ESSAI D'UNE RESTITUTION

DE

TRAVAUX PERDUS D'APOLLONIUS

SUR LES QUANTITÉS IRRATIONNELLES.

EXTRAIT DU TOME XIV

DES MÉMOIRES PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS À L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT IMPÉRIAL DE FRANCE.

ESSAI D'UNE RESTITUTION

DE

TRAVAUX PERDUS D'APOLLONIUS

SUR LES QUANTITÉS IRRATIONNELLES,

D'APRÈS DES INDICATIONS TIRÉES D'UN MANUSCRIT ARABE,

PAR M. F. WŒPCKE.

PARIS.

IMPRIMERIE IMPÉRIALE.

M DCCC LVI.

A

MONSIEUR ADOLPHE TRENDELENBURG,

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE BERLIN,

PROFESSEUR DE PHILOSOPHIE

À L'UNIVERSITÉ ROYALE DE BERLIN, ETC.

HOMMAGE RESPECTUEUX DE L'AUTEUR.

ESSAI D'UNE RESTITUTION

DE

TRAVAUX PERDUS D'APOLLONIUS

SUR LES QUANTITÉS IRRATIONNELLES,

D'APRÈS DES INDICATIONS TIRÉES D'UN MANUSCRIT ARABE.

DES TRAVAUX PERDUS D'APOLLONIUS SUR LES QUANTITÉS IRRATIONNELLES, ET DU COMMENTAIRE GREC DU DIXIÈME LIVRE D'EUCLIDE QUI EN CONTIENT LA NOTCIE.

§ 1.

Ce que les mathématiques grecques ont produit de plus élevé est représenté par trois noms, ceux d'Archimède, d'Apollonius et de Diophante.

Mais tandis qu'Archimède brille par l'universalité de son génie, Diophante et Apollonius sont admirés surtout pour avoir amené à un haut degré de perfection des branches spéciales des mathématiques, celui-là l'algèbre indéterminée, celui-ci la géométrie.

C'était, d'ailleurs, relativement à Apollonius, le jugement des anciens eux-mêmes, qui l'appelaient le géomètre par excellence, *le Grand Géomètre*[1]. Aussi les ouvrages de cet illustre mathématicien, soit ceux qui nous ont été conservés, soit ceux dont nous ne

[1] Voir le Commentaire du premier livre des *Coniques* par Eutocius, p. 9 de l'édition d'Oxford des *Coniques* d'Apollonius.

connaissons l'existence que par des citations, montrent, en effet, que c'est la géométrie qu'il a cultivée de préférence.

Le plus important de ces ouvrages est son grand *Traité des Coniques*. Les quatre premiers livres seuls de ce traité ont été conservés dans l'original grec. Le cinquième, sixième et septième livre, qui contiennent les découvertes les plus précieuses que nous ait laissées la géométrie grecque, furent traduits en latin d'après des traductions et des extraits arabes. Enfin, le huitième et dernier livre fut restitué par Halley, dans sa magnifique édition des *Coniques*, publiée à Oxford, en 1710, d'après les indications données par Pappus[1].

Les ouvrages d'Apollonius intitulés : *De la Section de raison*[2], *De la Section de l'espace, De la Section déterminée, Des Contacts, Des Inclinaisons*[3], *Des Lieux plans,* sur lesquels nous trouvons des no-

[1] Il paraît que le huitième livre avait péri de bonne heure, mais que cependant les mathématiciens arabes, qui allèrent en Grèce rechercher les monuments de la science grecque qui se perdaient dans la décadence du Bas-Empire, en trouvèrent encore quelques propositions qu'ils eurent soin de joindre à leurs traductions des sept premiers livres. C'est ce qui résulte du passage suivant du *Qitâb Alfihrist,* ms. n° 4136, ancien fonds arabe de la Bibliothèque impériale, t. II, fol. 111 v.

