1^6 x_i = 0$ konjugierten Geraden resultiert[93]); auf diese Weise erhielt *Klein* im R_3 *eine mit der symmetrischen Gruppe von 6 Dingen holoedrisch isomorphe Kollineationsgruppe.* Dazu kam noch, dass nach Einführung überzähliger Linienkoordinaten $x_1, \ldots x_7$, welche jetzt den beiden Identitäten $\sum_1^7 x_i = 0$ und $\sum_1^7 x_i^2 = 0$ genügen, sich aus den geraden Vertauschungen der x_i eine *mit der alternierenden Gruppe von 7 Dingen holoedrisch isomorphe Gruppe von Kollineationen im R_3* ergab[93]). Jedoch fand *Klein,* dass in beiden Fällen eine entsprechende *homogene* Gruppe mit weniger als der doppelten Zahl von Substitutionen nicht existiert[93]). Die durch die Existenz dieser Gruppen postulierte *Reduktion der allgemeinen Gleichungen 6. und 7. Grades auf quaternäre Formenprobleme* hat *Klein* mit Hülfe accessorischer Quadratwurzeln in Ansatz gebracht[94]).

20. Reduktion der allgemeinen Gleichungen 6. Grades auf ein ternäres Formenproblem. Nachdem inzwischen in der Ebene eine mit der alternierenden $G_{\frac{6!}{2}}$ isomorphe Kollineationsgruppe G_{360} gefunden war (Nr. 5), konnte das obige quaternäre Formenproblem nicht länger als das mit den Gleichungen 6. Grades isomorphe *Normalproblem* betrachtet werden. Behufs der Reduktion der Gleichung 6. Grades auf das Formenproblem der ternären G_{360} schlägt *Klein* die Methode vor[94a]), dass man den Wurzeln $x_1, \ldots x_6$ zuerst eine Kurve 3. Ordnung — was, weil die ternären Formen 3. Grades sich mit der $G_{\frac{6!}{2}}$ holoedrisch isomorph substituieren, ohne Aufwand von accessorischen Irrationalitäten gelingt — und dann einen von den 9 Wendepunkten dieser Kurve in kovarianter Weise zuordnen soll. Letzterer Schritt, d. h. die Bestimmung eines Wendepunktes einer C_3,

92) Man sehe noch *Klein*, Math. Ann. 4 (1871), p. 355. Vgl. die geometrischen Betrachtungen von *P. Veronese,* Ann. di mat. (2) 11 (1883), p. 284.

93) *Klein,* Math. Ann. 28 (1887), p. 500. Vgl. über die zur $G_{\frac{7!}{2}}$ im R_3 gehörige geometrische Konfiguration *Maschke,* Math. Ann. 36 (1890), p. 190.

94) Ebenda p. 521.

94a) Rom Linc. Rend. (5) 8 (Apr. 1899). Umgekehrt sind Resolventen 6. Grades erfordert blos die Einführung von quadratischen und kubischen Wurzeln, sodass also die nötigen accessorischen Irrationalitäten auch hier von elementarer Art sind.

21. Satz über die allgemeinen Gleichungen höheren Grades. Wenn $n > 7$, gilt der allgemeine Satz, dass eine mit der symmetrischen $G_{n!}$ oder mit der alternierenden $G_{\frac{n!}{2}}$ holoedrisch isomorphe Kollineationsgruppe in einem Raume von weniger als $(n-2)$ Dimensionen nicht konstruiert werden kann. Im R_{n-2} erhält man aber die Vertauschungsgruppe der x_i unmittelbar als Kollineationsgruppe dargestellt, indem man die x_i als überzählige homogene Koordinaten auffasst, welche der Identität $\sum_1^n x_i = 0$ unterworfen sind. Im Gegensatze zu den Fällen $n = 5, 6, 7$ bilden also *die allgemeinen Gleichungen höheren Grades ihre eigenen Normalprobleme* [95]).

22. Quaternäre Gruppe von 11520 Kollineationen. Noch *eine weitere quaternäre Gruppe* erhielt *Klein* aus dem *liniengeometrischen Ansatze* [96]), nämlich durch Kombination von Vertauschungen und Vor-

---

des fraglichen ternären Formenproblems von *Fricke* (Gött. Nachr. 1896, p. 199) für $f_6 = 0$ und von *F. Gerbaldi* (Math. Ann. 50 [1898], p. 473, Pal. Rend. 1900) für den allgemeinen Fall aufgestellt. Für die fragliche Normalgleichung von *Fricke* ist eine einfache Differentialresolvente 3. Grades von *L. Lachtin* berechnet worden, Math. Ann. 51 (1898), p. 463. Alle mit symmetrischen und alternierenden Buchstabenvertauschungsgruppen holoedrisch isomorphen ternären und quaternären Kollineationsgruppen hat *Maschke* gegeben, Math. Ann. 51 (1898), p. 253.

95) Eine nach dieser Richtung gehende Vermutung wurde von *Klein* [Ev. Coll. (1894), p. 74] ausgesprochen. Der Satz wurde von *Wiman* (Gött. Nachr., Febr. 1897, p. 55) für $n = 8$ bewiesen und später (ebenda, Juli 1897, p. 191) für beliebige höhere n ausgesprochen; den vollständigen Beweis des Satzes gab *W.* erst in Math. Ann. 52 (1899), p. 243 [I B 2, Nr. **11**, Anm. 219]. Sieht man von der algebraischen Behandlung einer (beliebigen) Gleichung ab, so hat schon *C. Jordan* [Traité des subst. (1870), p. 380] darauf hingewiesen, dass dieselbe auf die spezielle Zweiteilung derjenigen hyperelliptischen Funktionen zurückgeführt werden kann, für die bei zu Grunde gelegter zweiblättriger Riemannscher Fläche die Gleichungswurzeln die im Endlichen belegenen Verzweigungspunkte liefern. Dass man aber hieraus ohne Zuhülfenahme höherer algebraischer Identitäten *transcendente Ausdrücke für die Wurzeln* wirklich berechnen kann, hat erst *F. Lindemann* (Gött. Nachr. 1884, p. 245; 1892, p. 292) nachgewiesen; dabei sind die betreffenden Periodicitätsmoduln als Integrale linearer Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten und mit von Gleichungen niedrigeren Grades abhängenden singulären Punkten nach den Methoden von *Fuchs* aufzufinden. Vgl. hierzu betreffend die Gl. 6. Grades auch *Burkhardt,* Math. Ann. 35 (1889), p. 277.

96) Math. Ann. 2 (1870), p. 366 und 4 (1871), p. 346.

zeichenwechseln der zu der fundamentalen Identität $\sum_1^6 x_i^2 = 0$ gehörigen x_i, indem jede durch eine gerade Anzahl von Elementaroperationen zusammengesetzte Umänderung der x_i im R_3 eine Kollineation bewirkt. Die so erhaltene *Gruppe von 16.720 Kollineationen*[97]) muss als *ausgezeichnete Untergruppe eine* $G_{16.360}$ besitzen, bei welcher sowohl Vertauschungen als Zeichenwechsel der x_i nur in gerader Zahl auftreten, und in dieser ist wieder eine blos *durch Vorzeichenwechsel* erzeugte G_{16} *ausgezeichnet. Diese* G_{16} *ist die Kollineationsgruppe von* ∞^3 *Kummer'schen Flächen,* welche Singularitätenflächen von Linienkomplexen $\sum_1^6 k_i x_i^2 = 0$ darstellen. Der Zusammenhang der obigen Kollineationsgruppe G_{11520} mit der Transformation 2. Ordnung der hyperelliptischen Funktionen vom Geschlechte $p = 2$ wurde von *Klein* hervorgehoben, indem er zeigte, dass die sogenannten *Borchardt-schen Moduln* sich nach ihr substituieren[98]). Hieran knüpfen weitere Entwicklungen über die G_{11520} von *Reichardt,* welcher dabei insbesondere den Zusammenhang zwischen den hyperelliptischen Funktionen und der Kummer'schen Fläche in Betracht zog, und *Maschke,* von dem das vollständige Formensystem aufgestellt wurde; aus der Gruppe ableitbare räumliche Konfigurationen wurden von *Hess*[99]) untersucht.

Der Isomorphismus der Vertauschungsgruppe von 6 Dingen mit der quaternären Gruppe der Borchardt'schen Thetamoduln führte natürlich zu Versuchen, die *Gleichung 6. Grades durch jene Moduln zu lösen.* Diese hatten auch Erfolg, indem zuerst *Maschke* eine Partialresolvente 6. Grades des quaternären Formenproblems der G_{11520} aufstellte[100]), und dann *Brioschi* und wiederum *Maschke* die allgemeine Gleichung 6. Grades auf jene Resolvente transformierten, wobei die Koeffizienten sich als Invarianten der ursprünglichen Form erwiesen[101]).

---

97) Die entsprechende *homogene* Gruppe enthält 64.720 Substitutionen, worüber man die sogleich zu citierenden Arbeiten von *Reichardt* und *Maschke* vergleichen möge.

98) *Klein,* Vorlesungen (Leipzig, Sommer 1885). Die in Betracht zu ziehende Arbeit von *C. W. Borchardt,* J. f. Math. 83 (1877), p. 234 = Werke, p. 341, handelt eben von der „Darstellung der Kummer'schen Fläche durch die *Göpel*'sche biquadratische Relation zwischen vier Thetafunktionen".

99) *W. Reichardt,* Leipz. Ber. (1885), p. 419; Math. Ann. 28 (1886), p. 84; N. Act. Leop. 50 (1887), p. 375; *Maschke,* Math. Ann. 30 (1887), p. 496; *E. Hess,* N. Act. Leop. 55 (1889), p. 97.

100) Ebenda p. 506.

101) *Maschke, Brioschi,* Rom. Linc. Rend. (4) 4 (1888), p. 181, 301, 485;

Diejenigen *Gleichungen 16. Grades,* von denen die Bestimmung der *16 Knotenpunkte einer Kummer'schen Fläche* abhängt, haben eine mit der G_{11520} holoedrisch isomorphe Gruppe, einfacher sind dagegen die Gleichungen, welche die *16 Geraden einer Fläche 4. Ordnung mit doppeltem Kegelschnitte* bestimmen, indem ihre Gruppe sich mit einer Untergruppe $G_{16.120}$ der $G_{16.720}$ holoedrisch isomorph erweist[102]).

23. Quaternäre und quinäre Gruppen aus der Dreiteilung der hyperelliptischen Funktionen. Aus der elliptischen Transformationstheorie (Nr. **18**) kennen wir Systeme von je n Grössen X_α und von daraus ableitbaren $\frac{n+1}{2}$ y_α und $\frac{n-1}{2}$ z_α. Nun hat *Klein* darauf hingewiesen, wie die entsprechenden Überlegungen im *hyperelliptischen Falle* ($p=2$) zu je n^2 *ganz analogen Grössen* $X_{\alpha\beta}$ (wie die Borchardt'schen Moduln für $n=2$) führen[103]), aus denen man dann, wenn n ungerade, *Systeme von je* $\frac{n^2+1}{2}$ *Grössen* $Y_{\alpha\beta}$, bez. $\frac{n^2-1}{2}$ *Grössen* $Z_{\alpha\beta}$ herleiten kann[104]).

Die linearen Substitutionsgruppen, welche die $Y_{\alpha\beta}$ und die $Z_{\alpha\beta}$ bei linearer Transformation der Perioden erleiden, sind nur für $n=3$ näher untersucht worden. In diesem Falle besitzt das Problem ein doppeltes Interesse, weil nach *C. Jordan*[105]) die Gruppe der *Gleichung 27. Grades,* von welcher *die Geraden auf einer allgemeinen* F_3 [III C 6] abhängen, eine ausgezeichnete (und zwar einfache) Untergruppe vom Index 2 enthält, welche aus 25920 Substitutionen besteht und mit der Gruppe der *Dreiteilung der hyperelliptischen Funktionen isomorph*

Brioschi, Act. math. 12 (1888), p. 83; Ann. Éc. norm. (3) 12 (1895), p. 343 [I B 2, Nr. **10**, Anm. 205]. Um die Aufstellung einer linearen Differentialgleichung 4. Ordnung, deren Integrale mit den Borchardt'schen Moduln zusammenfallen, als Resolvente der Gl. 6. Grades handelt es sich bei *F. N. Cole,* Amer. J. of math. 8 (1886), p. 265.

102) Die Gruppen dieser beiden Klassen von Gleichungen bestimmte *C. Jordan,* Traité des subst. 1870, p. 309, 313 [I B 3 c, d, Nr. **29**].

103) Die von *Klein* in seinen Vorlesungen gegebenen Andeutungen über die $X_{\alpha\beta}$ wurden zunächst von *A. Witting* ausgeführt, Math. Ann. 29 (1886), p. 157; Diss. (Göttingen 1887); spätere Vereinfachungen und Zusätze stammen von *Burkhardt,* Math. Ann. 38 (1891), p. 163.

104) Die Moduln Y und Z treten auch in den citierten Arbeiten von *Witting* auf. Doch finden sich mit den Y äquivalente Funktionen schon bei der Behandlung der hyperelliptischen Multiplikatorgleichungen (genau wie bei *Jacobi* im elliptischen Falle [Nr. **10**]) von *E. Wiltheiss,* J. f. Math. 96 (1883), p. 17.

105) Vgl. (auch wegen der Untergruppen) *C. Jordan,* J. de math. 4 (1869), p. 147; Traité des subst. p. 316, 365. Vgl. noch *E. Pascal,* Ann. di mat. 20 (1892), p. 163, 269; 21 (1893), p. 85 [I B 3 c, d, Nr. **29**; III C 6].

ist. *C. Jordan* hat nun auch bereits *5 wichtige Arten von Untergruppen* jener G_{25920} mit den bez. Indices 27, 36, 40, 40, 45 bestimmt, welche in den Entwickelungen der folgenden Verfasser die Hauptrolle spielen, und bewiesen, dass die G_{25920} keine Untergruppen von niedrigerem Index als 27 enthalten kann. Wie man jene Gleichung 27. Grades auf das quaternäre Formenproblem der hyperelliptischen Moduln $Z_{\alpha\beta}$ zurückführen kann, hat *Klein* skizziert[106]). Die *quaternäre Gruppe der Z*, welche aus *2.25920 homogenen Substitutionen* besteht und mit der zugehörigen Kollineationsgruppe G_{25920} hemiedrisch isomorph ist, wurde zuerst von *Witting* behandelt. Das *vollständige* aus 5 Formen bestehende *System von Invarianten* wurde sodann von *Maschke* aufgestellt. Endlich vervollständigte *H. Burkhardt* die früheren Untersuchungen durch Einführung von *Linienkoordinaten*[107]); die *senäre Gruppe von 25920 Substitutionen*, welche sich dadurch neben die Gruppe der Z stellte, liess unmittelbar die Beziehung zwischen den Gleichungen 27. Grades mit einer G_{25920} und dem Probleme der Z erkennen.

Burkhardt behandelte auch die *quinäre Gruppe der Y von 25920 homogenen Substitutionen* und stellte dabei ihr vollständiges System von 6 Invarianten auf[108]). In geometrischer Hinsicht traten am meisten zwei Systeme von 40 bez. 45 Haupträumen hervor, ebenso wie bei der Gruppe der Z eine Konfiguration von 40 Ebenen, welche den anderen Untergruppen vom Index 40 zugeordnet sind.

24. Gruppen von eindeutigen Transformationen einer algebraischen Kurve in sich. Nach den Untersuchungen von *Schwarz* u. a. [III C 9] ist es bekannt, dass ein *algebraisches Gebilde vom Geschlechte* $p > 1$ *nur eine endliche Zahl von eindeutigen Transformationen in sich* zulassen kann. Allgemeine Untersuchungen über solche Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich hat nun insbesondere *Hurwitz* unternommen[109]). Die zugehörigen endlichen Transformationsgruppen sind im hyperelliptischen Falle *auf die endlichen binären Gruppen*

---

106) J. d. math. (4) 4 (1887), p. 169.

107) *Witting*, Diss.; *G. Maschke*, Gött. Nachr. 1888, p. 78; Math. Ann. 33 (1889), p. 317; *Burkhardt*, Math. Ann. 41 (1892), p. 317. Vgl. über die quaternäre Gruppe der Z auch *G. Morrice*, Lond. M. S. Proc. 21 (1890), p. 58; 23 (1892), p. 213.

108) Gött. Nachr. 1890, p. 376; Math. Ann. 38 (1891), p. 185.

109) Man sehe über periodische Transformationen Gött. Nachr. 1887, p. 85 und Math. Ann. 32 (1888), p. 290; über allgemeine Transformationsgruppen Math. Ann. 41 (1892), p. 403.

hemiedrisch isomorph bezogen, indem die zweiwertige Hauptfunktion sich nach einer solchen substituieren muss. *Für* $p = 2$ hat *O. Bolza* die in Rede stehenden Transformationsgruppen bestimmt[110]). Im nicht-hyperelliptischen Falle kann man die durch die Transformationen gebildete Gruppe in eine *Kollineationsgruppe* im R_{p-1} überführen, indem man die p homogenen Koordinaten den Differentialquotienten der Integrale erster Gattung proportional setzt. *Für* $p = 3$ *und* $p = 4$ hat *Wiman* die hier besprochenen Kollineationsgruppen hergeleitet[111]); auch sind von ihm verschiedene Resultate für $p = 5, 6$ gegeben.

25. Endliche Gruppen von birationalen Transformationen. Man kann die bisherige Fragestellung erweitern, indem man ganz allgemein nach den *endlichen Gruppen von birationalen Transformationen* fragt. Hier hat *S. Kantor* mit besonderem Erfolge eingesetzt. Zuerst handelte es sich bei ihm um die Bestimmung der *periodischen Transformationen in der Ebene.* Diese Frage erledigte er nach zwei Methoden: einmal so, dass er die geometrische Konstruktion der Gruppen durch eine rein *arithmetische* Untersuchung über die möglichen Verkettungen der Fundamentalpunkte bei den Transformationen vorbereitete[112]); seine zweite *rein geometrische* Lösung[113]) ging von einem invarianten linearen Systeme von rationalen oder elliptischen Kurven aus, dessen Existenz er durch den Übergang zu den successiven Systemen von adjungierten Kurven einer ursprünglichen invarianten Kurve nachgewiesen hatte. Weiter suchte *Kantor*[114]) unter wechselnder Anwendung seiner verschiedenen Methoden *alle endlichen Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene überhaupt* zu bestimmen. Seine Lösungen hier waren aber in mancher Hinsicht unrichtig; die nötigen Berichtigungen wurden von *Wiman* gegeben[115]). Die *typischen Hauptklassen* von endlichen birationalen Transformationsgruppen in der Ebene sind nach *Kantor* die folgenden[116]):

1) Kollineationsgruppen;

---

110) Amer. J. of math. 10 (1887), p. 47; Math. Ann. 30 (1887), p. 546 [I B 2, Nr. 4, Anm. 85].

111) Stockh. Bih. 21¹, Nr. 1, 3 (1895); wegen $p = 3$ vgl. auch *W. Dyck,* Math. Ann. 17 (1880), p. 474, 510.

112) „Premiers fondements pour une théorie des transformations périodiques univoques" (Preisschrift Neapel 1891); vgl. J. f. Math. 111 (1894), p. 50.

113) Acta math. 19 (1895), p. 115. Dort findet sich (p. 167) die erste völlig korrekte Aufzählung der periodischen Typen.

114) „Theorie d. endl. Gruppen von birationalen Transformationen in der Ebene" (Berlin 1895).

115) Math. Ann. 48 (1896), p. 195.

116) l. c. p. 43.

2) Gruppen von „orthanallagmatischen" Transformationen [117]), welche einen Geradenbüschel invariant lassen;

3) Gruppen, welche ein System von Kegelschnitten durch zwei feste Punkte invariant lassen und den Gruppen der Kollineationen einer F_2 in sich entsprechen;

4—8) Gruppen, welche ein System von C_3 mit 3 bis 7 festen Punkten invariant lassen;

9) Gruppen mit invariantem C_3-Büschel und überdies invariantem Systeme von C_6 mit Doppelpunkten in den 8 Basispunkten.

In den Klassen 3 bis 5 kommen höchstens *quadratische* und in der Klasse 6 *kubische Transformationen* vor; solche Gruppen sind von *L. Autonne* [118]) vielfach behandelt. Die Klasse 7 erhält man aus den *Kollineationsgruppen einer F_3 in sich* durch die Abbildung dieser Fläche auf die Ebene. Bei den Klassen 8 und 9 kann man die Ebene als das Bild *einer doppelten Ebene mit einer C_4*, bez. *eines doppelten Kegels 2. Grades mit einer C_6 als Übergangskurve* [119]) betrachten, sodass man in beiden Fällen durch Kombination der Vertauschung der beiden Blätter mit der Gruppe der Kollineationen der Übergangskurve in sich die in der einfachen Ebene zu bestimmenden Gruppen herleiten kann.

Kantor [120]) hat auch die endlichen Gruppen von *birationalen Transformationen im R_3*, bei denen die den Ebenen entsprechenden Flächen keine doppelten oder mehrfachen Kurven enthalten, untersucht und ihre Typen aufgezählt.

26. Erweiterung auf unendliche diskontinuierliche Gruppen. Die hier in Betracht gezogene Theorie der *endlichen* Gruppen findet in der Theorie der *unendlichen diskontinuierlichen* Gruppen ihre naturgemässe Fortsetzung, deren Behandlung insbesondere in II B 6 c der vorliegenden Encyklopädie unternommen wird.

117) Nach *Wiman* (l. c. p. 200, 207) existiert hier in den Fällen, welche nicht durch die Klassen 1 und 3 geliefert werden, immer eine invariante hyperelliptische Kurve.

118) Par. C. R. 97, 98, 101 (1883—85); J. d. math. (4) 1, p. 431; 2, p. 49; 3, p. 63; 4 p. 177, 407 (1885—88).

119) Wegen dieser Abbildungen einer einfachen Ebene auf eine Doppelebene vgl. man etwa *Noether*, Erl. Ber. 10 (1878), p. 81; bez. der Litteratur s. noch Fortschr. d. Math. 9 (1877), p. 581.

120) Acta math. 21 (1897), p. 1; Amer. J. of math. 19 (1897), p. 1, 382.

I C 1. NIEDERE ZAHLENTHEORIE

VON

PAUL BACHMANN

IN WEIMAR.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

A. M. Legendre, Théorie des Nombres, 1. éd. (Essai sur la th. d. N.) Paris 1798, 2. éd. 1808, 3. éd. in 2 Teilen 1830, 4. éd. 1899; nach der 3. Ausgabe deutsch von *H. Maser,* 2 Bände, 2. Ausgabe, Leipzig 1893.

K. F. Gauss, Disquisitiones arithmeticae, Lipsiae 1801 = Werke 1; zusammen mit *Gauss*' arithmetischen Abhandlungen 1889, Leipzig, deutsch von *Maser.*

P. G. Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, herausg. und mit Zusätzen versehen von *R. Dedekind,* 1. bis 4. Aufl., Braunschweig 1863, 1871, 1879, 1894.

P. Bachmann, Zahlentheorie, Leipzig. 1. Teil, die Elemente der Zahlentheorie 1892; 2. Teil, die analytische Zahlentheorie 1894; 3. Teil, die Lehre von der Kreisteilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie 1872; 4. Teil, die Arithmetik der quadratischen Formen, erste Abt. 1898.

P. Tschebyscheff, Theorie der Kongruenzen (Elem. d. Zahlentheorie), aus dem Russischen (1849) übers. von *H. Schapira,* Berlin 1889.

V. A. Lebesgue, Introd. à la Théorie des Nombres, Paris 1862.

G. Wertheim, Elemente der Zahlentheorie, Leipzig 1887.

G. B. Mathews, Theory of numbers, part I, Cambridge 1892.

Ed. Lucas, Théorie des Nombres t. I (der einzig erschienene) Paris 1891.

P. Bachmann, Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen, Leipzig 1892.
St. Smith, Report on the Theory of Numbers, Brit. Ass. Rep. 1859, p. 228; 1860, p. 120; 1861, p. 292; 1862, p. 503; 1863, p. 768; 1865, p. 322 = Coll. Math. Papers 1, p. 38, 93, 163, 229, 263, 289.
D. Hilbert, Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Deutsche Math.-Vereinig. 4, p. 175—546, 1897.
T. S. Stieltjes, Essai sur la Théorie des Nombres, Paris 1895 (= Toul. Ann. 4, 1890, p. 1).
S. auch die bez. Abschnitte in *J. A. Serret,* Algèbre supérieure, Paris, 4. éd. 1877, deutsch v. *G. Wertheim,* Leipzig, 2. Aufl. 1878, sowie in *H. Weber,* Höhere Algebra, Braunschweig 1895/96; 2. Aufl. 1898/99, franz. v. *J. Griess,* Paris 1898.

Die Zahlentheorie behandelt die Eigenschaften der (positiven) *ganzen Zahlen* [1]) 1, 2, 3, 4, ... (*natürliche Zahlenreihe*).

1. Die Teilbarkeit der ganzen Zahlen. Ist eine ganze Zahl $n = t\theta$ ein Produkt zweier andern, so heisst jeder der Faktoren ein *Teiler*, *t und θ komplementäre Teiler* von n, n ein *Vielfaches* jedes derselben. Hat n nur die Teiler $1, n$, so heisst n *Primzahl*, sonst *zusammengesetzt.* Zwei Zahlen, deren grösster gemeinsamer Teiler 1 ist, heissen *relativ prim* (teilerfremd).

Die Menge der Primzahlen ist unbegrenzt [2]).

Ist m gegebene positive ganze Zahl, so kann jede ganze Zahl n in die Form

$$n = q_0 m + r \quad (0 \overline{\gtrless} r < m)$$

gesetzt werden [3]); m heisst *Modulus* (*Gauss*), r der *Rest* von n (mod. m). Bezeichnet $E(x)$ (*Legendre,* Th. d. n., Einl. Nr. 16) oder $[x]$ (*Gauss,* Werke 2, p. 5, 1808) für jedes reelle x die nächst kleinere ganze Zahl, so ist $q_0 = E\left(\frac{n}{m}\right) = \left[\frac{n}{m}\right]\cdot$ Es folgt der *Euklidische Algorithmus* des grössten gemeinsamen Teilers von n, m:

$$n = q_0 m + m_1, \; m = q_1 m_1 + m_2, \; \ldots \; (0 \leqq m_{i+1} < m_i),$$

aus ihm die Sätze über Teilbarkeit (*L. Poinsot,* J. de math. 10, 1854, p. 1 und *Dirichlet,* Vorl.). *Euklidischer Fundamentalsatz*: Sind n, m relativ prim, so ist hn durch m teilbar nur, wenn h es ist. *Haupt-*

1) Über diesen Begriff selbst s. VII A.

2) S. Euklid lib. IX, 20 und *E. E. Kummer*'s Beweis mittels der *Euler*'schen Funktion $\varphi(n)$, Berl. Ber. 1878, p. 771. Ein Satz von *Chr. Goldbach* (*L. Euler,* correspondance, St. Pét. 1842, 1, p. 135), den neuere Untersuchungen (*J. J. Sylvester,* Lond. M. S. Proc. 4, 1872, p. 4; *G. Cantor,* Assoc. franç. 23, 1894, p. 117; *P. Stäckel,* Gött. Nachr. 1896, p. 292; *R. Haussner,* Deutsche Math.-Verein. 5 (1897), p. 62; Tafeln dazu: Leop. N. Acta 72, 1897, p. 1) unterstützen, behauptet, dass jede gerade Zahl Summe zweier Primzahlen sei.

3) Dies ist die Grundlage der ganzen Zahlentheorie (*Dirichlet*, Vorl. üb. Zahlenth., 4. Aufl., p. 514).

satz: Jede ganze Zahl n ist auf einzige Art in Potenzen verschiedener Primzahlen zerlegbar,

$$n = \pm p^a p'^{a'} p''^{a''} \dots.$$

Der *grösste gemeinsame Teiler* mehrerer Zahlen ist das Produkt der höchsten Primzahlpotenzen, die in ihnen allen aufgehen, ihr *kleinstes gemeinsames Vielfache* das Produkt der höchsten Primzahlpotenzen, die in ihren Zerlegungen überhaupt sich finden.

Die *Anzahl der Teiler* von n ist $t(n) = (a+1)(a'+1)\cdots$, ihre *Summe*[4])

$$\int(n) = \frac{p^{a+1}-1}{p-1} \cdot \frac{p'^{a'+1}-1}{p'-1} \cdots,$$

die Anzahl der Zerlegungen von n in zwei relativ prime Faktoren ist $p(n) = 2^{\varpi(n)}$, wenn $\varpi(n)$ verschiedene Primfaktoren in n aufgehen.

Die *Euler'sche Funktion* $\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p'}\right)\cdots$ giebt die Anzahl der Zahlen $\leqq n$, welche prim zu n sind. Für relativ prime n', n'' ist

$$\varphi(n') \cdot \varphi(n'') = \varphi(n'n''),$$

allgemein ist $\Sigma_t \varphi(t) = n$ (t Teiler von n). $\varphi(n)$ ist einfacher Fall einer von *V. Schemmel* untersuchten Funktion; eine andere Verallgemeinerung von $\varphi(n)$ gab *K. Th. Vahlen*[5]). Nach *St. Smith* (Lond. Proc. Math. Soc. 7, 1876, p. 208 = Coll. Pap. 2, p. 161) ist, wenn d_s^r grösster gemeinsamer Teiler von r, s ist, die Determinante [I A 2]

$$\sum \pm d_1^1 d_2^2 \cdots d_n^n = \varphi(1)\,\varphi(2) \dots \varphi(n),$$

ein Satz, welchen *P. Mansion* verallgemeinert hat (Messenger (2) 7, 1877, p. 81).

2. Für jede positive ganze Zahl p kann die positive ganze Zahl n in die Form gesetzt werden:

$$n = ap^\alpha + a_1 p^{\alpha-1} + \cdots + a_{\alpha-1}p + a_\alpha;\ ^{6)}$$
$$(0 \leqq a_i < p)$$

$p = 10$ giebt die dekadische Gestalt von n, aus der mittels des Kon-

4) Leider herrscht bez. der Bezeichnung der zahlentheoretischen Funktionen keine Übereinstimmung. Das Zeichen $\int(n)$ oder $\int n$ stammt von *Euler*, Opusc. var. Arg. 2, 1750, p. 23 = Comm. Ar. 1, p. 102; *J. Liouville*, J. de math. (2) 2, 1857, p. 425, bezeichnet mit $\zeta_\varkappa(n)$ die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen der Teiler von n.

5) *Euler*, Petr. N. Comm. 8, 1760/61, p. 74 = Comm. Ar. 1, p. 274, das Zeichen $\varphi(n)$ stammt von *Gauss*, Disqu. Ar. art. 38; *Schemmel*, J. f. Math. 70, 1869, p. 191; *L. Goldschmidt*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 39, 1894, p. 203; *Vahlen*, ebend. 40, 1895, p. 126.

6) S. hierin einen besondern Fall der *G. Cantor*'schen einfachen Zahlensysteme, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 14, 1869, p. 121, vgl. *E. Strauss*, Acta math. 11, 1887/8, p. 13; Darstellungen in verschiedenen Zahlensystemen bei *J. Kraus*, Zeitschr. Math. Phys. 37, 1892, p. 321; 39, 1894, p. 11.

gruenzbegriffs (s. u. Nr. 4) die Sätze über Teilbarkeit durch 3, 5, 7, 9, 11 u. a. fliessen[7]). Jede positive ganze Zahl ist eine Summe (ein Aggregat) verschiedener Potenzen der Zwei (Drei). Ist p *Primzahl*, so ist

$$\nu = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots = \frac{n - (a_1 + a_2 + \cdots + a_\alpha)}{p}$$

der Exponent der höchsten Potenz von p, die in $n!$ aufgeht; den Rest von $\frac{n!}{p^\nu}$ (mod. p) giebt *L. Stickelberger* (Math. Ann. 37, 1890, p. 321). Das Produkt von n successiven Zahlen ist teilbar durch das der ersten n; $n!$ kann keine Potenz sein[8]), desgleichen sind, wenn n Primzahl > 5, die Gleichungen

$$(n-1)! + 1 = n^k, \quad \left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2 + 1 = n^k$$

unmöglich[9]). Aus einem allgemeineren, von *F. G. Teixeira* bewiesenen Satze von *M. Weill* (Par. C. R. 92, 1881, p. 1066; Par. Soc. M. F. Bull. 9, 1881, p. 172) folgt $\frac{(hn)!}{(h!)^n}$ teilbar durch $n!$, nach *D. André* (Par. C. R. 94, 1882, p. 426), sogar durch eine gewisse Potenz $(n!)^\alpha$, welche *C. de Polignac* (Par. C. R. 96, 1883, p. 485) näher bestimmt hat. Nach *E. Catalan*[10]) ist $\frac{(2a)!\,(2b!)}{a!\,(a+b)!\,b!}$ ganze Zahl. Die Kugelzahl in einem Kugelhaufen mit quadratischer (dreieckiger) Basis,

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \left(\text{resp. } \frac{n(n+1)(n+2)}{6}\right),$$

ist eine Quadratzahl nur für $n = 1, 24$ (resp. 1, 2, 48), sie kann kein Kubus noch eine fünfte Potenz sein[11]).

3. Euklidischer Algorithmus. Farey'sche Reihen. Bei relativ primen m, n giebt der Euklidische Algorithmus den gewöhnlichen Kettenbruch für $\frac{n}{m}$:

$$\frac{n}{m} = q_0 + \frac{1}{q_1 +} \cdots + \frac{1}{q_i} = (q_0, q_1, \ldots q_i).$$

---

7) Man bemerke unter diesen Sätzen die von *O. Kessler*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 28, 1883, p. 60.

8) *J. Liouville* im J. de math. (2) 1, 1856, p. 277, sowie *M. C. Moreau*, N. Ann. (2) 11, 1872, p. 172. Der Beweis geschieht mittels des von *Tschebyscheff* (Petr. Ac. Bull. 11, 1853) bewiesenen Postulats von *J. Bertrand*, wonach es für $a > 3$ zwischen a, $2a - 2$ eine Primzahl giebt.

9) *J. Liouville* im J. de math. (2) 1, 1856, p. 351.

10) *Catalan*, N. Ann. (2) 13, 1874, p. 518; vgl. *J. Bourguet*, ebend. (2) 14, 1875, p. 89; *Bachmann*, Zahlentheorie 1, p. 37.

11) N. Ann. (2) 15, 1876, p. 46; 17, 1878, p. 464; 20, 1881, p. 330.

Die Abhängigkeit von n, m von den Teilnennern bezeichnet *Gauss* durch die Symbole $n = [q_0, q_1, \ldots q_i]$, $m = [q_1, q_2, \ldots q_i]$ (*Gauss'sche Klammern*); über die Gesetze, die sie befolgen, s. die Theorie der Kettenbrüche [I A 3, Nr. **45** f.].

Ist $\frac{\xi_n}{\eta_n}$ bei dem gewöhnlichen Kettenbruch für einen reellen Wert ω der n^{te} Näherungsbruch, so ist $\frac{\xi_n}{\eta_n} - \frac{\xi_{n-1}}{\eta_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{\eta_{n-1}\eta_n}$; ξ_n, η_n sind relativ prim; die Näherungsbrüche ungerader und die gerader Ordnung sind zwei gegen einander konvergierende Wertreihen, ω zwischen ihnen enthalten; $x = \xi_n$, $y = \eta_n$ geben ein *relatives Minimum* von $x - y\omega$, insofern der Ausdruck für $y < \eta_n$ grösser ist (*Lagrange*). Ist in dem Kettenbruch für $\frac{n}{m} > 1$ die Reihe der Teilnenner symmetrisch, so ist $m^2 + 1$ oder $m^2 - 1$ teilbar durch n. Die gewöhnlichen Kettenbrüche für zwei äquivalente Irrationellen ω, ω', für welche nämlich

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ ganze Zahlen}, \ \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$$

haben einen vollständigen Quotienten gemeinsam, und umgekehrt. Über periodische Kettenbrüche vgl. I C 3, Nr. **7**.

Nimmt man bei dem Algorithmus des grössten gemeinsamen Teilers statt positiver Reste negative, oder mischt beide Methoden, so werden die Teilzähler -1 resp. ± 1. Jeder irreduktible Bruch $\frac{n}{m}$ besitzt m solcher Kettenbrüche, keinen kürzern als den, wo nach dem kleinsten Rest dividiert wird; diejenigen nach dem grössten geben die (zwei) längsten[12]). Die Anzahl der erforderlichen Divisionen ist bei der Euklidischen Methode $< 5\mu$, wo μ die Ziffernzahl von $m < n$ (*G. Lamé*, Par. C. R. 19, 1844, p. 867), bei der nach dem kleinsten Reste $< \frac{10}{3} \log m$ (*J. Binet*, J. de math. 6, 1841, p. 449); noch kleinere Grenzen bestimmte *A. Dupré* (ebend. 11, 1846, p. 41).

Die irreduktibeln Brüche, deren Zähler und Nenner $\overline{\gtrless} \nu$, bilden, der Grösse nach geordnet, die *Farey'sche Reihe* ν^{ter} Ordnung. Nach *A. Cauchy* ist für zwei successive Brüche $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ einer solchen $ad - bc = \pm 1$; ferner ist (*Farey*'scher Satz) jeder ihrer Brüche $\frac{a}{b}$ aus den zwei ihm benachbarten $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ *komponiert*[13]): $\frac{a}{b} = \frac{c+e}{d+f}$. Letztern

12) *Vahlen*, J. f. Math. 115, 1895, p. 221.

13) *Cauchy*, Exerc. de math. 1, Par. 1827, p. 114; *J. Farey*, Phil. Mag. (1) 47, (1816), p. 385 (ohne Beweis; durch Beobachtung an den Goodwyn'schen Quotiententafeln); Anonym ib. 48 (1817), p. 204.

Satz gab *A. Hurwitz*[14]) unter anderer Form und zeigte, wie er dann umzukehren ist. Die successiven Glieder $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ der *Farey*'schen Reihe ν^{ter} Ordnung, zwischen denen ein Wert w liegt, heissen Näherungswerte für w (*Hurwitz* und *Vahlen* a. a. O.); für wachsendes ν wird der komponierte Bruch der nächstfolgende Näherungswert. Von $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$ aus erhält man alle positiven Brüche, indem man zwischen je zwei successive den komponierten setzt. Komponiert man stets nur die zwei, zwischen denen w liegt, so entstehen alle Näherungswerte für w. Diese, geordnet wie sie durch Komposition hervorgehen, teilen sich in Gruppen mit positivem Fehler ($\varepsilon = +1$) und solche mit negativem ($\eta = -1$); bei den Hauptnäherungswerten wechselt sein Vorzeichen. Die Reihe der Vorzeichen ist die Charakteristik von w,[15]) darstellbar durch $\varepsilon\eta^{\varkappa_1}\varepsilon^{\varkappa_2}\eta^{\varkappa_3}\ldots$; ihr entspricht der gewöhnliche Kettenbruch $w = (\varkappa_1 - 1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots)$, seine Näherungsbrüche sind die Hauptnäherungswerte für w.

Ähnlich gelingt die gleichzeitige Annäherung an zwei Werte x, y durch zwei Brüche mit gleichem Nenner geometrisch mittels „*Farey-scher Dreiecksnetze*“.

Mit den *Farey*'schen Reihen ist die Reduktion der indefiniten quadratischen binären Formen verknüpft[16]). Desgleichen die *Stern*'sche Entwicklung[17]) (m, n), bei der aus den positiven ganzen teilerfremden Zahlen m, n die Reihen

$$m,\ m + n,\ n$$

$$m,\ 2m + n,\ m + n,\ m + 2n,\ n$$

u. s. w. gebildet werden; jede positive ganze Zahl $km + ln$ (k, l teilerfremd) kommt in ihr vor (für $m = 1$, $n = 1$ jede positive ganze Zahl, auch je zwei relativ prime Zahlen a, b als successive Glieder); die Ordnung der Reihe, in der dies geschieht, bestimmt sich durch den gewöhnlichen Kettenbruch für $\frac{a}{b}$.

J. Hermes (Math. Ann. 45, 1894, p. 371) nennt *Farey'sche Zahlen* die Zahlen τ_i, für welche $\tau_1 = 1$ und, falls $h \overline{\gtrless} 2^{\varkappa}$, $\tau_{2^{\varkappa}+h} = \tau_h + \tau_{2^{\varkappa}-h+1}$ ist. Nach dem Werte von $\varkappa$ zerfallen sie in Abteilungen; diejenigen der

14) *Hurwitz,* Math. Ann. 44, 1894, p. 417.

15) Vgl. hierzu *E. B. Christoffel,* Ann. di mat. (2) 15, 1887, p. 253.

16) *Hurwitz,* Math. Ann. 39, 1891, p. 279 u. 45, 1894, p. 85, sowie Chic. Math. Congr. pap. 1896 (1893), p. 125; s. auch *A. Markoff,* Math. Ann. 15, 1879, p. 381.

17) *M. A. Stern,* J. f. Math. 55, 1858, p. 193; s. dazu *G. Eisenstein,* Berl. Ber. 1850, p. 36.

$\varkappa - 1^{\text{ten}}$ sind *Gauss*'sche Klammern, deren Elemente die Zerlegungen von $\varkappa$ in positive Summanden bilden. Heisst eine solche Zerlegung $(1, 2, \ldots r)$-frei, wenn darin die Summanden $1, 2, \ldots r$ fehlen, so ist die Anzahl der $(1, 2, \ldots r)$-freien Zerlegungen von $\varkappa$ (mit Permutationen) gleich dem $\varkappa^{\text{ten}}$ Gliede der *Lamé'schen Reihe* r^{ter} *Ordnung*: $L_{h+1} = L_h + L_{h-r}$, die mit r Nullen und $r + 1$ Einsen beginnt.

4. Reste und Kongruenzen. Sätze von Fermat und Wilson. Primitive Wurzeln. Haben n, n' gleiche Reste (mod. m), so heissen sie (mod. m) *kongruent*: $n \equiv n'$ (mod. m), *Gauss*, Disqu. A. art. 1. — Alle (mod. m) kongruenten Zahlen bilden eine *Restklasse*, m inkongruente Zahlen ein *vollständiges*, $\varphi(m)$ inkongruente zu m prime Zahlen ein *reduziertes Restsystem* (mod. m).

Jede ganze Zahl x, für welche eine ganze ganzzahlige Funktion

$$f(x) \equiv 0 \pmod{m}$$

wird, heisst eine *Lösung*, alle kongruenten Lösungen eine *Wurzel* dieser Kongruenz. Ihr *Grad* ist der Exponent h der höchsten Potenz, deren Koeffizient durch m nicht aufgeht. Ist m Primzahl, so ist die Anzahl der Wurzeln $\overline{\gtrless} h$.[18])

Jede zu m prime Zahl a *gehört* zu einem (kleinsten) Exponenten t derart, dass $a^t \equiv 1$ (mod. m); t ist Teiler von $\varphi(m)$, also

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m};$$

insbesondere wenn m Primzahl p, so ist (*Fermat'scher Satz*)

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Euler bewies letztern (Petr. Comm. nov. 7, 1758/59, p. 49 = Comm. Ar. 1, p. 260) durch Exhaustion (s. Disqu. A. art. 49), den verallgemeinerten Satz ebend. 8, 1760/61, p. 74 = Comm. Ar. 1, p. 274; *J. L. Lagrange*[19]) gab die Kongruenz

$$x^{p-1} - 1 \equiv (x+1)(x+2)\ldots(x+p-1) \pmod{p},$$

aus der neben dem Fermat'schen auch der für Primzahlen charakteristische *Wilson'sche Satz*:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) \equiv -1 \pmod{p}$$

hervorgeht[20]). Allgemein ist das Produkt der Zahlen $< m$, welche

18) *Lagrange*, Berl. Ac. Hist. 24. 1770 (année 1768), p. 192 = Oeuvr. 2, p. 655; vorher bezüglich auf $x^n - 1 \equiv 0$ bei *Euler*, Petr. Comm. nov. 18, 1773, p. 93 = Comm. Ar. 1, p. 524.

19) *Lagrange*, Berl. Ac. N. Mém. 2, 1773 (année 1771), p. 125 = Oeuvr. 3, p. 425.

20) *Ed. Waring*, Medit. alg. Cambr. 1770; nach *Lagrange* bewies den Satz *Euler*, Op. anal. Petr. 1783, 1, p. 329 = Comm. Ar. 2, p. 44, s. auch *Gauss* Disqu. A. art. 75—77. Er ist in einem allgemeineren *J. Steiner*'schen über Primzahlen

prim zu m sind, $\equiv -1$, wenn $m = 4,\ p^a,\ 2p^a$ ist, sonst $\equiv +1$ (mod. m)[21]).

Für $p = 4h + 3$ folgt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \frac{p-1}{2} \equiv \pm 1$ (mod. p); die von *Lej.-Dirichlet* (J. f. Math. 3, 1828, p. 407 = Werke 1, p. 105) gestellte Frage nach dem Vorzeichen beantwortete *K. G. J. Jacobi* (J. f. Math. 9, 1832, p. 189 = Werke 6, p. 240) dahin, dass es gleich dem von $(-1)^B$ sei, wo B die Anzahl der quadratischen Reste (s. u. Nr. **6**) von p, welche $> \frac{p}{2}$; weniger einfache Regeln gaben *L. Kronecker* und *J. Liouville* [J. de math. (2) 5, 1860, p. 127, 267].

Jacobi (J. f. Math. 3, 1828, p. 301 = Werke 6, p. 238) gab zuerst Fälle an, in denen $a^{p-1} - 1$ durch p^2 teilbar. Der Rest von $\frac{a^{p-1}-1}{p}$ (mod. p) bestimmt sich nach einer Regel von *D. Mirimanoff* (J. f. Math. 115, 1895, p. 295), aus welcher auch eine von *Stern* (ebend. 100, 1887, p. 182) richtig gestellte Formel von *Sylvester* (Par. C. R. 52, 1861, p. 161) folgt. Aus *Stern*'s Formeln fliesst u. a. die *Eisenstein*'sche (Berl. Ber. 1850, p. 41)

$$\frac{2^{p-1}-1}{p} \equiv 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{p-2} \text{ (mod. } p).$$

Ist d Teiler von $p - 1$, so gehören $\varphi(d)$ Reste zum Exponenten d (mod. p), also $\varphi(p-1)$ zum Exponenten $p - 1$ (*primitive Wurzeln* g (mod. p)). Ist a prim zu p, so giebt es eine Zahl $\alpha < p - 1$, für welche $a \equiv g^\alpha$ (mod. p); α heisst *Index* von a, „ind. a"; die Indices aller Reste (mod. p) bilden das (auf g bezügliche) Indexsystem. Da

$$\text{ind. } aa' \equiv \text{ind. } a + \text{ind. } a' \pmod{p-1},$$

so ist die Rechnung mit Indices und der Übergang von einem System zu einem andern ähnlich wie bei Logarithmen[22]).

Wie eine primitive Wurzel zu finden, zeigt u. a. *Gauss*, Disqu. A. art. 73[23]). Das Produkt der primitiven Wurzeln ist $\equiv 1$ (mod. $p > 3$), ihre Summe $\equiv 0$, wenn $p - 1$ gleiche Faktoren hat, sonst $\equiv \pm 1$,

---

enthalten, vgl. dazu auch *Jacobi* (*Steiner*, J. f. Math. 13, 1835, p. 356 = Werke 2, p. 7 und *Jacobi*, ib. 14, 1835, p. 64 = Werke 6, p. 252).

21) *Gauss*, Disqu. A. art. 78; *Brennecke, A. L. Crelle* und *F. Arndt* im J. f. Math. 19, 1839, p. 319; 20, 1840, p. 29 und 31, 1846, p. 329.

22) *Jacobi*'s Canon arithmeticus, Regiom. 1839, giebt für jede Primzahl und eine bezügliche primitive Wurzel die den Resten entsprechenden Indices und umgekehrt. S. dazu *V. A. Lebesgue*, J. de math. 19, 1854, p. 334.

23) S. auch *G. Oltramare*, J. f. Math. 49, 1855, p. 161. Eine Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln aller Primzahlen < 3000 gab *G. Wertheim*, Acta math. 17, 1893, p. 315.

je nachdem die Anzahl der Primfaktoren gerade ist oder nicht (ebend. art. 80, 81; *F. Arndt,* J. f. Math. 31, 1846, p. 326; *F. Hofmann,* Math. Ann. 20, 1882, p. 471).

Auf die Theorie der Indices gründet sich die der binomischen Kongruenz[24])

$$x^n \equiv a \pmod{p}.$$

Ist δ grösster gemeinsamer Teiler von $n, p-1$, so hat diese δ oder 0 Wurzeln, je nachdem ind. $a \equiv 0 \pmod{\delta}$ ist oder nicht; entsprechend heisst a n^{ter} *Potenzrest* oder *-Nichtrest* von p.

Primitive Wurzeln (mod. m), d. i. zum Exponenten $\varphi(m)$ gehörige Reste giebt es nur, wenn $m = p^n$ oder $2 \cdot p^n$ ist (Disqu. A. art. 92). Eine primitive Wurzel g (mod. p) ist es auch (mod. p^2) — und dann auch (mod. p^n) — falls g nicht der kleinste positive Rest von g^p (mod. p^2) ist[25]). Im allgemeinen entspricht a kein Index, wie für $m = p$, nach *Dirichlet*[26]) kann ihm aber ein *Komplex* von soviel Indices zugeordnet werden, als verschiedene Primfaktoren in m aufgehen; anders bestimmt *F. Mertens*[27]) einen solchen Komplex auf Grund eines Kronecker'schen Gruppensatzes.

5. Kongruenzen und unbestimmte Gleichungen ersten Grades. Partialbrüche. Perioden der Dezimalbrüche. Die Kongruenz $nx \equiv c$ (mod. m) hat, wenn d grösster gemeinsamer Teiler von m, n ist, d oder 0 Wurzeln, je nachdem c durch d aufgeht oder nicht. Sie ist gleichbedeutend mit der unbestimmten (*Diophantischen*) Gleichung $nx - my = c$; im erstern Falle folgt aus einer Lösung $x = x_0$, $y = y_0$ die vollständige Lösung

$$x = x_0 + \frac{m}{d} z, \quad y = y_0 + \frac{n}{d} z \qquad (z \text{ ganze Zahl}).$$

Für $d = 1$ ist die Gleichung stets auflösbar. Sind dann ξ_0, η_0 Zähler und Nenner des vorletzten Näherungsbruches für $\frac{m}{n}$, so gilt bei passendem Vorzeichen $x_0 = \pm c\xi_0$, $y_0 = \pm c\eta_0$.

Auf Kongruenzen ersten Grades kommt die Aufgabe zurück, $x \equiv \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ (mod. $a_1, a_2, \ldots$) zu machen. Wenn überhaupt möglich, kann sie auf den Fall relativ primer Moduln reduziert werden; mittels Hilfszahlen $r_1, r_2, \ldots$ von der Art, dass $r_i \equiv 1$ (mod. a_i), $\equiv 0 \left(\text{mod.}\ \frac{a_1 a_2 \cdots}{a_i}\right)$ ist, findet sich dann als allgemeine Lösung

24) S. dazu *Arndt,* J. f. Math. 31, 1846, p. 333.

25) *Lebesgue,* J. de math. 19, 1854, p. 289, 334.

26) *Dirichlet,* Berl. Abh. 1837, p. 45 = Werke 1, p. 313 oder Vorlesungen, Suppl. 5. Vgl. *G. T. Bennett,* Lond. Tr. 184, 1893, p. 189, wo auch Tabellen.

27) *Mertens,* Wien. Ber. 106, 1897, p. 132.

$$x \equiv \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 + \cdots \pmod{a_1 a_2 \ldots}.$$[28]

Wenn die α_i vollständige (reduzierte) Restsysteme nach den a_i resp. sind, so durchläuft x ein vollständiges (reduziertes) Restsystem (mod. $a_1 a_2 \ldots$).

Zwei Zahlen r, s, für welche $rs \equiv 1$ (mod. m), heissen *socii* (*Gauss*); man setzt dann $\frac{1}{r} \equiv s$ (mod. m). Mit ihrer Hilfe ergeben sich leicht die Sätze von *Fermat* und *Wilson* und über quadratische Reste[29]).

Die ganzzahlige Lösung der allgemeineren Gleichung

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = c$$

kommt auf die der obigen einfachen zurück[30]). Aus einer Lösung ξ_i findet sich die allgemeine in der Form

$$x_i = \xi_i + \sum_{\varkappa=1}^{n-1} \alpha_{\varkappa i} z_\varkappa,$$

wo die $\alpha_{\varkappa i}$ bestimmte, die $z_\varkappa$ unbestimmte ganze Zahlen sind. Die, falls c und die α_i positive ganze Zahlen sind, endliche Anzahl positiver Lösungen drückt *K. Weihrauch* (Zeitschr. f. Math. u. Phys. 20, 1875, p. 97, 112) durch eine Formel aus, welche als Koeffizienten die Bernoulli'schen Zahlen enthält. Für die Gleichung $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = c$ (α_1, α_2 relativ prim) ist sie $\left[\frac{c}{\alpha_1 \alpha_2}\right] + \gamma$, wo $\gamma = 0$ oder 1.[31]) — Bezüglich der ganzzahligen Lösung eines Systems linearer Gleichungen oder Kongruenzen s. die arithmetische Theorie der linearen Formen[32]) [I C 2, Nr. a].

Hierhin gehört auch der Satz (Disqu. A. art. 309—311): Der irreduktible Bruch $\frac{m}{n}$ ist auf eine einzige Art in Partialbrüche zerlegbar:

$$\frac{m}{n} = \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \cdots \pm \varkappa,$$

wo $n = abc\ldots$ eine Zerlegung in relativ prime Faktoren, $\varkappa$ ganze Zahl, $\alpha, \beta, \ldots$ positive ganze Zahlen $< a, b, \ldots$ resp. sind. Desgleichen

28) Diese Gauss'sche Regel (Disqu. A. art. 36) giebt schon der Chinese *Sun Tsze* in seinem Ta yen (*K. L. Biernatzki* und *L. Matthiessen*, J. f. Math. 52, 1856, p. 59 und 91, 1881, p. 254).

29) *Dirichlet*'s Vorlesungen, p. 80; *E. Schering*, Acta math. 1, 1882/3, p. 153.

30) *Euler*, Op. anal. 2, Petr. 1785, p. 91 = Comm. Ar. 2, p. 99; *Jacobi* gab vier verschiedene Lösungsarten, J. f. Math. 69, 1868, p. 1 = Werke 6, p. 355; vgl. die Vereinfachung und Weiterführung bei *W. Fr. Meyer*, Zürich Congr. Verh. 1898, p. 168.

31) *E. Cesàro*, Liège mém. (2) 10, 1883, p. 275; *E. Catalan*, ib. (2) 12, 13, 15 (1886—1888).

32) S. darüber *St. Smith*, Lond. Trans. 151, 1862 (1861), p. 293; Lond. Math. S. P. 1873, p. 241 = Coll. Pap. 1, p. 367; 2, p. 67; *G. Frobenius*, J. f. Math. 86, 1879, p. 146 u. 88, 1880, p. 96.

die *Periodizität der Dezimalbrüche* für gewöhnliche Brüche (Disqu. A. art. 312—318). Sei a prim zu $2p$, p Primzahl. Die *Mantissen* von $\frac{a}{2^\mu}$, $\frac{a}{5^\mu}$ sind $5^\mu a$, $2^\mu a$; gehört 10 (mod. p^μ) zum Exponenten c, so ist die Mantisse von $\frac{a}{p^\mu}$ periodisch und c die Grösse der Periode. Die Mantisse von $\frac{m}{n}$ findet sich aus denen der Partialbrüche. Ist $n = 2^\alpha 5^\beta \nu$, so ist sie von der $\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}$ten Stelle an periodisch, je nachdem $\alpha \gtrless \beta$. Daran sich schliessende Sätze s. u. a. bei *S. Morel* und *E. Pellet*, N. Ann. (2) 10, 1871, p. 39, 93. *J. W. L. Glaisher* in „Henry Goodwyns table of circles“, Proc. Cambr. 3, 1879, p. 185; *Kessler*, „Periodenlängen der Dezimalbrüche ...“, Berlin 1895, geben die Perioden und ihre Grösse bei Brüchen mit Primzahlnenner u. dgl.

6. Quadratische Reste; Reziprozitätsgesetz. Eine zu p prime Zahl n heisst *quadratischer Rest oder Nichtrest* von p, je nachdem $x^2 \equiv n$ (mod. p) auflösbar oder nicht. Ist p ungerade Primzahl, so setzt man resp. (*Legendre'sches Symbol*) $\left(\frac{n}{p}\right) = \pm 1$, für eine in Primfaktoren zerlegte ungerade Zahl $p = p' p'' \ldots$ (*Jacobi'sches Symbol*)

$$\left(\frac{n}{\pm p}\right) = \left(\frac{n}{p'}\right)\left(\frac{n}{p''}\right)\cdots$$

Ist p Primzahl, so ist (*Euler'sches Kriterium*)[33] $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{n}{p}\right)$ (mod. p). Damit die Kongruenz $x^2 \equiv n$ (mod. p) bei gegebenem Modulus

$$p = 2^\alpha p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_\varkappa^{a_\varkappa}$$

lösbar sei, sind 1) falls $\alpha = 0, 1$: die Bedingungen $\left(\frac{n}{p_i}\right) = 1$,

2) falls $\alpha = 2$: ausser diesen Bedingungen $n = 4h + 1$,

3) falls $\alpha > 2$: ausser jenen Bedingungen $n = 8h + 1$ notwendig und hinreichend. Sind diese Bedingungen erfüllt, so giebt es resp. $2^\varkappa$, $2^{\varkappa+1}$, $2^{\varkappa+2}$ Wurzeln.

Von welchen ungeraden Zahlen p eine gegebene Zahl quadratischer Rest sei, beantworten die sogenannten *Ergänzungssätze*[34]):

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \; (p > 0), \quad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

und das (verallgemeinerte) *Reziprozitätsgesetz*:

---

33) *Euler*, Opusc. anal. 1 (1773), p. 242, 268 = Comm. arithm. coll. 2, p. 1, 13.

34) Beide gab *P. Fermat*; *Euler* bewies den ersten (op. anal. 1, p. 64; Petr. Comm. N. 5, 1759, p. 5 und 18, 1774, p. 112 = Comm. Ar. coll. 1, p. 210, 477), s. auch *Gauss*, Disqu. A. art. 108—111; den zweiten *Lagrange*, Berl. Ac. N. Mém. 4, 1775, p. 349, 351 = Oeuvr. 3, p. 771, s. auch *Gauss*, Disqu. A. art. 112—116.

$$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

(p, q nicht zugleich negativ, ungerade, relativ prim). Der Entdecker des auf Primzahlen bezüglichen Legendre'schen Reziprozitätsgesetzes ist *Euler* [35]), *Legendre* gab ihm obige Form und bewies es teilweise. *Gauss* gab sieben Beweise des Satzes (theorema fundamentale). Der 1te (Disqu. A. art. 131—151), von *Dirichlet* vereinfachte, ist ein Induktionsbeweis, der des Satzes bedarf, dass es für eine Primzahl $p = 8h + 1$ eine kleinere Primzahl giebt, von welcher p quadratischer Nichtrest ist [36]). Der 2te Beweis (Disqu. A. art. 262) ruht auf der Theorie der quadratischen Formen, der 4te und 6te (*Gauss*, Werke 2, p. 9 u. 55) auf der Kreisteilung, der 7te (ebend. p. 234) auf höheren Kongruenzen, der 3te und 5te (ebend. p. 3 und 51) auf dem *Gauss'schen Lemma* [37]). Bei *Gauss* für zwei Primzahlen, nach *E. Schering* (Berl. Ber. 1876, p. 330) für zwei ungerade relativ prime positive p, q giltig, ist $\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\mu}$, wenn μ die Anzahl der negativen unter den Resten von $1\cdot q, 2\cdot q, \cdots \frac{p-1}{2}\cdot q \pmod{p}$ ist, oder

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \operatorname{sgn.} \prod_{h=1}^{\frac{p-1}{2}} R\left(\frac{hq}{p}\right) \text{ [38]),}$$

wenn $R(x) = x - \left[x + \frac{1}{2}\right]$ der Unterschied zwischen x und der nächsten ganzen Zahl und sgn. x die mit dem Vorzeichen von x genommene Einheit ist (*Kronecker*).

Fast alle übrigen Beweise fallen in dieselben Kategorieen. *O. Baumgart* (über das quadratische Reziprozitätsgesetz, Leipzig 1885) hat die bis dahin bekannten systematisch geordnet. Unter den späteren Beweisen [39]) der letzten Kategorie zeichnen sich die von *H. Schmidt* (J. f.

---

35) S. darüber *Kronecker,* Berl. Ber. 1875, p. 267.

36) Auf demselben Satze beruht *Kronecker*'s Beweis, Berl. Ber. 22./6. 1876, p. 330 und 7./2. 1884, p. 519, mit dem *Matth. Schaar,* Brux. Bull. (1) 14, 1847, art. 1, p. 79 zu vergleichen ist.

37) Eine Verallgemeinerung desselben s. bei *P. Gazzaniga,* Veneto R. Istituto (6) 4, 1886, p. 1271.

38) Statt dieses algebraischen Ausdrucks benutzte *Eisenstein* (J. f. Math. 29, 1845, p. 177) den transcendenten

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \prod_h \frac{\sin\frac{2hq\pi}{p}}{\sin\frac{2h\pi}{p}}.$$

39) S. u. a. *A. S. Bang,* N. Tidsskr. f. Math. 5 B, 1894, p. 92; *V. Buniakowsky,* St. Pét. Bull. 14, 1869, p. 432; *F. Franklin,* Mess. (2) 19, 1890, p. 176; *J. C. Fields,* Amer. J. of math. 13, 1890, p. 189; *Lerch,* Teixeira J. 8, 1887, p. 137; *J. Hermes,*

Math. 111, 1893, p. 107) aus, sowie der von *G. Zolotareff* (N. Ann. (2) 11, 1872, p. 354) durch sein Prinzip: für zwei Primzahlen ist $\left(\frac{q}{p}\right) = \pm 1$, je nachdem die Restreihe $1 \cdot q, 2 \cdot q, \ldots (p-1)q$ (mod. p) aus $1, 2, \cdots p-1$ durch eine gerade oder ungerade Anzahl Dérangements entsteht. *M. Lerch* (Bull. international, Prague 1896) hat dasselbe für zusammengesetzte p, q erweitert. Ferner ist für Primzahlen nach *E. Busche*[40]) $\left(\frac{q}{p}\right) = \pm 1$, je nachdem die Anzahl der Zahlen $1 \cdot \frac{q}{2}, 2 \cdot \frac{q}{2}, \cdots \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q}{2}$, die zwischen einem ungeraden und dem folgenden geraden Vielfachen von $\frac{p}{2}$ liegen, gerade oder ungerade ist. In wiederholten Arbeiten hat *Kronecker* die natürlichste Herleitung des Reziprozitätsgesetzes aus den Eigenschaften der Funktion $[x]$ gesucht. Aus ihnen folgt

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \text{sgn.} \prod_{h,k} \left(\frac{k}{q} - \frac{h}{p}\right), \qquad h = 1, 2, \cdots \frac{p-1}{2}, \quad k = 1, 2, \cdots \frac{q-1}{2},$$

oder auch

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \text{sgn.} \prod_{h,k} \left(\frac{h}{p} - \frac{k}{q}\right)\left(\frac{h}{p} + \frac{k}{q} - \frac{1}{2}\right),$$

und aus jeder dieser Formeln das Reziprozitätsgesetz[41]). In seinen späteren Arbeiten stellt er das Verhältnis seiner Forschungen zu denjenigen von *A. Genocchi* und *Schering* fest[42]); die Beweise der letztern, im wesentlichen identisch, sowie der 5te Gauss'sche können als „logarithmische Umgestaltung“ des von *Kronecker* in einfachster Gestalt gegebenen 3ten Gauss'schen gelten. Andererseits hebt *Schering* (Acta Math. 1, 1883, p. 153) hervor, dass alle diese Beweise, sowie der geometrische von *Eisenstein*, auf die Zählung der Lösungen linearer und bilinearer Kongruenzen zurückkommen. Schon *Genocchi* bemerkte die Beziehungen

$$\left[\frac{hq}{p}\right] = \frac{1}{2}\sum_k \left(1 + \text{sgn.}\left(\frac{h}{p} - \frac{k}{q}\right)\right),$$

$$\left[\frac{hq}{p} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\sum_k \left(1 + \text{sgn.}\left(\frac{h}{p} + \frac{k}{q} - \frac{1}{2}\right)\right),$$

Arch. f. Math. u. Phys. (2) 5, 1887, p. 190; *E. Lucas,* St. Pét. Mélanges math. et astr. 7, 1894, p. 65; Assoc. franç. 19, 1890, p. 147; s. das. auch *A. Matrot*, p. 82.

40) *Busche*, J. f. Math. 103, 1888, p. 118; Hamb. Mitt. 3, 1896, p. 233, wo ein geometrischer Beweis analog dem Eisenstein'schen (J. f. Math. 28, 1844, p. 246). Vgl. noch *Lange,* Leipz. Ber. 48, 1896, p. 629; 49, 1897, p. 607, wo die Beziehungen von zwei Reihen von Teilstrecken p, q zu Grunde liegen.

41) *Kronecker,* Berl. Ber. 7./2. 1884, p. 519.

42) *Kronecker,* ebend. 1885, p. 383 sowie J. f. Math. 104, 1889, p. 348; *Ge-*

aus denen die von *Hacks*[43]) sogleich folgt:

$$\sum_h \left[\frac{hq}{p}+\frac{1}{2}\right] = \sum_k \left[\frac{kp}{q}+\frac{1}{2}\right];$$

Beziehungen ähnlicher Art gab *Stern,* J. f. Math. 106, 1890, p. 337.

Eine durch kein Quadrat teilbare Zahl n kann gleich $\pm 2^\nu \cdot p$ gesetzt werden, wo p positiv und ungerade; sei $\delta = \pm 1$, je nachdem $\pm p \equiv 1, 3 \pmod 4$, und $\varepsilon = \pm 1$ für $\nu = \begin{cases}0\\1\end{cases}$, so ist für eine zu $2n$ prime positive Zahl m (*Dirichlet*)

$$\left(\frac{n}{m}\right) = \delta^{\frac{m-1}{2}} \cdot \varepsilon^{\frac{m^2-1}{8}} \cdot \left(\frac{m}{p}\right).$$

Alle solche m, für welche $\left(\frac{n}{m}\right) = +1$, sind, wenn $\delta = \varepsilon = +1$, in $\frac{1}{2}\varphi(p)$ arithmetischen Reihen $2nz + a$, sonst in ebenso viel Reihen $4nz + a$, alle dagegen, für welche $\left(\frac{n}{m}\right) = -1$, in ebenso viel Reihen $2nz + b$, $4nz + b$ resp. gegeben (Disqu. A. art. 147—149); die Primzahlen der erstern Art heissen die *Teiler von* $x^2 - n$.

Zur Bestimmung von $\left(\frac{n}{m}\right)$ dienen Regeln, die sich auf Algorithmen wie der Euklidische oder auf Kettenbrüche gründen. Die erste gab *Gauss* (Werke 2, p. 61 u. ff.) auf Grund des Euklidischen Algorithmus und der Eigenschaften seines Ausdrucks $\varphi(m, n)$ (s. I C 3, Nr. 4). *Ch. Zeller,* der sein Verfahren vereinfachte (Gött. Nachr. 1879, p. 197), setzt auch einen Algorithmus mit positiven Resten voraus. *Schering* (Gött. Nachr. 1879, p. 217) giebt mittels seiner Funktion

$$\text{Anz.}\begin{Bmatrix}\text{pos.}\\\text{neg.}\end{Bmatrix} F(\mu, \nu, \ldots)$$

d. i. der Anzahl positiver oder negativer Werte, die F für alle $\mu, \nu, \ldots$ in gewissen Grenzen annimmt, ein von jener Voraussetzung freies, allgemeineres Verfahren. Eine andere Regel gab *Eisenstein,* noch andere, die sich der Kettenbrüche bedienen, *Gegenbauer* und *Kronecker*[44]).

Aus *Dirichlet*'s Formeln [I C 2, Nr. **b**] für die Klassenanzahl quadra-

---

nocchi, Belg. Mém. 25, 1853, (1852) chap. 13; auch Par. C. R. 90, 1880, p. 300; *Schering,* Gött. Nachr. 1879, p. 217; s. dazu auch *J. Hacks,* Acta math. 12, 1888, p. 109.

43) *Hacks* a. a. O. S. auch *Busche,* Über eine Beweismethode in der Zahlentheorie, Gött. 1883.

44) *Eisenstein,* J. f. Math. 27, 1844, p. 317; s. dazu *Lebesgue,* J. de math. 12, 1847, p. 497; *L. Gegenbauer,* Wien. Ber. 1880, p. 931 und 1881, p. 1089; *Kronecker,* Berl. Ber. 1884, p. 530. Vgl. auch *G. Heinitz,* Diss. Gött. 1893.

tischer Formen folgen Sätze über die quadratischen Reste und Nichtreste in gewissen Grenzen; z. B. ist für Primzahlen $p = 4h + 3$ zwischen 0, $\frac{p}{2}$ die Anzahl der quadratischen Reste a grösser als die der Nicht-Reste b; zwischen 0, p ist $\sum a < \sum b$. *Stern* fand (J. f. Math. 71, 1870, p. 137) $\sum b < 2 \sum a$ für $p = 8h + 3$ und $< 3 \sum a$ für $p = 8h + 7$. Nach *R. Götting* (ebend. 70, 1869, p. 363; vgl. *Lebesgue*, J. de math. 7, 1842, p. 137) liegen für $p = 8h + 3$ zwischen 0, $\frac{p}{4}$ gleichviel quadratische Reste wie Nichtreste, für $p = 8h + 7$ zwischen $\frac{p}{4}$, $\frac{p}{2}$. *Stern* fügte ähnliche Sätze hinzu, z. B. giebt es für $p = 8h + 1$ zwischen 0, $\frac{p}{2}$ mehr gerade als ungerade quadratische Reste, umgekehrt für $p = 8h + 5$. Neben quadratischen Resten hat *Stern*[45]) die *trigonalen* und *bitrigonalen*, d. i. die Reste der Zahlen $\frac{x(x+1)}{2}$ und $x(x+1) \pmod{p}$ untersucht. Eine von $\frac{p^2-1}{8}$ verschiedene Zahl n ist trigonaler Rest oder Nichtrest, je nachdem $8n + 1$ quadratischer Rest oder Nichtrest ist; $\frac{p^2-1}{4}$ hat den gleichen trigonalen wie quadratischen Charakter. U. a. giebt *Stern* Sätze betr. die Summen einerseits der quadratischen, andererseits der trigonalen oder bitrigonalen Reste und Nichtreste, sowie die Anzahl der einen wie der andern in gewissen Grenzen. Es folgt der Eisenstein'sche Satz (J. f. Math. 27, 1844, p. 283): Ist $p = 4h + 1$, g primitive Wurzel von p; a, b, c, d Anzahl der ersten $p - 2$ Trigonal-(Bitrigonal-)Zahlen, deren Indices $\equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ sind, so ist $(a - c)^2 + (b - d)^2 = p$.

7. Unbestimmte Gleichungen 2., 3., 4. Grades. Quadratische Kongruenzen. Die ganzzahlige Auflösung der *unbestimmten Gleichungen höheren Grades* erledigt systematisch die Theorie der Formen, z. B. die der allgemeinen quadratischen Gleichung mit zwei Unbestimmten die Theorie der binären quadratischen Formen [I C 2, Nr. c]. Hierhin gehört die Pell'sche Gleichung $x^2 - Dy^2 = \pm 1$. Mancherlei unbestimmte Gleichungen oder Systeme solcher haben aber besondere Behandlung erfahren, bei der, meist auf Grund von Identitäten, ihre Unmöglichkeit, oder Formeln für ihre Lösungen, oder mittels einer Lösung wieder eine neue hergeleitet wird.

Beispiele. Quadratische Gleichungen. a) Die Bestimmung der *rationalen, d. i. solcher Dreiecke, deren Seiten und Inhalt rational sind,* kommt auf die der rationalen rechtwinkligen, d. i. auf die der *Pytha-*

45) *Stern* im J. f. Math. 69, 1868, p. 370.

goräischen ganzen Zahlen, für welche $x^2 + y^2 = z^2$ ist, zurück. Schon *Brahmagupta* (etwa 600 n. Chr., seine Algebra ausgebildet von *Bhascara* über 500 J. später) gab die Lösung

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2 \quad (m, n \text{ ungleichartig}, \ m^2 > n^2).$$

Speziellere Regeln gaben *Pythagoras* und *Plato*. Eine historische Übersicht der Arbeiten über rationale Dreiecke s. bei *Th. Pepin* (Rom. Acc. P. N. Linc. A. 46, 1893, p. 119), eine systematische Herleitung der Dreiecke bei *H. Rath* (Arch. f. Math. 56, 1874, p. 188). Für die pythagoräischen ist

$$x = d(2n + d), \quad y = 2n(n + d), \quad z = y + d^2 = x + 2n^2,$$

wenn d ungerade; jedem d entspricht ein besonderer Komplex; *Pythagoras*' Regel giebt den ersten Komplex, die des *Plato* die ersten Dreiecke sämtlicher Komplexe. Durch An- und Aufeinanderlegen pythagoräischer finden sich alle schiefwinkligen rationalen Dreiecke. — *R. Hoppe* (Arch. f. Math. 64, 1880, p. 441) giebt die rationalen Dreiecke, deren Seiten drei successive Zahlen. — Eng hiermit verbunden sind die *numeri congrui* n, für welche die beiden Gleichungen $s^2 + n = u^2$, $s^2 - n = v^2$ in rationalen Zahlen möglich sind. In drei von *B. Boncompagni* publizierten Schriften von *Fibonacci* (Leonardo v. Pisa), unter denen das libro de' quadrati, werden sie im Anschluss an zwei arabische Manuskripte behandelt; *M. F. Woepcke*, der diese übersetzte, gab verschiedene Formeln zu ihrer Bestimmung, u. A. hat sie auch *Genocchi* behandelt[46]). *Vierecke* mit rationalen Seiten und Diagonalen zu bilden, lehrte schon *Brahmagupta*, dessen schwer verständliche Sätze *M. Chasles* (Aperçu hist. Par. 1837, deutsch v. *A. Sohncke*, Halle 1839, Note 12) aufgeklärt hat. *Kummer* (J. f. Math. 37, 1848, p. 1), nach dem die Aufgabe auf die Betrachtung rationaler Dreiecke zurückkommt, führt sie allgemeiner auf die Euler'sche zurück: die Quadratwurzel aus einer ganzen Funktion 4. Grades rational (s. u. a. Comm. Arithm. coll. 2, p. 474) zu machen. Für die Auffindung von *Tetraedern*, deren Kanten und Inhalt rational sind, gab *K. Schwering* (J. f. Math. 115, 1895, p. 301) eine gleichfalls hierauf zurückführende Methode.

b) *Pepin*[47]) gab die rationale Auflösung des Gleichungspaares

$$x^2 + y^2 - 1 = z^2, \quad x^2 - y^2 - 1 = u^2.$$

---

46) *Genocchi*, Ann. sci. mat. fis. 6, 1855, p. 273; *F. Woepcke*, Ann. di mat. 3, 1860, p. 206; 4, 1861, p. 247.

47) N. Ann. (2) 14, 1875, p. 63.

Schon *Beha-Eddin* stellte in seinem Khélasat al Hisàb die Aufgabe, das System

$$x^2 + xy + 2y^2 = u^2, \quad x^2 - xy - 2y^2 = v^2$$

zu lösen.

Genocchi[48]) giebt die Lösung $x = 34$, $y = 15$. *Lucas*[49]) führt die Auflösung auf die der Gleichung

$$(r^2 + s^2)^2 + 32rs(r^2 - s^2) = t^2,$$

d. i. auf die Aufgabe zurück: ein rechtwinkliges $\triangle$ zu finden, für welches das Quadrat der Hypotenuse plus dem 32fachen $\triangle$ ein Quadrat ist, und lehrt aus einer Lösung stets eine neue finden.

c) Ähnlich behandelt *Lucas*[50]) das System von *Fibonacci:*

$$x^2 - Ay^2 = u^2, \quad x^2 + Ay^2 = v^2;$$

zur Auflösung ist notwendig und hinreichend, dass $ab(a+b)(a-b) = Ac^2$. Die Werte $A = 1, 2, p, 2q, pp', 2qq'$, wo p, p' Primzahlen $8n+3$; q, q' solche $8n+5$ sind, sind unzulässig[51]).

d) Das System $y = x^2 + (x+1)^2$, $y^2 = z^2 + (z+1)^2$ behandelte *E. de Jonquières*[52]); $y = 5^1$ ist die einzige zulässige Primzahlpotenz. Ähnliche Sätze gab (nach *Eug. Lionnet*) *M. Moret Blanc*, N. Ann. (3) 1, 1882, p. 357; u. a. ist 13 die einzige Primzahl, die ebenso wie ihr Biquadrat Quadratsumme zweier successiven Zahlen ist.

e) Nach *Fermat* hat das System $x = 2y^2 - 1$, $x^2 = 2z^2 - 1$ die einzige Lösung $x = 7$ [*Lucas* ebend. (2) 18, 1879, p. 74; *Genocchi*, N. Ann. (3) 2, 1883, p. 306].

f) Für die schon von *Euler* (Alg. 2, Petr. 1770 [frz. v. *Lagrange*, Lyon 1794, dtsch. v. *Gruson*, Berl. 1796/97], p. 234) behandelten Gleichungen

$$x^2 + y^2 = p^2, \quad y^2 + z^2 = q^2, \quad z^2 + x^2 = r^2$$

gab *Ch. Chabanel*, N. Ann. (2) 13, 1874, p. 289 unendlich viel Lösungen.

Kubische Gleichungen. Die allgemeine kubische Gleichung $f(x, y, z) = 0$ mit drei Unbestimmten behandelte *Cauchy*, später *Ad. Desboves*[53]). Aus einer Lösung x, y, z findet sich eine zweite als Schnitt

---

48) *Genocchi*, Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano, publ. da Boncompagni, Roma 1855.

49) N. Ann. (2) 15, 1876, p. 359.

50) N. Ann. (2) 17, 1878, p. 446; der Fall $A = 6$ (eine Fermat'sche Aufgabe) ebend. 15, 1876, p. 466. Vgl. *S. Roberts*, Lond. M. S. Proc. 11, 1880, p. 35.

51) *Genocchi*, Ann. sci. mat. 6, 1855, p. 299.

52) N. Ann. (2) 17, 1878, p. 219, 241, 289, 374, 419, 433, 514; ebend. (2) 18, 1879, p. 464. Eine Folgerung daraus s. *E. Gérono* ebend. 17, p. 381; ähnliche Gleichungen ebend. p. 521.

53) *Cauchy*, Exerc. de math. cahier 4; *Ad. Desboves*, N. Ann. (2) 18, 1879, p. 265 und 20, 1880, p. 173, sowie (3) 5, 1886, p. 545.

der Tangente in x, y, z mit der Kurve $f(x, y, z) = 0$, z. B. für die Gleichung

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dxyz = 0$$

durch die Formeln $x(by^3 - cz^3)$, $y(cz^3 - ax^3)$, $z(ax^3 - by^3)$; aus zwei Lösungen x, y, z; x', y', z' eine dritte als Schnitt der Sekante dieser Punkte mit der Kurve, im speziellen Falle durch die Formeln

$$x^2y'z' - x'^2yz, \quad y^2x'z' - y'^2xz, \quad z^2x'y' - z'^2xy;$$

ist x', y', z' die erstgefundene zweite Lösung, so ist die dritte im allgemeinen der ersten gleich, falls nicht zwei Unbestimmte symmetrisch auftreten, wie bei $x^3 + y^3 = Az^3$. Damit letztere Gleichung lösbar, ist notwendig und hinreichend [*Lucas*, N. Ann. (2) 17, 1878, p. 425], dass $ab(a+b) = Ac^3$. Nach *Legendre* (Th. d. n. 2, § 1) ist $A = 2^n$ für $n > 1$ unzulässig, gegen seine Aussage $A = 6$ zulässig (Lösung: 17, 37, 21), andere unmögliche Fälle gaben u. a. *Sylvester*, *Lucas*, *Pepin* [54]).

Die Gleichung $x^3 + a = y^2$ ist seit *Fermat* und *Euler* mehrfach behandelt. Für $a = -2, -4$ hat sie *eine* Lösung, desgl. für $a = 1$ (*Gérono*), andere Fälle dieser Art gab *Pepin*, J. de math. (3) 1, 1875, p. 317; für $a = 8$ hat sie mehr als eine Lösung, ist unmöglich für $a = -17$ [*Gérono*, N. Ann. (2) 16, 1877, p. 325] und in allgemeineren, von *de Jonquières* (ebend. 17, 1878, p. 374) angegebenen Fällen; s. auch *S. Réalis*, ebend. (3), 2, 1883, p. 289.

Für die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3 + u^3$ gab *Euler* (Petr. N. Comm. 6, 1756/57, p. 155; 8, 1760/61, p. 105 = Comm. Ar. 1, p. 193, 287) Lösungsformeln, die *J. Binet* (Par. C. R. 12, 1841, p. 248) umgestaltete und *Ch. Hermite* aus der Theorie der Flächen 3. Ordnung bestätigte [N. Ann. (2) 11, 1872, p. 5].

Genocchi (Rom. P. N. Linc. A. 1866, s. auch *M. Cantor*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 11, 1866, p. 248) führt die Aufgabe:

$$x^3 + (x + r)^3 + (x + 2r)^3 + \cdots + [x + (n-1)r]^3$$

zu einem Kubus zu machen, auf die Lösung der Gleichung

$$ns(s^2 + (n^2 - 1)r^2) = 8y^3$$

zurück und findet aus einer Lösung der letztern stets eine neue; jene Summe zu einem Quadrate zu machen, lehrt (ebend.) — doch unvollständig — *Catalan*.

Biquadratische Gleichungen. Für die Gleichung

$$ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 = z^2$$

lehrte *Fermat* eine unendliche Menge Lösungen finden, falls a oder e

---

54) N. Ann. (2) 17, 1878, p. 507 u. 19, 1880, p. 89, 206; *Pepin* in J. de math. (2) 15, 1870, p. 217, sowie Rom. P. N. Linc. 34, 1881, p. 73.

Quadratzahl oder schon eine Lösung bekannt ist. Nach Lagrange'schen Gesichtspunkten hat *G. Libri* (J. f. Math. 9, 1832, p. 54) sie und, zum Teil mittels Reihen, viel allgemeinere Gleichungen behandelt; u. a. ist (p. 291) jede positive rationale Zahl als Summe von 4 positiven rationalen Kuben darstellbar. Zur Lösung der spezielleren Gleichung

$$x^4 + ax^2y^2 + by^4 = z^2$$

gab *Lebesgue* Formeln, s. dazu *Legendre*, Th. d. n. 2, p. 126, sowie *Lucas*, N. Ann. (2) 18, 1879, p. 67, der auch für die Gleichung

$$Ax^4 + By^4 = Cz^2 \tag{1}$$

aus einer Lösung zwei andere findet. *Lagrange* löste die Gleichungen $x^4 - 2y^4 = \pm z^2$; $x^4 + 8y^4 = z^2$ (vgl. *Euler*'s Alg. 2, Kap. 13), *Lebesgue* erstreckte (J. de math. 18, 1853, p. 73) die Untersuchung auf die andern: $x^4 \pm 2^m y^4 = z^2$; $2^m x^4 - y^4 = z^2$. Nach *Legendre* sind die Gleichungen $x^4 \pm y^4 = z^2$ und $x^4 + y^4 = 2z^2$ (ausser $x = y = z = 1$) unmöglich; ausgedehnte Klassen von Fällen, in denen (1) unmöglich ist, gab *Th. Pepin* (Par. C. R. 78, 1874, p. 144 u. 91, 1880, p. 100); z. B. ist $px^4 - 14y^4 = z^2$ unmöglich, wenn p eine durch $2u^2 + 7v^2$ darstellbare Primzahl ist. Derselbe giebt [J. de math. (3) 5, 1879, p. 405] eine Methode zur vollständigen Auflösung der Gleichung $7x^4 - 5y^4 = 2z^2$.

Quadratische Kongruenzen. *Lebesgue* (J. de math. 2, 1837, p. 253) hat die Kongruenzen $f(x_1, x_2, \cdots x_n) \equiv 0 \pmod{p}$ für ganze Funktionen f, insbesondere die von der Form

$$a_1 x_1^m + a_2 x_2^m + \cdots + a_\varkappa x_\varkappa^m \equiv a_{\varkappa+1} \quad (\text{mod. } p = hm + 1, \text{ Primzahl})$$

behandelt. Für $m = 2$ hatte schon *Libri* (J. f. Math. 9, 1832, p. 182 f.) die Anzahl der Wurzeln für $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 \equiv a_3 \pmod{p}$ bestimmt. *Lebesgue* gab die allgemeinen Formeln für die Anzahl der Wurzeln der allgemeineren quadratischen Kongruenz, die sich auch finden bei *C. Jordan*, traité des substitutions, Par. 1870, Art. 197—200. Bei *Libri* und *Lebesgue* ergaben sich Anwendungen mancherlei Art auf die Kreisteilung [I C 4 b].

8. Höhere Kongruenzen. Galois'sche Imaginäre. Die allgemeine Theorie der Kongruenzen höheren Grades $F(x) \equiv 0 \pmod{p}$ ist bereits von *Gauss* bearbeitet worden (Werke 2, p. 212), doch rührt die erste sie behandelnde Publikation von *Th. Schönemann* her (J. f. Math. 31, 1846, p. 269 u. 32, 1846, p. 93); *Dedekind* (ebend. 54, 1857, p. 1) gab eine elementare, systematische Darstellung. S. auch *J. A. Serret*'s Höhere Algebra 2, p. 96.

Zwei ganze ganzzahlige Funktionen $f(x)$, $g(x)$ heissen (mod. p, p Primzahl) kongruent: $f(x) \equiv g(x) \pmod{p}$, wenn die Koeffizienten in $f(x) - g(x)$ durch p teilbar sind, $f(x)$ vom Grade n, wenn x^n die höchste Potenz, deren Koeffizient durch p nicht teilbar ist; $f(x)$ heisst primär, wenn der Koeffizient von x^n kongruent 1 ist, irreduktibel oder Primfunktion, wenn die Zerlegung $f(x) \equiv \varphi(x)\,\psi(x)$ (mod. p) unmöglich ist. Jede ganze Funktion $f(x)$ ist auf *eine* Weise einem Produkte primärer Primfunktionen (mod. p) kongruent.

Ist $\varphi(x) - \psi(x)$ (mod. p) teilbar durch $F(x)$, d. h. $\varphi(x) - \psi(x) \equiv F(x) \cdot G(x)$ (mod. p), so heisst

(a) $$\varphi(x) \equiv \psi(x) \ (\text{mod. } p,\ F(x)).$$

Alle ganzen Funktionen lassen sich in Bezug auf einen solchen doppelten Modulus, wenn μ der Grad von $F(x)$ und $\varrho, \sigma, \tau, \ldots$ die Grade der verschiedenen Primfunktionen sind, aus denen sich $F(x)$ (mod. p) zusammensetzt, in p^μ Klassen einander kongruenter Funktionen verteilen, unter denen

$$P = p^\mu \left(1 - \frac{1}{p^\varrho}\right)\left(1 - \frac{1}{p^\sigma}\right)\left(1 - \frac{1}{p^\tau}\right) \cdots$$

ohne gemeinsamen Teiler mit $F(x)$ (mod. p) sind. Für jede solche relative Primfunktion $f(x)$ zu $F(x)$ ist $f(x)^P \equiv 1$ (mod. p, $F(x)$); insbesondere ist für jede ganze ganzzahlige Funktion $f(x)$, wenn $F(x)$ Primfunktion vom Grade π ist,

$$f(x)^{p^\pi} \equiv f(x) \ (\text{mod. } p,\ F(x)).$$

Bei derselben Voraussetzung hat die irreduktible Kongruenz $F(x) \equiv 0$ (mod. p) keine ganzzahlige Lösung, falls $\pi > 1$; man kann aber mit *Ev. Galois* (J. de math. 11, 1846, p. 398) eine „Imaginäre" i einführen der Art, dass für sie $F(i) \equiv 0$ (mod. p) ist. Alsdann ist die Kongruenz (a) völlig gleichbedeutend mit $\varphi(i) \equiv \psi(i)$ (mod. p), $f(i)$ ist dann und nur dann $\equiv 0$ (mod. p), wenn $f(x)$ teilbar durch $F(x)$ (mod. p) ist; andernfalls ist

$$f(i) \equiv a + a_1 i + a_2 i^2 + \cdots + a_{\pi-1} i^{\pi-1} \ (\text{mod. } p),$$

wo $a, a_1, \ldots$ ganzzahlig, und stets ist $f(i)$ Wurzel von

(b) $$x^{p^\pi} \equiv x \ (\text{mod. } p),$$

sodass diese Kongruenz p^π Wurzeln hat. Eine Kongruenz $\Phi(x) \equiv 0$ (mod. p) kann nicht mehr Wurzeln von der Form $f(i)$ haben, als ihr Grad beträgt; die sämtlichen Wurzeln von $F(x) \equiv 0$ sind $i, i^p, i^{p^2}, \ldots i^{p^{\pi-1}}$. Ist n die kleinste Zahl, für welche $f(i)^n \equiv 1$, so heisst $f(i)$ zu n *gehörig*; n ist Teiler von $p^\pi - 1$, zu jedem Teiler n gehören $\varphi(n)$ Zahlen $f(i)$; es giebt $\varphi(p^\pi - 1)$ primitive Wurzeln der Kongruenz (b), d. i. inkongruente $f(i)$, welche zu $p^\pi - 1$ gehören.

Jede dieser primitiven Wurzeln ist, wie i selbst, Wurzel einer irreduktibeln Kongruenz vom Grade π und ihre Potenzen liefern alle Wurzeln der Kongruenz (b) oder sämtliche inkongruenten $f(i)$. Z. B. lassen sich die Wurzeln der Kongruenz $x^{7^3} \equiv x$ (mod. 7), da $i^3 \equiv 2$ (mod. 7) irreduktibel ist, alle in der Form $a + a_1 i + a_2 i^2$ (mod. 7) darstellen; als primitive Wurzel findet sich $j = i - i^2$, d. i. eine Wurzel der irreduktibeln Kongruenz $j^3 - j + 2 \equiv 0$ (mod. 7), demnach sind alle Wurzeln der obigen Kongruenz auch von der Form $a + a_1 j + a_2 j^2$ (mod. p).

Ist m die kleinste Zahl, für welche $f(i)^{p^m - 1} \equiv 1$ (mod. p), so heisst $f(i)$ zu m *passend*; m ist Teiler von π, und wenn $a, b, c, \ldots$ die verschiedenen m zusammensetzenden Primzahlen sind, so ist die von Null verschiedene Zahl

$$p^m - \sum p^{\frac{m}{a}} + \sum p^{\frac{m}{ab}} - \sum p^{\frac{m}{abc}} \ldots$$

die Anzahl der zu m passenden inkongruenten $f(i)$. Die Potenzen $f(i), f(i)^p, f(i)^{p^2}, \ldots f(i)^{p^{m-1}}$ sind die Wurzeln einer irreduktibeln Kongruenz $\Phi(x) \equiv 0$ (mod. p) vom Grade m; umgekehrt hat jede ganzzahlige Kongruenz, der $f(i)$ genügt, zugleich jene Potenzen zu Wurzeln.

Die Funktion $x^{p^\pi} - x$ ist (mod. p) kongruent dem Produkte aus allen inkongruenten primären Primfunktionen, deren Grade Teiler von π sind. Sind $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die verschiedenen, π zusammensetzenden Primzahlen, so ist

$$\prod(x) = \frac{\left(x^{p^\pi} - x\right) \cdot \Pi\left(x^{p^{\frac{\pi}{\alpha\beta}}} - x\right) \ldots}{\Pi\left(x^{p^{\frac{\pi}{\alpha}}} - x\right) \cdot \Pi\left(x^{p^{\frac{\pi}{\alpha\beta\gamma}}} - x\right) \ldots}$$

kongruent dem Produkte aller inkongruenten primären Primfunktionen vom Grade π, also deren Anzahl gleich

$$\frac{1}{\pi} \cdot \left(p^\pi - \sum p^{\frac{\pi}{\alpha}} + \sum p^{\frac{\pi}{\alpha\beta}} - \sum p^{\frac{\pi}{\alpha\beta\gamma}} \ldots\right)$$

und somit von Null verschieden. Nach dem ersten dieser beiden Sätze hat jede irreduktible Kongruenz $\Phi(x) \equiv 0$ (mod. p), deren Grad ein Teiler von π, genau soviel Wurzeln, als ihr Grad beträgt. Ist demnach $\Psi(x) \equiv 0$ (mod. p) eine beliebige ganzzahlige Kongruenz, $f(x), f_1(x), \ldots$ die (gleichen oder verschiedenen) Primfunktionen resp. vom Grade $\mu, \mu_1, \ldots$, aus denen sich $\Psi(x)$ (mod. p) zusammensetzt, und π das kleinste gemeinsame Vielfache von $\mu, \mu_1, \ldots$, so existiert nach dem zweiten der obigen Sätze eine Primfunktion $F(x)$ vom

Grade π; ist i eine ihrer Wurzeln, so hat die Kongruenz $\Psi(x) \equiv 0$ (mod. p) genau soviel Wurzeln, wie ihr Grad beträgt, welche ganze, ganzzahlige Funktionen $f(i)$ von i sind. Dieser Satz vornehmlich zeigt den Nutzen der Einführung der Galois'schen Imaginären; auf Grund desselben haben sie namentlich in der Theorie der Substitutionen (s. darüber *C. Jordan*'s traité des substitutions, Paris 1870) vielfache Verwendung gefunden [I A 6, Anm. 57, 63].

9. Feststellung einer Zahl als Primzahl; Zerlegung grosser Zahlen in Faktoren. Man findet die Primzahlen der Reihe $1, 2, 3, \ldots n$, wenn aus ihr alle Vielfachen der Primzahlen $< \sqrt{n}$ gestrichen werden (cribrum Eratosthenis). Sei $N_\varkappa$ die natürliche Zahlenreihe, nachdem die Vielfachen der ersten $\varkappa$ Primzahlen aus ihr gestrichen sind; zählt man, wieviel Zahlen zwischen je zweien, die noch stehen blieben, fehlen, so erhält man die $\varkappa^{\text{te}}$ *diatomische Reihe* von *C. de Polignac,* der ihre Eigenschaften im J. de math. 19, 1854, p. 305 untersucht hat; mittels jener Reihen findet sich (als suite médiane) die der Zahlen von der Form $2^n - 1$. Zwischen x und x^2 liegt stets eine Primzahl.

Zur Zerlegung grosser Zahlen in ihre Faktoren gab *Gauss* (Disqu. A. art. 329—334) zwei Methoden. Schon früher hatte *Euler*[55]) zu gleichem Zwecke die Darstellungen durch die Form $rx^2 + sy^2$ mit hierfür geeigneter Determinante $D = rs$ (numeri idonei) benutzt. *P. Seelhoff* [Zeitschr. f. Math. u. Phys. 31, 1886, p. 116 und Arch. f. Math. u. Phys. (2) 2, 1885, p. 329, sowie Amer. J. of math. 7, 1885, p. 264; ib. 8, 1885, p. 26, 39] stützt sich auf ähnliche Betrachtungen; vgl. auch *Pepin,* Rom. Acc. P. N. Linc. 43, 1890, p. 163. *Lucas*[56]) benutzte die Ausdrücke

$$U_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \quad V_n = a^n + b^n,$$

in denen a, b die Wurzeln der ganzzahligen Gleichung $x^2 = Px - Q$ sind. Diese Ausdrücke, welche die grösste Analogie mit Sinus und Cosinus haben, bestimmen sich aus der Beziehung $A_{n+2} = PA_{n+1} - QA_n$,[57]) der sie genügen. Es sind drei Arten: *erstens,* bei welchen a, b ganz; $a = 2$, $b = 1$ geben die *Fermat'sche Zahlenreihe* $2^n - 1$, $2^n + 1$;

55) *Euler,* Berl. N. mém. 5, 1776, p. 337, s. auch Petr. N. Comm. 13, 1768, p. 67 = Comm. Ar. 2, p. 270; 1, p. 379. S. dazu *F. Grube,* Zeitschr. f. Math. u. Phys. 19, 1874, p. 492.

56) *Lucas,* Amer. J. of math. 1, 1878, p. 184, 289. S. dazu *Genocchi,* Par. C. R. 98, 1884, p. 411; Ann. di mat. (2) 2, 1868, p. 256; *D. Seliwanoff,* Moskau Math. Samml. 16, 1892, p. 469.

57) Über solche rekurrente Reihen s. *F. H. Siebeck,* J. f. Math. 33, 1846, p. 71; *D. André,* Ann. éc. norm. (2) 7, 1878, p. 375; (2) 9, 1880, p. 209.

zweitens, bei welchen a, b inkommensurabel; die Gleichung $x^2 = x + 1$ giebt

$$U_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}, \quad V_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n + (1-\sqrt{5})^n}{2^n},$$

und die U_n sind die *Zahlen von Fibonacci oder von Lamé* (Par. C. R. 19, 1844, p. 867); für die Gleichung $x^2 = 2x + 1$ nennt Lucas die entstehenden Zahlen *die Pell'schen; drittens*, wenn a, b imaginär. Folgende Sätze sind wichtig. Die U_n ungeraden Ranges sind Teiler von $x^2 - Qy^2$, in der Reihe von *Fibonacci* also von der Form $4q + 1$. Die eigentlichen Primteiler von U_n, d. i. diejenigen, die in keinem U_n geringeren Ranges aufgehen, sind bei der ersten Art von der Form $\varkappa n + 1$, diejenigen von V_n von der Form $2\varkappa n + 1$. Ist $U_{p \mp 1}$, aber kein U_n, dessen n Teiler von $p \mp 1$ resp. ist, durch p teilbar, so ist p Primzahl. Dieser Satz, der die Umkehrung des Fermat'schen in sich enthält, giebt viele besondere, von der Art wie der von *Pepin* (Par. C. R. 85, 1877, p. 329 und 86, 1878, p. 307) gegebene: Ist $p = 4q + 3$ Primzahl, so ist $2p \pm 1$ Primzahl, wenn in der $\begin{cases}\textit{Fermat'schen}\\ \textit{Pell'schen}\end{cases}$ Reihe $U_p \equiv 0 \pmod{2p \pm 1}$ ist, und umgekehrt.

Lucas' Sätze eignen sich besonders zur Zerlegung der Zahlen $2^n \pm 1$. Die Zahl $2^n + 1$ kann nur Primzahl sein, wenn $n = 2^\nu$, $2^n - 1$ nur, wenn n eine Primzahl p ist. Die Primfaktoren von $2^p \pm 1$ haben nach *Fermat* die Form $\varkappa p + 1$ (*Euler*'s Beweis Petr. N. Comm. 1, 1747/48, p. 20 = Comm. Ar. coll. 1, p. 50); über eine Verallgemeinerung hiervon s. *A. Lefébure*, Par. C. R. 98, 1884, p. 293, 413, 567, 613, sowie Ann. éc. norm. (3) 1, 1884, p. 389; 2, 1885, p. 113. *Fermat*'s Behauptung, dass jede Zahl $2^{2^\nu} + 1$ Primzahl, widerlegte *Euler*: für $\nu = 5$ geht sie auf durch 641. Für $\nu = 6$, 12, 23, 36 sind resp.

274177, 114689, 167772161, 2748779069441

Teiler[58]). Eine Tafel der Faktoren von $2^n \pm 1$ für $n = 1$ bis 64 nach *Landry*[59]) findet sich bei *Lucas* a. a. O. p. 230, s. auch *W. Rouse Ball* in Messenger (2) 21, 1891, p. 34, 120.

---

58) *Euler*, Petr. Comm. 6, 1739, p. 103 = Comm. Ar. 1, p. 1; *Beguelin*, Berl. N. mém. 6, 1777, p. 300; *V. Buniakowsky*, St. Pét. Bull. 24 u. 25, 1878; *Fort. Landry*, N. Corr. Math. 6, 1880, p. 417 und *Seelhoff*, Zeitschr. Math. Phys. 31, 1886, p. 380. Letzterer giebt a. a. O. auch die Zerlegung einer Reihe von Zahlen von der Form $\varkappa \cdot 2^n + 1$.

59) *Landry*, Décomposition des nombres $2^n \pm 1$ etc., Paris 1869. *Le Lasseur* benutzte bei bezüglichen Untersuchungen die Identität von *d'Aurifeuille:*

$$2^{4n+2} + 1 = (2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1)(2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1).$$

Durch Erweiterung der Gauss'schen Zerlegungsmethode findet *Th. Pepin* (Rom. P. N. Linc. 9^1, 1893, p. 47) u. a., dass $\frac{31^7-1}{31-1}$ Primzahl ist.

Tafeln, welche die Teiler der Zahlen ergeben, lieferte *L. Chernac,* Cribrum arithmeticum, Deventer 1811 (bis 1020000); *J. Ch. Burckhardt,* Tables des diviseurs jusqu'à 3036000, Paris 1814—17; *Z. Dase,* Faktorentafeln (7^{te} bis 9^{te} Million), Hamburg 1860, 63, 65; *J. W. L. Glaisher,* Factortables for the 4., 5., 6. Million, London 1870, 80, 83, wo sich auch mancherlei Abzählungen zum Vergleich mit den Formeln von *Gauss, Legendre* u. A. für die Primzahlmenge u. a. m. finden. S. auch *C. Tuxen* und *F. Thaarup* in Tidsskr. f. Math. (4) 5, 1881, p. 16, 77.

10. Vollkommene Zahlen. Eine Zahl heisst *vollkommen,* wenn die Summe ihrer aliquoten Teile ihr selbst gleich ist. Eine solche ist nach *Euclid* $2^{p-1}(2^p-1)$, wenn 2^p-1 Primzahl; alle geraden vollkommenen Zahlen haben diese Form [60]). *J. Carvallo*'s Beweis, dass es keine ungeraden gebe [61]), ist ungenügend, doch kennt man keine. Dass es keine von der Form $4x+3$ giebt, zeigte *A. Stern* [62]), den notwendigen Ausdruck derjenigen von der Form $4x+1$ gaben *Euler* und *Stern* a. a. O. Einige Sätze über solche Zahlen, falls sie vorhanden, gaben *Servais, Cesàro, Sylvester* in Mathesis 7, 1887, p. 228, 245 u. 8, 1888, p. 92, 135, 571. Die bekannten geraden vollkommenen Zahlen entsprechen $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31$ (*Euler*), 61 (*Seelhoff*) [63]) — fraglich sind 67, 127, 257 (*Rouse Ball*) — welche Werte *Mersenne*'sche Zahlen heissen, da dieser (cogitata phys. math. Paris 1644) — wohl nach *Fermat*'s Mitteilungen — sie (unvollständig) angegeben.

Vollkommene Zahlen zweiter Art nennt *Eug. Lionnet,* N. Ann. (2) 18, 1879, p. 306 diejenigen, welche dem Produkte ihrer aliquoten Teile gleich sind (die Zahlen p^3 und $p.p'$); 2.3 ist die einzige vollkommene Zahl beider Arten.

Befreundete Zahlen (numeri amicabiles) sind zwei Zahlen, deren jede gleich der Summe der aliquoten Teile der andern ist, z. B. 220, 284. Sie sind noch wenig untersucht. *Euler,* Op. var. 2, 1750, p. 23

---

60) *Euler,* Comm. Ar. coll. 2, p. 514, *Lucas* a. a. O.

61) Par. C. R. 81, 1875, p. 73 sowie in seiner Théorie des nombres parfaits, Barcelone 1883.

62) Mathesis 6, 1886, p. 248. S. das. *Seelhoff* p. 100, 178; *Lucas* p. 145.

63) Zeitschr. Math. Phys. 31, 1886, p. 174; Arch. f. Math. (2) 2, 1885, p. 327, 329; (2) 3, 1886, p. 325; *G. Valentin,* ebenda (2) 4, 1887, p. 100; dasselbe *Pervouchine* (s. darüber *W. Imschenetzky* etc., St. Pét. Bull. 1887) u. *Hudelot,* Mathesis 7, 1887, p. 45, auf Grund eines der Lucas'schen Sätze.

= Comm. Ar. 1, p. 102 gab ihrer 61 Paare, noch andere *P. Seelhoff*, Arch. f. Math. 70, 1883, p. 75; *Lucas*, Th. d. n., p. 381 berichtet von bez. Untersuchungen von *Le Lasseur*.

11. Potenzsummen der ersten m ganzen Zahlen. Setzt man $S_\varkappa(m) = 1^\varkappa + 2^\varkappa + \cdots + m^\varkappa$, so ist

$$S_0(m) = m, \quad S_1(m) = \frac{m(m+1)}{2}, \quad S_2(m) = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}, \cdots$$

(Polynome von *Bernoulli*); den allgemeinen Ausdruck für $S_\varkappa(m)$ gab u. a. *Cauchy*[64] [Résumés analyt., Turin 1833, p. 70]; *P. Appell* [N. Ann. (3) 6, 1887, p. 312, 547] lehrte sie durch Integration successive finden. *G. Dostor* [N. Ann. (2) 18, 1879, p. 459, 513, oder Arch. f. Math. u. Phys. 63, 1879, p. 435; 64, 1879, p. 310] gab Sätze, wie diesen:

$$\frac{S_4(m) - S_2(m)}{S_3(m) - S_1(m)} = \frac{2}{5}(2m+1),$$

also ganz, wenn $m = 5h + 2$. Vgl. dazu *E. Lucas*, Rech. sur l'anal. indéterm., Moulins 1873. Nach *Eug. Lionnet* ist $S_\varkappa(m)$ teilbar[65] durch m, wenn m Primzahl $> \varkappa + 1$. Im J. f. Math. 21, 1840, p. 372 giebt *Ch. v. Staudt* mehrere Sätze wie den folgenden: Sind $a, b, \cdots$ relativ prim, so ist

$$\frac{S_\varkappa(ab\cdots)}{ab\cdots} - \frac{S_\varkappa(a)}{a} - \frac{S_\varkappa(b)}{b} - \cdots$$

ganzzahlig. Schon die Inder kannten die Beziehung $S_3(m) = S_1(m)^2$. Nach *M. F. Woepcke* (Ann. di mat. 5, 1863, p. 147) findet sie sich bei *Ibn Albanná* (Zeitgenosse von *Fibonacci*), nach welchem für ungerades $m = \sqrt{\sqrt{8M+1}+1} - 1$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + m^3 = M.$$

Jacobi[66] gab die fernere Formel: $2S_1(m)^4 = S_7(m) + S_5(m)$. Diese, wie die der Inder, ist in zwei von *M. A. Stern* (J. f. Math. 84, 1878, p. 216) gegebenen, und letztere in noch allgemeineren von *E. Lampe* (ebend. p. 270) enthalten. *Liouville*[67] gewann aus der Formel der Inder die Beziehung:

$$\Sigma_d\, t(d)^3 = [\Sigma_d\, t(d)]^2 \qquad (d \text{ Teiler von } m),$$

---

64) Vgl. *J. L. Raabe*, J. f. Math. 42, 1851, p. 348; *Hermite* ebend. 79, 1879, p. 339; *J. Tannery*, Sur la théorie des fonctions, Par. 1886, p. 150; *F. Siacci*, Ann. di mat. 4, 1861, p. 46.

65) S. *Catalan*, Belg. Mém. 46, 1886, p. 14.

66) Briefwechsel zwischen *Gauss* u. *Schumacher*, herausgeg. v. *F. Peters*, Altona 1863, 5, p. 299.

67) *Liouville* im J. de math. (2) 2, 1857, p. 393. S. dazu Par. C. R. 44, 1857, p. 753.

die eine Deutung auf die Anzahl der Zerlegungen $2m = x^2 + y^2$ zulässt. Ist $\varphi_\varkappa(m)$ Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen der Zahlen $< m$, die prim zu m [*A. Thacker* hat (J. f. Math. 40, 1850, p. 89) ihren Ausdruck gegeben], so ist

$$\sum \delta^3 \cdot \varphi_3(d) = (\sum \delta \cdot \varphi_1(d))^2 \qquad (\delta,\ d \text{ complementäre Teiler von } m).$$

12. Magische Quadrate. Mehr der Theorie der Kombinationen als der Zahlen gehört *die der magischen Quadrate* an. Es gilt, in die n^2 Zellen eines Quadrates die ersten n^2 Zahlen so zu stellen, dass die Summe in jeder Reihe, Kolonne und Diagonale die gleiche ist. Nächst *Moschopulos* (14. Jahrh.) gab zuerst *Bachet de Méziriac* eine Lösung für ungerade, *Bern. Frénicle* für gerade n, *W. H. Thompson* (Quart. J. 10, 1869, p. 186) führte diesen Fall auf jenen zurück, indem er aus einem Quadrate mit n^2 ein solches mit $(pn)^2$ Zellen bildete [68]. *J. Horner*'s Theorie (Quart. J. 11, 1870, p. 57, 123) führt (hauptsächlich für ungerade n) auf sogenannte Nullquadrate und diese auf die Aufgabe hinaus: den Rest eines Ausdrucks $ax + by$ (mod. $2n + 1$) zu bestimmen [69]. *S. M. Drach* (Mess. (2) 2, 1873, p. 169) bestätigt die Regel für ungerade n und führt den Fall eines geraden n auf den Fall $n = 4$ zurück. *Th. Harmuth* (Arch. f. Math. u. Phys. 66, 1881, p. 286, 413; 67, 1882, p. 238 und 69, 1884, p. 90) giebt für ungerade n noch eine neue Regel, behandelt die Fälle $n = 4\varkappa$, $4\varkappa + 2$ sowie die *magischen Rechtecke* (insbesondere bei ungeraden Seitenzahlen) und dehnt seine Untersuchung auch auf magische Parallelepipeda, sogar auf polydimensionale Zahlenfiguren aus. Eine anderweitige Verallgemeinerung der magischen Quadrate gab *A. H. Frost* (Quart. J. 7, 1866, p. 92, und 15, 1877, p. 34, 93) in seinen sogenannten Nasik squares, noch eine andere, indem er nicht die Summe der Zahlen, sondern die ihrer Quadrate konstant setzt, *Lucas*, N. Corr. Math. 2, 1876, p. 97. S. ferner *Euler*, Comm. Ar. 2, p. 302, der auch die verwandte Aufgabe des Rösselsprungs behandelte, Berl. Mém. 1759, p. 310 = Comm. Ar. 1, p. 337; diese eingehend bei *Exner*, Progr. Hirschberg 1876.

---

68) S. über die Geschichte des Problems *S. Günther* im Arch. f. Math. u. Phys. 57, 1875, p. 285, wo die Regel von *Moschopulos* in bequemer Form ausgesprochen und bewiesen ist.

69) Eine systematische Entwicklung auf Grund derselben Kongruenzaufgabe versuchte *H. Scheffler*, Die magischen Figuren, Leipzig 1882. Vgl. noch *M. Frolow*, Le problème d'Euler etc., avec un atlas, Par. 1884; *G. Arnoux*, Arithm. graphique, Par. 1894. *H. v. Pessl*, Progr. Amberg 1873, gewinnt durch Aufwicklung des magischen Quadrates auf einen Kreiscylinder eine besondere Formulierung der Aufgabe.

Nachträge zu I C 1.

Zu Nr. **1**. *R. Dedekind,* Braunschw. Festschr. 1897, p. 1, bemerkt, wie aus dem grössten gemeinsamen Teiler d dreier Zahlen a, b, c und den grössten gemeinsamen Teilern a_1, b_1, c_1 je zweier von ihnen sechs Zahlen a', b', c', a'', b'', c'' sich ergeben der Art, dass $a = db'c'a''$, $b = dc'a'b''$, $c = da'b'c''$ wird. Diese Zerlegung dreier Zahlen in ihre „Kerne" dehnt er dann auf beliebig viel Zahlen und noch allgemeiner auf Elemente Abel'scher Gruppen [I A 6, Nr **20**] aus.

Erweiterungen der Sätze von *Smith* und *Mansion* durch *E. Cesàro* s. Ann. éc. norm. (3) 2, 1885, p. 425; N. Ann. (3) 5, 1886, p. 44.

Zu Nr. **3** bez. der Farey'schen Reihen und der Stern'schen Entwicklung (m, n) s. noch *G. Halphen,* Par. Bull. Soc. M. 5, 1877, p. 170.

Zu Nr. **4**. Der erste Beweis des Fermat'schen Satzes durch *Euler* findet sich Petr. Comm. 8, 1736, p. 141 = Comm. Ar. 1, p. 21 und geschieht mittels der binomischen Entwicklung.

Zu Nr. **5** s. bez. der Qualität der Dezimalbrüche, welche echten gemeinen Brüchen gleich sind, *Th. Schröder,* Progr. Ansbach 1872; *J. Hartmann,* Progr. Rinteln 1872.

Zu Nr. **6** bemerke noch einen *Kronecker*'schen Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes auf Grund der Primteiler, für welche Abel'sche Gleichungen als Kongruenzen lösbar sind, Berl. Ber. 1880, p. 404; desgl. einen solchen von *Th. Pepin,* Rom. P. N. Linc. 43, 1890, p. 192 mittels Komposition der Formen. S. auch noch *E. Busche,* J. f. Math. 106, 1890, p. 65 [I C 3, Nr. **4**]. *R. Lipschitz* gab Par. C. R. 108, 1889, p. 489 einen Beweis des verallgemeinerten Gauss'schen Lemma, desgl. *M. Mandl,* Quart. J. 25, 1891, p. 227. Vgl. noch *W. Scheibner,* Leipz. Abh. 25, 1900, p. 367.

In Fussnote 42) sind bei *Genocchi* die Belg. Mém. cour. sav. [étr.] 25 gemeint.

Zu Nr. **7**. Die Gleichung $x^3 + a = y^2$ behandelte *Euler,* Comm. Ar. 1, p. 33 und 2, p. 474; ebenda 1, p. 207 die Gleichung $x^3 + y^3 = z^2$; ebenda 2, p. 183, 492 die andere: $x^4 + mx^2y^2 + y^4 = z^2$. S. über $x^2 + cy^2 = z^3$ *Th. Pepin,* Rom. P. N. Linc. 8, 1892, p. 41. *Desboves* behandelte die Gleichung $ax^m + by^m = cz^n$, N. Ann. (2) 18, 1879, p. 265, 398, 433, 481. *Buniakowsky* wies St. Pét. Mém. (6) 4, 1841, p. 471 die Unmöglichkeit nach, dass gewisse, irrational aus ganzen Zahlen gebildete Ausdrücke, wie $\sqrt{A} + \sqrt{B}$, $\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$ u. a., rational sein könnten.

Zu Nr. **9**, Fussnote 55) bemerke noch *Euler*, Petr. N. A. 12, 1794, p. 22 = Comm. Ar. 2, p. 249; bezüglich der Zerlegung der Zahlen in Faktoren *Buniakowsky*, St. Pét. Mém. (6) 4, 1841, p. 447.

Bezüglich der Angaben über ältere Mathematik ist auf *M. Cantor,* Vorles. üb. Geschichte der Mathematik, Leipzig, 1. Teil 1880 (2. Aufl. 1894), 2. Teil 1892, 3. Teil 1898, zu verweisen; s. über *Pythagoras'* und *Plato*'s Regel [in Nr. **7**] das. 1. Teil (2. Aufl.) p. 173, 211; s. ferner über *Fermat*'s Behauptung (Nr. **9**), dass jede Zahl $2^{2^\nu} + 1$ Primzahl, 2. Teil, p. 709.

Zu berichtigen: p. 558, Z. 5 im letzten Bruche $p - 1$ statt p.

Die Litteraturangaben von I C 1 hat *W. Fr. Meyer* wesentlich vervollständigt.

I C 2. ARITHMETISCHE THEORIE DER FORMEN

VON

KARL THEODOR VAHLEN

IN KÖNIGSBERG I. PR.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

H. J. St. Smith, Sur la représentation des nombres par des sommes de cinq carrés. Par. Mém. Sav. Ét. (2) 29, Nr. 1, 1887 = Coll. Math. Pap. 2, p. 623.

H. Minkowski, Sur la théorie des formes quadratiques à coefficients entiers. Par. Mém. Sav. Ét. (2) 29, Nr. 2, 1887.

H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, Leipzig, 1. Lief. 1896.

P. Muth, Theorie und Anwendung der Elementarteiler, Leipzig 1899 (Bilineare Formen).

Im Übrigen s. unter I C 1 und bes. *P. Bachmann,* Zahlentheorie 4[1], Leipzig 1898.

a. Lineare Formen. 1) Ist r die grösste Zahl, für welche nicht alle Subdeterminanten r^{ter} Ordnung des Koeffizientensystems:

$$(a_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ k = 1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

der m ganzzahligen Linearformen von n Variabeln:

$$y_i = \sum a_{ik} x_k \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ k = 1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

verschwinden, so heisst r der „*Rang*" des Koeffizientensystems oder des Systems der Linearformen [I A 2, Nr. 24].

2) Ist d_k der grösste gemeinsame Teiler aller Subdeterminanten k^{ter} Ordnung des Systems (a_{ik}), $(d_{r+1} = 0,\ d_{r+2} = 0, \ldots)$, so ist $\frac{d_k}{d_{k-1}}$ eine ganze Zahl e_k, der k^{te} „*Elementarteiler*" des Systems [I B 2, Nr. 3]. Wir setzen $e_{r+1} = 0$, $e_{r+2} = 0$, etc.; der Rang ist die An-

zahl der nicht verschwindenden Elementarteiler. Die Zahl $\frac{e_k}{e_{k-1}}$ ist eine ganze Zahl.

3) Geht das System

$$y_i = \sum a_{ik} x_k$$

durch die beiden ganzzahligen Substitutionen

$$x_k = \sum_h \alpha_{kh} x'_h \qquad (k, h = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\sum_i \beta_{hi} y_i = y'_h \qquad (h, i = 1, 2, \ldots, m)$$

in das System

$$y'_i = \sum a'_{ik} x'_k$$

über, so heisst das Koeffizientensystem (a'_{ik}) unter dem Koeffizientensysteme (a_{ik}) „*enthalten*".

4) Sind auch die „*reciproken*" Substitutionen

$$x'_h = \sum_k \alpha'_{hk} x_k \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\sum_h \beta'_{ih} y'_h = y_i \qquad (i, h = 1, 2, \ldots, m)$$

ganzzahlig, also die „*Substitutions-Determinanten*" oder „*Moduln*" [I B 2, Nr. **1**, **2**]

$$|\alpha_{kh}|, \quad |\beta_{hi}|$$

gleich ± 1, so heissen die Substitutionen „*Einheits-Substitutionen*" oder „*unimodular*". Alsdann ist von den beiden Systemen (a_{ik}), (a'_{ik}) jedes unter dem andern enthalten, dieselben sind „*äquivalent*":

$$(a_{ik}) \sim (a'_{ik}).$$

5) Das System (a_{ik}) ist äquivalent dem „*Diagonalsystem*":

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 & . & . & 0 & 0 & . & . \\ 0 & e_2 & . & . & 0 & 0 & . & . \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & . & . & e_r & 0 & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & . & . \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

und wird durch blosse Anwendung der drei Arten von Einheits-Substitutionen:

$$1) \begin{array}{l} z_i \,\|\, -z_i \\ z_k \,\|\, -z_k, \end{array} \qquad 2) \begin{array}{l} z_i \,\|\, z_k \\ z_k \,\|\, -z_i, \end{array} \qquad 3) \quad z_i \,\|\, z_i \pm z_k$$

auf dasselbe „*reduziert*"[1]).

1) *G. Frobenius,* J. f. Math. 86 (1879), p. 146; *L. Kronecker,* Berl. Ber. 1866, p. 597 = J. f. Math. 68 (1868), p. 273 = Werke 2, p. 143; J. f. Math. 107 (1891), p. 135.

6) Damit also das System (a'_{ik}) unter dem System (a_{ik}) enthalten ist, ist notwendig und hinreichend, dass die Elementarteiler von (a'_{ik}) Multipla (wobei auch 0 als Faktor zulässig) der entsprechenden von (a_{ik}) sind.

Für die Äquivalenz beider Systeme ist die Übereinstimmung entsprechender Elementarteiler notwendig und hinreichend [2]).

7) Eine Subdeterminante k^{ter} Ordnung von (a_{ik}) heisst *„regulär in Bezug auf die Primzahl p"*, wenn sie dieselbe in derselben Potenz wie d_k enthält.

Eine in Bezug auf p reguläre Subdeterminante besitzt eine in Bezug auf p reguläre Subdeterminante und Superdeterminante jeder Ordnung.

Ein System von Subdeterminanten derselben Ordnung heisst *„regulär"*, wenn ihr grösster gemeinsamer Teiler dem grössten gemeinsamen Teiler des vollständigen Subdeterminantensystems derselben Ordnung gleich ist.

Von jeder regulären Subdeterminante ist das vollständige System von Subdeterminanten oder Superdeterminanten jeder Ordnung regulär [3]).

8) Ist $r < m$, so giebt es unter den m Formen $\sum a_{ik} x_k$ Systeme von r (und nicht mehr als r) von einander unabhängigen Formen; die jedesmal übrigen $m - r$ sind linear homogen rational aus diesen r zusammengesetzt.

Soll man also m gegebene ganze Zahlen $a_1, \ldots, a_m$ durch die m Formen vermittelst eines ganzzahligen Wertsystems der x *„darstellen"*, so müssen vor allem zwischen den a dieselben homogenen linearen Relationen wie zwischen den Formen bestehen.

Man kann sich daher auf den Fall $r = m \leqq n$ beschränken [s. auch I B 1 b, Nr. **12**].

9) Ist zunächst $m = n$, so ist das System:

$$\sum a_{ik} x_k = a_i \qquad (i, k = 1, \ldots, n)$$

äquivalent einem System:

$$e_k x'_k = a'_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

also jedenfalls eindeutig lösbar, aber ganzzahlig dann und nur dann lösbar, wenn $d_n = e_1 e_2 \cdots e_n = 1$, d. h. wenn das System (a_{ik}) ein „Primsystem" ist. Es heisst nämlich ein System

$$(a_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m & \\ k = 1, \ldots, n & m \leqq n \end{pmatrix}$$

ein *Primsystem*, wenn $d_m = 1$ ist.

2) *Frobenius,* J. f. Math. 86 (1879), p. 146; 88 (1880), p. 96; Berl. Ber. 1894, p. 31; *K. Hensel,* J. f. Math. 114 (1895), p. 109.

3) *K. Hensel,* J. f. Math. 114 (1895), p. 25.

10) Ist zweitens $r = m < n$ und $a_i = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, so giebt es Systeme von $n - r$ und nicht weniger *„Fundamentalauflösungen"*, aus denen alle andern linear homogen ganzzahlig zusammengesetzt sind[4]).

Sind dagegen nicht alle $a_i = 0$, so ist zur Auflösbarkeit der Gleichungen in ganzen Zahlen notwendig und hinreichend, dass der grösste gemeinsame Teiler d der Determinanten m^{ter} Ordnung des Systems (a_{ik}) dem entsprechenden grössten gemeinsamen Teiler des Systems

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \end{pmatrix}$$

gleich ist[5]).

Die Bedingung bleibt erfüllt, wenn man die a_i um ganze Vielfache von d ändert. Die Anzahl der modulo d inkongruenten [I C 1, Nr. 4] Systeme $a_1, a_2, \ldots, a_m$, welche simultan durch die m Formen $\sum_k a_{ik} x_k$ dargestellt werden können, ist gleich d^{m-1}.[6])

11) Betrachtet man zwei Linearformen als kongruent für das *„Modulsystem"* [I B 1 c, Nr. **12** f.]:

$$f_i = \sum_k a_{ik} x_k, \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2, \ldots, n \\ |a_{ik}| \neq 0 \end{pmatrix}$$

wenn ihre Differenz sich als $\sum f_i y_i$ mit ganzzahligen y_i darstellen lässt, so ist die Anzahl der (modd. $f_1, f_2, \ldots f_n$) inkongruenten Linearformen gleich $\| a_{ik} \|$, (*Frobenius*[6a])), denn das System $\sum a_{ik} x_k$ kann nach 4) durch ein äquivalentes $e_i x_i$ ersetzt werden; für ein solches ist der Satz evident.

12) Die Auflösung des Systems

$$\sum_k a_{ik} x_k = a_i \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m & \\ k = 1, \ldots, n & m < n \end{pmatrix}$$

in ganzen Zahlen wird für $n = 2$ durch den Kettenbruchalgorithmus (I A 3, Nr. **45—47**; I C 1, Nr. **3**), für $n > 2$ durch Verallgemeine-

---

4) *T. S. Stieltjes*, Toulouse Ann. 4 (1890), p. 1; vgl. ferner: *K. Weihrauch,* Zeitschr. f. Math. u. Phys. 20 (1875), p. 97, 314; 22 (1877), p. 234; *E. d'Ovidio,* Tor. Atti 12 (1876/77), p. 334; *Faà di Bruno,* Math. Ann. 14 (1879), p. 241; Par. C. R. 86 (1878), p. 1189, 1259; Quart. J. 15 (1878), p. 272; *Ch. Méray,* Par. C. R. 94 (1882), p. 1167; *A. Cayley,* Quart. J. 19 (1883), p. 38 = Papers 12, p. 19.

5) *J. Heger,* Wien. Denkschr. 14^2 (1858), p. 1; *St. Smith,* Lond. Trans. 151 (1862), p. 293 = Papers 1, p. 367; *G. Frobenius,* J. f. Math. 86 (1879), p. 146.

6) *St. Smith* l. c. 5), p. 325 = Papers 1, p. 405. Über die Anzahl der jedesmaligen Auflösungen s. *J. J. Sylvester,* Lond. Math. Soc. Proc. 28 (1897), p. 33; *G. B. Mathews,* ib. p. 486.

6a) *Frobenius,* J. f. Math. 86 (1879), p. 174.

rungen desselben (I A 3, Nr. **46**; I C 1, Nr. 5) geliefert[6b]). Die Anwendung dieser Algorithmen ist nicht an die Ganzzahligkeit der Koeffizienten gebunden. Bei nicht ganzzahligen Koeffizienten liefert das Verfahren die näherungsweisen (eventuell die exakten) ganzzahligen Lösungen. Die erste solche Verallgemeinerung findet sich bei *Euler*, der z. B. (vergeblich) eine homogene lineare ganzzahlige Relation zwischen $\pi^2 \lg 2$, $(\lg 2)^3$, $1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \cdots$ aufsuchte.

Wendet man das Verfahren auf die näherungsweise ganzzahlige Auflösung der Gleichung

$$x_1 \varepsilon^{n-1} + x_2 \varepsilon^{n-2} + \cdots + x_n = 0$$

an, in welcher ε eine algebraische Zahl n^{ter} Ordnung [I B 1 c, Nr. 2; I C 4 a, Nr. **1**] ist, so wird dasselbe periodisch. Dieser für $n = 2$ von *Lagrange* bewiesene, für $n > 2$ von *Jacobi* ausgesprochene und für $n = 3$ von ihm durch Induktion bestätigte Satz ist allgemein von *Minkowski* bewiesen worden.

Hermite setzte die simultane Annäherung an Null von $n - 1$ linearen Formen

$$\sum_k a_{ik} x_k \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ i = \quad 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

von n ganzzahligen Variablen, die man auf die Form bringen kann

$$\sum_k a_{ik} (x_k - w_k x_0), \qquad (i, k = 1, \ldots, n-1)$$

in Beziehung zu der quadratischen Form:

$$\sum (x_k - w_k x_0)^2 + D x_0^2$$

von der Determinante D.

Da sich der Wert derselben $< \lambda_n \sqrt[n]{D}$ machen lässt (**b** 15), folgt

$$|x_i - w_i x_0| < \sqrt{\lambda_n \sqrt[2n]{D}} < \frac{\mu_n}{\sqrt[n-1]{x_0}},$$

6b) *L. Euler,* Opusc. anal. 2. Petrop. 1785, p. 91 = Comm. Ar. Coll. 2, p. 99; *Gauss,* Disqu. arithm. art. 30 u. 40 = Werke 1, p. 22, 32; *K. G. J. Jacobi,* J. f. Math. 13 (1834), p. 55; 39 (1850), p. 290 (= Berl. Ber. 1848, p. 414); 69 (1868), p. 1, 29 = Werke 2, p. 23; 6, p. 318, 355, 385; *Ch. Hermite,* J. d. math. (1) 14 (1849), p. 21; J. f. Math. 40 (1850), p. 261; 41 (1851), p. 191; *Dirichlet,* Berl. Ber. 1842, p. 93 = Werke 1, p. 632, s. auch *B. Riemann,* Werke p. 276 (2. Aufl. p. 294); *Weierstrass,* Berl. Ber. 1876, p. 680 = Werke 2, p. 55; *L. Kronecker,* Par. C. R. 96 (1883), p. 93; 99 (1884), p. 765 = Werke 3¹, p. 1 u. 21; *H. Poincaré,* Par. C. R. 99 (1884), p. 1014; *W. Fr. Meyer,* Königsb. phys.-ök. Ges. 1897, p. 57; Zürich Math.-Congr. Verh. 1898, p. 168; *Minkowski,* Gött. Nachr. 1899, p. 64; Geometrie der Zahlen, p. 108; *Hurwitz,* Math. Ann. 39 (1891), p. 279.

wo λ_n und μ_n von n abhängige Zahlenfaktoren sind. Dass $\mu_n = \frac{n-1}{n}$ genommen werden kann, hat *Minkowski* gezeigt, für μ_2 ist $\frac{1}{\sqrt{5}}$ der *kleinste* zulässige Wert (*Hurwitz*). Ebenso ergiebt sich für $n-k$ Formen $(k > 1)$

$$x_i - w_{i0}x_0 - w_{i1}x_1 - \cdots - w_{i,k-1}x_{k-1} \qquad (i = k, k+1, \ldots, n-1)$$

die obere Grenze $\frac{\mu_{n,k}}{\sqrt[n-k]{|x_h|^k}}$, wenn x_h die grösste der Zahlen $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ ist. Dasselbe Resultat hatte durch Anwendung einer berühmten Schlussweise *Dirichlet* gefunden: z. B. von den $2N+1$ Werten

$$-\tfrac{1}{2} \leqq y - ax \leqq \tfrac{1}{2} \qquad (x = 0, \pm 1, \ldots, \pm N)$$

müssen irgend 2 in einem der $2N$ Intervalle

$$\frac{h}{2N} \cdots \frac{h+1}{2N} \qquad (h = -N, -N+1, \ldots, N-1)$$

liegen; deren Differenz ergiebt:

$$|y - ax| \leqq \frac{1}{2N} \leqq \frac{1}{2x}.$$

Hingegen lassen sich n Linearformen $\sum\limits_k a_{ik} x_k \quad (i, k = 1, \ldots, n)$ von nicht verschwindender Determinante $|a_{ik}| = D$ nicht gleichzeitig der Null annähern, sondern nur absolut unter (höchstens an) die Grenze $\sqrt[n]{|D|}$ bringen. Für ganzzahlige und damit für rationale Koeffizienten ergiebt sich dieser (*Minkowski*'sche) Satz mit Hülfe des Dirichlet'schen Schlusses aus dem Frobenius'schen Satze 11). Seine Gültigkeit für rationale Koeffizienten kann durch Exhaustion auf irrationale ausgedehnt werden (*Hurwitz*). Bei *Minkowski* tritt der Satz als unmittelbares Korollar des allgemeineren auf: Ein nirgends „*konkaver*" Körper mit einem Mittelpunkte in einem Punkte des Zahlengitters und vom Volumen 2^n enthält immer noch mindestens 2 weitere Punkte im Innern oder auf der Begrenzung (Geometrie der Zahlen p. 76). Dass in $n-1$ der n Ungleichungen: $\left|\sum\limits_k a_{ik} x_k\right| \leqq \sqrt[n]{|D|}$ stets das Gleichheitszeichen wegfallen kann, hat *Hurwitz* gezeigt [7]).

Über die Annäherung von Formen an von Null verschiedene Grössen hat *Tschebyscheff* den ersten Satz aufgestellt: die ganzen Zahlen x, y lassen sich stets auf unendlich viele Arten so wählen, dass

---

7) *A. Hurwitz,* Gött. Nachr. 1897, p. 139.

$$|y - ax - b| \leqq \frac{1}{2|x|}$$

wird [I C 3, Nr. 7].

Kronecker hat die Kriterien für die näherungsweise ganzzahlige Auflösbarkeit eines Systems:

$$\sum a_{ik}x_k = a_i \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ k = 1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

aufgestellt und die Methode der Auflösung angegeben. Ist $\mathfrak{r}$ die kleinste Zahl, für welche das System

$$(a_{ik})$$

durch lineare Zeilentransformation mit beliebigen Koeffizienten in ein anderes übergeht, in dem alle ausser $\mathfrak{r}$ Zeilen nur ganzzahlige Elemente enthalten, so heisst $\mathfrak{r}$ der „*Rationalitätsrang*" des Systems. Alsdann sind im Falle der näherungsweisen Auflösbarkeit des Gleichungssystems (in ganzen Zahlen) von den Grössen a_i $\mathfrak{r}$ beliebig, $r - \mathfrak{r}$ durch Rationalitätsbeziehungen beschränkt und $n - r$ auch dem Werte nach durch die übrigen bestimmt[8]).

13) Auf der Anwendung solcher Algorithmen beruht die Lösung der Aufgabe: Sämtliche ganzzahligen Wertsysteme für die Elemente des Systems

$$(a_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m & \\ k = 1, \ldots, n & m \leqq n \end{pmatrix}$$

anzugeben, für welche die Determinanten m^{ter} Ordnung gegebene Werte erhalten. Dieselbe ist von *Gauss* für $m = 2$ und $n = 3$ und 4, von *Stieltjes* für beliebige m und n gelöst worden.

Mit denselben Hülfsmitteln wird die Aufgabe gelöst: Das gegebene System

$$(a_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m & \\ k = 1, 2, \ldots, n & m < n \end{pmatrix}$$

zu einem quadratischen

$$(a_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

so zu ergänzen, dass dessen Determinante gleich dem Teiler d_m des ersteren Systems wird[9]).

14) Von der in 4) erläuterten Äquivalenz, welche als Äquivalenz der *Gleichungs*systeme $\sum a_{ik}x_k = 0$, $\sum a'_{ik}x'_k = 0$ aufgefasst werden kann, verschieden ist die Äquivalenz der *Formen*systeme: $\sum a_{ik}x_k$,

8) *P. Tschebyscheff* bei *Hermite*, J. f. Math. 88 (1880), p. 10; *Kronecker*, Berl. Ber. 1884, p. 1071, 1179, 1271 = Werke 3^1, p. 31, 47.

9) *Gauss*, Disqu. arith. art. 279 u. 236 = Werke 1, p. 317 u. 248; *Stieltjes* l. c. 4); *Hermite*, J. de math. (2) 14 (1849), p. 21; *K. Weihrauch*, Zeitschr. Math. Phys. 21 (1876), p. 134; *Eisenstein*, J. f. Math. 28 (1844), p. 327 = Ges. Abh. p. 39

$\sum a'_{ik} x'_k$. Dieselben heissen *äquivalent*, wenn sie durch eine ganzzahlige Einheits-Substitution:

$$x_i = \sum \alpha_{ik} x'_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

in einander übergehen.

Das System

$$\sum a_{ik} x_k \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

ist einem „*reduzierten*"

$$\sum a'_{ik} x'_k \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2, \ldots, m \\ a'_{ik} = 0 \text{ für } i < k \\ 0 \leqq a'_{ik} < a'_{ii};\ \prod a'_{ii} = d \end{pmatrix}$$

äquivalent.

Äquivalente reduzierte Systeme sind identisch.

Zwei Systeme sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie dasselbe reduzierte System haben.

Alle einander äquivalenten Systeme bilden eine „*Klasse*"; die Anzahl der Klassen ist gleich der Anzahl der reduzierten Systeme. Für ein gegebenes $d = \prod\limits_i p_i^{\nu_i}$ ist diese Klassenanzahl gleich

$$\frac{1}{d} \prod_i \sum_{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = \nu_i} p_i^{\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \cdots + m\lambda_m};$$

hier sind die p_i die verschiedenen Primfaktoren von d.

15) Die Auflösung der Kongruenzen

$$\sum a_{ik} x_k \equiv a_i \ (\text{mod. } a) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ k = 1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

kommt auf die der Gleichungen

$$\sum a_{ik} x_k + a z_i = a_i$$

zurück.

Sind zunächst alle $a_i = 0$, so ist die Anzahl der inkongruenten Lösungen gleich $\prod\limits_{h=1}^{n} (e_h, a)$, wenn mit (e_h, a) der grösste gemeinsame Teiler von e_h und a bezeichnet wird. Natürlich ist $(e_{r+1}, a) = a$ u. s. w.

Eine „*eigentliche*" Lösung, d. h. eine Lösung mit teilerfremden $x_1, \ldots, x_n$ ist vorhanden, wenn und nur wenn $e_n \equiv 0$ (mod. a) ist[10]).

10) *Frobenius*, J. f. Math. 86 (1879), p. 192; *K. Hensel*, J. f. Math. 107 (1891), p. 241; vgl. auch *J. Studnicka*, Prag. Böhm. Ber. 1875, p. 114.

Die Gesamtheit der Lösungssysteme stellt einen Modul (*Dedekind*) dar [I C 4 a, Nr. **13**], welcher die Invarianten

$$\frac{a}{(e_h, a)} \qquad (h = 1, \ldots, n)$$

besitzt[10a]).

Die Anzahl inkongruenter Wertsysteme, welche die m Linearformen modulo a annehmen können, beträgt:

$$\prod_{h=1}^{n} \frac{a}{(e_h, a)}.$$

Man kann sich auf den Fall $r = m \leqq n$ beschränken. Ist ϱ die grösste Zahl, für welche d_ϱ teilerfremd zu a ist, so giebt es Systeme von $n - \varrho$ und nicht weniger „*Fundamentallösungen*", aus denen alle andern modulo a linear homogen ganzzahlig zusammensetzbar sind[11]).

Sind nicht alle $a_i = 0$, so sind die Kongruenzen für $m \leqq n$ auflösbar, wenn $\prod_{h=1}^{m}(e_h, a) = \prod_{h=1}^{m}(\varepsilon_h, a)$, und für $m > n$, wenn

$$\prod_{h=1}^{n}(e_h, a) = \prod_{h=1}^{n}(\varepsilon_h, a)$$

und $\varepsilon_{n+1} \equiv 0 \pmod{a}$ ist. Hier sind die e_h die Elementarteiler des Systems:

$$\begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} & a & 0 & 0 \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} & 0 & a & 0 \\ \vdots & & & \end{pmatrix},$$

die ε_h die Elementarteiler des Systems:

$$\begin{pmatrix} a_1\, a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} & a & 0 & 0 \\ a_2\, a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} & 0 & a & 0 \\ \vdots & & & \end{pmatrix}.$$ [12])

Die Anzahl der inkongruenten Lösungen beträgt auch in diesem Fall $\prod_{h=1}^{n}(e_h, a)$.

10[a]) *E. Steinitz*, Deutsche Math.-Ver. 5[1] (1896), p. 87.
11) *Frobenius*, J. f. Math. 88 (1880), p. 109.
12) *Smith*, l. c. art. 17 u. 18 = Papers 1, p. 399.

b. Allgemeines über bilineare und quadratische Formen [13]).

1) Geht die „*bilineare Form*"

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

welche man als die Zusammenfassung der linearen Formen $\sum_k a_{ik} y_k$ oder auch der linearen Formen $\sum_i a_{ik} x_i$ auffassen kann, durch die beiden ganzzahligen Einheits-Substitutionen

$$x_i = \sum_{h=1}^{m'} \alpha_{ih} x'_h \qquad y_k = \sum_{h=1}^{n'} \beta_{kh} y'_h \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ k = 1, \ldots, n \\ m' \leqq m, \; n' \leqq n \end{pmatrix}$$

in die bilineare Form

$$\sum_{i,k} a'_{ik} x'_i y'_k \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, m' \\ k = 1, 2, \ldots, n' \end{pmatrix}$$

über, so heisst diese letztere unter der ersteren „*enthalten*" oder durch sie „*dargestellt*".

Die Darstellung heisst eine „*eigentliche*", wenn die beiden Systeme (α_{ih}) und (β_{kh}) Primsysteme sind; sonst „*uneigentlich*".

Damit eine Form in einer andern enthalten ist, ist notwendig und hinreichend, dass die Elementarteiler des Koeffizientensystems der enthaltenen Form Multipla der entsprechenden Elementarteiler des Koeffizientensystems der enthaltenden Form sind.

2) Ist von zwei bilinearen Formen jede unter der andern enthalten, so heissen dieselben „*äquivalent*".

Für die Äquivalenz zweier bilinearen Formen ist die Gleichheit entsprechender Elementarteiler ihrer Koeffizientensysteme notwendig und hinreichend (*Weierstrass*).

3) Von nun ab sei $m = n$.

Jede bilineare Form ist äquivalent einer „*Reduzierten*":

$$\sum_{i=1}^{r} e_i x_i y_i .$$

---

13) *K. Weierstrass*, Berl. Ber. 1858, p. 207; 1868, p. 310 = Werke 1, p. 233; 2, p. 19; *L. Kronecker*, Berl. Ber. 1868, p. 339; 1874, p. 59, 149, 206, 302, 397; Par. C. R. 78 (1874), p. 1181 = Werke 1, p. 163, 349. Weitere Ausführung Berl. Ber. 1890, p. 1225, 1375; 1891, p. 9, 33; *L. Stickelberger*, J. f. Math. 86 (1879), p. 20; *G. Frobenius*, p. 146; *C. Jordan*, J. d. Math. (2) 19 (1874), p. 35, 397; Par. C. R. 77 (1873), p. 1487; 78 (1874), p. 614, 1763; 92 (1881), p. 1437; 93 (1881), p. 113, 181, 234. Im übrigen vgl. *Muth*, Elementarteiler; *Bachmann*, Quadratische Formen, und I B 2, Nr. 3, bes. Anm. 53.

Rechnet man alle einander äquivalenten Formen in eine „*Klasse*", so ist die Anzahl der Klassen bilinearer Formen von $2n$ Variabeln mit der „*Determinante*"

$$D = |a_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

gleich der Anzahl der reduzierten Formen. Diese Anzahl ergiebt sich leicht gleich dem Zähler des Bruches mit dem Nenner D in der Entwickelung des Produktes:

$$\prod_p \frac{1}{\left(1-\frac{1}{p}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p^n}\right)}. \qquad (p = 2, 3, 5, 7, \ldots).$$

4) Der Satz 2) gilt auch noch, wenn die Koeffizienten a_{ik} und die Substitutionskoeffizienten ganze Funktionen eines Parameters λ, die Substitutionsdeterminanten von λ unabhängig sind.

Sind insbesondere die Koeffizienten zweier in diesem Sinne äquivalenten bilinearen Formen lineare Funktionen von λ, so gehen die beiden Formen auch durch zwei von λ *unabhängige* Substitutionen in einander über [14]).

Daher ist für die *Äquivalenz im engeren Sinne* der beiden „*Formenscharen*":

$$\sum (a_{ik} + \lambda b_{ik})\, x_i y_k, \quad \sum (a'_{ik} + \lambda b'_{ik})\, x'_i y'_k$$

die Übereinstimmung der entsprechenden Elementarteiler der beiden Systeme:

$$(a_{ik} + \lambda b_{ik}), \qquad (a'_{ik} + \lambda b'_{ik})$$

notwendig und hinreichend [15]).

5) Von dieser „*simultanen Transformation*" zweier Formen $\sum a_{ik} x_i y_k$, $\sum b_{ik} x_i y_k$ in zwei andere ist ein wichtiger Spezialfall die Transformation einer Form durch eine solche Substitution, welche eine andere Form in sich selbst transformiert.

Um alle Transformationen einer Form in sich selbst [16]) zu finden, genügt es, alle Transformationen ihrer Reduzierten $\sum\limits_{i=1}^{n} e_i x_i y_i$ in sich selbst zu finden. Nimmt man die Substitution der x beliebig an:

$$x_i = \sum_k \alpha_{ik} x'_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

---

14) *Frobenius,* J. f. Math. 86 (1879), p. 205; Berl. Ber. 1896, p. 7.

15) *K. Weierstrass,* Berl. Ber. 1868, p. 310; *Kronecker,* Berl. Ber. 1874, p. 59, 149, 206, 302, 397; *Frobenius,* J. f. Math. 84 (1878), p. 1; *A. Voss,* Münchn. Abh. 17² (1891), p. 235.

16) Vgl. z. B. *A. Voss,* Gött. Nachr. 1887, p. 424 und I B 2, Nr. 3.

so ist diejenige der y:

$$y_i = \sum_k \beta_{ik} y'_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

wenn $\left(\frac{\beta_{ik}}{e_k}\right)$ das zu dem Systeme $(e_i \alpha_{ik})$ reziproke System ist.

Ist insbesondere $e_1 = e_2 = \cdots = 1$, so heissen die beiden Substitutionen „*kontragredient*"; sie transformieren die Form $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ in sich [I B 2, Nr. 2].

Ist
$$x'_i = \sum_k \beta_{ki} x_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$
die reziproke Substitution von $x_i = \sum \alpha_{ik} x'_k$, so ist

$$y_i = \sum_k \beta_{ik} y'_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

die kontragrediente. Von den beiden Systemen

$$(\beta_{ik}), \quad (\beta_{ki})$$

heisst jedes das „*transponierte*" des andern [17]). Zwei Variabelnreihen, welche kontragredienten Substitutionen unterworfen werden, heissen *kontragredient*. Variabelnreihen, welche denselben Substitutionen unterworfen werden, heissen „*kogredient*" [I B 2, Nr. 2].

6) Wird die Form $\sum a_{ik} x_i y_k$ durch zwei kontragrediente Substitutionen in die Form $\sum a'_{ik} x_i y_k$ transformiert, so heissen die Systeme (a_{ik}), (a'_{ik}) „*ähnlich*".

Die Gleichung n^{ten} Grades in λ:

$$| a_{ik} - \delta_{ik}\lambda | = 0 \qquad \begin{pmatrix} i, k = 1, 2, \ldots, n \\ \delta_{ii} = 1, \ \delta_{ik} = 0 \end{pmatrix}$$

heisst die „*Fundamentalgleichung*" der Form oder des Systems (a_{ik}). [18])

Ähnliche Systeme haben gleiche Fundamentalgleichungen.

7) Bezeichnet man mit $a_{i_1 i_2 \cdots i_\mu, k_1 k_2 \cdots k_\mu}$ die aus der i_1^{ten}, i_2^{ten}, ..., i_μ^{ten} Zeile und k_1^{ten}, k_2^{ten}, ..., k_μ^{ten} Spalte des Systems (a_{ik}) gebildete Subdeterminante, so heisst die Form:

$$f^{(\mu)} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_\mu \\ k_1 k_2 \cdots k_\mu}} a_{i_1 i_2 \cdots i_\mu, k_1 k_2 \cdots k_\mu} x_{i_1 i_2 \cdots i_\mu} y_{k_1 k_2 \cdots k_\mu} \qquad \begin{pmatrix} i_h, k_h = 1, 2, \ldots, n \\ i_h < i_{h+1} \\ k_h < k_{h+1} \\ h = 1, 2, \ldots, \mu \end{pmatrix}$$

---

17) *Gauss*, Disqu. arithm. art. 268 = Werke 1, p. 304.

18) *L. Fuchs*, J. f. Math. 66 (1866), p. 133; *E. B. Christoffel*, 68 (1868), p. 270; *M. Hamburger*, 76 (1873), p. 115; *J. Rosanes*, 80 (1875), p. 54.

die μ^{te} *„Adjungierte“*, *„Konkomitante“*, *„Begleitform“* der Form $f = \sum a_{ik} x_i y_k$.[19])

8) Man kann die μ^{te} Adjungierte in die Formen setzen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots a_{1n} & \xi_{11} & \dots \xi_{n-\mu,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots a_{nn} & \xi_{1n} & \dots \xi_{n-\mu,n} \\ \eta_{11} & \dots \eta_{1n} & 0 & \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \eta_{n-\mu,1} & \dots \eta_{n-\mu,n} & 0 & \dots 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left| \sum_{i,k} a_{ik} \xi_{\varrho i} \eta_{\sigma k} \right| \qquad (\varrho,\ \sigma = 1, \dots, n-\mu),$$

wenn man die durch Fortlassung der i_1^{ten}, i_2^{ten}, ..., i_μ^{ten} Spalte aus dem System $\begin{pmatrix} \xi_{11} & \dots \xi_{1n} \\ \vdots & \\ \xi_{n-\mu,1} & \dots \xi_{n-\mu,n} \end{pmatrix}$ gebildete Determinante mit $x_{i_1 i_2 \dots i_\mu}$, und die durch Fortlassung der k_1^{ten}, k_2^{ten}, ..., k_μ^{ten} Spalte aus dem System $\begin{pmatrix} \eta_{11} & \dots \eta_{1n} \\ \vdots & \\ \eta_{n-\mu,1} & \dots \eta_{n-\mu,n} \end{pmatrix}$ gebildete Determinante mit $y_{k_1 k_2 \dots k_\mu}$ bezeichnet.

9) Gehen die beiden Formen $\sum a_{ik} x_i y_k$, $\sum a'_{ik} x'_i y'_k$ durch die Substitutionen:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \sum_h \alpha_{ih} x'_h. \\ y_k &= \sum_h \beta_{kh} y'_h \end{aligned}\right\} \qquad (h,\ i,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$$

in einander über, so gehen ihre μ^{ten} Begleitformen durch die Substitutionen:

$$x_{i_1 i_2 \dots i_\mu} = \begin{vmatrix} \xi'_{11} & \dots \xi'_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ \xi'_{n-\mu,1} & \dots \xi'_{n-\mu,n} \\ \alpha_{i_1,1} & \dots \alpha_{i_1,n} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{i_\mu,1} & \dots \alpha_{i_\mu,n} \end{vmatrix},$$

19) Für quadr. Formen s. *St. Smith*, Lond. R. S. Proc. 13 (1864), p. 199 = Papers 1, p. 412; Par. sav. [étr.] (2) 29 (1887) = Papers 2, p. 623; *P. Bachmann*, J. f. Math. 76 (1873), p. 331; *G. Darboux*, J. d. math. (2) 19 (1874), p. 347; *G. Morera*, Lomb. Rend. (2) 19 (1886), p. 552; *Ch. Biehler*, Nouv. ann. (3) 11 (1887), p. 79;

$$y_{k_1 k_2 \cdots k_\mu} = \begin{vmatrix} \eta'_{11} & \dots & \eta'_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \eta'_{n-\mu,1} & \dots & \eta'_{n-\mu,n} \\ \beta_{k_1,1} & \dots & \beta_{k_1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{k_\mu,1} & \dots & \beta_{k_\mu,n} \end{vmatrix}$$

in einander über.

Äquivalente oder ähnliche Formen haben äquivalente oder ähnliche Begleitformen.

10) Ist $\sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k$ eine ganzzahlige Form, so heisst jedes ganze Vielfache derselben aus ihr *„abgeleitet“* (forma *derivata* bei *Gauss*). Eine Form, die aus keiner anderen ganzzahligen abgeleitet ist, heisst *„primitiv“* [20]).

11) Ist

$$a_{ik} = a_{ki}, \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

so heisst die Form $\sum a_{ik} x_i y_k$ *„symmetrisch“*; ist $a_{ik} = -a_{ki}$, so heisst dieselbe *„alternierend“*.

Die Theorie der symmetrischen Form $\sum a_{ik} x_i y_k$ stimmt, wenn man auf die Variabelnreihen x und y nur kogrediente Transformationen anwendet, mit der Theorie der *„quadratischen“* Form $\sum a_{ik} x_i x_k$ im wesentlichen überein.

An die Stelle der Paare von kontragredienten Substitutionen treten die *orthogonalen* Substitutionen, welche die Form $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ in sich selbst transformieren.

Alle orthogonalen Substitutionen gehen aus

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_k = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} x'_k \qquad \begin{pmatrix} c_{ik} = -c_{ki} \\ c_{ii} = 1 \end{pmatrix}$$

hervor [21]).

Eigenschaften derjenigen Substitutionen, welche eine beliebige quadratische Form in sich transformieren, sind von *Cayley*, *Rosanes*. *Frobenius* gefunden worden [I B 2, Nr. **3**].

G. Rados, Budap. math. u. naturw. Anz. **14** (1896), p. 26; Ungar. Ber. **14** (1898 [1895/96]), p. 85, 116; Zürich Math.-Kongr. Verh. 1898 [1897], p. 163.

20) *Gauss*, Disqu. arithm. art. 226 = Werke **1**, p. 226.

21) *A. Cayley*, J. f. Math. **32** (1846), p. 122 = Pap. **1**, p. 332; **50** (1855), p. 288, 299, bes. p. 311 = Pap. **2**, p. 192, 202; *H. Taber*, Chic. Congr. Pap. (1896 [1893]), p. 395 [I B 2, Nr. **3**, Anm. 41—46].

Die Fundamentalgleichung einer solchen Substitution ist reziprok[22]).

Die quadratische Form $\sum a_{ik} x_i x_k$ wird durch die *„antisymmetrische“* Substitution

$$\sum_k a_{ik} x_k = \sum_k a_{ki} x_k' \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

in sich transformiert (*Rosanes*)[22]).

Damit eine Substitution geeignet sei, eine quadratische Form in sich zu transformieren, ist notwendig und hinreichend, dass die Elementarteiler der zugehörigen Fundamentalgleichung paarweise reziproke Wurzeln haben und von gleichem Grade sind, mit Ausnahme derjenigen, die für $\lambda = +1$ oder -1 verschwinden und welche ungerade Exponenten haben[23]).

Die Aufgabe: Alle Transformationen einer gegebenen quadratischen Form von n Variabeln in sich zu finden, ist von *Cayley* und *Hermite* angegriffen, von *Frobenius* und *Muir* erledigt worden[24]).

12) Die Aquivalenz quadratischer Formen wird in eine *„eigentliche“* und eine *„uneigentliche“* unterschieden, je nachdem die Substitutionsdeterminante gleich $+1$ oder gleich -1 ist. Eine sich selbst uneigentlich äquivalente Klasse von Formen heisst *„ambig“* (*„anceps“* bei *Gauss* [Disqu. Ar. art. 163], *„bifide“* bei *Legendre*).

Eine primitive quadratische Form heisst *„eigentlich“* primitiv oder *„erster Art“* oder *„ungerade“*, wenn die Koeffizienten a_{ii} nicht alle gerade sind, sonst *„uneigentlich“* primitiv, *„zweiter Art“*, *„gerade“*.

13) Ergänzt man diejenigen Glieder einer quadratischen Form $\sum a_{ik} x_i x_k$, welche x_1 enthalten, zu einem vollständigen Quadrat einer linearen Form y_1 von $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so erhält man

$$\sum a_{ik} x_i x_k = \frac{y_1^2}{a_{11}} + \sum a'_{i'k'} x_{i'} x_{k'}; \qquad \begin{pmatrix} i,\ k \ = 1, 2, \ldots, n \\ i', k', = ,2\ 3, \ldots, n \end{pmatrix}$$

verfährt man mit $\sum a'_{i'k'} x_{i'} x_{k'}$ analog u. s. w., so erhält man schliesslich:

$$\sum a_{ik} x_i x_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{D_{i-1} D_i},$$

$$\text{wo } D_i = |a_{gh}|, \quad (g, h = 1, 2, \ldots, i) \quad D_0 = 1,$$

---

22) *Cayley,* J. f. Math. 50 (1855), p. 288 = Pap. 2, p. 192; *J. Rosanes*, 80 (1875), p. 62 [I B 2, Nr. 3, Anm. 66, 67].

23) *Frobenius,* J. f. Math. 84 (1878), p. 41.

24) *Cayley,* J. f. Math. 32 (1846), p. 119; 50 (1855), p. 288 = Papers 1, p. 332; 2 p. 192; *Hermite*, J. f. Math. 47 (1854), p. 307; *J. Rosanes* 80 (1875), p. 52; *Frobenius* 84 (1878), p. 1; Par. C. R. 85 (1877), p. 131; *V. Cerruti,* Rom. Linc. A. (2) 2 (1878), p. 48; *Th. Muir,* Edinb. Trans. 39 (1896), p. 209; Amer. J. of math. 20 (1898), p. 215 [I B 2, Nr. 3, Anm. 42—46, 71].

gesetzt ist[25]). Die Form heisst *„ordinär“*, wenn diese Transformation auf ein Aggregat von n Quadraten möglich ist, sonst *„singulär“*[26]). Eine singuläre Form ist in ein Aggregat von weniger als n Quadraten transformierbar. Wie auch eine Form in ein Aggregat $\sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2$ (reell) transformiert werden mag, so ist doch stets dieselbe Anzahl der (reellen) Koeffizienten m_i positiv, null, negativ: *Sylvester*'s *Trägheitsgesetz*[27]), das aber, nach einer Bemerkung *K. W. Borchardt*'s, *Jacobi* schon 1847 gekannt hat. Danach zerfallen die Formen in verschiedene *„Spezies“*.

Bei ordinären Formen von n Variabeln heisst die Anzahl τ der negativen Koeffizienten m_i der *„Index“* (*Hermite*) oder *„Trägheitsindex“* der Form, die kleinere der Zahlen τ und $n - \tau$ die *„Charakteristik“* (*Loewy*), $(n - \tau) - \tau$ die *„Signatur“* (*Frobenius*) der Form.

Haben alle Koeffizienten m_i dasselbe Zeichen, so heisst die Form *„definit“*, sonst *„indefinit“*. Die definiten Formen zerfallen nach dem Vorzeichen der durch sie darstellbaren Zahlen in *„positive“* und *„negative“*.

14) Für diejenigen Werte einer positiven Form, welche unter einer bestimmten Grenze liegen, liegen auch die Variabeln unter bestimmten Grenzen. Infolgedessen nimmt eine ganzzahlige positive Form einen bestimmten ganzzahligen Wert nur für eine endliche Anzahl ganzzahliger Wertsysteme der Variabeln an. Hieraus ergiebt sich ferner, dass eine solche Form nur eine endliche Anzahl ganzzahliger Transformationen in sich selbst zulassen kann. Die Anzahl derselben ist gewiss nicht grösser als $(2^{n+1} - 2)^n$.[27a])

---

25) *Jacobi,* J. f. Math. 53 (1857), p. 265 = Werke 3, p. 583; *S. Gundelfinger*, J. f. Math. 91 (1881), p. 221; *Hermite* 47 (1854), p. 322; *D. André*, Par. Soc. math. Bull. 15 (1887), p. 188; *Vahlen,* Zeitschr. Math. Phys. 40 (1895), p. 127; *A. Kneser,* Arch. f. Math. u. Phys. (2) 15 (1897), p. 225 (vgl. ferner I B 2, Anm. 37). Die simultane Transformation zweier Formen auf Quadratsummen s. namentlich bei *G. Darboux,* J. de math. (2) 19 (1874), p. 347. Die Transf. bilinearer Formen in die Form $\sum m_i x_i y_i$ s. *Jacobi* l. c.; *B. E. Beltrami,* Giorn. di mat. 11 (1873), p. 98 [I B 2, Nr. **3**, Anm. 56].

26) Über Transf. sing. Formen s. z. B. *Benoît,* Par. C. R. 101 (1885), p. 869; Nouv. Ann. (3) 5 (1885), p. 30; *De Presle*, Par. Soc. math. Bull. 14 (1886), p. 98 [I B 2, Nr. **3**, Anm. 37].

27) *Jacobi*, J. f. Math. 53 (1857), p. 275 = Werke 3, p. 591; *Sylvester*, Phil. Mag. (4) 4, 1852², p. 138; Lond. Trans. 143 (1853), p. 481; *Hermite,* J. f. Math. 53 (1857), p. 271; *K. W. Borchardt,* p. 281 = Werke p. 469; *Brioschi*, Nouv. ann. 15 (1856), p. 254; *De Presle,* Par. Soc. math. Bull. 15 (1887), p. 179 [I B 2, Nr. **3**, Anm. 38].

27a) *C. Jordan*, J. éc. pol. 29, cah. 48 (1880), p. 133; *Minkowski,* J. f. Math. 101 (1887), p. 196; Geom. der Zahlen, p. 185.

15) Für das Minimum einer positiven Form mit n ganzzahligen Variablen und der Determinante D ist eine obere Grenze: $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt[n]{D}$ zuerst von *Hermite* ermittelt worden. Dieser Minimalwert kann bei binären Formen ($n=2$) und nur bei diesen wirklich erreicht werden. Niedrigere obere Grenzen haben *Korkine* und *Zolotareff* aufgestellt; nämlich für $n=2m$ die Grenze: $\frac{3^{\frac{m-2}{2}}}{2^{\frac{m-3}{2}}}\sqrt[n]{D}$, und für $n=2m+1$ die Grenze: $\sqrt[n]{\frac{3^{m(m-1)}}{2^{m(m-2)}}D}$. Diese Grenzen können bei ternären ($n=3$) und quaternären ($n=4$) Formen und nur bei diesen wirklich erreicht werden. Das Problem, die *niedrigste* obere Grenze aufzufinden, lösen *Korkine* und *Zolotareff* durch Aufsuchung der „*extremen*" Formen, d. h. derjenigen Formen, deren Minimum durch Änderung der Koeffizienten bei ungeänderter Determinante verkleinert wird. Ihre Methode liefert für $n = 2, 3, 4, 5$, von konstanten Faktoren abgesehen, nur die extremen Formen:

$$x_1^2+x_2^2+x_1x_2, \quad x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3,$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4,$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\pm x_1x_4\pm x_2x_4\pm x_3x_4,$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5+x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5 \\ +x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5,$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2-\frac{1}{2}x_1x_2-\frac{1}{2}x_1x_3-\frac{1}{2}x_1x_4-\frac{1}{2}x_1x_5 \\ +\frac{1}{2}x_2x_3+\frac{1}{2}x_2x_4+\frac{1}{2}x_3x_4-x_2x_5-x_3x_5-x_4x_5,$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_1x_3+x_1x_4+x_1x_5+x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5 \\ +x_3x_4+x_3x_5+x_4x_5,$$

also bezw. die kleinsten oberen Grenzen:

$$\sqrt[2]{\frac{4}{3}D},\ \sqrt[3]{2D},\ \sqrt[4]{4D},\ \sqrt[5]{8D}.$$

Minkowski sucht, allgemeiner, eine obere Grenze für den Minimalwert der Summe von n p^{ten} Potenzen der absoluten Werte von n Linearformen von n Variablen. Diese Grenze ergiebt sich hauptsächlich auf Grund seines oben p. 587 citierten Satzes über nirgends konkave Körper; für quadratische Formen ($p=2$) ergiebt sich die Grenze [s. u. Nr. e, 10)]:

$$\left(\frac{2^n \Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right)^2 \sqrt[n]{D}.$$ [28]).

16) *Jacobi* hat gezeigt, dass man vermittelst der Verallgemeinerung des Kettenbruchalgorithmus (s. Nr. a, 12) eine ganzzahlige quadratische Form von n Variablen durch ganzzahlige Einheitssubstitutionen auf eine Form von $2n-1$ und im allgemeinen nicht weniger Gliedern reduzieren kann. Diese „*Jacobi'schen Reduzierten*" haben die Gestalt: $a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 + \cdots + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2$. [29])

c. Binäre quadratische Formen und bilineare Formen von vier Variablen. 1) Etwas abweichend von den allgemeinen quadratischen Formen nennt man nicht $ac - b^2$, sondern, im Anschluss an *Gauss*, $b^2 - ac = D$ die *Determinante* (bei *Gauss* determinans sc. numerus; „der Determinant" s. z. B. [40])) der quadratischen Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$. Die Formen derselben Determinante zerfallen in „*Ordnungen*", indem man diejenigen zusammenfasst, in denen einerseits a, b, c, andererseits $a, 2b, c$ denselben grössten gemeinsamen Teiler haben. Man beschränkt die Betrachtung auf die Ordnungen der „*primitiven*" Formen, in denen a, b, c den grössten gemeinsamen Teiler 1 haben. Je nachdem $a, 2b, c$ den grössten gemeinsamen Teiler 1 oder 2 haben, hat man es mit der Ordnung der „*eigentlich*" oder der „*uneigentlich*" primitiven Formen zu thun. Jede der beiden Ordnungen zerfällt in „*Klassen*", indem man die einander eigentlich äquivalenten Formen in eine Klasse zusammenfasst. — Formen mit quadratischer Determinante zerfallen in zwei rationale Linearfaktoren und werden im allgemeinen als „*arithmetisch singulär*" von der Betrachtung ausgeschlossen. Die Null ist durch dieselben darstellbar (*Nullformen*).

2) Die Form $x^2 - Dy^2$ heisst die „*Hauptform*", die Klasse, der sie angehört, die „*Hauptklasse*".

Die Gleichung $x^2 - Dy^2 = 1$ heisst die *Pell'sche* (richtiger Fermat'sche) Gleichung[30]).

---

28) *Hermite,* J. f. Math. 40 (1850), p. 261; *A. Korkine* u. *G. Zolotareff,* Math. Ann. 5 (1872), p. 581; 6 (1873), p. 366; 11 (1877), p. 242; *H. Minkowski,* Par. C. R. 112 (1891), p. 209; J. f. Math. 107 (1891), p. 278; Chic. Congr. Pap. 1896 [1893], p. 201; Geometrie der Zahlen, Leipzig 1896, p. 123.

29) *Jacobi,* Berl. Ber. 1848, p. 414 = J. f. Math. 39 (1850), p. 290 = Werke 6, p. 318.

30) *Lagrange,* § 8 der Additions zu *Euler,* Élémens d'algèbre, Lyon 1794, deutsch v. *Grüson*, Berl. 1796/97, p. 628 = Oeuvr. 7, p. 3 u. Misc. Taur. 4 (1766) = Oeuvr. 1, p. 669; *Euler,* Éléments d'algèbre 2², Kap. 7; Petr. Nov.

Für $D < -1$ hat dieselbe in ganzen Zahlen nur die beiden Auflösungen: $x = \pm 1$, $y = 0$. Für $D = -1$ hat dieselbe nur die vier Auflösungen: $x = \pm 1$, $y = 0$ und $x = 0$, $y = \pm 1$. Für $D > 0$ hat die Pell'sche Gleichung unendlich viele Auflösungen. Aus je zwei Auflösungen ergiebt sich eine dritte vermöge der Gleichung:

$$(t_1 + u_1\sqrt{D})(t_2 + u_2\sqrt{D}) = (t_1t_2 + Du_1u_2) + (t_1u_2 + t_2u_1)\sqrt{D}.$$

Man kann sich auf die *„positiven"* Auflösungen, für welche $t > 0$ und $u > 0$ ist, beschränken. Ist T, U die Auflösung, für welche T, also auch U am kleinsten ist, so ergeben sich alle positiven Auflösungen aus:

$$t + u\sqrt{D} = (T + U\sqrt{D})^k \text{ für } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Die Auflösung t, u *„gehört"* dann zum Exponenten k. Die Auflösung (T, U) heisst *„Fundamentalauflösung"*.

Die Fundamentalauflösung wird gefunden, indem man $\sqrt{D}$ in einen Kettenbruch entwickelt; derselbe wird periodisch und zwar derart, dass

$$\sqrt{D} = p_0 + \cfrac{1}{p_1 + \cfrac{1}{p_2 + \cdots + \cfrac{1}{p_2 + \cfrac{1}{p_1 + \cfrac{1}{p_0 + \sqrt{D}}}}}}$$

wird[31]).

Setzt man

$$p_0 + \cfrac{1}{p_1 + \cdots + \cfrac{1}{p_1}} = \frac{T'}{U'},$$

Comm. 11 (1765), p. 28 = Comm. arithm. 1, p. 316; und an vielen anderen Stellen (vgl. Opusc. arithm.); *Gauss,* Disqu. arithm. art. 163 = Werke 1, p. 163; vgl. ferner: *P. Seeling,* Arch. f. Math. u. Phys. 52 (1871), p. 40; *L. Öttinger* 49 (1869), p. 193; *A. B. Evans, A. Martin, G. Hart, S. Bills,* Educ. Times 16 (1872), p. 34; 23 (1875), p. 98, 109; 28 (1877), p. 29; *C. Moreau,* Nouv. ann. 12 (1873), p. 330; *C. Minnigerode,* Gött. Nachr. 1873, p. 619; *W. Schmidt,* Zeitschr. Math. Phys. 19 (1874), p. 92; *H. J. S. Smith,* Lond. Math. Soc. Proc. 7 (1876), p. 199 = Coll. Math. Pap. 2, p. 148; *S. Roberts* 15 (1884), p. 247; *H. Brocard,* Nouv. Corr. Math. 4 (1878), p. 161, 193, 228, 337; *S. Realis* 6 (1880), p. 306, 342; *W. Durfee,* John Hopk. Circ. 1882¹, p. 178; *A. Meyer,* Zürich Naturf. Ges. 32 (1887), p. 363.

31) *Lagrange,* l. c. 30) u. Traité d. l. rés. des équ. num. Paris 1798 u. 1808, chap. 6 = Oeuvr. 8, p. 73; vgl. ferner z. B. *O. Schlömilch,* Zeitschr. Math. Phys. 17 (1872), p. 70; *A. Stern,* J. f. Math. 53 (1857), p. 1; *A. Boutin,* Mathesis (2) 7 (1897), p. 8; *E. de Jonquières,* Par. C. R. 96 (1883), p. 568, 694, 832, 1020, 1129, 1210, 1297, 1351, 1420, 1490, 1571, 1721; *P. Seeling,* Arch. Math. Phys. 49 (1869), p. 4; *Smith,* Chelini Coll. Math. 1881, p. 117.

so ist $T'^2 - DU'^2 = \pm 1$. Ist $T'^2 - DU'^2 = -1$, so erhält man alle positiven Auflösungen dieser Gleichung aus

$$(T' + U'\sqrt{D})^k$$

für $k = 1, 3, 5, \ldots$ und alle positiven Auflösungen der Pell'schen Gleichung für $k = 2, 4, 6, \ldots$; insbesondere die Fundamentalauflösung für $k = 2$.

Die Frage nach den ganzen algebraischen Zahlen [I C 4a, Nr. 2, 7] der Form $t + u\sqrt{D}$, deren Norm $t^2 - Du^2$ absolut gleich Eins ist, ist die Frage nach den „*Einheiten*" des „*Bereiches*" $\sqrt{D}$. Da auch Zahlen von der Form $\frac{t + u\sqrt{D}}{2}$ „ganze" algebraische Zahlen sein können, hat man für $D \equiv 0$ oder 1 (mod. 4) auch die Gleichungen

$$\frac{t^2 - Du^2}{4} = \pm 1$$

zu betrachten[32]). Man beschränkt sich auf die „*eigentlichen*" Auflösungen, in denen u ungerade ist.

Ist (T'', U'') die kleinste Auflösung dieser Gleichungen, und ist

$$\frac{T''^2 - DU''^2}{4} = +1,$$

so erhält man aus

$$\left(\frac{T'' + U''\sqrt{D}}{2}\right)^k$$

für $k = 1, 2, 4, 5, 7, 8, \ldots$ alle eigentlichen positiven Auflösungen der Gleichung $\frac{t^2 - Du^2}{4} = 1$, und für $k = 3, 6, 9, \ldots$ alle Auflösungen der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$. Ist aber $\frac{T''^2 - DU''^2}{4} = -1$, so erhält man für $k = 1, 5, 7, 11, 13, \ldots$ alle eigentlichen positiven Auflösungen von $\frac{t^2 - Du^2}{4} = -1$, für $k = 2, 4, 8, 10, \ldots$ alle ebensolchen Auflösungen von $\frac{t^2 - Du^2}{4} = +1$, für $k = 3, 9, 15, \ldots$ alle solchen Auflösungen von $t^2 - Du^2 = -1$ und für $k = 6, 12, 18, \ldots$ alle positiven Auflösungen von $t^2 - Du^2 = +1$.

Sind Auflösungen einer der Gleichungen

$$t^2 - Du^2 = -1, \qquad \frac{t^2 - Du^2}{4} = \pm 1$$

vorhanden, so kann die kleinste derselben aus der Fundamentalauf-

---

32) *Dirichlet*, Berl. Abh. 1834, p. 649 = Werke 1, p. 218; *S. Roberts*, Lond. Math. Soc. Proc. 10 (1879), p. 29; *J. Perott*, J. f. Math. 102 (1888), p. 185; *C. Störmer*, Christ. Vidensk. Skrift. 1897, math.-nat. Kl., Nr. 2.

lösung gefunden werden. Doch liefern auch die Kettenbrüche ihre Auflösung, z. B. ist:

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}} \qquad 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{11}{3},$$

$$\frac{11^2 - 13 \cdot 3^2}{4} = +1 .$$

Andere Auflösungen als durch die Kettenbrüche werden durch die Kreisteilung (s. I C 4b, Nr. 4) und durch die elliptischen Funktionen (s. I C 6, Nr. 2) geliefert[33]).

Die Fundamentalauflösungen der Pell'schen Gleichung für $D = 2$ bis 1000 hat *Degen* berechnet und zusammengestellt[34]).

3) Alle eigentlichen Transformationen der quadratischen Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ in sich selbst erhält man aus:

$$x = (t - bu)\, x' - cuy',$$
$$y = aux' + (t + bu)\, y',$$

wenn man für t, u alle Lösungen der Pell'schen Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ einsetzt[35]).

4) Aus *einer* Transformation:

$$x = \alpha x' + \beta y'$$
$$y = \gamma x' + \delta y',$$

durch welche die quadratische Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ in eine ihr äquivalente übergeht, erhält man *alle* vermittelst Zusammensetzung mit allen Transformationen der quadratischen Form in sich, also sind in:

$$x = [\alpha t - (b\alpha + c\gamma)u]x' + [\beta t - (b\beta + c\delta)u]y'$$
$$y = [\gamma t + (a\alpha + b\gamma)u]x' + [\delta t + (a\beta + b\delta)u]y'$$

alle diese Transformationen enthalten.

Umgekehrt ergiebt sich aus zwei Transformationen einer quadratischen Form in sich oder eine andere immer eine Auflösung der Pell'schen Gleichung.

Die Anzahl der *„automorphen"* Transformationen einer quadra-

---

33) *Dirichlet,* J. f. Math. 17 (1837), p. 286 = Werke 1, p. 342; *Kronecker,* Berl. Ber. 1863, p. 44.

34) *C. F. Degen,* Canon Pellianus. Hafniae (Kopenhagen) 1817; fortgesetzt von *A. Cayley,* Brit. Ass. Rep. 1893, p. 73 = Papers 13, p. 430.

35) *Gauss,* Disqu. arithm. art. 162 = Werke 1, p. 129; *Dirichlet,* Vorles. § 62; vgl. ferner z. B. *H. W. Lloyd Tanner,* Mess. (2) 24 (1895), p. 180.

tischen Form ist daher endlich für eine definite, unendlich für eine indefinite Form; im letzteren Fall bilden dieselben eine cyklische hyperbolische Gruppe[40a]) [II B 6 c, Nr. 5].

5) Zu einer indefiniten Form giebt es offenbar stets eine äquivalente, in welcher der erste Koeffizient ein vorgeschriebenes Vorzeichen hat.

Soll man also über die Äquivalenz oder Nichtäquivalenz zweier Formen derselben Determinante:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2, \qquad mx^2 + 2nxy + ly^2$$

entscheiden, so kann man $\operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} m$ voraussetzen.

Zur Äquivalenz beider Formen ist die Auflösbarkeit der Gleichungen:

$$\begin{aligned} a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 &= m \\ a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta &= n \\ a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2 &= l \\ \alpha\delta - \beta\gamma &= 1 \end{aligned}$$

in ganzen Zahlen erforderlich; also muss der erste Koeffizient m (ebenso l) durch die Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ *„darstellbar“* sein.

Dann ist $n^2 - ml = D$, also $n^2 \equiv D \pmod{m}$, d. h. D quadratischer Rest von m [I C 1, Nr. 6]. Diese Bedingung ist für die Darstellbarkeit notwendig, aber nicht hinreichend.

Ersetzt man γ und δ durch andere ganze Zahlen, für welche $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ist, so bleibt der Kongruenzwert von $n \pmod{m}$ unverändert: die Darstellung $m = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2$ *„gehört“* zu diesem Kongruenzwert von $\sqrt{D} \pmod{m}$. Alle Darstellungen von m, welche zu diesem Werte gehören, bilden eine Klasse; alle diese Darstellungen $m = a\alpha'^2 + 2b\alpha'\gamma' + c\gamma'^2$ ergeben sich aus einer vermittelst der Transformationen der Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ in sich selbst oder auch aus der Gleichung:

$$a\alpha' + (b + \sqrt{D})\gamma' = [a\alpha + (b + \sqrt{D})\gamma](t + u\sqrt{D}),$$

wenn für t, u alle Auflösungen der Pell'schen Gleichung gesetzt werden.

Um *alle* Darstellungen überhaupt zu besitzen, genügt es, aus jeder Klasse von Darstellungen eine *„reduzierte“* herauszuheben. In jeder Klasse ist eine und nur eine solche reduzierte Darstellung vorhanden, für welche:

$$0 \leqq \gamma < U\sqrt{am}, \qquad \frac{T}{U}\gamma < a\alpha + b\gamma < T\sqrt{am} \quad \text{ist.}$$

Die reduzierten Darstellungen sind daher in endlicher Anzahl vorhanden und durch eine endliche Anzahl von Versuchen zu finden.

Gehören die reduzierten Darstellungen zu den Kongruenzwerten $n', n'' \ldots$ von $\sqrt{D}$ (mod. m), so ist die Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ der Form $mx^2 + 2nxy + ly^2$ äquivalent oder nicht, je nachdem die Zahl n einer der Zahlen $n', n'' \ldots$ kongruent (mod. m) ist oder nicht.

Ist im ersteren Falle $m = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2$ die zugehörige reduzierte Darstellung, so ist

$$x = \alpha x' + \frac{n\alpha - (b\alpha + c\gamma)}{m} y'$$

$$y = \gamma y' + \frac{n\gamma + (a\alpha + b\gamma)}{m} y'$$

eine Transformation der ersten Form in die zweite; alle solchen Transformationen folgen dann aus 4).

Man kann daher zwei Formen als äquivalente definieren, wenn eine Zahl m, die durch die eine, auch durch die andere darstellbar ist, und beide Darstellungen zu demselben Kongruenzwerte von $\sqrt{D}$ (mod. m) gehören[36].

6) Rechnet man alle diejenigen Darstellungen von m durch *alle* (eigentlich primitiven) quadratischen Formen der Determinante D in eine Klasse, welche sich aus einer Darstellung durch Transformation der Form in sich oder eine andere ergeben, so ist die Anzahl dieser Klassen offenbar gleich der Anzahl der Kongruenzwerte von $\sqrt{D}$ (mod. m).

Hieraus folgen z. B. die Sätze: Jede Primzahl $\equiv 1$ (mod. 4) lässt sich nur einmal als $x^2 + y^2$ darstellen; jede Primzahl $\equiv 1$ oder 3 (mod. 8) lässt sich nur einmal als $x^2 + 2y^2$ darstellen; jede Primzahl $\equiv 1$ oder 7 (mod. 8) lässt sich nur einmal als $x^2 - 2y^2$, jede Primzahl $\equiv 1$ (mod. 6) lässt sich nur einmal als $x^2 + 3y^2$ darstellen[37]. Auf Grund

---

36) *Dirichlet,* De formarum binariarum sec. gr. comp. Berlin 1851 = Werke 2, p. 105. Ebenso für quadr. Formen von n Variablen: *H. Minkowski,* J. f. Math. 100 (1887), p. 449.

37) Diese Sätze waren z. T. schon *Fermat* (s. Oeuvres 1, p. 293) bekannt; *Euler*, Petrop. Nov. Comm. 5 (1754/55), p. 3; 6 (1756/57), p. 185; 8 (1760/61), p. 105 = Comm. Ar. 1, p. 174, 210, 287; *Lagrange*, Berlin Nouv. Mém. 4 (1773), p. 265; 6 (1775), p. 323 = Oeuvr. 3, p. 693. Über diese, ähnliche und damit zusammenhängende Sätze s. ferner: *Jacobi*, Werke 6, p. 245; 2, p. 145 = J. f. Math. 12 (1834), p. 167; 35 (1847), p. 313 = J. de math. 15 (1850), p. 357; *A. Göpel,* De aequ. sec. gr. indet. Berlin 1835; *Cauchy,* Par. C. R. 9 (1839), p. 473, 519 = Oeuvr. (1) 4, p. 504, 506; Par. C. R. 10 (1840), p. 51, 85, 181, 229 = Oeuvr. (1) 5, p. 52, 64, 85, 95; *St. Smith*, J. f. Math. 50 (1855), p. 91 = Papers 1, p. 33; *Dirichlet,* Berl. Abh. 1833, p. 101 = Werke 1, p. 194; *L. Calzolari,* Giorn. di mat. 8 (1870), p. 28; *G. Cantor,* Zeitschr. Math. Phys. 13 (1868), p. 259; *J. Petersen,* Tidsskr. (3) 1 (1871), p. 76; *L. Lorenz* p. 97; *Vallès,* l'Institut 40 (1872), p. 140; *J. Liouville,*

dieser Sätze ergeben sich auch die *Anzahlen* der Darstellungen einer Zahl durch $x^2 + y^2$, $x^2 \pm 2y^2$, $x^2 + 3y^2$. Insbesondere ist die Anzahl der Darstellungen einer Zahl m durch $x^2 + y^2$ gleich $\sum \left(\frac{-1}{d}\right)$, zu summieren über alle ungeraden Teiler d von m.[37a])

7) Ein anderer Weg als der aus der Darstellung der Zahlen folgende, um über die Äquivalenz oder Nichtäquivalenz zweier Formen derselben Determinante zu entscheiden, besteht darin, jede der beiden Formen durch Einheits-Substitutionen in eine „reduzierte" zu transformieren[38]), und die beiden reduzierten zu vergleichen.

Repräsentiert man die Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ durch diejenige Wurzel der Gleichungen: $aw^2 \pm 2bw + c = 0$, $a \pm 2bw + cw^2 = 0$, deren absoluter Wert grösser als Eins und deren realer Teil (für $D > 0$ die Wurzel selbst) positiv ist, so liefert die Kettenbruchentwicklung desselben:

$$q_0 - \cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cdots}}$$

die Einheitssubstitutionen:

$$w = q_0 - w', \qquad w = q_0 - \frac{1}{w'}, \qquad w = q_0 - \frac{1}{q_1 - w'}, \cdots,$$

von welchen für $D < 0$ die letzte die Eigenschaft hat, die gegebene Gleichung in eine solche zu transformieren, für welche $|2b| \leqq |a|$ und $|2b| \leqq |c|$ ist. Eine positive Form ist daher stets einer solchen reduzierten eigentlich äquivalent, in welcher $c \geqq a \geqq 2|b|$ ist. Aus diesen Bedingungen lässt sich die andere $2|b| \leqq a \leqq 2\sqrt{\frac{-D}{3}}$ und daraus die Endlichkeit der Anzahl der reduzierten Formen, also auch der Klassen für eine negative Determinante folgern.

Für eine negative Determinante sind je zwei reduzierte Formen nicht äquivalent; ausgenommen die Formenpaare:

J. de math. (2) 18 (1873), p. 142; *Th. Muir*, Lond. Math. Soc. Proc. 8 (1877), p. 215; *S. Roberts* 9 (1878), p. 187; 10 (1879), p. 29; *G. Oltramare*, Par. C. R. 87 (1878), p. 734; *E. de Jonquières*, p. 399; Nouv. ann. (2) 17 (1878), p. 241, 289, 419, 433; *A. Genocchi*, Nouv. corr. math. 6 (1880), p. 39; *S. Realis* p. 111; *K. Küpper*, Casop. 10 (1881), p. 10; *Th. Harmuth*, Arch. f. Math. u. Phys. 66 (1881), p. 327; 67 (1882), p. 215; *T. S. Stieltjes*, Par. C. R. 97 (1883), p. 889; Amst. Versl. en Meded. (2) 19 (1884), p. 105; Toul. Ann. 11 D (1897), p. 1; *S. Realis*, Nouv. ann. (2) 18 (1879), p. 500; (3) 2 (1883), p. 794; 3 (1884), p. 305; 4 (1885), p. 367; 5 (1886), p. 113; *Bock*, Hamb. Mitt. 5 (1885), p. 101; *Th. Pepin*, Rom. N. Linc. Pont. A. 38 (1885), p. 197; 43 (1890), p. 163; *Vahlen*, J. f. Math. 112 (1893), p. 32; *G. B. Mathews*, Quart. J. 27 (1895), p. 230.

37a) Üb. *mittlere* Anz. v. Darst. s. *Gegenbauer*, Wien. Ber. 92^2 (1886), p. 380.

38) *Lagrange*, Berlin Nouv. Mém. 4 (1773), p. 265.

$$ax^2 + axy + cy^2 \sim ax^2 - axy + cy^2$$
$$ax^2 + 2bxy + ay^2 \sim ax^2 - 2bxy + ay^2.$$

Für eine positive Determinante haben die angegebenen Substitutionen von einer bestimmten an den Erfolg, die gegebene Form in eine solche reduzierte ihr eigentlich äquivalente zu transformieren, in welcher:

$$0 < \sqrt{D} - b < |c| < \sqrt{D} + b$$

ist; hieraus folgt wiederum die Endlichkeit der Anzahl reduzierter Formen. Den Perioden des Kettenbruches $q_0 - \frac{1}{q_1 - \cdot\,\cdot}$ entsprechend ordnen sich diese reduzierten Formen in Perioden von einander äquivalenten Formen:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \sim cx^2 + 2b'xy + a'y^2 \sim a'x^2 + 2b''xy + c'y^2$$
$$\sim c'x^2 + \cdots \sim ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

von denen jede in die folgende durch eine Substitution $w = q - \frac{1}{w'}$ übergeht. Von zwei solchen heisst die erste der zweiten „links", die zweite der ersten „rechts *benachbart*".

Zwei Formen verschiedener Perioden sind nicht äquivalent; die Anzahl der Klassen ist gleich der Anzahl der Perioden[39]).

8) Von andern Arten, reduzierte Formen zu definieren, ist die folgende hervorzuheben.

Für positive Formen definieren zwei Systeme von Parallelen, welche die ganze Ebene in Parallelogramme mit den Seiten $\sqrt{a}$ und $\sqrt{c}$ und den Winkeln arc cos $\frac{b}{\pm\sqrt{ac}}$ zerlegen, ein „*Punktgitter*", in welchem das Abstandsquadrat je zweier Punkte in der Form $ax^2 \pm 2bxy + cy^2$ erscheint. Die Parallelensysteme „*repräsentieren*" daher diese beiden „*entgegengesetzten*" Formen. Man kann die Punkte des Gitters noch auf unendlich viele andere Arten als Eckpunkte von Parallelogrammen des Inhalts $\sqrt{-D}$ auffassen. Jede der Auffassungen repräsentiert zwei zu $ax^2 \pm 2bxy + cy^2$ äquivalente Formen. Das Punktgitter an sich repräsentiert daher eine Klasse (genauer eine Klasse und die entgegengesetzte). Die reduzierte Form wird durch das Parallelo-

39) *Gauss*, Disqu. arithm. art. 184 = Werke 1, p. 164; *Hermite*, J. f. Math. 36 (1848), p. 357; *Dirichlet*, Berl. Abh. 1854, p. 99 = Werke 2, p. 139; J. de math. (2) 2 (1857), p. 353 = Werke 2, p. 159; vgl. ferner: *S. Roberts*, Lond. Proc. Math. Soc. 10 (1879), p. 29; *F. Mertens*, J. f. Math. 89 (1880), p. 332; *Th. Pepin*, Rom. N. Linc. Pont. A. 33 (1880), p. 354; *Mertens*, Wien. Ber. 103[2a] (1894), p. 995; *J. Hermes*, Arch. Math. Phys. 68 (1882), p. 432.

gramm mit den kleinsten Seiten repräsentiert, in dem die Diagonalen die Seiten übertreffen, also $a + c \pm 2b \geqq a$ und $\geqq c$, d. h. $|2b| \geqq a$ und $\geqq c$ ist.

Bei positiven Determinanten ist eine andere Massbestimmung für die Entfernung zweier Punkte einzuführen[40]).

9) Oder: Man repräsentiere eine positive Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ durch den Punkt $\xi = -\frac{b}{a}$, $\eta = \frac{\sqrt{-D}}{a}$, eine indefinite durch den Halbkreis: $a(\xi^2 + \eta^2) + 2b\xi + c = 0$, $\eta \geqq 0$; dann ist eine Form reduziert, wenn ihr repräsentierender Punkt, oder ein Punkt ihres repräsentierenden Halbkreises dem Ausgangsraum der „*Modulgruppe*", d. h. der Gruppe der ganzzahligen linearen unimodularen Substitutionen angehört[40a]) [II B 6 c, Nr. **1**].

10) Die Klassenanzahl quadratischer Formen gegebener Determinante ist von *Dirichlet* auf Grund der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}$ bestimmt worden[41]) [s. I C 3, Nr. **2**].

Zunächst wird die Klassenanzahl h' für die Determinante $D' = D \cdot S^2$ auf die Klassenanzahl h der quadratfreien Determinante D vermöge der Formel:

$$h' = \frac{1}{\lambda} h S \prod_r \left(1 - \frac{\left(\frac{D}{r}\right)}{r}\right)$$

zurückgeführt, in welcher r alle ungraden Primfaktoren von S durchläuft $\left(\text{für } D \equiv 0 \pmod{r} \text{ ist } \left(\frac{D}{r}\right) = 0\right)$ und λ für $D < -1$ gleich 1, für $D = -1$ und $S > 1$ gleich 2, für $D = 1$ und $S > 1$ gleich 2 und für $D > 1$ dem kleinsten Exponenten gleich ist, für den $(T + U\sqrt{D})^\lambda = T' + SU'\sqrt{D}$ wird, d. h. dem Exponenten, zu dem die Fundamentalauflösung von $x^2 - D'y^2 = 1$ als Auflösung von $x^2 - Dy^2 = 1$ gehört[41a]).

40) *Gauss,* Gött. gel. Anz. 1831, Juli 9 = J. f. Math. 20 (1840), p. 312 = Werke 2, p. 188; *A. Hurwitz,* Math. Ann. 45 (1894), p. 85; Chic. Congr. Pap. (1896 [1893]), p. 125 = Nouv. Ann. (3) 16 (1897), p. 491; *F. Klein,* Zahlentheorie 1, autogr. Vorl., Göttingen 1895/96; Gött. Nachr. 1893, p. 106.

40a) *F. Klein,* Vorl. üb. d. Theor. d. ell. Modulfunktionen, hsg. v. *R. Fricke,* 2, Leipzig 1892, p. 161; *F. Klein* u. *R. Fricke,* Vorl. über die Theorie der autom. Funktionen, Leipzig 1897, p. 449; *R. Fricke,* Chic. Congr. Pap. (1896 [1893]), p. 72.

41) *Dirichlet,* J. f. Math. 19 (1839), p. 324; 21 (1840), p. 1 u. 134 = Werke 1, p. 411.

41a) *Gauss,* Disqu. arithm. art. 256 V = Werke 1, p. 281; *Dirichlet,* J. f. Math. 53 (1857), p. 127 = Berl. Ber. 1855, p. 493 = Werke 2, p. 183; *Lipschitz,* Für eine quadratfreie negative Determinante $D = -2^{\varepsilon} P$ hängt die Klassenanzahl h_D, mit Ausnahme der Werte $h_{-1} = 1$, $h_{-2} = 1$ ab von den Summen

$$\sum_{\alpha_i} \left(\frac{\alpha_i}{P}\right) = s_i, \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$

zu erstrecken über alle ganzen Zahlen α_i, für welche:

$$\frac{i}{8} P < \alpha_i < \frac{i+1}{8} P \qquad (i = 0, 1, 2, 3);$$

es ist nämlich:

$$h_{-4n+1} = s_0 + s_1 + s_2 + s_3,\ h_{-4n-1} = 2s_0 + 2s_1,\ h_{-8n+2} = 2s_1 + 2s_2,$$
$$h_{-8n-2} = 2s_0 - 2s_3.$$

Etwas andere Ausdrücke hat *Kronecker* für die Klassenanzahl bei negativer Determinante erst aus der Theorie der elliptischen Funktionen, nachher arithmetisch hergeleitet[42]).

Für eine quadratfreie positive Determinante ist die Klassenanzahl der Exponent, zu welchem die Kreisteilungseinheit gehört [I C 4 b, Nr. **1**].

11) Zwei Formen der Art:

$$ax^2 + 2Bxy + a'Cy^2, \quad a'x'^2 + 2Bx'y' + aCy^2$$

heissen „*komponierbar*“ und ihr „*Produkt*“:

$$aa'X^2 + 2BXY + CY^2,$$
$$\text{wo} \quad xx' - Cyy' = X, \quad axy' + 2Byy' + a'x'y = Y$$

gesetzt ist, die aus beiden „*komponierte*“ Form[43]). In je zwei Klassen

---

J. f. Math. 53 (1857), p. 238; *Dedekind,* Üb. d. Anz. d. Idealkl. in den versch. Ordn. eines endl. Körpers, Braunschweig 1877.

42) *Kronecker,* J. f. Math. 57 (1860), p. 248 = Werke 4; Berl. Ber. 1875, p. 235; 1889, p. 255; Berl. Abh. 1883, 2^2, p. 1 = Werke 2, p. 425; vgl. ferner: *Jacobi,* J. f. Math. 9 (1832), p. 189 = Werke 6, p. 240; *St. Smith,* Brit. Ass. Rep. 35 (1865), p. 322 = Pap. 1, p. 289; *J. Liouville,* J. de math. (2) 14 (1869), p. 1; *Th. Pepin,* Ann. éc. norm. (2) 3 (1874), p. 165; *J. Gierster,* Gött. Nachr. 1879, p. 277; Münch. Ber. Febr. 1880 = Math. Ann. 17 (1880), p. 71, 74; 21 (1883), p. 1; 22 (1883), p. 190; *A. Berger,* Sur une appl. d. nombres d. classes d. formes qu. bin. pour un dét. nég., Upsala 1882; *Stieltjes,* J. de math. (2) 14 (1869), p. 1; Par. C. R. 97 (1883), p. 1358, 1410; *A. Hurwitz,* Leipz. Ber. 36 (1884), p. 193; 37 (1885), p. 222; Math. Ann. 25 (1885), p. 157; J. f. Math. 99 (1886), p. 165; Acta math. 19 (1895), p. 351; *L. Gegenbauer,* Wien. Ber. 92^2 (1886), p. 380, 1307; 93^2 (1886), p. 54, 288; *Ch. Hermite,* Bull. sci. math. astr. (2) 10 (1886), p. 23; *E. Schering,* J. f. Math. 100 (1887), p. 447; *J. Hacks,* Acta math. 14 (1890/91), p. 321; *J. A. De Séguier,* Par. C. R. 118 (1894), p. 1407; *M. Lerch* 121 (1895), p. 878; Bull. sci. math. astr. (2) 2 (1897), p. 290, *R. Götting,* Torgau Gymn.-Progr. 1895.

43) *Gauss,* Disqu. arithm. art. 234 = Werke 1, p. 239; *Dirichlet,* De formarum binariarum secundi gradus compositione, Berl. 1851 = Werke 2, p. 105;

finden sich komponierbare Formen. Die aus je zwei komponierbaren Formen zweier Klassen komponierten Formen sind äquivalent: die Komposition ist eine Komposition der Klassen.

Die Komposition ist kommutativ, associativ und einpaarig. Die Klassen bilden eine (Abel'sche) Gruppe [s. I A 6, Nr. **20**; I B 3 c, d, Nr. **20**]. Mit der Hauptklasse komponiert erzeugt jede Klasse sich selbst. Eine hinreichend hohe „*Potenz*“ jeder Klasse ergiebt die Hauptklasse. Jede Klasse „*gehört*“ zu dem Exponenten der niedrigsten solchen Potenz. Es giebt gewisse „*Fundamentalklassen*“, sodass jede andere sich eindeutig als Produkt von Potenzen derselben darstellen lässt[44]).

Die sich selbst uneigentlich äquivalente Form $ax^2 + 2adxy + cy^2$, und die Klasse, der sie angehört, heisst „*anceps*“ (*Gauss*), „*bifide*“ (*Legendre*), „*ambig*“ (*Dirichlet*), „*zweiseitig*“ (*Dedekind*). Jede sich selbst uneigentlich äquivalente Klasse enthält eine ambige Form, ist also eine ambige Klasse.

Die Komposition entgegengesetzter Klassen giebt die Hauptklasse, und umgekehrt. Die Komposition ambiger Klassen giebt ambige Klassen. Die Komposition einer Klasse mit sich selbst heisst „*Duplikation*“. Die Duplikation einer ambigen Klasse giebt die Hauptklasse und umgekehrt: eine „*subduplikate*“ Klasse ist ambig.

Auf der Theorie der Komposition mit alleiniger Zuhülfenahme der Pell'schen Gleichung beruht der zweite Kummer'sche Beweis des Reziprozitätsgesetzes[45]) [I C 1, Nr. **6**].

12) Aus der Identität [Nr. **b**, 8]:

$$(a\alpha^2 + 2b\,\alpha\gamma + c\gamma^2)(a\beta^2 + 2b\,\beta\delta + c\delta^2) \\ - (a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta)^2 = D(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

folgt, dass für jede ungerade zu $b^2 - ac = D$ teilerfremde, durch die Form $f = ax^2 + 2bxy + cy^2$ dargestellte Zahl das Legendre'sche Symbol $\left(\frac{f}{q}\right)$ [I C 1, Nr. **6**], wo q irgend ein Primfaktor von D ist, denselben Wert hat.

F. Arndt, J. f. Math. 56 (1859), p. 72; *L. Schläfli*, J. f. Math. 57 (1860), p. 170; *Th. Pepin*, Rom. N. Linc. Pont. A. 33 (1880), p. 6; *F. Klein*, Gött. Nachr. 1893, p. 106; *G. B. Mathews*, Quart. J. 27 (1895), p. 230; *F. Mertens*, Wien. Ber. 105 (1895), p. 103; *Ch. J. de la Vallée-Poussin*, Brux. Mém. cour. in 8°, 53 (1896) Abh. 3; *P. Mansion*, Brux. Bull. (3) 30 (1896), p. 189; *A. Cunningham*, Lond. Math. Soc. Proc. 28 (1896/97), p. 289.

44) *Gauss*, Disqu. arithm. art. 306 IX = Werke 1, p. 374; *E. Schering*, Die Fundamentalklassen der zusammensetzb. arithm. Formen, Göttingen 1869 = Gött. Abh. 14 (1869).

45) *E. Kummer*, Berl. Abh. 1861, p. 81 = J. f. Math. 100 (1887), p. 10.

Dasselbe ist bei $D \equiv 0, 3, 7 \pmod 8$ für $\left(\frac{-1}{f}\right) = (-1)^{\frac{f-1}{2}}$, bei $D \equiv 2 \pmod 8$ für $\left(\frac{2}{f}\right) = (-1)^{\frac{f^2-1}{8}}$, bei $D \equiv 6 \pmod 8$ für $\left(\frac{-2}{f}\right) = (-1)^{\frac{f-1}{2}+\frac{f^2-1}{8}}$ der Fall. Jeder der Werte $\left(\frac{f}{q}\right), (-1)^{\frac{f-1}{2}}, \cdots$ ist daher nicht der besonderen dargestellten Zahl, sondern der Form eigentümlich. Jeder der Werte heisst ein „*Einzelcharakter*" der Form, ihre Gesamtheit repräsentiert den „*Totalcharakter*". Giebt es λ Einzelcharaktere, so giebt es 2^λ Totalcharaktere. Alle Formen einer Klasse haben denselben Totalcharakter; derselbe heisst der Totalcharakter der Klasse. Alle Klassen desselben Totalcharakters bilden ein „*Geschlecht*"[46]) und sind rational unimodular in einander transformierbar.

Ist $D = \pm 2^\varepsilon P S^2$, $\varepsilon = 0$ oder 1, P quadratfrei und positiv, so ist, weil D quadratischer Rest jeder durch die Form f dargestellten Zahl ist:

$$(-1)^{\frac{f-1}{2}\cdot\frac{P-1}{2}+\frac{f^2-1}{2}\varepsilon}\cdot\left(\frac{f}{P}\right) = +1,$$

demnach nur die Hälfte der 2^λ Totalcharaktere möglich.

Auf diesem Umstande beruht *Gauss*' zweiter Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes[47]).

Alle Einzelcharaktere der Hauptform, also auch der Hauptklasse haben den Wert $+1$. Das Geschlecht, welches die Hauptklasse enthält, heisst „*Hauptgeschlecht*".

Ein Einzelcharakter des Produkts zweier Klassen ist gleich dem Produkt der betreffenden Einzelcharaktere der Klassen. Durch Duplikation jeder Klasse entsteht eine Klasse des Hauptgeschlechts.

Dass auch umgekehrt jede Klasse des Hauptgeschlechts durch Duplikation entsteht, hat *Gauss* durch Heranziehung der Theorie der ternären Formen [Nr. **d**] bewiesen[48]). Alle Geschlechter enthalten gleichviel Klassen.

Den $2^{\lambda-1}$ möglichen Totalcharakteren entsprechen wirklich Geschlechter: die Anzahl der Geschlechter ist gleich $2^{\lambda-1}$; ebenso gross ist die Anzahl der ambigen Klassen[49]).

46) *Gauss,* Disqu. arithm. art. 228 ff. = Werke 1, p. 229 ff.

47) *Gauss,* Disqu. arithm. art. 262 = Werke 1, p. 292.

48) *Gauss,* Disqu. arithm. 286 = Werke 1, p. 335; *Dirichlet-Dedekind*, Vorl. Suppl. X; *Arndt, de la Vallée-Poussin* 43); *H. Weber*, Ellipt. Funkt. u. alg. Zahlen, Braunschweig 1891; *J. A. de Séguier,* Formes quadratiques et multipl. compl., Berlin 1894.

49) *Gauss*, Disqu. arithm. art. 287 III = Werke 1, p. 337; *Kronecker,* Berl. Ber. 1864, p. 297.

Alle Klassen des Hauptgeschlechts bilden eine (Abel'sche) Gruppe. Ergeben sich alle $\frac{h}{2^{\lambda-1}}$ Klassen des Hauptgeschlechts als Potenzen *einer* Fundamentalklasse, so heisst die Determinante *„regulär“*, sonst *„irregulär“* und die durch den höchsten Exponenten ihrer Fundamentalklassen dividierte Anzahl $\frac{h}{2^{\lambda-1}}$ ihr *„Irregularitätsexponent“*.

Die regulären positiven und die irregulären negativen Determinanten überwiegen. Für quadratfreie $\frac{h}{2^{\lambda-1}}$ ist die Determinante regulär[50]).

Für negative Determinanten scheint $D = -1848$ die grösste zu sein, für welche $\frac{h}{2^{\lambda-1}} = 1$ ist.

Rechnet man eine Determinante zum *„Typus“* $\left(\frac{h}{2^{\lambda-1}}, 2^{\lambda-1}\right)$, so giebt es unendlich viele positive Determinanten vom Typus $(1, 2^{\lambda-1})$ (*Dirichlet*)[51]).

Die Anzahl der Fundamentalklassen, die nicht zum Hauptgeschlecht gehören, ist $\lambda - 1$; aus diesen allein setzen sich die Ambigen zusammen[52]).

13) Die Theorie der binären quadratischen Formen ist von *Dirichlet* in das Gebiet der gewöhnlichen komplexen Zahlen [I A 4] übertragen worden (*Dirichlet'sche Formen*). Einer der schönsten Sätze dieser Theorie ist der folgende: Die Klassenanzahl der quadratischen Formen mit komplexen Koeffizienten, aber reeller positiver Determinante D ist gleich dem einfachen oder doppelten Produkte der Klassenanzahlen reeller quadratischer Formen der Determinanten D und $-D$, je nachdem die Auflösung der Gleichung $t^2 - Du^2 = -1$ unmöglich oder möglich ist[53]). An Stelle der Kreisfunktionen ist in dieser Theorie die Anwendung der lemniskatischen Funktionen [II B 6 a] von Nutzen.

---

50) *Gauss,* Disqu. arithm. art. 306 VI = Werke 1, p. 373; vgl. ferner: *Th. Pepin,* Rom. N. Linc. Pont. A. 33 (1880), p. 354; Mem. 8 (1892), p. 41; *J. Perott,* J. f. Math. 95 (1883), p. 232; 96 (1884), p. 327; *G. B. Mathews,* Mess. (2) 20 (1891), p. 70.

51) *Gauss,* Disqu. arithm. art. 304 = Werke 1, p. 368; *Dirichlet,* Berl. Ber. 1855, p. 493 = Werke 2, p. 183; J. de math. (2) 1 (1856), p. 76 = Werke 2, p. 189.

52) *Schering* l. c. 44).

53) *Dirichlet,* J. f. Math. 24, p. 291 = Werke 1, p. 533; vgl. ferner *K. Minnigerode,* Gött. Nachr. 1873, p. 160; *St. Smith,* Lond. R. S. Proc. 13 (1864), p. 278 = Papers 1, p. 418; *G. B. Mathews,* Quart. J. 25 (1891), p. 289; Lond. Math. Soc. Proc. 23 (1892), p. 159.

14) Eine andere Theorie, welche auf die Theorie der gewöhnlichen quadratischen Formen, namentlich auf die Klassenanzahlbestimmung, helles Licht wirft, ist *Kronecker*'s Theorie der bilinearen Formen $Ax_1x_2 + Bx_1y_2 + Cx_2y_1 + Dy_1y_2$ [I B 2, Nr. 2, Anm. 29, 30] von 2 kogredienten Variabelnpaaren[54]). Als neu tritt hier neben die Determinante $AD - BC = \Delta$ die „*determinierende* Form“: $\Delta(u+v)^2 - (B-C)^2 uv$, oder auch die Grösse $B - C$, die sich als invariant erweist. Hier, wie auch in der Theorie der quadratischen Formen, ist es zweckmässig, die Äquivalenzen in „*vollständige*“ und „*unvollständige*“ zu unterscheiden, je nachdem die vier Substitutionskoeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ den Kongruenzen $\alpha\delta \equiv 1$, $\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod 2$ genügen oder nicht. Beschränkt man sich auf „*eigentliche*“ quadratische Formen $ax^2 + bxy + cy^2$, in denen $a + c \equiv 1$, $b \equiv 0 \pmod 2$ ist, und auf „*eigentliche*“ bilineare Formen $Ax_1x_2 + Bx_1y_2 + Cx_2y_1 + Dy_1y_2$, für welche die Form $Ax^2 + (B+C)xy + Dy^2$ mit der „*Determinante*“ $AD - \left(\frac{B+C}{2}\right)^2 = \Delta - \left(\frac{B-C}{2}\right)^2$ eine eigentliche quadratische Form ist, so ist

$$\sum_h F(\Delta - h^2), \qquad (-\sqrt{\Delta} < h < +\sqrt{\Delta})$$

die Klassenanzahl der bilinearen Formen der positiven Determinante Δ, wenn $F(\Delta)$ die Klassenanzahl der quadratischen Formen $ax^2 + 2bxy + cy^2$ der Determinante $\Delta = ac - b^2$ ist.

Setzt man $E(4n) = F(n)$, $E(4n+1) = F(4n+1)$, $E(4n+2) = F(4n+2)$, $E(8n+3) = \frac{2}{3} F(8n+3)$, $E(8n+7) = 0$, so folgt aus: $\sum_h E(n - h^2)$ gleich der $8(2 + (-1)^n)$-fachen Summe der ungeraden Divisoren von n, dass jede Zahl n auf $E(n)$ Arten als Summe dreier Quadrate darstellbar ist [vgl. 6)].

Jede bilineare Form ist einer „*reduzierten*“ vollständig äquivalent, in welcher $|A| \geqq \left|\frac{B+C}{2}\right| \leqq |D|$ und $AD > 0$ ist.

Bezeichnet man mit $\Phi(\Delta)$ die Summe aller Divisoren d von Δ, mit $\Psi(\Delta)$ die Summe $\sum_d \operatorname{sgn}(\sqrt{\Delta} - d) \cdot d$, so ist die Klassenanzahl bilinearer Formen der Determinante Δ gleich $12\{\Phi(\Delta) + \Psi(\Delta)\}$, jedoch um 2 grösser, wenn Δ ein Quadrat ist.

15) Man hat insbesondere solche bilineare Formen $Axx' + Bxy' + B'x'y + Cyy'$ behandelt, in denen A und C reelle, B und B' kon-

54) *Kronecker,* Berl. Ber. 1866, p. 837 = Werke 1, p. 143.

jugiert komplexe Zahlen sind; von den Variabeln sind x und x' einander konjugiert, und ebenso y und y' (*Hermite'sche Formen*). Die beiden Variabelnpaare werden nur konjugiert komplexen Transformationen unterworfen[55]). Die Dirichlet'schen und die Hermite'schen Formen lassen ähnliche geometrische Repräsentationen und darauf gegründete Behandlungen wie die in 9) erwähnte zu. An die Stelle der Modulgruppe tritt die „*Picard'sche Gruppe*", d. h. die Gruppe der linearen, komplex-ganzzahligen, unimodularen Substitutionen [II B 6 c, Nr. 6]. Insbesondere ergiebt sich die Anordnung der reduzierten Formen in eine endliche Anzahl von Perioden, bezw. (bei den indefiniten Hermite'schen Formen) von „*Netzen*"; und damit die Endlichkeit der betreffenden Klassenanzahlen.

d. Ternäre quadratische Formen. 1) Alle Transformationen einer ternären Form $f(x, y, z)$ in eine andere ergeben sich aus einer dieser Transformationen und allen Transformationen von $f(x, y, z)$ in sich selbst. Alle Transformationen von $f(x, y, z)$ mit der Determinante D in sich selbst ergeben sich aus einer Transformation in die ternäre quadratische Form $4D(ac - b^2)$ und allen Transformationen von $ac - b^2$ in sich selbst. Alle Transformationen von $ac - b^2$ in sich selbst ergeben sich aus:

$$\begin{aligned} a &= a'\alpha^2 + 2b'\alpha\gamma + c'\gamma^2, \\ b &= a'\alpha\beta + b'(\alpha\delta + \beta\gamma) + c'\gamma\delta, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \\ c &= a'\beta^2 + 2b'\beta\delta + c'\delta^2. \end{aligned}$$

Ist $x = p_1 a + 2p_2 b + p_3 c$, $y = q_1 a + 2q_2 b + q_3 c$, $z = r_1 a + 2r_2 b + r_3 c$ eine Transformation von $f(x, y, z)$ in $4D(ac - b^2)$, und setzt man:

$$\begin{aligned} \alpha &= \tau - p_2\xi - q_2\eta - r_2\zeta, & \beta &= \quad - p_3\xi - q_3\eta - r_3\zeta, \\ \gamma &= \quad p_1\xi + q_1\eta + r_1\zeta, & \delta &= \tau + p_2\xi + q_2\eta + r_2\zeta, \end{aligned}$$

so ergeben sich alle Transformationen von $f(x, y, z)$ in sich selbst aus:

$$\begin{aligned} (\tau+1)x' - \zeta f_2(x',y',z') + \eta f_3(x',y',z') &= (\tau+1)x + \zeta f_2(x,y,z) - \eta f_3(x,y,z), \\ (\tau+1)y' - \xi f_3(x',y',z') + \zeta f_1(x',y',z') &= (\tau+1)y + \xi f_3(x,y,z) - \zeta f_1(x,y,z), \\ (\tau+1)z' - \eta f_1(x',y',z') + \xi f_2(x',y',z') &= (\tau+1)z + \eta f_1(x,y,z) - \xi f_2(x,y,z); \end{aligned}$$

hier bedeuten f_1, f_2, f_3 die halben Ableitungen von f nach x, y, z, und τ, ξ, η, ζ sind durch die Relation verbunden:

---

55) *Ch. Hermite*, J. f. Math. 47 (1854), p. 346; 52 (1856), p. 1; Cambr. and Dubl. Math. Journ. 9 (1854), p. 63; *É. Picard*, Par. C. R. 96 (1883), p. 1567, 1779; 97 (1883), p. 745; Ann. éc. norm. (3) 1 (1884), p. 9; Par. Soc. Math. Bull. 12 (1884), p. 43; Math. Ann. 39 (1891), p. 142; *L. Bianchi*, 38 (1890), p. 313; *R. Fricke* und *F. Klein*, Automorphe Funktionen, Leipzig 1897, 1, p. 448 ff. und 40[a]).

$$\tau^2 + F(\xi, \eta, \zeta) = 1,$$

in welcher F die „*Adjungierte*" [I B 2, Nr. 2, Anm. 15] von f ist.

Die Form $\tau^2 + F(\xi, \eta, \zeta)$ reproduziert sich durch Multiplikation. Es ist nämlich

$$(\tau^2 + F(\xi, \eta, \zeta))(\tau_1^2 + F(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)) = \tau_2^2 + F(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$$

für

$$\tau_2 = \tau\tau_1 + F\begin{pmatrix}\xi, & \eta, & \zeta \\ \xi_1, & \eta_1, & \zeta_1\end{pmatrix},$$

$$\xi_2 = \tau\xi_1 + \tau_1\xi + \bar{f}_1(\eta\zeta_1 - \eta_1\zeta,\ \zeta\xi_1 - \zeta_1\xi,\ \xi\eta_1 - \xi_1\eta), \quad \text{u. s. w.},$$

wenn man mit $\bar{f}$ die „*Adjungierte*" von F, mit $F\begin{pmatrix}\xi, & \eta, & \zeta \\ \xi_1, & \eta_1, & \zeta_1\end{pmatrix}$ die Funktion $\xi_1 F_1(\xi, \eta, \zeta) + \eta_1 F_2(\xi, \eta, \zeta) + \zeta_1 F_3(\xi, \eta, \zeta)$ [I B 2, Nr. **13**] bezeichnet. Für $F = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ war diese Formel schon *Euler*, für $F = a\xi^2 + b\eta^2 + ab\zeta^2$ *Lagrange* bekannt[56]).

Demnach erhält man aus zwei Auflösungen der Gleichung

$$\tau^2 + F(\xi, \eta, \zeta) = 1$$

eine dritte und aus zwei Transformationen der Form $f(x, y, z)$ in sich eine dritte. Diese dritte ist die aus den beiden ersteren Transformationen zusammengesetzte. Die Zusammensetzung ist nicht kommutativ, wie man schon an dem einfachsten Fall der Quaternionen oder der orthogonalen Transformationen erkennt [III B 3].

Alle *ganzzahligen* Transformationen der Form $f(x, y, z)$ erhält man ebenso als abhängig von vier Parametern τ, ξ, η, ζ, die aber jetzt durch eine Gleichung: $\tau^2 + F(\xi, \eta, \zeta) = P$ für gewisse Werte der ganzen Zahl P verbunden sein müssen. Alle ganzzahligen Auflösungen einer solchen Gleichung erhält man aus einer derselben durch Zusammensetzung mit allen ganzzahligen Auflösungen der Gleichungen: $\tau^2 + F(\xi, \eta, \zeta) = 1$ oder $= 4$.

Eine reduzierte definite ternäre quadratische Form hat 62 ganzzahlige Transformationen in sich (*Eisenstein*).

Unter den ganzzahligen Transformationen einer Form in sich giebt es „*vertauschbare*", bei deren Zusammensetzung die Reihenfolge ohne Einfluss ist. Alle Transformationen, welche Potenzen einer einzigen sind, sind offenbar vertauschbar. Dass dieser Satz in gewissem Umfange auch umgekehrt gilt, hat *Hermite* gezeigt[57]).

---

56) *L. Euler,* Lips. Acta Er. 1773, p. 193; Petrop. Acta 1, 2 (1775), p. 48 = Comment. arithm. coll. 1, p. 538, bes. p. 543; *Lagrange,* Berl. Nouv. Mém. 1 (1770), p. 133 = Oeuvres 3, p. 187; *Ch. Hermite,* J. f. Math. 47 (1853), p. 324.

57) Üb. Transf. einer tern. qu. Form vgl.: *Ch. Hermite,* J. f. Math. 47 (1854), p. 307, 313, 343; 78 (1874), p. 325; *P. Bachmann,* 76 (1873), p. 331; *G. Cantor,*

2) Es sei von nun ab D der grösste gemeinsame Teiler der Koeffizienten F_{ik} von F, und $F = D \cdot \varphi$. Dann ist die Adjungierte von φ gleich $\Delta \cdot f$, die Determinante von f ist ΔD^2 und die von φ gleich $\Delta^2 D$. Von den beiden Formen f und φ heisst jede die *„primitive Adjungierte“* (*Arn. Meyer*), *„primitive Kontravariante“* (*St. Smith*), *„Reciproke“* (*P. Bachmann*) der andern. Die eigentlich (ebenso die uneigentlich) primitiven Formen f der Determinante ΔD^2, denen die Zahlen Δ und D zukommen, zerfallen in zwei *„Ordnungen“* (Δ, D),[58]) je nachdem ihre Reciproken φ eigentlich oder uneigentlich primitiv sind. Die Ordnung (Δ, D) eigentlich primitiver Formen mit eigentlich primitiven Reciproken ist wirklich vorhanden, denn sie enthält mindestens die Form $x^2 + Dy^2 + \Delta D z^2$. Die Anzahl dieser Ordnungen einer Determinante ist daher gleich der Anzahl der quadratischen Teiler der Determinante. Alle Formen einer Klasse gehören zu derselben Ordnung. Die Anzahl der Klassen jeder Ordnung ist endlich, da die Gesamtanzahl der Klassen einer Determinante endlich ist.

3) Die Endlichkeit der Klassenanzahl hat zuerst *Gauss* bewiesen, indem er zeigte, dass jede Form einer „reduzierten“ äquivalent und die Anzahl der reduzierten, deren Koeffizienten gewissen Ungleichheitsbedingungen genügen müssen, eine endliche ist[59]).

Eine *derartige* Reduktion, wenigstens für positive Formen, dass sich in jeder Klasse im allgemeinen eine und nur eine Reduzierte findet, ist zuerst von *Seeber*[60]) angegeben worden. Die Seeber'sche Reduktion lässt sich geometrisch deuten. Man teile den Raum durch drei Systeme äquidistanter paralleler Ebenen in Parallelepipede mit den Seiten $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ und den ebenen Winkeln $\arccos \frac{a'}{\pm\sqrt{bc}}$, $\arccos \frac{b'}{\pm\sqrt{ac}}$, $\arccos \frac{c'}{\pm\sqrt{ab}}$. Die Ecken dieser Parallelepipede repräsentieren bei dieser Zusammenfassung die Form $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2a'yz + 2b'xz + 2c'xy$, bei irgend einer andern Zusammenfassung eine ihr äquivalente Form. Der reduzierten Form entspricht dasjenige Parallelepiped, bei dem die Diagonalen und die Diagonalen der Seitenflächen von den Kanten nicht übertroffen werden[61]). Re-

---

De transf. form. tern. quadr., Habil.schr. Halle 1869; *J. Tannery,* Par. soc. math. Bull. 11 (1876), p. 221; *R. Fricke,* Gött. Nachr. 1893, p. 705; *L. Bianchi,* Ann. di mat. (2) 21 (1893), p. 237; Rom Linc. Rend. (5) 3 (1894), p. 3.

58) *G. Eisenstein,* J. f. Math. 35 (1847), p. 117 = Math. Abh. p. 177.

59) *Gauss,* Disqu. arithm. 272 = Werke 1, p. 307.

60) *L. A. Seeber,* Unters. üb. d. Eigensch. der pos. tern. quadr. Formen, Freiburg 1831.

61) *Gauss* 40) u. Werke 2, p. 305, *Dirichlet,* Berl. Ber. 1848, p. 285 =

präsentiert man das Parallelepiped durch die drei von einer Ecke ausgehenden Kanten $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ und fügt ihnen eine vierte $\sqrt{d}$ derart hinzu, dass die geometrische Summe [III B 3] aller vier verschwindet, so wird das Punktgitter auch durch das Streckenquadrupel $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$ definiert. Es giebt nun in jedem Punktgitter ein und nur ein Streckenquadrupel, von dessen 6 Winkeln keiner spitz ist (*Selling'sche Reduktion*). Diese Reduktionen sind nicht an die Ganzzahligkeit der Koeffizienten gebunden.

Hermite hat die Reduktion der indefiniten Formen auf die der positiven zurückgeführt. Ist die gegebene Form äquivalent der Form

$$f = (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)^2 - (\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)^2,$$

so wird derselben jede der positiven Formen:

$$g = \lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + \lambda'(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)^2 + \lambda''(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)^2$$
$$(\lambda,\ \lambda',\ \lambda''\ \text{positiv})$$

„*associiert*“ (*Picard*). Alle automorphen Transformationen von g, auf f angewandt, ergeben ein „*System*“ (f); äquivalenten Formen f_1, f_2 entsprechen identische Systeme (f_1), (f_2).

Eine Form heisst „*reduziert*“, wenn unter ihren associierten eine reduzierte ist[61a]). Auf der Einführung der kontinuierlichen Variablen λ, λ', λ'' beruht der Prozess der „*kontinuierlichen Reduktion*“[61b]).

4) Ist d irgend ein Primfaktor von D, δ irgend ein Primfaktor von Δ, so hat das Legendre'sche Zeichen $\left(\frac{f(x,\,y,\,z)}{d}\right)$ für alle ganzen Zahlen x, y, z, für welche $f(x, y, z)$ nicht durch d teilbar ist, denselben Wert; dasselbe gilt von dem Zeichen $\left(\frac{\varphi(x,\,y,\,z)}{\delta}\right)$ (*Haupt-Charaktere*) und eventuell von den Zeichen $\left(\frac{-1}{f}\right)$, $\left(\frac{-1}{\varphi}\right)$, $\left(\frac{2}{f}\right)$, $\left(\frac{2}{\varphi}\right)$,

---

Werke 2, p. 21; J. f. Math. 40 (1850), p. 209 = Werke 2, p. 29; *Hermite,* J. f. Math. 40 (1850), p 173; *Eisenstein,* Tabelle red. pos. tern. qu. Formen, J. f. Math. 41 (1851), p. 141 u. 227; *E. Selling,* J. f. Math. 77 (1874), p. 143 = J. de math. (3) 3 (1877), p. 21, 153; *Hermite,* J. f. Math. 79 (1875), p. 17; *G. Cantor,* De transf. form. tern. qu., Halle 1869; *L. Charve,* Ann. éc. norm. (2) 9 (1880), Suppl. p. 3; *H. Minkowski,* Par. C. R. 96 (1883), p. 1205; *E. Bonsdorff,* Helsingfors soc. fenn. A. 14 (1885), p. 397; *E. Borissoff,* Red. d. pos. tern. quadr. Formen, Petersb. 1890 (mit Tabellen). Üb. Red. *quaternärer* Formen s. *L. Charve,* Par. C. R. 92 (1881), p. 782; 96 (1883), p. 773; Ann. éc. norm. (2) 11 (1882), p. 119; *J. P. Bauer,* Bestimmung d. Grenzw. für d. Produkt d. Hauptkoeffizienten in reduz. quadr. quatern. Formen, Bonn 1894; *E. Picard,* Par. C. R. 98 (1884), p. 904.

61a) *Hermite,* J. f. Math. 47 (1854), p. 307.

61b) *Hermite,* J. f. Math. 41 (1851), p. 191.

$\left(\frac{-2}{f}\right)$, $\left(\frac{-2}{\varphi}\right)$ (*Supplementar-Charaktere*). Jedes derartige Zeichen ist ein „*Einzelcharakter*" der Form f; ihre Gesamtheit bildet den „*Totalcharakter*" derselben. Äquivalente Formen haben denselben Totalcharakter. Alle Klassen, die denselben Totalcharakter haben, bilden ein „*Geschlecht*". Ist λ die Anzahl der Einzelcharaktere, so ist 2^λ die Anzahl der Totalcharaktere. Die Einzelcharaktere sind durch eine Relation mit einander verbunden, so dass nur $2^{\lambda-1}$ Totalcharaktere möglich sind. Diesen $2^{\lambda-1}$ Totalcharakteren entsprechen wirklich Geschlechter; der Nachweis derselben stützt sich auf die Existenz der Geschlechter binärer Formen[62]).

5) Sind die beiden Zahlen m und μ durch die Formen f und φ so darstellbar: $m = f(x, y, z)$, $\mu = \varphi(\xi, \eta, \zeta)$, dass die Beziehung $x\xi + y\eta + z\zeta = 0$ besteht, so heissen m und μ „*simultan*" durch f und φ dargestellt. Für zwei durch die beiden Formen f und φ von ungrader*) Determinante simultan dargestellte ungrade zu $D\Delta$ teilerfremde Zahlen m und μ hat die Einheit:

$$E = (-1)^{\frac{\Delta m+1}{2}\cdot\frac{D\mu+1}{2}}$$

denselben Wert, nämlich:

$$(-1)^{\frac{D+1}{2}\cdot\frac{\Delta+1}{2}}\left(\frac{f}{D}\right)\left(\frac{\varphi}{\Delta}\right).$$

Diese Einheit heisst ein „*Simultan-Charakter*" (*St. Smith*) des Formenpaares (f, φ). *Eisenstein* teilt die Geschlechter in zwei „*Systeme*", je nachdem $E = +1$ oder $E = -1$ ist. Durch Formen des zweiten Systems können Zahlen $\equiv -\Delta \pmod 8$ nicht dargestellt werden.

Zwei Formen, welche durch eine rationale Einheitssubstitution, mit einem Generalnenner prim zu $2\Delta D$, in einander transformiert werden können, gehören offenbar zu demselben Geschlecht. Dasselbe findet umgekehrt statt[63]).

6) Sind α, β, γ die drei Determinanten des Systems:

$$\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix},$$

so heissen die Darstellung der Zahl μ: $\mu = \varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ und die Darstellung der binären quadratischen Form der Determinante $-D\mu$:

---

62) *Bachmann*, Zahlentheorie 4^1, p. 125.

*) Wir beschränken uns hier und zum Teil im folgenden der Kürze halber auf ungrade Determinanten.

63) *G. Eisenstein*, Berl. Ber. 1852, p. 350; *St. Smith*, Lond. Trans. 157 (1867), p. 255 = Papers 1, p. 455.

$$f(\alpha', \beta', \gamma')\, x^2 + 2f\begin{pmatrix}\alpha', \beta', \gamma' \\ \alpha'', \beta'', \gamma''\end{pmatrix} xy + f(\alpha'', \beta'', \gamma'')\, y^2$$
$$= f(\alpha' x + \alpha'' y,\ \beta' x + \beta'' y,\ \gamma' x + \gamma'' y)$$

einander *„zugeordnet"*. Dieselbe Darstellung von μ ist den Darstellungen aller äquivalenten binären Formen der Determinante $-D\mu$ zugeordnet. Damit die binäre quadratische Form $g(x, y)$ der Determinante $-D\mu$ durch eine ternäre Form der Ordnung (D, Δ) darstellbar ist, ist notwendig und hinreichend, dass $-\Delta g(x, y)$ quadratischer Rest von μ ist. Jede Darstellung „gehört" zu einem Kongruenzwerte von $\sqrt{-\Delta g(x, y)}$ (mod. μ), und zu jedem dieser Kongruenzwerte lassen sich alle nicht-äquivalenten ternären Formen der Ordnung (D, Δ) aufstellen, durch welche $g(x, y)$ darstellbar ist[64]).

7) Von den definiten Formen genügt es die positiven zu betrachten. Eine positive Form besitzt eine endliche Anzahl von ganzzahligen Transformationen in sich. Der reciproke Wert dieser Anzahl heisst das *„Mass"* (frz. „mesure" oder „densité", engl. „weight") der Form. Äquivalente Formen haben dasselbe Mass: das Mass der Klasse. Das Mass eines Geschlechts ist die Summe der Masse der Klassen des Geschlechts, das Mass einer Ordnung ist die Summe der Masse der Geschlechter der Ordnung. Das Mass einer Darstellung einer Zahl durch eine Form ist das Mass der Form. Das Mass aller Darstellungen einer Zahl durch ein vollständiges System von Formen eines Geschlechts ist die Summe der Masse aller Darstellungen. Das Mass aller eigentlichen Darstellungen einer ungraden, zu $D\Delta$ teilerfremden Zahl μ, welche λ Primfaktoren enthält und $\equiv D$ (mod. 4) ist, ist gleich dem 2^λ-fachen Mass des Hauptgeschlechts binärer Formen der Determinante $-D\mu$. Z. B.: die Ordnung (1, 1) enthält nur ein Geschlecht und dieses nur eine Klasse, repräsentiert durch die Form $x^2 + y^2 + z^2$. Also ist die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer Zahl $\mu \equiv 1$ (mod. 4) als Summe dreier Quadrate gleich der $3 \cdot 2^{\lambda+2}$-fachen Klassenanzahl des Hauptgeschlechts binärer Formen der Determinante $-\mu$. Für $\mu \equiv 3$ (mod. 8) ist dieselbe Anzahl gleich der $2^{\lambda+2}$-fachen Klassenanzahl[65]). Die erstere Anzahl ergiebt sich, durch Heranziehung der Klassenanzahlausdrücke, gleich $24\sum_{s=1}^{\left[\frac{\mu}{4}\right]}\left(\frac{s}{\mu}\right)$, die zweite gleich $8\sum_{s=1}^{\left[\frac{\mu}{2}\right]}\left(\frac{s}{\mu}\right)$ [66]). Die Darstellbarkeit der

64) *Ch. Hermite,* J. f. Math. 47 (1854), p. 307; *P. Bachmann,* 70 (1869), p. 365; 71 (1870), p. 296.

65) *Gauss,* Disqu. arithm. art. 292 = Werke 1, p. 345.

66) *Dirichlet,* J. f. Math. 21 (1840), p. 155 = Werke 1, p. 496.

Zahlen $\equiv\!\!\models 0, 4, 7 \pmod{8}$ als Summe dreier Quadrate hat *Legendre*[67]), dasselbe einfacher und die Existenz eigentlicher Darstellungen für solche Zahlen hat *Dirichlet*[68]) nachgewiesen. Hieraus folgt leicht, dass jede Zahl als Summe dreier Trigonalzahlen und eigentlich als Summe von vier Quadraten darstellbar ist[69]). Der zweite Satz war schon *Bachet* bekannt, wurde aber erst von *Lagrange* bewiesen[70]). Beide Sätze sind die ersten Fälle des *Fermat*'schen Satzes: Jede ganze Zahl ist als Summe von n n-eckszahlen darstellbar. Bewiesen wurde dieser Satz zuerst von *Cauchy* und durch den Zusatz ergänzt, dass von den n n-ecken nur vier von Null oder Eins verschieden zu sein brauchen. *Legendre* bemerkt, dass oberhalb einer gewissen Grenze schon vier oder fünf n-eckszahlen zur Darstellung genügen[71]).

8) Das Mass eines Geschlechts und dasjenige einer Ordnung ist, wahrscheinlich mit arithmetischen Hülfsmitteln, von *Eisenstein*, durch Benutzung Dirichlet'scher analytischer Methoden [I C 3, Nr. 2] von *Smith* und *Minkowski* ermittelt worden. Enthalten D und Δ bzw. λ und $\varkappa$ Primfaktoren, und sind r die gemeinsamen Primfaktoren von D und Δ, so ist das Mass eines Geschlechts gleich:

---

67) *Legendre,* Théorie des nombres, éd. 3, art. 317, 319 = 1, p. 386, 387 der deutschen Ausgabe.

68) *Dirichlet,* J. f. Math. 40 (1850), p. 228 = Werke 2, p. 89. Üb. besond. Zerl. in 3 Quadr. s. *E. Catalan,* Nouv. ann. (2) 13 (1874), p. 518; Rom N. Linc. Pont. A. 35 (1882), p. 103; 37 (1884), p. 49; *S. Realis,* Nouv. ann. (2) 20 (1881), p. 501; Nouv. corr. math. 4 (1878), p. 325, 346, 369; *B. Boncompagni,* Rom. N. Linc. Pont. A. 34 (1881), p. 63, 135.

69) *Fermat,* Oeuvres 1, p. 293; *Dirichlet* l. c. 68); *Legendre,* Théorie des nombres 2, § 4 = 1, p. 212 der deutschen Ausgabe; *Hermite,* J. f. Math. 47 (1854), p. 365; *Liouville,* J. d. math. (2) 1 (1856), p. 230 u. flgd. Bde.; *V. A. Lebesgue,* 2 (1857), p. 149; Par. C. R. 66 (1871), p. 396; Nouv. ann. (2) 11 (1872), p. 516; 13 (1874), p. 111; *S. Realis* 12 (1873), p. 212; 17 (1878), p. 381; *A. Genocchi,* Ann. di mat. (2) 2 (1869), p. 256; *F. Pollock,* Lond. Trans. 158 (1869), p. 627; Lond. R. Soc. Proc. 16 (1868), p. 251; *V. Schlegel,* Zeitschr. Math. Phys. 21 (1876), p. 79.

70) *Lagrange,* Berl. Nouv. Mém. 1 (1770), p. 123 = Oeuvr. 3, p. 187; *Euler,* Acta Petrop. 1 u. 2, 1775 = Comm. arithm. coll. 1, p. 538; s. ferner *Ch. Hermite,* J. f. Math. 47 (1854), p. 343; *S. Realis,* Nouv. ann. (2) 18 (1879), p. 500; *Sylvester,* Amer. J. of math. 3 (1881), p. 390; *G. Wertheim,* Zeitschr. f. math. naturw. Unterr. 22 (1891), p. 421; *A. Matrot,* Assoc. frç. Limoges 19 (1890), p. 79, 82; J. d. math. élém. (3) 5 (1891), p. 169; (4) 2 (1893), p. 73; *E. Catalan,* Belg. Mém. 52 (1894), p. 1.

71) *Fermat,* Oeuvres 1, p. 305; *Beguelin,* Berl. Nouv. Mém. 4 (1773), p. 203; *A. Cauchy,* Par. Acad. 1815, Nvbr. 13, Inst. Mém. (1) 14 (1813—15), p. 177 = Exerc. d. math. 1 (1826), p. 265 = Oeuvres (2) 6, p. 320; *Legendre,* Théorie des nombres 6, § 2 = 2, p. 332 der deutschen Ausgabe; s. ferner *F. Pollock,* Lond. R. S. Proc. 13 (1864), p. 542; 16 (1868), p. 251; *S. Realis,* Nouv. Corr. math. 4 (1878), p. 27; *Ed. Maillet,* Par. Soc. math. Bull. 23 (1895), p. 40.

$$\frac{2+E}{24}\,\frac{D\Delta}{2^{\varkappa+\lambda}}\prod_r\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\prod_d\left(1+\frac{\left(\frac{-\Delta f}{d}\right)}{d}\right)\prod_\delta\left(1+\frac{\left(\frac{-D\varphi}{\delta}\right)}{\delta}\right),$$

das Mass der Ordnung (D, Δ) gleich

$$k\cdot D\Delta\prod_r\left(1-\frac{1}{r^2}\right),$$

wo k ein ganzzahliger Faktor ist, verschieden je nachdem f und φ eigentlich oder uneigentlich primitiv und durch welche Potenzen von 2 D und Δ teilbar sind[72]).

9) Die Klassenanzahl eines Geschlechts bestimmter Formen hat *Eisenstein*, die Klassenanzahl eines Geschlechts unbestimmter Formen hat *Arn. Meyer* ermittelt. Insbesondere enthält bei teilerfremden D und Δ jedes Geschlecht unbestimmter Formen nur eine Klasse[73]).

10) Indefinite Formen[74]), durch welche die Null darstellbar ist, heissen „*Nullformen*" (*A. Meyer*). Die Untersuchung, ob eine gegebene indefinite Form eine Nullform ist, kommt auf die Auflösung einer Gleichung $ax^2+by^2+cz^2=0$ mit quadratfreiem abc zurück. Für die Auflösbarkeit in nicht verschwindenden ganzen Zahlen ist offenbar, ausser der Vorzeichen-Ungleichheit von a, b, c, notwendig, dass $-ab$ quadratischer Rest von c, $-ac$ quadratischer Rest von b, $-bc$ quadratischer Rest von a ist. Dass diese Bedingungen auch hinreichen, hat zuerst *Legendre* gezeigt. *Legendre* gründet hierauf seinen (unvollständigen) Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes[75]) [I C 1, Nr. 6].

Die Auflösung einer Gleichung $ax^2+by^2+cz^2=0$ in ganzen

72) *Eisenstein*, Berl. Ber. 1852, p. 370; J. f. Math. 35 (1847), p. 117 = Ges. Abh. p. 177; 41 (1850), p. 141; *Smith*, l. c. 63) u. Par. Mém. sav. [étr.] (2) 29 (1887), N° 1, p. 55 = Pap. 2, p. 677; *Minkowski*, Par. Mém. sav. [étr.] (2) 29 (1887), N° 2, p. 159, 164.

73) *Eisenstein*, Berl. Ber. 1852, p. 370; J. f. Math. 41 (1851), p. 155; *Arn. Meyer*, Zur Theor. d. unbest. tern. quadr. Formen, Zürich 1871 (Diss.); Zürich naturf. Ges. Viert. 28 (1883), p. 272; J. f. Math. 108 (1891), p. 125; *H. Poincaré*, Par. C. R. 102 (1886), p. 735; *W. A. Markow*, Chark. Math. Ges. (2) 4 (1894), p. 1.

74) Vgl. insbes.: *Arn. Meyer*, Zürich naturf. Ges. Viert. 36 (1891), p. 241; J. f. Math. 98 (1885), p. 177; 108 (1891), p. 125; 112 (1893), p. 87; 113 (1894), p. 186; 114 (1895), p. 233; 115 (1895), p. 150; 116 (1897), p. 307; *Fricke*, Gött. Nachr. 1893, p. 705.

75) *Lagrange*, Berl. Hist. 23 (1769), p. 165; 24 (1770), p. 181 = Oeuvr. 2, p. 375, 653; *Legendre*, Paris Hist. 1784, p. 507; Th. d. nombres 2, § 6 = 1, p. 229 der deutschen Ausgabe; *Dedekind* in Dirichlet, Vorl. üb. Zahlentheorie, 4. Aufl., p. 428; *Gauss*, Disqu. arithm. art. 294 = Werke 1, p. 349; *Cauchy*, Exerc. d. math. Par. 1 (1826), N° 24, p. 233 = Oeuvres (2) 6, p. 286; *G. Cantor*, De aequ. 2. gr. indet., Berlin 1867 (Diss.); *Sylvester*, Amer. J. of math. 3 (1880), p. 390.

Zahlen kommt auf die Auflösung einer Gleichung $mx^2 + ny^2 = 1$ in rationalen Zahlen x, y zurück. Diese Gleichung ist auflösbar, wenn die Kongruenz $mx^2 + ny^2 \equiv 1$ für jede Primzahlpotenz in ganzen Zahlen lösbar ist (*Hilbert*)[76].

Zur Auflösbarkeit von $ax^2 + 2bxy + cy^2 = mz^2$ (m prim zu $2(ac - b^2)$) ist die von $a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 = m$ notwendig und hinreichend, wo $a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$ irgend eine Form des Geschlechts von $ax^2 + 2bxy + cy^2$ ist (*de la Vallée-Poussin*[43]).

11) *Smith* hat die Kriterien für die Auflösbarkeit einer allgemeinen ternären quadratischen Gleichung aufgestellt und *Arn. Meyer* dieselben bewiesen. Bezeichnet man mit $\overline{N}$ den „*Kern*" (*Minkowski*) einer Zahl N, d. h. die von ihrem grössten quadratischen Teiler befreite Zahl N, und sind r die gemeinsamen Primfaktoren von $\overline{D}$ und $\overline{\Delta}$, d die übrigen Primfaktoren von $\overline{D}$, δ die übrigen Primfaktoren von $\overline{\Delta}$, so ist zur Auflösbarkeit der Gleichung notwendig und hinreichend, dass für alle Teiler d, δ, r die Gleichungen bestehen:

$$\left(\frac{-\overline{\Delta} f}{d}\right) = 1, \quad \left(\frac{-\overline{D} \varphi}{\delta}\right) = 1, \quad \left(\frac{-\overline{D}\,\overline{\Delta} f \varphi}{r}\right) = 1.$$ [77]

Arn. Meyer stellt auch die Bedingungen für die Auflösbarkeit der Gleichung $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$ in ganzen Zahlen auf und beweist, dass durch indefinite Formen von mehr als vier Variablen die Null stets (eigentlich) dargestellt werden kann[78].

12) Für eine auflösbare Gleichung $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ hat schon *Gauss* alle Auflösungen in der Form:

$$x : y : z = f(p, q) : g(p, q) : h(p, q)$$

zu finden gelehrt; hier bedeuten f, g, h binäre quadratische Formen der ganzzahligen Unbestimmten p und q.[79]

Alle *eigentlichen* Lösungen allein aus einer von ihnen werden durch die Auflösungen von *Dedekind* und *G. Cantor* geliefert.

Wird durch die Transformation:

$$\begin{aligned} x &= f_1 x' + 2 f_2 y' + f_3 z', \\ y &= g_1 x' + 2 g_2 y' + g_3 z', \\ z &= h_1 x' + 2 h_2 y' + h_3 z' \end{aligned}$$

---

76) *Hilbert*, Gött. Nachr. 1897, p. 48.

77) *Smith*, Lond. R. S. Proc. 13 (1864), p. 110 = Papers 1, p. 410; *Arn. Meyer* J. f. Math. 98 (1885), p. 177.

78) *Arn. Meyer*, Zürich naturf. Ges. Viert. 28 (1883), p. 272; 29 (1884), p. 209.

79) *Gauss*, Disqu. arithm. art. 299 III = Werke 1, p. 360; vgl. auch *Cauchy*, Exerc. d. math. 1, Paris 1826, p. 233 = Oeuvres (2) 6, p. 286.

die Form $ax^2 + by^2 + cz^2 = 4D(x'z' - y'^2)$, so muss man für $x' = p^2$, $y' = pq$, $z' = q^2$ eine Auflösung der Gleichung $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ erhalten. Die eigentlichen Auflösungen allein erhält man aus:

$$2x = ux' - 2bcvy' + wz',$$
$$2y = u'x' - 2acv'y' + w'z',$$
$$2z = u''x' - 2abv''y' + w''z',$$

wenn man für x', y', z' alle der Gleichung: $x'z' = Dy'^2$ und der Kongruenz $x' \equiv z' \pmod{2}$ genügenden ganzen Zahlen einsetzt, für welche x' und z' höchstens den gemeinsamen Teiler 2 haben und in diesem Falle noch der Bedingung $\frac{x'}{2} \not\equiv \frac{z'}{2} \pmod{2}$ genügen. Die Zahlen u, u', u'' bilden eine Lösung, v, v', v'' sind die Determinanten des Systems $\begin{pmatrix} u & u' & u'' \\ l & l' & l'' \end{pmatrix}$, wo l, l', l'' eine ganzzahlige Lösung der Gleichung $aul + bu'l' + cu''l'' = 1$ (mit $l \equiv 0 \pmod{2}$) bilden, und w, w', w'' sind resp. gleich $2l - hu$, $2l' - hu'$, $2l'' - hu''$, wenn $al^2 + bl'^2 + cl''^2 = h$ gesetzt wird (*Dedekind*, anders *G. Cantor*[75])).

13) Von der Auflösung einer quadratischen Gleichung:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

in rationalen Zahlen, die aus dem vorhergehenden zu folgern ist, verschieden ist die Auflösung einer solchen Gleichung in *ganzen* Zahlen. Die vollständige Auflösung ist einfach, ausser in dem Falle, wo $D = b^2 - ac$ positiv und kein Quadrat ist. In diesem Falle wird die vollständige Auflösung durch die Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ oder 4 vermittelt[80]).

14) Ternäre quadratische Formen mit komplexen Koeffizienten sind von *Fricke*, ternäre Hermite'sche Formen von *Picard* betrachtet worden[81]).

e. Quadratische Formen von n Variablen. 1) Es sei f eine primitive quadratische Form von n Variablen, vom Trägheitsindex τ. Nach Division der μ^{ten} Adjungierten $f^{(\mu)}$ durch den grössten gemein-

80) *Euler,* Petr. N. Comm. 11 (1765), p. 28; 18 (1773), p. 185, 218 = Comm. Ar. 1, p. 316, 549, 570; *Lagrange,* l. c. 75); *Gauss,* Disqu. arithm. art. 216 = Werke 1, p. 215; *H. Scheffler,* J. f. Math. 45 (1853), p. 349; *A. Kunerth,* Wien. Ber. 78² (1878), p. 327; 82² (1880), p. 342; *R. Marcolongo,* Giorn. di mat. 26 (1888), p. 65; *Dujardin,* Par. C. R. 119 (1895), p. 843; für n Unbestimmte behandelt die Gl. 2. Grades *Ad. Desboves,* Nouv. ann. (3) 3 (1884), p. 225; (3) 5 (1886), p. 226.

81) *R. Fricke,* Gött. Nachr. 1895, p. 11; *Picard,* Par. C. R. 97 (1883), p. 845.

samen Teiler $d_{\mu-1}$ ihrer Koeffizienten erhält man die μ^{te} *„primitive Adjungierte“* $\varphi^{(\mu)}$. Insbesondere heisst $(-1)^\tau \varphi^{(n-1)}$ die *„Reciproke“* von f. Wir setzen $d_0 = 1$, $d_{n-1} = (-1)^\tau \cdot \Delta$, wo Δ die Determinante von f ist; ferner $\frac{d_\mu}{d_{\mu-1}} = e_\mu$, $\frac{e_\mu}{e_{\mu-1}} = o_\mu$, $\sigma_\mu = 1$ oder 2, je nachdem $\varphi^{(\mu)}$ eigentlich oder uneigentlich primitiv ist. Die ganzen Zahlen $\begin{pmatrix} o_1 & o_2 & \ldots & o_{n-1} \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_{n-1} \end{pmatrix}$ sind die *„Ordnungszahlen“* (*„determinierenden Zahlen“*) der Form f. Alle Formen derselben Spezies, welche dieselben Ordnungszahlen haben, bilden eine *„Ordnung“*. Zu jeder Determinante $\Delta = (-1)^\tau d_{n-1}$ giebt es wegen

$$d_{n-1} = o_1^{n-1} o_2^{n-2} \ldots o_{n-1}^1$$

nur eine endliche Anzahl von Ordnungen[82]).

2) Die Anzahl der Klassen für jede Determinante und infolge dessen auch für jede Ordnung ist endlich. Man beweist dies wie unter Nr. **c** 7, 8 und Nr. **d** 2 durch die Reduktion der Formen. Insbesondere ist auf positive Formen die geometrische Reduktion ohne weiteres übertragbar[83]).

3) Ist p_μ irgend ein Primfaktor von o_μ, so hat das Zeichen $\left(\frac{\varphi^{(\mu)}}{p_\mu}\right)$ für alle durch p_μ nicht teilbaren Werte von $\varphi^{(\mu)}$ denselben Wert. Dasselbe gilt eventuell noch von den Zeichen $\left(\frac{-1}{\varphi^{(\mu)}}\right)$, $\left(\frac{2}{\varphi^{(\mu)}}\right)$, $\left(\frac{-2}{\varphi^{(\mu)}}\right)$. Zwischen diesen *„Einzelcharakteren“* besteht eine Relation, sodass nur die Hälfte der *„Totalcharaktere“* möglich ist. Jedem dieser Totalcharaktere entspricht wirklich ein *„Geschlecht“*. Der Nachweis stützt sich auf die Richtigkeit des Satzes für Formen von $n-1$ Variablen[84]).

4) Zwei Formen heissen *„kongruent“* modulo N, wenn ihre entsprechenden Koeffizienten kongruent modulo N sind. Zwei Klassen heissen *kongruent* modulo N, wenn sie zwei Formen kongruent modulo N enthalten. Ein *„Geschlecht“* besteht aus allen einander für jeden beliebigen Modul kongruenten Klassen. Ein Geschlecht einer bestimmten Ordnung besteht aus allen einander modulo 2Δ kongruenten Klassen der Ordnung[85]).

---

82) *St. Smith,* Lond. R. S. Proc. 13 (1864), p. 199 = Papers 1, p. 412; 16 (1868), p. 197 = Papers 1, p. 510.

83) *V. A. Lebesgue,* J. de math. (2) 1 (1856), p. 401; *H. Minkowski,* J. f. Math. 107 (1891), p. 278; Par. C. R. 112 (1891), p. 209.

84) *P. Bachmann,* Zahlentheorie 4¹, p. 594.

85) *Minkowski* l. c. 72), p. 82; *Poincaré,* Par. C. R. 94 (1882), p. 67 u. 124.

5) Zwei Formen eines Geschlechts sind rational unimodular in einander transformierbar durch eine Transformation, deren Generalnenner teilerfremd zu einer beliebigen Zahl ist, und sind durch diese Eigenschaft als Formen eines Geschlechts charakterisiert[86]). Im Anschluss an diese Definition des Geschlechts hat *Minkowski* die Bedingungen dafür aufgestellt, dass eine Form rational in eine andere oder in ein rationales Vielfaches einer andern transformiert werden kann. Hieraus ergeben sich auch die Bedingungen für die Darstellbarkeit der Eins oder Null durch eine quadratische Form.

6) Die Poincaré'sche Definition des Geschlechts (s. Nr. 4) macht die Betrachtung einer Form in Bezug auf einen Modul erforderlich. In jeder primitiven Klasse findet sich eine Form, die für eine genügend hohe Potenz p^t einer ungraden Primzahl p als Modul einer Form $ex_1^2 + e'x_2^2 + \cdots + e^{(n-1)}x_n^2$ kongruent ist, in welcher jedes $e^{(i-1)}$ grade so oft durch p teilbar ist wie der Elementarteiler e_i. Diese Form heisst ein „*Hauptrepräsentant*" der Klasse in Bezug auf den Modul p^t. Ahnlich, aber minder einfach ist die Definition des Hauptrepräsentanten in Bezug auf einen Modul 2^t. In Bezug auf einen zusammengesetzten Modul $N = 2^{t_0} p^t \ldots$ giebt es einen Hauptrepräsentanten, welcher den Hauptrepräsentanten in Bezug auf die Moduln 2^{t_0}, $p^t, \ldots$ für diese Moduln bzw. kongruent ist[87]). Ein Hauptrepräsentant $\sum\limits_{i,k} a_{ik} x_i x_k$ lässt sich so wählen, dass je zwei aufeinanderfolgende der ganzen Zahlen

$$\frac{|a_{ik}|}{\sigma_\mu d_{\mu-1}} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, \mu)$$

teilerfremd sind, und heisst dann eine „*kanonische*" (*Smith*) oder „*charakteristische*" (*Minkowski*) Form der Klasse[88]).

7) Die Einführung des Hauptrepräsentanten ist von Nutzen bei der Auflösung quadratischer Kongruenzen: $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv a \pmod{N}$. Die vollständige Auflösung einer solchen Kongruenz kommt auf den Fall zurück, in welchem N eine ungrade Primzahl p, oder 4 oder 8 ist. Man erhält ein vollständiges System inkongruenter Lösungen, wenn man für $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ je ein vollständiges Restsystem modulo N einsetzt und die zugehörigen Werte von x_n bestimmt. Die Anzahl inkongruenter Lösungen ergiebt sich für $N = p$ gleich

---

86) *Minkowski,* J. f. Math. 106 (1890), p. 5.

87) *Minkowski* l. c. 72), p. 84; *C. Jordan,* Par. C. R. 84 (1872), p. 1093.

88) *St. Smith,* Par. Mém. sav. [étr.] (2) 29 (1883), N° 1, p. 6 = Papers 2, p. 629; *H. Minkowski,* N° 2, p. 84.

$$p^{n-1}\left(1-\varepsilon p^{-\left[\frac{m}{2}\right]}\right),$$

wenn $a_1 x_1^2 + \cdots + a_m x_m^2$ der Rest eines Hauptrepräsentanten der Klasse von f modulo p ist. Das Vorzeichen ε ist gleich:

$$(-1)^m \left(\frac{(-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]} a_1 a_2 \ldots a_m a^{m-2\left[\frac{m}{2}\right]}}{p}\right).$$

Komplizierter sind die Anzahlen der Lösungen für $N = 4$ und 8 beschaffen. Aus diesen Anzahlen setzt sich diejenige für ein beliebiges N zusammen[89]).

Anders hat *Minkowski* diese Anzahl bestimmt[89]). Bezeichnet man dieselbe mit $f\left(\frac{h}{N}\right)$ und setzt

$$f\left[\frac{h}{N}\right] = \sum_{a=0}^{N-1} e^{\frac{2ah\pi i}{N}} f\left(\frac{a}{N}\right),$$

so ist offenbar umgekehrt:

$$f\left(\frac{a}{N}\right) = \frac{1}{N}\sum_{h=0}^{N-1} e^{-\frac{2ah\pi i}{N}} f\left[\frac{h}{N}\right].$$

Es kommt daher alles auf die Ermittlung der Zahl $f\left[\frac{h}{N}\right]$ oder, was dasselbe ist, der Summe[90]) $\sum e^{\frac{2h\pi i}{N} f(x_1, x_2, \ldots x_n)}$ an, zu summieren über vollständige Restsysteme von x_1 (mod. N), x_2 (mod. N), u. s. w. Für ungrade zu Δ teilerfremde N ergiebt sich z. B.

$$f\left[\frac{h}{N}\right] = \left(\frac{h}{N}\right)^n \left(\frac{\Delta}{N}\right) N^{\frac{n}{2}} i^{n\left(\frac{N-1}{2}\right)^2}.$$

8) Die Darstellung einer Zahl μ durch eine quadratische Form $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kommt zurück auf die Darstellung der quadratischen Formen $g(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ der Determinante $(-1)^\tau d_{n-2}\mu$. Damit eine quadratische Form $g(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ der Determinante $(-1)^\tau d_{n-2}\mu$ durch Formen der Ordnung von $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ darstellbar sei, ist notwendig und hinreichend, dass die mit $-o_{n-1}$ sgn μ multiplizierte Reciproke γ von g quadratischer Rest für den Modul μ ist. Ist die

89) Vgl. *Bachmann*, Zahlentheorie 4[1], Kap. 7; *C. Jordan*, Traité des substitutions p. 159; J. de math. (2) 17 (1872), p. 368. Allgemeiner hat *Lebesgue* die Anzahl der Lösungen von $\sum a_i x_i^m \equiv a$ (mod. $p = mh + 1$) bestimmt; s. J. de math. 24 (1859), p. 366; *Minkowski*, l. c. 72), p. 49.

90) Über diese n-fachen Gauss'schen Summen vgl. namentlich *H. Weber*, J. f. Math. 74 (1872), p. 14.

Bedingung erfüllt, so kann man alle zu einem Kongruenzwerte von $\sqrt{-o_{n-1}\operatorname{sgn}\mu\cdot\gamma(y_1, y_2, \ldots, y_m)}$ (mod. μ) „*gehörenden*" Darstellungen von $g(y_1, \ldots, y_m)$ durch Formen der Ordnung von f aufstellen. Eine darstellbare Form gehört im allgemeinen zur Ordnung:

$$\begin{pmatrix} o_1 & o_2 & \cdots & o_{n-3} & o_{n-2} & |\mu| \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_{n-3} & \sigma_{n-2} & \end{pmatrix},$$

kann aber für $n\sigma_1 \equiv 1$ (mod. 2) auch zur Ordnung:

$$\begin{pmatrix} o_1 & o_2 & o_3 & \cdots & o_{n-3} & o_{n-2} & |\mu| \\ 2 & 1 & 1 & & 1 & 2 & \end{pmatrix}$$

gehören; ebenso gehört dieselbe zu einem bzw. einem von zwei völlig bestimmten Geschlechtern Γ_1, Γ_2.

9) Das Mass einer positiven Form, Klasse, Ordnung, u. s. w. wird analog wie unter Nr. **d** 7) definiert. Das Mass eines Geschlechts ist für Formen von n Variablen von *Smith* und *Minkowski* bestimmt worden[91]). Dasselbe besteht aus einem von n, von den Charakteren und von den Primfaktoren der Determinante Δ abhängenden rationalen Faktor, der bei ungeradem n mit $\sqrt{\Delta}$, bei geradem n mit der Summe

$$\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}\Delta}{k}\right)\cdot\frac{1}{k^{\frac{n}{2}}}$$

multipliziert ist, zu summieren über alle zu 2Δ teilerfremden Zahlen k.

Das Mass aller eigentlichen Darstellungen einer Zahl μ durch ein vollständiges Formensystem des Geschlechts von $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist gleich dem Mass aller eigentlichen Darstellungen quadratischer Formen $g(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ der Determinante $(-1)^\tau d_{n-2}\mu$ und des Geschlechts Γ_1 bzw. der Geschlechter Γ_1 und Γ_2.

Für $\Delta = 1$ und $n \leqq 8$ giebt es nur *eine* Klasse[91a]), also auch nur *ein*, durch die Form $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ repräsentiertes Geschlecht; dessen Mass ist gleich $\frac{1}{2^n \cdot n!}$. Ist A die Anzahl der eigentlichen Darstellungen einer Zahl μ durch die Form $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$, so ist $\frac{A}{2^n \cdot n!}$ das Mass aller eigentlichen Darstellungen

91) *Smith*, Lond. R. Soc. Proc. 16 (1867), p. 203 = Papers 1, p. 517 u. l. c. 88), p. 55 = Papers 2, p. 666; *Minkowski*, l. c. 72), p. 168; Acta math. 7 (1885), p. 201; J. f. Math. 99 (1886), p. 1.

91a) *Eisenstein* 92); *Hermite*, J. f. Math. 40 (1850), p. 279.

von μ durch ein Formensystem des Geschlechts von $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Andrerseits wird dieses Mass durch das Mass eines Geschlechts bezw. zweier Geschlechter von Formen von $n-1$ Variablen und der Determinante μ ausgedrückt. Auf diese Weise findet man für die Anzahl aller Darstellungen einer Zahl μ als Summe von $2h+2$ Quadraten Ausdrücke $\lambda \sum_d \left(\frac{-1}{d}\right)^{h+1} d^h$, zu summieren über alle ungeraden Divisoren d von μ; λ ist eine je nach der Linearform von μ verschiedene ganze Zahl. Dagegen hängt die Anzahl der eigentlichen Darstellungen der Zahl μ als Summe von $2h+1$ Quadraten ab von der Summe $\frac{\mu^{\frac{2h-1}{2}}}{\pi^h} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^h \mu}{k}\right) \frac{1}{k^h}\cdot$ Diese letzteren Summen lassen sich in endlicher Form darstellen; sie erweisen sich als abhängig von den Summen $\sum_{k=1}^{\mu-1} (-1)^k \left(\frac{k}{\mu}\right) k^{h-1}$, bezogen auf alle zu μ teilerfremden Zahlen k.[92])

10) Von Klassenanzahlen ist bisher nur die eines Geschlechts indefiniter Formen ungrader Determinante mit teilerfremden

$$o_{i-1},\ o_i \qquad (i = 2, \ldots, n-1)$$

---

92) Üb. d. Darst. durch vier Quadr. u. ähnl. quatern. Formen vgl. *K. G. J. Jacobi,* J. f. Math. 12 (1834), p. 167 = Werke 6, p. 245; *G. Lejeune-Dirichlet,* J. de math. (2) 1 (1856), p. 210 = Werke 2, p. 201; *Liouville,* 10 (1845), p. 169, (2) 1 (1856), p. 230 u. flgde. Bde.; *Eisenstein,* J. f. Math. 35 (1847), p. 133, 134 = Math. Abh. p. 193; *Ch. Hermite,* J. f. Math. 47 (1854), p 365; *R. Gent,* Liegnitz Progr. 1877; *G. Torelli,* Giorn. di mat. 16 (1878), p. 152; *H. J. S. Smith,* Chelini Coll. Math. (1881), p. 117 = Papers 2, p. 287; *J. W. L. Glaisher,* Quart. J. 19 (1883), p. 212; *M. Weill,* Par. C. R. 99 (1884), p. 859; Par. Soc. math. Bull. 13 (1885), p. 28; *Th. Pepin,* Rom. N. Linc. Pont. A. 38 (1885), p. 139; J. de math. (4) 6 (1890), p. 5; *Vahlen,* J. f. Math. 112 (1893), p. 27. — Für fünf Quadr.: *Eisenstein,* J. f. Math. 35 (1847), p. 368; *Stieltjes,* Par. C. R. 97 (1883), p. 981, 1515; *A. Hurwitz* 98 (1884), p. 504; *Th. Pepin,* Rom. N. Linc. Pont. A. 37 (1884), p. 9; *Minkowski,* Par. sav. [étr.] (2) 29 (1887), p. 164; *Smith,* ebenda p. 63 = Papers 2, p. 685; Lond. R. Soc. Proc. 16 (1868), p. 207 = Papers 1, p. 520. Für 6, 8, 10 Quadrate: *Eisenstein,* J. f. Math. 35 (1847), p. 135 = Math. Abh. p. 195. Für 10, 11 u. 12 Quadrate: *Liouville,* J. de math. (2) 5 (1860), p. 143; 6 (1861), p. 233; 9 (1864), p. 296; 10 (1865), p. 1. Vgl. ferner: *Ch. Berdellé,* Par. Soc. math. Bull. 17 (1889), p. 102; *E. Catalan* p. 205; *L. Gegenbauer,* Wien. Ber. 97 (1888), p. 420; 103²ᵃ (1894), p. 115; *G. B. Mathews,* Lond. Math. Soc. Proc. 27 (1896), p. 55. — Über die Summation von $\sum_k \left(\frac{\mu}{k}\right) \frac{1}{k^h}$ vgl. *Cauchy,* Par. Mém. 17 (1840), note 12, p. 665.

ermittelt worden; dieselbe ist gleich Eins[92a]). Die Endlichkeit der Klassenanzahl ist für positive quadratische Formen von *Hermite* bewiesen worden. Es ist nämlich jede solche Form einer andern $\sum a_{ik} x_i x_k$ äquivalent, in welcher

$$0 < a_{11} \leqq a_{22} \cdots \leqq a_{nn},$$
$$a_{11} a_{22} \ldots a_{nn} < \lambda_n \Delta,$$
$$-a_{hh} \leqq 2a_{hk} \leqq a_{hh} \qquad (h < k)$$

ist; die Anzahl dieser Formen ist bei gegebener Determinante Δ offenbar endlich. Für den numerischen Faktor λ_n hatte *Hermite* den Wert $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ gefunden; *Minkowski* giebt dafür den für grosse n kleineren Wert $\left(\frac{2^n \Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right)^2$ (s. Nr. **b**, 15)).[92b]) Diese Reduktion quadratischer Formen hat nicht die Eigenschaft, dass sich in jeder Klasse nur eine Form findet. Dieses wird durch die Ausdehnung der Seeber-Dirichlet'schen (Nr. **d**, 3)) Reduktion erreicht; der zufolge ist jede positive Form einer und im allgemeinen nur einer solchen äquivalent, in welcher

$$0 < a_{11} \leqq a_{22} \cdots \leqq a_{nn}$$

und jedes a_{hh} der kleinste der Werte von

$$\sum a_{ik} x_i x_k \qquad \left(\begin{matrix} x_i = +1, 0, -1 \\ i, k = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}, \text{ nicht alle } x_{i>h} = 0\right)$$

ist. Die Reduktion einer indefiniten Form

$$f = \sum a_{ik} x_i x_k = \sum_i \pm \left(\sum_k \alpha_{ik} x_k\right)^2 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

kommt auf die der definiten

$$g = \sum_i \lambda_i \left(\sum_k \alpha_{ik} x_k\right)^2 = \sum b_{ik} x_i x_k \qquad \left(\begin{matrix} \lambda_i > 0, \prod_i \lambda_i = 1 \\ i, k = 1, 2, \ldots, n \end{matrix}\right)$$

zurück. Die reduzierenden Transformationen aller Formen g transformieren f in eine $(n-1)$-fache Formenschar, in welcher sich eine *endliche* Anzahl (*Periode, Netz*) ganzzahliger Formen, Repräsentanten der Klasse von f vorfindet (*Hermite's kontinuierliche Reduktion*, s. Nr. **d**, 3)).

92a) *Arn. Meyer*, Zürich naturf. Ges. Viert. 36 (1891), p. 241.

92b) *Hermite*, J. f. Math. 40 (1850), p. 261; *Minkowski*, Geometrie d. Zahlen, p. 198.

11) Quadratische Formen mit komplexen Variablen und Koeffizienten sind von *Jordan*, *Bianchi* und *Mathews*, bilineare Formen $\sum a_{ik} x_i x_k'$ (*Hermite'sche Formen*, s. N. c, 15)) mit konjugiert komplexen a_{ik} und a_{ki}, sowie x_i und x_i' sind von *Picard* und *Loewy* untersucht worden[93]).

f. Formen, die in Linearfaktoren zerfallen. 1) Hier sind zunächst die binären Formen zu betrachten.

Die einfachsten dieser Formen: $x^n - y^n$ bilden den Gegenstand der Kreisteilung [I C 4 b, Nr. 4]. Eine wichtige Eigenschaft des Binoms $x^n - y^n$ für Primzahlen n ist in der Gleichung:

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \frac{X^2 - \left(\frac{-1}{n}\right) n Y^2}{4}$$

ausgedrückt, in welcher X, Y ganze rationale Funktionen von x, y sind[94]). Durch diese Gleichung wird die Kreisteilung zur Theorie der binären quadratischen Formen in Beziehung gesetzt. Insbesondere fliesst aus dieser Quelle die Kreisteilungsauflösung der Pell'schen Gleichung[95]). Eine analoge Gleichung findet für zusammengesetzte n statt (*Dirichlet* l. c.).

2) In das Gebiet der Kreisteilung gehören allgemeiner auch diejenigen binären Formen $f(x, y)$, welche gleich Null gesetzt, Gleichungen von „*Perioden*" [I C 4b, Nr. 3] von Einheitswurzeln ergeben (*cyklotomische Funktionen*). Für eine Primzahl n und eine Teilung der n^{ten} Einheitswurzeln in nur zwei Perioden ist dies die oben erwähnte Form $x^2 \pm n y^2$. Eine Haupteigenschaft aller dieser Formen besteht darin, dass die durch sie darstellbaren Zahlen nur Primfaktoren von bestimmten Linearformen enthalten können[96]). Auf diese Eigenschaft

93) *C. Jordan,* J. éc. pol. 51 (1882), p. 1; *L. Bianchi,* Rom. Linc. Rend. (4) 5^1 (1889), p. 589; *G. B. Mathews,* Quart. J. 25 (1891), p. 289; *É. Picard,* Par. C. R. 95 (1882), p. 763; 96 (1882), p. 1567 u. 1779; 97 (1883), p. 745 u. 845; Math. Ann. 39 (1891), p. 142; *Alfred Loewy,* Par. C. R. 123 (1896), p. 168; Halle Leop. N. A. 71 (1898), p. 377; Math. Ann. 50 (1898), p. 557; 52 (1899), p. 588.

94) *Cauchy,* Par. C. R. 10 (1840), p. 181 = Oeuvres (1) 5, p. 85; Par. Mém. 17 (1840), p. 249; *Gauss,* Disqu. arithm. art. 357 = Werke 1, p. 443; *N. Trudi,* Ann. di mat. (2) 2 (1869), p. 150; *A. Genocchi* p. 216; *Zolotareff,* Nouv. Ann. d. math. (2) 11 (1872), p. 539; *Smith,* Lond. Math. Soc. Proc. 7 (1875), p. 237 = Mess. of math. 5 (1876), p. 143 = Papers 2, p. 132.

95) *Dirichlet,* J. f. Math. 17 (1837), p. 286 = Werke 1, p. 343; *E. de Jonquières,* Par. C. R. 98 (1884), p. 1358, 1515.

96) Vgl. z. B. *Sylvester,* Amer. J. of math. 2 (1879), p. 280, 357, 381, 389; 3 (1880), p. 58, 179, 184, 332, 388; Par. C. R. 92 (1881), p. 1084; *Th. Pepin* p. 173;

hin sind von *Dirichlet* Formen der Art $ax^4 + bx^2y^2 + cy^4$ untersucht worden; ferner von ihm, *Genocchi* und *Kronecker* die beiden Formenarten, die aus $(x + \sqrt{n})^k$ hervorgehen[97]).

3) Über die allgemeinen kubischen binären Formen hat *Eisenstein* bemerkenswerte Resultate gewonnen. Die quadratische Kovariante [I B 2, Nr. 1] $(b^2 - ac)x^2 + (bc - ad)xy + (c^2 - bd)y^2$ der binären kubischen Form $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ transformiert sich bei einer Transformation der letzteren vermittelst *derselben* Substitution. Demnach bilden von einer Klasse kubischer Formen die quadratischen Kovarianten eine Klasse quadratischer Formen. Diese Klassen quadratischer Formen sind dadurch ausgezeichnet, dass durch ihre „*Triplikation*“ (*Eisenstein*) die Hauptklasse entsteht; und umgekehrt. Solche Klassen sind „*subtriplikat*“ genannt worden. Auf dieser Grundlage gelingt *Pepin* die vollständige Aufzählung der Klassen kubischer binärer Formen gegebener Determinante[98]).

4) *Hermite* nennt eine binäre Form $a_0x^n + \binom{n}{1}a_1x^{n-1}y + \cdots + a_ny^n$ „*primitiv*“, wenn $a_0, a_1, \ldots, a_n$ teilerfremd sind, und zwar „*uneigentlich*“ oder „*eigentlich*“ primitiv, je nachdem $a_0, \binom{n}{1}a_1, \binom{n}{2}a_2, \ldots, a_n$ einen gemeinsamen Teiler haben oder nicht. Äquivalente Formen bilden eine „*Klasse*“; äquivalente Formen haben äquivalente Kovarianten [I B 2, Nr. 2]. Formen gehören in eine „*Ordnung*“, wenn sie in den grössten gemeinsamen Teilern der Koeffizienten ihrer respektiven Kovarianten übereinstimmen, dieselben einmal mit, einmal ohne Binomialfaktoren genommen. Formen gehören in ein „*Geschlecht*“, wenn sie *rational* unimodular in einander transformierbar sind. Kubische und biquadratische Formen zeigen ein singuläres Verhalten, begründet in dem Umstande, dass es die einzigen binären Formen ungraden bzw. graden Grades sind, welche keine lineare bzw. quadratische Kovariante besitzen [I B 2, Nr. 7, Anm. 146, 157; Nr. 8, Anm. 169].

Binäre Formen derselben Determinante und vom ungraden Grade $n > 3$ bilden *ein* Geschlecht.

A. S. Hathaway, J. Hopk. Circ. 1882[1], p. 67, 131; *Sylvester* p. 45; *K. Th. Vahlen*, Königsb. phys. ök. Ges. Ber. 1897, p. [47].

97) *Dirichlet*, J. f. Math. 3 (1828), p. 35 = Werke 1, p. 62; De formis etc., Vratislaviae (1828) = Werke 1, p. 45; *A. Genocchi*, Par. C. R. 1884, p. 411; Ann. di mat. (2) 2 (1869); p. 256; *Kronecker*, Berl. Ber. 1888, p. 417 = Werke 3, p. 281; *X. Stouff*, Par. C. R. 125 (1897), p. 859.

98) *Eisenstein*, J. f. Math. 27 (1844), p. 75, 89, 319; *Th. Pepin*, Rom. N. Linc. Pont. A. 37 (1884), p. 227; *G. B. Mathews*, Messeng. (2) 20 (1891), p. 70.

Binäre biquadratische Formen sind einer endlichen (Klassen-) Anzahl reduzierter äquivalent.

Die Reduktion einer binären Form

$$a_0 \prod_i (x + \alpha_i y) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

wird, analog wie bei den indefiniten quadratischen Formen, auf die Reduktion der definiten quadratischen Form

$$\sum_i \lambda_i N(x + \alpha_i y) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

zurückgeführt[98a]). Das Zeichen N bedeutet die *„Norm"* [I B 1 c, Nr. **4**; I C 4 a, Nr. **2**].

5) Der in 1) erwähnten Darstellung von $\frac{x^n - y^n}{x - y}$ als quadratische Form entspricht für eine Primzahl n von der Form $3k + 1$, die im Bereich der Kubikwurzel ε der Einheit in zwei Faktoren n_1 und n_2 zerfällt, für eine Teilung der n^{ten} Einheitswurzeln in drei Perioden [I C 4 b, Nr. **3**] die Gleichung:

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \frac{X^3 + nn_1 Y^3 + nn_2 Z^3 - 3nXYZ}{27} = \frac{F(X, Y, Z)}{27};$$

setzt man $Y = V + \varepsilon W$, $Z = V + \varepsilon^2 W$, so sind X, V, W ganze ganzzahlige Funktionen von x und y. Die Formen $F(x, y, z)$ sind von *Eisenstein* ausführlich untersucht worden; sie zeigen in vielen Eigenschaften ihre Analogie zu den binären quadratischen Formen von Primzahl-Determinante. An die Stelle der Pell'schen Gleichung tritt die Gleichung $F(x, y, z) = 1$. Die Form $F(x, y, z)$ zerfällt in drei Linearfaktoren:

$$x + \varepsilon \sqrt[3]{nn_1}\, y + \varepsilon^2 \sqrt[3]{nn_2}\, z \qquad \left(\varepsilon = 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Sind A', B' zwei der Linearfaktoren für eine beliebige Lösung, so heisst $\lg A' - \varepsilon \lg B'$ ihr *„Regulator"*. Diejenigen Auflösungen, für welche die Norm des Regulators ein Minimum ist, heissen *„Fundamentalauflösungen"*. Sind für eine Fundamentalauflösung der Gleichung $F(x, y, z) = 1$ A und B zwei von diesen Linearfaktoren, so ist in $A^l B^m$ jede Auflösung enthalten. Alle „Regulatoren" ergeben sich aus dem Fundamentalregulator $\lg A - \varepsilon \lg B$ durch Multiplikation mit allen komplexen ganzen Zahlen $l + m\varepsilon$; die betreffende Auflösung *„gehört"* zu diesem Quotienten $l + m\varepsilon$ der beiden Regulatoren. Die Anzahl der Klassen ist endlich und hängt von den beiden

98a) *Hermite,* J. f. Math. **41** (1851), p. 191; 52 (1856), p. 1.

(Dirichlet'schen) Reihen [I C 3, Nr. 2]: $\sum_k \left[\frac{k}{n_1}\right] \cdot \frac{1}{k}$, $\sum_k \left[\frac{k}{n_1}\right]^2 \cdot \frac{1}{k}$ ab, in denen das Zeichen [ ] den kubischen Restcharakter ausdrückt. Die Summierung ergiebt, dass die Klassenanzahl der Norm $l^2 - lm + m^2$ des Quotienten $l + m\varepsilon$ gleich ist, zu welchem eine gewisse *„Kreisteilungseinheit"* [I C 4 b, Nr. 1] gehört[99]).

6) Andere ternäre kubische Formen, welche in Linearfaktoren zerfallen, insbesondere die Darstellung der 1 oder einer ganzen Zahl durch solche Formen, sind von *Meissel*, *Mathews*, *Tanner* u. a. betrachtet worden[100]).

Diejenigen ganzzahligen Formen:

$$(ax + by + cz)\,(a'x + b'y + c'z)\,(a''x + b''y + c''z),$$

in denen $a, b, c, \ldots$ von der Kubikwurzel einer ganzen Zahl rational abhängen, hat *Arn. Meyer* des ausführlicheren untersucht. Zu derselben Determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2$ gehört eine endliche Anzahl von Klassen dieser Formen; jede Klasse wird repräsentiert durch eine endliche Anzahl (*„Periode"*) reduzierter Formen. Ein vollständiges System solcher Formen wird aufgestellt und ein Verfahren zur Auffindung aller automorphen Transformationen einer Form angegeben[100a]). Die allgemeineren Formen, in denen $a, b, c, \ldots$ einem gegebenen kubischen Zahlkörper [I C 4 a, Nr. 1] angehören, untersucht *Furtwängler.* Er macht dabei von der Darstellung der Form durch das Gitter der associierten positiven quadratischen Form:

$$\lambda\,|\,ax + by + cz\,|^2 + \mu\,|\,a'x + b'y + c'z\,|^2 + \nu\,|\,a''x + b''y + c''z\,|^2$$

Gebrauch. Die Theorie der Komposition wird auf die Multiplikation der *„Gitterzahlen"* gegründet. Jede Gitterzahl zerfällt in eine endliche Anzahl von Primzahlen[100b]).

7) Auf die allgemeinsten Formen dieser Art hat zuerst *Dirichlet* aufmerksam gemacht und zugleich den Hauptsatz ihrer Theorie bewiesen.

---

99) *Eisenstein*, J. f. Math. 28 (1844), p. 289; 29 (1845), p. 19 = Abh. p. 1.

100) *E. Meissel*, Progr. Ober-Realsch. Kiel 1891; *G. B. Mathews*, Lond. Math. Soc. Proc. 21 (1891), p. 280; *H. W. Lloyd Tanner*, ebenda 27 (1896), p. 187.

100a) *Arn. Meyer*, Zur Theorie der zerlegbaren Formen, insbesondere der kubischen; Habilitationsschrift (Zürich 1870), hrsg. von *F. Rudio*, Zürich naturf. Ges. Viert. 1897, p. 149.

100b) *Ph. Furtwängler*, Zur Theorie der in Linearfaktoren zerlegbaren, ganzzahligen ternären kubischen Formen, Göttingen 1896 (Diss.).

Es sind dies die Formen:

$$a \prod_{i=1}^{n} (a_{1i} x_1 + a_{2i} x_2 + \cdots + a_{ni} x_n),$$

in welchen die Grössen a_{ki} rationale Funktionen einer algebraischen Zahl n^{ter} Ordnung sind und das Produkt über alle konjugierten Werte zu erstrecken ist [I C 4 a, Nr. 1]; durch die ganze rationale Zahl a werden die Nenner beseitigt. Insbesondere ist

$$\prod_{\alpha} (x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha^{n-1} x_n),$$

wo α eine *ganze* algebraische Zahl [I C 4 a, Nr. 2] ist, die *„Hauptform"* dieser Theorie und:

$$\prod (x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha^{n-1} x_n) = \pm 1$$

das Analogon der Pell'schen Gleichung. *Dirichlet* zeigt, dass die sämtlichen Auflösungen dieser Gleichung sich als Produkte von Potenzen von $\nu - 1$ Fundamentalauflösungen ergeben, wenn ν die Anzahl der reellen und der Paare komplexer Werte von α ist[101]).

Die Reduktion dieser Formen wird wie in 5) auf diejenige der associierten positiven quadratischen Formen zurückgeführt.

Alle automorphen Substitutionen sind Produkte von Potenzen gewisser *„Fundamentalsubstitutionen"* (*Hermite*).[101a])

8) Die erwähnten Formen sind offenbar die allgemeinsten, welche in Linearfaktoren zerfallen.

g. Sonstige Formen. 1) Für Formen beliebigen Grades von beliebig vielen Variablen werden die Begriffe der Äquivalenz und der Klasse wie früher auf Grund ganzzahliger linearer Einheitssubstitutionen definiert.

Die Endlichkeit der Klassenanzahl hat *Jordan* bewiesen[102]).

Ordnung und Geschlecht sind von *Poincaré* definiert worden: zwei Klassen von Formen gehören in dieselbe *Ordnung*, wenn sie übereinstimmen in den grössten gemeinsamen Teilern ihrer Koeffizienten und der Koeffizienten ihrer entsprechenden In- und Kovarianten,

---

101) *Lagrange,* Add. aux élém. d'algèbre d'Euler § 9 = Oeuvres 7, p. 164; *Dirichlet,* Par. C. R. 10 (1840), p. 286 = Werke 1, p. 619; Berl. Ber. 1841, p. 280 = Werke 1, p. 625; ibid. 1842, p. 93 = Werke 1, p. 633; ibid. 1846, p. 103 = Werke 1, p. 639; *G. Libri,* Par. C. R. 10 (1840), p. 311, 383; *J. Liouville* p. 381; *Hermite,* J. f. Math. 40 (1850), p. 291 u. 308; *H. Poincaré,* Par. C. R. 92 (1881), p. 777; Par. Soc. math. Bull. 13 (1885), p. 162.

101a) *Hermite,* J. f. Math. 47 (1854), p. 339.

102) *C. Jordan,* Par. C. R. 88 (1879), p. 906; 90 (1880), p. 1422; J. éc. pol. 29, cah. 48 (1880), p. 111.

die Koeffizienten einmal mit, das andremal ohne die Polynomialkoeffizienten genommen [I B 2, Nr. **16**]; zwei Klassen gehören in dasselbe *Geschlecht*, wenn sie für jede ganze Zahl als Modul einander kongruent sind[103]).

2) Insbesondere sind kubische ternäre und quaternäre Formen von *Poincaré* betrachtet worden[104]).

3) Über die Darstellung ganzer Zahlen durch gegebene Formen sind vor allem die (unbewiesenen) Sätze von *Waring* zu erwähnen: Jede ganze Zahl ist die Summe von höchstens 9 Kuben und von höchstens 19 Biquadraten. Über Darstellungen durch Zahlen von der Form $\frac{ax^2+bx}{2}$, $\frac{ax^4+bx^2}{2}$ und $ax^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x$ hat *Maillet* einige Sätze gegeben[105]).

4) Über die Darstellung von Potenzen als Summen von Potenzen bestehen die Sätze: Keine Summe (Differenz) von 2 Kuben kann ein einfacher, doppelter oder vierfacher (*Delannoy*) Kubus sein; eine Summe von drei Kuben kann ein Kubus oder ein doppelter Kubus sein; eine Summe von drei und nicht weniger Biquadraten kann ein Quadrat oder ein doppeltes Quadrat sein; eine Summe von 5 Biquadraten kann ein Biquadrat sein (*Martin*); eine Summe von 6 (*Martin*), aber keine Summe von 2 fünften Potenzen kann eine fünfte Potenz sein[106]); eine Summe von 2 n^{ten} Potenzen $(n>2)$ kann keine n^{te} Potenz sein (*Fermat*) [vgl. I C 4 b, Nr. **14**].

5) In Bezug auf die Darstellung der Null durch gegebene Formen hat man diese Formen nicht nach dem Grade, sondern nach dem

103) *H. Poincaré,* Par. C. R. 94 (1882), p. 67, 124; Par. Soc. math. Bull. 13 (1885), p. 162 (Darst. v. Zahlen durch geg. Formen).

104) *H. Poincaré,* Par. C. R. 90 (1880), p. 1336; J. éc. pol. 50 (1883), p. 199; 51 (1883), p. 45; 56 (1886), p. 79 [I B 2, Anm. 434].

105) *E. Waring,* Medit. alg., Cambr. 1782, p. 349; *Jacobi,* J. f. Math. 42 (1851), p. 41 = Werke 6, p. 322; *A. R. Zornow* 14 (1835), p. 276; *S. Realis,* Nouv. corr. math. 4 (1878), p. 209; *Ed. Lucas* p. 323; Nouv. Ann. (2) 17 (1878), p. 536; *Ed. Maillet,* Assoc. frç. Bord. 24 (1895), p. 242; J. de math. (5) 2 (1896), p. 363; Par. Soc. math. Bull. 23 (1895), p. 40.

106) *Euler*, Algebra 2^2, Kap. 13, 15; *Legendre,* Théor. des nombr. 4, § 1, art. 333 = 2, p. 11 der deutschen Ausgabe; 6, § 3 u. 4 = 2, p. 348 u. 352 der deutschen Ausgabe; *Dirichlet,* J. f. Math. 3 (1828), p. 354 = Werke 1, p. 1 u. 21; *D. S. Hart*, Educ. Times 14 (1871), p. 86; *Hermite,* Nouv. Ann. (2) 11 (1872), p. 5; *F. Proth,* Nouv. corr. math. 4 (1878), p. 179; *E. Lucas* p. 323; *E. Catalan* p. 352, 371; *A. Desboves* 6 (1880), p. 34; *Th. Pepin,* Rom. N. Linc. Pont. A. 34 (1881), p. 73; *A. Martin,* Educ. Times 50 (1889), p. 74; Chic. Congr. Pap. 1896 [1893], p. 168; *H. Delannoy,* J. de math. élém. (5) 21 (1897), p. 58; *Fermat,* Observ. sur Dioph. = Oeuvres 1, p. 291.

Geschlechte (im Sinne *Riemann*'s, s. II B 2; III C 2, 5) zu ordnen. Insbesondere kann eine ternäre Gleichung $f(x, y, z) = 0$ vom Geschlecht Null arithmetisch-rational auf eine solche Gleichung vom zweiten Grade oder also auf die Gleichung $y^2 = ax^2 + bx + c$ transformiert werden, welche nach Nr. d, 9 ff. vollständig auflösbar ist[107]). Dagegen ist bisher nicht bewiesen, ob eine ternäre Gleichung vom Geschlecht Eins auf eine ternäre kubische Gleichung oder auf eine Gleichung $y^2 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ zurückkommt[108]).

6) Auf eine besondere Art „*Diophantischer*" Gleichungen [I C 1, Nr. 7] weist *Kronecker* hin. Die Aufgabe, alle Gleichungen eines bestimmten Affektes [I B 3 b, Nr. 20] aufzustellen, erfordert die Auflösung derjenigen ganzen ganzzahligen Gleichung

$$\Phi(g, f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0,$$

durch welche die Affektfunktion g mit den elementaren symmetrischen Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ verbunden ist. Für den Fall einer cyklischen Funktion g hat *Kronecker* die Aufgabe gelöst[109]).

7) Bezeichnet man mit $D(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ die Diskriminante [I B 1 b, Nr. **18**; I B 2, Nr. **25**] der Gleichung

$$x_0 t^n + x_1 t^{n-1} + \cdots + x_n = 0,$$

so ist die ganze ganzzahlige Diophantische Gleichung

$$D(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \pm 1$$

stets in rationalen Zahlen, in ganzen Zahlen nur für die Gleichungen auflösbar:

$$\begin{matrix} (ut + v)(u't + v') = 0 \\ (ut + v)(u't + v')(u''t + v'') = 0. \end{matrix} \quad {}^{110)} \quad \begin{pmatrix} uv' - u'v = \pm 1 \\ u + u' + u'' = v + v' + v'' = 0 \end{pmatrix}$$

107) *A. Hurwitz* und *D. Hilbert,* Acta math. 14 (1890/1891), p. 217.

108) Über die zahlreichen Behandlungen besonderer ternärer kubischer und der Gleichungen $y^2 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ vgl. I C 1, Nr. 7.

109) *Kronecker,* Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, Berlin 1882, p. 38 = J. f. Math. 92 (1882), p. 38 = Werke 2, p. 289; Berl. Ber. 1853, p. 371.

110) *Hilbert,* Gött. Nachr. 1897, p. 48.

I C 3. ANALYTISCHE ZAHLENTHEORIE

VON

PAUL BACHMANN

IN WEIMAR.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

S. unter I C 1. Das einzige bisher vorhandene Lehrbuch über das Gebiet ist *P. Bachmann,* Zahlentheorie 2. Teil: Die analytische Zahlentheorie, Leipzig 1894. Vgl. *Lej.-Dirichlet,* Vorl. herausg. v. *Dedekind,* 4. Aufl., Braunschweig 1894.

1. Zerfällung der Zahlen (ihre additiven Darstellungen). *Die analytische Zahlentheorie* giebt die zahlentheoretischen Untersuchungen, die auf analytischen Betrachtungen beruhen, elliptische Funktionen ausgeschlossen, worüber I C 6, II B 6 a zu sehen. Solche stellte zuerst *L. Euler* an *in zweifacher Richtung.*

Erstens[1]). Die additive Darstellung der Zahlen aus Teilen bestimmter Art (*Zerfällung, partitio numerorum*) ruht auf der Entwick-

1) *L. Euler,* Introd. in anal. infin. 1, Laus. 1748, deutsch von *A. C. Michelson,* Berl. 1788/90, *H. Maser,* Berl. 1885, cap. 16 oder Comment. arithm. coll. 1, p. 73, 391 = Petrop. N. Comm. 3, 1750/51, p. 125; 14, 1769, p. 168.

lung unendlicher Produkte[2]), wie $\prod\limits_{i=1}^{\infty}(1+x^i z)$, $\prod\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^i z}$ u. s. w. nach den Potenzen von x und z. So folgen u. a. die *Sätze:* Jede positive ganze Zahl kann ebenso oft in verschiedene, als in gleiche oder verschiedene aber ungerade Summanden, und so oft in h verschiedene Summanden zerfällt werden, als sie in die ersten h mindestens einmal genommenen Zahlen zerfällt[3]). Ferner der *Pentagonalzahlensatz:* Die Anzahl der Zerfällungen von n in eine gerade Anzahl ist gleich der Anzahl derjenigen in eine ungerade Anzahl verschiedener Summanden, ausser wenn $n=\frac{3h^2+h}{2}$, wo für h gerade oder ungerade sie um 1 grösser resp. kleiner ist[4]). *K. G. J. Jacobi* gewann mittels elliptischer Funktionen, später direkt eine Gleichung[5]), aus der Sätze über die Anzahl der Zerlegungen einer Zahl $24k+3$ in die Summe dreier Quadratzahlen [I C 2, Nr. **d**, 7)] fliessen. Auch bewies er (J. f. Math. 32, 1846, p. 164 = Werke 6, p. 303), später *F. Franklin* (Par. C. R. 92, 1881, p. 448) den Pentagonalzahlensatz *arithmetisch*, wie *K. Th. Vahlen*[6]) eine Menge Sätze über bestimmte Zerfällungen und die Beziehungen der betreffenden Anzahlen zu einander. Z. B.: Unter den Zerfällungen von n in verschiedene Summanden, bei welchen die Summe der absolut kleinsten Reste (mod. 3) der letztern h ist, giebt es gleichviel in eine gerade wie in eine ungerade Anzahl Summanden, ausser wenn $n=\frac{3h^2-h}{2}$, wo für gerades oder ungerades h es eine gerade resp. ungerade mehr giebt. *Euler*'s betreffender Satz folgt durch Summation über die zulässigen h. Auch findet so u. a. *Vahlen* eine von *J. Liouville* [J. de math. (2) 1, 1856, p. 349] gegebene Rekursionsformel für die Teilersumme ungerader Zahlen.

Euler gab für die Summe $\int(n)$ [I C 1, Nr. **1**] aller Teiler von n die Formel:

---

2) Über die Konvergenz solcher Produkte s. *A. Pringsheim,* Math. Ann. 33, 1889, p. 119; s. auch I A 3, Nr. **42**.

3) Zur Bestimmung der Anzahl der Zerfällungen von n in h gleiche oder verschiedene Summanden aus der Reihe $1, 2, \ldots, m$ haben *F. Brioschi, J. J. Sylvester, P. Volpicelli* (Ann. sci. mat. fis. 8 (1857), p. 5, 12, 22) und *Faà di Bruno* (J. f. Math. 85 (1878), p. 317, Math. Ann. 14 (1879), p. 241) Methoden gegeben.

4) *Euler,* Petr. N. Comm. 3 (1750/51), p. 125 = Comm. Ar. 1, p. 73 und 5 (1754/55), p. 75 = Comm. Ar. 1, p. 234. Historische Angaben darüber bei *Jacobi,* J. f. Math. 32 (1846), p. 164 = Werke 6, p. 303.

5) J. f. Math. 21 (1840), p. 13 = Werke 6, p. 281.

6) *K. Th. Vahlen,* J. f. Math. 112 (1893), p. 1.

$$\int(n) = \sum_h (-1)^{h-1}\left[\int\left(n - \frac{3h^2+h}{2}\right) + \int\left(n - \frac{3h^2-h}{2}\right)\right],$$

wo $\int(0) = n$, wenn n Pentagonalzahl. Solche Formel besteht auch für die Anzahl $\Gamma(n)$ der Zerfällungen von n in gleiche oder verschiedene Summanden und man hat

$$\int(n) = \sum_h (-1)^{h-1} \cdot \frac{3h^2+h}{2} \cdot \Gamma\left(n - \frac{3h^2+h}{2}\right).$$ [7]

Aus einem von *J. W. L. Glaisher* (Mess. (2) 20, 1891, p. 129) gegebenen allgemeinen Satze fliessen (Phil. Mag. (5) 33, 1892, p. 54) die schon früher (Quart. J. 19, 1883, p. 220 resp. Lond. M. Soc. Proc. 15, 1884, p. 110) von ihm, die erstere schon von *G. Halphen* (Par. Soc. M. Bull. 5, 1877, p. 158) mitgeteilten Formeln

$$\sum_h (-1)^h \cdot (2h+1) \int\left(n - \frac{h(h+1)}{2}\right) = 0,$$

$$\sum_h \delta\left(n - \frac{h(h+1)}{2}\right) = 0,$$

wo $\delta(n)$ Überschuss der Summe der ungeraden über die der geraden Teiler von n, $\int(0) = \frac{n}{3}$, $\delta(0) = -n$. S. dazu Mess. (2) 7, 1877, p. 66. In Mess. (2) 20, 1891, p. 129 giebt *Glaisher* eine Formel für

$$\sum_h (-1)^h \cdot (2h+1) \cdot \int_m \left(n - \frac{h(h+1)}{2}\right),$$

$\int_m(n)$ die Summe m^{ter} Potenzen aller Teiler von n, m ungerade, welche die Summen ungerader Potenzen gewisser Zahlen mit den Summen gerader Potenzen der natürlichen Zahlen verbindet; ebend. p. 177 werden die letzteren eliminiert. Vgl. [7]) Mess. (2) 21, auch wegen der Beziehungen zwischen der Funktion $\int(n)$ und der Anzahl der Darstellungen einer Zahl als Summe von 2, 3, 5 Quadraten. Vom Überschuss der Anzahl der Teiler $2h$, $4h+1$, $3h+1$ einer Zahl n über die ihrer Teiler $2h+1$, $4h+3$, $3h+2$ resp. handelt *Glaisher*, Cambr. Proc. 5, 1884, p. 108; vgl. Lond. M. Soc. Proc. 15, 1884, p. 104; 21, 1890, p. 395; Quart. J. 20, 1884, p. 97.

Die Zerfällung einer Zahl n in m Teile gehört im Grunde als

---

7) *Euler,* Petr. N. Comm. 5, p. 59, 75 = Comm. Ar. 1, p. 146, 234; *Ch. Zeller,* Acta Math. 4 (1884), p. 415 und *M. A. Stern,* ebend. 6 (1885), p. 327; auch *J. Sylvester,* Par. C. R. 96 (1883), p. 674, 1110, 1276; *J. W. L. Glaisher,* Lond. M. Soc. Pr. 22 (1891), p. 359; Mess. (2) 21 (1891), p. 47, 49, 122. Andere Sätze über Zerfällungen folgen aus Formeln, welche bei *V. A. Lebesgue*, J. de math. 5 (1840), p. 42 hergeleitet werden.

einfacher Fall einer Kombinationsaufgabe (s. *P. A. Mac-Mahon*, Combinatory analysis, a review of the present state of knowledge, Lond. M. Soc. Proc. 1897, p. 9) der kombinatorischen Analysis an [I A 2, Nr. 8]. In dieser Zugehörigkeit sind die verschiedenen Probleme der Zerfällung zumeist von englischen Mathematikern, vornehmlich von *J. Sylvester, A. Cayley, P. A. Mac-Mahon* betrachtet worden. Ersterer gab in seinen Outlines of seven lectures on the partition of numbers (Lond. Vorles. 1859), Lond. M. Soc. Proc. (28) 1897, p. 33, eine Skizze seiner wesentlichsten Gesichtspunkte, Methoden und Resultate; vgl. dazu besonders Quart. J. 1, 1857, p. 81 u. 141 und Amer. J. of Math. 5, 1882, p. 251. Übrigens sind die betreffenden Arbeiten und Beweise dieses Forschers mit Vorsicht aufzunehmen. Er nennt die Anzahl Arten, wie oft n aus gegebenen positiven ganzzahligen Elementen $a, b, \ldots, l$ additiv zusammengesetzt werden kann, d. i. die Anzahl positiver ganzzahliger Lösungen der Gleichung

$$ax + by + \cdots + lt = n, \tag{1}$$

die *Quotity* von n mit Bezug auf jene Elemente oder den *Denumerant* $\frac{n;}{a, b, \ldots l;}$ dieser Gleichung; sie ist der Koeffizient von x^n in der Entwicklung von [I B 2, Nr. 9]

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)\cdots(1-x^l)}.$$

Diese Anzahl Q kann in der Form $A + U$ dargestellt werden, wo A eine ganze algebraische Funktion [I B 1 c, Nr. 2, 3] von n und den Elementen, U aber aus Ausdrücken zusammengesetzt ist, in denen Einheitswurzeln auftreten; oder auch in der Form $Q = \Sigma_q W_q$, wo (die „*wave*“) W_q den Koeffizienten von $\frac{1}{z}$ in der aufsteigenden Entwicklung der auf alle primitiven q^{ten} Einheitswurzeln ϱ bezogenen Summe

$$\sum \frac{(\varrho e^z)^n}{\left[1-\left(\frac{1}{\varrho e^z}\right)^a\right]\cdots\left[1-\left(\frac{1}{\varrho e^z}\right)^l\right]}$$

bedeutet; W_q ist nur dann von Null verschieden, wenn q in einem oder mehreren der Elemente aufgeht; W_1 ist A. — *Cayley* gab (Lond. Trans. 145, 1856 I (1855), p. 127 = Coll. Papers 2, p. 235) für diese Anzahl, die er $P(a, b, \ldots, l)n$ nennt, einen andern Ausdruck mittels seiner „*prime circulators*“; ist nämlich $a_i = 1$, wenn $i \equiv 0$ (mod. a), sonst $a_i = 0$, so heisst

$$(A_0, A_1, \ldots, A_{a-1}) \text{ clor } a_i = A_0 a_i + A_1 a_{i-1} + \cdots + A_{a-1} a_{i-a+1}$$

eine *circulating function* (*J. Herschel*, Lond. Trans. 140, 1850 II, p. 399), und ein *prime circulator*, wenn, so oft b ein Teiler von $a = bc$,

$$A_i + A_{b+i} + A_{2b+i} + \cdots + A_{(c-1)b+i} = 0$$
$$(\text{für } i = 0, 1, 2, \ldots, b-1).$$

Auf dieselbe Anzahl lassen sich die Anzahl $P(0, 1, 2, \ldots, k)^m n$, wie oft n aus m Gliedern der Reihe $0, 1, 2, \ldots, k$ (mit Wiederholungen) additiv entsteht, d. i. der Koeffizient von $x^n z^m$ in $\frac{1}{(1-z)(1-xz)\cdots(1-x^k z)}$, sowie der Koeffizient desselben Gliedes in $\frac{1-x}{(1-z)(1-xz)\cdots(1-x^k z)}$ zurückführen. *Sylvester*'s Ausdruck lässt sich aus dem, mittels des Cauchy'schen Résidu-Begriffes [II B 1] gewonnenen Satze: „Ist $F(x)$ eine gebrochene Funktion,

$$F(x) = \sum_{\lambda, \mu} \frac{c_{\lambda,\mu}}{(a_\lambda - x)^\mu} + \sum_i \frac{\gamma_i}{x^i},$$

so ist das Résidu von $\sum\limits_\lambda F(a_\lambda e^x)$ gleich dem konstanten Teile von $-F(x)$“, herzuleiten und geht bei Benutzung der circulating functions in den Cayley'schen über. Die Anzahl Q ergiebt sich auch aus dem algebraischen Ausdrucke der über alle Lösungen der Gleichung (1) ausgedehnten Summe $\sum x^\alpha y^\beta \ldots t^\lambda$ [*Sylvester* in Phil. Mag. (4) 16, 1858, p. 371] für $\alpha = \beta = \cdots = \lambda = 0$. Vgl. ferner *Glaisher*, British Assoc. Report 1874.

J. Hermes, Math. Ann. 47, 1896, p. 281 betrachtet eine Funktion $E_{s,t}(n)$, welche die Anzahl der Zerfällungen einer Zahl in eine bestimmte Anzahl Summanden als besonderen Fall umfasst.

In seiner Dissertation, Halle 1899, giebt *H. Wolff* für die Anzahl $F_\mu(n)$ der Zerlegungen einer ganzen Zahl n in μ positive ganzzahlige Summanden mit vorgeschriebener Grössenordnung einen Ausdruck, der sich als Summe von Produkten aus Potenzen von n in gewisse Divisionsreste von n charakterisieren lässt, und zeigt, wie hier die Koeffizienten von $F_\mu(n)$ mittels Bernoulli'scher Funktionen [II A 3, Nr. **18**] linear durch diejenigen von $F_{\mu-1}(n)$ dargestellt werden können.

Schon *Euler* (Comm. Ar. 1, p. 400) hat einen Prozess (regula Virginum) angedeutet zur Zerfällung der *bipartite numbers* (s. weiter unten), d. h. zur gleichzeitigen Zerfällung zweier Zahlen n, n' in vorgeschriebene Gruppen a, a'; b, b'; $\ldots l, l'$ oder zur Lösung des Systems

$$\begin{aligned} ax + by + \cdots + lt &= n, \\ a'x + b'y + \cdots + l't &= n' \end{aligned} \tag{2}$$

in positiven ganzen Zahlen. Die Anzahl der Lösungen ist der Koeffizient von $x^n y^{n'}$ in der Entwicklung des Produktes

$$\frac{1}{(1-x^a y^{a'})(1-x^b y^{b'})\cdots(1-x^l y^{l'})}.$$

Cayley bestimmte ihn (Phil. Mag. (4) 16, 1858, p. 337 = Coll. Papers 4, p. 166) für den Fall, dass $\frac{a}{a'}$, $\frac{b}{b'}$, ... ungleiche reduzierte Brüche sind. *Sylvester* hat durch direkte Behandlung der Gleichungen (2) sowie allgemeiner eines Systems von beliebig vielen solchen Gleichungen gefunden, dass deren Lösung stets auf diejenige einfacherer Systeme von einer normativen Beschaffenheit, und letztere auf die Lösung einzelner Gleichungen zurückgeführt werden kann; doch hat er darüber nur kurze Angaben publiziert (Quart. J. 1, 1857, p. 81, 141; Phil. Mag. (4) 16, 1858, p. 371 und seine oben bezeichneten Outlines). Auch graphische Methoden hat er angewendet, um zu Sätzen über Zerfällung von Zahlen, z. B. zu den Euler'schen Sätzen zu gelangen; s. darüber ausser den angeführten Schriften Par. C. R. 96, 1883, p. 743, 1110. Vgl. auch die Bestimmung der Anzahl ganzzahliger Lösungen des besonderen Systems zweier Gleichungen:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r, \quad 1x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = n$$

bei *E. Sadun*, Ann. di mat. (2) 15, 1887, p. 209; ferner *David*, J. de math. (3) 8, 1882, p. 61; *B. Pomey*, N. Ann. (3) 4, 1885, p. 408.

Bei den Zerfällungen sind *partitions* und *compositions* zu unterscheiden, je nachdem die Teile nur an sich oder auch mit ihrer Ordnung berücksichtigt werden. *Mac-Mahon* untersuchte (Lond. Trans. 184 A, 1893, p. 835; 185 A, 1894, p. 111 und 187 A, 1896, p. 619) die einen und die andern bei *multipartite numbers* $\alpha\beta\gamma\ldots$, d. h. bei Zahlen, welche aus $\alpha+\beta+\gamma+\cdots$ Zahlen bestehen, von denen α von einer ersten, β von einer zweiten u. s. w. Art sind (z. B. ist eine *m-zifferige* Zahl m-partite), und gab eine grössere Reihe zugehöriger erzeugender Funktionen. An drittgenannter Stelle findet sich u. a. der Satz: die Anzahl der Zerfällungen aller Zahlen in höchstens q Teile $\overline{\gtrless} p$ ist der Koeffizient von $a^q x^{pq}$ in der Entwicklung von

$$\frac{1}{(1-a)(1-x)(1-ax)(1-ax^2)\cdots(1-ax^p)}$$

und gleich dem Binomialkoeffizienten $\binom{p+q}{p}$. Die erstgenannte Arbeit behandelt auch eine eigene Ausdehnung des Begriffs der Zerfällung; denkt man p Einheiten

$$1\ 1\ldots 1$$

und k algebraische Symbole (als deren eines auch das leere Feld zwischen zwei Einheiten gewählt werden darf) in die $p-1$ Zwischenräume gestellt, so gelten die so entstehenden Ausdrücke als „*Kombinationen k^{ter} Ordnung für die Zahl p*“, für welche die Anzahl der unter einander verschiedenen untersucht wird. „*Vollkommene Teilung*“ einer Zahl nennt *Mac Mahon* (Mess. (2) 20, 1890, p. 103) eine solche, die je eine Teilung jeder kleineren Zahl enthält (z. B. $7 = 4 + 1 + 1 + 1$), und giebt Bestimmungen ihrer Anzahl.

M. A. Stern nennt jede Summe verschiedener Glieder einer gegebenen Zahlenreihe eine „*Kombination*“ der letztern und sagt, n komme unter diesen Kombinationen m-mal vor, wenn m von ihnen $\equiv n$ (mod. p, p ungerade Primzahl). Im J. f. Math. 61, 1863, p. 66 (s. auch p. 334) giebt er die Gesetze solches Vorkommens für die Zahlenreihen $1, 2, \ldots, p-1$ und $1, 2, \cdots, \frac{p-1}{2}$, sowie für die Reihe der quadratischen Reste (mod. p).

2. Dirichlet'sche Reihen und Methoden, Gauss'sche Summen. *Zweitens* ging *Euler* von einer Gleichheit aus, wie diese:

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p [1 + f(p) + f(p^2) + \cdots];$$

(p durchläuft alle Primzahlen)

vorauszusetzen ist $f(1) = 1$, $f(nn') = f(n) \cdot f(n')$ für relativ prime n, n' und dass die Reihe der absoluten Beträge der $f(n)$ konvergiert. Gilt die zweite Voraussetzung für alle n, n', so ist $\prod_p \frac{1}{1 - f(p)}$ die rechte Seite von (1). Z. B. ist, wenn der reelle Bestandteil von s grösser als 1, die „*Riemann'sche Funktion*“

$$(2) \qquad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}};$$

(*Euler*, Introd. in anal. infinit. 1, Kap. 15)[8]). Allgemeinere Beispiele betrachtete *P. G. Lejeune-Dirichlet*, Berl. Abh. 1837, p. 45 = Werke 1, p. 313. Sie sind von der Form $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{c_n^s}$, wo c_n eine positive, mit n unendlich wachsende Grösse, a_n reell oder komplex ist (*Dirichlet'sche Reihen*), sind für alle positive s gleichmässig konvergent [II A 1, Nr. **16**, **17**] und stetige [II A 1, Nr. **9**] Funktionen von s, sobald

8) Die Werte von $\zeta(s)$ für $s = 2, 3, \cdots, 35$ s. bei *A. M. Legendre*, Traité des fonct. ell. et des intégr. Eulériennes 2, Par. 1827/32, p. 432; korrekter und bis $s = 70$ ausgedehnt bei *T. J. Stieltjes*, Acta math. 10 (1887), p. 299 [vgl. auch II A 3, Fussn. 156 u. 158].

$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ für $n = \infty$ endlich; die nach s genommene Ableitung ist $-\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{\log c_n}{c_n^s}$ und wieder für alle positive s stetig. So folgt z. B.

$$\lim_{\varrho=0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n}.$$

Weitere Sätze über Dirichlet'sche Reihen gab *R. Dedekind*[9]), *A. Pringsheim*[9]) sehr allgemeine Kriterien über ihre Konvergenz, in denen jene mitbegriffen sind. Man schliesst daraus den für *Dirichlet*'s *„analytische Methoden" fundamentalen Satz:* Sind $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ solche positive, mit n unendlich wachsende, der Grösse nach geordnete Werte, dass, wenn T die Anzahl derselben, die $\overline{\gtrless}\, t$ sind, $\frac{T}{t}$ bei stetig wachsendem t eine Grenze $\omega > 0$ hat, so konvergiert $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n^{1+\varrho}}$ für jedes positive ϱ, und $\lim_{\varrho=0} \varrho S$ ist ω.[10]) Was schon *Euler* aus (2) für die natürliche Zahlenreihe, schloss *Dirichlet* für *die arithmetische Progression* $Mx + N$, wo M, N relativ prim: dass sie unendlich viele Primzahlen enthält[11]). Auch jede eigentlich primitive binäre quadratische Form, deren Determinante $\gtrless 0$, stellt unendlich viele, in einer gegebenen, den Charakteren der Form entsprechenden Progression enthaltene Primzahlen dar[12]) [I C 2, Nr. c, 12)]. Den hierbei fundamentalen Umstand, dass gewisse Dirichlet'sche Reihen nicht Null sind,

---

9) *Dirichlet*'s Vorles. üb. Zahlenth., her. v. *Dedekind,* 4. Aufl. 1894, Suppl. IX; *A. Pringsheim,* Math. Ann. 37 (1890), p. 38, auch 33 (1888), p. 119 und 35 (1890), p. 297.

10) *Dirichlet,* J. f. Math. 19 (1839), p. 324 u. 21 (1840), p. 1, 134, sowie ebend. 53 (1857), p. 130 [= J. de math. (2) 1, p. 80] = Werke 1, p. 411; 2, p. 195. Die Herleitung eines wichtigen Spezialfalles aus der Theorie der Mittelwerte s. bei *E. Cesàro,* Ann. di mat. (2) 14 (1886), p. 141 („fonctions énumératrices") [s. Nr. 3].

11) *Dirichlet,* Berl. Abh. 1837, p. 45 = Werke 1, p. 313. *Legendre*'s Versuch (Essai sur la th. d. n. 2, § 9), diesen Satz zu beweisen, stützt sich auf einen Induktionssatz, den *A. Piltz* (Habilitationsschrift, Jena 1884) als falsch nachgewiesen hat. *E. Wendt* bewies den Satz arithmetisch für die Progression $Mx + 1$ (J. f. Math. 115 (1895), p. 85), *Dirichlet* bewies ihn auch für Progressionen mit komplexen Elementen (Berl. Abh. 1841, p. 141 = Werke 1, p. 509).

12) *Dirichlet,* Berl. Ber. 1840, p. 49 (5. März) (= J. f. Math. 21, p. 98) und Par. C. R. 10 (1840), p. 285 = Werke 1, p. 497, 619; *H. Weber,* Math. Ann. 20 (1882), p. 301; *Arn. Meyer,* J. f. Math. 103 (1888), p. 98.

stellte *Dirichlet* durch das Reziprozitätsgesetz und die Klassenanzahl quadratischer Formen fest, *F. Mertens* durch elementare Sätze über Multiplikation von Reihen; dieser ergänzte den Satz über die Progression durch Angabe von Grenzen, zwischen denen wenigstens eine ihrer Primzahlen vorhanden sein muss [13]).

Für *Dirichlet's* analytische Behandlung der Theorie der quadratischen Formen ist Grundlage eine zweifache Abzählung der positiven ganzen Zahlen, die durch ein System eigentlich primitiver Formen $ax^2+2bxy+cy^2$ mit der Determinante D darstellbar sind [I C 2, Nr. c, 5)]. Ist $\tau=1,4,2$, jenachdem $D>0$, -1, <-1 ist, so ist bei beliebiger Funktion F

$$\tau\cdot\sum f(m)\,F(m)=\sum F(ax^2+2bxy+cy^2)+\cdots,$$

links durchläuft m alle positiven ganzen Zahlen, rechts x, y in jeder der Summen (deren so viele sind als Formen des Systems) für $D<0$ alle ganzen Zahlen, für $D>0$ alle diejenigen, welche die betreffende Form positiv und $0 \overline{\gtrless} y < \frac{aUx}{T-bU}$ (T, U „*Fundamentalauflösung*" von $t^2-Du^2=1$ [I C 2, Nr. c, 2)]) machen; $\tau f(m)$ ist die Anzahl aller so hervorgehenden Darstellungen von m durch die Formen des Systems [14]). Die rein formale Beziehung wird für $F(m)=\frac{1}{m^s}$, $s>1$, zu einer quantitativen, aus der Sätze folgen, wie dieser (für $D=-1$ schon bei *Jacobi*, J. f. Math. 12, 1834, p. 167 = Werke 6, p. 245): Ist $D<0$, so ist $f(n)$ für eine positive, zu $2D$ prime Zahl n der Überschuss der Anzahl der Teiler d von n, für welche $\left(\frac{D}{d}\right)=1$, über die Anzahl derer, für welche $\left(\frac{D}{d}\right)=-1$.

Die Bestimmung der Klassenanzahl stützt sich auf die *Gauss'schen Summen* [vgl. auch II A 3, Nr. **20**]:

$$\varphi(m;\,n)=\sum_{s=0}^{n-1} e^{s^2\cdot\frac{m\pi i}{n}}$$

(nach *Kronecker*, Berl. Ber. 1880, p. 686, $G\left(\frac{-mi}{n}\right)$), besonders auf die Beziehungen:

13) *F. Mertens*, Wien. Ber. 104 (1895), p. 1093, 1159; J. f. Math. 117 (1897), p. 169; Wien. Ber. 106 (1897), p. 254.

14) Für quadratische Formen $ax^2+bxy+cy^2$ erhält die Formel abweichende Gestalt und führt zu manchen Vereinfachungen; s. *L. Kronecker*, Berl. Ber. 30./7. 1885, p. 761; *H. Weber*, Gött. Nachr. 1893, p. 46, 138, 245.

$$\varphi(2\mu;\ 2^\alpha) = \left(\frac{2}{\mu}\right)^\alpha \cdot \left(1 + i(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}\right) \cdot 2^{\alpha/2} \qquad (\alpha > 1),$$

$$\varphi(2\mu;\ n) = +\sqrt{n} \cdot \left(\frac{\mu}{n}\right) i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2},$$

wenn n prim zu 2μ, oder — auch wenn n nicht prim zu μ, wo dann $\left(\frac{\mu}{n}\right) = 0$ ist —

$$\sum_{s=1}^{n-1} \left(\frac{s}{n}\right) e^{\frac{2s\mu\pi i}{n}} = +\sqrt{n} \cdot \left(\frac{\mu}{n}\right) i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}.$$

Diese Formel, bei welcher die Vorzeichenbestimmung das Schwierigste war, gab für $n = p$ (ungerade Primzahl) *K. F. Gauss*[15]), indem er mittels zweier eigentümlichen Reihen die Summe $\sum_{h=0}^{p-1} r^{h^2}$ (r eine p^{te} Einheitswurzel) in das Produkt

$$(r - r^{-1})(r^3 - r^{-3}) \cdots (r^{p-2} - r^{-p+2})$$

verwandelte. *V. A. Lebesgue*[16]) erreichte dasselbe mittels elliptischer Funktionen, einfacher *A. Cauchy*[17]) und aus gleichem Grundgedanken *Kronecker*[18]). *Dirichlet*[19]) ermittelte die Gauss'schen Summen durch bestimmte Integrale. So findet sich auch

$$\text{(I)} \qquad \varphi(\varepsilon\lambda;\ 2\nu) = \left(\sqrt{\frac{2\varepsilon\nu i}{\lambda}}\right) \cdot \varphi(-2\varepsilon\nu;\ \lambda),$$

wo $\varepsilon = \pm 1$, λ, ν relativ prim, $\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon\nu i}{\lambda}}\right)$ derjenige Wert der Quadratwurzel, dessen reeller Teil > 0; oder nach *Kronecker*[20])

$$(\sqrt{\varrho}) \cdot \frac{G(\varrho)}{G\left(\frac{1}{\varrho}\right)} = 1$$

für $\varrho = \frac{2\varepsilon\nu i}{\lambda}$. Diese Formel geht (s. ebenda) aus der für $ab = \pi$ giltigen:

$$a^{1/2}\left(\frac{1}{2} + \sum_{h=1}^{\infty} e^{-h^2a^2}\right) = b^{1/2}\left(\frac{1}{2} + \sum_{h=1}^{\infty} e^{-h^2b^2}\right),$$

---

15) *Gauss,* Gotting. Comm. rec. 1 (1811) = Werke 2, p. 9.

16) *Lebesgue,* J. d. math. 5 (1840), p. 42.

17) *Cauchy,* ebend. p. 154 = Par. C. R. 10 (1840), p. 560 = Oeuvres (1) 5, p. 152.

18) *Kronecker,* J. d. math. (2) 1 (1856), p. 392.

19) *Dirichlet,* J. f. Math. 17 (1837), p. 57 = Werke 1, p. 257.

20) *Kronecker,* Berl. Ber. 1880, p. 686; vgl. *Cauchy* a. a. O., sowie in Bull. soc. philomat. 1817, und *Lebesgue,* a. a. O. p. 186.

die ihrerseits der Formel für die lineare Transformation der Thetafunktionen [II B 6 a, Nr. **34**]:

$$\sqrt{x} \cdot \frac{1 + 2e^{-\pi x} + 2e^{-4\pi x} \dots}{1 + 2e^{-\frac{\pi}{x}} + 2e^{-\frac{4\pi}{x}} \dots} = 1$$

entspringt, durch einen Grenzübergang hervor. Folgt so aus letzterer (I) und der Wert der Gauss'schen Summen, so umgekehrt jene aus (I), sodass beide äquivalent sind. *Cauchy*'s Fundamentalsatz der Lehre von der komplexen Integration [II B 3] ist ihre gemeinsame Quelle. Direkt hat *Kronecker*[21]) die Summe $\varphi(2; n)$ und durch ähnliche Betrachtungen *G. Landsberg*[22]) auch die Reziprozitätsgleichung (I) aus jenem erhalten. Die Vorzeichenbestimmung leistete sehr einfach *F. Mertens*, Berl. Ber. 1896, p. 217; s. auch Wien. Ber. 103, 1894, p. 1005. Summen, den Gauss'schen analog aus trigonometrischen Funktionen gebildet, drückte *M. Lerch*, Prag. Böhm. Ber. 1897, durch die Klassenanzahl quadratischer Formen von negativer Determinante aus [I C 2, Nr. **c**, 10)].

Mittels solcher Hilfssätze fand *Dirichlet*

$$\lim_{\varrho=0} \varrho \sum \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{1+\varrho}} = \frac{\tau\vartheta}{2} \cdot \frac{\varphi(2\Delta)}{2\Delta},$$

Δ Absolutwert von D, ϑ kleinster positiver Wert von $\frac{1}{\sqrt{D}} \log\left(t + u\sqrt{D}\right)$ für alle Lösungen der Pell'schen Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ [I C 2, Nr. **c**, 2)]. Die Anzahl der Klassen quadratischer Formen mit der Determinante D ist demzufolge

$$H(D) = \frac{2}{\vartheta} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n}.$$

Durch Vergleichung von $H(DQ^2)$ mit $H(D)$ folgert *Dirichlet*[23]) für $D > 0$, dass es unendlich viele positive Determinanten mit gleicher Klassenanzahl giebt [I C 2, Nr. **c**, 10)]. Man kann $D = \pm 2^c PS^2$ setzen, wo P Produkt ungleicher, ungerader Primzahlen, $c = 0, 1$ ist; R sei Produkt derjenigen ungeraden Primzahlen, die in S, aber nicht in P aufgehen. Ist dann $\delta = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$, je nachdem $\pm P \equiv 1, 3 \pmod{4}$, resp. $c = 0, 1$ ist, so ist für jede positive zu $2D$ prime Zahl n:

---

21) *Kronecker*, J. f. Math. 105 (1889), p. 267.

22) *Landsberg*, ebend. 111 (1893), p. 234. Vgl. auch *Lebesgue*, J. d. math. 5 (1840), p. 42 u. 12 (1847), p. 497.

23) *Dirichlet*, Berl. Ber. 1855, p. 493; J. de math. (2) 1 (1856), p. 76; ebenda p. 80 = J. f. Math. 53 (1857), p. 127 = Werke 2, p. 183, 189, 195.

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \delta^{\frac{n-1}{2}} \cdot \varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}} \cdot \left(\frac{n}{P}\right), \quad \sum \left(\frac{D}{n}\right) = 0,$$

wenn n alle solche Zahlen $< 8PR$ durchläuft. Diese Sätze und *Gauss'* Summen führen durch rationale Integration [II A 2, Nr. 26] oder trigonometrische Reihen [II A 8] zu endlichen Ausdrücken für $H(D)$ von mannigfachster Gestalt[24]) und, je nachdem $D \gtrless 0$, von verschiedenem Charakter. Z. B. ist

1) wenn $D = -\Delta \equiv 1 \pmod{4}$ ist,

$$H(D) = \left(2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right) \cdot \frac{\Sigma b - \Sigma a}{P},$$

a, b die zu P primen Zahlen $< P$, für welche $\left(\frac{a}{P}\right) = 1$, $\left(\frac{b}{P}\right) = -1$; oder auch $H(D) = A - B$, A, B die Anzahl derjenigen a, b, die $< \frac{P}{2}$. Man folgert hieraus $\sum b > \sum a$, $A > B$ (s. I C 1, Nr. 6). Nach *Stern* (J. d. math. 5, 1840, p. 216) ist

$$\prod_a \operatorname{cotg} \frac{2a\pi}{P} = \pm (-1)^{H(-P)} \cdot \frac{1}{\sqrt{P}}, \qquad P \text{ Primzahl } 8\varkappa + 7,\ 3;$$

2) wenn $D > 0$, z. B. $D = +P \equiv 1 \pmod{8}$, besteht ein Zusammenhang mit der Kreisteilung. Ist

$$\prod_s \left(x - e^{\frac{2s\pi i}{P}}\right) = \frac{Y(x) \mp Z(x)\sqrt{P}}{2}, \quad s = \begin{cases} a \\ b \end{cases},$$

so führen[25]) die ganzen Zahlen $y = Y(1)$, $z = Z(1)$ zur *„Kreisteilungsauflösung"* [I C 4 b, Nr. 4] τ, v der Gleichung $t^2 - Pu^2 = 1$; ist T, U ihre Fundamentalauflösung und

$$\tau + v\sqrt{P} = (T + U\sqrt{P})^{\omega},$$

so ist $H(D) = (2 - \gamma)\,\omega$, $\gamma = 1, 0$, je nachdem P Primzahl oder nicht.

Dirichlet bestätigte ferner die Gauss'sche Formel $\Gamma(D) = \frac{H(D)}{2^{\varpi + \sigma - 1}}$, [$\varpi$ Anzahl der ungeraden Primfaktoren von D, $\sigma = 0, 2$ für $D \equiv 1 \pmod{4}$ resp. $D \equiv 0 \pmod{8}$, sonst $\sigma = 1$] für die Anzahl der Klassen in jedem Geschlechte quadratischer Formen von der Determinante D (J. f. Math. 19, 1839, p. 324 = Werke 1, p. 411), *Kronecker* (Berl. Ber. 1864, p. 285), der diese Herleitung modifizierte, ausserdem

---

24) S. darüber ausser *Dirichlet's* Abh., J. f. Math. 19 u. 21 [s. Anm. 10], und *Dedekind's* Darstellung derselben noch *V. Schemmel*, Diss. Breslau 1863, sowie *M. Lerch*, Bull. sci. math. astr. (2) 21 (1897), p. 290.

25) *Dirichlet*, J. f. Math. 17 (1837), p. 286 = Werke 1, p. 343.

noch, dass $t^2 - Du^2 = 1$ für $D > 0$ unendlich viele Auflösungen habe, die Anzahl der Klassen endlich sei und jede Klasse des Hauptgeschlechts durch Duplikation [I C 2, Nr. **c**, 11)] entstehe.

Dirichlet hat seine Untersuchungen auch auf Formen mit komplexen Elementen [I C 2, Nr. **c**, 13)], insbesondere zur Bestimmung ihrer Klassenanzahl, ausgedehnt (Berl. Ber. 1841, p. 190; J. f. Math. 24, 1842, p. 291 = Werke 1, p. 503, 533). Für eine reelle Determinante D ist sie gleich $2^{\varkappa-1} \cdot H(D)\, H(-D)$, wo H die Klassenanzahl für Formen mit reellen Elementen und $\varkappa = 2, 1$ ist, je nachdem $t^2 - Du^2 = -1$ reelle Lösungen hat oder nicht. S. eine Ergänzung dazu bei *P. Bachmann*, Math. Ann. 16, 1880, p. 537, sowie desselben „die Theorie der komplexen Zahlen etc.", Berlin 1867.

3. Zahlentheoretische Funktionen. Unter den Funktionen einer Zahl $n = p^a p'^{a'} p''^{a''} \cdots$ sind hervorzuheben:

die Anzahl ihrer Teiler, $t(n) = (a+1)(a'+1)(a''+1)\cdots$,

die Summe ihrer Teiler, $\int(n) = \frac{p^{a+1}-1}{p-1} \cdot \frac{p'^{a'+1}-1}{p'-1} \cdots$,

die Anzahl $\varpi(n)$ ihrer verschiedenen Primteiler, die Anzahl $p(n) = 2^{\varpi(n)}$ ihrer Zerlegungen in zwei relativ prime Faktoren, die *Euler'sche Funktion* [I C 1, Nr. **1**]

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p'}\right)\cdots,$$

die Funktionen $\pi(n) = pp'p''\ldots$, $\varepsilon(n) = (-1)^{a+a'+a''+\cdots}$ u. s. w. Die Funktion $\nu(n)$ [*E. Cesàro*, Liège Soc. R. Mém. (2) 10, 1883, p. 315] ist 0 oder $\log p$, je nachdem n aus mehreren Primfaktoren besteht oder Primzahlpotenz p^a ist; $\mu(n)$ ist ± 1 oder 0, je nachdem n aus ungleichen Primfaktoren (in gerader resp. ungerader Anzahl) besteht oder nicht (*A. F. Möbius*, J. f. Math. 9, 1832, p. 105 = Werke 4, p. 589, *F. Mertens*, ebend. 77, 1874, p. 289); die auf alle Teiler d von $n > 1$ erstreckte Summe $\sum \mu(d)$ ist Null. Der letztere Satz ist nur ein anderer Ausdruck dafür, dass im entwickelten Produkte $(1-p')(1-p'')\cdots(1-p^{(k)})$ gleichviel Glieder positives wie negatives Vorzeichen haben.

Die zahlentheoretischen Funktionen hängen eng mit der Riemannschen Funktion $\zeta(s)$ zusammen [26]. Da, wenn $h(n) = \sum f(d)\, g(\delta)$, $d\delta = n$ gesetzt wird,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}$$

26) S. *R. Lipschitz*, Par. C. R. 89 (1879), p. 985.

ist, findet sich

$$\zeta(s)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \quad \zeta(s)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t(n)}{n^s},$$

$$\zeta(s)\,\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int(n)}{n^s}, \quad \zeta(s)^{-1}\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s},$$

letzteres wegen $\sum d\mu(\delta) = \varphi(n)$. Andere Formeln dieser Art gab *G. Cantor*, Math. Ann. 16, 1880, p. 583 = Gött. Nachr. 1880, p. 161, und *Cesàro*, Note 7 seiner Arbeit in Liège Soc. R. Mém. (2) 10, 1883, p. 1. Aus der letzten Formel folgt die Beziehung $n = \sum \varphi(d)$, welche *Cantor* (a. a. O.) bedeutend verallgemeinert hat. Eine andere Verallgemeinerung derselben s. bei *E. Busche*, Math. Ann. 31, 1888, p. 70. Dieselbe Beziehung führt zur Dirichlet'schen Formel

$$\sum_{h=1}^{\infty} \varphi(h) \cdot \left[\frac{N}{h}\right] = \frac{N(N+1)}{2},$$

die aus der von *E. Busche*:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \varphi(h) \cdot \left[\Re\left(\frac{n}{h}\right) + \Re\left(\frac{n'}{h}\right) + \cdots\right] = \sum nn',$$

in welcher $\Re(x) = x - [x]$ ist, hervorgeht, wenn die N Zahlen $n, n', \ldots$ gleich 1 gewählt werden[27]).

Zur Herleitung von Beziehungen zwischen verschiedenen Funktionen dienen Identitäten wie diese:

1) Ist $F(x) = \sum_{h=1}^{[x]} f(h)$, so ist $\sum_{h=1}^{N} F\left(\frac{N}{h}\right) = \sum_{h=1}^{N} \left[\frac{N}{h}\right] \cdot f(h)$.

Für die Fälle $f(h) = t(h)$, $\int(h)$ und verwandte Funktionen gab *J. Hacks*, Acta Math. 9, 1887, p. 177, sowie 10, 1887, p. 1 Umformungen von $F(x)$ (s. *R. Lipschitz*, Par. C. R. 100, 1885, p. 845, besonders über zwei aus der Summe der geraden und der der ungeraden Teiler von n gebildete Funktionen $k(n)$, $l(n)$); aus ihnen folgt u. a. in den genannten beiden Fällen:

$$F(n) \equiv [\sqrt{n}], \quad F(n) \equiv [\sqrt{n}] + \left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right] \pmod{2}.$$

2) Ist $\psi(n) = \sum f(d)$, d Teiler von n, so ist

$$\sum_{h=1}^{N} \psi(h) = \sum_{h=1}^{N} \left[\frac{N}{h}\right] f(h) = \sum_{h=1}^{N} F\left[\frac{N}{h}\right].$$

---

27) *Dirichlet*, Berl. Abh. 1849, p. 69 = Werke 2, p. 49; *E. Busche*, Math. Ann. 31 (1888), p. 70.

Ist ebenfalls $\chi(n) = \sum g(d)$, so ist $\sum \chi(d) f(\delta) = \sum g(d) \psi(\delta)$, $d\delta = n$, eine Formel, welche noch verallgemeinert werden kann und zu einer Fülle besonderer Sätze führt (*Cesàro*, Note 2 und 5). Da $\sum p(d) = t(n^2)$, findet sich für $f(x) = p(x)$, $g(x) = \mu(x)$ die Formel $p(n) = \sum \mu(d)\, t(\delta^2)$. S. daneben *Mertens* (J. f. Math. 77, 1874, p. 292).

In einer grossen Reihe von Artikeln, meist unter dem Titel „Sur quelques fonctions numériques" (J. d. math. (2) von 2, 1857, an) gab *J. Liouville* eine Menge solcher Funktionssätze an. Die einfachsten haben Bezug auf die Zerlegungen $n = d\delta$ einer Zahl, z. B. ((2) 2 p. 141)

$$\sum \int(d) = \sum \delta\, t(d), \quad \sum \varphi(d)\, t(\delta) = \int(n),$$

$$\sum \int(d) \int(\delta) = \sum d\, t(d)\, t(\delta)$$

u. a. Andere ((2) 3, 1858, p. 143) beziehen sich auf die Zerlegungen

$$2n = n' + n'', \quad n = d\delta, \quad n' = d'\delta', \quad n'' = d''\delta''$$

für ungerade Zahlen n, n', n'' oder ((2) 3, p. 193, 241) auf die Zerlegungen

$$2^\alpha \cdot n = n' + n'', \quad 2^\alpha \cdot n = 2^{\alpha'} n' + 2^{\alpha''} n'', \quad \text{u. s. w.}$$

Insoweit für die betrachteten Funktionen $f(n') f(n'') = f(n'n'')$ bei relativ primen n', n'' ist, genügt es zum Beweise der Formeln, sie für $n = p^\alpha$ zu bestätigen. Einen Teil derselben bewies *Th. Pepin* [J. d. Math. (4) 4, 1888, p. 83, sowie auch Rom. N. Linc. Pont. A. 37, 1885, p. 9]. Aus ihnen fliessen mancherlei Folgerungen über die Anzahl der Zerlegungen einer Zahl in die Summe von Quadraten; J. de math. (2) 3, 1858, p. 143 *Jacobi*'s Satz betr. diejenigen von $4n$ in 4 Quadrate; (2) 4, 1859, p. 281 *G. Eisenstein*'s Satz betr. diejenigen von n in 6 Quadrate, u. a. S. J. d. math. (2) 11, 1866, p. 1 eine Formel für die Anzahl der Zerlegungen von $n = 2^\alpha \cdot m$ in die Summe von 10 Quadraten. Anschliessend s. *Buniakowsky*, St. Pét. Mém. (7) 4, 1862, Nr. 2. In *N. Bugaieff*'s „théorie des fonctions dérivées etc." Moscou J. phil. 5, 1871 (s. Bull. sci. math. astr. 10, 1876, p. 13) heisst $\psi(n) = \sum \theta(d)$, d Teiler von n, ein numerisches *Integral*, θ die *Derivierte* von ψ. Er sucht u. a. Entwicklungen von der Form $\psi(n) = \sum_i a_i E\left(\frac{n}{i}\right)$. In Mosk. math. Samml. 13, 1888, p. 757; 14, 1888, p. 1, 169 (s. Par. C. R. 106, 1888, p. 652; ebenda p. 1340 bezügliche Bemerkungen von *E. Cesàro*) behandelt er besonders die „logarithmisch-diskontinuierliche" [II A 1, Nr. **14**] Funktion $\sum \mu(d) \log d$. S. ferner Mosk. math. Samml. 17, 1895, p. 720; 18, 1896, p. 1.

$\mu(n)$ eignet sich vorzüglich zur Umkehr von Summenbeziehungen. So folgt aus $\psi(n) = \sum f(d)$, d Teiler von n, umgekehrt

$$f(n) = \sum \mu(d) \cdot \psi\left(\frac{n}{d}\right),$$

ein Satz, der von *R. Dedekind* (J. f. Math. 54, 1857, p. 1, datiert vom Oktober 1856) und *J. Liouville* (J. de math. (2) 2, März 1857, p. 110) gegeben worden ist. Ist für jede ganze Zahl n

$$F(n) = \sum_{h=1}^{\infty} f(hn),$$

so folgt $f(1) = \sum_{h=1}^{\infty} \mu(h) F(h)$. *Lipschitz* (Par. C. R. 89, 1879, p. 948, 985) gab mehrere solche Umkehrungen, z. B. aus $T[x] = \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{x}{h}\right]$:

$$[x] = \sum_{h=1}^{\infty} \mu(h) T\left[\frac{x}{h}\right],$$

wo $T(n) = \sum_{h=1}^{n} t(h)$. Ist ferner für jeden Teiler d von P

$$F(d) = \sum_{h} f(hd),$$

während h alle Teiler von $\frac{P}{d}$ durchläuft, so ist $f(1) = \sum_{d} \mu(d) F(d)$. So findet sich, wenn P ohne quadratische Teiler, die Anzahl der Zahlen $\overline{\gtrless} x$, welche prim zu P, gleich $\sum_{d} \mu(d) \left[\frac{x}{d}\right]$.[28]) Die Anzahl der Primzahlen $> \sqrt{y}$ und $\overline{\gtrless} y$ bestimmt sich durch eine ähnliche Formel[29]); hierhin gehören auch Sätze von *Cesàro, E. Catalan* u. A.[30]). Aus anderen Identitäten, in welche der grösste gemeinsame Teiler $(n:k)$ oder das kleinste gemeinsame Vielfache $(n;k)$ zweier Zahlen n, k eingeht, schliesst *Cesàro* (a. a. O., Note 8) Sätze, wie die folgenden: Die Summe (Anzahl) der Teiler, welche n und den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ der Reihe nach gemeinsam sind, ist gleich der n-maligen Anzahl (der Summe) der Teiler von n; sowie *Liouville*'s Formel (Par. C. R. 44, 1857, p. 753, s. auch *J. Binet*, ebend. 32, 1851, p. 918): $1^m + 2^m + \cdots + n^m = \sum \left(\frac{n}{d}\right)^m \varphi_m(d)$, d Teiler von n, wo $\varphi_m(d)$ Summe der m^{ten} Potenzen der zu d primen Zahlen $< d$. Die Funktion

28) S. die Kronecker'sche Formel und ihre Verallgemeinerung bei *K. Zsigmondy,* J. f. Math. 111 (1893), p. 344.

29) *E. de Jonquières* und *Lipschitz,* Par. C. R. 95 (1882), p. 1144, 1343, 1344 und 96 (1883), p. 58, 114, 231, 327, auch *Sylvester* ebenda p. 463.

30) Liège Mém. (2) 10 (1883), p. 285.

$\varphi_m(n)$ ist von *A. Thacker* bestimmt worden (J. f. Math. 40, 1850, p. 89); danach ist $\sum \frac{(-1)^{\varpi(d)} \cdot \pi(d)\,\varphi(d)}{d^2} = \frac{1}{n}$.

Eine sehr umfassende Umkehrung von Reihen giebt *Cesàro* (Ann. di mat. (2) 14, 1886, p. 141.[31]) Ist Ω ein gegebenes Gebiet ganzer Zahlen, so heisst $\Omega(x)$ eine „*fonction indicatrice*" desselben, wenn $\Omega(x) = 1$ oder 0, je nachdem x eine Zahl aus Ω ist oder nicht, $\sum_{h=1}^{[x]} \Omega(h)$ heisst eine „*fonction énumératrice*". Für $\Omega(x)\,\Omega(y) = \Omega(xy)$ bildet Ω eine „*geschlossene*" Gruppe, d. h. Ω enthält ausschliesslich die Produkte je zweier in Ω enthaltenen Zahlen. Ist dann, während

$$\varepsilon_\alpha(\varepsilon_\beta(x)) = \varepsilon_\beta(\varepsilon_\alpha(x)) = \varepsilon_{\alpha\beta}(x)$$

ist, $F(x) = \sum h(\omega) f(\varepsilon_\omega(x))$, über alle Zahlen ω von Ω summiert, so ist $f(x) = \sum H(\omega) F(\varepsilon_\omega(x))$, wenn $\sum h(d) H(\delta) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ für $d\delta = n \gtreqless 1$. Das erste Beispiel dieses Satzes gab *A. F. Möbius* (J. f. Math. 9, 1832, p. 105 = Werke 4, p. 589).

Mertens (Wien. Ber. 106, 1897, p. 761; s. dazu *Daubl. v. Sterneck* ebenda p. 835) untersucht $\sigma(n) = \sum_{h=1}^{n} \mu(h)$ und zieht aus dem beobachteten, doch unerwiesenen Gesetze $|\sigma(n)| < \sqrt{n}$ manche asymptotische Folgerungen, auch Schlüsse bez. der Primzahlmenge, des Verschwindens der Funktion $\zeta(s)$ u. a.

Die Anzahl $\psi(\alpha, \beta)$, $\chi(\alpha, \beta)$ der Teiler von α, welche $>$ resp. $\overline{\overline{<}}\,\beta$ sind, hat *M. Lerch* untersucht[32]); unter anderen Sätzen gab er (a. letzt. O.) die Formeln

$$\sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} \psi(m - \alpha n, \alpha) = \sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} \chi(m - \alpha n, n),$$

$$\sum_{\alpha=0}^{m-1} \psi(m - \alpha, \alpha) = m, \quad \sum_{\alpha=0}^{m} \psi(m + \alpha, \alpha) = 2m,$$

die vorletzte bereits am erstern Orte oder Par. C. R. 106, 1888, p. 186, Bull. sci. math. astr. (2) 12, 1888, p. 100, 121 mittels einer analytischen Formel, deren Verallgemeinerung *J. Schröder* (Hamb. Mitt. 3, 1894, p. 177, s. dazu ebend. 1897, p. 302) zu Sätzen über die Anzahl $\psi_{n\mu+s}(m - \alpha n, \alpha)$

---

31) Speziellere Sätze gleicher Art s. ebend. (2) 13 (1885), p. 339.

32) S. u. a. *Lerch,* Prag. Böhm. Ber. 1887, p. 683 u. 1894, sur quelques théorèmes d'arithmétique.

derjenigen Teiler von $m-\alpha n$, die $>\alpha$ und deren Komplementärteiler von der Form $n\mu+s$ sind, geführt hat. S. dazu *Lerch* (Prag. Böhm. Ber. 1894) „Bemerkungen über eine Klasse arithmetischer Lehrsätze" und „Über eine arithmetische Relation". Nach *Ch. Zeller* 33) ist $\sum_{\alpha=0}^{m-1}{}' \alpha\psi(m-\alpha, \alpha)$ die Summe der Reste, welche die Teilung von m durch die kleineren Zahlen lässt.

Zu dieser Nr. und zu Nr. **6** s. die Arbeiten *L. Gegenbauer*'s in den Denkschr. und den Ber. der Wien. Ak., insbesondere in den Bdd. 49^1, 1885, p. 1, 37; 49^2, 1885, p. 105 und 50^1, 1886, p. 153 der ersteren. Aus der Flut der angegebenen Resultate seien einige Beispiele hervorgehoben. Ist $\mu_r(n)=0$, wenn n durch eine r^{te} Potenz teilbar ist, sonst $+1$, so ist

$$\sum_{h=1}^{\left[n^{\frac{1}{r}}\right]}{}' \left[\frac{n}{h^r}\right]\cdot\mu(h) = \sum_{h=1}^{n}{}' \mu_r(h)$$

d. i. die Anzahl $\mathfrak{Q}_r(n)$ der Zahlen $\leqq n$, die durch keine r^{te} Potenz aufgehen; hier gilt *Bugaieff*'s Formel (Par. C. R. 74, 1872, p. 449; s. dazu *Hacks*, Acta math. 14, 1891, p. 329, wo die Formel benutzt wird, zu zeigen, dass es unendlich viel Primzahlen giebt):

$$\sum_{h=1}^{\left[n^{\frac{1}{r}}\right]}{}' \mathfrak{Q}_r\left[\frac{n}{h^r}\right] = n\,.$$

U. a. wird auch die Formel (*Cesàro*) gegeben:

$$\sum_{h=1}^{n}{}' \left[\frac{n}{h}\right](2h-1) = \sum_{h=1}^{n}{}' \left[\frac{n}{h}\right]^2.$$

Das arithmetische Mittel der Anzahlen derjenigen Teiler der Zahlen 1 bis n, welche $\overline{\overline{<}}\,[\sqrt{n}]$ $(>[\sqrt{n}])$, ist asymptotisch [Nr. **5**] $\frac{1}{2}\log n+\gamma$ (resp. $\gamma-1$), γ Euler'sche Konstante [II A 3, Nr. **13**]; ist n kein Quadrat, so ist die Anzahl der Teiler von n, die $\overline{\overline{<}}\,[\sqrt{n}]$ $(>[\sqrt{n}])$, gleich $\frac{1}{2}(\log n+2\gamma+1$ resp. $-1)$. Im Mittel ist die Summe der reziproken quadratischen Teiler einer Zahl $\frac{\pi^4}{90}$, die Summe der 1., 3., 5. Potenzen der ungeraden Teiler $\frac{\pi^2}{8}$, $\frac{\pi^4}{96}$ u. (*Cesàro*) $\frac{\pi^6}{960}$, der Überschuss

33) S. letztgenannte Stelle.

der Anzahl der Teiler $4s+1$ über die Anzahl der Teiler $4s+3$ gleich $\frac{\pi}{4}$, die Anzahl der Darstellungen durch x^2+y^2 gleich π.

4. Die Funktion $[x]$ [I C 1, Nr. **1**]. Ist keiner der positiven Werte $x, 2x, 3x, \dots nx$ ganzzahlig, so ist nach *Gauss* (Gotting. Comm. 16, 1808 = Werke 2, p. 1)

$$(1) \qquad \sum_{h=1}^{n}[hx]+\sum_{k=1}^{\nu}\left[\frac{k}{x}\right]=n\nu, \quad \nu=[nx],$$

insbesondere für positive ungerade relative Primzahlen p, q

$$(2) \qquad \sum_{h=1}^{\frac{q-1}{2}}\left[\frac{hp}{q}\right]+\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[\frac{kq}{p}\right]=\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}.$$

Allgemeiner ist (Gotting. Comm. rec. 4, 1818 = Werke 2, p. 47)

$\varphi(a,b)+\varphi(b,a)=\left[\frac{a}{2}\right]\cdot\left[\frac{b}{2}\right]$, wenn $\varphi(a,b)=\sum_{h=1}^{\left[\frac{a}{2}\right]}\left[\frac{hb}{a}\right]$, a, b positive relative Primzahlen. In anderer Richtung ist (2) von *Zeller* verallgemeinert in einer Note, die noch weitere Sätze über $[x]$, ähnlich solchen von *Buniakowsky*, enthält [34]). Nach *Ch. Hermite* ist für $x>0$, $k=1$: $\sum_{h=0}^{n-1}\left[x+\frac{h}{n}\right]^k=[nx]$; [35]) dies ist in einem von *Stern* (J. f. Math. 102, 1888, p. 9) bewiesenen Satze begriffen; die Formel gilt aber auch für positive ganze k, wenn $0<x<1$ (*Catalan*, Brux. Mém. 46, 1886, p. 14). *Stern* bestimmte (Acta math. 8, 1886, p. 93) auch $\sum_{h=0}^{n-1}(-1)^h\cdot\left[x+\frac{h}{n}\right]$, $\sum_{h=0}^{n-1}h\cdot\left[x+\frac{h}{n}\right]$. Ist d der grösste gemeinsame Teiler der positiven ganzen Zahlen a, b, so ist nach ihm (J. f. Math. 102, 1888, p. 12)

$$\sum_{h=1}^{b-1}\left[\frac{ha}{b}\right]=\sum_{k=1}^{a-1}\left[\frac{kb}{a}\right]=\frac{(a-1)(b-1)}{2}+\frac{d-1}{2},$$

34) *Zeller* in Gött. Nachr. 1879, p. 243; *V. Buniakowsky*, St. Pét. Bull. 28 (1883), p. 257, 411 und 29 (1883), p. 250; Par. C. R. 94 (1883), p. 1459; St. Pét. Mélanges 1884, art. 3, p. 169.

35) In Acta math. 10 (1887), p. 53 giebt *Stern* einige damit zusammenhängende, zum Teil Hermite'sche Beziehungen für die Funktion $\frac{[x]\cdot[x+1]}{2}$.

eine Formel, aus der *Hacks* (Acta math. 17, 1893, p. 205) für Primzahlen charakteristische Beziehungen entnahm. Mit ihr finden sich (s. auch *Cesàro,* N. Ann. (3) 4, 1885, p. 560; *Busche,* Über eine Beweismethode in der Zahlentheorie, Diss. Gött. 1883) Formeln, wie diese:

$$\sum_{h=0}^{b-1}\left[ax+\frac{ha}{b}\right]=\sum_{k=0}^{a-1}\left[bx+\frac{kb}{a}\right].$$

Nach *Hacks* (Acta math. 12, 1888, p. 109) und *Busche* a. a. O. ist für positive ungerade relative Primzahlen p, q

$$\sum_{h=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[\frac{hq}{p}+\frac{1}{2}\right]=\sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}}\left[\frac{kp}{q}+\frac{1}{2}\right];$$

im Zusammenhang damit stehen Resultate, welche *Stern* (J. f. Math. 106, 1890, p. 337; vgl. *Kronecker* ebenda p. 346) abgeleitet hat. Dieser untersuchte auch (J. f. Math. 59, 1861, p. 146) die Reste der Reihe $\left[\frac{a}{b}\right], \left[\frac{2a}{b}\right], \cdots \left[\frac{(b-1)a}{b}\right]$ (mod. 4) und fand u. a., dass in der Reihe $\left[\frac{2q}{p}\right], \left[\frac{4q}{p}\right], \cdots \left[\frac{(p-1)q}{p}\right]$, falls p, q positive ungerade relative Primzahlen, ebensoviel Zahlen $4h+1$ als $4h+2$ sind.

Eine systematische Herleitung solcher Formeln über Summen grösster Ganzen gab *Hacks* (Acta math. 10, 1887, p. 1). Zur Grundlage dient *Dirichlet*'s [36]) allgemeine Transformationsgleichung

$$\sum_{[\Psi(p)]+1}^{[\Psi(q)]}[\psi(k)]f(k)=qF[\Psi(q)]-pF[\Psi(p)]+\sum_{q+1}^{p}F[\Psi(k)],$$

in welcher $F(x)=\sum_{k=1}^{[x]}f(k)$, $\psi(x)$ die Umkehrung der positiven, eindeutigen Funktion $\Psi(x)$ ist, die abnimmt, wenn x von der positiven ganzen Zahl q bis zu der positiven ganzen Zahl p wächst. Die für ein positives x aus ihr folgende, neuerdings als „Hermite'sche" bezeichnete Gleichung [37])

$$\sum_{1}^{[x]}t(k)=\sum_{1}^{[x]}\left[\frac{x}{k}\right]=2\cdot\sum_{1}^{[\sqrt{x}]}\left[\frac{x}{k}\right]-[\sqrt{x}]^2$$

36) *Dirichlet,* Berl. Ber. 1851, p. 20 = Werke 2, p. 97.

37) *Dirichlet,* Berl. Abh. 1849, p. 69 = Werke 2, p. 49. Eine Ausdehnung dieser Formel auf die Summe $\sum_{k=1}^{[x]}\left[\frac{x}{k}\right]^r$ s. bei *Schröder*, Hamb. Mitt. 3 (1895), p. 219.

wurde direkt von *Hermite* (Acta math. 2, 1883, p. 299), auch von *Cesàro* (Par. C. R. 96, 1883, p. 1029) bewiesen[38]); *R. Lipschitz* gab (Acta math. 2, 1883, p. 301) ihre Ausdehnung auf die Funktion $t_s(k)$, Anzahl aller Teiler von k, welche s^{te} Potenzen sind. Wächst $\Psi(x)$, statt abzunehmen, so gilt statt der Dirichlet'schen Formel eine andere, welche *J. Hacks* giebt[39]). Aus diesen Grundformeln leitete *Hacks* für die summatorischen Funktionen $\sum_{h=1}^{n} t(h)$, $\sum_{h=1}^{n} \int(h)$ u. a. Umformungen her, die schon *Dirichlet* oder *Lipschitz* gaben, sowie neben der Gauss-schen Formel (1) die Zeller'schen und andere, meist von *Buniakowsky* gegebene Beziehungen. Für positives λ und positive ganze p, q ist

$$\sum_{h=0}^{[\lambda q]} \left[\frac{hp}{q}\right] + \sum_{k=0}^{[\lambda p]} \left[\frac{kq}{p}\right] = [\lambda p] \cdot [\lambda q] + L,$$

wo L die Anzahl, wie oft px, qx gleichzeitig ganzzahlig sind, wenn $x > 0$ bis λ wächst. *Sylvester* gab einen besondern Fall (Par. C. R. 50, 1860, p. 732), aus dem er das Reziprozitätsgesetz [I C 1, Nr. 6] folgerte; diese spezielle Formel gab auch *Stern* auf Grund der Formel (1) J. f. Math. 59, 1861, p. 146 und zog daraus eine Reihe von Folgerungen. Z. B. ist (*Sylvester*, a. a. O.):

$$\sum_{h=1}^{\frac{u(q-1)}{m}} \left[\frac{hp}{q}\right] + \sum_{k=1}^{\frac{u(p-1)}{m}} \left[\frac{kq}{p}\right] = \frac{u^2 \cdot (p-1)(q-1)}{m^2},$$

wenn p, q positive relative Primzahlen und $\frac{p-1}{m}$, $\frac{q-1}{m}$ ganzzahlig, $u \gtreqless m$ sind. Für $u = 1$ gab diese Formel schon *G. Eisenstein* (J. f. Math. 27, 1844, p. 281). Für positive Zahlen m, n mit dem grössten gemeinsamen Teiler d ist

$$\sum_{h=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left[\frac{mh}{n}\right] + \sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left[\frac{nk}{m}\right] = \left[\frac{m}{2}\right]\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{d}{2}\right].$$

---

38) S. auch *Busche*, J. f. Math. 100 (1887), p. 459; Hamb. Mitt. 3 (1894), p. 167 und *Schröder* an letzterer Stelle p. 186; vgl. hierzu *H. Ahlborn*, Progr. Hamburg 1881.

39) Eine noch allgemeinere Transformationsformel ähnlicher Art gab *Busche*, J. f. Math. 103 (1888), p. 118; er benutzte sie vornehmlich zum Beweise des Reziprozitätsgesetzes und in einer andern Arbeit (J. f. Math. 110 [1892], p. 338), in der er $[x]$ für komplexes x definiert.

Für positive Primzahlen $p = 4s + 1$ ist

$$\sum_{h=1}^{p-1}\left[\frac{h^2}{p}\right] = \frac{(p-1)(p-2)}{3}, \quad \sum_{h=1}^{p-1}[\sqrt{hp}] = \frac{(p-1)(2p-1)}{3} \text{ u. a. m.}$$

Im J. f. Math. 106, 1890, p. 65 bestimmte *Busche* die sogenannten „Veränderungen" der auch für negative p, q definierten Gauss'schen Funktion $\varphi(p, q)$ für ganzzahlige λ:

$$\varphi(p + \lambda q, q) - \varphi(p, q), \quad \varphi(p, q + \lambda p) - \varphi(p, q).$$

Haben zwei Funktionen $F_1(p, q)$, $F_2(p, q)$ dieselben Veränderungen und ist $F_1(p, p) = F_2(p, p)$ für alle ganzzahligen p, so sind die Funktionen für alle ganzzahligen p, q identisch. Hiernach lassen sich

$$F(p, q) = \varphi(p, q) + \varphi(q, p), \quad f(p, q) = \varphi(p, q) - \varphi(q, p)$$

finden; man hat $F(p, q) = \frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2} - \frac{\operatorname{sgn}. p - 1}{2}\cdot\frac{\operatorname{sgn}. q - 1}{2}$ d. i. das Reziprozitätsgesetz [I C 1, Nr. **6**]. Die Differenz $f(p, q) - \frac{p-q}{4}$ kann keine rationale Funktion von p, q sein; sie bestimmt sich aus dem Euklidischen Algorithmus [I C 1, Nr. **3**] für p, q mittels einer Formel, die $\varphi(p, q)$ und somit das Legendre'sche Symbol $\left(\frac{p}{q}\right)$ zu berechnen verstattet. — Im J. f. Math. 100, 1887, p. 459 teilte *Busche* eine andere, sehr umfassende Transformationsformel mit (s. dazu Hamb. Mitt. 3, 1896, p. 234) bezüglich auf diejenigen Teiler δ_m der natürlichen Zahlen m, für welche, während $f(x)$ eine wachsende Funktion ist, $f(m) \gtreqless \delta_m \gtreqless a$. Unter ihren mannigfachen Folgerungen sind zwei: eine neue Fassung des Gauss'schen Lemma $\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^\mu$ (vgl. J. f. Math. 103, 1888, p. 125), sowie eine Formel für die Gesamtzahl der Klassen quadratischer Formen mit den Determinanten -1, $-2, \cdots, -n$ besonders bemerkenswert.

Eisenstein (J. f. Math. 27, 1844, p. 281) gab trigonometrische Ausdrücke für $\left[\frac{p}{q}\right]$, $\sum_{h=1}^{\frac{q-1}{2}}\left[\frac{hp}{q}\right]$, für den kleinsten Rest von p (mod. q), sowie für den Exponenten μ im Gauss'schen Lemma; *Stern* (J. f. Math. 59, 1861, p. 146) und *P. Tardy* (Ann. di mat. (2) 3, 1869/70, p. 331) Beweise derselben; ähnliche Sätze *Matth. Schaar* und *A. Genocchi* (Brux. Mém. cour. sav. étr. 23, 1850 resp. 25, 1854; vgl. noch *Schaar* in Brux. Mém. 24 und 25, 1850); eine Reihenentwicklung für $[x]$ mittels trigonometrischer Funktionen *A. Pringsheim*, Math. Ann. 26, 1886, p. 193.

Reihenentwicklungen anderer Funktionen, z. B. von $\varphi(n)$, gab *F. Rogel*, Prag. Böhm. Ber. 1897.

5. Asymptotische Ausdrücke zahlentheoretischer Funktionen. Die Anzahl der Primzahlen. $\psi(n)$ heisst *ein asymptotischer Ausdruck* von $f(n)$, wenn 1) $\lim\limits_{n=\infty}(f(n)-\psi(n))=0$, allgemeiner, wenn 2) $\lim\limits_{n=\infty}\frac{f(n)}{\psi(n)}=1$. Für die Anzahl $\Pi(x)$ der Primzahlen $\overline{\gtrless} x$ gab *Legendre* den folgenden[40]):

$$\Pi(x)=\frac{x}{\log x-1{,}08366}.$$

P. Tschebyscheff zeigte aber, dass $\frac{x}{\Pi(x)}-\log x$ für $x=\infty$ keine von -1 verschiedene Konstante sein könne; richtiger sei, obwohl innerhalb der drei ersten Millionen weniger genau, $\Pi(x)=Li(x)$ [II A 3, Nr. **14**] $=\int\limits_2^x\frac{dx}{\log x}$.[41])

Sind $\mathsf{T}(x), \theta(x)$ die Summe der natürlichen Logarithmen *aller* Zahlen resp. der *Prim*zahlen $\overline{\gtrless} x$, und $\psi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\theta\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$, so ist $\mathsf{T}(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\psi\left(\frac{x}{n}\right)$.[42]) Mittels *Stirling*'s Formel [I A 3, Nr. **38**, Anm. 272; II A 3, Nr. **12** f.] finden sich daraus Grenzen für $\mathsf{T}(x)$, $\psi(x)$, $\theta(x)$ sowie für die Primzahlmenge in gegebenem Intervalle, doch lässt sich ihnen kein Ausdruck der letzteren entnehmen. *B. Riemann* zuerst stellte solchen auf[43]). Es ist

$$\zeta(1-s)=\frac{2}{(2\pi)^s}\cdot\cos\frac{s\pi}{2}\cdot\Gamma(s)\,\zeta(s)$$

oder $\zeta(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}$ bleibt ungeändert bei Vertauschung von s mit $1-s$: eine, nebst ähnlichen für andere Funktionen von *O. Schlömilch* gegebenen, in einer von *R. Lipschitz* für die Reihe $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2\pi n v i}}{(t+ni)^s}$

40) *Legendre*, Th. d. n., 4. Hauptteil § 8; vgl. *A. Genocchi*, Ann. di mat. 3 (1860), p. 52; *S. M. Drach*, Phil. Mag. (3) 24 (1844), p. 192.

41) J. d. math. 17 (1852), p. 341. *Legendre*'s Ausdruck gab auch *Dirichlet* [Berl. Ber. 1838, p. 18; J. f. Math. 18 (1838), p. 259 = Werke 1, p. 351, 357], während *Gauss*, der nach *Benj. Goldschmidt*'s Zählungen ähnliches bemerkte (Brief an *J. F. Encke*, Werke 2, p. 444), wie *Tschebyscheff*, den Wert $Li(x)$.

42) Eine Verallgemeinerung dieser Beziehung s. b. *Cesàro*, N. Ann. (3) 4 (1884), p. 418. S. auch *C. de Polignac*, Par. C. R. 49 (1859), p. 350.

43) *Riemann*'s Werke, Leipzig, 1. Aufl. 1876, p. 136, 2. Aufl. 1892, p. 145. Eine Bearbeitung der bez. Abhandlung s. bei *W. Scheibner*, Zeitschr. Math. Phys. 5 (1860), p. 233.

gefundenen Transformationsformel enthaltene Beziehung[44]). In Anwendung der letztern auf die von *Dirichlet* bei der arithmetischen Progression angewandten Reihen folgt nämlich eine Formel, die *A. Hurwitz*[45]) für die besondere Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}$ gab, und aus ihr für $D=1$ die obige Riemann'sche. — Setzt man nun, je nachdem x Primzahl ist oder nicht,

$$F(x)=\frac{\Pi(x+0)+\Pi(x-0)}{2} \text{ oder } =\Pi(x)$$

und $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}F\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$, so gelten die reziproken Beziehungen

$$\frac{\log\zeta(s)}{s}=\int_1^{\infty}f(x)\,x^{-s-1}\,dx,\quad f(x)=\frac{-1}{2\pi i\log x}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{d}{ds}\left(\frac{\log\zeta(s)}{s}\right)x^s ds$$

$(a>1)$. Für $s=\frac{1}{2}+ti$ aber wird

$$\frac{s(s-1)}{2}\cdot\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}=\xi(t)$$

eine gerade Funktion von t, von der *Riemann* ohne ausreichende Begründung sagt: 1) sind $\alpha_\varkappa$ die der Grösse nach geordneten unendlich vielen Wurzeln von $\xi(t)=0$, deren reeller Teil >0, so ist

$$\xi(t)=\xi(0)\cdot\prod_{\varkappa=1}^{\infty}\left(1-\frac{t^2}{\alpha_\varkappa^{\,2}}\right);$$

2) es giebt annähernd $\frac{T}{2\pi}\left(\log\frac{T}{2\pi}-1\right)$ Wurzeln, deren reeller Teil zwischen 0 und T, 3) alle Wurzeln sind (wahrscheinlich) reell. Aus 1) schliesst er die (im ersten Teile rechts berichtigte) Formel

$$f(x)=\log\frac{1}{2}+Li(x)-\sum_{\alpha}\left(Li\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+Li\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right)$$
$$+\int_x^{\infty}\frac{dx}{(x^2-1)\,x\log x}.$$

Riemann's Untersuchung ist durch mehrere neuere Arbeiten über ganze analytische Funktionen [II B 1] $f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^m$ ergänzt worden. *J. Hada-*

44) *Schlömilch*, Zeitschr. Math. Phys. 3 (1858), p. 130 und 23 (1878), p. 135; *Lipschitz*, J. f. Math. 54 (1857), p. 313; 105 (1889), p. 127; vgl. hierzu *Lerch*, Acta math. 11 (1887/88), p. 19.

45) *A. Hurwitz*, Zeitschr. Math. Phys. 27 (1882), p. 86.

mard[46]) hat deren Eigenschaften aus dem Verhalten ihrer Entwicklungskoeffizienten a_m zu ermitteln versucht. Seine wesentlichsten Resultate finden sich bei *H. v. Schaper*[46]) systematisch und mit Vereinfachungen, die u. a. durch einen Satz von *E. Schou* und durch Arbeiten von *E. Borel* bewirkt werden, speziell für „*Hadamard'sche*", d. i. solche Funktionen $f(z)$ hergeleitet, bei denen eine Zahl α (ihre „*Ordnung*") existiert, der Art, dass bei beliebig klein gegebenem δ für alle m, die grösser als eine entsprechende Zahl m_0 sind, $|a_m| < \frac{1}{(m!)^{\alpha-\delta}}$, während es beliebig grosse m giebt, für welche $|a_m| > \frac{1}{(m!)^{\alpha+\delta}}$ ist; dies sind zugleich die Funktionen $f(z)$ „*vom Typus* $e^{r^{\frac{1}{\alpha}}}$", bei welchen $|f(z)| < e^{r^{\frac{1}{\alpha}+\delta}}$ für hinreichend grosse $r = |z|$, ausserhalb jedes noch so grossen Kreises aber Punkte z vorhanden sind, für welche $|f(z)| > e^{r^{\frac{1}{\alpha}-\delta}}$. Denkt man eine solche Funktion in der Weierstrass'schen Produktform [II B 1]:

$$f(z) = e^{P(z)} \cdot \prod_\nu \left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right) \cdot e^{Q\left(\frac{z}{z_\nu}\right)} = e^{P(z)} \cdot \prod_\nu (z),$$

in welcher z_ν die der Grösse r_ν nach geordneten Nullpunkte von $f(z)$, $P(z)$ ein Polynom vom Grade P,

$$Q\left(\frac{z}{z_\nu}\right) = \frac{z}{z_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{E} \cdot \left(\frac{z}{z_\nu}\right)^E,$$

und $E \gtreqless P$ die kleinste positive ganze Zahl ist, für welche $\sum \frac{1}{r_\nu^{E+1}}$ konvergiert, so heisst E nach *Edm. Laguerre* (Par. C. R. 94, 1882, p. 160, 635; 95, 1882, p. 828 = Oeuvres 1, p. 167, 171, 174) „das Geschlecht", nach *v. Schaper* „die Höhe" von $f(z)$. Zwischen E und α bezw. dem „Konvergenzexponenten" (nach *Borel* „ordre réel") ϱ, für welchen $\sum \frac{1}{r_\nu^{\varrho \pm \delta}}$ bei beliebig kleinem δ konvergiert resp. divergiert, besteht ein enger Zusammenhang. U. a. ist für Hadamard'sche Funktionen ohne Nullstellen oder mit einer endlichen Anzahl von solchen $E = \frac{1}{\alpha}$; wenn sie von der Form $\prod_\nu (z)$ sind, so ist $\varrho = \frac{1}{\alpha}$, und wenn

46) *J. Hadamard*, J. de math. (4) 9 (1893), p. 171; *H. v. Schaper*, Diss. Gött. 1898; *E. Schou*, Par. C. R. 125 (1897), p. 763, 764; *E. Borel*, Acta Math. 20 (1896/97), p. 357.

(für nicht ganzzahliges ϱ) E ihre Höhe, so ist $\prod_\nu(z)$ vom Typus e^{r^ϱ}, wo $E < \varrho < E + 1$, also

$$\lim_{m=\infty} |a_m| \cdot (m!)^{\frac{1}{E+1}} = 0,$$

„Poincaré'scher Satz" (Par. Soc. M. Bull. 1883, p. 136);

umgekehrt ist die Höhe $E = E(\varrho)$, wenn $\prod_\nu(z)$ vom Typus e^{r^ϱ}. — In Anwendung seiner Sätze auf die Riemann'sche Funktion $\xi(t)$ hat *Hadamard* (a. a. O.) nachgewiesen, dass das Geschlecht dieser Funktion, wenn sie als eine solche von t^2 aufgefasst wird, Null ist; daraus folgt die Riemann'sche These 1); ferner, dass $\frac{1}{\operatorname{mod} \alpha_\varkappa} \cdot \frac{\log \varkappa}{\varkappa}$ für $\varkappa = \infty$ zwischen $\frac{1}{7{,}56}$ und $\frac{e}{4}$, womit 2) stimmt. Genauer ist nach *H. v. Mangoldt* (J. f. Math. 114, 1895, p. 255; Auszug in Berl. Ber. 1894, p. 883) die Menge derjenigen Wurzeln, deren reeller Teil zwischen 0 und T, Null für $T \overline{\gtrless} 12$, für $T > 12$ ihre Abweichung von *Riemann's* Ausdruck abs. $< 0{,}34 (\log T)^2 + 1{,}35 \log T + 2{,}58$. Für die Funktion

$$\varLambda(x, r) = \sum_{h=1}^{[x]} \frac{\nu(h)}{h^r} - \frac{\delta}{2} \cdot \frac{\nu(x)}{x^r}, \quad r \text{ reell}$$

($\delta = 1, 0$, je nachdem x Primzahlpotenz oder nicht) gilt eine für reelle $x > 1$ konvergente Reihenentwicklung; setzt man aber, je nachdem x keine oder eine Primzahlpotenz ist,

$$f(x, r) = \sum_{h=1}^{[x]} \frac{\nu(h)}{\log h} \cdot \frac{1}{h^r} \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{2}\Big(f(x+0, r) + f(x-0, r)\Big),$$

so ist $f(x, r) = -\int \varLambda(x, r)\, dr$, $f(x, 0) = f(x)$ [p. 659 oben] und *H. v. Mangoldt's* Sätze führen zur Riemann'schen Formel und zur Einsicht, dass sie, nach den wachsenden Wurzeln geordnet, konvergiert. Schon vor Jenem gab *A. Piltz*[47]) durch ähnliche Betrachtungen, doch weniger überzeugend, eine Herleitung der Riemann'schen Formel und Fingerzeige für allgemeinere Fragen. Sein Prinzip, dass

$$\sum_{n=1}^{[x]} \frac{a_n}{n^s} = \sum_m \int_1^x f_m(x) x^{-s}\, dx$$

ist, wenn für alle s, deren reeller Teil eine bestimmte Zahl übertrifft,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \sum_m \int_1^\infty f_m(x) x^{-s} dx$$

47) *A. Piltz,* Über die Häufigkeit der Primzahlen u. s. w., Jena 1884.

gesetzt werden kann, benutzte *E. Pfeiffer*[48]) zur Bestimmung der mittleren Klassenanzahl quadratischer Formen, sowie zum Nachweise, dass bis auf Grössen der Ordnung $\sqrt[3]{n}$ die Summe $\sum_{h=1}^{n} t(h)$ gleich $n \log n + (2\gamma - 1)n$ ist (s. u. „mittlere Werte" Nr. **6**).

Aus *Riemann*'s Formel folgt endlich

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \cdot \frac{1}{n} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right),$$

oder bei Vernachlässigung der periodischen Glieder

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \cdot \frac{1}{n} Li\left(x^{\frac{1}{n}}\right) < Li(x),\text{[49])}$$

übereinstimmend mit *Goldschmidt*'s Zählungen. Setzt man $F(x) = Li(x) - \frac{1}{2} Li\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$, so ist die Abweichung genau von der Ordnung $x^{\frac{1}{2}}$, falls *Riemann*'s dritte, bisher einzig noch fragliche Aussage richtig ist (*Piltz*, p. 6). Nach *v. Mangoldt* (J. f. Math. 119, 1898, p. 65) und *Ch. J. de la Vallée-Poussin*[50]) ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x) - Li(x)}{F(x)} = 0;$$

dabei wird benutzt, was *Hadamard*, einfacher *Ch. J. de la Vallée-Poussin*[50]) gezeigt, dass $\zeta(s)$ keine Wurzel mit dem reellen Teil 1 oder 0 hat, und dass $\lim_{x=\infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1$. Noch zeigte *v. Mangoldt* (Berl. Ber. 1897, p. 835), nach ihm *E. Landau* (Diss. Berl. 1899), dass $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\mu(h)}{h} = 0$, wie schon *Euler* (Intr. in anal. infin. 1, p. 229) ausgesagt.

48) Programm der Pfeiffer'schen Erziehungsanstalt, Jena 1886.

49) Vgl. *J. P. Gram*, Kjöbenh. Skrift. (6) 2 (1884), p. 185—308; er, wie *L. Oppermann* in Kjöbenh. Oversigt 1882, p. 169 giebt eine Zusammenfassung der Arbeiten über die Primzahlmenge. Die letztgeschriebene Summe hat nach *W. Preobraschensky,* Moskau Naturk. Ges. 5 (1892), Heft 1, einen Inflexionspunkt $x = 13256519$.

50) *Hadamard,* Par. C. R. 122 (1896), p. 1470 und Par. Soc. m. Bull. 24 (1896), p. 199; *de la Vallée-Poussin,* Brux. S. sc. Ann. 21 (1896), p. 183, 281, 363; 21 B (1897), p. 251, 343; *E. Cahen*'s Versuch, den letzteren Satz zu beweisen (Par. C. R. 116¹ (1893), p. 85), ist nicht überzeugend. S. über $\zeta(s)$ auch *J. Franel,* Zürich. Naturf. Ges. Viert. 41 (1896), 2. Teil, p. 7.

E. Meissel[51]) gab eine Formel, mittels deren die Primzahlmenge bis x berechnet werden kann, falls sie für gewisse kleinere Grenzen bekannt ist, und bestimmte und verglich diese mit den Resultaten der Annäherungsformeln innerhalb der ersten Milliarde.

Nach *F. Mertens* ist $\frac{1}{x}\sum \log p < 2$ (p Primzahlen $\overline{\gtrless}\, x$) und $\log n = \sum\limits_{p \overline{\gtrless} n} \frac{\log p}{p} + 2\delta$, δ echter Bruch; auf Grund hiervon ist

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{p \overline{<} x} \frac{1}{p} = \log\log[x] + \gamma - g - \sigma \\ &\prod_{p \overline{<} x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = e^{\gamma-\sigma}\log[x] \end{aligned}\right\} \lim_{x=\infty} \sigma = 0,$$

γ *Euler*'sche Konstante, $g = \sum\limits_{h=2}^{\infty}\left(\frac{1}{h}\sum \frac{1}{p^h}\right)$; die Konstante γ ist der Wert des aus der Theorie der Γ-Funktionen [II A 3, Nr. **13**] bekannten Integrals

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{e^{-x}}{x}\right) dx.$$

Mertens hat $\sum\limits_p \frac{1}{p}$ auch für die Fälle bestimmt, dass die Primzahlen p von vorgeschriebener Linearform oder durch eine quadratische Form darstellbar sind[52]) [I C 2, Nr. c, 5) u. 6)].

6. Mittlere Funktionswerte. *Mittlerer Wert* $\mathfrak{M}f(n)$ von $f(n)$ heisst jeder asymptotische Ausdruck für $\frac{F(n)}{n}$ oder, falls vorhanden, $\lim\limits_{n=\infty}\frac{F(n)}{n}$, wo $F(n)$ die summatorische Funktion $\sum\limits_{h=1}^{n} f(h)$; *Mittelwert* $Mf(n)$ von $f(n)$ (*an der Stelle* n) jeder asymptotische Ausdruck für

51) Math. Ann. 2 (1870), p. 636. Ähnlich *F. Rogel*, Math. Ann. 36 (1890), p. 304. S. auch *C. Hossfeld*, *Fr. Graefe*, *H. Vollprecht*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. resp. 35 (1890), p. 382; 39 (1894), p. 38; 40 (1895), p. 118; *K. E. Hoffmann*, Arch. f. Math. 64 (1879), p. 333. S. zu diesem Gegenstande ferner *L. Lorenz*, Kjöb. Skr. (6) 5 (1891), p. 427, s. auch Tidssk. f. Math. (4) 2 (1878), p. 1 sowie *J. P. Gram* (aus Anlass der Rechnungen von *M. Bertelsen*) Acta math. **17** (1893), p. 301.

52) J. f. Math. 77 (1874), p. 289 und 78 (1874), p. 46; in der ersteren von beiden Arbeiten dehnt *Mertens* die Betrachtung auch auf komplexe Zahlen $a + bi$ aus [s. Anm. 57].

$\frac{1}{m}\sum_{h=1}^{m} f(n+h)$ bei grossen m, n, während $\frac{m}{n}$ beliebig klein (*Gauss*, Disqu. A. art. 301—304). Nächst *Gauss* hat *Dirichlet*[53]) solche Werte bestimmt, anfangs analytisch, später mittels der oben gegebenen Transformation von Summenausdrücken. So fand er

$$S(n) = \sum_{h=1}^{n} \int(h) = \frac{\pi^2}{12} n^2 + O(n \log n)\,^{54})$$

$$M\int(n) = \frac{\pi^2}{6} n;$$

$$T(n) = \sum_{h=1}^{n} t(h) = n \log n + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n})$$

$$Mt(n) = \log n + 2\gamma;\,^{55})$$

hiernach ist $\frac{T[ne]}{ne} = Mt(n)$ (*A. Berger*, Upsala R. Soc. N. A. 11, 1880; sur quelques applications de la fonction Γ à la théorie des nombres, Upsala 1882). Setzt man $\frac{n}{h} - \left[\frac{n}{h}\right] = \varrho$, so ist asymptotisch $\frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n} \varrho = 1 - \gamma < \frac{1}{2}$; die Anzahl A derjenigen Zahlen $1, 2, \dots n$, für welche $\varrho < \frac{1}{2}$, übertrifft die Anzahl A' derer, für welche $\varrho > \frac{1}{2}$; aus der Anzahl der Zahlen $h = 1, 2, \dots p$, für welche, während $0 < \alpha < 1$, $\frac{n}{h} - \left[\frac{n}{h}\right] < \alpha$ ist, fand *Dirichlet*[56])

$$A = n(2 - \log 4) + O(n^{1/2}), \quad A' = n(\log 4 - 1) + O(n^{1/2}).$$

Ferner ist $\Phi(n) = \sum_{h=1}^{n} \varphi(h) = \frac{3}{\pi^2} n^2$, der Fehler (*Dirichlet*) $O(n^\delta)$, δ zwischen 1, 2, (*Mertens*) $O(n \log n)$, und $M\varphi(n) = \frac{6}{\pi^2} n.$[57]) Daher

53) *Dirichlet*, J. f. Math. 18 (1838), p. 259; Berl. Ber. 1838, p. 13; Berl. Abh. 1849, p. 69 = Werke 1, p. 357, 351; 2, p. 49.

54) d. h. der Fehler ist von der Ordnung $n \log n$.

55) Im Anschluss hieran s. bei *L. Gegenbauer*, Wien. Denkschr. 49^2 (1885), p. 24, Formeln für die Anzahl der Teiler von k, welche $\overline{\overline{<}} \sqrt{n}$, und eine Menge anderer.

56) *Dirichlet*, Berl. Ber. 1851, p. 20 = Werke 2, p. 97; dazu *V. A. Lebesgue*, J. de math. (2) 1 (1856), p. 377; *L. Gegenbauer*, Wien. Denkschr. 49^2 (1885), p. 108.

57) *Mertens*, J. f. Math. 77 (1874), p. 289; er hat auch den Fall komplexer Zahlen $a + bi$ behandelt [s. Anm. 52]. S. die letzte Formel auch bei *Berger* a. a. O., die erstere unter der Form $\lim \frac{\Phi(n)}{n^2} = \frac{3}{\pi^2}$ bei *J. Perott* (Bull. sci. math. astr.

ist $\frac{3}{\pi^2} n^2$ die asymptotische Anzahl der reduzierten Brüche $\frac{x}{y}$, deren Zähler und Nenner $\overline{\gtrless} n$, $\frac{6}{\pi^2}$ die Wahrscheinlichkeit [I D 1], dass zwei Zahlen $x, y \overline{\gtrless} n$ relativ prim sind[58]). Desgleichen ist

$$P(n) = \sum_{h=1}^{n} p(h) = \frac{6n}{\pi^2}\left(\log n + 2\gamma - 1 + \frac{12\varphi}{\pi^2}\right)$$

mit dem Fehler (*Mertens*) $O\left(n^{\frac{1}{2}} \log n\right)$, also

$$Mp(n) = \frac{6}{\pi^2}\left(\log n + 2\gamma + \frac{12\varphi}{\pi^2}\right), \qquad \varphi = \sum_{h=2}^{\infty} \frac{\log h}{h^2}.$$

Die mittlere Anzahl der Darstellungen [I C 2, Nr. c, 5)] einer positiven ganzen Zahl durch eine quadratische Form (a, b, c) der Determinante D (für $D > 0$ mittels in früher bezeichneter Weise beschränkter Variabeln) ist $\frac{\tau\vartheta}{2}$.[59]) Allgemeiner gab *Lipschitz*[60]) den Mittelwert der Anzahl eigentlicher Darstellungen durch eine Form [I C 2, Nr. e, g] mit mehr Variabeln oder von höherer Dimension, z. B. ist er für eine positive quadratische Form mit ν Variabeln und der Determinante D [im Sinne von I C 2, Nr. e, 1)]:

$$\frac{1}{\sqrt{D}} \cdot \frac{2^{\left[\frac{\nu-1}{2}\right]} \cdot \pi^{\left[\frac{\nu}{2}\right]}}{(\nu-2)(\nu-4)\cdots\left(\nu - 2\cdot\left[\frac{\nu-1}{2}\right]\right)} \cdot \frac{n^{\frac{\nu}{2}-1}}{\sum_{h=1}^{\infty} h^{-\nu}};$$

ferner den Mittelwert der Anzahl Klassen eigentlich primitiver, positiver, binärer quadratischer Formen mit der Determinante $-\Delta$:

---

(2) 5 (1881), p. 37, 183); *Cesàro* sagt dafür: $\varphi(n)$ sei asymptotisch $\frac{6n}{\pi^2}$, an welche Aussage sich eine Diskussion mit *W. Jensen* [Par. C. R. 106 (1888), p. 1651; 107 (1888), p. 81, 426 und Ann. di mat. (2) 16 (1888), p. 178] knüpft. *Berger,* Acta math. 9 (1887), p. 301 giebt u. a. die Formel

$$\lim_{\text{ung.}\, m = \infty} \cdot \frac{\mu(1) + \mu(3) + \cdots + \mu(m)}{m} = \frac{\pi}{4}$$

und eine ähnliche für die Anzahl der Lösungen von $x^2 + y^2 = m$.

58) *Sylvester*, Par. C. R. 96 (1883), p. 409; *Cesàro,* J. Hopkins Circ. 2 (1883), p. 85 beansprucht diesen Satz für sich.

59) Vgl. *Gauss* Werke 2 (1837), p. 279.

60) *Lipschitz*, Berl. Ber. 1865, p. 174. *Mertens* [Wien. Ber. 106 (1897), p. 411] bestimmte den asymptotischen Ausdruck für

$$\sum \frac{1}{ax^2 + 2bxy + cy^2}, \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 \overline{\gtrless} n$$

für $b^2 - ac < 0$.

$$MH(-\Delta) = \frac{2\pi}{7\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^3}} \cdot \sqrt{\Delta} = \frac{\pi\sqrt{\Delta}}{4\left(1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\cdots\right)}$$

(*Gauss* Werke 2 (1837), p. 284; in Disqu. A. art. 302 ist $\frac{-2}{\pi^2}$ hinzugefügt; über Formen mit positiver Determinante s. art. 304). Einen direkteren Beweis hierfür gab *Mertens*, J. f. Math. 77, 1874, p. 312. *Gauss'* Ausdrücke für den Mittelwert der Anzahl $G(D)$ der Geschlechter quadratischer Formen (Disqu. A. art. 301), für den Fall einer negativen Determinante $D = -\Delta$ die Formel

$$MG(-\Delta) = \frac{4}{\pi^2}\left(\log\Delta + 2\gamma + \frac{12\varphi}{\pi^2} - \frac{1}{6}\log 2\right),$$

bestätigte *Dirichlet* (Berl. Abh. 1849, p. 69 = Werke 2, p. 49) [I C 2, Nr. **c**, 12)].

Zur Herleitung solcher mittleren Werte kann der Satz dienen: Ist $\mathsf{F}(1+\varrho) = \sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{f(h)}{h^{1+\varrho}}$ nach steigenden Potenzen von ϱ entwickelbar, so beginnt, falls $\mathfrak{M}f(n) = \lim\limits_{n=\infty} \frac{F(n)}{n}$, die Entwicklung mit $\frac{\mathfrak{M}f(n)}{\varrho}$. Konvergiert $\mathsf{F}(s)$ für alle s, deren reeller Teil $\geqq \sigma > 0$, und ist für $x > 0$ und $a \geqq \sigma$:

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-\infty i}^{a+\infty i} x^s\,\mathsf{F}(s)\,d\log s,$$

so folgt $J(x) = f(1) + f(2) + \cdots + \lambda \cdot f[x]$, wo $\lambda = \frac{1}{2}$, 1, jenachdem x ganzzahlig oder nicht; also ist $f(n) = J(n+0) - J(n-0)$. Wie auch dies zu jenem Zwecke zu nutzen, zeigte *G. Halphen*[61]).

Eine Menge asymptotischer Formeln gab *L. Gegenbauer* u. a. an den in Nr. **3** citierten Stellen, sowie meist mit elementaren Hilfsmitteln *Cesàro* (Liège Mém. (2) 10, 1883, p. 1—360); z. B. ist (Note 12) die Summe der reziproken (direkten) m^{ten} Potenzen der Teiler von n im Mittel $\zeta(m+1)$ (resp. $n^m\zeta(m+1)$), für $m=1$ also $\frac{\pi^2}{6}$ $\left(\text{resp. } n\frac{\pi^2}{6}\right)$; die letztern besonderen Fälle s. auch bei *Berger*, a. a. O. Ferner ist (*Cesàro*, a. a. O. p. 230) die mittlere Anzahl (Summe) gemeinsamer Teiler zweier Zahlen n, n'

$$\mathfrak{M}\,t(n:n') = \frac{\pi^2}{6}, \quad \mathfrak{M}\int(n:n') = \log\sqrt{nn'} + 2\gamma - \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2};$$

(p. 307 u. 315)

$$\mathfrak{M}\,\varepsilon(n) = \frac{6n}{\pi^2}, \quad \mathfrak{M}\,\mu(n) = \frac{36}{\pi^4}, \quad \mathfrak{M}\,\nu(n) = 1.$$

61) *Halphen*, Par. C. R. 96 (1883), p. 634; vgl. *G. Cantor*, Math. Ann. 16 (1880), p. 587.

Heisst $\frac{\Pi(n)}{n}$ *mittlere Dichtigkeit* der Primzahlen bis n, so ist $\Pi'(n)$ ihre Dichtigkeit in n; für $\Pi(n) = \frac{n}{\log n - 1}$ (*Tschebyscheff*) folgt $\frac{\Pi[ne]}{ne} = \frac{1}{\log n} = \Pi'(n)$. Andere asymptotische Bestimmungen betreffend den grössten gemeinsamen Teiler, das kleinste gemeinsame Vielfache von Zahlen, den grössten quadratischen Teiler einer Zahl u. a. s. in mehreren Arbeiten von *Cesàro* in Ann. di mat. (2) 13, 1885, p. 235, 251, 269, 291, 295, 315, 323, 329; ebenda behandelt er Fragen analog denen von *Dirichlet* über die Division [Anmerk. 56], giebt (N. Ann. (3) 5, 1885, p. 209) Sätze über die Verteilung der Polygonalzahlen in der natürlichen Zahlenreihe, u. a. m.

7. Transcendenz der Zahlen e und π. Natur und Begründung der Irrationalzahlen sind neuerdings viel untersucht[62]). Diese Zahlen i sind in unendliche gewöhnliche Kettenbrüche [I A 3, Nr. **45** ff.] entwickelbar. Setzt man (*E. B. Christoffel*)[63]) für $i < 1$:

$$ni = [ni] + (ni), \quad i + (ni) - (\overline{n+1} \cdot i) = g_n,$$

so zeigt die Reihe $g_1, g_2, g_3, \ldots$ nur Nullen und Einsen, deren Succession (*Charakteristik* von i) vom Kettenbruche derart abhängt, dass jeder Irrationellen i eine bestimmte Charakteristik, jeder Charakteristik ein bestimmter Kettenbruch, also auch eine bestimmte Irrationelle i zugehört. *Daher sieht Christoffel i als Ausdruck für die Abzählungen in der Charakteristik an.*

Auf die Existenz unendlich vieler ganzer Zahlen x, y, für welche $x - yi$ numerisch $< \frac{1}{y}$, gründete *Dirichlet*[64]) die Auflösung der Pellschen Gleichung [I C 2, Nr. **c**, 2)]; nach *Tschebyscheff*[65]) [I C 2, Nr. **a**, 12)] giebt es auch unendlich viele x, y, für welche $x - yi - k < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y}$ $\left(\text{nach } \textit{Ch. Hermite} \text{ genauer } < \sqrt{\frac{2}{27}} \cdot \frac{1}{y}\right)$. Annäherungssätze solcher Art sind allgemeiner von *Hermite* in seinen zahlentheoretischen Briefen

62) S. namentlich *Dedekind,* Stetigkeit und Irrationalzahlen, Braunschweig 1872, 2. Aufl. 1892; *G. Cantor*, Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883 = Math. Ann. 21, p. 545; *E. Heine*, J. f. Math. 74 (1872), p. 172; *P. Bachmann,* Natur der Irrationalzahlen, Leipz. 1892; *M. Pasch,* Math. Ann. 40 (1892), p. 149; vgl. *E. Illigens* ebend. 33 (1889), p. 155 u. 35 (1890), p. 451.

63) Ann. di mat. (2) 15 (1888), p. 253. Vgl. dazu *St. Smith*, Mess. (2) 6 (1876), p. 1 = Coll. pap. 2, p. 135.

64) *Dirichlet,* Par. C. R. 1840, p. 286; Berl. Ber. 1841, p. 280; 1842, p. 93; 1846, p. 103 = Werke 1, p. 619, 625, 633, 639.

65) S. bei *Ch. Hermite*, J. f. Math. 88 (1880), p. 10.

(J. f. Math. 40, 1850, p. 261, 279, 291, 308), neuerdings in *H. Minkowski*'s Geometrie der Zahlen, Leipz. 1896, 1. Lief. begründet. S. dazu *Hurwitz*, Math. Ann. 39, 1891, p. 279, sowie die Theorie der linearen und quadratischen Formen [I C 2, Nr. a — e]. Die quadratischen Irrationellen (Wurzeln ganzzahliger Gleichungen 2. Grades) sind durch periodische Kettenbrüche charakterisiert [I A 3, Nr. **51**; I C 2, Nr. a, 12)], insofern der gewöhnliche Kettenbruch für die Wurzel einer ganzzahligen quadratischen Gleichung periodisch ist, und umgekehrt; den Kettenbruch für die zweite Wurzel erhält man nach einem Galoisschen Satze (J. de math. 11, 1846, p. 385), wenn man — 1 durch jenen mit umgekehrter Folge der Teilnenner dividiert[66]).

Jacobi machte es wahrscheinlich, dass den kubischen Irrationellen ein ähnlicher Charakter zukommt[67]).

Neuestens hat *Minkowski* (Gött. Nachr. 1899, p. 64, s. auch I C 2, Nr. a, 12)]) solchen Charakter allgemein für die algebraischen Zahlen n^{ten} Grades [I C 4 a, Nr. **1**] angegeben. Sei a eine algebraische Zahl und

$$\xi = x_1 + a x_2 + a^2 x_3 + \cdots + a^{n-1} x_n;$$

indem man n unabhängige Systeme der n Veränderlichen $x_i < r$ wählt, für welche ξ die kleinstmöglichen Werte erhält, bildet man für wachsende r eine „*Kette*“ von Substitutionen $P_1, P_2, P_3, \ldots$, durch welche ξ in $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots$ übergehe; die algebraischen Zahlen a vom n^{ten} Grade sind dann dadurch charakterisiert, dass die Kette nicht abbricht und unter den χ nur eine endliche Anzahl wesentlich verschiedener vorhanden ist und in ihnen alle Koeffizienten von Null verschieden sind.

Die Kettenbruchentwicklung für $\sqrt{D}$ ist periodisch mit *einem* Vorgliede und von einer der Formen:

$$(q_0; q_1, q_2, \ldots q_h, q_h, \ldots q_2, q_1, 2q_0; \ldots), \quad \text{Periode ohne Mittelglied,}$$

$$(q_0; q_1, \ldots q_h, k, q_h, \ldots q_1, 2q_0; \ldots), \quad \text{Periode mit Mittelglied.}$$

Im ersten Fall bilden Zähler und Nenner von

$$(q_0; q_1, \ldots q_1, 2q_0; q_1, \ldots q_1),$$

im zweiten Falle Zähler und Nenner von

$$(q_0; q_1, \ldots k, \ldots q_1)$$

die Auflösung der Pell'schen Gleichung $x^2 - Dy^2 = 1$ in kleinsten positiven ganzen Zahlen [I C 2, Nr. c, 2)]. Die Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$

66) S. über die Bedingung gleicher Perioden für beide Wurzeln *Lebesgue*, J. de math. 5 (1840), p. 281; *E. Galois* ebend. 11 (1846), p. 385.

67) J. f. Math. 69 (1868), p. 1 = Werke 6, p. 355.

ist nur erfüllbar im ersteren Falle, wo Zähler und Nenner von $(q_0; q_1, q_2, \ldots q_2, q_1)$ die Auflösung in kleinsten positiven ganzen Zahlen liefern; die Entwicklung bis zum ersten Quotienten q_h giebt alsdann eine Darstellung von D als Summe zweier Quadrate. Diese schon von *Lagrange* gefundenen und von *Legendre* in seiner théorie des nombres (1. Hauptteil § 7) reproduzierten Resultate sind u. a. von *Stern*, J. f. Math. 10, 1833, p. 1, 154, 241, 364; ebend. 11, 1834, p. 33, 142, 277, 311 sowie ebend. 53, 1857, p. 1 eingehend erörtert; hier finden sich Bemerkungen zur Vereinfachung der Berechnung einer „Pell'schen Tafel" wie *Degen*'s canon Pellianus, Hafniae 1817 (s. dazu Erweiterungen bei *A. Cayley*, Brit. Ass. Rep. 1893, p. 73 = Papers 13, p. 430), der die kleinsten Auflösungen der Gleichung bis $D = 1000$ giebt. Vgl. auch *Ad. Göpel*, J. f. Math. 45, 1853, p. 1, wo Sätze über Darstellungen von Zahlen in der Form $x^2 - Dy^2$ hergeleitet werden, und zur Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{D}$ und den gemischt-periodischen Kettenbrüchen [I A 3, Nr. **51**] *E. de Jonquières*, Par. C. R. 96, 1883, p. 1297, 1351, 1420, 1490.

J. Liouville[68]) zeigte zuerst, dass es auch *transcendente* Zahlen (welche nicht Wurzeln einer ganzzahligen algebraischen Gleichung sein können) giebt, indem er nachwies, dass die Teilnenner des gewöhnlichen Kettenbruchs einer algebraischen Zahl einer gewissen Bedingung unterworfen sind, und einen Kettenbruch bildete, dessen Teilnenner diese nicht erfüllen. *G. Cantor* schloss dasselbe (J. f. Math. 77, 1874, p. 258) aus der Möglichkeit, den Inbegriff aller reellen algebraischen Zahlen in eine gesetzmässige („*abzählbare*") Reihe zu ordnen [I A 5, Nr. 2, Fussn. 8]. Aus den Kettenbrüchen für $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ und $\operatorname{tang} x$ fand *J. H. Lambert*[69]), dass π und e^m für rationales m nicht rational sind, nach *Legendre*[69]) ist es auch π^2 nicht. *J. Liouville*[70]) bewies mittels der Reihe für e, dass weder e noch e^2 rational oder eine quadratische Irrationelle ist. *Hurwitz*[71]) betrachtete Kettenbrüche, deren Teilnenner höhere arithmetische Reihen bilden, nämlich Kettenbrüche von folgender Form:

$$\left(q_0, q_1, q_2, \ldots q_i, \quad \overline{\varphi_1(m), \varphi_2(m), \ldots \varphi_k(m)}\right),$$

wo unter $\overline{\varphi_1(m), \varphi_2(m), \ldots \varphi_k(m)}$ die Folge dieser Werte für $m = 1, 2, 3, \ldots$ zu verstehen ist; er leitete u. a. die Formeln her:

68) J. de math. 16 (1851), p. 133.

69) *H. Lambert*, Berl. Hist. 17 (1761), p. 265; *Legendre*, Élémens de géométrie, Paris 1794; 12. éd. 1823, 4. Anmerkung.

70) J. de math. 5 (1840), p. 192, 193.

71) *Hurwitz* in Zürich. Naturf. Ges. Viert. 41 (1896), p. 34.

$$e = (2, \overline{1, 2m, 1}), \quad e^2 = (7, \overline{3m-1, 1, 1, 3m, 12m+6}),$$

deren erste schon bei *Euler*, Petr. Comm. 9, 1744 (1737), p. 120 sich findet, und schloss, dass e nicht Wurzel einer ganzzahligen Gleichung 1., 2., 3. Grades sein kann. Doch waren schon *Hermite*'s epochemachende Untersuchungen voraufgegangen[72]), welche die Transcendenz von e feststellten. Bildet man aus $A = \sin x$ die Grössen

$$A_1 = \int_0^x x A\, dx, \quad A_2 = \int_0^x x A_1\, dx, \ldots$$

für welche $A_{n+1} = (2n+1)A_n - x^2 A_{n-1}$ ist, eine Formel, die zum Lambert'schen Kettenbruche

$$\operatorname{tang} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cdots}}}$$

führt, so lässt sich A_n in jeder der beiden Formen darstellen:

$$\psi(x)\sin x + \chi(x)\cos x = \frac{x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \int_0^1 (1-z^2)^n \cos xz\, dz,$$

wo $\psi(x)$, $\chi(x)$ ganze ganzzahlige Funktionen von x; hieraus folgerte *Hermite*, dass weder π noch π^2 rational ist. Ferner schliesst er durch Auflösung der Gleichungen

$$A_n = \psi(x)\sin x + \chi(x)\cos x, \int_0^x A_n dx = \psi_1(x)\sin x + \chi_1(x)\cos x + C$$

nach $\sin x$, $\cos x$, dass die Entwicklungen von $\sin x$, $\cos x$ nach steigenden Potenzen von x bis auf Potenzen vom Grade $\overline{\gtrless} 2n$ mit denjenigen zweier gebrochener Funktionen mit gemeinsamem Nenner übereinstimmen, und findet so auch für e^x einen Näherungsbruch mit gleicher Annäherung. Allgemeiner ist aber für eine ganze Funktion $F(z)$ vom Grade μ

$$\text{(H)} \qquad \int e^{-zx} F(z)\, dz = -e^{-zx} \cdot \mathfrak{F}(z),$$

wo

$$\mathfrak{F}(z) = \frac{F(z)}{x} + \frac{F'(z)}{x^2} + \cdots + \frac{F^{(\mu)}(z)}{x^{\mu+1}};$$

---

72) *Hermite,* Sur la fonction exponentielle, Paris 1874 und J. f. Math. 76 (1873), p. 303, 342.

hiernach findet sich für

$$F(z) = f(z)^m = [z(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)]^m,$$

$$e^{z_i x} \cdot N(x) - M_i(x) = x^{u+1} \cdot e^{z_i x} \cdot \int_0^{z_i} e^{-zx} f(z)^m \, dz,$$

wo $M_i(x)$, $N(x)$ ganze, ganzzahlige Funktionen sind, womit n Brüche mit demselben Nenner geliefert werden, die sich gleichzeitig bis auf dieselbe Potenz von x den Exponentialgrössen $e^{z_1 x}$, $e^{z_2 x}, \ldots e^{z_n x}$ annähern. Zwischen den für die successiven Werte von m gebildeten Näherungsbrüchen besteht ein Rekursionsgesetz ähnlich demjenigen bei den Näherungsbrüchen eines Kettenbruchs, aus dessen Betrachtung die Beziehung

$$\varepsilon_{i,m}^h = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1)} \int_{z_0}^{z_i} e^{-z} \frac{f(z)^m}{z - z_h} dz = e^{-z_0} \cdot \alpha_0^h - e^{-z_i} \cdot \alpha_i^h,$$

wo zugleich mit $z_0 = 0, z_1, z_2, \ldots$ auch α_0^h, α_i^h ganze Zahlen sind, hervorgeht; da $\varepsilon_{i,m}^h$ mit wachsendem m unendlich abnimmt, würde eine ganzzahlige Gleichung

$$e^{z_0} N_0 + e^{z_1} N_1 + \cdots + e^{z_n} N_n = 0$$

zu dem Systeme linearer Gleichungen

$$\alpha_0^h N_0 + \alpha_1^h N_1 + \cdots + \alpha_n^h N_n = 0$$
$$(h = 0, 1, 2, \ldots n)$$

führen, welches unmöglich ist, da seine Determinante nicht Null; somit ist e transcendent. —

Durch eine Verallgemeinerung der Hermite'schen Betrachtung erlangte *F. Lindemann*[73]) den Nachweis der Transcendenz auch für π. Da nämlich $e^{\pi i} = -1$, so muss π transcendent sein, wenn e^{ζ} für jede (ganze) [I C 4 a, Nr. 2] algebraische Zahl ζ irrational ist. Sind aber $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ die Wurzeln der irreduzibeln Gleichung, der ζ genügt, und $M_1, M_2, \ldots M_n$ die Koeffizienten der Gleichung mit den Wurzeln $e^{\zeta_1}, e^{\zeta_2}, \ldots e^{\zeta_n}$, so müsste, falls eine der letztern rational wäre, für ganzzahlige N_i eine Identität

$$N_0 + M_1 N_1 + \cdots + M_n N_n = 0$$

---

73) *Lindemann*, Math. Ann. 20 (1882), p. 213. Eine einfache Darstellung der Arbeiten von *Hermite* und *Lindemann* bezweckt *E. Rouché*, N. Ann. (3) 2 (1883), p. 5.

bestehen. Der Nachweis ihrer Unmöglichkeit fliesst aus den gleichen Beziehungen zwischen bestimmten Integralen wie zuvor, doch sind die Integrationswege der letzteren jetzt komplex [II B 3]; zwei Fälle sind dabei zu unterscheiden, von denen der zweite, in welchem die algebraisch verschiedenen Werte der Ausdrücke $\zeta_1 + \zeta_2$, $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3, \ldots$ nicht auch sämtlich numerisch verschieden sind, erhebliche Schwierigkeiten verursacht. Diesen Beweis hat *K. Weierstrass*[74]) wesentlich vereinfacht, indem er aus elementaren Betrachtungen einen Hilfssatz herleitet, der auch aus der Formel (H) gewonnen werden kann und also lautet: Ist $f(z)$ eine ganze ganzzahlige Funktion $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades mit den von einander verschiedenen Wurzeln $z_0, z_1, z_2, \ldots z_n$, so giebt es ein System $g_0(z), g_1(z), \ldots g_n(z)$ von $n+1$ ganzen ganzzahligen Funktionen höchstens vom Grade n, so beschaffen, dass die Determinante der Grössen $g_i(z_k)$ nicht Null und jede der Differenzen $g_i(z_0)\cdot e^{z_k} - g_i(z_k)\cdot e^{z_0}$ (für $i, k = 0, 1, 2, \ldots n$) absolut kleiner als ein beliebig kleiner Wert δ ist. Da $e^{\pi i} + 1 = 0$, muss π transcendent sein, wenn $e^x + 1$ für jeden algebraischen Wert x von Null verschieden ausfällt. Dies wird gezeigt durch Betrachtung des Produkts

$$P = \prod_{h=1}^{r} (e^{x_h} + 1) = \sum e^{z_k},$$

in welchem $x_1, x_2, \ldots x_r$ die Wurzeln der irreduzibeln Gleichung, der x genügt, und z_k die Null, jedes x_h, jede Summe zweier x_h, u. s. w. bedeuten, sowie durch Anwendung des Hilfssatzes auf die ganzzahlige Gleichung, deren Wurzeln die *verschiedenen* dieser Werte: $z_0 = 0$, z_1, $z_2, \ldots z_n$ sind. In Verfolgung des gleichen Weges ergiebt sich auch der allgemeinste der Lindemann'schen Sätze, dass $\sum_{i=1}^{r} X_i e^{x_i} = 0$ unmöglich ist, wenn die x_i verschiedene, die X_i beliebige, nur nicht sämtlich verschwindende algebraische Zahlen sind. Insbesondere folgt daraus, dass e^x, $\log x$ stets transcendent sind, wenn x eine von 0 resp. 1 verschiedene algebraische Zahl ist, ein Satz, von welchem das Hermite'sche Resultat betreffend die Zahl e den einfachsten Fall ausmacht.

Durch den Nachweis von der Transcendenz von π fand auch das Problem von der Quadratur des Kreises [III A 3] seine endgiltige Lösung,

---

74) Berl. Ber. 1885, p. 1067. Eine Erweiterung seiner Betrachtungen auf die Integrale linearer Differentialgleichungen gaben *Hurwitz* Math. Ann. 22 (1883), p. 211 und *E. Ratner*, ebenda 32 (1888), p. 566.

wenn auch in negativem Sinne, insofern es unmöglich ist, sie mittels Zirkel und Lineal zu leisten, da sonst π eine quadratische Irrationelle sein müsste; s. zur Geschichte dieses Problems u. a. *F. Rudio*'s Schrift: *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre,* Leipzig 1892; *F. Klein,* Vorträge über Elementargeometrie, ausgearb. v. *F. Tägert,* Leipzig 1895.

Seit *Weierstrass* sind diese Nachweise noch weiter vereinfacht durch *D. Hilbert*, *A. Hurwitz* und *P. Gordan*[75]). Der Erstgenannte multipliziert die angenommene Gleichung

$$\text{(e)} \qquad a + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n = 0$$

mit $\int\limits_0^\infty [z(z-1)(z-2)\cdots(z-n)]^{\varrho+1}\cdot \frac{e^{-z}dz}{z}$; setzt man

$$P_1 = a\int\limits_0^\infty + a_1 e\int\limits_1^\infty + a_2 e^2\int\limits_2^\infty + \cdots + a_n e^n\int\limits_n^\infty,$$

$$P_2 = \qquad a_1 e\int\limits_0^1 + a_2 e^2\int\limits_0^2 + \cdots + a_n e^n\int\limits_0^n,$$

so ist bei passender Wahl der ganzen Zahl ϱ die ganze Zahl $\frac{P_1}{\varrho!}$ von Null verschieden und $\frac{P_2}{\varrho!} < 1$, also nicht $P_1 + P_2 = 0$, d. h. e ist transcendent. In analoger Weise ergiebt sich die Transcendenz von π aus der Betrachtung des über die Wurzeln α einer für $i\pi$ angenommenen algebraischen Gleichung ausgedehnten Produktes $\Pi(1 + e^\alpha)$. *Hurwitz* zeigt die Transcendenz von e, indem er, Integrale vermeidend, den Satz benutzt, dass, wenn für eine ganze Funktion r^{ten} Grades $f(x)$

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(r)}(x)$$

gesetzt wird,

$$\text{(f)} \qquad e^{-x}F(x) - F(0) = -xe^{-\theta x}\cdot f(\theta x), \qquad 0 < \theta < 1$$

ist; dass (e) unmöglich ist, findet sich dann durch Anwendung dieser Formel für $x = 1, 2, \ldots n$ auf die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}[(x-1)(x-2)\cdots(x-n)]^p,$$

falls p Primzahl $> n$ und $> a$. Statt (f) zu benutzen, stützt sich *Gordan* auf die Reihe für e^x. Ist nämlich $(x+h)^{(r)}$ das, was aus $(x+h)^r$ entsteht, wenn h^k durch $k!$ ersetzt wird, so ist

$$c_r\cdot r!\, e^x = c_r(x+h)^{(r)} + q_r e^\xi\cdot c_r x^r,$$

75) Math. Ann. 43 (1893), p. 216, 220, 222 resp.; s. auch Gött. Nachr. 1893, p. 153. Vgl. noch den algebraischen Beweis von *K. Th. Vahlen* in einer demnächst in den Math. Ann. erscheinenden Arbeit.

wo ξ absoluter Betrag von x, und derjenige von $q_r < 1$ ist; die Anwendung dieser Formel auf die entwickelte Hurwitz'sche Funktion $f(x) = \sum c_r x^r$ ergiebt die Transcendenz von e; die Verallgemeinerung für π wird analog erreicht wie bei *Hilbert.* Gleichfalls mittels der Reihe für e^x gab endlich *F. Mertens* einen ebenfalls elementaren aber umständlicheren Beweis der Lindemann'schen Sätze [76]). Im Zusammenhange mit diesem Gegenstande s. *Paul Stäckel,* Untersuchungen über arithmetische Eigenschaften analytischer Funktionen, Math. Ann. 46, 1895, p. 513.

76) *Mertens,* Wien. Ber. 1896, p. 839.

Nachträge zu I C 3.

Zu Nr. 5. Neuestens (Par. Soc. m. Bull. 28, 1900) leitete *E. Landau* aus dem asymptotischen Werte x von $\sum\limits_{p \leqq x} \log p$ mittels eines allgemeinen, den asymptotischen Wert einer Summe $\sum\limits_{p \leqq x} F(p, x)$ betreffenden Satzes die schon von *Hadamard* a. a. O. gegebene allgemeinere Beziehung: $\sum\limits_{p \leqq x} \log p \cdot \log^{\mu - 1} \frac{x}{p}$ für $\mu > 1$ asymptotisch gleich $x\,\Gamma(\mu)$ her, sowie einen asymptotischen Ausdruck für die Anzahl der Zahlen $\leqq x$, die aus k verschiedenen Primfaktoren bestehen.

In seiner Dissert. (Kiel 1900) gab *H. Teege* eine neue Vorzeichenbestimmung für die Gauss'schen Summen, nebst einer Modifikation des Kronecker'schen Verfahrens [Fussnote 18)], ferner eine Ergänzung der Stern'schen Kombinationen [Ende von Nr. **1**], sowie den Nachweis, dass auch für quadratische Formen von negativer Determinante die Klassenanzahl mittels der Funktionen $Y(x)$, $Z(x)$ [Nr. **2**] mit der Kreisteilung zusammenhängt.

Die Litteraturnachweise zu I C 3 hat *W. Fr. Meyer* wesentlich vervollständigt.

I C 4 a. THEORIE DER ALGEBRAISCHEN ZAHLKÖRPER

VON

DAVID HILBERT

IN GÖTTINGEN.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

Lehrbücher und Monographien.

R. Dedekind, Supplement XI zu *Lejeune-Dirichlet*'s Vorlesungen über Zahlentheorie. 4. Auflage, Braunschweig 1894.

R. Dedekind, Über die Diskriminante endlicher Körper, Göttingen 1882 = Gött. Abh. 29, 1882.

L. Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, Berlin 1882 = J. f. Math. 92, p. 1.

H. Weber, Lehrbuch der Algebra, 2. Auflage, Braunschweig 1898; frz. v. *J. Griess,* Par. 1898.

J. J. Iwanow, Die ganzen komplexen Zahlen, St. Petersb. 1891 und Petersb. Abh. 72, 1893.

J. Sochocki, Das Prinzip des grössten gemeinsamen Teilers in Anwendung auf die Theorie der algebraischen Zahlen, St. Petersburg 1893.

H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, 1. Lief., Leipzig 1896.

D. Hilbert, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Deutsche Math.-Ver. 4, 1897, p. 175.

Die vorstehend genannten Werke werden im folgenden nicht mehr besonders citiert. Ein genaues Verzeichnis der Litteratur über algebraische Zahlkörper findet sich in dem Jahresbericht der deutschen Math.-Ver. 4, Berlin 1897, p. 526.

---

1. Algebraischer Zahlkörper. Eine Zahl α, welche einer Gleichung mit rationalen Zahlenkoeffizienten genügt, heisst eine *algebraische Zahl.* Sind $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ eine endliche Anzahl beliebiger algebraischer Zahlen, so bilden alle rationalen Funktionen von $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ mit rationalen Zahlenkoeffizienten ein in sich abgeschlossenes System von algebraischen Zahlen, welches *Zahlkörper*, *Körper* (*R. Dedekind*) oder *Rationalitätsbereich* (*L. Kronecker*) genannt wird. Da insbesondere die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient zweier Zahlen eines Körpers oder Rationalitätsbereiches wieder eine Zahl des Körpers ist, so verhält sich der Begriff des Körpers oder Rationalitätsbereichs gegenüber den vier Rechnungsoperationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division invariant [I B 1 c, Nr. 2].

In jedem Körper k giebt es eine Zahl ϑ derart, dass alle anderen Zahlen des Körpers ganze rationale Funktionen von ϑ mit rationalen Koeffizienten sind. Der Grad m der Gleichung niedrigsten Grades mit rationalen Koeffizienten, der diese Zahl ϑ genügt, heisst der *Grad* des Körpers k. Die Zahl ϑ wird eine den Körper *bestimmende Zahl* genannt. Die Gleichung m^{ten} Grades für ϑ ist in dem durch die rationalen Zahlen bestimmten Rationalitätsbereiche irreduzibel. Umgekehrt bestimmt jede Wurzel einer solchen irreduzibeln Gleichung einen Zahlkörper m^{ten} Grades. Sind $\vartheta', \vartheta'', \ldots, \vartheta^{(m-1)}$ die $m-1$ anderen Wurzeln der Gleichung, so heissen die bez. durch $\vartheta', \vartheta'', \ldots, \vartheta^{(m-1)}$ bestimmten Körper $k', k'', \ldots, k^{(m-1)}$ die *zu k konjugierten Körper.* Ist α eine beliebige Zahl des Körpers k und drücken wir α durch ϑ als rationale Funktion mit rationalen Koeffizienten aus, so heissen die bezüglichen durch die Substitutionen [I A 6, Nr. **1**]:

$$t' = (\vartheta : \vartheta'),\ t'' = (\vartheta : \vartheta''), \ldots,\ t^{(m-1)} = (\vartheta : \vartheta^{(m-1)})$$

aus α entspringenden Zahlen *zu α konjugiert* [I B 1 c, Nr. **4**].

2. Ganze algebraische Zahl. Eine algebraische Zahl α heisst *ganz*, wenn sie einer Gleichung genügt, in welcher der Koeffizient der höchsten Potenz gleich 1 ist und deren übrige Koeffizienten sämtlich ganze rationale Zahlen sind [I B 1 c, Nr. **3**]. Jede ganze ganzzahlige Funktion F, d. h. jede ganze rationale Funktion mit ganzzahligen rationalen Koeffizienten von beliebig vielen ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa$ ist wiederum eine ganze Zahl. Insbesondere ist die Summe, die Differenz und das Produkt zweier ganzen Zahlen wiederum eine ganze Zahl. Der Begriff „ganz" verhält sich mithin gegenüber den drei Rechnungsoperationen der Addition, Subtraktion und Multiplikation invariant. Eine ganze Zahl γ heisst durch die ganze Zahl α *teilbar*, wenn eine ganze Zahl β existiert, sodass $\gamma = \alpha\beta$ ist.

Die Wurzeln einer Gleichung sind stets ganze Zahlen, sobald der Koeffizient der höchsten Potenz gleich 1 und die übrigen Koeffizienten der Gleichung ganze Zahlen sind. Wenn eine ganze Zahl zugleich rational ist, so ist sie stets eine ganze rationale Zahl.

Ist α eine beliebige Zahl des Körpers k, und bedeuten $\alpha', \ldots, \alpha^{(m-1)}$ die zu α konjugierten Zahlen, so heisst das Produkt

$$n(\alpha) = \alpha\alpha' \cdots \alpha^{(m-1)}$$

die *Norm der Zahl* α im Körper k. Die Norm einer Zahl ist stets eine rationale Zahl. Ferner heisse das Produkt

$$\delta(\alpha) = (\alpha - \alpha')(\alpha - \alpha'') \cdots (\alpha - \alpha^{(m-1)})$$

die *Differente der Zahl* α. Die Differente einer Zahl ist stets eine Zahl des Körpers k. Endlich heisst das Produkt

$$d(\alpha) = (\alpha - \alpha')^2(\alpha - \alpha'')^2(\alpha' - \alpha'')^2 \cdots (\alpha^{(m-2)} - \alpha^{(m-1)})^2$$

die *Diskriminante der Zahl* α. Die Diskriminante einer Zahl ist eine rationale Zahl und zwar bis auf das Vorzeichen gleich der Norm der Differente dieser Zahl [I B 1 c, Nr. **4**].

Ist α eine den Körper bestimmende Zahl, so sind ihre Differente und Diskriminante verschieden von 0. Umgekehrt, wenn Differente oder Diskriminante einer Zahl von 0 verschieden sind, so bestimmt diese den Körper. Ist α eine ganze Zahl, so sind ihre Norm, ihre Differente, ihre Diskriminante ebenfalls ganz.

In einem Zahlkörper m^{ten} Grades giebt es stets m ganze Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ von der Beschaffenheit, dass jede andere ganze Zahl ω des Körpers sich in der Gestalt

$$\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \cdots + a_m\omega_m$$

darstellen lässt, wo $a_1, \ldots, a_m$ ganze rationale Zahlen sind. Die

Zahlen $\omega_1, \ldots, \omega_m$ heissen eine Basis des Systems aller ganzen Zahlen des Körpers k, oder kurz eine *Basis des Körpers* k.

3. Ideale des Körpers und ihre Teilbarkeit. Die Gesetze der Zerlegung der ganzen Zahlen eines Körpers zeigen eine genaue Analogie mit den elementaren Teilbarkeitsgesetzen in der Theorie der ganzen rationalen Zahlen. Sie sind für den besonderen Fall des Kreiskörpers zuerst von *E. Kummer* [1]) entdeckt worden; ihre Ergründung für den allgemeinen Zahlkörper ist das Verdienst von *R. Dedekind* und *L. Kronecker*.

Ein System von unendlich vielen ganzen algebraischen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ des Körpers k, welches die Eigenschaft besitzt, dass eine jede lineare Kombination $\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots$ derselben wiederum dem System angehört, heisst ein *Ideal* $\mathfrak{a}$ (*R. Dedekind*); dabei bedeuten λ_1, $\lambda_2, \ldots$ ganze algebraische Zahlen des Körpers k. In einem Ideal $\mathfrak{a}$ giebt es stets m Zahlen $\iota_1, \ldots, \iota_m$ von der Art, dass eine jede andere Zahl ι des Ideals gleich einer linearen Kombination derselben von der Gestalt

$$\iota = l_1 \iota_1 + \cdots + l_m \iota_m$$

ist, wo $l_1, \ldots, l_m$ ganze rationale Zahlen sind.

Die Zahlen $\iota_1, \ldots, \iota_m$ heissen eine *Basis* des Ideals $\mathfrak{a}$.

Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ irgend r solche Zahlen des Ideals $\mathfrak{a}$, durch deren lineare Kombination unter Benutzung ganzer algebraischer Koeffizienten λ des Körpers alle Zahlen des Ideals erhalten werden können, so schreibt man kurz

$$\mathfrak{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r).$$

Ein Ideal, welches alle und nur die Zahlen von der Gestalt $\lambda \alpha$ enthält, wo λ jede beliebige ganze Zahl des Körpers darstellt und α eine bestimmte ganze Zahl des Körpers bedeutet, heisst ein *Hauptideal* und wird mit (α) oder auch kurz mit α bezeichnet.

Eine jede Zahl α des Ideals $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ heisst *kongruent* 0 nach dem Ideal $\mathfrak{a}$ oder in Zeichen:

$$\alpha \equiv 0, \quad (\mathfrak{a}).$$

Wenn die Differenz zweier Zahlen α und β kongruent 0 nach $\mathfrak{a}$ ist, so heissen α und β einander *kongruent* nach $\mathfrak{a}$ oder in Zeichen

$$\alpha \equiv \beta, \quad (\mathfrak{a}).$$

Wenn man jede Zahl eines Ideals $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ mit jeder Zahl eines zweiten Ideals $\mathfrak{b} = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$ multipliziert und die so

1) J. f. Math. 35 (1847), p. 319, 327 und 40 (1850), p. 93, 117.

erhaltenen Zahlen linear mittelst beliebiger ganzer algebraischer Koeffizienten des Körpers kombiniert, so wird das so entstehende neue Ideal das *Produkt* der zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ genannt, d. h. in Zeichen

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = (\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_r\beta_1, \ldots, \alpha_1\beta_s, \ldots, \alpha_r\beta_s).$$

Ein Ideal $\mathfrak{c}$ heisst durch das Ideal $\mathfrak{a}$ *teilbar*, wenn ein Ideal $\mathfrak{b}$ existiert derart, dass $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ ist.

Ein von 1 verschiedenes Ideal, welches durch kein anderes Ideal teilbar ist, ausser durch das Ideal $1 = (1)$ und durch sich selbst, heisst ein *Primideal*. Zwei Ideale heissen zu einander *prim*, wenn sie ausser 1 keinen gemeinsamen Idealteiler besitzen. Zwei ganze Zahlen α und β, bez. eine ganze Zahl α und ein Ideal $\mathfrak{a}$ heissen zu einander *prim*, wenn die Hauptideale (α) und (β) bez. das Hauptideal (α) und das Ideal $\mathfrak{a}$ zu einander prim sind.

Ein jedes Ideal $\mathfrak{j}$ lässt sich stets auf eine und nur auf eine Weise als Produkt von Primidealen darstellen.

Die ersten Beweise dieses fundamentalen Satzes gaben *R. Dedekind* und *L. Kronecker* in den anfangs genannten Abhandlungen. Dem Beweise von *D. Hilbert*[2]) liegt die Theorie des Galois'schen Zahlkörpers [Nr. **14**] zu Grunde. Der Beweis von *A. Hurwitz*[3]) beruht auf dem Satze, dass sich die Ideale eines Körpers auf eine endliche Anzahl von Idealklassen (vgl. Nr. **8**) verteilen.

4. Kongruenzen nach Idealen. Die in Nr. **3** entwickelte Theorie der Zerlegung der Ideale eines Körpers gestattet es, die elementaren Sätze der Theorie der rationalen Zahlen auf die Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers zu übertragen (*R. Dedekind*).

Die Anzahl der möglichen nach einem Ideal $\mathfrak{a}$ unter einander inkongruenten ganzen Zahlen des Körpers heisst die *Norm* des Ideals $\mathfrak{a}$, in Zeichen $n(\mathfrak{a})$. Die Norm eines Primideals $\mathfrak{p}$ ist eine Potenz der durch $\mathfrak{p}$ teilbaren rationalen Primzahl p. Der Exponent $\mathfrak{f}$ dieser Potenz heisst der *Grad* des Primideals $\mathfrak{p}$. Die Norm des Produktes zweier Ideale $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ ist gleich dem Produkt ihrer Normen.

Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal vom Grade f, so genügt jede ganze Zahl ω des Körpers k der Kongruenz

$$\omega^{p^f} \equiv \omega, \quad (\mathfrak{p}).$$

Die Anzahl solcher möglichen nach einem Ideale $\mathfrak{a}$ einander inkongruenten Zahlen, welche prim zu $\mathfrak{a}$ sind, ist

2) Math. Ann. 44 (1894), p. 1; Deutsche Math.-Ver. 4 (1897), p. 247—249.
3) Gött. Nachr. 1895, p. 324.

$$\varphi(\mathfrak{a}) = n(\mathfrak{a})\left(1 - \frac{1}{n(\mathfrak{p}_1)}\right)\left(1 - \frac{1}{n(\mathfrak{p}_2)}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n(\mathfrak{p}_r)}\right),$$

wo $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ die sämtlichen in $\mathfrak{a}$ aufgehenden und von einander verschiedenen Primideale bedeuten. Für die Zahl φ gelten die beiden Formeln

$$\varphi(\mathfrak{a})\,\varphi(\mathfrak{b}) = \varphi(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \quad \text{und} \quad \sum \varphi(\mathfrak{t}) = n(\mathfrak{a});$$

in der ersteren Formel bedeuten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zu einander prime Ideale, in der letzteren erstreckt sich die Summation auf alle Idealteiler $\mathfrak{t}$ des Ideals $\mathfrak{a}$.

Jede zu dem Ideal $\mathfrak{a}$ prime ganze Zahl ω genügt der Kongruenz

$$\omega^{\varphi(\mathfrak{a})} \equiv 1, \quad (\mathfrak{a}).$$

Eine ganze Zahl ϱ des Körpers k heisst eine *primitive Wurzel* oder *Primitivzahl* nach dem Primideal $\mathfrak{p}$, wenn die ersten $n(\mathfrak{p}) - 1$ Potenzen derselben $n(\mathfrak{p}) - 1$ einander nach $\mathfrak{p}$ inkongruente zu $\mathfrak{p}$ prime Zahlen darstellen.

5. Diskriminante des Körpers. Die *Diskriminante* des Körpers k ist, wenn $\omega_1, \ldots, \omega_m$ eine Basis von k bedeutet, definiert durch die Gleichung

$$d = \begin{vmatrix} \omega_1, & \ldots, & \omega_m \\ \omega_1', & \ldots, & \omega_m' \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \omega_1^{(m-1)}, & \ldots, & \omega_m^{(m-1)} \end{vmatrix}^2;$$

sie ist eine ganze rationale Zahl.

Die Diskriminante d des Zahlkörpers k enthält alle und nur diejenigen rationalen Primzahlen als Faktoren, welche durch das Quadrat eines Primideals teilbar sind.

Der Beweis dieses Satzes hat erhebliche Schwierigkeiten verursacht; er ist zum ersten Mal von *R. Dedekind*[4]) geführt worden. *K. Hensel*[5]) hat einen zweiten Beweis dieses Satzes gegeben und dadurch die Kronecker'sche Theorie der algebraischen Zahlen in einem wesentlichen Punkte ergänzt. Der Hensel'sche Beweis beruht auf folgenden von *L. Kronecker* geschaffenen Begriffen:

Bedeuten $u_1, \ldots, u_m$ Unbestimmte, und ist $\omega_1, \ldots, \omega_m$ eine Basis des Körpers k, so heisst

$$\xi = \omega_1 u_1 + \cdots + \omega_m u_m$$

4) Gött. Abh. 29 (1882).
5) J. f. Math. 113 (1894), p. 61.

eine *Fundamentalform* des Körpers k. Dieselbe genügt offenbar einer Gleichung von der Gestalt

$$x^m + U_1 x^{m-1} + U_2 x^{m-2} + \cdots + U_m = 0,$$

wo $U_1, \ldots, U_m$ gewisse ganze Funktionen von $u_1, \ldots, u_m$ mit ganzen rationalen Koeffizienten sind. Diese Gleichung heisst die *Fundamentalgleichung*. Es gilt nun der Satz, dass die Diskriminante der Fundamentalgleichung gleich einem Ausdruck von der Gestalt dU wird, wo d die Körperdiskriminante und U eine ganzzahlige Funktion von $u_1, \ldots, u_m$ bedeutet, deren Koeffizienten den grössten gemeinsamen Teiler 1 besitzen.

Die $m - 1$ Ideale

$$\begin{aligned}
\mathfrak{e}' &= \big((\omega_1 - \omega_1'), \quad \ldots, (\omega_m - \omega_m')\big),\\
\mathfrak{e}'' &= \big((\omega_1 - \omega_1''), \quad \ldots, (\omega_m - \omega_m'')\big),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathfrak{e}^{(m-1)} &= \big((\omega_1 - \omega_1^{(m-1)}), \quad \ldots, (\omega_m - \omega_m^{(m-1)})\big),
\end{aligned}$$

gehören im allgemeinen dem Zahlkörper k nicht an; dagegen ist das Produkt $\mathfrak{d} = \mathfrak{e}'\mathfrak{e}'' \ldots \mathfrak{e}^{(m-1)}$ ein Ideal des Körpers k. Das Ideal $\mathfrak{d}$ heisst das *Grundideal* (*R. Dedekind*) oder die *Differente* (*D. Hilbert*) des Körpers k. Die Norm der Differente $\mathfrak{d}$ ist gleich der Diskriminante d des Körpers k.

Die Diskriminanten aller ganzen Zahlen des Körpers erhält man, wenn man die Diskriminante der Fundamentalgleichung bildet und in dieser den Parametern $u_1, \ldots, u_m$ alle ganzen rationalen Zahlenwerte erteilt. Der grösste gemeinsame Teiler aller dieser Diskriminanten stimmt nicht notwendig mit der Körperdiskriminante d überein, da sehr wohl der Fall eintreten kann, dass die ganzzahlige Funktion U für alle ganzen rationalen Werte von $u_1, \ldots, u_m$ eine Reihe von Zahlen mit einem festen von 1 verschiedenen Teiler darstellt. *R. Dedekind*[6]) und *K. Hensel*[7]) haben wesentlich von einander verschiedene Bedingungen dafür aufgestellt, dass eine Primzahl p als ein solcher fester Zahlenteiler in U auftritt.

H. Minkowski[8]) hat bewiesen, dass die Diskriminante d eines Zahlkörpers stets von ± 1 verschieden ausfällt und dass es nur eine endliche Anzahl von Körpern mit einer vorgeschriebenen Diskriminante d giebt.

---

6) Gött. Abh. 23 (1878).

7) Diss., Berlin 1884; J. f. Math. 101 (1887), p. 99; 103 (1888), p. 230 und 113 (1894), p. 128.

8) J. f. Math. 107 (1891), p. 278; Par. C. R. 92 (1891), p. 209.

6. Relativkörper. Die Begriffe Norm, Differente und Diskriminante sind einer wichtigen Verallgemeinerung fähig.

Ist K ein Körper vom Grade M, welcher sämtliche Zahlen des Körpers k vom m^{ten} Grade enthält, so heisst k ein *Unterkörper* von K. Der Körper K wird ein *Oberkörper* von k oder ein *Relativkörper* in Bezug auf k genannt. Es sei Θ eine den Körper K bestimmende Zahl. Unter den unendlich vielen Gleichungen mit algebraischen, in k liegenden Koeffizienten, denen die Zahl Θ genügt, habe die folgende Gleichung vom Grade r

$$\Theta^r + \alpha_1 \Theta^{r-1} + \cdots + \alpha_r = 0$$

den niedrigsten Grad; $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sind dann bestimmte Zahlen in k. Der Grad r heisst der *Relativgrad* des Körpers K in Bezug auf k; es ist $M = rm$. Die obige Gleichung vom r^{ten} Grade ist im Rationalitätsbereich k irreduzibel. Wir definieren nun leicht die Begriffe: *relativkonjugierte Zahl, relativkonjugierter Körper, relativkonjugiertes Ideal, Relativnorm einer Zahl, Relativnorm eines Ideals, Relativdifferente einer Zahl, Relativdiskriminante einer Zahl, Relativdifferente eines Körpers, Relativdiskriminante eines Körpers.*

Nach *D. Hilbert*[9]) ist die Differente $\mathfrak{D}$ des Körpers K gleich dem Produkt der Relativdifferente $\mathfrak{D}_k$ von K in Bezug auf k und der Differente $\mathfrak{d}$ des Körpers k, d. h. es ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_k \mathfrak{d}$.

7. Einheiten des Körpers. Eine ganze Zahl ε des Körpers k, deren reziproker Wert $\frac{1}{\varepsilon}$ wiederum eine ganze Zahl ist, heisst eine *Einheit* des Körpers k. Die Norm einer Einheit ist $= \pm 1$; umgekehrt, wenn die Norm einer ganzen Zahl des Körpers $= \pm 1$ wird, so ist diese eine Einheit des Körpers. *Dirichlet*[10]) hat den folgenden Satz über die Einheiten aufgestellt und bewiesen:

Sind unter den m konjugierten Körpern $k^{(1)}, \ldots, k^{(m)}$ r_1 reelle Körper und $r_2 = \frac{m - r_1}{2}$ imaginäre Körperpaare vorhanden, so giebt es im Körper k ein System von $r = r_1 + r_2 - 1$ Einheiten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ von der Beschaffenheit, dass jede vorhandene Einheit ε des Körpers k auf eine und nur auf eine Weise in der Gestalt

$$\varepsilon = \varrho\, \varepsilon_1^{a_1} \cdots \varepsilon_r^{a_r}$$

9) Gött. Nachr. 1894, p. 224. Vgl. auch die weitergehenden Resultate von *D. Hilbert* in dessen Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Kap. 5, § 15—16.

10) Par. C. R. 10 (1840), p. 285; Berl. Ber. 1841, p. 280; 1842, p. 93; 1846, p. 103 = Werke 1, p. 619, 625, 633, 639.

dargestellt werden kann, wo $a_1, \ldots, a_r$ *ganze rationale Zahlen sind, und wo* ϱ *eine in* k *vorkommende Einheitswurzel bedeutet.*

Das System der Einheiten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ mit der in diesem Satze ausgesprochenen Eigenschaft heisst ein *System von Grundeinheiten* des Körpers k.

Wir denken uns jetzt den Körper k und die zu k konjugierten Körper mit $k^{(1)}, \ldots, k^{(m)}$ bezeichnet und in bestimmter Weise wie folgt angeordnet: voran stellen wir die r_1 reellen Körper $k^{(1)}, \ldots, k^{(r_1)}$; dann wählen wir aus jedem der r_2 Paare konjugiert imaginärer Körper je einen aus; diese Körper seien: $k^{(r_1+1)}, \ldots, k^{(r_1+r_2)}$; darauf lassen wir die zu diesen konjugiert imaginären Körper folgen: $k^{(r_1+r_2+1)}$, $\ldots, k^{(m)}$. Es sei nun ε eine beliebige Einheit in k; dann werde allgemein mit $\varepsilon^{(s)}$ die zu ε konjugierte Einheit in $k^{(s)}$ bezeichnet und endlich werde, je nachdem $k^{(s)}$ reell oder imaginär ausfällt,

$$l_s(\varepsilon) = \log |\varepsilon^{(s)}|, \quad \text{bez.} = 2 \log |\varepsilon^{(s)}|$$

gesetzt. Die Determinante

$$R = \begin{vmatrix} l_1(\varepsilon_1), & l_1(\varepsilon_2), & \ldots, & l_1(\varepsilon_r) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_r(\varepsilon_1), & l_r(\varepsilon_2), & \ldots, & l_r(\varepsilon_r) \end{vmatrix}$$

ist eine durch den Körper k bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmte Zahl; sie wird von *R. Dedekind* der *Regulator* des Körpers k genannt.

8. Idealklassen des Körpers. Jede ganze Zahl des Zahlkörpers k bestimmt ein Hauptideal; jede *gebrochene*, d. h. nicht ganze Zahl $\varkappa$ in k ist der Quotient zweier ganzen Zahlen α und β und somit als Quotient zweier Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ darstellbar: $\varkappa = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\cdot$ Denken wir die Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von allen gemeinsamen Idealfaktoren befreit, so ist diese Darstellung der gebrochenen Zahl $\varkappa$ als Idealquotient eine eindeutig bestimmte. Ist umgekehrt der Quotient $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ zweier Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ — mögen dieselben einen gemeinsamen Teiler haben oder nicht — gleich einer ganzen oder gebrochenen Zahl $\varkappa = \frac{\alpha}{\beta}$ des Körpers, so werden die beiden Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ einander *äquivalent* genannt, in Zeichen $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$. Aus $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ folgt $(\beta)\mathfrak{a} = (\alpha)\mathfrak{b}$, und somit erkennen wir, dass zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ dann und nur dann einander äquivalent sind, wenn sie durch Multiplikation mit gewissen Hauptidealen in ein und das nämliche Ideal übergehen. Die Gesamtheit aller Ideale, welche einem gegebenen Ideal äquivalent sind, heisst eine *Idealklasse.* Alle Hauptideale sind dem Ideal (1) äquivalent. Die durch sie gebildete Klasse heisst die *Hauptklasse* und wird mit 1 bezeichnet. Wenn $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b} \sim \mathfrak{b}'$ ist, so ist $\mathfrak{a}\mathfrak{a}' \sim \mathfrak{b}\mathfrak{b}'$. Ist A eine das Ideal $\mathfrak{a}$ enthaltende Idealklasse und B eine das Ideal $\mathfrak{b}$ enthaltende Idealklasse, so wird die Idealklasse, welche das Ideal $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ enthält, das *Produkt der Idealklassen* A und B genannt und mit AB bezeichnet.

R. Dedekind und *L. Kronecker* erkannten zuerst die fundamentale Thatsache, dass die Anzahl der Idealklassen eines Zahlkörpers stets endlich ist und hieraus folgt leicht, dass, wenn h diese Klassenanzahl bedeutet, die h^{te} Potenz einer jeden Klasse notwendig die Hauptklasse ist. *H. Minkowski*[8]) bewies, dass es in jeder Idealklasse ein Ideal giebt, dessen Norm den Wert $M \cdot |\sqrt{d}\,|$ nicht übersteigt, wobei M einen gewissen von *H. Minkowski* angegebenen positiven echten Bruch bedeutet. Durch diesen Satz wird die eben genannte Thatsache von der Endlichkeit der Klassenanzahl von neuem bewiesen und zugleich die Aufstellung der Idealklassen durch ein geringeres Mass von Rechnung ermöglicht.

Über den Zusammenhang der Idealklassen und ihre Darstellung durch Multiplikation gilt der von *E. Schering*[11]) und *L. Kronecker*[12]) herrührende Satz: Unter den Idealklassen eines Körpers giebt es stets gewisse q Klassen $A_1, \ldots, A_q$, sodass jede andere Klasse A auf eine und nur auf eine Weise in der Gestalt $A = A_1^{x_1}, \ldots, A_q^{x_q}$ darstellbar ist; dabei durchlaufen $x_1, \ldots, x_q$ die ganzen Zahlen 0, 1, 2, ... bez. bis $h_1 - 1, \ldots, h_q - 1$, und es ist $A_1^{h_1} = 1, \ldots, A_q^{h_q} = 1$ und $h = h_1 \ldots h_q$ [I A 6, Nr. **20**].

Es ist unter Umständen auch eine *engere Fassung des Äquivalenz- und Klassenbegriffes* von Bedeutung, indem zwei Ideale nur dann *äquivalent* heissen, wenn ihr Quotient eine total positive Zahl in k ist; hierbei heisst *total positiv* in k eine solche ganze oder gebrochene Zahl des Körpers k, die positiv ausfällt, falls k ein reeller Körper ist und deren konjugierte Zahlen ebenfalls positiv ausfallen, allemal wenn die betreffenden zu k konjugierten Körper, in denen sie liegen, reell sind.

9. Transcendente Bestimmung der Klassenanzahl. Nach dem Vorbilde von *Dirichlet*[13]), welcher [I C 3, Nr. **2**] die Anzahl der Klassen von binären quadratischen Formen mit gegebener Determinante auf transcendentem Wege ausgedrückt hat, und auf Grund der in Nr. **7** angegebenen Resultate über die Einheiten eines Zahlkörpers gelang es

11) Gött. Abh. 14 (1869).

12) Berl. Ber. 1870, p. 881 = Werke 1, p. 271.

13) J. f. Math. 17 (1837), p. 286; 18 (1838), p. 259 = Werke 1, p. 343 u. 357.

R. Dedekind eine Formel abzuleiten, vermöge welcher sich die Anzahl h der Idealklassen eines beliebigen Zahlkörpers durch das Residuum einer gewissen analytischen Funktion [II B 1] ausdrückt. Es werde

$$\zeta_k(s) = \sum_{(\mathfrak{j})} \frac{1}{n(\mathfrak{j})^s} = \prod_{(\mathfrak{p})} \frac{1}{1 - n(\mathfrak{p})^{-s}}$$

gesetzt, wobei in der unendlichen Summe $\mathfrak{j}$ alle Ideale und in dem unendlichen Produkt $\mathfrak{p}$ alle Primideale des Körpers k durchläuft; Summe und Produkt konvergieren für reelle Werte von $s > 1$ und stellen eine eindeutige Funktion der komplexen Variabeln s dar, welche an der Stelle $s = 1$ einen Pol erster Ordnung besitzt. Bedeutet w die Anzahl der in k liegenden Einheitswurzeln, so wird die Anzahl h der Idealklassen in k durch die Formel

$$h = \frac{w}{2^{r_1+r_2}\pi^{r_2}} \frac{|\sqrt{d}|}{R} \lim_{s=1} \{(s-1)\,\zeta_k(s)\}$$

dargestellt, wo R den Regulator (vgl. Nr. 7) des Körpers k bedeutet.

L. Kronecker[14]) und *G. Frobenius*[15]) haben diese Formel auf die Bestimmung der Dichtigkeiten [I C 2, Nr. **d**, 7); **e**, 9)] gewisser Primideale ersten Grades in k angewandt.

10. Kronecker's Theorie der algebraischen Formen. *L. Kronecker* benutzt bei der Begründung seiner Theorie der algebraischen Rationalitätsbereiche den Begriff der einem Rationalitätsbereiche zugehörigen Form als ein wesentliches Hülfsmittel; er nennt eine ganze rationale Funktion F von beliebig vielen Veränderlichen $u, v, \ldots$, deren Koeffizienten ganze algebraische Zahlen des Körpers k sind, eine *algebraische Form*. Werden in einer algebraischen Form F statt der Koeffizienten der Reihe nach bezüglich die konjugierten Zahlen eingesetzt und die so entstehenden sogenannten *konjugierten Formen* $F', \ldots, F^{(m-1)}$ mit einander und mit der ursprünglichen Form F multipliziert, so ergiebt sich als Produkt eine ganze Funktion der Veränderlichen $u, v, \ldots$, deren Koeffizienten ganze rationale Zahlen sind; dieselbe werde in der Gestalt

$$n\,U(u, v, \ldots)$$

angenommen, wo n eine positive ganze rationale Zahl und U eine ganze rationale Funktion bedeutet, deren Koeffizienten ganze rationale Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind. n heisst die *Norm der Form F*. Wenn die Norm n einer Form gleich 1 ist, so heisst die Form eine

14) Berl. Ber. 1880, p. 155, 404.
15) Berl. Ber. 1896, p. 689.

Einheitsform oder *primitive Form.* Zwei Formen heissen einander *äquivalent in engerem Sinne* oder *inhaltsgleich* (in Zeichen $\simeq$), wenn ihr Quotient gleich dem Quotienten zweier Einheitsformen ist. Insbesondere ist jede Einheitsform $\simeq 1$. Eine Form H heisst durch die Form F *teilbar*, wenn eine Form G existiert, derart, dass $H \simeq FG$ ist. Eine Form P heisst eine *Primform*, wenn P im Sinne der Inhaltsgleichheit durch keine andere Form ausser durch 1 und durch sich selbst teilbar ist.

Die Beziehung der *Kronecker*'schen Formentheorie zur Theorie der Ideale wird klar durch die Bemerkung, dass aus jedem Ideal $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ eine Form F gebildet werden kann, indem man die Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ mit beliebigen von einander verschiedenen Produkten aus Potenzen der Unbestimmten $u, v, \ldots$ multipliziert und zu einander addiert. Umgekehrt liefert eine jede Form F mit den Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ ein Ideal $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Dieses Ideal $\mathfrak{a}$ heisst nach *D. Hilbert* der *Inhalt* der Form F. Dann gilt die Thatsache, dass der Inhalt des Produktes zweier Formen gleich dem Produkte ihrer Inhalte ist.

Aus diesem Satze folgt insbesondere, dass inhaltsgleiche Formen stets den nämlichen Inhalt haben und umgekehrt alle Formen von dem nämlichen Inhalt einander inhaltsgleich sind; so sind zwei Formen mit gleichen Koeffizienten aber beliebigen verschiedenen Variabeln stets einander inhaltsgleich. Dem Satze von der eindeutigen Zerlegbarkeit eines Ideals in Primideale entspricht in der *Kronecker*'schen Formentheorie der Satz, dass jede Form im Sinne der Inhaltsgleichheit auf eine und nur auf eine Weise als Produkt von Primformen darstellbar ist[16]).

11. Zerlegbare Formen des Körpers. Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ m Basiszahlen eines Ideals $\mathfrak{a}$, so ist insbesondere die Norm

$$n(\xi) = n(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m)$$

eine in m lineare Faktoren zerlegbare Form m^{ten} Grades der m Veränderlichen $u_1, \ldots, u_m$. Die Koeffizienten derselben sind ganze rationale Zahlen mit dem grössten gemeinsamen Teiler $n(\mathfrak{a})$. Nach Forthebung dieses Teilers entsteht eine primitive Form U, welche eine *zerlegbare Form des Körpers* k genannt wird. Wählt man

16) Vgl. ferner zur Begründung der *Kronecker*'schen Formentheorie die Arbeiten von *L. Kronecker,* Berl. Ber. 1883, p. 957; *R. Dedekind,* Prag. deutsche math. Ges. 1892, p. 1 und Gött. Nachr. 1895, p. 106; *F. Mertens,* Wien. Ber. 101 (1892), p. 1560; *A. Hurwitz,* Gött. Nachr. 1894, p. 291 und 1895, p. 324.

an Stelle der Basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ eine andere Basis $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_m^*$ des Ideals $\mathfrak{a}$, so erhält man eine Form U^*, welche aus U vermöge ganzzahliger linearer Transformation von der Determinante ± 1 hervorgeht. Fasst man alle diese transformierten Formen unter den Begriff der *Formenklasse* zusammen, so ist ersichtlich, dass einem jeden Ideal $\mathfrak{a}$ eine bestimmte Formenklasse zugehört. Die nämliche Formenklasse entsteht offenbar auch, wenn man statt des Ideals $\mathfrak{a}$ das Ideal $\alpha\mathfrak{a}$ zu Grunde legt, wo α eine ganze oder gebrochene Zahl des Körpers bedeutet, d. h. einem jeden Ideal der nämlichen Idealklasse entspricht die nämliche Formenklasse.

Gehören zu den beiden Idealen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ bez. die beiden Formen U, V, so heisst die zu dem Ideale $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ gehörige Form W die aus den Formen U und V *zusammengesetzte Form.* Der Multiplikation der Idealklassen entspricht somit die Zusammensetzung der zerlegbaren Formen des Körpers.

12. Integritätsbereiche des Körpers. Sind $\vartheta, \eta, \ldots$ irgend welche ganze algebraische Zahlen, die in ihrer Gesamtheit den Körper k vom m^{ten} Grade bestimmen, so wird das System aller ganzen Funktionen von $\vartheta, \eta, \ldots,$ deren Koeffizienten ganze rationale Zahlen sind, mit $[\vartheta, \eta, \ldots]$ bezeichnet und ein *Integritätsbereich* (*L. Kronecker*), *Ordnung* (*R. Dedekind*) oder *Zahlring* (*D. Hilbert*) genannt. Die Addition, Subtraktion und Multiplikation zweier Zahlen eines Ringes liefert wiederum eine Zahl des Ringes. Der Begriff des Ringes ist mithin gegenüber den drei Rechnungsoperationen der Addition, Subtraktion und Multiplikation invariant. Der grösste Zahlring des Körpers k ist derjenige. welcher alle ganzen Zahlen des Körpers umfasst.

R. Dedekind[17]) hat eine Theorie der Integritätsbereiche entwickelt und insbesondere die Teilbarkeits- und Zerlegungsgesetze untersucht; er gelangt entsprechend den oben aufgestellten Definitionen für den Ring zu den Begriffen: *Basis* des Ringes, *Diskriminante* des Ringes, *Ringideal*, *Basis* des Ringideals, *Norm* des Ringideals, *Führer* des Ringes und *Ringklasse.* Auch der Satz von der Existenz der Grundeinheiten sowie der Satz von der Endlichkeit der Klassenanzahl ist ohne Schwierigkeit auf einen Ring übertragbar und es ist nach *R. Dedekind* allgemein die Anzahl der Ringklassen durch die Anzahl der Idealklassen des Körpers ausdrückbar.

13. Moduln des Körpers. Wenn $\mu_1, \ldots, \mu_m$ irgend m ganze Zahlen des Körpers k sind, zwischen denen keine lineare homogene

17) Festschrift zur Säkularfeier des Geburtstages von *K. F. Gauss,* Braunschweig 1877.

Relation mit ganzen rationalen Koeffizienten besteht, so wird das System aller mittelst ganzer rationaler Koeffizienten $a_1, \ldots, a_m$ in der Gestalt $a_1 \mu_1 + \cdots + a_m \mu_m$ darstellbaren Zahlen von *R. Dedekind* ein *Modul* des Körpers k, von *H. Minkowski* ein *Zahlengitter* genannt. Der Begriff des Moduls verhält sich mithin gegenüber den Operationen der Addition und Subtraktion invariant. Beispiele von Moduln sind das System aller ganzen Zahlen des Körpers k, das Ideal, der Ring, das Ringideal. *R. Dedekind* nimmt den Begriff des Moduls in seinen Untersuchungen über algebraische Zahlen als Grundlage. Auch für den Modul lassen sich die Mehrzahl der für den Körper und für den Ring aufgestellten Definitionen übertragen. Man erhält dann insbesondere die Begriffe *Diskriminante eines Moduls, zerlegbare Form eines Moduls, Modulklasse.*

14. Galois'scher und Abel'scher Körper. Ein solcher Zahlkörper K, welcher mit den sämtlichen zu ihm konjugierten Körpern übereinstimmt, heisst ein *Galois'scher Körper.* Ist k ein beliebiger Zahlkörper m^{ten} Grades und sind $k', \ldots, k^{(m-1)}$ die zu k konjugierten Körper, so kann aus sämtlichen Zahlen der Körper $k, k', \ldots, k^{(m-1)}$ ein neuer Körper K zusammengesetzt werden; dieser Körper K ist dann notwendig ein *Galois*'scher Körper, welcher die Körper $k, k', \ldots, k^{(m-1)}$ als Unterkörper enthält. Ein jeder beliebiger Körper k kann mithin stets als ein Körper aufgefasst werden, welcher in einem *Galois*'schen Körper als Unterkörper enthalten ist.

Der *Galois*'sche Körper K vom M^{ten} Grade werde durch die ganze Zahl Θ bestimmt; Θ genügt dann einer ganzen ganzzahligen irreduziblen Gleichung M^{ten} Grades. Die M Wurzeln dieser Gleichung seien

$$\Theta = s_1 \Theta, \quad s_2 \Theta, \quad \ldots, \quad s_M \Theta,$$

wo $s_1, \ldots, s_M$ rationale Funktionen von Θ mit rationalen Koeffizienten bedeuten. Werden $s_1, \ldots, s_M$ als Substitutionen aufgefasst, so bilden sie eine Gruppe G vom M^{ten} Grade, da ja die aufeinanderfolgende Anwendung irgend zweier von den Substitutionen $s_1, \ldots, s_M$ wiederum eine dieser Substitutionen ergeben muss. G heisse die *Gruppe des Galois'schen Körpers K* [I A 6, Nr. 5].

Um einen beliebigen Unterkörper des *Galois*'schen Körpers in einfacher Weise zu charakterisieren, bedienen wir uns folgender Ausdrucksweise. Wenn r Substitutionen $s_1 = 1, s_2, \ldots, s_r$ der Gruppe G eine Untergruppe g vom r^{ten} Grade bilden, so bestimmt offenbar die Gesamtheit aller derjenigen Zahlen des Körpers K, welche bei Anwendung einer jeden Substitution von g ungeändert bleiben, einen in

K enthaltenen Körper k vom Grade $m = \frac{M}{r}\cdot$ Dieser Körper k heisst der *zur Untergruppe g gehörige Unterkörper.* Der *Galois*'sche Körper selbst gehört zu der Gruppe, welche allein aus $s_1 = 1$ besteht; zur Gruppe G aller Substitutionen gehört der Körper der rationalen Zahlen. Umgekehrt gehört ein jeder Unterkörper k des *Galois*'schen Körpers zu einer gewissen Untergruppe g der Gruppe G. Diese Gruppe g heisse die *den Unterkörper k bestimmende Untergruppe.*

Ist die Gruppe G der Substitutionen $s_1, \ldots, s_M$ eines *Galois*'schen Körpers K eine *Abel*'sche Gruppe [I A 6, Nr. **20**; I B 3 c, d, Nr. **20**], d. h. sind die Substitutionen $s_1, \ldots, s_M$ unter einander vertauschbar, so heisst der *Galois*'sche Körper K ein *Abel'scher Körper.* Ist jene Substitutionsgruppe G insbesondere eine cyklische [I A 6, Nr. **10**], d. h. sind die M Substitutionen $s_1, \ldots, s_M$ sämtlich als Potenzen einer einzigen unter ihnen darstellbar, so heisst der *Abel*'sche Körper K ein *cyklischer Körper.* Die aus der Kreisteilung stammenden Zahlkörper sind sämtlich *Abel*'sche Körper und nach *L. Kronecker* sind dies auch die allgemeinsten *Abel*'schen Zahlkörper [I C 4 b, Nr. **5**].

Die soeben definierten Begriffe lassen folgende Verallgemeinerung zu:

Es sei Θ die Wurzel einer Gleichung l^{ten} Grades

$$\Theta^l + \alpha_1 \Theta^{l-1} + \cdots + \alpha_l = 0,$$

deren Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ Zahlen eines Körpers k vom m^{ten} Grade sind. Diese Gleichung l^{ten} Grades sei überdies im Rationalitätsbereiche k irreduzibel und von der besonderen Eigenschaft, dass alle übrigen $l - 1$ Wurzeln $\Theta', \ldots, \Theta^{(l-1)}$ derselben sich als ganze rationale Funktionen der Wurzel Θ darstellen lassen, wobei die Koeffizienten dieser Funktionen Zahlen des Körpers k sind. Unter dieser Voraussetzung heisst der durch Θ bestimmte Zahlkörper vom $M = lm^{\text{ten}}$ Grade ein *relativ-Galois'scher Körper in Bezug auf k.* Der Grad l jener Gleichung heisst der *Relativgrad.* Wird etwa

$$\Theta = S_1 \Theta, \quad \Theta' = S_2 \Theta, \quad \ldots, \quad \Theta^{(l-1)} = S_l \Theta$$

gesetzt, so heisst die Gruppe der Substitutionen $S_1, \ldots, S_l$ die *Relativgruppe*; ist diese Gruppe eine Abel'sche, so heisst der Körper K ein *relativ-Abel'scher Körper in Bezug auf k.* Ist die Relativgruppe cyklisch, so heisst der Körper K *relativcyklisch.*

15. Zerlegungskörper, Trägheitskörper und Verzweigungskörper eines Primideals im Galois'schen Körper. Wählen wir nun ein bestimmtes Primideal $\mathfrak{P}$ vom Grade f im Galois'schen Körper K

aus, so giebt es eine ganz bestimmte Reihe ineinander geschachtelter Unterkörper von K, welche für das Primideal $\mathfrak{P}$ charakteristisch sind.