وقال بنو موسى ان الكتاب ثمان مقالات والموجود منه سبعة وبعض الثامنة وترجم
الاربع مقالات الاولة بين يدى احمد بن موسى هلال بن ابى هلال الحمصى والثلثة
الاواخر ثابت بن قرة الحرانى والذى يضاف من المقالة الثامنة اربع اشكال

« Et les Banoû Moûçâ ont dit que le traité (des *Coniques*) consistait en huit livres, dont il n'existe que sept et une partie du huitième. Les quatre premiers livres furent traduits sous la direction de Ahmed Ben Moûçâ par Helâl Ben Abî Helâl Alhimçî, et les trois derniers par Thâbit Ben Korrah Alharrânî; et ce qui s'y trouve joint du huitième livre, ce sont quatre propositions. »

[2] Cet ouvrage d'Apollonius fut également traduit en latin par Halley, d'après une traduction arabe découverte dans un manuscrit de la bibliothèque Bodléienne par Ed. Bernard. (Voir Apollonii Pergæi *De Sectione rationis libri duo,* etc. opera et studio Edmundi Halley, Oxonii, 1706, in-8°, préface.)

[3] Le traité des *Inclinaisons* est aussi cité par Marinus dans son *Introduction aux Données d'Euclide.* (Voir l'édition d'Oxford des *Œuvres d'Euclide,* p. 453.) Au même endroit, Marinus cite encore un autre ouvrage d'Apollonius, intitulé *Traité universel.*

tices assez étendues chez Pappus[1], traitent tous de sujets purement géométriques[2]. C'est aussi par la géométrie qu'Apollonius résolut le problème *des stations et des rétrogradations des planètes*, solution rapportée par Ptolémée[3], et qui constitue, comme on sait, une belle question de maximum. Les sujets de deux autres ouvrages, l'un sur *le Dodécaèdre et l'Icosaèdre inscrits à une même sphère* mentionné par Hypsiclès[4], et l'autre sur *la Vis d'Archimède* (*Περὶ τοῦ κοχλίου*) cité par Proclus[5], ne furent traités sans doute par Apollonius que géométriquement.

Cependant, si Apollonius était avant tout géomètre, il ne l'était pourtant pas exclusivement. Un fragment du second livre des collections mathématiques de Pappus, découvert et publié par Wallis[6], contient des extraits d'un ouvrage d'Apollonius, qui avait pour but de faciliter le calcul de très-grands nombres; et les principes établis dans cet ouvrage paraissent avoir été mis en pratique par Apollonius dans un autre ouvrage, cité par Eutocius[7], et dans lequel il détermina le rapport de la circonférence au rayon du cercle avec une plus grande précision que cela n'avait été fait par Archimède. Ce sont donc là des travaux et des découvertes arithmétiques qui ajoutent à la gloire du grand géomètre.

[1] Voir la préface du VII^e^ livre des *Collections mathématiques* de Pappus, p. 240 et suiv. de l'édition de Bologne, 1660, in-folio; et p. I à XLIV de l'édition ci-dessus citée de l'ouvrage *De sectione rationis* faite par Halley.

[2] Ces ouvrages d'Apollonius, les *Coniques*, et quelques autres traités d'Euclide, d'Aristée et d'Ératosthènes, formaient, d'après Pappus, *loc. cit.*, le *Lieu résolu* ou l'analyse géométrique des anciens. Cependant, il paraît qu'Apollonius avait écrit, en outre, un traité spécial du *Lieu résolu*, qui est cité par Eutocius. (Voir l'édition d'Oxford des *Coniques* d'Apollonius, p. 11, et comparer Wallis, *Opera*, t. II, p. 274.)

[3] Voir *Almageste*, liv. XII, chap. I.

[4] Voir la préface du XIV^e^ livre des *Éléments d'Euclide*, édition d'Oxford, p. 431.

[5] Voir le II^e^ livre du *Commentaire du I^er^ livre des Éléments d'Euclide*, p. 29, l. 20, de l'édition de Bâle, 1533, in-fol.

[6] Pappi Alexandrini *Fragmentum secundi libri mathematicæ collectionis*, edidit Joh. Wallis, Oxoniæ, 1688, in-8°; et Johannis Wallis *Opera*, Oxoniæ, 1699, in-folio, vol. III, p. 595-614.

[7] Voir Archimède, édit. d'Oxford, p. 216. Wallis (*Opera*, t. III, p. 599, note *e*) et après lui Halley (préface de son édition des *Coniques*, dernière page) paraissent avoir été disposés à considérer ces deux ouvrages comme un seul et même ouvrage.

§ 2.