Es sei p die durch $\mathfrak{P}$ teilbare rationale Primzahl; ferner seien $z, z', z'', \ldots$ diejenigen sämtlichen Substitutionen der Gruppe G, welche das Primideal $\mathfrak{P}$ ungeändert lassen; dieselben bilden eine Gruppe vom r_z^{ten} Grade, welche die *Zerlegungsgruppe des Primideals* $\mathfrak{P}$ genannt und mit g_z bezeichnet werden soll. Der zur Zerlegungsgruppe g_z gehörige Körper k_z werde *Zerlegungskörper des Primideals* $\mathfrak{P}$ genannt.

Weiter seien $t, t', t'', \ldots$ die sämtlichen r_t Substitutionen der Gruppe G von der Beschaffenheit, dass für jede beliebige ganze Zahl Ω des Körpers K die Kongruenz $t\Omega \equiv \Omega$ nach $\mathfrak{P}$ erfüllt ist; es wird leicht gezeigt, dass diese r_t Substitutionen eine Gruppe bilden. Diese Gruppe r_t^{ten} Grades werde die *Trägheitsgruppe des Primideals* $\mathfrak{P}$ genannt und mit g_t bezeichnet. Der zur Trägheitsgruppe g_t gehörige Körper k_t werde *Trägheitskörper des Primideals* $\mathfrak{P}$ genannt. Der Trägheitskörper ist zugleich der höchste in K enthaltene Unterkörper, dessen Differente zu $\mathfrak{P}$ prim ausfällt.

Es seien endlich $v, v', v'', \ldots$ sämtliche Substitutionen s der Gruppe G von der Art, dass für jede beliebige ganze Zahl Ω des Körpers K die Kongruenz $s\Omega \equiv \Omega$ nach $\mathfrak{P}^2$ erfüllt ist. Die von diesen Substitutionen gebildete Gruppe $v, v', v'' \ldots$ wird die *Verzweigungsgruppe des Primideals* $\mathfrak{P}$ genannt und mit g_v bezeichnet. Der zur Verzweigungsgruppe g_v gehörige Körper k_v wird der *Verzweigungskörper* des Primideals $\mathfrak{P}$ genannt. Endlich gelangt man noch durch gehörige Fortsetzung dieses Verfahrens zu *Verzweigungsgruppen* und *Verzweigungskörpern höherer Art.*

Mit Hilfe dieser Begriffe erhalten wir einen Einblick in die bei der Zerlegung der rationalen Primzahl p in dem Galois'schen Körper K sich abspielenden Vorgänge. Die Primzahl p wird nämlich zunächst im Zerlegungskörper k_z von $\mathfrak{P}$ in der Form $p = \mathfrak{p}\mathfrak{a}$ zerlegt, wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal ersten Grades und $\mathfrak{a}$ ein durch $\mathfrak{p}$ nicht teilbares Ideal des Zerlegungskörpers ist. Der Zerlegungskörper von $\mathfrak{P}$ ist als Unterkörper in dem Trägheitskörper von $\mathfrak{P}$ enthalten, welcher seinerseits keine weitere Zerlegung von $\mathfrak{p}$ bewirkt, sondern lediglich dieses Ideal $\mathfrak{p}$ zu einem Primideal f^{ten} Grades erweitert. Ist der Körper K selbst der Zerlegungskörper oder der Trägheitskörper, so ist nach diesem ersten Schritte die Zerlegung bereits abgeschlossen. Im anderen Falle lässt sich $\mathfrak{p}$ für K noch in gleiche Faktoren spalten, und zwar wird $\mathfrak{p}$ zunächst im Verzweigungskörper die Potenz eines Primideals $\mathfrak{p}_v$, wobei der Exponent in $p^f - 1$ aufgeht und folglich nicht durch

p teilbar ist. Die Spaltung von $\mathfrak{p}$ ist mit diesem zweiten Schritte notwendig dann und nur dann abgeschlossen, wenn p im Grade der Trägheitsgruppe nicht aufgeht und mithin der Körper K selbst der Verzweigungskörper ist. In den nun folgenden Verzweigungskörpern schreitet die Spaltung ohne Aussetzen fort und zwar sind die bezüglichen Potenzexponenten Zahlen von der Gestalt $p^{\bar{e}}, p^{\bar{\bar{e}}}, \ldots$, wobei zu bemerken ist, dass keiner der Exponenten $\bar{e}, \bar{\bar{e}}, \ldots$ den Grad f des Primideals $\mathfrak{P}$ überschreitet.

Von den algebraischen Eigenschaften des genannten Körpers sei die von *D. Hilbert*[18]) bewiesene Thatsache erwähnt, dass der Zerlegungskörper einen Rationalitätsbereich bestimmt, in welchem die Zahlen des Galois'schen Körpers K lediglich durch Wurzelausdrücke darstellbar sind.

Mehrere der genannten Sätze gelten ohne wesentliche Änderung für relativ-Galois'sche Körper.

16. Zusammensetzung mehrerer Körper. Wird aus den beiden Körpern k_1 und k_2 ein Körper K zusammengesetzt, so enthält nach *D. Hilbert* die Diskriminante des zusammengesetzten Körpers K alle und nur diejenigen rationalen Primzahlen als Faktoren, welche in der Diskriminante von k_1 oder in derjenigen von k_2 oder in beiden aufgehen. Wenn man insbesondere aus einem beliebigen Körper k vom m^{ten} Grade und den sämtlichen zu ihm konjugierten Körpern $k', \ldots, k^{(m-1)}$ einen Galois'schen Körper K zusammensetzt, so enthält die Diskriminante dieses Körpers K lediglich die in der Diskriminante von k aufgehenden Primzahlen. Auch findet man unmittelbar folgenden Satz: Zwei Körper k_1 und k_2 bez. von den Graden m_1 und m_2, deren Diskriminanten zu einander prim sind, ergeben durch Zusammensetzung stets einen Körper vom Grade $m_1 m_2$.

Über die Frage nach dem genauen Werte der Diskriminante und über die Zerlegung der Primideale in dem aus k_1, k_2 zusammengesetzten Körper hat *K. Hensel*[19]) weitere Untersuchungen angestellt.

17. Relativcyklischer Körper von relativem Primzahlgrade. Es sei K ein Zahlkörper vom Grade lm; derselbe sei relativcyklisch in Bezug auf den Körper k vom m^{ten} Grade; der Relativgrad l sei eine Primzahl. Die Substitutionen der cyklischen Relativgruppe seien $1, S, S^2, \ldots, S^{l-1}$. *D. Hilbert* definiert dann den Begriff der *symbolischen Potenz* einer Zahl A des Körpers K, wie folgt: wenn A eine

18) Gött. Nachr. 1894, p. 224.

19) J. f. Math. 105 (1889), p. 329.

beliebige ganze oder gebrochene Zahl in K ist und $a, a_1, \ldots, a_{l-1}$ irgend welche ganze rationale Zahlen bedeuten, so möge der Ausdruck

$$\mathsf{A}^a (S\mathsf{A})^{a_1} (S^2\mathsf{A})^{a_2} \ldots (S^{l-1}\mathsf{A})^{a_{l-1}}$$

zur Abkürzung mit

$$\mathsf{A}^{a + a_1 S + a_2 S^2 + \cdots + a_{l-1} S^{l-1}} = \mathsf{A}^{F(S)}$$

bezeichnet werden, wo $F(S)$ die auf der linken Seite im Exponenten von A stehende ganzzahlige Funktion von S bedeutet. Die symbolische $F(S)^{\text{te}}$ Potenz von A stellt hiernach stets wiederum eine ganze oder gebrochene Zahl des Körpers K dar. Diese symbolische Potenzierung ist die Verallgemeinerung einer Bezeichnungsweise, welche *L. Kronecker*[20]) im Falle des Kreiskörpers eingeführt hat.

Ist ferner $\mathfrak{C}$ ein Ideal aus einer Klasse C des Körpers K, so werde die durch das relativkonjugierte Ideal $S\mathfrak{C}$ bestimmte Idealklasse mit SC bezeichnet. Die Klassen $SC, S^2C, \ldots, S^{l-1}C$ sollen die zu C *relativkonjugierten Klassen* heissen. Die durch den Ausdruck

$$C^a (SC)^{a_1} (S^2 C)^{a_2} \ldots (S^{l-1} C)^{a_{l-1}} = C^{F(S)}$$

bestimmte Klasse wird die $F(S)^{te}$ *symbolische Potenz* der Klasse C genannt.

Ein Ideal $\mathfrak{A}$ des relativcyklischen Körpers K heisst ein *ambiges Ideal,* wenn dasselbe bei Anwendung der Operation S ungeändert bleibt und wenn ausserdem $\mathfrak{A}$ kein von 1 verschiedenes Ideal des Körpers k als Faktor enthält. Insbesondere heisst ein Primideal des Körpers K ein *ambiges Primideal,* wenn dasselbe bei Anwendung der Substitution S ungeändert bleibt und nicht zugleich im Körper k liegt. Jedes ambige Ideal ist ein Produkt von ambigen Primidealen. Die l^{te} Potenz eines ambigen Primideals ist gleich der Relativnorm desselben und stellt im Körper k selbst ein Primideal dar. Die Relativdifferente des relativcyklischen Körpers K enthält alle und nur diejenigen Primideale, welche ambig sind.

Eine Idealklasse A des Körpers K heisse eine *ambige Klasse,* wenn sie ihrer relativkonjugierten Klasse SA gleich wird. Die $(1 - S)^{\text{te}}$ symbolische Potenz sowie die l^{te} wirkliche Potenz einer ambigen Klasse A ist stets eine solche Klasse in K, welche unter ihren Idealen sicher auch in k liegende Ideale enthält.

Ist C eine beliebige Klasse in K, so nennt *D. Hilbert* das System aller Klassen von der Form cC, wo c die Klassen des Körpers k durchläuft, einen Komplex des Körpers K. Der Komplex, der aus

20) Dissertatio inauguralis, Berolini 1845 = Werke 1, p. 5.

den sämtlichen Klassen c in k besteht, heisse der *Hauptkomplex* des Körpers K und werde mit 1 bezeichnet.

Wenn P und P' zwei beliebige Komplexe sind und jede Klasse in P mit jeder Klasse in P' multipliziert wird, so bilden sämtliche solche Produkte wiederum einen Komplex; dieser werde das *Produkt* der Komplexe P und P' genannt und mit PP' bezeichnet.

Wenn C eine Klasse im Komplexe P ist, so werde derjenige Komplex, zu welchem die relativkonjugierte Klasse SC gehört, der zu P *relativkonjugierte Komplex* genannt und mit SP bezeichnet.

Jeder Komplex, der mit dem ihm relativkonjugierten Komplexe übereinstimmt, heisst ein *ambiger Komplex.* Die $(1 - S)^{\text{te}}$ symbolische Potenz sowie die l^{te} wirkliche Potenz jedes ambigen Komplexes ist gleich dem Hauptkomplex.

D. Hilbert gelangte in seinen Untersuchungen über relativcyklische Körper von relativem Primzahlgrade zunächst zu folgendem Ergebnis:

Wenn ein relativcyklischer Körper K von ungeradem relativem Primzahlgrade l die Relativdifferente 1 in Bezug auf k besitzt, so giebt es stets in k ein Ideal $\mathfrak{j}$, welches nicht Hauptideal in k ist, wohl aber einem Hauptideal in K gleich wird. Die l^{te} Potenz dieses Ideals $\mathfrak{j}$ ist dann notwendig auch in k ein Hauptideal, und die Klassenanzahl des Körpers k ist mithin durch l teilbar.

Die genannte Thatsache gilt auch für $l = 2$, wenn in diesem Falle noch der Umstand hinzukommt, dass unter den durch K bestimmten $2m$ einander konjugierten Körpern doppelt so viel reelle Körper als unter den durch k bestimmten m konjugierten Körpern vorhanden sind.

Es sind zwei besondere Fälle relativcyklischer Körper ausführlich untersucht worden, nämlich von *E. Kummer* der Fall, dass l eine ungerade Primzahl bedeutet und für k der Körper der l^{ten} Einheitswurzeln genommen wird [I C 4 b, Nr. 7], und ferner von *D. Hilbert* der relativquadratische Körper in Bezug auf einen beliebigen Grundkörper k [vgl. Nr. **19** u. **20**].

18. Klassenkörper eines beliebigen Zahlkörpers. Die in Nr. **17** angedeuteten Entwickelungen führen zu einer Theorie der Klassenkörper, deren Hauptsätze nach *D. Hilbert* [21]) wie folgt lauten:

Es sei k ein völlig beliebiger Zahlkörper und $\bar{h}$ die Anzahl der Idealklassen dieses Körpers, im engeren Sinne verstanden (vgl. Nr. 8).

---

21) Gött. Nachr. 1898, p. 370.

Ein in Bezug auf k relativ-Abel'scher Körper K heisst *unverzweigt*, wenn die Relativdiskriminante in Bezug auf k gleich 1 ausfällt, oder, was das Nämliche bedeutet, wenn es in k kein Primideal giebt, das durch das Quadrat eines Primideals in K teilbar wird. Dann gilt folgendes Theorem:

In Bezug auf k existiert stets ein relativ-Abelscher, unverzweigter Körper Kk vom Relativgrade $\bar{h}$; dieser Körper Kk heisse der Klassenkörper von k. Der Klassenkörper Kk enthält sämtliche in Bezug auf k relativ-Abel'schen unverzweigten Körper als Unterkörper.

Die Relativgruppe des Klassenkörpers Kk ist mit derjenigen Abelschen Gruppe holoedrisch isomorph [I A 6, Nr. **14**], *die durch die Zusammensetzung der Idealklassen in k bestimmt wird.*

Diejenigen Primideale $\mathfrak{p}$ des Körpers k, welche der nämlichen Idealklasse von k, im engeren Sinne verstanden, angehören, erfahren im Klassenkörper Kk die nämliche Zerlegung in Primideale dieses Körpers Kk, so dass die weitere Zerlegung eines Primideals $\mathfrak{p}$ des Körpers k im Körper K nur von der Klasse abhängt, der das Primideal $\mathfrak{p}$ im Körper k angehört.

Eine ganze Zahl A des Klassenkörpers Kk heisst eine *Ambige* dieses Körpers Kk, wenn sie die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

a) Die ganze Zahl A sei total positiv, d. h. das durch A dargestellte Ideal gehöre auch im engeren Sinne [Nr. **8**] der Hauptklasse in Kk an.

b) Jede zu A relativkonjugierte Zahl soll sich von A nur um einen Faktor unterscheiden, welcher eine Einheit in Kk ist.

Eine Ambige heisst insbesondere eine *Primambige*, wenn sie sich nicht als ein Produkt von zwei Ambigen darstellen lässt, es sei denn dass eine dieser Ambigen eine Einheit ist.

Jede Ambige des Klassenkörpers Kk stellt ein Ideal des Grundkörpers k dar und umgekehrt jedes Ideal des Grundkörpers k lässt sich durch eine Ambige des Klassenkörpers Kk darstellen; diese ist abgesehen von einem Einheitsfaktor durch jenes Ideal bestimmt.

Jede Ambige des Klassenkörpers Kk ist mithin auf eine und nur auf eine Weise in ein Produkt von Primambigen zerlegbar, wenn man dabei von der Willkür der auftretenden Einheitsfaktoren absieht.

Diese Eigenschaften kommen unter allen relativ-Abel'schen Körpern in Bezug auf k allein dem Klassenkörper Kk zu.

Durch diese Untersuchungen ist *die Theorie der Ideale eines beliebigen Körpers k auf die Theorie der Ambigen in seinem Klassenkörper Kk zurückgeführt.*

Allgemeineren und mehr gruppentheoretischen Charakters sind die Untersuchungen von *H. Weber*[22]) über Zahlengruppen in algebraischen Körpern.

In dem Falle, dass der Grundkörper k ein quadratischer imaginärer Körper ist, liefert die von *L. Kronecker*[23]) begründete und von *H. Weber*[24]) entwickelte sogenannte komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen [I C 6] den zugehörigen Klassenkörper.

19. Relativquadratischer Zahlkörper. Die Theorie der relativquadratischen Körper ist nichts anderes als eine Theorie der quadratischen Gleichungen, deren Koeffizienten algebraische Zahlen sind. Die Theorie der quadratischen Gleichungen mit rationalen Zahlenkoeffizienten bildet den Hauptgegenstand der Disquisitiones arithmeticae von *Gauss* [I C 2, Nr. c]; *Dirichlet* und *Kronecker* machten die wichtigsten Ergänzungen zu dieser Theorie [I C 3, Nr. 2]. Die allgemeine Theorie der relativ-quadratischen Körper ist von *D. Hilbert*[25]) ausführlich entwickelt worden, und zwar nach Methoden, welche bei gehöriger Verallgemeinerung auch in der Theorie der relativ-Abel'schen Körper von beliebigem Relativgrade verwendbar sind. Um zunächst die Eigenschaften des relativquadratischen Klassenkörpers kurz hervorzuheben, machen wir für den zu Grunde liegenden Körper k die Annahme, dass die Anzahl h der Idealklassen im ursprünglichen weiteren Sinne mit der im engeren Sinne verstandenen Klassenanzahl $\overline{h}$ übereinstimme und gleich 2 sei. Der Klassenkörper Kk ist dann relativ-quadratisch und besitzt folgende Eigenschaften:

Der Klassenkörper Kk ist unverzweigt in Bezug auf k, d. h. er hat die Relativdiskriminante 1 in Bezug auf k. — Die Klassenanzahl H des Klassenkörpers Kk, im weiteren sowie im engeren Sinne verstanden, ist ungerade. — Diejenigen Primideale in k, welche in k Hauptideale sind, zerfallen in Kk in das Produkt zweier Primideale.

---

22) Math. Ann. 48 (1897), p. 433; 49 (1897), p. 83; 50 (1897), p. 1.

23) „Zur Theorie der elliptischen Funktionen", Berl. Ber. 1883, p. 497, 525; 1885, p. 761; 1886, p. 701; 1889, p. 53, 123, 199, 255, 309; 1890, p. 99, 123, 219, 307, 1025.

24) „Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen", Braunschw. 1891. Betreffs des Zusammenhanges der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen und der Theorie derjenigen Zahlkörper, die in Bezug auf einen quadratischen imaginären Grundkörper relativ-Abel'sche sind vgl. den Auszug aus einem Briefe von *L. Kronecker* an *R. Dedekind*, Berl. Ber. 1895, p. 115, sowie *D. Hilbert*, Deutsche Math.-Ver. 6 (1899), p. 94.

25) Deutsche Math.-Ver. 6 (1899), p. 88; Math. Ann. 51 (1899), p. 1; Gött. Nachr. 1898, p. 370.

Diejenigen Primideale in k, welche in k nicht Hauptideale sind, bleiben in Kk Primideale; sie werden jedoch in Kk Hauptideale.

Von diesen drei Eigenschaften charakterisiert jede für sich allein bei unseren Annahmen über den Körper k in eindeutiger Weise den Klassenkörper Kk.

Die wichtigsten Thatsachen in der Theorie der allgemeinen relativquadratischen Körper sind das Reziprozitätsgesetz für quadratische Reste (vgl. Nr. **20**), die Möglichkeit einer Einteilung der Idealklassen in Geschlechter und der Satz, demzufolge in einem relativquadratischen Körper in Bezug auf k stets die Hälfte aller denkbaren Charakterensysteme wirklich durch Geschlechter vertreten sind. Aus dem letzteren Satze fliessen dann die Bedingungen für die Auflösbarkeit ternärer diophantischer Gleichungen, deren Koeffizienten Zahlen des beliebigen Rationalitätsbereiches k sind.

Auf Grund der Theorie des relativquadratischen Körpers ist es ferner möglich, eine Reihe von bekannten Sätzen über quadratische Formen mehrerer Variabler mit rationalen Koeffizienten auf den Fall zu übertragen, dass die Koeffizienten beliebige algebraische Zahlen sind. Insbesondere hat *D. Hilbert*[26]) einen Satz gegeben, der die Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von *Fermat* darstellt [I C 2, Nr. **d**, 7]. Dieser Satz sagt aus, dass jede total positive (vgl. Nr. 8) Zahl in einem beliebigen Zahlkörper k sich stets als Summe von vier Quadraten gewisser Zahlen des Körpers k darstellen lässt.

Von diesem Satze kann eine Anwendung auf die Frage gemacht werden, ob eine elementargeometrische Konstruktionsaufgabe [III A 3] zu ihrer Lösung lediglich das Ziehen von Geraden und das Abtragen von Strecken, nicht aber das Auffinden der Schnittpunkte einer Geraden und eines beliebigen Kreises erfordert[27]).

20. Reziprozitätsgesetz für quadratische Reste in einem beliebigen Zahlkörper. Die Theorie des relativquadratischen Körpers führte *D. Hilbert*[28]) zur Entdeckung des Reziprozitätsgesetzes für quadratische Reste in einem beliebigen Zahlkörper, welches das bekannte Reziprozitätsgesetz [I C 1, Nr. **6**] als einfachsten Spezialfall in sich schliesst.

Es sei ein beliebiger Zahlkörper vom Grade m als Grundkörper vorgelegt. Das bekannte Symbol aus der Theorie der rationalen Zahlen überträgt sich dann, wie folgt:

---

26) Gött. Nachr. 1898, p. 370.

27) *D. Hilbert,* „Grundlagen der Geometrie", Festschrift zur Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals zu Göttingen, Leipzig 1899, Kap. 7.

28) Deutsche Math.-Ver. 6 (1899), p. 88; Math. Ann. 51 (1899), p. 1; Gött. Nachr. 1898, p. 370.

Es sei $\mathfrak{p}$ ein in 2 nicht aufgehendes Primideal des Körpers k und α eine beliebige zu $\mathfrak{p}$ prime ganze Zahl in k: dann bedeute das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ den Wert $+1$ oder -1, je nachdem α dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach $\mathfrak{p}$ kongruent ist oder nicht. Ist ferner $\mathfrak{a}$ ein beliebiges zu 2 primes Ideal in k und hat man $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}\mathfrak{q} \dots \mathfrak{w}$, wo $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \dots, \mathfrak{w}$ Primideale in k sind, so möge das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)$ durch die folgende Gleichung definiert werden:

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{q}}\right) \cdots \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{w}}\right).$$

Bei geeigneter Definition der Begriffe *„primäre Zahl"*, *„hyperprimäre Zahl"*, *„primäres Ideal"* und *„hyperprimäres Ideal"* lautet dann der wesentliche Inhalt des ersten und zweiten Ergänzungssatzes zum Reziprozitätsgesetz bez. des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes wie folgt:

Wenn $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal in k ist, so giebt es stets eine primäre Zahl α, so dass $\mathfrak{a} = (\alpha)$ wird, und umgekehrt: wenn α eine primäre Zahl in k ist, so ist das Ideal $\mathfrak{a} = (\alpha)$ stets ein primäres Ideal.

Wenn $\mathfrak{a}$ ein hyperprimäres Ideal in k ist, so giebt es stets eine hyperprimäre Zahl α, so dass $\mathfrak{a} = (\alpha)$ wird, und umgekehrt: wenn α eine hyperprimäre Zahl in k ist, so ist das Ideal $\mathfrak{a} = (\alpha)$ stets ein hyperprimäres Ideal.

Wenn ν, μ, ν', μ' irgend welche zu 2 prime ganze Zahlen in k sind derart, dass die beiden Produkte $\nu\nu'$ und $\mu\mu'$ primär ausfallen, so ist stets

$$\left(\frac{\nu}{\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = \left(\frac{\nu'}{\mu'}\right)\left(\frac{\mu'}{\nu'}\right).$$

Um jedoch das Reziprozitätsgesetz in einheitlicher und vollständiger Weise darzustellen und zu beweisen, bedarf es eines neuen Symbols: Es sei $\mathfrak{w}$ irgend ein Primideal in k, und es seien ν, μ beliebige ganze Zahlen in k, nur dass μ nicht gleich dem Quadrat einer Zahl in k ausfällt: wenn dann ν nach $\mathfrak{w}$ der Relativnorm einer ganzen Zahl des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ kongruent ist und wenn ausserdem auch für jede höhere Potenz von $\mathfrak{w}$ stets eine solche ganze Zahl A im Körper $K(\sqrt{\mu})$ gefunden werden kann, dass $\nu \equiv N(\mathsf{A})$ nach jener Potenz von $\mathfrak{w}$ ausfällt, so nennt *D. Hilbert* ν einen *Normenrest* des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{w}$; in jedem anderen Falle einen *Normennichtrest* des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{w}$. Nunmehr wird das Symbol $\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right)$ definiert, indem man

$$\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1 \quad \text{oder} \quad = -1$$

setzt, je nachdem ν Normenrest oder Normennichtrest nach $\mathfrak{w}$ ist. Fällt μ gleich dem Quadrat einer ganzen Zahl in k aus, so wird stets

$$\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1$$

gesetzt.

Für das eben definierte Symbol gelten die Formeln:

$$\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right) = \left(\frac{\mu,\nu}{\mathfrak{w}}\right),$$

$$\left(\frac{\nu\nu',\mu}{\mathfrak{w}}\right) = \left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)\left(\frac{\nu',\mu}{\mathfrak{w}}\right),$$

$$\left(\frac{\nu,\mu\mu'}{\mathfrak{w}}\right) = \left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)\left(\frac{\nu,\mu'}{\mathfrak{w}}\right).$$

Mit Benutzung desselben drückt sich das allgemeinste Reziprozitätsgesetz für quadratische Reste durch die Formel aus:

$$\prod_{(\mathfrak{w})}\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right) = [\nu,\mu]\,[\nu',\mu']\ldots[\nu^{(n-1)},\mu^{(n-1)}].$$

Hierin bedeuten ν, μ zwei beliebige ganze Zahlen des Körpers k. Das Produkt linker Hand ist über alle Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k zu erstrecken; da, wie sich zeigt, das Symbol $\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)$ nur für eine endliche Anzahl von Primidealen $\mathfrak{w}$ den Wert -1 haben kann, so kommt bei der Bestimmung des Wertes des Produktes nur eine endliche Anzahl von Faktoren in Betracht. Auf der rechten Seite der Formel bedeuten ν', μ'; ...; $\nu^{(n-1)}$, $\mu^{(n-1)}$ die zu ν, μ konjugierten Zahlen bez. in den zu k konjugierten Körpern k'; ...; $k^{(n-1)}$; das Zeichen $[\nu,\mu]$ bedeutet den Wert -1, wenn der Körper k reell und zugleich jede der beiden Zahlen ν, μ negativ ist; in jedem anderen Falle bezeichnet $[\nu,\mu]$ den Wert $+1$. Entsprechend bedeutet $[\nu',\mu']$ den Wert -1, wenn k' reell und zugleich jede der beiden Zahlen ν', μ' negativ ausfällt, in jedem anderen Falle dagegen soll $[\nu',\mu']$ den Wert $+1$ haben, u. s. f.

Sind beispielsweise k und alle zu k konjugierten Körper imaginär, so lautet das Reziprozitätsgesetz

$$\prod_{(\mathfrak{w})}\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1.$$

I C 4 b. THEORIE DES KREISKÖRPERS

VON

DAVID HILBERT

IN GÖTTINGEN.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

Lehrbücher und Monographien.

P. Bachmann, Die Lehre von der Kreisteilung, Leipzig 1872.

H. Weber, Lehrbuch der Algebra, 2. Auflage, Braunschweig 1898, frz. v. *J. Griess*, Par. 1898.

D. Hilbert, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Deutsche Mathematiker-Vereinigung, 4 (1897), 4. und 5. Teil.

Die vorstehend genannten Werke werden im folgenden nicht mehr besonders citiert werden.

1. Kreiskörper für einen Primzahlexponenten. Bedeutet l eine ungerade Primzahl, so ist die Gleichung $l-1^{\text{ten}}$ Grades

$$F(x)=\frac{x^l-1}{x-1}=x^{l-1}+x^{l-2}+\cdots+1=0$$

im Bereich der rationalen Zahlen irreduzibel[1]), d. h. der durch $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{l}}$ bestimmte Körper $k(\zeta)$ besitzt den Grad $l - 1$; der Körper $k(\zeta)$ wird der *Kreiskörper* der l^{ten} Einheitswurzeln genannt.

Die Primzahl l gestattet in $k(\zeta)$ die Zerlegung $l = \mathfrak{l}^{l-1}$, wo $\mathfrak{l} = (1 - \zeta)$ ein Primideal ersten Grades in $k(\zeta)$ ist; hieraus kann die Irreduzibilität obiger Gleichung geschlossen werden. In dem Kreiskörper der l^{ten} Einheitswurzeln $k(\zeta)$ bilden die Zahlen $1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{l-2}$ eine Basis. Die Diskriminante des Kreiskörpers $k(\zeta)$ ist

$$d = (-1)^{\frac{l-1}{2}}\, l^{l-2}.$$

Die reellen Zahlen

$$\varepsilon_g = \sqrt{\frac{(1-\zeta^g)(1-\zeta^{-g})}{(1-\zeta)(1-\zeta^{-1})}} \qquad \left(g = 2, 3, \cdots, \frac{l-1}{2}\right)$$

sind Einheiten des Kreiskörpers $k(\zeta)$.

Für die Zerlegungen der von l verschiedenen rationalen Primzahlen im Körper $k(\zeta)$ gilt nach *E. Kummer*[2]) die folgende Regel: Ist p eine von l verschiedene rationale Primzahl und f der kleinste positive Exponent, für welchen $p^f \equiv 1$ nach l ausfällt, und setzen wir dann $l - 1 = ef$, so findet im Kreiskörper $k(\zeta)$ die Zerlegung

$$p = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_e$$

statt, wo $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_e$ von einander verschiedene Primideale f^{ten} Grades in $k(\zeta)$ sind.

2. Kreiskörper für einen zusammengesetzten Wurzelexponenten. Die entsprechenden Überlegungen lassen sich nach *E. Kummer*[3]) für denjenigen Körper anstellen, der durch Einheitswurzeln mit einem zusammengesetzten Wurzelexponenten bestimmt ist. Es sei m ein Produkt aus Potenzen verschiedener Primzahlen etwa $m = l_1^{h_1} l_2^{h_2} \ldots$. Der durch $Z = e^{\frac{2i\pi}{m}}$ definierte Kreiskörper $k(Z)$ der m^{ten} Einheitswurzeln entsteht dann durch Zusammensetzung der Kreiskörper $k\left(e^{\frac{2i\pi}{l_1^{h_1}}}\right)$, $k\left(e^{\frac{2i\pi}{l_2^{h_2}}}\right)$, ... d. h. der Kreiskörper der $l_1^{h_1}$ten, der $l_2^{h_2}$ten, ... Einheitswurzeln.

1) Die Litteratur über die Beweise hierfür findet sich in dem Buche *P. Bachmann*'s, Vorlesung V angegeben; vgl. ferner *Dirichlet*'s Vorl. über Zahlentheorie, herausgeg. von *R. Dedekind*, Suppl. XI und *Weber*'s Algebra 2, Nachtrag II.

2) J. f. Math. 35 (1847), p. 327.

3) Berl. Abh. 1856², p. 1.

Der Grad des Körpers $k(Z)$ der $m = l_1^{h_1} l_2^{h_2} \ldots{}^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln ist

$$\Phi(m) = l_1^{h_1-1}(l_1 - 1)\, l_2^{h_2-1}(l_2 - 1) \ldots .$$

Der Kreiskörper $k(Z)$ besitzt die Basiszahlen $1, Z, Z^2, \ldots, Z^{\Phi(m)-1}$.

Ist p eine in $m = l_1^{h_1} l_2^{h_2} \ldots$ nicht aufgehende rationale Primzahl und f der kleinste positive Exponent, für welchen $p^f \equiv 1$ nach m ausfällt, und wird dann $\varphi(m) = ef$ gesetzt, so findet im Kreiskörper $k(Z)$ der m^{ten} Einheitswurzeln die Zerlegung

$$p = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_e$$

statt, wo $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_e$ von einander verschiedene Primideale f^{ten} Grades in $k(Z)$ sind.

Ist ferner p^h eine Potenz von p und wird $m^* = p^h m$ gesetzt, so findet im Körper $k(Z^*)$ der $m^{*\text{ten}}$ Einheitswurzeln die Zerlegung

$$p = \{\mathfrak{P}_1^* \cdots \mathfrak{P}_e^*\}^{p^{h-1}(p-1)}$$

statt, wo $\mathfrak{P}_1^*, \ldots, \mathfrak{P}_e^*$ von einander verschiedene Primideale f^{ten} Grades in $k(Z^*)$ sind.

Wenn m eine Potenz einer Primzahl l ist, und g eine nicht durch l teilbare Zahl bedeutet, so stellt in dem durch $Z = e^{\frac{2i\pi}{m}}$ bestimmten Kreiskörper der Ausdruck $\frac{1 - Z^g}{1 - Z}$ stets eine Einheit dar. Wenn die Zahl m verschiedene Primfaktoren enthält und g eine zu m prime Zahl bedeutet, so stellt in dem durch $Z = e^{\frac{2i\pi}{m}}$ bestimmten Kreiskörper der Ausdruck $1 - Z^g$ stets eine Einheit dar.

Von einer jeden beliebigen Einheit eines Kreiskörpers $k\left(e^{\frac{2i\pi}{m}}\right)$ gilt nach *L. Kronecker*[4]) die Thatsache, dass sie gleich dem Produkte einer Einheitswurzel und einer reellen Einheit ist. Die Einheitswurzel liegt dabei nicht notwendig immer in dem Körper $k\left(e^{\frac{2i\pi}{m}}\right)$ selbst, sondern kann, wenn m verschiedene Primzahlen enthält, bei geradem m eine $2m^{\text{te}}$, bei ungeradem m eine $4m^{\text{te}}$ Einheitswurzel sein.

3. Lagrange'sche Resolvente oder Wurzelzahl. Es sei $l = 2$ oder eine ungerade Primzahl, ferner $p = lm + 1$ eine rationale Primzahl, es werde $Z = e^{\frac{2i\pi}{p}}$ gesetzt und es bezeichne R eine Primitivzahl nach p. Der Ausdruck

$$\Lambda = Z + \zeta Z^R + \zeta^2 Z^{R^2} + \cdots + \zeta^{p-2} Z^{R^{p-2}}$$

4) J. f. Math. 53 (1857), p. 176 = Werke 1, p. 109.

heisst die *Lagrange'sche Resolvente* oder *Wurzelzahl* des Körpers $k(Z)$; dieselbe zeichnet sich durch folgende Eigenschaften aus:

Die l^{te} Potenz Λ^l der Lagrange'schen Wurzelzahl Λ gestattet in $k(\zeta)$ die Zerlegung

$$\Lambda^l = \mathfrak{p}^{r_0 + r_{-1} s + r_{-2} s^2 + \cdots + r_{-l+2} s^{l-2}},$$

wo $\mathfrak{p}$ das durch die Formel $\mathfrak{p} = (p, \zeta - R^{-m})$ bestimmte Primideal in $k(\zeta)$ ist; ferner haben wir hierbei $s = (\zeta : \zeta^r)$ gesetzt, wobei r eine Primitivzahl (primitive Wurzel) nach l und wo allgemein r_{-i} die kleinste positive ganze rationale Zahl bedeutet, welche der $-i^{\text{ten}}$ Potenz r^{-i} der Primitivzahl r nach l kongruent ist. Die Lagrange'sche Wurzelzahl Λ ist $\equiv -1$ nach $\mathfrak{l} = (1 - \zeta)$ und hat ferner die Eigenschaft, dass ihr absoluter Betrag $= |\sqrt{p}|$ ist.

Die Lagrange'sche Wurzelzahl Λ des Körpers k ist eine ganze Zahl des aus $k(\zeta)$ und $k(Z)$ zusammengesetzten Körpers, welche sich durch die eben aufgezählten Eigenschaften bis auf einen Faktor ζ^* völlig bestimmt, wobei ζ^* eine l^{te} Einheitswurzel ist. Um endlich auch diesen Faktor ζ^* festzulegen, muss man $\Lambda = |\sqrt{p}|\, e^{2i\pi\varphi}$ setzen derart, dass $0 \leqq \varphi < 1$ sei, und dann entscheiden, in welchem der l Intervalle

$$0 \leqq \varphi < \frac{1}{l}, \quad \frac{1}{l} \leqq \varphi < \frac{2}{l}, \quad \cdots, \quad \frac{l-1}{l} \leqq \varphi < 1$$

die betreffende Zahl φ gelegen ist. Aus dieser Frage entsteht in dem besonderen Falle, dass statt l die Primzahl 2 gewählt wird, das berühmte Problem der Bestimmung des Vorzeichens der Summen von *Gauss*[5]) [II A 3, Nr. 20] und es gilt der Satz, dass die Lagrange'sche Wurzelzahl Λ für $l = 2$ eine positiv reelle oder positiv rein imaginäre Zahl ist.

Die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von ζ in dem Ausdrucke für Λ werden gewöhnlich „*Perioden*" genannt. Die Litteratur weist eine Reihe von Abhandlungen auf, welche sich mit diesen Perioden, sowie mit verwandten ganzen Zahlen von Kreiskörpern beschäftigen[6]).

4. Anwendungen der Theorie des Kreiskörpers auf den quadratischen Körper. Indem wir gewisse Eigenschaften des Kreiskörpers der m^{ten} Einheitswurzeln für einen in ihm enthaltenen quadratischen Unterkörper verwerten, gelangen wir zu neuen Sätzen über den quadratischen Zahlkörper. Insbesondere ist eine jede Einheit eines reellen

5) Gotting. Comm. rec. 1 (1811) = Werke 2, p. 11.
6) Vgl. den zu Anfang genannten Bericht von *D. Hilbert*, p. 364.

quadratischen Körpers $k(\sqrt{m})$ eine Wurzel mit rationalem ganzzahligem Exponenten aus einem Produkte von Kreiseinheiten; es wird nach *Dirichlet*[7]) eine spezielle Einheit des Körpers $k(\sqrt{m})$ einfach durch den folgenden Ausdruck

$$\frac{\prod\limits_{(b)}\left(e^{\frac{bi\pi}{d}}-e^{-\frac{bi\pi}{d}}\right)}{\prod\limits_{(a)}\left(e^{\frac{ai\pi}{d}}-e^{-\frac{ai\pi}{d}}\right)}$$

erhalten, wo d die Diskriminante des Körpers $k(\sqrt{m})$ bedeutet, und wo die Produkte $\prod\limits_{(a)}$, $\prod\limits_{(b)}$ über alle diejenigen Zahlen a oder b der Reihe $1, 2, \ldots, d$ zu erstrecken sind, welche der Bedingung $\left(\frac{d}{a}\right)=+1$ bez. $\left(\frac{d}{b}\right)=-1$ genügen.

Es sei p entweder die Primzahl 2 oder eine beliebige von l verschiedene ungerade rationale Primzahl. Indem wir die Zerlegung von p einerseits in dem Kreiskörper $k(\zeta)$ der l^{ten} Einheitswurzeln, andererseits direkt in dem quadratischen Unterkörper k^* ausführen und hernach die erhaltenen Resultate mit einander vergleichen, gelangen wir nach *L. Kronecker*[8]) zu einem neuen Beweise des Reciprozitätsgesetzes für quadratische Reste [I C 1, Nr. **6**].

Die in Nr. **3** genannten Thatsachen liefern für den quadratischen Körper folgende von *Jacobi*[9]), *Cauchy*[10]) und *Eisenstein*[11]) gefundenen Resultate: Wenn l eine rationale Primzahl mit der Kongruenzeigenschaft $l \equiv 3$ nach 2^2 ist und p eine rationale Primzahl von der Gestalt $p = ml + 1$ bedeutet, so gilt für ein jedes in p aufgehende Primideal $\mathfrak{p}$ des imaginären quadratischen Körpers $k(\sqrt{-l})$ die Äquivalenz

$$\mathfrak{p}^{\frac{\Sigma b - \Sigma a}{l}} \sim 1,$$

wo $\sum a$ die Summe der kleinsten positiven quadratischen Reste und $\sum b$ die Summe der kleinsten positiven quadratischen Nichtreste nach l bedeutet. Setzt man ferner $p = \mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'$ und

7) J. f. Math. 17 (1837), p. 286 = Werke 1, p. 343.

8) Berl. Ber. 1880, p. 686, 854.

9) J. f. Math. 2 (1827), p. 66; 9 (1832), p. 189; 30 (1837), p. 166; 19 (1839), p. 314 = Werke 6, p. 233, 240, 254, 275.

10) Par. C. R. 10 (1840), p. 51, 85, 181, 229 = Oeuvr. (1) 5, p. 52, 64, 85, 95.

11) J. f. Math. 27 (1844), p. 269.

$$\mathfrak{p}^{\frac{\Sigma b - \Sigma a}{l}} = (\pi),$$

wobei π eine ganze Zahl des imaginären quadratischen Körpers $k(\sqrt{-1})$ bedeutet, so gilt die Kongruenz

$$\pi \equiv \pm \frac{1}{\prod\limits_{(a)} [(a\,m)\,!]}, \quad (\mathfrak{p}'),$$

wo das im Nenner stehende Produkt über alle kleinsten positiven quadratischen Reste a nach l zu erstrecken ist.

5. Kreiskörper in seiner Eigenschaft als Abel'scher Körper. Wir erweitern nunmehr den Begriff des Kreiskörpers, wie er bisher in Betracht kam: wir bezeichnen als einen *Kreiskörper* schlechthin nicht nur einen jeden durch die Einheitswurzeln von irgend einem Exponenten m bestimmten Körper $k\left(e^{\frac{2i\pi}{m}}\right)$, sondern auch einen jeden, irgendwie in einem solchen besonderen Kreiskörper $k\left(e^{\frac{2i\pi}{m}}\right)$ enthaltenen Unterkörper. Da jeder Körper $k\left(e^{\frac{2i\pi}{m}}\right)$ ein Abel'scher Körper ist und ferner, wenn m und m' irgend welche Exponenten bedeuten, der Körper der m^{ten} Einheitswurzeln und der Körper der m'^{ten} Einheitswurzeln beide zugleich in dem Körper der $m \cdot m'^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln als Unterkörper enthalten sind, so gelten für diesen erweiterten Begriff des Kreiskörpers allgemein die folgenden Thatsachen: Jeder Kreiskörper ist ein Abel'scher Körper. Jeder Unterkörper eines Kreiskörpers ist ein Kreiskörper. Jeder aus Kreiskörpern zusammengesetzte Körper ist wiederum ein Kreiskörper. Die erstere Aussage lässt sich wie folgt umkehren:

Jeder Abel'sche Zahlkörper im Bereiche der rationalen Zahlen ist ein Kreiskörper [I C 4 a, Nr. **14**].

Diesen Satz hat zuerst *L. Kronecker*[12]) aufgestellt, dann gab *H. Weber*[13]) einen vollständigen Beweis. Von *D. Hilbert*[14]) endlich rührt ein rein arithmetischer Beweis des Satzes her, der weder die Kummer'sche Zerlegung der Lagrange'schen Resolvente in Primideale, noch die Anwendung der dem Wesen des Satzes fremdartigen transcendenten Methoden von *Dirichlet* [I C 3, Nr. 2] erfordert.

---

12) Berl. Ber. 1853, p. 365 und 1877, p. 845.

13) Acta math. 8, p. 193 und 9, p. 105 (1886, 1887).

14) Gött. Nachr. 1896, p. 29; in vereinfachter Form Deutsche Math.-Ver. 4 (1897), p. 339—351.

6. Transcendente Bestimmung der Anzahl der Idealklassen im Kreiskörper. Auf Grund der in Nr. 9 des Artikels [I C 4 a] über den algebraischen Zahlkörper behandelten Methode von *Dirichlet* fand *E. Kummer*[15]) das Resultat:

Ist l eine ungerade Primzahl, so stellt sich die Klassenanzahl h des Kreiskörpers der l^{ten} Einheitswurzeln, wie folgt, dar:

$$h = \frac{\prod\limits_{(u)} \sum\limits_{(n)} n\, e^{\frac{2 i \pi n' u}{l-1}}}{(2l)^{\frac{l-3}{2}}} \cdot \frac{\Delta}{R}.$$

Hierin ist das Produkt $\prod\limits_{(u)}$ über die ungeraden Zahlen $u = 1, 3, 5, \ldots, l-2$ und jede einzelne Summe $\sum\limits_{(n)}$ über die Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots, l-1$ zu erstrecken; ferner ist eine Primitivzahl r nach l zu Grunde gelegt und man hat unter n' eine solche zu n gehörige ganze rationale Zahl zu verstehen, für welche $r^{n'} \equiv n$ nach l wird. Δ bedeutet die Determinante

$$(-1)^{\frac{(l-3)(l-5)}{8}} \begin{vmatrix} \log \varepsilon_1, & \log \varepsilon_2, & \ldots, & \log \varepsilon_{\frac{l-3}{2}} \\ \log \varepsilon_2, & \log \varepsilon_3, & \ldots, & \log \varepsilon_{\frac{l-1}{2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \log \varepsilon_{\frac{l-3}{2}}, & \log \varepsilon_{\frac{l-1}{2}}, & \ldots, & \log \varepsilon_{l-4} \end{vmatrix},$$

und dabei ist allgemein $\log \varepsilon_g$ der reelle Wert des Logarithmus der Einheit

$$\varepsilon_g = \sqrt{\frac{1-\zeta^{r^g}}{1-\zeta^{r^{g-1}}} \frac{1-\zeta^{-r^g}}{1-\zeta^{-r^{g-1}}}}.$$

Die zwei Brüche hier in dem Ausdruck für h heissen *der erste und der zweite Faktor der Klassenanzahl*; beide Faktoren der Klassenanzahl sind für sich ganze rationale Zahlen. Der zweite Faktor stellt die Klassenanzahl des in $k(\zeta)$ enthaltenen reellen Unterkörpers vom $\frac{l-1}{2}$ten Grade dar. *E. Kummer*[16]) hat über diese zwei Faktoren noch weitere Sätze aufgestellt, welche ihre Teilbarkeit durch 2 betreffen. Der Versuch *Kronecker*'s[17]), diese Sätze rein arithmetisch zu

15) J. f. Math. 40 (1850), p. 93, 117.

16) Berl. Ber. 1870, p. 409, 856. Im Falle der 11. und 13. Einheitswurzeln ist nach *P. Wolfskehl*, J. f. Math. 99 (1886), p. 173, der zweite Faktor gleich Eins.

17) Berl. Ber. 1870, p. 884 = Werke 1, p. 271.

beweisen, weist einen Irrtum auf, und die von *L. Kronecker* gegebene Verallgemeinerung ist nicht richtig. Ausserdem hat *E. Kummer* [18]) noch nach einer anderen Richtung hin Untersuchungen über die Bedeutung und die Eigenschaften dieser zwei Faktoren angestellt. Endlich hat *E. Kummer* [19]) den Satz behauptet, dass die Klassenanzahl eines jeden in $k(\zeta)$ enthaltenen Unterkörpers in der Klassenanzahl h des Körpers $k(\zeta)$ aufgeht. Der von ihm versuchte Beweis hiefür ist jedoch nicht stichhaltig.

Die entsprechende Formel für die Klassenanzahl eines Kreiskörpers $k\left(e^{\frac{2i\pi}{m}}\right)$, wo m eine beliebige zusammengesetzte Zahl ist, hat *E. Kummer* [20]) aufgestellt und *D. Hilbert* [21]) bewiesen.

Auf Grund dieser Formel für die Klassenanzahl ergeben sich folgende zwei Sätze, unter denen der erste von *Dirichlet* [22]) auf einem etwas verschiedenen Wege bewiesen worden ist [I C 3, Nr. 2, Anm. 11]:

Bedeuten m und n zwei zu einander prime ganze rationale Zahlen, so giebt es stets unendlich viele rationale Primzahlen p mit der Kongruenzeigenschaft $p \equiv n$ nach m.

Jede Einheit eines Abel'schen Körpers ist eine Wurzel mit rationalem ganzzahligem Exponenten aus einem Produkt von Kreiseinheiten.

7. Kummer'scher Zahlkörper und seine Primideale. Es bezeichne wieder l eine ungerade rationale Primzahl und $k(\zeta)$ den durch $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{l}}$ bestimmten Kreiskörper. Ist dann μ eine solche ganze Zahl in $k(\zeta)$, welche nicht zugleich die l^{te} Potenz einer Zahl in $k(\zeta)$ wird, so erweist sich die Gleichung l^{ten} Grades

$$x^l - \mu = 0$$

als irreducibel im Rationalitätsbereich $k(\zeta)$. Bedeutet $\mathsf{M} = \sqrt[l]{\mu}$ eine irgendwie in bestimmter Weise ausgewählte Wurzel dieser Gleichung, so sind

$$\zeta\mathsf{M},\ \zeta^2\mathsf{M},\ \ldots,\ \zeta^{l-1}\mathsf{M}$$

deren $l-1$ übrige Wurzeln. Der durch M und ζ bestimmte Körper $k(\mathsf{M}, \zeta)$ heisst ein *Kummer'scher Körper*, da derselbe zuerst von *E. Kummer* untersucht worden ist. Ein solcher Kummer'scher Körper $k(\mathsf{M}, \zeta)$ ist vom Grade $l-1$; er enthält den Kreiskörper $k(\zeta)$ als

18) Berl. Ber. 1853, p. 194.
19) J. f. Math. 40 (1850), p. 117.
20) Berl. Ber. 1861, p. 1051 und 1863, p. 21.
21) Deutsche Math.-Ver. 4 (1897), p. 378—380.
22) Berl. Ber. 1837, p. 108; Berl. Abh. 1837, p. 45 = Werke 1, p. 307 und p. 313.

Unterkörper und ist in Bezug auf $k(\zeta)$ ein relativ-Abel'scher Körper vom Relativgrade l. Durch die Operation der Vertauschung von M mit $\zeta\mathsf{M}$ in einer Zahl oder in einem Ideal dieses Kummer'schen Körpers geht man zu der relativkonjugierten Zahl bez. dem relativkonjugierten Ideal über. Dieser Übergang werde durch Vorsetzen des Substitutionszeichens S angedeutet.

Um die Primideale des *Kummer*'schen Körpers aufzustellen, bedient man sich des folgenden Symbols. Ist zunächst das Primideal $\mathfrak{w}$ von $\mathfrak{l} = (1 - \zeta)$ verschieden und prim zu μ, so bedeute das Symbol $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{w}}\right\}$ diejenige l^{te} Einheitswurzel, die der Kongruenz

$$\mu^{\frac{n(\mathfrak{w})-1}{l}} \equiv \left\{\frac{\mu}{\mathfrak{w}}\right\}, \quad (\mathfrak{w})$$

genügt; dabei bezeichnet $n(\mathfrak{w})$ die Norm von $\mathfrak{w}$. Es gehe andrerseits $\mathfrak{w}$ in μ auf; wenn dann die Relativdiskriminante des durch $\mathsf{M} = \sqrt[l]{\mu}$ und ζ bestimmten Kummer'schen Körpers durch $\mathfrak{w}$ teilbar ist, so habe das Symbol $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{w}}\right\}$ den Wert 0. Ist dagegen die Relativdiskriminante dieses Körpers $k(\mathsf{M}, \zeta)$ nicht durch $\mathfrak{w}$ teilbar, so kann man stets eine Zahl α in $k(\zeta)$ finden derart, dass $\mu^* = \alpha^l \mu$ eine ganze, nicht mehr durch $\mathfrak{w}$ teilbare Zahl in $k(\zeta)$ wird. Wir definieren dann, wenn $\mathfrak{w} \neq \mathfrak{l}$ ist, das fragliche Symbol durch die Formel

$$\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{w}}\right\} = \left\{\frac{\mu^*}{\mathfrak{w}}\right\}.$$

Wenn aber $\mathfrak{w} = \mathfrak{l}$ ist, so kann, da die Relativdiskriminante von $k(\mathsf{M}, \zeta)$ prim zu $\mathfrak{l}$ sein soll, die Zahl α überdies so gewählt werden, dass $\mu^* \equiv 1$ nach $\mathfrak{l}^l$ ausfällt. Ist dies geschehen, so gilt eine Kongruenz von der Gestalt

$$\mu^* \equiv 1 + a\,(1 - \zeta)^l, \quad (\mathfrak{l}^{l+1}),$$

wo a eine bestimmte Zahl aus der Reihe $0, 1, 2, \ldots, l-1$ bedeutet. Wir definieren dann das Symbol $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right\}$ durch die Gleichung

$$\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{l}}\right\} = \zeta^a.$$

Ist endlich μ die l^{te} Potenz einer ganzen Zahl in $k(\zeta)$ und $\mathfrak{w}$ ein beliebiges Primideal in $k(\zeta)$, so werde stets $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{w}}\right\} = 1$ genommen.

Auf diese Weise ist der Wert des Symbols $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{w}}\right\}$ für jede ganze Zahl μ und für jedes Primideal $\mathfrak{w}$ in $k(\zeta)$ eindeutig festgelegt, und zwar wird dieser Wert entweder gleich 0 oder gleich einer bestimmten l^{ten} Einheitswurzel.

Die Aufgabe, die Primideale des Kreiskörpers $k(\zeta)$ in Primideale des Kummer'schen Körpers $k(\mathsf{M}, \zeta)$ zu zerlegen, wird durch folgenden Satz gelöst: Ein beliebiges Primideal $\mathfrak{p}$ in $k(\zeta)$ ist in dem durch $\mathsf{M} = \sqrt[l]{\mu}$ und ζ bestimmten Kummer'schen Körper $k(\mathsf{M}, \zeta)$ entweder gleich der l^{ten} Potenz eines Primideals oder zerlegbar in l von einander verschiedene Primideale oder selbst Primideal, je nachdem $\left\{\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right\} = 0$ oder $= 1$ oder gleich einer von 1 verschiedenen l^{ten} Einheitswurzel ausfällt.

8. Normenreste und Normennichtreste des Kummer'schen Zahlkörpers. Es sei wie in Nr. 7 μ eine Zahl des Kreiskörpers $k(\zeta)$, für welche $\mathsf{M} = \sqrt[l]{\mu}$ nicht in $k(\zeta)$ liegt und es bedeute $k(\mathsf{M}, \zeta)$ den durch M und ζ bestimmten Kummer'schen Körper; für eine Zahl A in $k(\mathsf{M}, \zeta)$ werde die *Relativnorm* in Bezug auf $k(\zeta)$ mit $N(\mathsf{A})$ bezeichnet. Es sei $\mathfrak{w}$ ein beliebiges Primideal des Kreiskörpers $k(\zeta)$ und ν eine beliebige ganze Zahl in $k(\zeta)$. Wenn dann ν nach $\mathfrak{w}$ der Relativnorm einer ganzen Zahl des Körpers $k(\mathsf{M}, \zeta)$ kongruent ist, und wenn ausserdem auch für jede höhere Potenz von $\mathfrak{w}$ stets eine solche ganze Zahl A im Körper $k(\mathsf{M}, \zeta)$ gefunden werden kann, dass $\nu \equiv N(\mathsf{A})$ nach jener Potenz von $\mathfrak{w}$ ausfällt, so heisst nach *D. Hilbert* ν ein *Normenrest des Kummer'schen Körpers* $k(\mathsf{M}, \zeta)$ *nach* $\mathfrak{w}$, in jedem anderen Falle heisst ν ein *Normennichtrest des Kummer'schen Körpers* $k(\mathsf{M}, \zeta)$ *nach* $\mathfrak{w}$.

D. Hilbert hat folgenden Satz bewiesen:

Wenn $\mathfrak{w}$ ein Primideal des Kreiskörpers $k(\zeta)$ ist, das nicht in der Relativdiskriminante des Kummerschen Körpers $k(\mathsf{M}, \zeta)$ aufgeht, so ist jede zu $\mathfrak{w}$ prime Zahl in $k(\zeta)$ Normenrest des Kummer'schen Körpers $k(\mathsf{M}, \zeta)$ nach $\mathfrak{w}$.

Wenn dagegen $\mathfrak{w}$ ein Primideal des Kreiskörpers $k(\zeta)$ ist, das in der Relativdiskriminante des Kummer'schen Körpers $k(\mathsf{M}, \zeta)$ aufgeht, und e im Falle $\mathfrak{w} \neq \mathfrak{l}$ einen beliebigen positiven Exponenten, im Falle $\mathfrak{w} = \mathfrak{l}$ einen beliebigen Exponenten $> l$ bedeutet, so sind von allen vorhandenen zu $\mathfrak{w}$ primen und nach $\mathfrak{w}^e$ einander inkongruenten Zahlen in $k(\zeta)$ genau der l^{te} Teil Normenreste nach $\mathfrak{w}$.

Dieser Satz weist uns auf die Möglichkeit hin, die nach einer Potenz $\mathfrak{w}^e$ ($e > l$ im Falle $\mathfrak{w} = \mathfrak{l}$) vorhandenen einander inkongruenten Zahlen des Körpers $k(\zeta)$ in l Abteilungen zu sondern, die sämtlich gleich viele Zahlen enthalten und von denen eine die Normenreste nach $\mathfrak{w}$ umfasst. Um diese Sonderung in übersichtlicher Weise vornehmen zu können, bedient sich *D. Hilbert* eines neuen Symbols, welches zwei beliebigen, von 0 verschiedenen ganzen Zahlen ν, μ des Körpers $k(\zeta)$ in Bezug auf ein beliebiges Primideal $\mathfrak{w}$ in $k(\zeta)$ jedesmal eine bestimmte l^{te} Einheitswurzel zuweist, und zwar geschieht dies in folgender Weise:

Es sei zunächst $\mathfrak{w}$ ein von $\mathfrak{l}$ verschiedenes Primideal. Ist dann ν genau durch $\mathfrak{w}^b$ und μ genau durch $\mathfrak{w}^a$ teilbar, so bilde man die Zahl $\varkappa = \frac{\nu^a}{\mu^b}$ und bringe $\varkappa$ in die Gestalt eines Bruches $\frac{\varrho}{\sigma}$, dessen Zähler ϱ und Nenner σ nicht durch $\mathfrak{w}$ teilbar sind. Das Symbol $\left\{\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right\}$ werde dann durch die Formel

$$\left\{\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right\} = \left\{\frac{\varkappa}{\mathfrak{w}}\right\} = \left\{\frac{\varrho}{\mathfrak{w}}\right\}\left\{\frac{\sigma}{\mathfrak{w}}\right\}^{-1}$$

definiert. Es ergeben sich hieraus unmittelbar für dieses Symbol die einfachen Regeln:

$$\left\{\frac{\nu_1\nu_2,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right\} = \left\{\frac{\nu_1,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right\}\left\{\frac{\nu_2,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right\},$$

$$\left\{\frac{\nu,\,\mu_1\mu_2}{\mathfrak{w}}\right\} = \left\{\frac{\nu,\,\mu_1}{\mathfrak{w}}\right\}\left\{\frac{\nu,\,\mu_2}{\mathfrak{w}}\right\},$$

$$\left\{\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right\}\left\{\frac{\mu,\,\nu}{\mathfrak{w}}\right\} = 1,$$

wo $\nu, \nu_1, \nu_2, \mu, \mu_1, \mu_2$ beliebige von Null verschiedene ganze Zahlen in $k(\zeta)$ bedeuten können.

Die Definition des neuen Symbols für den Fall $\mathfrak{w} = \mathfrak{l}$ kann man auf die Formeln

$$\left\{\frac{\alpha,\,\zeta}{\mathfrak{l}}\right\} = \zeta^{\frac{n(\alpha)-1}{l}}, \quad \left\{\frac{\nu_1\nu_2,\,\mu}{\mathfrak{l}}\right\} = \left\{\frac{\nu_1,\,\mu}{\mathfrak{l}}\right\}\left\{\frac{\nu_2,\,\mu}{\mathfrak{l}}\right\},$$

$$\left\{\frac{\nu^*,\,\mu}{\mathfrak{l}}\right\} = 1, \qquad \left\{\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{l}}\right\}\left\{\frac{\mu,\,\nu}{\mathfrak{l}}\right\} = 1$$

gründen, wo α eine beliebige zu $\mathfrak{l}$ prime Zahl in $k(\zeta)$, ν^* ein beliebiger Normenrest des Körpers $k(\sqrt[l]{\mu},\,\zeta)$ nach $\mathfrak{l}$, und ν_1, ν_2, ν, μ beliebige ganze Zahlen in $k(\zeta)$ sein sollen. Die aufgezählten Forderungen sind miteinander verträglich und reichen in allen Fällen zur Definition des Symbols hin. Wenn insbesondere die beiden Zahlen ν, μ zu $\mathfrak{l}$ prim sind und

$$\nu \equiv a^l(1+\lambda)^{n_1}(1+\lambda^2)^{n_2}\cdots(1+\lambda^{l-1})^{n_{l-1}}, \quad (\mathfrak{l}^l),$$

$$\mu \equiv b^l(1+\lambda)^{m_1}(1+\lambda^2)^{m_2}\cdots(1+\lambda^{l-1})^{m_{l-1}}, \quad (\mathfrak{l}^l),$$

gesetzt wird, wo a, b und die Exponenten

$$n_1, n_2, \ldots, n_{l-1};\ m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}$$

ganze rationale Zahlen sind und $\lambda = 1 - \zeta$ gesetzt ist, so besteht eine Gleichung von der Gestalt

$$\left\{\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{l}}\right\} = \zeta^{L(n_1,\ldots,\,n_{l-1};\; m_1,\ldots,\,m_{l-1})};$$

dabei ist L eine homogene bilineare Funktion der beiden Reihen von Veränderlichen $n_1, \ldots n_{l-1}$; $m_1, \ldots, m_{l-1}$, und die Koeffizienten von L sind ganze rationale Zahlen, die nur von der Primzahl l abhängen, und die man bei gegebenem Werte der Primzahl l etwa durch besondere Annahmen der Zahlen ν, μ leicht berechnen kann.

Es gilt nun der Satz: *Wenn ν, μ zwei beliebige ganze Zahlen in $k(\zeta)$ sind, nur dass $\sqrt[l]{\mu}$ nicht in $k(\zeta)$ liegt, und $\mathfrak{w}$ ein beliebiges Primideal des Kreiskörpers $k(\zeta)$ bedeutet, so ist ν Normenrest oder Normennichtrest des durch $\mathsf{M} = \sqrt[l]{\mu}$ bestimmten Kummer'schen Körpers $k(\mathsf{M}, \zeta)$ nach* $\mathfrak{w}$, je nachdem

$$\left\{\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right\} = 1 \quad \text{oder} \quad \neq 1$$

ausfällt.

9. Existenz unendlichvieler Primideale mit vorgeschriebenen Potenzcharakteren. Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ irgend t ganze Zahlen des Kreiskörpers $k(\zeta)$, welche die Bedingung erfüllen, dass das Produkt $\alpha_1^{m_1}\alpha_2^{m_2}\ldots\alpha_t^{m_t}$, wenn man jeden der Exponenten $m_1, m_2, \ldots, m_t$ die Werte $0, 1, 2, \ldots, l-1$ durchlaufen lässt, jedoch das eine Wertsystem $m_1 = 0$, $m_2 = 0, \ldots, m_t = 0$ ausschliesst, dabei niemals die l^{te} Potenz einer Zahl in $k(\zeta)$ wird; es seien ferner $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$ nach Belieben vorgeschriebene l^{te} Einheitswurzeln: dann giebt es im Kreiskörper $k(\zeta)$ stets unendlich viele Primideale $\mathfrak{p}$, für die jedesmal bei einem gewissen zu l primen Exponenten m

$$\left\{\frac{\alpha_1}{\mathfrak{p}}\right\}^m = \gamma_1,\quad \left\{\frac{\alpha_2}{\mathfrak{p}}\right\}^m = \gamma_2, \ldots, \quad \left\{\frac{\alpha_t}{\mathfrak{p}}\right\}^m = \gamma_t$$

wird. Der Nachweis dieses Satzes von *E. Kummer*[23]) beruht im wesentlichen darauf, dass man in geeigneter Weise die allgemeine transcendente Methode für die Klassenanzahlbestimmung auf den Kummer'schen Körper anwendet und aus der so erhaltenen Formel auf das Nichtverschwinden des Grenzwertes einer gewissen unendlichen Summe schliesst.

10. Regulärer Kreiskörper und regulärer Kummer'scher Körper. Es bedeute l wie bisher eine ungerade Primzahl und $k(\zeta)$

23) Berl. Abh. 1859², p. 19.

den durch $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{l}}$ bestimmten Kreiskörper: dieser Kreiskörper $k(\zeta)$ heisst nach *D. Hilbert* ein *regulärer Kreiskörper* und die Primzahl l *eine reguläre Primzahl*, wenn die Anzahl h der Idealklassen des Körpers $k(\zeta)$ nicht durch l teilbar ist; desgleichen heissen solche Kummer'sche Körper, welche aus regulären Kreiskörpern entspringen, *reguläre Kummer'sche Körper*.

E. Kummer [24]) hat durch Rechnung aus der in Nr. **6** angegebenen Formel für die Klassenanzahl des Kreiskörpers bewiesen, dass eine ungerade Primzahl l dann und nur dann regulär ist, wenn sie in den Zählern der ersten $l^* = \frac{l-3}{2}$ Bernoulli'schen Zahlen [I E, Nr. **10**; II A 3, Nr. **18**] nicht aufgeht.

11. Geschlechter im regulären Kummer'schen Körper. Mit Hilfe des in Nr. 8 definierten Symbols $\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\}$ ordnet *D. Hilbert* im regulären Kummer'schen Körper einem jeden Ideal $\mathfrak{J}$ desselben in bestimmter Weise ein Charakterensystem zu, welches aus einer gewissen Anzahl r ($\geqq 1$) von l^{ten} Einheitswurzeln besteht. Aus den Eigenschaften jenes Symbols folgt dann unmittelbar, dass die Ideale ein und derselben Klasse eines regulären Kummer'schen Körpers sämtlich dasselbe Charakterensystem besitzen und es ist daher auf diese Weise überhaupt einer jeden Idealklasse ein bestimmtes Charakterensystem zugeordnet. Man rechnet nun alle diejenigen Idealklassen, welche ein und dasselbe Charakterensystem besitzen, in ein *Geschlecht* und definiert insbesondere das *Hauptgeschlecht* als die Gesamtheit aller derjenigen Klassen, deren Charakterensystem aus lauter Einheiten 1 besteht. Da das Charakterensystem der Hauptklasse von der letzteren Eigenschaft ist, so gehört insbesondere die Hauptklasse stets zum Hauptgeschlecht. Aus den Eigenschaften des Symbols $\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\}$ entnimmt man leicht die folgenden Thatsachen: Wenn G und G' zwei beliebige Geschlechter sind und jede Klasse in G mit jeder Klasse in G' multipliziert wird, so bilden sämtliche solche Produkte wiederum ein Geschlecht; dieses wird das *Produkt der Geschlechter* G und G' genannt. Das Charakterensystem desselben erhalten wir durch Multiplikation der entsprechenden Charaktere der beiden Geschlechter G und G'.

Aus der eben aufgestellten Definition der Geschlechter leuchtet ferner ein, dass die zu einer Klasse C relativkonjugierten Klassen $SC, \ldots, S^{l-1}C$ zu demselben Geschlechte wie C selbst gehören,

24) J. f. Math. 40 (1859), p. 130.

und hieraus folgt, dass die $(1-S)^{\text{te}}$ symbolische Potenz C^{1-S} (vgl. Nr. **17** des Artikels I C 4 a „Theorie der algebraischen Zahlkörper") einer jeden Klasse C stets zum Hauptgeschlecht gehört. Endlich ist offenbar, dass jedes Geschlecht des Kummer'schen Körpers gleich viel Klassen enthält.

12. Reziprozitätsgesetz für l^{te} Potenzreste im regulären Kummer'schen Körper. *G. Eisenstein* [25]) hat mittels der Formeln der Kreisteilung ein Reziprozitätsgesetz zwischen einer ganzen rationalen Zahl und einer beliebigen ganzen Zahl des Kreiskörpers $k(\zeta)$ abgeleitet. Mit Hilfe dieses Reziprozitätsgesetzes von *Eisenstein* und auf Grund des in Nr. **11** entwickelten, von *E. Kummer* geschaffenen Geschlechtsbegriffes gelang es dann *E. Kummer* [26]) für den regulären Kreiskörper das allgemeine Reziprozitätsgesetz der l^{ten} Potenzreste aufzustellen und zu beweisen. Mit Benutzung des in Nr. **8** definierten Symbols hat *D. Hilbert* eine Formel abgeleitet, die insbesondere auch die Kummer'schen Reziprozitätsgesetze zugleich mit ihren sogenannten Ergänzungssätzen in vollständiger und einfacher Weise zum Ausdruck bringt. Diese Formel lautet:

Wenn ν und μ zwei beliebige ganze Zahlen $(\neq 0)$ *eines regulären Kreiskörpers $k(\zeta)$ bedeuten, so ist stets*

$$\prod_{(\mathfrak{w})} \left\{\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right\} = 1,$$

wenn das Produkt linker Hand über sämtliche Primideale $\mathfrak{w}$ in $k(\zeta)$ erstreckt wird.

Mit dieser Formel sind von *D. Hilbert* zugleich auch die Resultate, die *E. Kummer* gefunden hat, von neuem bewiesen — ohne die umfangreichen rechnerischen Hülfsmittel, die *E. Kummer* angewandt hat.

Von besonderen Reziprozitätsgesetzen, zu deren Behandlung die Formeln der Kreisteilung ausreichen, sind das Reziprozitätsgesetz für biquadratische Reste nach *Gauss* [27]) und *Eisenstein* [28]) sowie das Reziprozitätsgesetz für kubische Reste nach *Eisenstein* [29]) und *Jacobi* [30]) zu nennen.

---

25) Berl. Ber. 1850, p. 189.

26) Berl. Ber. 1850, p. 154; 1858, p. 158; Berl. Abh. 1859², p. 19; 1861², p. 81 = J. f. Math. 100, p. 10; J. f. Math. 44 (1851), p. 93; 56 (1858), p. 270.

27) Gotting. Comm. rec. 6 (1828); 7 (1832) = Werke 2, p. 65 u. 93; vgl. *T. J. Stieltjes*, Toul. Ann. 11 c (1897), p. 1.

28) J. f. Math. 28 (1844), p. 53, 223.

29) J. f. Math. 27, p. 289 u. 28 p. 28 (1844); vgl. *Stieltjes* l. c.

30) J. f. Math. 2, p. 66 = Werke 6, p. 233 (1827).

13. Anzahl der vorhandenen Geschlechter im regulären Kummer'schen Körper. Es können nunmehr nach *E. Kummer* für den regulären Kummer'schen Körper diejenigen Sätze aufgestellt und bewiesen werden, welche den bekannten Sätzen [I C 2, Nr. **c**] aus der Theorie der binären quadratischen Formen oder der quadratischen Zahlkörper entsprechen. Vor allem entsteht die Frage, ob ein System von r beliebig vorgelegten l^{ten} Einheitswurzeln stets das Charakterensystem für ein Geschlecht des Kummer'schen Körpers sein kann. Diese Frage findet durch folgenden Fundamentalsatz ihre Erledigung:

Es sei r die Anzahl der Charaktere, welche ein Geschlecht im regulären Kummer'schen Körper $K = k(\sqrt[l]{\mu}, \zeta)$ bestimmen; ist dann ein System von r beliebigen l^{ten} Einheitswurzeln vorgelegt, so ist dieses System dann und nur dann das Charakterensystem eines Geschlechtes in K, wenn das Produkt der sämtlichen r Einheitswurzeln gleich 1 *ist. Die Anzahl der in K vorhandenen Geschlechter ist daher gleich l^{r-1}, d. h. es sind genau der l^{te} Teil aller denkbaren Charakterensysteme wirklich durch Geschlechter vertreten.*

Die bemerkenswertesten Folgerungen dieses Satzes sind nach *D. Hilbert*:

Die Anzahl g der Geschlechter in einem regulären Kummer'schen Körper ist gleich der Anzahl seiner ambigen Komplexe (vgl. Nr. **17** des Artikels I C 4 **a** „Theorie der algebraischen Zahlkörper").

Jeder Komplex des Hauptgeschlechtes in einem regulären Kummer'schen Körper K ist die $(1 - S)^{\text{te}}$ symbolische Potenz eines Komplexes in K, d. h. jede Klasse des Hauptgeschlechtes in einem regulären Kummer'schen Körper K ist gleich dem Produkt aus der $(1 - S)^{\text{ten}}$ symbolischen Potenz einer Klasse und aus einer solchen Klasse, welche Ideale des Kreiskörpers $k(\zeta)$ enthält.

Wenn ν, μ zwei ganze Zahlen des regulären Kreiskörpers $k(\zeta)$ bedeuten, von denen μ nicht die l^{te} Potenz einer ganzen Zahl in $k(\zeta)$ ist, und welche für jedes Primideal $\mathfrak{w}$ in $k(\zeta)$ die Bedingung

$$\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\} = 1$$

erfüllen, so ist die Zahl ν stets gleich der Relativnorm einer ganzen oder gebrochenen Zahl A des Kummer'schen Körpers $K = k(\sqrt[l]{\mu}, \zeta)$.

14. Der Fermat'sche Satz. *Fermat* hat die Behauptung aufgestellt, dass die Gleichung [s. auch I C 2, Nr. **g**, 4)]:

$$a^m + b^m = c^m$$

in ganzen rationalen von Null verschiedenen Zahlen a, b, c für keinen ganzzahligen Exponenten $m > 2$ lösbar ist. Wenngleich schon aus der Litteratur vor *Kummer* vereinzelte Resultate über diese Gleichung von *Fermat* bemerkenswert sind[31]), so ist es doch erst *E. Kummer* auf Grund der Theorie der Ideale des regulären Kreiskörpers gelungen, den Beweis der Fermat'schen Behauptung für sehr umfassende Klassen von Exponenten m vollständig zu führen. Die wichtigste von *E. Kummer*[32]) bewiesene Thatsache ist die folgende:

Wenn l eine reguläre Primzahl (Nr. **10**) bedeutet und α, β, γ irgend welche ganze Zahlen des Kreiskörpers der l^{ten} Einheitswurzeln sind, von denen keine verschwindet, so besteht niemals die Gleichung

$$\alpha^l + \beta^l + \gamma^l = 0.$$

Der Beweis dieses Satzes ist von *D. Hilbert* vereinfacht und vervollständigt worden.

Der Beweis der Unlösbarkeit der Gleichung $\alpha^l + \beta^l + \gamma^l = 0$ in ganzen Zahlen α, β, γ des Kreiskörpers der l^{ten} Einheitswurzeln ist von *Kummer*[33]) noch in dem Falle erbracht worden, dass l eine Primzahl ist, die in der Klassenanzahl des Kreiskörpers $k\left(e^{\frac{2i\pi}{l}}\right)$ zur ersten, aber nicht zu einer höheren Potenz aufgeht. Damit ist die *Fermat'sche* Behauptung insbesondere für jeden Exponenten $m \leq 100$ als richtig erkannt. Die Aufgabe, die *Fermat'sche* Behauptung allgemein als richtig zu erweisen, harrt jedoch noch ihrer Lösung.

---

31) Vgl. *N. H. Abel,* Oeuvr. éd. Sylow-Lie 2, p. 254 (1823); *Cauchy,* Par. C. R. 10 (1840^1), p. 560 u. 25 (1847^2), p. 181 = Oeuvr. (1) 5, p. 152; (1) 10, p. 364; *Dirichlet,* Werke 1, p. 1 (1825); J. f. Math. 3 (1828) [1825], p. 354; 9 (1832), p. 390 = Werke 1, p. 21 u. 189; *G. Lamé,* J. de math. 5 (1840), p. 195 ($n = 7$) [Bericht von *Cauchy* p. 211] u. 12 (1847), p. 137 ($n = 5$), p. 172; *V. A. Lebesgue,* J. de math. 5 (1840), p. 184, 276 u. 384 ($n = 7$) u. 8 (1843), p. 49 ($n = 5$).

32) J. f. Math. 17 (1837), p. 203; 40 (1850), p. 130; J. de math. 16 (1851), p. 471.

33) Berl. Abh. 1857^2, p. 41.

I C 5. ARITHMETISCHE THEORIE ALGEBRAISCHER GRÖSSEN

VON

G. LANDSBERG

IN HEIDELBERG.

[Dieser Artikel ist mit I B 1 c vereinigt worden, s. Nr. **1—11** daselbst.]

I C 6. KOMPLEXE MULTIPLIKATION

VON

H. WEBER

IN STRASSBURG.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

N. H. Abel, Oeuvres complètes, alte Ausgabe (1839) 1, p. 242, 272; neue Ausgabe (1881) 1, p. 377, 426.

K. G. J. Jacobi, De multiplicatione functionum ellipticarum per quantitatem imaginariam pro certo quodam modulorum systemate (aus dem Nachlass herausgegeben von *F. Mertens,* Ges. Werke 1, p. 491; s. auch p. 254, 405).

L. Kronecker, Über elliptische Funktionen, für welche komplexe Multiplikation stattfindet (Berl. Ber. 27. Okt. 1857, p. 455); Neue Eigenschaften der quadratischen Formen mit negativer Determinante (Berl. Ber. 26. Mai 1862, p. 302); Über komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen (Berl. Ber. 26. Juni 1862, p. 363); Auflösung der Pell'schen Gleichung mittels elliptischer Funktionen (Berl. Ber. 22. Jan. 1863, p. 44); Über quadratische Formen von negativer Determinante (Berl. Ber. 19. Apr. 1875, p. 233); Über *Abel*'sche Gleichungen (Berl. Ber. 16. Apr. 1877, Nachtrag zum Dezemberheft, p. 845); Über Irreduzibilität von Gleichungen (Berl. Ber. 2. Febr. 1880, p. 155); Komposition *Abel*'scher Gleichungen, und: Die kubischen *Abel*'schen Gleichungen im Bereiche $(\sqrt{-31})$ (Berl. Ber. 1882, p. 1059, 1151); Zur Theorie der elliptischen Funktionen (Berl. Ber. 1883, p. 497, 525; 1885, p. 761; 1886, p. 701; 1889, p. 53, 123, 199, 255, 309; 1890, p, 99, 123, 219, 307, 1025).

Ch. Hermite, Sur la théorie des équations modulaires, Par. 1859 (Par. C. R. 48, 49, 1859).

Joubert, Sur la théorie des fonctions elliptiques et son application à la théorie des nombres, Par. C. R. 50 (1860), p. 774, 832, 907, 1040, 1095, 1145.

H. J. S. Smith, Brit. Ass. Rep. 35, 1865; Report on the theory of numbers 6 (Collected mathematical papers 1, p. 289).

R. Dedekind, Schreiben an Herrn *K. W. Borchardt* über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen (J. f. Math. 83 [1877], p. 265).

G. Pick, Über die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen I, II (Math. Ann. 25, p. 433; 26, p. 219, 1886).

H. Weber, Zur Theorie der elliptischen Funktionen I, II (Acta math. 6, 1885, p. 329; 11, 1888, p. 333); Zur komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen (Math. Ann. 33, 1888, p. 390); Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen (ausführlicheres Lehrbuch, Braunschweig 1891); Ein Beitrag zur Transformationstheorie der elliptischen Funktionen mit einer Anwendung auf Zahlentheorie (Math. Ann. 43, 1893, p. 185); Zahlentheoretische Untersuchungen aus dem Gebiet der elliptischen Funktionen I, II, III (Gött. Nachr. 1893, p. 46, 138, 245); Über Zahlengruppen in algebraischen Körpern I, II, III (Math. Ann. 48, 1896, p. 433; 49, 1897, p. 83; 50, 1897, p. 1, besonders die dritte dieser Abhandlungen).

H. Sylow, Sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques (J. de math. (4) 3, 1887, p. 109).

G. H. Halphen, Sur la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques et en particulier, sur la multiplication par $\sqrt{-23}$ [J. de math. (4) 5, 1889, p. 5]; Traité des fonctions elliptiques, troisième partie, fragments (nach des Verfassers Tod herausgegeben, Paris 1891).

G. H. Stuart, Complex Multiplication of Elliptic Functions (Quart. J. 20, 1884, p. 18, 221).

A. G. Greenhill, Complex Multiplication of Elliptic Functions (Quart. J. 22, 1887, p. 119, 174); Complex Multiplication Moduli of Elliptic Functions (Lond. Math. Soc. Proc. 19, 1888, p. 301); Table of Complex Multiplication Moduli (ib. 21, 1890, p. 403).

R. Russell, On Modular Equations (Lond. Math. Soc. Proc. 21, 1890, p. 351; s. auch ib. 19, 1888, p. 90).

G. B. Mathews, Complex Multiplication Moduli of Elliptic Functions for the Det. — 53, — 61 (Lond. Math. Soc. Proc. 21, 1890, p. 215).

F. Klein, Ausgewählte Kapitel der Zahlenlehre, Vorlesungen, Gött. 1895—96, autographiertes Heft; Bericht darüber Math. Ann. 48, 1897, p. 562. Hier wird durch Betrachtung des Punktgitters auf Grund einer allgemeinen Massbestimmung die Theorie geometrisch anschaulich begründet.

Im übrigen vgl. noch die unter II B 6 a aufgeführten Lehrbücher über die Theorie der elliptischen Funktionen.

Litteratur über Klassenzahlrelationen.

L. Kronecker, Über die Anzahl der verschiedenen Klassen quadratischer Formen von negativer Determinante (J. f. Math. 57, 1860, p. 248).

Ch. Hermite, Sur la théorie des fonctions elliptiques et ses applications à l'arithmétique [Par. C. R. 55, 1862, p. 11, 85; J. de math. (2) 7, p. 25 (s. auch

J. Liouville, ib. p. 41, 44)]; Remarques arithmétiques sur quelques formules de la théorie des fonctions elliptiques (J. f. Math. 100, 1885, p. 51).
J. Gierster, Über Relationen zwischen Klassenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante (Gött. Nachr. 1879, p. 277; Münch. Ber. Febr. 1880 = Math. Ann. 17, 1880, p. 71, 74; Math. Ann. 21, 1882, p. 1; 22, 1883, p. 190).
A. Hurwitz, Zur Theorie der Modulargleichungen (Gött. Nachr. 1883, p. 350); Über Relationen zwischen Klassenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante (Math. Ann. 25, 1885, p. 157); Über die Klassenzahlrelationen und Modularkorrespondenzen primzahliger Stufe (Leipz. Ber. 1885, p. 222).
F. Klein-R. Fricke, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Leipzig 1892.

1. Historische Einleitung. Die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen findet sich zuerst in der Litteratur erwähnt in den „Recherches sur les fonctions elliptiques" von *Abel,* die im zweiten und dritten Bande des Journals für Math. (1827, 1828) erschienen sind. Hier wird im § X die Frage gestellt und behandelt, unter welchen Umständen die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1+\mu y^2)}} = a\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+\mu x^2)}}$$

algebraisch integrierbar ist, und es werden die beiden Sätze aufgestellt, dass a, wenn es reell sein soll, notwendig eine rationale Zahl sein muss, wobei dann μ beliebig sein kann. Dies ist der Fall der gewöhnlichen *Multiplikation und Teilung* der elliptischen Funktionen [II B 6 a, Nr. **12, 19, 40**]. Nimmt man aber a komplex an, so muss es die Form haben $m \pm \sqrt{-n}$, worin m und n rationale Zahlen sind und n positiv ist. Dies ist die *komplexe Multiplikation.* Diese ist aber nicht mehr für einen beliebigen Modul μ möglich, sondern die für einen gegebenen Multiplicator dieser Form zulässigen Werte von μ hängen von einer algebraischen Gleichung ab, die *Abel* für zwei Beispiele, nämlich die Multiplikation mit $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-5}$ vollständig auflöst.

Ein noch einfacheres Beispiel, die Multiplikation mit $\sqrt{-1}$ oder die Multiplikation und Teilung der Lemniskatenfunktion, ist in derselben Abhandlung schon früher behandelt, und war bereits *K. F. Gauss* am Anfang des Jahrhunderts bekannt (Disquisitiones arithmeticae art. 335; 1801). Über die allgemeine Möglichkeit der Auflösung dieser Gleichungen durch Radikale äussert *Abel* an der erwähnten Stelle noch Zweifel. Er giebt nur transcendente Ausdrücke für diese singulären Werte von μ. Dagegen spricht er in der in den „Astronomischen Nachrichten", Bd. 6, Nr. 138 im Jahr 1828 veröffentlichten

Abhandlung „Solution d'un problème général concernant la transformation des fonctions elliptiques“ mit Bestimmtheit, wenn auch ohne Beweis, den Satz aus, dass diese singulären Werte von μ alle durch Radikale darstellbar sind. Den ersten Beweis dieses Satzes hat *Kronecker* erbracht.

In den Arbeiten von *Kronecker* und *Hermite* hat sich der innige Zusammenhang dieser Fragen mit der Zahlentheorie gezeigt, der seitdem in wachsendem Maasse das Interesse der Mathematiker in Anspruch genommen hat.

2. Komplexe Multiplikation und quadratische Formen. Ist $\varphi(u)$ eine doppelt periodische Funktion der Variablen u mit den Perioden ω_1, ω_2, so hat $\varphi(\mu u)$ immer dann dieselben Perioden ω_1, ω_2, wenn μ eine ganze Zahl ist, und wie in der Theorie der elliptischen Funktionen [II B 6 a] gezeigt wird, lässt sich dann $\varphi(\mu u)$ rational durch $\varphi(u)$, oder durch $\varphi(u)$ und seine Ableitung ausdrücken. Dies ist die reelle Multiplikation der elliptischen Funktionen.

Die allgemeine Bedingung dafür, dass $\varphi(\mu u)$ dieselben Perioden wie $\varphi(u)$ hat, und dass also eine Multiplikation besteht, ist aber die, dass vier ganze rationale Zahlen a, b, c, d von der Art existieren, dass

$$(1) \qquad \mu\omega_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \quad \mu\omega_2 = c\omega_1 + d\omega_2$$

wird. Die Elimination von μ aus diesen beiden Gleichungen ergiebt

$$(2) \qquad c\omega_1^2 + (d - a)\,\omega_1\omega_2 - b\omega_2^2 = 0,$$

und es muss also entweder $c = 0$, $b = 0$, $d = a = \mu$ sein, was auf die gewöhnliche Multiplikation führt, oder es muss das Verhältniss $\omega = \omega_1 : \omega_2$ die Wurzel einer ganzzahligen quadratischen Gleichung sein, die man in der Form

$$(3) \qquad A\omega^2 + B\omega + C = 0$$

annehmen kann, worin A, B, C ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Teiler sind. Es muss dann

$$(4) \qquad A : B : C = c : d - a : -b$$

sein, und da das Periodenverhältnis der elliptischen Funktionen nicht reell sein kann, so muss die Diskriminante [I B 2, Nr. 1] von (3)

$$(5) \qquad D = B^2 - 4AC = -m$$

eine *negative ganze Zahl* sein. Die Koeffizienten A, C in (3) müssen also gleiches Vorzeichen haben und können positiv angenommen werden. Unter ω soll dann immer die Wurzel von (3) mit positivem imaginärem Bestandteil verstanden werden.

Aus (1) ergiebt sich

$$\mu = c\omega + d, \tag{6}$$

so dass, da c nicht gleich Null ist, der *Multiplikator* μ immer komplex, und zwar eine Zahl des durch $\sqrt{-m}$ bestimmten quadratischen Zahlkörpers [I C 4 a, Nr. 1], der der Körper Ω heissen soll, sein muss.

Ein Periodenverhältnis, welches komplexe Multiplikation gestattet, ist hiernach eine der Wurzeln der quadratischen Form (A, B, C) *mit negativer Diskriminante* [1]).

Wegen (4) muss sich eine ganze Zahl y so bestimmen lassen, dass

$$c = Ay, \quad d - a = By, \quad b = -Cy,$$

und wenn man die ganze Zahl x durch die Gleichung

$$d + a = x$$

definiert, so folgt:

$$\begin{aligned} a &= \frac{x - By}{2}, \quad & b &= -Cy, \\ c &= Ay, & d &= \frac{x + By}{2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Daraus folgt nach (5), (6) und (1):

$$n = ad - bc = \frac{x^2 - Dy^2}{4}, \tag{8}$$

$$\omega = \frac{-B + \sqrt{-m}}{2A}, \quad \mu = \frac{x + y\sqrt{-m}}{2}, \tag{9}$$

$$n = N(\mu), \tag{10}$$

wenn N das Zeichen für die im Körper Ω genommene Norm ist. Da $x \equiv By \pmod 2$ ist, so ist hiernach μ eine *ganze Zahl des Körpers* Ω [I C 4 a, Nr. 2].

Nimmt man umgekehrt im Körper Ω eine ganze Zahl μ beliebig an, so ergeben sich aus (7) die ganzen Zahlen a, b, c, d, deren Determinante n nach (8) immer positiv ist. Diese Zahlen bestimmen nun eine Transformation n^{ten} Grades der elliptischen Funktionen mit den Perioden ω_1, ω_2, die in dem vorliegenden Fall in die complexe Multiplikation übergeht [II B 6 a].

3. Die Invarianten. Jeder beliebige komplexe Wert ω, dessen imaginärer Teil positiv ist, kann Periodenverhältnis elliptischer Funk-

1) Es ist hier nach *Kronecker* unter (A, B, C) die quadratische Form $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ verstanden, abweichend von der *Gauss*'schen Bezeichnung, nach der unter (A, B, C) die Form $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ zu verstehen sein würde [I C 2, Nr. c].

tionen sein. Man kann daher den Modul k dieser elliptischen Funktionen und sein Komplement k' als Funktionen einer Variablen ω betrachten, deren imaginärer Teil auf positive Werte beschränkt ist. Ebenso ist

$$j(\omega) = 256 \frac{(1 - k^2 k'^2)^3}{k^4 k'^4}$$

eine Funktion von ω, welche die *Invariante* der elliptischen Funktionen genannt wird [II B 6 a, Nr. 33]. Ist (nach *Jacobi*) $q = e^{\pi i \omega}$, so lässt sich $j(\omega)$ in eine nach steigenden Potenzen von q fortschreitende Reihe entwickeln, deren Anfang so lautet:

$$j(\omega) = q^{-2} + 744 + 196884\, q^2 + \cdots.$$

Nennt man zwei Zahlen ω, ω' *äquivalent*, wenn sie in der Beziehung

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}$$

zu einander stehen, worin α, β, γ, δ vier der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ genügende rationale ganze Zahlen sind, so gilt der wichtige Satz, *dass $j(\omega)$ für äquivalente Werte von ω denselben Wert hat, und dass auch umgekehrt zwei Werte von ω, die der Funktion $j(\omega)$ denselben Wert erteilen, mit einander äquivalent sind*[2]). Hieraus ergiebt sich aber Folgendes: Ist n eine positive ganze Zahl, und durchlaufen a, b, c, d alle der Bedingung $ad - bc = n$ genügenden ganzzahligen Werte, so erhält die Funktion

(11) $$X = j\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right)$$

für jeden Wert von $j(\omega)$ nur eine endliche Anzahl verschiedener Werte, und diese Werte genügen einer algebraischen Gleichung

(12) $$\Phi[X, j(\omega)] = 0,$$

deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen von $j(\omega)$ und ganze rationale Zahlen enthalten. Die Funktion Φ enthält den Faktor $X - j(\omega)$ nur, wenn n eine Quadratzahl ist. Wir denken uns in diesem Falle die Funktion Φ von diesem Faktor befreit. Die Gleichung (12) gilt für ein variables ω und geht durch Substitution von (11) in eine Identität über.

Wird nun aber für ω die Wurzel der Gleichung (3) gesetzt, so folgt aus (1):

---

2) Aus diesem Grunde nennt *Dedekind* in der angeführten Abhandlung die Funktion $2^{-8} j(\omega) = \mathrm{val}(\omega)$ die *Valenz von* ω. Dieselbe Funktion kommt auch in der Arbeit von *Hermite* vor, und war auch schon *Gauss* bekannt (Werke 3, p. 386).

$$\omega = \frac{a\omega + b}{c\omega + d},$$

und die Gleichung (12) ergiebt für diese speziellen Werte von $j(\omega)$, die (nach *Kronecker*) *die singulären Invarianten* [ebenso $k(\omega)$ die singulären Moduln] genannt werden,

$$\Phi[j(\omega),\quad j(\omega)] = 0, \tag{13}$$

und hierin findet der Fundamentalsatz der komplexen Multiplikation seinen Ausdruck, *dass die singulären Invarianten Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sind.*

Es erweisen sich hiernach die singulären Invarianten als *algebraische Zahlen,* und eine genauere Untersuchung der Koeffizienten von (13) zeigt, dass es *ganze algebraische Zahlen* sind [I C 4 a, Nr. 2].

4. Klasseninvarianten und Klassenkörper. Einer quadratischen Form (A, B, C) mit der Diskriminante $-m$ (5) entspricht immer eine Wurzel der Gleichung (13). Diese selbe Wurzel entspricht aber allen mit (A, B, C) äquivalenten Formen, da diese äquivalente Werte von ω zu Wurzeln haben. Ein solcher singulärer Wert $j(\omega)$ gehört also nicht nur zu einer einzelnen Form, sondern zu einer Formenklasse [I C 2, Nr. **c** 1)]. Er heisst daher die *Invariante der Klasse.*

Bei der Bildung der Gleichung (12) oder (13) kommt nur die Zahl n in Betracht, und die Formeln (7), (8) zeigen daher, dass die Invarianten aller primitiven Klassen derselben Diskriminante D Wurzeln dieser nämlichen Gleichung sind. *Verschiedene Klassen haben verschiedene Invarianten.*

Fragt man umgekehrt, welche Wurzeln $j(\omega)$ die Gleichung (13) überhaupt haben kann, so findet man, dass es nur die sind, deren Argument ω einer Gleichung (3) genügt von der Art, dass $4n$ durch die Form $x^2 - Dy^2$, d. h. durch die Hauptform der Diskriminante D darstellbar ist [I C 2, Nr. **c** 2), 5)]. Ein solcher Wert von $j(\omega)$ genügt daher einer unendlichen Menge solcher Gleichungen, da man x und y beliebig annehmen kann. Daraus folgt, dass die Gleichung (13) reduzibel ist [I B 1 a, Nr. **10**]. Der kleinste Wert, den n für eine gegebene Diskriminante D haben kann, ist $n = -D = m$. Nehmen wir diesen Wert von n, so sind alle übrigen Wurzeln von (13) Klasseninvarianten von niedrigeren Diskriminanten, und wenn wir also (13) von den Teilern befreien, die sie mit niedrigeren Gleichungen derselben Art gemein hat [I B 1 a, Nr. **12**], so ergiebt sich der Satz:

Die zu einer negativen Diskriminante D gehörigen Klasseninvarianten genügen einer ganzzahligen Gleichung, deren Grad gleich der Anzahl der primitiven Klassen quadratischer Formen der Diskriminante

D ist. Diese Gleichung heisst die Klassengleichung, der aus ihr hervorgehende algebraische Zahlkörper der Klassenkörper[3]).

5. Klasseninvarianten in verschiedenen Ordnungen. Alle Diskriminanten D sind nach dem Modul 4 entweder mit 0 oder mit 1 kongruent. Die Diskriminante des Körpers Ω ist selbst eine Zahl von Diskriminantenform, jedoch von der Eigenschaft, dass sich kein quadratischer Faktor so von ihr abspalten lässt, dass noch eine Zahl von Diskriminantenform übrig bleibt. Solche Zahlen heissen *Stammdiskriminanten.* Aus jeder Stammdiskriminante Δ lassen sich unendlich viele Diskriminanten $D = Q^2\Delta$ dadurch ableiten, dass man sie mit dem Quadrat einer ganzen Zahl Q multipliziert. Die ganzen Zahlen der Form $\frac{1}{2}(x + y\sqrt{D})$, worin x, y ganze rationale Zahlen sind, bilden eine *Ordnung* [I C 4 a, Nr. **12**] im Körper Ω, die man auch als den Inbegriff aller ganzen Zahlen dieses Körpers definieren kann, die nach dem Modul Q mit einer rationalen Zahl kongruent sind. Q heisst der *Führer* dieser Ordnung. Die primitiven quadratischen Formen mit der Diskriminante D entsprechen diesen Ordnungen, und jede solche Ordnung führt also zu einer Klassengleichung und zu einem Klassenkörper.

Um den Zusammenhang der den verschiedenen Ordnungen entsprechenden Klasseninvarianten zu übersehen, sei p irgend eine Primzahl, und D eine Diskriminante. In jeder Klasse dieser Diskriminante können wir dann einen Repräsentanten (A, B, C) so wählen, dass A nicht durch p teilbar wird. Es sei ω die Wurzel dieser Form und $\omega_1 = p\omega$, $\frac{\omega + \lambda}{p}$; $\lambda = 0, 1, \ldots, p - 1$. Jeder dieser $p + 1$ Werte ω_1 ist dann die Wurzel einer quadratischen Gleichung, die durch Nullsetzen einer quadratischen Form mit der Diskriminante $p^2 D$ entsteht. Von diesen quadratischen Formen sind aber so viele imprimitiv [I C 2, Nr. **c** 1)], als die Kongruenz

$$A\lambda^2 - B\lambda + C \equiv 0 \pmod p) \tag{14}$$

Wurzeln hat. Diese Kongruenz hat

eine Wurzel, wenn p in D aufgeht,
zwei Wurzeln, wenn D quadratischer Rest,
keine Wurzel, wenn D quadratischer Nichtrest

von p ist.

---

3) Über die Bedeutung des Klassenkörpers in der Theorie der algebraischen Zahlen geben die neuen Untersuchungen von *D. Hilbert* Aufschluss, Math. Ann. 51 (1899), p. 1; Gött. Nachr. 10. Dez. 1898, p. 370.

Im Falle $p = 2$ tritt an Stelle der beiden letzten Fälle die Unterscheidung $D \equiv 1$ oder $\equiv 3 \pmod 8$.

Es wird nun ein Symbol (D, p) eingeführt, das eine Zahl darstellt, die um 1 kleiner ist als die Zahl der Lösungen von (14) und daher 0, + 1 oder − 1 ist. Lassen wir dann unter den Werten von λ die etwa vorhandenen Lösungen von (14) weg, so ergeben die $p - (D, p)$ Zahlen

$$j(p\omega),\ j\left(\frac{\omega + \lambda}{p}\right)$$

Klasseninvarianten der Diskriminante $p^2 D$. Diese sind auch alle voneinander verschieden, wenn wir für $p = 2$ von den beiden Ausnahmefällen $D = -4$, $D = -3$ absehen.

Dies entspricht der aus der Zahlentheorie bekannten Beziehung zwischen den Klassenzahlen in den verschiedenen Ordnungen [I C 4 a, Nr. **12**]. Für die komplexe Multiplikation lehrt aber die Transformationstheorie der elliptischen Funktionen [II B 6 a], dass zu jeder Klasseninvariante $j(\omega)$ der Diskriminante D ein System von $p - (D, p)$ Klasseninvarianten der Diskriminante $p^2 D$ gehört, die als Wurzeln einer Gleichung bestimmt sind, deren Koeffizienten rational von $j(\omega)$ abhängen.

6. Irreduzibilität der Klassengleichung. Um die Galois'sche Gruppe [I B 3 c, d, Nr. **2**] der Klassengleichung zu ermitteln, wendet man die Komposition [I C 2, Nr. **c** 11)] der quadratischen Formen in folgender Gestalt an: Man wähle die Formen $\psi = (A, B, C)$, $\psi' = (A', B', C')$ der Diskriminante D in ihren Klassen so, dass $A, A', \frac{1}{2}(B + B')$ keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, und bestimme B'' aus den Kongruenzen:

$$B'' \equiv B \pmod{2A},\quad B'' \equiv B' \pmod{2A'},\quad B''^2 \equiv D \pmod{4AA'}.$$

Dann ist $D = B''^2 - 4AA'C''$ und $\psi'' = (AA', B'', C'')$ ist aus ψ und ψ' *komponiert.* Man setzt symbolisch $\psi'' = \psi\psi'$. Bezeichnen k, k', k'' die Klassen, zu denen ψ, ψ', ψ'' gehören, so ist auch k'' aus k und k' komponiert und man setzt auch $k'' = kk'$. *Dadurch sind die Klassen quadratischer Formen einer Diskriminante D zu einer Abelschen Gruppe* [I A 6, Nr. **20**; I B 3 c, d, Nr. **20**] *verbunden.*

Nimmt man den ersten Koeffizienten A der Form (A, B, C) relativ prim zu $2D$ an, und zerlegt A in seine Primfaktoren $A = p\,p'\,p'' \ldots$, so ergiebt sich die Komposition:

$$(A, B, C) = \left(p, B, \frac{AC}{p}\right)\left(p', B, \frac{AC}{p'}\right)\left(p'', B, \frac{AC}{p''}\right)\cdots$$

d. h. man kann einen Repräsentanten einer jeden Klasse aus solchen Formen zusammensetzen, deren erste Koeffizienten Primzahlen sind.

Ist p eine in $2D$ nicht aufgehende Primzahl, von der D quadratischer Rest ist, so kann man für jeden beliebigen Exponenten π die Kongruenz $b^2 \equiv D \pmod{4p^\pi}$ befriedigen, und erhält zwei Werte $\pm b$. Die durch die Form $(p, b, cp^{\pi-1})$ repräsentierte Klasse sei l. Dann entsteht für jedes $\nu \overline{\gtrless} \pi$ die Formenklasse $(p^\nu, b, cp^{\pi-\nu})$ durch ν-malige Komposition von l mit sich selbst, und wird also durch l^ν bezeichnet. l^0 ist die Hauptklasse, und wenn p^ε die niedrigste durch die Hauptklasse darstellbare Potenz von p ist, so ist $l^\varepsilon = l^0$ und die Potenzen $l^0, l, l^2, \ldots l^{\varepsilon-1}$ bilden eine *Periode.* Man sagt in diesem Falle, dass p zum Exponenten ε *gehört,* womit auch ausgedrückt ist, dass p^ε die niedrigste Potenz von p ist, die als Norm einer ganzen Zahl in der Form

$$p^\varepsilon = N\left(\frac{x + y\sqrt{D}}{2}\right) = \frac{x^2 - Dy^2}{4}$$

dargestellt werden kann.

Ist (A, B, C) ein Repräsentant einer beliebigen Klasse k, in dem A relativ prim zu p ist, so erhält man einen Repräsentanten der komponierten Klasse kl in der Form $(Ap, B + 2\lambda A, C')$, wenn man λ aus der Kongruenz $B + 2\lambda A \equiv b \pmod{p}$ bestimmt, und wenn ω die Wurzel von (A, B, C) ist, so ist $\frac{-\lambda + \omega}{p}$ die Wurzel von $(Ap, B + 2\lambda A, C')$.

Bezeichnen wir die Invariante $j(\omega)$ irgend einer Klasse k mit (k) so ergiebt sich hieraus:

$$(k) = j(\omega), \quad (lk) = j\left(\frac{-\lambda + \omega}{p}\right). \tag{15}$$

Hierin ist λ nach dem Modul p vollständig bestimmt, wenn b gegeben ist. Ist aber nur p und die Klasse k gegeben, so erhält man für λ die Kongruenz zweiten Grades

$$A\lambda^2 + B\lambda + C \equiv 0 \pmod{p}, \tag{16}$$

deren zweite Wurzel λ' die Klasseninvariante $(l^{-1}k)$ giebt. Nun besteht zwischen den Grössen $u = j(\omega)$, $v = j\left(\frac{-\lambda + \omega}{p}\right)$ eine Transformationsgleichung

$$F_p(u, v) = 0, \tag{17}$$

und nach einem Satze über diese Transformationsgleichungen (*H. Weber,* Acta Math. 6, 1885, p. 390; s. auch „Elliptische Funktionen . . .“ p. 255) ergiebt sich hieraus:

$$((lk)^p - (k))\,((lk) - (k)^p) \equiv 0 \pmod{p}. \tag{18}$$

Wenn also $\mathfrak{p}$ ein idealer Primfaktor [I C 4 a, Nr. 3] von p im Klassenkörper ist, so muss einer der beiden Faktoren auf der linken

Seite von (18) durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein, und hieraus lässt sich der Satz ableiten, dass jede rationale Gleichung $\varphi(k, \sqrt{D}) = 0$ zwischen (k) und $\sqrt{D}$ auch noch erfüllt bleibt, wenn (k) durch (lk) ersetzt wird. Es ist hierbei die erlaubte Voraussetzung gemacht, dass p in der Diskriminante der Klassengleichung nicht aufgeht.

Sind nun k und k_1 zwei beliebige Klassen der Diskriminante D, so kann man nach der Regel der Komposition immer $k_1 = k l l' l'' \ldots$ setzen, und daraus ergiebt sich, dass jede Gleichung $\varphi(k, \sqrt{D}) = 0$ bestehen bleibt, wenn k durch eine beliebige Klasse k_1 ersetzt wird. Darin ist der Satz enthalten:

Die Klassengleichung ist im Rationalitätsbereich Ω irreduzibel.

7. Galois'sche Gruppe der Klassengleichung. Die Gleichung (17) hat, als Gleichung für v betrachtet, mit der Klassengleichung $H_D(v) = 0$ nur die zwei Wurzeln (lk) und $(l^{-1}k)$ gemein. Diese beiden sind daher die Wurzeln einer quadratischen Gleichung, und man erhält eine Relation

$$(lk) + (l^{-1}k) = f_l(k), \tag{19}$$

worin $f_l(k)$ eine rationale Funktion von (k) ist, die ihrer Form nach nur von der Klasse l, nicht von k abhängt. Durch wiederholte Zusammensetzung mit l lässt sich die nach vorwärts und rückwärts ins Unbegrenzte fortlaufende, aber nach je ε Gliedern periodisch wiederkehrende Kette von Klasseninvarianten

$$\ldots (l^{-1}k),\ (k),\ (lk),\ (l^2k),\ (l^3k),\ \ldots \tag{20}$$

bilden, und durch Anwendung von (19) gelangt man zu dem Satze, dass sich jedes Glied dieser Reihe rational ausdrücken lässt durch irgend zwei aufeinander folgende Glieder derselben Reihe.

Für den Multiplikator aus der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen erhält man aber ferner im Falle der komplexen Multiplikation einen Ausdruck:

$$\left(\frac{x + y\sqrt{D}}{2}\right)^6 = \Phi(k, lk),$$

worin x, y ganze rationale Zahlen und Φ eine rationale Funktion der beiden Klasseninvarianten (k) und (lk) ist, und mit Hilfe dieser beiden Ergebnisse kann man (lk) rational durch (k) und $\sqrt{D}$ ausdrücken in der Form

$$(lk) = f_l(k, \sqrt{D}), \tag{21}$$

worin f_l eine Funktion bedeutet, deren rationale Zahlenkoeffizienten nur von der Klasse l abhängen.

Durch wiederholte Anwendung ergiebt sich hieraus, wenn k, k_1 zwei beliebige Klassen der Diskriminante D sind,

$$(kk_1) = f_{k_1}(k, \sqrt{D}),$$

worin f_{k_1} wieder eine rationale, ihrer Form nach nur von k_1 abhängige Funktion ist. Hiermit ist dann der Satz bewiesen, *dass die Galois'sche Gruppe der Klassengleichung im Rationalitätsbereich Ω mit der Gruppe der Klassen (k) übereinstimmt. Diese Gruppe ist eine Abel'sche und die Klassengleichung ist folglich eine Abel'sche Gleichung.*

8. **Primideale im Klassenkörper.** Diese Betrachtungen führen zu wichtigen Sätzen über die Zerlegung der natürlichen Primzahlen oder der Primideale des Körpers Ω in Primfaktoren im Klassenkörper. Schliesst man die in endlicher Anzahl vorhandenen Primzahlen aus, die in $2D$ oder in der Diskriminante der Klassengleichung aufgehen, so gelten folgende Sätze:

a) Eine Primzahl q, von der D quadratischer Nichtrest [I C 1, Nr. 4] ist, die also auch im Körper Ω noch Primzahl ist, zerfällt im Klassenkörper in lauter von einander verschiedene Primideale zweiten Grades.

b) Eine Primzahl p, von der D quadratischer Rest ist, die also im Körper Ω in zwei Primfaktoren zerlegbar ist, zerfällt im Klassenkörper in lauter von einander verschiedene Primfaktoren, deren Grad gleich ε ist. Insbesondere zerfällt eine durch die Hauptform darstellbare Primzahl p in Primideale ersten Grades.

c) Die Primideale des Körpers Ω sind im Klassenkörper Hauptideale.

9. **Zerfällung der Klassengleichung.** Nach *Gauss* zerfallen die zu einer bestimmten Diskriminante gehörigen Klassen quadratischer Formen in Geschlechter [I C 2, Nr. **c** 12)], die durch die quadratischen Charaktere der durch die Formenklasse darstellbaren Zahlen in Bezug auf die in der Diskriminante aufgehenden Primzahlen bestimmt sind. Die Anzahl der Geschlechter ist immer eine Potenz von 2, deren Exponent durch die Anzahl der in D aufgehenden Primzahlen bestimmt wird.

Nun liefert die Transformationstheorie der allgemeinen elliptischen Funktionen [I B 3 f, Nr. **10**; II B 6 a] ausser den schon für die Bildung der Klassengleichung benutzten Modulargleichungen noch eine andere Art von Gleichungen, die *Multiplikatorgleichungen*, aus denen ein Multiplikator der Transformation durch den Modul bestimmt wird. Hier sind nun besonders die einem quadratischen Transformationsgrad entsprechenden Multiplikatorgleichungen von Wichtigkeit, die eine bemerkenswerte, von *Joubert*[3a]) entdeckte Reduktion gestatten, aus der man neue Gleichungen erhält, deren Wurzeln die Quadratwurzeln aus den Multiplikatoren sind. Wenn nun in diesen Gleichungen ein zur komplexen Multiplikation gehöriger singulärer Modul eingesetzt wird, so wird eine Wurzel dieser Multiplikatorgleichung bekannt und lässt sich durch die Quadratwurzeln aus ganzen in der Diskriminante aufgehenden rationalen Zahlen ausdrücken. Demnach erhält man für diese singulären Moduln noch eine Gleichung, die ausser rationalen Zahlen Quadratwurzeln aus gewissen ganzen rationalen Zahlen enthält, und mit Hilfe dieser Gleichung lässt sich die Klassengleichung in Faktoren zerfällen, in denen diese Quadratwurzeln vorkommen. Dadurch wird der folgende Satz von *Kronecker* bewiesen:

Die Klassengleichung lässt sich durch Adjunktion [I B 3 c, d, Nr. **12** f.] *der Quadratwurzeln aus den in der Diskriminante aufgehenden Primzahlen in Faktoren zerfällen. Die Anzahl dieser Faktoren ist so gross wie die Anzahl der Genera von Klassen quadratischer Formen, die zu der betreffenden Diskriminante gehören, und der Grad eines dieser Faktoren ist also so gross, wie die Anzahl der in einem Genus enthaltenen Klassen.*

Neuerdings ist durch die von *Dirichlet* in die Zahlentheorie eingeführten Methoden [I C 3, Nr. 2] bewiesen worden, dass diese Teilgleichungen auch nach *weiterer Adjunktion beliebiger Einheitswurzeln nicht weiter reduzibel werden*[4]).

Es sind 65 negative Determinanten bekannt, bei denen jedes Genus nur eine Klasse enthält, und es ist nach einer weitgehenden Induktion von *Gauss* sehr wahrscheinlich, wiewohl noch nicht bewiesen, dass es nicht mehr Determinanten dieser Art giebt. Für diese Determinanten sind daher nach dem erwähnten Satze die Klasseninvarianten rational ausdrückbar durch die Quadratwurzeln aus den in der Determinante aufgehenden Primzahlen[5]).

3a) Sur les équations qui se rencontrent dans la théorie de la transf. des fonct. ellipt., Par. 1876.

4) *Weber,* Über Zahlengruppen in algebraischen Körpern. Zweite Abhandlung. Math. Ann. 49 (1897), p. 83.

5) Diese Determinanten sind, vom Vorzeichen abgesehen, die Zahlen:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 21, 22, 24, 25, 28, 30, 33, 37, 40, 42, 45, 48, 57, 58, 60, 70, 72, 78, 85, 88, 93, 102, 105, 112, 120, 130, 133, 165, 168, 177, 190, 210, 232, 240, 253, 273, 280, 312, 330, 345, 357, 385, 408, 462, 520, 760, 840, 1320, 1365, 1848.

Die Klasseninvarianten für diese Determinanten sind vom Referenten berechnet und in Math. Ann. 33 (1889), p. 390 mitgeteilt.

10. Die Klasseninvarianten $f(\omega)$, $f_1(\omega)$. Unter einer Klasseninvariante versteht man nicht nur den früher definierten singulären Wert von $j(\omega)$, sondern allgemein *jede primitive Zahl des Klassenkörpers*, d. h. jede rationale Funktion von $j(\omega)$, die einer irreduziblen Gleichung desselben Grades genügt. Häufig geben andere Klasseninvarianten als $j(\omega)$ selbst weit einfachere Resultate. Man erhält solche aus den Modulfunktionen höherer Stufe [II B 6 c]. Besonders einfache Zahlenwerte erhalten die Funktionen

$$f(\omega) = \sqrt[12]{\frac{4}{kk'}}, \qquad f_1(\omega) = \sqrt[12]{\frac{4k'^2}{k}}, \qquad f_2(\omega) = \sqrt[12]{\frac{4k^2}{k'}},$$

worin k und k' den Legendre'schen Modul und sein Komplement bedeuten. So ist z. B., wenn m ungerade ist, $\left(f(\sqrt{-m})\right)^{24}$, und wenn m gerade ist, $\left(f_1(\sqrt{-m})\right)^{24}$ Klasseninvariante für die Determinante m, und je nach dem Verhalten von m zu dem Modul 24 wird dasselbe auch durch niedrigere Potenzen erreicht. Diese Klasseninvarianten sind nicht nur ganze Zahlen, sondern sie werden auch durch Division mit gewissen Potenzen von 2 in *Einheiten* [I C 4 a, Nr. 7] verwandelt.

Diese Funktionen f liefern aber nur die Klasseninvarianten für die Formen erster Art. Für die Formen zweiter Art sind so einfache Resultate nicht bekannt.

So sind z. B. für $m = 11, 19, 43, 67, 163$ die Zahlen $f(\sqrt{-m})$ die Wurzeln von sehr einfachen kubischen Gleichungen, und es ist sehr wahrscheinlich, aber nicht bewiesen, dass die angegebenen fünf Werte von m die einzigen dieser Art sind. Für die Formen zweiter Art der fünf Determinanten $-m$ giebt es aber nur je eine Klasse, und folglich sind die $j\left(\frac{-1+\sqrt{-m}}{2}\right)$ ganze rationale Zahlen[6]).

11. Komplexe Multiplikation und Teilung. Die komplexe Multiplikation steht in einem noch tieferen Zusammenhange mit den idealen Zahlen des Körpers Ω, der sich in den folgenden Sätzen zu erkennen giebt. Der allgemeine Ausdruck der Sätze wird am einfachsten und durchsichtigsten für die Weierstrass'sche elliptische Funktion $\wp(u)$. Für eine definitive Ausführung müssen aber auch noch andere doppelt-periodische Funktionen herangezogen werden, besonders die Jacobi'schen $\sin \operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$ (II B 6 a].

6) Man kann noch unzählige andere Klasseninvarianten aus den Modulfunktionen höherer Stufe ableiten. Auf die singulären Werte der Ikosaederirrationalität hat *F. Klein* in den oben erwähnten „Vorlesungen" hingewiesen.

Die Perioden der Funktion $\wp(u)$ mögen ω_1, ω_2 sein, und zwischen diesen bestehe die Gleichung

$$(22) \qquad A\omega_2^2 + B\omega_1\omega_2 + C\omega_1^2 = 0,$$

sodass das Periodenverhältniss $\omega = \omega_2 : \omega_1$ Wurzel der Gleichung (3) ist. Wenn dann μ wie in (9) eine komplexe Zahl einer Ordnung O ist, so besteht eine Relation

$$(23) \qquad \wp(\mu u) = \frac{R}{P},$$

worin R und P ganze rationale Funktionen von $\wp(u)$ ohne gemeinsamen Teiler bedeuten, deren Koeffizienten noch von den Invarianten g_2, g_3 der Funktion $\wp(u)$ abhängen. Der Grad von R ist um eins höher als der Grad von P. Die Auflösung der Gleichung $P = 0$ ist das Teilungsproblem für die singulären Moduln.

Die Wurzeln der Gleichung $P = 0$ können in transcendenter Form so dargestellt werden:

$$(24) \qquad g = \wp\left(\nu \frac{\alpha\omega_1 + \beta\omega_2}{\mu}\right),$$

worin α, β feste ganze rationale Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind, die der Bedingung genügen, dass $A\alpha^2 - B\alpha\beta + C\beta^2$ relativ prim zu n ist, während ν eine zu μ teilerfremde Zahl der Ordnung O ist.

Man führe nun eine Funktion $\tau = \tau(u)$ durch folgende Definition ein:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{g_2 g_3}{G}\wp(u) \quad \text{im Allgemeinen},\\ &= \frac{\wp(u)^2}{g_2} \quad \text{im Falle } g_3 = 0,\\ &= \frac{\wp(u)^3}{g_3} \quad \text{im Falle } g_2 = 0,\end{aligned}$$

wo
$$G = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27 g_2^2).$$

Diese Funktion ist nur von den Verhältnissen $\omega_2 : \omega_1$ und $u : \omega_1$ abhängig. Wendet man die komplexe Multiplikation hierauf an, so ergiebt sich

$$(25) \qquad \tau(\mu u) = \frac{R_1}{P_1},$$

und jetzt lässt sich beweisen, dass die ganzen rationalen Funktionen P_1, R_1 von τ, wenn sie von gemeinsamen Faktoren befreit sind, Funktionen in dem Klassenkörper $\mathfrak{K}$ der Ordnung O sind.

Befreit man P_1 (durch rationale Operationen) von allen mehrfach darin vorkommenden Faktoren, so entsteht eine ganze Funktion T_μ von τ, deren Koeffizienten gleichfalls im Körper $\mathfrak{K}$ enthalten sind, und zwei solche Funktionen T_μ und T_{μ_1} haben dann und nur dann einen gemeinsamen Faktor, wenn die Zahlen μ und μ_1 der Ordnung O einen idealen oder wirklichen gemeinsamen Teiler haben. So gelangt man zu den folgenden Sätzen:

I. *Bedeutet* $\mathfrak{m}$ *ein beliebiges, zu* Q [Nr. 5] *teilerfremdes Ideal des Körpers* Ω, *so giebt es im Klassenkörper* $\mathfrak{K}$ *eine Gleichung*

$$\Phi_{\mathfrak{m}}(\tau) = 0,$$

deren Wurzeln unter den Grössen

$$\tau\left(\frac{\nu(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)}{\mu}\right)$$

enthalten sind, wenn μ *und* ν *teilerfremde Zahlen der Ordnung* O *sind, und* μ *durch* $\mathfrak{m}$ *teilbar ist.*

II. *Der Grad der Funktion* $\Phi_{\mathfrak{m}}$ *ist gleich der Anzahl* $\psi(\mathfrak{m})$ *der nach dem Modul* $\mathfrak{m}$ *inkongruenten, zu* $\mathfrak{m}$ *teilerfremden Zahlen in* O, *geteilt durch die Anzahl der nach* $\mathfrak{m}$ *inkongruenten Einheiten in* O.

III. *Die Gleichung* $\Phi_{\mathfrak{m}} = 0$ *ist im Körper* $\mathfrak{K}$ *eine irreduzible Abel'sche Gleichung, und ist also algebraisch auflösbar.*

Es ist wahrscheinlich, dass die Wurzeln dieser Teilungsgleichung $\Phi_{\mathfrak{m}} = 0$ in den Klassenkörpern (in anderen Ordnungen) enthalten sind.

12. Die Klassenzahlrelationen. Eine sehr bemerkenswerte Anwendung der komplexen Multiplikation muss noch erwähnt werden, nämlich die Ableitung der sogenannten *Klassenzahlrelationen.* Die ersten hierher gehörigen Formeln sind von *Kronecker* gegeben. Sie sollen hier nach Inhalt und Ableitung an dem einfachsten Beispiel erläutert werden. Wenn in der durch (12) definierten Funktion Φ beide Argumente einander gleich gesetzt werden, also die Funktion $\Phi(k, k)$ gebildet wird, so zerfällt diese Funktion, wie schon in Nr. 3 erwähnt ist, in mehrere irreduzible Faktoren, die, gleich Null gesetzt, die verschiedenen Klassengleichungen geben, und deren Grade daher durch Klassenzahlen ausgedrückt werden. Hiernach kann man den Grad der Funktion $\Phi(k, k)$ als eine Summe von Klassenzahlen darstellen.

Andererseits aber lässt sich der Grad von $\Phi(k, k)$ auch direkt aus der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen bestimmen, und wenn man beide Ausdrücke einander gleich setzt, ergiebt sich die Klassenzahlrelation. Man findet so, wenn mit $H(m)$ die Klassenzahl für die Diskriminante $-m$ bezeichnet wird, und n eine beliebige natürliche Zahl ist:

$$H(4n) + 2H(4n-1) + 2H(4n-4) + 2H(4n-9) + \cdots$$
$$= 2\sum d,$$

wenn unter $\sum d$ die Summe der Divisoren von n, die grösser als $\sqrt{n}$ sind, verstanden wird, und die Summe der Glieder der linken Seite, $2H(4n - x^2)$ so lange fortgesetzt wird, als $4n - x^2$ positiv bleibt. In dem besonderen Falle, wo n eine Quadratzahl ist, muss auf der rechten Seite dieser Formel $\sqrt{n} + \frac{1}{6}$ hinzugefügt werden.

Kronecker hat noch mehrere Formeln dieser Art abgeleitet, indem er andere Modulargleichungen benutzt, und *Hermite* hat gezeigt, dass man diese Formeln zum Teil auch aus den Reihen, die die Theorie der elliptischen Funktionen liefert, ohne Spezialisierung des Moduls erhalten kann.

Die Theorie dieser Relationen ist aber dann ausserordentlich verallgemeinert worden durch *Gierster* und *Hurwitz*, die die Theorie der *Modulargleichungen höherer Stufe* und der *Modularkorrespondenzen* darauf angewandt haben. Es hat sich so ergeben, dass die Kroneckerschen Klassenzahlrelationen nur die ersten Glieder einer ins Unbegrenzte fortlaufenden Kette ähnlicher Formeln sind, in denen an Stelle der Divisorensummen gewisse andere zahlentheoretische Funktionen auftreten.

I D 1. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

VON

E. CZUBER

IN WIEN.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

Lehrbücher.

P. S. de Laplace, Théorie analytique des probabilités, Paris 1812 (1814, 1820) = Oeuvres 7, Paris 1886.

S. F. Lacroix, Traité élémentaire du Calcul des probabilités, Paris 1816, 4. éd. 1833; deutsch von *E. S. Unger* (Erfurt 1818).

S. D. Poisson, Recherches sur la probabilité des jugements, Paris 1837; deutsch von *C. H. Schnuse* (Braunschweig 1841).
A. A. Cournot, Exposition de la théorie des chances et des probabilités, Paris 1843; deutsch von *C. H. Schnuse* (Braunschweig 1849).
H. Laurent, Traité du calcul des probabilités, Paris 1873.
A. Meyer, Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsch bearbeitet von *E. Czuber,* Leipzig 1879.
J. Bertrand, Calcul des probabilités, Paris 1889.
H. Poincaré, Leçons sur le Calcul des probabilités, réd. par *A. Quiquet,* Paris 1896.

Monographien.

P. S. de Laplace, Essai philosophique des probabilités, Paris 1814. Zugleich *Introduction* zur 2. u. 3. Aufl. der „Théorie". Deutsch von *F. W. Tönnies* (Heidelberg 1819) und *N. Schwaiger* (Leipzig 1886). (Wir citieren „Théorie" und „Essai" nach der 3. Auflage).
J. F. Fries, Versuch einer Kritik der Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Braunschweig 1842.
J. Todhunter, A history of the mathematical theory of Probability, Cambridge and London 1865.
E. Czuber, Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte, Leipzig 1884.
J. v. Kries, Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Freiburg i. B. 1886.
E. Czuber, Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen, Jahresber. d. deutschen Math.-Ver. 7, Leipzig 1899.

I. Wahrscheinlichkeit a priori.

1. Definition und Bedeutung der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Gegenstand der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* sind die *ungewissen Ereignisse* [1]), das sind (reale oder abstrakte) *Thatbestände* [1]), über deren *Dasein* oder *Eintreffen* [2]) auf Grund der Prämissen oder Bedingungen nicht mit *Sicherheit* gefolgert, sondern nur mit einem minderen oder höheren Grade der Berechtigung ausgesagt werden kann. Diejenigen (konstanten oder variabeln) Bedingungen, auf welche die Bemessung des Grades der Berechtigung oder *Erwartung,* das *Wahrscheinlichkeitsurteil,* gegründet wird, bezeichnet man als die

---

1) Es ist richtig, dass, wie *C. Stumpf,* Über den Begriff der mathem. W. (Münch. Ber., phil. Kl., 1892, p. 37 bes. p. 46) bemerkt, die Bezeichnung „Ereignis" zu eng gefasst ist, da sie an ein Geschehen erinnert, während doch W.-en auch über Urteilsmaterien aufgestellt werden, die einen realen oder selbst einen abstrakten „Thatbestand" betreffen. Indessen ist das Wort Ereignis in allen Litteraturen der W.-R. eingebürgert.

2) „Eintreffen" bezieht sich auf ein Geschehen, „Dasein" auf einen Thatbestand.

Ursachen[3]) oder *Chancen*[4]) des Thatbestandes; sie beruhen auf dem gesamten *Wissen*[5]) über die Materie. Diejenigen (variabeln) Bedingungen, welche in ihrem beständigen Wechsel unserer Kenntnis sich entziehen, bilden das, was man als *Zufall*[6]) bezeichnet; auf sie bezieht sich das *Nichtwissen*[5]). Daher werden Ereignisse von der gekennzeichneten Art auch als *zufällige Ereignisse* bezeichnet.

In den Aufgaben, aus welchen die Wahrscheinlichkeitstheorie emporgewachsen ist, zeigt das Wissen eine bestimmte Struktur: es gestattet die Unterscheidung von *Möglichkeiten*, von *Fällen*, welche sich als *gleichmöglich*, *gleichwertig* oder *gleichberechtigt*[7]) erweisen, und ihre Trennung in *günstige*[8]), d. i. solche, welche das Dasein oder Eintreffen des erwarteten Thatbestandes zur Folge haben, und in *ungünstige*[8]), welche die gegenteilige Wirkung äussern.

Unter der *mathematischen Wahrscheinlichkeit* eines Ereignisses (Thatbestandes) wird der Bruch verstanden, dessen Zähler die Anzahl der dem Ereignis günstigen und dessen Nenner die Anzahl aller gleichmöglichen Fälle ist.

In dieser *Definition*[9]) ist das Hauptgewicht auf die Deutung der

---

3) In der W.-R. wird unter den Ursachen eines Ereignisses nicht dasjenige verstanden, was im Falle des Eintreffens vermöge des Kausalitätsprinzips das Ereignis herbeigeführt hat, sondern das Bleibende im Komplex der Bedingungen. Daher wendet sich *Stumpf,* l. c., gegen diesen Ausdruck und schlägt dafür den Terminus „Chancen“ vor, den er jedoch auch in anderem Sinne gebraucht.

4) Dies Wort wird in der W.-R. nicht einheitlich gebraucht. *Laplace* (Théorie) wendet es als Synonym für W. an; *Poisson* (l. c. § 1) versteht unter der Ch. eines Falles den ihm vermöge der wirklichen physischen Umstände zukommenden Grad der Leichtigkeit seiner Verwirklichung, und gebraucht dafür synonym „abstrakte W.“ des betreffenden Falles; *Kries* (l. c. p. 95) belegt mit dem Namen Ch. oder objektive Ch. jede W. von *allgemeiner* Geltung; ihr wäre also eine subjektive W. entgegenzustellen, die sich nicht auf ein allgemein verbreitetes, sondern auf das Wissen eines bestimmten Individuums gründet.

5) *Laplace* (Essai p. IV) betont es als wesentlich, dass jede W. sich zum Teil auf unser Wissen, z. T. auf ein Nichtwissen beziehe.

6) Dem Worte „Zufall“ sind im Laufe der Zeit die mannigfachsten Deutungen gegeben worden; eine kritische Beleuchtung derselben findet man bei *W. Windelband,* Die Lehren vom Zufall (Berlin 1870).

7) *Kries* (l. c. p. 24) gebraucht für die eingebürgerte Bezeichnung „gleichmögliche Fälle“ die Termini „gleichwertige“ und „gleichberechtigte Annahmen“.

8) Bei *Jakob* I *Bernoulli,* Ars conjectandi (Basil. 1713, eines der ältesten litter. Denkmale der W.-R., nach des Verf. Tode [1705] durch *Nicol.* I *Bern.* herausgegeben) finden sich dafür die Benennungen „casus fertiles seu foecundi“ und „casus steriles“.

9) *Laplace* (Essai p. IV) erklärt jenen Bruch als „Mass der W.“, also als Mass eines Abstraktums; später (Théorie p. 179) nennt er den Bruch selbst W.

gleichmöglichen Fälle zu legen. Die beiden, einander entgegengesetzten Standpunkte, auf die man sich dabei stellen kann, sind durch die Prinzipien des *mangelnden* und des *zwingenden Grundes* gekennzeichnet. Nach dem ersten stützt sich die Konstatierung der Gleichmöglichkeit auf *absolutes Nichtwissen* über die Bedingungen des Daseins oder der Verwirklichung der einzelnen Fälle, also auf ihre blosse *Unterscheidung*[10]); dem zweiten zufolge ist zu ihrer Feststellung ein sicheres *objektives Wissen* erforderlich, das jede andere Annahme ausschliesst[11]).

Von der Auffassung der Gleichmöglichkeit der Fälle hängt die *Bedeutung* einer numerischen Wahrscheinlichkeit wesentlich ab[12]). Soll sie als das Mass einer *begründeten Erwartung*[13]) gelten, so muss ihr ein objektives Wissen zugrunde liegen. Stützt sich ihre Bestimmung auf blosse *Disjunktion* der Fälle und absolutes Nichtwissen über die einzelnen, so hat sie nur eine *subjektive* Bedeutung. In den Schriften über Logik wird meist nur die letztere Auffassung hervorgehoben, die Wahrscheinlichkeitsrechnung als eine mathematische Formulierung der Lehre von den *disjunktiven Urteilen*[14]) bezeichnet. In den auf die Anwendungen abzielenden Arbeiten tritt aber immer mehr das objektive Moment und daher auch das zweite der oben erwähnten Prinzipe in den Vordergrund.

Wenn g die Anzahl der günstigen, m die Anzahl der möglichen Fälle, p die Wahrscheinlichkeit[15]) bezeichnet, sodass $p = \frac{g}{m}$, so be-

---

10) Diese Auffassung vertritt *C. Stumpf* in der unter 1) citierten Arbeit.

11) Für diese Auffassung ist in wirksamer Weise *J. v. Kries* (l. c.) eingetreten in seiner Schrift, die sich auf das eingehendste mit der Untersuchung der Umstände befasst, unter welchen von einer W.-Bestimmung die Rede sein kann. Seinen Standpunkt verteidigt, wenn auch nicht in der glücklichsten Form, *L. Goldschmidt,* Die W.-R., Versuch einer Kritik (Hamb. 1897).

12) *Kries* (l. c. p. 21) formuliert die Bedeutung einer W.-Aussage dahin, dass sie die mehr oder minder grosse Berechtigung einer *Erwartung* angebe, dass aber jedesmal auch die Nichterfüllung derselben als möglich erscheine. — Mit Rücksicht auf den verschiedenen Grad der Sicherheit, mit welcher die möglichen Fälle als *gleichmöglich* betrachtet werden können, will *A. Nitsche* (Viertelj. f. wiss. Philos. 1892, p. 20) bei jedem W.-Ansatze „Dimensionen“, *A. Meinong* (Gött. Anz. 1890, p. 56) bei jedem W.-Urteil zwei „Dimensionen“ unterscheiden, deren eine die W., deren andere ein Wertunterschied in ihrer Bestimmung ist.

13) *Stumpf* (l. c. p. 56) erkennt in der W. das Mass einer *vernünftigen* Erwartung, d. h. der Erwartung, soweit sie von der blossen Vernunft (ohne Einfluss von Affekten, wie Wünschen, Neigungen etc.) bestimmt ist.

14) Über das Verhältnis der W.-R. zum disjunktiven Urteil und zur Logik überhaupt vgl. man insbesondere *Ch. Sigwart,* Logik 2 (Freiburg i. B. 2. Aufl. 1893), § 85.

15) Ursprünglich war es üblich, W.-en immer in Form von Brüchen zu

deutet p, so lange die hier erörterte Sachlage zutrifft, einen *rationalen* echten Bruch. Die beiden Zahlen 0 und 1, welche den Bereich der absoluten echten Brüche begrenzen, betreffen Thatbestände, welche nicht mehr dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung angehören: die erste entspringt aus der Annahme $g = 0$, die zweite aus $g = m$; beidemal besteht bezüglich des Thatbestandes kein Zweifel. Man bezeichnet 0 als das Symbol der *Unmöglichkeit*, 1 als das Symbol der *Gewissheit*[16]). Zwischen einer der Null noch so nahen Wahrscheinlichkeit und der Unmöglichkeit einerseits, einer der Einheit noch so nahen Wahrscheinlichkeit und der Gewissheit andererseits besteht ein fundamentaler Unterschied[17]).

Es ist vielfach gebräuchlich, einen Thatbestand, dem die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zukommt, als *wahrscheinlich* schlechtweg zu bezeichnen.

2. Direkte Wahrscheinlichkeitsbestimmung. Sie besteht darin, dass man das einem Problem zugrunde liegende Wissen in gleichberechtigte Einzelfälle auflöst, diese und die günstigen unter ihnen zählt und aus den gefundenen Zahlen den Wahrscheinlichkeitsbruch bildet. Mit Recht erkennt *Ch. Sigwart*[18]) die eigentliche Kunst der Deduktion in der Wahrscheinlichkeitsrechnung in dem ersten Teile dieses Prozesses, in der Konstruktion gleichmöglicher Einzelfälle, in der Bildung einer *vollständigen* Disjunktion; die darauf folgende Zählung ist eine Aufgabe der reinen Arithmetik.

Da es sich bei der Grundlegung der Theorie lediglich um eine formale, *kombinatorische* Gleichwertigkeit der Fälle handelte, so wird

---

schreiben; erst seit *Abr. de Moivre* (De mensura sortis, Lond. Trans. 27 [1711], p. 213 und Doctrine of chances, Lond. 1718) bedient man sich *eines* Buchstabens dazu.

16) Das Verhältnis von W. und Gewissheit ist verschieden aufgefasst worden. *Laplace* (Essai p. V) hält beide vom mathematischen Standpunkte für vergleichbar, betont aber sogleich ihre Verschiedenheit dem Wesen nach *J. F. Fries* (l. c. p. 13) macht die Aufstellung, W.-en seien Grade der Gewissheit. Die neueren philosophischen Autoren, *v. Kries, Sigwart, Stumpf* (l. c.) betonen nachdrücklich den fundamentalen Unterschied zwischen den beiden Begriffen, was übrigens auch *M. J. Condorcet* (Essai sur l'applic. de l'analyse à la probab., Paris 1785) schon gethan hat.

17) Betreffs verschiedener Deutungen sehr kleiner und sehr grosser W.-en vgl. man *J. d'Alembert* (Réflexions sur le calc. d. prob., Opusc. 2, 1761, p. 1), *G. Buffon* (Essai d'arithm. morale, Suppl. à l'hist. natur. Paris 4, 1777), *A. A. Cournot* (l. c.).

18) Logik 2, p. 319.

man es nur natürlich finden, dass sich mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung jener Zweig der Mathematik entwickelte, den man als *Kombinatorik* bezeichnet (I A 2, bes. Nr. **1**, **14**). In der That zählen die ersten Schriften über Wahrscheinlichkeitsrechnung zugleich zu den ersten über Kombinatorik[19]). Eine der ersten, litterarisch nachweisbaren Fragen, welche Wahrscheinlichkeit betrafen, hing mit der kombinatorischen Gleichwertigkeit der Fälle zusammen[20]). Richtiger Beurteilung dieser Gleichwertigkeit begegnet man zum ersten Male bei *G. Cardano*[21]). Aus unrichtiger Beurteilung sind wiederholt irrtümliche Lösungen und Behauptungen hervorgegangen[22]).

3. Totale Wahrscheinlichkeit. War die direkte Methode ursprünglich das einzige Mittel der Wahrscheinlichkeitsbestimmung, so bildeten sich im Laufe der Zeit an der Hand zahlreicher Probleme Regeln aus, nach welchen gewisse häufig wiederkehrende Schlüsse vollzogen werden sollten. Anfänglich sehr zahlreich, reduzierten sich diese Regeln auf einige wenige Sätze, welche *Laplace*[23]) zum ersten Mal präcis formuliert hat. Durch geschickte Analyse des Ereignisses, nach dessen Wahrscheinlichkeit gefragt wird, und die Anwendung dieser Sätze gelingt es oft leichter eine Aufgabe zu lösen, als durch unmittelbare Zählung der Chancen.

Der einfachste dieser Sätze betrifft die vollständige oder *totale Wahrscheinlichkeit*[24]). Ihm zufolge kommt die Wahrscheinlichkeit eines

---

19) *Bl. Pascal,* Traité du triangle arithm., Paris 1654; *Jakob* I *Bernoulli,* Ars conject.

20) An *G. Galilei,* Considerazione sopra il giuoco dei Dadi (Werke 3, Firenze 1718) ist die Frage gestellt worden, warum mit drei Würfeln die Summe 10 häufiger geworfen werde als 9 und 11 häufiger als 12; der Fragende hatte diese Summen für gleichmögliche Fälle gehalten.

21) De ludo aleae (Werke 1, 1663).

22) *G. W. Leibniz* (opera omnia, ed. Dutens, 6 p. 318) zählte für die Summen 12 und 11 bei zwei Würfeln je einen, für die Summe 7 drei Fälle. — Bekannt ist *J. d'Alembert*'s (Encycl., 1754, Artikel „Croix ou pile") falsche Zählung der Fälle bei zweimaligem Aufwerfen einer Münze. — Bezüglich des Beispiels, an welchem *J. Bertrand* (l. c. p. 2) das Auftreten ungleich-möglicher Fälle in nicht gerade durchsichtiger Weise erklärt, vgl. die einfachere Darstellung *H. Poincaré*'s (l. c. p. 3). Die Kritik dieses Beispiels in meinem *Berichte* (l. c. p. 9) ist unzutreffend.

23) Essai p. VII.

24) Bei *L. Öttinger* (Die W.-R., Berlin 1852, p. 3) findet sich dafür die Bezeichnung „relative W.", welche später in anderem Sinne genommen worden ist; als relative W. eines Ereignisses unter mehreren andern hat man den Quotienten aus seiner W. durch die Summe der W.-en aller in Betracht gezogenen Ereignisse verstanden. Vgl. *A. Meyer,* l. c. p. 12.

Ereignisses, das unter einer Reihe einzelner Ereignisse subsumiert werden kann, gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser letzteren. Gilt das Ereignis E als eingetroffen, wenn eines der Ereignisse E_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ sich verwirklicht hat, und kann nur *eines* von diesen eintreffen, so ist $P = \sum_1^n p_i$ die Wahrscheinlichkeit von E, wenn p_i die Wahrscheinlichkeit von E_i ist.

Laplace fasst in seiner Formulierung des Satzes die E_i als ungleich mögliche günstige Fälle von E auf. Man kann passend, wie dies bei *A. Meyer* [25]) geschieht, die E_i als *Arten* von E bezeichnen.

C. Reuschle [26]) hat für die totale Wahrscheinlichkeit die zutreffende Bezeichnung „Wahrscheinlichkeit des Entweder — oder" vorgeschlagen.

4. Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit. Besteht ein Ereignis in dem (gleichzeitigen oder successiven) Eintreffen mehrerer Ereignisse, so bezeichnet man es als ein *zusammengesetztes Ereignis*, seine Wahrscheinlichkeit dementsprechend als eine *zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit* [27]). Im Gegensatze hierzu werden die zusammentreffenden Ereignisse *einfache* Ereignisse genannt.

Bei der Bildung einer zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit kommt es wesentlich darauf an, ob die einfachen Ereignisse *unabhängig* von einander sind in dem Sinne, dass das Eintreffen oder Nichteintreffen des einen auf die Erwartungsbildung bezüglich der andern keinen Einfluss übt, oder ob sie in dem eben gekennzeichneten Sinne von einander *abhängig* sind [28]).

---

25) l. c. p. 11.

26) J. f. Math. 26 (1843), p. 333.

27) *L. Öttinger* (l. c. p. 3) wollte dafür eine der Bezeichnungen „bedingte" oder „abhängige W." einführen.

28) In dem Nachweis der Unabhängigkeit, beziehungsweise in dem Erkennen der Abhängigkeit von Ereignissen liegt eine der Hauptschwierigkeiten, sobald es sich um Anwendungen der W.-R. auf wirkliche Vorgänge handelt. Aus der Nichtbeachtung einer vorhandenen Abhängigkeit können schwere Irrungen hervorgehen. — Die Darstellung, welche *J. Bertrand* (l. c. p. 30) von *Maxwell*'s erster Ableitung des Gesetzes über die Verteilung der Geschwindigkeiten der Gasmoleküle gegeben hat und die von *H. Poincaré* (l. c. p. 21) reproduziert worden ist, lässt es unerwähnt, dass *Maxwell* selbst die Anfechtbarkeit dieser Ableitung vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung vollkommen klar erkannt und ausgesprochen hat, und dass er auch eine Ableitung jenes Gesetzes auf mechanischer Grundlage gab [Philos. Mag. (4) 35 (1868), p. 145 und 185 = Scient. Papers p. 129, 185)]. Vgl. hierzu *L. Boltzmann*, Wien. Ber. 66² (1872), p. 275; 96² (1888), p. 902, dann dessen „Vorles. über Gastheorie",

In beiden Fällen besteht die Wahrscheinlichkeit P des zusammengesetzten Ereignisses E in dem Produkte der Wahrscheinlichkeiten p_i der einfachen Ereignisse E_i $(i = 1, 2, \ldots n)$, sodass $P = \prod_1^n p_i$. Während aber im ersten Falle jedes p_i ohne Rücksicht auf die andern bestimmt wird, ist im zweiten Falle unter p_i jene Wahrscheinlichkeit zu verstehen, welche dem Ereignis E_i zukommt, nachdem die Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_{i-1}$ bereits eingetroffen sind[29]).

Bezüglich der *Zeitfolge* ist folgendes zu bemerken. Gehen die *unabhängigen* Ereignisse E_i jedes aus einem *andern* Komplex möglicher Fälle hervor, so können sie sowohl gleichzeitig als auch successive eintreffen; ist es hingegen *derselbe* Komplex möglicher Fälle, durch welchen die einzelnen E_i ihre Verwirklichung erlangen können, dann ist nur successives Eintreffen denkbar; die Ordnung der Succession ist beidemal gleichgültig. Bei *abhängigen* Ereignissen kann ebensowohl successives wie gleichzeitiges Eintreffen Platz greifen; vielfach hängt dies lediglich von der Auffassung des Vorgangs ab.

Für die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit hat *C. Reuschle*[30]) den treffenden Terminus „Wahrscheinlichkeit des Sowohl — als auch“ in Vorschlag gebracht.

Ein besonderer Fall eines aus unabhängigen Ereignissen zusammengesetzten Erfolges ist die n-malige *Wiederholung* eines unter denselben Bedingungen stattfindenden Ereignisses. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist $P = p^n$, wenn p die Wahrscheinlichkeit des sich wiederholenden Ereignisses bedeutet.

Wenn p die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses E, $q = 1 - p$ die Wahrscheinlichkeit für sein Nichteintreffen ist, so ist $Q = 1 - q^n$ die Wahrscheinlichkeit für seine Verwirklichung innerhalb n Versuchsfällen. Bei gegebenen q und Q kann

---

Leipzig 1896, p. 15 u. 32; ferner bezüglich der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Untersuchungen der Mechanik und Physik die Bde. IV, V und VI der Encykl. — Mitunter begegnet man der falschen Vorstellung von einer Abhängigkeit der successiven Realisierungen. So hielt *J. d'Alembert* (Opusc. math. 4 [1768], p. 79, 283) fest daran, es sei für die Erwartung nicht gleichgültig, Wappen eine bestimmte Anzahl male zu treffen in n Würfen mit *einer* Münze und in *einem* Wurf mit n Münzen — er hält das erstere für minder wahrscheinlich wegen einer von ihm behaupteten Abhängigkeit der auf einander folgenden Würfe. Ähnliche Verirrungen findet man bei *N. Beguelin* (Berl. Hist. 23, 1767 [1769], p. 382).

29) *Laplace,* Essai p. VIII u. IX.

30) An der unter 26) citierten Stelle.

hieraus die erforderliche Anzahl von Versuchen berechnet werden, damit man die Realisierung von E mit der Wahrscheinlichkeit Q erwarten dürfe; es ist dies die nächste ganze Zahl über $\log(1 - Q) : \log q$.[31])

Aus einem zusammenfassenden Gesichtspunkte sind die Sätze über die totale und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit von *H. Poincaré*[32]) abgeleitet worden.

5. Kombination der Sätze über totale und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit. Die Analogie zwischen der Aufstellung der Möglichkeiten, welche sich aus dem Zusammentreffen zweier oder mehrerer Ereignissphären ergeben können, mit der Bildung des Produktes zweier oder mehrerer Polynome ist schon frühzeitig erkannt worden. Den logischen Inhalt dieses Vorgangs hat *Ch. Sigwart*[33]) als *Kombination disjunktiver Urteile* gekennzeichnet.

Das Verfahren, welches *Jakob* I *Bernoulli*[34]) in seinen Erläuterungen zu *Ch. Huygens'* Schrift[35]) angiebt, um die möglichen Arten zu zählen, auf welche beim Werfen von 2, 3, ... Würfeln die verschiedenen Summen zustande kommen können, beruht auf der Erkenntnis, dass die Bildung der Potenz $(x^1 + x^2 + \cdots + x^6)^n$ durch n-malige Multiplikation des eingeklammerten Polynoms mit sich selbst und das Ordnen des Resultates nach x solche Regeln befolgt, dass der Koeffizient von x^s die Fälle zählt, in welchen beim Aufwerfen von n Würfeln die Summe s erscheint.

Eine allgemeine Formulierung jener Analogie gab *A. de Morgan*[36]). Besteht eine Ereignissphäre aus den Ereignissen E_i' $(i = 1, 2, \ldots, m)$, wobei dem E_i' α_i Fälle günstig sind; eine andere aus den Ereignissen E_i'' $(i = 1, 2, \ldots, n)$, wobei β_i Fälle dem E_i'' günstig sind, so zeigt

---

31) Diesen Fall betraf eine der ersten Aufgaben der W.-R. Unter den Fragen, welche *Chevalier de Meré* an *B. Pascal* (Briefwechsel mit *P. Fermat*, in *Pascal*'s Werken 4 [La Haye et Paris 1779], p. 412—443 = Oeuvres de Fermat, 2, 1894, p. 288, 289, 300, 307, 310, 314) stellte, befand sich auch die, wie es komme, dass man bei 4 Würfen mit einem Würfel auf das Erscheinen von 6 mit Vorteil 1 gegen 1 wetten könne und nicht so bei 24 Würfen mit zwei Würfeln auf das Erscheinen von 6, 6 — der Fragende hielt nämlich die nötigen Wurfzahlen für proportional den Anzahlen der möglichen Fälle.

32) Calc. d. prob. p. 12—16.

33) Logik 2, p. 307—309.

34) Ars conject. p. 20—25.

35) De ratiociniis in ludo aleae (bei *F. van Schooten*, Exercitationes mathem., Lugd. Bat. 1657). Auch als erster Teil des vorcitierten Werkes (1713) erschienen.

36) Encycl. Metropol. 2 (London 1845), Artikel „Theory of probabilities", p. 398.

das Produkt $\sum\limits_1^m \alpha_i E_i' \cdot \sum\limits_1^n \beta_i E_i''$ in seiner geordneten Entwicklung alle Möglichkeiten an, die sich bei der Kombination beider Ereignissphären ergeben können, und lässt im Koeffizienten eines Gliedes die Zahl der, der entsprechenden Möglichkeit günstigen Fälle erkennen.

Indessen, diese Analogie ist auch schon von *A. de Moivre*[37]) bemerkt, wenn auch noch nicht so allgemein formuliert worden. *Moivre* erklärt die Bedeutung der Glieder des Produktes $(a + b)(c + d)$, in welchem a, c die zwei Ereignissen günstigen, b, d die ihnen ungünstigen Fälle zählen; die weitere Verfolgung dieses Gedankens führt ihn zur Bedeutung der Glieder von $(a + b)^n$. Hierdurch erlangt er ein methodisches Mittel zur Lösung zahlreicher Aufgaben, und hauptsächlich die systematische Verwertung dieses Mittels giebt seinem oben angeführten Werke einen inneren Zusammenhang[38]).

Es war ein Fortschritt von grosser Bedeutung, als man die Anzahlen der günstigen Fälle durch die den betreffenden Eventualitäten entsprechenden Wahrscheinlichkeiten ersetzte, wodurch in der Entwicklung unmittelbar die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Kombinationen sich ergaben. Dieser Vorgang ist seit *Laplace* in allgemeinem Gebrauche.

6. Die Differenzenrechnung als methodisches Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung [I E, Nr. **13** ff.]. Wenn die zu bestimmende Wahrscheinlichkeit von *einer* ganzzahligen (positiven) Variabeln x (z. B. von der Anzahl auszuführender Ziehungen oder Spielpartien oder dgl.) abhängt, so bilden die zu den aufeinander folgenden Werten von x gehörigen Werte derselben eine Reihe; gelingt es, durch irgend einen Vorgang (etwa durch supponierte Fortsetzung der Ziehungen oder Spiele) eine Relation zwischen mehreren Gliedern jener Reihe herzustellen, so ist dadurch das Problem in die analytische Form gebracht. Ersetzt man die in der Relation auftretenden Glieder der Reihe durch das niedrigste und seine Differenzen, so entsteht eine *gewöhnliche Differenzengleichung*.

Ist die verlangte Wahrscheinlichkeit von mehreren ganzzahligen Variabeln $x, y, \ldots$ abhängig, so bilden ihre Werte eine mehrfach ausgedehnte diskrete Mannigfaltigkeit; eine Beziehung zwischen mehreren Elementen derselben führt bei gleicher Behandlung auf eine *partielle Differenzengleichung*.

---

37) Doctrine of chances, London 1718, Introduction.

38) *M. Cantor,* Gesch. d. Math. 3, p. 326.

Die Lösung des Wahrscheinlichkeitsproblems ist nun auf die *Integration* einer Differenzengleichung zurückgeführt, d. h. auf die Darstellung des allgemeinen Elements der betreffenden Mannigfaltigkeit als Funktion der Variabeln.

Mit der Anwendung *gewöhnlicher* Differenzengleichungen auf Wahrscheinlichkeitsprobleme hat *A. de Moivre* [39]) begonnen; die Methode heisst bei ihm *Methode der rekurrenten Reihen.* Es handelt sich dabei um lineare Differenzengleichungen verschiedener Ordnungen mit konstanten Koeffizienten. Später hat *J. Lagrange* [40]) die Theorie solcher Gleichungen aufgenommen, gefördert und ihre Bedeutung für die Wahrscheinlichkeitsrechnung hervorgehoben.

Die Lösung *partieller* Differenzengleichungen ist fast gleichzeitig durch *J. Lagrange* [41]) und *P. S. Laplace* [42]) in Angriff genommen worden; der erstere spricht dabei von „rekurrenten Reihen, deren Glieder auf mehrere Arten variieren", letzterer von „recurro-recurrenten Reihen".

Später hat *Laplace* [43]) die Integration der Differenzengleichungen auf ein neues analytisches Hülfsmittel gestützt, das sein Hauptwerk über Wahrscheinlichkeitsrechnung vollständig beherrscht, auf die Theorie der *erzeugenden Funktionen* (fonctions génératrices) [I E, Nr. 4]. Ist u eine nach positiven ganzen Potenzen der Variabeln t (resp. $t, v, \ldots$) entwickelbare Funktion, und ist P_x der Koeffizient von t^x (resp. $P_{x,y,\ldots}$ der Koeffizient von $t^x v^y \ldots$), so heisst u die erzeugende Funktion von P_x (resp. $P_{x,y,\ldots}$); umgekehrt wird P_x (resp. $P_{x,y,\ldots}$) die von u *erzeugte* Funktion genannt. Wie leicht zu erkennen ist, erzeugt dann $u\left(\frac{1}{t} - 1\right)$ die Differenz ΔP_x, die eine totale ist im Falle einer, eine partielle im Falle mehrerer Variabeln u. s. w.; ferner erzeugt $u\left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \cdots + \frac{k}{t^n}\right)$ die Funktion $a P_x + b P_{x+1} + c P_{x+2} + \cdots + k P_{x+n}$ u. s. w. Gelingt es, auf Grund der das Problem darstellenden Differenzengleichung die erzeugende Funktion der zu bestimmenden Wahrscheinlichkeit P_x (resp. $P_{x,y,\ldots}$) zu konstruieren, so hängt

---

39) Doctrine of chances (2. Aufl. 1738), p. 220—229.

40) L'intégrat. d'une équat. diff. à diff. finies etc., Taurin. Misc. 1 (1759) = Oeuvr. 1, p. 23.

41) Recherches sur les suites recurrentes etc., Berl. Nouv. Mém. 6 (1775) [77], p. 183 = Oeuvr. 4, p. 151.

42) Mém. sur les suites recurro-recurrentes etc., Par. sav. [étr.] 6 (1774) = Oeuvr. 8, p. 5.

43) Mém. sur les suites, Par. Hist. 1781 = Oeuvr. 10, p. 1. — Théorie, I^e livre.

die weitere Lösung nur mehr von der Entwicklung dieser Funktion in eine Potenzreihe ab.

Die Theorie der erzeugenden Funktionen fand wenig Eingang in die spätere Litteratur[44]) und besitzt heute wohl nur mehr historische Bedeutung. Die nachmalige Zeit hat durch die Ausbildung des *Operationskalküls,* an welcher die Engländer und insbesondere *G. Boole*[45]) hervorragend beteiligt waren, die Integration der Differenzengleichungen auf einfachere Formen zurückgeführt (I E, Nr. **13** ff.).

7. Teilungsproblem[46]). Von diesem Problem hat die Wahrscheinlichkeitsrechnung ihren Ursprung genommen[47]), an ihm sind die verschiedenen im Laufe der Zeit ausgebildeten Methoden erprobt worden, sodass es in der Litteratur seit jeher eine hervorragende Stellung einnimmt. In der ursprünglichen Form lautet es wie folgt: „Zwei Spieler von gleicher Geschicklichkeit[48]), deren jedem noch eine gegebene Anzahl von Punkten auf die für das Gewinnen des Spieles erforderliche, vorausbedungene Anzahl fehlt, trennen sich, ohne das Spiel zu vollenden; wie haben sie sich in den Einsatz zu teilen?" Die Beantwortung der Frage kommt auf die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit zurück, welche jedem Spieler zukommt, das Spiel zu gewinnen.

Pascal, der zunächst nur besondere Fälle behandelte, benützte dabei einen Gedanken, der später zur allgemeinen Lösung (mit Hülfe von Differenzengleichungen) verwendet wurde: er dachte sich das Spiel noch um einen Punkt fortgesetzt und gelangte von der dadurch hervorgerufenen Änderung der Sachlage zur Lösung. *Fermat*[49]), gleichfalls auf besondere Fälle sich beschränkend, benützt den Umstand, dass nach $m + n - 1$ weiteren Partien das Spiel zur Entscheidung kommen *müsste,* wenn m Punkte dem A und n Punkte

44) In dem unter 36) angef. Artikel ist *A. de Morgan* noch ausführlich darauf eingegangen.

45) Treat. of the Calc. of finite Differences, Cambr. 1860 (deutsch von *C. H. Schnuse,* Braunschweig 1867).

46) In der französischen Litter. „problème des partis", in der englischen „problem of points".

47) Es ist eine der Aufgaben, welche *Chev. de Meré* *Pascal* vorgelegt und welche dieser an *P. Fermat* weiter mitgeteilt hatte. Näheres hierüber s. *J. Todhunter,* l. c. p. 7—16.

48) Geschicklichkeit ist hier in dem Sinne der W. aufzufassen, mit welcher ein Spieler einen Punkt zu gewinnen erwartet.

49) Varia opera mathematica, Tolosae 1679, p. 179—183 = Oeuvr. 2, p. 289; Oeuvres de *Bl. Pascal,* Paris 1872.

dem B fehlen. An diese Methoden hielten sich auch *Ch. Huygens*[50]) und *Jak.* I *Bernoulli*[51]) in den von ihnen behandelten Fällen; letzterer gab eine Tabelle[51]), welche die Wahrscheinlichkeit angiebt, dass A gewinnen werde, für alle Wertverbindungen von $m = 1, 2, \ldots 9$ und $n = 1, 2, \ldots 7$; ersterer dehnte die Aufgabe für einige einfache Annahmen auf drei Partner aus.

Einen Schritt zur Verallgemeinerung hat *A. de Moivre*[52]) gethan, indem er die Geschicklichkeit der Spieler verschieden annahm (p bei A, q bei B, $p + q = 1$). Aus diesen Bedingungen hat *P. Montmort*[53]) das Problem zum erstenmal *allgemein* gelöst und das Resultat in zwei Formen gegeben: Die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnen werde, kann dargestellt werden durch

$$\sum_0^{n-1}{}_i \binom{m+n-1}{i} p^{m+n-1-i} q^i \quad \text{oder} \quad p^m \sum_0^{n-1}{}_i \binom{m+i-1}{i} q^i.$$

Die erste Darstellung entspringt aus dem *Fermat*'schen Gesichtspunkte und besteht in der Summe aller jener Glieder der Entwicklung von $(p+q)^{m+n-1}$, in welchen der Exponent von p nicht kleiner ist als m; der Rest der Glieder gäbe die Wahrscheinlichkeit des Gewinnens für B. In der zweiten Darstellung bedeutet das Glied $p^m \binom{m+i-1}{i} q^i$ die Wahrscheinlichkeit, dass A mit der $(m+i)^{\text{ten}}$ Partie das Spiel gewinnt. Die Gleichwertigkeit beider Ausdrücke ist eine Folge von $p + q = 1$.

In Integralform findet sich die obige Wahrscheinlichkeit in *A. Meyer*'s „Vorles."[54]) und lautet

$$\frac{\int_0^p x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx}{\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx};$$

jene für B ergiebt sich daraus durch Vertauschung von m, n und p, q.

J. Lagrange[55]) hat das Teilungsproblem für zwei Spieler als erstes Beispiel der Anwendung der Differenzenrechnung behandelt.

---

50) An der unter 35) angef. Stelle.
51) Ars conject. p. 16.
52) Mensura sortis (Lond. Trans. 27 [1711]) und Doctr. of ch.
53) Essai d'analyse sur les jeux de Hazard, Paris 1708, p. 232—248.
54) l. c. p. 83.
55) An der unter 41) genannten Stelle.

In allgemeinster Fassung, für beliebig viele Spieler, ist es von *Laplace*[56]) sowohl auf kombinatorischem Wege wie auch mit Hülfe der erzeugenden Funktionen erledigt worden. Auf ersterem Wege ist es für drei und vier Spieler auch von *J. Trembley*[57]) gelöst worden.

Aus neuerer Zeit stammen die Darstellungen von *E. Catalan*[58]) und *P. Mansion*[59]).

8. **Moivre's Problem.** Nach *A. de Moivre* benannt, weil er als erster die allgemeine Lösung gab, hat das Problem seinen Ursprung in den von *Ch. Huygens* und *Jak. Bernoulli* (s. Nr. 5) behandelten Aufgaben über das Würfelspiel. „Es sind n Würfel[60]) gegeben, jeder mit f Seiten, die mit den Nummern 1 bis f bezeichnet sind; es soll die Anzahl von Arten ermittelt werden, auf welche bei einmaligem Aufwerfen der Würfel die Summe p fallen kann.“ Für $p-n=s$ lautet die von *Moivre*[61]) angegebene Lösung

$$\frac{n(n+1)\cdots(n+s-1)}{1\cdot 2\cdots s}-\frac{n}{1}\,\frac{n(n+1)\cdots(n+s-f-1)}{1\cdot 2\cdots(s-f)}$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,\frac{n(n+1)\cdots(n+s-2f-1)}{1\cdot 2\cdots(s-2f)}-\cdots,$$

wobei die Reihe abzubrechen ist, sobald negative Faktoren auftreten würden. Seine Beweisführung stützt sich auf die Thatsache, dass die verlangte Anzahl sich als Koeffizient von x^p in der Entwicklung von $(x^1+x^2+\cdots+x^f)^n$ oder als Koeffizient von x^{p-n} in der Entwicklung von $(1+x+\cdots+x^{f-1})^n=(1-x^f)^n(1-x)^{-n}$ ergiebt. Auf einem andern, umständlicheren Wege hat *P. Montmort*[62]) die Formel abgeleitet.

Th. Simpson[63]) hat das Resultat durch einige Umformungen auf die Gestalt:

---

56) Zum erstenmal hat *L.* sich mit dem Problem befasst in dem Mém. sur la prob. des causes (Par. Sav. [étr.] 1774 = Oeuvr. 8, p. 27), dann in den Rech. sur l'intégr. des équat. diff. (ibid. 1776 = Oeuvr. 8, p. 69), endlich in der „Théorie“ p. 205—217; für den Fall beliebig vieler Spieler sind jedoch die richtigen Resultate im 4. Suppl. des letztgenannten Werkes, p. 18—22, zu suchen.

57) Disquis. element. circa calç. prob. Gott. Comment. 12 (1796).

58) Nouv. Corresp. math. 4 (1878), p. 8.

59) Brux. Mém. cour. in 8° 21, 1870.

60) Unter „Würfel“ ist hier ein Körper zu verstehen, welcher f seiner Seitenflächen gleiche Bedingungen der Realisierbarkeit verleiht.

61) Ohne Beweis, als Lemma zwischen dem 5. und 6. Problem, in der Mensura sortis [s. 15)] mitgeteilt; den Beweis hat *M.* in den Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis, London, 1730, chap. 6 gegeben.

62) An dem unter 53) angef. Orte, 2. Aufl. (1714), p. 46.

63) The nature and laws of chances, Lond. 1740, probl. 22.

$$\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}-\frac{n}{1}\frac{(q-1)(q-2)\cdots(q-n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}-\cdots$$

gebracht ($q = p - f$, $r = q - f, \ldots$) und daraus zugleich die Anzahl der Arten abgeleitet, auf welche eine den Betrag p *nicht überschreitende* Summe entstehen kann; diese Anzahl wird gleich:

$$\frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}-\frac{n}{1}\frac{q(q-1)\cdots(q-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}-\cdots.$$

Laplace[64]) hat das Problem in der folgenden Fassung wieder aufgenommen: „Eine Urne enthält $n+1$ Kugeln, die mit den Nummern $0, 1, 2, \ldots n$ versehen sind; man zieht i-mal eine Kugel, sie wieder zurücklegend, und verlangt die Wahrscheinlichkeit, dass die erzielte Summe s sein werde.“ Durch eine schwierige Analyse kommt er zu dem Resultate:

$$(\alpha)\ \frac{1}{(n+1)^i}\left\{\frac{(s+1)(s+2)\cdots(s+i-1)}{1\cdot 2\cdots(i-1)}-\frac{i}{1}\frac{(s-n)(s-n+1)\cdots(s+i-n-2)}{1\cdot 2\cdots(i-1)}\right.$$
$$\left.+\frac{i(i-1)}{1\cdot 2}\frac{(s-2n-1)(s-2n)\cdots(s+i-2n-3)}{1\cdot 2\cdots(i-1)}-\cdots\right\},$$

das *J. W. Lubbock*[65]) und nach ihm *A. de Morgan*[66]) in einfacherer Weise mittels der oben bemerkten Methode abgeleitet hat. Durch eine leichte Abänderung vollzieht *Laplace* den Übergang zu der Würfelaufgabe und geht dann[67]) auf den Fall über, dass nicht, wie oben, jede Nummer nur einmal vorkommt, sondern dass ihre Anzahlen nach einem andern Gesetze geregelt sind. Er giebt ferner den Grenzwert der Formel (α) für unendliche n und s, aber bei bestimmtem $\frac{s}{n}$ an — der Grenzübergang ist bei *A. de Morgan* (s. oben) ausgeführt — und bestimmt durch Integration die Wahrscheinlichkeit für gegebene Grenzen der erzielten Summe, um hieran die Erörterung einer Frage aus der Mechanik des Himmels zu knüpfen, mit der sich früher schon *Daniel* I und *Johann* II *Bernoulli*[68]) auf Veranlassung der Pariser Akademie beschäftigt hatten, der Frage nämlich, ob die An-

64) Théorie p. 253.

65) *J. W. Lubbock and J. E. Drinkwater,* Treat. on probab. (Library of useful knowledge, London 1835).

66) In dem unter 36) cit. Artikel, p. 410—412.

67) Théorie p. 261.

68) Recueil des pièces qui ont remp. le prix de l'Ac. de Par. 3 (1734).

ordnung der Planetenbahnen und die übereinstimmende Umlaufsrichtung eher als ein Werk des Zufalls oder als das Ergebnis einer ursprünglichen Ursache anzusehen seien. *Laplace* bestimmt zu diesem Zwecke die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Neigungswinkel der Planetenbahnen gegen die Ekliptik innerhalb gegebener Grenzen liege und dass gleichzeitig alle Planeten in gleichem Sinne die Sonne umkreisen, vorausgesetzt, dass alle Neigungen zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ und ebenso beide Umlaufsrichtungen relativ gleichmöglich sind[69]).

In der verallgemeinerten Fassung, welche jeder der möglichen Nummern eine andere, aber bestimmte Anzahl von Fällen zuschreibt, hat das *Moivre*'sche Problem für die *Fehlertheorie* Bedeutung erlangt und ist in diesem Sinne zuerst von *J. Lagrange*[70]) herangezogen und selbständig behandelt worden [I D 2, Nr. 3].

Mit der Würfelaufgabe, welche den Ausgangspunkt gebildet hatte, beschäftigte sich in neuerer Zeit *D. Bierens de Haan*[71]) und konstruierte eine Tabelle für verschiedene Würfelzahlen und Summen.

9. Problem der Spieldauer[72]). Das Problem hat sich aus der letzten von den fünf Aufgaben entwickelt, welche *Ch. Huygens* am Schlusse seiner Schrift über die Würfelspiele (s. Anm. 35)) mit Angabe des Resultates gestellt und die als erster *Jakob* I *Bernoulli*[73]) allgemein gelöst hat. In des letzteren Fassung besteht die Aufgabe in folgendem: „Zwei Spieler A, B besitzen m, bezw. n Marken, und ihre Chancen, die einzelne Partie zu gewinnen, verhalten sich wie $a:b$; der Verlierende giebt dem Gegner eine Marke; es ist für jeden Spieler die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass er alle Marken seines Gegners gewinnen werde.“ Die von *Bernoulli* auf kombinatorischem Wege gefundene Lösung

$$\frac{a^n(a^m-b^m)}{a^{m+n}-b^{m+n}}$$

für A (die für B durch Vertauschung der Buchstaben) ergiebt sich am einfachsten aus der dem Problem entsprechenden Differenzengleichung $P_x = \frac{a}{a+b} P_{x+1} + \frac{b}{a+b} P_{x-1}$, in welcher P_x die Wahr-

69) Zur Kritik dieser Anwendung der W.-R. vgl. *G. Boole*'s Laws of Thought, Lond. 1854, p. 364 und *F. Bacon* in *R. L. Ellis*, The works of *F. Bacon*, Lond., 1 (1857), p. 343.

70) Miscell. Taur. 5, 1770—1773 = Oeuvr. 2, p. 173.

71) Amst. Versl. 12 (1878), p. 371 [ins Franz. übers. im Harl. Arch. 14 (1879) p. 370].

72) In der engl. Litter. „problem of duration of play“.

73) Ars conject. p. 67—71.

scheinlichkeit bedeutet, die A in dem Augenblicke zukommt, da er x Marken besitzt. In dieser Form ist die Aufgabe dann auch von *Moivre*[74]) und *Laplace*[75]) behandelt worden.

Aber erst durch die Fragestellung, zu welcher *P. Montmort*[76]) und *Moivre*[74]) übergingen, ist das Problem zu einem der schwierigsten der Wahrscheinlichkeitsrechnung geworden und zu dem obigen Namen gekommen: „Wie gross ist unter den obigen Bedingungen die Wahrscheinlichkeit, dass vor oder mit einer bestimmten Partie einer der Spieler alle Marken seines Gegners gewonnen hat und das Spiel dadurch beendet ist?"

Was *Moivre* zur Beantwortung dieser Frage beigebracht hat, gehört zu den bedeutendsten seiner Leistungen im Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Er fasst die Ergebnisse seiner Untersuchungen in mechanischen Regeln zusammen, die einen für den Fall $m = n$, eine andere allgemein geltende und zwei weitere der Voraussetzung $m = \infty$ entsprechend.

Die Richtigkeit dieser Regeln ist durch die späteren Arbeiten bestätigt worden. So hat *J. Lagrange*[77]), der an dem Problem die Leistungsfähigkeit seiner Integrationsmethoden für endliche Differenzengleichungen erprobte, eine der Regeln für $m = \infty$ als richtig erwiesen, und aus der allgemeinen Lösung, die er auf zwei verschiedenen Wegen ermittelte, eine der Regeln für $m = n$ abgeleitet. Ebenso zeigte sich, dass die andere der für $m = \infty$ aufgestellten Regeln auf der von *Laplace*[78]) abgeleiteten Formel:

---

74) Mensura sortis, probl. IX. Hier ist die im Texte angegebene Formel zum erstenmale publiziert. — Doctr. of chances, probl. 58, 59, 63, 64.

75) Mém. sur la prob., Par. Hist. 1781 = Oeuvr. 9, p. 383. — In dieser Abhandlung werden die von *L.* ausgebildeten und in der W.-R. in weitem Umfange benutzten Methoden zur näherungsweisen Berechnung von Funktionen, welche von sehr grossen Zahlen abhängen — diese Methoden bilden den Inhalt der 2. Abt. des I. Buches der Théorie — zum erstenmal vorgeführt.

76) An der unter 53) cit. Stelle, 2. Aufl., p. 268—277.

77) An dem unter 41) a. O.

78) Schon in dem unter 42) a. Mém. hatte *L.* seine Untersuchungen über das Problem aufgenommen, zunächst unter den einfachsten Bedingungen $m = n$, $a = b$; später behandelte er in den Rech. sur l'intégr. des équat. diff. aux diff. fin. (Par. sav. [étr.] 1776 = Oeuvr. 8, p. 69) einen Fall mit drei W.-en, indem er die Möglichkeit einbezog, dass weder A noch B in der einzelnen Partie gewinne. Zusammenfassend und teilweise auch *Lagrange*'s Arbeiten einbeziehend ist die Darstellung in der Théorie p. 225—238, woselbst für die im Texte angegebene Formel ein Näherungswert bei grossen n und x entwickelt wird, welcher lautet:

$$a^n\left\{1+nab+\frac{n(n+3)}{1\cdot 2}a^2b^2+\frac{n(n+4)(n+5)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3b^3+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{n(n+x+1)(n+x+2)\cdots(n+2x-1)}{1\cdot 2\cdots x}a^x b^x\right\}$$

beruht, welche unter der Voraussetzung $a+b=1$ unmittelbar die Wahrscheinlichkeit angiebt, dass A seinen Gegner B spätestens bei dem $\overline{n+2x}^{\text{ten}}$ Spiele ruiniert haben werde.

Aus späterer Zeit sei noch einer Behandlung des Problems auf kombinatorischem Wege durch *L. Öttinger* [79]) gedacht.

10. Weitere Probleme, Glücksspiele betreffend. Unter den mannigfachen Aufgaben, welche das *Lotteriespiel*, insbesondere das *Genueser Lotto*, veranlasst hat, sind zwei von grösserem mathematischen Interesse.

Die erste betrifft die Wahrscheinlichkeit des Zustandekommens solcher Ziehungen, in welchen *Sequenzen* (Ziffernfolgen) auftreten. *L. Euler* [80]) fasst dabei die sämtlichen Nummern der Lotterie als eine lineare, *Johann* III *Bernoulli* [81]) als eine cyklische Reihe auf; ersterer sieht also in der Ziehung 8, 9, 89, 90, 1 zwei zweigliedrige Sequenzen (8, 9; 89, 90), letzterer eine zwei- und eine dreigliedrige (8, 9; 89, 90, 1). Für eine aus n Nummern bestehende Lotterie findet *Euler* als Wahrscheinlichkeit einer aus 2,3,4,5 Nummern zusammengesetzten sequenzen*freien* Ziehung:

$$\frac{n-2}{n},\quad \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)},\quad \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)},\quad \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{n(n-1)(n-2)(n-3)};$$

J. Bernoulli macht dazu die von *J. Todhunter* [82]) als richtig bestätigte Bemerkung, dass man nur n durch $n-1$ zu ersetzen brauche, um diese Ausdrücke seiner Auffassung anzupassen. Nach einer eigentüm-

---

$$1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^T e^{-t^2}dt-\frac{Te^{-T^2}}{8\alpha^2}\left(1-\frac{2}{3}T^2\right)\right]$$

und worin $\alpha^2=\dfrac{n+2x+\frac{2}{3}}{2}$, $T=\dfrac{n}{2\alpha}$ ist. Diese Formel wird dann zur Beantwortung der Frage verwendet, nach wie vielen Partien der Ruin von B mit der W. $\frac{1}{2}$ zu erwarten ist.

79) In dem unter 24) angef. Buche p. 179—188. Die Unstichhaltigkeit der am Schlusse dieser Darlegungen an *Laplace* und *Moivre* geübten Kritik hat *J. Todhunter,* l. c. p. 175 erwiesen.

80) Berl. Hist. 21 (1765) [1767], p. 191—230. S. Fussn. 83).

81) Ibid. 25, 1769 [1771], p. 234.

82) l. c. p. 326 u. 327.

lichen kombinatorischen Methode hat *N. Beguelin*[83]) diese Fragen allgemein behandelt.

Das zweite Problem hat als letztes Ziel die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für die *Erschöpfung aller Nummern* in einer gegebenen Reihe von Ziehungen. Sein Ursprung ist in der Aufgabe *A. de Moivre*'s[84]) gelegen: „Die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass man mit einem n-seitigen Würfel in x Würfen m bezeichnete Seiten treffen werde.“ *Moivre*'s in Worte gekleidete Lösung lautet in Zeichen:

$$\frac{1}{n^x}\left\{n^x - \binom{m}{1}(n-1)^x + \binom{m}{2}(n-2)^x - \cdots + (-1)^m (n-m)^x\right\};$$

der in der Klammer enthaltene Ausdruck ist $\Delta^m (n-m)^x$. Auf die Lotterie ist diese Fragestellung durch *L. Euler*[85]) und *Laplace*[86]) übertragen worden. *Euler* findet auf induktivem Wege die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer aus n Nummern bestehenden Lotterie in x Ziehungen von je r Nummern mindestens $n-\nu$ bezeichnete Nummern daran kommen, gleich:

$$\frac{1}{\binom{n}{r}^x}\left\{\binom{n}{r}^x - \binom{n}{\nu+1}\binom{n-\nu-1}{r}^x + (\nu+1)\binom{n}{\nu+2}\binom{n-\nu-2}{r}^x \right.$$
$$\left. - \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{1\cdot 2}\binom{n}{\nu+3}\binom{n-\nu-3}{r}^x + \cdots\right\}.$$

Laplace gewinnt nach Methoden, welche mit denjenigen *Moivre*'s[84]) übereinstimmen, für die Wahrscheinlichkeit, dass in i Ziehungen *alle* Nummern erscheinen, den symbolischen Ausdruck:

$$\left\{\frac{\Delta^n [s(s-1)\cdots(s-r+1)]^i}{[n(n-1)\cdots(n-r+1)]^i}\right\}_{s=0},$$

für dessen Auswertung er Näherungsausdrücke ableitet, um die *umgekehrte* Aufgabe lösen zu können, welche Anzahl Ziehungen erforderlich ist, um das bezeichnete Ereignis mit gegebener Wahrscheinlichkeit erwarten zu können.

Eine Gruppe von Problemen knüpft sich an das von *P. Montmort*[87]) zum erstenmal mathematisch behandelte *Rencontre*-Spiel[88]).

---

83) Berl. Hist. 21 (1765) [1767], p. 231, 257.

84) Doctr. of chances, probl. 39—42.

85) Berl. Hist. 21 (1765) [67], p. 191 = Opusc. analyt. 2 (Petrop. 1785), p 331.

86) Schon in der ersten unter 42) cit. Arbeit nimmt *L.* das Problem auf, führt die im Texte weiter unten erwähnte Approximation in der Suite du Mém. sur les approx. Par. Hist. 1783 = Oeuvr. 10, p. 295 aus und fasst alle Ergebnisse in der Théorie p. 191—201 zusammen.

87) In dem unter 53) cit. Werke, 2. Aufl. (1714), p. 130—143, 301, 302.

88) In der englischen Litter. „game of treize“ genannt.

Die ursprüngliche Frage war nach der Wahrscheinlichkeit gerichtet, bei dem successiven Herausziehen von dreizehn mit den Nummern 1, 2, ... 13 bezeichneten Karten wenigstens *eine* in dem der Nummer entsprechenden Zuge zu treffen. Für n Karten lautet die Lösung:

$$1 - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdots n},$$

bezüglich welcher *L. Euler*[89]) schon die Bemerkung gemacht hat, dass sie für $n = \infty$ sich in $1 - e^{-1}$ verwandelt. *A. de Moivre*[90]), *J. W. Lambert*[91]), insbesondere aber *Laplace*[92]) haben das Problem in veränderter oder verallgemeinerter Form gelöst. *E. Catalan*[93]) verändert die Fragestellung dahin, dass er die Wahrscheinlichkeit sucht, dass bei zweimaligem successiven Ziehen von m mit Buchstaben bezeichneten Kugeln aus einer Urne n Kugeln beidemal an gleicher Stelle erscheinen. Eine einfache Lösung für eine hiermit im Wesen übereinstimmende Aufgabe hat *E. Lampe*[94]) gegeben.

Zu vielfachen Arbeiten hat eine Aufgabe Anlass geboten, die von einem gewissen *Waldegrave* dem *P. Montmort* vorgelegt und von diesem (für 3 Spieler) auch gelöst worden ist[95]); *Todhunter*[96]) giebt ihr daher den Namen *Waldegrave's Problem.* Es handelt sich um folgendes Spiel: „Es sind $n + 1$ Spieler vorhanden; jedesmal spielen zwei davon unter gleichen Chancen mit einander; der Verlierende zahlt 1 Frc. und scheidet aus; der Gewinnende spielt unter den gleichen Bedingungen mit dem nächsten weiter u. s. f., bis einer alle folgenden besiegt; zu dem Verlierenden des ersten Spiels wird erst zurückgekehrt, wenn alle darangekommen sind. Gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit jedes Spielers, das Spiel zu gewinnen; nach der Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel mit oder vor einem bestimmten Gange enden werde.“ Die erste *Publikation* einer Lösung (für 3 Spieler) erfolgte durch *Moivre*[97]); mit erweiterter Fragestellung und beliebiger

89) Berl. Hist. 7 (1751 [53]), p. 255.

90) Doctr. of chances, 3. Aufl. (1756), probl. 35, 36.

91) Berl. Nouv. Mém. 2 (1771 [73]), p. 411. *L.* ist durch den Versuch, die W. von Wetterprognosen zu bestimmen, auf die Aufgabe geführt worden: Die W. zu bestimmen, dass von 20 Briefen, in 20 adressierte Kouverts nach Willkür gesteckt, eine vorgezeichnete Anzahl in die richtigen Kouverts kommen.

92) Théorie p. 217—225.

93) J. de math. (1) 2 (1837), p. 469.

94) Arch. f. Math. 70 (1884), p. 439.

95) In der 53) a. Schrift, p. 318—328.

96) l. c. p. 122.

97) Mensura sortis, probl. 15.

Spielerzahl hat *Laplace*[98]) das Spiel zum Gegenstande eingehender Untersuchungen gemacht.

11. Erweiterung der Definition. Geometrische Wahrscheinlichkeit. Wenn die Modalitäten eines ungewissen Thatbestandes von einer oder mehreren *stetigen* Variabeln abhängen, so ist es wohl möglich, durch Spezialisierung der Werte der letzteren eine einzelne Modalität, einen möglichen *Fall*, herauszuheben; aber die Gesamtheit der Fälle, der möglichen wie der günstigen, hört auf *zählbar* zu sein.

Solcher Art sind namentlich zahlreiche, im Laufe der Zeit zur Lösung gestellte Aufgaben, welche nach der Wahrscheinlichkeit fragen, dass ein durch *unzureichende* Bedingungen charakterisiertes geometrisches Gebilde gewissen Forderungen genüge. Andere Aufgaben, die nicht geometrisch formuliert sind, lassen sich durch entsprechende Deutung der auftretenden Variabeln häufig auf geometrisches Gebiet übertragen. Man kann daher diesen Zweig der Wahrscheinlichkeitsrechnung ganz wohl als „Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeit“[99]) bezeichnen.

Die Gleichberechtigung der Werte einer Variabeln, bezw. der Punkte in einer Geraden, findet ihren Ausdruck in der Festsetzung, dass beliebige, gleichgrosse Intervalle des Gebiets der reellen Zahlen, respektive gleichlange Strecken der Geraden, gleiche *Wertmengen* der Variabeln, bezw. gleiche *Punktmengen* enthalten[100]). Aus der weitern Verfolgung dieses Gedankens ergiebt sich, dass die Menge der Wertverbindungen *mehrerer* Variabeln $x, y, z, \ldots$ in einer Mannigfaltigfaltigkeit $\varkappa$ durch den *Inhalt der Mannigfaltigkeit*[101]), d. i. durch

$$\iiint\limits_{\varkappa} \ldots dx\, dy\, dz \ldots$$

gemessen werden könne. Der *Definition*[102]) der Wahrscheinlichkeit, damit sie auch diese Fälle umfasse, kann folgende Gestalt gegeben werden: „Die mathematische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist das Verhältnis aus dem Inhalt der Mannigfaltigkeit der ihm günstigen

98) Théorie p. 238—247.

99) In der englischen Litter. „local probability“ oder „geometrical p.“

100) Man vgl. über diese fundamentale Frage die Arbeit von *H. Brunn*, Münch. Ber. (philos. Kl.) 1892, p. 692. S. noch *C. Stumpf* ebda p. 681.

101) Hierzu meine Monogr.: Geometr. W.-en und Mittelwerte, p. 3—8.

102) *Cournot* l. c. § 18 hat schon auf die Notwendigkeit einer Abänderung der Definition hingewiesen, damit sie auch W.-en mit unbegrenzt vielen Fällen umfasse; die von ihm vorgeschlagene Formulierung entbehrt jedoch der Präzision.

Fälle zu der Mannigfaltigkeit aller als gleichberechtigt vorausgesetzten Fälle." Ist die Mannigfaltigkeit diskret, wie bei den Spielen, so wird ihr Inhalt durch *Zählung* ermittelt; ist sie kontinuierlich, dann erfolgt seine Bestimmung durch *Messung* (eventuell im mehrdimensionalen Raume).

Wiewohl die Lösung von Aufgaben der geometrischen Wahrscheinlichkeit dem Gebiete der *Integralrechnung* [103]) zufällt, so ist die Anwendbarkeit dieses Hülfsmittels durch die Kompliziertheit der erforderlichen Integrationen, die Schwierigkeit der Feststellung der Grenzen eine beschränkte. Was das meiste Interesse bietet, das sind die mannigfachen Kunstgriffe, durch welche man die Schwierigkeiten der Rechnung zu umgehen verstanden hat; als besonders fruchtbar erwies sich dabei die Verbindung von Fragen nach Wahrscheinlichkeiten mit Fragen nach *Mittelwerten* [104]). Unter dem Mittelwert einer vom Zufall abhängigen Grösse wird die Summe der Produkte ihrer möglichen Werte mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten verstanden [I D 2, Nr. **6**].

Was die historische Entwicklung dieses Zweiges der Wahrscheinlichkeitsrechnung anlangt, so war *G. Buffon* [105]) der erste, welcher Aufgaben solcher Art stellte und löste; unter diesen hat insbesondere das *Nadelproblem* (die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass eine Nadel, wenn sie auf eine mit äquidistanten Parallelen überzogene horizontale Tafel geworfen wird, eine der Parallelen kreuzt) die Aufmerksamkeit der Mathematiker erregt, und es haben *Laplace* [106]), *E. Barbier* [107]), *M. W. Crofton* [108]) und *J. J. Sylvester* [109]) nebst andern mit dem Problem und seinen Verallgemeinerungen sich beschäftigt [110]). Der Zeit nach als das zweite gilt das von *Sylvester* aufgestellte *Vierpunktproblem* [111]) (die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass vier in

103) Die Infinitesimalrechnung ist bei W.-Untersuchungen schon viel früher, zuerst von *Daniel Bernoulli* angewandt worden; es handelte sich dabei um statistische, also diskontinuierliche Vorgänge, die aber der Vorteile wegen, welche die Infinitesimal-R. bietet, als stetig aufgefasst wurden, Par. Hist. (1760) und Petrop. Novi comment. 12 (1766—1767).

104) S. meine o. a. Monogr., 2. Teil. — *M. W. Crofton*, Lond. Proceed. Math. Soc. 8 (1877), p. 304.

105) Essai d'arithm. morale (Suppl. à l'hist. natur. Paris, 4, 1777).

106) Théorie p. 358—362.

107) J. de math. (2) 5 (1860), p. 273.

108) Encycl. Britann., 9. edit., 19 (1885), p. 787.

109) Acta math. 14 (1890), p. 185.

110) Vgl. hierzu meine beiden o. a. Monogr.

111) In dem unter 108) cit. Art. p. 785; hierzu meinen o. a. „Bericht", Art. 29.

einer ebenen Figur beliebig angenommene Punkte ein nichtkonvexes Viereck bilden). Später folgte eine Fülle von Aufgaben, welche namentlich seitens englischer Geometer gestellt und gelöst worden sind; unter den letzteren hat *M. W. Crofton*[112]) die Theorie in der Ebene willkürlich gezogener Geraden am eingehendsten ausgebildet[113]).

12. Theorem von Jakob I Bernoulli. Dieses Theorem betrifft die Erwartungsbildung in Bezug auf das Ergebnis einer *grossen* Anzahl s gleichartiger Beobachtungen, deren jede eines von zwei einander ausschliessenden Ereignissen A, B mit den durch die ganze Beobachtungsreihe *konstant* bleibenden Wahrscheinlichkeiten p, q hervorbringt. Es enthält zwei Aussagen: Die eine bezieht sich auf die Wiederholungszahlen m, n der beiden Ereignisse in der *wahrscheinlichsten Kombination*, die andere auf die Wahrscheinlichkeit, dass die wirklich sich einstellenden Wiederholungszahlen oder ihre Verhältnisse zu s von den wahrscheinlichsten Werten nicht mehr als innerhalb vorgezeichneter *Grenzen* abweichen.

Während die Begründung der ersten Aussage in der Feststellung des *grössten* Gliedes in der Entwicklung von $(p+q)^s$ besteht und in voller Strenge durchgeführt werden kann, erfordert die Erledigung des zweiten Teils die *Summierung* einer Gliedergruppe jener Entwicklung, deren Mitte das grösste Glied einnimmt, eine Aufgabe, welche mit Rücksicht auf die Rechenarbeit, die ihre strenge Ausführung verlangen würde, nur mit Hülfe von *Näherungs*methoden zu bewältigen ist.

Jakob Bernoulli[114]), dessen Namen das Theorem führt, hat die Existenz eines grössten Gliedes in $(p+q)^s$ nachgewiesen und seine Zusammensetzung erkannt; die erwähnte Summierung aber hat er nicht versucht, sondern in Verfolgung seiner Absicht[115]) nur den Nachweis geführt, dass die Summe einer dem s proportionalen Anzahl von Gliedern, deren mittelstes das grösste Glied ist, durch Vergrösserung von s der Summe *aller* Glieder, also der Einheit, beliebig nahe gebracht werden könne.

---

112) Lond. Trans. 158 (1868), p. 181.

113) Eine grössere Auswahl von Problemen der geom. W. findet sich in meiner o. a. diesem Gegenstande gewidmeten Monographie; sehr reich an derlei Aufgaben sind die Educat. Tim. Eine umfangreichere Sammlung aus der neuesten Zeit hat *G. B. M. Zerr* in Educ. Tim. 55 (1891), p. 137—192 veröffentlicht.

114) Ars conject., pars quarta, p. 210—239.

115) *B.* schwebte der Schluss von einer grossen Versuchsreihe auf die ihr zugrunde liegenden, unbekannten Bedingungen, also auf die W.-en vor; er gebrauchte für eine W., welche aus der *Erfahrung* abgeleitet ist, den seither beibehaltenen Namen „W. a posteriori" (l. c. p. 224).

Um den zweiten Teil des Theorems, die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit vorgezeichneter Grenzen für den zu gewärtigenden Erfolg, haben sich *A. de Moivre*, *J. Stirling*, *C. Maclaurin* und *L. Euler* verdient gemacht, und ihre hierauf bezüglichen Leistungen sind für die gesamte Analysis von hoher Bedeutung. *Moivre*[116]) war bei seinen Bemühungen um die näherungsweise Darstellung des grössten Gliedes von $(p+q)^s$ und eines Gliedes, welches von diesem einen gegebenen Abstand besitzt, zu der approximativen Berechnung des Logarithmus der Fakultät $1 \cdot 2 \cdots s$ gelangt, welche ihm bis auf die Erkenntnis der Natur einer dabei auftretenden Konstanten $(\sqrt{2\pi})$ gelungen war; diese Ergänzung blieb dem von *Moivre* zu gleichen Untersuchungen angeregten *Stirling*[117]) vorbehalten, dessen Namen nunmehr die Näherungsformel[118]):

$$1 \cdot 2 \cdots s = s^s e^{-s} \sqrt{2\pi s}\left(1 + \frac{1}{12 s} + \frac{1}{288 s^2} + \cdots\right)$$

trägt. Die noch erforderliche Summierung einer Gruppe näherungsweise dargestellter Glieder, die Umwandlung der Summe in ein Integral, hat *Moivre* nicht korrekt durchgeführt; das geeignete analytische Hülfsmittel hiefür schufen *Maclaurin*[119]) und *Euler*[120]) in der nach dem letzteren benannten *Summenformel* (I E, Nr. **11**):

$$\sum_0^{l-1}{}_x\, y_x = \int_0^l y\,dx - \frac{1}{2}\left\{y_x\right\}_0^l + \left\{\frac{B_1 y_x'}{2!}\right\}_0^l - \left\{\frac{B_2 y_x'''}{4!}\right\}_0^l + \left\{\frac{B_3 y_x^{\mathrm{v}}}{6!}\right\}_0^l - \cdots,$$

in welcher die linksstehende Summe nach den ganzzahligen Werten des Zeigers x gebildet ist und $B_1, B_2, B_3, \ldots$ die *Bernoulli'schen Zahlen* $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{5}{66}, \cdots\right)$ (I E, Nr. **10**; II A 3, Nr. **18**) bedeuten.

Laplace[121]) hat mit Benützung all dieser Hülfsmittel, die er aus

116) Doctr. of chances p. 243—254; die analytischen Ausführungen zu den an dieser Stelle vorgeführten Resultaten finden sich in den Miscell. analyt., Suppl. (s. 61)).

117) Methodus Differentialis etc., London 1730, p. 135.

118) In den Anwendungen auf W.-R. genügt es, den vor der Klammer stehenden Faktor allein zu benutzen. Eine schärfere Approximation für $s!$ hat *A. R. Forsyth*, Brit. Ass. Rep. 1883, in der Formel

$$\sqrt{2\pi}\left(\frac{\sqrt{s^2+s+\frac{1}{6}}}{e}\right)^{s+\frac{1}{2}}$$

gegeben.

119) Treat. of Flux., Edinb. 1742, p. 673.

120) Instit. calc. diff., Petrop. 1755.

121) Théorie p. 275—284.

einer gemeinsamen Quelle, der Theorie der erzeugenden Funktionen (Nr. **6**), von neuem ableitete, dem *Bernoulli*'schen Theorem die *endgültige Form* gegeben [I D 4 a, Nr. 2]. Hiernach ist jene Kombination die wahrscheinlichste, in welcher das Verhältnis der Wiederholungszahlen m, n von A, B dem Verhältnis der respektiven Wahrscheinlichkeiten p, q gleich oder am nächsten ist; und es ist ferner mit der Wahrscheinlichkeit:

$$(\alpha) \qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\theta e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\theta^2}}{\sqrt{2spq\pi}}$$

zu erwarten, dass die Verhältnisse $\frac{m}{s}$, $\frac{n}{s}$ innerhalb der Grenzen:

$$p \mp \theta \sqrt{\frac{2pq}{s}}, \qquad q \mp \theta \sqrt{\frac{2pq}{s}}$$

zu liegen kommen.

Von den beiden Teilen des Ausdrucks (α) wird in neueren Schriften[122]) häufig nur der erste, prävalierende angeführt [s. auch I D 2, Nr. 4]. Für ihn sind in den meisten grösseren Werken über Wahrscheinlichkeitsrechnung Tafeln[123]) mitgeteilt [I D 2, Nr. 4]. Dieselben sind aus Tafeln der Integrale:

$$\int_0^\theta e^{-t^2} dt, \text{ resp.} \int_\theta^\infty e^{-t^2} dt$$

hervorgegangen; die Werte dieser Integrale sind durch die Relation

$$\int_0^\theta e^{-t^2} dt + \int_\theta^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

mit einander verknüpft. *J. Eggenberger*[124]) hat den zweiten Teil von (α) durch Modifikation der oberen Grenze des Integrals mit diesem vereinigt.

Es sind mehrfach *Versuchsreihen*[125]) angestellt oder vorhandene

---

122) *J. Bertrand,* l. c. p. 78 u. 83; *H. Poincaré,* l. c. 22), p. 69.

123) Den Ursprung dieser Tafeln bildet die von *Ch. Kramp,* Théor. des réfract. etc., Strassb. u. Leipz. 1798, veröffentlichte Tafel der Integralwerte $\int_\theta^\infty e^{-t^2} dt$. Genauere Tafeln finden sich bei *R. Radau,* Par. Obs. Ann. 18 (1885) und *A. A. Markoff,* Tables des valeurs de l'intégrale $\int_x^\infty e^{-t^2} dt$, St. Pétersb. 1888. Weiteres hierüber bei *H. Opitz,* Die Kramp-Laplace'sche Transcendente etc., Berlin Königstädt. Realgymn. Osterprogr. 1900 [I D 2, Nr. 4].

124) Bern Naturf. G. 50 (1893), p. 110—182 = Diss. 1893; die bezügliche Abhandlung ist eine Monographie der historischen Entwicklung des *Bernoulli*schen Theorems.

125) *G. Buffon,* l. c. 105); *S. D. Poisson,* l. c. § 50; *W. St. Jevons,* Prin-

dazu benützt worden, um den *Bernoulli*'schen Satz zu *verifizieren*, oder richtiger gesagt, um zu zeigen, dass das *wirkliche Geschehen* thatsächlich innerhalb enger Grenzen den durch die apriorischen Wahrscheinlichkeiten bezeichneten Verhältnissen sich anpasst.

13. Poisson's Gesetz der grossen Zahlen [I D 4a, Nr. 3]. *S. D. Poisson*[126]) hat sich mit eingehenden Untersuchungen über die Erwartungsbildung in Bezug auf das Ergebnis einer grossen Anzahl von Versuchen beschäftigt, unter der Voraussetzung, dass die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B, deren eines in jedem Versuche eintreffen muss, von Versuch zu Versuch sich *ändern*. Er hat das Resultat dieser Untersuchungen, in welchem er eine *Verallgemeinerung des Bernoulli*'schen *Theorems* erblickte, als *„Gesetz der grossen Zahlen"*[127]) bezeichnet.

Ist p_i die Wahrscheinlichkeit von A im i^{ten} Versuche, $q_i = 1 - p_i$ die entsprechende Wahrscheinlichkeit von B, so besteht *Poisson*'s Hauptergebnis[128]) in dem Satze, dass mit der Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\theta e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\theta^2}}{k\sqrt{\pi s}}$$

zu erwarten sei, es werde das Verhältnis der Wiederholungszahl von A, resp. B, in einer grossen Anzahl s von Versuchen zur Zahl s selbst sich zwischen die Grenzen:

$$p \mp \theta \frac{k}{\sqrt{s}}, \quad q \mp \theta \frac{k}{\sqrt{s}}$$

einstellen; dabei bedeuten p, q die *arithmetischen Mittel* der im Laufe der Versuche geltenden Wahrscheinlichkeiten p_i, q_i, und es ist:

$$k^2 = \frac{2 \sum_1^s {}_i\, p_i q_i}{s}.$$

Dieser Fassung des Theorems lassen sich nicht leicht adäquate

---

ciples of science, London 1887, p. 208; *E. Czuber*, Zum Gesetz der grossen Zahlen, Prag 1889; *R. Wolf*, Bern Naturf. G. 1849—1853; Zürich Naturf. G. Viert. 1881—1883, 1893, p. 10; 1894, p. 147; u. a. m.

126) l. c. 4. Kap.

127) Diese Bezeichnung wird indessen auch dem *Bernoulli*'schen Satze gegeben.

128) In der Reihe der mannigfachen Resultate, welche *P.* a. a. O. abgeleitet, wird gewöhnlich dieses, welches dort § 112 unter 7) angeführt ist, als der Ausdruck des Ges. d. gr. Z. angesehen. Vgl. dazu *H. Laurent*, l. c. p. 97—106, und *A. Meyer*, l. c. p. 109—120, woselbst auch die Analyse gegeben ist.

Verhältnisse aus der Wirklichkeit gegenüberstellen; auch würden zwei Versuchsreihen in Bezug auf ihre Ergebnisse nach diesem Satze nur dann vergleichbar sein, wenn die Wahrscheinlichkeiten von A, B in beiden denselben Verlauf nähmen oder wenn die eine Reihe als eine mehrmalige Wiederholung der andern sich darstellte.

Wichtiger, weil der Wirklichkeit eher sich anpassend, ist die Auffassung, wonach die Wahrscheinlichkeit von A im einzelnen Versuche nicht vorausbestimmt, sondern selbst vom Zufall abhängig ist. Besteht nämlich die Wahrscheinlichkeit ω_i dafür, dass in *irgend* einem Versuche dem Ereignis A die Wahrscheinlichkeit p_i zukommt, und giebt es ν zusammengehörige Wertepaare ω_i, p_i, dann hat das arithmetische Mittel aller p_i, d. i.:

$$p = \sum_1^\nu {}^i\, \omega_i p_i$$

eine *definitive*, d. h. vom Umfang der Versuchsreihe unabhängige Bedeutung, indem es die *Totalmöglichkeit*[129]) für das Eintreffen von A im einzelnen Versuche darstellt; $1-p$ hat die analoge Bedeutung für B. In den obigen Formeln ist dann für *jede* Versuchsreihe k zu ersetzen durch $\sqrt{2p(1-p)}$ (s. *Poisson* l. c. Nr. 109).

Poisson's Untersuchungen haben in der späteren Litteratur wenig Beachtung und von manchen Seiten, wegen unrichtiger Auffassung ihrer Prämissen, abfällige Beurteilung[130]) erfahren. In jüngster Zeit ist man bei der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Fragen der mathematischen Statistik zu Ideenbildungen gelangt, welche auf jene Untersuchungen zurückführen[131]).

II. Wahrscheinlichkeit a posteriori.

14. Wahrscheinlichkeit der Ursachen[132]), aus der Beobachtung abgeleitet. Kann ein *beobachtetes* Ereignis E aus einer von den n unabhängigen Ursachen C_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ hervorgegangen sein,

129) Diese Bezeichnung hat *J. v. Kries*, l. c. p. 106 für solcher Art gebildete W.-en vorgeschlagen.

130) *J. Bertrand*, l. c., p. XXXI u. 94.

131) *L. v. Bortkewitsch*, Krit. Betracht. z. theor. Statist., Jahrb. f. Nationalök. u. Stat. 53, p. 641; 55, p. 321 (1893, 1895); vgl. auch I D 4 a, Nr. **3**.

132) Bezüglich der Bedeutung dieses Terminus vgl. man die Note 3). In dem hier erörterten Zusammenhange wird dafür häufig der Ausdruck „Hypothese" gebraucht; *J. v. Kries* (l. c. p. 122) schlägt die Bezeichnung „Entstehungsmodus" vor. Vgl. auch *C. Stumpf*, l. c. 1), p. 96.

und besteht für die Existenz dieser Ursachen *a priori* gleiche Wahrscheinlichkeit $\left(=\frac{1}{n}\right)$, so kommt der Existenz der Ursache C_i *auf Grund der Beobachtung* die Wahrscheinlichkeit:

$$P_i = \frac{p_i}{\sum\limits_1^n p_i}$$

zu, wenn p_i die Wahrscheinlichkeit von E bei Existenz der Ursache C_i bedeutet. Hat diese jedoch *a priori* die Wahrscheinlichkeit ω_i, so kommt ihr *a posteriori* die Wahrscheinlichkeit:

$$P_i = \frac{\omega_i p_i}{\sum\limits_1^n \omega_i p_i}$$

zu.

Dies sind die beiden Formen der *Bayes'schen Regel* [133]) für den Fall einer beschränkten Anzahl von Ursachen. *Laplace*, der für diesen Teil der Wahrscheinlichkeitsrechnung zuerst klare Prinzipien ausgesprochen hat [134]), stützt sich bei der Begründung der ersten Formel auf einen besonderen Satz [135]) [I D 4 a, Nr. 2]; andere Autoren [136]) glaubten hierzu die „Annahme" nötig zu haben, dass die aposteriorischen Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ursachen proportional seien den apriorischen Wahrscheinlichkeiten, welche sie dem beobachteten Ereignis erteilen. Erst *S. D. Poisson* [137]) und *A. de Morgan* [138]) haben durch Aufstellung von Urnenschematen gezeigt, dass die *Bayes*sche Regel zu ihrer Begründung *keines* besonderen Prinzips, sondern nur der Wahrscheinlichkeitsdefinition bedürfe [I D 4 a, Nr. 3]. Auf dieses logisch wichtige Moment haben auch *C. Stumpf* [139]) und *J. v. Kries* [140]) hingewiesen.

---

133) Nach *Th. Bayes* benannt, welcher sich zum erstenmale mit der Beurteilung der W. von Ursachen befasst hat in einer nach seinem Ableben von *R. Price* veröff. Abh.: An Essay toward solving a Problem in the Doctr. of chances. Lond. Trans. 53 (1763), p. 370.

134) Die bezügliche Arbeit: Mém. sur la prob. des causes par les évènemens (Par. sav. [étr.] 6, 1774 = Oeuvr. 8, p. 27) gehört zu den ersten, welche *L.* über W.-R. veröffentlicht hat.

135) Essai p. 9—10.

136) So *J. F. Fries*, l. c. p. 74.

137) l. c. §§ 28 u. 34.

138) An der unter 36) cit. Stelle p. 401.

139) An der unter 1) cit. Stelle p. 99.

140) l. c. p. 117—122.

Diejenigen Formen der *Bayes*'schen Regel, welche zur Geltung kommen, wenn das beobachtete Ereignis von einer *stetigen* Variabeln x (Wahrscheinlichkeit eines elementaren Ereignisses ε) abhängt, hat *Laplace* zu Beginn des VI. Kap. der „Théorie" aufgestellt; sie lauten

$$P_x = \frac{y\,dx}{\int\limits_0^1 y\,dx},$$

beziehungsweise:

$$P_x = \frac{w\,y\,dx}{\int\limits_0^1 w\,y\,dx};$$

darin bedeutet y die Wahrscheinlichkeit von E und w die apriorische Wahrscheinlichkeit von x; P_x drückt beidemal die Wahrscheinlichkeit aus, dass der existente Wert von x in das Intervall $(x, x + dx)$ falle. Die Integration des Zählers zwischen bestimmten Grenzen θ, θ' führt zu der Wahrscheinlichkeit, dass x zwischen diesen Grenzen enthalten sei. Derjenige Wert von x, welcher y, respektive wy, zu einem Maximum macht, wird als der *wahrscheinlichste Wert* oder als Wahrscheinlichkeit von ε nach der *wahrscheinlichsten Ursache* bezeichnet.

Die an der *Bayes*'schen Regel geübte Kritik[141]) hat sich immer dagegen gerichtet, dass man in Ermangelung bestimmter apriorischer Kenntnisse alle Werte von x von vornherein als gleichwahrscheinlich annimmt. Dass trotzdem die Anwendung der Regel unter gewissen Kautelen zu korrekten Resultaten führt, hat *J. v. Kries*[142]) in zutreffender Weise dargethan.

Aus der infinitesimalen Form der *Bayes*'schen Regel lässt sich die *Umkehrung des Bernoulli'schen Theorems* (Nr. 12) ableiten. *Laplace*[143]) hat diese Umkehrung unmittelbar an dem letztgedachten Theorem vollzogen und auf diese Art folgendes Resultat erhalten: Besteht das beobachtete Ereignis E in der m-maligen Wiederholung von ε und der n-maligen des entgegengesetzten Ereignisses ε' in $s = m + n$ Versuchen, so ist die unbekannte Wahrscheinlichkeit von ε zwischen den Grenzen:

---

141) *F. Bing,* Om aposteriorisk Sandsynlighed, Tidsskr. Math. (4) 3 (1879), p. 1 und die daran sich knüpfende Polemik mit *L. Lorenz* im selben Bde., p. 57, 66, 118, 122; *L. Goldschmidt,* Die W.-R., Versuch einer Kritik, p. 192—263; u. a. m.

142) l. c. p. 122—127; vgl. dazu meinen oben cit. „Bericht", p. 101.

143) Théorie p. 281—282.

$$\frac{m}{s} \mp \theta \sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$$

mit der Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\theta e^{-t^2} dt + \frac{\sqrt{s}\, e^{-\theta^2}}{\sqrt{2mn\pi}}$$

enthalten. Wendet man auf dieses Problem die *Bayes*'sche Regel an, so ergiebt sich zunächst $\frac{m}{s}$ als der wahrscheinlichste Wert von x und weiter:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\theta e^{-t^2} dt$$

als Wahrscheinlichkeit dafür, dass x zwischen die Grenzen:

$$\frac{m}{s} \mp \theta \sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$$

falle. Dieses zweite, von dem früheren durch das Glied $\frac{\sqrt{s}\, e^{-\theta^2}}{\sqrt{2mn\pi}}$ sich unterscheidende Resultat ist von *Laplace*[144]) sowohl wie auch von *Poisson*[145]) angegeben worden und wird in der spätern Litteratur unter dem oben angeführten Namen verstanden[146]).

15. Wahrscheinlichkeit künftiger[147]) Ereignisse, aus der Beobachtung abgeleitet. Zur Bewertung der Wahrscheinlichkeit neuer Ereignisse auf Grund vorliegender Beobachtungsergebnisse führt die *Bayes*'sche Regel in Verbindung mit den Sätzen über die zusammengesetzte und totale Wahrscheinlichkeit. Ist P_i die aposteriorische Wahrscheinlichkeit der Ursache C_i $(i = 1, 2, \ldots n)$, q_i die Wahrscheinlichkeit, welche diese Ursache dem neuen Ereignis F verleihen würde, wenn sie existent wäre, so ist $\Pi = \sum_1^n P_i q_i$ die *totale* aus der Beobachtung erschlossene Wahrscheinlichkeit von F. Ersetzt man darin P_i durch seinen nach der *Bayes*'schen Regel bestimmten Wert, so ergiebt sich für Π der Ausdruck:

---

144) Ibid. p. 366—367.

145) A. a. O. § 84. — Das erste *Laplace*'sche Resultat findet sich auch bei *Poisson* § 83.

146) Zur Kritik der beiden Resultate vgl. man *A. de Morgan*, Cambr. Trans. 6 (1837); *J. Todhunter,* l. c. p. 554—558; *C. J. Monro*, Lond. Math. Soc. Proc. 5 (1874), p. 74, 145.

147) Dies die übliche Nomenklatur; es kann sich jedoch auch um bereits eingetretene, aber noch unbekannte Ereignisse handeln.

$$\Pi = \frac{\sum_1^n p_i q_i}{\sum_1^n p_i} \qquad \text{oder} \; = \frac{\sum_1^n \omega_i p_i q_i}{\sum_1^n \omega_i p_i},$$

je nachdem die Ursache C_i, welche dem *beobachteten* Ereignis E die Wahrscheinlichkeit p_i zuschreibt, eine vom Zeiger i unabhängige oder eine mit ihm wechselnde *apriorische* Wahrscheinlichkeit ω_i besitzt.

Hängt das beobachtete Ereignis E wie das neue F von der Wahrscheinlichkeit x eines elementaren Ereignisses ε ab, so treten an die Stelle der obigen Formeln die nachstehenden:

$$\Pi = \frac{\int_0^1 yz\,dx}{\int_0^1 y\,dx} \qquad \text{oder} \; = \frac{\int_0^1 wyz\,dx}{\int_0^1 wy\,dx},$$

je nachdem allen Werten von x a priori die gleiche oder jedem eine andere, w, zukommt; y ist die Wahrscheinlichkeit von E, z die von F.

Das *Hauptproblem* der aposteriorischen Wahrscheinlichkeitsrechnung, in der Aufsuchung der Wahrscheinlichkeit bestehend, dass nach beobachtetem m-maligen Eintreffen von ε und n-maligem Ausbleiben dieses Ereignisses in $p+q$ weiteren Versuchen ε sich p-mal zutragen und q-mal ausbleiben werde, ist von *Laplace*[148]) und *M. J. Condorcet*[149]) unter zwei verschiedenen Gesichtspunkten gelöst worden; ersterer giebt für die verlangte Wahrscheinlichkeit den Ausdruck:

$$\frac{\int_0^1 x^{m+p}(1-x)^{n+q}\,dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n\,dx} = \frac{(m+n+1)!\,(m+p)!\,(n+q)!}{m!\,n!\,(m+n+p+q+1)!},$$

und gestaltet ihn mittels der *Stirling*'schen Formel [Nr. **12**] für die praktische Rechnung um; die Formel des zweitgenannten Autors unterscheidet sich von dieser durch das Hinzutreten des Faktors $\frac{(p+q)!}{p!\,q!}$; dort wird eine *bestimmte Anordnung* von F vorausgesetzt; hier bleibt sie beliebig.

Das *Condorcet*'sche Resultat ist von *J. Trembley*[150]) auf kombinatorischem Wege deduziert worden.

---

148) In dem unter 134) cit. Mém.

149) Essai sur l'applic. de l'analyse à la prob. des décisions, Paris 1785; Réfl. sur la méth. de déterm. de la prob. des évèn. futurs, Par. Hist. 1783.

150) De Probabilitate Causarum ab effectibus oriunda, Gotting. Comm. 12 (1796).

Mit einer bemerkenswerten Modifikation des Hauptproblems haben *P. Prevost* und *S. A. Lhuilier*[151]) sich beschäftigt[152]).

III. Von zufälligen Ereignissen abhängende Vor- und Nachteile.

16. Mathematische Erwartung[153]) [I D 4 b, Nr. 5, 6]. Die *objektive* Beurteilung des Wertes einer *Erwartung*, welche auf den Gewinn (oder Verlust) einer von einem ungewissen Ereignis abhängigen Geldsumme σ gerichtet ist, hat nach dem *Produkt aus der Summe* σ *mit der Wahrscheinlichkeit* p des Ereignisses zu geschehen, mit dessen Eintreffen ihre Realisierung verbunden ist. Ausser dieser *abstrakten* kann man dem Produkt $p\sigma$ verschiedene *reale* Deutungen geben: Es ist der rechtmässige Betrag, um welchen sich eine Person den eventuellen Anspruch auf σ erkaufen kann; (in einem Glücks-Spiele) wäre $p\sigma$ der rechtmässige Anteil, der einer Person aus dem Einsatze σ gebührte, welche ihn mit der Wahrscheinlichkeit p zu erwarten hatte, wenn auf die Entscheidung durch den Zufall verzichtet würde; keineswegs aber hat die *mathematische Erwartung* $p\sigma$ die Bedeutung, welche ihr *Poisson*[154]) beimass, die einer Summe, welche die betreffende Person *vor* der Entscheidung wirklich besitzt. Eine festere Grundlage erhält der Begriff der mathematischen Erwartung, wenn man statt eines einzelnen Falles eine grosse Anzahl gleichartiger Fälle sich durchgeführt denkt; dann bedeutet, dem *Bernoulli*'schen Theorem zufolge, $p\sigma$ den *wahrscheinlichsten*, auf den einzelnen Fall entfallenden Betrag; diese zutreffende Deutung stammt von *M. J. Condorcet*[155]).

Erwartet eine Person den Eintritt *einer* von n sich gegenseitig ausschliessenden Eventualitäten E_i $(i = 1, 2, \ldots n)$, deren Wahrscheinlichkeiten p_i und an deren Eintreffen die Summen a_i (positiv als Gewinn, negativ als Verlust) geknüpft sind, so ist ihre mathematische Erwartung $= \sum_1^n p_i a_i$. Die Ausführung dieser Formel kann mitunter vorteilhaft mit Umgehung der einzelnen p_i, a_i, deren Bestimmung oft umständlich wäre, erfolgen[156]). Statt „mathematische Erwartung" sagt

151) Sur la Prob., Berl. Nouv. Mém. 1796 [99], p. 117.

152) Vgl. dazu *J. Todhunter*, l. c. p. 456.

153) *L. Öttinger* (s. 24)) p. 189 gebraucht dafür die Bezeichnung „Wert der Erwartung"; dies entspricht dem bei englischen Autoren gebräuchlichen Terminus „mathematical expectation".

154) l. c. § 23. — Vgl. dazu die Bemerkungen *J. Bertrand*'s, l. c. p. 50.

155) Réfl. sur la règle générale etc., Par. Hist. 1781.

156) Ein bemerkenswertes Beispiel dieser Art findet man bei *Laplace*,

man auch *„wahrscheinlicher Wert der* a_i*"*; dagegen ist *„wahrscheinlichster Wert der* a_i*"* dasjenige a_i, dessen p_i das grösste ist [I D 4 b, Nr. **5**, **6**].

Einen weittragenden Satz über mathematische Erwartungen oder Mittelwerte hat *P. Tschebyscheff*[156a]) auf elementarer Grundlage bewiesen: „Sind $a, b, c, \ldots$ die Mittelwerte der (diskreten) Variabeln $x, y, z, \ldots$; a_1, b_1, c_1 die Mittelwerte der Quadrate $x^2, y^2, z^2, \ldots$, so ist mit einer Wahrscheinlichkeit $P > 1 - \frac{1}{t^2}$ zu erwarten, dass die beobachtete Summe $x+y+z+\cdots$ zwischen die Grenzen $a+b+c+\cdots \mp t\sqrt{a_1+b_1+c_1+\cdots-a^2-b^2-c^2\cdots}$ falle".

Aus diesem Satze ergeben sich unter anderen auch das *Poisson*'sche [Nr. **13**] und das *Bernoulli*'sche [Nr. **12**] Theorem als spezielle Fälle.

Man hat die von den Wirkungen des Zufalls abhängigen Unternehmungen in solche zu trennen, wo nur eine *einmalige* Entscheidung herbeigeführt wird (Spiele, Wetten), und in solche, wo eine *grosse* Anzahl gleichartiger Fälle nach und nach oder auf einmal zur Entscheidung kommt (geschäftliche Unternehmungen)[157]). Die Theorie der letzteren gründet sich auf das Gesetz der grossen Zahlen[158]).

17. Moralische Erwartung. Das *Petersburger Problem*[159]) hat zur Aufstellung einer Theorie Anlass gegeben, deren Urheber *Daniel Bernoulli*[160]) ist und der auch *Laplace*[161]) eingehende Beachtung gewidmet hat. Sie legt in die Beurteilung des Wertes einer Erwartung ein *subjektives* Moment, indem sie das *Vermögen* der beteiligten Person in Rechnung zieht; ihr Grundprinzip besteht darin, dass die *mora-*

Théorie p. 419; weitere bei *J. Bertrand,* l. c. p. 51—56. S. auch *D. E. Mayer,* J. éc. pol. (2) 3 (1897), p. 153.

156a) J. de math. (2) 12 (1867), p. 177 = Oeuvres 1, St. Pétersb. 1899, p. 687.

157) *A. de Morgan,* l. c. 36), p. 404—406.

158) Einige hierher gehörige Untersuchungen giebt *Laplace,* Théorie p. 419—431.

159) Das Problem betrifft ein Spiel (1, 2, 4, 8, . . . Mark Gewinn, wenn Wappen im 1. oder erst im 2., 3., 4., . . . Wurfe fällt), das unbegrenzt viele Möglichkeiten darbietet und daher auf einen durch eine unendliche Reihe dargestellten Einsatz führt. Die Divergenz dieser Reihe war der eigentliche Anlass zu den mannigfachen Untersuchungen. Vgl. *E. Czuber,* Das Petersburger Problem, Arch. f. Math. 67 (1881), p. 1; ferner die Kritik *A. Pringsheim*'s über die verschiedenen Aufklärungsversuche in der unter 160) cit. deutschen Ausgabe, p. 46—52.

160) Specimen Theoriae Novae de Mensura sortis, Petrop. Comm. 5 (1738); neuerdings deutsch mit Noten herausgegeben von *A. Pringsheim,* Leipzig 1896.

161) Théorie, chap. X.

lische Bedeutung einer *differentiellen* Vermögensänderung dieser selbst direkt, dem Vermögen umgekehrt proportional angenommen wird. Die Verfolgung dieses Gedankens führt zu dem Begriff der „*moralischen Erwartung*"; bei einer Person vom Vermögen a, welche *eine* der Vermögensänderungen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ mit den bezüglichen Wahrscheinlichkeiten $p, q, r, \ldots$ $(p + q + r + \cdots = 1)$ zu erwarten hat, ist

$$(a+\alpha)^p (a+\beta)^q (a+\gamma)^r \cdots - a$$

der Ausdruck für diese Erwartung.

Praktische (d. i. geschäftliche) Anwendungen sind von dem Begriff der moralischen Erwartung nicht gemacht worden (siehe jedoch den Begriff „Moralische Prämie" in I D 4 b, Nr. 21); hingegen bildet der Gedanke, auf welchen *D. Bernoulli* seine Theorie aufgebaut hat, die Grundlage der modernen Wertlehre[162]).

18. Mathematisches Risiko. Wenn in einem auf den Zufall gegründeten Unternehmen auf eine Reihe einander gegenseitig ausschliessender Ereignisse ε_i $(i = 1, 2, \ldots n)$, deren Wahrscheinlichkeiten p_i heissen mögen, von der einen Seite — dem *Unternehmer* — Preise A_i ausgesetzt sind, während von der andern Seite — dem *Spieler*[163]) — Einsätze E_i dafür gefordert werden, so steht dem Spieler eine der *reinen* Vermögensänderungen $x_i = A_i - E_i$ mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit p_i bevor, und seine hierauf bezügliche mathematische Erwartung ist $\sum p_i x_i$; in gleicher Art findet sich $\sum p_i(-x_i)$ als Ausdruck der Erwartung des Unternehmers. Sind Preise und Einsätze nach dem Grundsatz der mathematischen Erwartung geregelt, so ist $\sum p_i x_i = 0$ wie auch $\sum p_i(-x_i) = 0$. Trennt man in einer der Summen die positiven und negativen Glieder, so entstehen zwei dem Betrage nach gleiche Teilsummen, jede gleich $\frac{1}{2}\sum_1^n p_i |x_i| = D$. Diese Grösse, welche die auf die reinen *Gewinne* oder die reinen *Verluste* gerichtete mathematische Erwartung sowohl des Unternehmers wie des Spielers darstellt, kann als ein *Mass der Gefährlichkeit* des Unternehmens für beide Teile angesehen werden. Man bezeichnet sie als das *durchschnittliche Risiko* und stellt ihr, ähnlich wie dies in andern Teilen der angewandten Wahrscheinlichkeitsrechnung ge-

162) Vgl. die Einleitung *L. Fick*'s zu der unter 160) angeführten deutschen Ausgabe des „Specimen". Das Urteil *J. Bertrand*'s (l. c. p. 65—67) über *D. Bernoulli*'s Theorie ist hiernach unzutreffend.

163) Das Wort „Spieler" ist hier im weiteren Sinne zu nehmen; auch der Versicherte ist als Spieler aufzufassen.

schieht, eine andere Grösse, das *mittlere Risiko* gegenüber, deren Definition in der Formel $M = \sqrt{\sum p_i x_i^2}$ enthalten ist und die zu dem gleichen Zwecke sich eignet wie D.[164])

An diese Ideenbildung knüpft die theoretische Untersuchung der Frage an, in welcher Weise Unternehmungen, die sehr viele Geschäfte gleicher Art abschliessen, sich gegen die Folgen der Abweichungen des wirklichen Verlaufs der Eventualitäten gegenüber dem wahrscheinlichsten, auf dem das Prinzip der mathematischen Hoffnung beruht, nach Möglichkeit sichern können. Indessen sind diese Untersuchungen noch nicht zu solchen Ergebnissen gelangt, welche eine *praktische* Verwertung gestatten würden (s. I D 4 b)[165]).

---

164) *Th. Wittstein,* Das mathematische Risiko, Hannover 1885; *F. Hausdorff,* Das Risiko bei Zufallsspielen, Leipz. Ber. 49 (1897), p. 497.

165) Obwohl hiermit das Gebiet der eigentlichen Anwendungen bereits gestreift ist, mag doch eine Schrift aus neuester Zeit angeführt werden, weniger wegen der anfechtbaren Darstellung von der Entwickelung der Risikotheorie, als weil sie die darauf bezügliche Litteratur vollständig bringt: *K. Wagner,* Das Problem des Risiko in der Lebensversicherung, Jena 1898.

I D 2. AUSGLEICHUNGSRECHNUNG

(METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE. FEHLERTHEORIE)

VON

JULIUS BAUSCHINGER

IN BERLIN.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

Originalabhandlungen.

C. F. Gauss, Theoria motus (1809), zweites Buch, dritter Abschnitt, Nr. 172—189; Werke 7; Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen (1816), Werke 4, p. 109; Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, 3 Abhandlungen 1821, 1823, 1826, Werke 4, p. 1.

Diese und noch einige kleinere Arbeiten von *Gauss* sind übersetzt und gesammelt in dem Buche:

Gauss, Abh. zur Meth. d. kl. Quadr., herausgegeben von *A. Börsch* und *P. Simon,* Berlin 1887

P. S. Laplace, Théorie analytique des Probabilités, 1812, 2. Ed. 1814, 3. Ed. 1820; Livre II, Chap. IV = Oeuvres 7.

J. F. Encke, Über die Methode der kleinsten Quadrate, 3 Abh. im Berl. Astr. Jahrb. für 1834—36; Ges. Abh. 2, p. 1; Über die Anwendung der Wahrsch.-R. auf Beobachtungen, Berl. Astr. Jahrb. für 1853; Ges. Abh. 2, p. 201.

A. Bravais, Analyse math. sur les prob. des erreurs de situation d'un point; Par. Mém. 9, 1846.

P. A. Hansen, Von der Methode der kleinsten Quadrate, Leipz. Abh. 8, 1867.

Ch. M. Schols, Théorie des erreurs dans le plan et dans l'espace, Delft Ann. 2, 1886, p. 123 [Übersetzung von: Over de theorie der fouten in de ruimte en in het platte vlak, Amst. Verh. 15, 1875].

Lehrbücher.

Ch. L. Gerling, Die Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie, Hamburg u. Gotha 1843.

G. H. L. Hagen, Grundzüge der Wahrsch.-Rechnung, Berl. 1. Aufl. 1837, 3. Aufl. 1882.

Al. N. Sawitsch, Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitslehre auf die Berechnung der Beobachtungen oder die Methode der kl. Quadrate (russisch, St. Petersb.); deutsch von *Lais,* Mitau u. Leipzig 1863.

F. R. Helmert, Die Ausgl.-R. u. d. Meth. d. kl. Quadr., Leipzig 1872 (giebt viele, namentlich geodätische Beispiele).

B. Weinstein, Handbuch der physikalischen Massbestimmungen, erster Band, Berlin 1886.

E. Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891. (Behandelt die theoretischen Grundlagen und schliesst die praktischen Anwendungen aus.) Die reichen Litteraturangaben dieses Werkes sind mir bei der Ausarbeitung des Artikels von grossem Nutzen gewesen.

E. Czuber, Die Entwickelung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen, Deutsche Math.-V. 7, Leipz. 1899.

Ausserdem finden sich mehr oder minder umfangreiche Darstellungen der Meth. der kl. Qu. in astronomischen und geodätischen Handbüchern: *Th. Oppolzer,* Bahnbestimmung 2, Leipz. 1880; *J. C. Watson,* Theor. Astronomy, Philad. & London 1868; *W. Chauvenet,* Spherical Astr., Philad. 1863 und Treat. on theory of prob. in comb. of observ., Philad. 1868; *F. E. Brünnow,* Sphär. Astr., Berl. 1852, 4. Aufl. 1881; *W. Jordan,* Vermessungskunde 1, Stuttg. 1882, 4. Aufl. 1895 u. a.; ferner in allen Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung, nämlich *Meyer, Bertrand, Poisson* u. a.

J. Todhunter, History of theory of Probability from Pascal to Laplace, Cambridge & London 1865.

Eine fast vollständige Litteraturübersicht von 1722 bis 1876 giebt:

M. Merriman, List of Writings relating to the Method of Least Squares. Connecticut Transactions 4, 1877, p. 151, 408 Titel.

---

1. Aufgabe der Ausgleichungsrechnung*). Wenn eine Grösse oder bekannte Verbindungen mehrerer Grössen öfter gemessen sind,

---

*) Neben der im Text gegebenen Fassung des Problems 2) existieren noch andere Probleme des gleichen Namens [I D 4 b, Nr. **5**, **6**]. Das Wort „Aus-

als zu ihrer rein algebraischen Bestimmung nötig ist, dann werden in Folge der unvermeidlichen, zufälligen Beobachtungsfehler zwischen den Gleichungen, welche den Zusammenhang zwischen den zu ermittelnden und den beobachteten Grössen herstellen, Widersprüche entstehen, die durch keinerlei Annahme über die zu ermittelnden, überbestimmten Grössen zu beseitigen sind; es ist Aufgabe der Ausgleichungsrechnung, aus solchen Gleichungen durch eine strenge und möglichst einfache Analyse die Werte der Unbekannten so zu bestimmen, dass sie der Wahrheit möglichst nahe kommen. Ohne ein Prinzip, welches sich darüber ausspricht, wann wir diese letztere Bedingung als erfüllt ansehen, ist die Lösung der Aufgabe unmöglich und soweit es sich um die Wahl des Prinzips handelt, ist also eine gewisse Willkür notwendig mit der Natur des Problems verbunden. Für die Wahl des Prinzips sind massgebend: 1) dass dasselbe in Übereinstimmung stehe mit plausiblen Anschauungen über die Natur der Beobachtungsfehler, 2) dass die aus ihm fliessende Analyse eine möglichst einfache sei. Diese Trennung ist wenigstens zweckmässig, da die beiden Forderungen verschiedenen Gebieten angehören. Mit dem ersteren Gegenstand beschäftigt sich die *„Theorie der Beobachtungsfehler“*, die ihrerseits eine Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung [I D 1] ist; mit dem letzteren hat es die *„Ausgleichungsrechnung“* im engeren Sinne zu thun. Man weiss durch die Untersuchungen von *Gauss* und *Laplace*, dass das Prinzip:

„Die Unbekannten sind so zu bestimmen, dass die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Widersprüche ein Minimum werde“,

beiden Bedingungen genügt. Die jetzt allgemein angenommene Methode der Ausgleichung, die auf dieses Prinzip basiert ist, heisst daher häufig: *„Methode der kleinsten Quadrate“*.

Analytisch formuliert sich die Aufgabe der Ausgleichungsrechnung wie folgt: Sind l_i die Beobachtungsergebnisse für die gegebenen Verbindungen $A_i = a_i x + b_i y + c_i z + \cdots$ ($i = 1$ bis n) zwischen den m unbekannten Grössen $x, y, z, \ldots$ $(n > m)$, so ist jenes Wertsystem $x, y, z, \ldots$ anzugeben, für welches die Summe der Quadrate von $A_i - l_i$ ein Minimum wird. A_i kann stets als linear angenommen werden; ist dies von Anfang an nicht der Fall, so stellt man die

gleichung“ wird auch in dem Sinne gebraucht, dass z. B. die Ordinaten einer Kurve zwar jede nur *einmal* beobachtet sind, dass aber jede mit einer Ungenauigkeit behaftet ist, welche die Kurve in eine gewisse „Fehlerzone“ einschliesst: die „ausgeglichene Kurve“ soll glatt innerhalb der Fehlerzone verlaufen. S. auch die entspr. Bemerkung zu I D 3. Das wesentliche ist immer, dass *mehr* Koordinaten gemessen sind, als zur analytischen Bestimmung der Kurve nötig sind.

lineare Form durch Annahme von Näherungswerten und Entwickelung nach dem Taylor'schen Satz für mehrere Variable her [II A 2, Nr. 12]. Ist nur eine Unbekannte vorhanden, die unmittelbar beobachtet ist, so hat man das Problem der *„Ausgleichung direkter Beobachtungen"*.

Der allgemeine Fall wird als *„Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen"* bezeichnet. Treten zu den Gleichungen:

$$a_i x + b_i y + \cdots = l_i,$$

die durch das System $x, y, z, \ldots$ nur bis auf Grössen von der Ordnung der Beobachtungsfehler befriedigt zu sein brauchen, noch solche Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten hinzu, die streng erfüllt sein müssen, so hat man eine *„Ausgleichung bedingter Beobachtungen"* zu leisten. Hiernach unterscheidet man in der Regel drei Gruppen von Aufgaben der Ausgleichungsrechnung[1]), obwohl dieselben prinzipiell nicht von einander verschieden sind.

2. Erste Begründung von Gauss. Viele Schriftsteller gehen unmittelbar von dem oben genannten Prinzip aus; andere aber, die in der Ausgleichungsrechnung eine Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung sehen, gehen auf andere Prinzipien zurück, aus denen jenes folgt[2]). Die erste wirkliche Begründung giebt *Gauss*[3]), er sucht die *wahrscheinlichsten* Werte der Unbekannten. Es sei die Grösse x direkt gemessen, ε der dabei begangene Fehler; Fehlern von verschiedener Grösse kommt verschiedene Wahrscheinlichkeit zu, dieselbe sei ausgedrückt durch $\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon$. Die Funktion $\varphi(\varepsilon)$, die jetzt in Deutschland *Fehlergesetz*[4]) genannt wird, wird aus ihren Eigenschaften bestimmt; in letzter Linie wird dazu herangezogen *„der Satz vom arithmetischen Mittel"*: dass der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten x das arithmetische Mittel aus den direkten Beobachtungs-

1) Nach *Gerling,* Die Ausgl.-R. der prakt. Geometrie, 1843, p. 25.

2) Eingehende Darstellungen der verschiedenen Begründungsmethoden geben: *R. Henke,* Meth. d. kl. Quadr. 1868 u. 1894 und *Czuber,* Theorie der Beob.-Fehler, 1891, p. 234 ff.

3) Theoria motus 1809, art. 175—179 (Werke 7). Schon vor *Gauss* führt *A. M. Legendre* in den Nouvelles Méthodes pour la dét. des orbites des comètes, Par. 1805 Prinzip und Namen: „méthode des moindres quarrés", aber ohne Begründung ein; übrigens erwähnt *Gauss,* Th. mot. art. 186, dass er sich des Prinzips bereits seit 1795 bei seinen Rechnungen bedient habe.

4) *Gauss* nennt sie in der Theoria motus: „probabilitas errori tribuenda", in der Theoria comb. „facilitas relativa"; englische Schriftsteller nennen sie „law of facility of errors".

resultaten sei. Damit ergiebt sich das nach *Gauss* benannte Fehlergesetz:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}$$

(h = Präzisionskonstante, die von der Genauigkeit der Beobachtungsreihe abhängig ist). Aus ihm folgt, dass derjenige Wert der Unbekannten der wahrscheinlichste ist, für welchen die Summe der Quadrate der Fehler ein Minimum wird. Leitet man das Fehlergesetz direkt aus der Erfahrung ab, so kann aus ihm sowohl der Satz vom arithmetischen Mittel als der Satz von der kleinsten Quadratsumme abgeleitet werden. Jedes dieser 3 Prinzipien kann also den Ausgangspunkt zur Begründung der Ausgleichungsrechnung bilden.

3. Der Satz vom arithmetischen Mittel. Es sind viele Versuche gemacht worden, den *Satz vom arithmetischen Mittel* zu beweisen bez. auf noch tiefere Prinzipien zurückzuführen[5]), um damit auch die Methode der kleinsten Quadrate strenger zu begründen. Zuerst beschäftigt sich *Lagrange*[6]) mit dem Problem, indem er vom Standpunkt der Wahrscheinlichkeitsrechnung den induktiven Beweis liefert, dass das arithmetische Mittel eine zweckmässige Verbindung von Beobachtungsresultaten ist; der springende Punkt aber, dass es jeder anderen Verbindung vorzuziehen sei, wird nicht berührt. *Laplace*[7]) findet für unendlich viele Beobachtungen, dass das arithmetische Mittel wahrscheinlicher sei, als ein sich davon unterscheidender Wert. *Encke*[8]) glaubt durch Zuziehung von Postulaten, die sich aus der Natur der Beobachtungsfehler ergeben, einen strengen Beweis zu liefern. Weitere Versuche rühren von *G. V. Schiaparelli*[9]), *E. J. Stone*[10]), *A. de Morgan*[11]), *Ann. Ferrero*[12]) her. *J. W. L. Glaisher*'s[13]) Kritik derselben

5) Eine zusammenhängende Darstellung dieser Versuche giebt *Czuber* „Beobachtungsfehler" p. 16—47.

6) *J. Lagrange,* Mém. sur l'utilité de la méthode, de prendre le milieu etc. Misc. Taur. 5, 1770—1774 = Oeuvres 2, p. 173. Teilweise reproduziert von *Encke,* Berl. Jahrb. f. 1853 = Werke 2, p. 201. *Lagrange* legt das verallgemeinerte Moivre'sche Problem [I D 1, Nr. 8] zu Grunde.

7) Théorie anal. des Prob. 2, art. 18 (Oeuvres 7).

8) Über die Begründung der Meth. d. kl. Quadr., Berl. Abh. 1831 = Berl. Jahrb. f. 1834 = Ges. Abh. 2, p. 1.

9) Lomb. Rend. (2) 1 (1868), p. 771; Astr. Nachr. 87 (1875), p. 209; 88 (1876), p. 141, s. noch *Stone* ib. p. 61.

10) Lond. Astr. Soc. Monthly Not. 28, 1868; 33 (1873), p. 570; 34 (1873), p. 9; 35 (1873), p. 107 (Polemik gegen *Glaisher*).

11) On the theory of Errors of Obs., Cambr. Trans. 10, 1864.

12) Esposizione del metodo dei minimi quadrati, Firenze 1876.

13) Lond. Astr. Soc. Mem. 39² (1872), p. 75.

ist nicht widerlegt. Einen Fall, wo der Satz vom arithmetischen Mittel sicher nicht richtig ist, bespricht *H. Seeliger*[13a]).

4. Das Gauss'sche Fehlergesetz. Fehlerfunktion. Tafeln hiefür. Andere Fehlergesetze. Ein Fehlergesetz, d. h. eine Funktion, welche die Häufigkeit eines Fehlers durch seine Grösse ausdrückt, kann analytisch nicht deduziert werden, ohne dass durch ein Prinzip festgelegt wird, welchen Wert der Unbekannten man als den der Wahrheit nächst kommenden betrachtet; bei der Gauss'schen Ableitung ist dies das Prinzip des arithmetischen Mittels. *Laplace*[14]) weist nach, dass umgekehrt das Gauss'sche Gesetz das einzige ist, welches stets auf das arithmetische Mittel als den anzunehmenden Wert der Unbekannten hinführt.

Ohne Annahme eines Fehlergesetzes kann man die Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht auf die Ausgleichungsrechnung anwenden; einige Schriftsteller[15]) vertreten die Ansicht, dass diese Anwendung überhaupt verwerflich sei.

Formale Bedenken gegen das Gauss'sche Fehlergesetz hat *J. Bertrand*[16]) erhoben. Dieser wirft auch die Frage auf, ob das richtige Gesetz nur eine Funktion der Grösse des Fehlers sein könne, und untersucht ferner die allgemeine Form der Funktion, welche das wahrscheinlichste Resultat aus den Beobachtungswerten giebt, unter der Voraussetzung, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers nur von seiner Grösse abhänge[17]).

Man hat vielfache Versuche angestellt, das Fehlergesetz aus der Natur der Beobachtungsfehler selbst abzuleiten, indem man sich diese aus Elementarfehlern, die aus verschiedenen Fehlerquellen hervorgehen, entstanden denkt. *W. Bessel*[18]), *Hagen*[19]), *Encke*[20]), *P. G. Tait*[21]), *M. W. Crofton*[22]) kommen alle unter mehr oder minder allgemeinen Voraussetzun-

---

13a) Astron. Nachr. 132 (1893), p. 209.

14) *Laplace,* Th. an. des Prob. 2, p. 23 (Oeuvres 7).

15) Siehe z. B. *Henke* a. a. O., p. 67; *R. Heger* im Handbuche der Math. von *Schlömilch* 2, Breslau 1881, p. 927.

16) *Bertrand,* Calcul des Prob., Par. 1889, art. 140 ff.; siehe auch *Czuber* „Beobachtungsfehler“ p. 51.

17) *Bertrand* a. a. O. art. 144.

18) *Bessel,* Unters. über die Wahrsch. d. Beob.-Fehler, Astr. Nachr. 15 (1838), p. 369 = Ges. Abh. 2, p. 372.

19) Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung 1837.

20) Berl. Jahrb. f. 1853 = Ges. Abh. 2, p. 201.

21) On the Law of Frequency of Errors, Edinburgh Trans. 24, 1867.

22) On the Proof of the Law of Errors of Observations Lond. Trans. 160 (1870) p. 175.

gen über das Zusammenwirken der Elementarfehler auf die Exponentialfunktion. Der Wert dieser Untersuchungen scheint darin zu liegen, dass sie die Bedingungen aufhellen, unter denen ein Fehlergesetz von der Form der Exponentialfunktion zustande kommt; man kann also vom Fehlergesetz aus, wenn dies anderweitig bestätigt wird, auf die Wirkungsweise der Fehlerquellen schliessen. Einen völlig befriedigenden Beweis für die Richtigkeit des Gauss'schen Fehlergesetzes aber haben auch diese Versuche nicht zu Tage gefördert. Das Vertrauen, welches diesem Gesetz jetzt allgemein entgegengebracht wird, beruht vielmehr auf der fast immer bewährten Übereinstimmung mit der *Erfahrung*. *Bessel* hat zuerst eine Prüfung in grösserem Massstabe vorgenommen[23]), indem er die durch die Theorie geforderte Zahl der Fehler zwischen bestimmten Grenzen mit den in verschiedenen grossen Beobachtungsreihen auftretenden verglich. Ist h das Mass der Präzision einer Beobachtungsreihe (eine Grösse, die aus dem mittleren, wahrscheinlichen oder durchschnittlichen Fehler leicht zu berechnen ist, siehe unten, Nr. 8), so müssen von n Fehlern (absolut genommen) zwischen den Grenzen 0 und Δ:

$$n \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\Delta} e^{-t^2}\, dt$$

liegen. Mit Hülfe von für diesen Ausdruck entworfenen Tafeln (siehe diese Nr. unten) kann die Vergleichung rasch erledigt werden.

Bei Zugrundelegung des Gauss'schen Fehlergesetzes ist die Wahrscheinlichkeit [s. auch I D 1, Nr. 12; I D 4a, Nr. 2] dafür, dass ein Fehler zwischen den Grenzen $-\Delta$ und $+\Delta$ liege, gegeben durch:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Delta}^{+\Delta} e^{-h^2 \varepsilon^2}\, d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\Delta h} e^{-t^2}\, dt.$$

Für die Funktion:

$$\int_T^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \Psi(T),$$

welche ausser in der Fehlertheorie auch in der mathematischen Physik (Refraktion, Wärmeleitung) häufig auftritt, ist der Name *Fehlerfunktion* (Error-Funktion nach *Glaisher*)[23a]) üblich geworden. Es ist:

$$\int_0^T e^{-t^2}\, dt + \int_T^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

---

23) Fundamenta Astronomiae, Regiom. 1818. Vgl. auch Astron. Nachr. 15 (1838), p. 369 = Ges. Abh. 2, p. 372.

23a) Phil. Mag. (4) 42 (1871), p. 294, 421, der Name p. 296.

Im folgenden sind einige Formeln, die zur direkten Berechnung dieser Funktionen dienen können, zusammengestellt:

$$\int_0^T e^{-t^2}\,dt = T - \frac{T^3}{3} + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{T^5}{5} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{T^7}{7} + \cdots,$$

$$\int_T^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{e^{-T^2}}{2T}\left(1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1\cdot 3}{(2T^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2T^2)^3} + \cdots\right),$$

$$\int_T^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{e^{-T^2}}{2T}\;\cfrac{1}{1+\cfrac{\frac{1}{2T^2}}{1+\cfrac{\frac{2}{2T^2}}{1+\cfrac{\frac{3}{2T^2}}{1+\cfrac{\frac{4}{2T^2}}{\ddots}}}}}$$

Bei Berechnung von Tafeln bedient man sich jedoch zweckmässiger der mechanischen Quadratur[24]) [II A 2, Nr. 50ff.; I D 3, Nr. 8] oder der Taylor'schen Entwickelung (nach *Kramp*) oder einiger anderer Kunstgriffe, die man in der Einleitung zu den gleich zu erwähnenden Radau'schen Tafeln nachsehen kann.

Die ersten Tafeln hat *Ch. Kramp*[25]) entworfen; er giebt von $T = 0$ bis $T = 3$ im Intervall von $0\cdot 01$ die Werte von $\int_T^\infty e^{-t^2}\,dt$, ihre Logarithmen und die Logarithmen von $e^{T^2}\int_T^\infty e^{-t^2}\,dt$. Diese letztere Tafel hat *Bessel*[26]) bis $T = 10$ ausgedehnt, indem er als Argument zuerst T, dann $\log T$ nimmt. *Glaisher*[23b]) erweiterte die Kramp'sche Tafel bis $T = 4\cdot 50$. *Encke*[27]) giebt, aus der Bessel'schen berechnet, eine Tafel für $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^T e^{-t^2}\,dt$, die dann später in viele Lehrbücher übergegangen ist[28]). *Oppolzer*[29]) giebt, neu berechnet, eine Tafel für

23b) Ebenda p. 436.

24) *Oppolzer,* Lehrbuch der Bahnbestimmung 2, Leipz. 1880, p. 36.

25) *Kramp,* Analyse des refractions astronomiques et terrestres, Strassb. & Leipz. 1798.

26) Fundamenta Astr., Regiom. 1818.

27) Berl. Jahrb. 1834 (Ges. Abh. 2, p. 60).

28) Z. B. *Czuber,* Theorie der Beobachtungsfehler; *Sawitsch,* Meth. der kl.

$\int\limits_0^T e^{-t^2}\,dt$ auf 10 Dezimalstellen. Die ausführlichsten Tafeln giebt *R. Radau* [30]); dieselben sind wie die Bessel'schen angelegt, schreiten aber in Intervallen von $0 \cdot 001$ fort [I D 1, Nr. **12**].

Es wird von einigen Schriftstellern vorgezogen, das Fehlergesetz als direkt durch die Erfahrung gegeben anzunehmen; dann kann die Ausgleichungsrechnung direkt hierauf basiert werden [31]). Man hat dann die Möglichkeit, auch andere Fehlergesetze als das Gauss'sche heranzuziehen. So betrachtet *Helmert* (a. a. O.) auch noch folgende Formen:

$$\varphi(\varepsilon) = \text{const.},$$

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}(1 - h^2\varepsilon^2).$$

H. Bruns [31a]) hat Reihenentwickelungen angegeben, die eine interpolatorische Aufstellung von Fehlergesetzen (Häufigkeitskurven) gestatten.

5. Begründung von Laplace. *Laplace* [32]) geht bei seiner Begründung eines Ausgleichungsverfahrens von ähnlichen Betrachtungen aus, wie sie dann später von *Gauss* in dessen zweiter Behandlung [Nr. **6**] der Vollendung entgegengeführt wurden. Er betrachtet jeden Fehler, absolut genommen, wie einen Verlust im Spiel [I D 1, Nr. **18**] und

---

Quadrate; *A. Meyer,* Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsch von *Czuber*, Leipz. 1879; *G. Th. Fechner,* Kollektivmasslehre, hrsg. von *G. F. Lipps,* Leipz. 1897.

29) *Oppolzer* a. a. O. p. 587.

30) Annales de l'Observatoire de Paris, Mém. 18, 1885; *A. Markoff,* „Table des valeurs de l'intégrale $\int\limits_x^\infty e^{-t^2}\,dt$“, St. Pétersb. 1888, giebt die Werte des Integrals auf 11 Dezimalen für alle Tausendstel des Argumentes von 0 bis 3 und für alle Hundertstel desselben von 3 bis 4,8; eine Ergänzungstafel giebt die Werte des Integrals $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$.

31) So verfährt *Helmert,* Ausgleichungsrechnung.

31a) Astron. Nachr. 143 (1897), p. 329 und Philos. Studien 14 (1898), p. 339. Man vgl. hierüber auch *Fechner,* Kollektivmasslehre, Leipz. 1897 und *W. Laska,* Astron. Nachr. 153 (1900), p. 37.

32) *Laplace,* Théorie des Prob., Livre II, Chap. IV; einen Kommentar zu diesen äusserst schwierigen Darlegungen hat *Poisson* geschrieben (Conn. des Temps 1827, deutsch im Anhang III der Schnuse'schen Übersetzung der Wahrsch.-R. von *Poisson*), ferner hat *Todhunter,* Hist. of the th. of Prob., p. 560 ff. Erläuterungen gegeben.

sucht jenen Wert der Unbekannten, für den der Gesamtverlust, d. h. die Summe der Produkte aller absolut genommenen Fehler in ihre Wahrscheinlichkeiten ein Minimum wird. Er zeigt, dass das Resultat für 1 und 2 Unbekannte dasselbe wird, wie bei der Methode der kleinsten Quadrate; er zeigt ferner, unter der Beschränkung, dass die Zahl der Bedingungsgleichungen sehr gross ist, dass von allen linearen Kombinationen, welche man mit den Gleichungen des Problems vornehmen kann, diejenige, welche der Methode der kleinsten Quadrate entspricht, ein Resultat liefert, welches die obengenannte Summe zu einem Minimum macht. — Die Laplace'sche Ausgleichungstheorie ist von *Poisson*, *Leslie Ellis*[33]) und *Glaisher*[34]) in wesentlichen Punkten ergänzt und verallgemeinert worden [I D 1, Nr. **13**; I D 4 a, Nr. **3**].

6. Zweite Begründung von Gauss. Bei der zweiten Begründung von *Gauss*[35]) tritt die nun einmal unvermeidliche Willkür in der Definition des besten Wertes der Unbekannten von Anfang an deutlich hervor. *Gauss* betrachtet die 3 Integrale

$$\int_{-\Delta}^{+\Delta} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon\, \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon,$$

in denen mit ε der Fehler, mit $\varphi(\varepsilon)$ seine „*relative Häufigkeit*" bebezeichnet ist. Das erste Integral giebt die Wahrscheinlichkeit, dass irgend ein Fehler zwischen den Grenzen $-\Delta$ und $+\Delta$ liegt; es wird, wenn die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ werden, welches die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ auch sei, den Wert 1 annehmen müssen. Das zweite Integral stellt das Mittel aller möglichen Fehler oder den mittleren Wert [I D 1, Nr. **11**; I D 4 a, Nr. **7**] der Grösse ε dar und ist immer gleich Null, sobald zwei gleiche, aber mit verschiedenen Vorzeichen versehene Fehler dieselbe Häufigkeit haben; ein von Null abweichender Wert würde anzeigen, dass die Beobachtungsreihe noch einen konstanten Fehler enthält. Das dritte Integral oder der mittlere Wert des Quadrates ε^2 „erscheint am geeignetsten, die Unsicherheit von Beobachtungen allgemein zu definieren und zu messen, sodass von zwei Beobachtungsreihen, die sich hinsichtlich der Häufigkeit der Fehler unterscheiden, diejenige für die genauere zu halten ist, für welche das Integral den kleineren Wert erhält". *Gauss* fährt nun fort: „Wenn nun jemand einwenden würde, diese Festsetzung sei ohne zwingende

---

33) *Ellis,* On the Method of least Squares, Cambr. Trans. 8, 1844.

34) *Glaisher,* On the law of facility of Errors of Obs. and on the Meth. of least Squares, Lond. Astr. Soc. Mem. 39^2 (1872), p. 75.

35) *Gauss,* Theoria comb. = Werke 4, art. 6.

Notwendigkeit willkürlich getroffen, so stimmen wir gerne zu. Enthält doch diese Frage der Natur der Sache nach etwas Unbestimmtes, welches nur durch ein in gewisser Hinsicht willkürliches Prinzip bestimmt begrenzt werden kann. Die Bestimmung einer Grösse durch eine einem grösseren oder kleineren Fehler unterworfene Beobachtung wird nicht unpassend mit einem Glücksspiel verglichen, in welchem man nur verlieren, aber nicht gewinnen kann, wobei also jeder zu befürchtende Fehler einem Verluste entspricht [I D 1, Nr. **18**]. Das Risiko eines solchen Spielers wird nach dem wahrscheinlichsten Verlust geschätzt, d. h. nach der Summe der Produkte der einzelnen möglichen Verluste in die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten. Welchem Verlust man aber jeden einzelnen Beobachtungsfehler gleichsetzen soll, ist keineswegs an sich klar; hängt doch vielmehr diese Bestimmung zum Teil von unserem Ermessen ab. Den Verlust dem Fehler selbst gleichzusetzen ist offenbar nicht erlaubt; würden nämlich positive Fehler wie Verluste behandelt, so müssten negative als Gewinne gelten. Die Grösse des Verlustes muss vielmehr durch eine solche Funktion des Fehlers ausgedrückt werden, die ihrer Natur nach immer positiv ist. Bei der unendlichen Mannigfaltigkeit derartiger Funktionen scheint die einfachste, welche diese Eigenschaft besitzt, vor den übrigen den Vorzug zu verdienen und diese ist unstreitig das Quadrat. Somit ergiebt sich das oben aufgestellte Prinzip.“ Das Laplace'sche Verfahren, welches den absolut genommenen Fehler selbst als Mass des Verlustes wählt, „widerstrebt in höherem Grade der analytischen Behandlung, während die Resultate, zu welchen unser Prinzip führt, sich sowohl durch Einfachheit als auch durch Allgemeinheit ganz besonders auszeichnen“ (*Gauss* a. a. O. art. 6).

Diese Gauss'sche Begründung, die wir am kürzesten mit seinen eigenen Worten wiedergegeben haben, ist vollkommen sachgemäss und führt, wie sich unten herausstellen wird, am schnellsten zum besten Resultat.

7. Weitere Begründungsmethoden. *Hansen*[36]) begründet die Ausgleichungsrechnung lediglich mit dem Satz vom arithmetischen Mittel ohne alle Betrachtungen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Henke*[37]) benützt hierzu, ebenfalls Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen ausschliessend, das Prinzip des „möglichst nahe Liegens“, von dem er durch einwandfreie Deduktion (a. a. O. art. 23—24) zum Hauptsatz der Methode der kleinsten Quadrate kommt. — Von Interesse für

36) *Hansen*, Von der Meth. der kl. Quadr., Leipz. Abh. 8, 1867.

37) Über die Meth. der kl. Quadr., Leipzig 1868 u. 1894.

die Begründung sind noch neben einigen philosophischen Schriften, auf die wir hier nicht eingehen, ein Aufsatz von *C. G. Reuschle*[38]) und die zwischen *A. Cauchy* und *J. Bienaymé* geführte Polemik[39]).

8. Mittlerer, durchschnittlicher und wahrscheinlicher Fehler, Gewicht. Um verschiedene Beobachtungsreihen bezüglich ihrer Genauigkeit mit einander vergleichen zu können, muss man ein *Mass der Genauigkeit* einführen; im Gauss'schen Fehlergesetz ist dies die oben [Nr. 4] mit h bezeichnete Grösse, welche dieser Genauigkeit direkt proportional ist und daher „*Mass der Präzision*" genannt wird. Man kann sich ein solches aber auch aus den Fehlern selbst verschaffen. Man hat dabei zu unterscheiden zwischen den wahren Beobachtungsfehlern (die in der Regel unbekannt sind) und den Abweichungen der Beobachtungen von den mit den besten Werten der Unbekannten gerechneten, den scheinbaren Fehlern (erreurs apparentes, residuals).

a) *Wahre Fehler*: ε, Anzahl n. Das Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^m \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon, \qquad m > 0,$$

in welchem alle Fehler mit ihrem absoluten Betrag einzusetzen sind, ist für jeden Wert von $m > 0$ ein Mass der Genauigkeit, in dem Sinne, dass eine Beobachtungsreihe um so genauer ist, je kleiner das Integral ist[40]). In praxi wird dieses Integral dadurch gebildet, dass man die absoluten Beträge aller n Fehler in die m^{te} Potenz erhebt und die Summe durch n dividiert, indem angenommen wird, dass jeder Fehler so oft vorkommt, als das Fehlergesetz $\varphi(\varepsilon)$ anzeigt. — Da jeder Wert von m denselben Dienst leistet, beschränkt man sich auf die einfachsten Fälle:

$$m = 1: \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon|\, \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + \cdots + |\varepsilon_n|}{n} = \vartheta$$
$$= \textit{durchschnittlicher Fehler},$$

$$m = 2: \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2}{n} = \mu^2$$
$$= \text{Quadrat des } \textit{mittleren Fehlers}.$$

---

38) *Reuschle,* Über die Deduktion der Meth. der kl. Quadr. aus der Wahrsch.-R., J. f. Math. 26 (1843), p. 333; 27 (1844), p. 182.

39) *Cauchy,* Par. C. R. 36 (1853), p. 1114; 37 (1853), p. 64, 100, 109, 150, 198, 206, 264, 272, 293, 334, 381; *Bienaymé* 37 (1853), p. 5, 68, 197, 206, 309.

40) *Gauss,* Theor. comb. art. 7; *Helmert,* Meth. der kl. Quadr. § 3.

Neben diesen beiden Massen wird zuweilen noch der sogenannte *wahrscheinliche Fehler* ϱ gebraucht[41]), obwohl zu wünschen wäre, dass man hiervon abkäme. Denkt man sich alle Fehler einer Reihe, absolut genommen, nach der Grösse geordnet, so ist der in der Mitte stehende der wahrscheinliche Fehler; es ist also ebenso wahrscheinlich, dass irgend ein Fehler grösser, wie dass er kleiner sei als der wahrscheinliche. Analytisch ist er demgemäss definiert durch:

$$\int_{-\varrho}^{+\varrho} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Er ist unter allen Umständen vom Fehlergesetz abhängig, während ϑ und μ auch ohne bestimmte Annahme eines solchen berechnet werden können.

Wird das Gauss'sche Fehlergesetz als bestehend angenommen, dann leitet man zwischen h, ϑ, μ, ϱ folgende Beziehungen ab:

$$\vartheta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{h} = \frac{0 \cdot 56419}{h},$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{h} = \frac{0 \cdot 70711}{h},$$

$$\varrho = \frac{0 \cdot 47694}{h},$$

und damit auch:

$$\mu = 1 \cdot 25331\, \vartheta,$$
$$\varrho = 0 \cdot 67449\, \mu.$$

In praxi wird ϱ stets aus μ berechnet. *Gauss*[42]) giebt eine Analyse, durch welche h direkt mittelst der Beobachtungsfehler ausgedrückt werden kann. Er findet für den wahrscheinlichsten Wert von h:

$$\sqrt{\frac{n}{2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2)}};$$

der wahrscheinlichste Wert des wahrscheinlichen Fehlers wird also:

$$\varrho = 0 \cdot 47694 \sqrt{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2}{n}}$$
$$= 0 \cdot 67449\, \mu,$$

in Übereinstimmung mit obigem Wert, wodurch dieser in neuer Beleuchtung erscheint. Der Wert von h und ϱ gilt für jedes n, gross

41) *Gauss*, Best. der Genauigk. der Beob. art. 2; doch macht *Bessel* schon vorher vom wahrsch. F. Gebrauch, Berl. astron Jahrb. für 1818, p. 233.

42) *Gauss*, Genauigkeit der Beob. art. 3

oder klein, man darf aber von dieser Bestimmung von h und ϱ um so weniger Genauigkeit erwarten, je kleiner n ist. *Gauss* findet[43]): Es ist 1 gegen 1 zu wetten, dass der wahre Wert von h zwischen:

$$h\left(1-\frac{0\cdot 47694}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{und} \quad h\left(1+\frac{0\cdot 47694}{\sqrt{n}}\right)$$

liege, und der wahre Wert von ϱ zwischen:

$$\varrho\left(1-\frac{0\cdot 47694}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{und} \quad \varrho\left(1+\frac{0\cdot 47694}{\sqrt{n}}\right).$$

Die Sache ist a. a. O. art. 5—6 noch von einem anderen Gesichtspunkt betrachtet, indem die Wahrscheinlichkeit bestimmt wird, mit der man erwarten kann, dass die Summe der m^{ten} Potenzen von n Beobachtungsfehlern zwischen gewisse Grenzen falle. Die Angabe der Formeln würde hier zu weitläufig sein. Die Aufgabe ist zum Teil schon von *Laplace* behandelt[44]); Ergänzungen der Theorie haben *Helmert*[45]) und *Jordan*[46]) gegeben. Das Resultat ist, dass die Benutzung der zweiten Potenzen der Fehler am vorteilhaftesten ist, dass jedoch auch die ersten Potenzen noch mit nahe demselben Recht benutzt werden können. Die Genauigkeit, mit der ϱ aus den Fehlern bestimmt werden kann, nimmt um so mehr ab, je grösser m angenommen wird. —

Um Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit mit einander verbinden zu können, führt man den Begriff des *Gewichtes* ein, dessen einfachste Definition ist: eine Beobachtung vom Gewichte p ist gleichwertig mit p Beobachtungen vom Gewichte 1. Kommen zwei Beobachtungen die Masse der Präzision h und h' und die Gewichte p und p' zu, so wird:

$$p : p' = h^2 : h'^2,$$

und daher auch:

$$p : p' = \frac{1}{\mu^2} : \frac{1}{\mu'^2},$$

und:

$$p : p' = \frac{1}{\varrho^2} : \frac{1}{\varrho'^2},$$

d. h. die Gewichte sind den Quadraten der Präzisionsmasszahlen direkt, und den Quadraten der mittleren (oder wahrscheinlichen) Fehler umgekehrt proportional.

b) *Scheinbare Fehler*: λ, Anzahl n. Wir führen folgende Be-

---

43) A. a. O. art. 4.

44) Calc. des Prob. 2, art. 19.

45) *Helmert,* Zeitschr. Math. Phys. 21 (1876), p. 192.

46) Astr. Nachr. 74 (1869), p. 209.

zeichnung ein, die in der Ausgleichungsrechnung allgemein üblich geworden ist:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = [aa],$$
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = [a],$$
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = [ab].$$

Man findet:

$$[\lambda\lambda] = [\varepsilon\varepsilon] - \frac{[\varepsilon]^2}{n},$$

und wenn man für die rechte Seite ihren Mittelwert setzt:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}}.$$

Diese Formel giebt den mittleren Fehler, berechnet aus den scheinbaren Fehlern. Strenge, wenn auch weitläufigere Ableitungen der berühmten Formel haben *Helmert*[47]) und *Czuber*[48]) gegeben.

Statt der Fehler selbst hat man auch die Differenzen zwischen den Beobachtungen zur Erfindung eines Genauigkeitsmasses herangezogen[49]).

Aufgaben der Ausgleichungsrechnung.

9. Wenn wir jetzt im folgenden einige Hauptformen der Ausgleichungsrechnung behandeln, beschränken wir uns lediglich auf den durch *Gauss* begründeten und jetzt allgemein acceptierten Algorithmus, und werden die mehr oder minder gelungenen Versuche, die im vorigen Jahrhundert zur Lösung hieher gehöriger, zumeist geodätischer Aufgaben gemacht wurden, bei Seite lassen.

Direkte Beobachtungen von gleicher Genauigkeit. Sind l_1, $l_2, \ldots, l_n$ die Beobachtungsergebnisse für eine Grösse, deren wahrer Wert X ist, und sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ die bei den einzelnen Beobachtungen vorgekommenen wahren Fehler, so bleiben sowohl X als die ε unbekannt. Man kann erst nach Feststellung eines Prinzips den Wert der Unbekannten angeben, den man für den besten halten will. Man nennt diesen Wert den *plausibelsten* und bezeichnet ihn mit x. Die Unterschiede der x von den einzelnen Messungen sind die *scheinbaren Beobachtungsfehler*: $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; man hat:

---

47) Astr. Nachr. 88 (1876), p. 113.

48) Monatsh. für Math. u. Phys. 1 (1890), p. 457.

49) *Jordan,* Astr. Nachr. 74 (1869), p. 209 und 79 (1872), p. 219; siehe auch *Helmert*, ebenda 88 (1876), p. 113 und *von Andrae*, ebenda 74 (1869), p. 283 u. 79 (1872), p. 257.

$$\begin{aligned} x &= l_1 + \lambda_1 \quad &\text{oder} \quad \lambda_1 &= x - l_1, \\ x &= l_2 + \lambda_2 & \lambda_2 &= x - l_2, \\ &\vdots & &\vdots \\ x &= l_n + \lambda_n & \lambda_n &= x - l_n. \end{aligned}$$

Man nennt $l_1 + \lambda_1, \ldots, l_n + \lambda_n$ die *ausgeglichenen* Beobachtungswerte und die letztangeschriebenen Gleichungen die *Fehlergleichungen*. Man kann nun auf folgende 3 verschiedene Arten schliessen:

a) Der plausibelste Wert ist das arithmetische Mittel:

$$x = \frac{l_1 + \cdots + l_n}{n} = \frac{[l]}{n}.$$

Giebt man zu, dass dieser zugleich der *wahrscheinlichste* ist, so folgt hieraus als Gesetz, dem die Fehler λ gehorchen müssen, das Gauss'sche Fehlergesetz und der Satz vom Minimum der Fehlerquadrate. Stellt sich heraus, dass die übrigbleibenden Fehler dem Gauss'schen Gesetz nicht folgen, so hat man auch nicht den wahrscheinlichsten Wert der Unbekannten, wohl aber, wie *Gauss* gezeigt hat (siehe unten, Nr. **11**), immer noch jenen Wert der Unbekannten, der den kleinsten mittleren Fehler (das grösste Gewicht) hat, sofern nur positive und negative Fehler gleicher Grösse gleich häufig vorkommen. Zeigt sich auch diese letzte Bedingung nicht erfüllt, so hat man im arithmetischen Mittel lediglich ein Rechnungsresultat, welches die Summe der Fehlerquadrate zu einem Minimum macht.

b) Das Gauss'sche Fehlergesetz ist aus der Erfahrung abstrahiert worden und wird als bestehend angenommen; der plausibelste Wert der Unbekannten ist dann das arithmetische Mittel; er ist zugleich der wahrscheinlichste Wert und die Ausgleichung ist ebenfalls nach dem Prinzip der kleinsten Fehlerquadratsummen erfolgt.

c) Man sieht von jedem Fehlergesetz ab; man sucht lediglich den Wert der Unbekannten, der den kleinsten mittleren Fehler derselben ergiebt; man kommt dann auf die Methode der kleinsten Quadrate und auf das arithmetische Mittel als den jene Bedingung erfüllenden Wert der Unbekannten.

Das arithmetische Mittel ist also der plausibelste Wert, solange man eines der genannten 3 Prinzipien annimmt. Die Fehler λ haben dann die Eigenschaft:

$$[\lambda] = 0,$$

die zur Kontrolle dient. Der mittlere Fehler einer Beobachtung wird:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}} \quad \text{(nach Nr. 8).}$$

Um den mittleren Fehler des Resultates zu erhalten, benutzt man folgenden allgemeinen Satz:

Der mittlere Fehler M der Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ wird, wenn die mittleren Fehler der direkt gemessenen Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ bezeichnet werden, gefunden aus:

$$M^2 = \alpha_1^2 \mu_1^2 + \alpha_2^2 \mu_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 \mu_n^2.$$

Dieser Satz lässt sich übrigens sofort auf beliebige Funktionen ausdehnen, sofern nur so gute Näherungswerte $l_1, l_2, \ldots, l_n$ der x bekannt sind, dass die Quadrate der Verbesserungen vernachlässigt werden können. Man hat, wenn:

$$x_1 = l_1 + \Delta_1, \quad x_2 = l_2 + \Delta_2, \ldots, x_n = l_n + \Delta_n$$

gesetzt wird,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(l_1, l_2, \ldots, l_n) + \left(\Delta_1 \frac{\partial f}{\partial l_1} + \Delta_2 \frac{\partial f}{\partial l_2} + \cdots + \Delta_n \frac{\partial f}{\partial l_n}\right),$$

und daher:

$$M^2 = \mu_1^2 \left(\frac{\partial f}{\partial l_1}\right)^2 + \mu_2^2 \left(\frac{\partial f}{\partial l_2}\right)^2 + \cdots + \mu_n^2 \left(\frac{\partial f}{\partial l_n}\right)^2.$$

Der mittlere Fehler des Resultates obiger Ausgleichungsaufgabe wird also:

$$M^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \cdots + \mu_n^2),$$

oder wenn die Messungen alle gleich genau, also $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_n = \mu$ sind:

$$M^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 n \mu^2,$$

oder:

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n(n-1)}}.$$

Wir stellen die Formeln jetzt zusammen:

Liegen für eine Grösse die direkten Messungen gleicher Genauigkeit $l_1, l_2, \ldots, l_n$ vor, so ist ihr

$$\text{plausibelster Wert: } l = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n};$$

die Fehler der einzelnen Beobachtungen sind:

$$\lambda_1 = l - l_1, \quad \lambda_2 = l - l_2, \ldots, \lambda_n = l - l_n,$$

der mittlere Fehler *einer* Messung ist:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n-1}},$$

der mittlere Fehler des Resultates ist:

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[\lambda\lambda]}{n(n-1)}}.$$

Man kann den mittleren Fehler *einer* Beobachtung auch aus den ersten Potenzen der Fehler ableiten; man erhält:

$$(\mu) = 1 \cdot 25331 \frac{|\lambda_1| + |\lambda_2| + \cdots + |\lambda_n|}{\sqrt{n(n-1)}},$$

$$M = \frac{(\mu)}{\sqrt{n}}.$$

Das ist die namentlich bei zahlreichen Beobachtungen sehr bequeme Formel von *Peters*[50]), für die *Helmert*[51]) eine eingehende Begründung und Diskussion ihrer Genauigkeit gegeben hat.

10. Direkte Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit. Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit werden am bequemsten durch Gewichte charakterisiert (Nr. 8). Kommen den Messungen:

$$l_1, l_2, \ldots, l_n$$

einer Grösse die Gewichte:

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

zu, so wird das plausibelste Resultat:

$$l = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{[pl]}{[p]}.$$

Das Gewicht dieses Resultates ist:

$$P = p_1 + p_2 + \cdots + p_n;$$

sein mittlerer Fehler:

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{P}},$$

wo μ der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist, der gefunden wird aus:

$$\mu = \sqrt{\frac{p_1\lambda_1^2 + p_2\lambda_2^2 + \cdots + p_n\lambda_n^2}{n-1}}$$

$$= 1 \cdot 25331 \frac{\sqrt{p_1}\,|\lambda_1| + \sqrt{p_2}\,|\lambda_2| + \cdots + \sqrt{p_n}\,|\lambda_n|}{\sqrt{n(n-1)}},$$

$$\lambda_1 = l - l_1,\ \lambda_2 = l - l_2,\ \ldots,\ \lambda_n = l - l_n.$$

Bei der Ableitung dieser Resultate ist folgender, auch allgemein geltende, häufig zur Anwendung kommende Satz benützt:

Wenn man die Gleichungen, die zur Ermittelung der Unbekannten dienen:

---

50) *C. A. F. Peters,* Astr. Nachr. 44 (1856), p. 29.

51) *Helmert,* Astr. Nachr. 85 (1875), p. 353, siehe auch 88 (1876), p. 113, und *J. Lüroth* 87 (1875), p. 209.

$$x = l_1,\; x = l_2, \ldots, x = l_n,$$

deren Gewichte

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

sind, mit den Quadratwurzeln aus ihren resp. Gewichten multipliziert, so werden sie alle von gleichem Gewichte 1 *und können wie Beobachtungen gleicher Genauigkeit behandelt werden.*

11. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen. Sind m Unbekannte durch Beobachtung bestimmt, aber der Art, dass sie nicht direkt, sondern in bekannten Verbindungen $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ beobachtet sind, so hat man das allgemeinste Ausgleichungsproblem zu lösen, auf das sich kompliziertere Fälle in der Regel zurückführen lassen, nämlich die Auflösung der Gleichungen:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= l_1, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= l_2, \\ \cdots\cdots & \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) &= l_n \end{aligned}$$

zu leisten; hierin sind $f_1, f_2, \ldots$ bekannte Funktionen, $l_1, l_2, \ldots, l_n$ die Beobachtungen. Eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung liegt nur vor, wenn $n > m$, d. h. wenn *überschüssige* Gleichungen vorhanden sind. Die Aufgabe ist in der gestellten Allgemeinheit nicht lösbar, sondern nur in folgenden speziellen Fällen:

a) Wenn sämtliche Gleichungen linear sind.

b) Wenn Näherungswerte der $x_1, \ldots, x_n$ bekannt sind, mittelst derer unter Anwendung des Taylor'schen Satzes die Gleichungen auf lineare Form gebracht werden können, wenn nötig durch mehrmalige Wiederholung des Prozesses. In praxi ist dies immer der Fall. Man muss und kann sich also auf die Betrachtung linearer Gleichungen beschränken, die man in der Regel in folgender Form schreibt:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots = l_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots = l_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_n x + b_n y + c_n z + \cdots = l_n \\ (n \text{ Gleichungen mit } m \text{ Unbekannten}). \end{array} \right.$$

Ein System der Unbekannten, welches diese Gleichungen streng erfüllt, giebt es nicht, da die $l_1, l_2, \ldots, l_n$ beobachtete Grössen sind und $n > m$ ist. Es kommt vielmehr darauf an, jenes System aus den unendlich vielen möglichen herauszufinden, welches als das beste anzusehen ist. Dabei kann man nach zwei Prinzipien verfahren (Nr. **1**).

a) Man sucht jenes System $X, Y, Z, \ldots$, für welches die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird; die Fehler sind:

$$(2)\qquad \begin{cases} \delta_1 = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + \cdots - l_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \delta_n = a_n X + b_n Y + c_n Z + \cdots - l_n; \end{cases}$$

man nennt dies die *Fehlergleichungen.*

Dieses System wird dann, wenn das Gauss'sche Fehlergesetz als geltend angenommen wird, zugleich das wahrscheinlichste (Methode der Theoria motus).

b) Man sucht jenes System $X, Y, Z, \ldots$, welches die kleinsten mittleren Fehler (grössten Gewichte) für die Unbekannten ergiebt. Die Definition des mittleren Fehlers ist unabhängig vom Fehlergesetz; es gilt also dasselbe von der Methode überhaupt, worin ihr wesentlicher Vorzug vor (a) besteht (Methode der Theor. comb.).

Beide Methoden führen, wie *Gauss* (Theor. comb.) nachgewiesen hat, zu demselben Resultat, nämlich dass das aus den Gleichungen:

$$(3)\qquad \begin{cases} [aa]x + [ab]y + [ac]z + \cdots = [al] \\ [ba]x + [bb]y + [bc]z + \cdots = [bl] \\ [ca]x + [cb]y + [cc]z + \cdots = [cl] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ m \text{ Gleichungen mit } m \text{ Unbekannten} \end{cases}$$

zu ermittelnde eindeutige System $x, y, z, \ldots$ unter allen linearen Kombinationen, die man mit (1) vornehmen kann, den ermittelten Unbekannten die grössten Gewichte verleiht. Man nennt (3) die *Normalgleichungen* des Problems.

Besitzen die Gleichungen (1) nicht gleiches Gewicht, d. h. müssen Beobachtungen verschiedener Genauigkeit kombiniert werden, so hat man unter Benutzung des in Nr. **10** angegebenen Satzes jede Gleichung (1) mit der Quadratwurzel aus ihrem Gewicht zu multiplizieren. Die Normalgleichungen werden dann, wenn mit $p_1, p_2, \ldots p_n$ die Gewichte bezeichnet werden:

$$(3\text{a})\qquad \begin{cases} [paa]x + [pab]y + [pac]z + \cdots = [pal] \\ [pba]x + [pbb]y + [pbc]z + \cdots = [pbl] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

Sonst ist jede Änderung an den Gleichungen (1) unstatthaft; rechts müssen die reinen Beobachtungsgrössen erhalten bleiben. Divisionen, etc. mit gemeinsamen Faktoren würden eine Gewichtsänderung hervorbringen.

Unbestimmte Auflösung der Normalgleichungen und Bestimmung der mittleren Fehler der Unbekannten. Betrachtet man an Stelle der Normalgleichungen (3) das verwandte System:

$$(4)\qquad \begin{aligned} [aa]A + [ab]B + [ac]C + \cdots &= P,\\ [ba]A + [bb]B + [bc]C + \cdots &= R,\\ [ca]A + [cb]B + [cc]C + \cdots &= S,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

so können $A, B, C, \ldots$ durch die unbestimmt angesetzten Grössen $P, R, S, \ldots$ ausgedrückt werden:

$$(5)\qquad \begin{aligned} A &= PQ_{11} + RQ_{12} + SQ_{13} + \cdots\\ B &= PQ_{21} + RQ_{22} + SQ_{23} + \cdots\\ C &= PQ_{31} + RQ_{32} + SQ_{33} + \cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

und die m^2 Koeffizienten Q_{ik} $(Q_{ik} = Q_{ki})$ gehen hervor aus der Auflösung der m Gleichungssysteme:

$$(6)\qquad \begin{aligned} [aa]Q_{11} + [ab]Q_{12} + [ac]Q_{13} + \cdots &= 1\\ [ba]Q_{11} + [bb]Q_{12} + [bc]Q_{13} + \cdots &= 0\\ [ca]Q_{11} + [cb]Q_{12} + [cc]Q_{13} + \cdots &= 0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \hline [aa]Q_{21} + [ab]Q_{22} + [ac]Q_{23} + \cdots &= 0\\ [ba]Q_{21} + [bb]Q_{22} + [bc]Q_{23} + \cdots &= 1\\ [ca]Q_{21} + [cb]Q_{22} + [cc]Q_{23} + \cdots &= 0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \hline [aa]Q_{31} + [ab]Q_{32} + [ac]Q_{33} + \cdots &= 0\\ [ba]Q_{31} + [bb]Q_{32} + [bc]Q_{33} + \cdots &= 0\\ [ca]Q_{31} + [cb]Q_{32} + [cc]Q_{33} + \cdots &= 1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \hline \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Setzt man

$$P = [al], \quad R = [bl], \quad S = [cl], \ldots,$$

so gehen $A, B, C, \ldots$ über in die Werte der Unbekannten $x, y, z, \ldots$:

$$(7)\qquad \begin{aligned} x &= [al]Q_{11} + [bl]Q_{12} + [cl]Q_{13} + \cdots\\ y &= [al]Q_{21} + [bl]Q_{22} + [cl]Q_{23} + \cdots\\ z &= [al]Q_{31} + [bl]Q_{32} + [cl]Q_{33} + \cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Daraus ergiebt sich folgende Regel: Um die Gleichungen (3) aufzulösen, ersetzt man die numerischen Werte $[al]$, $[bl]$, ... durch die unbestimmten Koeffizienten P, R, S, ..., während links für die $[ab]$ die numerischen Werte angesetzt sind. Das aus dieser Auflösung hervorgehende System von der Form (5) giebt einerseits die Unbekannten, sobald statt P, R, S, ... die numerischen Werte $[al]$, $[bl]$, ... gesetzt werden, andererseits das System der m^2 Grössen Q_{ik}, welche sofort zur Bestimmung der mittleren Fehler der Unbekannten dienen können. Stellt man nämlich die Unbekannten in der Form auf:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \cdots + \alpha_n l_n \\ y &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \cdots + \beta_n l_n \\ z &= \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \cdots + \gamma_n l_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

so sind die mittleren Fehler der Unbekannten:

$$(8) \qquad \mu_x = \mu\sqrt{[\alpha\alpha]}, \quad \mu_y = \mu\sqrt{[\beta\beta]}, \quad \mu_z = \mu\sqrt{[\gamma\gamma]}, \ldots,$$

wenn mit μ der mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewichte 1 bezeichnet wird; für diesen erhält man:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-m}}.$$

Die Fehler δ werden durch (2) ermittelt, indem man für X, Y, ... die gefundenen Werte der Unbekannten substituiert. Man weist nun nach, dass:

$$[\alpha\alpha] = Q_{11}, \; [\beta\beta] = Q_{22}, \ldots,$$

womit (8) berechenbar wird. Die Q_{11}, Q_{22}, ... sind also nichts anderes als die reciproken Werte der Gewichte der Unbekannten. Zur Kontrolle der Rechnung dient:

$$(9) \qquad [\delta\alpha] = [\delta\beta] = \cdots = 0.$$

Der Gauss'sche Algorithmus zur Auflösung der Normalgleichungen.

Die eben gegebene Methode ist nur bequem, wenn die Koeffizienten in den Normalgleichungen runde Zahlen und viele derselben Null sind. Im allgemeinen schlägt man das Verfahren der *successiven Elimination* nach *Gauss* ein, welches im folgenden besteht: man drückt aus der ersten Gleichung x durch $y, z, \ldots$ aus und substituiert diesen Wert in die folgenden Gleichungen, dann entsteht ein System, welches alle Eigenschaften des vorigen, aber eine Unbekannte weniger hat. Wird derselbe Prozess weiter verfolgt, so hat man zuletzt m Systeme von Gleichungen, deren jedes bez. aus m, $m-1, \ldots 1$ Gleichungen besteht. Die ersten Gleichungen derselben werden in der Gauss'schen Bezeichnungsweise (4 Unbekannte angenommen):

$$
(10) \qquad
\begin{aligned}
[aa]x + [ab]y + [ac]z \quad + [ad]t \quad &= [al] \\
[bb\cdot 1]y + [bc\cdot 1]z + [bd\cdot 1]t &= [bl\cdot 1] \\
[cc\cdot 2]z + [cd\cdot 2]t &= [cl\cdot 2] \\
[dd\cdot 3]t &= [dl\cdot 3]
\end{aligned}
$$

und heissen *Eliminationsgleichungen*; sie ergeben von der letzten ausgehend die Unbekannten durch successive Elimination. Man weist nach:

$$\frac{1}{[dd\cdot 3]} = Q_{44},$$

also nach dem obigen: *In der letzten Eliminationsgleichung ist der Koeffizient der Unbekannten ihr Gewicht.*

Daraus ergiebt sich eine oft eingeschlagene Methode der Gewichtsbestimmung: Man löst die Normalgleichungen so oft auf, als die Zahl der Unbekannten beträgt, indem man immer eine andere Unbekannte an den Schluss stellt. Eine andere Methode der Gewichtsbestimmung besteht darin, dass man aus den Gleichungen (6), die daher auch *Gewichtsgleichungen* heissen, die Unbekannten Q_{11}, Q_{22}, $Q_{33}, \ldots$ ermittelt, indem man jene ebenso behandelt wie die Normalgleichungen selbst.

Der ganze, so ungemein häufig zur Anwendung kommende Rechenschematismus kann hier nicht reproduziert werden. In *Helmert*, Meth. der kl. Quadr. § 17 und besonders ausführlich in *Oppolzer*, Lehrbuch der Bahnbest. 2, Leipz. 1880, p. 329 (siehe besonders die Vorschrift auf S. 340 für die Anlage der Rechnung) sind die Formeln vollständig zusammengestellt. Man sehe auch die Ableitung und Zusammenstellung von *Encke*, Berl. Astr. Jahrb. 1835 = Ges. Abh. 2, p. 84. —

Als ständige Kontrolle führt man bei der Rechnung die Summengleichung mit, nämlich:

$$
\begin{gathered}
s_1 = a_1 + b_1 + c_1 + \cdots \\
s_2 = a_2 + b_2 + c_2 + \cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[sa]x + [sb]y + \cdots = [sl].
\end{gathered}
$$

Wird diese Summengleichung denselben Operationen unterworfen wie die Normalgleichungen selbst, so hat man in den Koeffizienten der entsprechenden Gleichungen stets die Summen der zugehörigen aus den Normalgleichungen fliessenden Gleichungen. Auch schon zur Kontrolle der Bildung der Normalgleichungen aus den ursprünglichen Gleichungen dient diese Summengleichung, denn man hat:

$$
\begin{gathered}
[sa] = [aa] + [ba] + \cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}
$$

Eine andere mehr summarische Kontrolle wird durch die Formel geboten:

$$[\delta\delta] = [ll] - x[la] - y[lb] - \cdots;$$

auch die Anwendung der Gleichungen:

$$[\delta a] = [\delta b] = \cdots = [\delta s] = 0$$

ist oft nützlich. —

Für 3 Unbekannte hat *C. G. J. Jacobi* ein symmetrisches Verfahren, diese und ihre Gewichte zu bestimmen, angegeben, welches von *Bessel* (Astr. Nachr. 17, 1840, p. 305 = Ges. Abh. 2, p. 401) mitgeteilt und von *H. Seeliger* (Astr. Nachr. 82, 1873, p. 249) bewiesen wurde.

Die praktisch belanglose, jedoch theoretisch wichtige Darstellung der Unbekannten und ihrer Gewichte durch *Determinanten* wurde von *Glaisher* [52]) und *P. van Geer* [53]) ausgebildet, nachdem *Jacobi* (J. f. Math. 22, 1841, p. 285 = Werke 3, p. 355) die Grundlagen geschaffen hatte [I A 2, Nr. **15** ff.]. Folgender Satz möge daraus angeführt werden:

Wenn man aus den n Gleichungen (1) alle möglichen (k) Kombinationen zu je m Gleichungen bildet und aus allen diesen Systemen die Werte der m Unbekannten $x, y, z, \ldots$ bestimmt, so kann man die k Wertsysteme $x, y, z, \ldots$ als die Koordinaten von k Punkten im Raume von m Dimensionen auffassen; wird jeder Punkt mit einer Masse belegt, welche gleich ist dem Quadrat der entsprechenden, gemeinsamen Nennerdeterminante des Systems, so giebt der Schwerpunkt dieser k Punkte dasjenige System $x, y, z, \ldots$ welches die Methode der kleinsten Quadrate durch die Auflösung eines einzigen Systemes liefert.

Ist die Anzahl der Unbekannten sehr gross, dann leistet sehr häufig ein indirektes (Näherungs-) Verfahren zur Ermittelung der Unbekannten grosse Dienste. Dieses Verfahren ist von *C. G. J. Jacobi* [54]) angegeben, von *L. Seidel* [54]) ausgearbeitet worden. Es beruht auf dem Umstand, dass in vielen Fällen der Praxis der quadratische Koeffizient einer Unbekannten die anderen Koeffizienten derselben Gleichung weit

---

52) *Glaisher,* Lond. R. Astr. Soc. Monthly Not. 34 (1874), p. 311; 40 (1880), p. 600; 41 (1880), p. 181.

53) *van Geer*, Nieuwe archief voor wiskunde 12 (1885), p. 60; 18, 1891.

54) *Jacobi*, Astr. Nachr. 22 (1845), p. 297 = Werke 3, p. 467; *Seidel,* Münch. Abh. 11, 1874. *R. Mehmke* vereinfacht das Verfahren, indem er die Gleichungen in Gruppen von 2 bis 3 zusammenfasst und die Summen der absoluten Werte (statt der Quadrate) der Widersprüche zu Grunde legt, Mosk. Math. Samml. 1892; ebenda untersuchen *Mehmke* und *P. A. Necrassoff* die Konvergenz des Verfahrens.

überwiegt, sodass aus dieser Gleichung allein ein guter Näherungswert der betreffenden Unbekannten abgeleitet werden kann.

Häufig tritt, namentlich in der geodätischen Praxis, der Fall auf, dass man über die Gewichte der einzelnen Gleichungen frei verfügen kann, d. h. dass man jeder Gleichung durch entsprechende Häufung der Beobachtungen ein bestimmtes Gewicht verschaffen kann. Es entsteht dann die wichtige Aufgabe: durch welche Gewichtsverteilung, d. h. durch welche Arbeitsverteilung werden die günstigsten Resultate für alle oder für bestimmte Unbekannte aus einem System von Bedingungsgleichungen erhalten, wenn die Gesamtarbeit vorgeschrieben ist? Diese Aufgabe hat *H. Bruns* gelöst (Leipz. Abh. 13, 1886, p. 517).

12. Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen. Hat man eine Anzahl von bekannten Funktionen mehrerer Variabeln beobachtet und bestehen zwischen den *wahren* Werten der Unbekannten Bedingungsgleichungen, die auch von den ausgeglichenen Werten der Unbekannten strenge erfüllt sein müssen, so spricht man von *vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen.* Das allgemeine Problem, dessen Lösung zu leisten ist, stellt sich so: Es sind die n Gleichungen mit m Unbekannten ($n > m$):

$$\text{(a)}\qquad \begin{array}{ll} a_1 x + b_1 y + \cdots = l_1 & \text{Gewichte } g_1 \\ a_2 x + b_2 y + \cdots = l_2 & g_2 \\ \cdots\cdots\cdots & \vdots \\ a_n x + b_n y + \cdots = l_n & g_n \end{array}$$

nach der Methode der kleinsten Quadrate aufzulösen, so zwar, dass die ausgeglichenen Werte der Unbekannten folgenden r Gleichungen strenge genügen:

$$\text{(b)}\qquad \begin{array}{l} p_0 + p_1 x + p_2 y + \cdots = 0, \\ q_0 + q_1 x + q_2 y + \cdots = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung liegt nur vor, wenn $r < m$ und $n > m - r$ ist.

Man hat, um den Bedürfnissen der Praxis, namentlich der Geodäsie, wo diese Aufgaben am häufigsten auftreten, entgegen zu kommen, das allgemeine Problem in mehrere Unterfälle zerlegt, deren jeder eine besonders bequeme Behandlung gestattet. Betreffs dieser Lösungen muss auf die Originalabhandlungen und geodätischen Handbücher[55]) verwiesen werden.

55) *Hansen,* Geod. Unters., Leipz. Abh. 9, 1868; *Helmert*, Meth. der kl. Quadr., 4. Abschn.; *Gerling,* Ausgleichungsrechnung; *Jordan,* Vermessungskunde 1 u. s. f.

Eine *erste* allgemeine Methode besteht darin, dass man mit Hülfe der Bedingungsgleichungen r Unbekannte aus den vermittelnden Gleichungen eliminiert. Diese enthalten dann $m - r$ Unbekannte und werden nach dem vorigen Verfahren für vermittelnde Beobachtungen ausgeglichen. Dieses Verfahren ist in Bezug auf die Unbekannten unsymmetrisch und wird nur selten benutzt.

Ein *zweites*, direktes Verfahren beruht auf der Bestimmung eines Minimums mit Nebenbedingungen [I A 2, Nr. **16** ff.]. Sind $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ die Fehler der Beobachtungen $l_1, l_2, \ldots, l_n$, so muss:

$$[\delta\delta g] - 2k_1(p_0 + p_1 x + p_2 y + \cdots) - 2k_2(q_0 + q_1 x + q_2 y + \cdots) - \cdots$$

ein Minimum werden, wofür die Bedingungen durch Differenziation dieses Ausdruckes nach $x, y, z, \ldots$ aufgestellt werden. Noch einfacher ist es, wenn man den Fehlergleichungen von (a):

$$\begin{array}{llr} \delta_1 = a_1 x + b_1 y + \cdots - l_1 & \text{Gewichte} & g_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \vdots \\ \delta_n = a_n x + b_n y + \cdots - l_n & & g_n \end{array}$$

die Gleichungen (b) in der Form von Fehlergleichungen:

$$\begin{array}{llr} \delta_{n+1} = p_1 x + p_2 y + \cdots + p_0 & \text{Gewichte} & g_{n+1}, \\ \delta_{n+2} = q_1 x + q_2 y + \cdots + q_0 & \text{,,} & g_{n+2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \end{array}$$

hinzufügt und das ganze System nach dem Verfahren für vermittelnde Beobachtungen behandelt, wobei nur schliesslich $\delta_{n+1} = \delta_{n+2} = \cdots = 0$ zu setzen ist. Die

$$\begin{array}{l} g_{n+1}\delta_{n+1} = k_1, \\ g_{n+2}\delta_{n+2} = k_2, \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

werden dadurch nicht Null, da $g_{n+1}, g_{n+2}, \ldots$ unendlich gross sind. Die Normalgleichungen werden dann:

$$\begin{array}{l} [aag]x + [abg]y + \cdots + p_1 k_1 + q_1 k_2 + \cdots = [alg], \\ [bag]x + [bbg]y + \cdots + p_2 k_1 + q_2 k_2 + \cdots = [blg], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

denen man hinzufügt:

$$\begin{array}{llllll} p_1 x & + p_2 y & + \cdots & \cdot & \cdot & = -p_0, \\ q_1 x & + q_2 y & + \cdots & \cdot & \cdot & = -q_0, \\ \cdots & & & & & \end{array}$$

sodass man jetzt $m + r$ Gleichungen mit den $m + r$ Unbekannten $x, y, \ldots k_1, k_2, \ldots$ hat. Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit wird:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\delta\delta g]}{n-m+r}},$$

und die mittleren Fehler der Unbekannten:

$$\mu_x = \mu\sqrt{Q_{11}}, \dots$$

13. Ausgleichung bedingter Beobachtungen. Dieser Fall kommt in der Praxis besonders häufig vor und soll daher besprochen werden, obwohl er ein Spezialfall des vorigen ist. Sind $l_1, l_2, \dots l_n$ Beobachtungen verschiedener Grössen, zwischen deren wahren Werten $l_1+\Delta_1$, $l_2+\Delta_2, \dots, l_n+\Delta_n$ die r Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} p_0 + p_1(l_1+\Delta_1) + \cdots + p_n(l_n+\Delta_n) = 0 \\ q_0 + q_1(l_1+\Delta_1) + \cdots + q_n(l_n+\Delta_n) = 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{array}\right\} r \text{ Gleichungen}$$

bestehen, so können, wenn $r<n$ — und nur dann liegt eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung vor — zwar nicht die Δ selbst bestimmt werden, wohl aber die plausibelsten Verbesserungen $\delta_1, \dots, \delta_n$, welche den Bedingungen:

$$\begin{array}{l} p_0 + p_1(l_1+\delta_1) + \cdots + p_n(l_n+\delta_n) = 0, \\ q_0 + q_1(l_1+\delta_1) + \cdots + q_n(l_n+\delta_n) = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{array}$$

und zugleich der Bedingung der kleinsten Fehlerquadratsumme:

$$[\delta\delta] = \text{Minimum}$$

genügen. — Wir schreiben, indem wir setzen:

$$\begin{array}{l} p_0 + p_1 l_1 + \cdots + p_n l_n = w_1, \\ q_0 + q_1 l_1 + \cdots + q_n l_n = w_2, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{array}$$

die Bedingungsgleichungen so:

$$\text{(a)}\qquad \left.\begin{array}{l} p_1\delta_1 + \cdots + p_n\delta_n + w_1 = 0 \\ q_1\delta_1 + \cdots + q_n\delta_n + w_2 = 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{array}\right\} r \text{ Gleichungen.}$$

Eine *erste* Methode, die vorliegende Aufgabe zu lösen, besteht in deren Zurückführung auf vermittelnde Beobachtungen. Man greift beliebige $n-r$ von den δ heraus und nennt sie $x, y, z, \dots$; die übrigen r der δ können vermöge Elimination durch $x, y, z, \dots$ dargestellt werden. Folgende n Gleichungen mit $n-r$ Unbekannten:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_\lambda = x \\ \delta_\mu = y \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{array}\right\} n-r \text{ Gleichungen,}$$

$$\left.\begin{array}{l} \delta_\sigma = u_1 + a_1 x + b_1 y + \cdots \\ \delta_\tau = u_2 + a_2 x + b_2 y + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} r \text{ Gleichungen}$$

sind dann die Fehlergleichungen in der Form, wie wir sie bei den vermittelnden Beobachtungen voraussetzten und können nach der bekannten Methode behandelt werden.

Eine *zweite*, direkte und symmetrische Lösung beruht wieder wie vorhin auf der Bestimmung eines Minimums mit Nebenbedingungen. Die Differenziation des Ausdruckes:

$$[\delta\delta g] - 2k_1(w_1 + p_1\delta_1 + p_2\delta_2 + \cdots + p_n\delta_n) \\ - 2k_2(w_2 + q_1\delta_1 + q_2\delta_2 + \cdots + q_n\delta_n) - \cdots$$

nach den δ ergiebt die n Gleichungen mit den r Multiplikatoren k:

$$\text{(b)} \qquad \begin{array}{l} \delta_1 g_1 = k_1 p_1 + k_2 q_1 + k_3 r_1 + \cdots \\ \delta_2 g_2 = k_1 p_2 + k_2 q_2 + k_3 r_2 + \cdots \\ \delta_3 g_3 = k_1 p_3 + k_2 q_3 + k_3 r_3 + \cdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

welche nach *Gauss* (Theor. comb. suppl. § 11 = Werke 4, p. 68) die *Korrelatengleichungen* genannt werden (die k selbst heissen die *Korrelaten*). Die Substitution der δ aus (b) in die Gleichungen (a) liefert die r Normalgleichungen:

$$\text{(c)} \qquad \begin{array}{l} \left[\frac{pp}{g}\right] k_1 + \left[\frac{pq}{g}\right] k_2 + \left[\frac{pr}{g}\right] k_3 + \cdots + w_1 = 0, \\ \left[\frac{qp}{g}\right] k_1 + \left[\frac{qq}{g}\right] k_2 + \left[\frac{qr}{g}\right] k_3 + \cdots + w_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

die zur Ermittelung der r Korrelaten k dienen. Die Gleichungen (b) geben dann schliesslich die plausibelsten Werte der δ. — Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit wird:

$$\mu = \sqrt{\frac{[\delta\delta g]}{r}}.$$

Als Kontrolle dient die Gleichung:

$$[\delta\delta g] = -[kw].$$

14. Fehler in der Ebene und im Raume. Die bisher betrachteten Fehler können als *lineare* bezeichnet werden. Handelt es sich aber um die Bestimmung eines Punktes in der Ebene und im Raume, so tritt zu dem linearen Fehlerbetrag auch noch die Richtung, in der er liegt. An Stelle der *Kurve der Wahrscheinlichkeit* tritt die *Wahrscheinlichkeitsfläche* bez. der *Wahrscheinlichkeitskörper.*

A. Bravais [56]) und von allgemeineren Voraussetzungen ausgehend *J. Bienaymé* [57]) haben nachgewiesen, dass die Punkte gleicher Wahrscheinlichkeit auf ähnlichen, konzentrischen und ähnlich liegenden Ellipsen bez. Ellipsoiden [III C 1, 4] mit dem beobachteten Punkt als gemeinsamen Mittelpunkt liegen.

Die vollständige Theorie der Beobachtungsfehler in der Ebene und im Raume rührt von *Ch. M. Schols* [58]) her. Er weist den Zusammenhang zwischen den mittleren Fehlerquadraten und den Trägheitsmomenten nach und führt die Hauptaxen der Wahrscheinlichkeit ein, die unabhängig sind vom Fehlergesetz. Mit Benutzung des schon von *Roger Cotes* [58a]) ausgesprochenen Satzes, der dem Satz vom arithmetischen Mittel entspricht, nämlich, dass die wahrscheinlichste Lage eines Punktes, der durch eine Anzahl von Punkten im Raume durch Beobachtung bestimmt wurde, der Schwerpunkt dieser letzteren sei, begründet er das Gesetz der Fehler im Raume:

$$\Phi = \frac{e^{-\left(\frac{x^2}{2K_x} + \frac{y^2}{2K_y} + \frac{z^2}{2K_z}\right)}}{\sqrt{2K_x\pi}\,\sqrt{2K_y\pi}\,\sqrt{2K_z\pi}},$$

und führt die Begriffe der *Fehlerellipse* und des *Fehlerellipsoides* ein. Eine gedrängte Darstellung aller Resultate ist unmöglich; es muss auf die citierten Abhandlungen und auf die zusammenfassende Darstellung von *Czuber,* Beobachtungsfehler, Teil III verwiesen werden.

Die auf dieser Theorie beruhenden, hauptsächlich in der Geodäsie verwandten Ausgleichungsmethoden sind in den geodätischen Handbüchern [59]) nachzusehen.

15. Fehler der Ausgleichung. Ausschluss von Beobachtungen. Systematisches Verhalten der Fehler. Das Gelingen einer Ausgleichung wird nach den übrig bleibenden Fehlern beurteilt. Man kann nach Nr. 4 prüfen, ob das Gauss'sche Fehlergesetz besteht und darnach entscheiden, ob dem Resultat der Charakter des wahrschein-

---

56) *Bravais,* Analyse math. sur les prob. etc., Par. Mém. 9 (1846), p. 255.

57) *Bienaymé,* Sur la prob. des erreurs, Journ. de math. (1) 17 (1852), p. 33; s. im Anschluss hieran die Behandlung der Fehlerellipse bei *E. Czuber,* Wien. Ber. 82² (1880), p. 698.

58) *Schols,* Théorie des erreurs dans le plan et dans l'espace, Delft Ann. 2 (1886), p. 123.

58a) *Cotes,* Aestimatio errorum in mixta mathesi, Cantabrig. 1722.

59) Siehe u. a. *Helmert,* Ausgleichungsrechnung § 28.

lichsten Wertes oder des grössten Gewichtes zukommt oder ob es reines Rechnungsresultat ist (Nr. 9). Bei kleineren Beobachtungsreihen genügt es in der Regel nachzusehen, ob die Anzahl der positiven Fehler gleich der Anzahl der negativen Fehler ist, ob die Summe der Quadrate der positiven Fehler gleich der Summe der Quadrate der negativen Fehler ist und ob die Summe der positiven Fehler gleich der Summe der negativen Fehler ist. Will man das Bestehen des Gauss'schen Fehlergesetzes genauer prüfen, so wird folgende dem Lehrbuche von *Helmert* entnommene Tabelle von Nutzen sein. μ = mittlerer Fehler. Von 1000 Fehlern liegen zwischen den Grenzen:

$\mp 0{\cdot}1\ \mu$ · · ·	80 Fehler	$\mp 0{\cdot}8\ \mu$ · · ·	576 Fehler
0·2	159	0·9	632
0·3	236	1·0	683
0·4	311	1·5	866
0·5	383	2·0	954
0·6	451	2·5	988
0·7	516	3·0	997

Der mutmassliche grösste Fehler M, der vorkommen darf, wird durch die Gleichung charakterisiert:

$$n\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{M}{\mu\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = 1, \qquad (n = \text{Anzahl der Beobachtungen}),$$

mit der folgende dem Buche von *Czuber* entnommene Tabelle berechnet ist:

n	$\frac{M}{\mu}$	n	$\frac{M}{\mu}$
20 · · ·	1·95	1000 · ·	3·39
40 · · ·	2·24	5000 · ·	3·72
60 · · ·	2·39	10000 · · ·	3·89
80 · · ·	2·49	100000 · · ·	4·41
100 · · ·	2·58	1000000 · · ·	4·88
500 · · ·	3·09		

Ausscheidung von widersprechenden Beobachtungen[60]). Man hat Kriterien aufzustellen versucht, mittelst derer widersprechende Beobachtungen ausgeschieden werden können; dass hiedurch das Resultat verbessert wird, hat *Bertrand*[61]) bestätigt. Über das *Benj. Peirce*'sche

60) Siehe hierüber die zusammenhängende Darstellung von *Czuber* a. a. O. § 11.

61) *Bertrand,* Calcul des Prob., Par. 1889, art. 166.

Kriterium sehe man *Peirce,* Astr. Journ. 2, 1852 und *W. Chauvenet,* Spher. Astr. 2 (Tafeln hierzu von *B. A. Gould*, Astr. Journ. 4, 1856 und *Chauvenet* a. a. O.); über das *Stone'*sche sehe man Lond. R. Astr. Soc. Monthly Not. 28, 1868. Keines derselben ist von willkürlichen Annahmen frei, sodass die Ansicht der Mehrzahl der Beobachter dahin geht, dass überhaupt keine Beobachtung ausgeschlossen werden dürfe, bei der nicht schon bei der Beobachtung Zweifel aufgestiegen seien.

Werden die Fehler nach bestimmten Gesichtspunkten geordnet, so gestattet schon die Abzählung der Zeichenwechsel Aufschlüsse über das Vorhandensein *systematischer Fehlerquellen. H. Seeliger*[62]) hat hierüber mehrere Kriterien aufgestellt, die vom Fehlergesetz unabhängig sind. *E. Abbe*[63]) kommt zu folgendem Resultat: Wird die Gültigkeit des Gauss'schen Fehlergesetzes angenommen und sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die nach einem bestimmten Gesichtspunkte geordneten Fehler einer Ausgleichung, so muss:

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_4 + \cdots + \lambda_n\lambda_1$$

mit wachsendem n gegen Null konvergieren.

Wie zweckmässig in Fällen verfahren werden kann, in denen das Gauss'sche Fehlergesetz sicher nicht erfüllt ist, wo z. B. grosse Fehler in viel grösserer Anzahl auftreten, als dieses Gesetz gestattet, hat *Newcomb*[64]) gezeigt. Über abnorme Fehler-Verteilung und Verwerfung zweifelhafter Beobachtungen handelt auch *R. Lehmann-Filhés*[65]).

---

62) *Seeliger,* Astr. Nachr. 96 (1879), p. 49 u. 97 (1880), p. 289, sowie Münch. Ber. 29 (1899), p. 3.

63) *Abbe,* Über die Gesetzmässigkeit in der Verteilung der Fehler bei Beobachtungsreihen, Jena 1865.

64) *S. Newcomb,* A Generalized Theory of the combination of Observations so as to obtain the best Resultat, Amer. J. of math. 8 (1886), p. 343.

65) *Lehmann-Filhés,* Astr. Nachr. 117 (1887), p. 121.

I D 3. INTERPOLATION

VON

JULIUS BAUSCHINGER

IN BERLIN.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

J. L. Lagrange, Sur les Interpolations [lu 1778] = Oeuvres 7, p. 535, deutsch v. *Schulze* im Berl. astr. Jahrb. für **1783**; Sur une méth. part. d'approxim. et d'interpolation, Berlin N. Mém. **14**, année 1783 [85], p. 279 = Oeuvres 5, p. 517; Mém. sur la méth. d'interpolation, Berlin N. Mém. **21**, années 1792/93 [95], p. 271 = Oeuvres 5, p. 663.

C. F. Gauss, Theoria interpolationis methodo nova tractata, Werke 3 (Nachlass), p. 265.

J. F. Encke, Über Interpolation (nach einer *Gauss*'schen Vorlesung von 1812), Berl. astr. Jahrb. 1830 = Ges. Abh. **1**, p. 1.

P. Tschebyscheff, Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données fournies par l'obs., St. Pétersbourg Mém. (7) **1**, 1859, n° 5.

W. S. B. Woolhouse, On interpolation, London 1865.

C. W. Merrifield, Report on the present State of Knowledge on the application of quadr. and interp. to actual data, Brit. Ass. 1880.

R. Radau, Études sur les formules d'interpolation, Paris 1891. Fast erschöpfende Darstellung aller einschlägigen Arbeiten, die mir bei Abfassung des Artikels von grossem Nutzen gewesen ist.

A. A. Markoff, Differenzenrechnung, St. Petersb. 1891 (russisch). Deutsch von Th. Friesendorff und E. Prümm. Leipzig 1896.

Darstellungen der Interpolationsrechnung finden sich in jedem astronomischen und mathematischen Handbuch; Tafeln zur Erleichterung der Interpolation in fast jeder mathematischen Tafelsammlung (*Vega, Barlow, Albrecht, Peters*).

---

1. Definition einer Interpolationsformel*). Verschiedene Arten derselben. Ist von einer Funktion (die an der in Betracht kommenden Stelle als stetig vorausgesetzt wird) der analytische Ausdruck entweder unbekannt oder wird er als zu kompliziert für unbekannt angenommen, so ist es gleichwohl möglich, Näherungswerte derselben für beliebige Werte des Argumentes innerhalb gewisser Grenzen anzugeben, wenn für bestimmte Werte des Argumentes, sei es durch Beobachtung oder durch direkte Benutzung des analytischen Ausdruckes die numerischen Beträge der Funktion vorliegen. Das hierzu ausgebildete Verfahren, vorhandene Zahlenreihen durch *Einschalten* neuer Werte mittelst eines raschen Prozesses zu ergänzen, heisst *Interpolieren* [1]); dasselbe besteht in der Regel in der *Ersetzung* der ursprünglichen Funktion durch eine bequemer zu berechnende neue Funktion, welche aus den bekannten numerischen Werten gebildet wird und welche sich diesen möglichst enge anschmiegt; diese Funktion heisst *Interpolationsformel.* Es hängt von der Natur der ursprünglichen Funktion beziehungsweise von dem Verlauf der vorliegenden Zahlenreihe ab, welche Form man der Interpolationsformel zu geben hat; man kann eine ganze rationale Funktion nehmen (parabolische Interpolation [Nr. **3**]) oder eine gebrochene rationale Funktion (nach *A. Cauchy* [Nr. **3**]) oder eine Exponentialfunktion (nach *R. Prony* [Nr. **12**]) oder eine periodische nach den sin und cos der Vielfachen des Argumentes fortschreitende Funktion (nach *Lagrange*, *Gauss*, *U. J. Leverrier* [Nr. **10**]) oder eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe (nach *A. M. Legendre*, *F. Neumann* [Nr. **13**]) oder end-

---

*) Durch eine Interpolationsformel kann man auch „ausgleichen", wenn die vorgelegten Werte eine „Ausgleichung" (frz. ajustement, engl. adjustement, graduation) gestatten, d. h. wenn sie nicht streng, sondern beobachtet sind. Cf. I B 1 a, Nr. **3**; I D 4 b, Nr. **5**, **6**, sowie die entsprechende Bemerkung zu I D 2, Nr. **1**.

1) Das Wort wird zuerst von *J. Wallis* gebraucht: Arithmetica Infinitorum Oxon. 1655.

lich man kann einen völlig allgemeinen Ansatz machen in Gestalt einer beliebig weit fortzusetzenden und beliebig zusammengesetzten Reihe (nach *Cauchy* [Nr. **11**] und *P. Tschebyscheff* [Nr. **14**]). Dient die Interpolationsformel zur Darstellung einer Beobachtungsreihe, so müssen ihre Koeffizienten nach den Prinzipien einer Fehlertheorie [I D 2] bestimmt werden. Statt die vorgelegten Werte einer Funktion y zu interpolieren, kann es oft zweckmässiger sein, die entsprechenden Werte einer einfach herzustellenden Funktion von y, z. B. e^y, $\log y$, $\sqrt{y}$ der Interpolation zu unterwerfen[2]).

2. Historisches und hauptsächlichste Anwendungen. Über die ältere Entwickelung von interpolatorischen Verfahren giebt die historische Einleitung zu einer der Abhandlungen von *Lagrange*[3]) über diesen Gegenstand Aufschluss; sie begann bei den ersten Herstellern von mathematischen und astronomischen Tafeln und fand in den allgemeinen Formeln von *J. Newton*[4]) und *Lagrange*[5]) ihren vorläufigen Abschluss. Der weitere Ausbau ist an die Namen von *Gauss, Encke, Cauchy, Leverrier* und *Tschebyscheff* geknüpft, deren Arbeiten an geeigneter Stelle citiert werden.

Interpolationsmethoden sind bei der Konstruktion und beim Gebrauch mathematischer Tafeln, astronomischer Ephemeriden u. s. f. unentbehrlich [Nr. **9**]; bei der Diskussion physikalischer und astronomischer Erscheinungen, deren Gesetz noch unbekannt ist, spielen sie sowohl für die Untersuchung als auch für die Ausgleichung [I D 2] der beobachteten Daten eine grosse Rolle.

Geometrisch interpretiert ist Interpolation die Bestimmung einer Kurve aus einer Reihe gegebener Punkte.

Die Interpolationsformel kann die wahre Funktion innerhalb ihres Geltungsbereiches auch betreffs aller damit vorzunehmenden Operationen ersetzen; insbesondere führt ihre Verwertung zur mechanischen Differenziation und Quadratur [Nr. **8**].

3. Parabolische Interpolation. Formel von Lagrange [I B 1 a, Nr. **2**]. Die Grundlage für die *parabolische Interpolation* ist entweder der Taylor'sche Satz [II A 2, Nr. **11** ff.] oder auch der Satz, dass jede Funktion innerhalb bestimmter Grenzen näherungsweise durch eine

2) *C. W. Merrifield*, Report on the present State of Knowledge of the application of quadratures and interpolation to actual data (British Ass. 1880).

3) *Lagrange,* Sur les interpolations 1778 = Oeuvres 7, p. 535.

4) *Newton*, Principia math. Lib. III, Lemma V.

5) *Lagrange,* Leçons élémentaires sur les Mathématiques 1795 = Oeuvres 7, p. 284.

ganze rationale Funktion ersetzt werden kann. Wird die Funktion $f(x)$ dargestellt durch die ganze Funktion $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades:

$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots + \nu x^{m-1},$$

und sind m Werte derselben $A, B, C, \ldots N$ bekannt, die den Argumentwerten $a, b, c, \ldots n$ entsprechen, so kann der Wert dieser Funktion für einen beliebigen Wert von x z. B. für $x = t$ angegeben werden; ist er T, so hat man nämlich die $m + 1$ Gleichungen:

$$\begin{aligned} A &= \alpha + \beta a + \gamma a^2 + \cdots + \nu a^{m-1} \\ B &= \alpha + \beta b + \gamma b^2 + \cdots + \nu b^{m-1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T &= \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \cdots + \nu t^{m-1}, \end{aligned}$$

aus denen die m Grössen $\alpha, \beta, \ldots \nu$ eliminiert werden können [I B 1 b, Nr. **12**]; das Eliminationsresultat wird, wenn diese Gleichungen der Reihe nach mit:

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)\cdots(a-t)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{(t-a)(t-b)\cdots(t-n)}$$

multipliziert und addiert werden, in der Form erhalten:

$$\frac{A}{(a-b)(a-c)\cdots(a-t)} + \frac{B}{(b-a)(b-c)\cdots(b-t)} + \cdots + \frac{T}{(t-a)(t-b)\cdots(t-n)} = W.$$

W ist aber gleich Null nach dem allgemeinen Satz (*L. Euler*, Inst. Calc. Int. Petrop. 2, 1768/70, p. 432; *Gauss*, Werke 5, p. 266), dass:

$$S_r = \frac{a^r}{(a-b)(a-c)\cdots} + \frac{b^r}{(b-a)(b-c)\cdots} + \cdots$$

gleich der Summe der Kombinationen zu $r + 1 - m$ Elementen mit Wiederholungen aus den m Elementen $a, b, c, \ldots$ ist. Es folgt also:

$$(1)\qquad T = \frac{(t-b)(t-c)\cdots(t-n)}{(a-b)(a-c)\cdots(a-n)} A + \frac{(t-a)(t-c)\cdots(t-n)}{(b-a)(b-c)\cdots(b-n)} B + \cdots + \frac{(t-a)(t-b)\cdots}{(n-a)(n-b)\cdots} N.$$

Hierdurch ist der Funktionswert T, der dem Argumente $x = t$ entspricht, durch bekannte Grössen ausgedrückt[6]).

6) *Encke*, Über Interpolation, Berl. Jahrb. f. 1830 = Ges. Abh. 1, p. 1 (nach einer Vorlesung von *Gauss* 1812); *Gauss*, Theoria Interpolationis methodo nova tractata = Werke 3, p. 265. Auf kürzerem Wege ergiebt sich das Eliminationsresultat (1) auf Grund des *Cauchy*'schen Satzes [I A 2, Nr. **15**] über das alternierende Produkt.

(1) ist die *Lagrange'sche Interpolationsformel*; da sie, wie unmittelbar ersichtlich ist, für $t = a, b, \dots n$ dieselben Werte annimmt wie X, nämlich $A, B, \dots N$, so muss sie mit diesem identisch sein; es ist also allgemein:

$$(1^a)\quad X = \frac{(x-b)(x-c)\cdots(x-n)}{(a-b)(a-c)\cdots(a-n)} A + \frac{(x-a)(x-c)\cdots(x-n)}{(b-a)(b-c)\cdots(b-n)} B + \cdots + \frac{(x-a)(x-b)\cdots}{(n-a)(n-b)\cdots} N.$$

Sind m Werte der Funktion $f(x)$ gegeben, so können auch nur die m Koeffizienten einer Funktion $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades X bestimmt werden. Reicht diese zur Darstellung von $f(x)$ nicht aus, sondern sind noch die Glieder $+\varrho x^m + \sigma x^{m+1} + \cdots$ zur Ergänzung nötig, so kann doch die geschlossene Funktion $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades zur Interpolation als „functio simplicissima" (*Gauss*) benutzt werden. Der Fehler, der dann begangen wird, ist:

$$(t-a)(t-b)\cdots(t-n)(\varrho + \sigma(a+b+c+\cdots n)+\cdots);$$

er wird also um so kleiner, je näher t an einen der gegebenen Werte $a, b, \dots$ gebracht wird und je mehr er in der Mitte zwischen allen liegt[7]).

Die Formel von *Lagrange* hat eine Verallgemeinerung [I B 1 a, Nr. 2] durch *Cauchy* (Analyse algébr. Note V) erfahren, indem er X nicht durch eine ganze, sondern durch eine gebrochene Funktion von der Form:

$$X = \frac{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots + \nu x^{m-1}}{\mathfrak{a} + \mathfrak{b} x + \mathfrak{c} x^2 + \cdots + \mathfrak{k} x^n}$$

darstellt. Die praktisch nie zur Verwendung gelangte Formel ist Gegenstand von Arbeiten von *E. Brassinne* (J. de math. 11, 1846, p. 177), *C. G. J. Jacobi* (J. f. Math. 30, 1847, p. 127 = Werke 3, p. 481) und *G. Rosenhain* (J. f. Math. 30, p. 157) gewesen.

Ch. Hermite[8]) hat die Lagrange'sche Formel nach einer anderen Richtung verallgemeinert, indem er an Stelle der Funktionen:

$$\frac{(x-b)(x-c)\cdots(x-n)}{(a-b)(a-c)\cdots(a-n)} A, \dots,$$

die für alle x verschwinden mit Ausnahme für $x = a$, andere allgemeinere setzt, welche dieselbe Eigenschaft haben.

4. Newton'sche Formel mit den Gauss'schen Umformungen. *Gauss*[6]) hat eine wichtige Umformung der Gleichung (1^a) gegeben.

---

7) Siehe hierüber auch *Jacobi*'s Inauguraldissertation = Werke 3, p. 1.

8) *Hermite*, Sur l'interpolation, Par. C. R. 48, Janv. 1859, p. 62.

Seien $X_1, X_2, X_3, \ldots$ die Werte, welche X annimmt, wenn man ein, zwei, drei, ... Werte von x benützt, so wird:

$$X_1 = A,$$

$$X_2 = \frac{x-b}{a-b}A + \frac{x-a}{b-a}B,$$

$$X_3 = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}A + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}B + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}C$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Daraus folgt:

$$X_1 = A,$$

$$X_2 - X_1 = (x-a)\left(\frac{A}{a-b} + \frac{B}{b-a}\right),$$

$$X_3 - X_2 = (x-a)(x-b)\left(\frac{A}{(a-b)(a-c)} + \frac{B}{(b-a)(b-c)} + \frac{C}{(c-a)(c-b)}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

und daher durch Summation, wenn man setzt:

$$[ab] = \frac{A}{a-b} + \frac{B}{b-a},$$

$$[abc] = \frac{A}{(a-b)(a-c)} + \frac{B}{(b-a)(b-c)} + \frac{C}{(c-a)(c-b)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(2) $$X = A + (x-a)[ab] + (x-a)(x-b)[abc] + (x-a)(x-b)(x-c)[abcd] + \cdots.$$

Für die offenbar symmetrischen Funktionen $[ab]$, $[abc]$, ... ergeben sich aus obigen sofort folgende Ausdrücke:

$$[ab] = \frac{B-A}{b-a},$$

$$[abc] = \frac{[bc]-[ab]}{c-a},$$

$$[abcd] = \frac{[bcd]-[abc]}{d-a},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

deren Bildungsgesetz aus dem Schema:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\text{Argument} & \text{Funktion} & & & & & & & & & & \\
a & A & & & & & & & & & & \\
 & & [ab] & & & & & & & & & \\
b & B & & [abc] & & & & & & & & \\
 & & [bc] & & [abcd] & & & & & & & \\
c & C & & [bcd] & & [abcde] & & & & & & \\
 & & [cd] & & [bcde] & & [abcdef] & & & & & \\
d & D & & [cde] & & [bcdef] & & & & & & \\
 & & [de] & & [cdef] & & & & & & & \\
e & E & & [def] & & & & & & & & \\
 & & [ef] & & & & & & & & & \\
f & F & & & & & & & & & &
\end{array}$$

ersichtlich ist und sie als Differenzgrössen verschiedener Ordnung [I E, Nr. **1**] erkennen lässt.

(2) ist die allgemeine *Newton'sche Interpolationsformel* [I B 1 a, Nr. **3**; I E, Nr. **4**], wie sie in den Princ. math. Lib. III, Lemma V gegeben ist. Bei ihr kommen die absteigenden Differenzgrössen des Schemas zur Verwendung. Dies ist für die Rechnung unzweckmässig, wenn man der obigen Forderung genügt hat, x in die ungefähre Mitte der Grössen $a, b, \ldots$ fallen zu lassen. Die Symmetrie der Funktionen $[ab], \ldots$ gestattet aber sofort, folgende Formeln hinzuschreiben:

$$(3)\quad \begin{aligned} X = D &+ (x-d)\,[de] \\ &+ (x-d)(x-e)\,[cde] + (x-d)(x-e)(x-c)\,[cdef] \\ &+ (x-d)(x-e)(x-c)(x-f)\,[bcdef] + \cdots \end{aligned}$$

und:

$$(4)\quad \begin{aligned} X = D &+ (x-d)\,[cd] \\ &+ (x-d)(x-c)\,[cde] + (x-d)(x-c)(x-e)\,[bcde] \\ &+ (x-d)(x-c)(x-e)(x-b)\,[bcdef] + \cdots, \end{aligned}$$

von denen die erste jene Differenzgrössen enthält, die am nächsten einem zwischen D und E durch das Schema geführten horizontalen Strich liegen, und die Differenzgrössen der zweiten ebenso gegen einen zwischen C und D gezogenen Strich liegen; man wird die erste anwenden, wenn x zwischen d und e, die zweite wenn x zwischen c und d fällt. Bringt man (3) und (4) in die für die praktische Ausführung einer Rechnung bequemste Form:

$$(3^a)\quad X = D + (x-d)\,[[de] + (x-e)\{[cde] + (x-c)([cdef] + \cdots)\}],$$

$$(4^a)\quad X = D + (x-d)\,[[cd] + (x-c)\{[cde] + (x-e)([bcde] + \cdots)\}],$$

wobei die Rechnung von rückwärts zu beginnen ist, so hat man nach einer Bemerkung von *Gauss* überdies den Vorteil, dass man auf das Vorzeichen der einzelnen Korrektionen keine besondere Aufmerksamkeit zu wenden braucht, indem jede Differenz durch die höhere so zu korrigieren ist, dass sie der auf der anderen Seite des Striches stehenden näher gebracht wird (Gauss'sche Strichmethode).

5. Andere Begründungen. Wie in dieser Gauss'schen Darstellung die Newton'sche Formel aus der Lagrange'schen hervorgegangen ist, so kann auch der umgekehrte Weg eingeschlagen werden. Man vergleiche hierüber die Begründung der Interpolationsrechnung nach *Radau* [9]). *Markoff* [10]) nimmt als Ausgangspunkt die

9) *Radau*, Études sur les formules d'interpolation I.

10) *Markoff*, Differenzenrechnung, Kap. 1—3.

allgemeinere Aufgabe: Es sind die Werte einer Funktion *und einiger ihrer successiven Ableitungen* für gegebene Werte des Argumentes bekannt; es soll eine ganze Funktion möglichst niedrigen Grades gefunden werden, die zugleich mit denselben Ableitungen für die nämlichen Werte des Argumentes die gleichen Werte annimmt, wie jene Funktion. Die Taylor'sche, die Lagrange'sche, die Newton'sche und andere praktisch belanglose Interpolationsformeln erscheinen dann als Unterfälle; der Übergang von den Differenzialquotienten zu den Differenzgrössen muss besonders ausgeführt werden. Dieser Weg ist bereits von *Hermite* angedeutet worden[11]. Die Markoff'sche Darstellung ist besonders ausgezeichnet durch die strenge Diskussion der Restglieder.

6. Die Interpolationsformeln bei gleichen Intervallen der Argumente [I B 1 a, Nr. 3; I E, Nr. 5]. Für den in der Praxis am häufigsten vorkommenden Fall, nämlich den, wo die Argumentwerte eine arithmetische Reihe bilden, wollen wir wegen ihrer häufigen Anwendung die Formeln besonders aufstellen. Ist ω das konstante Intervall und bezeichnet man die Differenzen verschiedener Ordnungen, wie in dem nachstehenden Schema angegeben ist:

$$\begin{array}{cccccc}
\text{Arg.} & \text{Funkt.} & \text{I. Diff.} & \text{II. Diff.} & \text{III. Diff.} & \text{IV. Diff.} \\
a & A & & & & \\
 & & \Delta A & & & \\
b & B & & \Delta^2 A & & \\
 & & \Delta B & & \Delta^3 A & \\
c & C & & \Delta^2 B & & \Delta^4 A \\
 & & \Delta C & & \Delta^3 B & \\
d & D & & \Delta^2 C & & \Delta^4 B \\
 & & \Delta D & & \Delta^3 C & \\
e & E & & \Delta^2 D & & \\
 & & \Delta E & & & \\
f & F & & & &
\end{array}$$

wo also gesetzt ist:

$$\begin{aligned}
&\Delta A = B - A, \quad \Delta B = C - B, \quad \Delta C = D - C, \ldots \\
&\Delta^2 A = \Delta B - \Delta A, \quad \Delta^2 B = \Delta C - \Delta B, \ldots \\
&\Delta^3 A = \Delta^2 B - \Delta^2 A, \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

so wird:

$$[ab] = \frac{\Delta A}{\omega}$$

$$[abc] = \frac{\Delta^2 A}{1 \cdot 2 \cdot \omega^2}$$

$$[abcd] = \frac{\Delta^3 A}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \omega^3},$$

11) *Hermite,* Lettre à M. Borchardt (J. für Math. 84, 1878, p. 70).

und die Formeln (2), (3), (4) gehen über in folgende, wenn beziehungsweise $x - a = t\omega$, $x - d = t\omega$, $d - x = t\omega$ gesetzt wird:

$$(5)\quad X = A + t\Delta A + \frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 A + \frac{t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 A + \cdots$$

$$(6)\quad X = D + t\Delta D + \frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 C + \frac{t(t-1)(t+1)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 C + \cdots$$

$$(7)\quad X = D - t\Delta C + \frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 C - \frac{t(t-1)(t+1)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 B + \cdots.$$

In der Form (5) wird die Newton'sche Formel gewöhnlich angegeben, (6) wird man verwenden, wenn x in der Nähe von d und zwischen d und e liegt, (7) wenn es zwischen c und d liegt. Man bezeichnet die erstere Operation als Interpolation *„nach vorwärts"*, letztere als Interpolation *„nach rückwärts"*. Liegt x genau in der Mitte zwischen zwei Argumenten c und d, so ist es gleichgiltig, ob man von c aus nach vorwärts oder von d aus nach rückwärts interpoliert. Aus dem arithmetischen Mittel beider fallen die ungeraden Differenzen heraus und die bequeme Formel für die *„Interpolation in die Mitte"* wird:

$$(8)\quad X = \frac{C + D}{2} - \frac{1}{8}\,\frac{\Delta^2 B + \Delta^2 C}{2} + \frac{3}{128}\,\frac{\Delta^4 A + \Delta^4 B}{2} - \frac{5}{1024}\,\frac{\Delta^6 \cdot + \Delta^6 \cdot}{2} + \cdots.$$

Es treten hier also nur die arithmetischen Mittel derjenigen geraden Differenzen auf, zwischen denen der durch $\frac{c+d}{2}$ gelegte Horizontalstrich hindurchgeht. Infolge der leichten Anwendung der Formel (8) wird man bei Herstellung von mathematischen Tafeln, Ephemeriden u. drgl. stets das Intervall der direkt berechneten Werte einer Potenz von 2 proportional machen, um durch fortwährende Interpolation in die Mitte bis zu den Funktionswerten für die Argumente mit dem kleinsten gewünschten Intervall zu gelangen. Dabei wird es meistens zweckmässig sein, bei jeder einzelnen Interpolation nur bis zur ersten Differenz fortzuschreiten, um schliesslich alle Funktionswerte gleichzeitig durch successive Summation zu erhalten.

7. Die früheren und einige neue Interpolationsformeln in der Encke'schen Bezeichnungsweise. *Encke* hat eine systematische und bequeme Bezeichnungsweise der Funktionswerte und ihrer Differenzen eingeführt[12]), die den Vorteil hat, dass sie den Ort jeder Differenz unmittelbar anzeigt. Sie ist aus folgendem Schema unmittelbar ersichtlich:

---

12) Über mechanische Quadratur, Berl. Jahrb. 1837 = Ges. Abh. 1, p. 21.

Arg.	Funkt.	I. Diff.	II. Diff.	III. Diff.	IV. Diff.
$a-2\omega$	$f(a-2)$		$f^{\mathrm{II}}(a-2)$		$f^{\mathrm{IV}}(a-2)\cdots$
		$f^{\mathrm{I}}(a-\frac{3}{2})$		$f^{\mathrm{III}}(a-\frac{3}{2})$	
$a-\omega$	$f(a-1)$		$f^{\mathrm{II}}(a-1)$		$f^{\mathrm{IV}}(a-1)\cdots$
		$f^{\mathrm{I}}(a-\frac{1}{2})$		$f^{\mathrm{III}}(a-\frac{1}{2})$	
a	$f(a)$		$f^{\mathrm{II}}(a)$		$f^{\mathrm{IV}}(a)\cdots$
		$f^{\mathrm{I}}(a+\frac{1}{2})$		$f^{\mathrm{III}}(a+\frac{1}{2})$	
$a+\omega$	$f(a+1)$		$f^{\mathrm{II}}(a+1)$		$f^{\mathrm{IV}}(a+1)\cdots$
		$f^{\mathrm{I}}(a+\frac{3}{2})$		$f^{\mathrm{III}}(a+\frac{3}{2})$	
$a+2\omega$	$f(a+2)$		$f^{\mathrm{II}}(a+2)$		$f^{\mathrm{IV}}(a+2)\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Als Argument ist immer das arithmetische Mittel der beiden Argumente angesetzt, aus deren Werten die betreffende Differenz hervorgegangen ist, z. B.:

$$f^{\mathrm{III}}(a-\tfrac{1}{2}) = f^{\mathrm{II}}(a) - f^{\mathrm{II}}(a-1).$$

Wird ein beliebiger Wert des Argumentes x mit $a+n\omega$ bezeichnet, wo man a stets so wählen kann, dass n ein echter Bruch wird, so gehen die Formeln (5), (6), (7) in folgende Gestalt über:

$$(9)\qquad f(a+n\omega) = f(a) + nf^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{1}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} f^{\mathrm{II}}(a+1)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} f^{\mathrm{III}}\left(a+\frac{3}{2}\right) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} f^{\mathrm{IV}}(a+2) + \cdots,$$

$$(10)\qquad f(a+n\omega) = f(a) + nf^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{1}{2}\right) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} f^{\mathrm{II}}(a)$$
$$+ \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3} f^{\mathrm{III}}\left(a+\frac{1}{2}\right) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} f^{\mathrm{IV}}(a)$$
$$+ \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} f^{\mathrm{V}}\left(a+\frac{1}{2}\right) + \cdots,$$

$$(11)\qquad f(a+n\omega) = f(a) + nf^{\mathrm{I}}\left(a-\frac{1}{2}\right) + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2} f^{\mathrm{II}}(a)$$
$$+ \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3} f^{\mathrm{III}}\left(a-\frac{1}{2}\right) + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} f^{\mathrm{IV}}(a)$$
$$+ \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} f^{\mathrm{V}}(a) + \cdots,$$

von denen man die zweite am vortheilhaftesten gebraucht, wenn n positiv ist, die dritte, wenn n negativ ist. Für einen kleinen Wert von n kann man jede der beiden Formeln mit nahe gleicher Genauigkeit anwenden, oder noch besser das arithmetische Mittel aus ihnen. Führt man dann die neue Bezeichnung ein:

$$\frac{1}{2}\left\{f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+f^{\mathrm{I}}\left(a-\frac{1}{2}\right)\right\}=f^{\mathrm{I}}(a)$$
$$\frac{1}{2}\left\{f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{3}{2}\right)+f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{1}{2}\right)\right\}=f^{\mathrm{I}}(a+1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{2}\left\{f^{\mathrm{II}}(a)\qquad+f^{\mathrm{II}}(a+1)\right\}=f^{\mathrm{II}}\left(a+\frac{1}{2}\right)$$
$$\frac{1}{2}\left\{f^{\mathrm{II}}(a+1)+f^{\mathrm{II}}(a+2)\right\}=f^{\mathrm{II}}\left(a+\frac{3}{2}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

die zu Verwechslungen offenbar keinen Anlass geben kann, so kommt die neue Formel:

$$(12)\quad f(a+n\omega)=f(a)+nf^{\mathrm{I}}(a)+\frac{n^2}{1\cdot 2}f^{\mathrm{II}}(a)+\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}f^{\mathrm{III}}(a)$$
$$+\frac{(n+1)n\cdot n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f^{\mathrm{IV}}(a)+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}f^{\mathrm{V}}(a)+\cdots,$$

die nun völlig symmetrisch gebildet ist, indem sie von den ungeraden Differenzen die arithmetischen Mittel jener benutzt, zwischen denen der durch $f(a)$ gelegte Horizontalstrich hindurchgeht, von den geraden die direkt getroffenen. Diese Formel ist bereits in einem von *Newton*[13]) angegebenen Satze enthalten, wurde auch von *Roger Cotes* schon benützt, wird jedoch gewöhnlich die *Stirling*'sche[14]) genannt; sie war lange vergessen, bis *Lagrange*[15]) wieder auf sie aufmerksam machte. *Oppolzer*[16]) hat die Koeffizienten der Entwicklung durch Kombinationssummen der Quadrate der ganzen Zahlen dargestellt.

Verschiebt man (11) um ein Intervall nach vorwärts und nimmt zwischen der so entstehenden Formel und (10) das arithmetische Mittel, so erhält man die weitere Formel, die symmetrisch ist in Bezug auf einen zwischen $f(a)$ und $f(a+1)$ geführten Horizontalstrich:

$$(13)\quad f(a+n\omega)=f(a)+nf^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{(n-1)n}{1\cdot 2}f^{\mathrm{II}}\left(a+\frac{1}{2}\right)$$
$$+\frac{(n-1)n\left(n-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}f^{\mathrm{III}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f^{\mathrm{IV}}\left(a+\frac{1}{2}\right)$$
$$+\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)\left(n-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}f^{\mathrm{V}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\cdots;$$

---

13) *Newton*, Methodus differentialis, Lond. 1711, Prop. III = Opuscula 1, p. 271.

14) *J. Stirling*, Methodus differentialis, Lond. 1730.

15) *Lagrange*, Sur les interpolations, Oeuvres 7, p. 535.

16) *Th. Oppolzer*, Lehrb. der Bahnbestimmung 2, Leipz. 1880, erster Abschn.

ihre beiden ersten Glieder können auch geschrieben werden:

$$f\left(a+\frac{1}{2}\right)+\left(n-\frac{1}{2}\right)f^{\mathrm{I}}\left(a+\frac{1}{2}\right),$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$f\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\Big(f(a)+f(a+1)\Big)\cdot$$

Sie findet sich ebenfalls bereits bei *Stirling* [14]) und wird in der Praxis am häufigsten angewendet.

Aus (13) folgt sofort die Formel für die Interpolation in die Mitte, wenn man $n=\frac{1}{2}$ setzt:

$$(14)\quad f\left(a+\frac{\omega}{2}\right)=f\left(a+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}f^{\mathrm{II}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{128}f^{\mathrm{IV}}\left(a+\frac{1}{2}\right)$$
$$-\frac{5}{1024}f^{\mathrm{VI}}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\cdots;$$

hierin ist wiederum:

$$f\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\Big(f(a+1)+f(a)\Big)\cdot$$

Alle diese Formeln lassen sich auch nach einem Kunstgriff von *Euler* ableiten, wenn man für $f(a+n\omega)$ eine *bestimmte* Funktion annimmt, deren Differenzenschema sehr einfach ist, und deren analytische Entwicklung bekannt ist; durch Vergleich eines Ansatzes mit unbestimmten Koeffizienten mit dieser letzteren werden die Koeffizienten, die natürlich für jede Funktion identisch herauskommen müssen, sofort ermittelt. Als solche Funktion empfiehlt sich besonders $f(a+n\omega)=e^{a+n\omega}$.

8. Mechanische Differenziation und Quadratur. Ordnet man (12) nach Potenzen von n:

$$(15)\quad f(a+n\omega)=f(a)+n\left\{f^{\mathrm{I}}(a)-\frac{1}{6}f^{\mathrm{III}}(a)+\frac{1}{30}f^{\mathrm{V}}(a)-\frac{1}{240}f^{\mathrm{VII}}(a)+\cdots\right\}$$
$$+\frac{1}{2}n^2\left\{f^{\mathrm{II}}(a)-\frac{1}{12}f^{\mathrm{IV}}(a)+\frac{1}{90}f^{\mathrm{VI}}(a)-\cdots\right\}$$
$$+\frac{1}{6}n^3\left\{f^{\mathrm{III}}(a)-\frac{1}{4}f^{\mathrm{V}}(a)+\frac{7}{120}f^{\mathrm{VII}}(a)-\cdots\right\}$$
$$+\frac{1}{24}n^4\left\{f^{\mathrm{IV}}(a)-\frac{1}{6}f^{\mathrm{VI}}(a)+\cdots\right\}$$
$$+\frac{1}{120}n^5\left\{f^{\mathrm{V}}(a)-\frac{1}{3}f^{\mathrm{VII}}(a)+\cdots\right\}$$
$$+\frac{1}{720}n^6\left\{f^{\mathrm{VI}}(a)-\cdots\right\}$$
$$+\frac{1}{5040}n^7\left\{f^{\mathrm{VII}}(a)-\cdots\right\}$$
$$+\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\,,$$

und vergleicht diese Entwicklung mit jener nach dem Taylor'schen Lehrsatz:

$$f(a+n\omega)=f(a)+n\omega\frac{df(a)}{da}+\frac{n^2\omega^2}{1\cdot 2}\frac{d^2f(a)}{da^2}+\cdots,$$

so erhält man sofort die Formeln der *mechanischen Differenziation*:

$$\frac{df(a)}{da}=\frac{1}{\omega}\left\{f^{\mathrm{I}}(a)-\frac{1}{6}f^{\mathrm{III}}(a)+\frac{1}{30}f^{\mathrm{V}}(a)-\frac{1}{240}f^{\mathrm{VII}}(a)+\cdots\right\},$$

$$(16)\qquad \frac{d^2f(a)}{da^2}=\frac{1}{\omega^2}\left\{f^{\mathrm{II}}(a)-\frac{1}{12}f^{\mathrm{IV}}(a)+\frac{1}{90}f^{\mathrm{VI}}(a)-\cdots\right\},$$

. . . .

und für die Differenzialquotienten an einer beliebigen Stelle der Funktion:

$$(17)\qquad \frac{df(a+n\omega)}{d(a+n\omega)}=\frac{1}{\omega}\left\{f^{\mathrm{I}}(a)+nf^{\mathrm{II}}(a)+\frac{3n^2-1}{1\cdot 2\cdot 3}f^{\mathrm{III}}(a)\right.$$
$$\left.+\frac{4n^3-2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f^{\mathrm{IV}}(a)+\frac{5n^4-15n^2+4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}f^{\mathrm{V}}(a)+\cdots\right\}.$$

. . . .

Wird (15) zwischen den Grenzen $n=-\frac{1}{2}$ und $n=i+\frac{1}{2}$ (i eine ganze Zahl) integriert, so erhält man die in der astronomischen Praxis am häufigsten verwendete Formel für *mechanische Quadratur:*

$$(18)\qquad \int\limits_{-1/2}^{i+1/2} f(a+n\omega)dn={}^{\mathrm{I}}f\left(a+i+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{24}f^{\mathrm{I}}\left(a+i+\frac{1}{2}\right)$$
$$-\frac{17}{5760}f^{\mathrm{III}}\left(a+i+\frac{1}{2}\right)+\frac{367}{967680}f^{\mathrm{V}}\left(a+i+\frac{1}{2}\right)-\cdots;$$

hierin sind mit ${}^{\mathrm{I}}f$ die Glieder der ersten Summenreihe [I E, Nr. 8] bezeichnet, d. h. jener Reihe, von der die Funktionsreihe die erste Differenzreihe ist; das offenbar beliebig anzusetzende erste Glied derselben ist in obiger Formel so bestimmt gedacht, dass:

$${}^{\mathrm{I}}f\left(a-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{24}f^{\mathrm{I}}\left(a-\frac{1}{2}\right)+\frac{17}{5760}f^{\mathrm{III}}\left(a-\frac{1}{2}\right)$$
$$-\frac{367}{967680}f^{\mathrm{V}}\left(a-\frac{1}{2}\right)+\cdots.$$

Integriert man (15) zweimal zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $+i$, so ergiebt sich die Formel für das Doppelintegral:

$$(19)\qquad \iint\limits_{-1/2}^{i} f(a+n\omega)dn^2={}^{\mathrm{II}}f(a+i\omega)+\frac{1}{12}f(a+i\omega)$$
$$-\frac{1}{240}f^{\mathrm{II}}(a+i\omega)+\frac{31}{60480}f^{\mathrm{IV}}(a+i\omega)\cdots,$$

wobei das willkürliche Glied der ersten Summenreihe in derselben

Weise bestimmt gedacht ist wie oben, das der zweiten Summenreihe ${}^{\mathrm{II}}f$ aber durch:

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{II}}f(a-\omega) = \tfrac{1}{24}\,f(a) - \tfrac{17}{5760}\Big(2f^{\mathrm{II}}(a)+f^{\mathrm{II}}(a-\omega)\Big) \\
+ \tfrac{367}{967680}\Big(3f^{\mathrm{IV}}(a)+2f^{\mathrm{IV}}(a-\omega)\Big) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Diese hier mehr nebenbei angeführten, aus den Interpolationsformeln folgenden Formeln für mechanische Quadratur sind von *Gauss* entwickelt und von *Encke*[17]) veröffentlicht worden; sie sind noch vieler Modifikationen fähig. Über mechanische Quadratur überhaupt sehe man II A 2, Nr. **50**—**55**; I E, Nr. **7**.

9. Herstellung mathematischer Tabellen. Auf dem Satze der Differenzenrechnung [I E, Nr. 2]: „Wird von einer ganzen Funktion m^{ten} Grades für äquidistante Intervalle des Argumentes eine Reihe von Werten gebildet, so sind die m^{ten} Differenzen derselben konstant" beruht eine Interpolationsmethode, die für die Herstellung mathematischer Tafelwerke von grosser Wichtigkeit ist, da sie die Bildung neuer Funktionswerte durch successive Summation gestattet; sie wird häufig die *Mouton*'sche Methode genannt, obwohl sie schon von *Henry Briggs*[18]) und *Cotes*[19]) ebenso wie von *Gabriel Mouton*[20]) auf empirischem Wege gefunden und bei der Berechnung der Logarithmentafeln im grössten Umfange angewendet worden war. Die durch Induktion gefundenen Resultate hat *Lagrange* mittelst eines symbolischen Kalküls[21]) streng begründet[22]).

Sind $T_0 T_1 T_2 \ldots T_n T_{n+1} \ldots$ Glieder einer vorgelegten Reihe und $D_1 D_2 D_3 \ldots$ die Differenzen erster, zweiter, etc. Ordnung, d. h. ist $D_0 = T_0$, $D_1 = T_1 - T_0$, $D_2 = T_2 - 2T_1 + T_0$, u. s. f., so wird allgemein:

$$
\begin{aligned}
D_m = T_m - m\,T_{m-1} \\
+ \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\,T_{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,T_{m-3} + \cdots (-1)^m T_0,
\end{aligned}
$$

17) *Encke*, Über mech. Quadr., Berl. Jahrb. 1837 u. 1862 = Ges. Abh. 1, p. 21, 61.

18) *H. Briggs*, Arithmetica logarithmica, Lond. 1620, Kap. XIII; Trigonometria Brit., Lond. 1633, Kap. XII.

19) *R. Cotes*, Canonotechnia sive Constructio Tabularum per differentias, Opera misc. Cambr. 1722.

20) *Mouton*, Observationes diametrorum Solis et Lunae. Lugd. 1670.

21) *Lagrange*, Sur une nouvelle espèce de calcul, Berl. N. Mém. 3, année 1772 [74] = oeuvres 3, p. 441.

22) *Lagrange*, Mém. sur la méthode d'interpolation, oeuvres 5, p. 663.

und umgekehrt [I E, Nr. 4]:

$$(20)\quad T_n = D_0 + nD_1 + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} D_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} D_3 + \cdots.$$

Ist n eine ganze Zahl und ist die Funktion, welche die Werte T darstellt, eine ganze vom Grade r, sodass $D_{r+1} = 0$ wird, so kann die Formel (20) (die Newton'sche Interpolationsformel [Nr. 4]) durch successive Addition aus den Differenzen gebildet werden; z. B. man berechnet von der Funktion $10z^3 - 101z^2 - 109z + 1799$ die Werte für $z = 0, 1, 2, 3$ direkt und bildet das Differenzenschema:

z	f	f^{I}	f^{II}	f^{III}
0	$+1799$			
		-200		
1	$+1599$		-142	
		-342		$+60$ (konstant).
2	$+1257$		$-\ 82$	
		-424		
3	$+\ 833$			

Die übrigen Werte folgen dann durch folgende Rechnung:

z	D_0	D_1	D_2	D_3
0	$+1799$	-200	-142	$+60$
1	$+1599$	-342	$-\ 82$	$+60$
2	$+1257$	-424	$-\ 22$	$+60$
3	$+\ 833$	-446	$+\ 38$	$+60$
4	$+\ 387$	-408	$+\ 98$	$+60$
5	$-\ \ 21$	-310	$+158$	...
6	$-\ 331$	-152	....	
7	$-\ 483$	....		
....				

Ist nun die Aufgabe gestellt, zwischen die Glieder der Reihe $T_0, T_1, \ldots$ andere einzuschalten, welche dasselbe Gesetz befolgen, also die neue Reihe $t_0, t_1, \ldots$ mit den Differenzen $d_0, d_1, d_2, \ldots$ zu bilden, für welche allgemein $t_{ms} = T_s$ sein soll, so kommt es offenbar nur darauf an, die Differenzen $d_0, d_1, d_2, \ldots$ durch bekannte Grössen auszudrücken, um dann durch successive Summation die eingeschalteten Glieder herzustellen. *Lagrange* findet:

$$d_s = aD_s + bD_{s+1} + cD_{s+2} + dD_{s+3} + \cdots,$$

$$a = \frac{1}{m^s},$$

$$b = s\,\frac{1-m}{1\cdot 2m}\,a,$$

$$c = \frac{2s}{2}\,\frac{(1-m)(1-2m)}{1\cdot 2\cdot 3\,m^2}\,a + \frac{s-1}{2}\cdot\frac{1-m}{1\cdot 2m}\,b,$$

$$d = \frac{3s}{3}\,\frac{(1-m)(1-2m)(1-3m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,m^3}\,a + \frac{2s-1}{3}\,\frac{(1-m)(1-2m)}{1\cdot 2\cdot 3\,m^2}\,b + \frac{s-2}{3}\,\frac{1-m}{1\cdot 2m}\,c,$$

. . . .,

womit das Mouton'sche Problem allgemein gelöst ist.

Schliessen die Differenzen der Reihe T mit D_r ab, so dass $D_{r+1} = 0$ wird, so wird:

für $s = r$ $\quad d_r = aD_r;\quad a = \frac{1}{m^r},$

„ $s = r-1$ $\quad d_{r-1} = aD_{r-1} + bD_r;\quad a = \frac{1}{m^{r-1}},\quad b = \frac{(r-1)(1-m)}{2m^r},$

„ $s = r-2$ $\quad d_{r-2} = aD_{r-2} + bD_{r-1} + cD_r;$

$$a = \frac{1}{m^{r-2}},\quad b = \frac{(r-2)(1-m)}{2m^{r-1}},$$

$$c = \frac{(r-2)(1-m)(1-2m)}{1\cdot 2\cdot 3\,m^r} + \frac{(r-2)(r-3)(1-m)^2}{8m^r},$$

. . . .

Wünscht man in obigem Beispiel zwischen je 2 Glieder der Reihe weitere 4 einzuschalten, also jedes Intervall in 5 Unterteile zu teilen, so hat man zu setzen $m = 5$, $r = 3$ und findet mit:

$$D_1 = -200,\quad D_2 = -142,\quad D_3 = +60$$

die Differenzen der vervollständigten Reihe:

$$d_3 = +\frac{1}{125}\,60 = +0{,}48$$

$$d_2 = -\ \ 7{,}60$$

$$d_1 = -25{,}76,$$

und damit durch folgende Rechnung die eingeschalteten Glieder:

z				
0,0	+ 1799,00	— 25,76	— 7,60	+ 0,48
0,2	+ 1773,24	— 33,36	— 7,12	+ 0,48
0,4	+ 1739,88	— 40,48	— 6,64	+ 0,48
0,6	+ 1699,40	— 47,12	— 6,16	+ 0,48
0,8	+ 1652,28	— 53,28	— 5,68	+ 0,48
1,0	+ 1599,00	— 58,96	— 5,20	+ 0,48
1,2	+ 1540,04	— 64,16	— 4,72	+ 0,48
1,4	+ 1475,88	— 68,88	— 4,24	+ 0,48
1,6	+ 1407,00	— 73,12	— 3,76	. . . .
1,8	+ 1333,88	— 76,88	. . . .	
2,0	+ 1257,00	. . . .		
. . . .				

Betreffs weiterer Beispiele und Methoden sehe man *A. A. Markoff*, Differenzenrechnung, Kap. IV, Herstellung und Benutzung mathematischer Tabellen. Der Gegenstand ist auch behandelt von *U. J. Leverrier*, Ann. de l'Obs. de Paris 1, 1855, p. 125.

Wertvolle Winke für Berechnung von Tafeln findet man in der Encke'schen Abhandlung „Über die Dimensionen des Erdkörpers", Berl. astr. Jahrb. für 1852.

10. Interpolation durch periodische Reihen. Die Interpolation periodischer Funktionen durch *periodische Reihen* von der Form:

$$(21)\qquad \begin{aligned} T = \frac{\alpha_0}{2} &+ \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \cos 2t + \cdots + \alpha_n \cos nt \\ &+ \beta_1 \sin t + \beta_2 \sin 2t + \cdots + \beta_n \sin nt \end{aligned}$$

ist schon von *Lagrange*[23]) an mehreren Stellen behandelt worden, in abschliessender Weise hat sich *Gauss*[24]) damit beschäftigt. Sind die Werte $A, B, \ldots, L$ bekannt, welche T für die $2n+1$ Werte von t: $a, b, c, \ldots, l$ annimmt, so bietet die Lagrange'sche Interpolationsformel [Nr. 3] den Ausdruck:

$$T = A\,\frac{\sin\frac{t-b}{2}\sin\frac{t-c}{2}\cdots\sin\frac{t-l}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a-c}{2}\cdots\sin\frac{a-l}{2}} + B\,\frac{\sin\frac{t-a}{2}\sin\frac{t-c}{2}\cdots\sin\frac{t-l}{2}}{\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{b-c}{2}\cdots\sin\frac{b-l}{2}} + \cdots,$$

der, in die Form (21) übergeführt, die Koeffizienten α und β kennen lehrt. In der Praxis tritt dieser allgemeine Fall kaum auf; man wählt hier für $a, b, c, \ldots$ die äquidistanten Werte:

$$a,\ b = a + \frac{2\pi}{2n+1},\quad c = a + 2\frac{2\pi}{2n+1},\ \ldots,\ l = a + 2n\frac{2\pi}{2n+1},$$

worauf die α und β sich durch folgende einfache Formeln bestimmen:

$$(22)\qquad \begin{cases} \alpha_i = \dfrac{2}{2n+1}(A\cos ia + B\cos ib + \cdots + L\cos il), \\ \beta_i = \dfrac{2}{2n+1}(A\sin ia + B\sin ib + \cdots + L\sin il). \end{cases}$$

Oder häufiger und mit grösserem Vorteil, man teilt den Umkreis 2π in eine *gerade* Anzahl von Teilen; man kann dann in der Entwick-

23) *Lagrange*, Oeuvres 6, p. 507 u. 7, p. 541.

24) *L. Euler*, Opusc. anal. 1, Petrop. 1783, p. 165; *W. Bessel*, Königsb. Beob. 1 Abt. 1815, p. 3 = Ges. Abh. 2, p. 24; Astron. Nachr. 6 (1828), p. 333 = Ges. Abh. 2, p. 364; *Gauss*, Theoria interpolationis etc. = Werke 3, Art. 10—41; man sehe auch die Darstellung von *Leverrier*, Ann. de l'Obs. de Paris, 1, 1855, p. 103 und von *F. Tisserand*, Méc. cél. 4, Par. 1896, p. 15; ferner *J. Hoüel*, Sur le développement des fonctions en séries périodiques au moyen de l'interpolation (Ann. de l'Obs. de Paris 8, 1866).

lung (21) nur $2n$ Koeffizienten bestimmen, d. h. β_n bleibt unbestimmt. Die Formeln werden für die Rechnung am bequemsten, wie folgt, geschrieben. Den $2n$ Werten von t:

$$0,\ h,\ 2h, \ldots (2n-1)h, \quad \text{wo} \quad h = \frac{2\pi}{2n},$$

mögen die Werte von T:

$$T_0,\ T_1, \ldots,\ T_{2n-1}$$

entsprechen; ferner werde zur Abkürzung gesetzt:

$$T_r + T_{n+r} = (r,\ n+r)$$
$$T_r - T_{n+r} = \left(\frac{r}{n+r}\right),$$

dann wird:

I. i gerade.

$$\frac{n}{2}(\alpha_i + \alpha_{n-i}) = (0, n) + (2, n+2)\cos 2ih + (4, n+4)\cos 4ih + \cdots$$
$$+ (n-2, 2n-2)\cos(n-2)ih$$

$$\frac{n}{2}(\alpha_i - \alpha_{n-i}) = (1, n+1) + (3, n+3)\cos 3ih + (5, n+5)\cos 5ih + \cdots$$
$$+ (n-1, 2n-1)\cos(n-1)ih$$

$$\frac{n}{2}(\beta_i + \beta_{n-i}) = (1, n+1)\sin ih + (3, n+3)\sin 3ih + \cdots$$
$$+ (n-1, 2n-1)\sin(n-1)ih$$

$$\frac{n}{2}(\beta_i - \beta_{n-i}) = (2, n+2)\sin 2ih + (4, n+4)\sin 4ih + \cdots$$
$$+ (n-2, 2n-2)\sin(n-2)ih$$

$$n\left(\frac{\alpha_0}{2} + \alpha_n\right) = (0, n) + (2, n+2) + \cdots + (n-2, 2n-2)$$

$$n\left(\frac{\alpha_0}{2} - \alpha_n\right) = (1, n+1) + (3, n+3) + \cdots + (n-1, 2n-1).$$

II. i ungerade.

$$\frac{n}{2}(\alpha_i + \alpha_{n-i}) = \left(\frac{0}{n}\right) + \left(\frac{2}{n+2}\right)\cos 2ih + \left(\frac{4}{n+4}\right)\cos 4ih + \cdots$$
$$+ \left(\frac{n-2}{2n-2}\right)\cos(n-2)ih$$

$$\frac{n}{2}(\alpha_i - \alpha_{n-i}) = \left(\frac{1}{n+1}\right)\cos ih + \left(\frac{3}{n+3}\right)\cos 3ih + \cdots$$
$$+ \left(\frac{n-1}{2n-1}\right)\cos(n-1)ih$$

$$\frac{n}{2}(\beta_i + \beta_{n-i}) = \left(\frac{1}{n+1}\right)\sin ih + \left(\frac{3}{n+3}\right)\sin 3ih + \cdots$$
$$+ \left(\frac{n-1}{2n-1}\right)\sin(n-1)ih$$

$$\frac{n}{2}(\beta_i - \beta_{n-i}) = \left(\frac{2}{n+2}\right)\sin 2ih + \left(\frac{4}{n+4}\right)\sin 4ih + \cdots$$
$$+ \left(\frac{n-2}{2n-2}\right)\sin(n-2)ih.$$

Für besondere Werte von $2n$ treten noch einige Vereinfachungen ein; man findet die Formeln für $2n = 12, 16, 24, 32$ in den unten zitierten Werken[25]).

Diese Formeln haben den Nachteil, dass man sich von vornherein über den Wert von $2n$, d. h. über die Anzahl der zu ermittelnden Koeffizienten α und β entscheiden muss; zeigt die Erfahrung, dass diese Entwicklung nicht ausreicht, so muss man die ganze Rechnung mit einem grösseren Werte von $2n$ wiederholen. *Leverrier*[26]) hat ein Verfahren angegeben, wodurch dies vermieden werden kann; er nimmt nämlich für die oben auftretende Grösse h, nach deren Vielfachen entwickelt wird, einen ganz beliebigen mit 2π nicht kommensurabeln Winkel; dann braucht man die Rechnung erst abzubrechen, wenn die folgenden Glieder unmerklich werden. Die etwas weitläufigen Formeln, deren Berechnung auch nicht sehr übersichtlich ist, sollen hier wegen ihrer seltenen Anwendung nicht angeführt werden, sie sind neu abgeleitet und reproduziert worden von *Encke*[27]).

Die Interpolation in die Mitte bei periodischen Funktionen behandelt *G. D. E. Weyer* in Astr. Nachr. 117, 1887, p. 313.

11. Die Cauchy'sche Interpolationsmethode. *Cauchy* hat ein sehr allgemeines Verfahren, eine Interpolationsformel zu erlangen, angegeben, das sich durch einfache Rechenvorschriften auszeichnet und ferner dadurch, dass man nicht von vornherein an eine bestimmte Anzahl von Gliedern gebunden ist, sondern die Rechnung beliebig lang fortsetzen kann[28]). Die Methode zeigt, wie die Koeffizienten $a, b, c, \ldots$ einer allgemeinen Entwicklung:

$$y = aA + bB + cC + \cdots \tag{23}$$

bestimmt werden können, wenn für eine ganze Reihe von Werten der $A, B, \ldots$ die entsprechenden Funktionswerte y gegeben sind. Die $A, B, \ldots$ sind bekannte Funktionen beliebig vieler Variabeln; soll

25) *P. A. Hansen*, Über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns, Preisschrift Berl. 1831, p. 49; Astr. Nachr. 12 (1835), col. 339 für $n = 64$; Leipz. Abh. 5 (1857), § 65, p. 158; *J. Leverrier*, Par. Observ. Ann. 1 (1855), p. 137.

26) Par. Observ. Ann. 1 (1855), p. 384.

27) *Encke*, Über die Entwicklung einer Funktion in eine periodische Reihe nach *Leverrier*'s Vorschlag, Berl. Astr. Jahrb. f. 1860 = Ges. Abh. 1, p. 188. Man sehe auch: *Hoüel*, Par. Observ. Ann. 8 (1866), p. 83, und Sur le développement de la fonction perturbatrice, Bord. Mém. 11, auch sep. Paris 1875.

28) *Cauchy*, Mém. sur l'interpolation, J. de math. 2 (1837), p. 193 [autogr. 1835]. Eine sehr einfache Darstellung mit Formelschema und Beispiel hat die Methode gefunden durch *Yvon Villarceau*, Méthode d'interpolation de M. Cauchy, Add. à la Conn. des Temps 1852, p. 129.

(23) z. B. eine nach Potenzen von t fortschreitende Reihe sein, so ist zu setzen $B = t$, $C = t^2, \ldots$ Ist der Zusammenhang von y und $A, B, \ldots$ nicht von vornherein linear, wie in (23) angenommen, so kann ein solcher doch durch Einführung von Näherungswerten der Unbekannten $a, b, \ldots$ hergestellt werden.

Von dem Wesen der Methode kann, ohne in den zwar übersichtlichen aber weitläufigen Formelapparat einzugehen, hier nur angeführt werden, dass es in der successiven Elimination der Unbekannten $a, b, \ldots$ aus dem linearen Gleichungssystem (23) besteht, was rechnerisch durch Einführung der sogenannten *„zugeordneten Summen“* (sommes subordonnées) gelingt. So benennt *Villarceau* die Summe z. B. von allen gegebenen Grössen y, nachdem jede einzelne mit $+1$ oder -1 multipliziert ist, je nachdem der zugehörige Argumentwert A positiv oder negativ ist; die Reihe der Argumentwerte A heisst die *Dominante*, da sie durch ihre Zeichen die Summe der y bestimmt.

Über den Zusammenhang der Cauchy'schen Methode mit dem allgemeinen Eliminationsproblem, mit der Ausgleichungsmethode nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate und mit den Tschebyscheff'schen Ausgleichungsmethoden, findet man die reichhaltige Litteratur angegeben und referiert in *Radau*, Études sur les formules d'interpolation Kap. II.

12. Interpolation durch die Exponentialfunktion. *R. Prony* interpoliert gegebene Grössen durch Verwendung von Exponentialfunktionen (J. éc. polyt. 1795, cah. 2, p. 24).

13. Interpolation bei zwei Variabeln. Handelt es sich um die interpolatorische Darstellung von periodischen Funktionen *zweier* Variabeln, so kann man Reihen verwenden, die nach den sin und cos der Vielfachen beider Argumente fortschreiten[29]) oder aber man kann eine Entwicklung nach Kugelfunktionen wählen. Wenn man über die Argumente nicht frei verfügen kann, müssen die unbestimmten Koeffizienten dieser Entwicklungen durch Auflösung eines linearen Gleichungssystemes — im Falle es sich um Beobachtungen handelt, unter Zugrundelage eines Ausgleichungsverfahrens [I D 2] — ermittelt werden; können für die Argumente aber ganz bestimmte Werte angenommen werden, so sind die Rechenvorschriften einer ausserordentlichen Vereinfachung fähig. Für die Entwicklung nach Kugelfunk-

29) Siehe u. a. *Leverrier*, Par. Observ. Ann. 1, 1855, p. 117. Vgl. noch *W. Bessel*, Berl. Abh. 1820/21, p. 55 = Ges. Abh. 2, p. 362.

tionen hat dies *Fr. Neumann*[30]) gezeigt. *H. Seeliger*[31]) hat hierzu Tafeln entworfen, die den Rechenprozess auf ein Minimum bringen.

14. Die Interpolationsmethoden von Tschebyscheff. Die *Tschebyscheff'schen Interpolationsmethoden*[32]) zeigen, wie die Konstanten A in der parabolischen Interpolationsformel:

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n$$

bestimmt werden können, wenn für eine Reihe verschiedener Werte von x, deren Zahl n weit übersteigt, der numerische Wert der eindeutigen und stetigen Funktion $F(x)$ gegeben ist. Dieselben haben durch *O. Backlund*[33]) und *P. Harzer*[34]) Darstellungen mit Beispielen und Hilfstafeln gefunden. *Radau*[35]) giebt gleichfalls eine vollständige Analyse derselben. Die beste Bestimmung der A ist natürlich die nach der Methode der kleinsten Quadrate; diese wird durch ein viel einfacheres Rechnungsverfahren ersetzt, das sich wenigstens mit dem Tschebyscheff'schen Apparat in Kürze nicht charakterisieren lässt. *H. Bruns*[36]) hat nachgewiesen, wie man ausgehend von der Fourier-schen Entwicklung auf einem geraden Wege zur Tschebyscheff'schen Interpolationsformel gelangen kann. —

In einer weiteren Abhandlung[37]) setzt *Tschebyscheff* eine Methode auseinander, welche die Koeffizienten der Entwicklung:

$$u = \varkappa_0 \psi_0(x) + \varkappa_1 \psi_1(x) + \cdots,$$

wo $\psi_\lambda(x)$ vom Grade λ in x ist, giebt, und zwar die im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate wahrscheinlichsten Koeffizienten. In

30) *Fr. Neumann*, Astronom. Nachr. 15 (1838), p. 313, abgedruckt Math. Ann. 14, p. 567. Siehe auch die ausführliche Darstellung in: Vorl. über das Potential etc. von *Fr. Neumann*, herausg. von *C. Neumann*, Leipz. 1887.

31) *Seeliger*, Über die interpolatorische Darstellung einer Funktion durch eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe, Münch. Ber. 20 (1890), p. 499.

32) Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données fournies par les observations, St. Pétersbourg Mém. (7) 1, n° 5, 1859 = Oeuvres 1, p. 387.

33) *Backlund*, Über die Anwendung einer von *P. Tschebyscheff* vorgeschlagenen Interpolationsmethode, St. Pétersbourg Mél. math. tirés du Bull. de l'Ac. 6, 1884.

34) *Harzer*, Über eine von *Tschebyscheff* angegebene Interpolationsformel, Astr. Nachr. 115 (1886), p. 337.

35) *Radau*, Études sur les form. d'Interpolation Kap. III.

36) *Bruns*, Astr. Nachr. 146, p. 161: „Über ein Interpolationsverfahren von Tschebyscheff", 1898.

37) *Tschebyscheff*, Sur les fractions continues, J. de math. (2) 3 (1858), p. 289 (traduit du Russe par J. Bienaymé) = Oeuvres 1, p. 203. Über *Tschebyscheff*'s einschlägige Leistungen siehe die Biographie von *A. Wassilieff*, Turin 1898 [Abdruck aus Bull. bibl. 1 (1898), p. 33, 81, 113].

der Note: Sur une nouvelle formule, St. Pétersb. Mél. math. et astr. 2, 1859, giebt er eine Methode zur leichten Berechnung dieser Koeffizienten, wenn die Argumente äquidistant sind. In der Abhandlung: „Sur l'interpolation par la méth. des moindres carrés" (St. Pétersbourg Mém. 1, 1859 = Oeuvres 1, p. 473) wird die Berechnung der Koeffizienten im allgemeinen Fall durch einen bequemen Kalkül gezeigt.

Dass die Methode der kleinsten Quadrate den einfachsten gemeinsamen Gesichtspunkt für eine grosse Klasse von Entwickelungen abgiebt, welche die Tschebyscheff'sche Formel, die Fourier'schen Reihen, die Entwickelung nach Kugelfunktionen und ähnliche Reihen — die wegen ihres interpolierenden Charakters „Interpolationsreihen" genannt werden — umfassen, hat *J. P. Gram*[38]) nachgewiesen.

38) *Gram,* J. f. Math. 94 (1883), p. 41 (zuvor in einer dänisch geschriebenen Diss. Kjöb. 1879).

I D 4 a. ANWENDUNGEN DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG AUF STATISTIK

VON

LADISLAUS VON BORTKIEWICZ

IN ST. PETERSBURG.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

W. Lexis, Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft. Freiburg i. B. 1877.

G. F. Knapp, Über die Ermittelung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Bevölkerungsstatistik. Leipzig 1868.

G. Zeuner, Abhandlungen aus der mathematischen Statistik. Leipzig 1869.

W. Lexis, Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik. Strassburg i/E. 1875.

Ausserdem die bei I D 1 angeführten Schriften von *Laplace, Poisson* und *Cournot.*

I. Allgemeine Probleme.

1. Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in die Statistik. Den ältesten Vertretern der sogenannten „*Politischen Arithmetik*" ist der Gedanke geläufig, dass in den numerischen Verhältnissen, mit denen sich dieser Wissenszweig beschäftigt, nur unter der Bedingung einer hinreichend grossen Zahl von Einzelbeobachtungen (von beobachteten Individuen) eine gewisse Regelmässigkeit hervortritt, worauf sich dann das methodologische Prinzip gründet, den statistischen Schlussfolgerungen und Vorausberechnungen ein möglichst ausgedehntes Beobachtungsfeld unterzulegen[1])[2]).

Für eine Verbindung dieses Standpunktes mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde indessen erst durch *Jac. I Bernoulli* [I D 1, Nr. 8] die Grundlage geschaffen, weil von ihm die Betrachtung der Ergebnisse wiederholter (zahlreicher) Versuche eingeleitet und die Unterscheidung zwischen der Wahrscheinlichkeitsbestimmung *a priori* und *a posteriori* zum erstenmal klar formuliert worden ist[3]). Nach Massgabe des „*Bernoulli*'schen Theorems" wurde es fortan möglich, die empirisch festgestellte Stabilität verschiedener statistischer Quotienten dadurch dem Verständnis im allgemeinen näher zu bringen, dass man dieselben als mehr oder weniger genaue Werte bestimmter, den in Frage stehenden Massenerscheinungen zu Grunde liegender Wahrscheinlichkeiten auffasste[4]). Hierin besteht der Kernpunkt der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik. Die Anwendung geht aber über eine lediglich *logische* hinaus und erhält einen *mathematischen* Inhalt erst wo es unternommen wird, den Grad der Annähe-

1) Vgl. z. B. über *Johan de Witt* (1625—1672) in den „Mémoires pour servir à l'histoire des assurances sur la vie et des rentes viagères aux Pays-Bas, publiés par la Société générale Néerlandaise d'assurances sur la vie", Amsterdam 1898, p. 27 u. 41—42.

2) In allgemeiner Form scheint den im Text erwähnten Gedanken zum erstenmal *G. J. 's Gravesande* (1737) ausgesprochen zu haben. Siehe *V. John*, Geschichte der Statistik, Stuttgart 1884, p. 233.

3) *E. Czuber*, Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen, Deutsche Math.-V. 7, Leipz. 1899, Nr. 31.

4) Es giebt Theoretiker der Statistik, welche eine Heranziehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Erklärung der Regelmässigkeit, die sich in den statistischen Ergebnissen äussert, bezw. zur Begründung der statistischen Methode nicht nur für überflüssig, sondern geradezu für verkehrt halten, wie z. B. *A. M. Guerry*, Statistique morale de l'Angleterre comparée avec la statistique morale de la France, Paris 1864, p. XXXIII fg. und *G. F. Knapp*, „Quetelet als Theoretiker" in Hildebrand's Jahrb. f. Nat.-Oekonomie u. Stat. 18 (1872), p. 116—119.

rung jener empirischen Quotienten an die betreffenden abstrakten Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, beziehungsweise die methodologische Forderung nach einem grossen Beobachtungsfelde numerisch zu präzisieren.

2. Die von Laplace begründeten Methoden zur Bestimmung des Genauigkeitsgrades statistischer Ergebnisse, Schlussfolgerungen und Konjekturalberechnungen. Eine Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik in dem zuletzt angedeuteten Sinne setzt eine entsprechende analytische Formulierung des *Bernoulli*'schen Theorems voraus, welche in der bekannten bequemen Form, die sich seither eingebürgert hat, gegeben zu haben, wie man weiss, das Verdienst von *S. Laplace* ist [I D 1, Nr. **12**, **14**]. Er benutzte auch selbst die Resultate seiner hierher gehörenden analytischen Untersuchungen, und zwar zum Teil noch ehe es ihm gelungen war denselben die erwähnte endgiltige Form zu verleihen, zur Lösung gewisser statistischer Fragen. Auf ihren allgemeinsten, einfachsten und für die Statistik massgebenden Ausdruck gebracht, lauten die hierbei in Betracht kommenden Sätze wie folgt:

1. Ist in m bezw. n aus s Fällen ein bestimmtes Ereignis eingetreten bezw. ausgeblieben und bedeutet p die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses bei jedem einzelnen Fall, so wird die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Quotient $\frac{m}{s}$ in den Grenzen $p \mp z$ enthalten ist, wenn s eine grosse Zahl ist, mit hinlänglicher Genauigkeit durch:

$$P_t = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

ausgedrückt, wobei:

$$t = z\sqrt{\frac{s^3}{2mn}}$$

zu setzen ist (I D 1, Nr. **14**).

2. Liegen zwei analoge Beobachtungsreihen vor, denen die Beobachtungs- und Ereigniszahlen s, m, n bezw. s', m', n' und die Wahrscheinlichkeiten p bezw. p' entsprechen, und hat sich bei den Quotienten $\frac{m}{s}$ und $\frac{m'}{s'}$ eine positive Differenz $\delta = \frac{m'}{s'} - \frac{m}{s}$ ergeben, so wird durch $\frac{1}{2}(1 + P_t)$ die Wahrscheinlichkeit ausgedrückt, dass p' grösser sei als p, wobei:

$$t = \delta \sqrt{\frac{s^3 s'^3}{2(mns'^3 + m'n's^3)}}$$

zu setzen ist[5])[6]).

5) *Laplace* Mémoire sur les probabilités, Nr. 26 (Par. Hist. 1778 [81] =

3. Sind unter bestimmten Verhältnissen Ereignisse (Thatsachen) von zwei verschiedenen Arten a bezw. b male beobachtet worden und ist für eine andere analoge Beobachtungsgruppe nur die eine der betreffenden Zahlen, z. B. a' gegeben, so lässt sich die Unbekannte b' aus der Formel $b' = \frac{b}{a} a'$ ermitteln, wobei die Wahrscheinlichkeit für die Differenz $b' - \frac{b}{a} a'$, in den Grenzen $\mp z$ enthalten zu sein, wiederum in P_t ihren Ausdruck findet und t sich aus der Gleichung

$$t = z \sqrt{\frac{a^3}{2a'b(a+a')c}}$$

bestimmt, in welcher für c entweder $a+b$ oder $a-b$ oder $b-a$ zu setzen ist, je nachdem man die Quotienten $\frac{b}{a}$ und $\frac{b'}{a'}$ als Näherungswerte von $\frac{p}{1-p}$ oder von p oder von $\frac{1}{p}$ betrachtet, wo p die Wahrscheinlichkeit eines einfachen Ereignisses bedeutet [7]).

Oeuvres 9, p. 383), Suite du mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres, Nr. 38—40 (Par. Hist. 1783 [86] = Oeuvres 10, p. 295) und Théorie analytique des probabilités (Oeuvres 7), Livre II, Nr. 29. *Laplace* wendet die betreffenden Formeln auf die Frage des Zahlenverhältnisses an, in welchem die geborenen Knaben zu den geborenen Mädchen stehen.

6) Von *Poisson* (Recherches sur la probabilité des jugements, Paris 1837, Nr. 88) rührt eine Verallgemeinerung dieses Satzes her, welche darin besteht, nach der Wahrscheinlichkeit zu fragen, dass die Wahrscheinlichkeit p' zum mindesten um den positiven Betrag ε die Wahrscheinlichkeit p übertreffe. Hierbei muss der Faktor δ in dem Ausdruck für t durch $\delta - \varepsilon$ ersetzt werden, wobei die Grösse ε so zu wählen ist, dass $\delta > \varepsilon$.

7) *Laplace*, Sur les naissances, les mariages et les morts à Paris etc. (Par. Hist. 1783 [86], p. 693 fg. = Oeuvres 11, p. 35). Hier bedeuten a und b die Zahlen der jährlichen Geburten bezw. der Einwohner in einer bestimmten Anzahl der Gemeinden Frankreichs und a' und b' die entsprechenden Zahlen für das ganze Königreich. Dabei wird jedes existierende Individuum einer gezogenen weissen und jede Geburt einer gezogenen schwarzen Kugel gleich geachtet. Der Quotient $\frac{b}{a}$ wird also als Näherungswert von $\frac{p}{1-p}$ behandelt. Dagegen in der Théorie anal. d. prob., livre 2, Nr. 31, wo *Laplace* die Frage der Ermittlung der Bevölkerungszahl Frankreichs auf Grund einer partiellen Volkszählung und der Geburtenstatistik von neuem untersucht, vergleicht er die Bevölkerungszahl mit der Zahl der überhaupt gezogenen Kugeln und die Geburtenzahl mit der Zahl der gezogenen weissen Kugeln. Dementsprechend erscheint $\frac{b}{a}$ als Näherungswert von $\frac{1}{p}\cdot$ Schliesslich bietet *Laplace* in Nr. 30 der Theorie etc. ein statistisches Beispiel für den Fall, dass $\frac{b}{a}$ annähernd die Wahrscheinlichkeit p ausdrückt.

Die angeführten drei Sätze werden nun entweder in direkter oder in indirekter Weise für die Zwecke der Statistik verwertet. Im ersten Fall geht man auf die Berechnung von P_t, mit anderen Worten darauf aus, den „Sicherheitsgrad" (die „relative Vertrauenswürdigkeit") gewisser statistischer Resultate zu bestimmen. Im zweiten Fall wird das Argument t gleich einem Werte, wie z. B. 2 (*Poisson*[8]) oder 3 (*Lexis*[9]) gesetzt, welchem eine Wahrscheinlichkeit P_t bezw. $\frac{1}{2}(1 + P_t)$ entspricht, die praktisch als Gewissheit betrachtet werden kann, wodurch zweierlei möglich wird: 1) die äusserste Abweichung des gefundenen empirischen Wertes irgend eines statistischen Quotienten von der ihm zu Grunde liegenden mathematischen Wahrscheinlichkeit, oder die äusserste Differenz zwischen zwei empirischen Werten eines solchen Quotienten, welche noch dem Zufall zugeschrieben werden kann, oder schliesslich den äussersten Fehler, mit welchem eine „Konjekturalberechnung" wie die oben erwähnte behaftet ist, zu bestimmen und 2) anzugeben, wie viele Beobachtungen gemacht werden müssen, damit die betreffende Abweichung bezw. die betreffende Differenz bezw. der betreffende Fehler eine bestimmte Grenze nicht überschreitet (hierbei wird die angenäherte Kenntnis der in Betracht kommenden Wahrscheinlichkeit p stets vorausgesetzt).

3. Verbreitung dieser Methoden zumal unter dem Einflusse Poisson's. Diese verschiedenen Modi der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik haben im weiteren Verlauf der Entwicklung der statistischen Forschung eine ungleiche Verbreitung gefunden. Am seltensten wurde der Genauigkeitsgrad von Konjekturalberechnungen der erwähnten Art ermittelt und zwar aus dem Grunde, weil mit dem entschiedenen Fortschritt, den die erschöpfende Massenbeobachtung der gesellschaftlichen Erscheinungen im 19. Jahrhundert gemacht hat, die Statistik von jenen Konjekturalberechnungen, welche sie in ihren Anfängen geradezu beherrschten[10]), allmählich abgekommen ist[11]). Relativ häufig wurde dagegen zu einer direkten Anwendung des zweiten der angeführten Sätze gegriffen, nament-

---

8) Recherches sur la prob. d. jug., p. 372 fg. Vgl. *J. Gavarret*, Principes généraux de statistique médicale, Paris 1840, p. 257.

9) Einleitung in d. Th. der B.-S. Nr. 80 fg.

10) Vgl. *J. Graunt*, Natural and political observations etc., London 1661, Kap. VII fg. und *W. Petty*'s Essays in Political Arithmetic, London 1683, z. B. Of the Growth of the city of London etc.

11) Zu vgl. jedoch *A. N. Kiär*, Die repräsentative Untersuchungsmethode. Allg. Statist. Archiv 5 (1898), p. 1 fg.

lich in der medizinischen (therapeutischen) Statistik (zum Zwecke der Ergründung der Wirksamkeit verschiedener Heilmethoden), weil auf diesem Gebiete die Eliminierung des Zufalls wegen der verhältnismässigen Kleinheit der Beobachtungszahlen, über die man in der Regel verfügt, von besonderer Wichtigkeit ist[12]). Überhaupt hat es aber über ein halbes Jahrhundert gewährt, bis die von *Laplace* aufgestellte Forderung nach einer numerischen Präzisierung des Zuverlässigkeitsgrades statistischer Ergebnisse bezw. nach einer methodischen Rücksichtnahme auf die zufälligen Abweichungen auf diesem Gebiete eine einigermassen allgemeinere Beachtung fand. Dazu hat *Poisson* wesentlich beigetragen, indem er es verstanden hat, dem *Bernoulli*'schen Theorem eine Fassung zu geben, welche es geeignet zu machen schien, auf sämtliche in der Statistik vorkommenden Fälle angewendet zu werden, ohne dass dabei die von *Laplace* begründeten Methoden zur Präzisierung der relativen Sicherheit statistischer Ergebnisse eine Änderung zu erfahren hätten, weil in demjenigen Schema, welches *Poisson* für eine Verallgemeinerung des *Bernoulli*'schen ausgab und als „den Fall variabler Chancen" bezeichnete, die Spielräume für die Wirkung der zufälligen Ursachen die alten (von *Laplace* gefundenen) blieben[13]).

---

12) *Double* und *Navier* in Par. C. R. **1** (1835), p. 167 fg. und p. 247 fg., *Gavarret*, die in Fussnote 8 genannte Schrift, *C. Liebermeister*, Über Wahrscheinlichkeitsrechnung in Anwendung auf therap. Stat. 1877 (Sammlung klinischer Vorträge Nr. 110) und *J. v. Kries*, Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Freiburg i. B. 1886, Kap. IX, Nr. 10 und 11.

13) I D 1, Nr. **13**. *Gavarret* a. a. O. vertritt die Ansicht, dass erst durch *Poisson*'s Untersuchungen über den Fall „variabler Chancen" eine Grundlage für die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf medizinische Statistik geschaffen worden ist. Dem entgegen sind *J. Bienaymé* (L'Inst. 7, 1839, p. 188) und *A. Cournot* (Exposition de la théorie des chances et des probabilités, Paris (1843), Nr. 76) der Meinung, dass der von *Poisson* construierte Fall „variabler Chancen" nichts neues bietet gegenüber dem betreffenden von *J. Bernoulli* und nachher von *Laplace* behandelten Schema, welch' letzteres *Poisson* als den Fall „konstanter Chancen" bezeichnet. Man vergleiche dazu meine „Kritischen Betrachtungen zur theoretischen Statistik", 1. Art. (Jahrb. f. Nat.-Ök. u. Stat., 3. Folge, 8 [1894], p. 653—665), wo u. a. betont wird, dass es *Poisson* besonders darauf ankam nachzuweisen, dass in beiden genannten Fällen die gesuchte Wahrscheinlichkeit des in Betracht kommenden einfachen Ereignisses sich in derselben Weise und mit dem nämlichen Präzisionsgrad aus der Erfahrung bestimmen lässt (Recherches etc., p. 149—150). Wohl findet sich in der Vorrede (Préambule) zu den „Recherches" eine Stelle (p. 7), worin es heisst, dass die relative Stabilität der Quotienten, welche als Näherungswerte einer bestimmten Wahrscheinlichkeit erscheinen, im Falle variabler Chancen von der grösseren oder kleineren Amplitude der Variationen abhängt, denen die in Betracht kom-

4. Bienaymé's und Cournot's Lehre von den solidarisch wirkenden zufälligen Ursachen. Gegen die von *Poisson* aufgestellte Behauptung von der Allgemeingiltigkeit des Schemas „variabler Chancen" trat *J. Bienaymé* auf, welcher durch den Versuch, die *Laplace*'schen Formeln an den Daten der Statistik zu verifizieren, zu der Erkenntnis geführt wurde, dass die von der Theorie für die Schwankungen statistischer Quotienten vorgezeichneten Grenzen auch in dem Falle, wo die betreffenden Schwankungen noch als zufällige erscheinen, gewöhnlich nicht unerheblich überschritten würden. Um ein derartiges Verhalten der statistischen Zahlen mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Einklang zu bringen, modifizierte *Bienaymé* das *Poisson*'sche Schema durch die Einführung der „Hypothese von der Dauer der Ursachen".

Es sei das in Betracht kommende Chancensystem, welches mit der Wahrscheinlichkeit c_0 ein bestimmtes Ereignis hervorbringt, durch die Werte $g_1, g_2, \ldots, g_\nu$ und $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$ charakterisiert, von denen die ersteren die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Ursachen und die letzteren die Wahrscheinlichkeiten des betreffenden Ereignisses unter der Voraussetzung des Wirksamwerdens jener verschiedenen Ursachen angeben. Sind ferner s und m die entsprechenden

---

menden zufälligen Ursachen unterworfen sind; die Erfahrung selbst, bemerkt *P.*, wird in jeder einzelnen Frage erkennen lassen, ob die betreffende Reihe von Beobachtungen hinlänglich fortgesetzt worden ist (sc. damit bei der aposteriorischen Ermittelung der in Frage stehenden Wahrscheinlichkeit der gewollte Annäherungsgrad erzielt wird). Die citierte Stelle kann aber schon aus dem Grunde nicht als massgebend erachtet werden, weil sie der ganzen Darlegung im Text direkt widerspricht. Diese Stelle sowie eine ähnlich lautende auf S. 12 der genannten Vorrede sind übrigens einem älteren Mémoire von *Poisson* (Par. C. R. 1 [1835], p. 478—479 u. 481) wörtlich entnommen, wie denn überhaupt die ganze Vorrede zu den „Recherches" nicht viel mehr als einen Abdruck dieses Mémoire darstellt und es lässt sich vermuten, dass *Poisson* im Jahre 1835 jene völlige Gleichheit der beiden Fälle konstanter und variabler Chancen, welche in Bezug auf die Spielräume für die Wirkung zufälliger Ursachen besteht, noch nicht festgestellt hatte. Es ist ausserdem wichtig, dass in dem énoncé des Gesetzes der grossen Zahlen, welches sich in den Par. C. R. 2 (1836), p. 604—605 findet, von der Amplitude der Variationen der zufälligen Ursachen als einem Faktor, der die erwähnten Spielräume mit bestimmen sollte, keine Rede mehr ist. Die in obigem besprochenen Stellen der Vorrede zu den „Recherches" werden es wohl gewesen sein, die *A. Quetelet* (Lettres sur la théorie des probabilités, Bruxelles 1846, p. 213) und anscheinend auch *Gavarret* (Op. c. p. 74) zu der irrigen Meinung verleitet haben, als ob im Fall variabler Chancen mehr Beobachtungen als im Fall konstanter Chancen nötig wären, um mit einem gegebenen Präzisionsgrad den Wert einer bestimmten Wahrscheinlichkeit aus der Erfahrung zu ermitteln.

Beobachtungs- und Ereigniszahlen, so wird die Wahrscheinlichkeit für die Abweichung $\frac{m}{s} - c_0$, in den Grenzen $\mp z$ enthalten zu sein, nach *Poisson* [I D 1, Nr. 13] durch P_t ausgedrückt, wobei:

$$z = t \sqrt{\frac{2 c_0 (1 - c_0)}{s}}$$

und $c_0 = [g_i c_i]$. (Wegen der Bedeutung des Klammerzeichens s. I D 2, Nr. 8.) Dies gilt jedoch nur für den Fall, wo die einzelnen Beobachtungen von einander vollständig unabhängig sind oder, mit anderen Worten, wo bei jeder einzelnen Beobachtung die massgebende unter den ν verschiedenen Ursachen sich von neuem durch Zufall bestimmt.

In dem anderen Falle aber, wo die jedesmal wirksam werdende Ursache während der Dauer von je k Beobachtungen fortwirkt, wird nach *Bienaymé* die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung $\frac{m}{s} - c_0$, welche in den Grenzen $\mp z$ liegt, unter der Voraussetzung, dass $\frac{s}{k}$ eine grosse Zahl ist, auch noch durch P_t ausgedrückt, nur dass in diesem Fall die neue Beziehung:

$$z = t \sqrt{\frac{2 c_0 (1 - c_0)}{s} + \frac{2(k-1)}{s} [g_i (c_i - c_0)^2]}$$

platzgreift.

Aus letzterer Formel ersieht man, dass in dem von *Bienaymé* konstruierten Schema die Spielräume für die Wirkung der zufälligen Ursachen sich im Vergleich zu dem *Poisson*'schen Schema erweitern und zwar um so beträchtlicher, je grösser auf der einen Seite die Zahl k und auf der anderen Seite der Faktor $[g_i(c_i - c_0)^2]$ sind. Aber gerade diejenigen Erscheinungen, meint *Bienaymé*, deren Umstände (circonstances) uns am besten bekannt sind, bieten unzweifelhafte Beispiele der gekennzeichneten „Dauer der Ursachen" dar. Mithin seien die relativ grossen Schwankungen der statistischen Quotienten vom Standpunkte des neuen Schemas begreiflich und können sich also gegebenen Falles mit der Voraussetzung eines konstanten Chancensystems wohl vertragen, wenn nur die in Betracht kommenden Ursachen serienweise variieren. Hierbei sei lediglich der Einfachheit halber angenommen worden, dass die betreffenden Beobachtungsserien, innerhalb deren kein Ursachenwechsel stattfindet, aus je k Beobachtungen bestehen. Nichts hindere aber daran, die Zahl k selbst in der einen oder der anderen Weise variieren zu lassen[14]).

---

14) L'Institut 7 (1839), p. 187—189.

Der in obigem wiedergegebenen Auffassung *Bienaymé*'s ist *A. Cournot* beigetreten, welcher seinerseits auf der Notwendigkeit besteht, auf statistischem Gebiet zwischen den zufälligen Einflüssen zu unterscheiden, welche eine jede Beobachtung unabhängig von den mit ihr zu einer gemeinsamen Reihe verbundenen Beobachtungen affizieren, und anders gearteten Einflüssen, welche auf die ganze Beobachtungsreihe oder einen Teil derselben *solidarisch* einwirken und nichtsdestoweniger noch zufällige in dem Sinne sind, dass sie unregelmässig von Serie zu Serie variieren und dass die Wirkungen ihrer Variationen sich bei grossen Zahlen von Serien, mithin bei sehr grossen Zahlen von Individualfällen kompensieren[15]). *Cournot* hat die Gedanken seines Vorgängers in zutreffender Weise weiter ausgeführt, ohne im übrigen an den von jenem aufgestellten Formeln etwas zu ändern und ohne empirisch-statistische Belege für den neuen Standpunkt beizubringen.

5. Die Lexis'sche Dispersionstheorie. Viel später hat es *W. Lexis* unternommen zu prüfen, inwiefern verschiedene statistische Quotienten bei den zeitlichen Schwankungen, denen sie unterworfen sind, die Grenzen einhalten, welche für die Wirkung der zufälligen Ursachen nach *Laplace* und *Poisson* massgebend seien. Das von *Lexis* zu diesem Zweck angewandte Verfahren bestand darin, zuzusehen, wie die Einzelwerte $p_1', p_2', p_3', \ldots, p_\sigma'$ eines bestimmten statistischen Quotienten, welche aufeinanderfolgenden Zeitabschnitten entsprechen, sich um ihren Mittelwert $p_0' = \frac{1}{\sigma}[p_i']$ gruppieren. Setzt man der Einfachheit halber voraus, dass einem jeden von den genannten Einzelwerten s Individualbeobachtungen (beobachtete Individuen) zu Grunde liegen, so wäre zu erwarten, falls es sich um Näherungswerte einer bestimmten Wahrscheinlichkeit p und um völlig von einander unabhängige Einzelbeobachtungen handelte, dass sich jene Werte, nach ihrer Grösse geordnet, bei hinreichend grossem s und nicht allzukleinem σ, annähernd nach Massgabe der Funktion P_t um p_0' herum verteilen werden, wobei zwischen dem Argument t und der Veränderlichen z, welche die positiv genommene Abweichung eines empirischen Wertes p_i' von der abstrakten Wahrscheinlichkeit p darstellt, die Beziehung bestehen müsste: $t = z\sqrt{\frac{s}{2p(1-p)}}$. Die Konstante $\frac{t}{z} = h$ nennt *Lexis* im Anschluss an einen in der Methode der kleinsten Quadrate eingebürgerten Sprachgebrauch (I D 2, Nrn. 2, 4, 8) „Präzision". Demnach

15) Exposition etc. Nrn. 79 und 117.

erscheint $\frac{1}{h\sqrt{2}} = \mu$ als der mittlere Fehler von p_i'. Näherungswerte von h und μ werden nun auf der einen Seite durch die Ausdrücke $\sqrt{\frac{s}{2p_0'(1-p_0')}}$ bezw. $\sqrt{\frac{p_0'(1-p_0')}{s}}$ geliefert, welche in folgendem mit h' und μ' bezeichnet werden mögen. Auf der anderen Seite kann aber der mittlere Fehler von p_i' unmittelbar aus den beobachteten Abweichungen $p_i' - p_0'$ näherungsweise bestimmt werden; und führt man die Bezeichnungen μ'' bezw. h'' für $\sqrt{\frac{1}{\sigma - 1}[(p_i' - p_0')^2]}$ bezw. $\sqrt{\frac{\sigma - 1}{2[(p_i' - p_0')^2]}}$ ein, so müsste obige Erwartung bezüglich des Verhaltens der Werte $p_1', p_2', \ldots, p_\sigma'$ offenbar darin ihren summarischen Ausdruck finden, dass die Gleichung $h' = h''$ bezw. $\mu' = \mu''$ wenigstens annähernd erfüllt ist. In dem Fall, wo dies zutrifft, spricht *Lexis* von *normaler Dispersion*, d. h. von einer derartigen Verteilung der Werte $p_1', p_2', \ldots, p_\sigma'$ um p_0', welche mit der Vorstellung vereinbar sei, dass diesen Werten eine gemeinsame Wahrscheinlichkeit p zu Grunde liegt und auf die betreffende statistische Massenerscheinung das Schema eines gewöhnlichen Zufallsspieles [I D 1, Nr. **18**] oder auch das *Poisson*'sche Schema variabler Chancen anwendbar ist. Weichen aber die Grössen h' und h'' bezw. μ' und μ'' beträchtlich von einander ab, so hat man es entweder mit einer *übernormalen* oder *unternormalen* Dispersion zu thun, je nachdem die Ungleichungen $h' > h''$ bezw. $\mu' < \mu''$ oder umgekehrt $h' < h''$ bezw. $\mu' > \mu''$ platzgreifen. Doch wird auch in diesen beiden Fällen angenommen, dass sich die Werte $p_1', p_2', \ldots, p_\sigma'$ nach Massgabe der Funktion P_t um p_0' herum gruppieren, nur dass das Argument t sich nicht mehr, wie in dem Fall der normalen Dispersion, aus einer der Gleichungen $t = zh'$ oder $t = zh''$, sondern ausschliesslich aus der zweiten dieser Gleichungen bestimmen lässt. Einer übernormalen Dispersion würde die Vorstellung entsprechen, dass die betreffende abstrakte Wahrscheinlichkeit, als deren Näherungswerte die Grössen $p_1', p_2', \ldots, p_\sigma'$ erscheinen, nicht mehr konstant bleibt, sondern ihrerseits zufällige, dem Exponentialgesetz [I D 2, Nrn. 2, 4] sich fügende Änderungen erfährt. Dagegen würde eine unternormale Dispersion auf einen besonderen inneren Zusammenhang der Einzelereignisse, aus denen sich die betreffende Massenerscheinung zusammensetzt, hindeuten.

Vom Standpunkte der angeführten theoretischen Erörterungen untersuchte *Lexis* eine Anzahl statistischer Quotienten auf den Grad ihrer Stabilität hin und fand, dass die straffste Formel, in welche sich menschliche Massenerscheinungen erfahrungsmässig einfügen lassen, die der normalen Dispersion sei. Letztere ist namentlich bei dem Zahlenverhältnis, in welchem die geborenen Mädchen zu den geborenen Knaben stehen, (und zum Teil auch bei dem analogen Verhältnis zwischen den Zahlen der Verstorbenen) nachweisbar. Hier zeigt sich für verschiedene Länder und Zeiträume eine bemerkenswerte Übereinstimmung zwischen den von der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Grund der *Laplace*'schen Formeln für die Schwankungen der betreffenden Zahlenwerte vorgezeichneten Grenzen und denjenigen Grenzen, in denen sich diese Zahlenwerte thatsächlich bewegen. Eine Gegenüberstellung der Werte h' und h'' ergiebt zwischen beiden nur solche Unterschiede, deren zufälliger Ursprung ausser Zweifel steht. Aber für verschiedene andere, dem Gebiete der Bevölkerungs- und der Moralstatistik entnommene Quotienten stellte *Lexis* fest, dass die aus denselben gebildeten Reihen durch eine stark ausgesprochene Ungleichheit der Grössen h' und h'' sämtlich charakterisiert sind, wobei sich stets ergiebt, dass die erste dieser Grössen die zweite — und zwar oft um ein vielfaches — übertrifft. Zugleich gestattet die Art, wie sich die Einzelwerte eines bestimmten Quotienten um den entsprechenden Mittelwert gruppieren, nur ausnahmsweise einen einigermassen sicheren Schluss darauf, dass im gegebenen Fall übernormale Dispersion vorläge, weil eine Unterwerfung der Abweichungen jener Einzelwerte vom Mittel unter das Exponentialgesetz in den meisten Fällen nicht zu erwirken ist. Wenn nun aber eine statistische Grösse, ohne sich bei ihren Variationen nach jenem Gesetze zu richten, dennoch eine gewisse Stabilität aufweist, so hätte man, meint *Lexis*, „ein rein empirisches Gleichbleiben der beobachteten Verhältniszahlen, das mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung keinen bestimmten Zusammenhang besitzt. Insbesondere ist es dann auch ein rein empirischer Schluss, dass die Beobachtungen des nächsten Jahres wieder ein ungefähr gleiches Verhältnis ergeben werden; denn wir sind nicht berechtigt, nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung Fehlergrenzen für das Ergebnis der nächstjährigen Beobachtungen anzugeben, wenn in der vorliegenden längeren Reihe von Jahren die Abweichungen der Einzelresultate vom Mittel sich so ganz und gar abweichend von der Wahrscheinlichkeitstheorie verteilen“[16]).

---

16) *Lexis*, Zur Theorie der Massenerscheinungen, Nr. 23. Man vgl. auch: Das Geschlechtsverhältnis der Geborenen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung in den Jahrbüchern für Nat.-Ök. u. Statistik von *Hildebrand-Conrad*, 27, 1876, p. 209 fg. Über die Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren Anwendung auf die Statistik, ebendaselbst, Neue Folge 13, 1886, p. 433 fg. Im Handwörterbuch der

In den Ergebnissen seiner Untersuchungen begegnete sich *Lexis* mit *E. Dormoy* [17]), welcher unabhängig von ihm auf den Gedanken gekommen war, in ähnlicher Weise die erwartungsmässigen Schwankungen verschiedener statistischer Quotienten mit ihren effektiven Schwankungen zu vergleichen. Dabei hielt sich aber *Dormoy* im Gegensatz zu *Lexis* [18]) nicht an den mittleren, sondern an den durchschnittlichen Fehler [I D 2, Nr. 8], d. h. an das arithmetische Mittel aus den positiv genommenen Abweichungen der Werte $p_1', p_2', \ldots, p_\sigma'$ von p_0'. Der theoretische Wert dieses durchschnittlichen Fehlers ist $\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$, wo $h = \sqrt{\frac{s}{2p(1-p)}}$, und als empirische Werte desselben ergeben sich auf der einen Seite $\varepsilon' = \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{p_0'(1-p_0')}{s}}$ und auf der anderen Seite $\varepsilon'' = \frac{1}{\sigma}[\pm(p_i' - p_0')]$. Das Verhältnis $\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$ nannte *Dormoy* „coefficient de divergence“ und fand, dass dasselbe nur in dem Beispiel des Geschlechtsverhältnisses der Geborenen von der Einheit wenig verschieden ist, in den sonstigen Beispielen aber viel grössere Werte annimmt.

6. Das Schema einer serienweise variierenden Wahrscheinlichkeit und dessen Anwendung auf die Statistik. Es ist das Charakteristische der besprochenen Untersuchungen, aus denen sich als allgemeine Regel eine weitgehende Discrepanz zwischen den Erwartungen der Theorie und den Thatsachen der Statistik ergeben hatte, dass den betreffenden Quotienten stets grosse Beobachtungszahlen entsprachen. Als sich aber *Lexis* statistischen Reihen mit mässigen Beobachtungszahlen zuwandte, konstatierte er im allgemeinen eine viel grössere Annäherung an die Erfüllung des Kriteriums einer normalen Dispersion, indem sich für die Grösse $\frac{h'}{h''}$ oder $\frac{\mu''}{\mu'}$, die man kurz *Fehlerrelation* nennen und mit Q' bezeichnen mag, Zahlenwerte herausstellten, die in der Regel nicht bedeutend von der Einheit abwichen [19]). Zur Erklärung dieses auf den ersten Blick auffallenden Resultats schlug *Lexis* das Schema einer serienweise variierenden

---

Staatswissenschaften, 1890—94 die Art. Gesetz, Geschlechtsverhältnis der Geborenen und der Gestorbenen, Moralstatistik, Statistik.

17) Théorie mathématique des assurances sur la vie, Paris 1878, 1, Nr. 39—56 und Journal des actuaires français 3 (1874), p. 432 fg.

18) Vgl. jedoch: Zur Theorie der Massenerscheinungen, Nr. 46.

19) Über die Theorie der Stabilität statistischer Reihen, in den Jahrbüchern f. Nat.-Ök. u. Stat. 32, 1879, p. 60 fg.

Wahrscheinlichkeit vor, welches darin besteht, dass jedem der Einzelwerte p_i' eine besondere abstrakte Wahrscheinlichkeit p_i zu Grunde liegt, wobei innerhalb einer jeden von den σ Beobachtungsserien, aus denen sich die betreffende statistische Reihe zusammensetzt, eine völlige Unabhängigkeit der Einzelbeobachtungen stattfindet. Es lässt sich nun zeigen, dass in diesem Fall der erwartungsmässige Wert von Q' nicht mehr gleich 1, sondern gleich einer Grösse Q ist, welche sich aus der Formel:

$$Q = \sqrt{1 + (s-1)\frac{[(p_i - p_0)^2]}{\sigma p_0 (1 - p_0)}}$$

bestimmt, wo $p_0 = \frac{1}{\sigma}[p_i]$.[20]) Bedenkt man, dass der Faktor $\frac{[(p_i - p_0)^2]}{\sigma p_0 (1 - p_0)}$ von der Grösse der Beobachtungszahl (s) unabhängig ist, so wird es klar, dass, eine bestimmte Reihe abstrakter Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_\sigma$ vorausgesetzt, die entsprechende empirische Reihe $p_1', p_2', \ldots, p_\sigma'$ einen erwartungsmässig um so kleineren Wert von Q' liefern wird, je weniger zahlreich die Einzelbeobachtungen sind, auf denen ein jeder der Werte p_i' beruht. Damit aber die Grösse Q und deren Näherungswert Q' gegebenen Falls der Einheit nahe kommen, muss allerdings noch die Bedingung erfüllt sein, dass die betreffende abstrakte Wahrscheinlichkeit entsprechend kleine Variationen erfährt. Dass letzteres bei den meisten Erscheinungen, die zur Bevölkerungs- und Moralstatistik gehören, in der Regel zutreffen dürfte, ist an sich sehr wahrscheinlich und so wird es möglich, mit Hülfe der Vorstellung von einer serienweise variierenden Wahrscheinlichkeit das eigentümliche Verhalten der Fehlerrelation zu erklären, welche erfahrungsgemäss bei verhältnissmässig kleinen Beobachtungszahlen um 1 oscilliert, während sie bei grösseren Beobachtungszahlen für Erscheinungen derselben Art erheblich grösser ausfällt[21]). Es lässt sich also nicht nur für den Fall des Geschlechtsverhältnisses der Geborenen, sondern, wie es scheint, ziemlich allgemein eine gewisse, wenn auch etwas verschieden geartete, Übereinstimmung zwischen

20) Der angeführte Ausdruck für Q ist in meinem „Gesetz der kleinen Zahlen", Leipzig 1898, § 14 abgeleitet. In der entsprechenden Formel bei *Lexis*, welche auf einer nicht ganz strengen Beweisführung beruht, steht s an Stelle von $s - 1$.

21) Das Schema einer serienweise variierenden Wahrscheinlichkeit ist übrigens nur als ein mehr oder weniger grober Ausdruck der thatsächlichen Gestaltung der Chancensysteme aufzufassen, welche dem statistischen Geschehen zu Grunde liegen. Über das Verhältnis dieses Schemas zu demjenigen *Bienaymé*'s vgl. mein „Gesetz der kleinen Zahlen", Anlage 2.

Theorie und Erfahrung bei den zeitlichen Schwankungen statistischer Quotienten erzielen. Aus solch' einer Übereinstimmung kann aber, nach *Lexis*, überhaupt erst die Berechtigung dazu entnommen werden, statistische Relativzahlen als Näherungswerte mathematischer Wahrscheinlichkeiten aufzufassen, mithin die Begriffe „Chancensystem", „zufällige Ursachen" und dergleichen mehr in die Statistik einzuführen. Durch letzteres wird ein richtigerer Einblick in das Wesen der statistischen Regelmässigkeiten gewonnen und werden namentlich die Anschauungen derer hinfällig, welche zur Erklärung der Stabilität statistischer Zahlen „einen naturgesetzlichen, auf die Herstellung der Konstanz gerichteten inneren Zusammenhang der Einzelerscheinungen annehmen" zu müssen glaubten[22]). Was aber den mehr praktischen Zweck betrifft, mit den Mitteln der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Fehlergrenzen für ein unbekanntes (zukünftiges) statistisches Ergebnis zu bestimmen — worin *Laplace* die eigentliche Funktion der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf diesem Gebiete erblickte — so erweisen sich (sofern wenigstens grosse Beobachtungs- und Ereigniszahlen in Betracht kommen) jene Mittel als untauglich und das ganze Verfahren als ein illusorisches überall dort, wo zu dem Schema einer serienweise variierenden Wahrscheinlichkeit gegriffen werden muss (somit in der überaus grossen Mehrzahl der Fälle), weil die Variationen der betreffenden Wahrscheinlichkeit nicht auch ihrerseits auf Chancenkombinationen (Wahrscheinlichkeitsgesetzen) zu beruhen brauchen.

Die Dispersionstheorie von *Lexis* ist nach der logischen und erkenntnistheoretischen Seite hin von *J. von Kries*[23]) weiter ausgeführt worden. Statistische Untersuchungen über die Dispersionsverhältnisse verschiedener Quotienten sind *J. Lehr*[24]), *H. Westergaard*[25]) und *F. Y. Edgeworth*[26]) zu verdanken. Letzterer ist, obschon in unmittelbarer Anlehnung an die *Lexis*'schen Untersuchungen, verschiedentlich über die Grenzen, in denen sich jene bewegen, hinausgegangen und hat auch die eigentliche Theorie der Frage bis zu einem gewissen Grade

---

22) *Lexis*, im Handwörterbuch der Staatswiss. 2. Aufl. Bd. 4, p. 239.

23) Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Freiburg i. B. 1886. Kap. IV, Nr. 9; Kap. VI u. IX.

24) Zur Frage der Veränderlichkeit statistischer Reihen, in der Vierteljahrsschrift f Volkswirtschaft u. s. w., 101 (1888), p. 3 fg.

25) Die Grundzüge der Theorie der Statistik, Jena 1890.

26) On Methods of Statistics in Jubilee Volume of the Statistical Society, London 1885, und zahlreiche Artikel in Journal of the Royal Statistical Society 1885—1899, sowie in Phil. Mag. 1883—92.

gefördert. In jüngster Zeit ist es *J. H. Peek* gelungen, auf dem Gebiet der Sterblichkeitsstatistik bei einer Anzahl von Reihen mit relativ kleinen Beoachtungszahlen eine nahezu normale Dispersion festzustellen[27])[28]).

7. Wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung der statistischen Mittelwerte. Die Zahlenwerte, mit denen sich die Statistik beschäftigt, besitzen nicht immer wie in den vorhin betrachteten Fällen die Form von Wahrscheinlichkeitsgrössen, sondern stellen sich oft als Funktionen solcher dar, sind aber auch dann nicht minder einer Behandlung von dem oben erörterten Standpunkt aus unter entsprechenden Modifikationen der einschlägigen Formeln zugänglich[29]). Letzteres trifft auch bei den statistischen Mittelwerten zu, welche unter den Begriff der mathematischen Erwartung [I D 1, Nr. **16**] subsumiert werden können. *Laplace* hat bereits gezeigt, in welcher Weise sich bei derartigen Mittelwerten und speziell in den Fällen der mittleren Lebens- und Ehedauer die zufälligen Abweichungen ihrer empirischen Werte von den massgebenden theoretischen Werten berücksichtigen lassen[30]).

Was nun aber die Untersuchung der Dispersionsverhältnisse statistischer Grössen dieser Art anlangt, so sind die von *Lexis* zunächst blos für den Fall von Wahrscheinlichkeitsgrössen empfohlenen Methoden auch hier anwendbar. Man habe es in der That mit einer Grösse A zu thun, deren mathematische Erwartung ξ durch:

$$\int_{\alpha}^{\beta} x\varphi(x)\,dx$$

dargestellt wird, wobei $\varphi(x)dx$ für einen Einzelwert von A die Wahrscheinlichkeit angiebt, in den Grenzen von x bis $x+dx$ enthalten zu sein, und α bezw. β den Minimal- bezw. Maximalwert von A be-

27) Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung in der Zeitschr. f. Versich.-Recht u. -Wissenschaft 5 (1899), p. 169 fg.

28) Der neueste Beitrag zur Dispersionstheorie ist *W. Kammann*'s Dissertation „Das Geschlechtsverhältnis der Überlebenden in den Kinderjahren als selbständige massenphysiologische Konstante", Göttingen (1900) (Auszug in den Jahrbüchern f. Nat.-Ök. u. Statistik 19 (1900), p. 382 fg.).

29) So hält sich z. B. *Lexis* in seinen in Fussnote 16 citierten Untersuchungen über das Geschlechtsverhältnis der Geborenen an das Verhältnis der Zahl der geborenen Knaben zu der Zahl der geborenen Mädchen, mithin an eine Relation zwischen entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten.

30) Théorie anal. des prob. Chap. VIII.

zeichnen. Es seien ferner σs Einzelwerte a von A ermittelt, dieselben in σ Serien zu je s Elementen eingeteilt und für jede Serie ein Mittelwert $\xi_i' = \frac{1}{s}[a]$ berechnet. Dann wird, unter der Bedingung, dass s eine hinreichend grosse Zahl ist, die Wahrscheinlichkeit für eine Abweichung $\xi_i' - \xi$, in den Grenzen $\mp z$ enthalten zu sein, durch P_t ausgedrückt, wobei $t = zh$ und h sich aus der Gleichung:

$$\frac{1}{2h^2} = \frac{1}{s}\int_\alpha^\beta (x - \xi)^2 \varphi(x)\,dx$$

bestimmt. Für die Grösse h (die Präzision von ξ_i') ergeben sich nun auch in diesem Fall zwei Näherungswerte, nämlich h' und h'', und zwar aus den Formeln:

$$\frac{1}{2h'^2} = \frac{1}{s}\frac{[(a - \xi_0')^2]}{\sigma s - 1}$$

und:

$$\frac{1}{2h''^2} = \frac{[(\xi_i' - \xi_0')^2]}{\sigma - 1},$$

in denen $\xi_0' = \frac{1}{\sigma}[\xi_i']$. Eine Gegenüberstellung der Werte h' und h'' würde hier ebenfalls zu einer Unterscheidung zwischen den einzelnen Dispersionsarten und zu allen weiteren Konsequenzen führen, die solch' eine Unterscheidung, wie oben dargelegt, mit sich bringt[31]).

In Bezug auf die statistischen Mittelwerte fällt aber der Wahrscheinlichkeitsrechnung noch eine andere Aufgabe zu, nämlich die fehlertheoretische Untersuchung der Funktion $\varphi(x)$ [I D 2, Nr. 2 fg.]. *A. Quetelet* hat für verschiedene, den menschlichen Körper betreffende, Massgrössen den Nachweis erbracht, dass die Einzelwerte solcher Massgrössen, von denen ein jeder einem besonderen Individuum entspricht, sich in ihren Abweichungen von den betreffenden Mittelwerten ziemlich genau dem Exponentialgesetz anpassen, so dass:

$$\varphi(x) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2(x-\xi)^2},$$

wo k eine jeweils aus der Erfahrung zu ermittelnde Konstante ist[32]). In seiner Theorie des Normalalters hat später *Lexis* das von *Quetelet* zur Geltung gebrachte Prinzip auf die Erscheinung der Lebensdauer

31) Vgl. meine Krit. Betrachtungen zur theoret. Statistik, 2. Art., p. 332 fg. in den Jahrb. f. Nat.-Ök. u. Stat., 3. Folge 10 (1895).

32) Lettres sur la théorie des probabilités, Bruxelles (1846), p. 133 fg. u. 400 fg. Sur l'homme, Paris (1835). Physique sociale, Bruxelles (1869). Anthropométrie, Bruxelles (1870).

übertragen[33]). Aber in einer Anzahl analoger Fälle lässt sich die thatsächliche Verteilung der Einzelwerte einer statistischen Grösse um ihren Mittelwert mit obiger Formel nicht in Einklang bringen. Dadurch wird man entweder veranlasst, dem Fehlergesetz eine allgemeinere Fassung zu geben, bei welcher jene Formel nur als Spezialfall erscheinen würde, oder aber man betrachtet die Nichtübereinstimmung der empirischen Zahlenreihen mit dem *Gauss*'schen Fehlergesetz als eine Anomalie, welche ihre besonderen Gründe haben müsste. Als solche kommen namentlich in Betracht die Thatsachen bezw. Hypothesen, darin bestehend, dass gegebenenfalls eine Mischung mehrerer Menschentypen vorhanden sei, oder dass der in Frage stehende Typus in der Entartung begriffen sei, oder dass die untersuchte Massgrösse die Funktion einer anderen sei, welche ihrerseits das Exponentialgesetz erfüllt, u. a. m. Jeder der erwähnten Erklärungsversuche giebt zu besonderen theoretischen Erörterungen Anlass. Am eingehendsten sind die hierher gehörenden Fragen von *G. Th. Fechner*[34]) und *K. Pearson*[35]) behandelt worden.

II. Spezielle Probleme.

8. Die innere Struktur der Sterblichkeitstafel. Unter den gesellschaftlichen Massenerscheinungen ist die *Sterblichkeit* am frühesten Gegenstand mathematischer Behandlung geworden. Hierbei bildet seit *E. Halley*[36]) die Aufstellung einer *Absterbeordnung* auf Grund eines gegebenen statistischen Materials das Hauptziel der Forschung. Es

---

33) Zur Theorie der Massenersch. Kap. III. Ähnliche Untersuchungen über die Verteilung der Eheschliessenden nach dem Alter haben geliefert: *L. Perozzo*, Neue Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Statistik u. s. w., Dresden (1883) und *W. Küttner*, Die Eheschliessungen im Königreich Sachsen, Dresden (1886), p. 37 fg.

34) Kollektivmasslehre, hrsgb. von *G. F. Lipps*, Leipzig 1897. Vgl. *G. F. Lipps*, Über Fechner's Kollektivmasslehre und die Verteilungsgesetze der Kollektivgegenstände in Philos. Studien 13 (1897), p. 579 fg.

35) Contributions to the Mathematical Theory of Evolution in Lond. Trans. (A) 185, p. 71; 186, p. 343 u. 187, p. 253 (1894—96). Vgl. über Pearson *Edgeworth*, in Journal of the R. Statistical Society 58 (1895), p. 506 fg., sowie *Lexis*, Art. Anthropologie u. Anthropometrie im Handwörterbuch der Staatswiss. 2. Aufl. Bd. I, p. 396—397. In diesem Art. finden sich weitere Litteraturangaben. Dazu noch: *E. Blaschke*, Über die analytische Darstellung von Regelmässigkeiten bei unverbundenen statistischen Massenerscheinungen, in den Mitteilungen des Verbandes der österr. u. ungar. Versicherungstechniker, Heft 1, 1899, p. 6 fg.

36) An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind etc., Lond. Trans. 17, 1693, p. 596 fg. u. 654 fg.

handelt sich mit anderen Worten darum, eine Reihe der Werte l_x zu berechnen, von denen ein jeder angiebt, wie viele Individuen aus einer bestimmten (willkürlich gewählten) Anzahl von Geborenen (0 jährigen) das Alter von x Jahren lebend erreichen. Die Grössen $l_x - l_{x+1} = d_x$ bezw. $\frac{d_x}{l_0}$ stellen die Zahlen bezw. die Bruchteile der aus einer Anzahl l_0 bezw. aus einer Einheit Geborener Verstorbenen dar und die Quotienten $\frac{l_{x+1}}{l_x} = p_x$ und $\frac{d_x}{l_x} = q_x$ werden kurzweg als *Lebens-* und *Sterbenswahrscheinlichkeit* des Alters x bezeichnet [I D 4 b, Nr. 2]. Wird ferner angenommen, dass sich l_x und seine Differentialquotienten mit x stetig ändern, so entsteht der Begriff der *Sterblichkeitskraft* [Sterbensintensität, I D 4b, Nr. 6] (μ_x), worunter der Grenzwert verstanden wird, dem sich die Wahrscheinlichkeit für einen x jährigen, innerhalb eines bestimmten Zeitteilchens Δx zu sterben, dividiert durch letzteres, bei lim. $\Delta x = 0$, nähert[37]). Hieraus ergiebt sich: $\frac{l_x}{l_0} = e^{-\int_0^x \mu_x dx}$. Nach der Formel:

$$c = \frac{\int_{x'}^{x''} l_x \mu_x dx}{\int_{x'}^{x''} l_x dx}$$

berechnet sich dann die mittlere Sterblichkeitskraft, auch *Sterblichkeitskoeffizient* genannt, für die Altersstrecke x' bis x''. Unter die Form:

$$c = \frac{l_{x'} - l_{x''}}{\int_{x'}^{x''} l_x dx}$$

gebracht, erscheint der Sterblichkeitskoeffizient als Verhältnis der Zahl der in den Altersgrenzen x' bis x'' Verstorbenen zu der von den Lebenden in denselben Altersgrenzen *verlebten Zeit.* Führt man noch die Bezeichnung T_x für $\int_x^\omega l_x dx$ ein, wo ω das höchste Alter, welches überhaupt erreicht werden kann, bedeutet, so erhält man

37) Der erste, welcher von dem Grössenbegriff μ_x Gebrauch gemacht hat, ist *B. Gompertz*: On the nature of the function expressive of the law of human mortality etc., Lond. Trans. 1825, p. 513. Der Ausdruck „force of mortality" rührt aber von *W. S. Woolhouse* her. Vgl. I D 4 b, Nr. 6.

$c_x = \frac{d_x}{T_x - T_{x+1}}$ als Ausdruck des Sterblichkeitskoeffizienten für das entsprechende einjährige Altersintervall. Eine weitere aus der Absterbeordnung ableitbare statistische Grösse ist die mathematische Erwartung der von einem $x$jährigen noch zu verlebenden Zeit, die als fernere mittlere Lebensdauer oder kurz als *Lebenserwartung* bezeichnet und durch:

$$E_x = \int_x^{\omega} - \frac{dl_z}{l_x\, dz}(z - x)\, dz$$

dargestellt wird, welch' letzterer Ausdruck sich mittels Integration durch Teilung in $\frac{1}{l_x}\int_x^{\omega} l_z\, dz$ oder $\frac{T_x}{l_x}$ verwandelt. Die Grösse $E_0 = \frac{T_0}{l_0}$ heisst *mittlere Lebensdauer* schlechthin. Unter der *wahrscheinlichen Lebensdauer* eines $x$jährigen wird aber ein Zahlenwert W_x verstanden, welcher der Bedingung genügt: $l_{x+W_x} = \frac{1}{2} l_x$ und die Berechtigung zu seiner Benennung daraus entnimmt, dass es nach Massgabe der gegebenen Absterbeordnung für einen $x$jährigen gleich wahrscheinlich erscheint, vor wie nach Ablauf von W_x Jahren zu sterben[38]).

Durch Aneinanderreihung der Zahlenwerte, welche die erörterten sogenannten *biometrischen Funktionen*, wie l_x, d_x, q_x, E_x, eventuell auch p_x, μ_x, c_x, W_x, $T_x - T_{x+1}$ und T_x für eine Reihe der successiven (um 1 von einander abstehenden) ganzzahligen Werte des Arguments x annehmen, entsteht eine *Sterblichkeitstafel*. Bei der Konstruktion einer solchen handelt es sich 1) darum, auf Grund eines gegebenen statistischen Materials die Werte einer bestimmten biometrischen Funktion für verschiedene Werte von x zu ermitteln und 2) darum, aus den so gewonnenen Werten dieser *Grundfunktion* die Werte der übrigen biometrischen Funktionen abzuleiten.

9. Die formale Bevölkerungstheorie. Zur Lösung der unter 1) fallenden Aufgaben bedarf es einer klaren Einsicht in gewisse formale Beziehungen, die zwischen den in Betracht kommenden statistischen Massen bestehen und ihrer rein formalen Natur zufolge lediglich darauf beruhen, nach welchen Bestimmungsmomenten jene Massen

---

38) Eine klare Unterscheidung zwischen der mittleren und wahrscheinlichen Lebensdauer ist schon in einem Briefe von *Chr. Huygens* aus dem Jahre 1669 anzutreffen. Siehe das in Fussnote 1 genannte Sammelwerk, p. 68—69.

gebildet (abgegrenzt) sind. Die letzteren stellen sich als „Gesamtheiten“ von Geborenen, von Lebenden und von Verstorbenen und eventuell noch von solchen dar, die einem irgendwie definirten Personenbestand beigetreten bezw. aus einem solchen bei Lebzeiten ausgeschieden sind. Als nähere Bestimmungsmomente treten absolute und relative Zeitangaben (wie z. B. das Datum der Geburt, des Todes, oder das Lebensalter, die Aufenthaltsdauer) hinzu.

Ansätze zu einer Lehre von den in Frage stehenden Beziehungen („Formale Bevölkerungslehre“) finden sich schon ziemlich früh bei denjenigen Autoren, welche sich mit der Berechnung von Sterblichkeitstafeln auf Grund der Erfahrungen von Lebensversicherungsanstalten beschäftigt haben, so namentlich bei *J. Finlaison*[39]) und *W. S. Woolhouse*[40]), dann aber auch bei *J. Fourier*[41]), *L. Moser*[42]), *Ph. Fischer*[43]).

Eine systematische Entwickelung der einschlägigen Lehrsätze brachten jedoch erst die Arbeiten *K. Becker*'s[44]), *G. F. Knapp*'s, *G. Zeuner*'s und *W. Lexis*'. Becker gab eine durchaus elementare Darlegung der praktisch wichtigsten Beziehungen, während *Knapp*'s analytische Behandlungsweise aus dem Jahre 1868[45]) den Vorzug einer grösseren Vollständigkeit und Allgemeinheit bietet, zugleich aber insofern einen Rückschritt bedeutet, als sie auf die einschränkende Annahme von einer unveränderlichen (keinem Wechsel in der Zeit unterliegenden) Absterbeordnung gegründet ist. An *Knapp* anknüpfend hat es dann *Zeuner* verstanden, den von jenem aufgestellten Sätzen eine unbedingte, weil von der erwähnten Annahme unabhängige, Geltung zu verschaffen. Er hat sich hierbei einer stereometrischen Konstruktion bedient, in welcher die verschiedenartigen

39) Report on the evidence and elementary facts on which the tables of life annuities are founded, London (1829); siehe *E. Roghé,* Geschichte und Kritik der Sterblichkeitsmessung bei Versicherungsanstalten, Jena (1891), p. 26—29.

40) Investigations of mortality in the Indian army (1839) (citiert nach B. v. Maleszewski, Fussnote 73)), sowie Tables exhibiting the law of mortality deduced from the combined experience of 17 Life Assurance Offices, London (1843); vgl. *Roghé,* a. a. O. p. 57—60.

41) Notions générales sur la population, in Recherches statistiques sur la ville de Paris 1821, p. IX—LXXIII.

42) Die Gesetze der Lebensdauer, Berlin (1839).

43) Grundzüge des auf menschliche Sterblichkeit gegründeten Versicherungswesens, Oppenheim a. Rh. (1860).

44) Zur Theorie der Sterbetafeln für ganze Bevölkerungen in den Statist. Nachr. über das Grossherzogtum Oldenburg 9 (1867), 1. Teil, und Zur Berechnung von Sterbetafeln an die Bevölkerungsstatistik zu stellende Anforderungen, Berlin (1874).

45) Siehe Litteratur.

Gesamtheiten von Lebenden und Verstorbenen durch Projektionen von Schnittflächen auf die Koordinatenebenen versinnlicht werden und auf diese Weise die Beziehungen, welche zwischen jenen Gesamtheiten stattfinden, sich aus unmittelbarer Anschauung ergeben. Diese Konstruktion findet bei *Zeuner* ihr Gegenstück in einer analytischen Darstellung, deren Grundlagen im wesentlichen die folgenden sind.

Man fasst die Anzahl derjenigen, welche, in der Zeit von 0 (Anfangspunkt der Beobachtungszeit) bis t geboren, das Alter x lebend erreichen, als eine stetige Funktion der zwei Veränderlichen t und x auf und bezeichnet diese Funktion mit $V(x, t)$. Der Differentialquotient:

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = U(x, t)$$

stellt alsdann die sogenannte *Überlebensdichtigkeit* dar, welche dem Alter x und der Geburtszeit t entspricht. Bezeichnet man nun mit t' irgend einen früheren und mit t'' einen beliebigen späteren Zeitpunkt, so wird durch das Integral:

$$\int_{t'}^{t''} U(x, t)\, dt = P_1$$

die Anzahl derer ausgedrückt, welche aus dem Zeitraum t' bis t'' stammend das Alter x lebend erreichen. Das ist die sogenannte *erste Hauptgesamtheit von Lebenden.* Ihr Charakteristikum besteht darin, dass, bei einem konstanten Wert von x, sich t in den Grenzen von t' bis t'', mithin die „Erfüllungszeit“ $\tau = t + x$ sich in den Grenzen von $t' + x$ bis $t'' + x$ bewegt. Setzt man aber in dem angeführten Integral $x = \tau - t$ und lässt, bei einem konstanten Wert von τ, x die Werte von x' bis x'' durchlaufen (wobei $x'' > x'$), so ergiebt sich:

$$\int_{\tau - x''}^{\tau - x'} U(\tau - t, t)\, dt = \int_{x'}^{x''} U(x, \tau - x)\, dx = P_2$$

als Ausdruck der sogenannten *zweiten Hauptgesamtheit von Lebenden.* Die Personen, welche eine so charakterisierte Gesamtheit bilden, sind alle aus der Geburtszeit $\tau - x''$ bis $\tau - x'$ hervorgegangen bezw. stehen im Alter von x' bis x'' und befinden sich in dem Zeitpunkt τ am Leben.

Eine Gesamtheit von Geborenen erscheint als ein Spezialfall der ersten Hauptgesamtheit von Lebenden. Setzt man nämlich $x = 0$, so giebt $\int\limits_{t'}^{t''} U(0, t)\, dt$ die Anzahl der von t' bis t'' Geborenen an. Die Funktion $U(0, t)$ wird seit *Knapp* (s. „Ermittlung 1868" p. 12) als *Geburtendichtigkeit* bezeichnet.

Um aber für die Gesamtheiten von Verstorbenen entsprechende analytische Ausdrücke zu gewinnen, muss man von dem Differential

$$U(x, t)\, dt - U(x + dx, t)\, dt = -\frac{\partial U(x, t)}{\partial x}\, dx\, dt$$

ausgehen, welches die Anzahl derer liefert, die, in der Zeit von t bis $t + dt$ geboren, im Alter von x bis $x + dx$ gestorben sind. Je nachdem nun zur näheren Bestimmung einer Gesamtheit von Verstorbenen eine gegebene Geburtszeit- und eine gegebene Altersstrecke, oder eine gegebene Geburts- und eine gegebene Erfüllungszeitstrecke, oder eine gegebene Alters- und eine gegebene Erfüllungszeitstrecke dienen, lassen sich drei besondere *Hauptgesamtheiten von Verstorbenen* unterscheiden, nämlich:

$$M_1 = -\int\limits_{t'}^{t''}\int\limits_{x'}^{x''} \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}\, dx\, dt,$$

$$M_2 = -\int\limits_{t'}^{t''}\int\limits_{\tau'-t}^{\tau''-t} \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}\, dx\, dt$$

und:

$$M_3 = -\int\limits_{x'}^{x''}\int\limits_{\tau'-x}^{\tau''-x} \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}\, dt\, dx.$$

Mit Hülfe der vorgeführten analytischen Darstellungsmittel lässt sich dann die ganze formale Bevölkerungslehre systematisch entwickeln. Jene Darstellungsmittel entsprechen aber der Annahme von der Stetigkeit der einschlägigen Funktionen. Gerade durch die Erwägung, dass man den Thatsachen einen gewissen Zwang anthut, wenn man sich dieser Annahme bedient, fand sich *Knapp* bewogen, in einer späteren Schrift[46]) den Gegenstand unter Anwendung verallgemeinerter, auf die Unstetigkeit der Funktionen Rücksicht nehmender Methoden neu durchzuarbeiten. Der analytischen Behandlung schloss sich in dieser Schrift eine entsprechende planimetrische Konstruktion an, deren sich der Verfasser bereits früher bedient hatte[47]).

46) Theorie des Bevölkerungswechsels, Braunschweig 1874.

47) Sterblichkeit in Sachsen, Leipzig 1869.

Eine von der *Knapp*'schen abweichende, aber dem nämlichen Zweck dienende geometrische Darstellung in der Ebene hat dann *Lexis* vorgeschlagen. Er erweiterte zugleich die formale Bevölkerungslehre über die ihr von seinen Vorgängern auf diesem Gebiete gesteckten Grenzen hinaus, indem er besondere Betrachtungen über solche Gesamtheiten anstellte, bei deren Abgrenzung gegen analoge Gesamtheiten neben den vorhin erörterten Bestimmungsmomenten noch der Civilstand (ob ledig, verheiratet oder verwitwet) berücksichtigt wird. Offenbar erfährt eine unter diesem Gesichtspunkt gebildete Gesamtheit von Lebenden im zeitlichen Verlauf Aenderungen in ihrem Bestand sowohl in Folge von Todesfällen als in Folge von Eheschliessungen und Ehelösungen. Die grössere Kompliziertheit der sich hieraus ergebenden Beziehungen hat *Lexis* naturgemäss dazu veranlasst, für diesen Fall zu stereometrischen Konstruktionen überzugehen. Die betreffenden Untersuchungen, welche zunächst eine Grundlage für eine rationelle Ehestatistik zu bieten imstande sind, haben zugleich eine viel allgemeinere Bedeutung, weil die gewonnenen theoretischen Resultate eine unmittelbare Anwendung auf andere, in formaler Beziehung analoge Gebiete (Ein- und Auswanderungen, Invalidität, Kriminalität u. dgl. m.) zulassen[48].

10. Methoden zur Ermittelung der Sterbenswahrscheinlichkeit und des Sterblichkeitskoeffizienten (vgl. I D 4 b, Nr. 3). Sieht man von den ältesten Sterblichkeitstafeln ab, so wird bei der Konstruktion solcher Tafeln als Grundfunktion am häufigsten die Sterbenswahrscheinlichkeit (q_x) benutzt. Dieselbe kann zunächst nach der Formel: $q_x = \frac{M_1}{P_1}$ berechnet werden, wobei M_1 und P_1 in Bezug auf die Geburtszeitgrenzen übereinstimmen müssen und $x' = x$ und $x'' = x + 1$ zu setzen ist. Sodann ergiebt sich ein Näherungswert von q_x aus der Formel: $q_x = \frac{M_2}{P_2}$, wobei die in dem Nr. 9 angeführten Ausdruck für M_2 vorkommenden Werte t', t'', τ' und τ'' mit den in dem entsprechenden Ausdruck für P_2 auftretenden Werten τ, x' und x'' in der Weise zusammenhängen müssen, dass $t' = \tau - x''$, $t'' = \tau - x'$, $\tau' = \tau$ und $\tau'' = \tau + 1$. (Als Zeiteinheit gilt hier das Jahr.) Wenn dabei der Abstand zwischen x' und x'' bezw. t' und t'' klein ist (z. B. von einjähriger Dauer), so darf mit hinreichender Genauigkeit x in q_x gleich $\frac{x' + x''}{2}$ gesetzt

48) Einleitung u. s. w. (siehe Litteratur) und Handwörterbuch der Staatswissenschaften 2. Aufl. 2, p. 689—696. Cf. *W. Küttner*, Fussnote 33).

werden[49]). Durch die Beschaffenheit des vorliegenden statistischen Materials wird man bei der Wahl der Grundfunktion in einigen Fällen veranlasst, dem Sterblichkeitskoeffizienten (c) vor der Sterbenswahrscheinlichkeit (q_x) den Vorzug zu geben und findet man c aus der Gleichsetzung: $c = \frac{M_3}{Q}$, wo:

$$Q = \int\limits_{\tau'}^{\tau''}\int\limits_{x'}^{x''} U(x, \tau - x)\, dx\, d\tau$$

die innerhalb der Zeitstrecke τ' bis τ'' von den in den Altersgrenzen x' bis x'' gestanden habenden Personen insgesamt *verlebte Zeit* darstellt. Eine genaue numerische Auswertung von Q ist namentlich bei sogenannten „ganzen" Bevölkerungen, d. h. bei solchen Bevölkerungen, die durch Angabe von Territorialgrenzen definiert sind, ausgeschlossen. Meistens wird Q ausgedrückt durch das Produkt aus der Länge der Zeitstrecke τ' bis τ'' und der Zahl der Lebenden des entsprechenden Alters in der Mitte jener Zeitstrecke oder der halben

---

49) Als Hauptvertreter der ersten Methode $\left(q_x = \frac{M_1}{P_1}\right)$ erscheinen *K. Becker* (Fussn. 44), sowie in „Deutsche Sterbetafel u. s. w.", Monatshefte zur Statistik des Deutschen Reichs 1887, 2. Th.), *Zeuner* (siehe Litteratur und „Neue Sterblichkeitstafeln für die Gesamtbevölkerung des Königreichs Sachsen", Zeitschrift des Sächs. Stat. Bur. 1894, p. 13 fg.) und *W. Lazarus* (Deutsche Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von 23 Lebensversicherungsgesellschaften, Berlin 1883). Dem Prinzip nach hat sich der nämlichen Methode z. B. schon *Th. Galloway* bedient [Tables of mortality deduced from the experience of the Amicable Society, London (1841)]. Die zweite von den im Text genannten Methoden, und zwar in der Form: $q_x = \frac{[M_2]}{[P_2]}$, wo die Summierung nach τ erfolgt, findet sich im wesentlichen bei *Finlaison*, Fussn. 39), ferner in den bekannten Arbeiten *A. Wiegand*'s, *G. Behm*'s, *A. Zillmer*'s und *H. Zimmermann*'s über Sterblichkeit und Dienstunfähigkeit der Eisenbahnbeamten (vergl. Nr. 12) und ist neuerdings von *A. J. van Pesch* [Tables de mortalité pour le royaume des Pays-Bas, Bijdragen tot de Statistiek van Nederland 5 (1897)] angewandt worden, jedoch in der Form $q_x = \frac{1}{n}\left[\frac{M_2}{P_2}\right]$, wo n die Zahl der betreffenden Summanden bezw. Jahrgänge angiebt. — In den Formeln, die zur Bestimmung von q_x dienen, werden in der Regel gewisse Korrektionen wegen der innerhalb der betreffenden Altersbezw. Zeitstrecke Eintretenden und bei Lebzeiten Ausscheidenden angebracht. Dies ist namentlich in dem Fall unumgänglich, wo sich die Berechnung auf das Material von Versicherungsgesellschaften gründet. In diesem Fall ergeben sich weitere Komplikationen, wenn auf die Dauer der Zugehörigkeit des Versicherten zur Gesellschaft Rücksicht genommen wird. Vergl. *E. Blaschke*, Über die Konstruktion von Mortalitätstafeln, in der Statist. Monatschrift, Wien 1894, p. 278—284.

Summe der Zahlen der Lebenden des nämlichen Alters im Anfang und am Schluss der genannten Zeitstrecke. Die Gleichsetzung: $c = \frac{M_s}{Q}$ ist ausserdem nur unter der Bedingung statthaft, dass die Altersgrenzen x' und x'' nicht weit auseinanderliegen. Sonst kann sich zwischen c, dem sogenannten „Sterblichkeitskoeffizienten im Sinne der Sterblichkeitstafel" und dem „effektiven Sterblichkeitskoeffizienten" $\left(\frac{M_s}{Q}\right)$ unter Umständen ein beträchtlicher numerischer Unterschied ergeben[50]).

Die Verwendung einer anderen statistischen Grösse, wie z. B. d_x oder l_x als Grundfunktion wird aus praktischen Gründen meistens vermieden.

11. Weiteres zur Konstruktion von Sterblichkeitstafeln. Wenn eine Reihe der Werte q_x für $x = 0, 1$ u. s. w. bis $\omega - 1$ ermittelt ist, so erhält die am Schluss von Nr. 8 unter 2) erwähnte Aufgabe in der Weise ihre Lösung, dass zuerst die Reihe der Werte l_x nach der Formel: $l_x = l_0 \prod_0^{x-1} (1 - q_x)$ berechnet wird. (Dabei ist l_0, die „Basis" der Sterblichkeitstafel, willkürlich.) Von den übrig bleibenden biometrischen Funktionen gestatten dann, je nach ihrer Beschaffenheit, die einen eine exakte, die anderen eine nur angenäherte numerische Auswertung auf Grund der Werte l_x, wobei im letzteren Fall die aus der Interpolationstheorie bekannten Methoden zur Anwendung kommen [I D 3; I D 4b, Nr. 6]. Ist aber c als Grundfunktion benutzt worden, so findet man erst die entsprechenden Werte q_x und zwar nach der Formel: $q_x = \frac{2c}{2+c}$, wobei x in q_x mit x' und x'' in c so zusammenhängt, dass $2x = x' + x'' - 1$.[51]) Daraufhin verfährt man wie in dem Fall, wo unmittelbar von q_x ausgegangen wird.

Die Absterbeordnung, welche durch die so gewonnene Reihe l_x dargestellt wird, bezieht sich entweder auf eine *reelle* oder auf eine *ideelle* (fiktive) *Generation*, je nachdem die verschiedenen Gesamtheiten

50) Die Methode der Konstruktion einer Sterblichkeitstafel, welche von der Gleichung $c = \frac{M_s}{Q}$ ausgeht, wird namentlich in der englischen Bevölkerungsstatistik befolgt. Vergl. *W. Farr,* On the Construction of Life-Tables, Lond. Trans. 149, 1859, p. 837 fg. Über die Ungleichungen, welche $\frac{M_s}{Q}$ mit c verbinden, s. meine Mittlere Lebensdauer, Jena 1893, § 21.

51) *Farr,* a. a. O.

von Lebenden und Verstorbenen, die zur Berechnung der Einzelwerte der Grundfunktion gedient haben, in bezug auf die Geburtszeitgrenzen (t' und t'') oder aber in bezug auf die Erfüllungs- bezw. Sterbezeitgrenzen (τ' und τ'') übereinstimmen[52]).

Die Konstruktion einer Sterblichkeitstafel wird öfters dadurch erschwert, dass das gegebene statistische Material nach ungeeigneten Gesichtspunkten tabellarisch geordnet ist. Für solche Fälle giebt die Theorie gewisse Näherungsmethoden an, welche dazu dienen, auf Grund von Gesamtheiten der einen Art Gesamtheiten einer anderen Art zu bestimmen[53]). Ferner kommen verschiedene Interpolationsmethoden in Betracht, wenn die Altersstatistik der Lebenden und Verstorbenen nicht hinreichend detailliert ist. Durch die Unzuverlässigkeit dieser Altersstatistik, welche nicht selten ist, wird man aber veranlasst, zu irgend einem Ausgleichungsverfahren zu greifen [I D 4 b, Nr. 6]. Eine Ausgleichung der gefundenen Werte der Grundfunktion oder der aus diesen Werten abgeleiteten Werte l_x lässt sich auch durch die Annahme motivieren, dass dieselben mit zufälligen, aus der Beschränktheit des Beobachtungsfeldes entspringenden, Fehlern behaftet erscheinen[54]). Schliesslich erblicken einige Autoren eine besondere Aufgabe bei der Konstruktion von Sterblichkeitstafeln darin, die eine oder die andere der biometrischen Funktionen in eine mathematische Formel zu fassen, welche dem thatsächlichen Verlauf jener Funktion nach Möglichkeit angepasst wäre. Dabei geht das Bestreben dahin, eine Formel von allgemeiner Gültigkeit zu finden, und die Unterschiede der Sterblichkeit, welche zwischen den einzelnen Bevölkerungen bezw. Personenkreisen statthaben, durch entsprechende Unterschiede der Konstanten, die in der Formel vorkommen, zum Ausdruck zu bringen[55]).

12. Konstruktion von Invaliditätstafeln. Einen besonderen Gegenstand mathematischer Behandlung neben der Sterblichkeit und in Verbindung mit derselben bildet die *Invalidität.* Eine Invaliditätstafel unterscheidet sich von einer Sterblichkeitstafel dadurch, dass die Überlebenden der aufeinander folgenden Altersjahre (l_x) zerlegt werden

---

52) *K. Becker* (s. Fussnote 44).

53) *Zeuner,* Abhandlungen, p. 58—73; *Lexis,* Einleitung, §§ 31—41.

54) *E. Blaschke,* Die Methoden der Ausgleichung von Massenerscheinungen mit besonderer Berücksichtigung der Ausgleichung von Absterbe- und Invalidenordnungen, Wien 1893.

55) *E. Czuber,* Die Entwickelung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Nr. 74 und I D 4 b, Nr. 6.

in Aktive ($l_x^{(a)}$) und Invalide ($l_x^{(i)}$), wobei die Tafel, anstatt mit dem Alter 0, mit einem späteren Alter α beginnt, von welchem an Invaliditätsfälle überhaupt erst möglich werden.

Man bezeichne nun mit $p_x^{(a)}$, $p_x^{(aa)}$, $p_x^{(ai)}$ die Wahrscheinlichkeiten für einen Aktiven vom Alter x, das Alter $x+1$ überhaupt bezw. als Aktiver bezw. als Invalider lebend zu erreichen und mit $q_x^{(a)}$, $q_x^{(aa)}$, $q_x^{(ai)}$ die Wahrscheinlichkeiten für denselben, vor der Erreichung jenes Alters überhaupt bezw. im Zustande der Aktivität bezw. im Zustande der Invalidität zu sterben. Es bedeute ferner w_x die Wahrscheinlichkeit für einen Aktiven vom Alter x vor der Erreichung des Alters $x+1$ invalid zu werden und $p_x^{(i)}$ bezw. $q_x^{(i)}$ die Lebens- bezw. Sterbenswahrscheinlichkeit eines Invaliden vom Alter x.

Alsdann ergeben sich die Beziehungen: $p_x^{(aa)}+p_x^{(ai)}=p_x^{(a)}$, $q_x^{(aa)}+q_x^{(ai)}=q_x^{(a)}$, $p_x^{(a)}+q_x^{(a)}=1$, $p_x^{(ai)}+q_x^{(ai)}=w_x$, $p_x^{(i)}+q_x^{(i)}=1$ und ausserdem $l_x^{(a)}=l_\alpha\prod_\alpha^{x-1}p_z^{(aa)}$ und $l_x^{(i)}=\left[l_z^{(a)}p_z^{(ai)}\prod_{z+1}^{x-1}p_u^{(i)}\right]$, wobei sich in letzterem Ausdruck die Summierung auf die Werte von $z=\alpha$, $\alpha+1$ u. s. w. bis $x-1$ erstreckt.

Was zunächst die Bestimmung der Grössen $p_x^{(i)}$ bezw. $q_x^{(i)}$ anlangt, so dienen dazu die üblichen Methoden der Sterblichkeitsberechnung, welche hier auf eine aus Invaliden bestehende Personengruppe zur Anwendung kommen. Hingegen bietet die numerische Auswertung der Grössen $p_x^{(aa)}$ und $p_x^{(ai)}$ ein neues Problem, weil diese Grössen unter dem doppelten Einfluss der Sterblichkeit und der Invalidität stehen. Die ersten Autoren, welche sich mit diesem Problem beschäftigt haben (s. die Fussnoten zu Nr. **1** von I D 4b), unterschieden nicht zwischen der Sterblichkeit der Aktiven und der Sterblichkeit der Invaliden und setzten demnach $p_x^{(a)}=p_x^{(i)}=p_x$ bezw. $q_x^{(a)}=q_x^{(i)}=q_x$. Dabei stellten *A. Wiegand*[56]) und *K. Heym*[57]) die Formeln: $p_x^{(aa)}=p_x(1-w_x)$ und $p_x^{(ai)}=p_x w_x$ auf, welche auf einer unzulässigen Anwendung des Satzes von der Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten [I D 1, Nr. 4] zum Zweck der Ermittelung der Wahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses beruhen. Daraufhin leitete *Zeuner*[58]), von gewissen Annahmen über den Verlauf der Absterbeordnung und die Verteilung der Invaliditätsfälle innerhalb der betreffenden Altersstrecke ausgehend, in korrekter Weise die Formel: $p_x^{(aa)}=p_x-\frac{2w_x p_x}{1+p_x}$

---

56) Mathematische Grundlagen der Eisenbahnpensionskassen, Halle a/S. 1859.
57) Die Kranken- und Invalidenversicherung, Leipzig 1863.
58) Abhandlungen u. s. w., 2. Abhandlung.

ab. Im Gegensatz zu *Zeuner* führte *G. Behm*[59][60]) zwei besondere Absterbeordnungen $f(x)$ für die Aktiven und $\psi(x)$ für die Invaliden ein[61]) und erhielt unter der Annahme, dass sich die in der Altersstrecke x bis $x+1$ vorkommenden Invaliditätsfälle gleichmässig über dieselbe verteilen, und einer weiteren Annahme über die Gestalt von $f(x)$ und $\psi(x)$ die Formeln: $p_x^{(aa)} = p'_x + \frac{w_x p'_x}{q'_x}$ log nat. p'_x, wo $p'_x = \frac{f(x+1)}{f(x)}$ und $q'_x = 1 - p'_x$, und $p_x^{(ai)} = -\frac{w_x p_x^{(i)}}{q_x^{(i)}}$ log nat. $p_x^{(i)}$, wo $p_x^{(i)} = \frac{\psi(x+1)}{\psi(x)}$. Die angeführten Ausdrücke für $p_x^{(aa)}$ und $p_x^{(ai)}$ ergeben sich unmittelbar aus:

$$p_x^{(aa)} = p'_x - \int_0^1 \frac{w_x f(x+1)}{f(x+z)}\,dz \quad \text{und} \quad p_x^{(ai)} = \int_0^1 \frac{w_x \psi(x+1)}{\psi(x+z)}\,dz,$$

wenn gesetzt wird: $\frac{df(x+z)}{dz} = \text{const.}$ und $\frac{d\psi(x+z)}{dz} = \text{const.}$ Für die Praxis empfahl *Behm* die Formeln: $p_x^{(aa)} = p'_x - \frac{w_x(1+p'_x)}{2}$ und $p_x^{(ai)} = \frac{w_x(1+p_x^{(i)})}{2}$, welche aus den obigen mit Hülfe der Reihenentwicklung: log nat. $\varepsilon = -(1-\varepsilon) - \frac{(1-\varepsilon)^2}{2} - \frac{(1-\varepsilon)^3}{3} - \cdots$ und unter Vernachlässigung aller Glieder, in denen q'_x bezw. $q_x^{(i)}$ in der zweiten oder einer höheren Potenz auftritt, gewonnen werden können. Später hat *W. Küttner*[62]) darauf aufmerksam gemacht, dass *Behm*, wenn er die stärker konvergente Reihe: log nat. $\varepsilon = -2\,\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} -$

59) Statistik der Mortalitäts-, Invaliditäts- und Morbiditätsverhältnisse bei dem Beamtenpersonal der deutschen Eisenbahnverwaltungen, Berlin 1876, p. 29—46.

60) Vgl. *M. Kanner*, Allgemeine Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fragen der Statistik, im Journal des Collegiums für Lebensversicherungswissenschaft 2, 1870, p. 33—53.

61) $f(x)$ und $\psi(x)$ stellen die Zahlen derjenigen dar, welche aus einer ursprünglich gegebenen Anzahl $f(\alpha)$ bezw. $\psi(\alpha)$ von Aktiven bezw. von Invaliden des Alters α ein späteres Alter x lebend erreichen. Wie $\psi(x)$ lediglich von der Sterblichkeit unter den Invaliden, so hängt $f(x)$ lediglich von der Sterblichkeit unter den Aktiven ab. Bei einer numerischen Auswertung von $f(x)$ müssen demnach diejenigen, welche invalid werden, als solche behandelt werden, welche aus der Beobachtung ausscheiden. Solch eine Betrachtungsweise rührt von *Th. Wittstein* her. Siehe Archiv f. Math. 39 (1862), p. 267: „Die Mortalität in Gesellschaften mit successiv eintretenden und ausscheidenden Mitgliedern“.

62) Zur mathematischen Statistik, in Zeitschr. Math. Phys. 25 (1880), p. 18—19.

$\frac{2}{3}\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^3 - \frac{2}{5}\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^5 - \cdots$ benutzt und dabei nur das erste Glied derselben berücksichtigt hätte, auf die Formeln gekommen wäre: $p_x^{(aa)} = p'_x - \frac{2\,w_x p'_x}{1+p'_x}$ und $p_x^{(ai)} = \frac{2\,w_x p_x^{(i)}}{1+p_x^{(i)}}$, welche bei $p'_x = p_x^{(i)} = p_x$ in die *Zeuner*'schen Formeln übergehen.

Eine besondere Methode zur Bestimmung von $p_x^{(aa)}$ besteht darin, eine sogenannte „unabhängige" Invaliditätswahrscheinlichkeit w'_x zu statuieren, „welche zum Ausdruck gelangen würde, wenn die Sterblichkeit für den gegebenen Zeitraum nicht vorhanden wäre". Mit anderen Worten, es wird die Grösse w'_x der Grösse q'_x nachgebildet, indem bei der Ermittelung von w'_x die Sterbenden, ganz ähnlich wie bei der Ermittelung von q'_x die invalid Werdenden, als Ausscheidende betrachtet werden[63]). Bezeichnet man mit $\mu_{x+z}^{(a)}$ die Sterblichkeitskraft für einen Aktiven vom Alter $x+z$ und in analoger Weise mit ν_{x+z} die „Invaliditätskraft" (wobei also $\nu_{x+z}\,dz$ die Wahrscheinlichkeit bedeutet, innerhalb der Altersstrecke dz invalid zu werden), so erhält man: $p'_x = e^{-\int_0^1 \mu_{x+z}^{(a)}dz}$ und: $1 - w'_x = e^{-\int_0^1 \nu_{x+z}dz}$. Es ist ferner: $dl_{x+z}^{(a)} = -(\mu_{x+z}^{(a)} + \nu_{x+a})\,dz$, woraus:

$$\frac{l_{x+1}^{(a)}}{l_x^{(a)}} = e^{-\int_0^1 (\mu_{x+z}^{(a)} + \nu_{x+z})\,dz}$$

oder auch $p_x^{(aa)} = p'_x\,(1 - w'_x)$ folgt. Gerade in der Möglichkeit, mittels des Grössenbegriffs w'_x die Wahrscheinlichkeit $p_x^{(aa)}$ als Produkt aus zwei Wahrscheinlichkeiten darzustellen, mithin den Satz von der Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten im gegebenen Fall zur Anwendung zu bringen, soll der Vorzug der Konstruktion einer „unabhängigen" Invaliditätswahrscheinlichkeit liegen. Diese Konstruktion, welche *J. Karup*[64]) zugeschrieben wird, stiess sofort auf lebhaften Widerspruch, namentlich bei *Behm*[65]), *J. Dienger*[66]), *K. Heym*[67]), *H. Zimmer-*

63) Vgl. Fussnote 61.

64) Gutachten der Gothaer Lebensversicherungsbank über Invaliden- und Witwenpensionsverhältnisse, verfasst im Auftrage der Reichsverwaltung; siehe *H. Zimmermann,* Über Dienstunfähigkeits- und Sterbensverhältnisse, Berlin (1886), p. 7.

65) a. a. O. p. 47—60.

66) Rundschau der Versicherungen 1876, p. 46—47, 109—111; 1878, p. 151 fg.

67) Deutsche Versicherungszeitung 1876, Nr. 61.

mann[68]), welche dem in Frage stehenden Grössenbegriff w'_x als einem künstlich gebildeten und überflüssigen das Bürgerrecht zu versagen sich veranlasst sahen, zumal da die Beziehungen $q_x^{(aa)} = q'_x\,(1 - w'_x)$, $p_x^{(ai)} = p'_x w'_x$, $q_x^{(ai)} = q'_x w'_x$, welche die vorgeschlagene Begriffsbildung sowie die Bezeichnung „unabhängige Invaliditätswahrscheinlichkeit“ rechtfertigen würden, nicht statthaben. *J. Karup*[69]) und *W. Küttner*[70]) haben dann gesucht, die Angriffe der genannten Autoren zurückzuweisen, wobei *Küttner* in verallgemeinerter Form das Problem erörterte und die Bedeutung der Infinitesimalrechnung für die Behandlung von Fällen, wo wie im vorliegenden mehrere Faktoren (Sterblichkeit, Invalidität) im Spiel sind, klarlegte[71]). Von dem Ineinandergreifen der verschiedenen Faktoren kann nämlich nur unter der Bedingung abgesehen werden, dass ein unendlich kleines Zeit- bezw. Altersintervall ins Auge gefasst wird, wie dies z. B. in obiger Differentialgleichung geschehen ist. Letztere führt aber unmittelbar auf die Grössenbegriffe p'_x und w'_x. Übrigens hält *Küttner* selbst die Bezeichnung der Grösse w'_x als „unabhängige“ Invaliditätswahrscheinlichkeit für unpassend, weil diese Bezeichnung einem in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingebürgerten Sprachgebrauch [I D 1, Nr. 4; I D 4 b, Nr. 2, Axiom V] nicht entspricht und deswegen irreleitend werden kann.