Mais ce qui sans doute paraîtra digne d'attention, c'est que dans la traduction arabe d'un commentaire grec sur le dixième livre d'Euclide, commentaire dont le texte grec ne nous est pas parvenu, je viens de trouver la preuve qu'Apollonius s'est occupé aussi des quantités irrationnelles, et qu'il a apporté dans ses recherches sur cette matière la puissance de génie qui caractérise cet esprit éminent.

Euclide avait considéré trois espèces d'irrationnelles, produites respectivement au moyen de la proportion, de l'addition et de la soustraction. Il avait démontré que le premier de ces trois modes de génération donne lieu à une infinité d'irrationnelles; mais, en réalité, il ne s'était occupé que d'une seule irrationnelle produite par ce moyen, et de douze autres, dont six étaient formées par addition, et six par soustraction. On peut caractériser, en général, ce nombre très-restreint d'irrationnelles, qui avait été l'objet des travaux d'Euclide, comme *irrationnelles binômes et du second degré.*

Apollonius dépassa des limites aussi étroites et ouvrit à la théorie des irrationnelles un nouvel et vaste horizon. Aux douze irrationnelles formées au moyen de l'addition et de la soustraction, il ajouta les innombrables espèces des *irrationnelles polynômes,* et pour les irrationnelles formées au moyen de la proportion, il s'éleva à la conception des *médiales supérieures,* qui sont représentées par la racine d'un degré quelconque d'un produit de certaines puissances de deux rationnelles ou irrationnelles quelconques.

Ces nouvelles irrationnelles, dont le nombre était infiniment de fois infini, furent appelées *inordonnées,* par opposition aux treize irrationnelles d'Euclide, dont le nombre et la génération étaient parfaitement définis, et que, pour cette raison, on désignait par le nom d'irrationnelles *ordonnées.*

Les mots grecs qui correspondent à ces deux termes sont évidemment ἄτακτος et τεταγμένος. Ce qui m'en donne la certitude, ce sont plusieurs passages de l'Introduction aux Données d'Euclide par Marinus[1], et principalement celui que je transcris ici. Sa conformité avec les renseignements nouveaux que je tire du manuscrit arabe est une preuve précieuse de leur authenticité.

Οὕτω δὲ ἔχει καὶ πρὸς τὸ ῥητὸν καὶ ἄλογον τὸ τεταγμένον τε καὶ ἄτακτον· κοινωνοῦνται γὰρ ἀλλήλοις πολλαχῇ, καὶ διενήνοχε τὸν εἰρημένον τρόπον. Οὐδὲ γὰρ ταῦτα ἐξισάζει ἄλληλα, οὐδ' ἕτερον τοῦ ἑτέρου ἐστὶ περιληπτικὸν, ἡ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων, καὶ αἱ οὕτως κατειλημμέναι ἄλογοι τεταγμέναι μέν εἰσιν, οὐκέτι δὲ καὶ ῥηταὶ, καὶ ὁ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου.

« Voici quelle est la relation entre le rationnel et l'irrationnel d'une part, et l'ordonné et l'inordonné de l'autre. Ils ont des points communs sous beaucoup de rapports, tandis qu'ils diffèrent entre eux de la manière qu'on vient de dire. Ils ne sont ni les équivalents les uns des autres, ni compris les uns dans les autres, *car la droite de deux noms et les irrationnelles ainsi conçues sont ordonnées,* mais non pas rationnelles, de même que le rapport de la diagonale au côté du carré, etc. »

§ 3.

La source à laquelle j'ai puisé la connaissance de ces travaux d'Apollonius, dont jusqu'à présent la trace même avait été perdue, est, comme je viens de le dire, la traduction arabe d'un commentaire grec sur le dixième livre d'Euclide.

Cette traduction, dont l'auteur est Aboû Othmân le Damascène[2], se trouve dans le ms. n° 952. 2 (supplément arabe de la Bibliothèque impériale), dont elle occupe vingt feuillets depuis fol. 23 v° jusqu'à fol. 42 v°. La copie en a été faite par Ahmed Ben Mohammed Ben Abd Aldjalîl Alsidjzî, excellent géomètre lui-même, et dont j'ai fait connaître un ouvrage dans les extraits ajoutés à la

[1] Voir Euclide, édit. d'Oxford, p. 453 à 459. Comparer Proclus, III[e] livre du *Commentaire du I[er] livre des Éléments d'Euclide*, p. 60, l. 7 en rem. et suiv. de l'édition de Bâle.