Bei der Konstruktion einer Invaliditätstafel werden als Grundfunktionen ausser $q_a^{(i)}$ noch entweder $q_x^{(aa)}$ und w_x (*Zimmermann*), oder q'_x und w_x (*Behm*), oder q'_x und w'_x (*Karup*, *Küttner*) verwendet und es lassen sich dann aus den Werten dieser Grössen die Werte der übrigen in Betracht kommenden Grössen unter Bezugnahme auf obige Erörterungen teils exakt, teils näherungsweise ableiten. Die Ermittelung von $q_x^{(aa)}$, q'_x, w_x und w'_x geschieht aber in folgender Weise. Sind aus einer Anzahl $P^{(a)}$ von Aktiven des entsprechenden Alters innerhalb einer einjährigen Alters- bezw. Zeitstrecke $M^{(a)}$ Personen im Zustande der Aktivität verstorben und J Personen invalid geworden, so ergeben sich, wenn man hier, ähnlich wie es in Nr. **10** geschehen ist, von den als Aktive Eintretenden und Ausscheidenden

68) a. a. O. p. 7 fg., sowie Beiträge zur Theorie der Dienstunfähigkeits- und Sterbensstatistik, Berlin (1887), p. 44—53. *Zimmermann* lässt übrigens den Grössenbegriff p'_x ebensowenig gelten.

69) Rundschau der Versicherungen 1876, p. 21 fg.; 1877, p. 17 fg.; 1878, p. 219 fg.

70) Zeitschr. Math. Phys. 25 (1880), p. 11—24 und 31 (1886), p. 246—251.

71) S. auch die unter Fussnote 60 angeführte Abhandlung *Kanner*'s.

absieht, die Formeln: $q_x^{(aa)} = \frac{M^{(a)}}{P^{(a)}}$, $q'_x = \frac{M^{(a)}}{P^{(a)} - \Theta J}$, $w_x = \frac{J}{P^{(a)}}$, $w'_x = \frac{J}{P^{(a)} - \vartheta M^{(a)}}$, wo Θ und $\vartheta > 0$ und < 1 sind und gewöhnlich durch den Näherungswert $\frac{1}{2}$ ausgedrückt werden[72]). Bei der Berechnung einer jeden von jenen vier Wahrscheinlichkeiten lässt sich wie bei der Bestimmung von q_x (Nr. **10**) zwischen zwei Methoden unterscheiden, je nachdem die Gesamtheiten $P^{(a)}$, $M^{(a)}$ und J von derselben Art wie P_1 und M_1, oder wie P_2 und M_2 sind. Um aber ein Analogon zu der Methode: $c = \frac{M_3}{Q}$ zu gewinnen, müsste man neben einem Sterblichkeitskoeffizienten für Aktive, welcher sich als ein Durchschnitt aus den Werten $\mu_{x+z}^{(a)}$ darstellen würde, einen *Invaliditätskoeffizienten* einführen, welch' letzterer als ein Durchschnitt aus den Werten ν_{x+z} erscheinen würde. Zu einer numerischen Auswertung dieser Koeffizienten wäre es erforderlich, über Gesamtheiten $M^{(a)}$ und J von derselben Art wie M_3 zu verfügen und ausserdem die von den Aktiven innerhalb der betreffenden Zeitstrecke verlebte Zeit bestimmen zu können. Der Übergang von den Werten der beiden Koeffizienten zu den Werten dieser oder jener Sterbens- und Invaliditätswahrscheinkeiten würde sich dann unter verschiedenen Modalitäten vollziehen lassen[73]).

---

72) Vgl. *Behm*, Nachtrag pro 1878 zur Statistik der Mortalitäts-, Invaliditäts- und Morbiditätsverhältnisse u. s. w., Berlin (1879), p. 9—11 und *Zimmermann*, die unter Fussnote 64 genannte Schrift, p. 21—22.

73) Eine ziemlich erschöpfende Darstellung dieser Modalitäten sowie überhaupt der Methoden, welche zur Konstruktion von Invaliditätstafeln bisher angewandt bezw. vorgeschlagen worden sind, bietet *B. v. Maleszewski*, Theorie und Praxis der Pensionskassen (russisch), St. Petersburg (1890), 2[1], Kap. 8. Daselbst weitere Litteraturangaben.

(Abgeschlossen im April 1901.)

I D 4 b. LEBENSVERSICHERUNGS-MATHEMATIK

VON

G. BOHLMANN

IN GÖTTINGEN.

Inhaltsübersicht.

Litteratur[1]).

I. Kataloge. Encyklopädien.

Catalogue, Bibliothèque de l'Utrecht. 1. Ausg. Utrecht 1885. 4. Ausg. 1898.
Catalogue of the library of the institute of actuaries, London. Edinburgh 1894.
Insurance and actuarial society of Glasgow. Catalogue of books in library. Glasgow 1896.
Catalogue of the library of the faculty of actuaries in Scotland. Edinburgh 1899.
C. Walford, The insurance cyclopaedia. 1—5; 6, Heft 1; A — hereditary. London 1871—80.

II. Sterblichkeitstafeln[2]).

Tables exhibiting the law of mortality deduced from the combined experience of 17 life assurance offices, London 1843 [17 E. G.].
The mortality experience of life assurance companies, collected by the institute of actuaries, London 1869 [20 E. G.].
Combined experience of assured lives (1863—1893), collected by the institute of actuaries and the faculty of actuaries in Scotland, London 1900. [Assured lives]. — Bd. 1. Whole-life assurances, males; Bd. 2. Whole-life assurances, females; Bd. 3. Endowment assurances and minor classes of assurance, male and female.

---

1) Die Versicherungslitteratur ist auf den meisten Bibliotheken nur sehr wenig vertreten. Viele Werke sind im Buchhandel vollständig vergriffen. Referent wurde durch das Entgegenkommen der Bibliothek der Lebensversicherungsgesellschaft „Utrecht" in Utrecht und der Kommerzbibliothek in Hamburg in dankenswertester Weise unterstützt. Das hier gegebene, so kurz wie möglich gefasste, Litteraturverzeichnis berücksichtigt nur die mathematischen Interessen; rein statistische Werke sind, soweit sie für den Mathematiker in Betracht kommen, in der Regel in den Anmerkungen an den einschlägigen Stellen angeführt. Vollständigere Litteraturzusammenstellungen geben die angeführten Kataloge und diejenigen der Kommerzbibliothek in Hamburg, deren Hauptkatalog von 1864 bis in die neueste Zeit fortgesetzt ist. Im Besonderen enthält der Katalog von 1900 auf p. 2532—2534 und p. 2541—2542 Bereicherungen.

2) Die den Titeln nachgesetzten eckigen Klammern kürzen die in der Praxis üblichen Benennungen für die einzelnen Tafeln ab. Es bedeutet:

17 E. G.	Tafeln der 17 englischen Gesellschaften,
20 E. G.	„ „ 20 „ „ ,
A. St.	Amerikanische Sterbetafel,
30 A. G.	Tafeln der 30 amerikanischen Gesellschaften,
23 D. G.	„ „ 23 deutschen „
4 F. G.	„ „ 4 französischen „ .

Die deutschen Lebensversicherungsgesellschaften legen ihrem normalen Todesfallgeschäft heutzutage die Tafeln der 17 E. G., die Tafeln M I der 23 D. G. oder andere hier nicht aufgeführte Tafeln zu Grunde. Vgl. *J. Neumann*, Jahrbuch für das deutsche Versicherungswesen, Berlin 1900, p. 487. Wegen Beurteilung der Tafeln vgl. Artikel I D 4 a, Nr. **8—11** und *E. Roghé*, Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Neue Folge. Supplementheft 18 (1891).

Sh. Homans, Report exhibiting the experience of the Mutual Life Insurance Company of New York. New York (frühere Ausg. 1859). 1868 [A. St.].

Später:

W. Bartlett, On the mortality experience of the Mutual Life Insurance Company of New York. New York 1875.

L. W. Meech, System and tables of life insurance, Norwich, Conn. 1881. [30 A. G.]

A. Emminghaus, Mitteilungen aus der Geschäfts- und Sterblichkeitsstatistik der Lebensversicherungsbank für Deutschland zu Gotha. Gotha 1878. [Gothaer Sterbetafel.]

Deutsche Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von 23 Lebensversicherungs-gesellschaften, veröffentlicht im Auftrage des Kollegiums für Lebensversicherungs-Wissenschaft zu Berlin. Berlin 1883 [23 D. G.].

Tables de mortalité du comité des compagnies d'assurances à primes fixes sur la vie. Paris 1895 [4 F. G.].

Weitere Litteratur s. *C. Landré*, Mathem. techn. Kap. (s. Litt.-Verz. IV), p. 70, wo man auch Sterblichkeitstafeln für ganze Bevölkerungen angegeben findet. Die hier gegebene Zusammenstellung beschränkt sich auf normale Risiken einer Lebensversicherungsgesellschaft. Wegen Extrarisiken, im Besondern Rentnersterbetafeln vergleiche Nr. **5** dieses Berichtes.

III. Versicherungstechnische Hülfstafeln.

Zu 17 E. G. The principles and practice of life insurance. 1. Ausg. v. *N. Willey*, New York and Chicago 1872. 6. Aufl. 1892. — 4%.

Zu 20 E. G. Tables deduced from the mortality experience of life assurance companies, collected by the institute of actuaries. London 1872. — 3, 3½, 4, 4½, 5, 6%.

T. B. Sprague, Select life tables, London 1896. — 2½, 3, 3½, 4%.

R. P. Hardy, Valuation tables, London 1873. — 3, 3½, 4, 4½%.

F. J. C. Taylor, Tables of annuities and premiums. London 1884. — 3¼%.

Schlusstabellen in: Institute of actuaries textbook, part II (siehe unter IV). — 3, 3½, 4, 4½, 5, 6%.

G. King and *W. J. H. Whittall*, Valuation and other tables. London 1894. — 2½, 3, 3½, 4%.

W. A. Bowser, Valuation tables. London 1895. — 3¾%.

E. Colquhoun, Valuation and other tables. London 1899. — 2¼%, 2¾%.

Zu A. St. The principles (s. o.) — 3, 3½, 4, 4½%.

Zu 30 A. G. *L. W. Meech*, System and tables of life insurance. — 3, 3½, 4, 4½, 5, 6, 7, 8, 9, 10%.

Zu 4 F. G. Tables de mortalité (s. o.). — 2½, 3, 3¼, 3½, 4%. (Leider nicht nach Geschlechtern getrennt.)

Zu 23 D. G. *J. Riem*, Nettorechnungen auf Grund von Dr. Zillmer's ausgeglichener Sterbetafel der 23 deutschen Lebensversicherungs-Gesellschaften für normal versicherte Männer und Frauen, Basel 1898 (Preis 332 Mark!).

Für jede Sterbetafel: *W. Orchard*, Single and annual premiums. London 1850, 1856; *James Chisholm*, Tables for finding the values of policies. London 1885.

Weitere Litteratur findet man in den Anmerkungen zu den Nrn. **4, 5, 13.**

IV. Lehrbücher.

A. Zillmer, Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Rentenversicherungen. Berlin 1861. 2. verm. Aufl. 1887.

W. Karup, Theoretisches Handbuch der Lebensversicherung. Leipzig 1871, 1874, 1885.

E. Dormoy, Théorie mathématique des assurances sur la vie. 2. Paris 1878.

Institute of actuaries' textbook, part II, life contingencies, by *G. King*. London 1887, neue Ausgabe in Vorbereitung; dasselbe französisch:

Textbook de l'institut des actuaires de Londres, 2ième partie, opérations viagères. Brüssel, Paris, London 1894.

C. Landré, Wiskundige hoofdstukken voor levensverzekering. Utrecht 1893. Dasselbe deutsch mit Verbesserungen und Zusätzen:

C. Landré, Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung. Jena 1895.

H. Laurent, Théorie et pratique des assurances sur la vie, Paris 1896.

M. Cantor, Politische Arithmetik. Leipzig 1898.

H. Poterin du Motel, Théorie des assurances sur la vie. Paris 1899.

V. Aufgabensammlungen.

Th. G. Ackland and *G. F. Hardy*, Graduated exercises, with solutions. Part. II, London 1889.

J. Thannabaur, Berechnungen von Renten und Lebensversicherungen. Wien 1893.

VI. Monographien.

C. Bremiker, Das Risiko bei Lebensversicherungen. Berlin 1859.

A. Zillmer, Beiträge zur Theorie der Prämienreserve. Stettin 1863.

W. S. B. Woolhouse, On interpolation, summation and the adjustment of numerical tables. London 1865.

Th. Wittstein, Mathematische Statistik. Hannover 1867.

W. Lazarus, Über Mortalitätsverhältnisse und ihre Ursachen. Hamburg 1867.

T. B. Sprague, A treatise on life insurance accounts. London 1874.

Th. Wittstein, Das mathematische Risiko der Versicherungsgesellschaften. Hannover 1885.

J. P. Janse, Over de constructie en afronding van sterftetafels. Diss. Amsterdam 1885.

C. Kihm, Die Gewinnsysteme mit steigenden Dividenden. Zürich 1886.

L. Lindelöf, Statistik undersökning af tillståndet i folkskollärarenes i Finland enke—och pupillkassa. Helsingfors 1890, 1893.

L. Lindelöf, Statistisk undersökning af ställningen i finska skolstatens pensionskassa. Helsingfors 1892.

E. Blaschke, Die Methoden der Ausgleichung von Massenerscheinungen. Wien 1893.

J. Karup, Die Finanzlage der Gothaischen Staatsdiener - Wittwen - Societät. Dresden 1893.

E. Blaschke, Denkschrift zur Lösung des Problems der Versicherung minderwertiger Leben. Wien 1895.

L. Lindelöf, Ställningen i finska civilstatens enke—och pupillkassa. Helsingfors 1896.

H. Onnen, Het maximum van verzekerd bedrag. Diss. Utrecht 1896.

M. Kehm, Über die Versicherung minderwertiger Leben. Jena 1897.

J. H. Peek, Toepassing der Waarschijnlijkheids-Rekening op Levensverzekering en Sterfte-Statistiek, Diss. Utrecht 1898.

Mémoires pour servir à l'histoire des assurances sur la vie et des rentes viagères aux Pays-Bas publiés par la société générale Néerlandaise d'assurances sur la vie. Amsterdam 1898.

K. Wagner, Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung. Jena 1898.

J. Karup, Die Reform des Beamtenpensionsinstituts der Mitglieder des Assekuranzvereins von Zuckerfabriken. Prag 1898.

Weitere Litteratur an den einschlägigen Stellen dieses Referates, deutsche speziell bei *K. Wagner* a. a. O., schwedische besonders in den Fortschritten der Mathematik.

Nur selbständig erschienene Schriften sind hier aufgeführt.

VII. Zeitschriften.

The assurance magazine Bd. 1—2. London 1850—52; fortgesetzt unter den Titeln: The assurance magazine and journal of the institute of actuaries. Bd. 3—12, London 1853—1866. Journal of the institute of actuaries. Bd. 13. London 1866—67. Journal of the institute of actuaries and assurance magazine. Bd. 14—24, London 1867—1884, Journal of the institute of actuaries. Bd. 25 ff., London 1884 ff. [Lond. Journal inst. act.].

Journal des Kollegiums für Lebensversicherungswissenschaft 1. 2. Berlin 1870. 71. [Berl. Journal Kolleg. Lebensv.].

Journal des actuaires français. 1—9. Paris 1872—80. [Par. Journal act. franç.]

Assecuranz-Jahrbuch, her. v. *A. Ehrenzweig*, Wien 1880 ff. [Ehrenzweig].

Edinburgh, Transactions of the actuarial society, Edinburgh (1859 ff.), new series 1886 ff. [Edinburgh act. soc.].

Archief voor politieke en sociale rekenkunde, her. v. *D. Samot*, s' Gravenhage 1886—88. [Archief polit. rek.].

Bulletin trimestriel de l'institut des actuaires français, Paris 1891 ff. [Par. Bulletin. inst. act].

New-York, Papers and transactions of the actuarial society of America. New-York 1889 ff. [N. Y. Am. act. soc.].

Archief voor de verzekeringswetenschap, uitgegeven door de vereeniging van wiskundige-adviseurs. 's Gravenhage 1895 ff. [Archief verzekeringswet.].

Verhandlungen der internationalen Kongresse der Actuare: Premier congrès international d'actuaires. Documents. Bruxelles 1896. [Brüssel, Intern. Kongr.].

Transactions of the second international actuarial congress, London 1899. [London, Intern. Kongr.].

Die Verhandlungen des dritten Kongresses in Paris 1900 befinden sich im Druck.

Mitteilungen des Verbandes der österreichischen und ungarischen Versicherungstechniker, Heft I ff. Teschen, Wien 1899 ff.

Andere Fachzeitschriften, die vorwiegend den nichtmathematischen Interessen gewidmet sind, findet man in den angeführten Katalogen. Neugegründet ist die Zeitschrift:

Zeitschrift für die gesamte Versicherungs-Wissenschaft, herausgegeben vom Deutschen Verein für Versicherungswissenschaft. 1, Heft 1 u. 2. Berlin 1901. [Berl. Zeitschrift vom Deutsch. Verein f. Versicherungswissensch.].

Zeitschriften allgemein mathematischen Charakters, die öfter versicherungsmathematische Arbeiten enthalten, sind: Zeitschrift für Mathematik und Physik, Leipzig 1856 ff.; Hamburg, Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft 1873 ff.; Acta mathematica, Berlin-Paris-Stockholm 1882 ff.; Paris, Comptes rendus de l'académie des sciences 1835 ff.; Tidskrift for Matematik og Fysik, 3 Raekke, Kjöbenhavn 1871 ff.; Acta societatis scient. fennicae, Helsingfors 1870 ff.; Öfversigt af Finska Vet.-Soc. Förhandlingar, Helsingfors 1838 ff.; Öfversigt af kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stockholm 1845 ff.

I. Grundlagen.

1. Verhältnis der Lebensversicherung zu anderen Versicherungen. Es giebt keine mathematische Theorie des Versicherungswesens im allgemeinen. Von den vielen verschiedenen Versicherungsarten, die heutzutage betrieben werden, besitzt nur die Lebensversicherung eine ziemlich durchgearbeitete, in langjähriger Praxis erprobte, mathematische Grundlage. Bei der Invaliditäts-, Unfall- und Krankenversicherung[3]) sind die Anfänge zu einer solchen vorhanden. Im

---

3) *Invaliditätsversicherung:*

Deutschland: A. Wiegand, Die Sterblichkeits-, Invaliditäts- und Krankheitsverhältnisse bei Eisenbahnbeamten in den Jahren 1868—69. Berl. Journal Koll. Lebensvers. 2 (1871), p. 67. Vgl. auch I D 4 a, Fussnote 56. Fortsetzung davon: *G. Behm*, Statistik der Mortalitäts-, Invaliditäts- u. Morbiditätsverhältnisse, Berlin 1876—1885. Fortsetzung davon: *H. Zimmermann*, Über Dienstunfähigkeits- und Sterbensverhältnisse, Berlin 1886—1889. Fortsetzung davon: *A. Zillmer*, Beiträge zur Theorie der Dienstunfähigkeits- und Sterbensstatistik, Berlin 1890. Stenographische Berichte über die Verhandlungen des Reichstags, 7. Legisl.-Per. IV. Session, Berlin 1888/89, Nr. 141, Beilage 1, p. 1094, Nr. 230, p. 1436. — 9. Legisl.-Per. IV. Session, Berlin 1895/97. Zu Nr. 696 p. 265 (nicht veröffentlicht). — 10. Legisl.-Per. I. Session, Berlin 1898/1900, Anlage Bd. I Nr. 93, p. 759; *O. Dietrichkeit*, Fundamentalzahlen. Elberfeld 1894. $3\frac{1}{2}\,\%$; *G. Friedrich*, Mathematische Theorie der reichsgesetzlichen Invaliditäts- und Altersversicherung, Leipzig 1895; *L. von Bortkiewicz*, Zeitschrift für Versicherungsrecht und -Wissenschaft 5 (1899), p. 563; *M. Gerecke,* Berl. Zeitschrift vom deutschen Verein für Versicherungswissensch. 1 (1901), p. 67.

Österreich: A. Caron, Die Berechnung der Beiträge bei der obligatorischen Arbeiterversicherung, Berlin 1881; *A. Caron,* Die Reform des Knappschaftswesens und die allgemeine Arbeiterversicherung, Berlin 1882; *J. Kaan*, Anleitung zur Berechnung der einmaligen und terminlichen Prämien, Wien 1888; *Ph. Falkowicz*, Der Pensionsfonds, Prag 1892.

Schweden: Arbetareförsäkringskomiténs betänkande, I. II. III., Stockholm 1888—1889; Nya arbetareförsäkringskomiténs betänkande I—IV, Stockholm 1892 —1893; Kongl. Maj:ts nådiga proposition till Riksdagen No: 22, Bih. till Riksd. Prot., Stockholm 1895, 1 Saml., 1 Afd., 16 Häft; Kongl. Maj:ts nådiga proposition till Riksdagen No: 55, Bih. till Riksd. Prot., Stockholm 1898, 1 Saml. 1 Afd., 35 Häft.

Norwegen: Statistiske Oplysninger om Alders—og Indtaegtsforholde, Socialstatistik, Bind II, Bilag til den parlamentariske Arbeiderkommissions Indstilling, übrigen[4]) herrscht in den Kreisen der Praktiker vielfach die Ansicht, dass für die meisten anderen Versicherungszweige eine mathematische Theorie nicht nur entbehrlich, sondern auch geradezu unmöglich ist. Zugegeben kann werden: 1) Abgesehen von den eben genannten Versicherungen hat es für den Theoretiker grosse Schwierigkeiten, sich das für ihn erforderliche Material zu beschaffen. 2) Ohne eingehende statistische Unterlagen eine mathematische Behandlung des Versicherungswesens oder einzelner Gebiete desselben auf Grund eines universellen Wahrscheinlichkeitsschemas zu versuchen, wäre ein Unter-

---

Kristiania 1897; *E. Hanssen,* Statistiske Oplysninger om Invaliditetsforholde. Socialstatistik, Bind IV², Kristiania 1900.

Unfall- und Krankenversicherung: K. Heym, Die Kranken- und Invalidenversicherung, Leipzig 1863; *G. Zeuner,* Abhandlungen aus der mathematischen Statistik. III. Unfallversicherung, Leipzig 1869; *K. Heym,* Anzahl und Dauer der Krankheiten, Leipzig 1878; *G. Behm,* Denkschrift betr. die Gefahrenklassen, Anlage zur Begründung eines Gesetzentwurfes betr. die Unfallversicherung. Stenogr. Berichte über die Verhandlungen des Reichstages. 5. Legisl.-Per. II. Session 1882/83. Bd. V, Nr. 19 Anlagen, p. 214; *A. Hazeland,* Statistiske Undersøgelser angaaende Ulykkestilfaelde under Arbeide i Aarene 1885 og 1886, Bilag til Arbeiderkommissionens Indstilling III, Kristiania 1889; *G. Friedrich,* Die berufsgenossenschaftlichen Gefahrentarife und ihr Genauigkeitsgrad. Ehrenzweig 12 (1891), Teil 2, p. 69; *A. Hazeland,* Forslag til Lov om Arbeideres Sygeforsikring, Arbeiderkommissionens Indstilling II, Kristiania 1892; *C. Moser,* Denkschrift über die Höhe der finanziellen Belastung betr. die Krankenversicherung, Bern 1893. Zweite Aufl. 1895; *C. Moser,* Versicherungstechnische Untersuchungen über die eidgenöss. Unfallversicherung, Bern 1895; *W. Sutton,* Sickness and mortality experience made by friendly societies, for the years 1856—1880, ordered by the House of Commons to be printed, London 1896. $2\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, 3, $3\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$, 4%; *F. G. Hardy,* A treatise on friendly society valuations with tables, London. $2\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, 3, $3\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$, 4% (im Druck); *W. A. Bowser,* Friendly societies' valuation and other tables, London 1896. Kapitaldeckung und Umlage bei der Arbeiter-Unfallversicherung in Österreich, herausgegeben vom Vorstande der Arbeiter-Unfallversicherungsanstalt für Niederösterreich, Wien 1899.

Im übrigen sei auf die Referate des 3. internationalen Kongresses der Aktuare in Paris (Litt.-Verz. VII), die Fortschritte der Mathematik und die Publikationen verwiesen:

Deutschland, Amtliche Nachrichten des Reichsversicherungsamtes, Berlin 1885 ff.
Schweden, Registrerade sjukkassors verksamhet, Stockholm 1892 ff.
Österreich, Amtliche Nachrichten des k. k. Ministeriums des Innern, betr. die Unfall- und Krankenvers. der Arbeiter, Wien 1888 ff.
Norwegen, Beretning fra Rigsforsikringsanstalten, Kristiania 1897 ff.

4) Eine Übersicht über das gesamte Versicherungswesen geben: *A. Chaufton,* Les assurances, 2. Paris 1884/86; *H.* u. *K. Brämer,* Das Versicherungswesen, Leipzig 1894. Eine Geschichte des Versicherungswesens zu geben sucht: *G. Hamon,* Histoire générale de l'assurance. Paris, ohne Jahr.

nehmen, das weder bei den Theoretikern, noch bei den Praktikern jetzt noch auf Interesse rechnen könnte. Das Referat beschränkt sich daher auf die Lebensversicherung und verweist den Leser im übrigen auf die in den Fussnoten dieser Nummer genannten Werke. Nur ausnahmsweise werden zum Vergleiche auch andere Versicherungsarten herangezogen.

2. Hypothesen, auf denen die Theorie beruht. Die mathematische Grundlage der Lebensversicherungsmathematik bildet die Wahrscheinlichkeitsrechnung[5]). Die zum Aufbau der Theorie erforderlichen Definitionen, Sätze und Axiome zerfallen in 2 Gruppen, allgemeine und spezielle. Sie lauten:

a. Axiome etc. aus der allgemeinen Wahrscheinlichkeitsrechnung [I D 1, Nr. 2, 3, 4].

Definition I. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis E eintritt, ist ein positiver echter Bruch p, der E zugeordnet ist.

Axiom I. Ist E gewiss, so ist $p = 1$. Ist E unmöglich, so ist $p = 0$.

Definition II. Zwei Ereignisse schliessen sich aus, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sowohl E_1 als E_2 eintritt, gleich 0 ist[6]).

Axiom II. Sei p_1 die Wahrscheinlichkeit, dass E_1, p_2 die, dass E_2, p die, dass eines der beiden Ereignisse E_1 oder E_2 eintritt; alsdann ist:

$$p = p_1 + p_2,$$

falls E_1 und E_2 sich ausschliessen.

Axiom III. Sei p_1 die Wahrscheinlichkeit, dass E_1 eintritt, p_2' die, dass E_2 eintritt, wenn man weiss, dass E_1 eingetreten ist, p die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl E_1 als E_2 eintritt. Alsdann ist:

$$p = p_1 p_2'.$$

Definition III. Sei unter sonst gleichen Bezeichnungen wie in Axiom III p_2 die Wahrscheinlichkeit, dass E_2 eintritt. Man sagt, dass E_1 und E_2 von einander unabhängig sind, wenn

$$p = p_1 p_2$$

ist[7]).

---

5) Dagegen *K. Wagner* a. a. O. (Litt.-Verz. VI), p. 154 unten: „Wahrscheinlichkeitsrechnung und Versicherung haben innerlich nichts miteinander zu schaffen.“ Zu den Axiomen vgl. *H. Poincaré,* Calcul prob., Paris 1896, p. 12 ff.

6) Diese Definition erscheint zweckmässig, im gewöhnlichen Sinne brauchen sich die Ereignisse darum noch nicht auszuschliessen.

7) Mehrere Lebensversicherungsmathematiker bedienen sich auch der *Bayes*schen Regel (I D 1, Nr. 15), so namentlich *W. Lazarus*, Berl. Journal Koll. Lebensvers.

b. Spezielle Axiome etc. für die Sterbenswahrscheinlichkeiten [s. a. I D 4a, Nr. **8**—**11**].

Axiom IV. Sei (x) ein Individuum einer Gesamtheit, das beim Alter x lebt; alsdann wird die Wahrscheinlichkeit, dass (x) beim Alter $x+m$ lebt, durch eine bestimmte Funktion von x und $x+m$, $p(x, x+m)$, gemessen, für alle positiven Werte x und m, die ein gewisses Grenzalter ω, das niemand überlebt, nicht überschreiten.

Axiom V. Sei $p(x, x+m)$ die Wahrscheinlichkeit, dass (x) beim Alter $x+m$, $p'(y, y+n)$ die, dass (y) beim Alter $y+n$ noch lebt. Alsdann sind diese beiden Wahrscheinlichkeiten von einander unabhängig für alle positiven Zahlen x, y, m, n, falls sie sich auf zwei verschiedene Individuen beziehen.

Hieraus folgt die Unabhängigkeit beliebig vieler Sterbens- und Ueberlebenswahrscheinlichkeiten, wenn diese sich auf lauter verschiedene Individuen beziehen.

Definition IV. Eine Gesamtheit Γ von Individuen besteht aus lauter gleichartigen Risiken, wenn für irgend zwei Individuen dieser Gesamtheit:

$$p(x, x+m) = p'(y, y+n)$$

ist, sobald $x = y$, $m = n$ ist.

Satz I. Jede Gesamtheit Γ von gleichartigen Risiken besitzt eine (fingierte) Absterbeordnung, d. h. zu ihr gehört eine Funktion l_x der kontinuierlichen Veränderlichen x, genannt die *Zahl der Lebenden des Alters* x, mit folgenden Eigenschaften[8]):

1) l_x ist nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt,
2) l_x nimmt mit wachsendem x nicht zu,
3) l_x ist nie negativ,
4) es ist $p(x, x+m) = \frac{l_{x+m}}{l_x}$.

3. Prinzipien, nach denen die Theorie auf die Erfahrung angewendet wird. Die Methoden, nach denen man die Axiome etc. der vorigen Nummer auf die Erfahrung anwendet, sind für den speziellen Fall der Sterblichkeitsmessung in Artikel I D 4a II auseinandergesetzt worden. Sie beruhen ebenso wie die Methoden der eigent-

---

1 (1870), p. 78. Ihre Einführung würde ein neues Axiom erforderlich machen. Dies wird hier vermieden durch das Prinzip II und das Postulat der Nr. **3** dieses Artikels.

8) Ursprünglich rechnete man mit der Funktion l_x ganz naiv, indem man — ohne das Bedürfnis einer Begründung zu fühlen — mit ihr wie mit den Zahlen der Lebenden einer wirklichen Generation operierte. Schon *Halley*'s Sterbetafel (1693) schilderte die Sterblichkeit durch die Dekremententafel der Lebenden (I D 4a, Nr. 8).

lichen Lebensversicherungsmathematik auf folgenden allgemeinen Prinzipien:

Prinzip I. Man greift eine gewisse Gesamtheit Γ von Individuen heraus, deren Risiken man als gleichartig postuliert.

Schreibt man für jedes Individuum der Gesamtheit zwei Zeitpunkte vor, zwischen denen es sterben soll, so ist die Wahrscheinlichkeit, die dieser Gruppierung von Todesfällen zukommt, durch die bisherigen Axiome bestimmt, daher auch der wahrscheinliche Wert f^0 irgend einer Funktion f dieser Zeitpunkte und ihre mittlere Abweichung $M(f)$ von ihrem wahrscheinlichen Werte[9]. Man gebraucht nun das

Prinzip II. In erster Annäherung kann man den Wert von f, der der beobachteten Gruppierung der Todesfälle entspricht, mit seinem wahrscheinlichen Werte f^0 identificieren[10].

Hierauf berücksichtigt man, dass der beobachtete Wert f von seinem wahrscheinlichen Werte f^0 im allgemeinen abweicht, schliesst aber Abweichungen von sehr geringer Wahrscheinlichkeit aus durch das:

Postulat. Beobachtet man *einen einzelnen* Wert von f, so weicht dieser von seinem wahrscheinlichen Werte f^0 um nicht mehr als das ν-fache von $M(f)$ ab.

Wie gross man ν wählt, ist willkürlich[11]. Wählt man $\nu = 3$, so identificiert man die praktische Gewissheit mit einer Wahrscheinlichkeit, die jedenfalls grösser als $1 - \frac{1}{\nu^2} = \frac{8}{9}$ ist[12] und gleich $\Theta\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}9973$ ist[13], wenn das *Gauss*'sche Fehlergesetz gilt[14].

---

9) Wahrscheinlicher Wert = mathematische Hoffnung I D 1, Nr. **16**. Mittlere Abweichung = mittlerer Fehler I D 2, Nr. **8**.

10) Alle Lebensversicherungsmathematiker ausser dem Referenten, so *W. Lazarus* a. a. O., p. 79 bei der Sterblichkeitsmessung, *E. Blaschke*, (die Methoden der Ausgl. Litt.-Verz. VI) bei den Ausgleichungsproblemen, gehen von dem *wahrscheinlichsten* Werte aus.

11) *H. Laurent* nennt ν den Sicherheitskoeffizienten (coefficient de sécurité) Par. Journal act. franç. 2 (1873), p. 162.

12) Theorem von *Tschebycheff*, Journ. de math. (2) 12 (1867), p. 183, Zeile 1—6. [I D 1, Nr. **16**, Fussn. 156[a].] Im Wesentlichen dasselbe Theorem wurde später von *P. Pizzetti,* Genova Atti 1892, in einfacherer Form ausgesprochen: Vgl. *E. Czuber,* Die Entwickelung der Wahrscheinlichkeitstheorie, p. 154.

13) $\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-x^2} dx$ ist in I D 4a, Nr. **2** mit P_x bezeichnet, das Integral $\int\limits_x^\infty e^{-x^2} dx$ in I D 2, Nr. **4** mit $\Psi(x)$.

14) Referent gestattet sich die Bezeichnung „Gauss'sches" Fehlergesetz, in-

Unter diese allgemeinen Prinzipien subsumieren sich die in I D 4a bereits gemachten und in diesem Referate noch zu machenden Anwendungen, wie folgt:

1) *Sterblichkeitsmessung* (I D 4a, Nr. **8**—**11**). Man setzt f gleich der Anzahl T der Todesfälle in den einzelnen einjährigen Altersklassen und bestimmt so für alle ganzzahligen Werte a die Sterbenswahrscheinlichkeit q_a des a-jährigen (sc. für das $a+1^{\text{te}}$ Lebensjahr) mit ihrem mittleren Fehler.

2) *Theorie der Dispersion* (I D 4a, Nr. **5**—**7**). Man setzt f gleich der „direkt berechneten" mittleren Abweichung der einzelnen Sterbenswahrscheinlichkeiten einer Altersklasse und vergleicht es mit seinem wahrscheinlichen Werte, der „indirekt berechneten" mittleren Abweichung. Sodann setzt man f gleich der relativen Häufigkeit, mit der ein bestimmtes Intervall von T beobachtet ist und vergleicht diese mit ihrem wahrscheinlichen Werte, der Wahrscheinlichkeit, die diesem Intervalle zukommt.

Die Theorie der Dispersion entscheidet darüber, ob die Hypothesen der Nr. **2** zu Konsequenzen führen, die mit den Beobachtungen übereinstimmen. Für die Verhältnisse der Lebensversicherung trifft dies mit praktisch ausreichender Genauigkeit zu (I D 4a, Nr. **6**, Fussnote 27).

3) *Berechnung der Prämien und Prämienreserven* (Nr. **7**—**13**). Man setzt f gleich der Einzahlung, die der Versicherte für seine Versicherung leisten müsste, wenn man den Zeitpunkt seines Todes kennte. Die wirklich von ihm geforderte Einzahlung (*Prämie*) ist, wenn sie auf einmal und sofort gezahlt wird (*einmalige Prämie*), der wahrscheinliche Wert von f. Die *terminlichen* (jährliche, halbjährliche u. s. w.) *Prämien* werden so bemessen, dass der wahrscheinliche Wert der Einzahlungen dem wahrscheinlichen Werte der Auszahlungen bei jeder einzelnen Versicherung gleichkommt. (*Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung.*) Der Überschuss des Kapitalwertes der für eine Gesamtheit noch zu leistenden Auszahlungen über die von ihr noch zu erwartenden Einzahlungen bildet das jeweilige Deckungskapital der betreffenden Gesamtheit. Sein wahr-

dem er dabei dem allgemeinen Usus folgt. Thatsächlich verdankt man das „Gauss'sche" Fehlergesetz *Laplace*. Vgl. *E. Czuber*, Die Entwickelung der Wahrscheinlichkeitstheorie, Leipzig 1899, p. 74. S. auch I D 4 a, Nr. **2**. Bedeutung für die Lebensversicherung gewinnt es infolge seiner Eigenschaft, als Resultante von unendlich vielen unabhängigen Elementarfehlergesetzen zu erscheinen. Vgl. *E. Czuber*, Die Entwickelung der Wahrscheinlichkeitstheorie p. 163 ff. und Fussnote 168 dieses Artikels.

scheinlicher Wert heisst die *Prämienreserve* dieser Gesamtheit zu dem betreffenden Zeitpunkte.

Folgende Sätze befreien hierbei vom Wahrscheinlichkeitsschema:

Satz II. Man denke sich an Stelle jedes Individuums i einer Gesamtheit L Personen, die zur selben Zeit und im gleichen Alter wie i die gleiche Versicherung wie i eingehen und die genau nach der Sterbetafel absterben (*fingierte Gesellschaft*). Alsdann ist der Kapitalwert der von der fingierten Gesellschaft geleisteten Einzahlungen gleich dem der an sie geleisteten Auszahlungen. Hieraus bestimmen sich die Prämien.

Satz III. Die Prämienreserve einer einzelnen Versicherung ist das jeweilige Deckungskapital der zugehörigen fingierten Gesellschaft, dividiert durch die Zahl L' der zum Zeitpunkte der Berechnung in ihr noch vorhandenen Personen. Dieses Kapital ist einerseits gleich dem Überschusse der zum Zeitpunkte der Berechnung in der fingierten Gesellschaft bereits geleisteten Einzahlungen über die bereits geleisteten Auszahlungen (*retrospektive Methode*), andererseits gleich dem Überschuss der zur selben Zeit noch zu erwartenden Auszahlungen über die noch zu erwartenden Einzahlungen (*prospektive Methode*). Die Prämienreserve einer Gesamtheit ist gleich der Summe der Prämienreserven der einzelnen Versicherungen[15]).

4) *Mittleres Risiko* (Nr. **19—21**). Man setzt f gleich dem Werte des Deckungskapitals zu einem bestimmten Zeitpunkte, das zurückgestellt werden müsste, wenn man die Gruppierung der Todesfälle von der betrachteten Gesamtheit kennte. Alsdann giebt das *mittlere Risiko* $M(f)$ einen Massstab für den *Sicherheitsfonds*, der gegen die nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erwartenden Sterblichkeitsschwankungen zu schützen im Stande ist. Den Sätzen II und III zur Seite tritt:

---

15) Für den naiven Standpunkt (Fussnote 8) ist Satz II als unmittelbarer Ausdruck des Prinzips der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung ein Axiom, nach welchem die Prämien als blosse Durchschnittswerte erscheinen, die nach der Regel de tri gefunden werden. Obwohl schon *A. de Moivre* (Annuities upon lives, London 1725) seine Rechnungen auf Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen stützte, so ist doch bis heutigen Tages die naive Auffassung in den Kreisen der Praktiker die herrschende geblieben (Fussnote 5). Die im Texte gegebene Darstellung geht auf *M. Kanner* zurück (Deutsche Versicherungszeitung 8 (1867), p. 355 (vgl. Fussnote 150). Auf den Begriff der Prämienreserve wurde *F. Baily* (1813) geführt, indem er nach dem Rückkaufswert einer Police fragte. Er gelangte so zu der prospektiven Definition (Fussnote 84 a. a. O.). Die retrospektive Auffassung scheint zuerst *T. B. Sprague,* Lond. Journal inst. act. 11 (1863), p. 103—108 mathematisch begründet zu haben.

Satz IV. Man berechne für jedes Mitglied der zu einer einzelnen Versicherung gehörigen fingierten Gesellschaft die Differenz des thatsächlich zu dem betreffenden Zeitpunkte für seine Versicherung erforderlichen Deckungskapitals und der zu dem betreffenden Zeitpunkte für ihn vorhandenen Prämienreserve. Die Summe der Quadrate dieser Differenzen ist das L'-fache des Quadrates des mittleren Risikos der betreffenden Versicherung zum Zeitpunkte der Berechnung. Das Quadrat des mittleren Risikos einer Gesamtheit ist gleich der Summe der Quadrate der mittleren Risiken der einzelnen Versicherungen.

4. Normale Risiken. Männliche Personen, die nach vollständiger ärztlicher Untersuchung zu normalen Bedingungen auf den Todesfall versichert sind, bilden die *normalen Risiken* einer Lebensversicherungsgesellschaft. Alle übrigen heissen *Extrarisiken* oder *anomale Risiken*[16]. Erfahrungen über normale Risiken enthalten sämtliche Tafelwerke, die im Litteraturverzeichnis unter II angeführt sind; genannt seien die Tafeln H. M. (= healthy male) der 20 E. G., die M I (= männlich I) der 23 D. G., und die Grundzahlen A. F. H. (= assurés français, hommes) auf p. XXIV der 4 F. G.

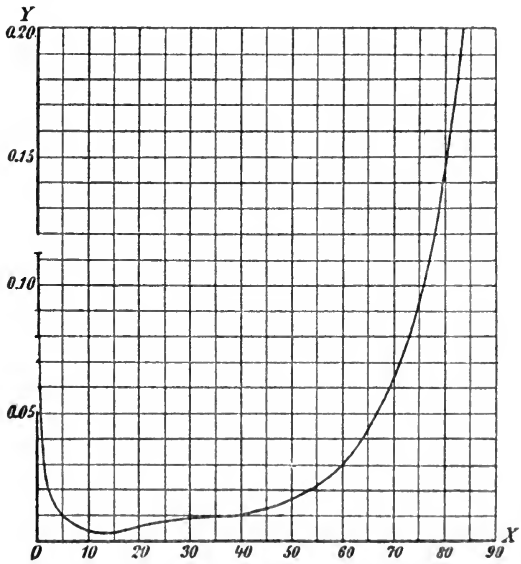


Fig. 1.

Die Sterblichkeitserfahrungen fehlen bei normalen Risiken in der Regel für die Kinderjahre. Die auf den Erfahrungen der 20 E. G. H. M.

16) Diese Definition findet sich nicht explicite in der Litteratur, dürfte aber dem herrschenden Sprachgebrauche annähernd entsprechen.

basierende Textbooktafel[17]) ergänzt diese durch die Erfahrungen *Farr's* über die Sterblichkeit in den gesunden Distrikten Englands[18]). Die resultirende Kurve der Sterbenswahrscheinlichkeiten $y = q_x$ ist für Demonstrationszwecke sehr geeignet und daher hier bis zum Alter 82 in Figur 1 wiedergegeben.

Die Figur stellt jedoch nicht die direkten Beobachtungen dar, sondern ausgeglichene und durch Interpolation ergänzte Werte der Sterbenswahrscheinlichkeiten (I D 4a, Nr. **11**; dieser Artikel Nr. **6**).

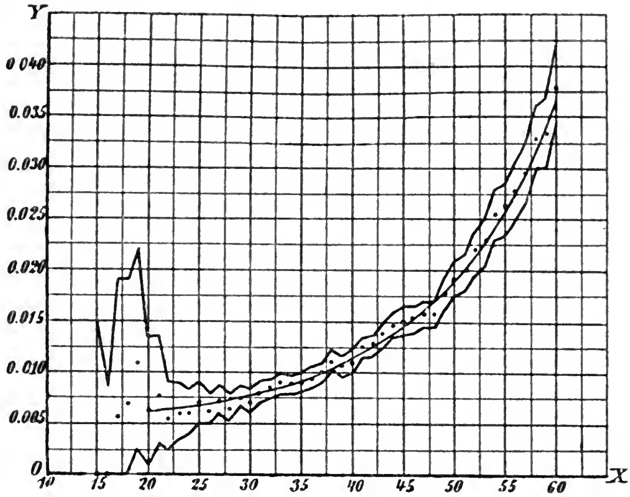


Fig. 2.

Das Verhältnis der wirklich beobachteten zu den ausgeglichenen Werten veranschaulicht an dem Material 23 D. G. M. I[19]) für die Alter 15—60 die Figur 2. Jene sind durch die diskontinuierliche Punktreihe, diese durch den kontinuierlichen Kurvenzug gegeben. Die durch das dreifache des mittleren Fehlers[20]) eines jeden q begrenzte und in der Figur durch die beiden gezackten Linien markierte

17) a. a. O. p. 494.

18) *W. Farr*, Lond. Phil. Trans. 149 (1859), p. 837. Resultate in *W. Farr*, English life table, London 1864. Vgl. I D 4a, Nr. **11**, Fussnote 50.

19) a. a. O. p. 102. Die ausgeglichene Kurve ist die von *W. Lazarus* berechnete (Ehrenzweig 6, 1885, Teil I, p. 12).

20) Ist, für irgend ein Alter x, R die Zahl der beobachteten Personen unter Risiko, q' das Verhältnis der für das $x+1^{\text{te}}$ Lebensjahr beobachteten Todesfälle zur Zahl R, q die gesuchte Sterbenswahrscheinlichkeit des $x$jährigen, $p = 1 - q$, so hat man die quadratische Ungleichung $|q' - q| \leqq 3\sqrt{\frac{pq}{R}}$ nach der Unbekannten q aufzulösen. Der grösste und der kleinste dieser Werte q geben die beiden zur Abscisse x gehörigen Ordinaten der Fehlerzone.

„Fehlerzone" schliesst die ausgeglichene Kurve hier vollständig ein. Hingegen weichen die ausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeiten von den beobachteten in der Regel schon in der dritten oder vierten Dezimale ab. Trotzdem muss man den Rechnungen der Praxis die fünfstelligen ausgeglichenen Werte zu Grunde legen, um hinreichend empfindliche und geglättete Prämientarife und Reservetabellen zu erzielen[21]).

Während die gewöhnlichen Sterbetafeln alle normalen Risiken als gleichartig (vergl. Prinzip I der Nr. 3) postulieren, hängt in Wirklichkeit die Sterblichkeit auch noch von sehr vielen anderen Umständen als dem Alter ab: so von der Höhe[22]) und Art[23]) der Versicherung, dem Berufe des Versicherten[24]), der Todesursache[25]) und vor allen Dingen auch von der Versicherungsdauer[26]). Die ärztliche Untersuchung bringt es mit sich, dass die Sterbenswahrscheinkeiten eines bestimmten Alters in den ersten 3—5 Versicherungsjahren stark wachsen[27]). Man nennt diese Erscheinung, die sich in ihren

21) Ausführliche Anweisung zur Berechnung von Tabellen giebt das Textbook (Litt.-Verz. IV), p. 379. Wegen numerischen Rechnens überhaupt vgl. die einschlägigen Artikel der Encyklopädie sowie die Lehrbücher: *J. Lüroth,* Vorlesungen über numerisches Rechnen, Leipzig 1900 und *C. Runge,* Praxis der Gleichungen, Leipzig 1900.

22) *A. Emminghaus,* Mitteilungen aus der Geschäfts- und Sterblichkeits-Statistik der Lebensversicherungsbank für Deutschland zu Gotha. Weimar 1880, p. 71.

23) *G. H. Ryan,* Lond. Journal inst. act. 28 (1890), p. 225, vermutet eine niedrige Sterblichkeit bei gemischter Versicherung. Vergl. *E. McClintock,* N. Y. Am. Act. Soc. 3 (1893/94), p. 71. Dass dem in der That so ist, beweisen schlagend die Tafeln „Assured lives" (1900) (siehe Litt.-Verz. II).

24) *A. Emminghaus,* a. a. O. p. 7, 13.

25) *A. Emminghaus*, a. a. O. p. 70. Erfahrungen der Stettiner Germania, Vereinsblatt für deutsches Versicherungswesen 25, Berlin 1897, p. 156. *Levi W. Meech,* System and tables (Litt.-Verz. II), p. 182.

26) Schon *J. A. Higham*'s Untersuchungen bei dem Material der 17 E G. (Lond. Journal inst. act. 1, Heft 3 (1851), p. 179) liessen darauf schliessen, dass die Sterbenswahrscheinlichkeiten eines festen Alters mit der Versicherungsdauer zunehmen.

27) Genauer untersuchte das Material der 17 E. G. und das der 20 E. G. H. M. *T. B. Sprague* im Jahre 1870, indem er für alle 5jährigen Altersklassen die Sterbenswahrscheinlichkeiten der einzelnen Versicherungsjahre in Prozenten der nicht nach der Versicherungsdauer trennenden Sterbenswahrscheinlichkeiten der betreffenden Altersklasse berechnete (Lond. Journal inst. act. 15, p. 328). Er fand z. B. für die Altersklasse 36—40 bei dem H. M.-Material in den Versicherungsjahren 0, 1, 2, 3, 4—5 die Sterbenswahrscheinlichkeiten bezw. 40%, 63%, 85%, 100%, 106% des normalen H. M.-Wertes und für die weiteren Versicherungsjahre beständig eine übernormale Sterblichkeit. Die Tafeln der 20 E. G. unterscheiden daher von den gewöhnlichen Sterbenswahrscheinlichkeiten der H. M. Leben, die nicht nach der Versicherungsdauer getrennt sind,

Grundzügen bei dem verschiedensten Material wiederholt, die *Selektion.* Die Vermutung, dass das vorzeitige Aufgeben der Police von Seiten des Versicherten die Sterblichkeit erhöhe, begleitete diese Untersuchungen[28]). Sie wurde später vielfach wiederholt; ein Nachweis für ihre Richtigkeit konnte bisher nicht erbracht werden[29]). Dem gewöhnlichen Brauche entsprechend sehen wir im folgenden von dem Einflusse der Selektion, so lange nicht das Gegenteil bemerkt ist, ab.

5. Extrarisiken. In der Definition der Extrarisiken (Nr. 4) liegt, dass sie eine sehr verzweigte Klasse bilden. Im allgemeinen gilt der Satz, dass die Sterblichkeit der Extrarisiken für die Gesellschaften ungünstiger ist als die der normalen Risiken. Eine verhältnismässig geringe Rolle spielen in der Praxis bis jetzt noch die Gefahren besonderer Berufe[30]), des Klimas[31]) und der minderwertigen (d. h. erblich oder durch Krankheit belastete) Leben[32]). Man sucht sich gegen sie

---

die H. M.(5) solcher Personen, die bereits 5 oder mehr Jahre versichert sind (Tables deduced (Litt.-Verz. III) p. 6 u. 114). In Ergänzung hierzu geben *T. B. Sprague's* select mortality tables (Lond. Journal inst. act. 21 1879, p. 229, 22 1881, p. 391, vgl. auch Litt.-Verz. III) für alle ganzzahligen Alter die Sterbenswahrscheinlichkeiten der H. M. in den Versicherungsjahren 0, 1, 2, 3, 4. Infolge der bei der Konstruktion der 17 E. G. und 20 E. G. eingeführten Altersfiktionen handelt es sich hier ebenso wenig wie bei den anderen Untersuchungen über Selektion um scharfe Versicherungsjahre, sondern um entsprechende Differenzen fingierter Alter (*E. Roghé,* Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Neue Folge, Supplementheft 18 (1891), p. 102). Analoge Untersuchungen für die 23 D. G. M I stellte *W. Lazarus* an (Ehrenzweig 11 (1890), Teil 2, p. 3). Vergl. auch *Emminghaus* a. a. O. p. 30 und die Erfahrungen der Stettiner Germania a. a. O. p. 145. Eine zusammenfassende Darstellung der bisher über Selektion gemachten Erfahrungen und eine Vervollständigung derselben geben die Preisarbeiten von *J. Chatham* (Lond. Journal inst. act. 29 (1891), p. 81) und *E. McClintock* (N. Y. am. act. soc. 3 (1893/94), p. 61).

28) Vgl. *J. A. Higham,* a. a. O. p. 190; *T. B. Sprague,* Lond. Journal inst. act. 15, p. 331—332.

29) Vgl. *J. Chatham,* a. a. O. p. 172, 173 und *E. McClintock* a. a. O. p. 97.

30) Verschiedene Aufsätze im Lond. Journal inst. act. (s. Index to vol. 1—20, London 1883, p. 50, 51; index 21—30, 1896, p. 32, 33; Lond. Journal inst. act. 33 [1897], p. 245; *James J. M'Lauchlan,* Edinb. act. soc. 4 [1899], p. 339). Zusammenfassende Referate wurden auf dem Pariser Kongress 1900 erstattet.

31) *Levi W. Meech,* a. a. O. p. 43; Sterblichkeitstafel der New-York life Insurance Company New-York für die amerikanischen Tropen bei *C. N. Jones,* Am. Act. Soc. 3 (93/94), p. 316, 317; vgl. auch die Indices des Lond. Journal inst. act. und N. Y. Am. Act. Soc., sowie *A. E. Sprague,* Lond. Journal inst. act. 33 (1897), p. 285; *A. L.* 1898, p. 516. Zusammenfassende Referate wurden auf dem Pariser Kongress erstattet.

32) *E. Blaschke,* Denkschrift (s. Litt.-Verz. VI) bildet, gestützt auf eine Klassification der Todesursachen, 3 Gefahrenklassen und stellt für jede von diesen

durch reichlich hohe Extraprämien, Karenzzeit, Ablehnung der Versicherung überhaupt oder doch gewisser Versicherungsarten zu schützen. Bei Auswanderung in die Tropen nimmt die Sterblichkeit mit der Dauer des Aufenthaltes nach den ersten Jahren meist ab[33]). Analog fällt die Sterblichkeit der Reichsinvalidenrentner rapid in den ersten Jahren des Rentengenusses[34]).

Von besonderer Wichtigkeit sind die Extrarisiken, die durch die sogenannte Begräbnisgeldversicherung (Todesfallversicherung ohne vollständige ärztliche Untersuchung auf kleine Summen)[35]), die Leibrentner und durch die Versicherung von Frauen entstehen. Jede bessere Sterbetafel trennt jetzt die Geschlechter (so die 20 E. G. in H. M. und H. F., die 23 D. G. in M. und W., die Grundzahlen der 4 F. G. in H. und F). Nach den Erfahrungen M I und W I der 23 D. G. ist die Sterblichkeit der Frauen bis zum Alter 41 höher, dann niedriger als die der Männer[36]). Die Sterblichkeit der Leibrentner ist im allgemeinen niedriger als die von normal auf den Todesfall versicherten Personen[37]) und zwar scheint der Unterschied erheblicher bei den

---

(a. a. O. p. 46) eine nach *Makeham* ausgeglichene Sterbetafel her. — Die Tafeln II der 23 D. G. (a. a. O. p. 793) geben die Sterbenswahrscheinlichkeiten von nach vollständiger ärztlicher Untersuchung zu erhöhter Prämie versicherten Personen. Vgl. auch die 4. Gruppe der Erfahrungen der 20 E. G. (Litt.-Verz. II), die Indices des Lond. Journal inst. act. und *H. Westergaard*, Lond. Journal inst. act. 31 (1894), p. 375.

33) *A. E. Sprague*, Lond. Journal inst. act. 33 (1897), p. 293, 294.

34) Denkschrift betreffend die Höhe und Verteilung der finanziellen Belastung aus der Invaliditätsversicherung. Deutscher Reichstag, 10. Legislatur-Periode, I. Session 1898/99, Nr. 93, Anlage p. 104.

35) Sterbetafel III der 23 D. G. a. a. O. p. 799. Über Sterbekassen existiert eine kolossale Litteratur, die hier ganz unberücksichtigt bleiben muss. Vgl. jedoch Fussn. 132.

36) a. a. O. p. 787, 789. — Dagegen hat die L.-V.-G. Germania, Stettin, mit der Versicherung von Frauen auf den Todesfall günstigere Erfahrungen gemacht. Vereinsblatt für deutsches Versicherungswesen 25 (1897), p. 142. Zwischen Frauen- und Witwen-Sterblichkeit unterscheidet *J. Karup*, Finanzlage (Litt.-Verz. VI).

37) Die wichtigsten Rentner-Sterbetafeln sind: *M. Deparcieux,* Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine. Paris 1746; *John Finlaison*, Report on the evidence and elementary facts on which the tables of life annuities are founded. Ordered by the House of Commons to be printed 1829 (vgl. jedoch *E. Roghé* a. a. O. p. 23 ff.); *A. G. Finlaison,* Report and observations relating to tontines. Ordered by the house of Commons to be printed 1860; *A. J. Finlaison,* Report to the government annuities act 1882, London 1884. Lond. institute of actuaries' and Edinb. faculty of actuaries' joint mortality investigation, combined experience of life annuitants (1863—1893), London

Frauen als bei den Männern zu sein[38]). Der ärztlichen Untersuchung bei der Todesfallversicherung entspricht hier die *Selbstauswahl* der Versicherten. Daher ist die Erscheinung der Selektion auch im Leibrentengeschäft zu konstatieren[39]).

6. Ausgleichung und Interpolation. Die Ausgleichungsmethoden der Lebensversicherung[40]) suchen entweder die auszugleichenden Werte durch diejenigen einer einfachen analytischen Funktion zu approximieren oder sie operieren ohne eine solche. Diese unterscheiden sich nicht wesentlich von den allgemein üblichen Methoden: Man bedient sich mechanischer Hülfsmittel[41]), des graphischen Verfahrens[42]), der

---

1899. Die Tafeln IV der 23 D. G. (a. a. O. p. 513, 617, 737, 761) betreffen Versicherungen auf den Erlebensfall überhaupt. Speziell auf Renten bezieht sich die Deutsche Rentner-Sterbetafel, Vereinsblatt für Deutsches Versicherungswesen 19 (1891), p. 149. Ferner sind zu nennen: Die Tafeln der F. G.; R. F., Grundzahlen a. a. O. p. XVIII; Erfahrungen amer. Gesellschaften: *Rufus W. Weeks,* Am. act. soc. 2 (1891/92), p. 233. Alle diese Tafeln trennen nach Geschlechtern. Eine kritische Übersicht über die wichtigsten damals erschienenen Rentner-Sterbetafeln nebst Tabellen giebt: *B. Schmerler*, Die Sterblichkeits-Erfahrungen unter den Renten-Versicherten, Berlin 1893; *Thomas B. Macaulay,* Am. act. soc. 4 (95/96), p. 410. Weitere Litteratur bei *Landré, Schmerler* und in *Neumann*'s Jahrbuch.

38) *B. Schmerler,* a. a. O. p. 24.

39) *James Chatham,* Edinb. act. soc. 2 (1891), p. 27, berechnet die q_x für die einzelnen Versicherungsjahre; vgl. auch *Schmerler,* a. a. O. p. 12; zu *A. J. Finlaison* 1884 select tables bei *George King* and *William Whittall* (Litt.-Verz. III), $2\frac{1}{2}\%$ und 3%.

40) Die wichtigsten Ausgleichungsmethoden (I D 2) unter einem einheitlichen logischen Gesichtspunkte zusammenzufassen versucht die Monographie von *E. Blaschke*, Die Ausgleichungsmethoden der Lebensversicherung (Litt.-Verz. VI). Man vgl. auch *E. Blaschke*, Wien. Denkschr. math.-naturw. Kl., Bd. 54 (1888), p. 105, und *H. Bruns,* Ausgleichung statistischer Zählungen in der Psychophysik, Phil. Studien 9 (1893), p. 1. Ausserdem existieren zahlreiche Arbeiten, speziell aus der Lebensversicherung, welche mehr die Praxis der Ausgleichung interessiert, die aber gleichwohl eine Übersicht über die verschiedenen Methoden geben. Genannt seien die Monographie von *Woolhouse*, *L. Lindelöf*, Mortaliteten i Finland, Helsingfors 1889, die Dissertation von *J. P. Janse* und besonders die historische Arbeit von *A. Quiquet*, Par. Bull. inst. act. 4 (1893), p. 151, ferner *C. L. Landré,* Math. techn. Kap. (Litt.-Verz. IV), p. 60, ders., Ehrenzweig 15 (1894), Teil 2, p. 30, sowie aus dem Lond. Journal inst. act. die Arbeit von *W. Sutton* a. a. O. 20 (1877), p. 170, 192, die auch den Einfluss der Ausgleichung auf die Werte der Prämien und Reserven untersucht, und *J. Sorley,* a. a. O. 22 (1880), p. 309.

41) *G. F. Salter,* N. Y. Am. act. soc. 3 (1893/94), p. 442.

42) In Verbindung mit rechnerischen Korrektionen verwendet dieses namentlich *T. B. Sprague* (Lond. Journal inst. act. 21 [1879], p. 445, 26 [1886], p. 77).

Bildung von Mitteln[43]) und Differenzen[44]), man setzt die ausgeglichene Funktion aus einzelnen Parabelstücken zusammen[44]) oder man benutzt die Methode der kleinsten Quadrate[45]), endlich kombiniert man auch die verschiedenen Methoden (*Woolhouse*'s Methode der Superposition)[46]). Die Rechtfertigung für die Zulässigkeit eines Verfahrens erblickt man meist in seinem Erfolg im einzelnen Fall.

Der Lebensversicherung eigentümlich sind hingegen einige analytische Ausdrücke (sogenannte Sterblichkeitsgesetze, vgl. I D 4 a, Nr. **11**), durch die man die Zahl der Lebenden approximiert. Wir nennen nur das *Makeham*'sche *Gesetz*[47]) und seinen Vorläufer, das *Gom-*

---

43) Hierher gehören die von *John Finlaison* empfohlenen Methoden. Vgl. *John Finlaison,* Report on the evidence and elementary facts on which the tables of life annuities are founded. Ordered by the house of Commons to be printed 31. III. 1829; Memoir of the late *John Finlaison,* Lond. Journal inst. act. 10 (1862), p. 160; *H. A. Smith,* Lond. Journal inst. act. 13 (1866), p. 58.

44) Die Methode der Differenzenbildung und die der Benutzung von Parabeln sind nicht wesentlich von einander verschieden, wie denn überhaupt die im Texte unterschiedenen Kategorien sich nicht immer scharf trennen lassen. Vgl. auch die Artikel I D 3 und I E, sowie im Lond. Journal inst. act. die Arbeiten von *W. S. B. Woolhouse,* 12 (1865), p. 137; *P. W. Berridge,* 12 (1865), p. 220; *J. Karup*, London, Intern. Kongr. (1899), p. 31.

45) Approximiert man dabei stückweise durch ganze, rationale Funktionen, so entstehen die *Tschebyscheff*'schen Ansätze. Siehe I D 3, Nr. **14**. Den Spezialfall einer ganzen Funktion 2ten Grades bringt in eine sehr einfache Form *G. Eneström*, Stockh. Öfv. 50 (1893), p. 397. Ohne einen vorgegebenen analytischen Ausdruck operiert *G. Bohlmann,* Gött. Nachr. 1899, p. 260.

46) Der Name „Superposition" stammt vom Referenten. Die Methode besteht darin, dass durch die Endpunkte der Ordinaten l_{x-5}, l_x, l_{x+5} eine gewöhnliche Parabel (x) gelegt wird. Um nun das ausgeglichene l zu definieren, das einem bestimmten Alter a entspricht, markiert *Woolhouse* die Schnittpunkte der gegebenen Ordinate dieses Alters mit den Parabeln $(a-2)$, $(a-1)$, (a), $(a+1)$, $(a+2)$. Das gewöhnliche arithmetische Mittel der diesen 5 Schnittpunkten entsprechenden Ordinaten definiert das ausgeglichene l_a. Siehe *W. S. B. Woolhouse,* Lond. Journal inst. act. 15 (1870), p. 389; 21 (1878), p. 37, 57. Die Methoden von *Woolhouse* und *J. Finlaison* vereinigen *J. A. Higham,* 23 (1882), p. 335; 24 (1883), p. 44; 25 (1884), p. 15 (1885), p. 245; *Th. G. Ackland,* 23 (1882), p. 352.

47) *W. M. Makeham,* Lond. Journal inst. act. 8 (1860), p. 301. Das „Gesetz" schreibt nicht die Natur vor, sondern der Rechner. Schon *C. F. Gauss* († 1855) war im Besitze einer Sterblichkeitsformel, welche die Makeham's als speziellen Fall enthält und für das ganze Leben gelten soll (Gauss' Werke 8, Leipzig-Göttingen 1900, p. 155). Sie ist ihrerseits wieder ein spezieller Fall einer von *W. Lazarus* zu demselben Zwecke aufgestellten Gleichung (Über Mortalitätsverhältnisse und ihre Ursachen, Hamburg 1867; übersetzt von *T. B. Sprague* im Lond. Journal inst. act. 18 (1873), p. 55, (1874), p. 212). Weitere Verallgemeinerungen sind hieran unter anderen von *A. Amthor* (Das Gompertz-

pertz'sche Gesetz [48]). Nach diesem bilden die Sterbensintensitäten (I D 4a, Nr. 8) μ_x, nach jenem ihre Differenzen eine wachsende geometische Reihe. In beiden Fällen ist:

$$\mu_x = \alpha + \beta\gamma e^{\gamma x}, \quad l_x = Ce^{-\alpha x - \beta e^{\gamma x}},$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen und C, α, β, γ positive Konstante bedeuten. Beim *Makeham*'schen Gesetz ist α nicht null, das *Gompertz*'sche Gesetz entsteht in dem Grenzfalle $\alpha = 0$. Das *Makeham*'sche Gesetz stellt die Sterblichkeitskurven normaler Risiken von einem Alter zwischen 20 und 30 an mit völlig ausreichender Genauigkeit dar und führt wie das *Gompertz*'sche zu grossen rechnerischen Vereinfachungen bei den verbundenen Leben (Nr. **13**). Es hat sich bei normalen Risiken [49]) allgemein, bei Extrarisiken [50]) vielfach bewährt.

Was die Bestimmung der Konstanten α, β, γ anlangt, so geschieht diese auf rechnerisch bequeme Weise teils aus drei Überlebenswahrscheinlichkeiten, die sich auf einen längeren Zeitraum (etwa 20 Jahre) erstrecken [51]), oder durch Kombination dieses Verfahrens mit dem der Superposition [52]) oder aus drei Summen der Logarithmen der Zahlen

---

Makeham'sche Sterblichkeitsgesetz, Festschrift der Kreuzschule in Dresden, Dresden 1874, p. 20) und *A. Quiquet* (Par. C. R. 106 (1888), p. 1465; 109 (1889), p. 794; Par. Bull. act. franç. 4 (1893), p. 97) geknüpft. Letztere Arbeit ist umfassend und subsumiert alle bisher aufgestellten Sterblichkeitsformeln unter einem einheitlichen Gesichtspunkte. Vgl. Fussn. 118. Die einschlägige deutsche Litteratur findet man bei *K. Wagner,* a. a. O. (Litt.-Verz.) p. 103 ff.

48) *Benj. Gompertz,* Lond. Phil. Trans., 1825, p. 513; *W. M. Makeham* zeigte (Lond. Journal inst. act. 13 [1867], p. 337 Zeile 20—16 v. u.), dass bei einer Trennung der Todesfälle nach Krankheitsursachen das *Gompertz*'sche Gesetz viel besser stimmt als ohne diese Unterscheidung.

49) Nach dem *Makeham*'schen Gesetz sind z. B. ausgeglichen die 17 E. G. (*Woolhouse,* Lond. Journal inst. act. 15 [1860], p. 408 unter Benutzung der Alter 10—90), die 20 E. G. H. M. (*Woolhouse* ebenda p. 408 unter Benutzung der Alter 10—90, *King* and *Hardy*, Textbook p. 84 für die Alter 28—101), die 23 D. G. M. I (*W. Lazarus,* Ehrenzweig 6 [1885], Teil 1 p. 12) für die Alter 20—89, die 4 F. G. A. F. (Tables de mortalité [Litt.-Verz. II] p. XXXII) für die Alter 23—103. Die resultierenden Werte für die α, β, γ schwanken bei Abrundung auf 3 Dezimalen zwischen $0{,}005 < \alpha < 0{,}007$; $0{,}001 < \beta < 0{,}003$; $0{,}079 < \gamma < 0{,}092$. Die Abweichungen der ausgeglichenen Werte von den beobachteten vergleichen mit dem mittleren Fehler der Sterbenswahrscheinlichkeiten bei den 20 E. G. H. M. *Makeham* im Lond. Journal Inst. Act. 28 (1890), p. 329, bei den 23 D. G. M. I *W. Lazarus* a. a. O. p. 20, 21.

50) Nach *Makeham* ausgeglichen sind z. B. die in Fussn. 31 erwähnte Tafel der New York Life für die amerikanischen Tropen, die Sterbetafeln von *E. Blaschke* in Fussn. 32 und die Rentnersterbetafeln der 4 F. G.

51) *C. F. McCay,* Lond. Journal inst. act. 22 (1879), p. 27.

52) *W. S. B. Woolhouse,* Lond. Journal inst. act. 15 (1870), p. 403.

der Lebenden[53]). Deutsche und französische Lebensversicherungs-Mathematiker versuchten eine durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung oder Ausgleichungsrechnung zu begründende Methode zu finden. So verlangt *M. Kanner*[54]) allgemein die Konstanten jedes Sterblichkeitsgesetzes so zu bestimmen, dass die resultierenden Werte der p_x und q_x das wahrscheinlichste Wertsystem bilden. Die Anwendung dieses Verfahrens auf die *Makeham*'sche Formel führt zu transcendenten Gleichungen für die α, β, γ, die jedoch approximativ von *J. Karup* für die Erfahrungen der Gothaer Lebensversicherungs-Gesellschaft[55]), von *W. Lazarus* für 23 D. G. M I[56]) gelöst sind. Die Methode der kleinsten Quadrate benutzen die französischen Tafeln[57]).

Die Sterblichkeitskurven der Figuren 1 und 2 folgen dem *Makeham*'schen Gesetz, bei jener sind die Konstanten nach der dritten, bei dieser nach der vorletzten der soeben angegebenen Methoden berechnet (vgl. Fussn. 17, 19, 53).

Indem man die Gültigkeit des *Makeham*'schen Sterblichkeitsgesetzes nicht nur für ganzzahlige, sondern auch für alle Zwischenwerte postuliert, gewinnt man neben der Ausgleichung eine *Interpolation.* Zu ihr tritt eine *Extrapolation*, wenn man seinen Fortbestand auch jenseits des höchsten Alters der Sterbetafel bis ins Unendliche annimmt. Hat man kein Sterblichkeitsgesetz zu Grunde gelegt, so interpoliert man gewöhnlich bei den Zahlen der Lebenden. Würden diese einer einzigen ohne Unterbrechung wirklich beobachteten Generation angehören, so würden ihre Werte eine integrierbare Funktion bilden, deren ganzen Verlauf man beherrschte. Thatsächlich stellen sie lediglich eine rechnerische Hülfsfunktion dar, die man nur für die ganzzahligen Alter kennt und für deren Zwischenwerte man allein die aus Satz I folgenden Ungleichungen aufstellen kann. Man interpoliert zwischen ihnen linear (*Moivre*'sche Hypothese[58])) oder durch ganze Funktionen zweiten

53) *G. King* und *F. Hardy*, Lond. Journal inst. act. 22 (1880), p. 200. Nach diesem Verfahren ist die Textbooktafel (Fig. 1) für die Alter 28—101 hergestellt. Sie entspricht den Konstanten: $\alpha = 0{,}00619$, $\beta = 0{,}00105$, $\gamma = 0{,}09131$.

54) Berl. Journal Koll. Lebensvers. 2 (1871), p. 164.

55) Rundschau der Versicherungen 34 (1884), p. 309.

56) *W. Lazarus*, Ehrenzweig 6 (1885), Teil 1. p. 12. Auf diesen Konstanten beruht die Konstruktion der Fig. 2. Für sie ist $\alpha = 0{,}00480$, $\beta = 0{,}00343$, $\gamma = 0{,}07908$. Vgl. auch *W. Lazarus*, Die Bestimmung und Ausgleichung der aus Beobachtungen abgeleiteten Wahrscheinlichkeiten. Bericht der math. Gesellsch. in Hamburg 1878, übersetzt ins Engl. Lond. Journal inst. act. 20 p. 410.

57) Tables de mortalité (Litt.-Verz. II) p. 29.

58) Nach *A. de Moivre* (Annuities upon lives, London 1725) ist die Kurve der l_x eine gerade Linie, welche beim Alter 86 die Abscissenachse schneidet.

oder höheren Grades und definiert so nicht nur die verlangten Zwischenwerte, sondern auch die Differentialquotienten von l_x bis zu der Ordnung, bis zu der man sie braucht (mechanische Differentiation[59]). In diesem Falle muss man jedoch darauf achten, dass man die Hypothese, nach welcher man interpoliert, im Laufe der Rechnung nicht wechselt.

II. Der Nettofonds.

7. Definitionen. Unter *Versicherungssumme* einer Lebensversicherung werde im weitesten Sinne diejenige Summe verstanden, welche der Versicherte vertragsmässig beim Eintreten des versicherten Ereignisses zu beanspruchen hat, mag sie nun einmal, wie bei der Kapitalversicherung auf den Todesfall, oder öfter, wie bei den Leibrenten gezahlt werden. Eine Versicherung *läuft ab*, wenn sowohl auf Seiten des Versicherten, als auf der der Gesellschaft alle Zahlungsverpflichtungen erlöschen, ohne dass die in der Police ausgemachten Zahlungsbedingungen verletzt worden sind. Die Zeit, die vom Beginn einer Versicherung bis zum Zeitpunkte der Berechnung verflossen ist, heisst die jeweilige *Versicherungsdauer* der betreffenden Police. Als Zeiteinheit werde das Jahr gewählt. Eine Police *verfällt*, wenn der Versicherte seine Zahlungen einstellt, ohne dass die Gesellschaft für die bereits von ihm geleisteten Zahlungen eine Entschädigung gewährt. Die Beiträge, welche die Versicherten einzahlen, heissen *Prämien* (vgl. Nr. **3**), sie werden höchstens bis zum Tode gezahlt; reichen sie nicht aus (was bei einer guten Lebensversicherungsgesellschaft jetzt nicht mehr vorkommt), so treten zu ihnen noch *ausserordentliche Beiträge* der Versicherten (Gegenseitigkeitsgesellschaften) oder Aktionäre (Aktiengesellschaften). Derjenige Teil der Prämie, welcher bestimmt ist die Nettoausgaben zu decken, heisst die *Nettoprämie*. Die Prämie, welche der Versicherte wirklich zahlt, heisst die *Bruttoprämie*. Die Prämien sind der Versicherungssumme proportional, es genügt daher, sie für die

---

In dieser Ausdehnung ist die Hypothese natürlich unbrauchbar, für kurze Altersstrecken aber zulässig. In diesem Referate wird als *Moivre*'sche Hypothese durchgängig nur die Annahme bezeichnet, dass die Kurve der l_x zwischen zwei aufeinander folgenden ganzzahligen x geradlinig verläuft.

59) Vgl. I D 3, Nr. 8 Formel (16). In die Lebensversicherung wurden diese Methoden von *W. S. B. Woolhouse* eingeführt (Lond. Journal inst. act. 11 (1863), p. 61), viel benutzt sind seine Ausdrücke für μ_x (ebenda 11 (1864), p. 323 unten und 324 oben, und 21 (1878), p. 64). Doch vermisst man überall eine Angabe der Hypothesen, die den Ableitungen zu Grunde liegen, und der Gültigkeitsbedingungen der Resultate.

Versicherungssumme 1 zu berechnen. Die Differenz zwischen Brutto- und Nettoprämie heisst der *Zuschlag,* er soll Deckung der Unkosten, Gewährung von Dividenden und eventuelle Anlage von Sicherheits- und Extrafonds' ermöglichen.

Zu den *Einnahmen* eines bestimmten Zeitraumes (z. B. eines Kalenderjahres) sollen nicht nur die innerhalb desselben eingehenden Beträge an Prämien, Zinsen[60]), Mieten u. s. w. gerechnet werden, sondern auch der Vermögensbestand zu Anfang des Jahres. Ebenso zählen zu den *Ausgaben* des Zeitraumes die sämtlichen innerhalb desselben an Versicherungssummen, Unkosten u. s. w. ausgezahlten Summen und der Bestand zu Ende des Jahres. Eine konsequente Buchung vorausgesetzt, ist in einer Periode die Summe der Einnahmen gleich der Summe der Ausgaben. Im Gegensatze zu den sogleich zu definierenden Nettoeinnahmen und -Ausgaben heissen die soeben erklärten Begriffe die *Bruttoeinnahmen* und *Bruttoausgaben.*

Zu den *Nettoeinnahmen* einer Periode zählen wir 1) die mathematische Prämienreserve (Nr. **3, 11, 16**) der betrachteten Gesamtheit zu Anfang des Zeitraumes, 2) die in ihm als Einnahme zu verzeichnenden Nettoprämien, 3) die rechnungsmässigen Zinseszinsen dieser beiden Summen. Dagegen bilden die *Nettoausgaben* der Periode 1) die in ihr gezahlten Versicherungssummen, 2) die rechnungsmässigen Zinseszinsen von diesen, 3) die mathematische Prämienreserve zu Ende des Zeitraumes. Diesmal ist die Summe der Nettoeinnahmen gleich dem Gewinn im Nettofonds plus der Summe der Nettoausgaben[61])[62]).

---

60) Was den Zinsfuss anlangt, so rechnen nach *J. Neumann,* Jahrbuch für das deutsche Versicherungswesen, 30. Jahrgang, Berlin 1900, p. 497, die deutschen Lebensversicherungs-Gesellschaften ihr normales Todesfallgeschäft jetzt zu 3% oder $3\frac{1}{2}$%. Dagegen bewegte sich im Jahre 1899 die wirklich erzielte durchschnittliche Verzinsung der Ausleihungen nach „Zustand und Fortschritte der deutschen Lebensversicherungsanstalten, 50. Jahrgang, Jena 1900", p. 71, bei den 27 dort aufgeführten Anstalten zwischen 3,72% und 4,24%.

61) Während die im Texte gegebene Erklärung der Bruttoeinnahmen und -Ausgaben über einen ziemlich allgemein geübten kaufmännischen Usus berichtet, nach welchem die Rechenschaftsberichte eingerichtet werden (vgl. z. B. den Runderlass des preussischen Ministeriums des Innern vom 8./3. 1892, Ministerialblatt für die innere Verwaltung 53 (1892), p. 154), hat die Einführung der Nettoeinnahmen und -Ausgaben eine lediglich theoretische Bedeutung und bleibt auch gültig, wenn die betrachtete Gesamtheit sich auf eine einzige Versicherung reduziert. Die Definitionen fussen auf den von *M. Kanner* eingeführten Begriffen, Deutsche Versicherungszeitung 8 (1867), p. 355. Vgl. Fussnote 81. Verwertung finden sie Nr. **20** ff. dieses Artikels.

62) Amtliche Übersichten über die Lebensversicherungs-Unternehmungen

In Nr. **8** bis **13** sind, so lange nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, unter Einnahmen und Ausgaben immer Nettoeinnahmen und Nettoausgaben, unter Prämien immer Nettoprämien verstanden. Das allgemeine Resultat aller auf die Berechnung von Prämien und Prämienreserven sich beziehenden Untersuchungen möge gleich hier vorweg genommen werden: Die Berechnung aller dieser Grössen lässt sich immer auf die der einmaligen Prämien von jährlich zahlbaren Leibrenten zurückführen, die bei Versicherungen auf 1 Leben bis zum Tode, bei Versicherungen verbundener Leben (Nr. **13**) bis zum ersten Tode laufen.

8. Einmalige Prämien für Leibrenten. Die einmalige Nettoprämie (Nr. **3**, 3) einer Versicherung, auch *Wert* der betreffenden Versicherung genannt, ist allgemein der wahrscheinliche Wert (= mathematische Hoffnung) der entsprechend diskontierten Nettoauszahlungen (I D 1, Nr. **16**). Man berechnet sie nach Satz II der Nr. **3**.

(x) bezieht eine jährlich gleichbleibende Leibrente 1, wenn er von Ende des $x + m^{\text{ten}}$ bis Ende des $x + n - 1^{\text{ten}}$ Lebensjahres jährlich, so lange er lebt, die Summe 1 erhält, dagegen vom Momente seines Todes an auf jede Auszahlung verzichtet. Ist $m = 0$, so heisst die Rente pränumerando, ist $m = 1$, so heisst sie postnumerando zahlbar. Ist $x + n = \omega$, das höchste Alter in der Sterbetafel, so heisst die Rente lebenslänglich zahlbar, ist $x + n < \omega$, so heisst sie tem-

ihres Landes geben: *Amerika,* Staat New York: Annual report of the superintendent of the New-York insurance department, New York 1860 ff. — *England:* Statements of account and of life assurance and annuity business. Ordered by the house of Commons to be printed, London 1872 ff. — *Frankreich:* Annuaire statistique de la France, 1 ff., Paris 1878 ff. — *Japan:* Résumé statistique de l'empire du Japon, Tokio 1887 ff. — *Schweden:* Försäkringsväsendet i riket, Stockholm 1887 ff. — *Schweiz:* Berichte des eidgenössischen Versicherungsamtes über die privaten Versicherungs-Unternehmungen in der Schweiz, Bern 1888 ff. — *Finnland:* Bidrag till Finlands officiela statistik XXII, Försäkringsväsendet, Helsingfors 1893 ff. — *Norwegen:* Statistisk Aarbog for Kongeriget Norge 14 ff., Christiania 1894 ff.; Meddelelser fra det statistiske Centralbureau 13 ff., Christiania 1895 ff. — *Deutschland:* Statistisches Jahrbuch für das Deutsche Reich, Berlin 1896 ff.; Vierteljahrshefte zur Statistik des Deutschen Reiches, Berlin 1899. — *Dänemark:* Statistisk Aarbog, udgivet af Statens statistiske Bureau 1 ff., Kopenhagen 1896 ff. — *Ungarn:* Ungarisches statistisches Jahrbuch, Neue Folge 3 ff., Budapest 1896 ff. — *Österreich:* Amtliche Publikationen über den Stand des Versicherungswesens in den im Reichsrate vertretenen Königreichen und Ländern (Publikation steht unmittelbar bevor). — Eine internationale Übersicht giebt: The insurance year book, 2, New-York 1873 ff. und das Ehrenzweig'sche Jahrbuch.

porär, ist $m > 1$, so heisst sie aufgeschoben. Die einmalige Prämie für die lebenslänglich postnumerando zahlbare Leibrente von der jährlich gleichbleibenden Höhe 1 beträgt für das Eintrittsalter x:

$$a_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} v + \frac{l_{x+2}}{l_x} v^2 + \cdots = \frac{N_x}{D_x}, \tag{1}$$

und ist z. B. bei den Grundlagen des Textbook $3\frac{1}{2}$ %, Eintrittsalter 30, gleich 18,4. Dabei bezeichnet v das Kapital, welches die Zinsen in einem Jahre auf die Höhe 1 bringen sollen (bei $3\frac{1}{2}$ % ist also $v = 1{,}035^{-1}$);

$$D_x = l_x \cdot v^x$$

heisst die *diskontierte Zahl der Lebenden des Alters* x und es bedeutet:

$$N_x = D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_\omega.$$

Die Zahlen D_x und N_x sind für die meisten Sterbetafeln tabuliert (Litt.-Verz. III).

Der Wert der Postnumerando-Leibrente 1 ist um 1 kleiner als der der Pränumerando-Leibrente 1. Als Leibrente kommt jene allein in der Praxis vor, Pränumerando-Leibrenten sind die Prämien der Lebensversicherung, nur dass diese umgekehrt die Gesellschaft vom Versicherten bezieht[63]).

63) Die einmalige Prämie der lebenslänglichen Leibrente wurde allerdings nach einer anderen, aber ebenfalls einer korrekten Darstellung fähigen Methode bereits von *Joh. de Witt* berechnet (*Joh. de Witt,* Waerdije van Lijfrenten, s'Gravenhage 1671, Facsimile Haarlem 1879). Die Methode des Textes entwickelte *Halley* (Fussn. 8, p. 596). Vgl. *G. Eneström*, Stockholm, Förhandlingar 1896, p. 41, 157; derselbe, Archief verzekeringswet 3 (1897), p. 62 und *M. Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Leipzig 1894, Teil III, 1 p. 43 ff. Der weitere Fortschritt bestand zunächst darin, dass man seit *Moivre* (Annuities upon lives, London 1725) unter Verwertung der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Fussn. 15) nach den einmaligen Prämien für alle möglichen Versicherungskombinationen, namentlich auch bei verbundenen Leben (Nr. 13) fragte. Freilich waren *Moivre*'s Entwickelungen durchaus auf seine Hypothese beschränkt (Fussn. 58). Die diskontierten Zahlen führte *J. N. Tetens* ein (Einleitung zur Berechnung der Leibrenten, 2 Bde., Leipzig 1785/86, Band 1, p. 88). Die Auffassung der Prämien als wahrscheinlicher Werte oder als mathematischer Hoffnung fusst auf den von *M. Kanner*, Deutsche Versicherungszeitung 1867, p. 355 gegebenen Entwickelungen (vgl. Fussn. 15), sie fand in die Lebensversicherung Eingang durch die Monographie von *Th. Wittstein,* Das mathematische Risiko (s. Litt.-Verz. VI), p. 3, Formel (4). Die dort ausgesprochene Forderung, dass sich die Einzelfälle bei der mathematischen Hoffnung ausschliessen müssen, wurde später vielfach wiederholt, ist aber für die Berechnung der Prämien ebenso lästig als überflüssig. Sie fehlt auch bei *J. Bertrand,* Calcul des probabilités, Paris 1888, p. 50/51. In der

Erhält (x) die lebenslängliche Leibrente 1 in $\frac{1}{r}$ jährlichen Raten zu je $\frac{1}{r}$, so nimmt die Pränumerando-Rente (erste Rate sofort zahlbar) mit r ab, die Postnumerando-Rente (erste Rate nach $\frac{1}{r}$ Jahr zahlbar) zu. Die einmalige Prämie der letzteren ist bei der *Moivre*-schen Hypothese eine lineare Funktion von a:

$$(2) \qquad a^{(r)} = v_1^{(r)} \cdot a + v_2^{(r)},$$

deren positive Koeffizienten $v_1^{(r)}$, $v_2^{(r)}$ ausser von r nur vom Zinsfaktor abhängen[64]). Oft reichen die Näherungswerte aus:

$$v_1^{(r)} = 1, \; v_2^{(r)} = \frac{r-1}{2r}.$$

Ist l_x integrierbar, so entsteht für $r = \infty$ die kontinuierliche Leibrente[65]), deren einmalige Prämie:

$$(1) \qquad \bar{a}_x = \int_0^\infty \frac{l_{x+z}}{l_x} v^z \, dz$$

zwischen a und $a + 1$ enthalten und bei Voraussetzung der *Moivre*'-schen Hypothese leicht aus (2) durch Grenzübergang zu berechnen

---

Bezeichnungsweise hat sich Referent soweit als möglich der in England, Frankreich und Amerika adoptierten des Lond. institute of actuaries angeschlossen. Vgl. hierzu *A. Bégault* im Lond. Journal inst. act. 33 (1896), p. 1 sowie Lond. intern. Kongr. (1899), p 582—640 und die *Sprague*'sche Arbeit, die dem Pariser Kongress vorgelegt wurde. Hinsichtlich der Grösse N_x differiert die englische und amerikanische Bezeichnung. Wir wählen die erstere, vgl. Principles and practice (Litt.-Verz. III) 4th ed., p. 39. Numerische Tabellen für die D_x, N_x, a und ihre dekadischen Logarithmen findet man für alle im Litt.-Verz. unter II aufgeführten Sterbetafeln in den unter III genannten Tafelwerken.

64) Die resultierende Formel gab 1861 *R. Lobatto*, Amsterdam. Verh. 10 (1864), p. 199. Sie entspricht der Annahme, dass v^t den gegenwärtigen Wert der nach t Jahren zahlbaren Summe 1 auch für jedes nicht ganzzahlige t angiebt. Andere Annahmen führen zu komplizierteren Resultaten, vgl. *C. Landré*, Math. techn. Kap. (Litt.-Verz. VI), p. 182 ff. Die Näherungswerte $v_1 = 1$, $v_2 = \frac{r-1}{2r}$ giebt für $r = 2$ und $r = 4$ *Th. Simpson*, Select exercises, London 1752, p. 283.

65) Die kontinuierliche Rente ist von *Th. Simpson* eingeführt (select exercises, London 1752, p. 324). Die übrigens auch von *H. Scheffler* (Sterblichkeit und Versicherungswesen, Braunschweig 1869) vertretene Methode der kontinuierlichen Variabeln wurde als Hülfsmittel zur Gewinnung von numerischen Approximationen von *W. S. B. Woolhouse*, Lond. Journal inst. act. 15 (1869), p. 102 eingeführt und systematisch ausgebeutet.

ist[66]). Für $v = 1$ wird $\bar{a}$ gleich der ferneren mittleren Lebensdauer des (x) [I D 4a, Nr. 8].

Weniger einfach berechnet sich das Integral ($\bar{1}$) bei Zugrundelegung des *Makeham*'schen Gesetzes; es drückt sich alsdann durch eine hypergeometrische Reihe [II B 4] aus, die nur für nicht zu hohe Alter zur numerischen Berechnung unmittelbar brauchbar ist und in den Fällen divergiert, in welchen sich das Integral ($\bar{1}$) auf den Integrallogarithmus reduziert[67]).

Ausser den bisher betrachteten Renten treten noch *vollständige*[68]) und in arithmetischer Reihe *steigende*[69]) Renten auf. Diese spielen namentlich bei der Dividendenberechnung und bei Versicherungen mit Prämienrückgewähr eine Rolle, bei jener wird noch beim Tode ein Bruchteil der Jahresrate ausgezahlt, der der im Sterbejahre noch durchlebten Zeit proportional ist.

Die von *W. S. B. Woolhouse* gegebene Näherungsformel:[70])

$$\bar{a} = a^{(r)} + \frac{1}{2r} - \frac{\mu + \delta}{12 r^2} \tag{3}$$

folgt aus der *Euler*'schen Summenformel (I E, Nr. **11**). Sie gilt, wenn die Sterbensintensität $\mu = \mu_x$ sich immer stetig ändert. $\delta = \log \frac{1}{v}$ heisst die *Verzinsungsintensität.* Unter *log* ist immer der *natürliche*

66) Das Ergebnis des Grenzüberganges, das man natürlich auch direkt durch partielle Integration erhält, steht bei *C. Landré,* Math. techn. Kap., p. 194, Formel (281).

67) Die fragliche Formel findet sich — allerdings in einer nicht sehr übersichtlichen Form — bei *E. Mc. Clintock*, Lond. Journal inst. act. 18 (1874), p. 242. Auf das Problem der numerischen Auswertung des Resultates wird zwar eingegangen, es wird aber ebensowenig wie durch eine frühere Arbeit von *Makeham* (Lond. Journal inst. act. 17 (1873), p. 305, 445), erledigt; vor allen Dingen deshalb nicht, weil die Gültigkeitsbedingungen der Formel und die Genauigkeitsgrenzen der Tabellen nicht genügend diskutiert werden. Eine zusammenhängende Darstellung der beiden Arbeiten giebt *J. J. M'Lauchlan,* Edinb. act. soc. 1 (1879), p. 44—59.

68) Den Wert der vollständigen Rente ermittelt unter Zugrundelegung der *Moivre*'schen Hypothese *T. B. Sprague* (Lond. Journal inst. act. 13 (1867), p. 363 Zeile 9), den allgemeinen Ausdruck stellt *R. H. van Dorsten* auf (Archief verzeker. 1 [1894], p. 110 Formel 15).

69) Die steigende Jahresrente drückt bereits *Tetens* durch geeignete diskontierte Zahlen aus, a. a. O. (Fussn. 63)) 1, p. 217, 222. *G. J. Lidstone* bemerkt, dass ihr Wert, wenn die n^{te} Zahlung die Höhe n hat, das Produkt von v und dem Differentialquotienten von a nach v ist (Lond. Journal inst. act. 31 (1893), p. 69).

70) *W. S. B. Woolhouse,* Lond. Journal inst. act. 15 (1869), p. 105 letzte Zeile, p. 106 Gleichung (9). Vgl. I D 4 a, Fussn. 37.

Logarithmus zu verstehen. Aus (4) folgt die weitere Näherungsformel[71])

$$(4) \qquad a^{(r)} = a + \frac{r-1}{2r} - \frac{r^2-1}{12r^2}(\mu+\delta).$$

Setzt man r gleich dem reziproken Werte einer ganzen Zahl > 1, so wird aus (4) eine Formel der „abgekürzten Summation“, welche a approximativ bestimmt[72]).

Geht man statt von der *Euler*'schen von der *Lubbock*'schen Summenformel[73]) aus, so entstehen analoge Formeln, welche Differenzen an Stelle der Differentialquotienten enthalten[74]). Diesen sämtlichen Näherungsformeln mangelt jedoch eine Abschätzung des Restgliedes. Der Praktiker beurteilt die Güte der Annäherung darnach, wie die verschiedenen Näherungsformeln unter einander übereinstimmen.

9. Einmalige Prämien für Todesfallversicherungen. (x) geht eine gemischte Versicherung (auch abgekürzte Versicherung auf den Todesfall genannt) ein, wenn er beim Tode, spätestens aber beim Alter $x+n$ (dem *Schlussalter* der Versicherung) ein Kapital von bestimmter Höhe s ausgezahlt erhält. Ist $x+n=\omega$, so entsteht die lebenslängliche Kapitalversicherung auf den Todesfall. Ist die Versicherungssumme s gleich 1, so wird die einmalige Prämie der letzteren:

$$(5) \qquad A = \frac{d_x}{l_x}v + \frac{d_{x+1}}{l_x}v^2 + \cdots = \frac{C_x + C_{x+1} + \cdots}{D_x} = \frac{M_x}{D_x}.$$

Sie ist z. B. bei Textbook $3^1/_2$ % für das Eintrittsalter 30 gleich 0,343.

Dabei sind die diskontierten Zahlen $C_x = d_x v^{x+1}$ der Sterbenden $d_x = l_x - l_{x+1}$, sowie ihre Summen $M_x = C_x + C_{x+1} + \cdots + C_\omega$ tabuliert (Litt.-Verz. III). Der Formel liegt die Voraussetzung zu Grunde, dass die Versicherungssumme erst am Ende des Sterbejahres ausgezahlt wird.

---

71) *W. S. B. Woolhouse*, Lond. Journal inst. act. 15 (1869), p. 106 Zeile 6 v. u.

72) *W. S. B. Woolhouse*, Lond. Journal inst. act. 11 (1864), p. 321 Formel (D). Eine zusammenhängende Darstellung der *Woolhouse*'schen Resultate findet man in der in der Fussn. 67 angeführten Arbeit von *M'Lauchlan*.

73) *J. W. Lubbock*, Cambridge Phil. Trans. 3 (1830), p. 323; vgl. *W. S. B. Woolhouse*, Lond. Journal inst. act. 11 (1864), p. 309, Formel (A) und *T. B. Sprague*, Lond. Journal inst. act. 18 (1875), p. 305. Vgl. auch I E, Nr. **11**, Fussn. 21.

74) Vgl. *T. B. Sprague*, Lond. Journal inst. act. 22 (1879), p. 55.

Mehr der Wirklichkeit nähert sich die Annahme, dass die Versicherungssumme sofort beim Tode gezahlt wird. Die ihr entsprechende Prämie $\bar{A}$ ist, wenn man die Existenz der Ableitung l'_x von l_x voraussetzt, für $s = 1$:

$$(\bar{5}) \qquad \bar{A} = -\int_0^\infty \frac{l'_{x+z}}{l_x} v^z\, dz.$$

Partielle Summation führt A, partielle Integration $\bar{A}$ auf die einmaligen Prämien a und $\bar{a}$ der entsprechenden Leibrenten zurück. Die resultierenden Gleichungen:

$$(6) \qquad A = 1 - (1 - v)\,(1 + a),$$

$$(\bar{6}) \qquad \bar{A} = 1 - \delta \cdot \bar{a}$$

behalten ihre Gültigkeit, wenn A bezw. $\bar{A}$ die einmalige Prämie für die gemischte Versicherung, a bezw. $\bar{a}$ die einmalige Prämie für die temporäre Leibrente bedeuten. Natürlich müssen sich Leibrente und gemischte Versicherung auf die gleichen Eintritts- und Schlussalter und beide auf die Versicherungssumme 1 beziehen[75]).

Dem Brauche der Praxis entsprechend halten wir in diesem Referate an der Fiktion, dass die Versicherungssumme erst Ende des Sterbejahres gezahlt wird, im allgemeinen fest und beschäftigen uns nur ausnahmsweise mit den kontinuierlichen Ausdrücken[76]).

Nach ähnlichen Methoden findet man die einmaligen Prämien aller anderen Versicherungen auf 1 Leben. Wir verweisen in dieser Hinsicht auf die im Litt.-Verz. unter IV genannten Lehrbücher und erwähnen nur, dass man komplizierte Versicherungen in einfachere zerlegt, deren Prämien zur Summe die Prämie der gesuchten Versicherung haben.

10. Sonstige Prämien. Sei A die einmalige Prämie irgend einer Versicherung, a der Wert der postnumerando Leibrente 1, welche

75) Die Formeln (5) und (6) giebt *R. Price*, Observations on reversionary payments, 3[d] ed. London 1773, p. 31. Die diskontierten Zahlen C_x und M_x hat aber erst *Tetens* (a. a. O. [Fussn. 63)] 1, p. 96). Die Gleichungen ($\bar{5}$) und ($\bar{6}$) stammen von *Woolhouse,* Lond. Journal inst. act. 15 (1869), p. 115.

76) Thatsächlich zahlen die meisten Gesellschaften sobald wie möglich nach dem Tode. Die dem entsprechende Erhöhung (*Landré,* Math. techn. Kap. p. 102) von A nehmen aber die meisten Gesellschaften nicht vor, weil sie doch einen genügenden Aufschlag auf die Prämien legen. Ganz sicher geht man, wenn man annimmt, dass die Todesfälle alle zu Anfang des Sterbejahres stattfinden und A durch $A \frac{1}{v}$ ersetzt (französischer Usus).

ebenso läuft wie die Prämienzahlung, P die jährliche Prämie der Versicherung. Alsdann folgt aus dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung (Nr. **3**, 3):

$$P = \frac{A}{1+a}. \tag{7}$$

Es ist also die Berechnung von jährlichen Prämien auf die von einmaligen zurückgeführt. Im besonderen folgt bei der gemischten Versicherung auf die Summe 1 aus (6):

$$P = \frac{1}{1+a} - (1-v), \tag{8}$$

wenn P die ganze Versicherungsdauer hindurch gezahlt wird[77]). Für Textbook $3^1/_2$ %, Eintrittsalter 30 ist z. B. die lebenslänglich zahlbare Jahresprämie für die Versicherung des Kapitals 1, zahlbar beim Tode, $P = 0{,}0176$.

Die Gleichung (7) gilt auch für gleichbleibende Prämienzahlung in Raten und überträgt sich auf gleichförmig steigende oder fallende Prämienzahlungen. Auch für Versicherungen mit Prämienrückgewähr ergiebt das Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung einfache Formeln zur Berechnung der Nettoprämien[78]).

Bei den Prämienzahlungen in Terminen ist jedoch zu bemerken, dass, wenn diese den Bruchteil eines Jahres betragen, die Lebensversicherungsgesellschaften die noch nicht gezahlten Raten vielfach nur *stunden*. In diesem Falle darf man zu ihrer Berechnung nicht (7) für eine entsprechende terminliche Rente a anwenden, sondern es erhöht sich die jährliche Nettoprämie P nur um soviel, als der durch die Ratenzahlung bedingte Zinsverlust beträgt. Sind dagegen die Termine Vielfache eines Jahres, so liefert die Formel (7) mit der den Terminen entsprechenden Rente a die den Versicherungsbedingungen adäquate Nettoprämie. Diese wird niedriger als das entsprechende Vielfache der Jahresprämie, die Differenz bedeutet den *Rabatt*, welcher wegen der Vorausbezahlung der Prämien auf die Nettoprämien theoretisch zu gewähren ist[79]).

Die *natürliche Prämie* erkauft die Versicherung jedesmal auf

77) Die Gleichung (7) giebt für Todesfall, lebenslängliche Prämie *R. Price*, Observations, 3d ed., p. 33; die allgemeine Methode wird korrekt auseinandergesetzt von *F. Baily*, The doctrine of life annuities and assurances 2, London 1813, 1, p. 348 ff.

78) Formeln für Nettoprämien bei Rückgewähr von Bruttoprämien findet man im Textbook p. 295—298. Die in den meisten Lehrbüchern allein behandelte Rückgewähr von Nettoprämien kommt in praxi überhaupt nicht vor.

79) Wegen der Formeln siehe *Landré*, Math. techn. Kap. p. 24.

1 Jahr. Bei der Todesfallversicherung auf die Summe 1 ist sie gleich vq_x und ändert sich also mit dem Alter im gleichen Sinne wie die Sterbenswahrscheinlichkeit (Nr. 4, Fig. 1). Sie ist z. B. bei Textbookgrundlagen $3\frac{1}{2}\,\%$ gleich 0,007 für das Alter 30, gleich 0,725 für das Alter 100.[80])

Sei m eine positive, ganze Zahl, V_m die Prämienreserve einer Versicherung von der Summe 1, m Jahre nach Beginn der Versicherung, ferner p'_m die Wahrscheinlichkeit, dass im m^{ten} Jahre die Versicherungssumme ausgezahlt wird, p''_m die Wahrscheinlichkeit, dass in ihm die Versicherung abläuft. Alsdann heisst $\Pi'_m = v(p'_m - p''_m V_m)$ die *Risikoprämie*, $\Pi''_m = vV_m - V_{m-1}$ die *Sparprämie* der betreffenden Versicherung für die Zeit von $m-1$ bis m. Sieht man von Ratenabzahlung ab, so ist die Summe von Π'_m und Π''_m gleich der zur Zeit $m-1$ gezahlten Prämie. Im besonderen ist bei den Todesfallversicherungen die Risikoprämie $\Pi'_m = vq_{x+m-1}(1-V_m)$ die natürliche Prämie für das *reduzierte Kapital* $s' = (1-V_m)$, ganz gleichgiltig, wie die Prämienzahlung P in Wirklichkeit erfolgt. Bei den Leibrenten mit einmaliger Prämie ist

$$\Pi'_m = v(p_{x+m-1} - q_{x+m-1}\,a_{x+m}).^{81)}$$

---

80) Die natürliche Prämienzahlung ist von einigen amerikanischen Gesellschaften zum Geschäftsprinzip erhoben (vergl. *J. van Schevichaven,* Van leven en sterven, Utrecht 1896, deutsch von *H. Tarnke,* Leipzig und Wien 1898, p. 60). Sonst spielt sie in der Lebensversicherung nur eine geringe Rolle, wie überall da, wo die Gefahr mit der Dauer des Versicherungsvertrages steigt (wie z. B. auch bei der Invaliditätsversicherung). Dagegen ist die natürliche Prämienzahlung allgemein bei den Versicherungsarten adoptiert, bei denen das Entgegengesetzte gilt, wie z. B. bei den Sachversicherungen. Hier ist aber zu beachten, dass der Schaden zwischen 0 und seinem Maximum (hier die „Versicherungssumme" genannt) kontinuierlich variiert. Die Prämie wird also bei Sachversicherungen durch ein bestimmtes Integral mathematisch gegeben. Vgl. *Wittstein,* Das math. Risiko p. 16.

81) Die Begriffe Risikoprämie, Sparprämie, reduziertes Kapital sind rein theoretische und für die Ermittelung des Sterblichkeitsgewinnes (Nr. 17) und des Risikos (Nr. 19 ff.) geschaffen. Sie sind hier im Texte in möglichster Allgemeinheit, in der Litteratur dagegen nur für spezielle Fälle entwickelt. Meist bezeichnet man $\frac{1}{v}\Pi'_m$ statt Π'_m als Risikoprämie. Implicite benutzt den Begriff der Risikoprämie (engl. cost of insurance) bereits *Sheppard Homans* bei der Herleitung seiner Kontributionsformel, Lond. Journal inst. act. 11 (1863), p. 124 Zeile 6. Vgl. auch Nr. 17. Als selbständige Grösse ist die Risikoprämie und das reduzierte Kapital von *M. Kanner* bei der Todesfallversicherung mit lebenslänglich gleichbleibender Jahresprämie eingeführt, Deutsche Versicherungszeitung 8 (1867), p. 355. Das Wort Risikoprämie gebraucht *Zillmer* (Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Rentenversicherungen, 2. Aufl.

Bei *Rückversicherung* einer Todesfallversicherung wälzt die rückversicherte Gesellschaft jedes Risiko von sich ab, wenn sie die Reserve V_m selbst zurückstellt und verwaltet, dagegen bei der rückversichernden Gesellschaft das reduzierte Kapital s' versichert[82]). Von den eingehenden Prämien P_x verwendet sie dann die Sparprämie zur Reservebildung, die Risikoprämie zahlt sie an die rückversichernde Gesellschaft. Diese ändert sich ein wenig von Jahr zu Jahr; die ihr äquivalente einmalige Prämie ist unter dem Namen *Insurance value* von *Elizur Wright* eingeführt[83]). Sie mag *Wright's Versicherungswert* genannt werden.

11. Prämienreserve. Die Prämienreserve einer Gesamtheit ist gleich der Summe der Prämienreserven der einzelnen Versicherungen. Finden Ende des m^{ten} Versicherungsjahres sowohl Aus- als Einzahlungen statt, so werden erstere als bereits geleistet angesehen, letztere als noch zu leisten oder bereits geleistet, je nachdem die Reserve zu Ende des m^{ten} oder die zu Anfang des $m+1^{\text{ten}}$ Versicherungsjahres berechnet werden soll. Die prospektive Methode (Nr. 3) liefert für die Reserve V_m zu Ende des m^{ten} Versicherungsjahres die 3 Fundamentalgleichungen:

$$V_m = A_{x+m} - P_x \cdot (1 + a_{x+m}),\text{[84])} \tag{9}$$

$$= (P_{x+m} - P_x) \cdot (1 + a_{x+m}),\text{[85])} \tag{10}$$

$$= 1 - \frac{1 + a_{x+m}}{1 + a_x}.\text{[86])} \tag{11}$$

Dabei bedeutet x das Eintrittsalter, A_{x+m} die einmalige, P_{x+m} die jährliche, ebenso wie die noch zu erwartenden Prämienzahlungen

Berlin 1887, p. 179), *Kanner* sagt statt dessen a. a. O. „reduzierte Prämie". Die Sparprämie wird begrifflich von *A. Zillmer* eingeführt, Deutsche Versicherungszeitung 8 (1867), p. 572, Spalte 1, Zeile 10 v. o. Das Wort ist entnommen *C. Landré,* Math. techn. Kap. p. 247. Tabellen der Risikoprämie für 17 E. G. 4% in Principles and practice, 4th ed., p. 171. Die Risikoprämie bei Leibrenten giebt in etwas abweichender Definition *G. H. Ryan,* Lond. Journal inst. act. 30 (1892), p. 189.

82) Ein anderes Verfahren schlägt *M. C. Paraira* vor, s. *C. Landré,* Math. techn. Kap., p. 343.

83) *E. Wright,* Savings bank life insurance, Boston 1872; s. auch Principles, 4th ed., p. 45.

84) *F. Baily,* The doctrine of life annuities and assurances, 2 Bde., London 1813, Teil 2, p. 458 (deutsch von *C. H. Schnuse,* Weimar 1839).

85) *J. Milne,* A treatise on the valuation of annuities and assurances, 2 Bde., London 1815, Teil 1, p. 283.

86) *D. Jones,* On the value of annuities, 2 Bde., London 1843 (deutsch von *K. Hattendorff,* Hannover 1859), Teil 1, p. 192.

zahlbare Prämie, für die sich (x) nach m Jahren die dann noch laufende Versicherung kaufen könnte, $1 + a_{x+m}$ den Wert der prän. Leibrente 1, welche ebenso läuft, wie die nach m Jahren noch zu erwartenden Prämienzahlungen. (9) und (10) gilt allgemein, (11) nur für die gemischte Versicherung und lebenslängliche Todesfallversicherung, wenn die Prämienzahlung die ganze Versicherungsdauer hindurch erfolgt. Bei einmaliger Prämienzahlung ist die jeweilige Reserve $V_m = A_{x+m}$ der Wert der noch laufenden Versicherung. Die Berechnung der Reserven ist so auf die von Prämien zurückgeführt. Im besonderen basiert auf (11) *J. Chisholm*'s Tafel[87]). Seiner Idee, (11) geometrisch zu interpretieren[88]), würden wohl *M. d'Ocagne*'s Methoden[89]) praktische Bedeutung verleihen können.

Ist $V_m < 0$, so ist $P_{x+m} < P_x$. In diesem Falle könnte also der Versicherte seine Police aufgeben und sich bei einer anderen Gesellschaft zu einer niedrigeren Prämie die noch laufende Versicherung kaufen, dadurch aber würde er der Gesellschaft einen Verlust $- V_m$ zufügen. Daher sind negative Reserven zu vermeiden. Der Praktiker ersetzt negative Reserven in der Bilanz meist durch Null.

Um V_m auch für nicht ganzzahlige m zu definieren, legt man in der Regel die *Moivre*'sche Hypothese und die Annahme zu Grunde, dass beim Tode die fällige Versicherungssumme zwar sofort zurückgestellt, aber erst Ende des Versicherungsjahres ausgezahlt wird (vgl. Nr. 9)[90]). Die Formeln (9) und (10) gelten für jedes positive m. Eine genügende Annäherung[91]) bei gebrochenem m liefert die lineare Interpolation zwischen der Anfangs- und Endreserve des betreffenden Versicherungsjahres[92]). Fasst man eine ganze Gruppe von Versicherungen zusammen[93]), so pflegt man den interpolierten Wert jeder individuellen

87) s. Litt.-Verz. III.

88) Litt.-Verz. III.

89) *M. d'Ocagne*, Nomographie, Paris 1899; *F. Schilling*, Über die Nomographie von M. d'Ocagne, Leipzig 1900.

90) Schon *Milne* berechnet (Fussn. 85) die Reserve zu einem beliebigen Zeitpunkte innerhalb des Versicherungsjahres. Genaue, den Annahmen entsprechende Formeln und einen Vergleich derselben mit verschiedenen Näherungsmethoden giebt *J. D. Mounier,* Archief verzeker. 2 (1895), p. 1.

91) *Mounier,* a. a. O. p. 22.

92) Die resultierende Formel steht in jedem Lehrbuch, so bei *Zillmer* (Litt.-Verz. IV), 2. Aufl., p. 160. Vgl. auch die Kurven, die die Änderung der Prämienreserve darstellen bei *H. A. Thomson,* Lond. Journal inst. act. 34 (1898), p. 8.

93) Um die hierdurch entstehende Additionsarbeit auf ein Minimum zu reduzieren, sind besondere Methoden erdacht. Vgl. die Lehrbücher von *Zillmer,* 2. Aufl., p. 161 ff., und *Landré* p. 288 ff., sowie *E. Blaschke,* Die Gruppenrechnung bei der Bestimmung der Prämienreserve, Wien 1886.

Reserve sogar mit der halben Summe ihres Anfangs- und Endwertes zu identifizieren[94]), mit einem mittleren Fehler, der bei Gleichmöglichkeit und Unabhängigkeit der Einzelfehler der Quadratwurzel aus der Anzahl der Summanden proportional ist[95]).

Die so approximierte Reserve lässt sich behufs bequemerer Rechnung in zwei Summanden zerlegen: 1) Das arithmetische Mittel aus den Reserven zu Ende des laufenden und des vorhergehenden Versicherungsjahres und 2) die halbe Prämieneinnahme für das laufende Versicherungsjahr. Der erste Summand bedeutet weiter gar nichts als eine Zahl, die in einer bestimmten Spalte in den Geschäftsbüchern der Bank an einer bestimmten Stelle steht, wird aber trotzdem von manchen Gesellschaften ihre Prämienreserve genannt; diese bezeichnen dann den zweiten Summanden als *Prämienüberträge* (im Sinne von *unverdienter Prämie*).

Wird die Prämie in anderen als jährlichen Terminen gezahlt, so stellen die meisten Lebensversicherungsgesellschaften gleichwohl die der jährlichen Prämie entsprechende Reserve zurück und bringen den etwaigen Rest in die Prämienüberträge.

Sind die Termine Bruchteile eines Jahres, die als gestundet gelten, so ist dies Verfahren nur eine korrekte Konsequenz der in Nr. **10** eingeführten gestundeten Prämien. Sind die Termine Vielfache eines Jahres, so ist die dieser Zahlung entsprechende Prämienreserve eine andere als die der jährlichen Prämie entsprechende thatsächlich zurückgestellte Reserve. Die Differenz (*Prämienüberträge* im Sinne von *vorausbezahlter Prämie*) ist näherungsweise gleich der Summe der vorausbezahlten Jahresprämien[96]).

Unter allen Umständen bilden also die Prämienüberträge, mag es sich um die unverdienten oder vorausbezahlten Prämien handeln, denjenigen Posten, der zu der in den Geschäftsberichten als solcher ausgegebenen Prämienreserve addiert werden muss, um die der Prämienzahlung wirklich entsprechende Prämienreserve zu erhalten. Die Prämienreserve der Geschäftsberichte möge *die kaufmännische Prämienreserve*, die nach Satz III konsequent berechnete Grösse die *mathematische Prämienreserve* genannt werden (vgl. Nr. **16**).

---

94) *Zillmer*, 2. Aufl., p. 160.

95) Zusatz des Referenten.

96) *Zillmer*, a. a. O. (Litt.-Verz. IV), p. 171, 172. In richtiger Erkenntnis der im Texte geschilderten Sachlage kommt neuerdings bei einigen Gesellschaften der Posten Prämienüberträge in ihren Rechenschaftsberichten überhaupt nicht mehr vor.

12. Abhängigkeit der Prämien und Reserven von den Rechnungselementen. Mit wachsendem Zinsfuss nehmen die einmaligen Prämien ab[97]), ebenso bei gleichbleibenden terminlichen Prämienzahlungen die Prämien aller Versicherungen auf den Erlebensfall (einschliesslich derer mit Rückgewähr der Nettoprämien) und die Prämien und Reserven der gemischten Versicherung, wenn die Prämie durch die ganze Versicherungsdauer gezahlt wird und mit dem Eintrittsalter zunimmt[98]).

Wachsen die Sterbenswahrscheinlichkeiten aller Alter von einem bestimmten Alter an, so nehmen von diesem Alter an die einmaligen Prämien bei den Erlebensfallversicherungen ab, bei den Todesfallversicherungen auf eine konstante Versicherungssumme zu, die durch die ganze Versicherungsdauer in gleicher Höhe zahlbare Jahresprämie der gemischten Versicherung nimmt zu. Dagegen kann die Prämienreserve dieser Versicherung bei durchweg wachsenden Sterbenswahrscheinlichkeiten sowohl zu- als abnehmen[99]). Im besonderen gelten für diese Versicherung, solange die Prämien mit dem Alter wachsen, die Sätze:

Satz V. Ist der Betrag, um welchen die Sterblichkeit die Prämie erhöht, ein konstanter Bruchteil der Versicherungssumme, so nimmt die Reserve ab[100]), ist er ein konstanter Bruchteil der Prämie selbst, so nimmt die Reserve zu[101]), ist er eine lineare homogene Funktion von Prämie und Versicherungssumme, so kann die Reserve sowohl wachsen als abnehmen, als konstant bleiben[102]).

Unterscheidet man die Sterblichkeit nach der Versicherungsdauer (Nr. 4), so ergiebt das Material 20 E. G. H. M. bei der Todesfallversicherung mit lebenslänglicher Prämie ungefähr bis zum Alter 40

97) *Th. J. Searle*, Lond. Journal inst. act. 28 (1890), p. 192, entwickelt a nach Potenzen von $10\left(\frac{1}{v}-1\right)$ und berechnet die ersten 30 Koeffizienten für die H. M.-Tafel.

98) *Mac Fayden*, Lond. Journal inst. act. 17 p. 89, *Sutton* 17 p. 227, weitergehende Untersuchungen bei *T. B. Sprague* 21 (1878), p. 94.

99) Dieser von *T. B. Sprague* (Lond. Journal inst. act. 11 [1863], p. 90) bewiesene Satz wurde ebenso wie der folgende durch Diskussion der hypothetischen Methode (Nr. 16) gefunden, ohne zunächst mit einer höheren Sterblichkeit direkt in Verbindung gebracht zu werden. Das geschah erst durch *T. B. Sprague*, Lond. Journal inst. act. 21 (1878), p. 77.

100) *C. Jellicoe*, Lond. Journal inst. act. 10 (1863), p. 330.

101) *R. Tucker*, Lond. Journal inst. act. 10 (1863), p. 320.

102) *T. B. Sprague*, Lond. Journal inst. act. 11 (1863), p. 93; *J. Meikle*, Lond. Journal inst. act. 23 (1882), p. 385. Weitere Sätze giebt *G. Schärtlin*, Ehrenzweig 11 (1890), Teil 2, p. 14.

höhere, später niedrigere Prämien[103]) und in der Mehrzahl der Fälle höhere Reserven[104]).

13. Verbundene Leben. Eine Versicherung auf verbundene Leben hängt vom Leben und Sterben einer Gruppe von Personen ab (Witwenrente, Waisenpension). Sind $x, y, z, \ldots.$ die Eintrittsalter der einzelnen Personen der Gruppe, so werde diese durch $(x, y, z, \ldots)$, ihre Anzahl durch m bezeichnet. Die grundlegende Versicherung ist die Rente bis zum ersten Tode:

$(x, y, z, \ldots)$ kauft durch eine einmalige Prämie $a = a_{xyz\ldots}$ eine jährlich postnumerando zahlbare Leibrente 1, die mit dem ersten Tode erlischt. Die Prämie (Axiom IV und V der Nr. 2):

$$(12) \qquad a = \sum_{1}^{\infty}{}_h \frac{l_{x+h}\, l_{y+h} \ldots}{l_x\, l_y \ldots}\, v^h$$

ist für 2 Leben und alle ganzzahligen Alter über 9 nach der H. M.-Tafel[105]), für 2 bis 4 Leben und alle Gruppen gleichen Alters nach der Textbooktafel[106]) berechnet. Die einmaligen Prämien irgend einer anderen Versicherung werden wegen Axiom IV und V lineare Funktionen der (eventuell auch aufgeschoben und temporär zu denkenden) Renten bis zum ersten Tode[107]). Die jährlichen Prämien und Prämienreserven berechnen sich nach denselben Prinzipien wie bei einfachen Leben (Nr. **8** bis **12**). Die einmalige Prämie $a_y - a_{xy}$, für die der Mann (x) seiner Frau (y) eine jährlich zahlbare Witwen-

---

103) *G. King,* Lond. Journal inst. act. 20 (1877), p. 245; *T. B. Sprague,* Lond. Journal inst. act. 20 (1877), p. 105, 21 (1879), p. 229, 22 (1881), p. 391, 407.

104) *G. King,* Lond. Journal inst. act. 20 (1877), p. 247, Tabelle R; *T. B. Sprague,* Lond. Journal inst. act. 22 (1881), p. 410. Die Tafeln von *J. Chisholm* (Litt.-Verz. III) lassen die nach *Sprague*'s select mortality table (Litt.-Verz. III) berechneten Prämien und Reserven für die wichtigsten Versicherungsarten ermitteln.

105) Tables deduced (Litt.-Verz. III), 3, $3\frac{1}{2}$, 4 %, p. 139. Für Government Life Annuitants: *A. J. Finlaison,* Joint-life annuity tables, London 1895, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$ %. — Versicherungen auf verbundene Leben hat vor *Moivre* (Fussn. 63) schon *Johan de Witt* betrachtet. *G. Eneström,* Archief verzekeringswet 3 (1898), p. 263.

106) Textbook p. 510 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, 6 %.

107) *C. J. Malmsten,* Act. math. 1 (1882), p. 63, giebt die fraglichen Reductionsformeln für konstante Versicherungssummen; *L. Lindelöf,* Act. math. 3 (1883), p. 97, behandelt auch einen Fall von veränderlichen Versicherungssummen. Wegen der Reduktion der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten vgl. Textbook Kap. II u. IV. Eine allgemeine Regel zur Aufstellung der Formeln für eine grosse Klasse von Renten (rentes de simple survivance) giebt *A. Quiquet,* Par. C. R. 111 (1890), p. 337.

rente 1 kauft, basiert auf der Annahme, dass die erste Rate Ende des Sterbejahres des Mannes und nur dann gezahlt wird, wenn die Frau zu diesem Zeitpunkt noch lebt[108]. Sie unterscheidet nicht zwischen Männer- und Frauensterblichkeit[109].

Gilt das *Makeham*'sche Gesetz, so bestehen die Sätze:

Satz VI. Es seien $(x, y, \ldots)$ und $(w, w, \ldots)$ zwei Gruppen von gleichviel Leben, für welche $\mu_x + \mu_y + \cdots = \mu_w + \mu_w + \cdots$ ist. Alsdann ist $a_{xy\ldots} = a_{ww\ldots}$[110].

Satz VII. $a_{xy\ldots}$ ist gleich dem Werte der entsprechenden Leibrente a_{u_1} eines einzelnen Lebens u_1 bei dem Diskontierungsfaktor v_1, wenn:

$$e^{\gamma u_1} = e^{\gamma x} + e^{\gamma y} + \cdots, \quad v_1 = e^{-(m-1)\alpha} \cdot v.$$ [111]

Die Umkehrung von Satz VI lautet:

Satz VIII. Ist für alle Alter $(x, y, \ldots)$ und ein passendes Alter w immer $a_{xy\ldots} = a_{ww\ldots}$, so folgt daraus die Gültigkeit des *Makeham*schen Gesetzes, wenn $w - x$ nur von den Differenzen der $x, y \ldots$ abhängt[112].

Die auf 3 Leben bezogene Rente a_{xyz} der Formel (13) führt auf die entsprechende für zwei Leben zurück die:

Simpson'sche *Regel.* Sei $x < y < z$. Man bestimme ein Hülfsalter w so, dass $a_w = a_{yz}$, dann ist näherungsweise $a_{xyz} = a_{xw}$.[113]

Sie giebt im allgemeinen zu grosse Werte[114] und wäre dann[115] und nur dann[116] exakt, wenn das *Gompertz*'sche Gesetz gälte.

---

108) Die Formel giebt bereits *Moivre*, Annuities upon lives, 3d ed. London 1750, p. 19. Genauere Formeln in den Lehrbüchern. In Raten zahlbare und vollständige (Nr. 8) Witwenrenten behandelt u. a. *C. Landré* in Archief verzeker. 1 (1895), p. 371, II (1897), p. 115.

109) Zwischen Männer- und Witwen-Sterblichkeit unterscheidet *J. Karup*, a. a. O. (Litt.-Verz. VI) p. 113, 114.

110) *W. M. Makeham*, Lond. Journal inst. act. 8 (1860), p. 301.

111) *W. S. B. Woolhouse*, Lond. Journal inst. act. 15 (1870), p. 401.

112) Die Behauptung ist oft, wenn auch nicht immer hinreichend präcis ausgesprochen, vgl. *Woolhouse*, Lond. Journal inst. act. 15 (1870), p. 402, Textbook p. 208.

113) *Th. Simpson*, Select exercises for young proficients in the mathematics, London 1752, separate ed. 1791, p. 25.

114) *J. Milne*, A treatise on the valuation of annuities and assurances, London 1815, Bd. 2, p. 720. — Eine Verschärfung gab durch passende Abrundung von *w J. Milne* a. a. O. 1 p. 299 und durch Mittelbildungen *J. Meikle* (veröffentlicht von *J. J. M'Lauchlan*, Edinb. act. soc. 1 [1879], p. 36). Weitere Ausführungen bei *M'Lauchlan* a. a. O. p. 31.

115) *A. de Morgan*, Lond. phil. Mag. 15 (1839), p. 337.

116) *W. S. B. Woolhouse*, Lond. Journal inst. act. 10 (1862), p. 128 beweist, dass

Eine zweite, aber für beliebig viele Leben geltende Näherungsformel setzt die Rente a gleich der entsprechenden a_w eines Hülfsalters w, dessen Sterbensintensität $\mu_w = \mu_x + \mu_y + \cdots$ ist. Sie würde dann und nur dann exakt sein, wenn das *Gompertz*'sche Gesetz gälte[117]).

In den Sätzen VI bis VIII ruht die *praktische* Bedeutung der Gompertz'schen und Makeham'schen Formeln für die Tabulierung der Rentenwerte: Die Funktionen $a_{xyz\ldots}$ reduzieren sich auf solche von weniger Veränderlichen. Derselben Eigenschaft erfreuen sich auch alle an *Gompertz* und *Makeham* anknüpfenden verallgemeinerten Sterblichkeitsgesetze. Jene Eigenschaft kann daher, wenn hinreichend präzisiert, zur Definition einer allgemeinsten Sterblichkeitsformel dienen[118]).

III. Der Bruttofonds.

14. Zuschläge und Unkosten. Die durch den Abschluss einer Versicherung entstehenden Unkosten heissen *erste* oder *Erwerbs*-Unkosten, die übrigen *dauernde* Unkosten. Zu jenen gehören die Abschlussprovision, die der Agent für den Abschluss der Versicherung erhält (beim Todesfallgeschäft 0—$2^1/_2\%$ der Versicherungssumme und mehr), das Honorar für die ärztliche Untersuchung bei Todesfallversicherungen, Stempelausgaben, Reisespesen, zu diesen die Inkassoprovision, die der Agent beim Einkassieren der Prämien

---

das Gompertz'sche Gesetz gelten muss, wenn die Summen, durch welche sich a_w und a_{xy} darstellen, *gliedweise* übereinstimmen. Dass hieraus der Satz des Textes folgt, bemerkt *M'Lauchlan* a. a. O. p. 34. Verallgemeinerungen bei *J. Bertrand*, Par. C. R. 106 (1888), p. 1042, *A. Quiquet,* ebenda p. 1465.

117) *W. S. B. Woolhouse*, Lond. Journal inst. act. 15 (1870), p. 399. Durch passende Begriffsbildungen ist es *Woolhouse* gelungen, sehr allgemeine Relationen zwischen den Prämien aufzustellen, die sich ebenso einfach für beliebig viele wie für 1 Leben aussprechen lassen. Im Besonderen führte ihn die konsequente Benutzung der kontinuierlichen Variabeln zu einfachen Verallgemeinerungen der in Nr. 8 und 9 entwickelten Formeln. Namentlich ist auf folgende Stellen in *Woolhouse*'s Arbeiten im Lond. Journal inst. act. aufmerksam zu machen: 11 (1864), p. 322; 15 (1869), p. 105; (1870), p. 409.

118) Diese Beziehungen aufgedeckt zu haben, ist das Verdienst von *A. Quiquet*. Er sucht eine Funktion der Lebenden l, für welche sich die Wahrscheinlichkeit, dass m Personen $(x, y, z, \ldots)$ nach der Zeit h noch leben, als Funktion von $m' < m$ Veränderlichen und von h darstellt. Diese Forderung ist dann und nur dann erfüllt, wenn die Ableitung der Sterbensintensität μ einer linearen homogenen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und von der Ordnung m' genügt. *A. Quiquet*, Par. Bull. act. franç. 4 (1893), p. 101, 111. Vgl. Fussnote 47.

bekommt (beim Todesfallgeschäft 2—3% der Jahresprämie), und die Verwaltungskosten. Den Unkosten entsprechend unterscheidet man bei dem in der Bruttoprämie P' steckenden Zuschlag $\alpha P'$ einen ersten Zuschlag $\alpha_1 P'$ und einen zweiten $\alpha_2 P'$. Jener soll gerade die ersten Unkosten aufbringen, soweit sie nicht durch eine besondere *Policengebühr* gedeckt werden, während der zweite Zuschlag, weil auch für Sicherheitsfonds und Gewinn bestimmt, normaliter die dauernden Unkosten erheblich übersteigt. Ist P die Nettoprämie, so ist $P' = P + \alpha P'$ und $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Die Höhe des α kann man für jede einzelne Police aus den Tarifen der Gesellschaft entnehmen, nachdem man die den Rechnungsgrundlagen der Gesellschaft entsprechende Nettoprämie ausgerechnet hat. Wie allerdings die Tarife zustande kommen, ist eine andere Frage. Theoretiker haben mehrfach vorgeschlagen[119]), die Zuschläge genau nach dem Risiko einer Versicherung (Nr. **19** ff.) abzustufen, was aber in der Praxis nur ganz im Rohen geschieht. Übrigens sind die Zuschläge sehr verschieden, je nachdem es sich um Tarife mit oder ohne Gewinnbeteiligung handelt. So nimmt z. B. die Kölner Concordia, die nach 23 D. G. M. I $3\frac{1}{2}$% rechnet, für die lebenslänglich gleichbleibende Jahresprämie der Todesfallversicherung beim Eintrittsalter 30, $P = 0{,}0210$ für Versicherungen ohne und $P' = 0{,}0251$ für Versicherungen mit Gewinn pro Einheit der Versicherungssumme, was einem Zuschlag von $100\alpha = 8{,}6$ bezw. 23,5% der Bruttoprämie zur Nettoprämie $P = 0{,}0192$ entspricht[120]). Neuerdings bringt *J. D. Mounier* die Frage in Verbindung mit *Daniel Bernoulli*'s Wertlehre, indem er den moralischen Wert (I D 1, Nr. **17**) untersucht, den eine Versicherung für den Versicherten hat[121]). Die Forderung, dass dieser nicht negativ wird, ergiebt wiederum eine obere Grenze für den Zuschlag, welche in erster Annäherung dem Quadrate des mittleren Risikos der Versicherung (Nr. **19**) direkt und dem Vermögen des Versicherten umgekehrt proportional ist[122]). Hieraus

---

119) So *Th. Wittstein*, Das math. Risiko (Litt.-Verz. VI), p. 30. Einen Vergleich der Zuschläge mit dem mittleren Risiko führt an einigen Beispielen durch die Dissertation von *H. Onnen* (Litt.-Verz. VI), p. 61. Eine Arbeit von *J. H. Peek*, welche eine genaue Abstufung der Zuschläge nach dem durchschnittlichen Risiko für die einzelnen Versicherungsarten durchführt, soll demnächst in der Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft erscheinen.

120) Eine jährliche Übersicht über die Tarife der deutschen Gesellschaften und ihre Dividendensysteme giebt *J. Neumann*, Jahrbuch für das deutsche Versicherungswesen, Berlin 1878 ff.

121) Archief verzekeringswet. 1 (1894), p. 17, 77, 145.

122) A. a. O. p. 150 ff. Die a. a. O. aus Formel (18) p. 32 folgende Beziehung zum Risiko wird von *Mounier* merkwürdigerweise gar nicht erwähnt.

folgt aber nicht, dass es moralisch ist, jemandem um so mehr Geld abzunehmen, je weniger er hat, sondern dass umgekehrt der allgemein adoptierte Grundsatz, die Höhe der Prämie nicht vom Vermögen des Versicherten abhängig zu machen, sich auch vom Standpunkte der *Bernoulli*'schen Wertlehre als sehr vernünftig erweist, weil danach die Versicherung für den Versicherten im allgemeinen einen um so höheren Wert hat, je weniger er bemittelt ist.

Eine obere Grenze für die Tarifprämie P', die bei Versicherungen mit geringem Maximalrisiko (Nr. **19**), wie denen auf den Erlebenfall, sehr tief liegen kann, ergiebt sich durch die *Maximalprämie*[123]. Um diese zu finden, unterscheide man alle bei einer Versicherung denkbaren Fälle und berechne den Wert, den in jedem von ihnen die nach den Versicherungsbedingungen zahlbare Nettoprämie haben würde, wenn der betreffende Fall immer einträte. Alsdann ist der grösste dieser Werte die Maximalprämie. Bei der Aussteuerversicherung, wo ein Kapital beim Erleben des Schlusstermins gezahlt wird, ist diese so niedrig, dass die Tarife der Praxis sie vielfach überschreiten und daher streng genommen unzulässig sind.

Für Versicherungen mit wachsender Prämienreserve, zu denen die normalen Todesfallversicherungen gehören, hat *Zillmer* ein Maximum für die ersten Unkosten einer Versicherung durch die Bedingung festgelegt, dass die eingegangenen Einnahmen an ersten Zuschlägen auch dann die Erwerbskosten decken, wenn der Versicherte sich vorzeitig von der Versicherung zurückzieht. Von dem etwa durch eine besondere Policengebühr gedeckten Teile der Erwerbskosten ist dabei natürlich abzusehen.

Reserveprämie heisst die Summe von Nettoprämie und erstem Zuschlag. *Zillmer'sche Reserve* heisst der Überschuss des Wertes der noch laufenden Versicherung über den Wert der noch zu erwartenden Reserveprämien. Ist P_{x+1} die nach den Versicherungsbedingungen zahlbare Nettoprämie, für die sich der Versicherte (x) ein Jahr nach seinem Eintritt die nun noch laufende Versicherung kaufen könnte, P_x die wirklich gezahlte Nettoprämie des (x), so ist $P_{x+1} - P_x$ *Zillmer's Maximum des ersten Zuschlags.* Das entsprechende *Maximum der ersten Unkosten* ist gleich der (notwendig positiven) Differenz von P_{x+1} und der natürlichen Prämie des ersten Versicherungsjahres. Es steigt mit dem Eintrittsalter und kann namentlich bei niedrigerem x für jede einzelne Police in praxi nicht immer ein-

123) Diesen Begriff benutzte Referent mehrfach mit Vorteil bei Vorlesungen und Gutachten.

gehalten werden. So ergeben z. B. bei der Todesfallversicherung mit lebenslänglich gleichbleibender Jahresprämie und dem Eintrittsalter 30 die Textbooktafeln bei einem Zinsfuss von $3\frac{1}{2}\%$ nur 1% der Versicherungssumme als Maximum der ersten Unkosten. Thatsächlich kommt es aber auch nur darauf an, dass die Erwerbskosten des Zugangs in summa die von *Zillmer* gesetzte Grenze nicht überschreiten [124]).

Der Bruchteil α_2 der Prämie, der den zweiten Zuschlag ergiebt, ist für die verschiedenen Versicherungsarten sehr verschieden. Jedenfalls muss normaliter die Bedingung erfüllt sein, dass der Wert aller für einen Versicherungsbestand gezahlten zweiten Zuschläge die auf seinen Anteil entfallenden dauernden Unkosten überschreitet. Bei Versicherungen mit sehr geringem Risiko, wie den Aussteuerversicherungen, ist das aus dieser Ungleichung sich ergebende Minimum für α grösser als das oben aus der Maximalprämie abgeleitete Maximum. Derartige Versicherungen sind daher wenig lebensfähig, wie denn in der That die Aussteuerversicherungen neuerdings einfach durch Spareinlagen (preussischer Beamtenverein, Hannover) oder durch Versicherungen mit erhöhtem Risiko (Militärdienst- und Brautaussteuerversicherungen) ersetzt werden.

Nach den vorstehenden Regeln ist auch die Höhe der Unkosten eines Geschäfts zu beurteilen; doch muss hier an Stelle der exakten Rechnung eine umsichtige Schätzung von Mittelwerten treten, da die Geschäftsberichte nicht alle Einzelheiten bringen können und genaue Rechnungen auch zu zeitraubend sein würden. Allerdings muss man verlangen, dass die Prämieneinnahme für die verschiedenen Versicherungsarten und für das alte und neue Geschäft getrennt angegeben wird und dass analog die ersten und dauernden Unkosten sich aus den Berichten ermitteln lassen. Statistiken, die, ohne auf diese Trennung Rücksicht zu nehmen, lediglich die Gesamtunkosten eines Jahres mit der Prämieneinnahme desselben vergleichen, verfolgen in der Regel besondere Tendenzen [125]).

15. Der Rückkaufswert. Stellt jemand seine Prämienzahlung ein und verzichtet dafür auf die ursprünglich ausbedungenen Ver-

---

124) Die Sätze des Textes wurden, wenn auch in etwas anderer Form, in der Schrift: *A. Zillmer*, Beiträge zur Theorie der Prämienreserve, Stettin 1863 (Litt.-Verz. VI), entwickelt. Ein Referat über diese Arbeit gab in England *T. B. Sprague*, Lond. Journal inst. act. 15 (1870), p. 411. Vgl. Fussn. 130.

125) Vgl. *A. Amthor*, Ehrenzweig 20 (1899), Teil 2, p. 3. Vgl. auch *A. Zillmer,* Ehrenzweig 3 (1882), Teil 2, p. 207.

sicherungsleistungen, so heisst die bare Abfindung, welche ihm die Gesellschaft dafür zu zahlen hat, der *Rückkaufswert* der Police. Mathematisch wird dieser durch die jeweilige Nettoprämienreserve plus dem Gewinnanteil (Nr. **17**, **18**) gegeben, der zu dem betreffenden Zeitpunkte auf die Police entfällt. Dabei ist jedoch die durch den Rückkauf bedingte Verringerung des Versicherungsbestandes und die damit im allgemeinen verbundene Erhöhung des relativen Risikos (Nr. **21**), sowie der Kostenwert der durch den Rückkauf entstehenden Arbeit ebenfalls in Rechnung zu ziehen. Bei der Todesfallversicherung haben die hohen Abschlussprovisionen der Praxis häufig zur Folge, dass für die ersten Jahre der Versicherung ihr mathematischer Rückkaufswert negativ wird. Die Gesellschaften verlangen aber dann meistens kein Reugeld für die Aufgabe der Police, sondern vergüten nur in den ersten 3—5 Jahren einer Versicherung nichts zurück (*Verfall* oder *Storno* einer Police), dafür zahlen sie später in der Regel erheblich weniger als den mathematischen Rückkaufswert, meist auch sehr viel weniger als die Nettoprämienreserve zurück. *Elizur Wright* empfiehlt, einen bestimmten Prozentsatz (z. B. bei der Todesfallversicherung mit lebenslänglich gleichbleibender Jahresprämie 8 %) des jeweiligen *Wright*'schen Versicherungswertes (Nr. **10**) als *Rückkaufsspesen* (surrender charge) abzuziehen[126]).

Statt des Rückkaufswertes in bar wird auch eine äquivalente *prämienfreie Police* auf eine gekürzte Versicherungssumme oder Versicherungsdauer ausgestellt. Bei den Bezeichnungen der Formel (10), Nr. **11**, ist die gekürzte Versicherungssumme gleich $\left(1-\frac{P_x}{P_{x+m}}\right)s$, wenn nach m Jahren die Prämienzahlung eingestellt wird[127]). Sie ist näherungsweise der Zahl der bereits gezahlten Prämien proportional. Im Falle einer prämienfreien Police spricht man von einer *Reduktion* der Versicherung, von einer *Umwandlung*[128]) dann, wenn — ohne dass die Prämienzahlung eingestellt wird, — die ursprünglich ausbedungene Versicherung durch eine äquivalente andere ersetzt wird. Der jeweilige Rückkaufswert giebt zugleich eine obere Grenze für die Höhe, bis zu welcher *Darlehen* auf die Police gewährt werden können.

---

126) *E. Wright*, Savings bank life insurance, Boston 1872. Vgl. *Sh. Homans*, N. Y. Am. act. soc. 2 (1891/92), p. 5 u. 6. Wegen des Einflusses der Selection vgl. Nr. **4**. Den Einfluss des Aufgebens einer Police auf das Risiko untersucht *F. Hausdorff*, Leipz. Ber. 1897, p. 540.

127) Gültigkeitsbedingungen bei *J. B. Cherriman*, Lond. Journal inst. act. 21 (1879), p. 298.

128) Tabellen hierzu: *H. W. Manly*, Tables on the basis of H^M 3, $3^1/_2$, 4 %. London, ohne Jahr.

16. Die Bilanz. Aus der Bilanz einer Gesellschaft soll in erster Linie zu ersehen sein, ob diese am Ende der Geschäftsperiode solvent ist. Im folgenden wird als Geschäftsperiode in der Regel das Kalenderjahr angenommen, was der gewöhnliche Fall ist. Eine Versicherungsgesellschaft heisst *solvent*, wenn ihr Vermögen ausreicht, um unter den von ihr adoptierten Versicherungsbedingungen ihre Verpflichtungen dauernd zu erfüllen. Setzt man eine genügende Dotierung der etwa erforderlichen Sicherheits- und Extrafonds' voraus, so ist die Solvenz dann und nur dann gewährleistet, wenn das vorhandene Vermögen mindestens den wahrscheinlichen Wert des Deckungskapitals für die künftigen Verpflichtungen erreicht. Dieses ist gleich dem Überschuss der künftig zu erwartenden Bruttoausgaben über die zu erwartenden Bruttoeinnahmen, das ist die *Bruttoprämienreserve.* Versteht man unter *Unkostenreserve* den Überschuss der zu erwartenden Unkosten über die zu erwartenden Einnahmen an Zuschlägen, so ist allgemein die Bruttoprämienreserve eines Bestandes gleich seiner Nettoprämienreserve plus seiner Unkostenreserve. Diese letztere spaltet sich wieder in eine *Reserve für erste Unkosten* plus einer *Reserve für dauernde Unkosten*, welche Begriffe sich wohl von selbst erklären.

Sind die Prämientarife einer Gesellschaft genügend individualisiert, so dass jedes Risiko eine seiner Gefahr entsprechende und seinen Anteil an den Unkosten deckende Prämie zahlt, so ist das fragliche Deckungskapital unabhängig von dem künftigen Zugang und gleich der Bruttoprämienreserve des zum Zeitpunkte der Bilanz vorhandenen Bestandes allein. Bei natürlicher Prämienzahlung (Nr. **10**, Fussn. 80) ist diese näherungsweise gleich der halben Prämieneinnahme des laufenden Versicherungsjahres plus den für spätere Jahre bereits vorausbezahlten Prämien. Dabei sind beim Eingange der Prämien bereits gezahlte Unkosten in Abrechnung zu bringen. Der erste Summand dieser Formel giebt die Prämienüberträge im Sinne von unverdienter Prämie, der zweite diejenigen im Sinne der vorausbezahlten Prämie (Nr. **11**).

Die oben definierte Unkostenreserve lässt sich ihrer Natur nach nicht genau berechnen. Die Bestimmung des Deckungskapitals verlangt daher, nicht zu hoch gegriffene obere Grenzen für sie zu finden, die zu Bedenken keinen Anlass geben. Sieht man von der früher mannigfach geübten, jetzt wohl ganz verlassenen *hypothetischen Methode*[129]) ab, so kommen hierfür wesentlich nur zwei Verfahren in Betracht: die *Nettomethode* und die *Zillmer'sche Methode.*

129) Diese bestand darin, dass man aus den Bruttoprämien einer bestimm-

Beiden gemeinsam ist, dass sie die Reserve für zweite Unkosten durch Null ersetzen. Die Nettomethode substituiert auch für die Reserve der ersten Unkosten den zu grossen Wert Null, und mithin an Stelle der Bruttoprämienreserve einfach die Nettoprämienreserve. Die *Zillmer*'sche Methode hingegen stellt die Reserve für erste Unkosten mit ihrem vollen negativen Werte in Rechnung, vereinigt dieselbe mit der Nettoprämienreserve zur *Zillmer*'schen Reserve (Nr. **14**) und stellt diese als Deckungskapital in die Bilanz ein. Ihre Anwendbarkeit ist an die Bedingung geknüpft, dass bei irgend einer Versicherung etwa auftretende negative *Zillmer*'sche Reserven immer durch Null ersetzt werden. Unter dieser Beschränkung, die dem *Zillmer*schen Maximum (Nr. **14**) der Erwerbskosten entspricht, ist das Verfahren einwandsfrei in allen den Fällen, in denen es die Nettomethode ist. Überlegen ist die *Zillmer*'sche Methode der Nettomethode aber dadurch, dass sie imstande ist junge Gesellschaften, die nicht von vornherein über grössere Kapitalien verfügen, in die Höhe zu bringen; alte Gesellschaften, die schon grosse Überschüsse angesammelt haben, können sie leicht entbehren. Bei der Nettomethode decken nämlich die Überschüsse des alten Geschäftes die Erwerbskosten für das neue; bei der *Zillmer*'schen Methode werden diese von den neuen Versicherten selbst allmählich amortisiert[130]).

Die Reserve für dauernde Unkosten darf aber nur so lange durch Null ersetzt werden, als Null ihre obere Grenze ist. Diese Bedin-

---

ten Versicherungsart (z. B. Todesfall, lebenslänglich gleichbleibende Jahresprämie) rückwärts eine „hypothetische" Sterbetafel berechnete, deren Nettoprämien die thatsächlichen Bruttoprämien waren. Hierauf wurden die Formeln (9)—(11) in den mannigfachsten Formen der Berechnung der Bruttoreserve zugrunde gelegt. Dass hierdurch keine obere Grenze für das gesuchte Deckungskapital gefunden werden kann, lehren die Sätze der Nr. **12**, die sich auch historisch aus der Kritik dieser Methode entwickelt haben.

130) Die Methode ist entwickelt in der oben genannten Schrift: „*A. Zillmer*, Beiträge" (Litt.-Verz. VI). Wegen der Einwendungen, die man gegen sie erhoben hat, vgl. den gegnerischen Aufsatz von *C. Heym,* Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Neue Folge 5 (1882), p. 207.

Gegen *T. B. Sprague*'s Vorschlag (London Journal inst. act. 15 [1870], p. 427) die Reserve noch weiter zu kürzen und P_{x+1} durch P_{x+2} oder allgemein P_{x+n} zu ersetzen, ist an sich nichts einzuwenden, nur muss man darauf achten, dass 1) nie eine negative Reserve zurückgestellt wird, 2) die Kürzung niemals höher wird, als es der Wert der den wirklich gezahlten Unkosten entsprechenden Reserve für erste Unkosten zulässt und dass 3) nicht höhere Abschlussprovisionen gezahlt werden, als es die Prämienzuschläge vertragen.

Die Aufsichtsbehörden verhalten sich der *Zillmer*'schen Methode gegenüber sehr misstrauisch.

gung ist allerdings im Durchschnitt beim Todesfallgeschäft erfüllt, wo nur die im ganzen verschwindenden Fälle von einmaliger oder abgekürzter Prämienzahlung eine Ausnahme bilden. Anders liegt es dagegen beim Rentengeschäft; hier muss das Zurückstellen einer entsprechenden Unkostenreserve neben der vollen Nettoreserve gefordert werden[131]).

Bisher war bei der Bestimmung des Deckungskapitals angenommen, dass jedes Risiko die ihm zukommende Prämie zahlt. Das ist jedenfalls nicht der Fall, wenn bei Lebens- und ähnlichen Versicherungen vom Alter unabhängige Beiträge erhoben werden. In diesem Falle kann die Solvenz nicht nur von dem vorhandenen Bestande, sondern auch von dem späteren Zugang abhängen. Das kommt jedoch auf die Art der Beitragszahlung an. Drei Formen derselben werden gewöhnlich unterschieden:

1) *Das Umlageverfahren*, das z. B. bei vielen Sterbekassen und bei der Kranken- und Unfallversicherung des deutschen Reiches besteht. Hier werden die in einer Geschäftsperiode erwachsenen Schäden, und bei Renten nur die bereits fällig gewordenen Raten am Schlusse derselben repartiert.

2) *Das Kapitaldeckungsverfahren* (Invaliditäts- und Altersversicherung des deutschen Reiches bis zum 13./7. 1899). Hier sollen die für jede Geschäftsperiode (10 Jahre) neu festzusetzenden Beiträge die Kapitalwerte der in ihr fällig werdenden Renten aufbringen.

3) *Das Prämiendurchschnittsverfahren* (deutsche Invaliditäts- und Altersversicherung seit 13./7. 1899). Die Versicherten zahlen ein für alle mal festgesetzte, vom Alter unabhängige Durchschnittsprämien und beanspruchen dafür von der Kasse im voraus bestimmte Versicherungsleistungen. Das ist der gewöhnliche Modus bei Witwen- und Pensionskassen.

In den beiden ersten Fällen ist die Solvenz nicht vom Zugang abhängig, wohl aber im letzten. Infolge dessen muss in diesem Falle der Zugang ein obligatorischer und die Möglichkeit vorhanden sein, seine Altersgruppierung im voraus einigermassen abzuschätzen[132]).

131) *C. Landré*, Math. techn. Kapitel (Litt.-Verz. IV), p. 282. — Moderne Gesellschaften wie die Algemeene Maatschappij van levensverzekering en Lijfrente, Amsterdam, und der Atlas, Ludwigshafen stellen thatsächlich eine positive Unkostenreserve in die Passiva ein.

132) Vgl. die Bilanz der Göttinger Witwenkasse, *K. F. Gauss*, Werke 4. Göttingen 1880, p. 119. Bilanzen von Pensionsanstalten entwickeln ferner die in Litt.-Verz. VI genannten Monographien von *J. Karup* und *L. Lindelöf*, sowie *L. Lindelöf,* Acta societatis fennicae 13 (1882), Statistiska beräkningar angående

Aber auch bei den normalen Versicherungsgesellschaften mit nach dem Alter abgestuften Prämien übt der künftige Zugang einen gewissen Einfluss aus. Die Prämien sind auch nur Durchschnittsprämien, insofern sie ebensowenig wie die Nettoreserven mit Berücksichtigung der Versicherungsdauer berechnet werden[133]), obwohl Material genug vorhanden wäre, dies zu thun (Nr. **4**, **5**, **12**). Dies ist ein Grund für den regelmässigen Sterblichkeitsgewinn im normalen Todesfallgeschäft und Sterblichkeitsverlust im Leibrentengeschäft, der zum Teil nur durch den Zugang der letzten Jahre veranlasst wird und insoweit auch nur wegen des als sicher vorausgesetzten Zugangs der folgenden Jahre in den Gewinnfonds wandern darf.

Was die übrigen Posten der Bilanz angeht, so beschränken wir uns, wie immer im folgenden, auf den gewöhnlichen Fall der Lebensversicherung mit nach dem Alter abgestuften Prämien und nehmen an, dass die Gesellschaft ihre Prämien und Reserven nach einer gewöhnlichen, nicht nach der Versicherungsdauer trennenden Sterbetafel berechnet und als Deckungskapital ihrer künftigen Verpflichtungen die Nettoprämienreserve des vorhandenen Versicherungsbestandes in die Bilanz einstellt.

Diese Nettoprämienreserve ist allerdings im weitesten (mathematischen) Sinne als das Deckungskapital aller noch schwebenden Nettoverpflichtungen aufzufassen. Sie spaltet sich in: 1) die kaufmännische Nettoprämienreserve (Nr. **11**), 2) die Prämienüberträge (Nr. **11**) und 3) die *Schadenreserve*, in welche die bereits fällig gewor-

---

finska civilstatens enke—och pupillkassa. Weiter sind zu nennen die amtlichen Berichte in Schweden: Underdånigt betänkande angående pensionering af enkor och barn, efter prestmän och elementarlärare, Stockholm 1873; Förnyadt underdånigt betänkande angående pensionering af enkor och barn efter svenska ecclesiastikstaten, Stockholm ohne Jahr; Underdånigt betänkande med förslag angående ordnandet af arméens enke och pupillkassa, Stockholm 1881; Betänkande angående ordnandet af pensionsväsendet för statens civile tjensteinnehafvare samt för deras enkor och barn, Stockholm 1894. Von theoretischen Arbeiten über Pensionskassen nennen wir noch: *L. Lindelöf,* Acta math. 18 (1894), p. 89; *G. Eneström*, Stockh. Förhandlingar, 1891, p. 343; 1893, p. 361, 405, 623; 1894, p. 479, 561; 1895, p. 197, 243, 807. In Deutschland und Österreich existiert eine grosse Menge von Schulprogrammen, zum Teil auch Dissertationen über die Rechnungen bei Pensionskassen. Man findet derartige Litteratur in *Franz Hübl*, Systematisch geordnetes Verzeichnis der Schulprogramme Österreichs, Preussens und Bayerns, Czernowitz 1869, 2. Teil, Wien 1874.

133) Dagegen berücksichtigt die Dauer des Rentenbezuges die neueste Bilanz der Invaliditätsversicherung. Sten. Berichte des Reichstags, 10. Legisl.-Per., I. Session, Anlagebd. 1, Nr. 96, p. 106 und die Lebensversicherungsgesellschaft Atlas, Ludwigshafen. Geschäftsbericht pro 1898, p. 13.

denen, aber aus irgend einem Grunde noch nicht ausgezahlten Versicherungssummen zurückgestellt werden.

Sind nun auch die Sicherheits- und Extrafonds' genügend gespeist, so fliesst der Rest des vorhandenen Vermögens in den Gewinnfonds. Dabei wird der im nächsten Jahre zu verteilende Überschuss, dessen Berechnung durch die Statuten und die gewählten Gewinnverteilungssysteme mehr oder weniger genau festgelegt wird, gleich als besonderer Posten abgetrennt. Was übrig bleibt, kommt in die *Gewinnreserve*, die zur Regulierung der zukünftigen Dividenden bestimmt ist (Nr. **18**).

Die bisher aufgezählten Posten gehören sämmtlich zu den *Passivis.* Diesen stehen *Aktiva* in gleicher Höhe gegenüber; unter ihnen sind die Policendarlehen (Nr. **15**) und die (wegen Zahlungsfrist oder wegen Ratenzahlung) gestundeten Prämien (Nr. **10**) speziell für eine Versicherungsgesellschaft charakteristisch. Der Wert, mit welchem die gestundeten Prämien in die Bilanz eingestellt werden dürfen, ist jedenfalls kleiner als ihr Brutto- und grösser als ihr Nettobetrag.

Die Übersicht über die Aktiva und Passiva bildet die eigentliche Bilanz. Zu ihr tritt die sogenannte „*Gewinn- und Verlustrechnung*“[134]), welche über die Einnahmen und Ausgaben des Geschäftsjahres Auskunft giebt. Sie muss einmal zu verfolgen gestatten, wie aus dem Bestand zu Ende des Vorjahres sich durch die Einnahmen und Ausgaben der Bestand zu Ende des Rechnungsjahres gebildet hat, sodann aber muss sie auch die Trennung der verschiedenen Geschäftszweige, die die Gesellschaft betreibt (wie Lebensversicherung, Leibrenten, Aussteuer, Unfallversicherung, Invaliditätsversicherung) entweder selbst durchführen oder doch ihre Durchführung ermöglichen. Die gestundeten Prämien erscheinen hier implicite unter den Prämieneinnahmen und sind, wenn die „Gewinn- und Verlustrechnung“ mit der Bilanz harmonieren soll, bei den Einnahmen in derselben Höhe wie unter den Aktivis am Ende des Rechnungsjahres aufzuführen oder es muss die entsprechende Differenz unter den Ausgaben gebucht werden[135]).

134) Diese Bezeichnung ist kaufmännisch nicht genau; sie ist von dem preussischen Runderlass vom 8. III. 1892 (vgl. Fussn. 61) genommen. Vgl. *H. V. Simon,* Die Bilanzen der Aktiengesellschaften, 3. Aufl., Berlin 1899, p. 37.

135) Wegen der Beurteilung eines Geschäftsberichtes und der Buchführung sei ausser auf das soeben genannte *Simon*'sche Buch und *A. Cayley,* The principles of book-keeping by double entry, Cambridge 1894 noch auf die, speziell die Lebensversicherung betreffenden Schriften verwiesen von *T. B. Sprague* (Litt.-Verz. VI); *R. Schiller*, Beiträge zur Buchhaltung im Versicherungswesen, Wien und Leipzig 1898; *J. J. Mc Lauchlan*, Edinb. act. soc. 2 (1891), p. 73.

17. Der Gewinn. Der im Geschäftsjahr erzielte Gewinn wird erhalten, wenn man zum Bestande des Gewinnfonds am Ende des Jahres die im Laufe des Jahres gezahlten Dividenden addiert und davon den Bestand des Gewinnfonds zu Ende des Vorjahres abzieht. Er ist näherungsweise gleich der Summe der Gewinne aus den einzelnen Gewinnquellen. Als solche unterscheidet man:

1) *Sterblichkeitsgewinn.* Um diesen zu erhalten vermehre man die zu Anfang des Jahres vorhandenen Reserven und die im Jahre eingegangenen Nettoprämien um die rechnungsmässigen Zinsen, subtrahiere die gezahlten Schäden und Rückkaufswerte und deren rechnungsmässige Zinsen sowie die Reserven zu Ende des Jahres. Die erhaltene Differenz giebt die Summe des Gewinnes durch Sterblichkeit und des durch Rückkauf und Verfall. Berechnet man diesen nach 4), so erhält man jenen durch Subtraktion[136]).

2) *Der Zinsgewinn* ist gleich dem Ueberschuss der wirklich erzielten Zins- und Mietseinnahmen des Jahres über seine Zins- und Mietsausgaben vermindert um die rechnungsmässigen Zinsen eines Durchschnittswertes des Deckungskapitals für die noch bestehenden Versicherungen. Letzteren setzt man näherungsweise gleich der halben Summe der Prämienreserve (incl. Prämienüberträge excl. Schadenreserve) zu Anfang und Ende des Jahres; er kann selbst dann noch auftreten, wenn die wirkliche Verzinsung der Aktiva geringer ist als die rechnungsmässige.

3) *Der Gewinn aus Zuschlägen* ist die Differenz der Einnahmen aus Zuschlägen vermindert um die Unkosten des Jahres, ausschliesslich derjenigen, die sich (wie Zins- und Mietsausgaben) auf die Vermögensanlagen beziehen. Er zerfällt in einen (ev. negativen) Gewinn aus ersten und einen (positiven) Gewinn aus zweiten Zuschlägen. In der Praxis ist es nur ganz ausnahmsweise möglich, die Einnahmen

---

136) Für *Todesfallversicherungen* giebt *A. Zillmer* (Deutsche Versicher.-Zeitung 8 (1867), p. 571) auf Grund der von *M. Kanner* (a. a. O. p. 355, 534, vgl. Nr. **10** dieses Referats) eingeführten Begriffe zwei Ausdrücke für die Summe, welche in einem Jahre für Sterbefälle zur Verfügung steht. Dabei ist aber angenommen, dass Geschäfts- und Versicherungsjahr immer zusammenfallen (vgl. Nr. **10**). Unter derselben Voraussetzung ermittelt *G. H. Ryan*, Lond. Journal inst. act. 30 (1892), p. 191, die Summe, welche in einem Jahr bei *Leibrenten* durch den Tod erwartungsmässig frei wird (vgl. Nr. **10**). Praktisch brauchbare Formeln giebt *C. Landré* a. a. O. p. 344 ff. Übrigens geben die preussischen Berichte der Lebensversicherungsgesellschaften seit 1892, manche Gesellschaften (wie Gotha und Leipzig) schon seit langem jährlich einen nach 5jährigen Altersklassen gruppierten Vergleich der beobachteten Todesfälle mit den erwarteten.

aus Zuschlägen genau zu bestimmen, fast immer muss man sich mit der Abschätzung von Durchschnittswerten für α, α_1, α_2 begnügen[137]).

4) *Der Gewinn aus Rückkauf und Verfall* wird durch die Differenz der zum Zeitpunkte des Rückkaufs, bezw. Verfalls vorhandenen Prämienreserve und des gewährten Rückkaufswertes (Nr. **15**) für jede einzelne Police gegeben.

5) Die Rubrik *„sonstige Gewinnquellen"* hat vor allen Dingen die Erhöhungen und Erniedrigungen der Sicherheits- und Extrafonds', sowie die Gewinne und Verluste aus Vermögensanlagen zu berücksichtigen. Werden ferner die gestundeten Prämien zu ihrem Nettobetrag in die Bilanz eingestellt (Nr. **16**) und die Zuschläge in 3) mit Hülfe eines Durchschnittswertes für α ermittelt, so giebt das Produkt aus diesem und der Zunahme der gestundeten Prämien im Rechnungsjahre einen (scheinbaren) Verlust, der durch die gestundeten Prämien entsteht. Andrerseits ist zu bedenken, dass die in Raten zahlbaren Prämien meist hohe Aufschläge erfahren und dadurch eine oft namhafte Gewinnquelle liefern.

Die vorstehenden Ausführungen geben nur im Rohen eine Analyse des Gewinnes, ihre Durchführung im Einzelnen ist von den speziellen Verhältnissen jeder Gesellschaft abhängig. Bei manchen Posten kann man dann im Zweifel sein, welcher der verschiedenen Quellen er zuzurechnen ist; alsdann muss eine zwar willkürliche, aber genau anzugebende Festsetzung getroffen werden[138]).

Die Aufgabe, den in einem Geschäftsjahr erzielten Gewinn auf die einzelnen Policen zu verteilen, lässt sich entweder a) durch einfachere Systeme (Gewinnverteilung proportional zur Jahresprämie, zur Summe der eingezahlten Prämien, zur Prämienreserve oder, wie Gotha, ein Teil proportional der lebenslänglich gleichbleibenden Jahresprämie der entsprechenden Todesfallversicherung und der andere

---

137) Dass dabei verschiedene Arten der Mittelbildungen zu relativ wenig differierenden Ergebnissen führen, darf wohl mit *Tschebyscheff*'s Theorie der „valeurs limites des intégrales" (Acta math. 12 [1888], p. 287) in Verbindung gebracht werden. Vgl. Fussn. 168.

138) Eine genauere Analyse der Gewinnquellen giebt *Asa S. Wing*, N. Y. am. act. soc. 1 (1889/90), p. 103. Was das Numerische anlangt, so steigt der Jahresgewinn bei den grossen deutschen Gesellschaften bis über 42 % der Brutto-Prämieneinnahme des Jahres, von ihm kommen auf die Gewinnquellen 1) bis 3) ungefähr $^1/_3$. Bei manchen Gesellschaften ist 4) eine sehr ergiebige Quelle des Gewinnes. Die Lebensversicherungsgesellschaft zu Leipzig giebt seit 1880 in ihren Berichten eine Berechnung ihrer Gewinne aus den einzelnen Quellen beim Todesfallgeschäft.

Teil proportional zur Prämienreserve) oder b) dadurch lösen, dass man der Entstehung des Gewinnes möglichst nachgeht. Das letztere thut die amerikanische *Kontributionsformel.* Diese bestimmt für jede Police, welche im Geschäftsjahre abläuft, eine Zahl D, die die auf sie entfallende Dividende sein würde, wenn keine anderen Gewinnquellen als die oben unter 1) — 3) erwähnten aufträten. Allgemein aber bestimmen die Zahlen D das Verhältniss, in dem die am Gewinn partizipierenden Policen sich in den Jahresgewinn teilen [139]).

18. Dividenden. Der in der vorigen Nummer behandelte Gewinnanteil, welchen das einzelne Geschäftsjahr einer Police gewährt, bestimmt die Dividende, welche dem Versicherten für dieses Jahr zuerkannt wird. Diese wird jedoch nicht sofort ausbezahlt, sondern in der Regel 1 bis 5 Jahre in dem Sicherheitsfonds der Gesellschaft zurückbehalten, um diesen auf der nötigen Höhe zu halten, und erst nach Ablauf dieser Frist wird sie entweder in bar ausgezahlt oder von der nächsten Prämie abgezogen oder zur Erhöhung der Versicherungsleistungen (dem Bonus) verwandt [140]). Die Dividendenverheissungen der Gesellschaften verlangen, wenn sie auf einigermassen soliden Grundlagen basieren sollen, die Anlage von nach dem Muster der Prämienreserve zu bildenden Gewinnreserven, deren Berechnung ein gewisses Minimum des künftigen Jahresgewinnes annehmen muss und bei den in voriger Nummer unter a) aufgeführten Systemen zu verhältnismässig einfachen Formeln führt [141]).

Eine der ältesten Formen der Lebensversicherung bildeten die *Tontinen* [142]). In dem Jahre, in welchem die Tontine begann, leistete eine ganze Gruppe von Personen eine bestimmte Einzahlung. Diese wurde nun bis zum letzten Tode in der Gruppe von der Gesellschaft

---

139) Die Kontributionsformel findet sich in den Grundzügen bereits bei *Sh. Homans,* Lond. Journal Inst. Act. 11 (1863), p. 121, wo sie auch schon auf Gewinnsammlung in fünfjährigen Perioden (Nr. 18) angewandt wird. Neuere Formeln bei *E. Mc Clintock*, Am. act. soc. 1 (1889/90), p. 137. Wegen Verteilung der Unkosten auf die einzelnen Policen vgl. *W. D. Whiting,* Am. act. soc. 2 (1891/92), p. 150; 5 (1897/98), p. 214.

140) Die Dividendensysteme der deutschen Gesellschaften sind in dem *Neumann*'schen Jahrbuch angegeben (vgl. Fussn. 120). Zahlreiche Aufsätze über Dividende und Gewinnverteilung findet man im Lond. Journal inst. act. (s. die Indices dieser Zeitschrift). Zusammenfassende Referate wurden auf dem Pariser Kongress gegeben.

141) Man findet diese Formeln bei *C. Kihm* (Litt.-Verz. VI).

142) 1653 wurde die erste Tontine in Frankreich gegründet. Vgl. *W. Karup,* Theoretisches Handbuch der Lebensversicherung, Leipzig 1871, Teil 1, p. 86.

amortisiert, indem eine jährlich für die Gruppe gleichbleibende Rente gezahlt wurde, deren Einzelanteile für die schliesslich noch Überlebenden eine gewaltige Höhe erreichten. Als selbständige Versicherungen sind die Tontinen jetzt wohl verschwunden, wohl aber haben sich aus ihnen gewisse Formen der Gewinnverteilung entwickelt, bei denen die Dividende erst nach Ablauf längerer Perioden (5, 10, 15, 20, 30 Jahre) an die dann noch Partizipierenden gezahlt wird. Beim *Tontinensystem* bilden alle in einem Jahre eintretenden Mitglieder, die einer und derselben Periode angehören, eine besondere Gruppe. Am Ende der Periode werden die in der Gruppe angesammelten Gewinne — wobei der aus Rückkauf und Verfall oft die Hauptrolle spielt — unter die dann noch Partizipierenden verteilt. Man unterscheidet *Ganztontinen* und *Halbtontinen*, je nachdem bei Einstellung der Prämienzahlung während der Periode auch der Rückkaufswert oder nur die bisherigen Gewinnanteile der Police der Gruppe anheimfallen. Am Ende der Periode darf der Versicherte in der Regel seine Police aufgeben und erhält dann ihren vollen mathematischen Rückkaufswert (Nr. **15**) einschliesslich der angesammelten Dividenden ausbezahlt.

Die bei dem Tontinensystem durch die Kleinheit der Gruppen verursachten grossen Zufallsschwankungen beseitigt das System der *Gewinnansammlung*, welches den auf jede Police jährlich entfallenden Gewinnanteil nach einer der Methoden von Nr. **17** ohne Gruppenbildung aus dem Gesamtgewinn berechnet. Der Gesamtwert dieser Anteile bildet die am Ende der Periode fällige Dividende[143]).

IV. Theorie des Risikos.

19. Problemstellung. Die Rechnungen des Abschnittes II beruhen auf der Unterstellung (Prinzip II der Nr. **3**), dass bei irgend einem Versicherungsbestande die künftige Gruppierung der Todesfälle, die thatsächlich stattfindet, sich mit derjenigen deckt, die nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung, d. h. auf Grund der Axiome der Nr. **2**, zum Zeitpunkte der Berechnung zu erwarten ist. Der Abschnitt III konstatiert nachträglich gewisse Abweichungen zwischen dem wirklichen und dem wahrscheinlichen Zustand. Diese fallen aber normaliter immer zum Vorteile der Bank aus (vgl. die numerischen Angaben über den Gewinn in Nr. **17**), wofür die Ursache in den Rechnungsgrundlagen (Fussn. 2 und 60), den Zuschlägen (Nr. **14**) und der

143) Die Formeln giebt *E. Mc Clintock,* Am. act. soc. **1** (1889/90), p. 137.

Nettomethode (Nr. **16**) zu suchen ist. Die Praxis führt mithin absichtlich „systematische Fehler“ ein, die im Sinne der Sicherheit zu wirken bestimmt sind. Die Theorie des Risikos[144]) abstrahiert zunächst von diesen systematischen Fehlern und setzt Rechnungsgrundlagen voraus, die im Durchschnitt der Wirklichkeit entsprechen. Sie bleibt aber nicht bei der ersten Annäherung stehen, die durch das Prinzip II der Nr. **3** gegeben wird, sondern fragt, wie die *zufälligen Schwankungen* der Sterblichkeit die finanzielle Lage eines Versicherungsbestandes beeinflussen (Nr. **3**, **4**)). Dabei lehrt die Erfahrung, dass unter den normalen Verhältnissen der Lebensversicherung die beobachteten Sterblichkeitsschwankungen in ausreichender Annäherung mit denjenigen übereinstimmen, die nach den Axiomen der Nr. **2** zu erwarten sind, dass sie also in der That vom Mathematiker als „zufällige“ Schwankungen bezeichnet werden dürfen[145]). In Nr. **20**—**22** findet man die Begriffsbildungen und Sätze zusammengestellt, zu denen die Theorie des Risikos bisher geführt hat. Die Nr. **23** behandelt die Frage nach der *Stabilität* eines Versicherungsunternehmens, die wohl als das Fundamentalproblem der ganzen Theorie bezeichnet werden darf. Dabei werden diejenigen Anwendungen auf spezielle Probleme der Praxis gebracht, welche die Theoretiker von der Lehre vom Risiko bisher gemacht haben. Praktische Verwertung hat die Theorie des Risikos bisher nicht gefunden; in der That ist sie bis jetzt weder zu einem gewissen Abschluss gebracht, noch bis zu derjenigen Einfachheit durchgearbeitet worden, welche das erste Erfordernis für ihre Verwendbarkeit in der Praxis bilden würde.

---

144) Zur Einführung in die Theorie des Risikos sind zu empfehlen die unter Litt.-Verz. VI angeführte Monographie von *C. Bremiker* (1859) und ein Aufsatz von *F. Hausdorff*, Leipz. Ber. 1897, p. 497. Ausführlichere Darstellungen geben *Th. Wittstein*, Das mathematische Risiko und die Dissertation von *J. H. Peek* (Litt.-Verz. VI). Jene ist jedoch nicht immer zuverlässig, diese ausserordentlich kompliziert. Eine historische Übersicht giebt die Monographie von *K. Wagner* (Litt.-Verz. VI); Referent stimmt zwar mit den in diesem Werke ausgesprochenen Urteilen selten überein, um so wertvoller ist ihm das reichhaltige Litteraturverzeichnis gewesen, auf das auch der Leser wegen weiterer deutscher Litteratur verwiesen sei. Vgl. noch I D 1, Nr. **18**.

145) *J. H. Peek* in der Zeitschrift für Versicherungsrecht und -Wissenschaft 5 (1899), p. 169 ff.; *G. Bohlmann* in *F. Klein* und *E. Riecke*, Über angewandte Mathematik und Physik, Leipzig und Berlin 1900, p. 137 ff.; *E. Blaschke*, Die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitslehre im Versicherungswesen, Statistische Monatsschrift, 1901. Wesentlich ist hier überall, dass die Grundzahlen relativ klein sind. Vgl. I D 4a, Nr. **6**.

20. Definitionen. Gegeben sei ein Versicherungsbestand Γ einer Lebensversicherungsgesellschaft zu einem bestimmten Zeitpunkte t, etwa am Schlusse eines Geschäftsjahres. Die Rechnungsgrundlagen mögen dem wahrscheinlichen Zustande der Wirklichkeit entsprechen, von den Auszahlungen und Einzahlungen mögen vorläufig nur die Nettowerte berücksichtigt und unter Prämienreserve die mathematische Nettoprämienreserve verstanden werden (Nr. **7**, **11**). Hält ein Versicherter, der dem fixierten Versicherungsbestande angehört, mehrere Policen, so stellen wir uns vor — was offenbar zulässig ist —, dass diese zu einer einzigen Versicherung vereinigt werden. Ist jemand auch an Versicherungen auf verbundene Leben beteiligt, so denken wir uns alle Versicherungen, an denen er beteiligt ist, ebenfalls zu einer einzigen zusammengezogen. Alsdann können irgend zwei der Versicherungen des Bestandes Γ von einander unabhängig genannt werden, insofern ja die Sterbenswahrscheinlichkeiten je zweier Versicherter nach Axiom V (Nr. 2) als von einander unabhängig vorausgesetzt werden. Endlich werde wie früher so auch jetzt angenommen, dass durch den Tod fällig werdende Kapitalien erst am Ende des Sterbejahres ausgezahlt werden. Man sagt nun, es werde eine bestimmte *Gruppierung der künftigen Todesfälle* festgelegt, wenn für jeden Versicherten ein bestimmtes Versicherungsjahr vorgeschrieben wird, in dem er sterben soll. Die Anzahl μ aller logisch denkbaren Gruppierungen von Todesfällen ist alsdann eine endliche. Diese können daher nach irgend einem Prinzip in eine Reihe geordnet und numeriert werden. Dabei muss auf eine erschöpfende Aufzählung und lauter sich ausschliessende Einzelfälle geachtet werden. Die Wahrscheinlichkeit $\mathfrak{q}_n$, die der n^{ten} dieser Gruppierungen zukommt, ist durch die Axiome der Nr. 2 bestimmt. Man betrachte nun irgend eine Periode (t_1, t_2), die zum Zeitpunkte $t_1 > t$ beginnt und mit einem Zeitpunkte $t_2 > t_1$ abläuft. Man versteht dann unter den *Ausgaben* $\mathfrak{A}$ dieser Periode die Auszahlungen an Versicherungssummen, die in ihr fällig werden, und die Prämienreserven, die zu Ende des Zeitraumes noch zurückzustellen sind. Dagegen werden die *Einnahmen* $\mathfrak{E}$ der Periode von den Einnahmen an Nettoprämien und den zu Anfang der Periode vorhandenen Prämienreserven gebildet. Die Werte dieser Grössen sind dabei auf den Zeitpunkt t der Berechnung zurückzudiskontieren[146]. Im Besonderen entspricht einer gegebenen Gruppierung n der Todesfälle ein bestimmter Wert $\mathfrak{A}_n$ der Ausgaben $\mathfrak{A}$ und ein bestimmter Wert $\mathfrak{E}_n$ der Einnahmen $\mathfrak{E}$ in dieser Periode. Man spricht nun von

146) Vgl. Nr. **7** und Fussnote **61** dieses Artikels.

einem Risiko, das der zur Zeit t vorhandene Versicherungsbestand Γ für eine gegebene Periode (t_1, t_2) läuft, und unterscheidet:

1) den Gewinn des Bestandes $\mathfrak{A}_n - \mathfrak{E}_n$[147]), der einer vorgeschriebenen Gruppierung n der Todesfälle entspricht. Er kann positiv oder negativ sein;

2) die beiden *extremen Risiken,* nämlich das Maximum von $\mathfrak{A}_n - \mathfrak{E}_n$ als das *maximale Risiko der Gesellschaft gegenüber dem Versicherungsbestande* Γ und das Maximum von $\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A}_n$ als *das maximale Risiko von* Γ *gegenüber der Gesellschaft*[148]);

3) die beiden *durchschnittlichen Risiken*[149]), nämlich das *durchschnittliche Risiko der Gesellschaft gegenüber* Γ:

$$\mathfrak{D}' = \sum_{\mathfrak{A}_n > \mathfrak{E}_n}^{n} \mathfrak{q}_n (\mathfrak{A}_n - \mathfrak{E}_n)$$

und das *durchschnittliche Risiko von* Γ *gegenüber der Gesellschaft:*

$$\mathfrak{D}'' = \sum_{\mathfrak{E}_n > \mathfrak{A}_n}^{n} \mathfrak{q}_n (\mathfrak{E}_n - \mathfrak{A}_n);$$

4) das *mittlere Risiko* $\mathfrak{M}$ des Versicherungsbestandes Γ für die Periode (t_1, t_2), das durch die Gleichung:

$$\mathfrak{M}^2 = \sum_{0}^{\mu} {}_n \mathfrak{q}_n (\mathfrak{A}_n - \mathfrak{E}_n)^2$$

definiert wird[150]).

---

147) Manche Autoren führen hier den Begriff einer wahren Prämienreserve ein. So *J. H. Peek* (Diss. p. 77).

148) Der Sache nach findet sich der Begriff der extremen Risiken bei *N. Tetens,* Einleitung zur Berechnung der Leibrenten, Teil 2, Leipzig 1786. Auf p. 142 und 143 a. a. O. fragt nämlich *Tetens* nach dem grössten denkbaren Gewinn oder Verlust, den der Versicherte bei einer Leibrente, die er gegen einmalige Prämie gekauft hat, erleiden kann. Das dort auf p. 152 eingeführte „grösste Risiko“ ist aber etwas anderes. Die *Tetens*'sche Darstellung klebt jedoch durchweg an der Fiktion, dass die Werte der Auszahlungen ganze Zahlen sind. Nach *Tetens* ist der Begriff der maximalen Risiken ganz in Vergessenheit geraten. Er hängt aber eng zusammen mit der in Nr. **14** eingeführten Maximalprämie.

149) *N. Tetens* berechnet a. a. O. p. 143, 144 den durchschnittlichen Gewinn und den durchschnittlichen Verlust, den der Versicherte bei einer gegen einmalige Prämie gekauften Leibrente zu erwarten hat. Er legt dabei wieder die in Fussnote 148 erwähnte Fiktion zu Grunde. Die korrekte Definition geht auf *M. Kanner* zurück (a. a. O. und Berl. Journal Kolleg. Lebensv. 2 (1871), p. 1).

150) Das mittlere Risiko ist von *C. Bremiker* (Litt.-Verz. VI) 1859 in die Lebensversicherung eingeführt. Seine Arbeit ist jedoch nicht verstanden, vielmehr bis in die jüngste Zeit die selbständige Bedeutung des mittleren Risikos in der Lebensversicherung verkannt worden. Eine Ausnahme in letzterer Hin-

Unter diese Definitionen subsumieren sich alle bisher betrachteten Risikobegriffe als spezielle Fälle: Man lässt den Versicherungsbestand Γ auf eine einzige Versicherung zusammenschrumpfen und erhält das *Risiko einer einzelnen Versicherung für die fixierte Periode.* Identifiziert man dabei t und t_1 mit dem Beginn der Versicherung, t_2 mit ihrem Schlusstermin (wozu es genügt $t_2 = \infty$ zu setzen), so entsteht das *Risiko der Versicherung* schlechthin[151]). Wählt man dagegen, während $t_2 = \infty$ bleibt, $t = t_1 = m$, wo m die Zahl der Jahre bedeutet, die die Versicherung schon gelaufen ist, so erhält man das *fernere Risiko der noch laufenden Versicherung*[152]). Auf der anderen Seite kann man den Versicherungsbestand Γ allgemein gegeben sein lassen, die Periode (t_1, t_2) aber spezialisieren. Im Besonderen liefert die Wahl $t_1 = t$, $t_2 = t + 1$ das *Risiko eines Versicherungsbestandes für das nächste Geschäftsjahr*[153]). Natürlich sind in allen diesen Fällen wieder die verschiedenen unter 1) bis 4) aufgeführten Begriffe zu unterscheiden, unter denen jedoch nur das durchschnittliche und das mittlere Risiko in der Litteratur eine Rolle spielen.

Bezeichnet ferner A den wahrscheinlichen Wert der in der Periode von Γ zu erwartenden Prämieneinnahmen, so heisst

$$\mathfrak{m} = \frac{\mathfrak{M}}{A}$$

das *relative* Risiko von Γ in der Periode (genauer das relative mittlere Risiko), während $\mathfrak{M}$ im Gegensatz dazu das *absolute* (genauer das absolute mittlere) Risiko genannt wird[154]). Wenn im folgenden von Risiko ohne besonderen Zusatz geredet wird, ist immer das absolute Risiko gemeint.

21. Das mittlere Risiko. Sei $\mathfrak{M}$ das mittlere Risiko, das irgend ein Versicherungsbestand Γ, der zur Zeit t vorhanden ist, in einer

---

sicht bildet die in Fussn. 144 citierte Arbeit von *Hausdorff*, der auch die unterscheidende Benennung „durchschnittliches" und „mittleres" Risiko entnommen ist, und der Aufsatz von *Gram* (Fussn. 159).

151) Dieses wurde von *Tetens* (1786) eingeführt und von *Bremiker* (1859) zuerst für einzelne Fälle berechnet. Vgl. Fussn. 159.

152) Seine Einführung verdankt man der Monographie von *Th. Wittstein*, Das math. Risiko (1885) [Litt.-Verz. VI], p. 30.

153) *M. Kanner,* Deutsche Versicherungszeitung 1867, p. 345. Die im selben Jahre erschienene Mathematische Statistik von *Th. Wittstein* (Litt.-Verz. VI) gelangt zur Definition dieses Risikos nur für den Fall der natürlichen Prämienzahlung (Nr. **10** dieses Berichtes).

154) Das relative Risiko einer Versicherung, berechnet zum Beginn der Versicherung für die ganze Versicherungsdauer, führt *Bremiker* (1859) a. a. O. p. 39 ein. Eine andere Definition giebt *Hausdorff* a. a. O. p. 510.

bestimmten Periode (t_1, t_2) läuft. Sei i die i^{te} der unabhängigen Einzelversicherungen, in die der Bestand nach Nr. **19** zerlegt werden kann, s_i ihre Versicherungssumme, $\mathfrak{M}_i$ ihr auf die Versicherungssumme 1 bezogenes mittleres Risiko, das den Zeitpunkten t, t_1, t_2 entspricht. Alsdann ist:

$$\mathfrak{M}^2 = \sum\nolimits^i \mathfrak{M}_i^2 \cdot s_i^2, \tag{13}$$

wo die Summe über alle Einzelversicherungen zu erstrecken ist[155]). Im Besonderen ergiebt sich als mittleres Risiko eines Bestandes von Todesfallversicherungen für das nächste Geschäftsjahr:

$$\mathfrak{M}^2 = \sum\nolimits^i p_i q_i s_i'^2 v^2,$$

wo bei der Summation die gemischten Versicherungen auszuschliessen sind, die nur noch ein Jahr oder weniger bis zu ihrem Schlusstermin zu laufen haben. q_i bedeutet die Sterbenswahrscheinlichkeit, p_i die Überlebenswahrscheinlichkeit, s_i' das reduzierte Kapital, die dem Versicherten (i) zur Zeit t für das nächste Geschäftsjahr zukommen[156]).

Zwei Versicherungen heissen gleichartig, wenn sie zur gleichen Zeit bei dem gleichen Eintrittsalter auf die gleiche Versicherungssumme und unter den gleichen Versicherungsbedingungen abgeschlossen werden. Aus Formel (13) folgt, dass allgemein das mittlere Risiko $\mathfrak{M}$ eines Bestandes von gleichartigen Versicherungen der Quadratwurzel aus der Anzahl L der unabhängigen Versicherungen proportional ist[157]). Das absolute Risiko konvergiert daher mit wachsendem L gegen Unendlich, das relative gegen Null. Sind die Versicherungssummen verschieden, aber die Versicherungen sonst gleichartig,

---

155) Diese Gleichung folgt unmittelbar aus dem allgemeinen Satze von *C. F. Gauss*, Artikel 18 der Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars prior, Göttingen 1821; s. *Gauss*' Werke 4, zweiter Abdruck 1880, p. 19. Dass es sich hier um Summen statt um Integrale handelt, ist ein unwesentlicher Unterschied. Die Anwendbarkeit des Satzes auf einen Versicherungsbestand scheint zuerst *C. Raedell*, Vollständige Anweisung, die Lebensfähigkeit von Versicherungsanstalten zu untersuchen, Berlin 1857, p. 227, ausgesprochen zu haben.

156) *K. Hattendorff*, Rundschau der Versicherungen 18 (1868), p. 150, 171.

157) Im Grunde genommen kommt dieser Satz auf das Theorem der abstrakten Wahrscheinlichkeitsrechnung hinaus, nach welchem die mittlere Abweichung der Quadratwurzel aus der Zahl der Versuche proportional ist — ein Resultat, das bereits *S. Laplace* geläufig war (Théorie analytique des probabilités, Paris 1812, Livre II, Chapitre III et IV). Seine Anwendung auf das Versicherungswesen giebt zuerst *C. Raedell,* a. a. O. p. 228.

so wird bei gegebener Gesamthöhe der versicherten Summen das mittlere Risiko $\mathfrak{M}$ des Bestandes ein Minimum, wenn alle Versicherungssummen einander gleich sind[158]).

Die Formel (13) führt die Berechnung des mittleren Risikos eines Bestandes auf die des mittleren Risikos einer einzelnen Versicherung zurück. Für dieses ergeben sich aber unmittelbar aus der Definition für alle Versicherungsarten der Praxis, mögen sie sich auf einzelne oder verbundene Leben beziehen, einfache Formeln, deren numerische Auswertung durch Einführung gewisser diskontierter Hülfszahlen leicht möglich ist. Ist z. B. $\mathfrak{M}_m(a_x)$ das mittlere fernere Risiko der temporären, jährlich zahlbaren Leibrente 1, $\mathfrak{M}_m(A_x)$ das der entsprechenden gemischten Versicherung mit einmaliger Prämie, $\mathfrak{M}_m(P_x)$ das derselben Versicherung mit während der Versicherungsdauer gleichbleibender Jahresprämie, so bestehen die Relationen:

$$(14)\quad (1-v)\,\mathfrak{M}_m(a_x) = \mathfrak{M}_m(A_x) = \mathfrak{M}_m(P_x)\cdot(1-A_x) = \sqrt{A^{(2)}_{x+m} - A^2_{x+m}},$$

aus denen sich einfache begriffliche Folgerungen herauslesen lassen. Dabei bedeutet $A^{(2)}_{x+m}$ das, was aus A_{x+m} wird, wenn man v durch v^2 ersetzt[159]). Für die Textbookgrundlagen $3\frac{1}{2}\,\%$ ist z. B. bei der lebenslänglichen Todesfallversicherung $\mathfrak{M}_0(A_{30}) = 0{,}20$.

Teilt man endlich das oben betrachtete mittlere Risiko $\mathfrak{M}$ des

158) Dank dem in Nr. **14** konstatierten Zusammenhange zwischen mittlerem Risiko und moralischer Prämie darf man sagen, dass *Daniel Bernoulli*'s Beispiel aus der Seeversicherung (Specimen theoriae novae de mensura sortis, St. Petersburg 1738, deutsch von *A. Pringsheim*, Leipzig 1896, p. 44) den hieraus fliessenden Grundsatz von der „Verteilung der Gefahr“ enthält. Übrigens findet man den Satz für den Fall eines Geschäftsjahres und natürliche Prämienzahlung bei *C. Landré,* Math. techn. Kap., p. 333.

159) Für $m = 0$ hat die fraglichen Formeln *C. Bremiker* aufgestellt und bewiesen (a. a. O. p. 39). Für $m = 0$ giebt zwar *Th. Wittstein* die richtigen Relationen zwischen den drei Risiken an (das math. Risiko, a. a. O. p. 77, 79, 89) sowie die Beziehungen, die zwischen den $\mathfrak{M}_m$ und $\mathfrak{M}_0$ bestehen (a. a. O. p. 87). Die independente Darstellung der $\mathfrak{M}_m$, die nun aus *Bremiker*'s Formeln folgt, ist jedoch fehlerhaft (a. a. O. p. 71 und 77), weil er zwar die Formel (15) benutzt, aber unter die Einnahmen und Ausgaben in Unbekanntschaft mit *Kanner*'s und *Hattendorff*'s Arbeiten (vgl. die Fussnoten 61, 81, 160) die Reserven nicht einbezieht. Eine einwandsfreie Darstellung giebt *Hausdorff,* a. a. O. p. 536—540. Numerische Tabellen für die zur numerischen Rechnung erforderlichen diskontierten Hülfszahlen findet man für niederländisches Material in der Dissertation von *Onnen* (Litt.-Verz. VI), p. 106 ff. und am Schluss der *Peek*'schen Dissertation (Litt.-Verz. VI). Unter Benutzung von kontinuierlichen Variabelen bestimmt das mittlere Risiko *J. P. Gram*, Tidsskrift for Mathematik og Physik, 5[te] Raekke, 6[te] Aargang (1889), p. 97.

zur Zeit t vorhandenen Versicherungsbestandes Γ für die Zeit (t_1, t_2) in ein solches $\mathfrak{M}_{13}$ für die Zeit (t_1, t_3) und ein solches $\mathfrak{M}_{32}$ für die Zeit (t_3, t_2), wo $t_1 < t_3 < t_2$ ist, so gilt auch jetzt wieder der Satz von der Addition der Quadrate[160]):

$$(15) \qquad \mathfrak{M}^2 = \mathfrak{M}_{13}^2 + \mathfrak{M}_{32}^2 .$$

Hierdurch reduziert sich aber die Bestimmung des ferneren mittleren Risikos irgend einer Versicherung und daher auch die des ferneren mittleren Risikos irgend eines Versicherungsbestandes auf die Berechnung des mittleren Risikos einer einzigen Versicherung für ein einzelnes Jahr.

22. **Das durchschnittliche Risiko.** Aus dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung folgt, dass für irgend einen Versicherungsbestand Γ und irgend eine Periode das durchschnittliche Risiko $\mathfrak{D}'$ der Gesellschaft gegenüber Γ gleich dem durchschnittlichen Risiko $\mathfrak{D}''$ von Γ gegenüber der Gesellschaft ist[161]). Sein gemeinsamer Wert heisst daher schlechthin das durchschnittliche Risiko des Versicherungsbestandes Γ für die betreffende Periode. Bezeichnet man ihn durch $\mathfrak{D}$, so ist also:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}' = \mathfrak{D}''.$$

Das durchschnittliche Risiko einer einzelnen Versicherung berechnet sich sehr einfach für diejenigen Versicherungsarten, auf welche sich die Formel (14) bezieht. Sei allgemein eine Versicherung gegeben, die bereits m Jahre läuft und bei welcher die Differenz $\mathfrak{A}_n - \mathfrak{E}_n$ durch einen in n stetigen Ausdruck gegeben wird, der mit wachsendem n beständig wächst oder beständig abnimmt, alsdann heisst die positive reelle Wurzel $\varkappa$, welche der Gleichung $\mathfrak{A}_\varkappa - \mathfrak{E}_\varkappa = 0$ genügt, die *kritische Zahl* der noch laufenden Versicherung[162]). Diese kritische

---

160) Die Auffindung des in Formel (15) ausgesprochenen Gesetzes der quadratischen Zusammensetzung hat man *K. Hattendorff* zu danken, Rundschau d. Versich. 18 (1868), p. 172, Formel (9). Trotz seiner Wichtigkeit ist es später mehrfach wieder vergessen worden, sodass *Wittstein* den in Fussn. 159 angeführten Fehler machen konnte. Fast alle Schriftsteller der Versicherungslitteratur behaupten übrigens, dass, wer die Formeln (13) oder (15) benutzt, die „Methode der kleinsten Quadrate" anwendet. Referent ist der Meinung, dass man mit demselben Rechte behaupten kann, die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks werde aus den Katheten nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Vgl. jedoch *Bremiker,* a. a. O. p. 13—15.

161) Dieser Satz ist in voller Allgemeinheit von *M. Kanner* ausgesprochen, Deutsche Vers.-Zeitung 8 (1867), p. 378.

162) Der Begriff der kritischen Zahl wurde ohne eine Benennung in spe-

Zahl hat bei den drei Versicherungen der Formel (14) den nämlichen Wert[163]) und es übertragen sich die für das mittlere Risiko $\mathfrak{M}_m$ zwischen ihnen bestehenden Relationen auch auf das fernere durchschnittliche Risiko $\mathfrak{D}_m$ derselben Versicherungen[164]):

$$(16) \qquad (1 - v)\,\mathfrak{D}_m(a_x) = \mathfrak{D}_m(A_x) = \mathfrak{D}_m(P_x)\cdot(1 - A_x).$$

Andrerseits berechnet sich $\mathfrak{D}_m(A_x)$ mühelos, weil man die kritische Zahl $\varkappa$ dieser Versicherung aus der Gleichung $v^\varkappa = A_{x+m}$ findet. Die numerische Berechnung der durchschnittlichen Risiken dieser drei Versicherungen bietet also keine Schwierigkeiten[165]).

Das durchschnittliche Risiko einer Versicherung:

$$\mathfrak{D} = \sum_{\mathfrak{A}_n > \mathfrak{E}_n}^{n} \mathfrak{q}_n(\mathfrak{A}_n - \mathfrak{E}_n)$$

kann als die einmalige Prämie betrachtet werden, für die die Gesellschaft sich gegen einen durch die betreffende Versicherung möglichen Verlust bei einer zweiten Gesellschaft *rückversichert.* Diese kann sich wieder bei einer dritten Gesellschaft für die einmalige Prämie:

$$\mathfrak{D}^{(1)} = \sum_{\mathfrak{A}_n > \mathfrak{E}_n + \mathfrak{D}} \mathfrak{q}_n(\mathfrak{A}_n - \mathfrak{E}_n - \mathfrak{D})$$

rückversichern. Denkt man sich dies Verfahren unbegrenzt fortgesetzt, so entsteht eine unendliche Reihe von lauter positiven, beständig abnehmenden Gliedern:

$$\mathfrak{D},\ \mathfrak{D}^{(1)},\ \mathfrak{D}^{(2)}, \ldots$$

die immer konvergiert und deren Summe gleich dem maximalen

---

ziellen Fällen von *C. Bremiker* eingeführt, Das Risiko (1859), p. 12. Der Name „kritische Zahl" stammt vom Referenten, *Landré* sagt dafür „mathematische Dauer der Versicherung", Math. techn. Kap., p. 328. Natürlich überträgt sich der Begriff auch auf einen ganzen Versicherungsbestand.

163) *Th. Wittstein,* Das mathematische Risiko (1885), benutzt diesen Satz stillschweigend bei Herleitung der Relationen (16). *M. Mack* beweist ihn, Ehrenzweig 12, Teil 2, p. 11. Die im Texte gegebene Formulierung ist für die gemischte Versicherung mit einmaliger und der mit jährlich gleichbleibender, bis zum Ablauf der Versicherung zahlbarer Jahresprämie von *C. Landré* gegeben worden, Math. techn. Kap., p. 329.

164) *Th. Wittstein* giebt diese Relationen für den Fall von lebenslänglichen Versicherungen, a. a. O. p. 28, 30, 32. *M. Mack* überträgt sie a. a. O. p. 9 ff. auf temporäre Leibrenten und gemischte Versicherungen. In dieser Arbeit findet man auch weitere Beispiele, u. a. auch verbundene Leben behandelt.

165) Das Gegenteil ist seit *Th. Wittstein* (a. a. O. p. 24) vielfach behauptet worden, weil die kritische Zahl wieder in Vergessenheit geraten ist. Die Gleichung $v^\varkappa = A_{x+m}$ findet man aber für $m = 0$ bei *Landré* wieder, a. a. O. p. 328.

Risiko ist, das die erste Gesellschaft bei der ursprünglichen Versicherung dem Versicherten gegenüber läuft[166]. Betrachtet man statt der ganzen Versicherung nur ein einzelnes Versicherungsjahr, so ist bei einer Todesfallversicherung bis auf den Diskontierungsfaktor v das maximale Risiko die Differenz von reduziertem Kapital und Risikoprämie, das durchschnittliche aber das Produkt aus der Risikoprämie und der Sterbenswahrscheinlichkeit des betreffenden Jahres. Hierdurch ist der Anschluss an die Ausführungen über Rückversicherung in Nr. **10** erreicht.

Nach dem durchschnittlichen Risiko einer Versicherung werden von Theoretikern auch die *Zuschläge* abgestuft, für die andrerseits das maximale Risiko der Gesellschaft gegenüber dem Versicherten eine obere Grenze festlegt (vgl. Nr. **14**).

Die Bestimmung des durchschnittlichen Risikos einer Gruppe von Versicherungen ist genau nur für ganz spezielle Fälle gelungen[167]. Man bedient sich meist asymptotischer Näherungsformeln, die für eine grosse Anzahl von Versicherungen gelten und auf dem *Gauss*schen Fehlergesetz basieren. Sei nämlich L die Anzahl der Versicherungen des Bestandes, $\mathfrak{M}$ sein auf irgend eine Periode bezogenes mittleres Risiko, $\mathfrak{D}$ das entsprechende durchschnittliche Risiko, $\mathfrak{A}_n - \mathfrak{E}_n$ der Überschuss der „Ausgaben“ dieser Periode über die „Einnahmen“, der einer bestimmten Gruppierung der Todesfälle entspricht. Setzt man nun:

$$\frac{\mathfrak{A}_n - \mathfrak{E}_n}{\sqrt{L}} = z, \quad k = \sqrt{\frac{L}{2}} \cdot \frac{1}{\mathfrak{M}}, \quad \Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2}\, dx,$$

so ist die Wahrscheinlichkeit $\varphi(x)$ dafür, dass z absolut kleiner als eine vorgeschriebene Zahl x bleibt, durch $\varphi(x) = \Theta(kx) + \varepsilon$ gegeben, wo ε eine kleine Grösse ist. Denkt man sich, dass die Anzahl L der Versicherungen unbegrenzt wächst, während k sich nicht ändert und die extremen Risiken jeder Einzelversicherung zwischen

166) Die Auffassung des durchschnittlichen Risikos als Rückversicherungsprämie stammt von *Th. Wittstein,* Ehrenzweig 8 (1887), Teil 2, p. 3. Dort findet sich auch die Idee der unbegrenzten Fortsetzung des Verfahrens. Der Satz, dass die Reihe $\mathfrak{D} + \mathfrak{D}^{(1)} + \cdots$ immer konvergiert und das maximale Risiko darstellt, ist von *Th. Wittstein* aber nur für den speziellen Fall ausgerechnet, dass nur ein einziges Ereignis und nur ein einziger Preis in Frage kommt, a. a. O. p. 5. Der allgemeine Satz lässt sich sehr elegant ohne Rechnung beweisen.

167) So ermittelt *K. Hattendorff,* Rundschau d. Versich. 18 (1868), p. 437, das durchschnittliche Risiko für beliebig viele gleichartige Todesfallversicherungen, die gegen natürliche Prämie auf 1 Jahr abgeschlossen sind.

festen Grenzen enthalten bleiben, so konvergiert nach einem Satze von *Tschebyscheff* ε gegen Null[168]). Daher approximieren die Ver-

168) Es handelt sich hier nicht um einen Spezialsatz der Versicherungsmathematik, sondern um ein Fundamentaltheorem der Wahrscheinlichkeitsrechnung, auf das bereits in Fussn. 14 hingewiesen wurde und das für die verschiedenen Anwendungsgebiete wie Glücksspiel, numerisches Rechnen, Gastheorie grundlegende Bedeutung hat. Indem wir wegen vollständigerer historischer Angaben auf p. 65—84, 164—168, 193 des in Fussn. 14 citierten *Czuber*'schen Referates verweisen, bemerken wir hier nur das Folgende.

Die ungenaue Form $\varphi(x) = \Theta(kx) + \varepsilon$ giebt bereits *S. Laplace* (Théorie analytique des probabilités 1812, Livre II, Chapitre III, IV), er approximiert sogar ε durch die ersten Glieder einer Reihenentwickelung. Sein Hülfsmittel bildet die *erzeugende Function* [I D 1, Nr. **6**; I E, Nr. **4**]. Um nachzuweisen, dass ε mit unbegrenzt wachsendem μ gegen Null konvergiert, bedient sich *P. Tschebyscheff* und nach ihm *A. Markoff* der von ihnen geschaffenen *théorie des valeurs limites des intégrales* (Lehrbuch *C. Possé,* Sur quelques applications des fractions continues algébriques, St. Pétersbourg 1886), die als eine moderne Erweiterung von *Laplace*'s Theorie der erzeugenden Funktionen aufgefasst werden darf. Das Bindeglied zwischen beiden Theorien bildet das *Problem der Momente.*

Ist nämlich $f(x)$ irgend eine reelle, nicht negative Funktion der reellen Variabeln x, die integrierbar ist zwischen $-\infty$ und $+\infty$, so heissen die Grössen $c_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} x^\alpha f(x)\,dx$, wo α eine positive ganze Zahl ist, die Momente dieser Funktion. Unter der erzeugenden Funktion von $f(x)$ versteht man den Ausdruck $E(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} f(x)\,dx$. Mit den Momenten c_α ist formal die erzeugende Funktion gegeben und umgekehrt, weil:

$$E(z) = \sum_0^\infty {}_\alpha\, c_\alpha \frac{z^\alpha}{\alpha!}.$$

Es fragt sich nun aber — und dies ist das Problem der Momente — inwieweit die c_α auch die Funktion $f(x)$ bestimmen. Diese Frage ist von *T. J. Stieltjes* (Toulouse, Annales de la faculté 8 (1894), p. 93 ff.) erledigt [wegen ihrer physikalischen Bedeutung vgl. *H. Poincaré*'s Referat, Par. C. R. 119 (1894), p. 630]. Es folgt daraus im Besonderen, dass das zwischen $-x$ und $+x$ genommene Integral einer Funktion $f(x)$, deren sämtliche Momente mit denen von $\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2x^2}$ übereinstimmen, notwendig mit $\Theta(kx)$ identisch sein muss, ein Resultat, das bereits aus den von *Tschebyscheff*, Acta math. 12 (1889), p. 322 gegebenen Formeln sich ergiebt.

Die théorie des valeurs limites des intégrales giebt nun nur die ersten p Momente $c_0, c_1, \ldots, c_{p-1}$ und berechnet aus ihnen zwei rationale Funktionen von x, welche eine untere und eine obere Grenze für das Integral von $f(x)$ abgeben. Die fraglichen Ungleichungen wurden zuerst von *Tschebyscheff* ohne Beweis angegeben [J. de math. (2) 19 (1874), p. 157] und von *A. Markoff* verallgemeinert und bewiesen (*A. Markoff*, Sur quelques applications des fractions contisicherungsmathematiker das durchschnittliche Risiko $\mathfrak{D}$ eines Versicherungsbestandes immer durch den dem *Gauss*'schen Fehlergesetz entsprechenden Ausdruck $\frac{\mathfrak{M}}{\sqrt{2\pi}}$ und führen so seine Berechnung auf die des mittleren zurück[169]).

23. Die Stabilität[170]). Aus dem Vorstehenden folgt, dass eine Gesellschaft, deren Rechnungsgrundlagen im Durchschnitt der Wirklichkeit entsprechen, sich ruinieren würde, wenn sie zu ihren Netto-

---

nues, St. Pétersbourg 1884, Math. Ann. 24 (1884), p. 172). Speziell entwickelt *Tschebyscheff* [Acta math. 12 (1889), p. 322] eine Formel, durch welche sich die Abweichung des $\int f(x)\,dx$ von $\Theta(kx)$ abschätzen lässt, wenn die ersten $2p$ Momente beider Funktionen übereinstimmen. Der im Texte angeführte Satz verlangt aber zu beweisen, dass $\varphi(x) = \int\limits_{-x}^{x} f(x)\,dx$ gegen $\Theta(kx)$ konvergiert, wenn man nur weiss, dass die Momente von $f(x)$ gegen die von $\frac{k}{\sqrt{\pi}}e^{-k^2x^2}$ in der aus den Voraussetzungen sich ergebenden Weise *konvergieren*. Diese Behauptung bildet den Satz von *Tschebyscheff* in Acta math. 14 (1891), p. 307. Der Beweis hierfür wurde von *Tschebyscheff* a. a. O. angestrebt und von *A. Markoff* durchgeführt [Petersburg, Bull. 9 (1898), p. 435]. Referent ist jedoch der Meinung, dass diese Betrachtungen bei der Kompliziertheit der ganzen Frage noch der Nachprüfung bedürfen, ob sie und eventuell unter welchen noch einzuführenden Beschränkungen sie als zwingend gelten dürfen. Die eigentliche Aufgabe der numerischen Berechnung von $F(x)$ verlangt jedenfalls, für das ε explizite Grenzen anzugeben, aus denen sich die Güte der Annäherung beurteilen lässt. Dieser Abschluss ist aber bisher nicht erreicht worden. Einen wesentlich einfacheren Beweis des Tschebyscheff'schen Satzes kündigt an *A. Liapounoff,* Par. C. R. 132 (1901), p. 126; Verallgemeinerung ebenda p. 814.

In der Versicherungslitteratur ist der fragliche Satz vielfach, aber immer nur rein formal behandelt worden, ohne dass man sich um irgend welche Konvergenzbetrachtungen Sorge gemacht hat, die doch die einzige und sehr ernstliche Schwierigkeit bilden. Die Theorie des Risikos erleidet hierdurch keine Einbusse, wenn man nur mit *Bremiker, Gram* und *Hausdorff* das mittlere und nicht, wie es die Versicherungsmathematiker seit *Kanner* (1867) fast durchgängig thun, das durchschnittliche Risiko des Versicherungsbestandes als Basis wählt.

169) Für gleichartige Todesfallversicherungen mit natürlicher Prämie bedient sich dieser Approximation *Th. Wittstein,* Math. Statistik, Hannover 1867, p. 13. Allgemein giebt sie *K. Hattendorff*, Rundschau d. Versich. 18 (1868), p. 150.

170) Einem zusammenhängenden Berichte über die hierher gehörigen Untersuchungen steht die grosse Schwierigkeit entgegen, dass diese meist sehr lückenhaft und sogar die Ansätze nur in den seltensten Fällen einwurfsfrei sind. Gleichwohl handelt es sich um wichtige Fragen und Arbeiten mit guten Ideen. Referent hat sich daher bemüht, von diesen nur das Wesentlichste festzuhalten und im übrigen die Darstellung so gewählt, dass sie nach seiner eigenen Auffassung möglichst einwandsfrei ist.

prämien keinen Zuschlag oder nur einen solchen erheben würde, der gerade die Unkosten deckte; denn das mittlere Risiko $\mathfrak{M}$ wächst mit der Zahl L der Versicherungen unbegrenzt. Thatsächlich übersteigen die Einnahmen an Zuschlägen die Unkosten. Der Teil σP der Nettoprämie, welcher nach Deckung der Unkosten noch übrig bleibt, möge der *Sicherheitszuschlag* genannt und für σ ein durchschnittlicher Prozentsatz angenommen werden, der den thatsächlichen Erfahrungen der Gesellschaft entspricht[171]).

Wir stellen nun dem bisher betrachteten mittleren Risiko $\mathfrak{M}$ des Bestandes Γ, das auf die Sicherheitszuschläge keine Rücksicht nahm und das daher genauer das mittlere *Nettorisiko* von Γ heissen möge, ein mittleres *Bruttorisiko* $\mathfrak{M}'$ gegenüber, das die noch zu erwartenden Sicherheitszuschläge berücksichtigt[172]). Die Ausgaben $\mathfrak{A}_n$ werden dabei wie früher definiert, die Einnahmen $\mathfrak{E}_n'$ bilden aber ausser den in Nr. **19** definierten Nettoeinahmen $\mathfrak{E}_n$ die noch zu erwartenden Einnahmen an Sicherheitszuschlägen. Das *mittlere Bruttorisiko* $\mathfrak{M}'$ ist nun einfach die mittlere Abweichung der Differenz $\mathfrak{A}_n - \mathfrak{E}_n'$ von ihrem wahrscheinlichen Werte. Letzterer ist gleich $-\sigma A$, wo A den Wert der in der fixierten Periode noch zu erwartenden Einnahmen an Nettoprämien bedeutet. Der Anfang der Periode werde mit dem Zeitpunkte der Berechnung, also t mit t_1 identifiziert. Über den Endpunkt t_2 der Periode werde vorläufig nichts vorausgesetzt. Zu beachten ist, dass die Prämien in der Regel noch eine ganze Reihe von Jahren zu zahlen sind. Mit einer Wahrscheinlichkeit $\varphi(\nu)$, die grösser als $1 - \frac{1}{\nu^2}$ (Nr. **3**) und für grosse L approximativ durch $\Theta\left(\frac{\nu}{\sqrt{2}}\right)$ gegeben ist (Nr. **3**, **22**), kann man daher behaupten, dass das

171) Hier werden in der Litteratur zwei verschiedene Standpunkte nicht immer scharf genug getrennt. Man kann einmal fragen, wie gross man σ, wenn es *willkürlich* ist, wählen muss, um eine Stabilität von gegebener Grösse zu erzielen. Man kann andrerseits den Wert von σ *gegeben* sein lassen und fragen, wie gross die Stabilität bei diesem gegebenen σ ausfällt. Die erstere Fragestellung entspricht dem Fall, dass man Tarife mit nach dem Risiko abgestuften Sicherheitszuschlägen konstruieren will. Die zweite Fragestellung entsteht, wenn man die Stabilität der grossen Gesellschaften, die man als Erfahrungsthatsache kennt, von der Theorie des Risikos aus verstehen lernen will. Es ist dieses letztere Problem, das dem Referenten bei den Ausführungen des Textes vorgeschwebt hat, und daher ist σ immer als eine fest gegebene, empirisch ermittelte Grösse gedacht.

172) Die Litteratur betrachtet nur das Nettorisiko, das als eine Approximation des vom Referenten eingeführten Bruttorisikos gelten darf.

für die künftigen Auszahlungen erforderliche Deckungskapital zwischen den Grenzen $V - \nu \mathfrak{M}' - \sigma A$ und $V + [\nu \mathfrak{M}' - \sigma A]$ enthalten ist, wo V die Nettoreserve des Bestandes Γ zur Zeit t bedeutet. Der in eckigen Klammern eingeschlossene Ausdruck werde die *Risikoreserve* von Γ für die Periode (t, t_2) genannt und durch:

$$\mathfrak{R}' = \nu \mathfrak{M}' - \sigma A$$

bezeichnet[173]. Er giebt den *Sicherheitsfonds*, der mit der Wahrscheinlichkeit $\varphi(\nu)$ gegen die zufälligen Schwankungen der Sterblichkeit in der Periode (t, t_2) schützt[174]. Er misst die Stabilität der Gesellschaft: je kleiner $\mathfrak{R}'$ wird, um so grösser ist die Stabilität[175].

Hat man eine Reihe von L gleichartigen[176] Versicherungen, jede auf die Versicherungssumme s, und sind $\mathfrak{M}_i'$ und A_i die auf die Versicherungssumme 1 bezogenen Werte von $\mathfrak{M}'$ und A, die einer individuellen dieser Versicherungen entsprechen, so wird, wenn alle Grössen ausser L konstant bleiben:

$$\mathfrak{R}' = \left(\nu \sqrt{L} \cdot \mathfrak{M}_i' - \sigma L A_i\right) \cdot s$$

für hinreichend grosse L negativ. Für die grossen Gesellschaften der Praxis ist jedenfalls die Risikoreserve für das nächste Geschäftsjahr immer negativ und hierin liegt die Berechtigung dafür, dass sie den Gewinn des verflossenen Geschäftsjahres als Dividende den Versicherten zuweisen oder für andere Sicherheitsfonds (z. B. Kriegsreserve) verwenden dürfen und keine besondere Risikoreserve zurückzustellen brauchen.

Dies gilt für Gesellschaften, die nach der Nettomethode ihre Bilanz aufstellen (Nr. **16**). Wenn dagegen eine Gesellschaft „zillmert", so erhöht sich die Risikoreserve um denselben Betrag, um den sie die Nettoreserve „kürzt". Will sie also trotzdem keine besondere Risikoreserve zurückstellen, so darf eine gewisse Grenze der Kürzung

---

173) Die Risikoreserve wurde begrifflich und dem Namen nach von *Th. Wittstein* eingeführt, Das math. Risiko (1885), p. 89. Er versteht darunter den Überschuss des durchschnittlichen ferneren Nettorisikos über σA.

174) Die älteren Autoren, so namentlich *C. Raedell*, Vollständige Anweisung, die Lebensfähigkeit von Versicherungsanstalten zu untersuchen, Berlin 1857, p. 218 ff., sehen in der Bestimmung dieses Sicherheitsfonds die Hauptaufgabe der Theorie des Risikos.

175) Man kann geradezu $-\mathfrak{R}'$ als Mass der Stabilität einführen.

176) Den wirklichen Verhältnissen der Praxis gegenüber bildet die Annahme von lauter gleichartigen Versicherungen natürlich eine reine Fiktion. Gleichwohl ist diese von Wert, weil sich bei ihr die theoretischen Beziehungen am deutlichsten erkennen lassen und weil ein allgemeiner Versicherungsbestand durch Einführung passender Mittelwerte durch einen solchen von lauter gleichartigen Versicherungen approximiert werden kann.

nicht überschritten werden, die sich aus der Bedingung ergiebt, dass die um die Kürzung erhöhte Risikoreserve verschwindet[177]).

Nimmt man von jetzt an wieder an, dass die Gesellschaft die volle Nettoreserve in die Bilanz einstellt, so ergiebt bei lauter gleichartigen Versicherungen die Bedingung $\mathfrak{R}' = 0$ eine *Minimalzahl der Versicherten* L_0, die vorhanden sein muss, damit sie keine besondere Risikoreserve zurückzustellen braucht. Nennt man $\mathfrak{m}_i' = \frac{\mathfrak{M}_i'}{A_i}$ das *relative Bruttorisiko* einer individuellen Versicherung, so ist dieses in erster Annäherung gleich dem relativen Nettorisiko $\mathfrak{m}_i = \frac{\mathfrak{M}_i}{A_i}$ derselben, das in Nr. **20** eingeführt wurde und es wird:

$$L_0 = \left(\frac{\nu}{\sigma} \cdot \mathfrak{m}_i'\right)^2$$

die fragliche Minimalzahl. Ist $L < L_0$, so ist die Risikoreserve positiv und ein Maximum, wenn $L = \frac{1}{4} L_0$ ist. Für diesen Wert erreicht also die Stabilität ein Minimum[178]).

Kommt zu dem Versicherungsbestande Γ eine neue Versicherung hinzu, für die alles festgesetzt ist ausser der Versicherungssumme, so ergiebt *Laurent*'s Bedingung, dass die Risikoreserve nicht zunimmt[179]), ein *Maximum der Versicherungssumme* für die neu hinzukommende Versicherung, wenn das relative Bruttorisiko $\mathfrak{m}'$ von dieser grösser als $\frac{\sigma}{\nu}$ ist. Befand sich der Versicherungsbestand Γ in dem durch die Gleichung $\mathfrak{R}' = 0$ charakterisierten äussersten zulässigen Minimum der Stabilität, so besagt *Laurent*'s Forderung, dass $\frac{\mathfrak{M}'}{A}$ oder — wenn man in erster Annäherung $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$ setzt — dass das relative Risiko $\mathfrak{m}$ nicht zunimmt[180]). Unter der Fiktion, dass alle Versicherungen von Γ gleichartig sind und auch die neu hinzukommende Versiche-

177) Den Einfluss der *Zillmer*'schen Methode auf die Stabilität hat *K. Hattendorff* (Rundschau d. Versich. 18 (1868), p. 34) erörtert.

178) Über die Minimalzahl der Versicherten macht *C. Landré* (Math. techn. Kap. p. 343) einige Bemerkungen.

179) Diese Bedingung stammt von *H. Laurent,* Par. Journal act. franç. 2 (1873), p. 79, 161; derselbe, Traité du calcul des probabilités, Paris 1873, p. 247; derselbe, Théorie et pratique des assurances sur la vie, Paris 1895, p. 116. Eine Dissertation über das Maximum der Versicherungssumme hat *H. Onnen* geschrieben (Litt.-Verz. VI). Ein zusammenfassendes Referat über die einschlägige Litteratur giebt *C. Landré,* Lond. intern. Kongr. 1899, p. 110.

180) Die Forderung, dass das relative Risiko nicht zunimmt, stellt ganz allgemein *C. Landré,* Math. techn. Kap., p. 340.

rung — abgesehen von der Versicherungssumme — von der nämlichen Art ist, ergiebt sich hieraus in erster Annäherung als Maximum der neuen Versicherungssumme das Doppelte der Versicherungssumme jeder alten Versicherung[181]). Ist dagegen das relative Bruttorisiko $\mathfrak{m}'$ der neu hinzukommenden Versicherung nicht grösser als $\frac{\sigma}{\nu}$, so erhöht die neu hinzukommende Police die Stabilität, wie hoch auch sonst die Versicherungssumme sein mag und *Laurent*'s Bedingung ergiebt überhaupt keine obere Grenze für sie.

181) *C. Landré,* Math. techn. Kap., p. 341; bestehen die Versicherungen schon eine Reihe von Jahren, so tritt an Stelle ihrer Versicherungssumme ihr reduziertes Kapital, *C. Landré,* Lond. intern. Kongr., p. 115. Der Landré'schen Bedingung verwandt ist diejenige von *F. Hausdorff,* a. a. O. p. 511.

(Abgeschlossen im April 1901.)

I E. DIFFERENZENRECHNUNG

VON

DEMETRIUS SELIWANOFF

IN ST. PETERSBURG.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

Lehrbücher.

S. F. Lacroix, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral 3, Paris 1800 [mit dem Titel: Traité des différences . . .]; 2. Aufl. 1819 (citiert unter „Lacroix“).

J. F. W. Herschel, A collection of examples of the applications of the calculus of finite differences, Cambridge 1820 („Herschel“).

O. Schlömilch, Theorie der Differenzen und Summen, Halle 1848.

G. Boole, A treatise on the calculus of finite differences, Cambridge-London 1860, deutsch v. *C. H. Schnuse,* Braunschw. 1867.

A. A. Markoff, Differenzenrechnung, St. Petersburg 1889—1891; deutsch von *Th. Friesendorf* und *E. Prümm,* Leipzig 1896 („Markoff“).

E. Pascal, Calcolo delle differenze finite, Milano 1897 („Pascal“).

Bezüglich der Geschichte siehe

M. Cantor, Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, 3 Bände, Leipzig, Bd. 1, 2. Aufl. 1894; 2, 2. Aufl. 1900; 3, 1894—1898 („Cantor").

G. Eneström, Differenskalkylens historia (Upsala universitets Årsskrift 1879, p. 1—71).

---

1. Definitionen. *Die Differenz* einer Funktion $f(x)$ ist gleich $\varphi(x)$, wenn

$$f(x+h) - f(x) = \varphi(x). \tag{1}$$

Die linke Seite wird mit $\Delta f(x)$ bezeichnet[1]). Hier kann x beliebige Werte annehmen, h bleibt aber konstant[2]); meistens wird $h = 1$ gesetzt.

Ist z. B. $f(x) = x^3$, $h = 1$, so hat man

$$f(0) = 0,\quad f(1) = 1,\quad f(2) = 8,\quad f(3) = 27,\quad f(4) = 64, \ldots$$
$$\Delta f(0) = 1,\quad \Delta f(1) = 7,\quad \Delta f(2) = 19,\quad \Delta f(3) = 37, \ldots$$

Die Differenz der Differenz heisst *zweite Differenz* oder *Differenz zweiter Ordnung*:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x); \ldots \tag{2}$$

Ähnlich ist

$$\Delta^3 f(x) = \Delta^2 f(x+h) - \Delta^2 f(x),\quad \Delta^4 f(x) = \Delta^3 f(x+h) - \Delta^3 f(x), \ldots \tag{3}$$

In dem Beispiel ist

$$\Delta^2 f(0) = 6,\quad \Delta^2 f(1) = 12,\quad \Delta^2 f(2) = 18, \ldots$$
$$\Delta^3 f(0) = 6,\quad \Delta^3 f(1) = 6, \ldots$$
$$\Delta^4 f(0) = 0, \ldots$$

Die Rechnung mit Differenzen ist von *Brook Taylor* eingeführt[3]), einige Anfänge findet man aber bei *G. W. Leibniz*[4]). Wir folgen den Bezeichnungen von *L. Euler*[5]).

---

1) Wir lassen bei Seite die Definition

$$\Delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right),$$

die von Astronomen mit Vorteil gebraucht wird [I D 3, Nr. 7]; vgl. *F. Tisserand,* Par. C. R. 70 (1870), p. 678.

2) Man könnte h veränderlich voraussetzen („Pascal" p. 210); es bietet aber wenig Vorteil.

3) Methodus incrementorum, Londini 1715.

4) Brief an Oldenburg vom 3. Febr. 1673 („Cantor" 3, p. 72—73).

5) *L. Euler,* Institutiones calculi differentialis, Petropoli 1755 (deutsch von *A. Michelsen*, Berlin 1790—1793; § 4, p. 5 der deutschen Ausgabe). Vgl. „Cantor" 3, p. 725.

2. Differenzen einfacher Funktionen. Die Berechnung der Differenzen wird erleichtert mit Hülfe der Formeln

$$\Delta c f(x) = c \Delta f(x), \quad (c \text{ ist eine Konstante}), \tag{4}$$

$$\Delta [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_\mu(x)] = \Delta f_1(x) + \Delta f_2(x) + \cdots + \Delta f_\mu(x), \tag{5}$$

$$\Delta [\varphi(x) \cdot \psi(x)] = \varphi(x) \Delta \psi(x) + \psi(x+h) \Delta \varphi(x). \tag{6}$$

Aus der Definition findet man folgende Ausdrücke der Differenzen einfacher Funktionen:

$$\Delta x(x-h)(x-2h)\cdots(x-\overline{n-1}\,h) = nh\,x(x-h)\cdots(x-\overline{n-2}\,h), \tag{7}$$

$$\Delta \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\cdots(x+\overline{n-1}\,h)} = -nh\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\cdots(x+nh)}, \tag{8}$$

$$\Delta m^x = m^x(m^h - 1), \tag{9}$$

$$\Delta \sin u = 2 \sin \frac{\Delta u}{2} \cos\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right), \tag{10}$$

$$\Delta \cos u = -2 \sin \frac{\Delta u}{2} \sin\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right). \tag{11}$$

In den beiden letzten Formeln ist u eine gegebene Funktion von x.

Die n^{te} Differenz einer ganzen Funktion n^{ten} Grades

$$f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots + p_{n-1} x + p_n$$

ist konstant[6]):

$$\Delta^n f(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n p_0 h^n.\ ^{7)} \tag{12}$$

3. Anwendung auf die Absonderung der Wurzeln numerischer Gleichungen [I B 3 a, Nr. 3]. Es sei z. B.:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1.$$

Für $h = 1$ und für jedes x ist:

$$\Delta^3 f(x) = 6.$$

Aus den Werten $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ lassen sich durch Subtraktionen die Werte $\Delta f(-1)$, $\Delta f(0)$, $\Delta^2 f(-1)$ ableiten.

Mit Hülfe der Formel:

$$\Delta^{k-1} f(x+h) = \Delta^{k-1} f(x) + \Delta^k f(x)$$

findet man durch wiederholte Additionen die Werte $\Delta^2 f(0)$, $\Delta f(1)$, $f(2)$.

---

6) Andere Formeln für Differenzen findet man bei „Herschel" p. 1—4.

7) Dass $\Delta^3(x^3)$ konstant ist, hat schon *Leibniz* ausgesprochen („Cantor" 3, p. 73).

Wenn man aber die Formel:

$$\Delta^{k-1} f(x) = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^k f(x)$$

benutzt, so erhält man $\Delta^2 f(-2)$, $\Delta f(-2)$, $f(-2)$.

Diese Resultate lassen sich in der Tabelle zusammenstellen:

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
-2	-1	2	-4	6
-1	1	-2	2	6
0	-1	0	8	
1	-1	8		
2	7			

In dieser Weise kann die Tabelle nach oben oder nach unten fortgesetzt werden.

Die Werte $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$ und $f(1)$, $f(2)$ haben abwechselnde Vorzeichen; folglich hat die Gleichung $f(x) = 0$ drei reelle Wurzeln, die in den Intervallen $(-2, -1)$, $(-1, 0)$ und $(1, 2)$ liegen.

4. Relationen zwischen successiven Werten und Differenzen einer Funktion. Wenn die Reihe der successiven Werte einer Funktion $f(x)$:

$$f(a) = u_0, \; f(a+h) = u_1, \; f(a+2h) = u_2, \ldots, f(a+nh) = u_n$$

gegeben ist, so sind die Differenzen:

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0,$$
$$\Delta^2 u_0 = u_2 - 2u_1 + u_0,$$
$$\Delta^3 u_0 = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^n u_0 = u_n - n u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u_{n-2} - \cdots + (-1)^n u_0. \tag{13}$$

Kennt man:

$$u_0, \; \Delta u_0, \; \Delta^2 u_0, \ldots \Delta^n u_0,$$

so findet man:

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0,$$
$$u_2 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0,$$
$$u_3 = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 u_0 + \cdots + \Delta^n u_0. \tag{14}$$

Wenn man *symbolisch* u_m durch u^m und $\Delta^m u$ durch $(\Delta)^m \cdot u$ ersetzt, so erhalten die Formeln (13) und (14) die Gestalt:

$$\Delta^n u_0 = (u - 1)^n \tag{15}$$

und:

$$u_n = (1 + \Delta)^n u_0. \tag{16}$$

Diese Formeln können auf symbolischem Wege in einander übergeführt werden[8]).

Es ist y die *erzeugende Funktion* (fonction génératrice) von u_x, wenn

$$y = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \cdots + u_x t^x + \cdots$$

ist [I D 1, Nr. 6].

Die Entwickelung von $y\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n$ nach Potenzen von $\frac{1}{t}$ und von $\frac{y}{t^n}$ nach $\left(\frac{1}{t} - 1\right)$ giebt die Formeln (13) und (14).[9])

5. Newton'sche Interpolationsformel. Aus (14) folgt, dass die ganze Funktion n^{ten} Grades:

$$F(y) = u_0 + y\,\Delta u_0 + \frac{y(y-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 u_0 + \frac{y(y-1)(y-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 u_0 + \cdots + \frac{y(y-1)(y-2)\cdots(y-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\Delta^n u_0$$

die Eigenschaften besitzt:

$$F(0) = u_0,\ F(1) = u_1,\ F(2) = u_2,\ \ldots,\ F(n) = u_n.$$

Die Substitution $y = \frac{x-a}{h}$ verwandelt $F(y)$ in eine Funktion n^{ten} Grades $\Phi(x)$, die für x gleich:

$$a,\ a+h,\ a+2h,\ \ldots,\ a+nh$$

vorgeschriebene Werte:

$$f(a),\ f(a+h),\ f(a+2h),\ \ldots,\ f(a+nh)$$

annimmt [I B 1 a, Nr. 4]. Es ist:

$$\Phi(x) = u_0 + (x-a)\cdot\frac{\Delta u_0}{h} + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\Delta^2 u_0}{h^2} + \cdots + \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)\cdots(x-a-\overline{n-1}h)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\frac{\Delta^n u_0}{h^n}.$$

Wenn wir der veränderlichen Grösse x einen Wert beilegen, der von $a,\ a+h,\ \ldots,\ a+nh$ verschieden ist, dann besteht die Formel:

---

8) *J. L. Lagrange*, Berl. N. Mém. 21, 1792/93 [1795], p. 276 = Oeuvres 5, p. 663.

9) *P. S. Laplace*, Par. Hist. 1779 [82], nr. 2 (oeuvr. 7, p. 5); Théorie analytique des probabilités, 3. éd., 1820, p. 9 (die erste Auflage 1812).

$$(17)\qquad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1}\cdot\frac{\Delta f(a)}{h} + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\Delta^2 f(a)}{h^2} + \cdots$$
$$+ \frac{(x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-\overline{n-1}\,h)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\frac{\Delta^n f(a)}{h^n}$$
$$+ \frac{(x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-nh)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n+1)} f^{(n+1)}(\xi),$$

worin ξ eine mittlere Zahl zwischen der grössten und der kleinsten unter den Zahlen a, $a+nh$, x bedeutet. Das ist *die Newton'sche Interpolationsformel*[10]) [I B 1 a, Nr. 3; I D 3, Nr. 4] *mit dem Restgliede von A. Cauchy*[11]).

Wenn wir das letzte Glied weglassen, so erhalten wir eine Näherungsformel, die zur Interpolation dienen kann, d. h. zur Berechnung des Wertes $f(x)$ durch bekannte Werte $f(a)$, $f(a+h)$, $f(a+2h)$, ..., $f(a+nh)$. Das Restglied dient zur Abschätzung des Fehlers der Näherungsformel.

Wenn $f(x)$ eine ganze Funktion nicht höheren als n^{ten} Grades ist, dann verschwindet das Restglied identisch und die Newton'sche Formel ist genau für jedes x. Z. B.:

$$x^3 = x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2).$$

Wenn ausser den Werten $f(a)$, $f(a+h)$, $f(a+2h)$, ..., $f(a+nh)$ noch die Ableitungen $f'(a)$, $f'(a+h)$, $f'(a+2h)$, ..., $f'(a+mh)$, $(m \leqq n)$ gegeben sind, so ist die Näherungsformel:

$$f(x) = \Phi(x) + (x-a)(x-a-h)\cdots(x-a-nh)\,\Phi_1(x).$$

Hier sind $\Phi(x)$ und $\Phi_1(x)$ ganze Funktionen, die mit Hülfe der Newton'schen Formel durch die Werte $\Phi(a)$, $\Phi(a+h)$, ..., $\Phi(a+nh)$, $\Phi_1(a)$, $\Phi_1(a+h)$, ..., $\Phi_1(a+mh)$ bestimmt werden. Der Fehler dieser Näherungsformel ist:

$$\frac{(x-a)^2(x-a-h)^2\cdots(x-a-mh)^2(x-a-\overline{m+1}\,h)\cdots(x-a-nh)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n+m)} f^{(n+m+1)}(\xi).$$

Kompliziertere Interpolationsformeln werden analog gebildet[12]).

6. Anwendung dieser Interpolationsformel auf die Berechnung der Logarithmen und Antilogarithmen. Wir nehmen z. B. eine Tabelle fünfstelliger gewöhnlicher Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1000 bis einschliesslich 9999. Mit Hülfe der Werte $\operatorname{Log} N$ und $\operatorname{Log}(N+1)$ soll $\operatorname{Log}(N+x)$ berechnet werden, wobei $0 < x < 1$ ist.

10) *I. Newton,* Analysis, Lond. 1711; vgl. „Cantor" 3, p. 358—361.
11) Par. C. R. 11 (1840), p. 787 = Oeuvres (1), 5, p. 422.
12) „Markoff" p. 1—12.

Die Interpolationsformel:

$$f(x) = f(0) + x\Delta f(0) + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2} f''(\xi)$$

giebt die Näherungsformel:

$$\operatorname{Log}(N+x) = \operatorname{Log} N + x\,[\operatorname{Log}(N+1) - \operatorname{Log} N]$$

mit dem Fehler:

$$\varepsilon = \frac{x(1-x)}{1\cdot 2}\,\frac{\operatorname{Log} e}{(N+\xi)^2},$$

der $< 16^{-1}\cdot 10^{-6}$ ist und folglich keinen Einfluss auf die fünfstelligen Logarithmen hat.

Die Berechnung der Antilogarithmen führt auf die Frage: Es sind die Werte gegeben:

$$\operatorname{Log} N = a, \quad \operatorname{Log}(N+1) = b.$$

Aus der Gleichung $\operatorname{Log}(N+y) = a + x$ soll y berechnet werden für einen Wert von x, wo $0 < x < b - a$ ist.

Wenn $f(x) = 10^{a+x}$ ist, so folgt aus der Interpolationsformel:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}\cdot\frac{\Delta f(0)}{b-a} + \frac{x(x-b+a)}{1\cdot 2} f''(\xi)$$

die Näherung:

$$y = \frac{x}{b-a}$$

mit dem Fehler:

$$\varepsilon = -\frac{x(b-a-x)}{1\cdot 2}\,10^{a+\xi}(\log 10)^2,$$

dessen absoluter Betrag $|\varepsilon| < 2\cdot 10^{-3}$.

7. Anwendung auf die angenäherte Berechnung bestimmter Integrale [II A 2, Nr. **50**—**55**]. Vermöge der Substitution $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$ findet man:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{+1} F(t)\,dt.$$

Die Funktion $F(t)$ wird durch die Ausdrücke ersetzt:

(A) $\quad F(t) = F(-1) + \frac{t+1}{1}\cdot\frac{\Delta F(-1)}{2} + \frac{(t+1)(t-1)}{1\cdot 2} F''(t_1)$ oder:

(B) $$F(t) = F(-1) + \frac{t+1}{1}\Delta F(-1) + \frac{(t+1)t}{1\cdot 2}\Delta^2 F(-1) + K(t+1)\,t\,(t-1) + \frac{(t+1)t^2(t-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} F^{\mathrm{IV}}(t_1).$$

Hier ist t_1 ein Mittelwert.

In (B) wird K dadurch bestimmt, dass für $t=0$ die Ableitung von

$$F(-1) + (t+1)\Delta F(-1) + \frac{(t+1)t}{1\cdot 2}\Delta^2 F(-1) + K(t+1)t(t-1)$$

den Wert $F'(0)$ annehmen soll[13]).

Man findet:

$$\text{(A')}\quad \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] - \frac{(b-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{f''(\xi)}{1\cdot 2},$$

$$\text{(B')}\quad \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] - \frac{(b-a)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{f^{\mathrm{IV}}(\xi)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

Hier ist $a < \xi < b$.

Die Benutzung von (A′) heisst die angenäherte Berechnung des Integrals nach der *Methode der Trapeze*, weil $\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$ Flächeninhalt eines Trapezes ist [II A 2, Nr. **51**].

Die Formel (B′) ohne Restglied heisst *Simpson'sche Formel*[14]).

Nach Zerlegung des Intervalls (a, b) in n gleiche Intervalle mittels der Bezeichnung:

$$y_k = f\left(a + k\,\frac{b-a}{2}\right)$$

findet man:

$$(18)\quad \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) - \frac{1}{n^2}\cdot\frac{(b-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{f''(\xi)}{1\cdot 2},$$

$$(19)\quad \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + 4y_{\frac{1}{2}} + 2y_1 + 4y_{\frac{3}{2}} + 2y_2 + \cdots + 4y_{\frac{2n-1}{2}} + y_n\right) - \frac{1}{n^4}\cdot\frac{(b-a)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{f^{\mathrm{IV}}(\xi)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

8. Summation der Funktionen. Man sucht eine Funktion $\varphi(x)$, deren Differenz eine gegebene Funktion $f(x)$ ist:

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = f(x).$$

Für $x = a$ kann $\varphi(x)$ einen beliebigen Wert annehmen. Die Definitionsgleichung bestimmt die Werte:

$$\varphi(a+h),\quad \varphi(a+2h),\quad \varphi(a+3h),\ldots$$

---

13) „Markoff" p. 58.

14) *Th. Simpson,* Mathematical dissertations on physical and analytical subjects (London 1743), p. 109; „Cantor" 3, p. 664.

Es ist also $\varphi(x)$ mit Hülfe von $\varphi(a)$ vollständig bestimmt für alle Werte x der Reihe:

$$a, \quad a+h, \quad a+2h, \quad a+3h, \ldots .$$

In der Folge wird x nur diese Werte annehmen.

Die Funktion $\varphi(x)$ heisst *Summe von* $f(x)$, in Zeichen: $\sum f(x)$. Alle Werte dieser Summe sind in:

$$\sum f(x) = \varphi(x) + C \tag{20}$$

enthalten, worin C eine willkürliche Konstante ist.

Jedem Satz über die Differenz (Nr. 2) entspricht ein Satz über die Summe. Man hat:

$$\sum A f(x) = A \sum f(x), \quad (A \text{ ist eine Konstante}), \tag{21}$$

$$\sum [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_\mu(x)] = \sum f_1(x) + \sum f_2(x) + \cdots + \sum f_\mu(x), \tag{22}$$

$$\begin{aligned} &\sum x(x-h)(x-2h)\cdots(x-\overline{n-1}h) \\ &= \frac{1}{(n+1)h} x(x-h)(x-2h)\cdots(x-nh) + C, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} &\sum \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\cdots(x+\overline{n-1}h)} \\ &= -\frac{1}{(n-1)h} \frac{1}{x(x+h)\cdots(x+\overline{n-2}h)} + C, \quad (n>1), \end{aligned} \tag{24}$$

$$\sum m^x = \frac{m^x}{m^h - 1} + C, \tag{25}$$

$$\sum \sin x = -\frac{\cos\left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin \frac{h}{2}} + C, \quad \sum \cos x = \frac{\sin\left(x - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin \frac{h}{2}} + C. \tag{26}$$

Um die Funktion x^3 für $h = 1$ zu summieren, benutzt man die Zerlegung (Nr. 5):

$$x^3 = x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2)$$

und man findet:

$$\begin{aligned} \sum x^3 = {} & \frac{1}{2} x(x-1) + x(x-1)(x-2) \\ & + \frac{1}{4} x(x-1)(x-2)(x-3) + C. \end{aligned} \tag{27}$$

Der Ausdruck für $\Delta[\varphi(x) \cdot \psi(x)]$ liefert *die Formel der partiellen Summation:*

$$\sum \varphi(x) \cdot \Delta \psi(x) = \varphi(x)\psi(x) - \sum \psi(x+h) \Delta \varphi(x), \tag{28}$$

die dazu dient, $\sum \varphi(x) \cdot \omega(x)$ zu finden, sobald $\sum \omega(x)$ bekannt ist.

9. Bestimmte Summen. Der Ausdruck

$$\sum f(x) = \varphi(x) + C$$

heisst *unbestimmte Summe,* weil er eine willkürliche Konstante enthält. Subtrahiert man von einander zwei Werte dieser Summe $\varphi(a+nh)+C$ und $\varphi(a+mh)+C$, so fällt C weg und man erhält die *bestimmte Summe,* in Zeichen:

$$\sum_{a+mh}^{a+nh} f(x) = \varphi(a+nh) - \varphi(a+mh). \tag{29}$$

Aus dieser Definition folgt:

$$\sum_{a+mh}^{a+mh} f(x) = 0, \tag{30}$$

$$\sum_{a+mh}^{a+(m+1)h} f(x) = f(a+mh), \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\sum_{a}^{a+nh} f(x) &= \sum_{a}^{a+h} f(x) + \sum_{a+h}^{a+2h} f(x) + \cdots + \sum_{a+\overline{n-1}h}^{a+nh} f(x) \\ &= f(a) + f(a+h) + \cdots + f(a+\overline{n-1}\,h).\end{aligned} \tag{32}$$

Es besteht also die Relation:

$$\begin{aligned}f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+\overline{n-1}\,h) \\ = \varphi(a+nh) - \varphi(a).\end{aligned} \tag{33}$$

Diese Formel gestattet viele Anwendungen. Wir beschränken uns auf folgende. Es ist:

$$\begin{aligned}a + (a+h) + (a+2h) + \cdots + (x-h) \\ = \frac{1}{2h}[x(x-h) - a(a-h)] \quad (\textit{arithmetische Reihe}).\end{aligned} \tag{34}$$

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{x-1} = \frac{q^x - 1}{q-1} \quad (\textit{geometrische Reihe}). \tag{35}$$

Die Summation (27) der Funktion x^3 giebt:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (x-1)^3 = [1+2+3+\cdots+(x-1)]^2. \tag{36}$$ [15]

Aus $\sum_0^{nh} \cos x - \frac{1}{2}$ folgt[15a]:

$$\frac{1}{2} + \cos h + \cos 2h + \cdots + \cos(n-1)h = \frac{\sin\frac{2n-1}{2}h}{2\sin\frac{h}{2}}. \tag{37}$$

---

15) Nach *M. Cantor* war Gl. (36) schon im XI. Jahrhundert den Arabern bekannt („Cantor" 1, p. 724) [I C 1, Nr. **11**].

15a) Die Formeln (37) und (38) hat *L. Euler,* Introd. nr. 259, als Differenzen je zweier divergenter unendlicher Reihen erhalten. Direkt abgeleitet hat sie wohl zuerst *Ch. Bossut,* Par. Hist. 1769 [72], p. 453, einfacher *A. J. Lexell,* Petrop. N. Comm. 18, 1773 [74], p. 38.

Analog ist[15a]):

$$(38)\quad \sin h + \sin 2h + \cdots + \sin(n-1)h = \frac{\cos\frac{h}{2} - \cos\frac{2n-1}{2}h}{2\sin\frac{h}{2}}.$$

Die Funktion:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x-1}$$

lässt sich nicht entsprechend darstellen, weil man keinen elementaren Ausdruck kennt, dessen Differenz $= \frac{1}{x}$ ist[16]) [II A 3, Nr. **12** d, Formel 1)].

10. Die Jacob Bernoulli'sche Funktion. So heisst nach *J. L. Raabe*[17]) die ganze Funktion n^{ten} Grades, die für ganzzahlige x gleich:

$$1^{n-1} + 2^{n-1} + 3^{n-1} + \cdots + (x-1)^{n-1}$$

ist. Die Rechnungen werden einfacher, wenn wir diese ganze Funktion durch $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)$ dividieren, wodurch:

$$(31)\qquad \varphi_n(x) = \sum\nolimits_0^x \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}$$

entsteht.

Schreibt man $\varphi_n(x)$ in der Form:

$$(40)\quad \varphi_n(x) = \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdots n} + A_1 \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} + A_2 \frac{x^{n-2}}{1 \cdot 2 \cdots (n-2)} + \cdots + A_{n-1}x,$$

so lassen sich die Koeffizienten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ aus:

$$(41)\quad \begin{cases} \frac{1}{1 \cdot 2} + A_1 = 0, \\ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{A_1}{1 \cdot 2} + A_2 = 0, \\ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{A_1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{A_2}{1 \cdot 2} + A_3 = 0, \ldots \end{cases}$$

bestimmen. Man findet:

$$A_1 = -\frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{1}{12}, \quad A_3 = 0, \ldots$$

---

16) Es ist $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x-1} = 1 + \psi(x) - \psi(2)$ [II A 3, Nr. **17**]. Andere Summationen bei „Herschel", p. 43—65.

17) Die Jacob-Bernoulli'sche Funktion. Zürich 1848. Die Funktion ist benannt nach *Jacob I Bernoulli,* Ars conjectandi 1713, p. 96. Vgl. II A 3, Nr. **18**, bes. p. 185, wo weitere Litteratur. S. noch *P. Appell,* Nouv. Ann. (3) 6 (1887), p. 312, 547.

Die Funktion $\varphi_n(x)$ und die Zahlen A besitzen die Eigenschaften[18]):

$$\varphi_{2k+1}(1-x) = -\varphi_{2k+1}(x), \tag{42}$$

$$\varphi_{2k}(1-x) = \varphi_{2k}(x), \tag{43}$$

$$A_{2k+1} = 0 \quad \text{für} \quad k > 0, \tag{44}$$

$$A_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}2}{(2\pi)^{2k}}\left[1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \cdots\right].\text{[19])} \tag{45}$$

Im Intervall (0, 1) verschwindet $\varphi_{2k+1}(x)$ nur für $x = \frac{1}{2}$; für alle x dieses Intervalles ist:

$$(-1)^k \varphi_{2k}(x) > 0. \tag{46}$$

Die Koeffizienten der Glieder niedrigster Ordnung, die in den Summen:

$$\sum_0^x x^2, \quad \sum_0^x x^4, \quad \sum_0^x x^6, \ldots$$

auftreten, heissen *Bernoulli'sche Zahlen*: „$B_1, B_2, B_3, \ldots$" [II A 3, Nr. **18**]. Daraus folgt:

$$A_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2k}\cdot B_k. \tag{47}$$

Die ersten Bernoulli'schen Zahlen sind:

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66}, \ldots. \tag{48}$$

Die Tabelle der 62 ersten B findet man bei *J. C. Adams* in J. f. Math. 85 (1878), p. 269—272.[20])

11. Euler'sche Summationsformel. Die Formel von *L. Euler*[21])

---

18) Direkte Beweise haben *W. G. Imschenetzky* (Kasan. Mém. 1870, französisch in *J. Hoüel*, Cours de calcul infinitésimal, Paris 1888, 1, p. 476 und *N. J. Sonin* [Warschauer Univ.-Nachr. 1888, französisch in J. f. Math. 116 (1896), p. 133] gegeben.

19) *L. Euler*, Petropol. Comm. 12 (1740), p. 73 (vgl. „Cantor" 3, p. 655); *O. Schlömilch*, Zeitschr. Math. Phys. 1 (1856), p. 200; *N. J. Sonin*, J. f. Math. 116 (1896), p. 138.

20) Litteratur über diese Zahlen bis 1882 bei *G. S. Ely* [Amer. J. of math. 5 (1882), p. 228].

21) Petropol. Comm. 6 (1732 u. 1733 [38]), p. 68 (vgl. „Cantor" 3, p. 635); *G. Darboux*, J. de math. (3), 2 (1876), p. 300. Die Formel (49) wird oft *Maclaurin'sche* genannt. Sie ist zwar von *C. Maclaurin* (Treatise of fluxions, Edinburgh 1742, p. 672) unabhängig von *L. Euler* gefunden, aber später veröffentlicht (vgl. „Cantor" 3, p. 663).

Die englischen Versicherungs-Mathematiker gebrauchen eine Formel (ohne mit dem Restgliede von *K. G. J. Jacobi*[22]) lautet (für $h=1$) [I A 3, Nr. 38]:

$$(49)\quad \sum\nolimits_a^x f(t) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + A_1[f(x)-f(a)] + A_2[f'(x)-f'(a)] + \cdots$$
$$+ A_{2k-2}[f^{(2k-3)}(x) - f^{(2k-3)}(a)]$$
$$+ A_{2k-1}[f^{(2k-2)}(x) - f^{(2k-2)}(a)] + R_k,$$

$$(50)\qquad R_k = -\int\limits_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum\nolimits_a^x f^{(2k)}(t+u).$$

In (50) wird nach t summiert und nach u integriert.

Aus der Unveränderlichkeit des Vorzeichens von $\varphi_{2k}(u)$ folgt:

$$(51)\qquad R_k = A_{2k} \sum\nolimits_a^x f^{(2k)}(t+\theta), \qquad (0<\theta<1).$$

Wenn $f^{(2k)}(t)$ und $f^{(2k+2)}(t)$ für alle t zwischen a und x das gleiche Vorzeichen behalten, dann ist:

$$(52)\qquad R_k = \theta A_{2k}[f^{(2k-1)}(x) - f^{(2k-1)}(a)]; \qquad (0<\theta<1).$$

Wenn $f(t)$ den Bedingungen genügt:

1) $f^{(m)}(t)$ behält dasselbe Vorzeichen für alle geraden m und für $t>a$;

2) $\lim \left\{f^{(m)}(t)\right\}_{t=\infty} = 0$ für jedes m,

dann lässt sich (49) in:

$$(53)\qquad \sum\nolimits_a^x f(t) = C + \int\limits_a^x f(t)\,dt + A_1 f(x) + \cdots$$
$$+ A_{2k-1} f^{(2k-2)}(x) + \theta A_{2k} f^{(2k-1)}(x)$$

umwandeln[23]).

Die Konstante C ist von k unabhängig und $0<\theta<1$.

12. Anwendungen der Euler'schen Formel. Wenn man in (49) und (51):

$$a=0, \quad x=1, \quad f(t)=e^{xt}$$

setzt, so findet man:

Restglied) unter dem Namen „Lubbock'sche Summenformel" (*J. W. Lubbock*, Cambr. Trans. 3 (1830), p. 323. Hier tritt eine über kleine Intervalle erstreckte Summe an Stelle des Integrals, Differenzenquotienten an Stelle der Differentialquotienten [I D 4 b, 8, Fussn. 73)].

22) J. f. Math. 12 (1834), p. 263 = Werke, 6, p. 64. Das Restglied in anderer Form war schon von *S. D. Poisson* gefunden [Par. mém. 6 (1826), p. 580].

23) „Markoff" p. 131.

(54) $$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} + A_1 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + \cdots.$$

Hier muss $|x| < 2\pi$ sein, wie aus (45) folgt.

Die Voraussetzungen:

$$a = 0, \quad x = 1, \quad f(t) = \cos(2xt)$$

liefern ebenso für $|x| < \pi$:

(55) $$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - 2^2 A_2 x + 2^4 A_4 x^3 - 2^6 A_6 x^5 + \cdots.$$

Wenn man in (53):

$$a = 1, \quad f(t) = \log t$$

setzt und zu beiden Seiten $\log x$ hinzufügt, so findet man *die Stirling'sche Formel*[24]) [I D 1, Nr. **12**]:

(56) $$\log(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x) = \log \sqrt{2\pi} + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x - x + A_2 \frac{1}{x} + \cdots$$
$$+ A_{2k-2} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2k-4)}{x^{2k-3}} + \theta A_{2k} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2k-2)}{x^{2k-1}}.$$

Die Konstante C wurde mit Hülfe der Wallis'schen Formel[25]) für $\frac{\pi}{2}$ bestimmt.

Bei hinreichend grossem k und für jedes x ist der absolute Betrag des Restgliedes beliebig gross. Folglich ist die Reihe:

$$A_2 \frac{1}{x} + A_4 \frac{1 \cdot 2}{x^3} + A_6 \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} + \cdots$$

divergent. Deswegen darf zur angenäherten Berechnung von $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x$ nur eine geringe Anzahl der Glieder der Reihe genommen werden. Das beste Resultat erhält man, wenn k nahe an πx liegt[26]) [I A 3, Nr. **38**; II A 3, Nr. **12** g].

13. Allgemeines über Differenzengleichungen. Eine Gleichung:

(57) $$\Phi(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \ldots, \Delta_m y_x) = 0$$

heisst *Differenzengleichung.* Eine Funktion y_x, die der Gleichung genügt, heisst *Lösung* der Gleichung.

Die Differenzen von y_x lassen sich durch die successiven Werte $y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots$ ausdrücken (13); dann erhält die Gleichung die Form:

(58) $$\Psi(x, y_x, y_{x+1}, \ldots, y_{x+m}) = 0.$$

Es ist möglich, dass bei dieser Transformation die Glieder mit

---

24) *J. Stirling,* Methodus differentialis, Lond. 1730, p. 135 (vgl. „Cantor" 3, p. 629).

25) [2 A 3, Nr. 9, d)]; „Cantor", 2 p. 827.

26) *H. Limbourg,* Brux. mém. cour. sav. étr. 30 (1861), p. 1.

$y_x, y_{x+2}, \ldots, y_{x+a-1}$ wegfallen. Dann setzen wir $y_{x+a} = z_x$. Deswegen darf man voraussetzen, dass die Gleichung (58) y_x enthält. Wenn ausserdem y_{x+m} vorkommt, so heisst diese Gleichung m^{ter} *Ordnung.*

Wir setzen voraus, dass die Gleichung (58) in Bezug auf y_{x+m} aufgelöst ist:

(59) $$y_{x+m} = F(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots, y_{x+m-1}).$$

Überdies soll die rechte Seite von (59) bestimmte Werte annehmen für ganze positive x (auch für $x = 0$) und beliebige y_x, y_{x+1}, $y_{x+2}, \ldots, y_{x+m-1}$. Aus (59) lassen sich $y_m, y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots$ durch willkürliche Konstanten $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$ darstellen.

Jeder Ausdruck, der (59) genügt und m willkürliche Konstanten enthält, heisst *allgemeine Lösung der Gleichung*, wenn diese Konstanten sich durch $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$ bestimmen lassen. Eine *partikuläre* Lösung enthält keine willkürlichen Konstanten.

Wir beschränken uns auf *lineare* Gleichungen:

(60) $$y_{x+m} + A_x y_{x+m-1} + B_x y_{x+m-2} + \cdots + M_x y_x = Q_x,$$

wo A_x, $B_x, \ldots, M_x$, Q_x gegebene Funktionen von x sind.

Die Gleichung (60) heisst *vollständig*, wenn $Q_x \neq 0$; ist aber $Q_x = 0$, so heisst die Gleichung *homogen.*

Wenn eine partikuläre Lösung y_x^0 von (60) bekannt ist, so ist *jede* Lösung von (60):

$$y_x = y_x^0 + z_x,$$

wo z_x eine Lösung der homogenen Gleichung:

(61) $$z_{x+m} + A_x z_{x+m-1} + B_x z_{x+m-2} + \cdots + M_x z_x = 0$$

ist.

Je $(m + 1)$ partikuläre Lösungen von (61) sind durch eine lineare homogene Beziehung:

(62) $$C' z_x' + C'' z_x'' + \cdots + C^{(m+1)} z_x^{(m+1)} = 0$$

verbunden, wobei $C', C'', \ldots, C^{(m+1)}$ von x unabhängig sind und nicht sämtlich verschwinden.

Die partikulären Lösungen $z_x^{(h)}$ $(h = 1, 2, \ldots, m)$ heissen *von einander unabhängig,* wenn die Determinante $|z_k^{(h)}|$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, m-1;\ h = 1, 2, \ldots, m)$ nicht verschwindet. Dann kann $C^{(m+1)}$ in (62) nicht gleich Null sein.

Jede Lösung von (61) ist linear und homogen in m von einander unabhängigen partikulären Lösungen.

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also:

(63) $$z_x = C' z_x' + C'' z_x'' + \cdots + C^{(m)} z_x^{(m)},$$

wo $C', C'', \ldots, C^{(m)}$ willkürliche Konstanten sind[27]) [vgl. das Entsprechende für lineare Differentialgleichungen in II A 4 b, Nr. **21**].

Zum Beweise, dass die partikulären Lösungen in (63) von eineinander unabhängig sind, genügt es zu zeigen, dass $C', C'', \ldots, C^{(m)}$ sich durch $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}$ ausdrücken lassen.

J. L. Lagrange hat eine Methode[28]) angegeben, um von der allgemeinen Lösung (63) von (61) zur allgemeinen Lösung von (60) überzugehen. Zu diesem Zweck setzt man:

$$(64) \qquad y_x = C_x' z_x' + C_x'' z_x'' + \cdots + C_x^{(m)} z_x^{(m)}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung unterscheidet sich von der in (63) dadurch, dass die Konstanten C durch Funktionen von x ersetzt sind.

Diese unbekannten Funktionen in (64) $C_x', C_x'', \ldots, C_x^{(m)}$ werden der Bedingung unterworfen, dass $y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots, y_{x+m-1}$ dieselbe Form haben, als ob die $C_x', C_x'', \ldots, C_x^{(m)}$ konstant wären; ausserdem muss die gegebene vollständige Gleichung befriedigt werden. Daraus entstehen m lineare Gleichungen, aus denen $\Delta C_x', \Delta C_x'', \ldots, \Delta C_n^{(m)}$ gefunden werden. Durch Summation lassen sich $C_x', C_x'', \ldots, C_x^{(m)}$ bestimmen. Diese Methode heisst *Variation der willkürlichen Konstanten* [vgl. II A 4 b, Nr. **22**].

14. Lineare Differenzengleichungen erster Ordnung. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$z_{x+1} - A_x z_x = 0$$

ist:

$$z_x = z_a A_a A_{a+1} \cdots A_{x-1} \qquad (x > a).$$

Hier ist z_a die willkürliche Konstante. Es wird vorausgesetzt, dass A_x nicht verschwindet für $x \geqq a$.

Die allgemeine Lösung der Gleichung:

$$(65) \qquad y_{x+1} - A_x y_x = Q_x$$

ist:

$$(66) \qquad y_x = A_a A_{a+1} \cdots A_{x-1} \left[y_a + \sum\nolimits_a^x \frac{Q_x}{A_a A_{a+1} \cdots A_x} \right].$$

Wenn für $x \geqq 0$ die Funktion A_x nicht verschwindet, so darf $a = 0$ genommen werden.

15. Lineare Differenzengleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Form der allgemeinen Lösung der Gleichung:

27) „Markoff" p. 146–151.

28) Oeuvres, 4, p. 156 (Berlin Nouv. Mém. 6, 1775 [77]).

$$(67)\qquad z_{x+m} + p_1 z_{x+m-1} + p_2 z_{x+m-2} + \cdots + p_m z_x = 0$$

ist von der Natur der Wurzeln von:

$$(68)\qquad f(t) = t^m + p_1 t^{m-1} + p_2 t^{m-2} + \cdots + p_m = 0$$

abhängig.

Sind die Wurzeln von (68) $a_1, a_2, \ldots, a_m$ verschieden, dann ist die allgemeine Lösung:

$$(69)\qquad z_x = C_1 a_1^x + C_2 a_2^x + \cdots + C_m a_m^x.$$

Die $C_1, C_2, \ldots, C_m$ lassen sich durch $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}$ ausdrücken mit Hülfe der Relation:

$$(70)\qquad \begin{aligned} &C_1\varphi(a_1) + C_2\varphi(a_2) + \cdots + C_m\varphi(a_m) \\ &= q_1 z_{m-1} + q_2 z_{m-2} + \cdots + q_m z_0, \end{aligned}$$

wo:

$$(71)\qquad \varphi(t) = q_1 t^{m-1} + q_2 t^{m-2} + \cdots + q_{m-1} t + q_m.$$

Die Koeffizienten $q_1, q_2, \ldots, q_m$ können so gewählt werden, dass die linke Seite von (70) gleich C_1, oder $C_2, \ldots$ oder C_m wird.

Ist $a_1 = a_2 = a_3$ und sind die übrigen Wurzeln von (68) von einander und von a_1 verschieden, so ist die allgemeine Lösung:

$$(72)\qquad z_x = C_1 a_1^x + C_2 x a_1^{x-1} + C_3 x(x-1) a_1^{x-2} + C_4 a_4^x + \cdots + C_m a_m^x.$$

Zur Bestimmung der Konstanten dient die Relation:

$$(73)\qquad \begin{aligned} &C_1\varphi(a_1) + C_2\varphi'(a_1) + C_3\varphi''(a_1) + C_4\varphi(a_4) + \cdots + C_m\varphi(a_m) \\ &= q_1 z_{m-1} + q_2 z_{m-2} + \cdots + q_m z_0. \end{aligned}$$

Wenn die Koeffizienten von (67) reell sind und (68) komplexe Wurzeln hat, so kann man aus der Lösung (69) oder (72) das Imaginäre wegschaffen.

Es sei:

$$a_1 = a_2 = a_3 = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$
$$a_4 = a_5 = a_6 = r(\cos\alpha - i\sin\alpha);$$

die übrigen Wurzeln der Gleichung (68) sollen reell und verschieden sein. Dann ist die allgemeine Lösung:

$$(74)\qquad \begin{aligned} z_x &= (A_1 + A_2 x + A_3 x^2) r^x \cos(x\alpha) \\ &+ (B_1 + B_2 x + B_3 x^2) r^x \sin(x\alpha) \\ &+ C_7 a_7^x + \cdots + C_m a_m^x, \end{aligned}$$

wo $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_7, \ldots, C_m$ willkürliche Konstanten sind.

In anderen Fällen wird die allgemeine Lösung analog gebildet.

Nach Lösung von (67) kann mit Hülfe der Lagrange'schen Methode die vollständige Gleichung:

$$(75)\qquad y_{x+m} + p_1 y_{x+m-1} + p_2 y_{x+m-2} + \cdots + p_m y_x = Q_x$$

gelöst werden. Sie führt zu umständlichen Rechnungen, die erspart werden können, wenn:

$$Q_x = a^x(b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n) = a^x \cdot v_x$$

ist. In diesem Falle kann leicht eine partikuläre Lösung von (75) gefunden werden.

Es ist: $$y_x^0 = a^x \cdot u_x$$

eine partikuläre Lösung, wenn u_x eine ganze Funktion ist, die der Relation:

$$f(a) \cdot u_x + a f'(a) \Delta u_x + a^2 \frac{f''(a)}{1 \cdot 2} \Delta^2 u_x + \cdots + a^m \frac{f^{(m)}(a)}{1 \cdot 2 \cdots m} \Delta^m u_x = v_x$$

genügt. Es ist zweckmässig, die gegebene ganze Funktion v_x in die Form:

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} + \alpha_3 \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

zu bringen und u_x in derselben Form zu suchen[29]).

16. Anwendungen der Differenzengleichungen. Die Bestimmung der Koeffizienten von verschiedenen Entwicklungen führt zur Lösung der Differenzengleichungen[30]).

Die Koeffizienten der Gleichung:

$$(1+t)^x = 1 + A_x t + B_x t^2 + \cdots + K_x t^x$$

genügen den Differenzengleichungen:

$$\begin{aligned} A_{x+1} - A_x &= 1\ , & A_1 &= 1; \\ B_{x+1} - B_x &= A_x, & B_2 &= 1; \\ C_{x+1} - C_x &= B_x, & C_3 &= 1; \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

---

29) Über die Auflösung linearer Differenzengleichungen mit veränderlichen Koeffizienten siehe die genannten Lehrbücher und: *J. Binet*, Par. mém. 19 (1845), p. 639; *D. G. Zehfuss*, Zeitschr. Math. Phys. 3 (1858), p. 175; *S. Spitzer*, Arch. Math. Phys. 32 (1859), p. 334; 33 (1859), p. 415; *J. J. Sylvester*, Philos. Mag. (4) 24 (1862), p. 436; 37 (1869), p. 225; *J. Thomae*, Zeitschr. Math. Phys. 14 (1869), p. 349; 16 (1871), p. 146; *A. Cayley*, Quart. J. 14 (1877), p. 23 = Coll. papers, 10, p. 47; *Th. Muir*, Philos. Mag. (5) 17 (1884), p. 115.

Über Transformationen, die lineare Differenzengleichungen in lineare Differentialgleichungen überführen, und umgekehrt, vgl. man etwa *S. Pincherle*, Lomb. Rend. (2) 19 (1886), p. 559; über Konstruktionen von Integralen ersterer aus denen letzterer *H. Mellin*, Acta math. 9 (1886), p. 137; als Anwendung erscheinen bei *Mellin* Reduktionen von bestimmten Integralen auf Γ-Funktionen [II A 3, Nr. **12**].

Über *partielle* Differenzengleichungen s. die genannten Lehrbücher und ausserdem: *P. S. Laplace*, Par. Hist. 1779 [82] = Oeuvres 10, p. 1; *W. Walton*, Quart. J. 9 (1867), p. 108; *Ed. Combescure*, Par. C. R. 74 (1872), p. 454.

30) „Lacroix" 3, p. 217—222.

Wenn man $\cos t = u$ setzt, so ist:

$$\cos xt = A_x u^x + B_x u^{x-2} + C_x u^{x-4} + D_x u^{x-6} + \cdots.$$

Die Koeffizienten lassen sich aus den Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} A_{x+1} - 2A_x = 0, & A_1 = 1; \\ B_{x+1} - 2B_x = -A_{x-1}, & B_2 = -1; \\ C_{x+1} - 2C_x = -B_{x-1}, & C_4 = 1; \\ D_{x+1} - 2D_x = -C_{x-1}, & D_6 = -1; \\ \dots\dots\dots & \end{array}$$

bestimmen.

Aus der Relation:

$$\frac{1}{1 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3} = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \cdots + y_x t^x + \cdots$$

findet man für $y_0, y_1, y_2, \ldots$ bestimmte Werte. Es genügt y_0, y_1 und y_2 zu kennen; jedes y_x für $x > 2$ lässt sich aus:

$$y_{x+3} + p_1 y_{x+2} + p_2 y_{x+1} + p_3 y_x = 0$$

bestimmen. Die Zahlen:

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots$$

bilden eine *rekurrente Reihe*[31]), weil vier successive Glieder linear mit konstanten Koeffizienten verbunden sind.

In seinen Vorlesungen zeigte *P. L. Tschebyscheff* die folgende Anwendung der Differenzengleichungen.

Man soll bestimmen, wie gross die Anzahl der successiven Divisionen sein kann, um den grössten gemeinschaftlichen Teiler zweier Zahlen a und b zu finden [I C 1, Nr. **1**].

Es sei:

$$a = bq_1 + r_1, \quad b = r_1 q_2 + r_2, \ldots, \quad r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n, \quad r_n = 0.$$

Die Anzahl der Divisionen ist hier n.

Weil alle Quotienten grösser oder gleich 1 sind, so ist:

$$a \geqq b + r_1, \quad b \geqq r_1 + r_2, \ldots, r_{n-2} \geqq r_{n-1} + r_n, \quad r_n = 0.$$

Mit Hülfe der Zahlen:

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = y_0 + y_1 = 1, \quad y_3 = y_1 + y_2 = 2, \ldots$$

lassen sich diese Ungleichheiten in folgender Weise schreiben:

$$r_n = y_0, \quad r_{n-1} \geqq y_1, \quad r_{n-2} \geqq y_2, \ldots, b \geqq y_n.$$

Für $y_m > b$ ist $n < m$.

31) „Cantor" 3, p. 375 ff. Eine systematische Behandlung der rekurrenten Reihen giebt *M. d'Ocagne,* J. éc. polyt. cah. 64 (1894), p. 151.

Die Lösung der Gleichung:

$$y_{x+2} - y_{x+1} - y_x = 0 \quad (y_0 = 0,\ y_1 = 1)$$

ist:

$$y_x = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right].$$

Es genügt, dass m die Bedingung:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m > b$$

erfüllt. Daraus folgt der Satz von *G. Lamé: Die Anzahl der Divisionen, die auszuführen ist, um den grössten gemeinschaftlichen Teiler der Zahlen a und b ($a > b$) zu finden, ist kleiner als die fünffache Anzahl der Ziffern der Zahl b.*[32])

32) *Lamé* hat diesen Satz auf elementarem Wege bewiesen, Par. C. R. 19 (1844), p. 867.

(Abgeschlossen im April 1901.)

I F. NUMERISCHES RECHNEN

VON

R. MEHMKE

IN STUTTGART.

Inhaltsübersicht.

A. Genaues Rechnen.

Monographie: *J. Lüroth,* Vorlesungen über numerisches Rechnen, Leipzig 1900 („Lüroth").

A. Genaues Rechnen.

In diesem Abschnitt sollen allein Verfahren und Hülfsmittel zur Ausführung von Zahlenrechnungen, die von dem Ergebnis eine beliebige Anzahl genauer Ziffern zu finden gestatten, besprochen werden.

I. Das Rechnen ohne besondere Vorrichtungen.

Die bei uns jetzt allgemein übliche, weil in den Schulen gelehrte Art, beim schriftlichen Rechnen die „vier Spezies", namentlich die Multiplikation und Division auszuführen[1]), ist wohl am leichtesten zu lernen, aber nicht die unbedingt vorteilhafteste. Dem Bestreben, entweder die Schreibarbeit zu vermindern und die Schnelligkeit aufs höchste zu steigern, oder das Rechnen möglichst zu erleichtern, oder sonst einen bestimmten Zweck zu erreichen, sind die Verfahren entsprungen, die wir im folgenden zu betrachten haben.

---

1) Sie setzt nur die Fähigkeit voraus, einziffrige Zahlen im Kopfe zu addieren, zu subtrahieren und mit einander zu multiplizieren. Addition und Subtraktion werden bei derselben immer, die Multiplikation in der Regel von rechts nach links ausgeführt, d. h. bei den Ziffern niedersten Ranges begonnen; das Subtrahieren geschieht entweder durch ziffernweises Abziehen des Subtrahenden vom Minuenden, oder aber durch Hinzuzählen zum Subtrahenden (Subtrahieren durch Ergänzen: auch beim Dividieren in Betracht kommende sog. östreichische Rechenmethode, vgl. *A. Sadowski,* Die östreichische Rechenmethode . . ., Progr. Altst. Gymn. Königsberg i. Pr. 1892); beim Multiplizieren werden der Reihe nach die Produkte des Multiplikanden mit den einzelnen Ziffern des Multiplikators gebildet, in richtiger Stellung untereinander geschrieben und addiert, beim Dividieren die Produkte des Divisors mit den einzelnen Ziffern des Quotienten von den Partialdividenden subtrahiert, die Reste darunter geschrieben.

1. Geordnete Multiplikation und Division. Die Ziffern zweier dekadisch geschriebenen[2]) Zahlen und ihres Produkts seien (bei den Einern angefangen) $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots$, und $c_0, c_1, c_2, \ldots$[3]). Dann ist

$$c_0 + c_1 \cdot 10 + c_2 \cdot 10^2 + \cdots = (a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots)(b_0 + b_1 \cdot 10 + b_2 \cdot 10^2 + \cdots)$$
$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) \cdot 10 + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) \cdot 10^2 + \cdots.$$

Also wird c_0 durch die Einer von $a_0 b_0$ geliefert; man muss die von $a_0 b_0$ etwa übrig gebliebenen Zehner, als Einer aufgefasst, zu $(a_0 b_1 + a_1 b_0)$ addieren und von der Summe die Einer nehmen, um c_1 zu erhalten u.s.w. Auf diese Weise ist es möglich, von dem Produkt zweier Zahlen Ziffer um Ziffer zu finden, ohne dass man nötig hat, irgend ein Zwischenergebnis zu schreiben, wenn man im Stande ist, zweistellige Zahlen im Kopfe zu addieren[4]). Praktisch wertvoll ist eine auf *J. Fourier*[5]) (wenn nicht weiter) zurückgehende Bemerkung: Hält man

---

2) D. h. in unserem gewöhnlichen Zahlensystem mit der Grundzahl (Basis) 10. Ist B die Grundzahl, so hat die, $\ldots a_3 a_2 a_1 a_0,\ a_{-1} a_{-2} \ldots$ geschriebene Zahl den Wert

$$\cdots a_3 \cdot B^3 + a_2 \cdot B^2 + a_1 \cdot B + a_0 + \frac{a_{-1}}{B} + \frac{a_{-2}}{B^2} + \cdots$$

Über vom dekadischen abweichende Zahlensysteme, von denen man Spuren bei einzelnen Völkern gefunden hat, s. *H. Hankel,* Zur Gesch. der Math., Leipz. 1874, p. 20, sowie *M. Cantor,* Vorl. üb. Gesch. der Math. 1, 2. Aufl., Leipzig 1894, p. 8f. Es besteht die Thatsache, dass unser Zahlensystem *nicht* das für das Rechnen geeignetste ist, weshalb wiederholt, selbst in neuester Zeit, vorgeschlagen worden ist, ein Zahlensystem mit anderer Basis — am geeignetsten wäre 12 oder 8, aber auch 16 und 6 haben Fürsprecher gefunden — zu benützen. Über die Geschichte dieser Bestrebungen vgl. *E. Ullrich,* Das Rechnen mit Duodezimalzahlen, Progr. Realsch. Heidelberg 1891. Weitere Litteratur: *John W. Nystrom,* Project of a new system of arithmetic . . . with sixteen to the base, Philadelphia 1862; *W. Woolsey Johnson,* Octonary numeration, New York Bull. M. Soc. 1, 1891/92, p. 12; *E. Gelin,* Du meilleur système de numération . . ., Mathésis (2) 6 (1896), p. 161. S. auch Intermédiaire des mathématiciens 6 (1899), p. 133—135.

3) Blos der Einfachheit wegen sind hier ganze Zahlen vorausgesetzt; bei der Multiplikation von Dezimalbrüchen lässt man das Komma zunächst ausser Acht und setzt es nachträglich an die richtige Stelle.

4) Diese Methode, die schon den Indern, welche sie die „blitzbildende" nannten, im 6. Jahrh. n. Chr. bekannt war und die im Mittelalter unter dem Namen „kreuzweise Multiplikation" auch bei uns geübt wurde (s. etwa *M. Cantor,* Vorl. üb. Gesch. der Mathem., insbes. Bd. 1, p. 571; Bd. 2, 2. Aufl., Leipzig 1900, p. 9), ist im 19. Jahrhundert des öfteren wieder entdeckt und mit verschiedenen Namen (z. B. symmetrische Multiplikation, kolligierende Multiplikation) belegt worden.

5) Analyse des équations déterminées, Paris 1830, p. 190. Vorbereitet durch die Regel von *W. Oughtred,* s. Nr. 25, Anm. 216.

den mit verkehrter Ordnung der Ziffern auf ein besonderes Blatt geschriebenen Multiplikator so über den Multiplikanden, dass die Einerziffer des ersteren über die Ziffer mit dem beliebigen Range i kommt und multipliziert je zwei alsdann über einander befindliche Ziffern, so ergeben sich die jenem Range entsprechenden Teilprodukte[6]), z. B.

$$\begin{array}{rl} \text{verkehrter Multiplikator:} & \quad\; b_0\, b_1\, b_2 \ldots \\ \text{Multiplikand:} & \ldots a_3\, a_2\, a_1\, a_0 \\ \hline \text{Teilprodukte vom Range } i = 2: & a_0 b_2,\; a_1 b_1,\; a_2 b_0. \end{array}$$

Die Umkehrung dieses Multiplikationsverfahrens bildet die von *J. Fourier* für Zwecke der Auflösung numerischer Gleichungen [I B 3 a, bes. Nr. 9] erfundene *geordnete Division*[7]), die zwar grössere Übung und Aufmerksamkeit erfordert, als die gewöhnliche, aber den Vorzug hat, dass von dem Divisor immer nur so viele Ziffern benützt werden, als jedesmal nötig sind, um die nächste Ziffer des Quotienten mit Sicherheit zu erhalten.

2. Komplementäre Multiplikation und Division. Das Produkt zweier Zahlen lässt sich manchmal bequemer als auf andere Art nach der Regel[8]) finden: Man zerlege die Summe der beiden Zahlen in zwei Teile, deren Produkt leicht gefunden werden kann und füge diesem Produkt dasjenige der Differenzen aus den gegebenen Zahlen und einem der Teile hinzu. Ist nämlich

$$a + b = a' + b',$$

6) Diese „Papierstreifenmethode" ist überall nützlich, auch beim Rechnen mit Buchstaben, wo man es mit nach Potenzen einer Grösse geordneten Reihen zu thun hat, z. B. in der Theorie der algebraischen Zahlen [I C 4 a].

7) Analyse des équations déterminées, Paris 1830, p. 188; s. auch z. B. *A. Cauchy-C. Schnuse,* Vorlesungen über Differentialrechnung, Braunschweig 1836, Anhang, p. 327; „Lüroth" § 17 flg. Einige der Anfangsziffern des Divisors werden durch Überstreichen als „bezeichneter Divisor" abgesondert; ist hierzu blos eine Ziffer genommen, so unterscheidet sich das Verfahren (das sich nicht in Kürze beschreiben lässt) nur äusserlich — die Reste der Partialdividenden werden unterwärts, nicht überwärts geschrieben — von der häufig verkannten indisch-mittelalterlichen Divisionsmethode. Fast ganz mit letzterer stimmt die „symmetrische Division" von *C. J. Giesing* (Neuer Unterricht in der Schnellrechenkunst, Döbeln 1884) überein, nur dass *Giesing* die nötigen Subtraktionen im Kopfe ausführt. Abgesehen von der Verallgemeinerung der Methode hat *Fourier* das Verdienst, ein Kennzeichen dafür gegeben zu haben, ob die jeweils gefundene Ziffer des Quotienten zuverlässig ist.

8) Nach *A. Cauchy* (Par. C. R. 20, 1845, p. 280) = Oeuvres (1) 9, p. 5, der diese Regel in den Par. C. R. 11 (1840), p. 789 = Oeuvres (1) 5, p. 431 aufgestellt hatte, kommt sie in einem Buche von *Berthevin* über die Anwendung der Komplemente in der Arithmetik (1823) vor.

so hat man

$$ab = a'b' + (a - a')(b - a') = a'b' + (a - b')(b - b').$$

Während diese und ähnliche Methoden komplementärer Multiplikation, von denen sich schon im römischen und griechischen Altertum Spuren finden[9]), nur gelegentlich Vorteil bringen, ist die komplementäre Division von allgemeiner Anwendbarkeit. Römischen Ursprungs und im Mittelalter viel geübt[10]), ist sie von *A. L. Crelle*[11]) wieder vorgeschlagen und verbessert worden. Auf Grund des Gedankens, dass Additionen leichter und sicherer zu vollziehen sind, als Subtraktionen, wird statt des Divisors, dessen Produkte mit den einzelnen Ziffern des Quotienten man beim gewöhnlichen Verfahren nach und nach vom Dividenden abzuziehen hat, die Ergänzung des Divisors entweder zur nächst höheren Potenz von 10 oder zur nächst höheren Zahl mit einer einzigen geltenden Ziffer genommen, wodurch die Subtraktionen sich in Additionen verwandeln[12]).

3. Umgehung der Division. Zur Verwandlung echter Brüche in Dezimalbrüche hat *A. Cauchy*[13]) folgende Regel gegeben: Nachdem auf gewöhnliche Weise die zwei oder drei ersten Ziffern gefunden sind, multipliziere man die erhaltene Gleichung wiederholt mit dem Rest und kombiniere die neuen Gleichungen mit der ursprünglichen. Man bekommt so bei jedem neuen Schritt ungefähr doppelt so viele genaue Ziffern, als vorher bekannt waren. Beispiel:

$$\frac{1}{7} = 0{,}14\frac{2}{7}.$$

Diese Gleichung mit dem Rest 2 wiederholt multipliziert, giebt

$$\frac{2}{7} = 0{,}28\frac{4}{7}, \quad \frac{4}{7} = 0{,}56\frac{8}{7} = 0{,}57\frac{1}{7},$$

somit

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\,142857\ldots$$

---

9) *M. Cantor,* Vorl. üb. Gesch. der Mathem. 1, p. 404, 492, 739, 855; 2, p. 65 und Register.

10) *M. Cantor,* Vorl. üb. Gesch. der Mathem. 1, p. 544, 817 und Register.

11) J. f. Math. 13 (1835), p. 209.

12) Man kann, ähnlich wie bei der „östreichischen Rechenmethode“ (Anm. 1), das Schreiben der Partialprodukte ersparen, indem man letztere sofort, während man sie bildet, im Kopfe addiert, aber es besteht dann derselbe Nachteil, dass, wenn im Quotienten die gleiche Ziffer mehrmals auftritt, das betreffende Partialprodukt ebenso oft auszurechnen ist.

13) Par. C. R. 11 (1840), p. 847 = Oeuvres (1) 5, p. 443; *Cauchy* geht von dem Gedanken aus, dass die *Newton*'sche Annäherungsmethode zur Auflösung numerischer Gleichungen [s. I B 3 a, Nr. 10] schon bei linearen Gleichungen angewendet werden kann.

Nachdem für die Division mit gewissen Zahlen, wie 9, mehrfach besondere Regeln gegeben worden waren, hat *J. Fontès*[14]) allgemein die Frage untersucht, in wie weit die arithmetische Division entbehrlich ist, d. h. wie Quotient und Rest der Division einer beliebigen Zahl durch eine andere bei geeigneter Beschaffenheit der letzteren durch einfachere Operationen direkt gefunden werden können.

4. Beschränkung in den verwendeten Ziffern. Zur Vereinfachung der Multiplikation hat *A. Cauchy*[15]) vorgeschlagen, mindestens im Multiplikator statt der Ziffern 6, 7, 8, 9 ihre negativen Ergänzungen zu 10 einzuführen[16]), sodass man nur Multiplikationen mit $2, 3, 4 = 2 \cdot 2$ und $5 = \frac{10}{2}$ vorzunehmen oder eigentlich nur noch mit 2 und 3 zu multiplizieren und mit 2 zu dividieren hat. Bei der Addition und Subtraktion ist der Gebrauch negativer Ziffern von geringem Nutzen, bei der Division im allgemeinen nicht zu empfehlen. Nach *Ed. Collignon*[17]) lässt sich die Multiplikation zweier Zahlen auch erleichtern durch die (höchstens drei Glieder erfordernde) Zerlegung des einen Faktors in Zahlen, die nur aus den Ziffern 0, 1, 2, 5 zusammengesetzt sind (z. B. $7289795 = 5200005 + 2100000 - 10210 = 5255555 + 2022220 + 12020$).

II. Numerische Tafeln[18]).

5. Produktentafeln. Sie werden auch Pythagoräische Tafeln genannt und haben zwei Eingänge für die Zahlen x und y, deren

14) Assoc. franç. 21^2, Pau 1892, p. 182. *Fontès* erläutert sein Verfahren an der Division durch 99, 37 und 499.

15) Par. C. R. 11 (1840), p. 796 = Oeuvres (1) 5, p. 438.

16) Die negativen Ziffern werden überstrichen. Die nötige Umwandlung einer Zahl geschieht, indem man rechts anfangend jede Ziffer, die grösser als 5 ist, durch ihre Ergänzung zu 10 mit einem Strich darüber ersetzt und die links davon stehende Ziffer um 1 erhöht, z. B. $187647 = 2\bar{1}\bar{2}\bar{4}5\bar{3}$. *E. Selling* (Eine neue Rechenmaschine, Berlin 1887, p. 16) empfiehlt, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, . . . zu lesen: misseins, mizwei, midrei . . ., oder auch: abeins, abzwei, abdrei u. s. w.

17) Annales ponts chaussées (7) 5 (1893), 1. sém., p. 790. Ein ähnliches Verfahren scheinen übrigens nach *M. Cantor,* Vorl. üb. Gesch. der Mathem. 1, p. 570, schon die Inder gekannt zu haben.

18) Es wird nur von Hülfstafeln die Rede sein, die das Rechnen im allgemeinen zu erleichtern bestimmt sind, dagegen z. B. nicht von Tafeln für die besonderen Zwecke der Zahlentheorie [s. I C]. Monographien: *A. De Morgan* English Cyclopaedia, London 1861, Artikel „Tables“; *J. W. L. Glaisher,* Report of the Committee on mathematical tables (Brit. Assoc. Report 1873), London 1873.

Produkte xy sie enthalten. Wie in den vorhergehenden Jahrhunderten, bilden sie noch immer das verbreitetste Erleichterungsmittel des Zahlenrechnens; in der Regel sind sie bei Multiplikation und Division gleich gut verwendbar. Ganz abgesehen von den für Unterrichtszwecke bestimmten „Einmaleinstafeln" giebt es schon solche, bei denen ein Faktor einstellig ist, der andere nur bis Hundert geht[19]. Bis 10×10000 reichten von älteren bereits eine Tafel von *J. Dodson* (1747)[20], von neueren zeigen diesen Umfang diejenigen von *R. Picarte* (1861?)[21] und *Th. v. Esersky* (5. Ausg. 1874)[22]. Die obere Grenze 10×100000 haben *C. A. Bretschneider* (1841)[23], *S. L. Laundy* (1865)[24] und *G. Diakow* (1897)[25] gewählt, während am weitesten in dieser Richtung, bis 10×10000000, *A. L. Crelle* in seiner wenig bekannten „Erleichterungstafel" geht[26], wenn wir von einer in der Anwendung sehr umständlichen Tafel *Ch. Z. Slonimsky*'s[27] mit völlig anderer Einrichtung absehen, bei der die Zahl der Ziffern des zweiten Faktors unbegrenzt ist.

Den grössten Ruf geniessen mit Recht *A. L. Crelle*'s „Rechentafeln"[28], die alle Produkte bis 1000×1000 in zweckmässiger An-

19) Z. B. die „kleine Produktentafel" der königl. preuss. Landesaufnahme, trigonom. Abteilung, Berlin 1897.

20) In „The calculator", London.

21) „Tables de multiplication", s. *Glaisher* a. a. O. p. 34.

22) „Ausgeführte Multiplikation und Division", St. Petersburg u. Leipzig. Ein Anhang gestattet noch, den zweiten Faktor bis 1111111 auszudehnen.

23) „Produktentafel...", Hamburg u. Gotha.

24) „A table of products...", London.

25) „Multiplikations-Tabelle", St. Petersburg. Sie umfasst 1000 S. quer Quart, so viel wie die 100mal so weit reichende „Erleichterungstafel" von *Crelle*[26], *Laundy*'s Tafel nur 10 S., *Bretschneider*'s (ähnlich wie *Crelle*'s eingerichtete) 100 S.

26) Berlin 1836. Interessant ist die Vorrede, der zufolge beim Druck der Tafel kein Manuskript benützt worden ist.

27) Dem J. f. Math. 30 (1846) beigefügt; ebenda p. 215 *Crelle*'s Erklärung und Beweis des zu Grunde liegenden arithmetischen Satzes. Vgl. auch Anm. 96.

28) Sie erschienen zuerst 1820 in zwei Oktavbänden von etwa 900 S.; die 2., von *C. Bremiker* besorgte Ausgabe, Berlin 1857 (7. Ausg. 1895, deutsch u. französisch, 1. englische Ausg. 1897), besteht nur noch aus einem Band mit 450 S. klein Folio. Auf jeder halben Seite befinden sich die Produkte der am Kopfe stehenden (1-, 2- oder 3-ziffrigen) Zahl mit den Zahlen von 1—999, wobei leider die durch 10 teilbaren Faktoren nicht berücksichtigt sind. Die Raumersparnis gegenüber der ersten Ausgabe rührt wesentlich daher, dass die zwei letzten, den Produkten einer und derselben Reihe gemeinschaftlichen Ziffern abgetrennt und in eine besondere Spalte gesetzt worden sind. *Crelle*'s Fortschritt ist ein rein technischer, denn die zwar noch sehr unhand-

ordnung geben. Wenn in einer Produktentafel die beiden Faktoren zur gleichen Höhe ansteigen, kommt jedes Produkt zweimal vor und die Tafel nimmt daher nur halb soviel Raum ein, wenn man jedes Produkt nur einmal schreibt. Diesen Gedanken haben *C. Cario-H. C. Schmidt*[29]) und *A. Henselin*[29]) zur Ausführung gebracht[30]). In manchen Fällen erweisen sich Produktentafeln bequemer, bei denen ein Faktor sich nur von 1—100 erstreckt, der andere von 1—1000[31]). Es gab solche schon im 18. Jahrhundert, z. B. von *Ch. Hutton*[32]); neuere Tafeln dieser Art sind die von *C. L. Petrick*[33]), *H. Zimmermann*[34]), *C. A. Müller*[35]) und *L. Zimmermann*[36]), während in einer

---

lichen Tabulae arithmeticae ΠΡΟΣΘΑΦΑΙΡΕΣΕΩΣ universales des *Herwarth von Hohenburg* aus dem Jahre 1610 (Beschreibung und Probe z. B. in *Fr. Unger,* Methodik der prakt. Arithmetik, Leipzig 1888, p. 127) hatten schon dieselbe Ausdehnung.

29) „Zahlenbuch", entworfen von *C. Cario,* ausgeführt u. s. w. von *H. C. Schmidt,* Aschersleben 1896; *A. Henselin,* „Rechentafel", Berlin 1897. Um das durch die veränderte (bei der letzteren Tafel wohl am wenigsten gelungene) Einrichtung erschwerte Aufsuchen wieder einigermassen zu erleichtern, sind „Registerzettel" angebracht. Dem Vorteile, weniger Raum zu beanspruchen, steht bei diesen Tafeln ein (bei längeren Divisionen fühlbarer) Nachteil gegenüber: die Vielfachen einer und derselben Zahl sind in der Regel durch die ganze Tafel zerstreut, statt wie bei *Crelle* auf einer halben Seite bei einander zu stehen.

30) In kleinerem Umfange, wie es scheint, bereits *R. Picarte* (1861?); vgl. den von *Glaisher* (Anm. 18), p. 34 angeführten Titel: „Tableau Pythagorique, étendu jusqu'à 100 par 100, sous une nouvelle forme qui a permis de supprimer la moitié des produits".

31) In der Mitte zwischen diesen und *Crelle*'s Tafeln stehen einige von kunstloser Anordnung, bei denen der eine Faktor bis rund 500 anwächst, z. B. die 1860 in Oldenburg ohne Verfassernamen erschienenen „Multiplikationstabellen aller Zahlen von 1 bis 500", in deren Vorrede auf ein französisches Vorbild aus dem J. 1805 hingewiesen wird, ferner *Oyon,* Tables de multiplication, 5ème éd., Paris 1886 (2 Bde; im 1. geht der Multiplikand von 2—500, im 2. von 501—1000).

32) Tafel 1 der „Tables of the products and powers of numbers...", London 1781.

33) „Multiplikationstabellen, geprüft mit der Thomas'schen Rechenmaschine...", erste Lieferung 1—1000, Libau 1875. In den folgenden Lieferungen ist der zweite Faktor von 1001—2000, 2001—3000 u. s. w. fortgeführt.

34) „Rechentafel...", Berlin 1889.

35) „Multiplikations-Tabellen...", Karlsruhe 1891. Sie sind viel handlicher als 34), weil eine ähnliche Anordnung, wie bei *Crelle*'s Rechentafeln benützt ist.

36) „Rechen-Tafeln", Liebenwerda 1895. Durch Absonderung der drei letzten Ziffern der Produkte ist grosse Kürze erreicht — 10 Doppelseiten, statt (wie bei den vorhergehenden Tafeln) deren 100 — aber die Produkte können selten fertig der Tafel entnommen werden, sondern es muss der Überschuss der Hunderter,

grösseren Tafel von *L. Zimmermann*[37]) und derjenigen von *J. Riem*[38]) beim einen Faktor ebenfalls 100, beim anderen 10000 als obere Grenze genommen ist. Wegen einer Art von zusammensetzbaren Produktentafeln vgl. Nr. 12 (Apparate von *Slonimsky, Jofe* und *Genaille*).

6. (Multiplikationstafeln mit einfachem Eingang:) Tafeln der Viertelquadrate und der Dreieckszahlen. *P. S. Laplace* hat die Frage aufgeworfen, wie durch Benützung von Tafeln mit einfachem Eingang die Multiplikation auf Addition und Subtraktion zurückgeführt werden könne[39]). Er denkt sich xy aus einem oder mehreren Gliedern der Form $\varphi(X \pm Y)$ gebildet, wo X eine Funktion von x allein, Y eine Funktion von y allein bedeutet. Die Annahme $xy = \varphi(X+Y)$ führt zu den Logarithmen [s. Nr. 27], während die Annahme $xy = \varphi(X+Y) - \varphi(X-Y)$ einerseits die Lösung

$$xy = \frac{1}{2}[\cos(X-Y) - \cos(X+Y)]$$

mit $x = \sin X$, $y = \sin Y$ ergiebt, auf der die, vor der Erfindung der Logarithmen benützte prosthaphäretische Methode[40]) beruht, andererseits die Lösung[41])

$$xy = \frac{1}{4}[(x+y)^2 - (x-y)^2].$$

---

der bis zu 9 Einheiten betragen kann, im Kopfe addiert werden, wodurch die Sicherheit und Schnelligkeit der Rechnung bedeutend leidet.

37) „Rechentafeln...“, grosse Ausgabe, Liebenwerda 1896. Die vier letzten Ziffern der Produkte sind abgesondert; zuweilen ist eine Erhöhung der vorhergehenden Ziffer, aber nur um eine Einheit, nötig.

38) „Rechentabellen für Multiplikation und Division“, Basel 1897. Die Produkte sind in drei Teile zerlegt. Durch Benützung von Proportionalteilen können auch die Produkte von 2-ziffrigen mit 5-ziffrigen Zahlen gefunden werden. Der Hauptunterschied zwischen 37) und 38) besteht darin, dass jede Doppelseite in letzterer Tafel die Produkte der am Kopf stehenden 2-ziffrigen mit allen 1- bis 4-ziffrigen Zahlen enthält, in ersterer die Produkte aller 1- und 2-ziffrigen mit hundert, dieselben Mittelziffern enthaltenden 4-ziffrigen Zahlen. Bei der Division mit 2-ziffrigen Zahlen sind deshalb wohl die letzteren, bei derjenigen mit 3- oder 4-ziffrigen Zahlen die ersteren vorteilhafter.

39) Sur la réduction des fonctions en tables, J. éc. pol. 8, cah. 15 (1809), p. 258.

40) S. *M. Cantor,* Vorl. üb. Gesch. der Mathematik 2, p. 454; *A. v. Braunmühl,* Zeitschr. Math. Phys. 44, 1899, Suppl. p. 15.

41) *J. J. Sylvester* hat im Phil. Mag. (4) 7 (1854), p. 430 die Ausdehnung der zweiten Formel, *J. W. L. Glaisher* ebenda (5) 6 (1878), p. 331 diejenige der ersten auf n Faktoren gegeben (weniger allgemein beide Arten von Formeln schon bei *J. D. Gergonne,* Ann. de math. 7 (1816/1817), p. 157). Im Falle $n = 3$ ist z. B.

Den Gebrauch dieser Formel unter Zuhülfenahme einer Quadrattafel hatte schon 1690 *L. J. Ludolff*[42]) gelehrt; eine Vereinfachung, der Schreibweise

$$xy = \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4}$$

entsprechend, brachten die Tafeln der Viertelquadrate[43]). Eine solche, bis zum Argument 20000 gehende Tafel gab zuerst *A. Voisin* 1817 heraus[44]). Ebenso weit reichten die Tafeln von *J. A. P. Bürger*[45]), und *J. J. Centnerschwer*[46]), dagegen bis 30000 die von *J. Ph. Kulik*[47]), bis 40000 die von *J. M. Merpaut*[48]), bis 100000 die von *S. L. Laundy*[49]). Die beste Tafel der Viertelquadrate hat *J. Blater* herausgegeben[50]). Sie geht bis 200 000, liefert also noch die Produkte 5-ziffriger Faktoren bis auf die letzte Stelle genau. Eine derartige Tafel wird nämlich in Stand setzen, zwei Zahlen mit n Ziffern zu multiplizieren, wenn ihre Summe, deren obere Grenze $2 \cdot 10^n$ beträgt, sich noch im Eingang der Tafel findet. Nach *J. W. L. Glaisher*[51]) leistet eine halb so umfangreiche Tafel der Dreieckszahlen dieselben Dienste; denn ist T_x die zu x gehörige Dreieckszahl, d. h. $T_x = \frac{1}{2}x(x+1)$, so hat man

$$xy = T_x + T_{y-1} - T_{x-y} = T_{x-1} + T_y - T_{x-y-1},$$

$$24\,abc = (a+b+c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3 - (a+b-c)^3,$$

sowie

$$4 \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c$$
$$= \sin(b+c-a) + \sin(c+a-b) + \sin(a+b-c) - \sin(a+b+c),$$

oder

$$4 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c$$
$$= \cos(a+b+c) + \cos(b+c-a) + \cos(c+a-b) + \cos(a+b-c).$$

42) „Tetragonometria Tabularia", Lipsiae 1690.

43) Der bei ungeradem Argument auftretende Bruch $\frac{1}{4}$ wird immer weggelassen, sodass die eigentlich dargestellte Funktion unstetig ist, nämlich $f(2x) = x^2$, $f(2x+1) = x^2 + x$.

44) „Tables des multiplications...", Paris 1817.

45) „Tafeln zur Erleichterung in Rechnungen...", Karlsruhe 1817.

46) „Neu erfundene Multiplikations- und Quadrat-Tafeln", Berlin 1825.

47) „Neue Multiplikationstafeln", Leipzig 1852.

48) „Tables Arithmonomiques", Vannes 1832 (Arithmonome = Viertelquadrat).

49) „Table of Quarter-squares...", London 1856.

50) „Tafel der Viertel-Quadrate", Wien 1887. Durch verschiedene Kunstgriffe in der Anordnung hat sie auf 200 Quartseiten zusammengedrängt werden können; eine dasselbe leistende Produktentafel nach Art der *Crelle*'schen würde 10 000 Foliobände umfassen.

51) Nature 40 (1889), p. 575.

in welcher Formel kein grösseres Argument, als die grössere der gegebenen Zahlen vorkommt[52]). Eine für diese Anwendung bestimmte Tafel der Dreieckszahlen von 1—100000 hat *A. Arnaudeau*[53]) berechnet. Zum Dividieren eignen sich die Tafeln der Viertelquadrate und der Dreieckszahlen nicht.

7. Quotienten- und Divisionstafeln. Tafeln zur Verwandlung gemeiner echter Brüche, die nicht bei einer bestimmten Anzahl von Dezimalen stehen bleiben (über derartige s. Nr. **33**), sondern jedesmal die Periode des Dezimalbruchs vollständig enthalten, giebt es von *F. W. C. Bierstedt*[54]), *H. Goodwyn*[55]) und *K. Fr. Gauss*[56]).

Unter dem Namen „Tafeln der konstanten Ziffern" hat *F. Calza*[57]) Hülfstafeln im Entwurf bekannt gegeben, die das Dividieren mit 3- und 4-ziffrigen Zahlen auf unbedeutende Additionen und Subtraktionen zurückführen, ja noch bei 5- bis 12-ziffrigem Divisor anwendbar sind.

---

52) *Laplace* (Anm. 39) kennt diese Lösung nicht. Sie hat den Mangel, dreimaliges Eingehen in die Tafel nötig zu machen, um welchen Preis, wie *Glaisher* selbst bemerkt, mit einer Tafel der Viertelquadrate oder noch besser der halben Quadrate dasselbe zu erreichen wäre, wenn man die Formel

$$ab = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}(a-b)^2$$

zu Grunde legte.

53) Bis jetzt ist nur ein Bruchstück mit Erläuterungen unter dem Titel „Tables de triangulaires de 1 à 100000 . . .", Paris 1896, veröffentlicht. Die einzige ältere Tafel scheint die von *E. de Joncourt,* De natura et praeclaro usu simplicissimae speciei numerorum trigonalium . . ., Hagae Comitum 1762, zu sein, welche bis 20000 geht.

54) „Dezimalbruch-Tabellen . . .", 1. Teil, die Brüche vom Nenner 1 bis zum Nenner 300 enthaltend (mehr nicht erschienen), Fulda 1812.

55) „Table of circles . . .", London 1823; giebt nur die Ziffern der Periode, die bei der Division einer ganzen Zahl durch eine ganze Zahl unter 1024 auftritt: sie wird durch die „Tabular series of decimal quotients . . ." (8-stellig), London 1823, ergänzt. S. *Glaisher* (Anm. 18) p. 31, wo auch zwei kleinere Tafeln desselben Verfassers aus dem J. 1816 besprochen sind.

56) „Tafel zur Verwandlung gemeiner Brüche mit Nennern aus dem ersten Tausend in Dezimalbrüche", Werke 2, p. 412—434, Göttingen 1863. Zum Gebrauch der Tafel sind Kenntnisse aus der (elementaren) Zahlentheorie nötig. Ein Teil findet sich als tabula III in den Disqu. arithm., Lipsiae 1801 (s. *K. Fr. Gauss'* Untersuchungen über höhere Arithmetik, deutsch hrsg. von *H. Maser,* Berlin 1889); woselbst in Art. 316 die Erklärung.

57) „Saggio di calcolazione rapida per mezzo delle tavole delle cifre costanti", Napoli, Bideri (1893?). Eine Probe nebst Erklärung giebt *G. C. Baravelli,* Nota su alcuni aiuti alla esecuzione dei calcoli numerici, Roma 1895, p. 19; in verbesserter, auch zur Multiplikation geeigneter Form in Zeitschr. Math. Phys. 44 (1899), p. 50.

8. Tafeln der Quadrate, Kuben und höheren Potenzen. Tafeln der Quadrate aller ganzen Zahlen bis zu einer gewissen Höhe, mit denen gewöhnlich Tafeln der Kuben in mehr oder weniger enger Verbindung zusammen vorkommen[58]), sind fast so alt und zahlreich wie Produktentafeln. In vielen Tafelsammlungen und Taschenbüchern[59]) findet man (um von noch kleineren Tafeln abzusehen) die Quadrate und Kuben der Zahlen bis 1000, in nicht wenigen Tafeln auch bis 10000[60]). Bis zum Quadrat von 27000 und Kubus von 24 000 ging *G. A. Jahn*[61]). Die ausgedehntesten Tafeln dieser Art haben wir von *J. Ph. Kulik*[62]); sie enthalten die Kuben sowohl als die Quadrate aller 1- bis 5-ziffrigen Zahlen, gehen also, was die Quadrate betrifft, zwar nicht über *L. J. Ludolff*'s Tetragonometria tabularia[42]), bei den Kuben dagegen über die früheren Tafeln bedeutend hinaus. Quadrate bis zur gleichen Höhe können auch mittelst der Tafel der Viertelquadrate von *J. Blater*[50]) sehr leicht bestimmt werden. *E. Duhamel*[63]) hat ein Tableau herausgegeben, das die Quadrate der Zahlen bis Tausend direkt, diejenigen der Zahlen bis 1 Milliarde mittelst weniger Additionen und Subtraktionen finden lässt.

Den höheren Potenzen von 2, 3 und 5 sowie den ersten 9 oder 10 Potenzen der Zahlen von 1 bis 100 begegnet man in mehreren Tafelsammlungen: erstere hat z. B. *G. Vega*[64]) und in Entlehnung von ihm *J. Hülsse*[65]) bis 2^{45}, 3^{36}, 5^{27}, letztere ausser den genannten

58) Auch Tafeln der Quadrat- und Kubikwurzeln; über diese, wie über Tafeln der auf eine bestimmte Zahl von Stellen verkürzten Quadrate oder höheren Potenzen s. Nr. **34** u. **35**.

59) Z. B. in *J. A. Hülsse,* Sammlung mathem. Tafeln, Leipzig 1840 und dem „Taschenbuch der Mathematik“ von *W. Ligowski,* Berlin 1867, 3. Aufl. 1893.

60) Wegen ihrer Korrektheit hervorgehoben werden z. B. die dem „Manuel d'Architecture...“ von *M. Séguin* aîné (Paris 1786) angehängten, sowie die „Tables of squares, cubes...“ von *P. Barlow,* London 1840. Die ältesten Quadrat- und Kubiktafeln dieses Umfangs scheinen die dem Werke „De centro gravitatis“ von *P. Guldin,* Viennae 1635, beigefügten zu sein.

61) „Tafeln der Quadrat- und Kubikwurzeln aller Zahlen von 1 bis 25500, der Quadratzahlen aller Zahlen von 1 bis 27000, der Kubikzahlen aller Zahlen von 1 bis 24000“, Leipzig 1839.

62) „Tafeln der Quadrat- und Kubik-Zahlen aller natürlichen Zahlen bis Hunderttausend...“, Leipzig 1848. Die Eingänge sind für die Quadrat- und Kubikzahlen, welche neben einander stehen, gemeinsam. Die sehr gedrängte Anordnung hat mit der von *Crelle*'s Rechentafeln[28]) Ähnlichkeit.

63) „Carrés et racines carrées“, Marseille, Barthelet et Co., ohne Jahreszahl (1896?).

64) „Logarithmisch-trigonometrische Tafeln“ 2, 2. Aufl., Leipzig 1797.

65) „Sammlung mathematischer Tafeln“, Leipzig 1840. Die Potenzen von

Ch. Hutton[32]) und *P. Barlow*[66]). Eine besondere Tafel der 12 ersten Potenzen der Zahlen von 1 bis 1000, von *J. W. L. Glaisher*[67]) berechnet, ist stereotypiert (1874), aber bis jetzt nicht veröffentlicht worden.

9. Faktoren-(Divisoren-)Tafeln. Nicht blos in der Zahlentheorie [I C 1, Nr. 9], sondern auch beim gewöhnlichen Rechnen (besonders mit grossen Zahlen) leisten mitunter Tafeln, die entweder alle einfachen Teiler oder wenigstens den kleinsten Teiler aller Zahlen (allenfalls mit Ausnahme der durch 2, 3 oder 5 teilbaren) bis zu möglichster Höhe angeben, treffliche Dienste. Vor Beginn des 19. Jahrhunderts war am weitesten *A. Felkel*[68]) gekommen. *L. Chernac*[69]) veröffentlichte dann die einfachen Teiler der Zahlen bis 1020000, *J. Ch. Burckhardt*[70]) die kleinsten Teiler der Zahlen der 3 ersten Millionen, während diejenigen der 7., 8. und 9. Million (die letzte nicht vollständig) auf *Gauss*' Veranlassung von dem Rechenkünstler *Z. Dase*[71]) berechnet und nach dessen Tode (die 9. Million von *H. Rosenberg* ergänzt) herausgegeben wurden. Die Lücke von 3—6 Millionen hat *J. Glaisher*[72]) endgültig ausgefüllt. Während nicht einmal die 10. Million gedruckt vorliegt, befindet sich im Besitz der Wiener Akademie als Manuskript eine den Zahlenraum von 3—100

---

2 bis 2^{144} kommen nach *Glaisher* (Anm. 18) bei *J. Hill,* Arithmetic 1745, jede 12. Potenz von 2 bis 2^{721} bei *W. Shanks,* Contribution to Mathematics..., London 1853, vor.

66) „New Mathematical Tables...", London 1814.

67) S. *Glaisher* (Anm. 18), p. 29.

68) „Tafel aller einfachen Faktoren der durch 2, 3, 5 nicht teilbaren Zahlen von 1 bis 10000000; 1. Teil, enthaltend die Faktoren von 1 bis 144000...", Wien 1776. Der 2. und 3. Teil (bis 336000 bezw. 408000) ist nur in wenigen Abdrücken erhalten geblieben. Im Manuskript hatte *Felkel* die Tafel bis 2 Millionen fertig.

69) „Cribrum arithmeticum...", Daventriae 1811.

70) „Tables des Diviseurs pour tous les nombres du deuxième million...", Paris 1814; „....troisième million...", Paris 1816; „...premier million...", Paris 1817.

71) „Faktorentafeln für alle Zahlen der siebenten Million,..", Hamburg 1862; die achte Million erschien 1863, die neunte 1865.

72) „Factor table for the fourth million", London 1879; fifth million 1880; sixth million 1883. *A. L. Crelle* und *J. Ch. Burckhardt* hatten diesen Teil ebenfalls berechnet. Mehr als irgendwo scheint auf diesem Gebiet durch Wiederholung schon gethaner Arbeit Zeit und Kraft verschwendet worden zu sein. Vgl. *P. Seelhoff,* Geschichte der Faktorentafeln, Arch. Math. Phys. 70 (1884), p. 413.

Millionen umfassende Faktorentafel, ein von *J. Ph. Kulik*[73]) hinterlassenes Riesenwerk.

Leicht zugängliche kleinere Faktorentafeln sind u. a. die in *H. Zimmermann*'s Rechentafel[34]) (bis 1000), in *J. Hoüel*'s Tables de Logarithmes[74]) (bis 10841) und in *J. A. Hülsse*'s Sammlung mathematischer Tafeln[75]) (bis 102000).

III. Rechenapparate und -Maschinen.

Monographieen mit Abbildungen: *M. d'Ocagne*, Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques [extrait des Annales du Conservatoire des Arts et Métiers (2) 5, 6, 1893—1894], Paris 1894. — *W. I. von Bohl*, Apparate und Maschinen zur mechanischen Ausführung arithmetischer Operationen (russisch), Moskau 1896. — Viele Beschreibungen und Abbildungen enthält auch: *W. Dyck*, Katalog mathem. und mathem.-physikal. Modelle, Apparate und Instrumente, München 1892, Nachtrag München 1893.

Mechanische Vorrichtungen, die bestimmt und geeignet sind, dem Rechner einen kleineren oder grösseren Teil seines Geschäftes abzunehmen und so nicht nur eine Ersparnis an geistiger Arbeit, sondern auch eine grössere Sicherheit und Schnelligkeit herbeizuführen, giebt es heute in überraschender Zahl und Mannigfaltigkeit. Die eigentlichen Rechenmaschinen insbesondere haben eine grosse Bedeutung erlangt und sind zu einem unentbehrlichen Werkzeug von nicht geringer und stetig zunehmender Verbreitung[76]) geworden; auf weiten Gebieten haben sie die Anwendung der rechnenden Mathematik

73) S. *Kulik*'s kurze Mitteilung in den Prager Abh. d. böhm. Ges. d. W. (5) 11 (1860), p. 24, Fussnote, sowie *Petzval*'s Bericht, Wien. Ber. 53² (1866), p. 460. Um Raum zu sparen, bezeichnet *Kulik* (ähnlich wie *Felkel*) die Teiler nicht durch Ziffern, sondern durch Buchstabenverbindungen, deren Bedeutung einem Schlüssel zu entnehmen ist.

74) Paris 1858; nur die kleinsten Teiler der durch 2, 3, 5 und 11 nicht teilbaren Zahlen.

75) Leipzig 1840; die betr. Tafel geht auf *G. Vega*[64]) oder eigentlich *J. H. Lambert*, Zusätze zu den logarithm.-trigonom. Tabellen ..., Berlin 1770 zurück. Ihre Einrichtung ist für spätere (*Burckhardt, Dase, Glaisher*) vorbildlich gewesen.

76) In der Litteratur kommen mehr als 120 verschiedene Konstruktionen vor. Mögen auch die meisten davon nur in Zeichnungen oder Modellen vorhanden sein, also ihre Lebensfähigkeit nicht bewiesen haben, so beträgt doch die Zahl der ausgeführten Rechenmaschinen (deren grösster Teil nur ganz wenigen Systemen angehört) immerhin 4000, während am Ende des 18. Jahrhunderts kaum über 15 Arten mit etwa 30 Exemplaren zu zählen waren.

in der jetzigen Ausdehnung erst ermöglicht und manche wissenschaftliche Unternehmung wäre ohne ihre Hülfe wahrscheinlich nicht in Angriff genommen worden; ja sie fangen an, auf die Gestaltung gewisser Formeln und Berechnungsweisen einen bestimmenden Einfluss zu üben, so wie es früher die Logarithmen gethan haben.

Die auf dem fraglichen Gebiete im 19. Jahrhundert erzielten Fortschritte sind von zweierlei Art. Abgesehen davon, dass wegen Unkenntnis der früheren Leistungen nicht wenige Erfindungen sich des öfteren wiederholt haben, galt es in erster Linie, das Überkommene technisch durchzubilden und zum wirklichen Gebrauch geeigneter zu machen [77]); auf der anderen Seite sind auch eine Fülle wesentlich neuer Gedanken aufgetaucht und teilweise zur Durchführung gelangt. Die Entwicklung ist noch nicht abgeschlossen, sondern in den letzten Jahrzehnten und Jahren wieder in lebhaften Fluss gekommen.

Vorrichtungen, die nur Zwecken des Unterrichts dienen, nämlich Begriffe und Verfahren des gewöhnlichen Rechnens veranschaulichen sollen, aber trotzdem fälschlicherweise oft Rechenmaschinen genannt werden, bleiben im folgenden von der Betrachtung ausgeschlossen.

Die Grenze zwischen Rechenapparaten und Rechenmaschinen wollen wir in der Weise ziehen, dass wir automatische Zehnerübertragung [s. Nr. **11** und Nr. **14**], ausser dem Vorhandensein von Mechanismen überhaupt, als wesentlich für letztere ansehen.

a. Rechenapparate.

10. Rechenbrett (Abacus). Das Rechenbrett — ὁ *ἄβαξ* der alten Griechen, abacus der Römer — mit auf parallelen Drähten, Stäben oder in Rinnen verschiebbaren Kugeln, Knöpfen oder dergl. zur mechanischen Ausführung der Addition und Subtraktion, wurde bei uns noch im 17. Jahrhundert zum ernstlichen Rechnen benützt [78]), scheint aber seine Bedeutung für Westeuropa endgiltig verloren zu haben [79]). In Russland dagegen ist es unter dem Namen Stschoty [80]),

---

77) In dieser Beziehung sei schon hier bemerkt, dass die wichtigsten Konstruktionsteile der heute verbreitetsten Rechenmaschinen am Ende des 17. Jahrhunderts von *G. W. Leibniz* erdacht worden sind.

78) *M. Cantor,* Vorles. üb. Gesch. der Math. 1, p. 120, 493 u. Register. — Indem der Rechnende die einzelnen Summanden — mit den höchsten Stellen, wie beim Sprechen, beginnend — der Reihe nach aufstellt, erhält er zugleich die Summe.

79) Bei der auf Anregung von *J. V. Poncelet,* welcher als Kriegsgefangener in Russland (1812—1814) das Rechenbrett kennen gelernt hatte, erfolgten Ein-

bei den Chinesen als suán-pân (Rechenwanne), bei den Japanern als Soro-Ban[81]) noch in allgemeinem Gebrauch. *G. von der Gabelentz* hat die Verwendbarkeit eines Rechenbrettes allgemeinerer Form beim Rechnen in nicht-dekadischen Zahlensystemen gezeigt[82]).

11. Sonstige Additions- (bezw. Subtraktions-)Apparate ohne selbstthätige Zehnerübertragung. Beim Rechenbrett, wo die Einheiten der verschiedenen Ordnungen durch Kugeln dargestellt sind, ist es beim Setzen oder Addieren einer Zahl notwendig, die den einzelnen Ziffern entsprechenden Anzahlen von Kugeln, wenigstens durch schnelles Überblicken, wirklich zu zählen. Bei den folgenden Apparaten dagegen, welche Vorstufen der Additionsmaschinen bilden [s. Nr. **15**], sind im einfachsten Falle die natürlichen Zahlen bis zu irgend einer Höhe in gleichen Zwischenräumen auf einer geraden oder in sich beweglichen krummen Linie angebracht, wobei als Träger der so erhaltenen Skala u. a. ein Stab, ein Band, eine kreisförmige Scheibe genommen sein kann. Das Weiterzählen oder Addieren geschieht dann entweder durch Fortbewegen eines Zeigers an der Skala[83]), oder umgekehrt durch Bewegung der Skala (z. B. unter einem Fenster, in welchem immer nur eine Zahl derselben erscheint), und kann — worin der Hauptunterschied gegenüber dem Rechenbrett liegt — durch Benützung einer zur ersten kongruenten Skala zu einem rein mechanischen gemacht werden[84]).

---

führung desselben in die Schulen ist es zu einem Anschauungsmittel herabgesunken. Neuere Versuche, ihm wieder Eingang in die Praxis zu verschaffen (vgl. *A. R. von Loehr,* Österr. Eisenbahnzeitung 1897, p. 9), werden schwerlich ein besseres Ergebnis haben; auch wäre zu erwägen, ob die russische Form mit 10 Kugeln, oder die chinesisch-japanische mit 6 oder 7 Kugeln in jeder Reihe, von denen 5 je Eins, die übrigen je Fünf bedeuten, den Vorzug verdient.

80) Dieses Wort ist plurale tantum. Wegen einiger Abarten, die zur Anwendung beim Multiplizieren und Dividieren vorgeschlagen worden sind, vgl. *von Bohl* p. 8, 9.

81) Über das Rechnen damit (einschliesslich des Ausziehens von Wurzeln) vgl. *A. Westphal,* Mitteilungen der deutschen Gesellsch. f. Natur- u. Völkerkunde Ostasiens in Tōkiō, 1875, Heft 8, p. 27.

82) Arch. Math. Phys. (2) 11 (1892), p. 213.

83) Ein ähnlicher Gedanke findet sich schon im Anfang des 14. Jahrhunderts bei dem Rechenbrett von *Jean de Murs* (oder *de Meurs*), s. *Alfred Nagl,* Zeitschr. Math. Phys. 34 (1889), Suppl. p. 141.

84) Der Gedanke, die Addition durch Verschieben eines gleichmässig geteilten Massstabes an einem zweiten auszuführen, ist unbekannten Ursprungs, aber jedenfalls alt. *J. C. Houzeau,* Fragment II sur le calcul numérique, Brux. Bull. (2) 40 (1875), p. 74, empfiehlt die „addition au ruban“, welche in Bankhäusern angewendet werde: man misst mit einem Massstab an einem ebenso

Zusammengesetzte Apparate dieser Art, welche z. B. für die Einer, Zehner u. s. w. je eine besondere Skala besitzen, ermöglichen auch die Addition vielziffriger Zahlen. So besteht der Apparat von *Kummer* (1847)[85], wie verschiedene ältere[86]) und neuere, aus parallelen, in Nuten verschiebbaren Stäbchen, derjenige von *Lagrous* (1828)[87]) aus konzentrischen Kreisringen, der von *Djakoff*[88]) und der „Ribbon's Adder“[89]) von *Ch. Webb* aus Bändern, die über Rollen laufen. Der wunde Punkt ist die sogenannte Zehnerübertragung: Wird z. B. 7 zu 46 addiert durch Weiterbewegen der auf 6 stehenden Einerskala um 7 Stellen, so wird der Apparat nur 43 zeigen, wenn der Rechner nicht mit der Hand die nötige Erhöhung der Zehner um eine Einheit ausführt. Oft ist nur eine Regel gegeben, wie man sehen kann, ob eine Zehnerübertragung stattfinden muss; letztere erfolgt mechanisch bei dem oben genannten Apparat von *Kummer*, dessen Einrichtung auch einen Bestandteil mehrerer Arithmographen (z. B. der von *Troncet* und *Bollée*, s. Nr. **13**, bes. Fig. 3 bei *R*) bildet.

Mit den meisten dieser Apparate, die alle nur ein verhältnismässig langsames Arbeiten gestatten, lässt sich auch subtrahieren, indem man die bei der Addition nötigen Bewegungen umkehrt.

12. Multiplikations- und Divisionsapparate. Zuerst seien, vielfach nur als elementare Unterrichtsmittel gedachte, schon in früheren Jahrhunderten häufige und immer wieder in neuen Formen auftauchende Apparate von geringer Bedeutung erwähnt, bei denen eine fertige Produktentafel [s. Nr. 5], meist kleinen Umfangs, auf einen Schieber oder die Mantelfläche eines Prismas oder Cylinders geklebt oder auf Rollen gewickelt ist und gemäss den Werten der Faktoren so bewegt werden kann, dass an einer zum Ablesen bestimmten Stelle das gesuchte Produkt erscheint[90]).

Bemerkenswerter sind *J. Neper*'s Rechenstäbchen (virgulae nume-

---

geteilten Bande weiter. Ein Messband ist auch in dem Apparat von *L. Reimann*, D. R. P. (= deutsches Reichspatent) Nr. 45482 (1888) benützt.

85) *von Bohl* p. 14.

86) Z. B. der von *C. Caze* (1720), s. *M. d'Ocagne* p. 6.

87) Soc. d'Encour. Bull. 1828, p. 394.

88) *von Bohl* p. 191.

89) *Dyck*'s Katalog, Nachtr. p. 5, Abb. bei *von Bohl* p. 25.

90) Eines unter sehr vielen Beispielen: Rechenapparat „Zeus“ von *Edm. Schneider*-München (Walzenform). Bei *Fr. Sönnecken*'s Apparat D. R. P. Nr. 51445 (1889) deutet ein Zeiger auf das Produkt, wenn zwei andere Zeiger auf die Faktoren gestellt worden sind. — Natürlich können auch andere Tabellen mit einfachem oder doppeltem Eingang entsprechend eingerichtet werden.

ratrices)[91]), die nebst den zahlreichen Abarten, die schon im 17. und 18. Jahrhundert ersonnen wurden, im 19. Jahrhundert verschiedene Auferstehungen erlebt haben[92]). Sie können als eine durch Zerschneiden in Streifen beweglich gemachte Einmaleinstafel betrachtet werden und führen die Multiplikation einer Zahl von beliebig vielen Ziffern, welche man aus den betreffenden Stäbchen zusammenzusetzen hat, mit einer der Zahlen 2 bis 9 auf eine Addition einziffriger Zahlen zurück. Einen wesentlichen Fortschritt zeigen die Apparate von *Slonimsky* (1844)[93]), *Jofe* (1881)[94]) sowie *H. Genaille* und *Ed. Lucas* (1885)[95]) (Fig. 1), da bei denselben keine Addition mehr nötig ist;

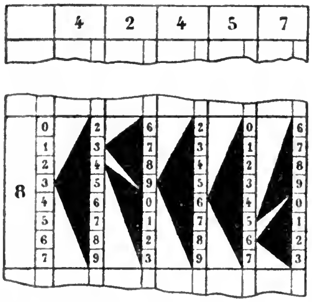


Fig. 1. Réglettes multiplicatrices von *Genaille* und *Lucas*.

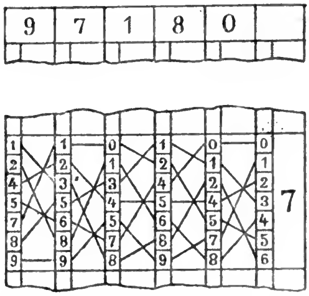


Fig. 2. Réglettes multisectrices von *Genaille* und *Lucas*.

jede Zusammenstellung der Stäbchen giebt hier eine fertige Produktentafel[96]). Von ähnlicher Einrichtung wie die réglettes multiplicatrices

91) Ende des 16. Jahrh. erfunden. Zuerst beschrieben in: Rabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo..., Edimburgi 1617; Abb. *d'Ocagne* p. 8, *von Bohl* p. 29.

92) Eine der neuesten Ausgaben ist z. B. *J. Blater*'s „Erleichterungstafel", Wien 1889. — Wegen sonstiger neuerer und älterer Formen vgl. *von Bohl* p. 29—32 und die Zusammenstellung von Dr. *Roth*, Soc. d'Encour. Bull. 1843, p. 415. Fast jedes Jahr werden Apparate dieser und der vorhergehenden Art patentiert.

93) J. f. Math. 28 (1844), p. 184. Die Beschreibung ist ungenügend, lässt aber vermuten, dass der Apparat aus Stäbchen derselben Art bestand, wie der spätere von *Jofe*; ausserdem hatte er einen Mechanismus für das schnelle Verbringen der Stäbchen in die richtige Ordnung.

94) *von Bohl* p. 194.

95) „Réglettes multiplicatrices", Paris, Eugène Belin.

96) *Jofe* (und vermutlich auch *Slonimsky*) hat bedeutend mehr Stäbchen nötig, als *Genaille* und *Lucas*, wogegen die Ziffern des gesuchten Produkts bei seinem Apparat immer in gerader Linie stehen, während bei demjenigen der zuletzt genannten die Einer, Zehner u. s. w. durch ein eigentümliches Ablese-

sind die „réglettes multisectrices“ (Fig. 2) von *Genaille* und *Lucas*[97]), welche den Quotienten und Rest der Division einer beliebig-ziffrigen Zahl durch eine einziffrige mittelst blossen Ablesens finden lassen.

Mehrziffrigen Multiplikatoren angepasst sehen wir *Neper*'s Gedanken in *Ad. Poppe*'s „Arithmograph“[98]), in dem „Calculateur“ von *H. Genaille*[99]) und dem „Tableau multiplicateur-diviseur“ von *Léon Bollée*[100]). Bleibt bei diesen Apparaten die Addition der von ihnen gelieferten Partialprodukte noch dem Rechner überlassen, so wird das fertige Ergebnis der Multiplikation oder Division zweier beliebigen mehrziffrigen Zahlen durch successives Ablesen erhalten bei dem eine Verallgemeinerung der réglettes multisectrices darstellenden „Arithmomètre“ von *H. Genaille*[101]), gleichsam einer zusammensetzbaren Multiplikations- und Divisionstafel, die, was den Umfang der Leistungen betrifft, von keiner gedruckten erreicht werden kann.

13. Arithmographen für alle vier Spezies. Die hier zu besprechenden Apparate sind aus einer Vorrichtung für Multiplikation und einer solchen für Addition bezw. Subtraktion zusammengesetzt. So finden wir eine Produktentafel in Verbindung mit einem Rechenbrett bei *Th. v. Esersky* (1872)[102]), in Verbindung mit Additionsschiebern nach Art derjenigen von *Kummer* (s. Anm. 85) bei *Troncet* (1891)[103]); dagegen Neperstäbchen mit einem Rechenbrett vereinigt

---

verfahren, bei dem man (s. das Beispiel $42457 \times 8 = 339656$ in Fig, 1) rechts oben anfangend den Spitzen der nach links gerichteten Dreiecke zu folgen hat, der Reihe nach bestimmt werden müssen. Es beruhen diese Apparate auf demselben arithmetischen Satze, welcher auch der Multiplikationstafel von *Slonimsky* (s. Anm. 27) zu Grunde liegt, die Umsetzung des mathematischen Gedankens in einen Apparat ist aber in diesem Falle erfolgreicher gewesen.

97) Paris 1885, Eugène Belin. Links oben beginnend und den Linien folgend liest man in Fig. 2 ab $97180 : 7 = 13882$, Rest 6.

98) Beschreibung Frankfurt a. M. 1876, s. auch Dingler's polyt. J. 223 (1877), p. 152; *von Bohl* p. 38. Es ist nicht die gewöhnliche, sondern die geordnete Multiplikation (s. Nr. 1) zu Grunde gelegt, weshalb der eine Faktor in umgekehrter Ordnung der Ziffern aus Stäbchen gebildet werden muss. In der Handhabung weniger einfach, als die folgenden Apparate.

99) Assoc. franç. 20^1, Marseille 1891, p. 159; 23^2, Caen 1894, p. 272.

100) Soc. d'encouragem. Bull. 1895, p. 985. Entsprechend den Ziffern der beiden Faktoren sind wagerechte und senkrechte Schieber auszuziehen, worauf die in den Öffnungen erscheinenden Partialprodukte in diagonaler Richtung addiert werden müssen.

101) Assoc. franç. 24^1, Bordeaux 1895, p. 179; s. auch *d'Ocagne* p. 12—13.

102) *von Bohl* p. 12.

103) *von Bohl* p. 19.

bei *Michel Rous* (1869)[104]), mit Additionsschiebern nach Art der *Kummer*'schen bei *Eggis* (1892)[105]). Eine organische Verbindung der beiden Teile zeigt jedoch erst der „Arithmographe" von *Léon Bollée*

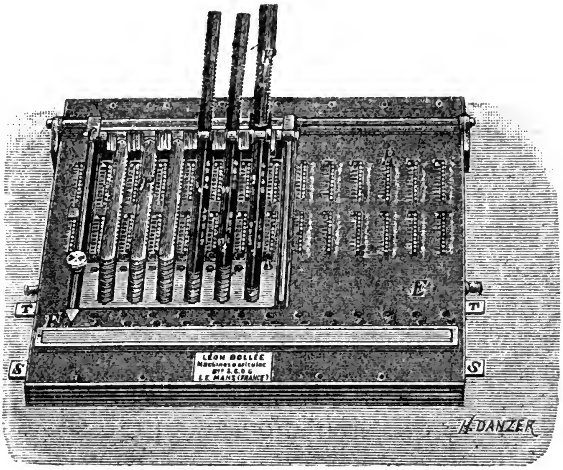


Fig. 3. Arithmograph von *Bollée*.

(Fig. 3)[106]), der auf der Grenze der eigentlichen Rechenmaschinen steht (hinter deren Leistungen er allerdings weit zurückbleibt), da alle Rechnungsarten sich mechanisch mit ihm ausführen lassen

b. Rechenmaschinen.

Es lässt sich nicht umgehen, im folgenden über die innere Einrichtung von Rechenmaschinen zu sprechen. Jedoch wollen wir technische Einzelheiten so viel als möglich bei Seite lassen und uns auf das beschränken, was nötig ist, um die Wirkungsweise im ganzen zu verstehen.

---

104) Soc. d'enc. Bull. 1869, p. 137; das Rechenbrett hat in jeder Reihe nur 4 Einerkugeln und 1 oder 2 Fünferkugeln.

105) *v. Bohl* p. 33. Die „machine arithmétique" von *Grillet* (1678) bestand ebenfalls aus Neperstäbchen in Verbindung mit Additionsscheiben ohne automatische Zehnerübertragung; s. *J. Leupold*, Theatrum arithmetico-geometricum, Leipzig 1727, p. 26.

106) Soc. d'enc. Bull. 1895, p. 977, 985; s. auch die deutsche Patentschrift Nr. 82963. Bemerkenswert ist, dass die Partialprodukte, derer man beim Multiplizieren bedarf, nicht, wie bei den Neperstäbchen, durch Ziffern angegeben sind, sondern ihrem Werte nach durch die Stellung zu den Additionsschiebern eingeführt werden.

α. Maschinen für die gewöhnlichen Rechnungsarten.

14. Zählwerk. Wie das Zählen die Grundlage des Rechnens, so bildet ein Zählwerk den Hauptbestandteil einer jeden Rechenmaschine. Dasselbe ist in der Regel dem dekadischen Zahlensystem angepasst und dementsprechend aus je einem Element für die Einer, Zehner, Hunderter u. s. w. zusammengesetzt[107]). Die Elemente sind gewöhnlich cylindrische Scheiben[108]), auf deren ebener oder krummer Fläche die Ziffern 0, 1, 2, ... 9, einmal oder mehrmals in der Richtung der Halbmesser bez. Mantellinien oder senkrecht dazu im Kreise herum stehend angebracht sind[109]). Was die Anordnung dieser Zifferscheiben betrifft, so können ihre Drehungsaxen parallel sein und in einer Ebene liegen[110]), oder Mantellinien eines Cylinders bilden[111]), oder endlich zusammenfallen, so dass die Zifferscheiben sich auf gemeinsamer Welle neben einander befinden und die Ziffern auf der gekrümmten Fläche senkrecht zur Axenrichtung stehen. Letztere Anordnung, die erstmals bei der Maschine von *Pereire* (1750)[112]) vorzukommen und sich mehr und mehr einzubürgern scheint, verdient den Vorzug, weil sie den geringsten Raum erfordert und die Resultate wegen der engeren Stellung der Ziffern leichter überblicken lässt.

In keinem Zählwerk einer eigentlichen Rechenmaschine fehlen Mechanismen, die bewirken, dass die „Zehnerübertragung" (vgl. Nr. **11**) sich ohne Zuthun des Rechners vollzieht. Die Einrichtung kann der-

---

107) In den Fig. **11**, **13**, **14**, **16**—**18**, **20** ist das Zählwerk mit $Z - Z$ bezeichnet. — Nicht wenige der älteren Rechenmaschinen — hervorzuheben sind in dieser Hinsicht die von *Pereire* [112]) und *Müller* [162]) — waren auch auf das Rechnen mit nicht-dekadischen Zahlen und mit den gewöhnlichsten Brüchen ($^1/_2$, $^1/_3$ u. s. w.) eingerichtet; heute ist es (abgesehen von den Differenzenmaschinen, Nr. **22**, bei welchen auf die nicht-dezimalen Winkel- und Zeitteilungen Rücksicht zu nehmen war) nur noch bei Additionsmaschinen in Ländern mit nicht-dezimalen Mass- und Münzsystemen der Fall.

108) In Nuten verschiebbare Stäbe, wie sie die Additionsmaschine von *Perrault* hatte (vor 1699, s. Machines approuvées par l'Ac. des sc. 1, p. 55), scheinen bei eigentlichen Rechenmaschinen nicht mehr vorzukommen.

109) Die Anordnung der Ziffern in Schraubenlinien ist selten, s. Nr. **15**, Anm. 119 u. 121.

110) Wie bei den Maschinen von *Pascal* [116]), *Leibniz* [140]), *Thomas* [143]) und vielen anderen.

111) Ist der Fall bei den, dem 18. Jahrh. angehörigen Maschinen von *Leupold* [135]), *Hahn* [141]), *Müller* [162]) und der neueren von *Edmondson* [158]); bedingt kreisförmige Bauart der Maschine.

112) J. des Savans, 1751, p. 507. Es haben dieselbe u. a. die Maschinen von *Grant* [155]), *Tschebyscheff* [113]), *Odhner* [144]), *Selling* [136]) [152]), *Büttner* [146]), *Bollée* [149]), *Küttner* [147]).

art sein, dass wenn irgend eine Zifferscheibe über die Stellung, in der sie die Ziffer 9 zeigt, hinaus gedreht wird, die Zifferscheibe nächst höherer Ordnung sich plötzlich um eine Stelle weiter bewegt, oder aber so, dass bei jeder Drehung einer beliebigen Zifferscheibe die nächste sich 1/10 so schnell dreht und folglich während einer Drehung der ersten Scheibe um 10 Stellen die nächste sich allmählich um eine Stelle dreht. Im ersten Fall, der die Regel bildet, spricht man von unstetiger oder springender, in dem sehr seltenen letzteren Falle[113]) von stetiger oder schleichender Zehnerübertragung.

Für das Rückwärtszählen beim Subtrahieren — wenn dieses vorgesehen ist — hatten die älteren Maschinen[114]) meist in jedem Element des Zählwerks noch eine zweite, rot gefärbte Ziffernreihe mit verkehrter Ordnung der Ziffern, so dass die Bewegung der Elemente immer in demselben Sinne stattfand. Wegen mancher Unbequemlichkeiten ist später diese Einrichtung verlassen und die Rückwärtsbewegung der Elemente an ihre Stelle gesetzt worden. (Näheres in Nr. **19**.)

15. Maschinen zum Addieren und Subtrahieren. Ist beim Zählwerk Vorsorge getroffen, dass jedes seiner Elemente unabhängig von den übrigen sich nach Belieben um eine Ziffer, oder um 2, 3, ... 9 Ziffern vorwärts bewegen lässt, so kann man es offenbar zum Addieren benützen. Wir legen hier keinen Wert darauf, ob die Elemente unmittelbar von der Hand des Rechners bewegt werden, oder die Bewegung an besonderen Gliedern ausgeführt und durch gezahnte Räder oder Stangen, Gliederketten oder dergleichen auf die Elemente übertragen wird. Dagegen macht es für die erreichbare Schnelligkeit des Arbeitens einen Unterschied — wir verwenden ihn als Einteilungsgrund für die sehr zahlreichen Additionsmaschinen[115]) — ob

113) Er findet sich zuerst in dem „Arithmometer" von *P. L. Tschebyscheff* (1878, Abb. bei *d'Ocagne* p. 40 flg., *von Bohl* p. 113 flg.), ferner (mit denselben kinematischen Elementen, sog. Planetenrädern, die übrigens, obwohl für einen andern Zweck, schon in dem „Arithmaurel" [131]) verwendet sind) in der älteren Rechenmaschine von *Selling*[136]). Diesen Zählwerken eigentümlich ist, dass die Ziffern des Resultates nicht in einer geraden Linie stehen — in den Augen mancher Rechner ein Nachteil, dem *Tschebyscheff* und *Selling* in verschiedener Weise zu begegnen gesucht haben.

114) Z. B. die von *Pascal* [116]), *Perrault* [108]), *Hahn* [141]), *Müller* [162]) und noch die Maschine von *Thomas* [143]) in ihrer ersten Gestalt (1820).

115) Verfasser konnte über 80 Arten zählen und fast jedes Jahr kommen einige neue hinzu; die Zahl der ausgeführten Additionsmaschinen lässt sich auf 1000 schätzen. Es kann sich hier nur darum handeln, an Vertretern der wichtigsten Gattungen die stattgehabte Entwicklung darzulegen. Die zu tausenden

verschiedene Ziffern desselben Ranges durch die Bewegung eines und desselben Gliedes, jedoch um verschiedene, diesen Ziffern proportionale Beträge, addiert werden, oder aber durch Bewegung verschiedener Glieder (Tasten oder Druckknöpfe).

Zur ersten Gruppe gehört die älteste aller Rechenmaschinen, die (technisch noch unvollkommene) „machine arithmétique" (Fig. 4) von

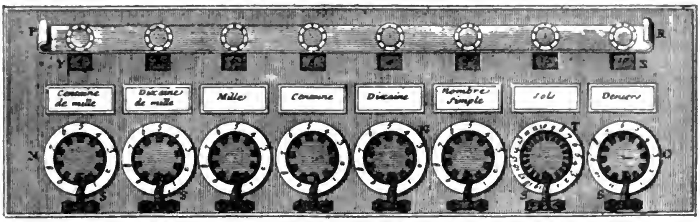


Fig. 4. Rechenmaschine von *Pascal*.

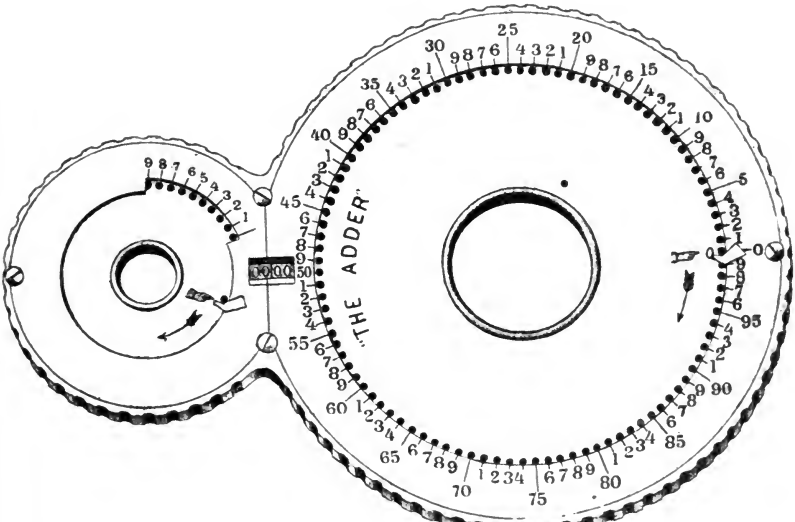


Fig. 5. *Webb's* Adder.

Blaise Pascal (1642)[116]), welche zum Addieren und Subtrahieren diente Die vielen älteren Versuche zur Verbesserung der Maschine von *Pascal* übergehend, erwähnen wir als einige der letzten Ausläufer dieser Reihe

---

verbreiteten sog. Registerkassen mit Additionswerk mögen ganz ausser Betracht bleiben.

116) Sie hat Räder mit 10 Speichen (abgesehen von den mit Sols und Deniers überschriebenen), die der Rechner mit einem Stift herumdreht, bis letzterer an die betreffende Zunge S anstösst; die ausführlichen Beschreibungen in den

den gut konstruierten „Additionneur“ des Dr. *Roth* (1843)[117]) und den einfachen „Adder“ (Fig. 5) von *C. H. Webb* (1868)[118]). Auch *J. v. Orlin*'s „automatische Schraubenrechenmaschine“ für Addition und Subtraktion (1893) lässt sich hier anschliessen[119]).

Eine Steigerung der Schnelligkeit und Sicherheit der Bewegungen, die sehr zu wünschen war, ist durch Einführung der Tasten ermöglicht worden[120]). Man hat bei den Maschinen dieser zweiten Gruppe entweder nur die Addition einziffriger Zahlen ins Auge gefasst und für jede der Zahlen 1—9 eine Taste vorgesehen, wie z. B. *Alb. Stettner* (1882)[121]) und *Max Mayer* (1887, s. Fig. 6)[122]), zuweilen sogar sich noch eine Beschränkung in der Zahl der Tasten auferlegt[123]), oder aber für die Einer, Zehner u. s. w. je 9 Tasten, in parallelen Reihen

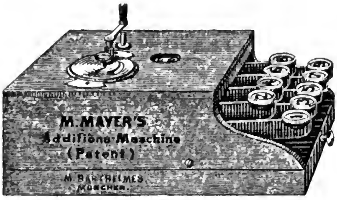


Fig. 6.
M. Mayer's Additionsmaschine.

---

verschiedenen Ausgaben der Oeuvres complètes von *Pascal* gehen auf *Diderot* (Grande Encyclopédie 1, Paris 1751, p. 680; Encyclopédie méthodique 1, Paris 1784, p. 136) zurück.

117) Soc. d'enc. Bull. 1843, p. 411, 421. Abb. bei *d'Ocagne* p. 20, *von Bohl* lithogr. Tafel.

118) Amer. scient. 20 (1869), p. 20; J. Franklin Institute (3) 60 (1870), p. 8. Eine grössere Scheibe für die Ziffern 1—100 und eine kleinere für die Hunderter befinden sich nebeneinander und werden unmittelbar mit einem Stift gedreht.

119) S. *von Bohl*, Moskau, techn. Gesellschaft Denkschr. (russisch), 1898. Der Antrieb der Zifferscheiben, welche auf den Spindeln paralleler Schrauben befestigt sind, erfolgt durch Verschieben (ohne Drehen) von Schraubenmuttern in der Axenrichtung. — Schraubengewinde, aber als Träger einer Ziffernreihe, haben auch die für das ernstliche Rechnen kaum in Betracht kommenden „Addierstifte“ zum Addieren einziffriger Zahlen, z. B. der von *Smith* und *Pott* 1875, Amer. scient. 33, p. 214 oder Polyt. J. 219 (1876), p. 401; vgl. auch Anm. 121.

120) Eine 1851 auf der Weltausstellung in London durch ehrenvolle Erwähnung ausgezeichnete Additionsmaschine von *V. Schilt* soll nach *C. Dietzschold* (Die Rechenmaschine, Leipzig 1882, p. 19) Tasten gehabt haben; ältere Beispiele sind dem Verfasser nicht bekannt.

121) Deutsche Patentschr. Nr. 21236 und 23098. Eigentümlich ist die Anordnung der (bis 1000 gehenden) Ziffern nach einer Schraubenlinie auf einer drehbaren und in der Axenrichtung verschiebbaren Trommel.

122) D. R. P. Nr. 44398. Abb. des Inneren *Dyck*'s Katalog p. 147, *von Bohl* p. 63; jetziger Handelsname „Summa“. Ältere Konstruktion s. Anm. 124.

123) Abgesehen von wertlosen „Taschenaddierern“, die nur Eins wiederholt addieren können, seien erwähnt *Fritz Arzberger*'s Addiermaschine [Schweiz. polyt. Zeitschr. 11 (1866), p. 33; Dingl. polyt. J. 181, p. 28] mit nur zwei Tasten, nämlich für Eins und Drei, und die von *Shohé Tanaka* (1895, D. R. P. Nr. 90288)

angeordnet, bestimmt[124]). Seitdem noch selbstthätige Vorrichtungen zum Drucken der addierten Zahlen und ihrer Summe auf einen weiterlaufenden Papierstreifen hinzugekommen sind (vgl. auch Anm. 165), ist das Problem einer Additionsmaschine als befriedigend gelöst

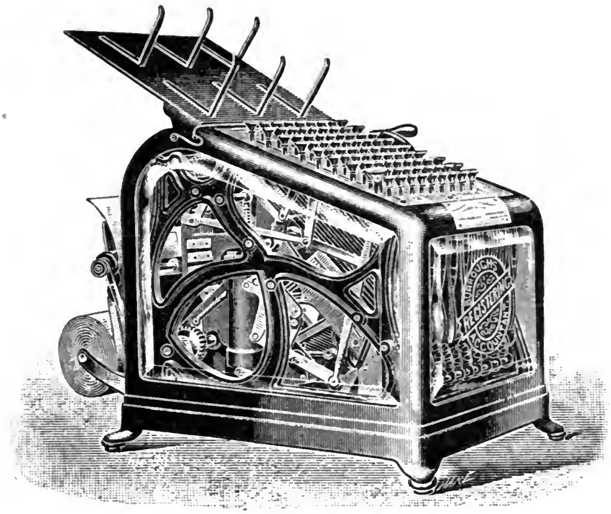


Fig. 7. *Burrough*'s selbstschreibende Additionsmaschine.

zu betrachten. Von dieser neuen Gattung hat zur Zeit die grösste Verbreitung *Burrough*'s „selbstschreibende Additionsmaschine" („Registering Accountant", 1888, s. Fig. 7)[125]), neben welcher noch die

---

mit 5 Tasten für die Ziffern 1—5 (es wird z. B. 7 durch gleichzeitiges Drücken der Tasten für 5 und 2 addiert).

124) Beispiel: Der „Comptometer" von *Dorr. E. Felt* (1887), Abb. *von Bohl* p. 198. — Die ältere Additionsmaschine von *M. Mayer* [1881, D. R. P. Nr. 29206 und 35496, Dingl. polyt. J. 260 (1886), p. 263] hatte zwar je eine besondere Zifferscheibe für die Einer, Zehner u. s. w., aber nur eine Reihe Tasten für die Ziffern 1—9, die mit jeder einzelnen Zifferscheibe in Verbindung gebracht werden konnte; ähnlich der Grundgedanke der Additionsmaschine von *E. Runge*, D. R. P. Nr. 87776 (1896), Abb. Zeitschr. Math. Phys. 44 (1899), Suppl. p. 533, nur dass die Wirkung jener Tasten auf die einzelnen Zifferscheiben durch eine zweite Reihe von Tasten vermittelt wird, also mehrziffrige Zahlen sich addieren lassen, aber bei jeder Ziffer zwei Tasten gleichzeitig gedrückt werden müssen.

125) S. deutsche Patentschrift Nr. 77068 (ältere Konstruktion Nr. 50324); es ist die u. a. bei vielen deutschen Postämtern eingeführte Maschine. Weniger Anklang scheint der einst viel genannte „Comptograph" gefunden zu haben, von welchem der Comptometer, Anm. 124, eine vereinfachte Form ist. Bei der Maschine von *Ad. Bahmann* (1888, D. R. P. Nr. 46960) geschah die Registrierung der Summanden nicht durch Drucken der Ziffern selbst, sondern (ähnlich wie

Additionsmaschine mit Posten- und Summendruck von *W. Heinitz* (Fig. 8)[126]) genannt sei; da durch das Niederdrücken der Tasten die Summanden nur vorläufig eingestellt und erst nach Bewegung eines Hebels wirklich addiert und registriert werden, so stehen derartige Maschinen den in Nr. **17** zu behandelnden erweiterten Additionsmaschinen bereits sehr nahe[127]).

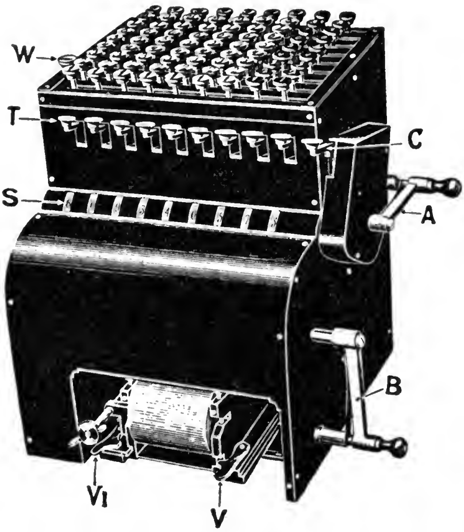


Fig. 8. Additionsmaschine mit Posten- und Summendruck von *Heinitz.*

Für Subtraktion sind die neueren Additionsmaschinen gewöhnlich nicht eingerichtet, weil das Bedürfnis dazu gering ist[128]).

16. Schaltwerk. Um eine Rechenmaschine für die wiederholte Addition einer und derselben mehrziffrigen Zahl und damit für die Multiplikation brauchbar zu machen, kann man sie mit besonderen Mechanismen versehen — sie bilden das sog. Schaltwerk — die es ermöglichen, nach Vornahme der nötigen Einstellungen alle Zifferscheiben des Zählwerks zugleich, jede um eine gewünschte Zahl von Stellen, weiter zu bewegen (zu „schalten"), und zwar durch eine einzige Handbewegung, z. B. das Drehen einer Kurbel (*K* in Fig. 11, 13, 16—18, 20).

Bis jetzt sind im wesentlichen vier Arten von Schaltwerken in Anwendung gekommen. Am öftesten begegnet man der von *G. W.*

bei Kontrolluhren) durch Stifte, deren relative Lage der Grösse der addierten Ziffern entsprach.

126) D. R. P. Nr. **111906**, **111916**, **112252**.

127) Aus jeder Maschine für alle vier Spezies (s. Nr. **17**) lässt sich durch Vereinfachung eine blosse Additionsmaschine ableiten, wie dies z. B. *Hahn, Thomas, Selling* gethan haben (bei *Tschebyscheff*'s Arithmometer[113]) kann sogar das Addierwerk abgetrennt und für sich benutzt werden); sofern derartige Maschinen nicht mit Tasten versehen, also den zuletzt beschriebenen ähnlich sind, arbeiten sie zu langsam.

128) Auch lässt sich die Subtraktion einer Zahl auf die Addition ihrer leicht im Kopf zu bildenden Ergänzung zur nächst höheren Potenz von 10 zurückführen (der Comptometer[124]) hat schon auf den Tasten neben jeder Ziffer die Ergänzung zu 10).

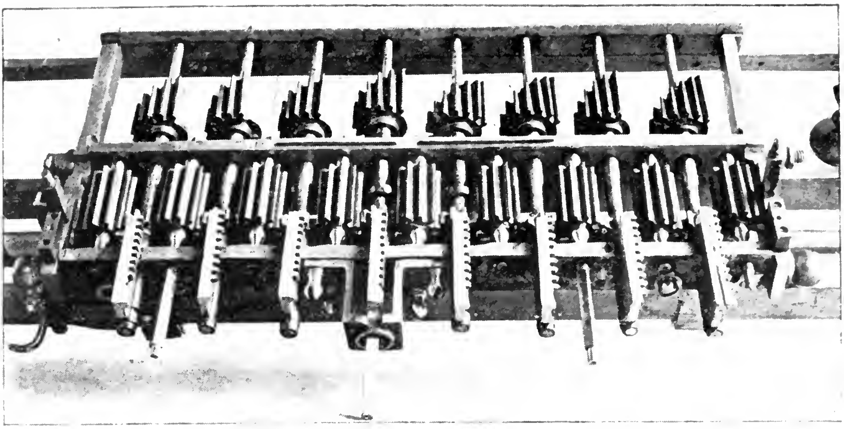


Fig. 10. Schaltwerk aus der *Leibniz*'schen Rechenmaschine in Hannover.

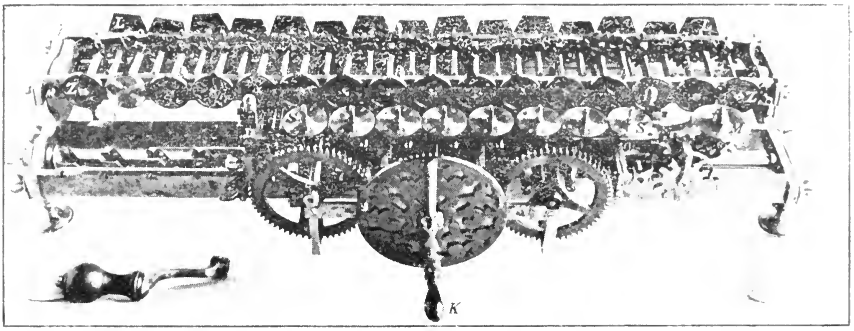


Fig. 11. *Leibniz*'sche Rechenmaschine in Hannover, ohne Gehäuse.

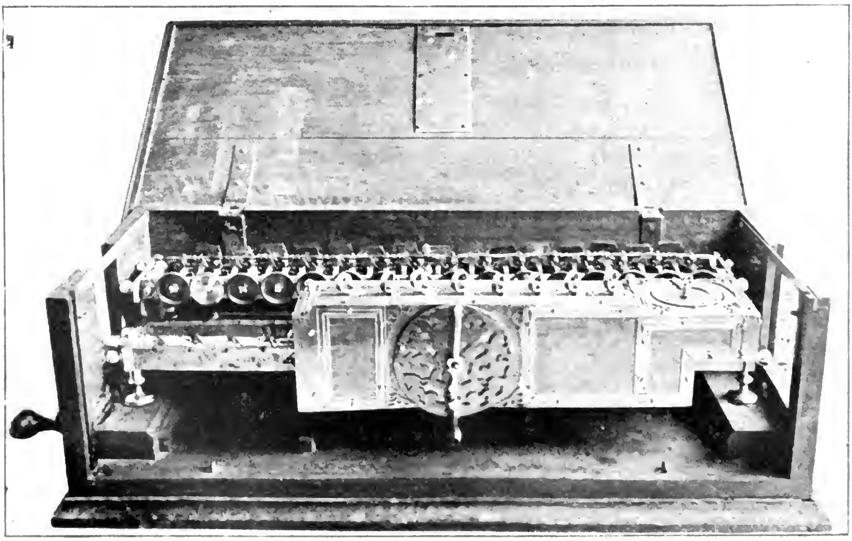


Fig. 12. *Leibniz*'sche Rechenmaschine in Hannover.

Leibniz erfundenen „Stufenwalze" oder „Staffelwalze"[129]), (französisch cylindre ou tambour denté, englisch stepped reckoner), einem Cylinder mit neun Zähnen verschiedener Länge, der als Verschmelzung von neun auf derselben Welle neben einander befindlichen Rädern oder Sektoren, die der Reihe nach 1, 2, ... 9 Zähne gleicher Grösse haben, betrachtet werden kann[130]). In der Regel ist für die Einer, Zehner u. s. w. je eine Stufenwalze bestimmt, jedoch lässt sich auch mit einer einzigen auskommen[131]).

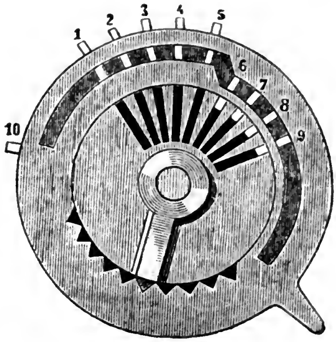


Fig. 9. Schaltrad aus *Odhner*'s Arithmometer.

Ein anderes Mittel, das ebenfalls schon *Leibniz*[132]) gekannt hat, ist die Verwendung von Zahnrädern, von deren Zähnen sich beliebig viele nach innen schieben[133]) und dadurch unwirksam machen lassen (s. Fig. 9). Schaltwerke mit solchen Rädern zeichnen sich vor denen mit Stufenwalzen durch geringen Raumbedarf aus und sind in neuerer Zeit sehr in Aufnahme gekommen[134]).

129) Die einzige uns erhalten gebliebene (1694 vollendete?) von den beiden sicher ausgeführten Rechenmaschinen von *G. W. Leibniz* (Fig. 11 u. 12), welche in der kgl. Bibliothek zu Hannover aufbewahrt wird und neuerdings von *A. Burkhardt* wieder in Stand gesetzt worden ist (s. Zeitschr. f. Vermessungswesen 1897, p. 392), besitzt deren acht, die man in Fig. 10 oben neben einander bemerkt. Ausserdem kommen Stufenwalzen z. B. vor in den Maschinen von *Hahn* (1774)[141]) Viscount *Mahon*, späterem Earl of *Stanhope* [in der ersten von 1775, s. Phil. Mag. (5) 20 (1885), p. 15], *Müller* (1783)[162]), *Thomas* (1820)[143]).

130) Befindet sich ein Zahnrädchen, das die Bewegung auf eine Zifferscheibe zu übertragen hat, z. B. der Stelle gegenüber, bis zu welcher 7 Zähne der Stufenwalze reichen, so wird es bei jeder vollen Umdrehung der letzteren um 7 Zähne weiter gedreht werden.

131) Das zeigen die „Arithmaurel" genannte Maschine von *Maurel* und *Jayet*, Fig. 14 [Par. C. R. 28 (1849), p. 209; mit Abb. der Mechanismen: *Lalanne*, Ann. ponts chaussées, (3) 8 (1854), 2. sém., p. 288; s. auch *d'Ocagne* p. 29] und diejenige von *Tschebyscheff*[113]).

132) S. die von *Jordan* veröffentlichte Übersetzung eines Manuskripts aus dem Nachlasse von *Leibniz*, Zeitschr. f. Verm.-Wes., 1897, p. 308; vielleicht hatte die verschollene zweite Rechenmaschine von *Leibniz* ein solches Schaltwerk.

133) Nach der Seite umlegbare Zähne hatten die Schalträder der im übrigen unvollkommenen Maschine von *Joh. Poleni* (Miscellanea, Venetiis 1709, p. 27; s. auch *Leupold*, Theatrum arithmetico-geometricum, 1727, p. 27).

134) Nach dem Vorgange von *Odhner*[144]) haben sie z. B. *Büttner*[146]), *Esser*[159]) und *Küttner*[147]) angenommen. Übrigens hat Dr. *Roth* etwa 40 Jahre vor *Odhner* ähnliche Schalträder verwendet (ausgestellt im Conservatoire des Arts et Métiers zu Paris).

Drittens giebt es Schaltwerke mit gezahnten Rädern oder Stangen, die, sobald von ihren Zähnen die gewünschte Zahl gewirkt hat, ausser Eingriff mit den Zahnrädern, welche die Drehung der Zifferscheiben vermitteln, gebracht werden können[135]).

Endlich kann die Einrichtung getroffen sein, dass die Glieder des Schaltwerks (z. B. Zahnstangen) sich mit verschiedener Schnelligkeit bewegen lassen[136]).

Von grosser Bedeutung ist es noch — ein ebenfalls von *Leibniz* zuerst unternommener Schritt — das Schaltwerk und Zählwerk um beliebig viele Stellen gegen einander verlegbar zu machen, damit auch das 10-fache, 100-fache u. s. w. irgend einer mehrziffrigen, im Schaltwerk eingestellten Zahl durch eine einzige Handbewegung auf das Zählwerk übertragen werden kann[137]).

17. Erweiterte Additionsmaschinen (für alle vier Spezies). Eine auch die Subtraktion zulassende Additionsmaschine mit einem verleg-

---

135) Ein solches kommt zuerst in einer Rechenmaschine von *Jac. Leupold* vor, s. dessen Theatrum arithm.-geometr., 1727, p. 38; ferner haben es z. B. die zweite Rechenmaschine von Viscount *Charles Mahon*, späterem *Earl of Stanhope* (1777, s. *Vogler*, Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln, Berlin 1877, p. 59), sowie die Maschinen von *C. Dietzschold* („Die Rechenmaschine", Leipzig 1882, p. 40; gebaut von 1877 an), *Fr. Weiss* (D. R. P. Nr. 71307 von 1893), *Bollée*[149]) und *Steiger*[151]). Bei *Grant*'s Maschine[155]) ist der Gedanke eigentlich der umgekehrte: jedes Schaltrad hat nur einen Zahn, durch welchen eine Hemmung für die zugehörige Zifferscheibe (die sich sonst fortwährend drehen würde) ausgelöst wird, sobald letztere die gewünschte Drehung vollzogen hat.

136) Einziges Beispiel die ältere, 1886 patentierte Rechenmaschine von *Ed. Selling*, Fig. 15 („Eine neue Rechenmaschine", Berlin 1887; ausführlichste Beschreibung der von *M. Ott* durchgebildeten Konstruktion von *A. Poppe*, Polyt. J. 271 (1889), p. 193). Jede Zahnstange des Schaltwerks kann nach Belieben mit dem 1., 2., 3. u. s. w. der beweglichen Gelenkpunkte einer „Nürnberger Schere" mit festem Anfangspunkt verbunden werden, so dass beim Öffnen der Schere um einen und denselben Betrag die Zahnstange je nach der Einstellung um 1, 2, 3 u. s. w. Zähne weiter geschoben wird.

137) Da es nur auf die gegenseitige Lage von Schaltwerk und Zählwerk ankommt, ist es gleichgiltig, ob das erste bewegt wird und das zweite ruht, wie bei den Maschinen von *Leibniz*[140]), *Selling*[136]), *Bollée*[149]) u. s. w., oder umgekehrt, wie bei denen von *Hahn*[141]), *Müller*[162]), *Thomas*[143]), *Odhner*[144]) u. s. w. Meistens geschieht die Verlegung des Schaltwerks resp. Zählwerks von Hand, man kann aber auch, wie *Leibniz*, für diesen Zweck eine besondere Kurbel anbringen (in Fig. 12 links), oder der schon vorhandenen Kurbel auch diese Aufgabe zuweisen, wie *Thomas* bei seinen späteren Maschinen grossen Formats, *Tschebyscheff*[113]), *Dietzschold*[135]) und *Steiger*[151]). Beim „Arithmaurel"[131]) ist jene Verlegung durch Wiederholung des Schaltwerks und der Kurbel (K, K', K'', K''' in Fig. 14) unnötig gemacht.

baren Schaltwerk (Nr. **16**), das in jedem Gliede auf irgend eine der Ziffern 0, 1, ... 9 gestellt werden kann[138]), ist für Multiplikation und Division ebenfalls tauglich, denn um z. B. 1973 mit 254 zu multiplizieren, wird man, nachdem die Zifferscheiben alle auf Null gestellt (s. Nr. **20**) und die Einer des Schaltwerks denen des Zählwerks (Nr. **14**) gegenüber gebracht sind, den Multiplikanden 1973 im Schaltwerk einstellen, dann viermal die Kurbel drehen[139]), hierauf das Zählwerk um eine Stelle nach rechts verlegen, dann fünfmal die Kurbel drehen, endlich das Zählwerk um eine weitere Stelle nach rechts verlegen und die Kurbel zweimal drehen, worauf im Zählwerk das gesuchte Produkt 501142 erscheinen wird. Und wie die Multiplikation durch wiederholte Addition, so lässt sich auch die Division durch wiederholte Subtraktion ausführen (s. Nr. **19**). In der That sind die Erfinder der meisten und verbreitetsten Rechenmaschinen von dieser Erwägung ausgegangen. Indem wir einige der bemerkenswertesten dieser „erweiterten Additionsmaschinen" hier aufzählen, nennen wir nach der an der Spitze stehenden „machina arithmetica" von *G. W. Leibniz* (s. Fig. 10—12)[140]), die Rechenmaschine des Pfarrers

138) Die Vorrichtungen zum Einstellen (das „Stellwerk", $S-S$ in Fig. 11, 13, 14, 16—18, 20) betreffend, ist zu bemerken, dass für die Einer, Zehner u. s. w. entweder je ein in einem Schlitz entlang einer Skala beweglicher Knopf (*Thomas*[143])) oder Hebel (*Odhner*)[144]) vorhanden sein kann, oder ein Schieber (*Hahn*[141]), *Edmondson*[158])) bezw. eine drehbare Scheibe (*Leibniz,* s. Fig. 11, $S-S$; *Müller*[162]), *Büttner*[146])), mit Ziffern besetzt, von denen die gewünschte etwa unter eine Öffnung gebracht wird, oder aber — für schnelles Arbeiten am zweckmässigsten — eine Reihe von Tasten für die Ziffern 1—9 (*Selling*[136])). Wegen der nachträglichen Prüfung der eingestellten Zahl ist es erwünscht, dass deren Ziffern (wie bei *Duschanek*[161]), *Büttner*, *Steiger*[151])) in gerader Linie neben einander erscheinen. — Bei den Maschinen von *Grant*[155]) und *Selling* lässt sich die Einstellung häufig wiederkehrender Konstanten so vorbereiten, dass dieselbe (statt Ziffer für Ziffer) momentan erfolgen kann.

139) Bei der ältesten Maschine von *Thomas* (1820) wurde die Bewegung durch Ziehen an einem Bande eingeführt; beim Arithmaurel[131]) genügte es, einen Zeiger, deren für jede Stelle des Multiplikators einer vorhanden war (M, M', M'', M''' in Fig. 14), mittelst der zugehörigen Kurbel auf die betreffende Ziffer eines Zifferblattes zu drehen, weshalb diese Maschine sehr schnell arbeitete; bei der älteren Maschine von *Selling*[136]) geschah die Multiplikation mit 2, 3, ... durch Öffnen des Systems der Nürnberger Scheren um das Doppelte, Dreifache, ... des bei einfacher Addition nötigen Betrags, also auch durch eine einzige Handbewegung.

140) Erfunden 1671, ehe *Leibniz* die *Pascal*'sche Maschine kannte. Beschreibung von *Leibniz* selbst Miscell. Berol. 1 (1710), p. 317, Übersetzung Zeitschr. Verm.-W. 1892, p. 545. Zur Geschichte s. *W. Jordan*, Zeitschr. Verm.-W. 1897, p. 289, woselbst weitere Litteratur. Grundriss ebenda. S. auch Anm. 129 u. 132.

Ph. M. Hahn[141]) als erste wirklich brauchbare und gewerbsmässig hergestellte[142]); den „Arithmomètre“ von *Ch. X. Thomas* (Fig. 13)[143])

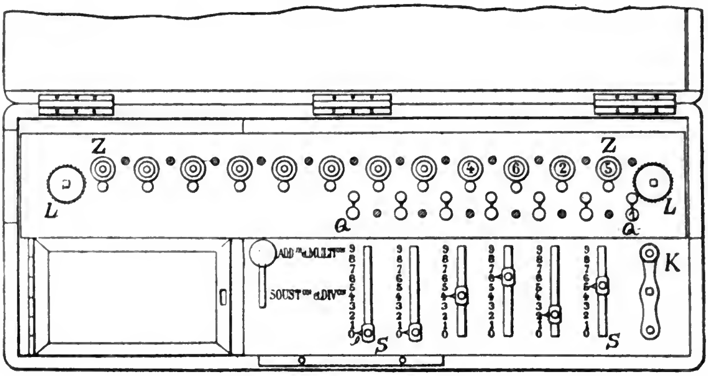


Fig. 13. Arithmometer von *Thomas* im Grundriss.

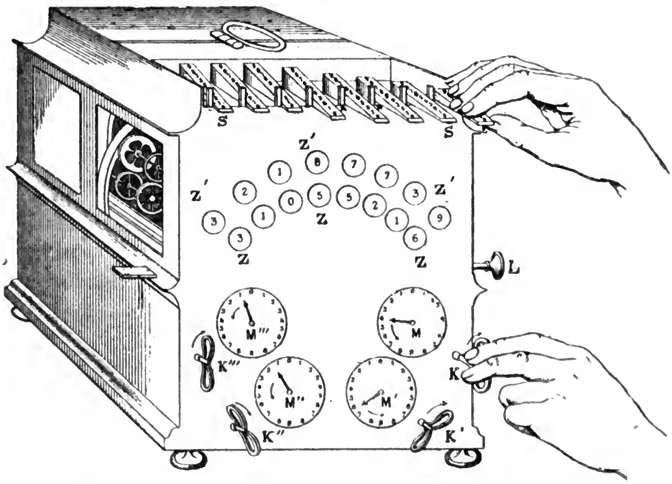


Fig. 14. Rechenmaschine von *Maurel* und *Jayet*.

als erste Maschine, die grössere Verbreitung erlangt hat; dann wegen besonders eigenartiger Bauart die zu ihrer Zeit leistungsfähigste, den

141) Erfunden 1770; 1774 erste Maschine fertig, s. *Ph. M. Hahn*, Beschreib. mechan. Kunstwerke, Stuttgart 1774, Vorrede; Teutscher Merkur, 2 (1779), p. 137. Abb. und gute Beschreibung fehlt noch. Mehrere noch brauchbare Maschinen vorhanden, z. B. in den Sammlungen der techn. Hochschulen Berlin, München, Stuttgart.

142) Noch im Anfang des 19. Jahrh. von dem Uhrmacher *Chr. Schuster* in Ansbach, vgl. *Dyck*'s Katalog p. 150.

143) Erfunden 1820; hat viele durchgreifende Änderungen erlebt und war

eigentlichen Multiplikationsmaschinen (Nr. 18) nahe stehende Maschine von *Maurel* und *Jayet* (Fig. 14)[131]), sowie die ältere Maschine von *E. Selling* (Fig. 15)[136]); ferner den „Arithmometer" von *W. T. Odhner*

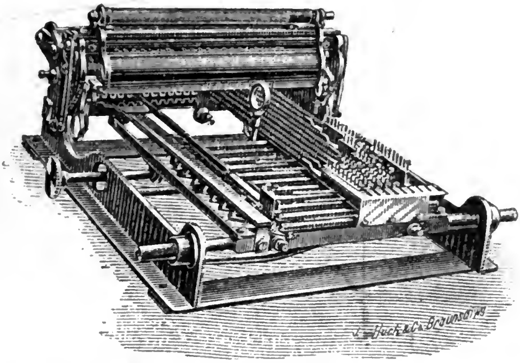


Fig. 15. Ältere Rechenmaschine von *Selling*.

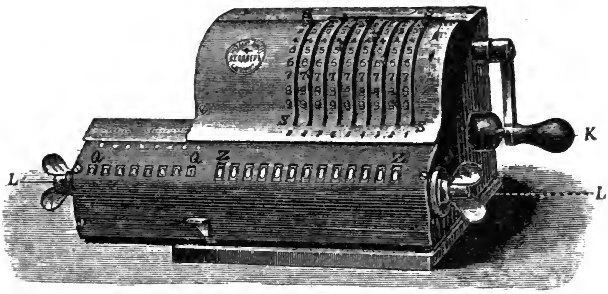


Fig. 16. Arithmometer von *Odhner*.

(Fig. 16)[144]), welcher zwar in mancher Beziehung hinter den vorigen Maschinen zurücksteht[145]), aber weniger Raum einnimmt und zu

---

anfangs (bis 1858) teilweise weniger zweckmässig eingerichtet, als die Rechenmaschinen von *Hahn* [141]), *Müller* [162]), und sogar von *Leibniz* [140]). Ausführl. Beschreib. mit Abb. *F. Reuleaux*, Die Thomas'sche Rechenmaschine, Freiberg 1862 (aus Civilingenieur 8), 2. Aufl. Leipzig 1892; *Sebert*, Soc. d'enc. Bull. 1879, p. 393; *A. Cavallero*, Torino Ist. tecn. Ann. 8, bezw. Revue universelle, 1880, p. 309 (wegen der älteren Formen s. *Hoyau*, Soc. d'enc. Bull. 1822, p. 355, *Benoît*, Soc. d'enc. Bull. 1851, p. 113); wird in vielen Werkstätten hergestellt, in Deutschland (mit Verbesserungen) von *A. Burkhardt*, Glashütte in S. seit 1878.

144) In Deutschland 1878 patentiert (Nr. 7393, u. Nr. 64925 von 1891); seit 1892 als „Brunsviga" im Handel (s. *Trinks*, Zeitschr. Ver. deutscher Ingen. 1892, S. 1522), in Frankreich unter den Namen „Dactyle" und „la Rapide".

145) Ist nicht zuverlässig, weil die Bewegungen nicht hinreichend gesichert und die Zehnerübertragungen nicht weit genug geführt sind (erfüllt die

neuer Erfindungsthätigkeit angeregt hat[146]); endlich die Rechenmaschine von *W. Küttner* (Fig. 17)[147]), als die am meisten Vorteile bietende der jetzt im Handel befindlichen erweiterten Additionsmaschinen[148]).

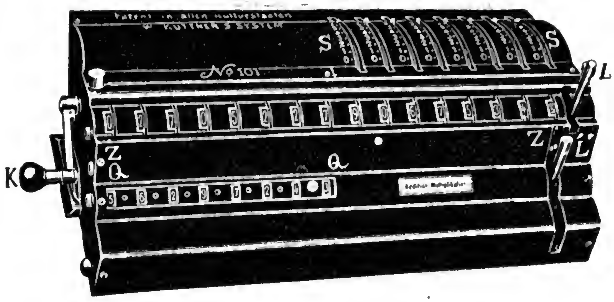


Fig. 17. Rechenmaschine von *Küttner*.

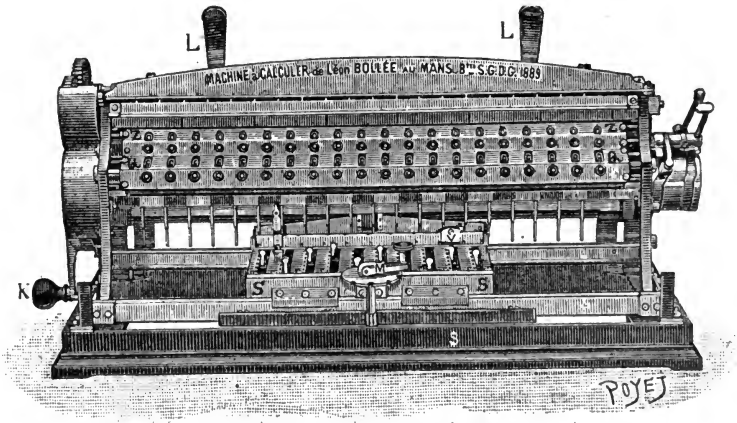


Fig. 18. Rechenmaschine von *Bollée* (Modell von 1888).

18. Eigentliche Multiplikationsmaschinen. Einen ganz neuen Gedanken hat 1888 *Léon Bollée* in seiner „machine à calculer“

---

an jede R.-Maschine zu stellende Bedingung nicht, dass im Zählwerk 000 ⋯ 0 erscheint, wenn 999 ⋯ 9 eingestellt war und 1 addiert wird); hat sehr schweren Gang und andere Mängel.

146) Von ähnlicher Bauart, jedoch in wesentlichen Punkten verbessert sind die Rechenmaschinen von *Esser*[159]) und *Küttner*[147]). Auch die sehr brauchbare Maschine von *O. Büttner* (D. R. P. Nr. 47243, 1888, Abb. *Dyck*'s Katalog p. 151, *von Bohl* p. 102) scheint davon beeinflusst zu sein.

147) D. R. P. Nr. 84269 (1894), s. *Dingler*'s Polyt. J. 300 (1896), p. 199; wird hergestellt von *W. Heinitz* in Dresden.

148) Zu denselben gehören auch u. a. die Rechenmaschinen von *Leupold*[135]),

(Fig. 18)[149]) verwirklicht: Die gegenseitigen Produkte der Zahlen 1—9 sind körperlich dargestellt, nämlich durch Paare von Stiften, deren Längen den Einern und Zehnern jener Produkte entsprechen[150]). Diese Stifte begrenzen die Verschiebung von Zahnstangen, welche so

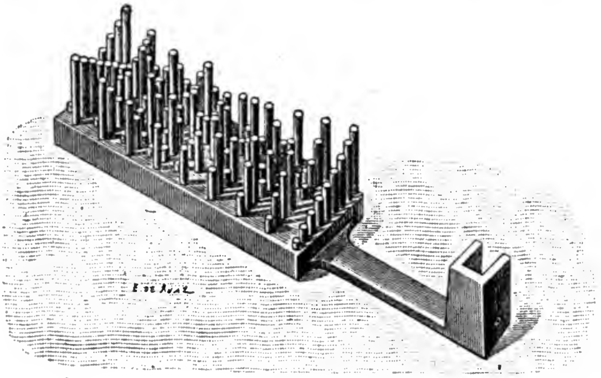


Fig. 19. Einmaleinskörper aus der Rechenmaschine von *Bollée*.

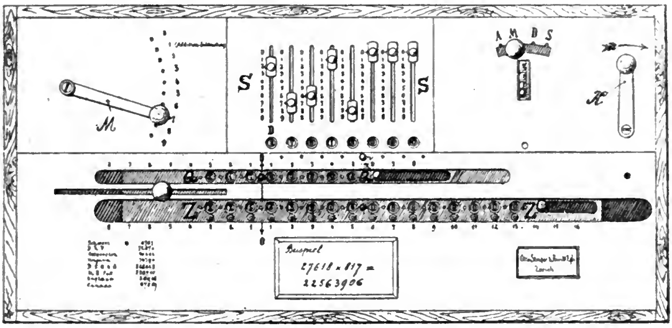


Fig. 20. Grundriss der Rechenmaschine von *Steiger*.

durch eine sich immer gleich bleibende Handbewegung (das einmalige Drehen einer Kurbel) gezwungen werden können, das Produkt des

---

Mahon[129]) [135]), *Müller*[162]), *Stern*[166]), *Staffel*[163]), *Grant*[155]), *Tschebyscheff*[113]), *Dietzschold*[135]), *Edmondson*[158]), *Duschanek*[161]), *Esser*[159]), *Weiss*[135]). S. auch Nr. **53**.

149) Beschr. in den Par. C. R. 109 (1889), p. 737; mit Abb. Soc. d'enc. Bull. 1894, p. 989, auch *d'Ocagne* p. 32 flg., *von Bohl* p. 160 flg., deutsche Patentschrift Nr. 88936 (von 1894).

150) Der „calculateur" (Fig. 19) ist gewissermassen ein verkörpertes Einmaleins; z. B. befinden sich an der Kreuzungsstelle der 7. Reihe mit der 9. Kolonne zwei Stifte von den Längen 3 und 6, weil $7 \times 9 = 63$. Offenbar können statt Produktentafeln ebenso gut andere numerische Tafeln verkörpert und in die Maschine eingeführt werden; in der That hat *Bollée* auf diese Art besondere Maschinen für Zinsberechnung und andere Zwecke konstruiert.

eingestellten Multiplikanden mit irgend einer Ziffer des Multiplikators auf das Zählwerk zu übertragen. Bei der auf demselben Gedanken beruhenden Rechenmaschine von *O. Steiger* (Fig. 20)[151]) kommen die Teilprodukte durch Paare von abgestuften Scheiben (s. Fig. 21), die auf einer gemeinsamen Welle sitzen, zum Ausdruck. *E. Selling* führt in seiner „elektrischen Rechenmaschine“[152]) die Teilprodukte durch Elektromagneten in der Art ein, dass die den Werten ihrer Ziffern entsprechenden galvanischen Leitungen durch verschiedene, den Multiplikanden- und Multiplikatorziffern entsprechende Einstellungen geschlossen werden. Es leuchtet ein, dass mit einer solchen Maschine

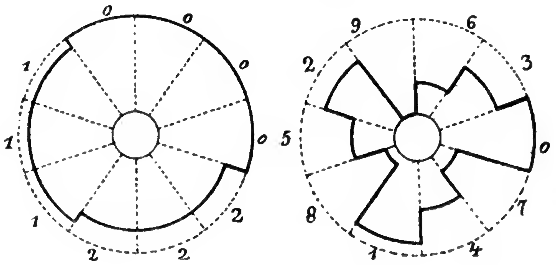


Fig. 21.

viel schneller multipliziert (und dividiert) werden kann, als mit den in Nr. **17** beschriebenen — den „Arithmaurel“, vgl. Anm. 153, allenfalls ausgenommen — namentlich wenn, wie bei der Maschine von *Selling*, für das Einstellen von Multiplikand und Multiplikator Tasten vorgesehen sind. Ein Mangel haftet freilich auch diesen Maschinen noch an: ohne Verlegung des Zählwerks (die zwar bei der Maschine von *Steiger* automatisch während jeder Kurbeldrehung erfolgt) lässt sich nur mit einziffrigen Zahlen multiplizieren[153]). *K. Strehl* hat

151) In Deutschland 1892 patentiert, Nr. 72870; bei den Stufenscheiben entspricht dem Wert einer Ziffer der Abstand der betreffenden Stelle des Scheibenrandes von der Aussenlinie (Fig. 21 zeigt die zur Multiplikatorziffer 3 gehörigen Scheiben, links die der Zehner, rechts die der Einer); s. auch *H. Sossna*, Zeitschr. Verm.-W. 1889, p. 674 (hiernach wendet *Steiger* jetzt ähnliche Einmaleinskörper an, wie *Bollée*). Hergestellt unter dem Namen „Millionär“ in der Fabrik Stolzenberg in Oos (Baden).

152) Deutsche Patentschrift Nr. 88297 (1894). Neuerdings ist *Selling* zur mechanischen Lösung zurückgekehrt, wobei es ihm gelungen ist, die (bei *Bollée* und *Steiger*, wie bei *Thomas* u. a. noch vorhandene) Häufung der Widerstände bei der Zehnerübertragung zu vermeiden.

153) *Maurel* und *Jayet* waren mit ihrer Rechenmaschine[131]), trotzdem sie nur eine erweiterte Additionsmaschine ist, dem anzustrebenden Ziele schon näher gekommen, da bei derselben das Zählwerk nicht verlegt wird und mit der Einstellung des Multiplikators die Multiplikation beendigt ist.

eine Vorrichtung beschrieben[154]), durch die das Ideal einer Rechenmaschine in erkennbare Nähe gerückt erscheint; wenn die Ausführung gelänge, so brauchte man bei dieser Maschine die beiden, hier ganz gleich berechtigten Faktoren bloss einzustellen, und das Produkt stünde schon da.

19. Subtraktion und Division. Nebenzählwerk (Quotient). Von seltenen Ausnahmen[155]) abgesehen wird mit einer Rechenmaschine subtrahiert, indem nach Einstellung des Subtrahenden im Zählwerk (und des Minuenden im Schaltwerk, falls solches vorhanden) die Zifferscheiben des Zählwerks gezwungen werden, die den Ziffern des Minuenden entsprechenden (bezw. durch das Schaltwerk vorgezeichneten) Bewegungen rückwärts auszuführen. Bei der Rechenmaschine von *Thomas*[143]) und einigen andern, wie *Bollée*[149]) und *Steiger*[151]), wird gleichwohl die Kurbel immer in demselben Sinne gedreht, aber durch ein „Wendegetriebe“ bewirkt, dass nach Einstellen eines Hebels oder Knopfes auf „Subtraktion“ bezw. „Division“ die Zifferscheiben des Zählwerks ihre Bewegung umkehren. In neuerer Zeit nimmt der Gebrauch zu, die Maschinen so einzurichten, dass derselbe Zweck durch Rückwärtsbewegen der Kurbel (oder des ihr entsprechenden Gliedes) erreicht wird, wie dies schon bei der Rechenmaschine von *Leibniz*[140]) der Fall war und für den Rechner aus naheliegenden Gründen angenehmer ist[156]).

Um zu dividieren stellt man den Dividenden im Zählwerk, den Divisor im Schaltwerk ein, bringt die Ziffern höchsten Ranges beider Zahlen unter einander, subtrahiert nun den Divisor, so oft es geht, wodurch man die höchste Ziffer des Quotienten erhält, verlegt hierauf das Zählwerk um eine Stelle nach links (bezw. das Schaltwerk nach rechts), subtrahiert aufs neue den Divisor u. s. w.[157]).

---

154) Centralztg. f. Optik u. Mechanik, 1890, p. 242; beruht auf einfachen geometrischen Beziehungen.

155) Bis auf einige Additionsmaschinen, wie den Comptometer[124]), gehören dazu von neueren Rechenmaschinen nur die von *G. B. Grant* [s. Amer. J. sc. arts (3) 8 (1874), p. 277]. Die Zifferscheiben ihres Zählwerks können blos in einem Sinne gedreht werden und die Subtraktion irgend einer Ziffer geschieht durch Addition ihrer Ergänzung zu 10. Vgl. den Schluss der Nr. 14 sowie Anm. 114.

156) Unter den neueren Maschinen haben solche Einrichtung z. B. die von *Odhner*[144]), *Duschanek*[161]), *Büttner*[146]) (ist gleichzeitig mit Umsteuerung versehen), *Esser*[159]), *Küttner*[147]), unter den älteren die von *Mahon*[135]), *Maurel* und *Jayet*[131]), *Staffel*[163]) (bei dieser musste ausserdem noch ein Zeiger auf „Subtraktion“ gestellt werden).

157) Eine Ausnahme bildet die Maschine von *Tschebyscheff*[113]): es wird im

Die meisten, für alle vier Grundrechnungsarten bestimmten Maschinen haben ein besonderes Zählwerk — Neben- oder Teilerzählwerk[158]) — in welchem beim Multiplizieren der Multiplikator, beim Dividieren der Quotient erscheint und das aus letzterem Grunde gewöhnlich der *Quotient* ($Q-Q$ in Fig. 13, 16—18, 20) genannt wird[159]).

20. Besondere Einrichtungen. Man würde es heute als einen grossen Mangel empfinden, wenn eine Rechenmaschine keinen „*Auslöscher*" hätte, mit Hülfe dessen alle Zifferscheiben des Zählwerks rasch in die Nullstellung zurückgeführt werden können[160]). Bei den neueren Rechenmaschinen auch im Quotienten (s. Nr. **19**) angebracht[161]), ist diese Vorrichtung (die gewöhnlich mittels eines Knopfes oder Hebels durch Drehen oder Druck in Thätigkeit gesetzt wird, in den Figuren 13, 14, 16 u. s. w. mit L bezeichnet) stetig verbessert worden.

Schon *Joh. Helfrich Müller*'s Rechenmaschine (1783)[162]) liess eine *Glocke* ertönen, sobald ihr zugemuthet wurde, eine Zahl von einer kleineren abzuziehen, oder grössere Ergebnisse zu bilden, als das

---

Zählwerk die Ergänzung des Dividenden zu einer höheren Potenz von 10 eingestellt und der Divisor addiert, was einer Abart der komplementären Division (s. Nr. **2**) entspricht.

158) Bei der „circular calculating machine" von *J. Edmondson* [s. Philos. Mag. (5) 20 (1885), p. 15; Abb. *Dyck's* Katalog p. 151, *von Bohl* p. 151] sind Haupt- und Nebenzählwerk mit einander vereinigt. Der kreisförmige Bau derselben gestattet, jede Ziffer des Zählwerks jeder Ziffer des Schaltwerks gegenüber zu bringen, so dass eine nicht aufgehende Division beliebig lange ohne neue Einstellung des Restes fortgesetzt werden kann.

159) Mit einem solchen waren bereits die Maschinen von *Hahn* [141]) und *Müller* [162]) ausgestattet; die Maschine von *Thomas* [143]) ist es erst seit 1858. — Zehnerübertragung ist gewöhnlich im Quotienten nicht vorgesehen, sodass bei Maschinen mit Kurbel die Drehungen der letzteren blos dann richtig angezeigt werden, wenn ihre Zahl in keiner Stelle mehr als 9 beträgt. Bei wissenschaftlichen Rechnungen wäre diese Zehnerübertragung oft erwünscht; sie kommt vor bei der Maschine von *H. Esser*, D. R. P. Nr. 82965 (1892) und der „Duplex"-Rechenmaschine von *Küttner* [147]); bei *Selling*'s älterer Maschine [136]) versteht sie sich von selbst.

160) Wir finden einen solchen schon in der Rechenmaschine von *Leibniz* (s. die polygonalen Scheiben $L-L$ in Fig. 11, deren Bedeutung *Burkhardt* [129]) erkannt hat) während der Arithmometer von *Thomas* [143]) ihn erst um 1858 erhielt.

161) Bei der Maschine von *K. Duschanek*, D. R. P. Nr. 26778 (1883), s. Polyt. J. 260 (1886), p. 264, können alle drei Systeme von Ziffern durch eine einzige Kurbeldrehung auf Null gestellt werden; bei derjenigen von *Edmondson* [158]) lassen sich die Ziffern des inneren Kreises, in welchem Haupt- und Nebenzählwerk vereinigt sind, nach Belieben insgesamt oder teilweise auslöschen.

162) S. Götting. Anzeigen, 120. Stück, 1784, S. 1201; *Müller*'s „Beschreibg. seiner neu erfund. Rechenmaschine . . .", hrsg. von *Ph. E. Klipstein*, Frankfurt und Mainz 1786; *Dyck*'s Katalog p. 148 (m. Abb.).

Zählwerk fassen konnte. Auch *J. A. Staffel*'s Maschine (1845)[163]) hatte diese Warnungsglocke, die man jetzt in vielen Rechenmaschinen antrifft[164]).

Wichtig, obwohl noch selten angewendet, ist ein *Druckwerk*, bestehend in Vorrichtungen zum automatischen Kopieren der eingestellten Zahlen und der Ergebnisse, wie solche schon bei den Additionsmaschinen (Nr. **15**) erwähnt wurden[165]).

Schon *Leibniz*[132]) spricht davon, dass ein *mechanischer Antrieb* an Stelle des Bewegens der Rechenmaschine durch die Hand des Rechners gesetzt werden könnte. Ausser in der Rechenmaschine von *A. Stern*[166]), die ein vollständiger Automat war, scheint dieser Gedanke noch nicht zur Ausführung gebracht worden zu sein[167]).

21. Ausführung zusammengesetzter Rechnungen. Ihre Kraft am besten entfalten können Rechenmaschinen der in Nr. **17** und Nr. **18** betrachteten Arten bei Ausdrücken der Form

$$ab \pm a_1 b_1 \pm a_2 b_2 \pm \cdots.$$

Wenn die Zahl a im Schaltwerk eingestellt und mit b multipliziert worden ist, lässt man das im Zählwerk erschienene Produkt ab stehen und führt in derselben Weise der Reihe nach die Multiplikationen

---

163) S. Tygodnik illustrowany, Warschau 1863, p. 207.

164) Z. B. in *A. Burkhardt*'s Maschine *Thomas*'scher Bauart[143]) seit 1885. — Durch Nichtbeachtung des dem Rechner gegeben Zeichens können Fehler entstehen.

165) Abgesehen von den Differenzenmaschinen (Nr. **22**) war damit wohl zuerst die Rechenmaschine von *Grant*[155]), dann die ältere Maschine von *Selling*[136]) versehen. Bei *A. T. Ashwell*'s offenbar von den Schreibmaschinen herübergenommener Konstruktion, D. R. P. Nr. 102935 und Nr. 103009 (1897) kann man sogar ein Blatt Papier, ohne es von der Maschine zu entfernen, nacheinander mit parallelen Reihen von Zahlenkolonnen bedrucken und es ertönt eine Glocke, wenn eine bestimmte Zahl von Reihen zum Abdruck gekommen ist.

166) S. Leipz. Litteraturztg. f. d. J. 1814, p. 244; Warschauer Gesellsch. d. Wiss. Roczniki 12 (1818), p. 106. Nach Einstellung der gegebenen Zahlen führte die Maschine ihre Operationen, deren Beendigung durch eine Glocke angezeigt wurde, allein aus. S. auch Anm. 173.

167) Bei der älteren Additionsmaschine von *Burrough*[125]) dienten allerdings Federn, welche durch einen Fusstritt gespannt und durch die Tasten lediglich ausgelöst wurden, zum Hervorbringen der Bewegungen. Nach *C. Dietzschold* (Die Rechenmasch., Leipzig 1882, p. 43 oben), wäre es leicht (entsprechend einem Vorschlage von *G. Zeuner*) an Rechenmaschinen mit Kurbel ein durch Pedal aufzuziehendes Laufwerk zum Antrieb der Hauptwelle anzubringen. Additionsmaschinen mit Uhrwerk und Tasten erwähnt *Dietzschold* p. 19 als von *Bieringer & Hebetanz* 1873 ausgestellt; eine solche wurde auch *Fr. Cuhel* 1890 unter Nr. 59377 patentiert.

$a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ... aus; die Addition bezw. Subtraktion[168]) jedes neu gebildeten Gliedes vollzieht sich von selbst[169]). *G. A. Hirn* hat gezeigt[170]), wie auch Ausdrücke, die in einem Aggregat von Gliedern der Form abc, d^2e, f^3 bestehen, ohne Niederschreiben von Zwischenergebnissen berechnet werden können. Das Ausziehen von Quadratwurzeln[171]), allgemeiner die Berechnung einer Wurzel einer beliebigen quadratischen Gleichung[172]), wird bei Anwendung einer Rechenmaschine ebenfalls zu einem mechanischen Verfahren, ebenso bei gleichzeitiger Benutzung zweier Rechenmaschinen das Ausziehen von Kubikwurzeln bezw. die Berechnung einer Wurzel einer kubischen Gleichung[172]). Zur Erleichterung der ersteren Operation sind einige Rechenmaschinen mit besonderen Vorrichtungen versehen worden[173]).

---

168) Bei der Rechenmaschine von *Thomas* [143]) und anderen erscheint, wenn man eine im Schaltwerk eingestellte Zahl von Null subtrahiert, im Zählwerk deren Ergänzung zu 10^n, wo n die Anzahl der Stellen des Zählwerks bezeichnet, m. a. W. die Maschine „entlehnt" Eins in der $(n+1)^{\text{ten}}$ Stelle und giebt es zurück, wenn eine grössere Zahl addiert wird. Positive und negative Glieder können deshalb in beliebiger Ordnung in die Maschine eingeführt werden. Dagegen bei der Maschine von *Maurel* und *Jayet* [131]), sowie der von *Bollée* [149]) ist es durch eine Hemmung unmöglich gemacht, eine Zahl von einer kleineren zu subtrahieren, beim Dividieren und Ausziehen von Quadratwurzeln ein Vorteil.

169) Insbesondere liefert jede Kurbeldrehung ein weiteres Glied einer arithmetischen Reihe a, $a \pm d$, $a \pm 2d, \ldots$, wenn das Anfangsglied a in das Zählwerk gebracht und die konstante Differenz d im Schaltwerk eingestellt ist. — Der Arithmaurel[131]) hat zwei Zählwerke; auf dem ersten (Fig. 14, $Z - Z$) können im Fall eines Ausdrucks obiger Form die Werte der einzelnen Glieder ab, $a_1 b_1, \ldots$, wenn man ihrer bedarf, abgelesen und dann ausgelöscht werden, im zweiten Zählwerk (Fig. 14, $Z' - Z'$) erscheint der Wert des ganzen Ausdrucks $ab \pm a_1 b_1 \pm a_2 b_2 \pm \cdots$. Es erleichtert dies manche Rechnungen, z. B. die Bestimmung des grössten gemeinschaftlichen Teilers zweier Zahlen. *Burkhardt* [143]) liefert Maschinen *Thomas*'scher Bauart auf Wunsch ebenfalls mit doppeltem Zählwerk, ferner Maschinen für abgekürzte Multiplikation (s. Nr. **25**).

170) Génie civil, 2^2, 1863, p. 160.

171) Man kann die gewöhnliche Methode zu Grunde legen. *A. Töpler* hat ein besonderes Verfahren angegeben [s. *F. Reuleaux*, Verh. V. f. Gewerbfleiss, 44 (1865), p. 112], welches darauf beruht, dass die Summe der n ersten ungeraden Zahlen gleich n^2 ist.

172) S. *R. Mehmke*, Zeitschr. Math. Phys. 46 (1901), Heft 4.

173) Z. B. die Maschinen von *Stern* [166]), *Staffel* [163]) und *Bollée* (Modell von 1892) [149]). *Stern* hat drei Maschinen konstruiert, von welchen die erste (1813) nur für die „vier Spezies", die zweite (1817) für das Wurzelausziehen bestimmt war, die dritte (1818) die beiden ersten in sich vereinigte. Die Mitteilung der Leipz. Litterat.-Ztg. von 1814, p. 244, *Stern* arbeite an einem Instrument zur Auffindung der Primzahlen, beruht wohl auf einer Verwechslung der polnischen Wörter für Quadratwurzel und Primzahl.

β. Maschinen zur selbstthätigen Ausführung zusammengesetzter Rechnungen.

22. Differenzenmaschinen. Die in der Überschrift genannten Maschinen haben den Zweck, mathematische, astronomische und dergleichen Tafeln, also Wertereihen von Funktionen, mit Hülfe der Differenzen verschiedener Ordnung (s. I E) zu berechnen und überdies zu stereotypieren. Sie bilden das einzige Mittel zur Herstellung gänzlich fehlerfreier Tafeln, woraus allein schon ihre Wichtigkeit erhellt. Der Gedanke geht auf *J. H. Müller* (1786) zurück[174]), aber erst *Ch. Babbage* war (1823) in der Lage, den Bau seiner (um 1812 erdachten) Differenzenmaschine in Angriff zu nehmen, wenn auch infolge ungünstiger äusserer Umstände (1833) die Arbeit wieder eingestellt werden musste[175]) [176]). Zur Ausführung gelangte zuerst (1853, ein zweites Exemplar 1858) die (1834 erfundene) Differenzenmaschine von *Georg* und *Eduard Scheutz* (Vater und Sohn)[177]) [178]). Von ähnlicher Wirkungsweise[179]), aber in der Bauart vereinfacht, sind die

---

174) „Beschreibg. seiner neu erfund. Rechenmaschine", hrsg. von *Ph. E. Klipstein*, Frankf. u. Mainz 1786, p. 48.

175) S. Polyt. J. 47 (1832), p. 441, ferner:

176) *Babbage*'s Calculating engines, London (Spon) 1889. (Sammlung zahlreicher zerstreuter Arbeiten über die Rechenmaschinen von *Ch. Babbage.*)

177) S. *H. Meidinger*, Polyt. J. 156 (1860), p. 241, 321. Abb. *von Bohl* p. 189. Beschreib. der Einzelheiten in Brit. patent specific., Oct. 17, 1854, Nr. 2216.

178) *George* et *Edouard Scheutz*, Spécimen de Tables calculées stéréotypées et imprimées au moyen d'une machine, Paris 1858, (1857 in London englisch erschienen). — Tables of lifetimes, annuities and premiums, with an introduction by *W. Farr*, London 1864.

179) Fünf Zählwerke mit je 15 Stellen sind vorhanden, eines für die Werte der Funktion $u = f(x)$, die übrigen für die Differenzen [I E, Nr. 2] der ersten vier Ordnungen, von welchen die der vierten Ordnung einander gleich vorausgesetzt sind. Die anfänglichen Einstellungen sind:

$$u_0,\quad \Delta u_{-1},\quad \Delta^2 u_{-1},\quad \Delta^3 u_{-2},\quad \Delta^4 u.$$

Bei der ersten halben Umdrehung addiert die Maschine die Differenzen gerader Ordnung $\Delta^4 u$ und $\Delta^2 u_{-1}$ zu den benachbarten Differenzen $\Delta^3 u_{-2}$ bezw. Δu_{-1}, wodurch diese in $\Delta^3 u_{-1}$ und Δu_0 übergehen; bei der zweiten halben Umdrehung der Kurbel werden die ungeraden Differenzen $\Delta^3 u_{-1}$ und Δu_0 zu den benachbarten Zahlen $\Delta^2 u_{-1}$ und u_0 addiert, sodass in den Zählwerken jetzt

$$u_1,\quad \Delta u_0,\quad \Delta^2 u_0,\quad \Delta^3 u_{-1},\quad \Delta^4 u$$

erscheinen, also die Indices alle um Eins gewachsen sind. Ist $\Delta^4 u$ thatsächlich nicht konstant, so darf es bei Abrundung auf eine bestimmte Zahl von Stellen wenigstens eine Strecke weit als konstant angesehen werden.

Differenzenmaschinen von *M. Wiberg* [180]) und *George B. Grant* [181]), von welchen die erste gleich der *Scheutz*ischen [178]) bemerkenswerte Proben ihrer Leistungsfähigkeit abgelegt hat [182]).

23. Analytische Maschinen. Die 1834 von *Ch. Babbage* erfundene „analytical engine" [176]) [183]) hat die Bestimmung, arithmetische oder analytische Operationen irgend welcher Art [184]) an beliebigen gegebenen Zahlen auszuführen und die Ergebnisse zu drucken. Die Formeln oder Vorschriften, nach denen die Maschine rechnen soll, werden ihr in Gestalt durchlochter Kartons (ähnlich den in der Jacquard-Weberei benützten) dargeboten. Bis jetzt ist nur ein kleiner (jedoch benutzbarer) Teil dieser Maschine vollendet [185]).

B. Genähertes Rechnen.

Den Hülfsmitteln des Zahlenrechnens, die wir im folgenden zu betrachten haben, wohnt eine beschränkte Genauigkeit inne, was nicht ausschliesst, dass einzelne von ihnen bei geeigneter Verwendung auch zum genauen Rechnen dienen können (s. Anhang, Nr. **59**), wie umgekehrt natürlich die im ersten Abschnitt vorgeführten alle auch beim genäherten Rechnen anwendbar sind. Zunächst ist:

24. Das Rechnen mit ungenauen Zahlen im allgemeinen zu besprechen. Nicht nur sind alle durch Messungen gefundenen Zahlen — sie seien denn ihrer Natur nach ganze Zahlen — mehr oder weniger ungenau, sondern es können auch irrationale Zahlen (die wir uns durch unendliche Dezimalbrüche dargestellt denken [I A 3, Nr. **9**]) immer nur unvollständig angegeben, also nicht genau in die Rechnung eingeführt

---

180) S. *Delaunay*, Par. C. R. 56 (1863), p. 330.

181) Amer. J. sc. arts (3) 2 (1871), p. 113.

182) So erschienen 1875 in Stockholm die ausführl. 7-stelligen „Logarithm-Tabeller, uträknade och tryckte med räknemaskin af Dr. *M. Wiberg*".

183) Neben [176]) sei als leichter zugänglich genannt die Mitteilung von *L. F. Menabrea*, Par. C. R. 99 (1884), p. 179.

184) So ist [176]) p. 45 f. angegeben, wie die Maschine verfährt, um die *Bernoulli*'schen Zahlen [I E Nr. **10**; II A 3, Nr. **18**) zu berechnen.

185) Im Namen einer von der British Association niedergesetzten Kommission, die darüber befinden sollte, ob es sich empfehle, die Maschine auszuführen und Tafeln mit ihr zu berechnen, hat *C. W. Merrifield* 1878 es für ratsam erklärt, die Maschine zu spezialisieren, z. B. nur für Multiplikation oder für die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen (bezw. die Berechnung von Determinanten, s. I A 2) einzurichten, s. [176]) p. 323 = Brit. Ass. Rep. 1878. — Wegen eines „piano arithmétique" von *Genaille* zur Prüfung grosser Primzahlen s. Assoc. franç. 20^1, Marseille 1891, p. 159.

werden. Wenn eine dekadisch geschriebene Zahl mit einer grösseren Anzahl von Stellen gegeben ist, als ihrer verbürgbaren oder der für einen bestimmten Zweck notwendigen Genauigkeit entspricht, so wird man sie *verkürzen* (abkürzen), d. h. rechts eine Anzahl von Stellen weglassen (bezw. durch Null ersetzen, wenn keine Dezimalstellen vorhanden sind[186])). Die meisten Rechner befolgen hierbei die Regel, die letzte behaltene Ziffer um Eins zu erhöhen, wenn die rechts folgende (erste weggelassene) Ziffer 5 oder grösser als 5 war („Abrunden")[187]); so wird erreicht, dass der Fehler einer verkürzten Dezimalzahl höchstens eine halbe Einheit der letzten angegebenen Stelle (statt bis zu einer vollen) betragen kann. Verlangt man, dass nach mehrmaligem Kürzen einer Zahl sich dasselbe ergiebt, wie wenn um die betreffende Gesamtzahl von Stellen auf einmal gekürzt worden wäre, so ist es notwendig, bei der Endziffer 5 zu unterscheiden, ob sie durch Erhöhung aus 4 entstanden („kleine 5"[188]), gewöhnlich $\underline{5}$ geschrieben[189])), oder schon vorher 5 gewesen ist („grosse 5"[188])) [190]).

Die eigentliche, von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen abhängige Fehlerrechnung ist in I D 2 erledigt worden; einfacheren Methoden zugänglich und deshalb ausser in Monographieen[191]) [192]) auch in

186) Die Schreibweise lässt dann zwar nicht erkennen, sondern es muss ausdrücklich gesagt werden, dass und auf wieviel Stellen verkürzt worden ist. (*A. Gernerth* hängt in seinen fünfstelligen Logarithmentafeln, Wien 1866. jeder vollständigen Zahl einen Punkt an, zur Unterscheidung von den unvollständigen Zahlen.)

187) Sie wurde schon von *J. Kepler* angewendet (vgl. die aus dem J. 1623 stammenden Beispiele einer abgekürzten Multiplikation und Division, Opera omnia, ed. *Frisch,* 7, Greifswald 1855, p. 296), dagegen noch nicht bezw. nicht folgerichtig von *Bürgi* [206]) u. *Prätorius* [207]).

188) Vgl. *F. G. Gauss,* Fünfstell. logarithm. u. trigonom. Tafeln, Berlin 1870, Einleitung.

189) Wegen anderer Arten, die Erhöhung zu bezeichnen, s. Anm. 237.

190) Weniger nötig, aber dennoch bei manchen Tafeln (s. Anm. 237) durchgeführt, ist bei anderen Endziffern die Unterscheidung, ob Erhöhung vorliegt oder nicht. Sie giebt das Vorzeichen des Fehlers, ohne die Grenze für dessen absoluten Betrag herabzusetzen. Diese wird auf 0,25 Einheiten der letzten Stelle erniedrigt, wenn man (wie dies z. B. *Gernerth* [186]) p. 121 als „zweite Methode" auseinandersetzt) jede nicht erhöhte Endziffer um 0,25 vermehrt, jede erhöhte um 0,25 vermindert, was aber, als zu umständlich, selten geschieht. *J. Kepler* erreichte denselben Zweck, indem er (in seiner „Chilias Logarithmorum", Marpurgi 1624 = Opera 7, p. 392; Erklärg. p. 347) der letzten Ziffer eines unvollständigen Dezimalbruchs ein + oder ein — beifügte, wenn derselbe um einen Betrag zwischen 0,25 und 0,5 Einheiten der letzten Stelle zu klein bezw. zu gross war.

191) Z. B. *J. Vieille,* Théorie génér. des approximations numér., Paris 1852,

vielen elementaren Lehrbüchern der Arithmetik (namentlich in französischen)[192] [193]) mehr oder weniger vollständig und zutreffend behandelt sind die Fragen, die sich nur auf die grösstmöglichen Werte der Fehler beziehen. Zwei Aufgaben bieten sich hauptsächlich dar: 1) Den Fehler zu bestimmen, der dem Ergebnis einer Rechnung höchstens anhaften kann, wenn die Fehler der in die Rechnung eingehenden Zahlen gegebene Werte nicht überschreiten; 2) eine Rechnung mit möglichst geringem Aufwand an Ziffern so auszuführen, dass die für das Ergebnis vorgeschriebene Genauigkeit gesichert ist[194]). Es genügt, die absoluten Beträge der Fehler in Betracht zu ziehen[195]).

Bezüglich der ersten Aufgabe sei folgendes mitgeteilt. Der Fehler einer Summe oder Differenz ist höchstens gleich der Summe der Fehler der einzelnen Glieder[196]). Die entsprechenden Beziehungen für Produkt, Quotient, Potenzen und Wurzeln sind ebenfalls bekannt und mittelst elementarer Methoden zu gewinnen[197]). Einfacher und in schwierigeren Fällen nicht zu umgehen ist es, mit *Guyou*[198]) sich der Differentialrechnung zu bedienen. In dem zu berechnenden Ausdruck ersetzt man die ungenauen oder unvollständigen Zahlen durch die Buchstaben $a, b, c, \ldots$, bildet hierauf, wenn $f(a, b, c, \ldots)$ eben jenen Ausdruck bezeichnet, die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}, \frac{\partial f}{\partial c}, \cdots$, setzt in jeder für a — unter a_1 den gegebenen Näherungswert dieser Zahl, unter Δa den Höchstbetrag ihres Fehlers verstanden — denjenigen der beiden Werte $a_1 + \Delta a$ und $a_1 - \Delta a$ ein, zu welchem

2. éd. 1854; *Babinet-Housel,* Calculs pratiques, Paris 1857; *Ch. Ruchonnet,* Éléments de calcul approximatif, Lausanne 1874, 4. éd. 1887; *Ch. Galopin-Schaub,* Théorie des approxim. numér., Genève 1884; *E. M. Langley,* A treatise on computation, London 1895; *J. Griess,* Approxim. numér., Paris 1898. „Lüroth" Kap. 5 und 6.

192) Die deutsche Litteratur ist ziemlich erschöpfend angegeben und kritisch besprochen in *E. Kullrich,* Die abgekürzte Dezimalbruchrechnung, Progr. Schöneberg 1897/98.

193) Genannt seien: *J. A. Serret,* Traité d'arithmétique, 7. éd. Paris 1887; *J. Tannery,* Leçons d'arithmétique théorique et pratique, Paris 1894, 2. éd. 1900.

194) Vielleicht zuerst gestellt, wenn auch nicht gelöst, von *F. Wolff,* Theoret.-prakt. Zahlenlehre, Berlin 1832.

195) Die Einschliessung jeder ungenauen Zahl zwischen zwei Grenzen ist dabei ebenso gut erreicht, aber die Formeln und Regeln werden einfacher, als wenn man (wie *Vieille* a. a. O.) die Vorzeichen der Fehler berücksichtigt.

196) *C. Fr. Gauss,* Theoria motus corporum coelestium, Hamburg 1809, art. 31, Schluss.

197) Vgl. *Griess* a. a. O. p. 14 f.

198) Nouv. Ann. de mathém. (3) 8 (1889), p. 165; ausführlicher *Griess* a. a. O.; Ansätze bei *Ruchonnet*, *Vieille* und schon *Gauss*[196]).

der absolut grössere Wert der betreffenden Ableitung gehört und verfährt ähnlich mit $b, c, \ldots$; dann ist, wenn man die fraglichen Absolutwerte jener Ableitungen mit $A, B, C, \ldots$ bezeichnet, der Fehler von f höchstens:

$$(1) \qquad \Delta f = A \cdot \Delta a + B \cdot \Delta b + C \cdot \Delta c + \cdots.$$

Bis jetzt haben wir nur den sogenannten *absoluten* Fehler, den Unterschied zwischen dem genauen und dem ungenauen Wert, ins Auge gefasst. Ein besseres Mass für die Ungenauigkeit einer Zahl ist eigentlich der (oft in Prozenten ausgedrückte) *relative* Fehler, d. h. der Quotient aus dem absoluten Fehler und dem genauen Wert, jedoch ist bei der vorliegenden Aufgabe seine Benützung blos bei „Monomen", Ausdrücken der Form:

$$f = \frac{a b^m \ldots}{c \sqrt[n]{d} \ldots}$$

zu empfehlen[199]), wo man (mit den obigen Bezeichnungen):

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta a}{a} + m \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} + \frac{1}{n} \frac{\Delta d}{d} + \cdots$$

setzen kann[200]).

Zuweilen wird von der Anzahl der genauen Ziffern ausgegangen. Eine ungenaue Zahl hat m genaue Ziffern, wenn ihre m ersten Ziffern links mit denjenigen gleichen Ranges in der Entwicklung der zugehörigen genauen Zahl in einen Dezimalbruch übereinstimmen. Die von jenen Ziffern gebildete Zahl ist dann ein unterer (zu kleiner) Näherungswert, dessen Fehler höchstens eine Einheit der m^{ten} Stelle beträgt. Umgekehrt, wenn der (absolute) Fehler einer Zahl nicht grösser als 10^{-m} ist, so hat sie $(m-1)$ genaue Dezimalen, ausser die m^{te} Ziffer ist 0 oder 9, in welchem Falle man sich nur auf $(m-2)$ Dezimalen verlassen kann[201]). Wenn zwei Zahlen mit m bezw. n genauen Ziffern bekannt sind und $m < n$ ist, so kann man bei ihrem Produkt oder ihrem Quotienten im allgemeinen auf $(m-2)$ genaue Ziffern rechnen, aber nur auf $(m-3)$, wenn a mit der Ziffer 1 beginnt[202]).

---

199) *Vieille* operiert meist mit dem relativen Fehler, was grosse Verwicklungen herbeiführt.

200) *Griess* [191]) p. 18.

201) S. *Griess* a. a. O. — Setzt man die Anzahl der genauen Ziffern zu dem relativen Fehler in Beziehung, so kommt noch die erste geltende Ziffer in Betracht, s. *Vieille* u. *Griess* a. a. O.

202) *Griess* a. a. O. p. 19; *Vieille* giebt andere Regeln an. Weitere Sätze dieser Art, auch für Quadrat- und Kubikwurzeln, bei *Griess*.

Zur zweiten der oben genannten Aufgaben übergehend, nehmen wir an, die Genauigkeit, mit der eine Formel $f(a, b, c, \ldots)$ berechnet werden soll, sei geringer als die, welche bei direktem Einsetzen der gegebenen ungenauen Zahlen $a, b, c, \ldots$ sich herausstellen würde, so dass letztere Zahlen gekürzt werden können. Das durch Einsetzen der gekürzten Zahlen entstehende vorläufige Ergebnis wird im allgemeinen überflüssige Ziffern enthalten; durch Abrunden desselben auf die Anzahl von Stellen, welche der verlangten Genauigkeit entspricht, begeht man einen Fehler, der eine halbe Einheit der letzten behaltenen Stelle betragen kann[203]). Soll daher das endgültige Ergebnis auf n Einheiten einer gewissen Stelle richtig sein, so müssen die gegebenen Zahlen $a, b, c, \ldots$ mit solcher Genauigkeit in die Rechnung eingeführt werden, dass der Fehler des vorläufigen Ergebnisses höchstens $\varepsilon = n - \frac{1}{2}$ Einheiten der fraglichen Stelle beträgt. Die Aufgabe ist unbestimmt, da in Gleichung (1) die Fehlergrenzen $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \ldots$ auf unendlich viele Arten so gewählt werden können, dass die Bedingung $\Delta f \leqq \varepsilon$ erfüllt wird. Das einfachste ist, mit *Guyou*[198]):

$$A \cdot \Delta a < \frac{\varepsilon}{m}, \quad B \cdot \Delta b < \frac{\varepsilon}{m}, \quad C \cdot \Delta c < \frac{\varepsilon}{m}, \cdots$$

also:

$$\text{(2)} \qquad \Delta a < \frac{\varepsilon}{mA}, \quad \Delta b < \frac{\varepsilon}{mB}, \quad \Delta c < \frac{\varepsilon}{mC}, \cdots$$

zu setzen, wo m die Anzahl der Grössen $a, b, c, \ldots$ bedeutet[204]). Vor dieser allgemeinen Methode waren für die einfachen Rechnungsarten wiederholt Regeln angegeben worden, von der Art, dass, um die Addition als Beispiel zu nehmen, bis zu einer gewissen Anzahl von Summanden jeder mit einer Stelle mehr eingeführt werden soll, als man im Ergebnis zu behalten gedenkt („überzählige" Stelle oder „Überstelle"), und ähnliche[205]).

---

203) S. *Guyou*[198]). Dieser Umstand wird häufig übersehen; berücksichtigt, aber noch wenig hervorgehoben, schon bei *Harms,* Das abgekürzte Rechnen, Progr. Realsch. Oldenburg 1872.

204) Da bei diesen Fehlergrenzen 1 oder 2 geltende Ziffern genügen, so wird man sich das Ausrechnen derselben durch Abrunden aller Zahlen möglichst erleichtern, wobei es statthaft ist, die rechten Seiten zu verkleinern. *Guyou* bringt das Ganze in ein zweckmässiges Schema, mit Kolonnen für die auszuführenden Operationen, die notwendigen Annäherungen u. s. w.

205) *Babinet* wollte sich noch bei 20 Summanden mit einer Überstelle begnügen, andere [z. B. *J. Vinot,* Ann. Génie civil, 2^2 (1863), p. 172] sind auf 10, ja auf 8, 6, 3 (vgl. *Kullrich* a. a. O.) Summanden herunter gegangen; wenn man jedoch anstrebt, das Ergebnis auf eine halbe Einheit der letzten Stelle genau

I. Das Rechnen ohne besondere Vorrichtungen.

25. Abgekürzte Multiplikation und Division. Bildet man das Produkt zweier ungenauen Zahlen auf die gewöhnliche Weise, so ergeben sich rechts eine Anzahl überflüssiger, weil ungenauer Ziffern. Deshalb wandten schon *Joost* (*Jobst*) *Bürgi*[206]), *Joh. Prätorius*[207]) und namentlich *Joh. Kepler*[208]) die sogenannte abgekürzte Multiplikation an. Bei derselben wird mit der höchsten Ziffer des Multiplikators begonnen und beim Übergang zu den rechts folgenden Ziffern des letzteren der Multiplikand jedesmal um eine Stelle gekürzt, sodass die Teilprodukte mit Ziffern gleichen Ranges abbrechen. Es empfiehlt sich, das Dezimalkomma im Multiplikator hinter die erste geltende Ziffer zu bringen[209]). Der grösseren Genauigkeit wegen wird der erste Teilmultiplikand entweder mit einer Stelle mehr genommen („Überstelle"), als im Produkt schliesslich behalten werden sollen[210]) oder mit zwei Überstellen[211]) oder sogar drei[212]), wobei einige die nachträgliche Verkürzung schon an den Teilprodukten vornehmen[213]), manche wenigstens teilweise[214]), andere erst an dem gesuchten Produkt[215]).

---

zu erhalten, so würde schon (wie *Kullrich,* der bei nicht mehr als 20 Summanden zwei Überstellen anwenden will, bemerkt) bei zwei Summanden eine Überstelle nicht immer ausreichen und es kann sogar durch Hinzunahme weiterer Überstellen der Fehler grösser werden. — Nicht minder mannigfaltig sind die für die Multiplikation u. s. w. aufgestellten Regeln. Man möge daraus ersehen, wie wenig übereinstimmend noch die Ansichten auf diesem Gebiete sind.

206) In der handschriftlichen, kurz nach 1592 geschr. „Arithmetica", vgl. *Cantor,* Vorles. üb. Gesch. d. Math. 2, p. 618.

207) Vgl. *Max Curtze,* Zeitschr. Math. Phys. 40 (1895), hist.-litter. Abt., p. 7.

208) Opera omnia 7, p. 306, 372 u. a. *Kepler* weist auf *Prätorius* zurück, verfährt aber etwas anders, als letzterer.

209) *F. Wolff*[194]). Natürlich muss zum Ausgleich im Multiplikanden das Komma um ebensoviel Stellen in der umgekehrten Richtung versetzt werden.

210) So *Prätorius, Kepler* a. a. O. p. 306; *R. Baltzer,* Elemente d. Mathem. (p. 48 der 7. Aufl., Leipz. 1885).

211) So *Bürgi, Kepler* a. a. O. p. 372; *Cauchy* (Anm. 217); *Vieille, Babinet, Griess* u. a.

212) Z. B. *Krönig,* Über Mittel zur Vermeidung u. Auffindung v. Rechenfehlern, Progr. Berlin 1855; *Kullrich* a. a. O.

213) *Kepler* a. a. O. p. 306 und *Baltzer.*

214) Es kürzen die Teilprodukte schon um eine Stelle bezw. berücksichtigen den von einer weiteren Überstelle herrührenden Übertrag z. B. *Bürgi, Kepler* a. a. O. p. 372, *Babinet, Kullrich.*

215) *Prätorius, Cauchy, Vieille, Griess, Krönig* (letzterer verfährt beim Abkürzen verschieden, je nachdem die drittletzte Ziffer $\lesseqgtr 4$) u. a. Schon die

Schreibt man die Einerziffer des Multiplikators über die letzte Ziffer des Multiplikanden, die noch berücksichtigt werden soll, und lässt links die übrigen Ziffern des Multiplikators in verkehrter Ordnung folgen, so kommt jede über die Ziffer zu stehen, bei welcher der zugehörige Teilmultiplikand abzubrechen ist[216]). Im Anschluss hieran die Multiplikation selbst als geordnete (s. Nr. **1**) auszuführen, liegt nahe[217]).

Ebenfalls schon von *Kepler* geübt wurde die abgekürzte Division[218]), die gewöhnlich mit der abgekürzten Multiplikation zusammen gelehrt wird und auf ähnlichen Gedanken beruht[219]). Die geordnete Division (Nr. **1**) eignet sich unmittelbar für das Rechnen mit ungenauen Zahlen[220]).

26. Abgekürztes Wurzelausziehen. Unter diesem Namen wird in den einschlägigen Lehrbüchern ein Verfahren beschrieben, um bei einer (Quadrat-, Kubik- oder höheren) Wurzel, von der eine Anzahl genauer Stellen auf irgend eine Art bestimmt worden sind[221]), un-

---

Teilmultiplikanden auf soviel Stellen abzurunden, als berücksichtigt werden sollen, wie *Müller* a. a. O. thut, ist nicht zweckmässig (vgl. *Kullrich* a. a. O. p. 23).

216) Sog. Regel von *W. Oughtred,* angeblich in dessen Artis analyticae praxis (1631?) zu finden, welche Schrift der Verfasser nicht einsehen konnte.

217) *A. Cauchy,* Par. C. R. **11** (1840), p. 847 = Oeuvres (1) 5, p. 443.

218) *Kepler* verweist auch bei dieser, a. a. O. p. 306, auf *Prätorius,* von welchem aber keine Beispiele bekannt zu sein scheinen. Identisch mit *Kepler*'s Verfahren ist das von *A. L. Crelle,* J. f. Math. **31** (1846), p. 167, der übrigens auch Genauigkeitsbetrachtungen anstellt.

219) Es versteht sich von selbst, dass nur der Quotient (mehr oder weniger genau) erhalten wird, nicht aber der Rest. Ausführliche Regeln bei *Serret* a. a. O. p. 130 f.

220) *J. C. Houzeau* [Brux. Bull. (2) **40** (1875), p. 101 f.] zeigt noch eine „division en série", „div. par approximations successives" und einige andere Methoden, die aber nicht als zweckmässig bezeichnet werden können; wegen einer von demselben Verf. erwähnten „multiplication sommaire" vgl. Anhang, Nr. **59**.

221) Wegen der gewöhnlichen Methoden zum Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln muss auf die Lehrbücher der Arithmetik (s. etwa *Serret* p. 145 f.) verwiesen werden. S. auch „Lüroth" Kap. 9. Übrigens ist es, wenn eine grössere Zahl genauer Ziffern verlangt ist, sodass Logarithmen nicht ausreichen, am zweckmässigsten, entsprechend der Auffassung von $\sqrt[p]{N}$ als Wurzel der Gleichung $x^p - N = 0$, die allgemeinen Verfahren zur Auflösung numerischer Gleichungen (I B 3 a, Nrn. **10**—**14**) anzuwenden (so mit besonderem Vorteil die Methode von *K. Runge* und *W. Fr. Meyer,* ib. p. 440, Anm. 36)); insbesondere ist dasjenige von *Horner* (dieser Band p. 436) schon bei Quadratwurzeln bequemer als jedes andere (vgl. *H. Scheffler,* Die Auflösung der algebr. u. transcend. Gleichungen,

gefähr ebensoviel weitere genaue Stellen durch eine blosse Division zu finden. In der *Newton*'schen Näherungsmethode [I B 3a, Nr. **10**] als besonderer Fall enthalten, besteht dasselbe darin, für den gegebenen Näherungswert a von $\sqrt[p]{N}$ die Verbesserung δ aus der Formel:

$$\delta = \frac{N - a^p}{p a^{p-1}}$$

zu berechnen[222]).

II. Numerische Tafeln.

Monographien s. Anm. 18.

27. Logarithmentafeln. Sie bilden seit Erfindung der Logarithmen[223]) ohne Frage das wichtigste Werkzeug in der Hand des Rechners, unentbehrlich für ganze Gebiete des wissenschaftlichen Rechnens.

Die nach Erklärung der Logarithmen auf p. 25 dieses Bandes durch die Gleichungen I—IV ausgedrückten Grundeigenschaften derselben zeigen, dass mit ihrer Hülfe nicht nur (wie mittelst der Tafeln der Viertelquadrate und der Dreieckszahlen, s. Nr. **6**) die Multiplikation, sondern auch die Division auf Addition bezw. Subtraktion sich zurückführen lässt, und überdies die Potenzierung und Radizierung auf Multiplikation bezw. Division. (Wegen der Erniedrigung der Operationsstufen um zwei Einheiten s. Nr. **31**.)

Den Vorrang behaupten (als für das Rechnen am bequemsten) die sogenannten *gemeinen* oder *Briggs*'schen Logarithmen, deren Basis 10 ist; die Angabe der Basis unterbleibt bei ihnen. (Wegen anderer Logarithmensysteme s. den Schluss dieser Nummer.) Man schreibt jeden Logarithmus dezimal[224]); der ganzzahlige Teil, welcher nur von

---

Braunschweig 1859, p. 20f.). — Wie 2$^{\text{te}}$, 3$^{\text{te}}$, 5$^{\text{te}}$ Wurzeln aus Zahlen mit höchstens 5, bezw. 6, bezw. 10 Ziffern im Kopfe ausgezogen werden können, zeigt *H. Schubert* in seinen „mathemat. Mussestunden", 2. Aufl., Leipzig 1900, p. 184f.

222) Um bei mehrmaliger Verbesserung wiederholte Divisionen zu vermeiden, setzt *Cauchy*[217]), p. 857 = Oeuvres (1) 5, p. 453:

$$\delta = \frac{1}{pN} a (N - a^p),$$

wo $\frac{1}{pN}$ im voraus berechnet wird.

223) Betreffs der Geschichte s. etwa *Ch. Hutton,* Mathem. Tables, London 1785 (u. spätere Auflagen bis zur 6. von 1822 einschl.), Introduction; *Glaisher* p. 49—55 (der Anteil *Bürgi*'s nicht richtig gewürdigt); *Cantor* 2, p. 725—747; vgl. auch Anm. 272.

224) Als Dezimalzeichen wird in Deutschland ziemlich allgemein bei Loga-

der Stellung des Kommas im Logarithmanden oder „Numerus“ abhängt, wird die *Kennziffer* oder *Charakteristik* genannt und in den Tafeln gewöhnlich weggelassen, der angehängte Dezimalbruch ist durch die Folge der Ziffern des Numerus allein bestimmt und heisst die *Mantisse*[225]). Hat der Numerus n ganze Stellen, so ist $(n-1)$ die Kennziffer des zugehörigen Logarithmus. Der Logarithmus eines echten Bruchs ist zwar negativ, jedoch wird die Mantisse positiv geschrieben und das Vorzeichen auf die Kennziffer geworfen, welch' letztere $-m$ ist, wenn der ersten geltenden Ziffer des Numerus m Nullen (diejenige vor dem Komma mitgerechnet) vorangehen[226]). Statt einen Logarithmus zu subtrahieren, kann man seine Ergänzung zu 10 — *dekadische Ergänzung*, complementum logarithmi oder *Cologarithmus* genannt — addieren[227]).

Die Logarithmentafeln sind so zahlreich, dass nicht einmal die

---

rithmen der Punkt, bei allen anderen Zahlen das Komma verwendet — eine zweckmässige Unterscheidung (vgl. *E. Hammer,* Lehrb. der eben. u. sphär. Trigonom., 2. Aufl., Stuttgart 1897, p. 549, Anm. 8).

225) Das Wort mantisa oder mantissa stammt nach einer Stelle bei Festus, Pauli excerpta (ed. *E. O. Müller*) p. 132, 10 aus dem Etrurischen und bedeutet eine (unnütze) Zugabe. S. noch *E. Hoppe,* Hamb. Math. Ges. Mitt. 4 (1901), p. 52. — *L. Schrön*[252]) nennt jede der Kennziffer angehängte Dezimalstelle eine Mantisse, spricht also von der 1., 2., . . . Mantisse, statt, wie sonst üblich, von der 1., 2., . . . Ziffer der Mantisse. — *K. Fr. Gauss* benützt (Disqu. arithm., art. 312) das Wort Mantisse auch für die Reihe der Dezimalen, die sich bei der Verwandlung eines gewöhnlichen Bruchs in einen Dezimalbruch ergeben.

226) Manche setzen diese Kennziffer mit — darüber vor die Mantisse, z. B. $\log 0{,}04 = \bar{2}.60206$ statt $0.60206 - 2$; verbreiteter und wohl auch vorzuziehen ist die Gewohnheit, statt der negativen Kennziffer ihre positive Ergänzung zu 10 (bezw. dem nächst höheren Vielfachen von 10) zu nehmen, wobei das eigentlich noch anzuhängende -10 (bezw. das betr. Vielfache von -10) gewöhnlich nur hinzugedacht wird, z. B. $\log 0{,}04 = 8.60206$, oder vollständig $8.60206-10$.

227) Geschrieben E log oder cpl. log oder colog. Sehr vorteilhaft namentlich bei Rechnungen, die aus Multiplikationen und Divisionen zusammengesetzt sind. Man bildet die dekadische Ergänzung eines Logarithmus im Kopfe, indem man, links anfangend, jede Ziffer von 9 subtrahiert, bis auf die letzte geltende Ziffer, die von 10 zu subtrahieren ist. — Besondere Tafeln der Cologarithmen sind zwar überflüssig, finden sich aber doch, z. B. in den 4-stelligen Tablas logarítmicas von *L. G. Gascó* (Valencia 1884) und (ebenfalls 4-stellig) in *Silas W. Holman*'s Computation rules and logarithms, New York 1896. Die von den Cologarithmen nur um eine Konstante verschiedenen Werte von $\log \frac{\alpha}{x}$ (α und x in Sekunden ausgedrückte Winkel, α konstant, z. B. 1^0 oder $3600''$) sind unter dem Namen logistische oder proportionale Logarithmen öfters (mit 4 oder 5 Stellen) tabuliert worden, vgl. *Glaisher* p. 73.

bedeutendsten alle hier namhaft gemacht werden können[228]). Fassen wir zunächst diejenigen ins Auge, bei deren Benützung in der gewöhnlichen Weise mittelst Differenzen interpoliert wird[229]). (Wegen anderer s. Nr. 28.) *Adrian Vlack* (*Vlacq*) hat zum ersten mal die Logarithmen der ununterbrochenen Zahlenreihe von 1—100000 gegeben, und zwar mit 10 Dezimalstellen[230]). Von ihm haben alle Späteren abgeschrieben und eine Neuberechnung von Logarithmen[231]) in grossem Stile ist, abgesehen von der unter *R. Prony*'s Leitung am Ende des 18. Jahrhunderts erfolgten der handschriftlichen „Tables du

228) Die vollständigste Liste, über 553 Tafeln umfassend, verdankt man *D. Bierens de Haan:* Tweede ontwerp eener naamlijst van Logarithmentafels, Amst. Verh. 15 (1875), p. 1. [Vorher ging: Jets over Logarithmentafels, Amst. Versl. en Meded. (1) 14 (1862), p. 15.] Wo in den folgenden Anmerkungen ein Titel auf eine Tafel der Logarithmen der natürlichen Zahlen allein sich bezieht, ist ein * vorgesetzt. In allen anderen Fällen handelt es sich um Tafelsammlungen, die ausserdem noch Tafeln der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen [III A 2] und andere (z. B. Tafeln der natürl. Zahlenwerte der trigonom. Funktionen, Quadrattafeln u. s. w.) enthalten, welche Zugaben ausserordentlich wechseln, je nachdem die Sammlung den Bedürfnissen der Astronomen, Geodäten, Ingenieure, Nautiker gerecht werden will. Wegen der trigonom. Tafeln für die dezimale Teilung der Winkel s. *R. Mehmke,* Bericht üb. Winkelteilung, Deutsch. Math.-Ver. 8 (1900), insbes. Anm. 20, p. 149.

229) Die Handhabung der gewöhnlichen Logarithmentafeln ist sehr bekannt und darf hier um so eher unbesprochen bleiben, als in den allermeisten Tafeln ausführliche Anleitungen zum Gebrauche zu finden sind. Bei 10-stelligen Tafeln hat man zur Interpolation im allgemeinen auch die Differenzen 2. Ordnung nötig (s. Interpolation, I D 3, Nr. 6). Die kleinste Zahl der Logarithmen, die eine Tafel enthalten muss, wenn Interpolation mit 1. Differenzen möglich sein soll, untersucht *J. E. A. Steggall*, Edinb. Math. Soc. Proc. 10 (1891/92), p. 35.

230) In seiner (gleichzeitig lateinisch, französisch und holländisch herausgeg.) „Arithmetica logarithmica“, Goudae 1628, (die er bescheidener Weise als 2. Auflage von *H. Briggs*' 1624 unter gleichem Titel erschienenem Werke, das aber eine Lücke von 20000—90000 enthielt, bezeichnete); Ausgabe mit Titel und Erklärung in engl. Sprache von *George Miller*, London 1631. War neben *G. Vega*'s „Thesaurus“[246]), welchem sie von Manchem (z. B. *Glaisher*) vorgezogen wird, bis vor kurzem die einzige vollständige Tafel mit 10 Dezimalen (wird in den Katalogen meist unter *Briggs* oder *Neper* aufgeführt, welche Namen im ausführl. Titel stehen). *Glaisher* giebt in den Lond. Roy. Astr. Soc. Monthly Notices 32 (1872), p. 255 alle Stellen an, wo Fehler in *Vlack*'s Tafeln (über 600) veröffentlicht sind.

231) Wegen der thatsächlich angewandten oder zweckmässigsten Methoden vgl. etwa *Hutton*[223]) (bezügl. der älteren); *Vega*'s Thesaurus[246]), Einleitung; *A. Cauchy*, Par. C. R. 32 (1851), p. 610 = Oeuvres (1) 11, p. 382 (Bericht üb. e. Arbeit von *Koralek*, nur 7-stellige Logarithmen); *J. Glaisher*, Factor table for the fourth million, London 1879, Einleitung (üb. die Anwendung von Faktorentafeln, s. Nr. 9, bei der Berechnung); *Ellis*[275]); *K. Zindler,* Zeitschr. Realschulwesen 22 (1897), p. 398; s. auch Nr. 28.

Cadastre“ [232]), erst wieder in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts von *E. Sang* ausgeführt worden [233]). Man hat jedoch nicht versäumt, den überlieferten Vorrat an Logarithmen wiederholt zu prüfen [234]) und die ererbten Fehler [235]) allmählich auszumerzen, sodass nicht allein in immer noch unentbehrlichen älteren Tafeln, wie denen von *Vlack* [230]) und *Vega* [246]), die Fehler genau bekannt sind, sondern auch die neueren Auflagen der besten heutigen Tafeln als fehlerfrei gelten können [236]), wobei in Betreff der Richtigkeit der letzten Stelle zu bemerken ist, dass die Anforderungen sich immer mehr gesteigert haben [237]). Im übrigen hat sich besonders im 19. Jahrhundert das Bestreben geltend

232) Es gehören dazu Tafeln der trigonometrischen Funktionen und ihrer Logarithmen für Dezimalteilung des Quadranten. Der Druck ist begonnen, aber nicht zu Ende geführt worden. Genaueste Beschreibung von *F. Lefort*, Paris Observ. Ann. 4 (1858), p. 123. *Sang* hat (Edinb. Roy. Soc. Proc. 1874/75, pp. 421, 581) die Zuverlässigkeit dieser Tafeln stark in Zweifel gezogen, *Lefort* (ebenda, pp. 563, 578) dieselben in Schutz genommen. Nachdem sie mehrfach zur Revision anderer Tafeln gedient hatten, ist 1891 ein 8-stelliger Auszug [249]) daraus erschienen.

233) *Sang* berechnete von Grund aus die Logarithmen der Zahlen von 1—10000 mit 28 Stellen, sowie von 100000—370000 mit 15 Stellen, s. dessen 7-stellige, 1871 erschienene Tafel [253]), Preface, sowie Edinb. Roy. Soc. Proc., 1874/75, p. 421. Vgl. auch Anm. 248.

234) Ausser *A. Gernerth*, der sich durch besonders gründliche Prüfung zahlreicher Tafeln verdient gemacht hat (Bemerkungen üb. ältere u. neuere mathemat. Tafeln, Wien 1863 = Zeitschr. österr. Gymn. 1863, S. 407), seien erwähnt *Babbage* [244]), *Bremiker* [258]), *Sang* [253]), *Shortrede* [256]), *Schrön* [252]).

235) Vgl. *Glaisher*, On the progress to accuracy of logarithmic tables, Monthly Notices Astr. R. Soc. 33 (1873), p. 330; mehr als 200 Jahre waren seit dem Druck von *Vlack*'s Tafeln [230]) verflossen, bis eine von deren Fehlern freie Tafel erschien, und wiederholt haben sich neue Fehler eingeschlichen. — Ein Verzeichnis aller bekannten (an den verschiedensten Orten veröffentlichten) Druckfehler in den im Gebrauch befindlichen Tafeln ist (nach *Glaisher*) von dem „Table Committee“ der British Association längst geplant, aber noch nicht erschienen.

236) Ihrer Entstehung nach sollten die 7-stelligen Tafeln von *Wiberg* [182]) unter allen Umständen fehlerfrei sein.

237) Im 18. Jahrhundert wurde ein Fehler von mehreren Einheiten der letzten Dezimale noch leicht genommen (vgl. *Gernerth* [234]), Einleitung). Erst später kam der von *K. Fr. Gauss* (Einige Bemerkungen zu Vega's Thesaurus Logarithmorum, Astr. Nachr. 32 (1851), p. 181 = Werke 3, p. 257) stark betonte Grundsatz, „dass die Tabulargrösse dem wahren Wert allemal so nahe kommen soll, als bei der gewählten Anzahl von Dezimalstellen möglich ist“, allmählich zur Herrschaft. Im Gegensatz dazu begnügt sich *Glaisher* [Monthly Notices R. Astr. Soc. 33 (1873), p. 440 flg.] mit der Forderung, der Tafelwert solle nie um mehr als 0,555 . . . einer Einheit in der letzten Stelle falsch sein. Noch grössere Schärfe, als *Gauss* für nötig hielt, haben einzelne durch die An-

gemacht, die Einrichtung der Tafeln immer zweckmässiger und für den Gebrauch bequemer zu gestalten. Der Raumersparnis und besseren Übersicht wegen hatte *John Newton* (1658)[238]) auf jeder Seite nicht nur die, einer Anzahl von Mantissen gemeinsame Gruppe der drei ersten Ziffern abgetrennt[239]) und nur einmal, am Anfang einer Zeile, gedruckt, sondern auch die Logarithmen aller Zahlen mit derselben Einerziffer je in eine Kolonne, mit dieser Ziffer als Ueberschrift, gestellt, wodurch seine Tafel zwei Eingänge erhielt. Mit seltenen Ausnahmen[240]) wird seit langem diese Anordnung bei allen Logarithmentafeln befolgt. Während aber gewöhnlich die Vielfachen der Differenzen oder auch die Proportionalteile in einer besonderen Spalte, die keinen Zusammenhang mit den übrigen hat, angegeben sind, haben *A. M. Nell*[241]), *Gascó*[227]), *N. E. Lomholt*[242]) u. a. durch Hinzufügung

gabe, ob die letzte Ziffer erhöht ist oder nicht, zu erreichen gesucht. Abgesehen von *Kepler*[190]) bezeichnen die Erhöhung bei allen Ziffern z. B. *M. von Prasse* (fünfstellige logarithmische Tafeln, Leipzig 1810), *Babbage*[244]) 1827, *Sedlaczek* (Wien. Ber. 1847, p. 428), *Steinhauser*[280]) 1857, *Schrön*[252]) 1860, *Gernerth*[186]) 1866, *Gascó*[227]) 1884; dagegen blos, wenn die durch Erhöhung entstandene Ziffer 5 ist, z. B. *Filipowski*[302]) 1849 u. *F. G. Gauss*[188]) 1870, und zwar durch andere Gestalt der Endziffer *von Prasse* (kursiv), *Filipowski* (V statt 5), *Gascò* (fett gedruckt), beziehentlich durch einen Punkt unter oder neben der Endziffer *Babbage, Sedlaczek* (auch *Steinhauser*), durch einen Strich unter oder über der Endziffer oder durch dieselbe *Schrön, Gauss, Gernerth.* Jedenfalls ist unter sonst gleichen Umständen eine Tafel mit Erhöhungszeichen die wertvollere (vgl. Nr. **24**, insbes. Anm. 190). Auf einen höheren Standpunkt stellt sich *N. E. Lomholt*[242]), indem er die letzte Ziffer so wählt, dass bei allen mittelst der Tafel gefundenen Logarithmen (einschl. der durch Interpolation erhaltenen) die durchschnittliche Abweichung von ihrem wahren Wert ein Minimum wird.

238) In seiner zu London erschienenen „Trigonometria Britannica"; die betreffende, bis 100000 gehende Tafel ist 8-stellig und statt der Differenzen sind ihre Logarithmen in besonderer Spalte mit 5 Stellen gegeben. *Newton* wandte übrigens blos Neuerungen seiner Vorgänger *N. Roe*[251]) (1633) und *E. Wingate* (1624) vereinigt an, vgl. *Hutton*[223]) p. 36, 39.

239) Bei 5-stelligen Mantissen werden gewöhnlich zwei Ziffern abgetrennt, bei 4-stelligen lohnt sich die Abtrennung nicht. Findet innerhalb einer Zeile ein Wechsel in der letzten abgetrennten Ziffer statt, so wird meist (wie schon von *Vega*[246])), jedem folgenden Mantissenteil dieser Zeile ein * vorgesetzt; *Hutton*[223]) druckte einen Strich, *Filipowski* zwei Punkte über die Anfangsziffer desselben, *Sang*[253]) wie *R. Shortrede*[256]) statt der 0 das arabische Nokta (d. i. Punkt) ♦ (ähnlich dem arabischen Zeichen für 0), und noch andere Unterscheidungsmittel kommen vor.

240) Z. B. *J. Hoüel* (Tables de logarithmes à cinq décim., Paris 1858) und *Th. Albrecht* (Logarithm.-trigon. Tafeln mit fünf Dezimalstellen, Berlin 1884) sind zu *einem* Eingang zurückgekehrt.

241) Fünfstellige Logarithmen . . ., Darmstadt 1865, 9. Aufl. 1898.

242) Fircifret Logarithmetabel, Kjøbenhavn 1897 [Erklärung übersetzt in

eines dritten Eingangs, nämlich für die mit den Logarithmen auf gleiche Zeile gebrachten Proportionalteile, die Interpolation noch mehr erleichtert[243]). Die Sorgfalt der Herausgeber von Logarithmentafeln hat sich weiter auf das Format, auf Schnitt und Grösse der Ziffern, deren Verhältnis zu den Zwischenräumen und ähnliches, ja auf die Farbe des Papiers und der Druckerschwärze erstreckt[244]).

Während man es anfangs für nötig hielt, die Logarithmen mit einer grossen Zahl von Stellen anzugeben[245]) und auch für gewisse Zwecke Tafeln mit vielen Stellen immer unentbehrlich bleiben werden, ist man nach und nach auf eine immer kleinere Stellenzahl herabgegangen und im 19. Jahrhundert schliesslich bei 4- und 3-stelligen Tafeln angekommen. Bei 10 Stellen sind wir immer noch auf die seltene „Arithmetica logarithmica“ von *Vlack*[230]) und den durch photozinkographische Reproduktion wieder zugänglich gemachten „Thesaurus logarithmorum“ von *G. Vega*[246]) angewiesen[247]). Neunstellige

der Zeitschr. f. Vermessungsw. 27 (1898), p. 240]; bietet unter allen vierstelligen Tafeln bei bequemstem Gebrauch die grösste durchschnittl. Genauigkeit, vgl. Anm. 237, Schluss.

243) Beispiel einer Zeile aus *Lomholt*'s Tafel:

	0	1	2	3	...	7	8	9	1 2 3	...	7 8 9
79	8976	8982	8987	8993	...	9015	9020	9025	1 1 2	...	4 4 5

Also z. B. $\log 7{,}983 = \log 7{,}98 +$ Proport.-Teil zu $3 = 0{,}9020 + 2 = 0{,}9022$.

244) *Ch. Babbage* hat hierüber 12, aus der Vergleichung vieler Tafeln abgeleitete Regeln aufgestellt (Tables of the logarithms . . ., London 1827, 2. ed. 1831, Preface; 3. Aufl. mit deutscher Einleitung von *K. Nagy*, London 1834); vgl. etwa noch *Schrön*[252]), Einleitung. Selbst *Gauss* hat diesen Fragen grosse Beachtung geschenkt, wie seine Besprechungen verschiedener Logarithmentafeln in den Göttingischen gelehrten Anzeigen = Werke 3, p. 241—255, darthun. Vgl. noch Anm. 299.

245) Die älteste Tafel der gemeinen Logarithmen, *Briggs*' *„Logarithmorum chilias prima“ von 1617 hatte (nach *Glaisher* p. 55) ebenso wie dessen Arithmetica logarithmica von 1624[230]) 14 Stellen.

246) Leipzig 1794; Titel, Vorrede und Einleitung auch deutsch. Reproduktion vom Istituto Geografico Militare in Florenz 1889 herausgegeben, zum 2. male 1896. Hülfstafeln zur leichteren Interpolation bei Benützung des Thesaurus, wie auch ein Verzeichnis der Fehler in letzterem giebt *M. v. Leber*, Tabularum ad faciliorem . . . trias, Vindobonae 1897 (Einleitung auch deutsch). S. noch *S. Gundelfinger*[293]) (9-stellige Tafeln), p. 60.

247) Zwar hat *W. W. Duffield* [U. S. Coast and Geodetic Survey Report 1895/96, Washington 1897, Appendix 12, p. 422—722] eine neue (auf 12-stelligen Originalberechnungen beruhende und mit *Vega* verglichene) Tafel mit 10 Stellen veröffentlicht, aber sie ist noch auf ihre Korrektheit zu prüfen und ihre Anordnung lässt sich nicht als zweckmässig bezeichnen.

Tafeln scheinen nicht veröffentlicht zu sein[248]); solche mit 8 Stellen haben sich nicht eingebürgert[249]), wogegen 7-stellige Tafeln lange Zeit fast allein Gebrauch gewesen sind. Die erste vollständige, d. h. bis 100000 gehende[250]) Tafel mit 7 Stellen gab 1633 *N. Roe*[251]); besonderes Vertrauen geniesst *L. Schrön*'s Tafel[252]); am bequemsten zu gebrauchen ist die von *E. Sang*[253]), weil sie sich von 20000 bis 200000 erstreckt; aus der ungemein grossen Zahl sonstiger seien herausgegriffen diejenigen von *Ch. Babbage*[244]), *C. Bruhns*[254]), *Fr. Callet*[255]) und *R. Shortrede*[256]). An 6-stelligen Tafeln ist ebenfalls kein Mangel; ausser der ältesten von *S. Dunn* (1784)[257]) sei die am meisten geschätzte von *C. Bremiker*[258]) genannt. Am verbreitetsten sind Logarithmentafeln mit fünf Stellen — den schon erwähnten von *Th. Albrecht*[240]), *F. G. Gauss*[259]), *A. Gernerth*[260]), *J. Hoüel*[240]), *A. M. Nell*[241]), seien hinzugefügt die vermutlich älteste von *D. Bates*

248) *E. Sang* hat eine Subskription auf eine 9-stellige Logarithmentafel von 100000—1000000 mit 1. Differenzen eröffnet [sie wurde noch 1883 in der 2. Aufl. der 7-stell. Tafel desselben Verfassers[253]) angeboten und als nahezu fertig bezeichnet], von ihrem wirklichen Erscheinen ist jedoch nichts bekannt.

249) Die vom Service géographique de l'Armée hrsg. „Tables des logarithmes à huit décimales", Paris 1891, ein revidierter Auszug aus den „Tables du Cadastre"[232]), sind die ersten seit 1658[238]).

250) Manche Tafeln, wie die von *Callet*[255]) und *Schrön*[252]), gehen bis 108000; ausserdem geben sie die letzten 8000 Logarithmen mit 8 Stellen, wofür eigentlich kein Bedürfnis vorliegt.

251) Tabulae logarithmicae, London.

252) Siebenstellige gemeine Logarithmen . . ., Braunschweig 1860, 24. Aufl. 1900 (auch engl., französ., italien. u. s. w. Ausgaben).

253) *A new table of seven-place logarithms ..., London and Edinburgh 1871, 2. issue 1883. Die grossen Differenzen am Anfang anderer Tafeln sind vermieden; zwar beginnt die 2. Auflage, wie andere Tafeln, mit 1, man wird aber die Logarithmen der mit der Ziffer 1 anfangenden mehr als 5-ziffrigen Zahlen in der zweiten Hälfte der Tafel suchen.

254) Neues logarithmisch-trigonometrisches Handbuch auf sieben Dezimalen, Leipzig 1870, 5. Aufl. 1900 (gleichzeitig engl., französ. u. italien. hrsg.).

255) Tables portatives de logarithmes . . ., Paris 1795 und viele (nicht numerierte) neue Ausgaben.

256) Logarithmic tables . . ., Edinburgh 1844, 2. Aufl. 1849 (geht bis 120000); 2. Teil (die Logar. der trigonom Funkt. enthaltend) 2. Aufl. 1854.

257) Tables of correct and concise logarithms . . ., London; nur bis 10000.

258) Logarithmorum VI decimalium nova tabula . . ., Berolini 1852; Logarithm.-trigonom. Tafeln mit sechs Dezimalstellen, Berlin 1860 (diese beiden Ausgaben noch nicht stereotypiert), 11. Ausgabe 1890.

259) Fünfstellige vollständige logarithmische u. trigonometrische Tafeln, Berlin 1870, 60. Aufl. 1899.

260) Fünfstellige gemeine Logarithmen . . ., Wien 1866.

(1781)[261]) und die von *C. Bremiker*[262]), *Fr. W. Rex*[263]), *Th. Wittstein*[264]) — welche die 7-stelligen z. B. aus den Schulen nahezu verdrängt haben, nicht ohne dass ihnen wieder von den 4-stelligen Tafeln dieses Gebiet streitig gemacht würde. Unter den letzteren sind bereits die von *Gascó*[227]) und *Lomholt*[242]) genannt worden; vielleicht die früheste stammt von *J. F. Encke*[265]); erwähnt seien ausserdem die von *F. G. Gauss*[266]) und *Fr. W. Rex*[267]). Dreistellige Tafeln kommen hier und da mit 4- oder 5-stelligen zusammen vor[268]).

Über die Genauigkeit, mit welcher aus einer Logarithmentafel durch Interpolation die Mantisse des Logarithmus einer gegebenen Zahl oder umgekehrt gefunden werden kann, sind auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung [s. I D 1; I D 3, Nr. **9**] von *C. Bremiker*[269]), *H. A. Howe*[270]) und *H. Stadthagen*[271]) Theorien aufgestellt und experimentell geprüft worden. — Über graphische Logarithmentafeln s. Nr. **43.**

---

261) Logarithmic tables . . ., Dublin.

262) Logarithm.-trigonom. Tafeln mit fünf Dezimalstellen, Berlin 1872, 8. Aufl. (besorgt v. *A. Kallius*) 1899.

263) Fünfstellige Logarithmen-Tafeln, Stuttgart 1884.

264) Fünfstellige logarithmisch-trigonom. Tafeln, Hannover 1859. 17. Aufl. 1896.

265) Logarithmen von vier Dezimal-Stellen, Berlin 1828 (Titelblatt ohne Verfassernamen).

266) Vierstellige logarithm.-trigonom. Handtafel, Berlin 1873, 3. Aufl. 1899 (auch Ausgabe f. Dezimalteilung des Quadranten, 2. Aufl. 1899), Plakatformat. Der geringe Umfang gestattet es, 4-stellige Tafeln zusammenlegbar in Taschenformat auf Karton zu drucken, wie *H. Schoder*'s logarithm. u. trigonom. Tafeln mit vier u. drei Stellen, Stuttgart 1866, 2. Aufl. 1869, und die *„vierstellige logarithm. Taschentafel" der trigonom. Abteilung der kgl. preussischen Landesaufnahme, Berlin 1897. Bei letzterer ist über die Endziffer ein Punkt oder ein Strich gesetzt, jenachdem die Abrundung auf 4 Stellen eine Verkleinerung oder Vergrösserung bedingt hat (Anklang an *Kepler*, s. Anm. 190).

267) Vierstellige Logarithmen-Tafeln, Stuttgart (Metzler, ohne Jahreszahl).

268) Vgl. *L. Schrön*, Tafeln der drei- und fünfstelligen Logarithmen . . ., Jena 1838; *Houël*[240]) (5-, 4- u. 3-stellig); *Nell*[241]) (5- u. 3-stellig), *Schoder*[266]).

269) De erroribus, quibus computationes logarithmicae afficiuntur, in der Einleitung zu den 6-stelligen Tafeln[258]), Ausg. v. 1852.

270) Annals of Mathematics 1 (1885), p. 126; 3 (1887), p. 74; angenähert richtige Theorie.

271) „Ueb. die Genauigkeit logarithm. Rechnungen", Berlin 1888 (*Bremiker*'s Unters. fortgesetzt; insofern nicht abgeschlossen, als noch ein Unterschied zwischen Theorie u. Wirklichkeit besteht). Dass (bei belieb. Tafeln u. Differenzen aller Ordnungen) die Tafeldifferenzen den wahren Differenzen beim Interpoliren vorzuziehen sind, zeigt *J. Lefort*, Edinb. Roy. Soc. Proc. 8 (1875), p. 602.

Für das gewöhnliche Rechnen von sehr geringer Bedeutung sind Tafeln der „natürlichen“ oder „hyperbolischen“ Logarithmen, deren Basis $e = 2{,}71828\ldots$ ist[272]) [I A 3, Nr. **17**]. Die vollständigste, welche ähnlich wie eine gewöhnliche 7-stellige Logarithmentafel (wenn auch naturgemäss nicht so bequem) benützt werden und so allenfalls zu Kontrollrechnungen dienen kann, ist die von *Z. Dase*[273]).

28. Fortsetzung: Abgekürzte Logarithmentafeln. Um höhere Potenzen oder Wurzeln sehr genau zu berechnen, und für andere Zwecke[274]), braucht man Logarithmen mit einer grossen Zahl von Stellen. Tafeln der gewöhnlichen Einrichtung würden hier zu umfangreich und kostspielig werden, aber eine Reihe von Kunstgriffen, die sich im wesentlichen auf zwei Grundgedanken zurückführen lassen, sind ersonnen worden, um aus Logarithmentafeln beschränkter Zahlbereiche die Logarithmen beliebiger Zahlen mittelst mehr oder weniger einfacher Nebenrechnungen zu bestimmen und umgekehrt die Numeri zu gegebenen Logarithmen. Es braucht blos von der ersten Aufgabe gesprochen zu werden, weil die zweite in der Regel durch das umgekehrte Verfahren gelöst wird.

Dienen für gewöhnlich die Logarithmen zur Verwandlung der Multiplikation in Addition, so beruhen die meisten abgekürzten Logarithmentafeln gerade umgekehrt auf der Anwendung von Produkten, deren Faktoren auf elementarem Wege bestimmt werden, worauf man die Logarithmen der Faktoren den einzelnen Teilen der Tafel entnimmt und addiert[275]). *H. Briggs*[276]) zerlegte die gegebene Zahl

---

272) Bis in die neueste Zeit ist der Irrtum verbreitet gewesen, die von *J. Neper* in seiner „Mirifici logarithmorum canonis descriptio“ 1614 veröffentlichten Logarithmen der Sinus seien natürliche, weshalb letztere vielfach *Neper*sche Logarithmen genannt werden; jedoch hat *G. Kewitsch* [Zeitschr. math. naturw. Unterr. 27 (1896), p. 321, 577] nachgewiesen, dass *Neper*'s Logarithmen der Basis $\frac{1}{e}$ entsprechen, während die Basis e den „roten“ (weil rot gedruckten) Zahlen in *Joost Bürgi's* „arithm. u. geometr. Progress-Tabulen . . .“, Prag 1620, zukommt.

273) Tafeln der natürlichen Logarithmen der Zahlen . . ., Wien 1850 [= Wien. Observ. Ann. (2) 14 (1851)].

274) Z. B. Zinseszins- u. Amortisationsrechnungen [s. *Thoman*[288]), p. 24 flg.], zur Prüfung mancher Sätze der höheren Arithmetik [vgl. *Gray*[278])] u. s. w.; vgl. noch *G. Govi*, Rapport sur l'utilité des tables de logarithm. à plus de sept décim., Tor. Atti 8 (1872/73), p. 163.

275) Geschichte dieser Methode (mit wenig Lücken) bei *A. J. Ellis,* Lond. Roy. Soc. Proc. 31 (1881), p. 398 flg., Postscript (*Atwood* betr.) 32 (1881), p. 377. Da es mindestens 25 Tafeln dieser Art giebt, können oben nur die wichtigsten genannt werden.

selbst in ein Produkt, indem er als ersten Faktor die Anfangsziffer der Zahl, als zweiten Faktor die ersten beiden Ziffern des Quotienten aus der gegebenen Zahl und dem ersten Faktor u. s. w. nahm; ähnlich u. a. *P. Gray*, der jedoch dem ersten Faktor zwei[277]) bezw. drei[278]) Ziffern giebt, jedem folgenden dieselbe Zahl von Ziffern mehr, und *A. Steinhauser*, der [wie vor ihm *Ch. Borda-J. B. J. Delambre*[279])] nur zwei Faktoren verwendet[280]), später drei[281]) bezw. vier[282]), die (abgesehen vom letzten) nach Gruppen von drei bezw. vier Ziffern fortschreiten. Um grosse Divisionen zu vermeiden, gab *R. Flower*[283]) der gegebenen Zahl zunächst die Form $0,\ldots$ und multiplizierte dann der Reihe nach mit Zahlen der Form $1, 0^m r$ (r einziffrig, $m = 0, 1, 2, \ldots$), zu dem Zweck, die Zahl auf die Form $0,999\ldots$, mit wachsender An-

---

276) Tabula inventioni logarithmorum inserviens, p. 32 der Arithmetica logarithmica von 1624, giebt (mit 15 Stellen) die gemeinen Logarithmen von r; $1, r$; $1, 0^m r$ mit $r = 1$ bis 9 und $m = 1$ bis 8, was *Ellis*[275]) im Anschluss an *Flower*[283]) „a positive numerical radix" nennt; von *Vlack*[230]) mit 10 Stellen abgedruckt.

277) Mechanics Magazine, 12. u. 26. Febr. 1848; 12 Stellen.

278) Tables for the formation of logarithms . . ., London 1876; 24 Stellen. Vorläufer mit 12 Stellen 1865 erschienen. Bei der Bestimmung des Numerus zu gegebenem Logarithmus *Flower*'s Methode, s. unten.

279) Anhang zu den gewöhnlichen Logarithmentafeln in den „Tables trigonom. décimales . . .", Paris an IX (1801); 11-stellig. Der erste Faktor besteht in den drei ersten geltenden Ziffern der gegebenen Zahl.

280) Anhang zu . . . Logarithmentafeln, enthaltend zwei Hülfstafeln zur Berechnung eilfstelliger Logarithmen . . ., Wien 1857; wird im Titel als Erweiterung von *Borda*'s Tafel bezeichnet.

281) Kurze Hilfstafel zur bequemen Berechnung 15-stelliger Logarithmen . . ., Wien 1865. Auf jeder der 20 Seiten drei mit *A*, *B*, *C* überschriebene Kolonnen, die Logarithmen der Zahlen 1 bis 999, bezw. 100999 und 100000999 enthaltend. Beim letzten Logarithmus (wie in der folgenden und vorhergehenden Tafel) Interpolation nötig.

282) Hilfstafeln zur präzisen Berechnung 20-stelliger Logarithmen . . ., Wien 1880. Prüfungen durch *J. Perott* [*Darboux*' Bulletin (2) 11 (1887), p. 51)], *J. Blater* [s. *F. C. Lukas,* Ehrenzweig's Assekuranz-Jahrbuch 20 (1899), p. 69, 73] u. a. haben zahlreiche Fehler ergeben.

283) The radix, a new way of making logarithms, London 1771; zugehörige Tafeln (gemeine Logarithmen) 23-stellig. *Z. Leonelli* [Supplément logarithmique, Bordeaux an XI (1802/3), 2. Aufl. v. *J. Hoüel*, Paris 1875, deutsch von *G. W. Leonhardi,* Dresden 1806] giebt die Tafeln mit 20 Stellen und fügt solche gleicher Ausdehnung für natürliche Logarithmen hinzu (auch 15-stellige gemeine Logarithmen der Zahlen r und $1, 0^{2m+1} r$ mit $r = 1$ bis 99, $m = 0$ bis 3); diese Tafeln mehrmals abgedruckt, z. B. v. *Hoüel*[240])[315]), von *Schrön*[252]) (3. Teil, p. 76) mit 16 Stellen. — *Hoüel* teilte Bord. Mém. 8 (1870), p. 188 eine Methode von *F. Burnier* mit, die Rechnung zu beschleunigen.

zahl der Ziffern 9, also der Einheit immer näher zu bringen. *G. Atwood*[284]) wandte auch Faktoren der Form $(1 - 0{,}0^m r)$ an[285]), wodurch die Zahl von oben her der Eins immer näher gebracht wird, beseitigte alles Probieren und vereinfachte die Rechnungen durch weitere Hülfstafeln und zweckmässige Regeln. Im 19. Jahrhundert sind *Atwood*'s (wie *Flower*'s und *Briggs*') Methoden mehrmals (oft nur teilweise) wieder entdeckt worden, z. B. von *Weddle*[286]), *H. Wace*[287]), *F. Thoman*[288]) und *R. Hoppe*[289]), bei dem sie die einfachste Gestalt angenommen haben. *S. Pineto*[290]) bringt durch einen einzigen gut ausgewählten Faktor, *A. Namur*[291]) durch einen oder zwei solcher, die gegebene Zahl in den Rahmen der Tafel.

Jegliche Multiplikation und Division (auch Interpolation) vermeidet *H. Prytz*[292]) durch Anwendung von Additionslogarithmen (s. Nr. **30**); er denkt sich die Zahl N auf die Form:

---

284) An essay on the arithmetic of factors ..., London 1786 (nach *Ellis*[275])). *Atwood* wandte seine Methode auch auf das Ausziehen von Wurzeln u. s. w. an. Damit verwandt scheinen die Bestrebungen von *O. Byrne* zu sein (Dual arithmetic, London 1863, neue Ausgabe 1864, Tables of dual logarithms 1867), der alle irrationalen Zahlen in der Form $(1{,}1)^\alpha (1{,}01)^\beta (1{,}001)^\gamma \ldots$ oder $(0{,}9)^\alpha (0{,}99)^\beta (0{,}999)^\gamma \ldots$, symbolisch geschrieben $\downarrow \alpha\beta\gamma \ldots$ bezw. $\alpha\beta\gamma \ldots \uparrow$, ($\alpha, \beta, \gamma \ldots$ bedeuten Ziffern), darstellen will.

285) Eine Tafel dieser Grössen und der Negativen der entsprechenden Logarithmen nennt *Ellis*[275]) „a negative numerical radix".

286) „The mathematician", nov. 1845, p. 17; Tafeln mit 16 und 25 Stellen wurden 1849 von *Shortrede*[256]) gegeben.

287) Mess. of math. (2) 3 (1874), p. 66; Tafeln (gemeine und natürliche Logarithmen) auf 20 Stellen.

288) Tables de logarithmes à 27 décimales ..., Paris 1867.

289) Tafeln zur dreissigstelligen logarithmischen Rechnung, Leipzig 1876; natürliche Logarithmen mit 33 Stellen, nur 7 Seiten 8°. *Hoppe* betont die Vorzüge der natürlichen Logarithmen beim Rechnen mit sehr vielen Stellen.

290) Tables de logarithmes vulgaires à dix décimales ..., St. Pétersbourg 1871. Umfang der Tafeln 56 S. 8°. Die Haupttafel geht von 1 000 000 bis 1 011 000; die Faktoren haben höchstens (aber selten) drei Ziffern; Interpolation nötig.

291) Tables de logarithmes à 12 décimales ..., Bruxelles 1877 (theoretische Einleitung von *P. Mansion*). Die Tafeln nehmen 10 S. 8° ein. Direkt gegeben sind die gemeinen Logarithmen der natürlichen Zahlen zwischen 433300 und 434299, weil nach einem von *Namur* empirisch gefundenen, von *Mansion* bewiesenen Satz bei diesen in der Nähe des millionenfachen Moduls liegenden Zahlen die logarithmischen Differenzen mit 100 ... anfangen, also die Interpolationen leicht auszuführen sind. Jede Bestimmung eines Logarithmus oder Numerus zur Probe auf zwei Arten möglich; noch andere Proben, auch Fehlerschätzung.

292) Tables d'anti-logarithmes, Copenhague (kein Erscheinungsjahr an-

$$N = A(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \dots (1 + a_r)$$

gebracht, woraus für

$$A = 10^L, \quad a_r = 10^{-L_r}$$

einerseits folgt:

$$\log N = L + \log(1 + 10^{-L_1}) + \log(1 + 10^{-L_2}) + \cdots + \log(1 + 10^{-L_r}),$$

andererseits (wegen

$$N = A(1 + a_1 + a_2 + a_1 a_2 + a_3 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3 + \cdots)):$$

$$N = 10^L + 10^{L-L_1} + 10^{L-L_2} + 10^{L-L_1-L_2} + 10^{L-L_3} + 10^{L-L_1-L_3} + \cdots$$

S. Gundelfinger[293]) beschränkt sich auf zwei Faktoren bezw. Summanden, wodurch die Zahl der Additionen und Subtraktionen geringer wird, aber Interpolation sich einstellt.

Sammlungen von Logarithmen mit aussergewöhnlich hoher Stellenzahl, die für wissenschaftliche Zwecke in Betracht kommen können, sind die öfters abgedruckten Tafeln der natürlichen Logarithmen von

---

gegeben, nach den „Fortschr. d. Mathem.“ 1886). Es können die Numeri (Antilogarithmen) zu gegebenen Logarithmen mit dreistelliger Mantisse, deren Differenzen also auch in der Tafel sich finden, dieser entnommen werden, und eine Hülfstafel giebt die Additionslogarithmen $\log\left(1 + 10^{-L_r}\right)$. Anzahl der Stellen 15, 10 und 5 (Umfang bez. 10, 5, 2 Seiten 8°). Auch andere Anwendungen des Grundgedankens möglich: durch Mitbenützung einer Hülfstafel, die nur eine Seite einnimmt, werden 15-stellige log sin mittelst blosser Additionen und Subtraktionen gefunden. Vorläufer eine 1881 in Kopenhagen erschienene 8-stellige Tafel („Udkast til Antilogarithmetabel ...“).

293) Tafeln zur Berechnung neunstelliger Logarithmen ..., Darmstadt 1891 (in Gemeinschaft mit *A. M. Nell* herausgeg.). Es wird $N = n + p = n\left(1 + \frac{p}{n}\right)$ gesetzt, wo n aus den vier höchsten geltenden Ziffern von N (mit soviel angehängten Nullen, dass N und n gleichviel Stellen haben) gebildet ist. Die erste Tafel giebt die 9-stelligen Logarithmen von $n = 1000$ bis $10\,000$, die zweite für $A = \log\frac{p}{n}$ das zugehörige $B = \log\left(1 + \frac{p}{n}\right)$, sodass $\log N = \log n + B$. (Beide Tafeln zusammen 50 S. gross 8°.) (Über die Genauigkeit des Rechnens mit diesen Tafeln vgl. „Lüroth“ S. 118.) Auf demselben Grundsatz beruht die Anwendung einer neuen, 18 S. 4° einnehmenden 7-stelligen Tafel von *Gundelfinger* (Sechsstellige Gaussische und siebenstellige gemeine Logarithmen, Leipzig 1900). — Durch Benützung von 3 oder mehr Summanden könnte die Methode auf Logarithmen mit mehr als 9 Stellen ausgedehnt werden, was noch nicht versucht worden zu sein scheint. — Auf Additionslogarithmen beruhen im Grunde genommen auch die „Canons de logarithmes“ von *Hoene-Wroński* (Paris 1827; russisch von *Annenkoff*, St. Petersburg 1845; polnisch in 2 Ausgaben von *S. Dickstein*, Warschau 1890; vgl. Bibliotheca mathematica (2) 7, 1893, p. 11), die zwar nur 4, 5, 6 und 7 Stellen (je auf einer Seite) bieten; Anordnung sehr sinnreich, aber für den wirklichen Gebrauch wohl zu künstlich.

Wolfram mit 48 Stellen[294]), sowie der gewöhnlichen Logarithmen von *A. Sharp* mit 61 Stellen[295]). Die höchste Stellenzahl, nämlich 102 bezw. 260, haben *H. M. Parkhurst*[296]) und *J. A. Adams*[297]) erreicht.

29. Tafeln der Antilogarithmen. Sie bilden die Umkehrung der gewöhnlichen Logarithmentafeln, haben also im Eingang Logarithmen bezw. Mantissen und geben die zugehörigen Zahlen, d. h. die Werte der Funktion $y = 10^x$, bezw. $y = e^x$, wenn natürliche Logarithmen zu Grunde liegen[298]). Trotz mancher Vorteile trifft man sie — als entbehrlich und nochmals denselben Raum beanspruchend, wie die gewöhnlichen Tafeln — recht selten, am meisten noch in vierstelligen Sammlungen, wo sie nur zwei Seiten einnehmen. In Zwischenräumen von mehr als hundert Jahren erschienen: *Bürgi*'s „Progresstafeln"[272]) als erste aller Antilogarithmentafeln[299]), *J. Dodson*'s 11-stellige Tafel[300]) als ausgedehnteste[301]) und eine Tafel in *Shortrede*'s

294) Für alle natürlichen Zahlen von 1 bis 2200, von da bis 10009 grösstenteils nur für die Primzahlen; zuerst in *J. C. Schulze*, Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer . . . Tafeln, Berlin 1778, erschienen; abgedruckt z. B. von *Vega*[246]) und *Callet*[255]).

295) Für die natürlichen Zahlen von 1 bis 100 und die Primzahlen von da bis 1097, ferner für die Zahlen von 999980 bis 1000020 mit Differenzen verschiedener Ordnungen, zuerst in dem Werke „Geometry improved . . .", London 1717; abgedruckt z. B. von *Hutton*[223]) und *Callet*[255]).

296) Gemeine Logarithmen der Zahlen von 1 bis 109, in den „Astronomical tables . . .", New-York 1871.

297) Natürliche Logarithmen der Zahlen 2, 3, 5, 7, 10 auf 272 Stellen, der Modul M auf 282 Stellen, wovon 260 als sicher bezeichnet werden, Lond. Roy. Soc. Proc. 27 (1878), p. 88.

298) Tafeln der „hyperbolischen" Antilogarithmen, mehr den Zwecken der Analysis als dem gewöhnlichen Rechnen dienend, haben wir von *G. Vega*[64]) [Werte von e^x und $\log e^x$ für $x = 0{,}00$ bis $10{,}00$ mit 7 Ziffern bezw. Dezimalen], abgedruckt z. B. von *Hülsse*[65]), *J. H. Lambert* [Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen, Berlin 1770; e^{-x} für $x = 0{,}1$ bis $1{,}0$ und $x = 1$ bis 10 mit 7 Stellen] und *J. W. L. Glaisher* [Cambr. Trans. 13 (1883), p. 243; e^x für $x = 0{,}001$ bis $0{,}100$ sowie für $x = 0{,}1$ bis $10{,}0$; e^{-x} für $x = 0{,}01$ bis $2{,}00$ und für $x = 1$ bis 500 mit 9 Stellen, die gemeinen Logarithmen davon mit 10 Stellen] und *H. W. Newman* [Cambr. Trans. 13 (1883), p. 145; e^{-x} für $x = 0{,}001$ bis $27{,}635$ in verschiedenen Intervallen und mit 12 bis 18 Stellen]. Die Potenzen von e mit den Exponenten 1, 2, . . ., 25, 30, 60 gab *Schulze*[294]) mit 27 geltenden Ziffern (abgedruckt von *Glaisher* a. a. O.).

299) Auf *Bürgi*'s Unterscheidung der Logarithmen von den übrigen Zahlen durch roten Druck ist *H. Schubert* (vierstellige Tafeln und Gegentafeln . . ., Leipzig 1898) wieder verfallen; zum Schutze gegen Verwechslung hätte es wohl genügt, jede Seite der „Gegentafeln" mit einer roten Linie einzufassen.

300) „The antilogarithmic canon . . .", London 1742. Wie eine 7-stellige Tafel angeordnet; die Mantissen gehen von 00000 bis 99999.

Sammlung[256]) als erste 7-stellige. Es reihen sich an eine Antilogarithmentafel mit 7 Stellen von *H. E. Filipowski*[302]), solche mit fünf Stellen[303]) von *Fr. Stegmann*[304]) und *H. Schubert*[305]), während unter den vierstelligen die von *Lomholt*[242]) hervorzuheben ist[306]).

30. Additions- und Subtraktionslogarithmen. Wie grosse Erleichterungen bei Multiplikation, Division und den Operationen höherer Stufen die Logarithmen gewähren mögen, bei Addition und Subtraktion bilden sie im Gegenteil ein Hindernis. Um hier das Zurückgehen von den Logarithmen auf die Numeri überflüssig zu machen, hat *Z. Leonelli*[307]) die Additions- und Subtraktionslogarithmen („logarithmes additionnels et déductifs“) erfunden[308]). Die Aufgabe, $\log(a+b)$

---

301) Zwar mit 20 Stellen und Differenzen 1.—3. Ordnung, aber nur für die Mantissen bis 00139 kommen die Antilogarithmen bei *W. Gardiner* (Tables of logarithms ..., London 1742, französisch Avignon 1770) vor.

302) „A table of anti-logarithms ...“, London 1849. Die Mantissen gehen, wie bei *Dodson* und *Shortrede*, von 00000 bis 99999.

303) Fünfstellige Tafel besonderer Art: *R. von Sterneck*, Anti-Logarithmen.... Wien 1878; Titel irreführend: Einrichtung die einer gewöhnlichen Logarithmentafel, aber nicht die wirklichen Logarithmen der im Eingang stehenden 1—4-ziffrigen Zahlen, sondern die kleinsten Logarithmen, denen bei Abrundung auf die betr. Zahl von Stellen jene Zahlen noch zukommen, werden geliefert.

304) „Tafel der fünfstelligen Logarithmen und Anti-Logarithmen“, Marburg 1855. Mantissen von 0000 bis 9999.

305) „Fünfstellige Tafeln und Gegentafeln ...“, Leipzig 1897. Auch „Gegentafeln“ zu denen der Logarithmen und natürlichen Zahlenwerte der trigonometrischen Funktionen! Logarithmen durchweg mit anderen Typen gedruckt, als die übrigen Zahlen, vgl. [299]). — Die Fortschr. d. Math. für 1876, p. 763 erwähnen noch: *R. W. Bauer*, Femciffrede logarithmer til hela tal fra 1—15 500 og anti-logarithmer, Kjøbenhavn 1876.

306) Vielleicht die frühesten kommen vor in *J. H. T. Müller*, Vierstellige Logarithmen ..., 2. Aufl. Halle 1860; ferner haben solche z. B. noch *Hoüel*[240]), *Gascò*[227]), *Rex*[267]), *Holman*[227]).

307) Supplément logarithmique ..., Bordeaux an XI (1802/3), 2. Ausgabe von *J. Hoüel*, Paris 1875 (deutsch von *G. W. Leonhardi,* Dresden 1806), 2[me] partie.

308) Vorher behalf man sich mit trigonometrischen Funktionen, z. B. wandte nach *S. Günther* (Vermischte Unters. zur Geschichte der mathemat. Wissensch., Leipzig 1876, p. 285 flg.) *J. Muschel von Moschau* (1696) die Regel an

$$\log(a+b) = \log b + \log 2 + 2\log\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right),$$

mit

$$\log\sin\varphi = \log a - \log b$$

(ähnlich später *Delambre*, s. *Leonelli* a. a. O. p. 64:

$$\log(a \pm b) = \log a + \log 2 + 2\log\frac{\cos}{\sin}\frac{\varphi}{2}, \quad \text{mit} \quad \log\cos\varphi = \log b - \log a,$$

dagegen *Chr. Wolf*:

oder $\log(a-b)$ zu bestimmen, wenn $\log a$ und $\log b$ gegeben, dagegen a und b selbst nicht bekannt sind, löst *Leonelli* mittelst einer Tafel, die aus drei, von *K. Fr. Gauss* später mit A, B, C überschriebenen Kolonnen folgenden Zusammenhangs gebildet ist. Bezeichnen A, B, C drei in derselben Reihe stehende Werte dieser Kolonnen und setzt man:

$$A = \log x, \quad C = \log z,$$

so ist:

$$B = \log \frac{x+1}{x} = \log \frac{z}{z-1}$$ [309].

Für

$$\log a - \log b = A \quad \text{bezw.} \quad \log a - \log b = C$$

ergiebt sich daher:

$$\log(a+b) = \log a + B = \log b + C$$

bezw.:

$$\log(a-b) = \log a - B = \log b + A$$ [310].

$$\log(a+b) = \log a - 2\log\sin\varphi,$$

mit

$$\log \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}(\log a - \log b)$$

[ähnlich noch *J. C. Houzeau*, Brux. Ann. 51 (1883), p. 103:

$$\log(a+b) = \log a - 2\log\cos\varphi, \quad \text{mit} \quad \log\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}(\log b - \log a),$$

$$\log(a-b) = \log b + 2\log\operatorname{ctg}\varphi, \quad \text{mit} \quad \log\sin\varphi = \frac{1}{2}(\log b - \log a)].$$

Gernerth zweifelt noch 1866 an dem Nutzen der Additionslogarithmen, der allerdings erst bei ausgedehnteren Anwendungen recht hervortritt, und schlägt [260]) p. 142 vor, wenn $\log a$ und $\log b$ gegeben sind, $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$ zu bilden, die Zahl $\frac{a}{b}$ zu suchen und sofort im Kopfe Eins zu addieren bezw. zu subtrahieren, dann $\log\left(\frac{a}{b} \pm 1\right)$ zu suchen und $\log b$ zu addieren, was *Leonelli* selbst a. a. O. p. 73 als Notbehelf angeben hatte.

309) Offenbar auch $C = \log(1+x)$, und für $B = \log y$ überdies:

$$x = \frac{1}{y-1} = z - 1, \qquad z = \frac{y}{y-1}.$$

Die Tafel ist eigentlich aus zweien, einer für Addition (Kolonnen A und B) und einer für Subtraktion (Kolonnen C und B), mit der gemeinsamen Kolonne B, zusammengesetzt.

310) Soll allgemeiner, unter $f(a, b)$ eine homogene Funktion n^{ten} Grades von a und b verstanden, $\log f(a, b)$ aus $\log a$ und $\log b$ bestimmt werden, so ist dies ebenfalls ohne Kenntnis von a und b durch eine Hülfstafel mit einem Eingang möglich, welche etwa zu dem Argument $u = \log t$ den Wert $v = \log f(t, 1)$ enthält, da für $u = \log a - \log b$ sich ergiebt $\log f(a, b) = v + n \cdot \log b$. Homogene Funktionen von drei reellen oder zwei imaginären Veränderlichen wür-

Leonelli's, mit 14 Dezimalen berechnete Tafel ist nicht veröffentlicht worden (a. a. O. sind blos drei Probeseiten mitgeteilt). *Gauss* hat den Gedanken aufgenommen und eine ebenso konstruierte Tafel, aber nur mit fünf Dezimalen, herausgegeben[311]). Nachdem noch mehrere Tafeln mit derselben Anordnung erschienen waren[312]), hat man angefangen[313]), letztere in mannigfaltiger Weise abzuändern. Zuerst wurde, u. a. von *J. Zech*[314]), die Trennung in je eine besondere Tafel für Addition und Subtraktion vorgenommen, oft auch eine der von *Leonelli* tabulierten Funktionen durch eine andere ersetzt[315]), schliesslich von *Th. Wittstein*[316]) durch Aufgeben einer von *Leonelli*'s drei Kolonnen eine einheitliche Tafel hergestellt, welche Möglichkeit übrigens *Leonelli* selbst schon ins Auge gefasst hatte (a. a. O. p. 55).

---

den Hülfstafeln mit zwei Eingängen erfordern (s. *Mehmke*, „Dyck's Katalog", Nachtrag, p. 20).

311) *Zach*'s Monatliche Correspondenz 26 (1812), p. 498 flg.

312) Darunter als erste 7-stellige die von *E. A. Matthiessen* (Tafel zur bequemen Berechnung des Logarithmen der Summe oder Differenz ..., Altona 1818), die keinen Anklang gefunden hat.

313) Zuerst vielleicht *J. H. T. Müller*, Vierstellige Logarithmen ..., Halle 1843, der nicht die Kolonne der Resultate, sondern umgekehrt die Eingangskolonne A als gemeinschaftliche nimmt, zu welcher die mit S (Summe) und U (Unterschied) bezeichneten Kolonnen in derselben Beziehung stehen, wie bei *Leonelli* A zu B bezw. C zu B.

314) „Tafel der Additions- und Subtraktionslogarithmen" in *J. A. Hülsse*'s Sammlung mathematischer Tafeln, 2. Abdruck, Leipzig 1849 (in der ersten Auflage von 1840 noch nicht), auch gesondert erschienen, 2. Aufl. Berlin 1863, mit 7 Dezimalen. Abgesehen von der Stellenzahl und dem dadurch bedingten Umfang ist der Inhalt noch derselbe wie bei *Müller*[313]). *Bremiker* nimmt in seinen 6-stelligen[258]), 5-stelligen[262]) und 4-stelligen Tafeln (Berlin 1874) zu Additionslogarithmen wie *Gray*[315]) und spätere $\log(1+x)$ und zu Subtraktionslogarithmen die dekadischen Ergänzungen der von *Leonelli* bis *Zech* gewählten, um lauter positive Differenzen zu erhalten; ähnlich *Albrecht*[240]).

315) *P. Gray*, Tables and formulae for the composition of life contingencies ..., London 1849, second issue 1870, verwendet bei Addition $\log(1+x)$, bei Subtraktion $\log(1-x)$; statt der letzteren Funktion nimmt *J. Hoüel* (Recueil de formules et de tables numériques, Paris 1866) die mit wachsendem Argument zunehmende $\log\frac{1}{1-x}$, ebenso *Rex*[263]) [267]). Die Beschränkung auf negative Werte des Argumentes in der ersten Tafel ist bei manchen Anwendungen ein Nachteil.

316) Zuerst (1859) in der 5-stelligen Sammlung[264]), dann in der besonderen Tafel „Siebenstellige Gaussische Logarithmen ...", Hannover 1866 (Titel und Einleitung auch französisch). Die auch von andern gebrauchte Bezeichnung „Gaussische" Logarithmen natürlich unberechtigt; *Gauss* hat selbst *Leonelli* als den Urheber des Gedankens genannt, sogar *Leonelli*'s Schrift ausführlich besprochen (Allgemeine Litteraturzeitung vom J. 1808, p. 353 = Werke 8, p. 121).

Bei dieser jetzt verbreitetsten Anordnung[317]) stehen die beiden einzigen, mit A und B bezeichneten Kolonnen in der Beziehung:

$$A = \log x, \quad B = \log(1+x), \quad \text{oder} \quad 10^B = 1 + 10^A,$$

und die obige Fundamentalaufgabe wird mittelst der Formeln gelöst:

$$\log a - \log b = A, \ \log(a+b) = B + \log b = \log a + (B - A)$$

bezw. $\log a - \log b = B, \ \log(a-b) = A + \log b = \log a - (B - A)$.

Von „Additionslogarithmen für komplexe Grössen" hat *R. Mehmke*[318]) einen dreistelligen Entwurf gegeben. Verwandt mit den Additionslogarithmen ist die nach einem Gedanken von *Gauss* und auf dessen Veranlassung von *v. Weidenbach* berechnete Tafel[319]), die auch *Hoüel*[315]) und *Rex*[263]) [267]) haben und welche neuerdings *E. Hammer*[319a]) erweitert hat.

31. Quadratische Logarithmen. Setzt man:

$$(a)^{b^y} = x,$$

so wird:

$$y = \frac{\log\log x - \log\log a}{\log b}.$$

Conte A. di Prampero[320]), der speziell:

---

317) Dieselbe haben z. B. noch *F. G. Gauss*[259]) [266]) und *Nell*[241]). Eigentlich nur eine Umordnung von *Leonelli*'s Tafel, denn *Wittstein*'s Kolonne B stimmt in ihrer 2. Hälfte (für positive A, die *Leonelli* allein berücksichtigt) mit *Leonelli*'s 3. Kolonne überein und enthält in der 1. Hälfte (für negative A) insgesamt dieselben Funktionswerte, wie *Leonelli*'s 2. Kolonne, weil man für

$$x' = \frac{1}{x} \qquad A' = \log x' = -\log x = -A, \quad B' = \log(1+x')$$

erhält. Hieraus folgt noch

$$B' = \log(1+x) - \log x = B - A,$$

d. h. wird mit der dekadischen Ergänzung von A in die Tafel eingegangen, so liefert sie $(B - A)$; deshalb hat *Gundelfinger* bei der 4-stelligen Tafel der ersten Seite von [352]) und der neuen, in Anm. 293 genannten 6-stelligen rechts diese dekadischen Ergänzungen als zweiten Eingang angebracht, wozu ein Vorbild in den trigonometrischen Tafeln gegeben war.

318) Zeitschr. Math. Phys. 40 (1895), p. 15.

319) „Tafel, um den Logarithmen von $\frac{x+1}{x-1}$ zu finden, wenn der Logarithme von x gegeben ist...", Copenhagen 1829; 5 Dezimalen. Abgedruckt in *M. v. Prasse*'s logarithmischen Tafeln, Ausgabe von *K. Br. Mollweide* und *G. A. Jahn,* Leipzig (ohne Jahreszahl).

319a) „Sechsstellige Tafel der Werte $\overset{10}{\log}\frac{1+x}{1-x}\cdots$", Leipzig 1902.

320) Saggio di tavole dei logaritmi quadratici, Udine 1885. Die Haupt-

nimmt und so:

$$a = \sqrt[2^{10}]{10}, \quad b = 2$$

$$y = \frac{\log\log x}{\log 2} + 10$$

erhält, nennt y den quadratischen Logarithmus von x, geschrieben $y = L_q x$. Es bestehen die fundamentalen Eigenschaften:

$$L_q z^t = L_q z + \frac{\log t}{\log b}, \quad L_q \sqrt[t]{z} = L_q z - \frac{\log t}{\log b},$$

also führt eine Tafel der quadratischen Logarithmen zusammen mit einer Hülfstafel der Grössen $\log t : \log b$, wie solche *di Prampero* im Entwurf gegeben hat, jede Potenzierung oder Radizierung mit beliebigem Exponenten auf eine Addition bezw. Subtraktion zurück.

32. Tafeln der Proportionalteile. So heissen Tafeln der auf eine bestimmte Zahl von Dezimalen abgerundeten Grössen:

$$\frac{x}{a}, \frac{2x}{a}, \frac{3x}{a}, \ldots, \frac{a-1}{a} x,$$

wo die Konstante a gewöhnlich den Wert 10 oder 100 hat (dezimale Tafeln), seltener 60 oder 600 (sexagesimale bezw. sexcentenare Tafeln)[321]. Von der ersten Art sind ausser den wahrscheinlich ältesten von *J. Moore*[322] zu nennen die Tafeln von *C. Bremiker*[323], *L. Schrön*[324], *H. Schubert*[325], von der letzten diejenigen von *John Bernoulli*[326] und *H. Schubert*[327].

---

tafel enthält für (sich nicht in gleichen Zwischenräumen folgende) Werte von $L_q x$ mit 6 Dezimalen, die zwischen 0 und etwas über 12 liegen, die zugehörigen x mit verschiedener Stellenzahl. Es liegt wohl näher, $a = b = 10$ zu setzen, was $L_q x = \log\log x$ giebt, welche Funktion noch nicht tabuliert worden zu sein scheint. Vorläufig ist es zweckmässiger, Potenzen und Wurzeln auch bei nicht ganzzahligen Exponenten mit gewöhnlichen Logarithmen zu berechnen, aber der Gedanke ist vielleicht entwicklungsfähig.

321) Zwar finden sich in den meisten Logarithmensammlungen die zum linearen Interpolieren nötigen Proportionalteile in zerstreuten Täfelchen, dieselben können aber auch zu einer besonderen Tafel zusammengestellt sein, und um solche handelt es sich hier, die oft noch anderen Zwecken dienen kann. Gewöhnliche Produktentafeln (Nr. **5**) und noch besser mechanische Hülfsmittel, wie der Rechenschieber (Nr. **50**), können beim Interpolieren ebenfalls mit Vorteil verwendet werden.

322) In dem Werke „A new systeme of the Mathematicks...", 2, London 1681. $a = 10$, x von 44 bis 4320.

323) „Tafeln der Proportionalteile...", Berlin 1843. $a = 100$, x von 70 bis 699.

324) Tafel III der Sammlung[252], auch gesondert erschienen; $a = 100$, x von 40 bis 409, mittelst eines Hülfstäfelchens bis 40955 ausdehnbar. Von

33. Tafeln der Reziproken und zur Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Dezimalbrüche. Tafeln der Reziproken, d. h. der Werte $\frac{1}{x}$, führen Division auf Multiplikation zurück. Von x gleich 1 bis 1000 gehen u. a. diejenigen von *Chr. Hutton*[328]), *E. Gelin*[329]) und *W. Ligowski*[330]), bis 10 000 die von *P. Barlow*[331]), bis 100 000 die von *W. H. Oakes*[332]), womit die bemerkenswertesten genannt sind. Auf blosse Additionen zurückgeführt werden Divisionen durch eine Tafel, die ausser den Reziproken auch ihre neun ersten Vielfachen enthält. Wir haben solche von *R. Picarte*[333]) und *J. C. Houzeau*[334]). Sie bilden den Übergang zu Tafeln, die allgemein der Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Dezimalbrüche dienen [I C 1, Nr. 5]. Den bereits in Nr. 7 genannten sind die von *W. F. Wucherer*[335]), *H. Goodwyn*[336]), *A. Brocot*[337])

Schrön „Interpolationstafel" genannt, welche Bezeichnung auch in anderem Sinne gebraucht wird, z. B. von *Hülsse*[65]) für eine Tafel der Werte:

$$\frac{x(x-1)}{1\cdot 2},\quad \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\ \text{u. s. w.}$$

325) „Dezimale Interpolationstafel" in [305]); $a=10$ und $a=100$, x von 1 bis 180.

326) „A sexcentenary table...", London 1779. $a=600$, x in Minuten und Sekunden ausgedrückt.

327) „Sexagesimale Interpolationstafel" in [305]); $a=60$, x von 1 bis 150.

328) Miscell. math., London 1775, vol. 4; mit 9 Stellen.

329) Recueil de tables numériques, Huy 1894; mit 10 Dezimalen.

330) Mit 6 geltenden Ziffern in [59]), abgedruckt im „Taschenbuch der Hütte", 17. Aufl. Berlin 1899.

331) „New mathematical tables"..., London 1814, Stereotypausgabe von 1840, auch 1851, mit 9 und 10 Stellen.

332) „Table of the reciprocals of numbers from 1 to 100000...", London 1865; 7 geltende Ziffern, wie eine 7-stellige Logarithmentafel angeordnet, mit Differenzen und Proportionalteilen, die noch bis $x=10$ Millionen zu gehen erlauben. *Arnaudeau*[53]) giebt eine Probeseite einer ebenfalls bis 100 000 reichenden Reziprokentafel, aber nur mit 5 geltenden Ziffern.

333) „La division réduite à une addition...", Paris 1859; geht bis 10000, mit 10 und 11 geltenden Ziffern.

334) Brux. Bull. (2) 40 (1875), p. 107; die Reziproken der Zahlen bis 100 mit 20 Stellen und ihre ersten 9 Vielfachen mit 12 Stellen.

335) „Beyträge zum allgemeinern Gebrauch der Decimalbrüche...", Carlsruhe 1796; 5-stellig, Zähler und Nenner der Brüche beide unter 50 und relativ prim.

336) „A tabular series of decimal quotients...", London 1823; 8-stellig, Zähler und Nenner beide nicht grösser als 1000, die Brüche selbst kleiner als $\frac{99}{991}$, nach ihrem Wert geordnet.

337) In „Calcul des rouages...", deutsch herausgegeben vom Verein

hinzuzufügen, die im Gegensatz zu ersteren immer bei der gleichvielten Dezimale abbrechen.

34. Tafeln der Quadrate und höheren Potenzen. Ausser den in Nr. 8 besprochenen genauen Quadrattafeln finden sich in einer Reihe von Sammlungen[338]) wie auch Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung [I D 1; 2][339]) Tafeln, welche die Quadrate nur auf eine bestimmte Zahl von Stellen verkürzt enthalten. Höhere Potenzen geben ähnlicherweise *J. H. Lambert*[340]) und *Hülsse*[341]).

35. Tafeln der Quadrat- und Kubikwurzeln. Mittelst einer, mit Einrichtung zum Interpolieren versehenen Tafel der Quadrate (Nr. 34) können Quadratwurzeln auf dieselbe Weise, wie mittelst einer gewöhnlichen Logarithmentafel die Numeri zu gegebenen Logarithmen, bestimmt werden. Von besonderen Tafeln der Quadrat- und Kubikwurzeln gehen mehrere[342]) bis 1000; bis 10 000 reichen u. a. die von *P. Barlow*[343]) und *Hülsse*[344]), bis 25 500 die von *G. A. Jahn*[345]).

36. Tafeln zur Auflösung numerischer Gleichungen. Durch eine Substitution der Form $x' = \lambda x$ und Division mit einer Konstanten lässt jede trinomische (dreigliedrige) Gleichung sich auf solche Form bringen, dass irgend zwei der drei Koeffizienten absolut ge-

---

„Hütte" unter dem Titel „Berechnung der Räderübersetzungen", Berlin 1870, 2. Aufl. 1879; verwandelt echte Brüche mit Nennern bis zu 100 in (nach ihrem Wert geordnete) Dezimalbrüche auf 11 Stellen. *Gundelfinger*'s „Interpolationstabelle . . .", p. 2—3 in [352]) giebt blos 2 Stellen.

338) Z. B. in *F. G. Gauss*[259]) die Werte x^2 für $x = 0{,}000$ bis $10{,}009$ mit 4 Dezimalen; auch Proportionalteile zum Interpolieren.

339) Z. B. in *Faà de Bruno,* Traité élémentaire du calcul des erreurs . . ., Paris 1869; bis zum Quadrat von 12,000; ebenfalls mit 4 Dezimalen.

340) Nämlich x^n für $n = 1, 2, \ldots, 11$ und $x = 0{,}01$ bis $1{,}00$ auf 8 Dezimalen in den „Zusätzen . . ." [298]), abgedruckt z. B. von *Schulze*[294]).

341) In der Tafelsammlung[65]); ausser der *Lambert*'schen Tafel noch x^n für $n = 1, 2, \ldots 100$ und 12 Werte von x zwischen 1,01 und 1,06, die Grenzen eingeschlossen, mit 6 Stellen und die reziproken Werte hiervon mit 7 Stellen, endlich die Werte $\sum_{n=1}^{100} x^n$ und $\sum_{n=1}^{100} x^{-n}$.

342) Z. B. von *Ligowski*[59]) mit 6 bezw. 5 geltenden Ziffern.

343) In [331]), 7 Dezimalen.

344) In der Sammlung[65]), die Quadratwurzeln mit 12 Dezimalen, die Kubikwurzeln mit 7 Dezimalen.

345) In [61]), am Anfang mit 14 Dezimalen, von 1010 an mit 5 Dezimalen *Gelin*[329]) giebt die Quadrat- und Kubikwurzeln zwar nur von den ersten 100 Zahlen, aber mit 15 bezw. 10 Dezimalen.

nommen gleich Eins werden, also nur noch *ein* Parameter c vorkommt — z. B. jede reduzierte kubische Gleichung auf die Form:

$$x^3 \pm x = c.$$

Eine Tafel der zusammengehörigen Werte von x und c ermöglicht daher die Auflösung aller numerischen Gleichungen der betreffenden Art. So hat für kubische Gleichungen schon *J. H. Lambert*[346]) eine 7-stellige Tafel der Werte $\pm(x - x^3)$, *P. Barlow*[347]) eine 8-stellige der Werte $(x^3 - x)$ und *J. Ph. Kulik*[348]) weiter fortgesetzte Tafeln, auch für $(x^3 + x)$, mit 6 und 7 Stellen veröffentlicht. *A. S. Guldberg*[349]) wählt als Normalform einer trinomischen Gleichung n^{ten} Grades:

$$x^n + cx + c = 0$$

(c positiv oder negativ) und giebt in mehreren Tafeln, nämlich für Gleichungen 2^{ten}, 3^{ten} und 5^{ten} Grades, zu gleichmässig fortschreitenden Werten von x und $1:x$ nicht die Werte von c selbst, sondern ihre Logarithmen, weshalb seine Tafeln in der Mitte zwischen den vorigen und den jetzt namhaft zu machenden stehen. Offenbar ist es für die logarithmische Rechnung vorteilhafter, wenn derartige Tafeln auch die Werte von $\log x$, statt von x, enthalten; für quadratische Gleichungen hat solche *K. Fr. Gauss*[350]) berechnen lassen, *R. Mehmke*[351])

---

346) In den Zusätzen zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen, Berlin 1770; x geht von 0,001 bis 1,155; wie die folgenden nur für den Fall dreier reellen Wurzeln.

347) In [331]); x von 1,0000 bis 1,1549.

348) Prag. Abhandl. (5) 11 (1860), p. 23; x von 0,0001 bis 3,2800; für alle Fälle.

349) Christ. Vidensk. Selsk. Forhandl., aar 1871, p. 287, 307; aar 1872, p. 144. Die Umkehrung der Funktion:

$$y = \frac{x^n}{1+x}$$

wird mit $x = \overset{n}{r}(y)$ bezeichnet, sodass z. B. eine Wurzel der Gleichung:

$$x^5 + ax + b = 0$$

durch

$$x = \frac{b}{a}\,\overset{5}{r}\left(-\frac{a^5}{b^4}\right)$$

geliefert wird. Die Tafeln geben 5- und 7-stellige Logarithmen, sind aber für bequemen Gebrauch nicht ausgedehnt genug.

350) Sie finden sich in *J. A. Hülsse*'s Sammlung mathematischer Tafeln, Leipzig 1840 (in der späteren Auflage nicht mehr). Drei mit D, E, F überschriebene Kolonnen für die Werte:

$$\log\frac{(1+x)^2}{x}, \quad \log(x+x^2), \quad \log\frac{1+x}{x^2},$$

welche sich an die Kolonnen A, B, C der Additionslogarithmen mit den Werten eine bessere Einrichtung angegeben. Endlich hat *S. Gundelfinger*[352]), den Gedanken von *Gauss* erweiternd, 3-stellige Tafeln mit zwei Eingängen, die zur Auflösung trinomischer Gleichungen aller Arten und Grade dienen, veröffentlicht.

III. Graphisches Rechnen.

Monographieen und Lehrbücher: B. E. Cousinery, Le calcul par le trait, Paris 1839; *H. Eggers*, Grundzüge einer graphischen Arithmetik, Progr. Gymn. Schaffhausen 1865; *E. Jäger,* Das graphische Rechnen, Prom.-Dissert. Speyer 1867; *J. Schlesinger,* Vorträge über grafisches Rechnen und Grafo-Statik, Wien 1868/69; *K. Culmann,* Die graphische Statik, Zürich 1866, zweite Auflage Zürich 1875, 1. Abschnitt („Culmann"); *A. Favaro*, Sulle prime operazioni del calcolo grafico, Venezia 1872; *L. Cremona*, Elementi di calcolo grafico, Torino 1874, deutsche Übertragung von *M. Curtze* mit dem Titel: Elemente des graphischen Calculs, Leipzig 1875 („Cremona"), englische Übersetzung von *Th. Hudson Beare* mit dem Titel: Graphical Statics, Oxford 1890; *K. von Ott,* Das graphische Rechnen

---

$\log x$, $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$, $\log(1+x)$ anschliessen; drei Fälle mit verschiedenen Formeln werden unterschieden.

351) Zeitschr. Math. Phys. 43 (1898), p. 80. Dreistelliger Entwurf; zwei Teile, welche zu gegebenen Werten von $u = \log(x^2 - x)$ bezw. $\log(x - x^2)$ die Werte von $v = \log x$ liefern. Direktes Eingehen in die Tafel und einheitliche Formeln. Die Wurzeln von $ax^2 \pm bx - c = 0$ bezw. $ax^2 \pm bx + c = 0$ ergeben sich aus:

$$u = \log\frac{ac}{b^2}, \quad \log(\pm x_1) \text{ bezw. } \log(\mp x_1) = \log\frac{c}{b} - v,$$
$$\log(\mp x_2) = v + \log\frac{b}{a}\cdot$$

352) „Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämtlicher trinomischer Gleichungen . . .", Leipzig 1897 [I B 3a, Nr. **14**, p. 446, Anm. 41]. Sie beruhen auf der (schon von *H. Geelmuyden*, Christ. Vidensk. Selsk. Forhandl., aar 1873, p. 481 gegebenen) Anpassung der Gaussischen Formeln zur Auflösung trinomischer Gleichungen an die *Wittstein*'sche Anordnung der Additionslogarithmen (Nr. **30**). Zwei Tafeln, welche die Werte von:

$$A - \mu B = \log\frac{x}{(1+x)^\mu} \quad \text{bezw.} \quad B - \mu A = \log\frac{1+x}{x^\mu}$$

zu gegebenen Werten von:

$$A = \log x \text{ und } \mu = 0{,}00;\ 0{,}05;\ 0{,}10;\ \ldots\ 1{,}00$$
$$\text{bezw. } \mu = 0{,}000;\ 0{,}025;\ 0{,}075;\ \ldots\ 0{,}500$$

liefern. Bei kubischen Gleichungen ist, namentlich wenn drei Stellen nicht ausreichen und alle Wurzeln verlangt sind, im Fall dreier reellen Wurzeln die goniometrische Lösung (s. etwa *L. Matthiessen,* Grundzüge der . . . Algebra der litteralen Gleichungen, Leipzig 1878, VI. Abschn.), im Fall *einer* reellen Wurzel die Lösung mittelst Hyperbelfunktionen (s. etwa *S. Günther*, Hyperbelfunktionen, Halle a. S. 1881, p. 154) vorzuziehen.

und die graphische Statik, erster Teil, vierte Auflage, Prag 1879; *J. Wenck*, Die graphische Arithmetik und ihre Anwendungen auf Geometrie, Berlin 1879; *A. Favaro,* Lezioni di statica grafica, Padova 1877, französische Übersetzung mit Zusätzen von *P. Terrier* mit dem Titel: Leçons de Statique graphique, 2ème partie, Calcul graphique, Paris 1885 („Favaro-Terrier"); *A. Steinhauser*, Die Elemente des graphischen Rechnens ..., Wien 1885; *J. J. Prince,* Graphic arithmetic and statics, London 1893; *O. Bürklen,* Graphisches Rechnen und graphische Darstellungen im Mathematikunterricht, Progr. Realgymn. Gmünd 1899.

Zum graphischen Rechnen im weiteren Sinne gehören alle Verfahren, die bezwecken, analytische Aufgaben durch Zeichnung zu lösen. Jedoch haben wir an dieser Stelle nur die gewöhnlichen Rechnungsarten und die Auflösung von Gleichungen zu betrachten[353]). Im allgemeinen sind die zeichnerischen Verfahren anschaulicher, übersichtlicher, schneller ausführbar und mit geringerer Anstrengung des Geistes verbunden, als die rechnerischen[354]); in manchen Fällen (wie bei der Auflösung beliebiger Gleichungen) gewähren sie bis jetzt allein die Möglichkeit eines direkten Vorgehens; bei nicht ausreichender Genauigkeit[355]) können sie immer noch zur Vorbereitung, Ergänzung und Prüfung der Rechnung dienen. Zwar ist das graphische Rechnen kein neues, etwa dem 19. Jahrhundert eigentümliches Lehrgebiet[356]), aber nachdem es zeitweilig durch die rechnerischen Methoden

353) Ausgeschlossen werden so hauptsächlich die graphische Interpolation, Summierung von Reihen, Differentiation und Integration (die nebst der graphischen Bestimmung von Bogenlängen, Flächen- und Rauminhalten, Schwerpunkten und Momenten teilweise in den oben genannten Schriften behandelt werden) und die graphische Ausgleichungsrechnung. Wir schliessen ferner aus die geometrische Veranschaulichung von Begriffen, Sätzen und Beweisen der Arithmetik und Algebra.

354) *G. Hauck* lässt (Zeitschr. mathem.-naturw. Unterricht 12 (1881), p. 333) diese Vorzüge nur für die „geometrische" Auffassung des graphischen Rechnens gelten, bei der als Gegebenes und Gesuchtes nicht Zahlen, sondern Strecken und Verhältnisse von solchen betrachtet werden. Im Sinne der „arithmetischen" Auffassung gegebene Zahlen durch Strecken zu ersetzen, um diese geometrischen Konstruktionen zu unterwerfen und die erhaltenen Strecken wieder durch Zahlen auszudrücken, lohnt sich allerdings bei einfachen Rechnungen, besonders wenn sie vereinzelt vorkommen und ein gewöhnlicher Massstab benützt wird, nicht, wohl aber bei der Auflösung numerischer Gleichungen und der Anwendung der logarithmographischen Methode (Nr. **40**—**42**).

355) *Culmann* bezeichnet (Vorrede zur 1. Aufl. der graph. Statik, p. V) eine Genauigkeit von 3 Stellen oder 1/1000 als vollständig erreichbar.

356) Schon 1593 hat *Vieta* Konstruktionen zusammengestellt, sowohl mit Lineal und Zirkel ausführbare als auf der Anwendung von Kurven beruhende, die zur geometrischen Ermittlung rechnerisch erhaltener Ausdrücke, sogar zur Lösung kubischer und biquadratischer Aufgaben dienen (vgl. *M. Cantor,* Vorles. üb. Gesch. der Mathem. 2, 2. Aufl. Leipzig 1900, p. 584, sowie das Register

zurückgedrängt worden war, ist es in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts durch systematischen Ausbau wie durch die Entwicklung neuer, allgemeiner Methoden bedeutend gefördert worden und es hat (besonders unter den zeichengewandten Ingenieuren) grosse Verbreitung gefunden.

Behufs Versinnlichung der (zunächst reell vorausgesetzten) Zahlen kann man diese entweder den Punkten einer geraden Punktreihe[357]) ein-eindeutig zuordnen, oder die (mit bestimmter Richtung genommene) Strecke vom Nullpunkt der Reihe bis zu einem beliebigen Punkt derselben als Bild der zu letzterem Punkt gehörigen Zahl betrachten. Am nächsten liegt es, die Längen der Strecken den Zahlen, die sie versinnlichen sollen, proportional zu nehmen, sodass die den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... entsprechenden Punkte der erwähnten Punktreihe einander in gleichen Abständen folgen oder ein gewöhnlicher (gleichmässig geteilter) Massstab vorliegt (Nr. **37—39**); für manche Zwecke (namentlich die Auflösung von höheren Gleichungen und Systemen solcher) hat es sich weit vorteilhafter erwiesen, die Zahlen durch Strecken darzustellen, deren Längen den Logarithmen der Zahlen proportional sind, d. h. einen logarithmischen Massstab zu benützen (Nr. **40—42**).

a. Grundmassstab gleichmässig geteilt.

37. Gewöhnliche arithmetische Operationen. Die Addition mehrerer Zahlen wird bei der Darstellung durch ihnen proportionale Strecken bewirkt, indem man diese Strecken unter Beachtung ihres Sinnes aneinander fügt, und die Subtraktion wird durch Umkehrung des Sinnes der zu subtrahierenden Strecken auf die Addition zurückgeführt; dagegen empfiehlt es sich, bei Benützung einer gleich-

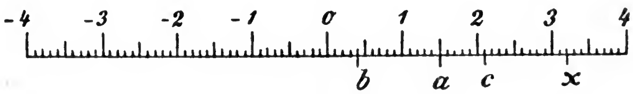


Fig. 22.

förmigen Punktreihe als Bild der Zahlenreihe die Bestimmung von $x = a - b + c$, welche dadurch geschieht, dass man (Fig. 22) die

---

unter „algebraische Geometrie"). Über geometrische Auflösung von Gleichungen bei Griechen und Arabern vgl. z. B. *Zeuthen,* Gesch. d. Math., p. 44, 300, 304. Vgl. auch Anm. 375.

357) Über die Verwendung krummliniger Punktreihen s. Abschnitt IV und V, namentlich Nr. **46** und **51**.

Strecke cx nach Länge und Richtung gleich ba macht, als Grundaufgabe zu betrachten, von welcher vermöge der Auffassungen $a + b = a - 0 + b$ und $a - b = a - b + 0$ die Addition und Subtraktion als besondere Fälle erscheinen[358]. Auch Multiplikation und Division werden am besten verallgemeinert, zu der Operation $x = \frac{a}{b} c$ nämlich, aus der sie für $b = 1$ bezw. $c = 1$ hervorgehen. Wegen $b : a = c : x$ können die zu den Zahlen a, b, c, x gehörigen Strecken als zwei Paare entsprechender Seiten zweier ähnlicher Dreiecke betrachtet werden, von denen man gern zwei entsprechende

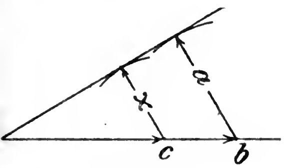


Fig. 23.

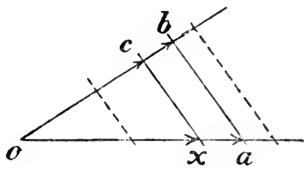


Fig. 24.

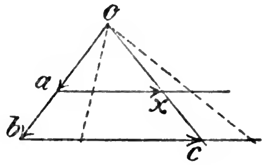


Fig. 25.

Winkel zusammenfallen lassen wird; a und b können zu demselben Dreieck genommen werden (Fig. 23 und 24), oder nicht (Fig. 25)[359]. Zusammengesetzte Ausdrücke der Form

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} c_i$$

lassen sich mittelst der, bei dieser Verwendung von *Culmann* „Summationspolygone" oder „Multiplikationspolygone" genannten, aus der

358) Die Zahl der Operationen wird so geringer, z. B. ist bei der Bestimmung von $a + b + c$ auf gewöhnliche Weise die Zirkelspitze 7mal, bei der Auffassung $a - (-b) + c$ nur 4mal einzusetzen.

359) Einige andere Auffassungen „Cremona" p. 33. Das Verhältnis a/b kann auch als *tg* oder als *sin* eines Winkels gedeutet werden; in letzterem Falle lässt sich, wenn der Winkel gezeichnet ist, x unmittelbar mit dem Zirkel abgreifen („Culmann" p. 11, woselbst auch Behandlung des Falles $a > b$). Sind eine Reihe von Werten c mit einem konstanten Verhältnis a/b zu multiplizieren, und legt man Fig. 24 oder 25 zu Grunde, so beschreiben die Endpunkte von c und x ähnliche Punktreihen in perspektiver Lage; es ist auch vorgeschlagen worden, den Satz zu benützen, dass zwei beliebige feste Tangenten einer Parabel von einer beweglichen Tangente in ähnlichen Punktreihen geschnitten werden („Cousinery" p. 19), ferner den Satz, dass ein Büschel von Kreisen mit zwei reellen gemeinsamen Punkten von allen durch einen dieser Punkte gehenden Strahlen in ähnlichen Punktreihen geschnitten wird („Favaro-Terrier" p. 17). Die obige Aufgabe lässt sich als besonderer Fall der (mittelst projektiver Punktreihen zu lösenden) ansehen, zu gegebenem c das x zu bestimmen, wenn c und x durch irgend eine bilineare Gleichung verbunden sind.

Statik (IV 5) entlehnten Seilpolygone auswerten[360]). Produkte mit mehr als zwei Faktoren und Potenzen mit ganzzahligen Exponenten können durch Wiederholung der vorigen Konstruktionen graphisch berechnet werden[361]). Vorteilhafter ist es, eine im voraus gezeichnete logarithmische Spirale zu benützen, am besten in Verbindung mit einer Archimedischen Spirale, wodurch das Multiplizieren auf Zusammenfügen, das Potenzieren und Wurzelausziehen auf Vervielfachen und Teilen von Strecken zurückgeführt wird[362]). Diese beiden Kurven leisten also in ihrer Verbindung für das graphische Rechnen[363]) dieselben Dienste, wie die Logarithmen für das Zahlenrechnen[364]). Denselben Zweck erreicht man mit Hülfe der logarithmischen Kurve[365]).

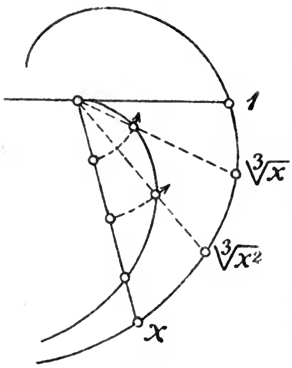


Fig. 26.

Für das graphische Rechnen mit komplexen Zahlen bildet die Grundlage, was auf S. 155—156 dieses Bandes über die geometrische

---

360) „Culmann“ p. 21, über die Ermittlung von Ausdrücken der Formen $\sum \frac{a_i}{b_i} \frac{c_i}{d_i} e_i$ u. s. w. durch wiederholte Konstruktion von Seilpolygonen p. 28.

361) S. etwa „Cremona“ p. 42, 47; „Favaro-Terrier“ p. 24, 35. Aus den Konstruktionen für rationale ganze Funktionen in Nr. **38** erhält man durch Spezialisierung ebenfalls Methoden zur graphischen Potenzierung, z. B. aus der von *Lill*[369]) die später von *Reuleaux* angegebene (Der Konstrukteur, 3. Aufl. Braunschweig 1869, p. 84: „Cremona“ p. 50).

362) „Cousinery“ p. 44; „Favaro-Terrier“ p. 42, 52. Zu Radienvektoren der Archimedischen Spirale, die eine arithmetische Progression bilden, gehören in geometrischer Progression fortschreitende Radienvektoren der logarithmischen Spirale. Wegen der zweckmässigsten Konstruktionen für letztere s. auch „Cremona“ p. 32 ff. Fig. 26 erläutert das Ausziehen von Kubikwurzeln.

363) Wofern eben die Zahlen durch ihnen proportionale Strecken dargestellt sind.

364) Beruht darauf, dass wenn $r = a^{\varphi}$ die Polargleichung der logarithmischen Spirale, $\varrho = \varphi$ diejenige der Archimedischen ist, man hat $\varrho = \overset{a}{\log}\, r$.

365) Die Abscissen sind proportional den Logarithmen der durch die Ordinaten dargestellten Zahlen, wie bei *J. de la Gournerie,* Traité de géométrie descriptive 3, Paris 1864, p. 197 u. fig. 451, oder umgekehrt, wie „Cremona“ p. 56. — Hat man häufig Potenzen oder Wurzeln mit demselben rationalen, positiven oder negativen Exponenten zu berechnen, so kann man mit *J. Schlesinger* (Österr. Ingen. u. Archit.-Ver. Zeitschr. 18 [1866], p. 156; „Favaro-Terrier“ p. 57) besondere „Potenzkurven“ verwenden, deren Polargleichung $r = \sec^n \varphi$ bezw. $r = \cos^n \varphi$ ist; über ein daraus folgendes Annäherungsverfahren bei n^{ten} Wurzeln

Bedeutung der Addition und Multiplikation komplexer Grössen gesagt ist[366]).

38. Berechnung rationaler ganzer Funktionen und Auflösung von Gleichungen mit einer Unbekannten. *J. A. v. Segner* hat 1761

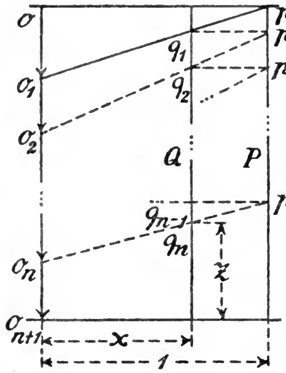


Fig. 27.

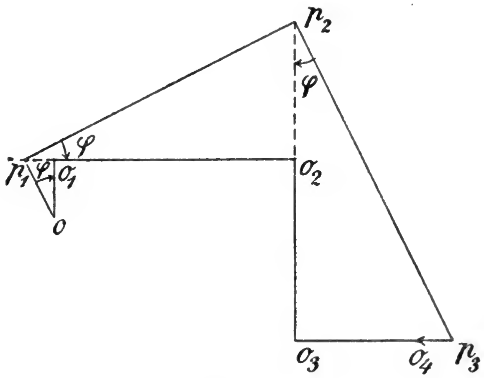


Fig. 28.

die in Fig. 27 dargestellte Konstruktion zur Bestimmung des Wertes einer rationalen ganzen Funktion

$$z = f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

für einen gegebenen Wert von x veröffentlicht[367]). Von den im 19. Jahrhundert angegebenen Konstruktionen, bei denen ein gewöhn-

---

s. „Favaro-Terrier" p. 64. Dieselben Kurven wurden übrigens schon von *R. Descartes* in seiner „Géométrie" von 1637 betrachtet, der auch einen Mechanismus zu ihrer Erzeugung angab (s. etwa die deutsche Ausgabe von *L. Schlesinger*, Berlin 1894, p. 21 u. Taf. 1, Fig. 6).

366) Wie beim graphischen Rechnen mit reellen Zahlen ist es vorteilhaft, die allgemeineren Operationen $x = a - b + c$ und $x = (a : b)c$ zu betrachten; die erste wird ausgeführt, indem man — unter a, b, c, x, 0 zugleich die Punkte verstanden, welche diese komplexen Zahlen darstellen — die Strecke cx nach Länge und Richtung gleich ba macht, die zweite durch Konstruktion des zu dem Dreieck oba gleichstimmig ähnlichen Dreiecks ocx. Zur Erleichterung des Potenzierens und Wurzelausziehens dient wieder die logarithmische zusammen mit der Archimedischen Spirale.

367) Acad. Petrop. Novi Comment. 7, pro 1758/59 (1761), p. 211. Sie stützt sich wie alle späteren (s. dagegen Nr. **41**) auf die Kette von Gleichungen

$$z_1 = a_0 x + a_1, \quad z_2 = z_1 x + a_2 = a_0 x^2 + a_1 x + a_2, \ldots$$
$$z_n = z_{n-1} x + a_n = f(x) = z.$$

Nachdem man zur Vorbereitung in einer senkrechten Geraden, der z-Axe, die Strecken $oo_1 = a_0$, $o_1 o_2 = a_1$, $o_2 o_3 = a_2, \ldots o_n o_{n+1} = a_n$ abgetragen (und zwar abwärts oder aufwärts, je nachdem das Vorzeichen $+$ oder $-$ ist), durch licher Massstab benützt wird[368]), ist nur eine der vorigen ebenbürtig, die von *E. Lill*[369]). Die Funktion $f(x)$ wird durch einen rechtwinkligen Linienzug $o o_1 o_2 o_3 \dots o_{n+1}$ (Fig. 28) dargestellt, dessen Seiten bezw. den (in einem beliebigen Massstabe aufgetragenen) Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$ gleich sind[370]). Beschreibt man diesem einen rechtwinkligen Linienzug $o p_1 p_2 \dots p_n$ ein, dessen erste Seite $o p_1$ um den Winkel $(-\varphi)$ von der Richtung $o o_1$ abweicht, so ist (in demselben Massstabe) $p_n o_{n+1} = f(x)$ für $x = \operatorname{tg} \varphi$.[371])

Der einbeschriebene Linienzug wird zu einem „auflösenden", d. h. $\operatorname{tg} \varphi$ ist eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$, wenn p_n mit o_{n+1} zusammenfällt[372]). *Lill* hat sein Verfahren auch auf den Fall einer komplexen Veränderlichen und einer Funktion mit komplexen Koeffizienten ausgedehnt[373]).

---

o_{n+1} eine die x-Axe gebende Wagerechte, im Abstand $+1$ von der z-Axe die Parallele P zu letzterer und durch den Schnittpunkt p derselben mit der Wagerechten durch o die Gerade $p o_1$ gezogen hat, zieht man im Abstand x von der z-Axe die Parallele Q mit derselben, durch ihren Schnittpunkt q_1 mit $o_1 p$ die Wagerechte $q_1 p_1$, von deren Schnittpunkt p_1 mit P eine Gerade nach o_2 u. s. w. Der gesuchte Wert von $f(x)$ ist dann gleich dem z des Punktes q_n. Wird Q parallel mit der z-Axe verschoben, so beschreibt q_n die Kurve zur Gleichung $z = f(x)$. Die Methode ist von *Bellavitis* wiedergefunden worden, vgl. „Favaro-Terrier" p. 204.

368) Erwähnt seien eine Konstruktion von *A. Winckler*, Wien. Ber. 53 (1866), 2. Abt., p. 326, und die von *H. Wehage,* Ver. Deutsch. Ingen. Zeitschr. 21 (1877), p. 105, Fig. 4 u. 5 auf Textblatt 3 (auch *Lill's* Konstruktion erscheint wieder, Fig. 1—3). *Eggers* behandelt a. a. O. p. 17 allgemeiner die Funktion:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 x_1 x_2 x_3 \dots x_n + a_1 x_1 x_2 \dots x_{n-1} + a_2 x_1 x_2 \dots x_{n-2} + \cdots + a_{n-1} x_1 + a_n$$

und fasst die x als tg von Hülfswinkeln auf, „Culmann" p. 18 dagegen als sin, um die Konstruktion soviel als möglich mit dem Zirkel ausführen zu können.

369) Par. C. R. 65 (1867), p. 854 [vorher mitgeteilt von „un abonné" Nouv. Ann. math. (2) 6 (1867), p. 359]; „Cremona" p. 61; „Favaro-Terrier" p. 197.

370) Die Richtung irgend einer Seite des Zugs folgt aus der Richtung der vorhergehenden Seite durch Drehung um einen Rechten in positivem oder negativem Sinn, je nachdem die zugehörigen Koeffizienten gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben. Fig. 28 entspricht dem Falle $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 2$, $x = 0{,}5$.

371) Ferner ist $o p_1 p_2 \dots p_n$ ein darstellender Linienzug der Funktion $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $(f(\xi) - f(x)) : (\xi - x)$ von ξ, s. „Cremona" p. 65; allgemeinere Eigenschaften ebenda p. 63.

372) Ein auflösender Linienzug stellt zufolge Anm. 371 die neue Gleichung dar, deren linke Seite durch Division von $f(x)$ mit dem betreffenden Wurzelfaktor erhalten wird. Auch der gleichzeitigen Division mit zwei Wurzelfaktoren steht ein geometrisches Verfahren zur Seite, s. *Lill*[369]) p. 857, „Cremona" p. 66.

373) Von „E. J." mitgeteilt Nouv. Ann. math. (2) 7 (1868), p. 363.

Die reellen Wurzeln einer gegebenen reellen Gleichung $f(x)=0$ können graphisch bestimmt werden, indem man die Kurve zur Gleichung $z=f(x)$ zeichnet, unter x, z etwa Cartesische Koordinaten eines veränderlichen Punktes verstanden; die Abscissen der Schnittpunkte dieser Kurve mit der x-Axe sind die gesuchten Wurzeln[374]. Allgemeiner können zwei Kurven benützt werden, die so gewählt sind, dass die Elimination von z aus ihren Gleichungen $\varphi(x, z)=0$ und $\psi(x, z)=0$ die aufzulösende Gleichung $f(x)=0$ ergiebt[375]. Was die algebraischen Gleichungen der ersten Grade betrifft, so werden die quadratischen vielleicht am besten nach *Lill*'s Methode[376] graphisch gelöst; für die kubischen und biquadratischen Gleichungen genügt eine im voraus gezeichnete Parabel[377]. Vgl. auch Nr. 48 (Methoden von *Reuschle* u. s. w.).

---

374) An Stelle der x-Axe nimmt *A. Siebel*, Arch. Math. Phys. 56 (1874), p. 422 eine beliebige Kurve $z=F(x)$, die er mit der Kurve $z=F(x)-\varkappa f(x)$ schneidet, wobei er $F(x)$ und die willkürliche Konstante $\varkappa$ so zu bestimmen sucht, dass beide Kurven von einer beliebigen Stelle an in der z-Richtung konvex ausfallen; p. 434 Kennzeichen dafür, dass zwei in derselben Richtung konvexe Kurvenbögen in gegebenem Zwischenraum sich schneiden.

375) Dies der ältere Gedanke, auf dem die geometrische Auflösung (die „Konstruktion") der Gleichungen bis zur Zeit *v. Segner*'s beruhte (vgl. etwa *L. Matthiessen,* Grundzüge der antiken und modernen Algebra, 2. Ausg. Leipzig 1896, p. 921 ff.; *A. Favaro,* Notizie storico-critiche sulla costruzione delle equazioni, Modena 1878, Appendice Modena 1880). Beim Fortschreiten von quadratischen zu höheren Gleichungen legte man zuerst Wert darauf, mit Kegelschnitten oder Kurven möglichst niedriger Ordnung auszukommen (*Descartes*), oder mit Kurven von einfacher mechanischer Erzeugung (*Newton*); nach der heutigen, durch die Entwicklung der darstellenden Geometrie und der graphischen Methoden überhaupt bedingten Auffassung ist es an sich gleichgültig, ob die verwendeten Kurven mit einem Mechanismus beschrieben, oder durch stetiges Verbinden einzelner Punkte mit einem von freier Hand (nach Massgabe der, von dem geübten Auge vorausgeschauten Form der Kurve) geführten Zeichenstift erhalten worden sind, wobei diese Punkte selbst entweder durch geometrische Konstruktion (bei algebraischen Gleichungen etwa nach *v. Segner* oder *Lill*) oder durch Rechnung bestimmt worden sein können.

376) *Lill*[369] p. 857, „Cremona" p. 67, „Favaro-Terrier" p. 203; andere Methoden bei *Matthiessen*[375] p. 926 ff., „Favaro-Terrier" p. 232, 234.

377) Die von *Descartes* zuerst angegebene Lösung mittelst einer festen Parabel und eines in jedem Falle zu zeichnenden Kreises wurde u. a. wieder von *R. Hoppe,* Arch. Math. Phys. 56 (1874), p. 110, durchgeführt und von letzterem auf die Bestimmung der komplexen Wurzeln ausgedehnt Arch. Math. Phys. 69 (1883), p. 216; von *A. Adler* dagegen, Österr. Ingen. Archit.-Ver. Zeitschr. 42 (1890), p. 146, technisch durchgebildet. Wegen der Lösungen mittelst Hyperbel und Kreis oder Conchoide und Kreis s. *Matthiessen* a. a. O. — Vorläufig nur für die geometrische Erkenntnis von Wert ist die Lösung im Sinne der projektiven

Ein brauchbares allgemeines Verfahren, komplexe Wurzeln, auch von Gleichungen mit komplexen Koeffizienten, durch Zeichnung zu bestimmen, haben wir von *H. Scheffler*[378]. Setzt man $x = y + iz$, $f(x) = Y + iZ$, und trägt man (Fig. 29) vom Punkt x eine Strecke von der Länge und Richtung des zugehörigen Y ab, deren Endpunkt x_1 heissen möge, lässt man hierauf den Punkt x irgend eine Linie, z. B. eine Gerade parallel mit der z-Axe beschreiben, so wird diese von der Linie, die gleichzeitig der Punkt x_1 beschreibt, in einem Punkt geschnitten, für welchen $Y = 0$ ist.

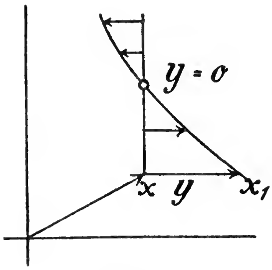


Fig. 29.

Durch Wiederholung der Konstruktion für eine Reihe von Linien erhält man punktweise die Kurve $Y = 0$. Konstruiert man auf entsprechende Art die Kurve $Z = 0$, so stellen die Schnittpunkte beider Kurven die Wurzeln von $f(x) = 0$ dar[379].

39. Systeme linearer Gleichungen. Das Bedürfnis der Ingenieure nach graphischen Methoden zur Auflösung von Systemen linearer

---

Geometrie mittelst eines beliebig gegebenen und eines punktweise zu zeichnenden Kegelschnittes von *M. Chasles*, Par. C. R. 41 (1855), p. 677 (Ausdehnung auf komplexe Wurzeln, *A. Adler*, Progr. Oberrealsch. Klagenfurt 1891, p. 19); vgl. noch *B. Klein*, Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde, Marburg 1881, p. 67 (nur kubische Gleichungen). — *Descartes'* Lösung der Gleichungen 5. und 6. Grades mittelst einer festen „parabolischen Conchoide“ (einer Kurve 3. Ordnung) und eines Kreises hat *J. A. Grunert*, Arch. Math. Phys. 27 (1856), p. 245 wieder dargestellt. *A. Ameseder* löst Wien. Ber. 93 (1886), 2. Abt. p. 380 die Gleichungen 4. und 5. Grades mittelst einer Kurve 4. Ordnung mit dreifachem Punkt und eines Kreises oder einer Hyperbel.

378) Die Auflösung der algebraischen und transcendenten Gleichungen ..., Braunschweig 1859, p. 100; ein vorher von *Scheffler* angegebenes, Arch. Math. Phys. 15 (1850), p. 375, hat den Mangel, auf reelle Wurzeln nicht anwendbar zu sein.

379) Dieselben Kurven will *A. Raabe*, Wien. Ber. 63 (1871), 2. Abt., p. 733, benützen (die Arbeit enthält keinen Fortschritt). — Manchmal ist es besser (*Scheffler* p. 103), X in Komponenten senkrecht und parallel zur Strecke ox zu zerlegen und die beiden Kurven zu konstruieren, für die je eine dieser Komponenten verschwindet, wobei man den Punkt x in Strahlen durch den Nullpunkt sowie in Kreisen um den Nullpunkt sich bewegen lassen wird. — Geometrisch handelt es sich darum, bei der durch die Gleichung $X = f(x)$ definierten konformen Abbildung (III D 6 a) der Ebene der x auf die Ebene der X in der ersten Ebene die Punkte zu bestimmen, welche sich in den Nullpunkt der zweiten Ebene abbilden; offenbar kann *Scheffler's* Gedanke auch bei beliebigen (nicht konformen) Abbildungen Verwendung finden, während andererseits bei der Auflösung komplexer Gleichungen die Eigenschaften der konformen Abbildungen ausgenützt werden können.

Gleichungen hat in neuerer Zeit mehrere solcher hervorgerufen. In graphischer Elimination besteht eine Methode von *F. J. Van den Berg*[380]. Man stellt die n gegebenen Gleichungen, deren i^{te}

$$a_i x + b_i y + c_i z + \cdots = l_i$$

sei, durch Punktreihen auf n parallelen Geraden mit beliebigen Abständen dar, indem man (Fig. 30) die Koeffizienten $a_i, b_i, c_i, \ldots, l_i$ (unter Beachtung des Vorzeichens) als Strecken in beliebigem Massstab auf der i^{ten} Geraden von einem willkürlichen Nullpunkt o_i abträgt. Um nun etwa aus der i^{ten} und k^{ten} Gleichung die Unbekannte z zu eliminieren, zieht man durch den Schnittpunkt o' von $b_i o_k$ mit $c_i c_k$ eine Parallele mit den früheren Geraden, dann wird auf dieser durch die Linien $a_i a_k$, $b_i b_k$, $d_i d_k, \ldots$ eine Punktreihe $a', b', d', \ldots$ ausgeschnitten, die mit Bezug auf den Nullpunkt o' die gewünschte neue Gleichung ohne z darstellt[381]. Das gewöhnliche Verfahren der Algebra nachahmend, gelangt man so durch allmähliche Elimination zu den Darstellungen von n Gleichungen, die je nur noch eine Unbekannte enthalten[382]. Figur 31 zeigt den Fall $n = 2$.[383] *J. Massau*

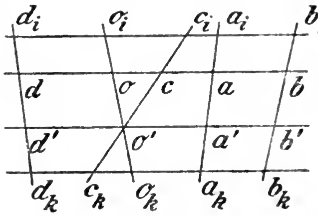


Fig. 30.

380) Amst. Akad. Versl. en Meded. (3) 4 (1887), p. 204.

381) Beruht darauf, dass jede Parallele mit den Trägern der Punktreihen von den Linien $o_i o_k$, $a_i a_k$, $b_i b_k, \ldots$ in einer Punktreihe $o, a, b, \ldots$ geschnitten wird, welche eine lineare Kombination der i^{ten} und k^{ten} Gleichung darstellt. *Van den Berg* braucht eigentlich doppelt soviel Linien, weil er die neue Punktreihe auf den Träger einer der alten central zurückprojiziert; obige Vereinfachung von *R. Mehmke*, Mosk. Math. Sammlung (Матем. Сборникъ) 16 (1892), p. 342. Weit umständlicher verfährt *F. J. Vaes*, Engineering 66 (1898), p. 867, Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 4 (1899), p. 42, Nouv. Ann. math. (3) 18 (1899), p. 74.

382) Die Rückkehr von den Strecken zu den Zahlenwerten geschieht erst am Schluss. Es empfiehlt sich, die gegebenen und die daraus abgeleiteten Gleichungen auf beweglichen Papierstreifen darzustellen, vgl. auch Anm. 383.

383) Man erhält $x = \frac{\overline{o'l'}}{\overline{a'a'}}$, $y = \frac{\overline{o''l''}}{\overline{o''b''}}$. Sind nacheinander mehrere Systeme mit denselben Koeffizienten a, b, aber verschiedenen Werten l aufzulösen, so ist jedesmal nur *eine* neue Linie, $l_1 l_2$, zu ziehen. — Ist $n = 3$, so kann man sich die drei parallelen Geraden, auf denen die Gleichungen dargestellt werden sollen, im Raume denken. Es werden dann y und z gleichzeitig eliminiert, wenn man eine Parallele zu jenen Geraden durch den Schnittpunkt o' der Ebenen $b_1 b_2 b_3$ und $c_1 c_2 c_3$ mit der Verbindungsebene der Nullpunkte $o_1 o_2 o_3$

kommt durch die Methode der „falschen Lage“ zum Ziel[384]). Die Koeffizienten der Unbekannten einer jeden Gleichung werden als Strecken in einer Geraden aneinander gefügt (s. Fig. 32, wo $n = 3$); durch die Endpunkte der Strecken zieht man Senkrechte zur Geraden. Wählt man zunächst $x, y, z, \ldots$ beliebig, setzt $x = \operatorname{tg} \alpha$, $y = \operatorname{tg} \beta$, $z = \operatorname{tg} \gamma$ u. s. w. und konstruiert für jede Gleichung einen in o beginnenden Linienzug, dessen Seiten der Reihe nach die

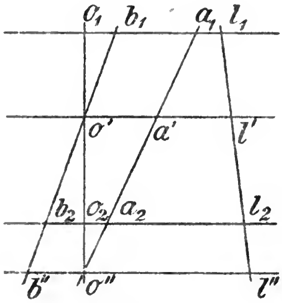


Fig. 31.

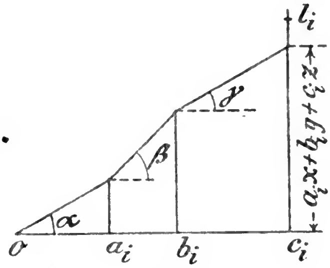


Fig. 32.

Neigungswinkel $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ haben und dessen Ecken auf jenen Senkrechten liegen, so wird beim i^{ten} Linienzug auf der letzten Senkrechten offenbar eine Strecke gleich $a_i x + b_i y + c_i z + \cdots$ abgeschnitten. Wären die für $x, y, z, \ldots$ angenommenen Werte die richtigen, so müsste letztere Strecke gleich l_i sein. Es werden nun die Richtungen der Seiten verändert, bis diese Bedingung bei allen Gleichungen erfüllt ist, wobei der Satz zur Verwendung kommt, dass wenn man, die Endpunkte der $(n - 1)$ ersten Linienzüge festhaltend, die Richtung der ersten Seite ändert, die Seiten aller Linienzüge sich um bestimmte Punkte drehen, deren Abscissen überdies von den

---

zieht; schneidet dieselbe die Ebenen $a_1 a_2 a_3$ und $l_1 l_2 l_3$ in a' bezw. l', so ist $x = \frac{\overline{o' l'}}{\overline{o' a'}}$. Die Ausführung geschieht nach den Methoden der darstellenden Geometrie. Die gleichzeitige Elimination von mehr als 2 Unbekannten gelingt mittelst der Ausdehnung der gewöhnlichen darstellenden Geometrie auf Räume von höheren Dimensionen, vgl. Anm. 385 und 387.

384) Assoc. Ingén. sortis des écoles spéciales de Gand Ann. **11** (1887/1888), p. 91. — Die „méthode de fausse position“ verwendet auch *G. Fouret*, Par. C. R. 80 (1875), p. 550; Ass. franç. Bull. Nantes 3 (1875), p. 93; „Favaro-Terrier“ p. 224, aber nur für eine besondere, durch Rechnung herzustellende Form der Gleichungen, ebenso *J. C. Dyxhoorn*, Instituut van Ingen. Tijdschr. 1885/86, 2, p. 124, dessen für $n = 4$ gegebene Methode *Van den Berg*[380]) p. 251 verallgemeinert.

Werten der l_i unabhängig sind. Bei einer anderen Methode, die *Van den Berg*[380]) p. 205 in den Fällen $n = 2$ und $n = 3$ entwickelt hat, betrachtet man die Koeffizienten einer und derselben Unbekannten in den gegebenen Gleichungen je als Cartesische Koordinaten eines Punktes. Für $n = 2$ z. B. seien die Gleichungen geschrieben

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = a, \quad b_1 x_1 + b_2 x_2 = b$$

und die Punkte mit den Koordinaten a_1, b_1 bezw. a_2, b_2 und a, b durch p_1, p_2, p bezeichnet. Dann ist, wenn (Fig. 33) die Gerade pp_1 von op_2 in s_1, pp_2 von op_1 in s_2 geschnitten wird,

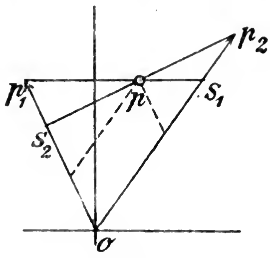


Fig. 33.

$$x_1 = \frac{ps_1}{p_1 s_1}, \quad x_2 = \frac{ps_2}{p_2 s_2}. \text{[385])}$$

Im Falle $n = 2$, wo jetzt wieder

$$a_1 x + b_1 y = l_1, \quad a_2 x + b_2 y = l_2$$

geschrieben werden möge, ist es ein sehr naheliegender und oft ausgeführter Gedanke, die Unbekannten x, y als Koordinaten eines Punktes, d. h. die gegebenen Gleichungen als die zweier Geraden aufzufassen, um in den Koordinaten ihres Schnittpunktes die gesuchten Werte der Unbekannten zu erhalten; auch bei drei Gleichungen macht die Konstruktion des Schnittpunktes der zugehörigen Ebenen nach axonometrischer Methode keine Schwierigkeit[386]). *Van den Berg* hat[380]) p. 207 gezeigt, wie mittelst eines, durch n von einem Punkt ausgehende Axen in einer Ebene gebildeten Koordinatensystems der allgemeinste Fall sich durchführen lässt[387]). *A. Klingatsch* hat mit Erfolg die Methoden der graphischen Statik angewendet[388]).

---

385) x_1 und x_2 sind auch die Koordinaten von p in dem System, von welchem op_1 und op_2 nach Lage und Grösse die Einheitsstrecken der Axenmassstäbe sind. Im Falle $n = 3$ erhält man vier Punkte p_1, p_2, p_3, p im Raum und es wird z. B. $x_1 = \frac{ps_1}{p_1 s_1}$, wo s_1 den Schnittpunkt von pp_1 mit der Ebene $op_2 p_3$ bezeichnet; die Durchführung nach den Methoden der Axonometrie (III A 6) ist leicht. Im Falle $n > 3$ bedarf es einer Verallgemeinerung der axonometrischen Methode, vgl. Anm. 387.

386) Ein Nachteil gegenüber den vorher besprochenen Methoden ist es, dass die Abschnitte der Geraden bezw. Ebenen von den Axen (graphisch oder arithmetisch) berechnet werden müssen.

387) Wiederholt von *J. v. d. Griend* jr., Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 4 (1899), p. 22, 39, der sich des Begriffs von Räumen höherer Dimensionen bedient, was *Van den Berg* vermeidet. Über die Auffassung als graphische Eli-

b. Grundmassstab logarithmisch geteilt.

40. Gewöhnliche arithmetische Operationen. Bei einem logarithmischen Massstabe ist (Fig. 34) allgemein die, mit der zu Grunde liegenden Einheit gemessene Entfernung von dem Anfangspunkte —

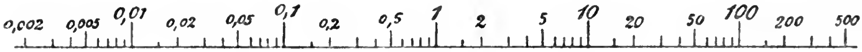


Fig. 34.

zu welchem die Zahl Eins gehört — bis zu dem Punkte, an dem die Zahl x steht, gleich $\log x$.[389]) Im folgenden ist vorausgesetzt, dass die (positiven reellen) Zahlen, mit denen irgend welche Rechnungen ausgeführt werden sollen, schon als Strecken in einem logarithmischen Massstabe mit bestimmter Längeneinheit, dem Grundmassstabe, abgetragen sind und dass auch die Ergebnisse vorläufig nur in Gestalt solcher Strecken verlangt werden[390]). Dass dann die

---

mination s. *Van den Berg*[380]), p. 244. — Graphische Lösung von Systemen nichtlinearer Gleichungen auf derselben Grundlage möglich, aber umständlich (s. dagegen Nr. **42**).

388) Monatshefte Math. Phys. 3 (1892), p. 169. Die Koeffizienten der Unbekannten werden als die Grössen von in einer Ebene wirkenden parallelen Kräften betrachtet, von denen die zu derselben Gleichung gehörigen jedesmal dieselbe Wirkungslinie haben, die Unbekannten selbst als die Hebelarme der Kräfte in Bezug auf einen festen Punkt der Ebene, die rechten Seiten der Gleichungen als statische Momente in Bezug auf diesen Punkt.

389) Der Gedanke, die Logarithmen als Strecken abzutragen, welcher sich für das graphische und mechanische Rechnen (vgl. Nr. **44**, **48**, **50—52**) äusserst fruchtbar gezeigt hat, rührt von *E. Gunter* her („line of numbers“, mit den logarithmischen Skalen der sin und tg nach dem Dictionary of National Biography, 23, p. 350 zuerst in dem Canon Triangulorum, London 1620, beschrieben, nach *Hutton*[529]) erst 1623 erfunden). — Die Längeneinheit ist, wenn man von gemeinen Logarithmen ausgeht, gleich der Strecke zwischen den Punkten 1 und 10 (der Übergang zu einem andern Logarithmensystem würde eine blosse Änderung der Längeneinheit bedeuten); der Massstab setzt sich aus lauter kongruenten Stücken zusammen, welche von 1—10, 10—100, 100—1000, . . . und auf der andern Seite des Anfangspunktes von 0,1—1, von 0,01—0,1 u. s. w. reichen. — Prismatische Zeichenmassstäbe mit logarithmischer Teilung kann man z. B. von der Firma *Dennert & Pape* in Altona (für die Längeneinheiten 125 mm und 250 mm) beziehen, Zeichenpapier mit aufgedrucktem logarithmischem Liniennetz von *Van Campenhout frères & soeur*, Bruxelles (Längeneinheit 500 mm).

390) Es handelt sich hier darum, die Lösung der schwierigeren Aufgaben in Nr. **41** und **42** vorzubereiten; bei nur aus Multiplikation und Division zusammengesetzten Rechnungen, beim Potenzieren und Wurzelausziehen führen mechanische Hülfsmittel, die logarithmischen Rechentafeln (Nr. **44**) und Rechenschieber (Nr. **50**) schneller zum Ziele als die Zeichnung.

dem Produkt mehrerer Zahlen entsprechende Strecke durch Zusammenfügen der den Faktoren entsprechenden Strecken erhalten wird und auf ähnliche Weise Division, Potenzierung und Radizierung sich graphisch ausführen lassen, ist ohne weiteres klar. Ein besonderes Hülfsmittel erfordern dagegen Addition und Subtraktion. Sind (Fig. 35) die Strecken $oa = \log \alpha$ und $ob = \log \beta$ gegeben, die Zahlen α und β selbst dagegen nicht bekannt, und ist $oc = \log(\alpha + \beta)$ gesucht, so zeigt es sich, dass die Lage von c gegen a und b nur von der Entfernung ab abhängt, nämlich

$$bc = \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

Fig. 35.

ist, wenn $ab = \log t$ gesetzt wird. Benützt man daher eine für die Längeneinheit des Grundmassstabes im voraus gezeichnete „Additions-

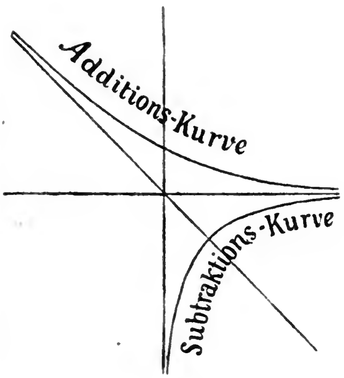


Fig. 36.

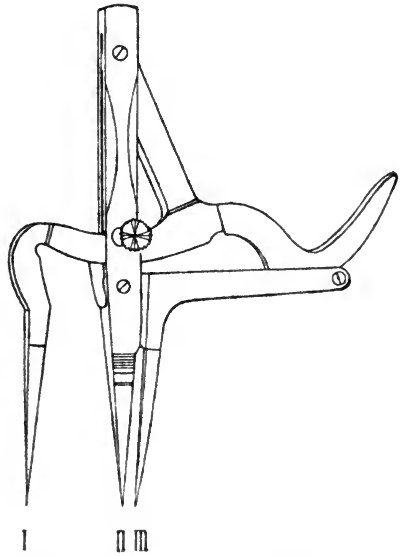


Fig. 37. *E. Brauer's* logarithmischer Zirkel.

kurve" (Fig. 36) [391]), deren Punkte durch Auftragen zusammengehöriger Werte von $\log t$ und $\log(1 + 1 : t)$ als Abscisse und Ordinate er-

391) *R. Mehmke,* Civilingenieur 35 (1889), p. 617. Sie nähert sich der positiven Abscissenaxe und der Halbierenden des Winkels zwischen positiver Ordinaten- und negativer Abscissenaxe asymptotisch (eine weitere Eigenschaft folgt aus der Vertauschbarkeit der Punkte a und b); sie ist das logarithmische Bild (Nr. **41**) der Funktion $z = 1 + 1 : x$ und lässt sich als graphische Darstellung der Additionslogarithmen in der ursprünglichen *Leonelli*'schen Gestalt (s. Nr. **30**) betrachten.

halten worden sind, so hat man, um den Punkt c zu finden, blos die Strecke ab mit dem Zirkel auf der Abscissenaxe der Additionskurve abzutragen, die zugehörige Ordinate dieser Kurve abzugreifen und die Strecke bc gleich derselben zu machen. Noch bequemer ist die Anwendung des „logarithmischen Zirkels" (Fig. 37) von *E. A. Brauer* [392]): Man setzt die erste seiner drei Spitzen auf den Punkt a, öffnet bis die zweite Spitze auf b kommt, dann giebt die dritte Spitze den gesuchten Punkt c. Auf die umgekehrte Weise lässt sich mittelst der Additionskurve oder des logarithmischen Zirkels „logarithmisch subtrahieren", d. h. der Punkt a (oder b) bestimmen, wenn c und b (bezw. a) gegeben sind; mit Hülfe der „Subtraktionskurve" (Fig. 36) [393]) ist es ebenfalls möglich.

41. Berechnung von Funktionen und Auflösung von Gleichungen mit einer Unbekannten. Man denke sich, wenn $z = f(x)$ eine beliebige Funktion ist, je zwei zusammengehörige Werte von x und z mit einem logarithmischen Massstab als Cartesische Koordinaten eines Punktes aufgetragen; die sich ergebenden Punkte erfüllen das „logarithmische Bild" der Funktion [394]). Für $z = ax^n$ erhält man eine gerade Linie, welche durch den Punkt a des in der z-Axe angebrachten logarithmischen Massstabes geht und die Steigung $n : 1$ besitzt [395]). Ist $z = ax^n + a_1x^{n_1} + a_2x^{n_2} + \cdots$, so zeichnet man zuerst (Fig. 38) die Geraden, welche nach dem vorigen den Gliedern ax^n, $a_1x^{n_1}$, . . . entsprechen; schneidet

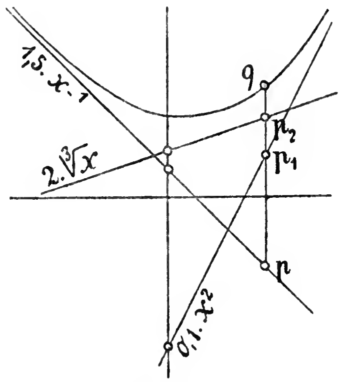


Fig. 38.

392) *W. Dyck*'s Katalog mathem. Instrumente, Nachtrag, München 1893, p. 40.

393) *Mehmke*, Zeitschr. Math. Phys. 35 (1890), p. 178; die Subtraktionskurve liefert zur Abscisse $\log t$ die (negative) Ordinate $\log(1 - 1 : t)$ oder sie ist das logarithmische Bild der Funktion $z = 1 - 1 : x$; sie nähert sich der positiven Abscissen- und der negativen Ordinatenaxe asymptotisch und ist symmetrisch zur Halbierenden des Winkels zwischen letzteren.

394) *Mehmke* [391]) p. 619; Konstruktion und Eigenschaften der logarithmischen Bilder ebenda p. 620 f. Die logarithmische Transformation ist, wie es scheint, zuerst von *L. Lalanne* [431]) zur Vereinfachung graphischer Tafeln (s. Nr. **44**) benützt worden; englische Physiker bedienen sich seit etwa zwei Jahrzehnten der logarithmischen Koordinaten zur graphischen Darstellung empirischer Funktionen u. dergl., s. den Bericht von *J. H. Vincent,* British Assoc. Report of the 68. meeting at Bristol 1898 (London 1899), p. 159.

395) Wegen $\log z = \log a + n \log x$; n darf negativ, gebrochen und irrational sein.

man diese Geraden mit irgend einer Parallelen zur z-Axe, so ergiebt sich aus den Schnittpunkten $p, p_1, \ldots$ durch Anwendung der in Nr. **40** gezeigten logarithmischen Addition der in dieser Parallelen befindliche Punkt q des logarithmischen Bildes der gegebenen Funktion[396]). Wenn z aus Gliedern der Form $a_i x^{n_i}$ mit verschiedenen Vorzeichen besteht, so kann man die positiven und negativen Glieder je für sich zusammenfassen, also etwa $z = f_1(x) - f_2(x)$

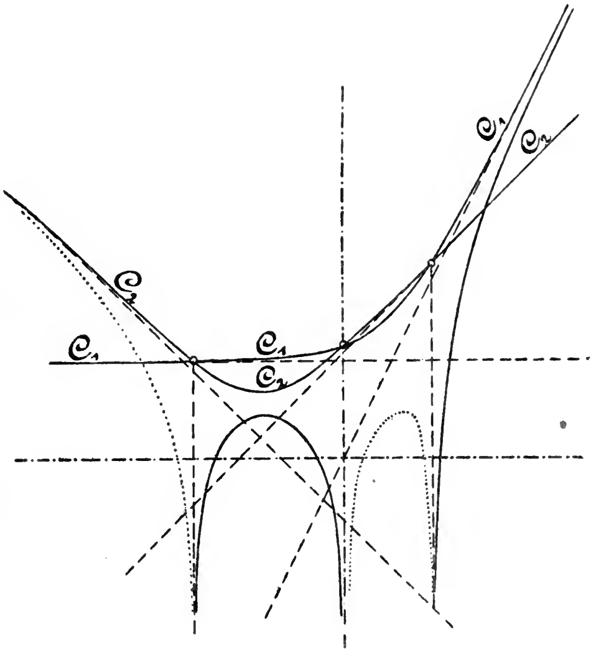


Fig. 39.

schreiben, wo f_1 und f_2 nur positive Glieder enthalten, und zunächst die logarithmischen Bilder C_1 und C_2 der letzteren Funktionen konstruieren, um aus diesen punktweise durch logarithmische Subtraktion das logarithmische Bild C von z zu erhalten[397]). Ähnlich ist zu ver-

396) Die Kurve hat die Geraden zu den Gliedern mit niedrigstem und mit höchstem Exponenten zu Asymptoten; sie ist frei von Wendepunkten und nach oben konkav. Fig. 38 entspricht dem Beispiel $z = 0{,}1 \cdot x^2 + 2 \cdot \sqrt[3]{x} + 1{,}5 \cdot x^{-1}$.

397) C nähert sich nach unten asymptotisch den Parallelen zur z-Axe durch die Schnittpunkte von C_1 und C_2 (Hülfskonstruktion zur genaueren Bestimmung von Punkten in der Nähe dieser Asymptoten[391]) p. 629). In den Räumen zwischen benachbarten Asymptoten, wo $f_1(x) < f_2(x)$ ist, also C keine reellen Zweige hat, befinden sich die (in Fig. 39 punktierten) Zweige des

fahren, wenn die Glieder von z nicht obige Gestalt haben, sondern beliebige (z. B. transcendente) Funktionen von x, also die logarithmischen Bilder der einzelnen Glieder keine Geraden sind.

Um eine gegebene Gleichung $f(x) = 0$ aufzulösen, zerlegt man auf passende Weise[398]) die Funktion $f(x)$ in eine Differenz $f_1(x) - f_2(x)$, oder man bringt die Gleichung auf die Form $f_1(x) = f_2(x)$ und konstruiert die logarithmischen Bilder der Funktionen $z = f_1(x)$ und $z = f_2(x)$; die Abscissen der Schnittpunkte, mit dem der Zeichnung zu Grunde liegenden logarithmischen Massstab gemessen, geben die positiven reellen Wurzeln der Gleichung[399]). Die absoluten Werte der negativen Wurzeln erhält man durch Bestimmung der positiven Wurzeln der Gleichung $f(-x) = 0$.[400])

Sei noch die Erweiterung der vorbeschriebenen Methode für komplexe Wurzeln und Gleichungen mit komplexen Koeffizienten angedeutet[401]). Ist

$$x = re^{i\varphi}, \quad z = \varrho e^{i\vartheta},$$

so betrachte man zuerst $\log r$, φ, $\log \varrho$, dann $\log r$, φ, ϑ als Cartesische Koordinaten eines Raumpunktes, und man wird jedesmal vermöge der Gleichung $z = f_1(x)$ eine Fläche erhalten[402]), von welchen

---

dieselben Asymptoten besitzenden logarithmischen Bildes C' der Funktion $-z = f_2(x) - f_1(x)$. C und C', als eine Kurve aufgefasst, haben die steilste unter den die Glieder von z vorstellenden Geraden und die am wenigsten steile zu Asymptoten, oder es findet auf der $x > 1$ entsprechenden Seite asymptotische Annäherung an die zuletzt steilste, auf der anderen Seite an die zuletzt am wenigsten steile der beiden Kurven C_1 und C_2 statt.

398) Am einfachsten durch Trennung der positiven Glieder von den negativen; manchmal andere Zerlegungen vorteilhafter, vgl. das Beispiel[391]) p. 626, Nr. 6.

399) Haben f_1 und f_2 nicht lauter positive Glieder, so können auch die logarithmischen Bilder von $z = -f_1(x)$ und $z = -f_2(x)$ Wurzeln liefern und sind deshalb ebenfalls zu konstruieren. Oft ist es ratsam, die Gleichung zuerst mit einer Potenz von x zu dividieren, wodurch steile Kurven in weniger steile und somit ungünstige Schnitte in bessere verwandelt werden können.

400) Die Hülfslinien — im Falle $f(x)$ die Form $\pm ax^n \pm a_1 x^{n_1} \pm \cdots$ hat, die den einzelnen Gliedern entsprechenden Geraden — sind bei der zweiten Gleichung dieselben wie bei der ersten.

401) Bis jetzt nicht veröffentlichte Methode des Verfassers.

402) Ist $z = ax^n$, a reell oder komplex, dann bestehen die beiden Flächen in Ebenen. Wenn z aus mehreren Gliedern dieser Form zusammengesetzt ist, so können die zugehörigen Flächen aus den zu den einzelnen Gliedern gehörigen Ebenen auf ähnliche Weise wie die bei der logarithmographischen Auflösung zweier reellen Gleichungen mit zwei reellen Unbekannten vorkommenden Flächen (Nr. 42) mittelst einzelner Schnitte parallel zur Aufriss- oder Seitenriss-Ebene konstruiert werden, nur dass an Stelle der Additions- (bezw. Subtraktions-)Kurve

die erste mit P_1, die zweite mit Θ_1 bezeichnet sei. Die Gleichung $z = f_2(x)$ liefert zwei neue Flächen P_2 und Θ_2. Konstruiert man die Schnittkurve der Flächen P_1 und P_2 und diejenige der Flächen Θ_1 und Θ_2 beide im Grundriss, dann geben die Koordinaten $\log r, \varphi$ eines jeden Schnittpunktes beider Kurven eine Wurzel $re^{i\varphi}$ der vorgelegten Gleichung.

42. Systeme von Gleichungen. Ein System von zwei reellen Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0$$

mit den beiden reellen Unbekannten x und y lässt sich logarithmographisch in folgender Art auflösen[403]. Man schreibe die Gleichungen zuerst in der Form[404]:

$$f_1(x, y) = f_2(x, y),$$
$$g_1(x, y) = g_2(x, y)$$

und spalte dann in die beiden Systeme von je zwei Gleichungen mit den Veränderlichen x, y, z:

$$z = f_1(x, y), \quad z = f_2(x, y),$$
$$z = g_1(x, y), \quad z = g_2(x, y).$$

Fasst man $\log x$, $\log y$, $\log z$ als Cartesische Koordinaten eines Punktes im Raume auf, so stellt jedes der beiden Systeme eine Raumkurve dar, nämlich den Schnitt der „logarithmischen Bilder"[405] der Funktionen f_1 und f_2 bezw. g_1 und g_2. Nach den Methoden der darstellenden Geometrie konstruiert man die Grundrisse (d. h. xy-Projektionen) dieser beiden Kurven; die Koordinaten der Schnittpunkte,

---

Schnitte der beiden Flächen treten, welche die „Additionslogarithmen für komplexe Grössen" [s. *Dyck*'s Katalog, Nachtrag p. 31, sowie Zeitschr. Math. Phys. 40 (1895) die Figuren p. 18 u. 21] darstellen.

403) *Mehmke,* Zeitschr. Math. Phys. 35 (1890), p. 174.

404) Wird für gewöhnlich am besten durch Trennung der positiven und negativen Glieder hergestellt, vgl. Anm. 398. Es kann sich empfehlen, beiderseits mit einer Potenz von x und einer solchen von y zu dividieren, vgl. Anm. 399.

405) Das logarithmische Bild von $z = ax^m y^n$ ist die Ebene, die durch den Punkt a des logarithmischen Massstabes der z-Axe geht, deren xz-Spur die Steigung m und deren yz-Spur die Steigung n hat. Besteht die Funktion z aus mehreren Gliedern dieser Form, so sind die den einzelnen Gliedern entsprechenden Ebenen zu konstruieren, aus welchen sich mittelst der Additions- und Subtraktionskurve jeder zur xy-Ebene senkrechte Schnitt der krummen Fläche, die das logarithmische Bild der Funktion ist, leicht ableiten lässt. Über die einfachsten Eigenschaften dieser Flächen, ihre Asymptoten-Ebenen und -Cylinder s. [403]) p. 180.

mit dem logarithmischen Massstabe der Zeichnung gemessen, sind die positiven reellen Wurzeln der gegebenen Gleichungen[406]). Man könnte auch mit *A. A. Nijland*[407]) auf die Hülfe der darstellenden Geometrie verzichten[408]) und zum Zweck der Auflösung des Systems

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0$$

das logarithmische Bild einer jeden dieser Gleichungen in der xy-Ebene selbst konstruieren[409]).

IV. Graphische Tafeln (Nomographie).

Monographieen und Lehrbücher: Ch. A. Vogler, Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln ..., Berlin 1877. — *M. d'Ocagne,* Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques, Paris 1891 („d'Ocagne 1891"). — *M. d'Ocagne,* Le calcul simplifié au moyen des procédés mécaniques et graphiques [extrait des Annales du Conservatoire des Arts et Métiers (2) 5, 6, 1893—1894], Paris 1894. — *M. d'Ocagne,* Conférences sur la Nomographie, faites aux élèves de l'Ecole polytechnique (Autographie), Paris 1894. — *M. d'Ocagne,* Traité de Nomographie, Paris 1899 („d'Ocagne"). — *G. Pesci,* Cenni di Nomografia (Sonderabdruck aus der Rivista Marittima, August und September 1899, Februar 1900), 2ª ed. Livorno 1901. — *Fr. Schilling,* Über die Nomographie von M. d'Ocagne. Eine Einführung in dieses Gebiet, Leipzig 1900. — *R. Soreau,* Contribution à la théorie et aux applications de la Nomographie (extrait des Mémoires de la Société des Ingénieurs Civils de France, Bulletin d'août 1901, p. 191), Paris 1901. — Unter den in der Einleitung zu Abschnitt III genannten Schriften kommen die von *Culman, Favaro-Terrier* und *Bürklen* in Betracht.

Sind mehrere veränderliche Zahlgrössen durch irgend ein Gesetz (das nicht notwendig durch eine analytische Gleichung ausgedrückt

---

406) Die Wertepaare x, y, die den Gleichungen genügen und für die z. B. x negativ, y positiv ist, wird man durch Auflösung des Systems $f(-x, y) = 0$, $g(-x, y) = 0$ nach dem obigen Verfahren erhalten.

407) Nieuw Archief voor Wiskunde 19 (1891), p. 35.

408) Zweckmässig ist dies allerdings nicht, denn die fraglichen logarithmischen Bilder, welche mit den bei der ersten Methode benützten Kurven identisch sind, werden am bequemsten gerade in der angegebenen Weise als Grundrisse der Schnittkurven je zweier Flächen durch Schnitte parallel zur yz- oder xz-Ebene erhalten; auch ist der Verzicht nur ein scheinbarer, da die von *Nijland* benützten Hülfsgeraden und Hülfskurven die Grundrisse wagerechter Schnitte der bei der ersten Methode vorkommenden ebenen und krummen Flächen sind.

409) Die Auflösung von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten mit Hülfe der Schnittpunkte der logarithmischen Bilder dieser Gleichungen ist auch noch durchführbar; ein Fortschreiten in dieser Richtung würde die Ausbildung der darstellenden Geometrie von Gebilden beliebiger Dimensionenzahl verlangen vgl. Anm. 383, 385, 387.

sein muss) mit einander verbunden und ordnet man den Werten einer jeden Veränderlichen eine Reihe geometrischer Elemente (Punkte oder Linien), neben welche man die betreffenden Werte schreibt[410]), in der Weise zu, dass jenes Gesetz durch eine einfache Beziehung zwischen den Lagen der fraglichen Elemente zum Ausdruck kommt, die es möglich macht, den Wert irgend einer dieser Veränderlichen mechanisch durch Ablesen[411]) zu finden, wenn die Werte der übrigen Veränderlichen gegeben sind, so entsteht eine graphische Rechentafel oder graphische Tafel[412]). Für alle Gebiete, in welche die rechnende Mathematik zu dringen vermag, von einer früher nicht geahnten Wichtigkeit geworden, zeichnen sich die graphischen Tafeln (zu denen auch die Rechenschieber, Nr. **50—52**, gezählt werden können) vor allen andern Hülfsmitteln des Zahlenrechnens durch die grosse Schnelligkeit, mit der sie die Ergebnisse liefern, sowie dadurch aus, dass sie den verschiedensten Bedürfnissen angepasst werden können und sich oft noch anwenden lassen, wo numerische Tafeln ausgeschlossen sind[413]). Die im Altertum und Mittelalter vorherrschende graphische Behandlung von Aufgaben der Astronomie, Nautik u. s. w.[414]) hat früh zur Erfindung einzelner graphischer Tafeln geführt[415]), aber

---

410) Die Elemente heissen dann beziffert oder kotiert (*d'Ocagne* benützte bis 1896 das Wort isopleth, vgl. Anm. 424).

411) Zum Unterschied gegen das eigentliche graphische Rechnen (s. Abschnitt III) sind, nachdem die Vorrichtung ein für allemal gezeichnet ist, geometrische Konstruktionen im allgemeinen ausgeschlossen, jedoch können Lineal, Zirkel und ähnliche Hülfsmittel beim Ablesen benützt werden.

412) Frz. „table (tableau) graphique" (so z. B. *L. Lalanne* und *Favaro-Terrier*), neuerdings durch „abaque" verdrängt („d'Ocagne 1891", p. 2), welches Wort *Lalanne* ursprünglich blos für eine bestimmte Tafel, seine logarithmische Rechentafel [437]) gebrauchte, *Cauchy* [440]), *Blum* [453]), *Lallemand* [456]) dagegen abwechselnd mit table graphique. „Pesci" p. 5 unterscheidet abbaco und diagrammo, je nachdem für das fragliche Gesetz ein analytischer Ausdruck vorhanden ist oder nicht.

413) Z. B. wegen zu grosser Zahl der Veränderlichen. Die Genauigkeit ist nicht immer die beschränkte des graphischen Rechnens, sondern lässt sich manchmal beliebig steigern.

414) Vgl. *A. v. Braunmühl,* Geschichte der Trigonometrie 1, Leipzig 1900, p. 3, 10, 85, 191.

415) *E. Gelcich* bespricht, Central-Zeitung Optik Mechanik 5 (1884), p. 242, 254, 268, 277, zahlreiche „Diagramme" und „Diagramminstrumente" zum Gebrauch der Seeleute, die vom 16. Jahrhundert an bis zur Gegenwart konstruiert worden sind; s. auch *v. Braunmühl* [414]), p. 138 und Fig. 35 (Instrument von *Peter Apian* zur Bestimmung des Sinus und Sinus versus eines gegebenen Winkels, 1534), ferner p. 228 (*Adriaen Metius'* graphisch-mechanische Lösung sphärischer Dreiecke). Mangels genügender Beschreibungen der älteren graphi-

zur Entwicklung einer allgemeinen Theorie der geometrischen Darstellung gesetzmässiger Abhängigkeiten veränderlicher Zahlgrössen, die man nach *M. d'Ocagne* jetzt Nomographie[416]) nennt, ist es erst in den letzten Jahrzehnten gekommen.

43. Tafeln für Funktionen einer Veränderlichen. Werden auf einer (geraden oder krummen, ebenen oder unebenen) Linie die zu einzelnen Werten $x_1, x_2, x_3, \ldots$ einer Veränderlichen x gehörigen Werte $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$ einer gegebenen Funktion $f(x)$ von irgend einem Punkte jener Linie als Anfangspunkt in bestimmtem Sinn als Längen (bei beliebiger Längeneinheit) abgetragen, die erhaltenen Endpunkte durch Striche markiert und an diese Striche die betreffenden Werte von x geschrieben, so entsteht eine *Skala* (französisch échelle) der Funktion $f(x)$.[417]) Die wichtigsten besonderen Arten sind 1) die gewöhnliche oder gemeine Skala[418]), zur Funktion $f(x) = x$ gehörig, 2) die logarithmische Skala mit $f(x) = \log x$ [389])

---

schen Tafeln lässt sich vorderhand nicht sagen, welche der jetzt bekannten allgemeinen Methoden darin schon zu erkennen sein mögen.

416) „d'Ocagne 1891", p. 6; von νόμος = Gesetz.

417) Der Urheber dieses wichtigen Begriffs, auf dem das im 17. und 18. Jahrhundert sehr verbreitete mechanische Rechnen mit Proportionalzirkeln und Rechenstäben (s. Nr. **50**) beruhte, ist nicht bekannt. Jedoch brachte schon Ende des 16. Jahrhunderts *Galilei* auf seinem Proportionalzirkel verschiedene Funktionsskalen an (der vorher veröffentlichte von *Bürgi* scheint blos zu geometrischen Konstruktionen, nicht zum mechanischen Rechnen gedient zu haben); statt „Scala" wurde damals häufiger das Wort „Linea" gebraucht, z. B. Linea quadrata, L. cubica im Falle $f(x) = \sqrt{x}$ bezw. $\sqrt[3]{x}$, L. arithmetica ursprünglich für die gemeine Skala (s. oben), später für die logarithmische Skala, u. s. w., s. etwa *J. Leupold,* Theatrum arithmetico-geometricum, Leipzig 1727, Kap. XII bis XVIII. — In der Regel bilden die an den Teilstrichen stehenden Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ eine arithmetische Reihe und schreiten nach runden Anzahlen irgend einer dezimalen Einheit fort („échelle normale", „d'Ocagne", p. 2; bei der weniger bequemen „échelle isograde", ebenda p. 16, die Zwischenräume der Teilstriche gleich gross, also die Bezifferung, ausser bei der gemeinen Skala, unregelmässig). Die Skala der zusammengesetzten Funktion $f(\varphi(x))$ lässt sich aus der von $f(x)$ ableiten, indem man letztere als Massstab („étalon") statt des gewöhnlichen benützt („d'Ocagne", p. 13). Über das Ablesen bei Skalen und die zweckmässigste Wahl des kleinsten Abstandes zwischen benachbarten Teilstrichen s. „Vogler", p. 20, „d'Ocagne", p. 8, über die graphisch-mechanische Einschaltung neuer Teilstriche bei geradlinigen Skalen *Mehmke*, Zeitschr. Ver. deutscher Ingen. 33 (1889), p. 583 (beruht auf dem Satze, dass jedes nicht zu grosse Stück einer beliebigen Skala sich näherungsweise als Teil einer projektiven Skala, s. oben, betrachten lässt).

418) So *A. Adler,* Wien. Ber. 94² (1886), p. 406; „échelle régulière" bei „d'Ocagne", p. 9.

und 3) die projektive Skala[419]), bei welcher der Träger eine Gerade und $f(x)$ eine gebrochene lineare Funktion von x ist.

Ist nun mit einer Skala von $f(x)$ die zu Grunde liegende gemeine Skala auf derselben Linie gezeichnet[420]), so kann man gegenüber der Stelle der ersten Skala, an welcher irgend ein gegebener

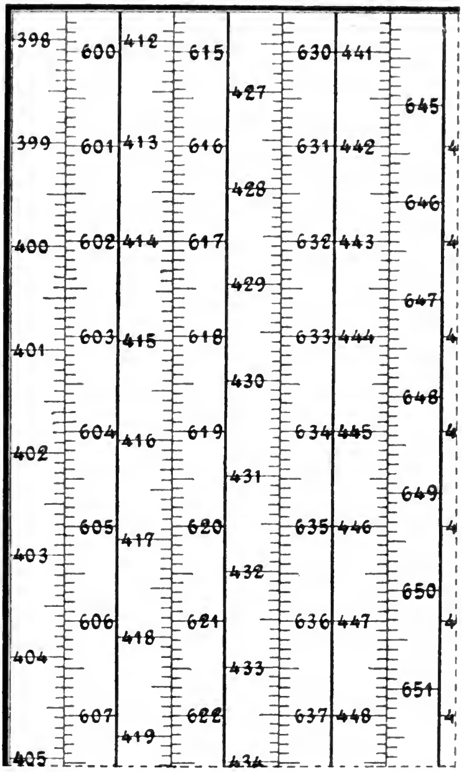


Fig. 40. Bruchstück der graphischen Logarithmentafel von *Tichy*.

Wert x steht, den Wert von $y = f(x)$ ablesen und auf dem umgekehrten Wege auch zu jedem gegebenen Wert von $f(x)$ den Wert

419) *Adler*[418]), p. 416, „échelle linéaire générale" bei „d'Ocagne", p. 14; ist eine beliebige Centralprojektion einer geradlinigen gemeinen Skala, in der Perspektive bekannt als „perspektivischer Massstab", hier nach *Chr. Wiener,* Darstellende Geometrie 1, Leipzig 1884, p. 18 von *Alleaume* 1628 eingeführt.

420) Die Teilstriche der beiden Skalen lässt man nach verschiedenen Seiten der tragenden Linie gehen. Die Skalen können auch z. B. auf parallelen Geraden oder konzentrischen Kreisen untergebracht sein, in welchem Falle ein System von Hülfslinien oder ein beweglicher Zeiger den Zusammenhang zwischen beiden Skalen herstellen muss. Wegen anderer möglicher Anordnungen s. „d'Ocagne", p. 24—31.

des Argumentes x finden[421]). Fig. 40 zeigt als Beispiel[422]) ein Stück der graphischen Logarithmentafel von *A. Tichy*[423]).

44. Cartesische Tafeln. Eine Tafel der Funktion $z = f(x, y)$ von zwei Veränderlichen x und y ergiebt sich, wenn man letztere als Cartesische Koordinaten eines Punktes betrachtet, dem z einzelne Werte $z_1, z_2, z_3, \ldots$ erteilt, die zu den Gleichungen $f(x, y) = z_1$, $f(x, y) = z_2, \ldots$ gehörigen Kurven zeichnet — *Vogler* nennt sie Isoplethen[424]) — und neben jede von ihnen den betreffenden Wert von z schreibt[425]). Mittelst der fertigen Tafel[426]), die als eine Darstellung der zur Gleichung $z = f(x, y)$ gehörigen Fläche durch Niveaulinien angesehen wer-

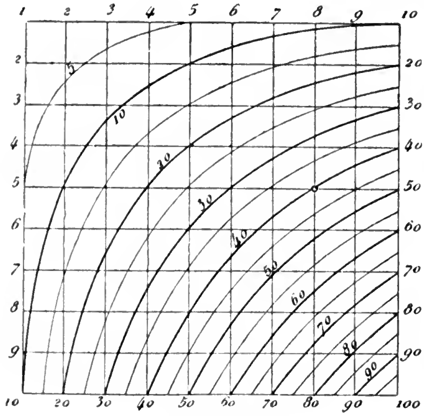


Fig. 41.

421) Allgemeiner kann man eine etwa durch $F(x, y) = 0$ ausgedrückte Abhängigkeit zwischen x und y durch Vereinigung zweier Skalen — sie mögen zu den Funktionen $f(x)$ und $g(y)$ gehören — darstellen, die so gewählt sind, dass $f(x) - g(y) = 0$ gleichwertig mit der gegebenen Gleichung ist. — *D'Ocagne* nennt solche Tafeln „abaques à échelles accolées", *Schilling* „Rechentafeln mit vereinigten Skalen".

422) Wegen anderer s. „Vogler", Taf. II, „d'Ocagne", p. 18 ff.; einfache in grosser Zahl schon bei *M. R. Pressler* (Der Messknecht . . ., Braunschweig 1852, 2. Aufl. 1854; Zeitmessknecht 1856; Ingenieur-Messknecht, 3. Aufl. 1862).

423) Graphische Logarithmentafeln, Wien 1897, Beilage zur Zeitschr. des Österr. Ingen.- u. Archit.-Ver.; die gemeinen Logarithmen 4-stellig auf 1 Seite, 5-stellig auf 10 S., ferner Tafeln der Log. der trigonom. Funktionen u. andere. — *A. Schülke* giebt (Vierstellige Logarithmentafeln . . ., Leipzig 1895, p. 18) eine graphische Tafel der Antilogarithmen (s. Nr. **29**); *J. Schoeckel* benützt (Zeitschr. Vermessungsw. 29 (1900), p. 413) eine antilogarithmische Skala, um bei Flächenberechnungen Multiplikation in Addition zu verwandeln.

424) Von ἰσοπληθής, an Zahl gleich oder gleichwertig, „Vogler", p. 7. *Lalanne* hat sich 1878 *Vogler* angeschlossen (vorher „courbe d'égal élément"), *d'Ocagne* sagt seit 1896 „courbe cotée". Über die Konstruktion der Isoplethen mit Hülfe der darstellenden Geometrie, namentlich im Fall einer empirischen Funktion, s. *Lalanne*[431]), p. 18.

425) Nach *Lalanne*[431]), p. 63 findet sich das erste Beispiel — mit $z = xy$, s. Fig. 41 — bei *L. E. Pouchet* 1797 (genauere Angaben „Favaro-Terrier" 1, p. XX u. XXI), vgl. aber Anm. 415. Die nächsten Beispiele sind nach „Pesci", p. 7 fünf Tafeln zur Reduktion von Monddistanzen von *J. Luyando*, Madrid 1806; wegen anderer aus der Zeit vor *Lalanne* s. *Lalanne*[431]), p. 63 ff.

426) Bei „d'Ocagne", p. 34 heisst diese Art von Tafeln „abaques carté-

den kann[427]), lässt sich zu jedem gegebenen Wertepaar $x = a$, $y = b$ der Funktionswert $f(a, b)$ durch Ablesen an der durch den Punkt (a, b) gehenden Isoplethe[428]) finden[429]). Im Falle $z = xy$ z. B. erhält man die Multiplikationstafel von *L. E. Pouchet*[425]), Fig. 41, mit gleichseitigen Hyperbeln als Isoplethen[430]). Die Tafeln zur Auflösung trinomischer Gleichungen von *L. Lalanne*[431])[432]), von welchen Fig. 42 den einfachsten Fall zeigt[433]), bilden ein anderes klassisches Beispiel: In der aufzulösenden Gleichung $z^m + az^n + b = 0$ setzt *Lalanne* $a = x$, $b = y$, dann gehört zur Gleichung $z^m + xz^n + y = 0$ eine (für jedes Wertepaar m, n besonders zu zeichnende) Tafel, deren

---

siens", weil sie unmittelbar der Anwendung Cartesischer Koordinaten entspringen; s. auch Anm. 427.

427) Nach *Lalanne*[431]), p. 63, 64 hat zuerst *G. Piobert* 1825 die Darstellung topographischer Flächen durch Niveaulinien zur Umwandlung numerischer Tafeln mit zwei Eingängen in graphische Tafeln benützt, *Olry Terquem* 1830 (Mémorial de l'artillerie 3) das allgemeine Prinzip klar ausgesprochen. *Lalanne* geht auch hiervon aus und spricht deshalb anfänglich (Par. C. R. 16 (1843), p. 1162) von „tables (plans) topographiques"; ähnlich *Vogler:* Schichtentafel, Schichtennetz (neben Isoplethentafel).

428) Geht keine der gezeichneten Isoplethen durch den Punkt (a, b), so muss zwischen den zu den benachbarten Isoplethen gehörigen Werten von z durch Schätzung nach Augenmass interpoliert werden (etwa mittelst der gedachten durch den Punkt gehenden senkrechten Trajektorie der Isoplethen) vgl., auch wegen der Schätzungsfehler, „Vogler", p. 63 ff. Zum Aufsuchen des Punktes (a, b) dienen im voraus gezeichnete Parallelen zu jeder Axe durch die Teilpunkte der in der andern Axe angebrachten Skala, seltener eine parallel einer Axe verschiebbare Skala.

429) Ähnlich bestimmt man, mit Hülfe der Parallelen zu den Axen, x oder y, wenn die Werte von y und z oder x und z gegeben sind. Die Beziehung zwischen den Veränderlichen kann allgemeiner in der Form $F(x, y, z) = 0$ gegeben sein. Die Tafel nimmt andere Formen an, wenn man x oder y, statt z, als abhängige Veränderliche ansieht.

430) Figur 41 ist *Lalanne*[431]) entlehnt (pl. 98, fig. 1). Die Tafeln „Vogler", p. 10, Fig. 5 und p. 12, Fig. 6 enthalten besondere Leitlinien für Quadrate, Wurzeln u. s. w., wie sich ähnlicher *Pouchet* bedient zu haben scheint (vgl. „Favaro-Terrier" 1, p. XXI).

431) Annales ponts chaussées (2) 11 (1846), p. 27, 40.

432) Par. C. R. 81 (1875), p. 1186, 1243; 82 (1876), p. 1487; 87 (1878), p. 157.

433) Tafel zur Auflösung reduzierter kubischer Gleichungen *Lalanne*[431]), pl. 99, fig. 1, auch *J. de la Gournerie,* Traité de Géométrie descriptive 3, Paris 1864, pl. 46, fig. 455, verkleinert „Favaro-Terrier" 2, p. 247, fig. 115, vereinfacht „d'Ocagne", p. 44, fig. 24. — *Lalanne* bestimmt p. 29 geometrisch an Hand der Tafel die Wahrscheinlichkeit, dass eine Gleichung, deren Koeffizienten unter gegebenen Grenzen liegen, drei reelle Wurzeln hat.

Isoplethen in Geraden bestehen, da die Gleichung in x und y linear ist[434]).

Jede punktweise Transformation einer Cartesischen Tafel, die *Lalanne* als Anamorphose bezeichnet[435]), führt zu einer neuen, gleich-

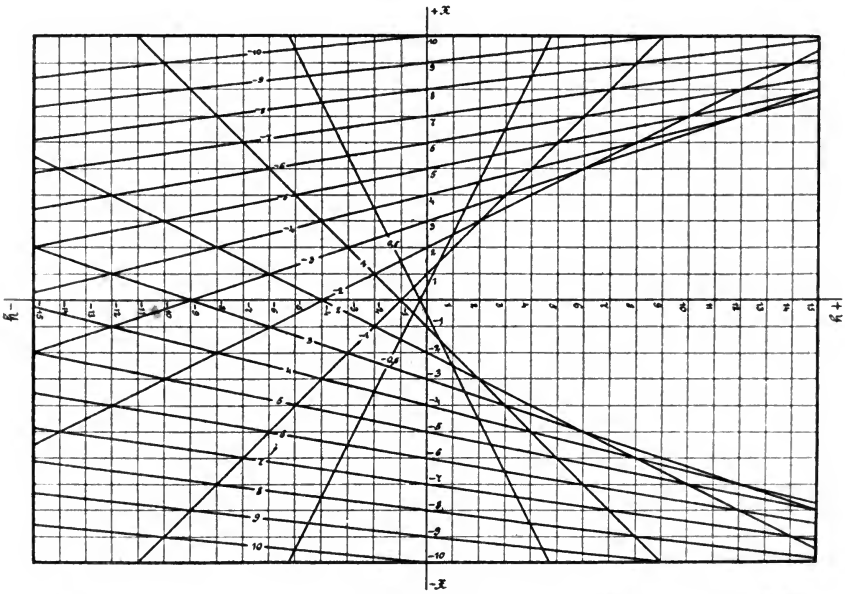


Fig. 42. Tafel zur Auflösung quadratischer Gleichungen nach *Lalanne.*

wertigen Tafel, die auf dieselbe Art wie die ursprüngliche zu gebrauchen ist, wenn die Gleichungen der Transformation die Form

$$x' = \varphi(x), \qquad y' = \psi(y)$$

haben, also die Parallelen zu den Koordinatenaxen in ebensolche übergehen[436]). So verwandelt sich die hyperbolische Multiplikationstafel Fig. 41 durch die logarithmische Transformation

$$x' = \log x, \qquad y' = \log y$$

in *Lalanne*'s „abaque ou compteur universel"[437]) (in Fig. 43 ungefähr

---

434) Man liest an den durch den Punkt (a, b) gehenden Geraden die Wurzeln der Gleichung ab. Die Hüllkurve der Geraden, in Fig. 42 eine Parabel, ist der Ort der Punkte (a, b), für welche die Gleichung eine Doppelwurzel hat, s. *Lalanne*[431]), p. 28.

435) Unter Hinweis auf die Bedeutung dieses Wortes in der Physik[431]), p. 13.

436) In der neuen Tafel sind die Axen gemäss den Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ zu teilen oder zu „graduieren", d. h. an Stelle der gemeinen Skalen treten die zu jenen Funktionen gehörigen.

437) Schon erwähnt[438]), ausführlich beschrieben[431]), p. 43ff. (dazu pl. 100,

in halber Grösse dargestellt); wegen der aus $xy = z$ folgenden linearen Gleichung:

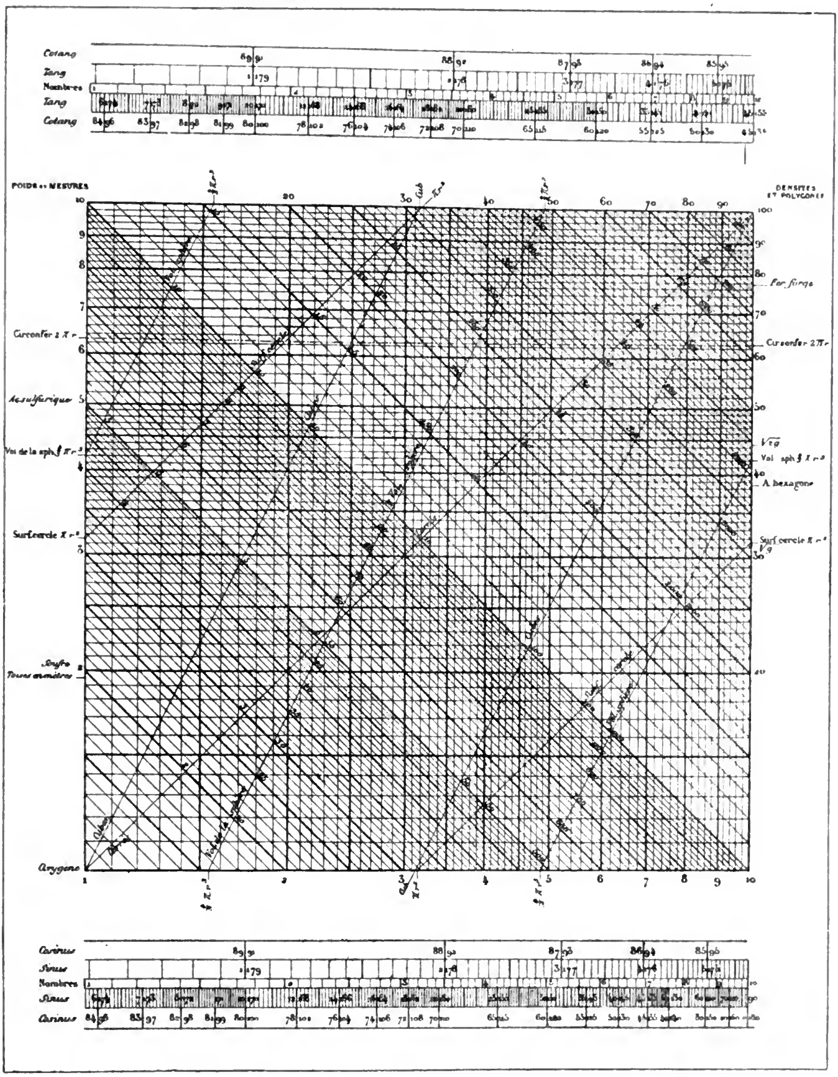


Fig. 43. „Abaque ou compteur universel" von *Lalanne.*

$$x' + y' = \log z$$

sind hier die Isoplethen gerade Linien und es dient auch die von

---

fig. 2), Name von $\check{\alpha}\beta\alpha\xi$ = compteur hergeleitet; hat besondere Hülfslinien für die Multiplikation mit häufigen Konstanten, für Quadrate, Wurzeln u. s. w., ist von ähnlicher Vielseitigkeit wie der logarithmische Rechenschieber (Nr. **50**), in

Lalanne eingeführte[438]) Anamorphose hauptsächlich zum Geradestrecken krummliniger Isoplethen[439]). Damit sich letzterer Zweck erreichen lässt, muss die darzustellende Beziehung zwischen den Veränderlichen x, y, z, welche $F(x, y, z) = 0$ sei, auf die Form:

$$ax' + by' = c$$

gebracht werden können, wo wieder $x' = \varphi(x)$, $y' = \psi(y)$ ist und a, b, c Funktionen von z allein sind[440]). Notwendige und ausreichende Bedingungen hierfür haben *J. Massau*[441]) und *L. Lecornu*[442]) in Form

---

mancher Hinsicht vielleicht letzterem vorzuziehen (z. B. höhere Potenzen und Wurzeln leichter zu bestimmen, Verziehen des Papiers ohne Einfluss, Preis geringer). S. auch *Lalanne*, Description et usage de l'abaque..., Paris 1845, 3ᵉ éd. 1863, deutsche und englische Übersetzung, Leipzig bezw. London 1846; *Th. Olivier*, Soc. d'enc. Bull. 1846, p. 153; „Culmann", p. 78 und Taf. 2, Fig. 1; „Favaro-Terrier" 2, p. 102. Von *G. Herrmann* wurde die logarithmische Rechentafel wieder gefunden (Das graphische Einmaleins, Braunschweig 1875, vgl. auch „Vogler", p. 37 u. Taf. 1), von *F. Samuelli* (Triangoli e rettangoli calcolatori, Firenze 1892) durch Anwendung schiefwinkliger Koordinaten auf kleineren Raum gebracht.

438) Vorläufige Mitteilung Par. C. R. 16 (1843), p. 1162, dann [431]), p. 11, 30; wieder gefunden u. a. von *A. Kapteyn*, Revue universelle des mines 40 (1876), p. 136.

439) Wenn solches unmöglich ist, gelingt es zuweilen, ungünstige Kurven in besser geeignete zu verwandeln, Beispiel „d'Ocagne", p. 88. Über die in letzterem angewandte graphische Anamorphose („d'Ocagne", p. 85; *Lalanne*, Exposition de Melbourne Notices, Paris 1880, p. 374), vgl. auch „Vogler", p. 18 ff. Wegen polygonaler Isoplethen s. „Vogler", p. 20 u. Taf. V, „d'Ocagne", p. 53.

440) Diese Bemerkung von *Cauchy*, Par. C. R. 17 (1843), p. 494. — Die einfachsten und häufigsten Fälle sind, unter u, v, w beziehentlich Funktionen von x, von y, von z allein verstanden,

$$w = u + v \quad \text{und} \quad w = uv,$$

wo man $x' = u$, $y' = v$ bezw. $x' = \log x$, $y' = \log v$ setzt und parallele Isoplethen erhält. Im Falle $uw = v$ kann man entweder $x' = u$, $y' = v$ nehmen (Isoplethen sind Geraden durch den Ursprung, „abaques à radiantes" nach *d'Ocagne*), oder durch Logarithmieren den ersten Fall herstellen. Dasselbe gelingt im Falle $w = u^v$ und ähnlichen durch zweimaliges Logarithmieren; Beispiel $y^z = x$, Fig. 44, „Vogler", p. 44, mit welcher Tafel sich alle drei Operationen 3. Stufe (s. diesen Band, p. 22) ausführen lassen.

441) Mémoire sur l'Intégration graphique (Extrait de la Rev. universelle des mines (2) 16 (1884)), Liège 1885, p. 137 (hier nur die Ergebnisse, Ableitung mitgeteilt „d'Ocagne", p. 422).

442) Par. C. R. 102 (1886), p. 816 („d'Ocagne", p. 424). Mit den bekannten Abkürzungen:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

finden sich die Bedingungsgleichungen:

partieller Differentialgleichungen 5ter Ordnung aufgestellt, nachdem *P. de Saint-Robert*[443]) einen besonderen Fall erledigt hatte.

Wenn man mit *Massau*[441]) p. 140 die allgemeinste Punkttransformation, etwa mit den Gleichungen:

$$x' = \varphi(x, y), \qquad y' = \psi(x, y)$$

zulässt, so verwandeln sich die zu den Axen parallelen Geraden

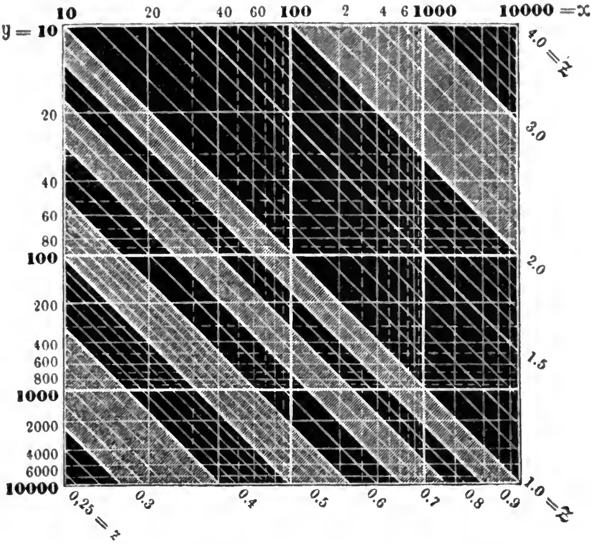


Fig. 44. *Vogler*'s Exponententafel, $y^z = x$.

$x =$ const., $y =$ const. je in eine Schar beliebiger Linien. Diese allgemeinere Anamorphose ermöglicht bisweilen, mit Geraden oder

---

$$\frac{\partial w}{\partial x} : p = \frac{\partial w}{\partial y} : q = v - uw,$$

wo:

$$u = \frac{s}{pq}, \quad v = \frac{\partial u}{\partial y} : q - \frac{\partial u}{\partial x} : p, \quad w = \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} : q - \frac{\partial v}{\partial x} : p\right).$$

443) Torino Ac. Sc. Memorie (2) 25 (1871), p. 53 („d'Ocagne", p. 418). Es ist der Fall, wo man die Veränderlichen trennen oder $F(x, y, z)$ auf die Form:

$$X + Y = Z$$

bringen, also die Isoplethen in eine Schar von Parallelen überführen kann (von *de Saint-Robert* jedoch vom Gesichtspunkt der Herstellbarkeit eines Rechenschiebers betrachtet). Es ergiebt sich die Bedingung:

$$\frac{\partial^2 \log R}{\partial x\, \partial y} = 0,$$

wo:

$$R = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Kreisen auszukommen, wo die oben betrachtete speziellere Anamorphose von *Lalanne* nicht anwendbar wäre. Eine andere Auffassung[444]) ist folgende. Sind von drei einfach unendlichen Kurvenscharen, deren Gleichungen in den laufenden Koordinaten x', y':

$$f_1(x', y', x) = 0, \quad f_2(x', y', y) = 0, \quad f_3(x', y', z) = 0$$

seien, einzelne Kurven gezeichnet und kotiert, d. h. mit den zugehörigen Werten des Parameters x, bezw. y oder z beziffert, so hat man eine Tafel derjenigen Gleichung:

$$F(x, y, z) = 0,$$

die sich aus den vorigen Gleichungen durch Elimination von x' und y' ergiebt[445]). Ist die Funktion F gegeben, so können zwei der Funktionen f_1, f_2, f_3 beliebig angenommen werden[446]). Damit sich F durch drei Scharen von Geraden darstellen lässt, muss diese Funktion auf die Form einer Determinante:

$$\sum \pm ab'c''$$

gebracht werden können, wo a, b, c Funktionen von x allein, a', b' c' Funktionen von y allein, a'', b'', c'' Funktionen von z allein sind[447]). Die allgemeinste, durch drei Scharen von Kreisen darstellbare Gleichung hat *d'Ocagne*[448]) angegeben.

Es steht nichts im Wege, von den Veränderlichen x, y, z die beiden als unabhängig betrachteten als Koordinaten eines Punktes in

444) S. *Massau*[441]), p. 139, „d'Ocagne", p. 90, 97.

445) Der Vorgang beim Aufsuchen des Wertes von z, der zu einem gegebenen Wertepaar $x = a$, $y = b$ gehört, besteht darin, dass man die Kurve der ersten Schar mit der Kote a und die Kurve der zweiten Schar mit der Kote b bis zu ihrem Schnittpunkt verfolgt und die Kote der durch diesen Punkt gehenden Kurve der dritten Schar abliest. — Zu derselben Verallgemeinerung der gewöhnlichen Tafeln kommt man durch Deutung von x und y als beliebiger Koordinaten statt Cartesischer.

446) Vorausgesetzt, dass die Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ reelle Kurven darstellen, s. „d'Ocagne", p. 98.

447) *Massau*[441]), p. 140, „d'Ocagne", p. 100; einfache Fälle *Massau*, p. 161, 163, „d'Ocagne", p. 101; Beispiel *Massau*, fig. 141, „d'Ocagne", p. 109, fig. 48, p. 111. S. auch Nr. **46**, bes. Anm. 471.

448) „d'Ocagne", p. 114, Beispiel (zwei Scharen in Geraden ausgeartet), p. 115, fig. 49, p. 117. Ein älteres Beispiel von *Ricour* (1873), „d'Ocagne", p. 117, Fussn. 2 erwähnt. *R. Helmert* bemerkt Zeitschr. f. Verm.-W. 1876, p. 31, dass jede nach *Lalanne*'s Methode durch parallele oder nach einem Punkt laufende Geraden darstellbare Funktion auch durch konzentrische Kreise dargestellt werden kann; Fall $z = xy$ („graphisches Einmaleins in Kreisen", *Helmert*, Taf. 2, Fig. 6), wo die Transformation $x' = \sqrt{\log x}$, $y' = \sqrt{\log y}$ nötig, schon von *Lalanne*[431]), p. 36 ausgeführt.

einem beliebigen System, statt in einem Cartesischen, zu deuten. Nimmt man Polarkoordinaten[449]), so wird das Zeichnen einzelner Koordinatenlinien (d. h. Strahlen durch den Nullpunkt und Kreise

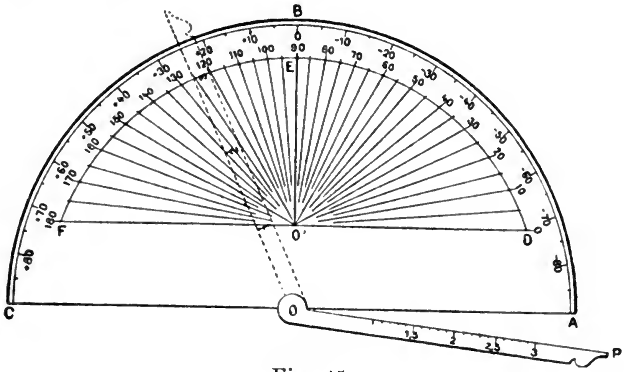


Fig. 45.

um denselben) durch Anwendung einer um den Nullpunkt drehbaren Skala, zu deren Einstellung eine feste (etwa kreisförmige) Skala dient, vgl. Fig. 45[450]), überflüssig gemacht[451]).

45. Hexagonale Tafeln. Die einzelnen Geraden einer (einfach unendlichen) Schar kotierter Parallelen können durch eine bewegliche Gerade nach Bedarf hergestellt und brauchen deshalb nicht wirklich

449) *d'Ocagne* spricht dann im Anschluss an *Pesci* von „abaques polaires"; über deren Theorie s. „d'Ocagne", p. 117 ff., „Pesci", p. 19 ff.

450) Beispiel von *Pesci,* Rivista marittima, März 1897, „d'Ocagne", p. 121; die dargestellte (in der Nautik vorkommende) Gleichung lautet, für Polarkoordinaten r, φ geschrieben:

$$r \cos(z - \varphi) = l \cos z;$$

die kotierten Linien sind gerade. Weitere Beispiele „Pesci", p. 20 ff.

451) Ein System von zwei Gleichungen der Form $F(x, y, z) = 0$, $\Phi(x, y, t) = 0$ kann (statt durch zwei getrennte Tafeln) auf demselben Blatt so dargestellt werden, dass für eine der gemeinsamen Veränderlichen x, y bei beiden Gleichungen dieselbe Kurvenschar zur Anwendung kommt („abaques accouplés", „d'Ocagne", p. 247), oder sowohl für x als für y je dieselbe Kurvenschar („abaques superposés"), Beispiele „d'Ocagne", p. 251, 253. — Cartesische Tafeln mit und ohne die (jetzt ziemlich eingebürgerte) Anamorphose von *Lalanne* sind in unübersehbarer Zahl vor allem in technischen Werken und Zeitschriften veröffentlicht. Man findet solche nebst weiterer Litteratur in *Lalanne*[431]), „Vogler" (sehr viele Beispiele im Text sowie sechs Lichtdrucktafeln, letztere auch gesondert erschienen), noch zu erwähnen *Vogler,* Graphische Barometertafeln . . ., Braunschweig 1880; „Favaro-Terrier" 2, p. 154 Fussn., p. 208 ff.; *Massau*[441]), p. 166 ff.; „d'Ocagne 1891", chap. 2; „d'Ocagne" chap. 2, 4; „Pesci" § 1—14; „Soreau".

gezogen zu werden, wenn die durch einen Schnitt senkrecht zu den Geraden entstehende Skala gezeichnet ist[452]). Somit kann[453]) bei einer Cartesischen Tafel, die aus drei Scharen kotierter Parallelen besteht, das wirkliche Zeichnen der letzteren unterbleiben, wenn man die zugehörigen drei Skalen[454]) angiebt und drei vermöge der dargestellten Gleichung $F(x, y, z) = 0$ zusammengehörige, d. h. sich in einem Punkt schneidende Geraden der drei Scharen jedesmal durch Auflegen eines durchsichtigen Blattes mit drei von einem Punkt aus-

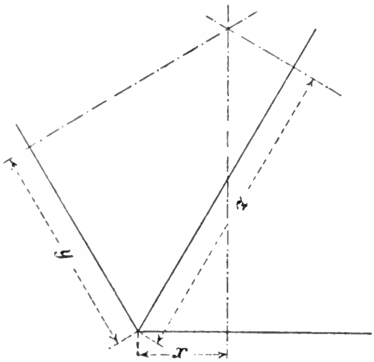


Fig. 46.

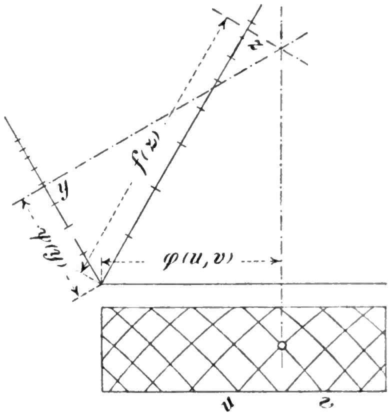


Fig. 47.

gehenden und die richtigen Winkel einschliessenden Strahlen oder Zeigern[455]) verwirklicht. Es ist vorteilhaft, mit *Ch. Lallemand*[456]) die

452) Die Punkte derselben sind mit den Koten der hindurchgehenden Geraden zu versehen. — Es entspricht dies ganz der in der Methode der kotierten Projektionen (s. III A 6) üblichen Darstellung einer Ebene durch einen „Böschungsmassstab" statt durch einzelne Niveaulinien. — Der Träger der Skala darf auch, wenn die Richtung der Parallelen angegeben ist, schief zu denselben, gebrochen und selbst krummlinig sein.

453) Nach einer Bemerkung von *Blum,* Ann. ponts chaussées (6) 1 (1881), p. 455.

454) In dem Absetzen (d. h. Teilen in Stücke und gleichzeitigen parallelen Verlegen entsprechender Stücke) der drei Skalen hat man ein Mittel, die Tafel auf möglichst kleinen Raum zu bringen, s. „d'Ocagne", p. 76.

455) „Rapporteur" (*Blum*), „indicateur" (*Lallemand, d'Ocagne*). „Index" nennt *d'Ocagne* jeden der 3 Zeiger, *Lallemand* nannte so ihre Gesamtheit. Behufs Orientierung der Zeiger müssen zwar auf der Tafel einzelne Parallelen einer der 3 Scharen gezeichnet, aber sie können beliebig unterbrochen und brauchen nicht kotiert zu sein. Um den zu einem Wertepaar $x = a$, $y = b$ gehörigen Wert von z zu erhalten, kann man zuerst das durchsichtige Blatt so auflegen, dass der 1. Zeiger durch den Punkt a der ersten Skala, der 2. Zeiger

Zeiger unter sich gleiche Winkel bilden zu lassen[457]); dann lässt sich die Erklärung unabhängig von den Cartesischen Tafeln mittelst des elementaren Satzes geben, dass (s. Fig. 46) durch die Lote von einem beliebigen Punkt auf drei durch einen Punkt gehende und Winkel gleich $\frac{\pi}{3}$ einschliessende Axen auf letzteren Stücke x, y, z abgeschnitten werden, für welche $z = x + y$ ist[458]). Der Fortschritt besteht hauptsächlich[459]) darin, dass nun auch jede Funktion von mehr als zwei Veränderlichen dargestellt werden kann, sobald sich die Veränderlichen entweder vollständig oder wenigstens nach Gruppen von je zweien trennen lassen. Der obige geometrische Satz lässt sich nämlich als ein Mittel betrachten, zwei Strecken — und durch wiederholte Anwendung beliebig viele Strecken — mit Hülfe des beschriebenen Zeigersystems zu addieren, nach Anbringung von Skalen für die Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $\chi(z), \ldots$ in den Axen oder parallel zu denselben kann daher $\varphi(x) + \psi(y) + \chi(z) + \cdots$ mechanisch gefunden werden; ist ein Glied selbst eine Funktion von zwei Veränderlichen, so hat man dafür eine „binäre Skala“[460]) zu benützen[461])[462]).

---

durch den Punkt b der zweiten Skala geht, dann das Blatt orientieren und am Schnittpunkt des 3. Zeigers mit der dritten Skala ablesen.

456) Par. C. R. 102 (1886), p. 816, ausführlicher „d'Ocagne“, p. 70, 312.

457) Sie sind dann den Durchmessern eines regelmässigen Sechsecks parallel, woher die von *Lallemand* eingeführte Bezeichnung „abaque hexagonal“.

458) Kann man $F(x, y, z) = 0$ die Gestalt $\varphi(x) + \psi(y) = f(z)$ geben (vgl. Anm. 443), so genügt es, die Axen gemäss den Gleichungen $x' = \varphi(x)$, $y' = \psi(y)$, $z' = f(z)$ zu graduieren. Die Skalen können dann in den Richtungen senkrecht zu den Axen beliebig verschoben und auch nach Anm. 454 behandelt werden.

459) Dem Vorteil vor den Cartesischen Tafeln, dass keine Überladung mit Linien vorhanden und niemals an blos gedachten Linien abzulesen ist, steht bei den hexagonalen Tafeln als Nachteil die etwas umständliche Einstellung der Zeiger gegenüber.

460) „Échelle diagraphique“ (*Lallemand*), „échelle binaire“ (*d'Ocagne*); die schematische Figur 47 zeigt eine solche, zur Funktion $\varphi(u, v)$ gehörig, an der x-Axe: Man sieht zwei Scharen kotierter Linien; die Senkrechte zur Axe durch den Schnittpunkt der Linien mit den Koten u und v schneidet von der Axe das Stück $\varphi(u, v)$ ab (insgesamt bilden die Senkrechten eine zweifach unendliche Schar). Den Gedanken schreibt *Lallemand*[456]), p. 818, Fussn. 2 *E. Prévot* zu. Vgl. auch Nr. **47**, Anm. 489. — Fig. 47 entspricht, da auf der y- und z-Axe noch Skalen der Funktionen $\psi(y)$ und $f(z)$ angebracht sind, dem Falle $f(z) = \varphi(u, v) + \psi(y)$.

461) Die ganze Methode von *Lallemand* in den Grundzügen angegeben, weiter ausgeführt „d'Ocagne 1891“ und „d'Ocagne“, p. 82, 312, 317. Über die ebenfalls schon von *Lallemand* ins Auge gefasste Ausdehnung von dem Fall

46. Methode der fluchtrechten Punkte. *A. F. Möbius* hat 1841 bemerkt[463]), man könne eine Parabel in Verbindung mit einer Geraden als „Multiplikationsmaschine“ benützen, nämlich beide so einteilen, dass ein durch die den Faktoren entsprechenden Teilpunkte der Parabel gelegtes Lineal die Gerade in dem Teilpunkt des Produktes trifft[464]), wobei für die Parabel auch zwei Geraden, für jeden Faktor eine, genommen werden könnten. Wir sehen hier die Anfänge[465]) einer wichtigen Methode, bei der im allgemeinsten Fall eine Gleichung $F(x, y, z) = 0$ durch drei Skalen (s. Fig. 48) dargestellt wird, von deren Teilpunkten je drei in einer Geraden liegende zu Werten x, y, z gehören, die jene Gleichung befriedigen[466]), welche Darstellung der durch eine Cartesische Tafel (s. Nr. **44**) mit drei Scharen von Geraden nach dem geometrischen Prinzip der Dualität oder Reziprozität (s. III A 5, III C 1) entspricht[467]). *M. d'Ocagne* hat, nachdem er 1884 dieses Prinzip auf *Lalanne*'s Tafeln zur Auflösung trinomischer Gleichungen (s. Nr. **44**) angewandt hatte[468]), den allgemeinen Gedanken 1890 aus-

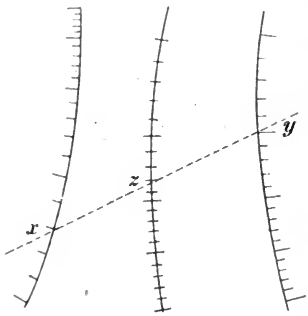


Fig. 48.

einer Summe auf den einer beliebigen Funktion binärer Elemente s. „d'Ocagne 1891“, p. 72, 74.

462) Beispiele hexagonaler Tafeln *Ch. Lallemand,* Nivellement de haute précision, Paris 1889, p. 31, 38; „d'Ocagne“, p. 79, 81, 86, 314, 316, 319.

463) J. f. Math. 22, p. 280 = Werke 4, p. 620.

464) Die Ausführung aller gewöhnlichen Rechnungsarten mittelst eines, mit Einteilung versehenen Kegelschnittes zeigt u. a. *L. Kotányi,* Zeitschr. Math. Phys. 28 (1882), p. 248.

465) Zu nennen ist auch die noch allgemeinere, weil eine Funktion dreier Veränderlicher darstellende Tafel von *Ganguillet* und *Kutter*[489]) aus d. J. 1869.

466) Von *d'Ocagne* seit 1898 (Soc. Math. Bull. de France 26, p. 31) „méthode des points alignés“ genannt (vorher „méthode des points isoplèthes“, „d'Ocagne 1891“, p. 51, bezw. „méthode des points cotés“, Par. C. R. 123 (1896), p. 988), vom Verfasser, Zeitschr. Math. Phys. 44 (1899), p. 56, übersetzt wie in der Überschrift dieser Nummer (aligné = fluchtrecht = in einer Geraden liegend). „Abaque à alignement“ könnte man durch „Fluchttafel“ wiedergeben (in der Sprache der Techniker alignement = Flucht); *Schilling*'s Bezeichnung „kollineare Rechentafel“, „Schilling“, p. 24, kann missverstanden werden.

467) Die dualistische Umformung Cartesischer Tafeln mit drei Kurvenscharen giebt keine brauchbaren Tafeln, eher die von Tafeln mit zwei Geradenscharen und einer Kurvenschar; vgl. „d'Ocagne“, p. 127, ferner p. 129 über die graphische Ausführung bei gegebener Cartesischer Tafel.

468) Ann. ponts chaussées (6) 8, p. 531.

gesprochen[469]), was von *A. Adler*[470]) 1886 ebenfalls geschehen war. Trotz ihrer beschränkten Anwendbarkeit[471]) haben diese neuen Tafeln so in die Augen springende Vorzüge[472]), dass man die begeisterte Aufnahme, die sie gefunden haben und den Aufschwung begreift, den mit ihrem Erscheinen die Nomographie genommen hat. Am leichtesten gelangt man zu denselben durch Anwendung von Linien- anstatt Punktkoordinaten. Besonders gut eignen sich Parallelkoordinaten[473]), bei denen die Lage einer Geraden durch die Abschnitte u, v bestimmt wird (s. Fig. 49), die sie auf zwei parallelen Axen bildet[474]). Jede in u und v lineare Gleichung:

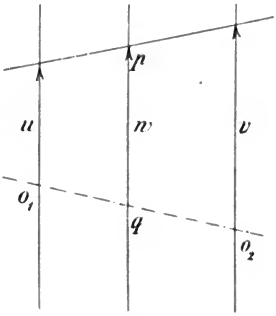


Fig. 49.

$$\lambda u + \mu v = \nu$$

stellt einen Punkt vor[475]). Wenn deshalb $F(x, y, z) = 0$ sich auf die Form:

469) Génie civil 17, p. 343.

470) Wien. Ber. 94^2, p. 404.

471) Da $F(x, y, z) = 0$ sich durch eine Cartesische Tafel mit drei Geradenscharen muss darstellen lassen, so gilt die in Nr. **44** erwähnte Bedingung, dass F sich auf die Form einer Determinante $\sum \pm \varphi_1(x)\,\psi_2(y)\,\chi_3(z)$ bringen lässt, in deren Reihen je nur eine Veränderliche vorkommt. Die notwendigen und ausreichenden Bedingungen dafür durch partielle Differentialgleichungen, denen F genügen müsste, auszudrücken, hat *Adler* (Zum graphischen Rechnen, Progr. deutsche Realsch. Karolinenthal 1895/96, p. 29) ohne endgiltigen Erfolg versucht, dagegen sind von *E. Duporcq* solche Bedingungen in Gestalt von Funktionalgleichungen aufgestellt worden Par. C. R. 127 (1898), p. 265, Bull. astr. math (2) 22 (1898), p. 287 („d'Ocagne"; p. 427).

472) Kein Liniengewirr, Einstellen und Ablesen (bei dem ein durchsichtiges Lineal mit eingeritzter Linie oder ein gespannter Faden benützt wird) bequem und genau; Möglichkeit, mehr als drei Veränderliche zu berücksichtigen. Lehrreich die Gegenüberstellungen „d'Ocagne", p. 130 u. 131, „Soreau", p. 234 u. 235.

473) *D'Ocagne* verwendet sie ausschliesslich (*Adler*[470]) sog. Plücker'sche Koordinaten); in die Geometrie sind dieselben (s. *F. Rudio*, Zeitschr. Math. Phys. 44 Supplem. 1899, p. 385) von *W. Unverzagt* eingeführt worden (Über ein einfaches Koordinatensystem der Geraden, Progr. Realgymn. Wiesbaden 1870/1871); den entsprechenden Begriff der Raumgeometrie (Parallelkoordinaten einer Ebene) hatte bereits *Chasles* 1829 (s. Correspondance de Quetelet 6, p. 81) gelegentlich benützt (III B 2).

474) Für die Anwendungen ist es von Bedeutung, dass der Abstand der Axen, der Nullpunkt und die positive Richtung einer jeden Axe willkürlich sind.

475) Alle Geraden, deren Koordinaten u, v obige Gleichung befriedigen, gehen durch den Punkt p, der den Abstand der Axen im Verhältnis $\mu : \lambda$ teilt und für den (s. Fig. 49) der Abschnitt $w = qp = \nu : (\lambda + \mu)$ ist.

$$f_1(z)\,\varphi(x) + f_2(z)\,\psi(y) = f_3(z)$$

bringen lässt, genügt es, zu setzen:

$$u = \varphi(x), \qquad v = \psi(y),$$

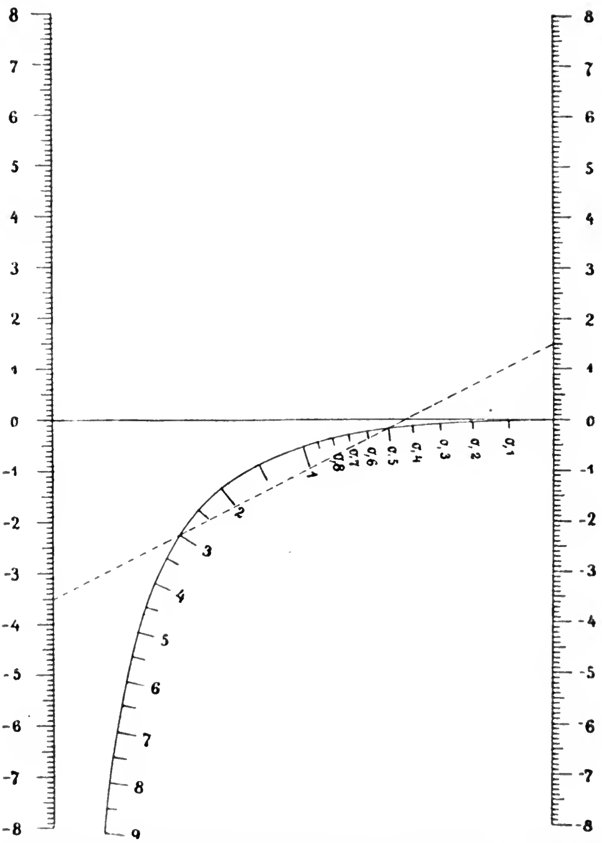


Fig. 50. Tafel zur Auflösung quadratischer Gleichungen nach *d'Ocagne*.

welche Gleichungen Skalen in den beiden Axen liefern, sowie:

$$\lambda : \mu : \nu = f_1(z) : f_2(z) : f_3(z),$$

wodurch die (im allgemeinen krummlinige) z-Skala bestimmt ist[476]. So ergeben sich im Falle:

476) Im Falle $f(z) = \varphi(x) + \psi(y)$ (und bei Anwendung von Logarithmen auch $f(z) = \varphi(x)\cdot\psi(y)$) ist die z-Skala geradlinig und zu den Axen parallel, im Falle $f(z) = \varphi(x) : \psi(y)$ — ohne Logarithmen behandelt — liegt die z-Skala in der Verbindungsgeraden $o_1\,o_2$ der Nullpunkte beider Axen; zu denselben Gleichungsformen gehören Tafeln mit nicht parallelen geradlinigen Skalen, weil sie durch kollineare Transformation auf erstere zurückgeführt werden können (s. „d'Ocagne", p. 144, 161, 175, 180). — Über die durch drei projektive Skalen

$$z^m + az^n + b = 0$$

durch Setzen von $u = a$, $v = b$ die Tafeln zur Auflösung trinomischer Gleichungen von *d'Ocagne*[468])[477]), von denen die für quadratische Gleichungen in Fig. 50 verkleinert wiedergegeben ist[478]).

Wenn allgemeiner für $F(x, y, z)$ die Form $\sum \pm \varphi_1(x)\,\psi_2(y)\,\chi_3(z)$ hergestellt ist[471]), kann man die x-, y-, und z-Skala entweder, unter ξ, η Cartesische Koordinaten eines Punktes verstanden, durch die drei Paare von Gleichungen:

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi_1(x) : \chi_1(x), & \eta &= \psi_1(x) : \chi_1(x), \\ \xi &= \varphi_2(y) : \chi_2(y), & \eta &= \psi_2(y) : \chi_2(y), \\ \xi &= \varphi_3(z) : \chi_3(z), & \eta &= \psi_3(z) : \chi_3(z) \end{aligned}$$

bestimmen[479]), oder bei Anwendung von Linienkoordinaten u, v durch die drei Gleichungen[480]):

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) \cdot u + \psi_1(x) \cdot v &= \chi_1(x), \\ \varphi_2(y) \cdot u + \psi_2(y) \cdot v &= \chi_2(y), \\ \varphi_3(z) \cdot u + \psi_3(z) \cdot v &= \chi_3(z). \end{aligned}$$

Zur Ausdehnung des Verfahrens auf Gleichungen zwischen mehr als drei Veränderlichen bieten sich verschiedene Wege dar. Durch

---

darstellbaren Gleichungen s. *d'Ocagne,* Par. C. R. 123 (1896), p. 988, Acta math. 21 (1897), p. 9 („d'Ocagne“, p. 436); s. auch „Soreau“, p. 246ff. — Die von *L. Bertrand,* Description et usage d'un abaque . . ., Paris 1895, Abdruck aus: Revue Génie militaire 8 (1894), p. 475 („d'Ocagne“, p. 157) gelehrte „Zusammensetzung“ paralleler Skalen gestattet, auch Gleichungen der Form $\varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) + \cdots + \varphi_n(x_n) = 0$ zwischen n Veränderlichen nach der Methode der fluchtrechten Punkte zu behandeln, wobei zwar noch Geraden gezogen werden müssen.

477) „d'Ocagne“, p. 187.

478) Mit derselben können die Tafeln für dreigliedrige kubische, biquadratische u. s. w. Gleichungen auf einem Blatt vereinigt werden (vgl. „d'Ocagne“, p. 185, fig. 80), was bei den entsprechenden Tafeln von *Lalanne* praktisch unausführbar wäre. — Die gestrichelte Linie in Fig. 50 entspricht dem Beispiel $x^2 - 3{,}5\,x + 1{,}5 = 0$ (Wurzeln 3 und 0,5). Der Träger der z-Skala, eine Hyperbel, ist nur zwischen den Axen, d. h. für positive z gezeichnet; die absoluten Werte etwaiger negativer Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ findet man durch Auflösen von $f(-z) = 0$ mittelst der Tafel. Über die Bestimmung imaginärer Wurzeln s. *A. Haas,* Mathem.-naturwiss. Mittlgn. 2 (1887—1888), p. 80.

479) *Adler*[470]), p. 421, „d'Ocagne“, p. 134.

480) *d'Ocagne*[469]), p. 344; *Pesci* und *Soreau* beschränken sich auf Punktkoordinaten. — Jede kollineare Transformation einer Tafel giebt wieder eine richtige Tafel; über die Erzielung der besten Anordnung durch eine solche Transformation s. „d'Ocagne“, p. 135, die Benützung der Methoden der Perspektive (nach *Lafay*), p. 137; das Abbrechen der Skalen p. 140, 150.

Vereinigung zweier Tafeln der vorhergehenden Art gelingt die Darstellung einer Gleichung $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ zwischen vier Veränderlichen, falls dieselbe durch Elimination einer Hülfsveränderlichen z aus zwei Gleichungen der Form:

$$\sum \pm \varphi_1(x_1)\psi_2(x_2)f(z) = 0,$$
$$\sum \pm \varphi_3(x_3)\psi_4(x_4)f(z) = 0$$

erhalten werden kann[481])[482]). Den Gedanken, als Transversale statt einer

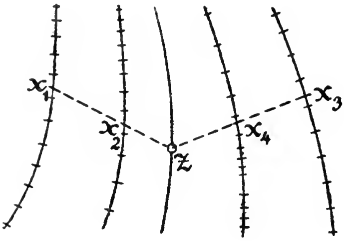


Fig. 51.

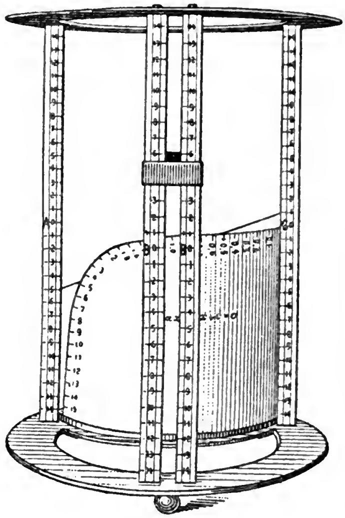


Fig. 52.

481) Die Glieder der dritten Reihe sind beiden Determinanten gemeinsam. Den Wert von x_4 zu gegebenen Werten von x_1, x_2, x_3 findet man, indem man, s. Fig. 51, die Verbindungsgerade der Punkte x_1 und x_2 der ersten beiden Skalen um ihren Schnittpunkt mit dem Träger der z-Skala (die nicht ausgeführt zu sein braucht) dreht — daher die Bezeichnung „abaque à pivotement" von *d'Ocagne,* Ann. ponts chaussées, 1er trimestre 1898, p. 307 — bis sie durch den Punkt x_3 der 3. Skala geht, und am Schnittpunkt mit der 4. Skala abliest. — Einfachste Fälle:

$$\varphi_1 + \psi_2 = \varphi_3 + \psi_4,$$
$$\varphi_1 \cdot \psi_2 = \varphi_3 \cdot \psi_4,$$
$$\varphi_1 \psi_2 + f_2 = \varphi_3 \psi_4 + f_4.$$

Beispiele „d'Ocagne", p. 221, 229, 233; allgemeine Gleichungsform p. 215.

482) Betreffs der zahlreichen Anwendungen, die von der Methode der fluchtrechten Punkte schon gemacht worden sind, sei ausser auf *d'Ocagne, Pesci, Soreau* verwiesen auf *Mehmke,* Ann. Phys. Chemie (2) 41 (1890), p. 892 u. Taf. VII; Centralblatt Bauverwaltung 1890, p. 418; Dyck's Katalog, Nachtrag, München 1893, p. 9, 19; Zeitschr. Math. Phys. 44 (1899), p. 56 u. Taf. I—III; *H. Maurer,* Graphische Tafeln für meteorologische und physikalische Zwecke, Diss. Strassburg 1894, *Goedseels*[484]); ferner auf den Bericht von *d'Ocagne,* Revue générale des sciences 9 (1898), p. 116, sowie auf *G. Pesci,* Periodico di Matematica (2) 2 (1899—1900), p. 201; *d'Ocagne,* Par. C. R. 130 (1900), p. 554; *E. Suttor,* Louvain Union Ingén. Mém. 1900, p. 223, 1901, p. 3. — Dass die Methode auch bei empirischen Funktionen gelegentlich anwendbar und nützlich ist, sieht man aus den Beispielen „d'Ocagne", p. 203, 206, 207 (von *M. Beghin, Lafay, Rateau*).

Geraden eine krumme Linie zu nehmen, hat *Adler*[483]) erwogen, *E. Goedseels*[484]) weiter verfolgt. Von *Adler* rührt auch der Gedanke her, aus der Ebene in den Raum zu gehen[485]), auf welchem Gedanken der Apparat von *Mehmke* zur Auflösung vier- und fünfgliedriger Gleichungen, s. Fig. 52 beruht[486]). S. auch Nr. **47**.

47. Mehrfach bezifferte Elemente. Sind zwei sich kreuzende einfach unendliche Scharen kotierter Linien gegeben, so lassen sich dem Schnittpunkt irgend einer Linie der einen Schar mit einer Linie der andern Schar die Koten beider Linien als Doppelkote zuweisen. Führt man durch diese doppeltkotierten Punkte eine dritte Schar von Linien, so übertragen sich auf letztere die Kotenpaare der Punkte — der Begriff einer binären Skala, welcher am Schluss von Nr. **45** auftrat, gehört offenbar hierher — und es schneidet die neue Linienschar jede weitere, ihr nicht angehörige Linie in Punkten, von denen jeder als Überlagerung unendlich vieler doppeltkotierter Punkte angesehen werden kann („verdichtete Punkte“[487])). In dem Ersetzen

---

483) S. [470]), p. 422 u. [471]), p. 37; *Adler* lässt Transversalen zu, die von Fall zu Fall gezeichnet werden müssen.

484) Les procédés pour simplifier les calculs ramenés à l'emploi de deux transversales..., Bruxelles 1898, Abdruck aus: Brux. Soc. scient. Ann. 23^2 (1898/1899), p. 1 („d'Ocagne“, p. 234, 238, 241), unabhängig von *Adler*. *Goedseels* bevorzugt Linien von unveränderlicher Form (z. B. Kreise mit konstantem Halbmesser, rechtwinklige Geradenpaare), oder aus gegenseitig beweglichen Teilen solcher zusammengesetzte Transversalen.

485) S. [470]), p. 423. Ohne Beweis wird mitgeteilt: Vier Geraden durch einen Punkt, ebenso die Seiten eines windschiefen Vierecks, lassen sich mit Zahlen so belegen, dass die an vier Punkten einer Ebene stehenden Zahlen x_1, x_2, x_3, z immer der Gleichung $z = x_1 x_2 x_3$ genügen.

486) Unabhängig von *Adler*, Dyck's Katalog, München 1892, p. 158, ausführlicher Zeitschr. Math. Phys. 43 (1898), p. 338 („d'Ocagne“, p. 350). Die Wurzeln der Gleichung:

$$t^m + at^n + bt^p + c = 0$$

liest man ab an den Schnittpunkten der zur Exponentenverbindung (m, n, p) gehörigen (als Rand einer Blechschablone dargestellten) eingeteilten Kurve mit der Verbindungsebene der zu den Werten a, b, c gehörigen Punkte der drei parallelen Axen (bezw. an den scheinbaren Schnittpunkten der Kurve mit der aus dem Punkt b gesehenen, durch einen gespannten Faden dargestellten Verbindungsgeraden der Punkte a und c, vgl. Fig. 52, welche die Einstellung für das Beispiel $t^m - 5t^n + 6t^p + 1 = 0$ zeigt). Jede der auswechselbaren Schablonen entspricht dem zu positiven Werten von t gehörigen Teile der betr. Kurve; wegen der Bestimmung negativer Wurzeln vgl. Anm. 478. Bei fünfgliedrigen Gleichungen tritt eine Kurvenschar an Stelle der einzelnen Kurve.

487) „Points condensés“, „d'Ocagne“, p. 296.

einfachkotierter Elemente durch doppeltkotierte bezw. gewöhnlicher Skalen durch binäre oder durch aus verdichteten Punkten gebildete Skalen hat man ein Mittel, Tafeln so zu erweitern, dass sie Gleichungen mit bis zur doppelten Anzahl von Veränderlichen darstellen können, welches Mittel bei Cartesischen Tafeln (Nr. **44**) sowohl[488]) wie bei Tafeln mit fluchtrechten Punkten[489])[490]) oder mit beliebigen Transversalen (Nr. **46**) anwendbar ist[491]). Eine Tafel zur Auflösung vollständiger kubischer Gleichungen, Fig. 53, sei als Beispiel vorgeführt[492]).

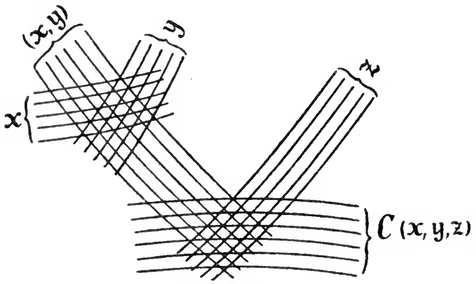


Fig. 54.

Wenn man in einem Liniennetz, das ein System doppelt kotierter Punkte bestimmt, die eine der beiden Scharen einfach kotierter Linien, die das Netz bilden, oder beide, mit doppelter Kotierung versieht (d. h selbst von einem System doppelt kotierter Punkte herleitet), so ergiebt sich ein System von Punkten mit drei oder vier Koten, welch' letztere auf eine durch diese Punkte gehende weitere Schar von Linien über-

488) Beispiel einer Cartesischen Tafel mit binären Skalen an beiden Axen, also für fünf Veränderliche, *Ch. Lallemand,* Nivellement de haute précision, Paris 1889, p. 294 („d'Ocagne", p. 302).

489) Wahrscheinlich ältestes Beispiel (auch für das Auftreten einer binären Skala) die Tafel von *E. Ganguillet* u. *W. R. Kutter,* Österr. Ing.- u. Arch.-Ver. Zeitschr. 21 (1869), p. 50 und Tafel Nr. 9 (die Tafel sehr verbreitet durch Abdruck im Handbuch Ingenieurwissensch. 3, Leipzig 1879, Tafel 13, und im Taschenbuch des Ingenieurs, hrsg. v. Ver. „Hütte" [versch. Aufl.], für schiefwinklige Axen umkonstruiert und verbessert „Soreau", p. 432).

490) Der Gedanke allgemein entwickelt von *d'Ocagne* zuerst für vier Veränderliche — eine der drei Skalen zu einer binären erweitert — Par. C. R. 112 (1891), p. 421, dann für fünf und sechs Veränderliche „d'Ocagne" 1891", p. 90 (doppelt kotierte Punkte hier „points doublement isoplèthes" genannt). Beispiele und weitere Litteratur „d'Ocagne", p. 320 ff. sowie „Pesci" und „Soreau".

491) Auch schon bei Tafeln mit vereinigten Skalen (s. Nr. **43** und Anm. 421), Beispiel *Lallemand* [488]), p. 143 sowie „d'Ocagne", p. 306, 308, 311 (von *Prévot, Chancel, Lallemand*) und „Soreau"; die Anwendung auf hexagonale Tafeln bereits in Nr. **45** gezeigt.

492) In der Gleichung $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ sind a und b zu Parallelkoordinaten u, v einer Geraden genommen, wodurch dieselbe in die eines Systems von Punkten mit der Doppelkote (z, c), nämlich $z^2u + zv + (z^3 + c) = 0$ übergeht.

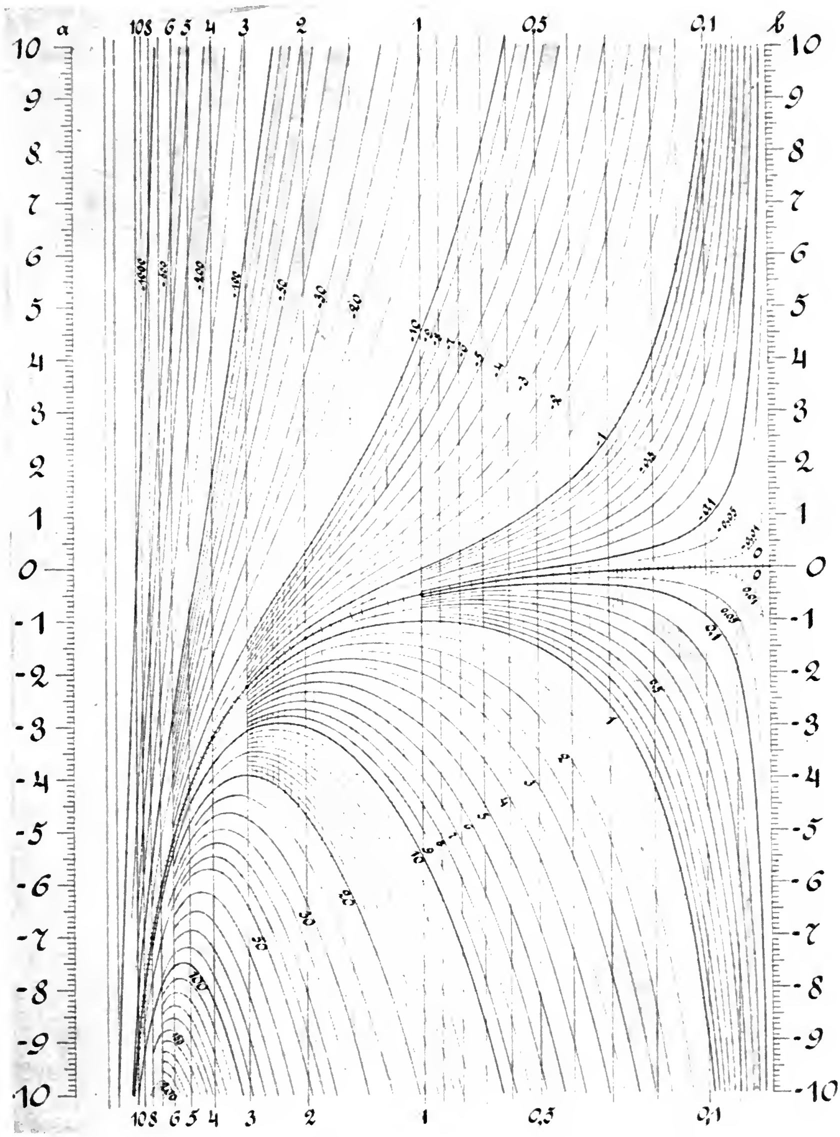


Fig. 53. Tafel zur Auflösung vollständiger kubischer Gleichungen.

tragen werden könnten (vgl. die dreifach kotierten Linien C in Fig. 54). Durch Wiederholung dieses Verfahrens gelangt man zu Elementen mit beliebig vielen Koten und Skalen von beliebiger Vielfachheit[493]).

48. Bewegliche Systeme. Der Nomographie erschliessen sich neue Gebiete durch Anwendung von zwei oder mehr beweglichen kotierten Systemen, die zu einander in bestimmte Lagen gebracht werden[494]). Nimmt man blos in einer Richtung Beweglichkeit an, so ergeben sich die Rechenschieber, die im folgenden Abschnitt besprochen werden sollen. Verschiebung in zwei Richtungen findet bei *C. Reuschle*'s graphisch-mechanischen Apparaten zur Auflösung von Gleichungen statt[495])[496]). Im Falle der kubischen Gleichung:

$$x^3 + bx^2 + cx = d \tag{1}$$

schreibt *Reuschle* zunächst:

$$x(x^2 + bx + c) = d$$

und setzt:

$$y = x^2 + bx + c, \tag{2}$$

wodurch Gleichung (1) übergeht in:

$$xy = d. \tag{3}$$

Man hat die Punkte a und b auf den parallelen Axen durch eine Gerade zu verbinden, an den Senkrechten durch die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Kurve zum Parameter c liest man die Wurzeln ab. Diese Anordnung von *Mehmke*, s. Dyck's Katalog, Nachtrag, p. 9, Nr. 40d, während in „d'Ocagne 1891", p. 81 und pl. VIII, $b = u$, $c = v$ gesetzt und a zum Parameter einer Kurvenschar genommen ist. Eine ähnliche Tafel zur Auflösung biquadratischer Gleichungen der Form $z^4 + z^3 + az^2 + bz + c = 0$ „d'Ocagne", p. 339 (Hülfstafel, um eine beliebige biquadratische Gleichung auf diese Form zu bringen, ebenda p. 340); das Verfahren ist auf alle Gleichungen mit 4 bezw. 5 Gliedern anwendbar.

493) S. „d'Ocagne", p. 351; Beispiel p. 355 (hexagonale Tafel mit ternären Skalen, nach *Lallemand*).

494) Bewegliche Linien sind als Zeiger zum Ablesen schon in Nr. **45—47** vorgekommen.

495) Graphisch-mechanische Methode zur Auflösung der numerischen Gleichungen, Stuttgart 1884.

496) Graphisch-mechanischer Apparat zur Auflösung numerischer Gleichungen, Stuttgart 1885 (auch eine französische Ausgabe). Der Apparat besteht aus einer Tafel mit einer Schar gleichseitiger Hyperbeln und einer auf Gelatine gedruckten Parabel; er dient zur Auflösung quadratischer und kubischer Gleichungen. Später hat *Reuschle* gezeigt, Zeitschr. Math. Phys. 31 (1886), p. 12, dass mit demselben Apparat auch biquadratische Gleichungen (mittelst der gemeinsamen Tangenten der Parabel und einer Hyperbel) gelöst werden können.

Es werden x und y als Cartesische Koordinaten eines Punktes betrachtet. Die Parabel (2) entsteht aus der auf einem durchsichtigen Blatt gezeichneten Parabel $y = x^2$ durch Parallelverschieben[497]); die Schnittpunkte der verschobenen Parabel mit der zum Wert d gehörigen Hyperbel der Schar (3), s. Fig. 55[498]), geben durch ihre Abscissen die reellen Wurzeln der Gleichung (1). Bei der biquadratischen Gleichung mit auf Eins gebrachtem Absolutglied:

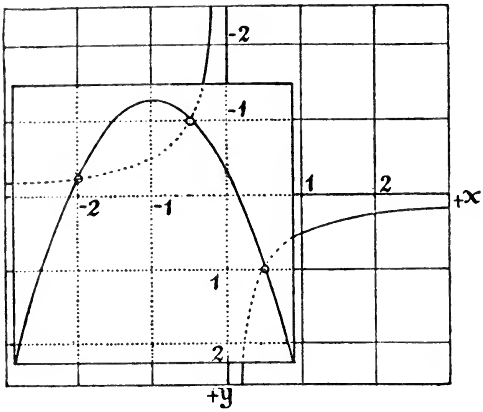


Fig. 55.

(4) $$ax^4 + bx^3 + cx^2 = dx + 1$$

dienen gemäss der Zerlegung in:

(5) $$y = ax^2 + bx + c$$

und:

(6) $$x^2 y = dx + 1$$

zur Auflösung die durch (5) dargestellte verschobene Parabelschar $y = ax^2$ und die „trinomische Hyperbelschar 3. Ordnung" (6)[499]). Auf Grund einer derartigen Absonderung eines quadratischen Faktors aus drei benachbarten Gliedern[500]) können noch Gleichungen 7. Grades

497) Allgemeiner die Parabel $y = ax^2 + bx + c$ aus der zum gleichen Wert von a gehörigen Parabel der Schar $y = ax^2$. Die Axe der verschobenen Parabel, welch' letztere durch den Punkt c der y-Axe geht, ist $x = -\frac{b}{2a}$; zum Zweck der Einstellung kann ausserdem noch die Ordinate des Scheitels, $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$, berechnet werden.

498) Die Figur 55 entspricht dem Beispiel:

$$x^3 + 2x^2 - 0{,}25x = 0{,}5 \qquad \text{(Wurzeln } 0{,}5,\ -0{,}5,\ -2\text{)}.$$

499) *W. Heymann* löst, Zeitschr. Math. Phys. 43 (1898), histor.-litterar. Abteilung, p. 97, die zuvor in die Form $(x^2 - a)^2 = x + b$ gebrachte biquadratische Gleichung mittelst zweier Exemplare der Parabel $v = u^2$ durch Aufeinanderlegen nach Massgabe der Gleichungen:

$$x^2 = a + y, \qquad y^2 = b + x.$$

500) Die Absonderung eines kubischen Faktors aus vier benachbarten Gliedern führt auch nicht weiter, diejenige eines linearen Faktors aus zwei benachbarten Gliedern einen Schritt weniger weit, s. *Reuschle* [495]), p. 45, 42; ferner wegen der Absonderung aus den niedersten oder aus mittleren Gliedern, statt aus den höchsten, ebenda p. 36, 40, 44.

mit einem der Einheit gleichen Koeffizienten, denen drei Glieder fehlen, überhaupt Gleichungen mit vier willkürlichen Konstanten[501]) durch Aufeinanderlegen zweier Kurvenscharen gelöst werden[502]). Weiter kommt man mit der logarithmographischen Methode (Nr. **41** und **42**), da sie noch Gleichungen mit bis zu sechs Gliedern und lauter von Eins verschiedenen Koeffizienten[503]), unter anderen Gleichungen 7. Grades, denen zwei beliebige Glieder fehlen, mittelst

---

501) Wofern eben ein quadratischer Faktor abgesondert werden kann, von welcher Beschränkung die (zwar nur bei Gleichungen mit drei Konstanten anwendbaren, aber einfacheren und leichter zu handhabenden) Tafeln von *d'Ocagne*[492]), wie auch die logarithmischen Tafeln (s. oben) frei sind. Bei der 4-gliedrigen Gleichung:

$$x^m + \beta x^n + \gamma x^p = \delta$$

schlägt *Reuschle*[495]), p. 64 die Zerlegung:

$$y = x^{m-p} + \beta x^{n-p} + \gamma, \qquad x^p y = \delta$$

vor, die zwei Kurvenscharen nötig macht, während die Auflösung nach *d'Ocagne* nur eine Kurvenschar, die logarithmische Behandlung sogar nur zwei einzelne Kurven erfordert. Bei 3-gliedrigen Gleichungen der Form:

$$x^m + \beta x^n = \gamma,$$

vgl. [495]), p. 60, 62, zeigt sich *Reuschle*'s Methode weniger günstig, als selbst die von *Lalanne* (s. Nr. **44**, S. 1029).

502) *Reuschle* entwickelt[495]), p. 48 ff. noch eine „Raumlösung", bei der man drei gegenseitig bewegliche Kurvenscharen nötig hat und über sechs willkürliche Konstanten verfügt, also noch bis zu Gleichungen 7. Grades kommt, denen ein Glied fehlt. Die allgemeinste Gleichung 5. Grades z. B.:

$$(1) \qquad ax^5 + bx^4 + cx^3 = dx^2 + ex + f,$$

wird durch Absonderung zweier quadratischer Faktoren in das gleichwertige System:

$$(2)\ \ y = ax^2 + bx + c, \qquad (3)\ \ z = dx^2 + ex + f, \qquad (4)\ \ x^3 y = z$$

zerlegt. Nachdem die Fläche (4) etwa in Grund- und Aufriss durch eine Reihe wagerechter Schnitte dargestellt ist, muss man durch Versuche den Wert γ so bestimmen, dass der Schnittpunkt der Kurve $x^3 y = \gamma$ mit der durch Verschieben aus $y = ax^2$ erhaltenen Parabel (2) im Grundriss einerseits und der Schnittpunkt der Geraden $z = \gamma$ mit der durch Verschieben aus $z = dx^2$ erhaltenen Parabel (3) im Aufriss andererseits in einer Senkrechten liegen; die gemeinsame Abscisse dieser Punkte ist eine Wurzel der Gleichung.

503) Allgemeiner alle Gleichungen, die durch Elimination von y aus zwei Gleichungen der Form:

$$x^k y^l + a x^m y^n + b x^p y^q + c = 0,$$
$$x^{k'} y^{l'} + a' x^{m'} y^{n'} + b' x^{p'} y^{q'} + c' = 0$$

hervorgehen, wobei die Exponenten auch negative und gebrochene Zahlen sein können. — Der Gedanke von *Reuschle*'s „Raumlösung" [502]), auf die logarithmographische Methode angewandt, würde noch Gleichungen mit acht Konstanten, z. B. die allgemeinste Gleichung 7. Grades, zu behandeln erlauben.

zweier verschiebbaren Kurvenscharen mechanisch aufzulösen gestattet[504][506]), und erstmals auch Systeme von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten[505][506]). Weil nämlich das logarithmische Bild (s. Nr. **41**, S. 1020) der Funktion:

$$y = \pm ax^l \pm bx^m$$

durch Parallelverschieben aus dem der Funktion:

$$y = \pm x^l \pm x^m$$

hervorgeht, dasjenige der Funktion:

$$y = \pm ax^l \pm bx^m \pm cx^n$$

durch Parallelverschieben aus einer bestimmten Kurve der Schar, die in den logarithmischen Bildern von:

$$y = \pm x^l \pm x^m \pm \lambda x^n$$

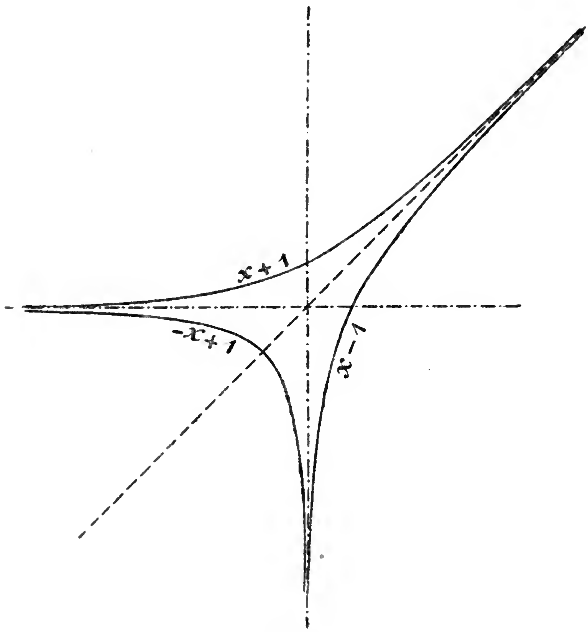


Fig. 56.

mit λ als Parameter, besteht[507]), so kann z. B. die allgemeine trinomische Gleichung:

---

504) *Mehmke,* Civilingenieur 35 (1889), p. 629.

505) *Mehmke,* Zeitschr. Math. Phys. 35 (1890), p. 184.

506) Zusammenfassende Darstellung: *Mehmke,* Dyck's Katalog, Nachtrag, p. 10, Nr. 40e („d'Ocagne", p. 376).

507) S. [504]), p. 630, 631. Die Einstellung erfordert keine Rechnung, es genügt, das durchsichtige, die Kurve $y = \pm x^l \pm x^m$ bezw. die Kurvenschar

$$x'^m = \pm bx'^n \pm c,$$

nachdem sie durch Einsetzen von $x'^n = x$ auf die Form:

$$x^{\frac{m}{n}} = \pm bx \pm c$$

gebracht ist, mittelst der Kurve Fig. 56, dem logarithmischen Bilde von $y = \pm x \pm 1$,[508]) zusammen mit einer Geraden, dem logarithmischen Bilde von:

$$y = x^{\frac{m}{n}},\text{[509])}$$

gelöst werden, die allgemeinste Gleichung 3. Grades:

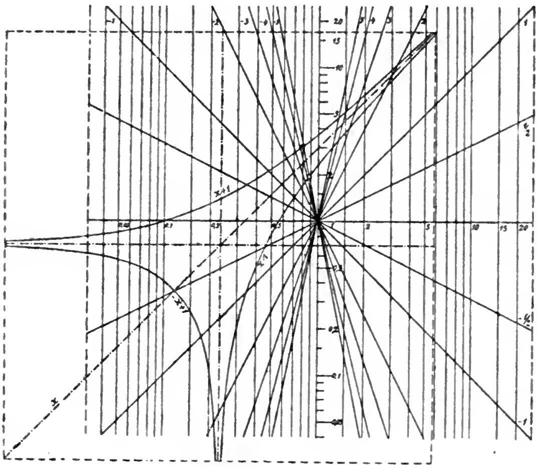


Fig. 57.

$$ax^3 \pm bx^3 \pm cx \pm d = 0$$

vermöge der Zerlegung in:

$y = \pm x^l \pm x^m \pm \lambda x^n$ tragende Blatt so zu legen, dass bei Wahrung der Axenrichtungen die darauf gezeichneten Geraden $y = x^l$ und $y = x^m$ durch den Punkt a bezw. b der logarithmisch geteilten y-Axe des festen Systems geht.

508) Das als einzige Kurve betrachtete Gebilde Fig. 56 besteht aus drei Zweigen, entsprechend den Vorzeichenverbindungen $++$, $+-$, $-+$. Die Einstellung ist von den Vorzeichen der Glieder unabhängig; vertauscht man in der Gleichung, um die negativen Wurzeln zu erhalten, x mit $-x$, so tritt an Stelle des zuerst benützten Zweiges der der neuen Zeichenverbindung entsprechende. Diese Bemerkungen gelten allgemein.

509) Die Geraden zu verschiedenen Werten m/n sind auf der festen Tafel im voraus gezeichnet, s. Fig. 57, die dem Beispiel $x^{-5} = 3x + 0{,}7$ entspricht. An den Parallelen zur y-Axe können, weil sie durch die Teilpunkte einer logarithmischen Skala in der x-Axe gehen, die Wurzeln selbst (statt der Logarithmen) abgelesen werden (im vorigen Beispiel ungefähr 0,80 und $-$ 0,88).

$$y = \pm ax \pm b, \qquad y = \pm cx^{-1} \pm dx^{-2}$$ [510])

mittelst derselben Kurve, zusammen mit der Kurve Fig. 58, dem logarithmischen Bilde von:

$$y = \pm x^{-1} \pm x^{-2},$$

die allgemeinste Gleichung 5. Grades auf Grund der Schreibweise:

$$ax^2 \pm bx \pm c = \pm dx^{-1} \pm ex^{-2} \pm ex^{-3}$$ [510])

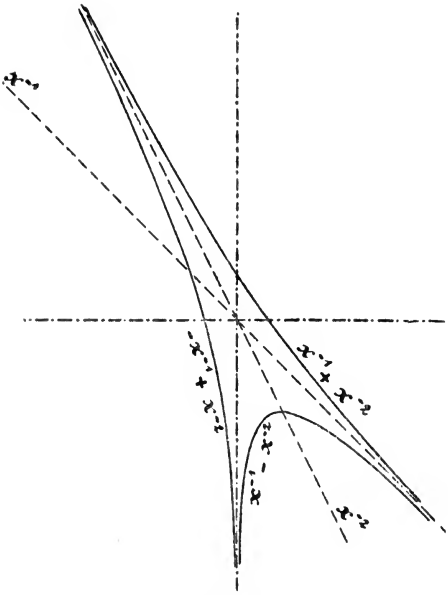


Fig. 58.

mittelst der beiden Kurvenscharen mit den Parametern λ und μ, die logarithmisch zu:

$$y = \pm x^2 \pm x \pm \lambda,$$
$$y = \pm \mu x^{-1} \pm x^{-2} \pm x^{-3}$$

gehören. Die entsprechende Auflösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten erfordert für die eine und die andere Gleichung je eine Kurve oder Kurvenschar, je nachdem die betreffende Gleichung drei oder vier Glieder hat[511]). Die imaginären Wurzeln reeller trinomischer Gleichungen, wie auch die sämtlichen Wurzeln trinomischer Gleichungen mit komplexen Koeffizienten lassen sich durch Aufeinanderlegen einer Kurventafel und eines geteilten Axensystems bestimmen[512]).

Von drehbaren kotierten Systemen haben *Lallemand*[513]) und *Lafay*[514]) Gebrauch gemacht.

49. Allgemeine Theorie von d'Ocagne. *M. d'Ocagne* hat mit Erfolg die Aufgabe in Angriff genommen, die möglichen Arten der

510) Die an sich nicht nötige Division mit einer Potenz von x bezweckt, günstige Schnitte für die Kurven herbeizuführen, vgl. Anm. 399.

511) Beruht darauf, dass das logarithmische Bild einer Gleichung der Form:

$$F(x, y) = \sum C_i x^{m_i} y^{n_i}$$

durch Verschieben aus einer Kurve entsteht, die zu einer Gleichung derselben Form, aber mit drei der Einheit gleichen Koeffizienten gehört, s. [506]), p. 11 (durch räumliche Betrachtungen abgeleitet [505])). Über die ohne Rechnung ausführbare Einstellung s. [506]), p. 12, „d'Ocagne", p. 379, 380.

512) S. *Mehmke,* Dyck's Katalog, Nachtrag, p. 16, Nr. 40 f.

513) S. [488]), p. 149 („d'Ocagne", p. 371).

514) Ann. Chimie Physique (7) 16 (1899), p. 503 („d'Ocagne", p. 374).

ebenen Darstellung einer Gleichung zwischen n Veränderlichen sämtlich zu bestimmen und nach zweckmässigen Gesichtspunkten zu ordnen; er hat überdies eine Zeichensprache eingeführt, die den Bau einer jeden Gattung graphischer Tafeln kurz und treffend zur Anschauung bringt[515]). Kotierte Punkte und Linien bilden die Elemente einer jeden graphischen Tafel[516]). Die einzige mit dem Auge sicher erkennbare Lagenbeziehung ist die Berührung zweier Elemente, die im Fall eines Punktes und einer Linie bedeutet, dass der Punkt auf der Linie liegt[517]), und von *d'Ocagne* durch:

$$E \dashv E'$$

ausgedrückt wird, unter E und E' die beiden Elemente verstanden. Liegt auf einer Ebene mit den starr verbundenen Elementen $E_1, E_2, \ldots$ eine andere mit den Elementen $E_1', E_2', \ldots$, so ist die gegenseitige Lage beider Ebenen durch drei Berührungen:

$$E_1 \dashv E_1', \quad E_2 \dashv E_2', \quad E_3 \dashv E_3'$$

bestimmt. Besteht ausserdem die Berührung:

$$E_4 \dashv E_4',$$

so müssen die Koten dieser acht Elemente einer gewissen Gleichung genügen, von der somit eine Darstellung vorliegt[518]). Die ersten drei Berührungen dienen zum Einstellen[519]); mit Hülfe einer derartigen vierten Berührung kann, wenn jene Koten bis auf eine gegeben sind, der Wert der letzten Kote durch Ablesen gefunden werden[519]). Bei $(m+1)$ aufeinander liegenden Ebenen kommen $3m$ Berührungen auf das Einstellen, eine weitere Berührung auf das Ablesen, und da jedes der $(6m+2)$ Elemente, die paarweise in Berührung treten, mit beliebig vielen Koten behaftet sein kann, erhält man auf diese Weise die denkbar allgemeinste Art von Tafeln. Um für Gleichungen mit n Veränderlichen die Anzahl $\mathfrak{N}_n^{m+1}$ sämtlicher Arten von Tafeln mit $(m+1)$ aufeinander zu legenden Ebenen zu finden, muss man daher

---

515) Par. C. R. 126 (1898), p. 397; Par. Soc. Math. France Bull. 26 (1898), p. 16; „d'Ocagne", p. 390.

516) Es können auch einige nicht-kotierte Elemente vorkommen.

517) Das Zusammenfallen zweier Punkte oder zweier Geraden gilt für zwei Berührungen, s. „d'Ocagne", p. 396; Zeichen $\equiv$, z. B. $P \equiv P'$ bedeutet, dass die Punkte P und P' zusammenfallen.

518) Kommen unter den Elementen der einen Ebene drei konzentrische Kreise oder parallele Geraden vor — sie können auch zusammenfallen — so wird eine Berührung überflüssig und kann unbestimmt bleiben, s. „d'Ocagne", p. 395; Bezeichnung: „$\dashv$".

519) „Contact de position" und „contact de résolution", „d'Ocagne", p. 393.

erstens alle Zerlegungen der Zahl n bilden und zweitens in jedem Falle die Zahlen, in die man n zerlegt hat, auf die genannten $(6m+2)$ Elemente verteilen, wobei Lösungen, die durch Vertauschungen auseinander hervorgehen, nur für eine zu rechnen sind[520]). Bei einer einzigen Ebene ist die betreffende Zahl $\mathfrak{N}_n^1$ gleich $n/2$ oder $(n-1)/2$, je nachdem n gerade oder ungerade[521]). Im Falle zweier Ebenen hat *P. A. Mac Mahon* dieselbe bestimmen gelehrt[522]); z. B. ist:

$$\mathfrak{N}_2^2 = 2,\quad \mathfrak{N}_3^2 = 5,\quad \mathfrak{N}_4^2 = 16,\quad \mathfrak{N}_5^2 = 29,\quad \mathfrak{N}_6^2 = 64,\quad \mathfrak{N}_7^2 = 110\ ^{523)}.$$

Für Gleichungen mit zwei, drei und vier Veränderlichen und Tafeln mit einer oder zwei Ebenen hat *d'Ocagne* alle Fälle untersucht[524]). Als Beispiele für die Darstellung einzelner Gattungen von Tafeln durch Formeln seien die der Cartesischen Tafeln (Nr. **44**):

$$P(x, y) \multimap C(z)\ ^{525)},$$

und die der Tafeln mit fluchtrechten Punkten (Nr. **46**):

$$P_1(x) \multimap \mathrm{I}', \quad P_2(y) \multimap \mathrm{I}', \quad „\multimap“, \quad P_3(z) \multimap \mathrm{I}'\ ^{526)}$$

angeführt[527]).

---

520) Allerdings findet man gleichzeitig alle Arten von Tafeln mit weniger als $(m+1)$ Ebenen, weil nicht-kotierte Elemente zu berücksichtigen sind und weil die gegenseitige Lage zweier Ebenen unveränderlich ist, also beide Ebenen durch eine ersetzt werden können, wenn drei nicht-kotierte Elemente der einen Ebene drei nicht-kotierte Elemente der andern berühren. Ferner ist vorausgesetzt, dass jeder Veränderlichen blos *eine* Skala zugewiesen wird, vgl. die Anmerkung „d'Ocagne“, p. 401.

521) S. „d'Ocagne“, p. 400.

522) Mit Hülfe erzeugender Funktionen, Par. Soc. Math. France Bull. 26 (1898), p. 57. S. auch I C 3, Nr. **1**.

523) S. „d'Ocagne“, p. 402.

524) „d'Ocagne“, p. 403, 405, 409 (Numerierung der Gattungen hier anders als in den früheren Arbeiten[515])).

525) Bedeutet, dass der mit den Koten x, y versehene Punkt P — Schnittpunkt der Koordinatenlinie x mit der Koordinatenlinie y — auf der Isoplethe $C(z)$ liegt. Für $n > 2$ der einzige Fall, in welchem die dargestellte Funktion völlig allgemein ist, s. „d'Ocagne“, p. 406.

526) I' (Index) bedeutet die beim Ablesen benützte Gerade, als nicht-kotiertes Element einer beweglichen Ebene gedacht; die ersten drei Berührungen drücken aus, dass die Gerade auf beliebige Weise durch die Punkte P_1 und P_2 der ersten beiden Skalen mit den Koten x und y zu legen ist, die vierte besagt, dass der gesuchte Wert z am Schnittpunkt der Geraden mit der dritten Skala steht.

527) Wenn jedes, der Gleichung $F(x, y, z, \ldots) = 0$ genügende Wertsystem $x, y, z, \ldots$ ein eben solches $x', y', z', \ldots$ nach sich zieht, wo $x' = \varphi(x)$, $y' = \psi(x)$, $z' = \chi(z), \ldots$ und $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ bekannte Funktionen sind, so kann eine für gewisse Intervalle der Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ konstruierte Tafel obiger

V. Stetige Rechenapparate und -Maschinen.

Mit der für diesen Abschnitt gewählten Überschrift soll ausgedrückt werden, dass die jetzt folgenden Apparate und Maschinen (ganz wie die graphischen Tafeln) mit Skalen für die gegebenen und gesuchten Grössen ausgerüstet sind, die eine stetige Veränderung dieser Grössen zulassen.

50. Logarithmischer Rechenschieber.

Litteratur: Von den zahlreichen im 19. Jahrhundert erschienenen Beschreibungen des Rechenschiebers gewöhnlicher Form sei folgende Auswahl genannt: *B. A. Bevan,* A practical treatise on the sliding rule ..., London 1822; *Fr. W. Schneider,* Anweisung zum Gebrauch eines Rechenstabes ..., nach dem Schwedischen, Berlin 1825; *Ph. Mouzin,* Instruction sur la manière de se servir de la règle à calcul, dite règle anglaise ..., 3ème éd. Paris 1837; *J. F. Artur,* Instruction théorique et applications de la la règle logarithmique ..., Paris 1827, 2ème éd. 1845 [Auszug von *De Bois-Villette,* Ann. ponts chaussées (2) 3 (1842, 1er sem.), p. 217]; *L. C. Schulz v. Strassnicki,* Anweisung zum Gebrauche des englischen Rechenschiebers ..., Wien 1843; *C. Hoffmann*, Anleitung zum Gebrauch des Rechnenschiebers ..., Berlin 1847; *L. Lalanne,* Instruction sur les règles à calcul ..., Paris 1851, 3ème éd. 1863 („Lalanne"), auch englische, deutsche und spanische Ausg.; *F. Guy,* Instruction sur la règle à calcul, 3ème éd. Paris 1855, 7ème éd. 1872; *P. M. N. Benoît,* La règle à calcul expliquée, Paris 1853; *Quintino Sella,* Teorica e pratica del regolo calcolatore, Torino 1859 (auch französische Übersetzung von *G. Montefiore Levi,* Liège 1869); *K. v. Ott,* Der logarithmische Rechenschieber ..., Prag 1874; 2. Aufl. 1891; *Ch. Hoare,* The slide rule and how to use it, London 1875; *L. Tetmajer,* Theorie und Gebrauch des logarithmischen Rechenschiebers ..., Zürich 1875 (Sonderabdruck aus *Culmann*'s Graphischer Statik, durch Beispiele vermehrt); *Gros de Perrodil,* Théorie de la règle logarithmique ..., Paris 1885; *B. K. Esmarch,* Die Kunst des Stabrechnens ..., Leipzig 1896; *E. Hammer,* Der logarithmische Rechenschieber und sein Gebrauch ..., Stuttgart 1898, 2. Aufl. 1902 („Hammer"); *G. Gallice,* La règle à calcul appliquée à la navigation, Paris 1898; *C. H. Müller,* Der logarithmische Rechenstab ..., Progr. Kaiser-Friedrichs-Gymn. Frankfurt a. M. 1899; ferner sei erwähnt *J. Farey,* A treatise on the steam engine ..., London 1827, chap. 7. — Beschreibungen besonderer, von der gewöhnlichen stark abweichender Formen sind in den Anmerkungen zu dieser Nummer namhaft gemacht. Zu verweisen ist ferner auf die unter p. 952, 1007 und p. 1024 angeführten Schriften: *d'Ocagne,* Le calcul simplifié ...; *von Bohl,* Apparate und Maschinen ...;

Gleichung nach Anbringung neuer Koten an den Elementen der Tafel auch für Werte ausserhalb dieser Intervalle benützt werden (Prinzip der „superposition des graduations", „d'Ocagne", p. 38). Für drei Veränderliche und die Annahmen $x' = \lambda x$, $y' = \mu y$ — μ von λ unabhängig oder aber $\mu = \lambda^m$, m konstant — sind die von *d'Ocagne* empirisch gefundenen Lösungen $z = \Delta(x^n y^p)$, bezw. $z = \Delta\left(x f(x y^{-\frac{1}{m}})\right)$ — Δ und f willkürliche Funktionen, n und p konstant — nach *G. Koenigs* (s. „d'Ocagne", p. 431) die allgemeinsten ihrer Art.

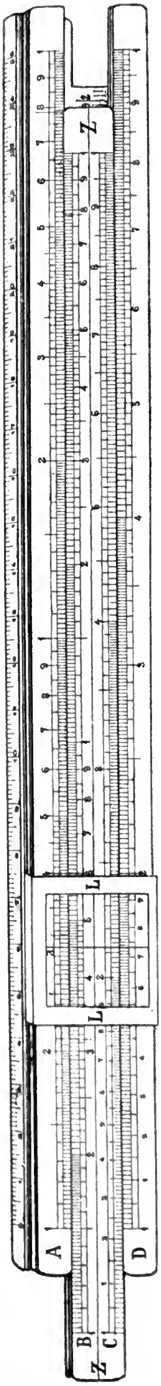


Fig. 59. Logarithmischer Rechenschieber.

sowie „Favaro-Terrier“, „Vogler“ und „d'Ocagne“. — Den Rechenschieber und andere logarithmische Rechenapparate findet man auch in technischen Lehr- und Handbüchern beschrieben, z. B. in *W. Jordan,* Handbuch der Vermessungskunde 2, 5. Aufl. Stuttgart 1897, p. 130 ff. — Die ausführlichste geschichtliche Zusammenstellung giebt *A. Favaro,* Veneto Istituto Atti (5) 5 (1878/79), p. 495 (gekürzt in „Favaro-Terrier“ 2, p. 70, 110).

Für sich allein oder mit anderen Hülfsmitteln — Tafeln, Rechenmaschinen — zusammen gebraucht ist der ebenso vielseitige als leistungsfähige Rechenstab oder Rechenschieber (englisch slide rule, französisch règle à calcul) von unschätzbarem Werte. Seine Überlegenheit über die logarithmischen und andere Zahlentafeln beruht auf dem Umstande, dass mit ihm zusammengesetzte Rechnungen verschiedenster Art mit einem Schlage, d. h. mit einer einzigen Schieberstellung oder doch ohne Beachtung von Zwischenergebnissen ausgeführt werden können. Die ursprüngliche, von *E. Gunter* (1620 oder 1623, vgl. Anm. 389) angegebene Form, die sich unter dem Namen Gunterskale oder „Gunter“ bis heute erhalten hat[528]), war die eines prismatischen Stabes oder Lineals mit mehreren, auf der Vorder- und Rückseite der Länge nach aufgetragenen logarithmischen und anderen Skalen (s. Nr. **43**, bes. Anm. 417). Zur Ausführung der Multiplikation z. B. war das Abgreifen und Zusammenfügen der Logarithmen der Faktoren als Strecken mit einem Zirkel auf der „line of numbers“ nötig (vgl. Nr. **40**). Um den Zirkel zu ersparen, wandte 1627 *E. Wingate*[529]) zwei gleiche, längs einander verschiebbare Stäbe an, wodurch zugleich das Verfahren abgekürzt wurde, und 1657 bildete *Seth Partridge*[530]) den zweiten Stab als

528) Bei den Seefahrern, vgl. (auch wegen einiger Abarten) *L. Jerrmann,* Die Gunterskale . . ., Hamburg 1888.

529) Nach *Ch. Hutton,* Mathem. Tables, London 1785, Introduction, p. 36. *Favaro* verweist auf *Wingate*'s Schrift „Of natural and artificial arithmetic“, London 1630.

530) Ebenfalls nach *Hutton*[529]). Bei „Lalanne“, p. VI, als Quelle angeführt: *Seth Partridge,* The description and use of an instrument called the double scale of proportion . . ., London 1671.

Schieber oder „Zunge“ (französisch réglette, languette, Z in Fig. 59) aus, die in einer Nut („Kulisse“[531])) des ersten Stabes gleitet. Bis auf die, allerdings wesentliche Anbringung eines „Läufers“ (curseur[532]), L in Fig. 59) durch *A. Mannheim* (gegen 1850), welcher zum Festhalten irgend eines Punkts einer Skala und zum Aufsuchen entsprechender Punkte auf parallelen Skalen[533]) dient, war damit in der Hauptsache die endgiltige Form erreicht[534]).

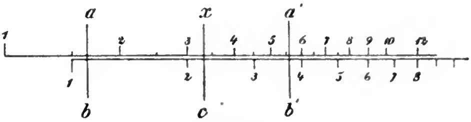


Fig. 60.

Sind zwei kongruente logarithmische Skalen gleichen Sinnes beliebig gegen einander verschoben und stehen an irgend einer Stelle (s. Fig. 60) die Zahlen a und b, an einer anderen die Zahlen a' und b' einander gegenüber, so ist immer $a : b = a' : b'$[535]), womit die Ausführung von Proportionsrechnungen, insbesondere von Multiplikation und Division[536]) und daraus zusammengesetzten Operationen[537]) gegeben ist. Da von den unend-

---

531) In der französischen Litteratur wird nicht selten coulisse statt réglette gebraucht, was „Lalanne“ p. 1 verwirft.

532) In der älteren französischen Litteratur bezeichnet curseur oft den mit 1 bezifferten Anfangspunkt der Skala des oberen Zungenrandes, vgl. „Lalanne“ (der dies tadelt), p. 7.

533) Mittelst einer zur Bewegungsrichtung senkrechten Marke (ligne de foi), nach einigen Wandlungen jetzt meist ein feiner Strich auf der Unterseite eines Glasplättchens in Metallfassung.

534) Im einzelnen bestehen grosse Verschiedenheiten in Bezug auf Anordnung und technische Durchbildung. Nicht abgeschlossene Entwicklung; der Kontinent, früher von England abhängig, seit Mitte des 19. Jahrhunderts selbständig vorgegangen (zuerst Frankreich die Führung, dann Deutschland). Skalen früher meist auf Buchsbaumholz, jetzt weissem Zellhorn (1886 von *Dennert & Pape*-Altona eingeführt).

535) Hierauf beruhen die meisten Anwendungen des Rechenschiebers und der ihm verwandten Instrumente. — Die beiden Skalen bilden gleichsam in jeder gegenseitigen Stellung eine fertige Zahlentafel, welche (vermutlich schon *Wingate* bekannte) Eigenschaft von *J. H. Lambert,* Beschreibung und Gebrauch der logarithmischen Rechenstäbe ..., Augsburg 1761, 2. (?) Aufl. 1772, sehr betont wird.

536) Um $x = \frac{a}{b}c$ zu finden, bringt man die Stelle a der einen Skala (s. Fig. 60) zur Deckung mit der Stelle b der andern, sucht auf der letzteren Skala die Stelle c und liest ihr gegenüber auf der ersten Skala ab. Bei veränderlichem c, aber festem a und b behalten die Skalen ihre gegenseitige Lage. Im Fall der Multiplikation oder Division ist $b = 1$ bezw. $c = 1$ (oder $a = 1$) zu nehmen.

537) Nötigenfalls den Faktor 1 im Zähler bezw. Nenner genügend oft hinzufügend stellt man die Form:

lich vielen kongruenten Abschnitten der logarithmischen Skalen (s. Anm. 389) blos eine beschränkte Anzahl, oft nur je einer, benützt werden kann, so findet man (ähnlich wie bei den Logarithmentafeln) von dem Ergebnis im allgemeinen zunächst nur die Ziffern, während die Stellung des Dezimalkommas für sich ermittelt werden muss [538]).

Beim gewöhnlichen Rechenschieber tragen der obere und der untere Rand des Stabes und der Zunge auf der Vorderseite [539]) je eine logarithmische Skala, die man in der Reihenfolge von oben nach unten (s. Fig. 59) mit *A, B, C, D* zu bezeichnen pflegt [540]); *A* geht von 1 bis 100, [541]) *D* von 1 bis 10; *B* stimmt mit *A*, *C* mit *D* überein [542]). Zur Ausführung der oben genannten Rechnungen können entweder die benachbarten Skalen *A* und *B* benützt werden, oder *C* und *D*. [543])

Weil die Längeneinheit von *D* doppelt so gross als die von *A* ist, findet man senkrecht über einer jeden Zahl von *D* ihr Quadrat

---

$$x = \frac{a}{b}\,\frac{a_1}{b_1}\,\frac{a_2}{b_2}\cdots\frac{a_n}{b_n}\,c$$

her, bringt nun dem Punkt a der 1. Skala den Punkt b der 2. Skala gegenüber, sucht auf der 2. Skala den Punkt a_1, hält den gegenüber liegenden Punkt der 1. Skala fest (etwa mit der Marke eines Läufers), bringt ihm den Punkt b_1 der 2. Skala gegenüber u. s. w., und liest endlich dem Punkt c der 2. Skala gegenüber das Ergebnis ab.

538) Man denkt sich etwa bei jeder gegebenen Zahl das Komma vorläufig hinter die erste geltende Ziffer gesetzt („Normalwert" bei *Schneider,* „Nombre primordial" bei *de Perrodil* a. a. O.); die Stellung des Kommas im Ergebnis wollen manche durch rohe Schätzung seines Wertes bestimmen (s. z. B. *R. Land,* Centralblatt Bauverwaltung 13 (1893), p. 174 und „Hammer" p. 24), andere geben mehr oder weniger ausführliche Regeln, wobei sie entweder mit den Stellenanzahlen rechnen (z. B. *Lalanne, Sella, Esmarch*), oder mit den (um Eins kleineren) Kennziffern der zu den Zahlen gehörigen Logarithmen (z. B. *v. Ott, de Perrodil*).

539) In der Regel befinden sich auf der Rückseite der Zunge logarithmische Skalen für sin und tg und eine gleichmässig geteilte Skala, die mit der Skala *D* zusammen die Logarithmen beliebiger Zahlen auf drei Stellen und umgekehrt finden lässt.

540) So schon *Bevan* a. a. O.

541) Die rechte Hälfte wird zwar gewöhnlich als Wiederholung der linken aufgefasst, also wieder von 1 bis 10 beziffert.

542) Letzteres wenigstens bei den französischen und deutschen Rechenschiebern mit Läufer („règle Mannheim" der Firma *Tavernier-Gravet*-Paris). Bei denen ohne Läufer („règle ordinaire" der genannten Firma) und den englischen ist auch die Skala *C* kongruent mit *A*; die Zahl der mit einer einzigen Schieberstellung lösbaren Aufgaben ist dann geringer, trotzdem halten manche noch an der alten Form fest, vgl. *E. Erskine Scott,* A short table of logarithms and anti-logarithms to ten places of decimals . . ., London 1897, p. XV.

543) So etwas genauer, aber weniger bequem.

auf A und umgekehrt unten die Quadratwurzeln der oben aufgesuchten Zahlen. Wenn man gleichzeitig mehr als zwei der vier Skalen verwendet, lassen sich die Werte von Ausdrücken der Form $\frac{a}{b}c^2$,[544]) $\frac{a}{b}\sqrt{c}$ und ähnlichen[545]) je mit einer Schieberstellung bestimmen.

Werden zwei kongruente logarithmische Skalen *ungleichen* Sinnes einander beliebig gegenüber gestellt (s. Fig. 61), so erhält man statt der früheren Eigenschaft die andere, dass je zwei gegenüber stehende Zahlen ein konstantes Produkt liefern, $ab = a'b'$.[546])

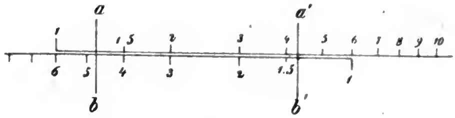


Fig. 61.

Quadratische und kubische Gleichungen lassen sich mit Hülfe des gewöhnlichen Rechenschiebers auflösen[547]).

---

544) Auf diese Form werden durch einen kleinen Kunstgriff die Inhalte und die Gewichte von Cylindern, Kugeln u. s. w. gebracht, mittelst Hülfszahlen, wie solche in den Anleitungen und auf der Rückseite der Stäbe zusammengestellt sind.

545) Allgemeine Form $\frac{\alpha}{\beta}\gamma$, wo beliebig viele der Zahlen α, β, γ entweder gleich den Quadraten, oder gleich den Quadratwurzeln gegebener Zahlen sein können.

546) Die Zunge des Rechenschiebers wird herausgezogen und verkehrt (rechts mit links vertauscht) in die Nut geschoben (nach *Farey* a. a. O. p. 542 zuerst von *W. Pearson,* Nichelson's Journal 1 (1797), p. 450 vorgeschlagen); bei der neueren Form die Skalen A und $\mathfrak{A}$ dann getrennt und der Zusammenhang durch den Läufer herzustellen. Es giebt englische Schieber mit verkehrter Skala (bei aufrechten Ziffern) auf der Zunge (nach *Farey* a. a. O. zuerst von *Wollaston* eingerichtet, vgl. noch *Bevan,* p. 98); eine solche Skala als dritte auf der Zunge des Rechenschiebers von *A. Beghin* [553]), so u. a. Berechnung von Produkten aus drei Faktoren auf einmal möglich (wie mit dem „logarithmischen Kubizierungsmaasstab" von *M. Schinzel,* D. R. P. Nr. 26842 von 1883, wo zwei Skalen von der Mitte der Zunge nach beiden Seiten gehen, Gedanke allgemeiner schon bei *Vogler* [583])). Anwendungen (auch von A mit $\mathfrak{O}$ u. s. w.) grösstenteils naheliegend. Erwähnt sei die (näherungsweise) Bestimmung von $x = \sqrt[3]{ab^2}$: Man bringt den Punkt a von A gegenüber dem Punkte b von $\mathfrak{O}$ und sucht die Stelle, an der gleiche Zahlen (x) einander gegenüber stehen (s. auch Anm. 547). Übrigens können dritte Wurzeln direkt bestimmt werden durch Gegenüberstellung von D mit einer weiteren Skala E, deren Längeneinheit 1/3 so gross ist; schon von *Bevan* a. a. O. p. 53 ein Schieber mit E („line of triple radius") auf besonderer Zunge beschrieben, vgl. *Dyck*'s Katalog, Nachtrag, p. 1, Nr. 4b (in England ähnliche Schieber noch im Handel).

547) Durch ein indirektes Verfahren. *E. Bour,* Par. C. R. 44 (1857), p. 22, stellt die Form $y^3 \pm y^2 = y^2(y \pm 1) = a$ her; ihr entsprechend hat man bei

Die Berechnung von $\sqrt{a^2 \pm b^2}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})^2$ und verwandten Ausdrücken mit einer Schieberstellung hat *W. Ritter* gezeigt[548]).

Die gangbarste Grösse des Rechenschiebers, rund 26 cm Gesamtlänge, bei der die Längeneinheit der am meisten gebrauchten Skalen A und B 12,5 cm beträgt, gewährt eine durchschnittliche Genauigkeit[549]) von etwa 0,2 %. Der Wunsch, ohne wesentliche Einbusse an Schnelligkeit und Leichtigkeit der Handhabung[550]) eine grössere Genauigkeit zu erzielen[551]), hat eine Menge neuer Konstruktionen veranlasst. Sollten die Skalen geradlinig bleiben (s. dagegen Nr. **51**), so konnte man zunächst, wie *A. Mannheim*[552]) und *A. Beghin*[553]), die ganze Länge des Stabes (statt der halben) zur Grundeinheit nehmen, oder aber Skalen von beträchtlicher Länge in Stücke zerlegen und in letzterem Falle die seitherige Form des Rechenschiebers möglichst

---

verkehrt eingeschobener Zunge die 1 von $\mathfrak{D}$ unter die Stelle a von A zu bringen, die Zahlen von A in Gedanken um 1 zu vermindern bezw. zu vermehren und dann die Stelle zu suchen, an der auf jenen beiden Skalen sich gleiche Zahlen finden. Fall der quadratischen Gleichung von *Bour* nicht näher ausgeführt, dagegen bei „Favaro-Terrier" 2, p. 90 (mit A und $\mathfrak{B}$); damit verwandte Methode (mit A und B) von *W. Engeler* durch *E. Hammer* mitgeteilt, Zeitschr. Vermessungsw. 29 (1900), p. 495; verbesserte Regel von *H. Zimmermann*, ebenda 30 (1901), p. 58. Vgl. auch Nr. **52**, Anm. 585.

548) Schweiz. Bauzeitung 23 (1894), p. 37; zwei Ablesungen und eine Addition bezw. Subtraktion von 1 nötig.

549) Untersuchungen darüber liegen vor u. a. von *Redlich*, Zeitschr. Bauwesen (Erbkam) 9 (1859), p. 596 (wahrscheinlicher Fehler (I D 2, Nr. 8) proportional dem Ergebnis, bei den Rechnungsarten $\frac{a}{b}c$ und $\frac{a}{b}c^2$ zu 0,164 %, bei $\sqrt{a}$ und $\sqrt{\frac{a}{b}c^2}$ zu 0,097 % ermittelt); „Vogler" p. 71, 73 (jedes Produkt mit drei Stellen sicher zu erhalten bei Skalen von 69 cm Längeneinheit, in 999 unter 1000 Fällen bei 40 cm; graphische Darstellung der Schätzungsfehler am Rechenschieber, Vergleich mit graphischen Produktentafeln); *Jordan* a. a. O. p. 133 (Zusammenstellung von Versuchsergebnissen); „Hammer" p. 62.

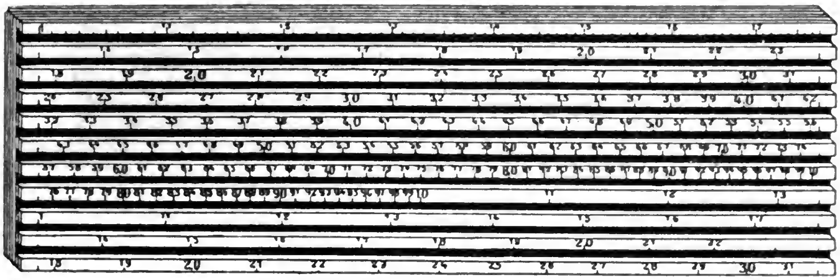
550) Lange Rechenschieber — 51 cm noch im Handel — unbequem und verhältnismässig teuer. *Lambert*[535]) liess vier Fuss lange Stäbe anfertigen, *Fr. Ruth* verwendet auf Karton gedruckte Skalen von 60 cm Länge (Einheit 30 cm), s. Dingler's polyt. J. 242 (1881), p. 149; *Dyck*'s Katalog, Nachtrag, p. 2, Nr. 4 d.

551) Scharfe und genaue Teilungen vorausgesetzt, in mässigen Grenzen auch beim gewöhnlichen Schieber möglich durch Anwendung einer Lupe, s. *Jordan*, Zeitschr. Vermessungsw. 21 (1892), p. 376; Handbuch der Vermessungskunde, 2, p. 134, Fig. 6, und durch die von *O. Seyffert*, Centralblatt Bauverwaltung 8 (1888), p. 548 vorgeschlagene nonienartige Ablesung.

552) „Règle à échelles repliées", s. etwa *Sella* a. a. O. p. 100.

553) Règle à calcul modèle spécial . . ., Paris 1898, 2ème éd. 1902.

beibehalten, wie *E. Péraux*[554]) und *Ch. Lallemand*[555]), oder die Stücken reihenweise in einer Ebene anordnen, wie *I. D. Everett*[556]), *Hannyngton*[557]), s. Fig. 62, *Scherer*[558]), *R. Proell*[559]), oder nach den Mantellinien



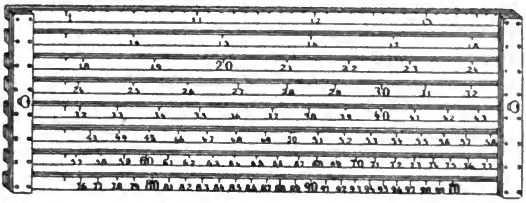


Fig. 62. Rechenschieber von *Hannyngton.*

554) S. *H. van Hyfte,* Instruction sur la règle à calcul à deux réglettes de E. Péraux . . . , Paris 1885 [erste Mitteilung von *Benoît,* Soc. d'encouragem. Bull. (2) 10 (1863), p. 513]. Zwei Schieber in zwei Kulissen (auf derselben Seite des Stabes), auf deren Ränder die beiden Stücke einer Skala von der doppelten Länge des Stabes, einmal wiederholt, verteilt sind.

555) S. Zeitschr. Vermessungsw. 29 (1900), p. 233. Ebenfalls Längeneinheit (1 m) gleich doppelter Stablänge, aber nur ein Schieber; wahrscheinlicher Fehler 0,01 %, Maximalfehler 0,04 %, deshalb statt 4-stelliger Logarithmentafeln zu gebrauchen.

556) „Universal-Proportion-Table", s. Phil. Mag. (4) 32 (1866), p. 350; „Favaro-Terrier" 2, p. 95 (mit Abb.); *Dyck*'s Katalog, p. 141, Nr. 8. Stab und Zunge des Rechenschiebers je durch eine auf Karton gedruckte Tafel mit einer Anzahl paralleler Streifen ersetzt (die Streifen der beweglichen Tafel greifen in Zwischenräume der festen).

557) S. *Dyck*'s Katalog, p. 141, Nr. 8. Ebenfalls Rost-förmig, s. Fig. 62, Ausführung in Holz. Drei Grössen im Handel, mit bezw. 0,75 m; 1,5 m; 3 m Längeneinheit.

558) „Logarithmisch-graphische Rechentafel", Kassel 1893; s. auch *Dyck*'s Katalog, p. 140, Nr. 5; *Jordan* a. a. O. Skalen von 1,5 m Längeneinheit in zehn Stücke zerlegt, Grundplatte aus Blech, Schieber, der lose aufgelegt wird, aus Glimmer; Genauigkeit im Mittel 0,02 %. Ähnlich bereits (Schieber auf Glas) ein Apparat von *M. Kloth,* D. R. P. Nr. 26695 v. 1883, s. Dingler's polyt. J. 260 (1886), p. 170, sowie von *J. Billeter,* D. R. P. Nr. 43463 v. 1887, s. Zeitschr. Vermessungsw. 20 (1891), p. 346.

559) „Rechentafel System Proell", Berlin 1901, s. auch Zeitschr. Math.

eines Cylinders, wie *Everett*[560]), *Mannheim*[561]) und *E. Thacher*[562]), dessen „Cylindrical slide rule" Fig. 63 an Genauigkeit fast einer 5-stelligen Logarithmentafel gleichkommt[563]).

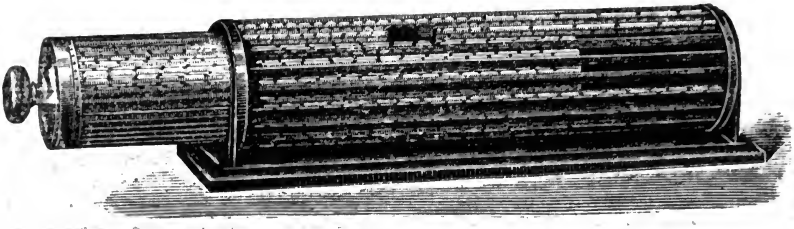


Fig. 63. *Thacher*'s Cylindrical slide rule.

51. Gekrümmte Rechenschieber (Rechenscheiben u. s. w.). Sehr bald nach Erfindung der logarithmischen Skalen durch *Gunter* hat *W. Oughtred* solche auf konzentrischen Kreisen angebracht[564]), *Milburne* Spiralform gewählt[565]). Wir können zwei Entwicklungsreihen unterscheiden. Zur einen gehören Apparate, die sich noch auf der Stufe des Gunterstabes befinden, weil sie jede Skala nur einmal und eine dem Zirkel entsprechende Vorrichtung zum Weitertragen beliebiger Skalenabschnitte haben[566]). Zu nennen sind der cercle à calcul von *E. M. Boucher*[567]) in Form einer Uhr,

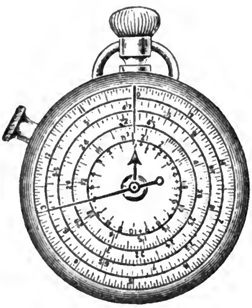


Fig. 64.

Phys. 46 (1901), p. 218. Grosse Raumersparnis durch Einführung der „Einspunkte" (nur bei Multiplikation von Nutzen, Proportionsrechnungen erschwert), leichte Bestimmung von Quadrat- und Kubikwurzeln (Gedanke schon bei *Everett*[556])). Untertafel auf Karton, Obertafel (nach Drehung um zwei Rechte die vorige deckend) auf Glimmer gedruckt, Längeneinheit 1,2 m.

560) Litteratur s. Anm. 556. Nur Modell.

561) In Metall ausgeführt (seit 1873, Holzmodell 1871). Hohlcylinder mit fünf Schlitzen parallel zur Axe, in welchem ein Vollcylinder sich drehen und verschieben lässt, Skalen (in 10 Stücke geteilt) 1,25 m lang, vgl. „Vogler", p. 50.

562) Patentiert 1881, s. Thacher's Calculating instrument . . ., New York 1884; *Hammer*, Zeitschr. Vermessungsw. 20 (1891), p. 438 (mittlerer Fehler (I D 2, Nr. 8) aus Versuchen zu 0,0031 % gefunden); *Dyck*'s Katalog, p. 140, Nr. 6. Gedanke wie bei *Everett* u. *Mannheim*; durchbrochener Hohlcylinder aus Metall mit 20 Rippen, Skalen auf Pergament gedruckt, Längeneinheit 9,144 m. Auch von *Billeter* Apparate in Walzenform, D. R. P. Nr. 71715 von 1893.

563) Wegen der in unübersehbarer Zahl, namentlich in England, vorhandenen Rechenschieber für die besonderen Zwecke der Chemiker, Ingenieure, Geodäten u. s. w. sei verwiesen auf „Lalanne", p. 113, 115; „Culmann", p. 67 ff.; *Favaro*; *v. Scheve*, Artillerist Rechenschieber, Berlin 1881 (Sonderabdruck aus

Fig. 64, und der „Rechenknecht“ von *G. Herrmann* [568]), beide mit verschiedenen Skalen auf konzentrischen Kreisen in einer Ebene, mit einem festen und einem beweglichen Zeiger versehen, sowie *G. Fuller*'s

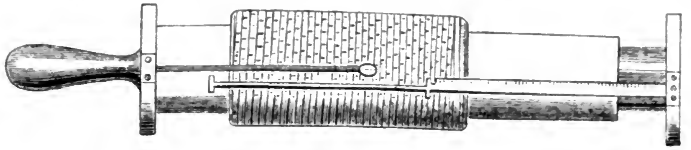


Fig. 65. *G. Fuller*'s Spiral slide rule.

Spiralrechenschieber, Fig. 65, mit einer Schraubenlinie als Träger einer logarithmischen Skala [569]). In der andern Reihe sehen wir zahlreiche Apparate mit gegen einander drehbaren kreisförmigen Skalen, die entweder auf der ebenen Fläche einer Scheibe und einer sie umschliessenden oder in sie eingelassenen Ringfläche untergebracht sind, wie schon bei *I. M. Biler*'s Instrument [570]), dem „cadran logarithmique“

Arch. Artill. Ingen. Off. 88); *Dyck*'s Katalog, p. 144, Nr. 15, 16—20, Nachtrag, p. 2, Nr. 10b; *Jordan*; Katalog der Firma *W. F. Stanley*-London.

564) Nach *Hutton* [529]) 1627. *Favaro* führt a. a. O (s. die Litteratur zu Nr. **50**) an: *Oughtred,* The circles of proportion and the horizontal instrument, London 1632, Oxford 1660; Description of the double horizontal dial, London 1636, Oxford 1652. — Die Vorteile leuchten ein: Füllt man einen Kreisumfang durch den (hier genügenden, weil in sich zurücklaufenden) Abschnitt 1—10 einer logarithmischen Skala der Zahlen aus (was allerdings nicht immer geschehen ist, vgl. *Biler* [570]) und *Gattey* [574])), so besteht dieselbe Genauigkeit, wie bei einem gewöhnlichen Rechenschieber von der 2π-fachen Länge des Durchmessers.

565) Nach *Hutton* [529]) gegen 1650. *Favaro* vermutet, dass *Milburne* eine Schraubenlinie benützte; eine Quelle wird nirgends angegeben.

566) Ausgangspunkt bei *Oughtred* selbst, welcher nach *Favaro* zwei um den gemeinsamen Mittelpunkt der Skalen drehbare Zeiger anwandte.

567) S. *J. Bertillon,* La Nature 6 (1878), p. 31; Dyck's Katalog, p. 142, Nr. 10. Bei der in Fig. 64 abgebildeten Konstruktion von *Stanley* ist für die vollen Umdrehungen des beweglichen Zeigers, d. h. für die Änderungen der Kennziffer ein besonderer Zeiger vorhanden, vgl. Anm. 572.

568) S. Zeitschr. Ver. deutscher Ing. 21 (1877), p. 455 und Abb. auf Taf. 23. Die hauptsächlich benützte Skala 45,5 cm lang, ausserdem Skalen für Quadrate, Kuben, sin, tg u. s. w. Über eine Rechenscheibe von *Herrmann* mit einer 5 m langen gebrochenen (auf 10 konzentrische Kreise verteilten) Skala s. „Vogler“ p. 50. — Neuere Konstruktion ist der cercle à calcul von *P. Weiss,* s. Par. C. R. 131 (1900), p. 1289 (einzige Skala etwa 50 cm lang).

569) Länge derselben bei der grösseren Form 12,7 m, einer kleineren rund 5 m, s. Engineering 27 (1879), p. 257; *Hammer,* Zeitschr. Vermessungsw. 20 (1891), p. 434; in Deutschland unter Nr. 5860 von 1878 patentiert. — Par. C. R. 45 (1858), p. 437 wird bereits eine hélice à calcul von *Bouché* erwähnt.

570) Neu erfundenes Instrumentum Mathematicum Universale, Jena 1696

von *A. S. Leblond*[571]), der Rechenscheibe von *E. Sonne*[572]), Fig. 66, und vielen anderen[573]), oder auf den krummen Flächen zweier cylindrischer

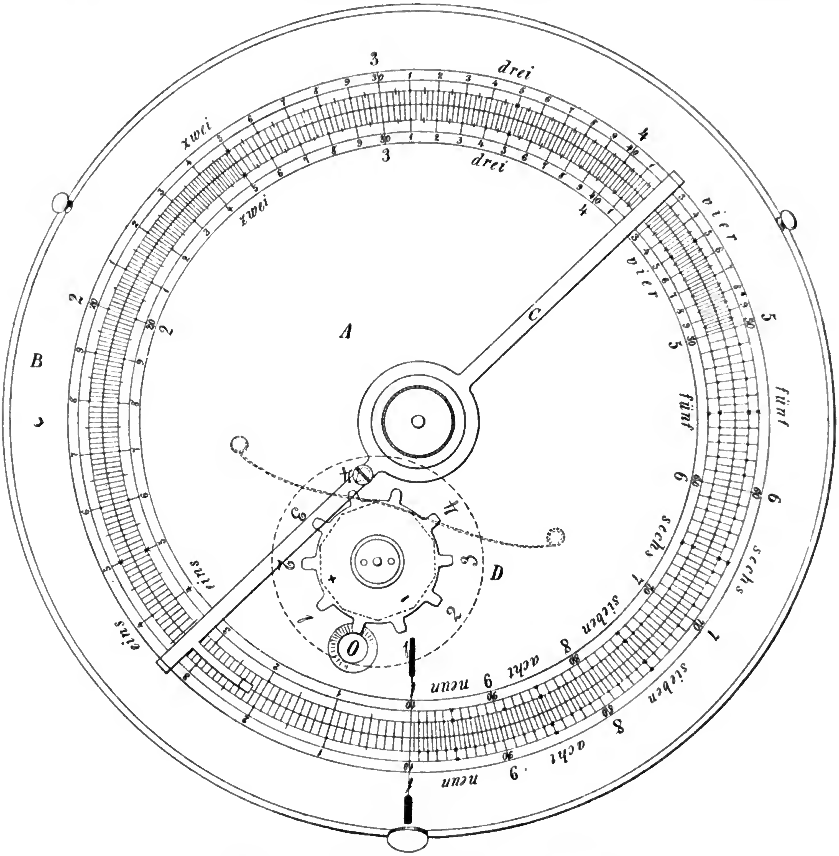


Fig. 66. Rechenscheibe von *Sonne.*

Beschreibung mit Abb. auch *Leupold,* Theatrum arithmetico-geometric., p. 77 und Taf. 13. Der Verbindung mit einem Winkeltransporteur zu Liebe ist Halbkreisform gewählt, die logarithmischen Skalen der Zahlen gehen von 1—100; ausserdem logarithmische Skalen der sin und tg. Beim Ablesen dient ein vom Mittelpunkt ausgehender Faden.

571) Cadrans logarithmiques, Paris an III = 1795 (nach *Lalanne,* a. a. O. p. IX).

572) Hannover Archit. Ingen. Ver. Zeitschr. 10 (1864), p. 452, mit Abb. auf Blatt 301; s. etwa noch Dyck's Katalog, p. 142, Nr. 12 u. p. 143, Nr. 13; *Jordan,* a. a. O. Hat einen (dem Läufer beim geradlinigen Schieber entsprechenden) Zeiger und Kennzifferzählwerk, *C* bezw. *D* in Fig. 66.

573) Genannt seien von den neueren die Rechenscheibe von *F. M. Clouth* (Anleitung zum Gebrauch der Rechenscheibe . . ., Hamburg 1872, s. auch Dyck's Katalog, Nachtrag, p. 3, Nr. 11 d) mit Lupe am Zeiger, der „Proportior“ von

Scheiben, die unabhängig von einander um ihre gemeinsame Axe gedreht werden können, wie bei den „boîtes à calcul“ von *Gattey*[574]),

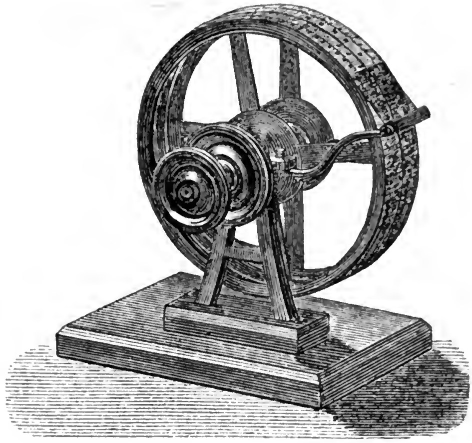


Fig. 67. Rechenrad von *Beyerlen*.

den Rechenkreisen von *R. Weber*[575]) und dem Rechenrad von *A. Beyerlen*[576]), Fig. 67[577]).

52. Verallgemeinerungen des Rechenschiebers. Ähnlich wie mit dem gewöhnlichen Rechenschieber Produkte und Quotienten,

---

W. Hart, s. Techniker 12 (1889/1890), p. 34, ebenfalls mit Zeiger und Mikroskop; *F. A. Meyer*'s Taschenschnellrechner, s. Mechaniker 5 (1897), mit einfachem Kennzifferzählwerk, die Rechenscheibe mit Glasläufer und Lupe von *E. Puller,* Zeitschr. Archit. Ingenieurw., Heft-Ausg. (2) 5 (1900), p. 203, Zeitschr. Vermessungsw. 30 (1901), p. 296. In München war 1893 eine Rechenscheibe von *A. Steinhauser* mit zu (logarithmischen?) Spiralen erweiterten Kreisen ausgestellt (vgl. Dyck's Katalog, Nachtrag, p. 3, Nr. 11c), bei der vier Stellen unmittelbar abgelesen werden konnten.

574) S. Société d'encouragem. Bull. 15 (1816), p. 49, 50. (*Gattey* hat auch die Scheibenform, 1798 als cadran logarithm. veröffentlicht, 1810 als arithmographe; nach *J. A. Borgnis,* Traité complet de mécanique appliquée aux arts, 8, Paris 1820, pl. 21, fig. 2 enthält jeder Kreisumfang zweimal die Skala 1—10).

575) Anleitung zum Gebrauche des Rechenkreises, Aschaffenburg 1872; Anleitung zum Gebrauche des Kubierungskreises, Leipzig 1875 (autographiert Aschaffenburg 1872), s. auch Dyck's Katalog, p. 142, Nr. 11; Nachtrag, p. 2, Nr. 11a.

576) D. R. P. 31889 von 1884, s. *Hammer,* Zeitschr. Vermessungsw. 15 (1886), p. 382; Dyck's Katalog, p. 143, Nr. 14; *Jordan,* a. a. O. Vorteile: Die linke Hand genügt zur Bedienung, der Rechner hat beim Ablesen die Ziffern aufrecht vor sich.

577) Ein schraubenförmig gewundener Rechenschieber scheint noch nicht ausgeführt worden zu sein, jedoch hat *Leibniz* an diese Form gedacht, s. die

können mit einem Rechenschieber, der ausser logarithmischen Skalen solche der Funktion log log x trägt, Potenzen und Wurzeln mit beliebigen Exponenten und Logarithmen zu beliebiger Basis bestimmt werden. Es haben *P. M. Roget*[578]), *Burdon*[579]), *F. Blanc*[580]) u. a. diesen Gedanken verwirklicht.

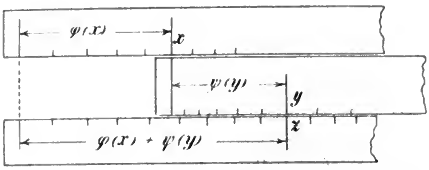


Fig. 68.

Die Anwendung allgemeinerer Skalen hat *P. de Saint-Robert* erörtert[581]). Lässt eine Gleichung $F(x, y, z) = 0$ sich auf die Form:

$$f(z) = \varphi(x) + \psi(y)$$

bringen[582]), so kann sie durch einen Rechenschieber mit den Skalen der Funktionen f, φ, ψ, von denen etwa die letzte auf der Zunge angebracht sei (s. Fig. 68), dargestellt werden. Wie *Ch. A. Vogler* gezeigt hat[583]), lassen sich drei Glieder auf einmal addieren, wenn

---

Mitteilung bei *Leupold*, a. a. O. p. 37 (Abdruck eines Anhangs zur Ausgabe der Theodicaea von 1726); dort ist zwar von gleichmässigen Teilungen die Rede, wofür *Leupold* p. 38 vorgeschlagen hat, logarithmische Skalen zu nehmen.

578) Lond. Trans. 1815 (read Nov. 1814), p. 9.

579) S. Par. C. R. 58 (1864), p. 573. (Indirektes) Verfahren zur Lösung eines Systems zweier Gleichungen $xy^m = a$, $xy^n = b$, wo m, n, a, b gegebene Konstanten, vgl. Anm. 585.

580) S. Dyck's Katalog, p. 145. „Doppellogarithm." Rechenschieber, auf den Rändern des Stabes logarithmische, auf denen der Zunge doppellogarithm. Skalen. Finden sich bei beliebiger Stellung der Zunge den Zahlen x, x_1 eines Stabrandes die Zahlen z, z_1 gegenüber, so ist $z^{x_1} = z_1^x$, insbesondere hat man für $x_1 = 1$, $z_1 = y$, $z = y^x$. Ausserdem zwei Teilungen auf der Zunge, welche die Werte $\frac{1}{2}(y^x \pm y^{-x})$, also für $y = e$ (Grundzahl der natürlichen Logarithmen, für die ein besonderer Strich vorhanden), die hyperbolischen Funktionen $\mathfrak{Cos}\, x$ und $\mathfrak{Sin}\, x$ liefern. — *H. Fürle* betrachtet[585]), p. 12 auch das Potenzieren und Radizieren bei umgekehrter logarithmischer Skala. — *W. Schweth* bringt die doppellogarithmischen Skalen noch auf dem gewöhnlichen Rechenschieber an, s. Zeitschr. Ver. deutscher Ing. 45 (1901), p. 567, 720.

581) Torino Acc. Sci. Memorie (2) 25 (1871), p. 53. Einige Beispiele durchgeführt.

582) Notwendige und ausreichende Bedingung s. Anm. 443. Ist dieselbe nicht erfüllt, so wird man sich vielleicht mit einer angenähert richtigen Darstellung begnügen; hiermit hat sich *A. Lafay*, Rev. d'Artillerie 58 (1901), p. 455 beschäftigt.

583) Zeitschr. Vermessungsw. 10 (1881), p. 257. Fall $u = xyz$ ausdrücklich erwähnt, für welchen zwei Zungen für nötig hielt z. B *F. A. Sheppard*, D. R. P. Nr. 7567 von 1878, s. Dyck's Katalog, p. 141, Nr. 7.

man auf der Zunge zwei Skalen von ungleichem Sinn anbringt, s. Fig. 69, und für $(2n+1)$ Summanden genügen n Zungen, die unabhängig von einander in parallelen Kulissen verschoben werden können. Durch Einführung binärer Skalen wird die Darstellung einer Funktion der Form:

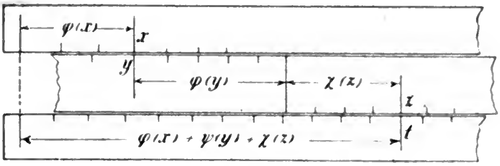


Fig. 69.

$$\varphi(x_1, x_2) + \psi(y_1, y_2) + \chi(z_1, z_2) + \cdots$$

durch einen Rechenschieber möglich[584]).

H. Fürle hat untersucht, welche Gleichungen durch Anwendung eines Rechenschiebers mit beliebigen Skalen gelöst werden können[585])[586]).

53. Stetige Rechenmaschinen für die gewöhnlichen arithmetischen Operationen. Will man auf logarithmische Skalen zu Gunsten

584) S. „d'Ocagne" p. 360, 361; Beispiele p. 362; „Soreau" p. 474.

585) Zur Theorie der Rechenschieber, Progr. 9. Realsch. Berlin 1899. Verallgemeinerung der Methoden von *Bour*[547]) und *Burdon*[579]). Ist die Skala der Funktion $\varphi(x)$ beliebig gegen die der Funktion $\psi(y)$ gelegt und stehen an irgend zwei Stellen die Zahlen x, y, bezw. x_1, y_1 einander gegenüber, so ist $\varphi(x) \mp \varphi(x_1) = \psi(y) \mp \psi(y_1)$, (die unteren Zeichen gelten bei ungleich gerichteten Skalen). Betrachtet man in dieser Gleichung zwei der Grössen x, x_1, y, y_1 als gegeben und fügt man etwa die Bedingung hinzu, dass die beiden unbekannten Grössen eine konstante Summe oder Differenz geben, so lassen sich die Unbekannten (welche insbesondere gleich gesetzt werden können) durch gegenseitiges Verschieben der Skalen finden. *Fürle* beschreibt einen Rechenschieber, der neben den üblichen Skalen solche der Funktionen x, x^2, x^3, $\log\log x$ hat; ausser quadratischen und kubischen Gleichungen können damit solche 4. und 5. Grades, allgemeine trinomische und gewisse transcendente Gleichungen gelöst werden. — *I. Newton* hat einen logarithmischen Rechenschieber mit mehreren parallelen Zungen (oder auch drehbaren konzentrischen kreisförmigen Skalen) von gleichen Zwischenräumen zum Lösen von Gleichungen benützt, s. Opera omnia 4, Londini 1782, p. 520 (Auszug aus einem Brief von *Oldenburg* an *Leibniz* vom 24. Juni 1675). Nach Einstellung der Skalen bezw. auf a, b, c, . . . liest man an jeder durch einen gewissen festen Punkt gehenden Geraden bezw. die Werte ax, bx^2, cx^3, . . . ab und muss nun die Gerade drehen, bis jene Werte die vorgeschriebene Summe geben. Ähnlich ein Instrument von *L. Torres* zur Lösung sämtlicher trinomischer Gleichungen (zwei auch in der Querrichtung verschiebbare logarithmische Skalen), s. „d'Ocagne" p. 366, allgemeinere Auffassung von *d'Ocagne,* ebenda p. 364 (in zwei Richtungen verschiebbare beliebige Skalen).

586) Über Rechenschieber für komplexe Grössen s. *Mehmke,* Dyck's Katalog, Nachtrag, p. 21, Nr. 44 d.

gewöhnlicher verzichten, so können Proportionsrechnungen auch mit Apparaten ausgeführt werden, die durch Verkörperung der geraden Linien entstehen, welche bei den in Fig. 23—25, p. 1009, dargestellten Konstruktionen vorkommen[587]). Grössere Bedeutung haben Instrumente, welche die Schnelligkeit der logarithmischen Rechenschieber mit der Fähigkeit der eigentlichen Rechenmaschinen verbinden, Ausdrücke der Form:

$$ab \pm a_1 b_1 \pm a_2 b_2 \pm \cdots$$

zu bilden (vgl. Nr. **21**). Ein beachtenswerter Anfang ist mit *Ch. Hamann*'s „Proportional-Rechenscheibe“[588]) und dem „Proportional-Rechenschieber“ desselben Erfinders[589]), s. Fig. 70, gemacht, die auf der Verwendung scharfkantiger Rollen beruhen[590]).

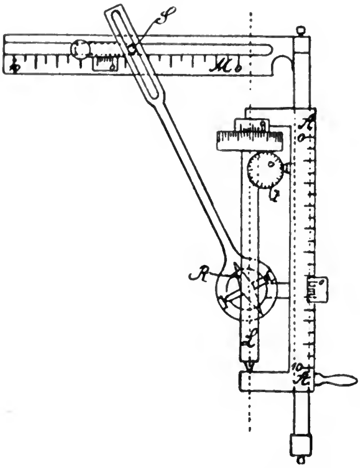


Fig. 70. Proportional-Rechenschieber von *Hamann*.

587) Als Beispiel sei der „Rechenschieber zum Multiplizieren und Dividieren“ von *G. Oldenburger,* Zeitschr. Instrumentenkunde 5 (1885), p. 163, genannt. Mit den logarithmischen Rechenschiebern können sich derartige Apparate in keiner Beziehung messen; beliebige Potenzen und Wurzeln könnten damit nach Anbringung logarithmischer Skalen bestimmt werden; sie lassen sich auch zu Elementen eigentlicher Rechenmaschinen umbilden, vgl. *Strehl* [154]). — Als wirkliche Multiplikationsmaschine darf die Vorrichtung von *C. Hart,* D. R. P. Nr. 57838 von 1891, bezeichnet werden (Anwendung eines schwingenden Hebels mit veränderlichem Verhältnis der Armlängen; drei gleichmässig geteilte konzentrische Kreise mit Zeigern, von welchen der dritte auf das Produkt der mit den ersten beiden eingestellten Zahlen weist).

588) S. *W. Semmler,* Zeitschr. Vermessungsw. 28 (1899), p. 304.

589) S. *H. Koller,* Zeitschr. Vermessungsw. 28 (1899), p. 660. Alle vier Spezies können in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden. Um z. B. das Produkt $a \cdot m$ zu einer etwa schon im Zählwerk Z stehenden Zahl zu addieren, hebt man den Cylinder L von der Rolle R ab, führt ihn auf die Ablesung 0 der Skala A zurück, stellt den Stift S auf die Zahl m der Skala M und führt den Cylinder L über die Rolle hinweg, bis der Faktor a auf der Skala A erscheint. Verallgemeinerung durch Anbringen beliebiger Skalen neben den gewöhnlichen.

590) *L. Lalanne* wollte Ausdrücke der Form:

$$(Pp + P'p' + \cdots) : (P + P' + \cdots)$$

mittelst einer (auch ausgeführten) „balance arithmétique“ berechnen, s. Par. C. R. 9 (1839), p. 319, 693, später Summen von Produkten aus zwei Faktoren (welche Produkte als Inhalte von Rechtecken aufgefasst werden) mittelst eines diesem Zweck angepassten Planimeters („Arithmoplanimètre“), s. Par. C. R. 9 (1839),

54. Mechanismen zur Auflösung von Gleichungen mit einer Unbekannten. Mechanismen zu erfinden, mit denen man die schwierigsten mathematischen Aufgaben mühelos bewältigen könnte, ist ein Ziel, das immer einen mächtigen Anreiz ausgeübt hat[591]). Was die

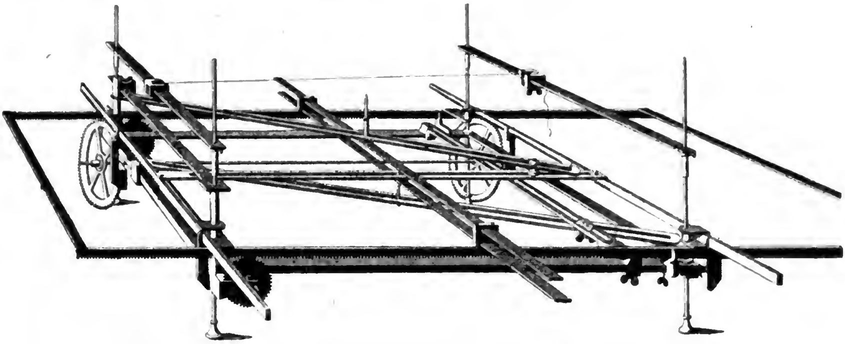


Fig. 71. *Rowning*'s Universal constructor of equations.

mechanische Lösung von Gleichungen betrifft, so ist auch auf diesem Gebiete viel erreicht worden, ohne dass (den Fall eines Systems linearer Gleichungen etwa ausgenommen) von einem dringenden Bedürfnis gesprochen werden könnte oder von den erdachten Instrumenten vorläufig ein besonderer Nutzen zu erwarten wäre.

Auf den in Nr. 38 vorgeführten Methoden zur graphischen Berechnung rationaler ganzer Funktionen beruhen die Mechanismen, welche 1771 *J. Rowning*[592]), s. Fig. 71, und 1877 *H. Wehage*[593]) angegeben haben.

---

p. 800; 10 (1840), p. 679; ausführlich Ann. ponts chaussées 1840², p. 3 und fig. 1—6, pl. 192 und 193.

591) Das Altertum kannte schon eine mechanische Lösung des Delischen Problems, also einer reinen kubischen Gleichung, welche *Plato* zugeschrieben wird (s. *Cantor*'s Vorles. üb. Gesch. d. Mathem. 2, 2. Aufl., p. 214, 219) und auf der Anwendung zweier beweglicher rechter Winkel beruht; sie kann mit Hülfe des *Lill*'schen Verfahrens (s. Nr. 38, p. 1011) leicht auf vollständige kubische Gleichungen ausgedehnt werden, vgl. *A. Adler,* Wien. Ber. 99² (1890), p. 859. Für beliebige algebraische Gleichungen hat *Lill* selbst einen Apparat zur leichteren Anwendung seiner Methode gegeben, s. Nouv. Ann. math. (2) 6 (1867), p. 361, *G. Arnoux* (der die Methode sich zuschreibt) optische und mechanische Hülfsmittel dazu vorgeschlagen, Ass. franç. 20², Marseille 1891, p. 241; Soc. Math. France Bull. 21 (1893), p. 87. Über einen auf dieselbe Methode gegründeten zwangläufigen Mechanismus s. *Wehage*[593]), Fig. 6.

592) Lond. Trans. 60 [for 1770], p. 240. Die Geraden der Fig. 27, p. 1011 sind durch Stäbe ersetzt, ein Stift im Punkte q_n (in Fig. 71 nach oben stehend) beschreibt (auf einem über das Ganze gelegten Brett) bei Verschiebung des Stabes Q die Kurve $z = f(x)$, wo $f(x) = 0$ die aufzulösende Gleichung. (Der in Fig. 71 zu sehende Faden giebt die x-Axe.) Für quadratische Gleichungen

Bei einigen andern, für welche *R. Skutsch*[594]) die Bezeichnung Gleichungswagen vorgeschlagen hat, dienen die Gleichgewichtslagen eines starren Körpers oder Körpersystems von ein- oder zweifacher Beweglichkeit, an dem Gewichte proportional den Koeffizienten der gegebenen Gleichung angreifen, zur Bestimmung der reellen Wurzeln der letzteren, und zwar wird eine einzige Wage benützt[595]) von *L. Lalanne*[596]) und *C. Exner*[597]), s. Fig. 72, ein System solcher[598]) von *C. V. Boys*[599]),

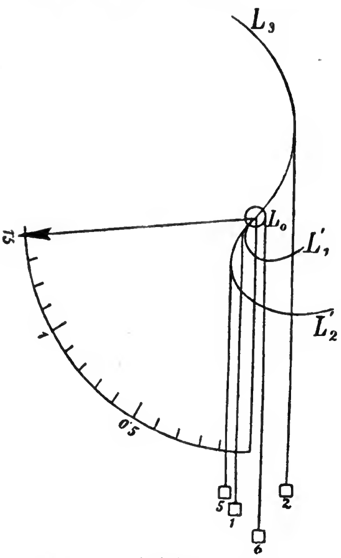


Fig. 72. Gleichungswage von *Exner*.

ausgeführt. Dieselbe Maschine abgebildet in der Encyclopédie méthodique 1, Paris 1784, pl. 3, ferner in *J. A. Borgnis,* Traité complet de mécanique appliquée aux arts 8, Paris 1820, pl. 23, fig. 1 (hier *Clairaut* zugeschrieben, keine Quellenangabe).

593) Zeitschr. Ver. deutscher Ing. 21 (1877), p. 105, Fig. 6—8 auf Textblatt 3, verschiedene Entwürfe.

594) Zeitschr. Math. Phys. 47 (1902), p. 85; dort p. 86 ff. zunächst allgemeinere Auffassung, als oben.

595) Die Hebelarme der Kräfte müssen dann proportional den verschiedenen Potenzen einer Verstellungsgrösse verändert werden können (durch Kurvenschablonen).

596) „Balance algébrique" (für Gleichungen der ersten sieben Grade ausgeführt), Form einer Balkenwage mit in senkrechter Richtung verstellbarem Drehpunkt, s. Par. C. R. 11 (1840), p. 859, 959; ferner *E. Collignon,* Traité de mécanique 2, Paris 1873, p. 347, 401 (p. 349 Ausdehnung auf imaginäre Wurzeln: Wagbalken zu einer Ebene erweitert). *Lalanne* hat den Gedanken von *Bérard* (Opuscules mathématiques, 1810) übernommen, aber zweckmässiger durchgeführt.

597) Über eine Maschine zur Auflösung höherer Gleichungen, Progr. Gymn. IX. Bezirk, Wien 1881. Fäden, an denen die Gewichte a_0, a_1, . . . hängen, über (fest verbundene und um ihre gemeinsame wagerechte Axe drehbare) Kurvenscheiben gelegt; Kurven so beschaffen, dass nach der Drehung x auf die n^{te} Scheibe das Drehmoment $a_n x^n$ ausgeübt wird. Fig. 72 entspricht dem Falle der Gleichung $6 - x - 5x^2 + 2x^3 = 0$ und der Wurzel $x = 1{,}5$.

598) Soviel Wagbalken, wie die Gleichung Glieder hat; an jedem greift ein den betreffenden Koeffizienten darstellendes Gewicht in konstanter Entfernung vom Drehpunkt an, jeder spätere Wagbalken stützt sich durch ein Zwischenglied auf den vorhergehenden in einem Punkt, dessen veränderlicher Abstand vom Drehpunkt der Unbekannten x entspricht.

599) Phil. Mag. (5) 21 (1886), p. 241. Parallele Wagbalken in einer senkrechten Ebene, positive Richtungen abwechselnd, s. die schematische Fig. 73. Auf den unteren Balken wird das Drehmoment $a + bx + cx^2 + \cdots$ ausgeübt,

s. Fig. 73, *J. Massau* [600]), *G. B. Grant* [601]) und *Skutsch* [602]). Integrierende Rollen (II A 2, E) verwenden *E. Stamm* [603]) und *F. Guarducci* [604]), Gelenkmechanismen u. a. *A. B. Kempe* [605]). Die höchsten Leistungen weisen

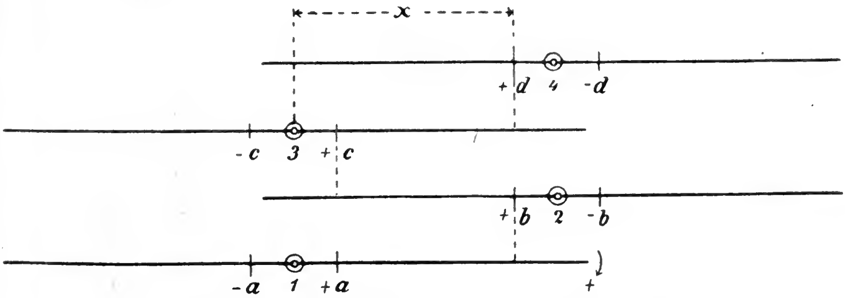


Fig. 73. Schema der Gleichungswage von *Boys*.

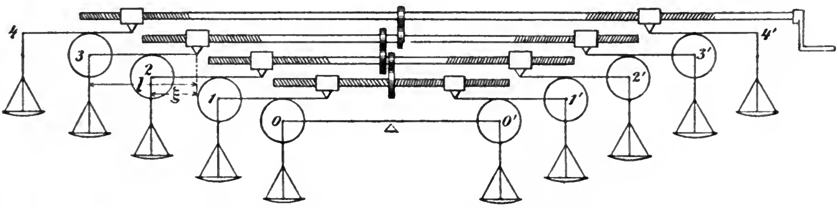


Fig. 74. Gleichungswage von *Grant*, abgeändert durch *Skutsch*.

wenn an den Balken der Reihe nach die Gewichte $a, b, c, \ldots$ je in der Entfernung 1 vom Drehpunkt hängen.

600) Note sur les intégraphes (Extrait Gand Ass. Ingén. Bull.), 1887, p. 30 und Fig. 26. Parallele Wagbalken in horizontaler Ebene, Drehpunkte in einer festen Geraden senkrecht zu denselben. Konstruktiv nicht durchgebildeter Entwurf.

601) Am. Machinist 19 (1896), p. 824. Ähnlich wie *Boys*, jedoch positive Richtungen der Wagbalken alle gleich, Anordnung deshalb weniger einfach.

602) Verschiedene Entwürfe; durch den [594]), p. 95, Fig. 6, s. oben Fig. 74 ($x = \xi : l$), sind konstruktive Mängel von *Grant*'s Wage beseitigt worden.

603) Essais sur l'automatique pure, Milano 1863; s. auch *Ch. Laboulaye*, Traité de cinématique . . ., 3^{e} éd., Paris 1878, p. 496. *Stamm* dringt tiefer in die Frage der Herstellung funktioneller Abhängigkeiten zwischen Drehungen durch kinematische Hülfsmittel ein. Die Addition geschieht durch Planetenräder. Im Grunde sind *Stamm*'s Maschinen zusammengesetzte Integratoren und es könnte jeder Integrator ähnlich benützt bezw. umgestaltet werden.

604) Rom. Lincei Mem. (4) 7 anno 1890 (1892), p. 217 und Taf. 3. *Stamm*'s Grundgedanke einfacher durchgeführt, Addition mittelst eines um Rollen geschlungenen Fadens.

605) Mess. of math. (2) 2 (1873), p. 51. Es wird $x = c \cos\theta$ gesetzt und die Gleichung auf die Form:

$$u = c_0 + c_1 \cos\theta + c_2 \cos 2\theta + \cdots + c_n \cos n\theta = 0$$

die „algebraischen Maschinen" von *L. Torres*[606]) auf, mit welchen reelle und imaginäre Wurzeln von Gleichungen jeder Form bestimmt werden können.

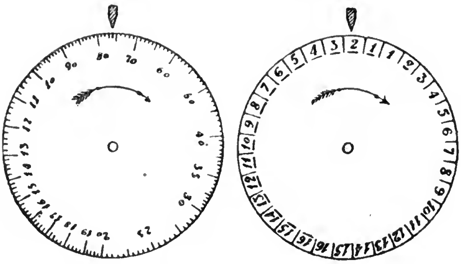


Fig. 75.

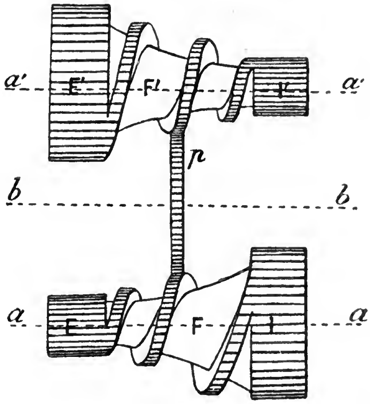


Fig. 76.

55. Mechanismen zur Auflösung von Gleichungssystemen. Für lineare Gleichungen mit beliebig vielen Unbekannten sind solche von *H. Wehage*[607]), Sir *W. Thomson* (jetzt Lord *Kelvin*)[608]) und *F. Guar-*

---

gebracht. Der Reihe nach durch Gelenke drehbar verbundene Glieder von den Längen c_0, c_1, c_2, ... werden durch geeignete Vorrichtungen so bewegt, dass jedes mit dem vorhergehenden denselben Winkel θ bildet, wie das Glied c_1 mit dem festgehaltenen c_0, also die Projektion des ganzen Linienzugs auf das erste Glied immer den betreffenden Wert von u liefert. Nach *H. S. Hele Shaw,* Second report on the development of graphic methods ... (Brit. Ass. Rep.), London 1892, p. 45, hat *B. Bashforth* 1822 schon ein Instrument für die etwas allgemeinere Funktion $\sum c_n \cos(n\theta + a_n)$ beschrieben. — *Saint-Loup* zeigt Par. C. R. 79 (1874), p. 1323 die Lösung kubischer Gleichungen mit Hülfe eines Gelenkvierecks, ebenso *A. Adler,* Graphische Auflösung der Gleichungen, Progr. Oberrealsch. Klagenfurt 1891, p. 24.

606) Memoria sobre las máquinas algébricas, Bilbao 1895, s. auch Par. C. R. 121 (1895), p. 245; Ass. franç. 24^2, Bordeaux 1895, p. 90; Par. C. R. 130 (1900), p. 472, 874; ferner *M. d'Ocagne,* Génie civil 27 (1895/96), p. 179. Diese Maschinen nehmen dieselbe Stellung ein, wie im graphischen Rechnen die logarithmographische Methode (Nr. **40**—**42**), da jede Veränderliche durch einen „Arithmophor", s. Fig. 75, dargestellt wird, dessen Drehungen den log der Werte der Veränderlichen proportional sind (die Scheibe rechts giebt die Kennziffern der Logarithmen). Alle Mechanismen zwangläufig und „ohne Ende". Wie bei jedem logarithmischen Verfahren Multiplikation und Potenzierung am leichtesten; zur Addition dient das Element Fig. 76, welches hier dieselbe Rolle spielt, wie im graphischen Rechnen die Additionskurve oder *Brauer*'s logarithmischer Zirkel (s. p. 1019). Die Maschine Fig. 77 ist für trinomische Gleichungen bestimmt.

607) Ver. Gewerbfleiss Verh. 57 (1878), p. 154 und Taf. 10. Beruht auf der graphischen Addition von Produkten mittelst eines Seilpolygons, s. Nr. **38**.

ducci[609]) erfunden worden. Die algebraischen Maschinen von *L. Torres*[606]) können auch für beliebige Systeme von Gleichungen höheren Grades eingerichtet werden.

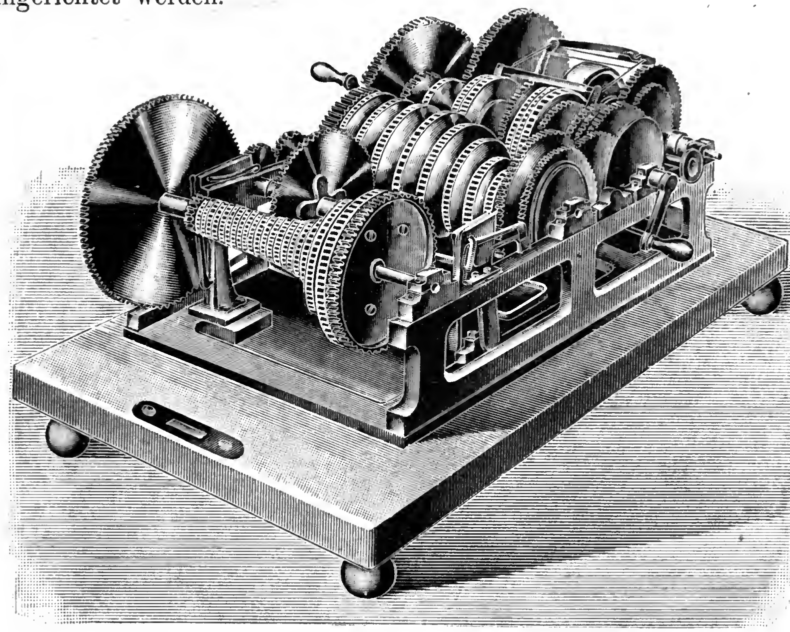


Fig. 77. Algebraische Maschine von *Torres.*

Die den n Gleichungen entsprechenden n Seilpolygone werden als bewegliche Stabverbindungen ausgeführt. Nur Entwurf.

608) Lond. R. Soc. Proc. 28 (1878), p. 111; *Thomson* and *Tait,* Natural Philosophy 1^1, 2[d] ed. Cambridge 1879, p. 482 (hier mit Abb. einer ausgeführten Maschine für $n = 6$). An n, um feste Axen drehbaren Stäben sind je n Rollen befestigt, über welche n, durch angenommene Gewichte gespannte Schnüre gehen. Die bei bestimmten Verkürzungen der Schnüre erfolgenden Drehungen der Stäbe liefern die Wurzeln.

609) Zwei Entwürfe, s. [604]), p. 219, 225 und Taf. 1, 2. Der erste Apparat, mit $(n + 1)$ Reihen von Scheiben und integrierenden Rollen, führt die bei algebraischer Behandlung nötigen Eliminationen mechanisch aus. Der andere mit dem von Lord *Kelvin* verwandt, nur sind die Unbekannten durch die (bei ungeänderter Lage der Stäbe) in den Schnüren vorhandenen Spannungen dargestellt (Grundgedanke ähnlich dem von *Veltmann*[612])). — Die Apparate von *H. Helberger* zur mechanischen Berechnung elektrischer Leitungsnetze, D. R. P. Nr. 68918 (Klasse 21) von 1892, mit sich kreuzenden gespannten Schnüren, an welche (unter Beachtung des Durchhangs) Gewichte gehängt werden, lassen sich auch für obigen Zweck verwenden, vgl. *Schütz,* Dyck's Katalog, Nachtrag, p. 122, Nr. 298 b.

VI. Physikalische Methoden.

56. Hydrostatische Auflösung von Gleichungen und Systemen solcher. Reduzierte kubische und andere trinomische Gleichungen

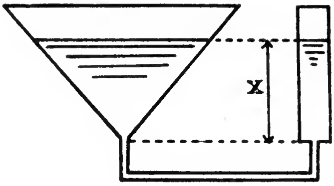


Fig. 78.

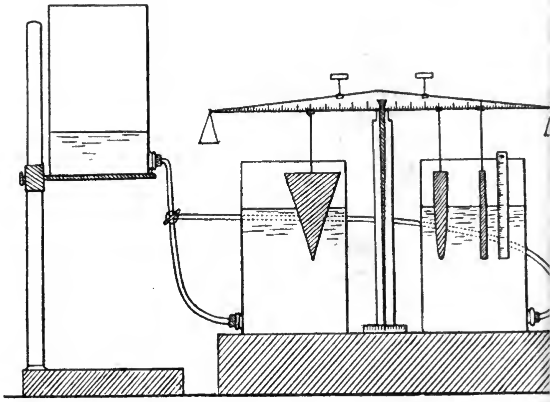


Fig. 79.

lassen sich nach *Demanet*[610]) durch Eingiessen bestimmter Flüssigkeitsmengen in zwei kommunizierende Gefässe von bestimmter Gestalt, s. Fig. 78, auflösen. Auch für Gleichungen der Form:

$$px^n + p_1 x^{n_1} + \cdots = A$$

mit beliebig vielen Gliedern brauchbar ist die hydrostatische Gleichungswage von *G. Meslin*[611]), Fig. 79. *W. Veltmann* löst[612]) ein

---

610) Mathesis (2) 8 (1898), p. 81. Durch Einsetzen von $z = x\sqrt{p}$ wird die Gleichung $z^3 + pz = q$ auf die Form $x^3 + x = c$ gebracht. Der Hohlcylinder Fig. 78 hat den Querschnitt 1, der Hohlkegel solche Gestalt, dass der Inhalt $= h^3$. Wird die Flüssigkeitsmenge c eingebracht, so ist die Höhe x, auf welche sich die Flüssigkeit stellt, eine Wurzel der Gleichung. Im Falle $x^3 - x = c$ muss in den Hohlkegel ein Vollcylinder gestellt werden. Ausdehnung auf beliebige trinomische Gleichungen deshalb leicht, weil solche nach Nr. **36** auf die Form $x^m \pm x^n = c$ gebracht werden können; bei Gleichungen mit mehr als einem Parameter umständlich.

611) Par. C. R. 130 (1900), p. 888; J. de phys. (3) 9 (1900), p. 339. An den Wagbalken werden einerseits im Abstand 1 vom Drehpunkt das Gewicht A, andererseits in den Abständen $p, p_1, \ldots$ vom Drehpunkt Körper von solcher Gestalt angehängt, dass beim Eintauchen in eine Flüssigkeit um die Tiefe x die verdrängten Rauminhalte bezw. $x^n, \ldots$ proportional sind. Man findet eine Wurzel, indem man Flüssigkeit einströmen lässt, bis Gleichgewicht hergestellt ist. Tritt nach weiterem Steigen der Flüssigkeit wieder Gleichgewicht ein, so ergiebt sich eine zweite Wurzel u. s. w. Als Körper für x^n dient ein Drehungskörper, dessen Meridian die Gleichung $y^2 = cx^{n-1}$ hat, also für $n = 1, 2, 3$ ein Cylinder, Paraboloid, Kegel. Wie *Skutsch*[594]), p. 92 bemerkt, kann das Paraboloid durch

System linearer Gleichungen mittelst ebenso vieler Balkenwagen auf, wobei zur Verwirklichung der Bedingung, dass jede Unbekannte in allen Gleichungen denselben Wert haben muss, die Gewichte durch Flüssigkeitsmengen in kommunizierenden Gefässen dargestellt werden.

57. Elektrische Auflösung von Gleichungen. Wie mit Hülfe der Elektrizität sämtliche Wurzeln einer algebraischen Gleichung beliebigen Grades mit reellen Koeffizienten bestimmt werden können, hat *F. Lucas* gezeigt[613]).

C. Anhang.

58. Proben. Man sucht sich beim Zahlenrechnen gegen Fehler u. a.[614]) durch Proben zu schützen, mögen diese nun in einer Umkehrung oder einer Wiederholung der Rechnung mit anderer Anordnung, anderen Formeln oder anderen Hülfsmitteln bestehen, oder in der Untersuchung, ob gewisse im voraus bekannte Beziehungen zwischen den durch die Rechnung erhaltenen Grössen erfüllt sind, oder in sogenannten Restproben, welch' letztere wir allein ins Auge

---

einen ebenflächigen Keil mit wagrechter unten liegender Schneide ersetzt werden, ebenso Cylinder und Kegel durch Prisma und Pyramide, sodass man bei kubischen Gleichungen mit ebenflächigen Körpern auskommt. *A. Emch,* der Am. Math. Monthly 8 (1901), p. 58 dieselbe Methode beschreibt, spricht p. 12 von der Bestimmung n^{ter} Wurzeln durch die Zeit, welche zur Entleerung eines Gefässes geeigneter Form durch eine kleine Öffnung im Boden erforderlich ist.

612) Zeitschr. Instrumentenkunde 4 (1884), p. 338, s. auch Dyck's Katalog, p. 155, Nr. 40.

613) Par. C. R. 106 (1888), p. 645 (vorausgehende Mitteilungen p. 195, 268, 587). $F(z) = 0$ sei die gegebene Gleichung vom Grade n; $x_1, x_2, \ldots$ seien $(n+1)$ willkürliche reelle und verschiedene Grössen, $f(z) = (z - x_1)(z - x_2)\ldots(z - x_{n+1})$; es wird $F(z) : f(z)$ in Partialbrüche $\sum \mu : (z - x)$ zerlegt. Lässt man in die komplexe Zahlenebene in den Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ der x-Axe Elektrizitätsmengen proportional den Grössen μ ein- (bezw. bei negativem μ aus-)strömen, so sind die Knotenpunkte der Linien gleichen Potentials die gesuchten Wurzelpunkte der Gleichung. Die nötigen Kurven kann man entweder galvanometrisch nach *Kirchhoff* bestimmen, oder von der Elektrizität selbst zeichnen lassen (elektrochemische Methode von *Guébhard*). A. a. O. p. 1072 wird wegen leichterer Ausführung des Versuchs für $f(z)$ ein Polynom $(n+2)^{\text{ten}}$ Grades angenommen, ferner wird Par. C. R. 111 (1890), p. 965 die entsprechende elektromagnetische Methode angegeben (hier die gesuchten Wurzelpunkte die neutralen Punkte eines elektromagnetischen Feldes, wobei die Kraftlinien mit Eisenfeilspänen hergestellt werden können).

614) S. auch die Bemerkungen „Lüroth" p. 3 unten, ferner § 10, p. 19 (Prüfung numerischer Tafeln).

fassen wollen. Im Falle eines Produktes $ab = c$ z. B. muss, wenn α, β, γ beziehentlich die kleinsten Reste bezeichnen, welche bei der Division von a, b, c durch eine beliebig gewählte Zahl N bleiben, γ gleich dem kleinsten Reste sein, der sich bei der Division von $\alpha\beta$ durch N ergiebt. Am leichtesten anzuwenden ist die, $N = 9$ entsprechende „Neunerprobe“[615]), welche aus Indien stammt und im Mittelalter viel angewendet[616]), im 19. Jahrhundert öfters wieder ans Licht gezogen und sogar als neue Erfindung ausgegeben worden ist. Ihren Gebrauch bei abgekürzter Multiplikation hat *A. Cauchy*[617]) gezeigt, den auch anderer Restproben beim Dividieren, Potenzieren und Wurzelausziehen *Krönig*[618]), bei verschiedenen zusammengesetzten Rechnungen *H. Anton*[619]). Volle Sicherheit gewährt natürlich keine Restprobe[620]), am wenigsten die mit Neun[621]), der die noch verhältnismässig leicht ausführbare Elfer- und Hunderteinerprobe überlegen sind[622]); in Vorschlag und zur Anwendung gebracht hat

---

615) Um den kleinsten Rest der Division einer Zahl a durch 9 zu erhalten, bildet man (unter Weglassung jeder etwa vorkommenden Ziffer 9) die Summe der Ziffern, aus denen a besteht, und wenn diese „Quersumme“ grösser als 9 ist, aus ihren Ziffern wieder die Quersumme u. s. f., bis eine Zahl kleiner als 9 sich ergiebt („reduzierte Quersumme“, s. *Vermung*[621])).

616) S. etwa *Cantor*, Vorles. üb. Gesch. d. Mathem. **1**, p. 571 u. Register; **2**, p. 9 u. Register.

617) Par. C. R. **11** (1840), p. 789, 847. *Cauchy* wendet die Neunerprobe in der Weise an, dass er die Rechnung ein zweites Mal so durchführt, als ob die Ziffern der vorkommenden Zahlen nicht Einheiten verschiedener Ordnungen, sondern derselben Ordnung bezeichneten.

618) Über Mittel zur Vermeidung und Auffindung von Rechenfehlern, Progr. Realsch. Berlin 1855. Auch abgekürzte Division. Proben mit 9, 11, 101.

619) Arch. Math. Phys. **49** (1869), p. 241. Anwendung der Restproben auf Kettenbrüche, Permutations- und Kombinationszahlen, Produkte von Wurzelfaktoren und Partialbrüche. Proben mit 9, 13, 101.

620) Je grösser N, desto grösser die Sicherheit der darauf gegründeten Proben. Nach *Krönig*[618]) bleibt, wenn die Proben mit 11, 37, 101 stimmen, unter rund 41 000 falschen Ergebnissen durchschnittlich ein einziges unentdeckt.

621) Weglassen der Ziffer 0 oder 9, Verwechslung von 0 mit 9 und Vertauschung zweier Ziffern bleiben unentdeckt. Die Vertauschung von Ziffern kommt besonders leicht beim Lesen von Zahlen auf deutsche Art vor, weshalb schon, z. B. von *W. Förster* in dem Vorwort zu *F. Vermung*, Die reduzierten Quersummen, Eberswalde 1886, den deutschen Rechnern empfohlen worden ist, die Zehner stets vor den Einern auszusprechen. Über die Tragweite der Neunerprobe bei Kenntnis der subjektiven Genauigkeit des Rechners s. *F. Hofmann*, Zeitschr. Math. Phys. **34** (1889), p. 116.

622) Ist in einer Rechnung nur eine Ziffer falsch, so weist die 11er-Probe den Fehler jedesmal nach; die 101er-Probe bietet nach *Krönig*[618]) noch 9mal so

man auch die Proben mit 998[623]), 49[624]) und einigen anderen Zahlen[625]).

59. Gemischte Methoden. Durch zweckmässige Verbindung zweier oder mehrerer Hülfsmittel, von denen eines auch im gewöhnlichen schulmässigen Rechnen bestehen kann, lassen sich oft grosse Vorteile erreichen. Die denkbaren und auch die wirklich vorkommenden Fälle sind so mannigfaltig, dass hier nur einige beispielshalber angeführt werden können. Wenige Rechnungen giebt es, bei denen sich der logarithmische Rechenschieber nicht nützlich zu machen vermöchte, sei es dass man bei einer längeren, auf gewöhnliche Weise ausgeführten Division die einzelnen Ziffern des Quotienten mit ihm bestimmt[626]), oder beim Rechnen mit Logarithmen- und sonstigen Tafeln die Interpolationen mit ihm bewerkstelligt[627]), oder beim Dividieren mit einer Rechenmaschine, wenn dieselbe keine Ziffer des Quotienten mehr liefern kann, mit dem Rechenschieber einige hinzufügt u. s. w. Giebt eine Logarithmentafel oder ein Rechenschieber ein Produkt zweier Faktoren mit n Ziffern, aber die letzte unsicher, so kann man diese durch Multiplikation der Endziffern der Faktoren im Kopfe bestimmen[628]). Können mit einer Produktentafel, einer

grosse Sicherheit. Für beide Proben giebt *Krönig*[618]), p. 20—64 Hülfstafeln. — Die 11er-Probe benützte nach *Cantor* 1, p. 722 schon *Alkarchî* um d. J. 1000.

623) *T. M. Perwuschin* (Первушинъ) bei der Zerlegung sehr grosser Zahlen in Faktoren, s. *A. Wassilieff*, Am. Math. Soc. Papers 1 (New York 1896), p. 277. Nach *Krönig*[618]) ist es übrigens bei Rechnungen, in denen Divisionen vorkommen, unzweckmässig, für N eine zusammengesetzte Zahl zu nehmen.

624) *A. D. Romanoff* in einem Schriftchen über praktisches Rechnen (Пріемы практическаго элементарнаго исчисленія по сокращенію и упрощенію выкладокъ при производствѣ умноженія и дѣленія большихъ чиселъ . . .), St. Petersburg 1901.

625) *Anton*[619]) schlägt für den seltenen Fall, dass die Probe mit 11 nicht anwendbar sei, die mit 13 vor. Im Mittelalter wurden, unzweckmässig genug, die Siebener-, Achter- und sogar Sechser-Probe angewendet, s. *Cantor* 1, p. 759; 2, p. 9, 402.

626) Die Stellung der Zunge bleibt während der ganzen Rechnung dieselbe (der Divisor wird auf der oberen Zungenteilung aufgesucht und unter die 1 der oberen Stabteilung geschoben). Auch beim Dividieren mit einer Rechenmaschine vorteilhaft.

627) In der Regel aus verschiedenen Gründen zweckmässiger, als die Anwendung besonderer Hülfstafeln (Nr. **32**). Vgl. „Hammer“, p. 36.

628) *C. J. Hill* hat J. f. Math. 70 (1869), p. 282 gezeigt, wie mit geeigneten Tafeln der Indices (s. I C 1, Nr. 4) die letzten Ziffern von Produkten, Potenzen u. s. w. gefunden werden können (ähnlich wie die ersten Ziffern mit Logarithmen), welche Tafeln man deshalb beim Rechnen mit grossen Zahlen zur Ergänzung der Logarithmentafeln gebrauchen kann.

Rechenmaschine oder einem sonstigen Hülfsmittel nur Produkte m-ziffriger Zahlen mit n-ziffrigen genau gefunden werden, so wird man grössere Faktoren in Abschnitte von m bezw. n Ziffern zerlegen, jeden Abschnitt des einen Faktors mit jedem des andern multiplizieren und die richtig unter einander geschriebenen Teilprodukte addieren[629]).

60. Vorbereitung der Formeln und der Rechnung. Zur logarithmischen Berechnung eignen sich vorzugsweise Ausdrücke der Form:

$$\frac{a^m a_1^{m_1} (\varphi(\alpha))^p \cdots}{b^n b_1^{n_1} (\psi(\beta))^q \cdots},$$

wo φ, $\psi, \ldots$ Funktionen bedeuten, deren Logarithmen tabuliert sind; dagegen ist bei solchen der Form:

$$ab \pm a_1 b_1 \pm \cdots \quad \text{oder allgemeiner} \quad (ab \pm a_1 b_1 \pm \cdots) : c$$

die Ausrechnung mit einer Rechenmaschine am bequemsten (vgl. Nr. **21**). Man suchte früher allen Formeln, um sie der logarithmischen Rechnung anzupassen, die erste Gestalt zu geben[630]). Nachdem aber die Rechenmaschinen grössere Verbreitung gewonnen haben, ist es nicht mehr ungewöhnlich, dass die Maschinenrechnung und damit die zweite Form bevorzugt wird[631]). Eine Umgestaltung der

---

629) Vgl. bezüglich der Ausführung mit Logarithmen etwa *J. C. Houzeau,* Brux. Bull. (2) 40 (1875), p. 74 („multiplication mixte", s. dort auch die „multiplication sommaire", ferner die „division mixte", bei welcher der Quotient mit Logarithmen in einzelnen Teilen bestimmt wird), mit dem Rechenschieber *Esmarch* a. a. O. (s. Litt. zu Nr. **50**), p. 121; *van Hyfte* [554]), p. 46; ferner über die Verbindung logarithmischer Rechnung mit Reihenentwicklung, z. B. beim Ausziehen höherer Wurzeln, *Houzeau* a. a. O., „Lüroth", p. 162.

630) Beispiele in Menge kommen namentlich in der ebenen und sphärischen Trigonometrie vor. — Dass man übrigens hierin zu weit gehen kann und es oft nur Täuschung ist, die transformierten Formeln seien leichter zu berechnen, hat *J. Hoüel* ausgeführt, Sur la généralisation successive de l'idée de quantité . . ., Paris 1883 [Extrait Bordeaux Mém. (2) 5 (1882)], p. 61 ff.

631) Neuerdings besonders in der Geodäsie, s. etwa *G. Höckner,* Über die Einschaltung von Punkten in ein durch Koordinaten gegebenes trigonometrisches Netz mit ausgiebiger Verwendung einer Rechenmaschine, Leipzig 1891; *C. Runge,* Zeitschr. Vermessungsw. 23 (1894), p. 206; *H. Sossna,* Zeitschr. Vermessungsw. 25 (1896), p. 361; *W. Jordan,* Opus Palatinum . . ., Hannover 1897, Vorwort; *F. Schuster,* Zeitschr. Vermessungsw. 29 (1900), p. 488 (Vergleich der erforderlichen Zeiten: in einem Beispiel Logarithmen 15 Stunden, Rechenmaschine 6 Stunden); *O. Koll,* Die Theorie der Beobachtungsfehler und die Methode der kleinsten Quadrate . . ., 2. Aufl., Berlin 1901; *F. G. Gauss,* Fünfstellige vollständige trigonometrische und polygonometrische Tafeln für Maschinenrechnen . . ., Halle 1901. *E. Hammer* hat, z. B. Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie . . ., 2. Aufl., Stuttgart 1897, p. 561; Zeitschr. Vermessungsw. 31 (1902),

ursprünglichen Formeln kann auch mit Rücksicht auf die Genauigkeit geboten erscheinen[632]). In mehr als einer Beziehung ist es von Wichtigkeit, auch bei kleineren Rechnungen ein zweckmässig angelegtes Schema[633]) zu Grunde zu legen.

---

p. 207, davor gewarnt, in den andern Fehler zu verfallen, nämlich die Vorzüge des Maschinenrechnens gegenüber dem logarithmischen zu überschätzen, wenigstens solange die eigentlichen Multiplikationsmaschinen (s. Nr. **18** u. **53**) nicht weiter ausgebildet und leichter zugänglich sind. *C. V. Boys,* The Nature 64 (1901), p. 268, verlangt allgemein, mit Logarithmen oder mit der Maschine zu rechnen, je nachdem die erste oder zweite der obigen Formen vorliegt bezw. leichter herzustellen ist, jedoch können die Verhältnisse gerade umgekehrt liegen, als es bei oberflächlicher Betrachtung den Anschein hat; vgl. *Hoüel,* Arch. Math. Phys. 3 (1872), p. 377.

632) S. z. B. „Lüroth", p. 66.

633) In der Astronomie (wo Jahrhunderte zurück zu verfolgen) und Geodäsie längst allgemein üblich (bei häufig wiederkehrenden Rechnungen als Vordruck). Viele Beispiele und praktische Winke in *W. Jordan,* Handbuch der Vermessungskunde, 2, 5. Aufl. Stuttgart 1897 (p. 244 allgemeine Bemerkungen über Rechenformulare), ferner in *Hammer*'s Lehrbuch der Trigonometrie (s. besonders p. 550, Anm. 9, 10); vgl. noch „Lüroth", p. 3, § 4. Die Verwendung eines Papierstreifens bei wiederholt zu addierenden Zahlen (vgl. *Hammer* p. 562, Anm. 80, „Lüroth" p. 6 unten) z. B. schon von *Sang*[253]), p. XIX empfohlen.

Nachträge.

p. 941, Anm. 5 und p. 942, Anm. 7. *J. B. J. Fourier,* Analyse des équations déterminées, ist unter dem Titel „Auflösung der bestimmten Gleichungen" ins Deutsche übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von *A. Loewy,* Ostwald's Klassiker, Nr. 127, Leipzig 1902. Es handelt sich um p. 182 unten und p. 180 dieser Ausgabe.

Zu II, p. 944 ff. Über einige numerische Tafeln anderen Charakters, die besonders bei den Astronomen Verwendung finden, verdankt der Verf. Herrn *H. Burkhardt* einige Mitteilungen. *G. W. Hill,* Amer. J. of math. 6 (1884), p. 130 giebt eine Tabelle der $\log \binom{\frac{s}{2}}{n}$ für $s = 1, 3, 5, 7, 9$ und $n = 1, 2, 3, \ldots, 30$.

Bei *H. Gyldén,* Recueil de Tables (Stockh. Astron. Jaktt. 1 (1880), XII u. 183 pp.) finden sich:

§ 2, p. 6 die Binomialkoeffizienten $B_m^n = \binom{n}{m}$ bis B_{21}^{40},

Tafel B, p. 101—104 ihre *Briggs*'schen Logarithmen, 7-stellig,
Tafel D, p. 108—109 dieselben anders geordnet (vgl. p. 13),
p. 13 die *Briggs*'schen Logarithmen der Potenzen von 4 bis 4^{20},
Tafel A, p. 99/100 die *Briggs*'schen Logarithmen von n^2, $2n(n+1)$, $(2n+1)(2n+2)$, n^{-1}, $n^{-1}(n+1)^{-1}$, $n(n+1)^{-1}$, $\frac{2n+1}{2n}$, $\frac{2n-1}{2n}$ u. a. $\left\{\text{zuletzt } \frac{(2n+1)(2n-3)}{16n(n-1)}\right\}$ 7-stellig bis $n = 40$,
Tafel C, p. 104—107: $\log\left\{\frac{2}{4^n} B_{n-m}^{2n}\right\}$ bis $n = 40$, $m = 39$,

p. 946, Anm. 29. *Cario-Schmidt,* Zahlenbuch, 2. Aufl. 1898.

p. 946, Anm. 35. *C. A. Müller,* Multiplikationstabellen, schwedische Ausgabe, Lund 1898.

p. 947, Anm. 38. *Riem,* Rechentabellen, 2. Aufl. München 1901 (auch französische Ausgabe mit dem Titel: Tables de Multiplication ..., 2e éd. Paris 1901).

p. 969, Anm. 145. S. auch die Kritik der „Brunsviga" von *H. Sossna,* Zeitschr. Vermessungsw. 30 (1901), p. 636.

p. 984, Anm. 216. Über die *Oughtred*'sche Regel für abgekürzte Multiplikation giebt eingehendere Auskunft *A. Loewy* in einer demnächst erscheinenden Note, Archiv Math. Phys. (3) 3. Hiernach findet sich diese Regel im ersten Kapitel von *Oughtred*'s Clavis mathematicae, Londini 1631 (das Werk Artis analyticae praxis ist nicht von *Oughtred*, sondern von *Th. Harriot*). Aus den von *Loewy* mitgeteilten Beispielen geht hervor, dass *Oughtred* die geordnete Multiplikation (Nr. **1**) nicht anwandte.

p. 987, Anm. 231. S. noch *F. Lefort,* Nouv. ann. (2) 6 (1867), p. 308.

p. 992, Anm. 263. Von *Rex,* Fünfstellige Logarithmentafeln, giebt es auch eine französische Ausgabe.

p. 993, Anm. 272. *Neperus,* Mirifici logarithmorum canonis constructio, ed. Lugduni 1620, ist in phototypischer Reproduktion erschienen, Paris 1895.

p. 996, Anm. 293. Zur Berechnung 9-stelliger Logarithmen s. auch *S. Gundelfinger,* J. f. Math. 124 (1902), p. 91.

p. 1013, Anm. 377. Zur graphischen Lösung kubischer Gleichungen mittelst einer festen Parabel und eines Kreises s. noch *J. Šolín,* Prag. Ber. 1876, p. 6 (vollständige kubische Gleichungen, Verfahren aus dem von *Lill* abgeleitet); zu derjenigen mittelst der geraden Linie und einer festen Kurve 3. Ordnung, insbesondere einer Cissoide: *Fr. London,* Zeitschr. Math. Phys. 41 (1896), p. 147; ferner zur mechanisch-graphischen Lösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen *C. Bartl,* Arch. Math. Phys. (2) 1 (1884), p. 1 (neben Lineal und Zirkel wird ein beweglicher rechter Winkel, ein „Axenkreuz" auf durchsichtigem Stoff, als Zeichenwerkzeug benützt).

p. 1024. Unter den Monographieen zur Lehre von den graphischen Tafeln ist noch zu nennen *H. Fürle,* Rechenblätter, Progr. 9. Realsch. Berlin 1902 („Rechenblatt" = graphische Tafel).

p. 1025, Anm. 412. Neuerdings hat *Fr. Schilling* für graphische Tafel den Ausdruck „Nomogramm" vorgeschlagen, der bereits von *M. d'Ocagne* (s. Par. Bull. soc. math. (2) 26 (1902), p. 68) in Gebrauch genommen worden ist.

p. 1025, Anm. 415. Über das Instrument von *Metius* s. auch *S. Haller,* Biblioth. math. (2) 13 (1899). p. 71.

p. 1029, Anm. 433. Durch räumliche Betrachtungen zeigt *Massau* [441]), p. 143, wie mit Hülfe derselben Tafel und eines beweglichen rechten Winkels biquadratische Gleichungen, in denen die dritte Potenz der Unbekannten fehlt, gelöst werden können.

p. 1032, Anm. 437. *Samuelli* zeigt a. a. O. p. 93, 95 auch die Lösung kubischer Gleichungen mit Hülfe des „rettangolo calcolatore“.

p. 1034, Anm. 448. S. auch „d'Ocagne“, p. 460 ff. (Darstellung quadratischer Gleichungen durch Scharen von Geraden und Kreisen).

p. 1040, Anm. 476. Wie eine beliebige Gleichung $F(x, y, z) = 0$ näherungsweise auf die Form $f_1(z)\varphi(x) + f_2(z)\psi(y) = f_3(z)$ gebracht und damit der Methode der fluchtrechten Punkte zugänglich gemacht werden kann, zeigt *A. Lafay,* Génie civil 40 (1901—1902), p. 298. In Betreff der durch drei projektive Skalen darstellbaren Gleichungen s. noch *d'Ocagne,* Par. Bull. soc. math. (2) 26 (1902), p. 71—74.

p. 1042, Schluss von Anm. 483. Zwei weitere Beispiele für die Anwendung der Methode der fluchtrechten Punkte bei empirischen Funktionen findet man in „Soreau“, p. 493 und 499.

p. 1043, Anm. 487. Den wesentlichen Unterschied zwischen verdichteten und nicht-verdichteten mehrfach kotierten Elementen hat *d'Ocagne* schärfer hervorgehoben, Par. Bull. soc. math. (2) 24 (1900), p. 288 ff.

p. 1055, Nr. **50**. Die im Text wiedergegebene, allgemein verbreitete Ansicht, dass der Läufer beim Rechenschieber von *Mannheim* herrühre, lässt sich nicht halten. *Mouzin* hat davon 1837, a. a. O. (s. die Litteratur auf p. 1053) p. 109, eine deutliche Beschreibung gegeben und als einem Zusatz gesprochen, der manchmal angewendet werde.

p. 1059. (Rechenschieber mit gebrochenen Skalen von *Everett* u. s. w.): *E. Leder* will, D. R. P. Nr. 104927 von 1897, die Stücke der Skala strahlenförmig anordnen, wobei eine bewegliche Skala sich um den Mittelpunkt drehen und ausziehen lassen soll.

p. 1061, Anm. 563. Rechenschieber für besondere Zwecke finden sich auch in den Katalogen der Firmen *Dennert & Pape*-Altona, und *A. Nestler*-Lahr (Baden).

Druckfehler:

p. 972, Z. 11 von unten. Lies 1898 statt 1889.

(Abgeschlossen im Juni 1902.)

I G 1. MATHEMATISCHE SPIELE

VON

W. AHRENS

IN MAGDEBURG.

Inhaltsübersicht.

Litteratur.

Sammelwerke.

Cl. G. Bachet de Méziriac, Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres, Lyon 1612; 2. Ausg. Paris 1624; 3., 4., 5. Ausg. von *A. Labosne,* Paris 1874, 1879, 1884. [Probl.]

J. Ozanam, Récréations mathématiques et physiques, Paris 1694.

Guyot, Récréations physiques et mathématiques, Paris 1769. Deutsche Übers. Augsburg 1772.

E. Lucas, Récréations mathématiques 1—4, Paris 1882—1894; 2. Aufl. von 1 und 2 1891 resp. 1896. [Récr.] (Die Citate beziehen sich stets auf die 2. Aufl. von 1 und 2.)

W. W. Rouse Ball, Mathematical Recreations and Problems, London, 1. u. 2. Aufl. 1893; 3. Aufl. 1896. Franz. Übers. v. *J. Fitz-Patrick,* Paris 1898.

E. Lucas, L'arithmétique amusante, Paris 1895.

H. Schubert, Zwölf Geduldspiele, Berlin 1895.

H. Schubert, Mathematische Mussestunden, Leipzig 1898; 2. Aufl. 1—3 1900.

W. Ahrens, Mathematische Unterhaltungen und Spiele, Leipzig 1901. [Unterh.]

Monographien.

C. A. Collini, Solution du problème du cavalier au jeu des échecs, Mannheim 1773.

H. C. v. Warnsdorf, Des Rösselsprungs einfachste und allgemeinste Lösung, Schmalkalden 1823.

T. Ciccolini, Del cavallo degli Scacchi, Paris 1836.
Edm. Slyvons (Pseudon. für *Edm. Solvyns*), Application de l'analyse aux sauts du cavalier du jeu des échecs, Brüssel 1856.
C. F. v. Jaenisch, Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs 1—3, Petersburg 1862/63. [Traité.]
L. Gros (anonym „un clerc de notaire Lyonnais"), Théorie du baguenodier, Lyon 1872.
P. Busschop, Recherches sur le jeu du solitaire, herausgeg. v. *J. Busschop,* Brügge 1879.
E.-M. Laquière, Géométrie de l'échiquier, Paris 1880 (S.-A. aus Par. Bull. soc. math. de France 8).
Paul de Hijo (Pseud. des Abbé *Jolivald*), Le problème du cavalier des échecs, Metz 1882.
E. Lucas, Jeux scientifiques etc., 6 Broschüren, Paris 1889.
A. Pein, Aufstellung von n Königinnen auf einem Schachbrette von n^2 Feldern etc. (von $n = 4$ bis $n = 10$), Leipzig 1889 (zugl. Beil. Progr. Bochum Realsch.).
Weitere Litteraturangaben bei *Lucas,* Récr. 1 und *Ahrens,* Unterh.; ferner, soweit das Schachspiel in Betracht kommt, bei *A. v. d. Linde,* Gesch. u. Litt. des Schachspiels 1—2, Berlin 1874.

---

1. Mathematische Fragen des praktischen Schachspiels. Die verschiedenen Ansätze, auf mathematischem Wege für jede Position im Schachspiel den absolut besten Zug zu ermitteln und damit also in letzter Instanz festzustellen, ob der Anziehende oder der Nachziehende stets den Sieg oder aber das „Remis" erzwingen kann, sind als misslungen zu bezeichnen; nichts weniger als einwandsfrei sind auch die Untersuchungen über den relativen Wert der verschiedenen Figuren des Spiels[1]). — Sonstige mathematische Fragen, zu denen das praktische Schachspiel Veranlassung gegeben hat, sind: 1) die Bewertung der Turnierleistungen nicht nach der blossen Zahl der gewonnenen, unentschiedenen und verlorenen Partien, sondern nach deren Qualitäten, welche wieder nach den auf Grund des Turnierausfalls zu ermittelnden Spielstärken der Teilnehmer zu berechnen sind[2]); 2) die Paarung der Turnierteilnehmer[3]) so, dass jeder mit jedem anderen

---

1) Z. B. die umfangreichen Untersuchungen von *Jaenisch,* Traité 3.

2) Den richtigen mathematischen Ansatz des noch unerledigten Problems gab *E. Landau,* Deutsches Wochenschach 11 (1895), p. 366. Die zahlreichen sonstigen Ausführungen hierüber, insbes. in Schachblättern deutscher und englischer Zunge (Deutsche Schachz., Wiener Schachz., Wochenschach, Brit. Chess. Magaz., Intern. Chess Magaz.) bewegen sich fast ausnahmslos in einem circulus vitiosus (s. darüber *E. Landau* l. c. und *W. Ahrens,* Wiener Schachz. 4 (1901), p. 181).

3) S. *R. Schurig,* Deutsche Schachz. 41 (1886), p. 134; 49 (1894), p. 33; *W. Ahrens,* Deutsche Schachz. 55 (1900), p. 98, 130 und 227. Bezüglich der analogen Paarung für ein Spiel zu dreien, etwa das Skatspiel, sei hier auf das bekannte *Kirkman*'sche Problem (I A 2, Nr. 10) verwiesen.

je eine Partie spielt und dabei jeder Teilnehmer nach Möglichkeit nicht nur gleich oft „Anzug“ und „Nachzug“ erhält, sondern dies womöglich auch stets von einer Partie zur anderen für ihn abwechselt[4]).

Unter den verschiedenen für die Schachbrettfelder gebräuchlichen Notationen verdient hier die zuerst von *Vandermonde*[5]) angewandte sogenannte „arithmetische“ erwähnt zu werden, welche unter 47 z. B. das Feld der 4ten Vertikalen (von links ab) und der 7ten Horizontalen (von unten ab) versteht; die noch jetzt in Deutschland, Österreich, Russland etc. gebräuchliche Bezeichnungsweise setzt an die Stelle der ersten Ziffer die Buchstaben $a-h$; in Frankreich, England und Amerika herrscht noch immer die sogenannte „beschreibende“ Notation.

2. **Achtdamenproblem.** Dieses zuerst für den Spezialfall des gewöhnlichen 64-feldrigen Schachbretts in der Berliner Schachzeit. 3 (1848), p. 363 gestellte und für diesen Fall zuerst von *Nauck*[6]) gelöste Problem verlangt, n Figuren von der Gangart einer Königin (Dame) so auf einem Brett von n^2 Feldern aufzustellen, dass keine die andere angreift, d. h. dass weder zwei Figuren derselben Zeile oder Kolonne angehören („Turmangriff“), noch auf derselben zu einer der Diagonalen parallelen, schrägen Linie liegen („Läuferangriff“). Kanonische Formen von Lösungen für beliebiges n gaben an *E. Pauls*[7]), *J. Franel*[8]) und für gewisse Fälle *E. Lucas*[9]). Wenn auch hiermit die Existenz von Lösungen für $n>3$ gesichert ist, so existiert ein allgemeines Verfahren zu einer erschöpfenden Angabe derselben bisher keineswegs. Man hat bislang nur die Lösungen für $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ bestimmt[9a]), und die zu ihrer Auffindung benutzten Methoden kommen mehr oder weniger auf „planmässiges Tatonnieren“ (*Gauss*, Brief vom

---

4) Von diesen beiden Nebenbedingungen ist nur die erste und diese vollkommen auch nur bei ungerader Teilnehmerzahl erfüllbar, während bezüglich der zweiten nur die Forderung nach einer Minimalzahl von Ausnahmefällen erhoben werden kann; s. *Ahrens* (Fussn. 3), p. 227.

5) *Ch. A. Vandermonde*, Paris, Hist. 1771, p. 566.

6) *Nauck*, Illustrierte Zeitung 21./9. 1850; s. auch Briefwechsel zwischen *C. F. Gauss* und *H. C. Schumacher*, herausgeg. von *C. F. Peters*, 6 (1850), p. 106 bis 121; *G. Bellavitis*, Atti dell' Istituto Veneto 6 (1861), p. 134; Lösungen von *Th. Parmentier* und *De la Noë* in Revue scientifique 1880, p. 948; *A. Pein* (s. Litt.-Verz.).

7) *E. Pauls*, Deutsche Schachz. 29 (1874), p. 129 und 257.

8) *J. Franel*, Interméd. des mathém. 1 (1894), p. 140.

9) *E. Lucas*, Récr. 1, p. 84 und 232.

9a) Für $n=4$ bis $n=10$ s. *Pein*, l. c. oder *Ahrens*, Unterh. Für $n=11$ s. *T. B. Sprague*, Edinb. Math. Soc. Proc. 17 (1899), p. 43. Für $n=12$ giebt es 1765 noch nicht publizierte verschiedene Lösungen (briefl. Mitt. des Herrn Dr. *A. Kopfermann*-Berlin).

27./9. 1850) hinaus, indem unter allen $\binom{n^2}{n}$ Stellungen der n Figuren entweder alle diejenigen, welche einen Turmangriff, oder aber alle diejenigen, welche einen Läuferangriff aufweisen, von vorneherein durch eine entsprechende Notation der Brettfelder ausgeschieden und dann unter den übrigen auch noch diejenigen ausgemerzt werden, welche nicht auch zugleich der anderen Bedingung genügen. Ein den Turmangriff von vorneherein durch entsprechende Anordnung ausschliessendes Verfahren rührt von *C. F. Gauss*[10]) her, ein analoges bezüglich des Läuferangriffs von *S. Günther*[11]), welch' letzteres Verfahren eine gewisse, jedoch nur äusserliche Ähnlichkeit mit dem für Entwickelung einer Determinante zeigt. Bezüglich der Anzahl der Lösungen ist ferner zu bemerken, dass bisher erst für 2 resp. 3 Damen auf n^2 Feldern die Anzahl der Stellungen ohne gegenseitigen Angriff bestimmt ist[12]). — Während im allgemeinen aus jeder Lösung sieben weitere durch Drehungen und Spiegelungen hervorgehen[13]), verdienen besonderes Interesse diejenigen, welche schon nach Drehung um π in sich übergehen („einfach-symmetrische") und daher nur drei weitere Lösungen liefern, sowie diejenigen, welche bei Drehungen stets in sich übergehen („doppelt-symmetrische") und daher nur eine weitere Lösung durch Spiegelung liefern. Bei den letzteren ordnen sich die besetzten Felder zu Quadrupeln an; sie bedingen daher: $n \equiv 0 \bmod 4$ resp. $n \equiv 1 \bmod 4$ (mit besetztem Mittelfeld), existieren aber für $n = 8, 9$ nicht und bedürfen für grösseres n jedenfalls noch eines Existenzbeweises. Man erhält aus einer doppelt-symmetrischen Lösung eine neue Lösung nicht nur durch Spiegelung der ganzen Konfiguration, sondern auch stets durch Spiegelung eines oder beliebig vieler Quadrupel für sich[14]). — Eine Übertragung des Problems auf den Raum scheint kein Interesse zu bieten[15]).

---

10) S. Fussn. 6, Brief v. 27./9. 1850.

11) *S. Günther*, Archiv Math. Phys. 56 (1874), p. 281; vervollkommnet durch *Glaisher*, Phil. Mag. 48 (1874), p. 457. — Man vgl. auch *J. Perott*, Bull. soc. math. de France 11 (1883), p. 173, wo für das entsprechende Läuferproblem, d. h. Aufstellung von Läufern ohne gegenseitigen Angriff, gewisse Anzahlen von Lösungen mittelst einer Rekursionsformel bestimmt sind.

12) Für 2 Damen s. *W. Mantel*, Assoc. franç. pour l'avanc. des sciences 12 (Rouen 1883), p. 171; für 3 Damen s. *E. Landau*, Naturw. Wochenschr. 11 (1896), p. 367.

13) Eine elegante Darstellung der acht zusammengehörigen Stellungen in einer von der Vandermonde'schen abweichenden Feldernotation gab *C. F. Gauss*, l. c. p. 121.

14) *Ahrens*, Unterh., p. 137.

15) *Ahrens*, Unterh., p. 127.

Ein Gegenstück zu dem obigen Problem bildet die Aufgabe, eine Minimalzahl von Damen so auf einem Brett aufzustellen, dass alle n^2 Felder desselben beherrscht sind. Dabei gilt entweder ein von einer Dame besetztes Feld auch eo ipso als beherrscht oder aber nicht, d. h. im letzteren Falle wird gegenseitiger Angriff der Damen verlangt[16]); im ersteren Falle wird eventuell die weitere Bedingung des Verbots gegenseitigen Angriffs[17]) gestellt. Die Minimalzahl ist nicht immer dieselbe für die verschiedenen Formen der Aufgabe; so sind für $n = 6$ bei Angriffsverbot sowohl wie bei Angriffsforderung 4 Damen erforderlich, während ohne diese Bedingungen schon 3 genügen. Die Untersuchungen sind nicht über die Bestimmung der Lösungen für spezielle Fälle hinausgekommen, wovon erwähnt sei, dass es für das gewöhnliche Schachbrett $91 \cdot 8$ Stellungen bei Angriffsverbot[18]), $34 \cdot 8 + 22 \cdot 4$ bei Angriffsforderung und $577 \cdot 8 + 61 \cdot 4$ ohne Nebenbedingungen[19]) giebt.

3. Rösselsprung. Dieses häufig nach *L. Euler* benannte, jedoch schon lange vor ihm bekannte[20]) Problem verlangt, mit dem Springer alle Felder eines quadratischen oder sonstwie geformten Brettes hinter einander je einmal zu passieren. Eine solche Bahn heisst ein „Rösselsprung" und zwar ein „geschlossener", wenn das erste und letzte Feld nur durch einen Springerzug getrennt sind, anderenfalls ein „offener" oder „ungeschlossener". Für ein quadratisches Brett von n^2 Feldern giebt es für $n > 4$ stets einen Rösselsprung[21]), jedoch ist derselbe mit Rücksicht darauf, dass der Springer bei jedem Zuge die Farbe des Feldes wechselt[22]), bei ungeradem n stets offen. Für die Bildung von Rösselsprüngen sind zahlreiche Methoden angegeben: *Euler* (s. Fussn. 21) füllt die Felder zunächst soweit, wie dies bei beliebigem

16) *M. Lange,* Schachz. 18 (1863), p. 206.

17) *E. Pauls,* Deutsche Schachz. 29 (1874), p. 266.

18) S. *Jaenisch,* Traité 3, p. 255.

19) Briefliche Mitteilungen des Herrn Prof. *K. v. Szily*-Budapest (noch unpubliziert).

20) S. *A. v. d. Linde*, Gesch. u. Litt. des Schachspiels 1, p. 294; 2, p. 101 ff., Berlin 1874.

21) Über die Unmöglichkeit eines Rösselsprungs für $n \leqq 4$, sowie über die Existenz von Rösselsprüngen auf rechteckigen Brettern s. *L. Euler,* Berlin, Hist. 15 (1759), p. 310, woselbst auch einige Rösselsprünge für andersgeformte (kreuzförmige) Bretter angegeben sind.

22) Mit Untersuchungen über die Springerbewegung im allgemeinen beschäftigt sich *Jaenisch,* Traité 1, dieselben sind in vereinfachter Form reproduziert und erweitert von *W. Ahrens,* Schachz. 56 (1901), p. 284; 57 (1902), p. 124, 155, 196; s. auch *C. Jordan,* Palermo, Rend. circ. matem. 2 (1888), p. 59.

Fortschreiten möglich ist, und sucht die dann noch unpassierten Felder successive anzugliedern durch passende Umformung der bereits zurückgelegten Wanderung; *Warnsdorf*[23]) gab die praktisch jedenfalls sehr brauchbare, wenn auch nicht unbedingt richtige[24]) Regel, bei jedem Zuge den Springer auf dasjenige Feld zu setzen, von welchem unter den zur Wahl stehenden am wenigsten Springerzüge nach anderen, noch unbesetzten Feldern möglich seien, wobei bei mehreren Feldern mit gleichen Minimalzahlen die Wahl beliebig sei; *Vandermonde*[25]) setzte Rösselsprünge aus 4 auseinander durch Drehungen hervorgehenden Ketten von je 16 Feldern zusammen; *Ciccolini*[26]) vereinigt zunächst die Felder jedes der 4 Quadranten des gewöhnlichen Schachbretts zu 4 Quadrupeln, von denen 2 Rhomben, 2 Quadrate bilden, schliesst dann je 4 gleichgelegene Quadrupel der verschiedenen Quadranten zu einer Kette zusammen und bildet dann mit diesen vier Ketten den schliesslichen Rösselsprung; die von *R. Moon*[27]) und *H. Delannoy*[28]) für ein beliebiges Quadrat verallgemeinerte Methode *Collini*'s[29]) teilt das Brett in ein inneres Quadrat von resp. 1, 4, 9, 16 Feldern und konzentrisch um dasselbe herumliegende Ränder von Zweifelderbreite; *Frost*[30]) bildet gleichfalls für jedes quadratische Brett Rösselsprünge, indem er von n zu $n+4$ fortschreitet dadurch, dass er ein hufeisenförmig gebogenes Brett an zwei Seiten des ursprünglichen ansetzt, wobei der Rösselsprung des angesetzten Gebietes sich wieder aus gewissen elementaren Diagrammen zusammensetzt. Die von *Volpicelli*[31]) und *Minding*[32]) unternommenen Versuche zu einer arithmetischen Behandlung des Problems mit dem Ziel, alle über-

---

23) *H. C. v. Warnsdorf* (s. Litt.-Verz.); s. auch v. dems. Schachz. 13 (1858), p. 489, sowie *C. Wenzelides,* Schachz. 4 (1849), p. 48.

24) S. *Jaenisch,* Traité 2, p. 277 ff.

25) *Ch. A. Vandermonde,* Paris, Hist. 1771, p. 566.

26) *T. Ciccolini* (s. Litt.-Verz.); s. auch *Thomas de Lavernède,* Nîmes, Hist. de l'acad. du Gard 1838/39, p. 151; *P. M. Roget* (Physiolog), Phil. Mag. 16 (1840), p. 305; *Th. Clausen,* Arch. Math. Phys. 21 (1853), p. 91; *C. de Polignac,* Paris, C. R. 52 (1861), p. 840 und Par. Bull. soc. math. de France 9 (1881), p. 17; *Laquière,* Par. Bull. soc. math. de France 8 (1880), p. 82 und 132.

27) *R. Moon,* Cambridge Math. J. 3 (1843), p. 233.

28) S. *E. Lucas,* „L'arithmétique amusante", Paris 1895, p. 254, sowie *Frolow,* „Les carrés magiques", Paris 1886.

29) *C. A. Collini* (s. Litt.-Verz.).

30) *A. H. Frost,* Quart. J. Math. 14 (1877), p. 123.

31) *P. Volpicelli,* Paris, C. R. 31 (1850), p. 314; 74 (1872), p. 1099; Rom, Lincei Atti 25 (1872), p. 87 und 364; 26 (1873), p. 49 und 241.

32) *F. Minding,* Petersburg, Bull. 6, abgedr. in J. f. Math. 44 (1852), p. 73 u. (in engl. Übers.) Cambr. and Dubl. Math. J. 7 (1852), p. 147.

haupt auf dem betreffenden Brett möglichen Rösselsprünge zu finden, beruhen nur auf einem systematischen Registrieren aller Springerwanderungen überhaupt und sind praktisch wertlos wegen der „Rechnungen von wahrhaft unermesslicher Länge“ (*Minding*, l. c.). Dabei stützt sich *Volpicelli* auf die Gleichung des Springerzuges $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = 5$ (x, y und x_1, y_1 die Koordinaten der beiden Felder des Springerzugs), während *Minding* das Feld ab durch $x^a y^b$ bezeichnet und nun die Gesamtheit der von hier aus durch einen Springerzug erreichbaren Felder durch den Ausdruck $U \cdot x^a y^b$ erhält, wo $U = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right)$ ist. — Nicht einmal die Anzahl aller auf dem gewöhnlichen Schachbrett möglichen Rösselsprünge ist bisher bekannt[32a]), dagegen bestimmte *C. Flye St.-Marie*[33]) diese Zahl für das halbe Schachbrett, d. h. das rechteckige Brett von 4×8 Feldern, woraufhin *Laquière*[34]) für das gewöhnliche Brett die Anzahl aller geschlossenen „zweiteiligen“, d. h. beide Hälften des Bretts nach einander durchlaufenden Rösselsprünge zu 31 054 144 bestimmte. — Besondere Beachtung haben diejenigen Rösselsprünge gefunden, welche bei Numerierung der Felder nach der Reihenfolge der Durchwanderung in allen Zeilen und Kolonnen die gleiche Summe (260) aufweisen[35]) („magische“[36]) Rösselsprünge).

4. Nonnen- oder Einsiedler-(Solitär-)spiel. Das Spiel, über dessen Ursprung Sicheres nicht bekannt ist, besteht aus einem Brett mit Löchern (Feldern) — 33 bei der in Deutschland üblichen Form in der Anordnung der Fig. 1 —, durch welche Holzpflöcke hindurchgesteckt werden können. Die einzige Spielregel besteht darin, dass

---

32a) Vgl. hier *F. Fitting*, Zeitschr. Math. Phys. 45 (1900), p. 137; Archiv Math. Phys. (3) 3 (1902), p. 136.

33) *C. Flye St.-Marie*, Par. Bull. soc. math. de France 5 (1876/77), p. 144.

34) *E.-M. Laquière*, Par. Bull. soc. math. de France 9 (1881), p. 11.

35) *W. Beverley*, Phil. Mag. (3) 23 (1848), p. 101 gab den ersten ungeschlossenen, *C. Wenzelides*, Schachz. 4 (1849), p. 41; 5 (1850), p. 212 und 230; 6 (1851), p. 286 die ersten geschlossenen Rösselsprünge dieser Art.

36) Statt dieser Bezeichnung gebraucht man für sie auch die Benennung „semi-magische“ Rösselsprünge, da sie hinter den magischen Quadraten (s. I C 1, Nr. 12) insofern zurückstehen, als die Diagonalen bei ihnen nicht jene konstante Ziffernsumme aufweisen, ein Ausfall, der anscheinend unvermeidlich ist. — Eine sorgfältige Zusammenstellung aller bisher bekannten magischen Rösselsprünge gab *Th. Parmentier* in Spezialpublikationen der Assoc. franç. pour l’avanc. des sciences, Congrès de Marseille (1891), Pau (1892) et Caen (1894) (im Buchh. nicht erhältlich). Zu den dort abgebildeten 110 magischen Rösselsprüngen ist bis 1901 nur noch einer hinzugekommen (briefl. Mitteil. des Herrn General *Parmentier*).

ein Pflock über einen[37]) benachbarten derselben Zeile oder Kolonne hinweg in ein leeres Loch setzt, wobei der übersprungene Pflock entfernt wird. Die Aufgabe des Spiels ist allgemein, eine vorgeschriebene Anfangsstellung mit m besetzten Löchern überzuführen in eine vorgeschriebene Endstellung mit n besetzten Löchern ($n < m$), natürlich in $m - n$ „Zügen"[38]). Insbesondere wird gewöhnlich gefordert, von dem vollbesetzten Brett mit nur einem vorgeschriebenen leeren Feld, dem „Anfangsfeld", alle Pflöcke successive zu entfernen bis auf einen, der in einem bestimmten Feld, dem „Schlussfeld", zurückbleiben soll. Für diese letztere Aufgabe untersuchte *M. Reiss*[39]) die Frage der Lösbarkeit für alle möglichen Kombinationen von Anfangs- und Schlussfeld und stellte zunächst die notwendigen Bedingungen fest, indem er die Lösung durch verschiedene Konzessionen erleichterte, u. a. z. B. durch die Annahme eines unbegrenzten Brettes, und nun nachwies, dass auch bei dieser erweiterten Spielregel gewisse Fälle unlösbar sind, von denen dies dann bei der beschränkteren Spielregel a fortiori gilt. Als notwendige Bedingung für die Lösbarkeit ergiebt sich für das Brett von 33 Löchern die, dass es möglich sein muss, von dem Anfangsfeld zu dem Schlussfeld zu gelangen durch successives Überspringen von je zwei Feldern derselben Zeile oder Kolonne. Dass diese Bedingung hier auch hinreichend ist, zeigte *Reiss* durch thatsächliche Angabe der betreffenden Lösungen. Während also auf dem abgebildeten Brett jedes Feld Anfangsfeld sein darf, gestattet die analoge Aufgabe auf dem in Frankreich üblichen Spielbrett nur 16 der 37 Felder als Anfangsfelder; auf einem daneben noch vorkommenden Brett von 41 Feldern sind sogar nur 12 Felder als Anfangsfelder brauchbar.

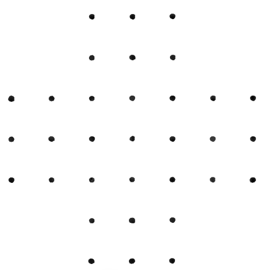


Fig. 1.

5. Boss-Puzzle oder Fünfzehnerspiel. Das Spiel, welches die Erfindung eines taubstummen Amerikaners (1878) sein soll[40]), verlangt,

---

37) Untersuchungen über ein Solitärspiel n^{ter} Ordnung, d. h. ein solches, bei dem immer über je n Felder hinweggesetzt wird, findet man bei *Hermary*, Assoc. franç. pour l'avanc. des sciences 8 (Montpellier 1879), p. 284.

38) Zahlreiche spezielle Aufgaben behandelt *P. Busschop* (s. Litt.-Verz.). — *G. Leibniz* (Brief an *P. R. de Montmort* vom 17./1. 1716) kehrte Regel und Aufgabe des Spiels um unter Vertauschung der Begriffe „leeres Feld" und „besetztes Feld".

39) *M. Reiss*, J. f. Math. 54 (1857), p. 344. Die *Reiss*'schen Untersuchungen wurden wesentlich vereinfacht durch *Hermary* (Fussn. 37).

40) Nach Angabe von *J. J. Sylvester*, s. *Lucas*, Récr. 1, p. 189.

15 in beliebiger Ordnung in einem quadratischen Kasten — mit einem leeren Felde rechts unten — liegende numerierte Steine durch Schieben in die „normale", durch die Nummern indizierte Stellung zu bringen. Die Zahl der Inversionen der Steine in der anfänglichen Stellung im Vergleich zu der normalen giebt offenbar die Entscheidung über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit einer solchen Aufgabe, indem bei gerader Inversionenzahl die normale Stellung, bei ungerader nur deren Spiegelbild erreichbar ist[41]). Da alle Züge reversibel sind, erledigt sich hiermit auch die Frage der Überführbarkeit zweier beliebiger Stellungen in einander. In dem Spielkasten dürfen gewisse Schranken zwischen den Feldern aufgeführt werden, ohne dass dadurch die Lösbarkeitsbedingungen irgendwie modifiziert würden[42]). Auch kompliziertere, selbst mehrfach zusammenhängende Spielbretter sind neben den quadratischen und rechteckigen von *Hermary* betrachtet[43]).

6. Josephsspiel. Eine legendenhafte Erzählung aus dem Leben des jüdischen Historikers Flavius Josephus hat zu einer Unterhaltung den Anlass gegeben, die bald, wie bei *Hier. Cardan*[44]), unter dem Namen „ludus Joseph" vorkommt, bald in unwesentlich veränderter Einkleidung als „Problem der 15 Christen und der 15 Türken" bezeichnet wird[45]). Die Fragestellung ist die folgende:

„Eine Anzahl n von Punkten ist der Reihe nach mit den Zahlen 1 bis n bezeichnet. Man zählt nun, bei 1 anfangend und über n hinaus cyklisch bei 1 fortfahrend, fortgesetzt bis d und scheidet jeden Punkt von der weiteren Abzählung aus, auf den einmal die Zahl d gefallen ist[46]). Welches ist die Nummer ν des Punktes, der als der

---

41) *W. Johnson,* Amer. J. of math. 2 (1879), p. 397; *W. E. Story,* ibid., p. 399; *P. G. Tait,* Edinb. Roy. Soc. Proc. 10 (1880), p. 664; s. auch *C. J. Malmsten,* Göteborg Handl. 1882, p. 75.

42) Bezüglich der Maximalanzahl dieser Schranken für ein rechteckiges Spielbrett s. *Ahrens,* Unterh., p. 364.

43) S. *Lucas,* Récr. 1, p. 213.

44) Practica Arithmeticae generalis 9 (Mediol. 1539), p. 117—128. Nach *M. Cantor,* Gesch. der Mathem. 2 (Aufl. 1), p. 332 findet sich das Spiel zuerst bei *Chuquet,* 1484. Bezüglich weiterer historischer Angaben s. *M. Cantor,* l. c. 2, p. 460, 700, 701, 770; 3, p. 14; *M. Curtze,* Bibl. mathem. (2) 8 (1894), p. 116; 9 (1895), p. 34; Zeitschr. Math. Phys. Supplementheft 40 (1895), p. 112; *M. Steinschneider,* Zeitschr. Math. Phys. Supplementheft 25 (1880), p. 123; *Ahrens,* Unterh., p. 286.

45) Das Prinzip der Aufgabe findet man auch bei anderen Unterhaltungsspielen, so z. B. in seiner einfachsten Form bei einem 1887 durch deutsches Reichspatent Nr. 43927 geschützten Spiel.

46) Über den Fall, dass nicht jedesmal gleichmässig bis d, sondern etwa zuerst bis d_1, dann bis d_2 etc. gezählt wird, s. *E. Busche,* Math. Ann. 47 (1896), p. 107.

e^{te} ausgeschieden wird? Dabei kann $0 < d \lesseqgtr n$ sein; e ist natürlich $\leqq n$ und positiv."

Für die Funktion $\nu(n, e, d)$ ergiebt sich die Rekursionsformel

$$\nu(n+1, e+1, d) = \nu(n, e, d) + d - \varepsilon(n+1),$$

wo ε eine positive ganze Zahl $\geqq 0$ und so gross zu nehmen ist, wie durch Rücksicht auf $0 < \nu(n+1, e+1, d) \leqq n+1$ geboten ist[47]). Diese induktiv gefundene Formel führte *Schubert* zu gewissen Reihen, welche er „Oberreihen" nannte[48]). Eine solche Reihe (a, s, q) in der verallgemeinerten Fassung *Busche*'s[49]) ist eine Reihe ganzer Zahlen mit dem Anfangsglied a, deren Glieder dadurch bestimmt sind, dass auf das Glied t der Reihe stets $(t+s)\cdot q$ folgt, wo bei gebrochenen Werten stets die nächst grössere ganze Zahl in die Reihe zu setzen ist (a, s, q beliebige reelle Zahlen). Unter Benutzung dieses Begriffs ergiebt sich die gesuchte Funktion $\nu(n, e, d)$ als Überschuss von $de+1$ über das grösste Glied der Oberreihe $\left(1, n-e, \frac{d}{d-1}\right)$, das noch kleiner als $de+1$ ist[49]) oder, was dasselbe ist, als Überschuss von $dn+1$ über das grösste Glied der Oberreihe $\left(d(n-e)+1, 0, \frac{d}{d-1}\right)$, das noch kleiner als $dn+1$ ist[50]).

7. Wanderungsspiele. Das älteste Spiel dieser Art, das Königsberger Brückenspiel *Euler*'s, verlangte, sieben in Königsberg i. Pr. über die verschiedenen Pregelarme führende Brücken hintereinander je einmal zu passieren. Diese und ähnliche Aufgaben erledigen sich damit, dass alle Kreuzungspunkte eines Liniengebildes sich auf einer zum Ausgangspunkt zurückkehrenden Wanderung hintereinander je einmal passieren lassen, wenn alle diese Punkte von gerader Ordnung sind, d. h. wenn in jedem von ihnen eine gerade Anzahl von Linien mündet, während bei $2s$ Punkten ungerader Ordnung s verschiedene und zwar nicht zu den bezüglichen Ausgangspunkten zurückführende

47) *H. Schubert,* Zwölf Geduldspiele, p. 125. Ein Spezialfall dieser Formel, nämlich für $e = n - 1$ war — unabhängig von *Schubert* — von *H. Delannoy,* Interm. des mathém. 2 (1895), p. 120 und *Moreau,* ibid. 2 (1895), p. 229 angegeben worden.

48) *H. Schubert,* Hamburg, Math. Ges. Mitt. 3 (1895), p. 223. Solche Reihen finden sich auch in den auf die im Interm. des mathém. gestellten Fragen 32 und 330 eingegangenen Antworten von *E. Cesàro* (l. c. 1 (1894), p. 30) und *J. Franel* (1, p. 31; 2 (1895), p. 122). Weiter s. über „Oberreihen" *E. Busche,* Hamburg, Math. Ges. Mitt. 3 (1895), p. 225; *W. Ahrens,* Zeitschr. Math. Phys. 40 (1895), p. 245.

49) *E. Busche,* Math. Ann. 47 (1896), p. 105.

50) *H. Schubert,* Zwölf Geduldspiele, p. 129; *E. Busche* (Fussn. 49).

Wanderungen erforderlich sind[51]). Das dualistisch entsprechende Spiel, das Labyrinthspiel, verlangt Durchwanderung aller Linien eines Liniengebildes hintereinander[52]).

Von zwei im Jahre 1859 von *Hamilton* herausgegebenen Spielen verlangt das eine, alle 20 Ecken eines Dodekaeders hintereinander je einmal auf Wanderungen ausschliesslich längs der Kanten zu passieren, während das zweite, dem ersteren dualistisch entsprechende Spiel diese Forderung für die 20 Flächen des Ikosaeders mittelst Überschreitens der Kanten erhebt. Die Gruppe aller Drehungen, welche das Ikosaeder in sich überführen, ist definiert durch die Gleichungen[53]):

$$r^5 = i^2 = (r\,i)^3 = 1.$$

Führt die Drehung r eine von den drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten über in diejenige der beiden anderen, zu der man kommt, wenn man sich nach Durchwanderung jener ersten rechts hält, so führt die Operation $l = rir$ jene erste Kante in die links gelegene über. Die Operation $rrrlllrlrlrrrlllrlrl$ wird auf Grund der Relation $l = rir$ identisch $= 1$, führt also, als Vorschrift für eine Wanderung betrachtet, zum Ausgangspunkt zurück, jedoch erst, nachdem alle 20 Ecken passiert sind[54]). *Hamilton* erschwerte die Durchwanderung durch weitere Bedingungen, indem er die ersten wie letzten Stationen vorschrieb, wobei z. B. bei vorgeschriebenen sieben ersten Stationen eventuell noch zwei verschiedene Wanderungen möglich sind[54a]); indem er ferner eine Station als unzugänglich ausschloss etc.

8. Kartenmischen nach Gergonne und nach Monge. Das schon von *Bachet*[55]) für einen speziellen Fall behandelte, von *Gergonne*[56]) verallgemeinerte und gewöhnlich nach letzterem benannte Spiel beruht darauf, dass sich jede positive ganze Zahl $\leqq m^m$ in der Form $\sum_1^m {}^i (-1)^{m-i} n_i m^{i-1}$ darstellen lässt, wo die n_i positive ganze Zahlen

51) *L. Euler,* Petr. Comm. 8 (1741), p. 128; s. auch *Th. Clausen,* Astron. Nachr. 21 (1844), Nr. 494, p. 216; *C. Hierholzer*, Math. Ann. 6 (1873), p. 30; *J. B. Listing,* Gött. Studien 1847, Abt. 1, p. 811.

52) Vorschriften hierfür gaben *Chr. Wiener,* Math. Ann. 6 (1873), p. 29; *Trémaux* bei *Lucas,* Récr. 1, p. 47; *G. Tarry,* Nouv. ann. de math. (3) 14 (1895), p. 187.

53) *W. R. Hamilton,* Phil. Mag. (4) 12 (1856), p. 446.

54) Eine nur in der Form verschiedene Vorschrift gab *Hermary,* s. *Lucas,* Récr. 2, p. 216.

54a) Bezüglich Anzahlbestimmungen s. die in Fussn. 32a erwähnten Arbeiten von *F. Fitting.*

55) *Bachet,* Probl., 2. éd. p. 143 = 4. éd. p. 72.

56) *J. D. Gergonne,* Ann. de math. 4 (1813/14), p. 276.

> 0 und $\leqq m$ sind: Jemand bestimmt die von einem anderen gedachte Karte aus einem Haufen von m^m Karten, indem bei m-maliger systematischer Anordnung der m^m Karten in m Haufen von je m^{m-1} jedesmal die Nummer n_i (bei geradem m ist n_1 um 1 kleiner als die betr. Haufennummer) des die betreffende Karte enthaltenden Haufens ihm angegeben wird[57]).

Bei einem von *G. Monge*[58]) angegebenen Spiel wird eine gedachte Karte dadurch erraten, dass zunächst ihre Nummer im Haufen angegeben und nun durch ein iteriertes systematisches Mischen, das der Substitution:

$$\begin{pmatrix} n+1-(-1)^k\cdot\left[\frac{k}{2}\right] \\ k \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2n$$

(wegen der eckigen Klammer s. I C 1, p. 556) entspricht, wieder die ursprüngliche Reihenfolge der Karten hergestellt wird[59]).

9. Baguenaudier. Das zuerst bei *Hier. Cardan*[60]) erwähnte Spiel, für welches ein deutscher Name nicht zu existieren scheint, besteht aus einer an einem Griff angebrachten Spange, auf der eine Anzahl von Ringen sitzen; jeder derselben ist durch einen an ihm befestigten

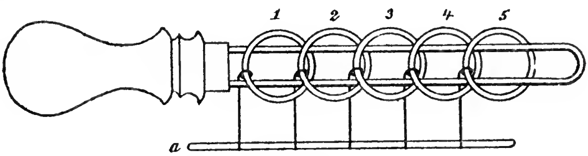


Fig. 2.

Faden, welcher durch das Innere des benachbarten Ringes und zwischen den beiden Bügeln der Spange hindurchgeht, mit einer kleinen Stange a (s. Fig. 2) fest verbunden. Die Aufgabe des Spiels besteht darin, das System der Ringe von der Spange zu trennen. Die ein-

57) Der allgemeinere Fall von p Haufen zu je q Karten ist von *C. T. Hudson,* Educ. Times Repr. 9 (1865), p. 89 behandelt; eine Berichtigung dieser Untersuchungen gab *L. E. Dickson,* New York Math. Soc. Bull. (2) 1 (1895), p. 184.

58) *Monge,* Paris, Mém. prés. 1773, p. 390.

59) Mit Bestimmung der Perioden für verschiedenes n beschäftigen sich *V. Bunjakowskij,* Petersburg, Bull. 16 (1858), p. 67 und *J. Bourget,* J. de math. (3) 8 (1882), p. 413; s. auch *Thomas de St.-Laurent,* Nîmes, Mém. de l'acad. du Gard 1864/65, p. 505.

60) De subtilitate liber XV, Nuremberg. 1550, p. 294. — Die Angabe *O. J. Broch*'s (s. *Lucas,* Récr. 1, p. 165), dass solche Vorrichtungen in Norwegen noch heute zum Verschliessen von Truhen u. dgl. gebraucht würden, scheint irrtümlich zu sein (briefl. Mitt. von Herrn Dr. *Nielsen,* Prof. d. Ethnographie in Christiania).

zigen Manipulationen, durch welche dies Ziel erreicht werden kann, sind erstens das „Senken“ eines Ringes, nämlich das Herunterziehen nach rechts (s. Fig. 2) von der Spange und nachherige Hindurchwerfen zwischen den beiden Bügeln der Spange von oben nach unten, und zweitens das „Heben“ eines Ringes, die zu der vorigen inverse Operation. Das „Heben“ resp. „Senken“ eines Ringes ist nun immer nur dann möglich, wenn der folgende Ring (bei einer Numerierung wie in der Fig. 2) auf der Spange sitzt, alle weiteren folgenden Ringe jedoch gesenkt sind; der letzte Ring kann jederzeit gehoben resp. gesenkt werden. Charakterisiert man[61]) die Stellung jedes Ringes durch eine der Ziffern 0 oder 1 und zwar so, dass der erste Ring eine 1 erhält, wenn er oben, und eine 0, wenn er unten ist, und jeder folgende, wenn er unten ist, die Zahl des vorhergehenden, dagegen die entgegengesetzte Zahl, wenn er oben ist, so ist die Anfangsstellung (s. Fig. 2) charakterisiert durch 1010... und die erstrebte Schlussstellung durch 0000 .... Fasst man diese Zahlen nun auf als Zahlen des dyadischen Systems, so zeigt sich, dass alle überhaupt ausführbaren Umstellungen hinauskommen auf Additionen und Subtraktionen von je 1 bezw. in besonderen Fällen von je 2, da sich nämlich das Heben und Senken der beiden letzten Ringe gleichzeitig ausführen lässt. Da umgekehrt auch stets die einer Addition resp. Subtraktion von je 1 (bezw. 2 in dem besonderen Falle) entsprechende Operation ausführbar ist, so wird das Ziel auf dem kürzesten Wege erreicht, indem die Zahl 1010 ... durch successives Subtrahieren von 1 (bezw. 2) zu 0000 ... reduziert wird. Dies erfordert bei n Ringen $2^{n-1} - \frac{(-1)^n + 1}{2}$ Umstellungen.

10. Nim oder Fan-Tan. Auf amerikanischen Schulen wird ein Spiel unbekannten Ursprungs gepflegt, das von zwei Personen gespielt wird und darin besteht, dass eine Anzahl Haufen von irgend welchen Gegenständen — sagen wir „Steinen“ — hingelegt wird und nun beide Personen abwechselnd eine beliebige Zahl von Steinen fortnehmen, aber bei jedem einzelnen „Zug“ immer nur Steine von einem Haufen und zwar mindestens einen Stein und höchstens den ganzen Haufen. Derjenige, der den letzten Stein nimmt, ist Sieger. Der Anziehende kann in den weitaus meisten Fällen den Sieg erzwingen, und zwar dadurch, dass er eine Spielregel befolgt, welche, von *P. E. More* induktiv gefunden, von *Chs. L. Bouton*[62]) in folgende Form gebracht ist:

61) *L. Gros* (s. Litt.-Verz.).

62) *Chs. L. Bouton*, Ann. of math. (2) 3 (1901), p. 35; reproduziert von *W. Ahrens*, Naturw. Wochenschr. (2) 1 (1902).

Man schreibe die Zahlen der Steine in den einzelnen Haufen in dyadischer Schreibweise unter einander und addiere die Ziffern der einzelnen Kolonnen; die jeweilige Position heisst dann „richtig“, wenn diese Summen alle gerade Zahlen (incl. 0) sind, im anderen Falle „unrichtig“. Ist die anfängliche Position eine „unrichtige“, was in der weitaus grössten Zahl der Fälle zutreffen wird[63]), so kann der Anziehende diese in eine „richtige“ überführen, während der Gegner diese „richtige“ Position durch seinen Zug wieder in eine „unrichtige“ verwandeln muss, und so geht dies weiter, bis der Anziehende siegt. Ist die anfängliche Position dagegen „richtig“, so kann der Nachziehende den Sieg stets erzwingen. — Gilt derjenige, der den letzten Stein nimmt, als Verlierer, so muss die Definition der „richtigen“ Position etwas modifiziert werden, aber auch hier lässt sich dann zeigen, dass eine „richtige“ Position stets in eine „unrichtige“ übergeht und eine „unrichtige“ stets in eine „richtige“ übergeführt werden kann, und nach wie vor ist auch hier der Sieg demjenigen, der die erste „richtige“ Position herstellt, bei richtiger Fortsetzung sicher. — Statt des gewöhnlichen Namens „Fan-Tan“ schlägt *Bouton*, um Verwechselungen mit einem anderen Spiel dieses Namens zu vermeiden, „Nim“ vor. — Die Gesamtheit aller „richtigen“ Positionen in dem praktisch gewöhnlichen Fall von drei Haufen bildet übrigens, da jeder Kombination von zwei Zahlen eine dritte eindeutig zugeordnet wird, ein Tripelsystem [I A 2, Nr. **10**], jedoch lässt sich dies Verfahren anscheinend nicht immer zur Bildung von Tripelsystemen verwenden.

11. Varia. Ohne näheres Eingehen mögen zum Schluss noch folgende Spiele einfacheren Charakters Erwähnung finden: 1) *E. Lucas*' „Turm von Hanoï“[64]); 2) *P. G. Tait*'s Shilling-Sovereign-Problem[65]); 3) Aufgaben der erschwerten Überfahrt, insbes. *Bachet*'s Problem der drei Ehepaare[66]); 4) die Aufgabe, alle $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Steine des Dominospiels zu einer zusammenhängenden Kette zu vereinigen[67]).

63) Die Wahrscheinlichkeit hierfür s. bei *Bouton,* l. c. p. 37/38.

64) S. *Lucas,* Récr. 3, p. 59 oder die dritte der im Litt.-Verz. angeführten sechs Broschüren desselben Autors.

65) *Tait,* Phil. Mag. (5) 17 (1884), p. 30; Modifikationen und Verallgemeinerungen von *E. Lucas* und *H. Delannoy,* s. des ersteren Arithm. amus., p. 97 und Récr. 2, p. 139.

66) *Bachet,* Probl., 4. Ausg., p. 158 = 2. Ausg., p. 212.

67) Anzahlbestimmung für $n = 6$ durch *M. Reiss,* Ann. di mat. 5 (1871), p. 63; s. auch *G. Tarry,* Assoc. franç. pour l'avanc. des sciences 15 (Nancy 1886), 2, p. 49. Bezüglich $n = 8$ s. *G. Tarry* und *Jolivald* bei *Lucas,* Récr. 4, p. 128.

(Abgeschlossen im Juni 1902.)

I G 2. ANWENDUNGEN DER MATHEMATIK AUF NATIONALÖKONOMIE

VON

V. PARETO

IN LAUSANNE.

Inhaltsübersicht.

Litteratur*).

Lehrbücher.

Joh. Heinr. v. Thünen, Der isolierte Staat in Beziehung auf Landwirtschaft und Nationalökonomie, Teil I, Hamburg 1826; Teil II, Abt. 1, Rostock 1850; Teil II, Abt. 2 und Teil III, Rostock 1863; 3. Aufl., in drei Teilen, Berlin 1875.

Will. Whewell, Mathematical exposition of some doctrines of *political economy,* Cambr. Trans. 3 (1829), p. 191—230; 4 (1831), p. 155—198; 9 (1850), p. 128—149 u. Part. II, p. 1—7.

Aug. Cournot, Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des *richesses,* Paris 1838. Letzte Aufl.: Researches into the mathematical principles of the theory of *wealth* by *Aug. Cournot* (1838), translated by *Nath. T. Bacon,* with a bibliography of mathematical economics by *Irv. Fisher,* New-York 1897.

Herm. Heinr. Gossen, Entwickelung der Gesetze des menschlichen Verkehrs und der daraus fliessenden Regeln für menschliches Handeln, Braunschweig 1854

*) In der durch den Druck hervorgehobenen Abkürzung ist das betreffende Werk im Texte citiert.

(Datum der Vorrede Jan. 1853). [Die zweite Ausgabe, Berlin 1888, ist kein neuer Abdruck, nur das Titelblatt ist neu.]

R. Jennings, Natural elements of *political economy,* London 1855.

Heinr. v. Mangoldt, Grundriss der *Volkswirtschaftslehre,* Stuttgart 1863.

Will. Stanley Jevons, The theory of *political economy,* London 1871; 2. Aufl. 1879; 3. Aufl. 1888.

C. Menger, Grundsätze der *Volkswirtschaftslehre.* Erster, allgemeiner Teil, Wien 1871.

Léon Walràs, Eléments *d'économie politique* pure ou théorie de la richesse sociale, Lausanne, Teil I 1874, Teil II 1877; 3. éd., Tome I: Eléments *d'économie politique* pure, Lausanne 1896; Tome II: Etudes *d'économie sociale,* Lausanne 1896; Tome III: Etudes *d'économie appliquée,* Lausanne 1898.

Wilh. Launhardt, Mathematische Begründung der *Volkswirtschaftslehre,* Leipzig 1885.

Phil. H. Wicksteed, The Alphabet of *economic science:* elements of the theory of value, London 1888.

Alf. Marshall, Principles of economics. Vol. I, London 1890; 4. Aufl. 1898.

Maffeo Pantaleoni, Principi di economia pura, Firenze 1890 (Datum der Vorrede April 1889).

Jul. Lehr, Grundbegriffe und Grundlagen der *Volkswirtschaft,* Leipzig 1893.

Vilfredo Pareto, Cours d'économie politique, Lausanne, vol. I 1896, vol. II 1897.

Monographien und grundlegende Abhandlungen.

E. J. Dupuit, De la *mesure* de l'utilité des travaux publics, Ann. ponts chauss. (2) 8 (1844), p. 332—375.

E. J. Dupuit, De l'influence des péages sur l'utilité des voies de communication, Ann. ponts chauss. (2) 17 (1849), 1° sem., nr. 207.

K. H. Hagen, Die Notwendigkeit der Handelsfreiheit für das Nationaleinkommen, mathematisch nachgewiesen, Königsberg i/P. 1844.

W. S. Jevons, Brief account of a general mathematical theory of political economy, Lond. J. royal statist. soc. 29 (1866), p. 282—283.

H. Lefèvre, Traité théorique et pratique des valeurs mobilières et des opérations de bourse, Paris 1870.

W. Launhardt, Kommerzielle Trassierung der Verkehrswege, Hannover 1872.

A. Marshall, The pure theory of *foreign trade,* the pure theory of *domestic values.* Papers printed for private circulation, Cambridge 1879.

F. Y. Edgeworth, Mathematical *psychics,* London 1881.

Eug. Böhm v. Bawerk, Kapital und Kapitalzins, Innsbruck, 1. Abt. 1884; 2. Abt. 1889.

G. B. Antonelli, Sulla teoria matematica dell' economia politica, Pisa 1886.

G. Rossi, La matematica applicata alla teoria della richezza sociale, Reggio Emilia 1889.

A. J. Cohen-Stuart, Bijdrage tot de theorie der progressieve inkomstenbelasting, 'sGravenhage 1889.

F. Y. Edgeworth, On the application of mathematics to *political economy,* Lond. J. royal statist. soc. 52 (1889), p. 538—576.

F. Y. Edgeworth, Report of the committee etc. appointed for the purpose of investigating the best methods of ascertaining and measuring variations in the value of the monetary standard. Memorandum by the Secretary, Report Brit assoc. Adv. Sci. for 1887, p. 247—301; for 1888, p. 181—209; for 1899, p. 133—164.

Rud. Auspitz und *Rich. Lieben,* Untersuchungen über die *Theorie des Preises,* Leipzig 1889.

V. Pareto, Di un errore del Cournot nel trattare l'economia politica colla matematica, Gi. degli Economisti, Roma, Jan. 1892.

— La teoria dei prezzi dei signori *Auspitz* e *Lieben* e le osservazioni del prof. *Walras,* ib. März 1892.

— Considerazioni sui principi fondamentali dell' economia politica pura, ib. Mai, Juni, August 1892; Jan., Oct. 1893.

— Il massimo di utilità dato dalla libera concorrenza, ib. Juli 1894.

— La legge della domanda, ib. Jan. 1895.

— Teoria matematica del commercio internazionale, ib. April 1895.

— Il modo di figurare i fenomeni economici, ib. Jan. 1896.

— Sunto di capitoli di un nuovo trattato di economia pura, ib. März, Juni 1900.

— Le nuove teorie economiche, ib. Sept. 1901.

Irv. Fisher, Mathematical investigations in the theory of *value and prices,* Connecticut Acad. Trans. 9, New-Haven 1892, Juli.

H. Cunynghame, Some improvements in simple *geometrical methods* of treating exchange value, monopoly and rent, Lond. Econ. J. 2 (1892), p. 35—52.

L. Perozzo, Utilità differenziale delle ferrovie, Rom. Linc. Atti, Jan. 1893.

Knut Wicksell, Über *Wert, Kapital und Rente* nach den neueren nationalökonomischen Theorien, Jena 1893.

P. H. Wicksteed, Essay on the coordination of the *laws of distribution,* London 1894.

E. Barone, Di alcuni teoremi fondamentali per la teoria matematica dell' imposta, Gi. degli Economisti, März 1894.

— A proposito delle indagini del Fisher, ib. Mai 1894.

— Sulla *consumers rent,* ib. Sept. 1894.

— Sul trattamento di quistioni dinamiche, ib. Nov. 1894.

— Studi sulla distribuzione, ib. Febr. 1896.

De Benedetti, Costo delle ferrovie, Roma soc. ingegn. Ann., März, Mai, Juli 1896.

F. Y. Edgeworth, La teoria pura del *monopolio,* Gi. degli Economisti, Juli 1897.

— The pure theory of taxation, Economic J. 7 (1897), p. 46—70, 226—238.

G. Cassel, Grundriss einer elementaren *Preislehre,* Zeitschr. für die ges. Staatswissenschaft 1899.

Bibliographische Sammlungen der Werke und Schriften, die Mathematik auf volkswirtschaftliche Probleme anwenden, findet man u. a. als Anhang zu den oben aufgeführten Werken: *W. St. Jevons,* Political economy, 2. Aufl. London 1879; *A. Cournot,* Wealth, New-York 1897 (with a bibliography . . . by *Irv. Fisher*); *Irv. Fisher,* Value and prices, Connecticut Trans. 9 (1892), Juli; *F. Virgilii* e *C. Garibaldi,* Economia matematica, Milano 1899.

Allgemeine Bibliographien volkswirtschaftlicher Werke, die die mathematischen Schriften zum grossen Teil miteinbegreifen, findet man als Anhang zu: *Jul. Lehr,* Volkswirtschaft, Leipzig 1893, sowie als selbständige Publikation in: *Benj. Rand,* A bibliography of economics, Cambridge 1895.

1. Geschichte. Insofern sich die Volkswirtschaftslehre mit Erscheinungen befasst, deren Grössen- und Maassverhältnisse von hervorragender Bedeutung sind, d. h. mit Variationen gewisser Quantitäten, musste sie früher oder später in der Mathematik, der Wissenschaft der Quantität, eine Stütze suchen.

Dieses geschah auf zwei Weisen. Einerseits liessen sich einige Gelehrte, deren hervorragendster Vertreter wohl *W. Whewell*[1]) sein dürfte, darauf ein, einfach diejenigen Sätze in algebraische Zeichensprache zu übersetzen, deren Beweis die Ökonomisten, die keinen Gebrauch von Mathematik gemacht hatten, schon geliefert hatten. Es braucht nicht hervorgehoben zu werden, dass diese Methode wenig Wert besitzt, geringen Erfolg gehabt hat und jetzt fast aufgegeben ist.

Andererseits suchte man nach einem einfachen Prinzip, das dazu diente, durch *Deduktion*, mit Hülfe der mathematischen Analyse, die Gesetze der wirtschaftlichen Phänomene zu liefern. Auf diesem Wege ist man zu manchen Resultaten gelangt und ist berechtigt, weitere zu erwarten.

Die Theorieen, um die es sich hier handelt, kann man auf zwei Weisen einteilen, nämlich einerseits nach dem Unterschied in den Sätzen, von denen sie ausgehen, und andererseits nach dem Unterschied in der Beschränkung des Untersuchungsfeldes.

Man kann nämlich von dem *Gesetz der Nachfrage* ausgehen, wie es *A. Cournot*[2]) gethan hat, der den Preis p einer Ware als gegeben nimmt und die Grösse D, der Nachfrage (franz. demande, engl. demand, ital. domanda) dieser Ware in einem Jahr, als bekannt voraussetzt, indem er $D = f(p)$ setzt. Dieses thut auch *A. Marshall*[3]), indem er die *demand schedule* eines Individuums untersucht, d. h. die Quantitäten, welche eine Person von einer jeden Ware, bei gegebenen Preisen, kauft, als gegeben annimmt.

Anstatt so zu verfahren, kann man aber die Erscheinung tiefer verfolgen und von den Gefühlen ausgehen, die die Waren den Menschen zu Genussobjekten machen. In diesem Fall wird das Gesetz der Nach-

---

1) *Will. Whewell,* Political economy, Cambr. Trans. 3 (1829), p. 191; 4 (1831), p. 155.

2) *Aug. Cournot,* Richesses, Paris 1838; *H. v. Mangoldt,* Volkswirtschaftslehre, Stuttgart 1863; *H. C. Fleeming Jenkin,* Trade Unions North british review, März 1868; The graphic representation of the laws of supply and demand 1868, in Papers literary scientific, 2 vols, ed. by Sidn. *Colvin* and *J. A. Ewing,* London 1888, 2, p. 76; Incidence of taxes, 1871, in „Papers“ 2, p. 107.

3) *A. Marshall,* Principles, London 1890; domestic values, foreign trade, Cambridge 1879.

frage eine Deduktion und nicht mehr ein Datum. Dieser Weg ist zuerst von *J. Dupuit*[4]), *H. H. Gossen*[5]) und *R. Jennings*[6]) eingeschlagen worden. Entwickelte Theorieen finden sich bei *W. Stanley Jevons*[7]), *C. Menger*[8]), *L. Walras*[9]), *W. Launhardt*[10]), *A. Marshall*[11]), *M. Pantaleoni*[12]), *F. Y. Edgeworth*[13]), *I. Fisher*[14]), *J. Lehr*[15]), *V. Pareto*[16]), u. a.

Was den Unterschied anbelangt, der sich daraus ergiebt, dass das Gebiet der Untersuchungen nicht bei allen gleich weit und breit ist, ist zu bemerken, dass die Mehrzahl der Schriftsteller sich auf einen Teil des Gebietes beschränken, in welches die wirtschaftlichen Erscheinungen sich zerlegen lassen. Die meisten haben sich für die Theorie der Bestimmung des Preises interessiert. Diese Theorie ist Gegenstand eines eingehenden Werkes von *R. Auspitz* und *R. Lieben*[17]) geworden.

Andere Gelehrte haben sich auf die spezielle Behandlung anderer Theorieen verlegt, die Theorie der Produktion, der Rente u. s. w.

L. Walras war der erste, der die wirtschaftlichen Erscheinungen im Zusammenhange betrachtet und das System von Gleichungen aufgestellt hat, welche diesen Zusammenhang darstellen und bestimmen, unter der Voraussetzung der freien Konkurrenz. Dem System dieser Gleichungen gebührt der Name *„Walras'sche Gleichungen“* (Nr. **3**).

Der wirtschaftliche Kreislauf bildet einen geschlossenen Cyklus, den wir willkürlich in Teile zerstückeln: Konsumtion, Tausch, Produktion, Kapitalisation. Der Mensch unterzieht sich Mühsalen, um sich bestimmte Güter zu verschaffen, die, wenn sie verbraucht sind, ihn in den Stand setzen, sich von neuem Kraftanstrengungen auszusetzen; und so geht es weiter in ununterbrochener Reihenfolge. Ein Umstand bringt in das Problem eine Verwickelung. Die Anstrengungen der Menschen haben meistens nicht den unmittelbaren

4) *J. Dupuit,* Mesure, Ann. ponts chauss. (4) 8 (1844), p. 332.
5) *H. H. Gossen,* Entwickelung, Braunschweig 1854.
6) *R. Jennings,* Political economy, London 1855.
7) *W. St. Jevons,* Political economy, London 1871.
8) *C. Menger,* Volkswirtschaftslehre, I. Teil, Wien 1871.
9) *L. Walras,* Économie politique, I. Teil, Lausanne 1874.
10) *W. Launhardt,* Volkswirtschaftslehre, Leipzig 1885.
11) *A. Marshall,* Principles, vol. I, London 1890.
12) *M. Pantaleoni,* Principii, Firenze 1890.
13) *F. Y. Edgeworth,* Psychics, London 1881.
14) *Irv. Fisher,* Value and prices, Connecticut Trans. 9 (1892).
15) *J. Lehr,* Volkswirtschaft, Leipzig 1893.
16) *V. Pareto,* Cours, Lausanne 1896, 1897.
17) *R. Auspitz* und *R. Lieben,* Theorie des Preises, Leipzig 1889.

Zweck, die Güter zu erlangen, welche sie direkt brauchen; es ist oft vorteilhafter, einen Umweg einzuschlagen[18]); so wäre es z. B. zu kostspielig, direkt sich Wasser, das man braucht, aus dem Brunnen selber zu schöpfen; Eisenerze schmelzen, eine gusseiserne Leitung herstellen, ist vorteilhafter, sowie es sich um grössere Quantitäten Wasser handelt. Das Studium dieses Umweges, den man einschlägt um sich wirtschaftliche Güter zu verschaffen, führt zur Theorie der Kapitalbildung und erschwert das Studium der Produktion. Die wirtschaftlichen Erscheinungen werden auf diese Weise ausserordentlich mannigfaltig und kompliziert. Diese Erscheinungen, in ihrem Zusammenhang, drücken die Walras'schen Gleichungen aus. Diese Gleichungen sind auch die Grundlage der Theorieen des *Cours* von *V. Pareto.*

Die mathematische Analyse braucht man erst, um einen Begriff vom Nexus der wirtschaftlichen Cirkulation zu gewinnen und deren hauptsächlichste Merkmale zu bestimmen. Beschränkt man sich auf ein spezielles und numerisches Problem, z. B. auf die Bestimmung der Preise, so ist der Nutzen der Mathematik schon mit Rücksicht auf den Mangel an ausreichenden numerischen Daten (z. B. für die Kenntnis der Parameter in den Gleichungen (6), Nr. **6**) nur ein geringer. Der Nutzen wird aber ein beträchtlicher, sobald man sich mit einem allgemeinen und qualitativen Problem beschäftigt, wie es u. a. die Erkenntnis der Bedingungen ist, die das wirtschaftliche Gleichgewicht bestimmen (Nr. **3**). Handelt es sich um dieses grundlegende Problem des wirtschaftlichen Gleichgewichts, so ist es von Wichtigkeit zu wissen, wann dieses Gleichgewicht bestimmt und wann es nicht bestimmt ist, und dieses kann man sofort erfahren, indem man die Anzahl der Gleichungen mit derjenigen der Unbekannten vergleicht[19]). Andere Probleme dieser Art, die zu denen gehören, die *Edgeworth unnumerical mathematics* nennt, können mit Vorteil gelöst werden, z. B. diejenigen, die mit der Bestimmung der Bedingungen des Maximums der Befriedigung zu thun haben (Nr. **7**).

2. Welche Erscheinungen behandelt die mathematische Wirtschaftslehre? Es handelt sich um abstrakte Erscheinungen wie die, welche die *rationelle* Mechanik behandelt. Wir gehen hier nicht auf die Frage ein, in welchem Verhältnis das abstrakte Phänomen zum

---

18) *E. Böhm v. Bawerk* hat diesen Satz ausführlich entwickelt: Kapital und Kapitalzins, Innsbruck 1884. Zweite Abt.: Positive Theorie des Kapitales, 1889, IV. Abschn., p. 299 ff.

19) *L. Walras,* Économie politique, 3. éd. Lausanne 1896, leçon 11, § 108, p. 133—34; *V. Pareto,* Cours, § 51.

konkreten steht[20]), da es sich dabei nicht um eine mathematische Frage handelt. Nur ein paar Worte, zwei Vorwürfe betreffend, mögen hier am Orte sein[21]).

Wie die analytische Mechanik[22]) materielle Punkte und starre Körper behandelt, so betrachtet die mathematische Wirtschaftslehre einen abstrakten Menschen, einen *homo oeconomicus*. Die menschlichen Handlungen sind ausserordentlich mannigfaltig und bilden das Objekt verschiedener Wissenschaften. Es lassen sich aber gewisse Klassen von Charakteren A, B, C ... isolieren und Menschen betrachten, die sich ausschliesslich mit den Handlungen der Klasse A befassen, oder aber mit denen der Klasse B u. s. f.

Der „homo oeconomicus“ befasst sich ausschliesslich mit den rationellen Handlungen, die den Zweck haben, ökonomische Güter zu erwerben. Man kann sich mit demselben Rechte einen homo religiosus, einen homo ethicus, einen homo politicus, selbst einen homo eroticus u. s. f. konstruieren; im realen Menschen steckt dann ein homo oeconomicus, ein homo religiosus etc.

In diesem Sinne definiert *Pareto*[23]) den homo oeconomicus wie folgt: „Comme la mécanique rationelle considère des points matériels, l'économie pure considère l'homo oeconomicus. C'est un être abstrait, sans passions ni sentiments, recherchant en toute chose le maximum de plaisir ne s'occupant d'autre chose que de transformer les uns ou les autres les biens économiques“.

Man hat gemeint, die mathematischen Ökonomisten behaupteten, der wirkliche Mensch sei ein *homo oeconomicus*; da war es denn nicht schwer zu beweisen, sie hätten unrecht. Die Zumutung ist aber falsch: die Ökonomisten behaupten nicht, der wirkliche Mensch sei

---

20) *Bened. Croce,* Gi. Econ., Aug. 1900; *V. Pareto,* Gi. Econ., Sept. 1900.

21) S. auch *W. S. Jevons,* Political economy; *F. G. Edgeworth,* Psychics; *J. Neville Keynes,* Scope and Method of political economy, London 1891.

Einige Einwände rühren daher, dass Autoren, die Mathematik nicht kennen, mathematische Theorieen der Wirtschaftslehre beurteilen. So hat man z. B. behauptet, dass das „*Gesetz der Substitution*“, wonach eine Ware eine andere im Konsum ersetzen kann, die Mathematik in der Wirtschaftslehre unverwertbar mache. Das hiesse soviel, wie behaupten, die Mathematik könne nur Funktionen mit *einer* unabhängigen Variabeln behandeln. Vgl. *V. Pareto,* Cours § 974.

22) Vgl. *V. Volterra,* Gi. Econ., Nov. 1901. V. geht hier näher ein auf die Analogie zwischen Abstraktionen, wie sie u. a. zum Begriff des homo oeconomicus führen, und solchen, wie sie in der analytischen Mechanik längst eingebürgert sind, und erstaunt über den Widerstand, auf den derartige Abstraktionen in der Wirtschaftslehre gestossen sind.

23) *Pareto,* Comment se pose le problème de l'économie pure. Lausanne, Mém. prés. à la soc. *Stella,* Dez. 1898, p. 8.

ein *homo oeconomicus*, ebenso wie es keinem Kenner der reinen Mechanik einfällt, die wirklichen Körper als identisch mit denjenigen zu betrachten, die die rationelle Mechanik behandelt. Beide scheiden einfach, durch Abstraktion, gewisse Teile der wirklichen Erscheinung von anderen ab und studieren sie isoliert.

Man kann ferner den Einwand erheben, dass, während z. B. die Astronomie durch die Abstraktionen der Mechanik mit bestem praktischem Erfolge approximiert wird, in der mathematischen Wirtschaftslehre bislang nur festgestellt werden konnte, dass einige ihrer Konsequenzen qualitativ mit wirklich beobachteten Thatsachen übereinstimmen. Dies mag bis zu einem gewissen Grade zugegeben werden; es steht indessen in sicherer Aussicht, dass mit zunehmender Kenntnis empirischer Daten auch die Zahl der positiven, quantitativen Ergebnisse der neuen Lehren wachsen wird. Gegenwärtig besteht der Hauptwert[24]) der mathematischen Theorie darin, dass sie zu einer Auffassung der konkreten wirtschaftlichen Phänomene führt, die der Wirklichkeit erheblich näher kommt, als alle anderen bisher bekannten Theorien; vergleicht man die letzteren mit den konkreten Phänomenen, so liefert die mathematische Theorie die Mittel, um zahlreiche Irrtümer und Sophismen der anderen Theorien aufzudecken (vgl. Nr. **6**).

Einige Autoren, z. B. *G. Cassel*[25]), haben der mathematischen Volkswirtschaftslehre vorgeworfen, sie behandele Funktionen, die eigentlich unstetig sind, als ob sie stetig wären; die Variationen in den Mengen der konsumierten Waren seien ganze Einheiten und nicht unendlich kleine Teilchen. Dieses ist richtig und der Einwurf wäre zu beachten, wenn es sich um ein psychologisches Studium eines einzelnen Individuums handelte. Die Volkswirtschaftslehre befasst sich aber nur mit *grossen* Zahlen und alsdann kann man in den meisten Fällen kontinuierliche Funktionen an Stelle der diskontinuierlichen setzen, ohne dass man zu grosse Fehler zu befürchten hätte[26]). Dasselbe thut man in der Wahrscheinlichkeitslehre, mathematischen Physik und überhaupt immer dort, wo es sich darum handelt, statistische Phänomene durch Kurven oder kontinuierliche Funktionen darzustellen. Ist z. B. N die Zahl der Individuen einer gewissen Bevölkerungsgruppe, t die Zeit, so wird $N = f(t)$ als eine kontinuierliche Funktion behandelt, während es klar ist, dass N nur eine ganze Zahl sein kann. Man muss allerdings bei wirtschaftlichen Problemen darauf achten, dass der Fehler, den man durch die Substitution kon-

24) *Pareto,* Gi. Econ., Sept. 1901; *Pareto,* Systèmes socialistes, 1, Paris 1902.
25) *G. Cassel,* Preislehre, Zeitschr. f. d. ges. Staatsw. 1899, § 23, p. 416.
26) *V. Pareto,* Gi. Econ., Juni 1900, p. 545 ff.

tinuierlicher Funktionen an Stelle der diskontinuierlichen begeht, unbeträchtlich sei. In einigen Fällen ist er es nicht[27]).

Es ist übrigens für die mathematische Wirtschaftslehre nicht unerlässlich, kontinuierliche Funktionen zu gebrauchen und man kann oft ebenso gut mit der Betrachtung endlicher Variationen auskommen.

3. Grundgleichungen, die sich durch Verwertung des Begriffes der Ophelimität[28]) aufstellen lassen. Die Theorie der reinen Mechanik kann entwickelt werden, indem man von der Kraft, als Ursache der Bewegung, ausgeht, oder indem man von dem Studium der Bewegung selbst ausgeht.

Zwei ähnliche Wege führen zu den Gleichungen der Wirtschaftslehre.

Bisher ist immer der erste Weg eingeschlagen worden und erst in letzter Zeit hat *Pareto* auch den zweiten benutzt[25]). Schon vor Einführung mathematischer Methoden hatten die Ökonomisten, wenn auch undeutlich, das Bestehen eines gewissen *Tauglichkeitsverhältnisses* (rapport de convenance) zwischen den Bedürfnissen des Menschen und den Gütern, die er verwertet, beobachtet und diesem Verhältnis verschiedene Namen gegeben, z. B. Gebrauchswert, Nützlichkeit etc. Die mathematischen Ökonomisten haben diesen Begriff aufgenommen, vervollständigt, besonders aber berichtigt, was freilich nicht sofort hat gelingen wollen.

Die englische Schule nennt den Genuss, der einem Menschen dadurch verschafft wird, dass er ein bestimmtes Quantum Ware konsumiert, einfach die *Nützlichkeit dieses Quantums.* Dieser Genuss hängt offenbar von derjenigen Quantität ab, die schon vor der in Betracht kommenden genossen worden ist. Nehmen wir an, ein Mensch habe schon x_a der Ware A genossen, so ist der Genuss, der ihm dadurch verschafft wird, dass er noch dx_a hinzunimmt, durch $\varphi_a(x_a)dx_a$ ausgedrückt, wo die Funktion φ_a im allgemeinen je nach dem Individuum und je nach der Ware eine andere ist (Nr. 3). Die Quantität $\varphi_a(x_a)$ nennt *Jevons final degree of utility* und dieser Name ist allgemein üblich bei der englischen und amerikanischen Schule. *Gossen* hat den Genuss des letzten noch eingetauschten Teilchens den *Wert des letzten Atoms* genannt. *L. Walras* nennt $\varphi_a(x_a)$ *rareté.*

Den Bezeichnungen *Nützlichkeit* und *Seltenheit* haftet der Nach-

---

27) *V. Pareto,* Cours, § 22. Vgl. I D 4 a, sowie *R. Auspitz* und *R. Lieben,* Theorie des Preises, p. 117 ff.

28) *V. Pareto,* Gi. Econ., März, Juni 1900; *P. Boninsegni,* Gi. Econ., Febr. 1902.

29) *V. Pareto,* Cours, § 25.

teil an, dass sie in dem gewöhnlichen Sprachgebrauch einen Sinn haben, der von demjenigen verschieden ist, den sie in der Wirtschaftslehre erhalten. Wir dürften z. B., ohne dem üblichen Sprachgebrauch Gewalt anzuthun, nicht sagen, dass Morphium dem Morphinomanen „nützlich" sei; wir müssten sagen, es sei ihm schädlich; vom wirtschaftlichen Standpunkt aus werden wir sagen, Morphium habe für ihn eine bestimmte *Nützlichkeit* oder einen bestimmten *Wert*, da er ja Morphium verlangt.

Es giebt also Dinge, die sehr schädlich sind und doch wirtschaftlich *nützlich* genannt werden. Ebenso giebt es höchst seltene Dinge, denen trotzdem durchaus keine wirtschaftliche *Seltenheit* zuzusprechen ist, weil kein Mensch nach ihnen ein Verlangen hat.

Die Gefahr einer Amphibolie zwischen dem gewöhnlichen Sprachgebrauch und dem wissenschaftlichen ist nicht zu unterschätzen. Oft sind wirtschaftliche Theorieen kritisiert worden, blos weil man die wirtschaftliche Nützlichkeit mit derjenigen des üblichen Sprachgebrauchs oder die *Seltenheit* von *Walras* mit der absoluten Seltenheit verwechselte. Um diesen Wortstreitigkeiten ein Ende zu machen, hat *Pareto* die Quantität $\varphi_a(x_a)$ *Ophelimität*[26]) benannt. Gegen die Theorie, die wir angedeutet haben, erhebt man zwei Einwände. Der erste ist begründet und um ihm gerecht zu werden, hat *Pareto* eine neue Theorie aufgestellt, von der in Nr. 4 die Rede sein soll. Wenn man durch $\varphi_a(x_a)dx_a$ den Genuss ausdrückt, den der Konsum von dx_a, welcher zu dem von x_a hinzukommt, verschafft, so nimmt man an, dass dieser Genuss eine Quantität sei, die sich *messen* lasse. Davon lässt sich aber gar kein Beweis geben. Es ist dieses ein dunkler Punkt, der klar gemacht werden muss. Vorläufig nehmen wir an, der Genuss liesse sich messen.

Der zweite Einwand besteht darin, dass der Genuss, den der Konsum von dx_a verschafft, nicht blos von x_a abhängt, sondern zugleich auch vom Konsum $x_b, x_c, \ldots$ der übrigen Waren $B, C, \ldots$[13]).

Dieses ist im allgemeinen richtig, aber um diesen Umstand zu berücksichtigen, genügt es, dass man $\varphi_a(x_a, x_b, \ldots)$ an die Stelle von $\varphi_a(x_a)$ setzt. Allerdings wird dadurch die Theorie komplizierter; um sie zu vereinfachen, kann man beobachten, dass es in vielen Fällen blos zu unbedeutenden Fehlern führt, wenn man $\varphi_a(x_a)$ an die Stelle von $\varphi_a(x_a, x_b, \ldots)$ setzt.

Wenn man die Funktionen $\varphi_a(x_a), \varphi_b(x_b), \ldots$ untersucht, findet man immer eine Funktion Φ, die derartig ist, dass

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_a} = \varphi_a, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_b} = \varphi_b, \ldots,$$

dagegen findet dieses nicht immer statt, wenn man die Funktionen

$$\varphi_a(x_a, x_b, \ldots), \qquad \varphi_b(x_a, x_b, \ldots)$$

untersucht. Wo dies aber nicht der Fall ist, muss man, um

$$d\Phi = \varphi_a\, dx_a + \varphi_b\, dx_b + \cdots$$

zu integrieren, gewisse Relationen zwischen $x_a, x_b, \ldots$ haben, d. h. alsdann hängt der Genuss von der Reihenfolge, in der die Konsumsakte stattfinden, ab[25]).

Die Funktion Φ hat man den *Gesamtnutzen*, die *Totalophelimität* genannt; sie misst den Genuss einer Gesamtheit von Konsumen. Man kann von der Betrachtung von Φ ausgehen, um zu $\varphi_a, \varphi_b, \ldots$ zu gelangen, oder umgekehrt verfahren; letzterer Weg ist der einfachste, weil ein Individuum sich bewusst sein kann, welchen Genuss ihm $\varphi_a dx_a, \varphi_b dx_b, \ldots$ verschaffen, aber kein Bewusstsein hat vom Gesamtgenuss Φ.

Das erste Problem, das gelöst worden ist, ist das den Tausch betreffende. Man hat es unter dem Einfluss der bei nicht mathematisch gebildeten Volkswirten üblichen Ideen herausgegriffen. So hat ja auch die analytische Mechanik damit angefangen, spezielle Probleme zu lösen, ehe sie allgemeine Theorieen aufgestellt hat.

Gegeben seien zwei Individuen, die wir 1 und 2 nennen wollen. Das Individuum 1 besitze q_a von der Ware A, das Individuum 2 besitze q_b von der Ware B. Der „Tausch" besteht darin, dass das, was das eine Individuum abgiebt (negativ erhält), das andere erhält; erhält also 1 x_{1a} von A, x_{1b} von B, und 2 x_{2a} von A, x_{2b} von B, so sind x_{2a}, x_{1b} positive, x_{1a}, x_{2b} negative Quantitäten, und man hat:

$$(1) \qquad x_{1a} + x_{2a} = 0, \qquad x_{1b} + x_{2b} = 0.$$

Die Grösse $\varphi_{1a}(q_a + x_{1a})\, dx_{1a}$ giebt die Zunahme des Genusses an, die 1 erfährt, wenn es noch dx_{1a} erhält, wobei diese Zunahme zugleich mit dx_{1a} positiv oder negativ ausfällt; desgleichen ergiebt $\varphi_{1b}(x_{1b})\, dx_{1b}$ die Zunahme des Genusses für 1 beim Empfange von dx_{1b}. Ersichtlich wird 1 ein Interesse daran haben, den Tausch solange fortzusetzen, als die Totalzunahme des Genusses:

$$\varphi_{1a}(q_a + x_{1a})\, dx_{1a} + \varphi_{1b}(x_{1b})\, dx_{1b}$$

noch positiv ist, und wird erst dann befriedigt sein, wenn diese Grösse vom Positiven ins Negative übergeht, d. h. wenn sie gerade den Wert Null besitzt. Das entsprechende gilt für 2.

Es tritt demnach *„wirtschaftliches Gleichgewicht"* ein, wenn:

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi_{2a}(q_a + x_{1a})\, dx_{1a} + \varphi_{1b}(x_{1b})\, dx_{1b} = 0, \\ \varphi_{2a}(x_{2a})\, dx_{2a} + \varphi_{2b}(q_b + x_{2b})\, dx_{2b} = 0. \end{cases}$$

Man kann den analytischen Kern des Beweises auch dahin ausdrücken, dass 1 versucht, Φ_1 auf ein *Maximum* zu bringen, während 2 aus Φ_2 ein *Maximum* machen will; oder auch, was analytisch dasselbe, wirtschaftlich aber zweckmässiger ist, die Gleichungen (2) drücken die gegenseitige Stellung aus, in der 1 und 2 keinen Vorteil mehr an einer Fortsetzung des Tausches haben.

Damit ein Maximum existiert, muss überdies $d^2\Phi < 0$ sein. Im vorliegenden Falle hängt $\frac{\partial \Phi}{\partial x_a}$ allein von x_a, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_b}$ allein von x_b ab, so dass $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_a \partial x_b} = 0$ ist, somit wird die Bedingung des Maximums:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_a^2}\, dx_a^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_b^2}\, dx_b^2 < 0.$$

Diese Bedingung ist aber erfüllt, da sich in Nr. 5 zeigen wird, dass:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_a^2} < 0, \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_b^2} < 0.$$

Auch für den schwierigen Fall, dass $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_a \partial x_b} \neq 0$, existieren Untersuchungen.

Die Gleichungen (2) sind der Grundstein der mathematischen Wirtschaftslehre. Sie werden in verschiedener Form von verschiedenen Schriftstellern ausgedrückt. Setzen wir:

$$-\frac{dx_{1a}}{dx_{1b}} = p_b,$$

so zeigen die Gleichungen (1), dass man auch:

$$-\frac{dx_{2a}}{dx_{2b}} = p_b$$

hat und die Gleichungen (2) werden alsdann:

---

30) *L. Walras,* Économie politique, p. 122. Er nennt *rareté* die Quantitäten $\varphi_{1a}, \varphi_{1b}, \ldots$ und bezeichnet sie mit $x_a, x_b, \ldots$ (es sind dieses also andere Werte als die $x_{1a}, x_{1b}, \ldots$ des Textes). Seine Formel ist $\frac{x_{b1}}{x_{a1}} = p_b$, die mit der obigen Formel $\frac{\varphi_{1b}}{\varphi_{1a}} = p_b$ übereinstimmt. Er sagt, dass diejenigen Sachen *rares* sind, „welche einerseits uns *nützlich* sind, und andererseits uns in *beschränkten Quantitäten* zur Verfügung stehen". *W.* scheint dabei eine sogenannte *unbeschränkte* Quantität mit einer *grossen* Quantität zu verwechseln. Derselbe Irrtum kommt p. 102 (éd. 1900) wieder vor, wo *W.* von einer Quantität spricht, „die grösser ist als der Erweiterungsgrenznutzen", die er als eine *unbeschränkte* bezeichnet. Dieser Irrtum übt aber auf die weiteren Schlussfolgerungen keinen Einfluss aus.

$$\frac{\varphi_{1b}}{\varphi_{1a}} = \frac{\varphi_{2b}}{\varphi_{2a}} = p_b.$$

In dieser Form stellt sie *L. Walras* dar[27]). („*Walras*'sche Form".)

Die Gleichungen (2) kann man auch schreiben:

$$\frac{\varphi_{1a}(q_a + x_a)}{\varphi_{1b}(x_{1b})} = -\frac{dx_{1b}}{dx_{1a}} = \frac{\varphi_{2a}(x_{2a})}{\varphi_{2b}(q_b + x_{2b})}.$$

Dieses ist die *Jevons*'sche Form[31]).

Dergleichen einfache Transformationen haben keine wesentliche Bedeutung.

Diese Formeln, welche Form man auch vorziehen mag, lassen sich auf eine beliebige Anzahl von Gütern und am Tausche beteiligten Individuen ausdehnen. Der *Walras*'schen Theorie gemäss kommt man auf die Gleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_{1a} = \dfrac{1}{p_b}\varphi_{1b} = \dfrac{1}{p_c}\varphi_{1c} = \cdots \\ \varphi_{2a} = \dfrac{1}{p_b}\varphi_{2b} = \dfrac{1}{p_c}\varphi_{2c} = \cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

Der *Jevons*'schen Theorie gemäss kommt man zu den Gleichungen

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{\varphi_{1a}}{\varphi_{1b}} = \dfrac{\varphi_{2a}}{\varphi_{2b}} = \dfrac{\varphi_{3a}}{\varphi_{3b}} = \cdots = -\dfrac{dx_{1b}}{dx_{1a}} = \cdots \\ \dfrac{\varphi_{1a}}{\varphi_{1c}} = \dfrac{\varphi_{2a}}{\varphi_{2c}} = \dfrac{\varphi_{3a}}{\varphi_{3c}} = \cdots = -\dfrac{dx_{1c}}{dx_{1a}} = \cdots, \end{cases}$$

die mit den vorhergehenden identisch sind. Wir kommen nun auf den Tausch zwischen zwei Individuen mit blos zwei Waren zurück. Vermittelst der Gleichungen (1) eliminieren wir dx_{1a}, dx_{1b}, dx_{2a}, dx_{2b} aus den Gleichungen (2) und erhalten alsdann das System:

$$(5) \quad \begin{cases} x_{1a} + x_{2a} = 0, \qquad x_{1b} + x_{2b} = 0, \\ \varphi_{1a} : \varphi_{1b} = \varphi_{2a} : \varphi_{2b}. \end{cases}$$

Diese drei Gleichungen genügen indessen nicht, um die vier Unbekannten x_{1a}, x_{2a}, x_{1b}, x_{2b} zu bestimmen. Die alte Wirtschaftslehre hatte diese Thatsache schon vermutet. Es war ihr schon klar, dass

31) *Jevons,* Political economy, p. 108. Er gebraucht die Formel:

$$\frac{\psi_1(a-x)}{\psi_1(y)} = \frac{y}{x} = \frac{\psi_2(x)}{\psi_2(b-y)},$$

die, anders geschrieben, übereinstimmt mit:

$$\frac{\varphi_{1a}}{\varphi_{1b}} = -\frac{dx_{1b}}{dx_{1a}} = \frac{\varphi_{2a}}{\varphi_{2b}}.$$

die Resultate des Tausches sich änderten, wenn das Tauschverhältnis während des Tausches sich veränderte[32]); ihre Begriffe waren aber noch unbestimmt und unsicher; erst die mathematische Analyse hat ihnen Schärfe und Genauigkeit verschafft.

Hier haben wir grade ein Beispiel ihres Wertes. Die ersten Autoren, die dieses Problem mathematisch behandelt haben (*Jevons, Walras*), haben von wirtschaftlichen Kriterien geleitet, vorausgesetzt, man hätte $-\frac{x_{1a}}{x_{1b}} = p_b$, wobei p_b *konstant*.

Diese Quantität nennt *L. Walras* den *Preis von B in A*. Man bekommt so die Gleichung, die, um das System (5) zu vervollständigen, fehlte und das Problem des Tausches ist gelöst.

Man beobachtete aber bald, und *F. Y. Edgeworth* hat besonders betont, dass man auf diese Weise nur die Lösung eines speziellen Falles hatte, wenn auch schon eines wichtigen. *A. Marshall*[33]) hat eingehende Betrachtungen über den Fall angestellt, in dem der Preis p_b während des Tausches variiert. Allgemein gesagt, ist es klar, dass man eine weitere Gleichung braucht, sei es eine gewöhnliche oder eine Differentialgleichung, welche die zwei Quantitäten x_{1a}, x_{1b} mit einander verbindet[25]).

Von einem allgemeineren Standpunkte aus empfiehlt es sich, das Tauschproblem durch das der Verteilung einer bestimmten Quantität Ware zu ersetzen.

Der Tausch oder die Verteilung ist nur ein *Teil* eines wirtschaftlichen *Cyklus*; damit er vollständig werde, muss die *Produktion* und die *Kapitalbildung* dazu genommen werden. Zu den für den Tausch gegebenen Gleichungen muss man also die Gleichungen der Produktion und Kapitalisation hinzunehmen und man erhält dann das System von Gleichungen, das den wirtschaftlichen Cyklus vollständig für den Fall der freien Konkurrenz bestimmt. Man kann diese Gleichungen auch auf den Fall erweitern, wo es sich um ein Monopol handeln sollte oder um einen sozialistischen Staat oder irgend eine andere beliebige Hypothese[34]).

4. Grundgleichungen, die sich ergeben, wenn man die Auswahl als Ausgangspunkt nimmt[25]). Das wirtschaftliche Problem, in

32) Die Einwände, die *Thornton,* On labour, London 1870, Book II, Ch. I, p. 23 ff. gegen die klassische Werttheorie erhebt, erklären sich teilweise durch die Bemerkung des Textes.

33) *Marshall,* Principles, 1898, p. 414—416, 795—796, note XII.

34) *V. Pareto,* Cours 2, p. 400 ff. Die Gleichungen, die das wirtschaftliche Gleichgewicht ausdrücken, giebt § 135[1].

seiner allgemeinsten Form, kann auf folgende Weise formuliert werden. Gewisse Individuen haben bestimmte Bedürfnisse, die in der Auswahl zum Vorschein kommen, die sie treffen, wenn sie auf Widerstand stossen (Geschmack oder Bedürfnisse anderer Leute, mit denen sie tauschen, Schwierigkeiten, Kraftaufwendung um zu produzieren und zu kapitalisieren). Wie werden diese Individuen handeln? Die Antwort hat man, wenn man Auswahltabellen und Tabellen der Wirkung der Widerstände aufstellt. Diese Tabellen kann man am besten durch Gleichungen ausdrücken und ersetzen. Wie dieses geschieht, können wir sehen, wenn wir als Beispiel die Auswahltabellen nehmen.

Die zusammengesetzten Auswahlen, deren Ausdruck die Nachfrage der Waren ist, entstehen aus einfachen Auswahlen zwischen Waren, die zu je zweien genommen werden. Nehmen wir an, ein Individuum besitzt x_a von A und x_b von B. Suchen wir nun nach einer anderen derartigen Kombination $x_a + dx_a$, $x_b + dx_b$ für dasselbe Individuum, dass ihm die Wahl zwischen dieser Kombination und der vorhergehenden gleichgültig sei. Auf diese Weise, nach und nach fortschreitend, bestimmt man eine gewisse Kurve, die *Indifferenzkurve* heisst[35]). Von einer anderen Kombination ausgehend $x_a + \delta x_a$, $x_c + \delta x_c$, kommen wir auf eine neue Indifferenzkurve. Indem wir so fortfahren, bedecken wir die Ebene der x_a, x_c mit unendlich naheliegenden Indifferenzkurven. Man erhält dadurch ein geometrisches Schema der Bedürfnisse des in Betracht genommenen *homo oeconomicus*. Man könnte übrigens dieses Schema auch durch andere Kurven, wie die „*Vorzugskurven*", ausdrücken[36]).

---

35) Diese Benennung rührt von *F. Y. Edgeworth,* Psychics, p. 21 her. Er geht von der Betrachtung des Genusses und seiner Messung aus, um zu den Indifferenzlinien zu gelangen, die bei ihm als Indifferenzlinien der Kontrakte auftreten. Wir gehen den umgekehrten Weg; die Indifferenzlinie, deren Betrachtung bei uns von den Kontrakten unabhängig ist, ist ein Ergebnis der Erfahrung; diese ist unser Ausgangspunkt. Wir schreiten vom Bekannten zum Unbekannten. *I. Fisher,* Value and prices, chap. 1, § 4, hat richtig erkannt, dass die Wahlen, die Vorzugsurteile, nicht genügen, um ein Maass des Nutzens (Genusses, Ophelimität) zu finden; trotzdem sucht er nach diesem Maass und begründet auf ihm den Beweis der Fundamentalgleichungen. Dieser Weg muss ein für allemal aufgegeben und es darf nur ein System von Indices, wie sie die Beobachtung liefert, gebraucht werden.

36) Diesen Namen hat *F. Y. Edgeworth,* Psychics, p. 22 eingeführt; vgl. Gi. econ., März 1891. Er bezeichnet mit U und V die Totalophelimitäten, die zwei Individuen geniessen und mit x, y die Quantitäten, die wir mit x_a, x_b bezeichnet haben; $\frac{\partial U}{\partial x}$ ist demgemäss unser φ_a, u. s. w. Er nennt „*Kontraktkurve*" die Kurve, deren Gleichung ist:

Ist $dx_a + \pi_b dx_b = 0$ die Differentialgleichung der Indifferenzkurve, die durch die Punkte x_a, x_b geht, so ist π_b der *Maximalpreis*, den das Individuum bereit ist, durch Hingabe von A für den Besitz von B zu bezahlen; dieser Preis ist so hoch, dass es dem Individuum schliesslich gleichgültig ist, $-dx_a$ gegen dx_b zu tauschen oder nicht zu tauschen. Man könnte von der Betrachtung des Maximalpreises ausgehen, um die Gleichung der Indifferenzkurven aufzustellen; es ist aber der Allgemeinheit wegen besser, die Grundgleichungen ohne Bezug auf die Preise zu erhalten.

Die Vorzugskurven kann man auch aus der Betrachtung des Verhältnisses $\frac{dx_a}{dx_b}$ entwickeln; es giebt einen Wert für dieses Verhältnis, der eine unendlich nahe Kombination von x_a, x_b einer jeden anderen vorziehen lässt; so erhält man die Differentialgleichung der *Vorzugskurven.* Hat man das Schema der Bedürfnisse des *homo oeconomicus* bekommen und durch ein analoges Verfahren dasjenige der Wirkung der Hindernisse, so deduziert man aus diesen Schemata die Bedingungen des wirtschaftlichen Gleichgewichtes.

Folgt z. B. der Tausch einem gewissen Weg $f(x_a, x_b) = 0$, so beweist man leicht, dass das wirtschaftliche Gleichgewicht da stattfindet, wo $f(x_a, x_b) = 0$ eine Indifferenzkurve berührt[25]).

Die Indifferenzkurven können durch eine Gleichung dargestellt werden $F(x_a, x_b) = z$, in der die verschiedenen Werte von z den verschiedenen Indifferenzkurven entsprechen. Für eine und dieselbe Indifferenzkurve ist z konstant; man hat also auf dieser Kurve

$$\frac{\partial F}{\partial x_a} dx_a + \frac{\partial F}{\partial x_b} dx_b = 0,$$

eine Gleichung, die wir einfacher $F_a dx_a + F_b dx_b = 0$ schreiben wollen. Dies ist die Differentialgleichung der Indifferenzkurven. Sie ist ganz der ersten der Gleichungen (2) ähnlich; die zweite kann man auf dieselbe Weise finden. Im übrigen wird die Lösung des Problems des Tausches identisch mit der schon gegebenen. Der

---

$$\frac{\partial U}{\partial x} : \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y},$$

die, wie er selber bemerkt, Psychics, p. 21, nichts anderes als die *Jevons*'sche Gleichung ist. Ferner nennt er „*Nachfragekurve*" für ein Individuum 1 diejenige, deren Gleichung ist:

$$y : x = -\frac{\partial U}{\partial x} : \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Schliesslich versteht er unter „*Vorzugslinien*" die Kurven, welche die Indifferenzlinien rechtwinklig schneiden.

Unterschied liegt darin, dass wir damals von der Messung des Genusses ausgingen, während jetzt dieser Ausgangspunkt in den Resultaten des Experimentes, vermittelst dessen uns die Wünsche des Individuums offenbart worden sind, liegt. Die Funktionen F_a, F_b sind reine Erfahrungssache und haben, theoretisch, nichts Unbestimmtes oder Zweifelhaftes.

Bekanntlich können sich dann die Funktionen φ_a, φ_b von den Funktionen F_a, F_b nur um einen und denselben Faktor unterscheiden: $\varphi_a = \chi F_a$, $\varphi_b = \chi F_b$. Giebt es im allgemeinen eine Funktion Φ, deren partielle Derivierte φ_a, φ_b sind, und ebenso eine Funktion F, deren partielle Derivierte F_a, F_b sind, so hat man $\Phi = f(F)$, wo f eine arbiträre Funktion ist. Eben weil aber f arbiträr ist, sind die Experimente, die Wünsche und Auswahlen betreffend, welche uns F liefern, *nicht im Stande, Φ zu bestimmen.* Dies ist als ein wesentlich neues Ergebnis der mathematischen Behandlung anzusehen. Auf den inneren Grund, warum uns die Erfahrung wohl F liefert, nicht aber Φ, kann hier nicht eingegangen werden.

Noch auf andere Weise kann dies klar gemacht werden. Geben wir einer jeden Kombination x_a, x_b einen numerischen Index, der durchaus arbiträr sei, bis auf folgende zwei Bedingungen: 1) Fällt bei zwei Kombinationen die Wahl eher auf die eine als auf die andere, so muss die vorgezogene (die erste) einen höheren Index als die andere (zweite) bekommen; 2) zwei Kombinationen, unter denen zu wählen gleichgültig ist, müssen denselben Index bekommen. Dann kann man auf folgende Art ein System von Indices aufstellen. Die Vorzugslinien sind derartig, dass längs derselben Kurve x_a und x_b zugleich wachsen. Betrachten wir eine dieser Kurven und nehmen wir auf dieser Kurve eine Reihe von Punkten, denen wir mit x_a und x_b wachsende Indices geben. Durch einen jeden dieser Punkte hindurch legen wir eine Indifferenzlinie, deren Punkte alle denselben Index haben werden. Wir erhalten dadurch ein System von Indices. Das Gesetz, nach dem die Indices der Punkte der Vorzugslinie wachsen, ist durchaus beliebig; es muss jedoch das einer kontinuierlichen Funktion sein.

Geometrisch können diese Indices als Ordinaten z einer Oberfläche $F(x_a, x_b) = z$ betrachtet werden. Die Indifferenzlinien sind dann die Projektionen der Horizontalkurven dieser Oberfläche auf die Ebene, die Vorzugslinien die Projektionen der Linien grösster Neigung.

Es giebt unendlich viel Systeme von Indices und folglich eine unendliche Anzahl von Flächen, die alle dieselben Projektionen der Horizontallinien und Linien grösster Neigung haben.

Greifen wir nun zurück und nehmen wir einen Augenblick an, der Genuss liesse sich messen.

Auf einer jeden Indifferenzlinie wollen wir die Grösse des Genusses, den die durch diese Linien dargestellten Kombinationen ausdrücken, einschreiben[28]). Man beweist dann, dass die so eingeschriebenen Zahlen zu den Systemen von Indices gehören, die vorher besprochen worden sind. Die Oberfläche, deren Ordinaten den Genuss messen, gehört zu der unendlichen Zahl von Oberflächen, die alle dieselben Projektionen ihrer Horizontallinien haben[28]).

Um die Fundamentalgleichungen der wirtschaftlichen Statik aufzustellen, genügt die Kenntnis dieser Projektionen. Wir brauchen dagegen nicht zu wissen, ob der *Genuss* (die *Nützlichkeit*, die *Ophelimität*) eine messbare Grösse im mathematischen Sinne des Wortes ist oder nicht, noch weniger brauchen wir ein exaktes Maass des Genusses; die Kenntnis der Indifferenzlinien genügt. Die einzigen messbaren Grössen, die der Betrachtung zu Grunde liegen, sind die Waren selbst.

Damit wird der Gedankengang, der zu den Grundgleichungen führt, streng. Dasjenige was dieser Strenge im Wege stand, war überflüssig.

5. Eigenschaften der Elementar-Ophelimität und der Indifferenzlinien. Man kennt diese Eigenschaften sehr wenig. Sie hängen mit einander so zusammen, dass man aus den einen die anderen deduzieren kann und umgekehrt.

Eine erste Eigenschaft der Funktion Φ, die den Genuss misst, besteht darin, dass innerhalb gewisser Grenzen die Partialderivierten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_a} = \varphi_a, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_b} = \varphi_b, \ldots$$

positive Quantitäten sind. Das heisst also, dass der Genuss zunimmt, wenn die Quantität der wirtschaftlichen Güter, die uns zur Verfügung stehen, zunimmt. Wären wir genötigt, diese Güter in einer bestimmten Zeit zu geniessen, könnte der Genuss in Unlust umschlagen. Dieser Punkt mag in psychologischen Studien wichtig sein; in wirtschaftlichen Fragen kann man aber immer voraussetzen, ein Individuum sei nicht genötigt, die zu seiner Verfügung stehenden Güter zu verzehren.

Die Kosten (z. B. Fortschaffungskosten), um sich dessen zu entledigen, was man zuviel besitzt, sind im allgemeinen unbedeutend. Dies ist der Sinn des Sprüchwortes: Abondance de biens ne nuit guère.

Ist $F(x_a, x_b) =$ constans die Gleichung der Indifferenzlinien, so deduziert man aus der eben erwähnten Eigenschaft

$$\frac{dx_b}{dx_a} < 0.$$

Man kann auch umgekehrt diese Gleichung aufstellen und aus ihr die erwähnte Eigenschaft der Totalophelimität oder eines Systems von Indices[25]) deduzieren.

Man hat eine zweite Eigenschaft der Totalophelimität gefunden, indem man zuerst angenommen hat, der Genuss, den der Konsum von A verschafft, hänge blos von x_a ab, der Genuss, den B verschafft, blos von x_b, u. s. w. Dann gilt (s. Nr. **3**):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_a^2} < 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d\varphi_a}{dx_a} < 0.$$

Mit anderen Worten, der Genuss, den aufeinanderfolgende gleiche Dosen einer und derselben Ware verschaffen, wird immer geringer. Dieses Gesetz ist für die meisten Waren wahr; es giebt aber Ausnahmen, deren hauptsächlichste die Ersparnisse sind[37]). Man hat dieses Gesetz mit den Untersuchungen *Fechner*'s und *Delboeuf*'s[38]), die Wirkung wiederholter Empfindungen betreffend, in Verbindung zu bringen versucht; es ist aber noch nicht ersichtlich, dass man auf diesem Wege zu Ergebnissen kommt, die für die Wirtschaftslehre zu verwerten wären. Man darf nicht vergessen, dass man in der Wirtschaftslehre keine Studien über Individualpsychologie treibt. Die Betrachtung grosser Zahlen ist charakteristisch für diese Wissenschaft.

Aus der erwähnten Eigenschaft der Totalophelimität deduziert man für den Fall zweier Variabeln x_a, x_b die Eigenschaft:

$$\frac{d^2 x_a}{dx_b^2} > 0$$

für die Indifferenzlinien. Umgekehrt, diese Eigenschaft kann auch direkt für die Indifferenzlinien gefunden werden und führt dann für Φ oder für ein System von Indices des Genusses zur Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_a^2} \frac{dx_a}{dx_b} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_a \partial x_b} > 0. \text{ [28])}$$

Ist φ_a nur Funktion von x_a, φ_b nur von x_b, so hat man:

37) *V. Pareto,* Gi. econ., Jan. 1893, p. 1 ff.

38) *F. Y. Edgeworth,* Psychics, p. 62; *Th. Fechner,* Über ein psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. Leipzig Abhandl. 4 (1859), p. 457—532. Nachtrag dazu, Leipz. Ber. 11 (1859), p. 58. *J. Delboeuf,* Etude psychophysique, Bruxelles Mém. cour. 23 (1873), p. 5, 6, abgedr. in Élements de psychophysique gén. et spéc., Paris 1883, p. 109 ff., u. A.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_a \partial x_b} = 0$$

und da:

$$\frac{d x_a}{d x_b} < 0,$$

hat man:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_a^2} < 0.$$

Aus den Eigenschaften der Totalophelimität deduziert man die allgemeinen Eigenschaften der Nachfrage- und Angebotkurven[39]). Man könnte diese Eigenschaften auch aus den Eigenschaften der Indifferenzkurven ableiten. Für den Fall zweier Waren und wenn φ_a nur Funktion von x_a, φ_b nur Funktion von x_b ist, gelangt man zu dem Satze, dass die Nachfrage abnimmt, wenn der Preis steigt. Da dieses ja auch Ergebnis der Beobachtung ist, hat man darin eine Bestätigung der Theorie.

Das Angebot kann erst zunehmen und alsdann abnehmen, wenn der Preis steigt[40]). Der allgemeine Fall, wenn nämlich φ_a Funktion von $x_a, x_b, \ldots$ ist, ist auch analytisch behandelt worden[41]).

6. Verwertung der Grundgleichungen. Die blosse Aufstellung der Gleichungen eines Problems hat keinen Wert, wenn sich aus diesen Gleichungen sonst nichts folgern lässt. Sie sind ja nur ein Mittel zu anderem und nicht Selbstzweck. Einige Gelehrte haben gemeint, dass jetzt, da die Gleichungen gefunden sind, die Wirtschaftslehre weiter keine Schwierigkeiten zu bewältigen hätte. Es steht dagegen fest, dass die mathematische Wirtschaftslehre jetzt erst

---

39) *L. Walras,* De l'échange de plusieurs marchandises entre elles, Communication faite à la soc. des ing. civils le 17 oct. 1890. *Walras,* Geom. theory of the determ. of prices, Philadelphia, Amer. acad. of pol. and soc. science, translated unter the supervision of *J. Fisher,* Juli 1892. *V. Pareto,* Gi. Econ., Aug. 1892, stellt die allgemeine Gleichung:

$$\frac{\partial x_a}{\partial p_a} = \frac{-p_a x_a + \frac{\varphi_a}{p_a}\left(\frac{p_b^2}{\varphi_b'} + \frac{p_c^2}{\varphi_c'} + \cdots\right)}{\left(\frac{p_a^2}{\varphi_a'} + \frac{p_b^2}{\varphi_b'} + \cdots\right)\varphi_a'},$$

von der die Eigenschaften der Angebot- und Nachfragekurve abhängen, für den Fall auf, dass φ_a blos von x_a abhängig ist, u. s. w.

40) *L. Walras,* geom. theory of the determ. of prices, 39); *V. Pareto,* Gi. econ., Oct. 1893, p. 308 ff.

41) *V. Pareto,* Gi. econ., Oct. 1893, p. 304 ff.

eigentlich anfängt und dass es noch eine geraume Zeit dauern wird, ehe sie praktischen Wert haben wird.

Die Grundgleichungen setzen voraus, die Verteilung der Güter sei gegeben. Solange man nicht zu diesen Gleichungen die Betrachtung irgend eines Verteilungsgesetzes hinzunimmt, können die Folgen, zu denen man gelangt, nur solche sein, die mit einer unbestimmt gelassenen Verteilung verträglich sind. Dieser Umstand entzieht den Schlüssen einen grossen Teil ihrer Bedeutung. Glücklicherweise giebt es einen Umstand, der diese Schwierigkeit abschwächt. Das Gesetz der Verteilung der Güter variiert, wie es scheint, nur sehr langsam mit der Zeit[42]) und lässt sich durch eine ziemlich einfache Funktion ausdrücken. Man kann die Formel dieses Gesetzes in die Grundgleichungen einführen.

Inzwischen, so wie sie dastehen, liefern uns die Grundgleichungen eine Vorstellung, die man auf anderem Wege nicht erhält, von der gesamten wirtschaftlichen Cirkulation. Die konsumierten Quantitäten muss man alsdann, wie *I. Fisher* hervorgehoben hat, als Quantitäten betrachten, die in der Zeiteinheit genossen werden. Das Gleiche gilt für die produzierten Quantitäten.

Ökonomisten, die Mathematik nicht kennen, befinden sich in der Lage von Leuten, die ein System von Gleichungen[43]) lösen wollen, ohne zu wissen, was ein System von Gleichungen, nicht einmal, was eine einzelne Gleichung sei. Im Grunde genommen besteht das Verfahren, zu dem sie greifen, darin, anzunehmen, allen Gleichungen des Systems, bis auf eine einzige, sei Genüge geleistet und nun die Veränderungen der Quantitäten, die durch diese Gleichung verknüpft sind, zu studieren. Man gelangt auch so manchmal zu brauchbaren Detailstudien, aber zu keiner Einsicht in das ganze System. Oft verfällt man auch auf diesem Wege in grobe Fehler, die daher kommen, dass man vergisst, es sei blos eine Hypothese, dass den anderen Gleichungen bereits Genüge geleistet sei. Man nennt dasjenige, was hier p_b oder der Preis von B in A ist, auch *Tauschwert.*

Es seien $p_1, p_2, \ldots$ derartige Warenpreise, $q, \ldots$ die Arbeitspreise, i der Zinsfuss, $r, \ldots$ die Preise der Bodenrente, bedeuten ferner

---

42) *V. Pareto,* Cours 2, liv. 3.

43) So z. B. lösen die Händler auf dem Markte täglich Gleichungen, ohne sie zu kennen; will man aber die Theorie ihrer Operationen verstehen, muss man diese Gleichungen kennen. Oder, wenn jemand einen Hebel benützt, löst er eine Gleichung der Mechanik ohne deren Kenntnis: die Theorie des Hebels erfordert aber diese Kenntnisse. Die nicht mathematischen Ökonomisten lösen überdies Gleichungen der Wirtschaftslehre unrichtig auf.

$a_1, a_2, \ldots$ gewisse Parameter, so beweist die mathematische Wirtschaftslehre, dass die Unbekannten $p_1, p_2, \ldots, q, \ldots, i, r, \ldots$ durch ein System von ebensoviel Gleichungen bestimmt werden:

$$(6) \qquad \begin{cases} F_1(p_1, p_2, \ldots; \;\; q, \ldots; \;\; i; \;\; r, \ldots; \;\; a_1, a_2, \ldots) = 0, \\ F_2(p_1, p_2, \ldots; \;\; q, \ldots; \;\; i; \;\; r, \ldots; \;\; a_1, a_2, \ldots) = 0, \text{ etc.} \end{cases}$$

Hieraus geht hervor, dass die Unbekannten $p_1, p_2, \ldots$ erst nach Kenntnis *aller* Parameter $a_1, a_2, \ldots$ bestimmbar sind. Die nicht mathematischen Ökonomisten stellen sich indessen Probleme wie: Was ist der „Grund“ des Preiswertes[44])? Was ist der Grund des Zinses? u. s. f. Solche Probleme sind aber unbestimmt, weil ihnen willkürliche Hypothesen zu Grunde liegen. Es ist nicht möglich, *denjenigen* Parameter anzugeben, der z. B. p_1 „bestimmt“, und es ist ein unfruchtbarer Streit, wenn die Einen behaupten, dieser Parameter sei a_1, die Andern aber, es sei a_2 u. s. f. Oder, um ein Beispiel anderer Art anzuführen, so wird behauptet, die Produktionskosten „bestimmen“ den Verkaufspreis. Bezeichnet man aber die ersteren mit x, den letzteren mit y, so ist unter gewissen Bedingungen der Wirtschaftsorganisation die Gleichung $x = y$ eine von denen, die das wirtschaftliche Gleichgewicht aussagen.

Die Verdunkelung dieses so einfachen Sachverhalts durch Sätze wie: „Die Produktionskosten bestimmen den Verkaufspreis“ kann zu Fehlschlüssen und Sophismen führen und hat vielfach dazu geführt (s. Nr. 2)[24]).

Die allgemeinen Gleichungen des wirtschaftlichen Gleichgewichtes zeigen uns auf den ersten Blick eine schon von den Klassikern der Volkswirtschaftslehre zum Teil gekannte Wahrheit, die nämlich, dass die Preise nur Mittel und nicht Zweck sind; ein Mittel, um Beziehungen zwischen Genüssen und Widerständen herzustellen. Die Preise verschwinden durch Elimination aus den Grundgleichungen; zur Bestimmung der Quantitäten, die ein jeder erhält, bleiben nur die Parameter der Genüsse, Widerstände und der anfänglichen Verteilung des Reichtums. Man kann die merkwürdige Beobachtung machen, dass die Preise in den Gleichungen der Wirtschaftslehre ebenso auftreten, wie die Faktoren $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ in der Mechanik hinsichtlich ihrer Elimination aus den Gleichungen der virtuellen Geschwindigkeiten[45]).

---

44) *L. Walras,* Économie politique; die 30ste, 31ste, 32ste Vorlesung enthalten Widerlegungen von Irrtümern, die unter Volkswirten geläufig sind, die keine mathematische Bildung haben. Vgl. *Pareto,* Cours § 594, 598—600 ff.

45) *Pareto,* Cours 2, p. 411 ff.

Grade ebenso führt man die Preise ein, um die Verbindungen darzustellen.

Die mathematische Wirtschaftslehre giebt uns einen allgemeineren, klareren und strengeren Begriff von den grossen wirtschaftlichen Phänomenen, so von denen der *Rente*[46]), des *internationalen Handels*[47]), des *Zinses*[48]), der Theorie der *Besteuerung*[49]), der Theorie des *Geldes*[50]), der *Messung der Kaufkraft des Goldes*[51]), der Theorie der *Verteilung*[52]), und anderer mehr.

Die Theorie des *Monopols* ist zuerst, aber in unvollständiger Form, von *Cournot* bearbeitet worden; sie ist ferner der Gegenstand

46) *L. Walras,* Économie politique, leçon 20, 21; *K. Wicksell,* Wert, Kapital und Rente, Jena 1893; dazu *E. Barone,* Gi. econ., nov. 1895, p. 524 ff.; *L. Einaudi,* La rendita mineraria, Torino 1900; *Pareto,* Cours, § 746—751.

47) *A. Marshall,* foreign trade; *F. Y. Edgeworth,* London econ. Journ., März, Sept., Dez. 1894; *M. Pantaleoni,* Principi; *V. Pareto,* Gi. Econ., Febr. 1894 (math. Theorie der auswärtigen Wechselkurse); Cours, § 854—879.

48) S. vor allem *Böhm-Bawerk,* Kapital u. Kapitalzins, Innsbruck 1884 und 1889; ferner *I. Fisher,* New York Public. amer. econ. assoc., Aug. 1896; *M. Pantaleoni,* Principi; *L. Walras,* Écon. politique, leçon 17; *U. Gobbi,* Milano Istit. lomb. 1898; *Pareto,* Cours 2, liv 2, ch. 2.

49) *M. Pantaleoni,* La traslazione dei tributi, Roma 1882; Teoria della pressione tributaria, Roma 1887; *Edw. R. A. Seligman,* New York Public. amer. econ. assoc., März, Mai 1892; *K. Wicksell,* Finanztheoretische Untersuchungen nebst Darstellung und Kritik des Steuerwesens Schwedens, Jena 1896; *E. Barone,* Gi. Econ., März 1894; *F. Y. Edgeworth,* Lond. Econ. Journ., März, Sept., Dez. 1897.

50) *L. Walras,* Journ. des écon., Paris Dez. 1876, Mai 1881, Okt. 1882; Théorie de la monnaie, Lausanne 1886; Économie appliquée 1, p. 1—190, Économie politique, sect. V, p. 375—428; Gi. econ. Aug. 1889 f.; *M. Pantaleoni,* Principi; *A. Marshall,* Principles; *I. Fisher,* Lond. Econ. Journ., Dez. 1896; Juni, Dez. 1897; *J. B. Clark,* New York Pol. sci. quart. 1895, p. 389; *P. des Essars,* Paris Journ. soc. stat. 1895, p. 143; *Pareto,* Cours § 269—416.

51) *W. S. Jevons,* Investigations in currency and finance, London 1884; *F. Y. Edgeworth,* London J. roy. stat. soc. 1883; London Quart. J. econ. 1889; Report 1888, 1889; *L. Walras,* Écon. politique; *I. Fisher,* Publ. amer. econ. assoc. 1896; *Pareto,* Cours § 383.

52) Über Verteilung: *M. Pantaleoni,* Rassegna italiana, Contributo alla teoria del riparto delle spese pubbliche, Roma 1884; *J. B. Clark,* Annals amer. acad. pol. 1893; *P. H. Wicksteed,* Laws of distribution, London 1894; *E. Barone,* Gi. econ. 1896; *V. Pareto,* Gi. econ., April 1895, 1897.

Andere Fragen behandeln noch:

F. Y. Edgeworth (The mathematical theory of banking), London J. roy. stat. soc. 1888; *L. Walras,* Économie sociale, Lausanne 1896; *E. Barone,* Consumer's rent, Gi. econ., Sept. 1894. Viele Schriften behandeln die wirtschaftlichen Erscheinungen des Transportwesens, der Eisenbahnen, des Börsenwesens u. s. w. Über die mathematisch-statistischen Schriften s. I D 4 a.

einer wichtigen Monographie von *F. Y. Edgeworth*[53]). Bisher ist die Theorie des *Tausches*, unter der Voraussetzung es herrsche freie Konkurrenz, am ausführlichsten mathematisch behandelt worden. Vielleicht ist man bisweilen zu lange bei diesen Untersuchungen über die Feststellung der Preise stehen geblieben. Die Geometrie liefert häufig brauchbare Lösungen wirtschaftlicher Probleme[54]). Die Studien über Produktion gehen davon aus, dass bestimmte produzierte Quantitäten und bestimmte Kapitalien in Betracht gezogen werden. Es ist aber besser, wenn man ganz allgemein von *Transformationen* redet und den Begriff Kapital nur als Mittel gebraucht, um in Kürze gewisse Transformationen zu bezeichnen. Man nennt *Grenzproduktion* die Zunahme der Produktion, auf die Einheit reduziert, welche eine unendlich kleine Zunahme der Produktionsfaktoren bewirkt[55]). Hier aber darf man in vielen Fällen nicht die Betrachtung unendlich kleiner Variationen durch solche ganzer Einheiten ersetzen, wenn man nicht Fehler begehen will. *L. Walras* nennt *coëfficient de fabrication* die konstante oder variabele Quantität eines Kapitals, welche dazu gehört, damit eine Einheit des Produktes erzeugt werde[56]). Im Grunde genommen ist diese Weise, das Produktionsproblem zu behandeln, der ersteren ganz gleich[57]).

7. Das Maximum der Ophelimität oder die Freiheit der Wahl. Eine der wichtigsten Anwendungen der Grundgleichungen besteht in der Untersuchung der Bedingungen, welche für *„das Maximum des Wohlseins“* nötig sind. Ein jedes System von Gleichungen, zu dem das System (3) oder ein anderes äquivalentes gehören, führt zu einem Maximum (das Minimum ist ausgeschlossen) der Totalophelimitäten $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$; d. h. führt zu jenem *Maximum der Genüsse*, das mit Rücksicht auf die gegebenen Widerstände möglich ist oder, anders gesagt, es bringt keine neuen, nicht schon durch die Hindernisse gegebenen Einschränkungen der Auswahl mit sich.

---

53) *F. Y. Edgeworth,* Monopolio, Gi. Econ., Juli 1897.

54) Hier sind besonders zu berücksichtigen die Werke von *L. Walras, F. Y. Edgeworth, A. Marshall, I. Fisher, R. Auspitz* u. *R. Lieben, H. Cunynghame* (s. das Litteraturverz.).

55) *Wicksteed,* Laws of distribution, London 1894. In der Theorie der Grenzproduktivität, wie sie in diesem Werk dargestellt wird, steckt ein Fehler, der von *Pareto,* Cours, § 714[1] nachgewiesen ist. Dieser Irrtum kommt bei *Walras,* Écon. polit. (Auflage v. 1900), p. 374—375 wieder vor. Der Verfasser behandelt als unabhängige Variabeln Grössen, die es nicht sind. Vgl. *Montemartini,* La Teorica delle productività marginali, Pavia 1899.

56) *Walras,* Écon. polit.

57) *Pareto,* Cours, § 717.

Ist m die Zahl der Waren, k die Zahl der Individuen, so ist die Anzahl der Gleichungen (3) $k(m-1)$; wenn die k Gleichungen hinzukommen:

$$(7) \qquad \begin{cases} x_{1a} + x_{2a} + x_{3a} + \cdots = 0, \\ x_{1b} + x_{2b} + x_{3b} + \cdots = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

hat man km Gleichungen, die, *theoretisch aufgelöst* gedacht, mit Bezug auf die km Unbekannten $x_{1a}, x_{2a}, \ldots, x_{1b}, x_{2b}, \ldots$ geben:

$$(8) \qquad \begin{cases} x_{1a} = F_{1a}(p_b, p_c, \ldots), \quad x_{2a} = F_{2a}(p_b, p_c, \ldots), \ldots \\ x_{1b} = F_{1b}(p_b, p_c, \ldots), \quad x_{2b} = F_{2b}(p_b, p_c, \ldots), \ldots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Diese Gleichungen stellen die Gesetze *des Angebotes und der Nachfrage* dar. Man kann sie an die Stelle der Systeme (3) und (7) setzen. Wenn man sich aber die Funktionen $F_{1a}, \ldots, F_{1b}, \ldots$ gegeben denkt, weiss man nicht, ob sie mit dem System (3) verträglich sind, d. h. ob sie zum Maximum der Genüsse führen oder nicht, und dann verfehlen wir den wichtigsten Zweck der wirtschaftlichen Untersuchungen. Dies ist der Grund, weshalb es ratsam ist, die Systeme (3) und (7) beizubehalten und System (8) aus ihnen herzuleiten. Ausserdem sind die Gleichungen (8) weit komplizierter als diejenigen, die aus der Betrachtung der Wahl zwischen zwei Waren zu entnehmen sind; auch dieses ist ein Grund, um von letzteren auszugehen und die Gleichungen (8) aus ihnen zu folgern.

8. Die Variationen der Produktionskoeffizienten. Es ist wichtig, diejenigen Koeffizienten zu bestimmen, welche das Maximum der Ophelimität liefern. Diese Koeffizienten können sowohl durch freie Konkurrenz der Unternehmer, wie auch durch sozialistische Staatsmassregeln bestimmt werden, wenn letztere den Zweck haben sollten, einem Jeden dasjenige Maximum der Ophelimität zu verschaffen, welches mit den in jenem Staate gegebenen Verteilungsregeln verträglich ist. Man beweist[58]), was a priori durchaus nicht einleuchtet, dass diese zwei Bestimmungsmethoden zu denselben Werten für die Koeffizienten führen.

Demgemäss kann ein sozialistischer Staat, falls er das Wohlbefinden fördern will, ausschliesslich auf die Verteilung und auf die Widerstände einwirken, nicht aber auf die Produktionskoeffizienten.

58) *Pareto,* Cours, § 719², 721².

Allgemein gelangen wir, von diesen Ansätzen aus, zu folgendem Satz: „Man kann den Reichtum von bestimmten Individuen auf andere übertragen, indem man die Bedingungen der freien Konkurrenz abändert, sei es in Bezug auf die Produktionskoeffizienten, sei es in Bezug auf die Umwandlung der Ersparnisse in Kapitalien. Diese Übertragung von Reichtum ist notwendigerweise mit einer Zerstörung von Reichtum verbunden."

Dieses Theorem spielt in der Wirtschaftslehre eine analoge Rolle, wie das zweite Prinzip in der Thermodynamik[59]).

9. Dynamik. Bisher haben wir uns nur mit dem statischen Teil des Problems abgegeben. Der dynamische Teil ist bisher noch wenig behandelt worden[60]) und hat, mit Ausnahme der Theorie der Krisen, meistens nur unvollkommene und unklare Werke veranlasst. Wir haben gesehen, dass es nicht möglich gewesen ist, in den das Gleichgewicht betreffenden Ergebnissen der Erfahrung ein Maass für die Gesamtophelimität Φ oder deren Partialderivierte φ_a, $\varphi_b, \ldots$ zu finden. Um diese Funktionen zu bestimmen[61]), muss man zu dynamischen Gesichtspunkten greifen, grade wie in der Mechanik die Kraft durch die Acceleration gemessen wird. Die Analogieen zwischen der mathematischen Wirtschaftslehre und der reinen Mechanik sind übrigens zahlreich und tiefgreifend[60]): die eine der Grundgleichungen der mathematischen Wirtschaftslehre ist nichts anderes als die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten[62]).

Ein einzelner Teil der dynamischen Wirtschaftslehre, derjenige der die *Krisen* behandelt, hat wichtige und ausführliche Studien veranlasst, die aber zum grössten Teil empirisch sind. Aus diesen Studien können wir trotzdem ersehen, dass der wirtschaftliche Kreislauf Erscheinungen bietet, die denen der Trägheit in der Mechanik analog sind[63]). Die mathematische Wirtschaftslehre wird wahrscheinlich eines Tags ein Prinzip gebrauchen können, das dem d'Alembertschen ähnlich ist. Es ist aber geratener, nicht der Zu-

---

59) *Pareto,* Cours, § 730.

60) *S. N. Patten,* The theory of dynamic economics, Philadelphia; *J. B. Clark,* New York Ann. amer. acad. polit. and soc. scienc., 1892; *E. Barone,* Gi. Econ., Nov. 1894; *Pareto,* Cours 2, § 928, p. 282—284; Gi. Econ., Sept. 1901.

61) *I. Fisher,* Value and prices, appendix II; *Pareto,* Cours, § 592[1]; Gi. Econ., Sept. 1901.

62) *Pareto,* Gi. Econ., Juni 1892, p. 415 ff.

63) *P. des Essars,* Paris J. soc. stat. 1895.

kunft vorzugreifen. Vorläufig ist blos die wirtschaftliche Statik wissenschaftlich ausgebildet und hat brauchbare Ergebnisse[64]) geliefert.

---

64) Einige Einwände, die sich gegen das ganze System *Pareto*'s und dessen Aufbau richten, s. bei *L. v. Bortkewitsch,* Jahrb. f. Gesetzgeb., Verw., Volksw. 22 (1898), Heft 4, p. 89.

(Abgeschlossen im August 1902.)

I G 3. UNENDLICHE PROZESSE MIT KOMPLEXEN TERMEN [1])

VON

ALFRED PRINGSHEIM

IN MÜNCHEN.

Inhaltsübersicht.

Litteratur s. unter I A 3.

---

1. Grenzwerte komplexer Zahlenfolgen. Die komplexe Zahlenfolge $(a_\nu) = (\alpha_\nu + \beta_\nu i)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ heisst *konvergent* und a ihr *Grenzwert*, in Zeichen:

(1) $$a = \lim_{\nu = \infty} a_\nu,$$

wenn eine Zahl $a = \alpha + \beta i$ existiert, derart, dass $|a - a_\nu|$ mit hinlänglich wachsenden Werten von ν *beliebig klein* wird. Das letztere gilt dann auch von $|\alpha - \alpha_\nu|$, $|\beta - \beta_\nu|$, sodass also aus (1) die Beziehungen folgen:

(2) $$\alpha = \lim \alpha_\nu, \quad \beta = \lim \beta_\nu,$$

(demnach $\lim\, a_\nu = \lim \alpha_\nu + i \lim \beta_\nu$). Umgekehrt folgt aber auch (1) allemal aus (2), sodass, wie vielfach geschieht, die Relationen (2) auch geradezu als *Definition* für den Inhalt der Beziehung (1) an-

1) Bezüglich der *unendlichen Determinanten* sei hier generell bemerkt, dass die in I A 3, Nr. 58, 59 erwähnten Resultate auch für *komplexe Terme* gelten.

gesehen werden können[2]). Als *notwendige und hinreichende Bedingung* für die Existenz von Gleichung (1) erscheint dann eine Beziehung von der Form

$$|a_{n+\varrho} - a_n| < \varepsilon, \tag{3}$$

die auch durch die beiden äquivalenten ersetzt werden kann:

$$|\alpha_{n+\varrho} - \alpha_n| < \varepsilon, \quad |\beta_{n+\varrho} - \beta_n| < \varepsilon. \tag{4}$$

In jedem andern Falle heisst die Folge (a_ν) *divergent.* Die Beziehung

$$\lim a_\nu = \infty \tag{5}$$

ist gleichwertig mit der folgenden:

$$\lim |a_\nu| = \infty. \tag{6}$$

Sie erfordert daher *nicht einmal*, dass zum mindesten $\lim |\alpha_\nu| = \infty$ oder $\lim |\beta_\nu| = \infty$, sondern kann schon erfüllt sein, wenn nur $\overline{\lim}\, |\alpha_\nu| = \infty$, $\overline{\lim}\, |\beta_\nu| = \infty$. (*Beispiel* $a_\nu = \nu \cdot i^\nu$.) Ist *mindestens eine* der Folgen (α_ν), (β_ν) *eigentlich divergent*[3]), so erscheint es mit Rücksicht auf die Reihenlehre nicht unzweckmässig, auch (a_ν) als *eigentlich divergent* zu bezeichnen.

2. Unendliche Reihen mit komplexen Gliedern: Konvergenz und Divergenz. Setzt man

$$s_\nu = a_0 + a_1 + \cdots + a_\nu \tag{7}$$
$$(a_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu i, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

so heisst die Reihe Σa_ν *konvergent* und s ihre *Summe,* wenn

$$\lim s_\nu = s. \tag{8}$$

Ist $s_\nu = \sigma_\nu + \tau_\nu i$, $s = \sigma + \tau i$, so hat man nach Nr. **1** zugleich auch

$$\lim \sigma_\nu = \sigma, \quad \lim \tau_\nu = \tau, \tag{9}$$

und *umgekehrt;* also: *konvergiert* Σa_ν gegen $s = \sigma + \tau i$, so sind auch $\Sigma \alpha_\nu$, $\Sigma \beta_\nu$ *konvergent* und besitzen die Summen σ, τ — *vice versa.*

Wenn die Zahlenfolge (s_ν) *divergiert,* so heisst die Reihe Σa_ν *divergent; eigentlich divergent,* wenn (s_ν) *eigentlich divergiert* (s. Nr. **1** am Schlusse).

3. Absolute Konvergenz. Für die *Konvergenz* von Σa_ν ist *hinreichend* die *Konvergenz* von $\Sigma |a_\nu|$;[4]) die Reihe heisst in diesem Falle *absolut* konvergent. Wegen $|\alpha_\nu| \leqq |a_\nu|$, $|\beta_\nu| \leqq |a_\nu|$ sind dann allemal

2) Diese *zweite* Definition ist die ältere; vgl. *Cauchy,* Anal. alg., p. 240. Die *erste* entspricht mehr der modernen Auffassung, bei welcher die komplexe Zahl als *ein* Objekt (geometrisch als *Punkt*) erscheint; a ist, geometrisch gesprochen, nichts anderes als die (einzige) Häufungsstelle der Punkte a_ν.

3) Vgl. I A 3, p. 68.

4) *Cauchy,* Résumés analytiques 1833, p. 112.

auch $\Sigma\alpha_\nu$ und $\Sigma\beta_\nu$ *absolut* konvergent. Umgekehrt folgt wegen $|a_\nu| \leqq |\alpha_\nu| + |\beta_\nu|$ aus der *absoluten Konvergenz* von $\Sigma\alpha_\nu$ und $\Sigma\beta_\nu$ diejenige von Σa_ν.

Zur Untersuchung der *absoluten* Konvergenz einer komplexen Reihe Σa_ν hat man die Kriterien für Reihen mit positiven Gliedern auf die Reihe $\Sigma|a_\nu|$ anzuwenden. Insbesondre gelten also die *Cauchy*schen Fundamentalkriterien hier in der Form[5]):

$$\overline{\lim}\sqrt[\nu]{|a_\nu|}\begin{cases}>1\\<1\end{cases},\quad \overline{\lim}\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right|\begin{cases}>1\colon \textit{Div.}\\<1\colon \textit{Konv.}\end{cases}\tag{10}$$

Für die verschärften Kriterien empfiehlt sich[6]) im gegenwärtigen Falle eine Umformung, bei welcher statt des rechnerisch unbequemen $|a_\nu| = \sqrt{\alpha_\nu^2+\beta_\nu^2}$ lediglich $|a_\nu|^2$ in den zu prüfenden Grenzausdrücken auftritt.

Man erhält so, wenn wiederum $\frac{1}{D_\nu}$ bezw. $\frac{1}{C_\nu}$ das allgemeine Glied einer positivgliedrigen *divergenten* bezw. *konvergenten* Reihe bedeutet, die folgenden Kriterien *erster* und *zweiter* Art[7]):

$$\begin{cases}\underline{\lim}\, D_\nu^2\cdot|a_\nu|^2>0\colon \textit{Divergenz}\\ \overline{\lim}\, C_\nu^2\cdot|a_\nu|^2<\infty\colon \textit{Konvergenz}\end{cases}\tag{11}$$

$$\begin{cases}\overline{\lim}\left(D_\nu^2\cdot\left|\dfrac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2-D_{\nu+1}^2\right)<0\colon \textit{Divergenz}\\[2ex] \underline{\lim}\left(C_\nu^2\cdot\left|\dfrac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2-C_{\nu+1}^2\right)>0\colon \textit{Konvergenz.}\end{cases}\tag{12}$$

Die direkte Überführung der linken Seite des *Konvergenz*kriteriums (12) in diejenige des *Divergenz*kriteriums[8]) erweist sich hier als unmöglich. Dagegen lassen sich die *beiden* Kriterien (12) unter unerheblichen die Auswahl der D_ν betreffenden Einschränkungen[9]) durch das *disjunktive Doppelkriterium* ersetzen:

$$\overline{\underline{\lim}}\left(D_\nu\cdot\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2-\frac{D_{\nu+1}^2}{D_\nu}\right)\begin{cases}<0\colon \textit{Divergenz}\\>0\colon \textit{Konvergenz.}\end{cases}\tag{13}$$

Die Wahl

$$\begin{cases}D_\nu=\nu,\quad \text{bezw.} =L_k(\nu)\\ (L_0(\nu)=\nu;\quad L_k(\nu)=\nu\cdot \lg_1(\nu)\ldots\lg_k(\nu),\ \text{für } k=1,2,3\ldots)\end{cases}\tag{14}$$

---

5) *Cauchy,* Anal. alg., p. 280, 283; Rés. analyt., p. 113.

6) *Pringsheim,* Arch. Math. Phys. (3) 4 (1902), p. 1.

7) Vgl. I A 3, p. 84, Formel (20), (21).

8) Vgl. I A 3, p. 87, Gl. (31).

9) *Pringsheim,* a. a. O. p. 4.

liefert nach einer einfachen Umformung die Kriterienskala:

$$(15)\begin{cases} \text{a)}\ \overline{\lim}\, \dfrac{\nu}{2}\left(\left|\dfrac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - 1\right) \begin{cases} < 1: \textit{Divergenz} \\ > 1: \textit{Konvergenz} \end{cases} \\ \text{b)}\ \overline{\lim}\, \dfrac{\lg_k(\nu)}{2\,L_{k-1}(\nu)}\left((L_{k-1}(\nu))^2 \left|\dfrac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - (L_{k-1}(\nu+1))^2\right) \begin{matrix} < 1: \textit{Divergenz} \\ > 1: \textit{Konvergenz} \end{matrix} \end{cases}$$

(15a) entspricht dem *Raabe*'schen Kriterium, (15b) der *Bertrand*'schen Skala[10]).

Für die meisten Anwendungen erweisen sich das Kriterium (a) und das Anfangskriterium ($k = 1$) der Skala (b), nämlich

$$(16)\qquad \overline{\lim}\, \frac{\lg \nu}{2\nu}\left(\nu^2\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - (\nu+1)^2\right) \begin{cases} < 1: \textit{Divergenz} \\ > 1: \textit{Konvergenz} \end{cases}$$

als ausreichend. Insbesondere liefern sie die folgende im wesentlichen von *Weierstrass*[11]) auf anderem Wege abgeleitete Verallgemeinerung des *Gauss*'schen[12]) Kriteriums: Ist

$$(17)\qquad \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{\varkappa + \lambda i}{\nu} + \frac{\varrho_\nu + \sigma_\nu i}{\nu^2}$$

$$(\text{wo } \overline{\lim}\, |\varrho_\nu + \sigma_\nu i| < \infty),$$

so ist $\Sigma |a_\nu|$ *konvergent* falls $\varkappa > 1$, *divergent*, falls $\varkappa \leqq 1$.[13])

4. Unbedingte und bedingte Konvergenz. Da die *absolute* Konvergenz von Σa_ν mit derjenigen von $\Sigma \alpha_\nu$, $\Sigma \beta_\nu$ zusammenfällt, so folgt aus den für reelle Reihen geltenden Sätzen (vgl. I A 3, Nr. **31**, p. 92), dass jede *absolut* konvergente Σa_ν auch *unbedingt* konvergiert *und umgekehrt.*

Ist Σa_ν *konvergent,* dagegen $\Sigma |a_\nu|$ *divergent,* so muss mindestens eine der Reihen $\Sigma \alpha_\nu$, $\Sigma \beta_\nu$ nur *bedingt* konvergieren: das Gleiche gilt also auch von Σa_ν. Allgemeine Kriterien zur Feststellung der even-

---

10) Vgl. I A 3, p. 87, 88.

11) *Weierstrass* operiert mit dem reziproken Quotienten $\dfrac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$, J. f. Math. 51 (1856) = Werke 1, p. 185. Vgl. auch *Stolz*, Allg. Arithm. 2, p. 145; *Pringsheim* a. a. O. Fussn. 6, p. 8. Funktionentheoretische Herleitung der *Weierstrass*'schen Kriterien mit Hilfe der *Euler-Maclaurin*'schen Summenformel bei *Wilhelm Wirtinger*, Acta math. 26 (1902), p. 265.

12) I A 3, p. 80.

13) Dass im Falle $\varkappa \leqq 1$ nicht nur $\Sigma |a_\nu|$, sondern auch Σa_ν divergiert, wird von *Weierstrass* und *Pringsheim* a. a. O. gleichfalls bewiesen; über die besondere Art der Divergenz lassen sich noch bestimmte Aussagen machen (s. die Citate in [10])). Vgl. auch den Schluss von Nr. 4.

tuell nur bedingten Konvergenz existieren naturgemäss gerade so wenig wie bei reellen Reihen. Die *Abel*'sche Transformation (vgl. I A 3 Gl. (37), p. 94) liefert auch hier den Satz[14]): „$\Sigma a_\nu b_\nu$ *konvergiert* zum mindesten in der vorgeschriebenen Anordnung, wenn $\Sigma|a_\nu - a_{\nu+1}|$, Σb_ν konvergieren; ist $\lim a_\nu = 0$, so braucht $|\Sigma b_\nu|$ nur unter einer endlichen Grenze zu bleiben.“ — Für den Fall, dass $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ in der Form (17) darstellbar ist, konvergiert, wie *Weierstrass* zuerst gezeigt hat, $\Sigma a_\nu x^\nu$ noch *bedingt* für $|x| = 1$, ausser $x = 1$, falls $0 < \varkappa \leqq 1$.[15])

5. Multiplikation und Addition komplexer Reihen. Doppelreihen. Die Multiplikationsregel für zwei *konvergente* Reihen Σa_ν, Σb_ν, nämlich

$$(18) \quad \Sigma a_\nu \cdot \Sigma b_\nu = \Sigma c_\nu, \quad \text{wo} \quad c_\nu = a_0 b_\nu + a_1 b_{\nu-1} + \cdots + a_\nu b_0,$$

gilt nach *Cauchy*[16]), wenn Σa_ν, Σb_ν *absolut* konvergieren, nach *Abel*[17]) allemal, sofern Σc_ν überhaupt konvergiert; dazu ist hinreichend, keineswegs notwendig, dass *eine* der Reihen Σa_ν, Σb_ν *absolut* konvergiert[18]).

Für die *Addition* einer endlichen Anzahl konvergierender Reihen $\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu^{(\mu)}$ $(\mu = 0, 1, \ldots m)$ gilt auch hier wie in I A 3 Nr. **35**, p. 97 die Beziehung:

$$(19) \qquad \sum_0^m{}_\mu \left(\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu^{(\mu)} \right) = \sum_0^\infty{}_\nu \left(\sum_0^m{}_\mu\, a_\nu^{(\mu)} \right).$$

Ist $m = \infty$, so ist für die Konvergenz der betreffenden Reihen und die Existenz der Beziehung:

$$(20) \qquad \sum_0^\infty{}_\mu \left(\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu^{(\mu)} \right) = \sum_0^\infty{}_\nu \left(\sum_0^\infty{}_\mu\, a_\nu^{(\mu)} \right)$$

---

14) S. z. B. *Stolz*, Allg. Arith. 2, p. 144.

15) *Weierstrass*, J. f. Math. 51 (1856), p. 29 = Werke 1, p. 185. — *Stolz*, Allg. Arithm. 2, p. 155. — *Pringsheim*, a. a. O. p. 18.

16) Anal. alg., p. 283.

17) *Abel* giebt allerdings (J. f. Math. 1 (1826), p. 318 = Werke 1, p. 226) den *Beweis* nur für *reelle* Reihen; doch ist der Beweis leicht auf *komplexe* Reihen zu übertragen. — Anderer Beweis bei *Cesàro*: Bull. Soc. math. (2) 4 (1890), p. 327.

18) *F. Mertens*, J. f. Math. 79 (1875), p. 182. Anderer Beweis bei *W. V. Jensen*, Nouv. corresp. math. 1879, p. 430. — Die Reihe Σc_ν konvergiert in unendlich vielen Fällen *absolut*, auch wenn *eine* der Reihen Σa_ν, Σb_ν oder *beide* nur *bedingt* konvergieren, bezw. sogar *divergieren*: *F. Cajori*, Amer. Trans. 2 (1901), p. 25; *Pringsheim*, ebenda, p. 404.

nach *Cauchy*[19]) hinreichend, dass $\sum\limits_0^\infty{}^\mu \sum\limits_0^\infty{}^\nu |a_\nu^{(\mu)}|$ *konvergiert* (*sog. Cauchy'scher Doppelreihensatz*). Unter dieser Voraussetzung konvergiert nach *Cauchy*[20]) auch die „*Doppelreihe*“

$$(21) \qquad \sum_0^\infty{}^{\mu,\,\nu} a_\nu^{(\mu)} = \lim_{m,\,n=\infty} \sum_0^m{}^\mu \sum_0^n{}^\nu a_\nu^{(\mu)}$$

gegen dieselbe Summe. Überhaupt gelten für derartige *absolut konvergente* $\sum^{\mu,\nu} a_\nu^{(\mu)}$ dieselben Sätze für die entsprechenden *reellen* Reihen[21]).

6. Unendliche Produkte[22]). Setzt man $\prod\limits_0^n{}^\nu (1 + a_\nu) = A_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$, so heisst das unendliche Produkt $\prod\limits_0^\infty{}^\nu (1 + a_\nu)$, wo durchweg $|1 + a_\nu| > 0$ angenommen wird, *konvergent* und A der Wert dieses Produktes, wenn $\lim A_n = A$ *endlich* und *von Null verschieden ist.* In jedem anderen Falle (insbesondere also auch für $\lim A_n = 0$) heisst das Produkt *divergent*[23]). Für die Konvergenz von $\Pi(1 + a_\nu)$ ist *hinreichend* diejenige von $\Pi(1 + |a_\nu|)$; das betreffende Produkt heisst alsdann *absolut* konvergent. Es ist in diesem Falle auch *unbedingt* konvergent — *vice versa. Notwendig* und *hinreichend* für die absolute Konvergenz von $\Pi(1 + a_\nu)$ ist die Konvergenz von $\Sigma|a_\nu|$. Man hat sodann auch:

$$(22) \qquad \prod_0^\infty{}^\nu (1 + a_\nu) = 1 + a_0 + \sum_1^\infty{}^\nu A_{\nu-1} a_\nu,$$

wobei die rechts stehende Reihe *absolut* konvergiert, auch wenn man die einzelnen Summanden der Aggregate $A_{\nu-1}$ als Reihenglieder auffasst. Auch darf ein absolut konvergentes Produkt in ein endliches oder unendliches Produkt von Teilprodukten umgeformt werden.

Ist $\Sigma|a_\nu|$ divergent, Σa_ν *bedingt* konvergent, so *kann* $\Pi(1 + a_\nu)$

---

19) Anal. algébr., p. 539, 547.

20) A. a. O. p. 537, 547. Definition und Beweis nicht recht deutlich; vgl. I A 3, p. 98, Fussn. 144.

21) S. I A 3, p. 98, 99.

22) Ausser der I A 3, p. 113, 114 angegebenen Litteratur s. *Dini,* Ann. di mat. (2) 2 (1870), p. 35; *De Pasquale,* Giorn. di mat. 35 (1897), p. 259.

23) Vgl. I A 3, p. 113, Fussn. 311.

noch *bedingt* konvergieren. Eine *hinreichende* Bedingung ist die Konvergenz der Reihen $\Sigma A_\nu^{(m)}$ und $\Sigma |a_\nu|^m$, wo

$$A_\nu^{(m)} = a_\nu - \frac{1}{2} a_\nu^2 + \frac{1}{3} a_\nu^3 - + \cdots + \frac{(-1)^m}{m-1} a_\nu^{m-1} \qquad (m \geqq 2).$$ [24])

7. Unendliche Kettenbrüche. Über die *formalen* mit Kettenbrüchen vorzunehmenden Operationen, insbesondere über die Bildung der Näherungsbrüche und die Umformung in Reihen und Produkte, ebenso bezüglich der Definition von Konvergenz und Divergenz des *unendlichen* Kettenbruchs $\left[b_0; \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ s. I A 3, Nr. **45 ff.**

Für unendliche Kettenbrüche in der *Hauptform* $\left[q_0; \frac{1}{q_\nu}\right]_1^\infty$ besteht — analog wie für positive q_ν — allemal *Divergenz*, wenn $\Sigma |q_\nu|$ *konvergiert*[25]). Von *hinreichenden* Konvergenzbedingungen allgemeineren Charakters sind nur die folgenden bekannt: $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *konvergiert*, wenn:

$$(23) \qquad |b_\nu| \geqq |a_\nu| + 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$ [26])

desgleichen wenn:

$$(24) \quad \left|\frac{a_2}{b_1 b_2}\right| < \frac{1}{2}, \quad \left|\frac{a_{2\nu+1}}{b_{2\nu} b_{2\nu+1}}\right| + \left|\frac{a_{2\nu+2}}{b_{2\nu+1} b_{2\nu+2}}\right| \leqq \frac{1}{2} \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Für den Fall $|a_\nu| = 1$ besteht noch die etwas weitere *Konvergenzbedingung*:

$$(25) \qquad \left|\frac{1}{b_{2\nu-1}}\right| + \left|\frac{1}{b_{2\nu}}\right| \leqq 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$ [27])

Für Kettenbrüche von der Form $\left[\frac{\varepsilon_\nu r_\nu (1 - r_{\nu-1})}{1}\right]_1^\infty$, wo $r_0 = 0$, $r_\nu > 0$, $|\varepsilon_\nu| = 1$, giebt *van Vleck*[28]) die *Konvergenz* der Reihe

---

24) *Pringsheim*, Math. Ann. 22 (1883), p. 481; *Stolz*, Allg. Arithm. 2, p. 246; besondere Fälle des Satzes vorher bei *Cauchy*, Anal. algébr., p. 563 und *Arndt*, Arch. f. Math. 21 (1853), p. 86.

25) *Stolz*, Allg. Arithm. 2, p. 279. Die für die *Konvergenz* von

$$\left[\frac{1}{q_\nu}\right]_1^\infty \equiv \left[\frac{1}{\alpha_\nu + \beta_\nu i}\right]_1^\infty$$

notwendige Divergenz von $\Sigma |\alpha_\nu + \beta_\nu i|$ ist nach *van Vleck* (Am. M. S. Trans. 2 [1901], p. 223, 229) auch *hinreichend*, wenn die α_ν *gleichbezeichnet* sind und die β_ν *alternierende* Vorzeichen besitzen (mit eventuellem Ausschluss einer endlichen Gliederanzahl); oder wenn nur die *erste* bezw. *zweite* dieser Bedingungen erfüllt ist, zugleich aber $\left|\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}\right|$ bezw. $\left|\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right|$ unter einer endlichen Schranke bleibt.

26) *Pringsheim*, Münch. Ber. 28 (1898), p. 316.

27) Desgl. p. 323, 320.

28) Am. M. S. Trans. 2 (1901), p. 481.

$$\sum_1^\infty {}_\nu \frac{r_1 \ldots r_\nu}{(1-r_1)\ldots(1-r_\nu)}$$

als *notwendige* und, falls $r_\nu < 1$, auch *hinreichende* Bedingung.

Für die *Konvergenz eines rein periodischen* $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ — wo $a_{m\lambda+\mu} = a_\mu$, $b_{m\lambda+\mu} = b_\mu$ ($\mu = 1, 2, \ldots m$; $\lambda = 1, 2, \ldots$ in inf.) und $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ den ν^{ten} Näherungsbruch bedeutet — ist *notwendig* die Bedingung $|B_{m-1}| > 0$; dieselbe ist *hinreichend*, wenn die Diskriminante D der quadratischen Gleichung:

$$B_{m-1}x^2 + (B_m - A_{m-1})\,x - A_m = 0 \tag{26}$$

$$[\text{also } D = (B_m - A_{m-1})^2 + 4A_m B_{m-1}]$$

verschwindet; andernfalls muss noch

$$\left|\Re\left(\frac{A_{m-1}+B_m}{\sqrt{D}}\right)\right| > 0 \quad \text{und} \quad |A_\nu - x_2 B_\nu| > 0 \tag{27}$$

$$(\nu = 1, 2 \ldots m-1),$$

sein, wo x_2 eine genau präzisierte Wurzel der obigen quadratischen Gleichung bedeutet[29]). Der Wert des Kettenbruchs $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ ist dann gleich der andern Wurzel x_1, während mit gewissen Einschränkungen ($-x_2$) den Wert des „*konjugierten*" unrein periodischen Kettenbruchs $\left(b_m; \frac{a_m}{b_{m-1}}, \ldots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{b_m}, \ldots\right)$ liefert[30]).

Über sog. *algebraische* Kettenbrüche, d. h. solche, deren Glieder *rationale* Funktionen einer (komplexen) Veränderlichen x sind, s. I A 3, Nr. **55** und II B 1, Nr. **39**.

---

29) In etwas anderer Darstellungsweise zuerst von *Stolz* angegeben: Innsbr. Ber. 1886, p. 1 und 1887/88, p. 1; Allg. Arithm. 2, p. 302. Andere Herleitung in der hier gegebenen Formulierung bei *Pringsheim*, Münch. Ber. 30 (1900), p. 480.

30) *Pringsheim*, a. a. O., p. 488.

Bandregister.

(Die *grösseren Ziffern* beziehen sich auf die Seiten des Bandes, die *kleineren Ziffern* auf die Anmerkungen. Ein *Semikolon* dient (abgesehen vom üblichen Gebrauch) zur Trennung verschiedener, hinter einander zitierter Bandartikel, ein *Bindestrich* (abgesehen vom üblichen Gebrauch) als Ersatz des Stichwortes; *runde Klammern* geben entweder einen gleichwertigen Wortausdruck an, oder aber das zugehörige Gebiet, *eckige Klammern* einen sachlichen Zusatz; gesperrter Druck bezieht sich auf Stichworte des Registers, *kursiver* Druck hebt Unterabschnitte schärfer hervor.)

B

C*)

*) S. auch unter **K** und **Z.**

F

H

I

K *)

---

*) S. auch unter C.

O

S

U

V

W

Z*)

*) S. auch unter C.