[2] Voir Wenrich, *De Auctorum græcorum versionibus et commentariis syriacis, arabicis, armeniacis, persicisque*, Lipsiæ, 1842, p. XXVIII et p. 34; et Gartz, *De Interpretibus et explanatoribus Euclidis arabicis*, Halæ, 1823, p. 17.

fin de la traduction de l'algèbre d'Omar Alkhayyâmî[1]. Cette copie fut terminée à Chîrâz, au mois de Djoumâdâ premier de l'an 358 de l'hégire (mars-avril 969 de notre ère)[2].

[1] *L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî*, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits; par F. Wœpcke; Paris, 1851, p. 117 et suiv.

[2] Une description de ce manuscrit, qui se trouve dans le catalogue manuscrit du supplément arabe rédigé par M. Reinaud, était de nature à fixer l'attention des personnes qui s'occupent de recherches sur l'histoire des mathématiques. Dans cette note, M. Reinaud fait connaître les titres de six traités, occupant les quarante-deux premiers feuillets du volume. Je crois faire une chose utile en donnant ci-après une énumération détaillée de tous les traités et fragments de traités contenus dans ce manuscrit. Cette énumération peut, je crois, offrir un véritable intérêt pour l'histoire des mathématiques, tant à cause du nombre et de l'importance de ces traités, qu'à cause de l'époque très-ancienne et bien constatée où les copies renfermées dans ce volume ont été faites.

Voici, dans l'ordre du manuscrit, la liste exacte des titres de ces pièces :

1° (Verso du premier feuillet non numéroté et fol. 1 r° à 18 v°.)
Traité d'Ibrâhîm Ben Sinân sur la méthode de l'analyse et de la synthèse dans les problèmes géométriques.

مقالة لابرهيم بن سنان فى طريق التحليل والتركيب فى المسائل الهندسية

Copié par Ahmed Ben Mohammed Ben Abd Aldjalîl, à Chîrâz, au mois de rabîa second de l'an 358 (février-mars 969 de notre ère).

2° (Fol. 19 r° à 21 r°.)
Traité sur les centres de cercles qui se touchent, situés sur des lignes (données), d'après la méthode de l'analyse, par Wîdjan Ben Wastam, connu sous le nom d'Aboû Sahl Alkoûhî*.

كتاب مراكز الدوائر المتماسة على الخطوط بطريق التحليل استخرجه ويجن بن وستم المعروف بابى سهل القوهى

(Collationné avec le manuscrit autographe الاصل.)

3° (Fol. 21 v° à 22 v°, l. 11.)
Traité d'Euclide sur le levier**.

مقالة لاقليدس فى الميزان

* Une analyse succincte de ce traité a été donnée dans l'*Algèbre d'Omar Alkhayyâmî*, p. 55, l. 22 et suiv. de la traduction française.

** Ce traité a été publié dans le *Journal asiatique*, cahier de septembre-octobre 1851, p. 220 et suiv.

Il est ici de la plus grande importance de connaître le nom et l'époque de la vie de l'auteur de ce commentaire grec. Pour cette

4° (Fol. 22 v°, l. 12 à 23 r°, l. 6.)

Traité d'Archimède sur la pesanteur et la légèreté *.

مقالة لارشميدس فى الثقل والخفة

5° (Fol. 23 v° à 31 r°.)

Premier livre du traité de *B. los* sur les quantités rationnelles et sourdes dont il est fait mention dans le dixième livre de l'ouvrage d'Euclide sur les Éléments, traduit par Aboû Othmân, le Damascène.

المقالة الاولى من كتاب بلس فى الاعظام المنطقة والصم التى ذكرها فى المقالة العاشرة من كتاب اوقليدس فى الاسطقسات ترجمة ابى عثمن الدمشقى

6° (Fol. 31 v° à 42 v°.)

Second livre du Commentaire du dixième livre des Éléments d'Euclide.

المقالة الثانية من تفسير المقالة العاشرة من كتاب اوقليدس فى الاصول

(Date de la copie : Chîrâz, au mois de djoumâdâ premier de l'an 358, mars-avril 969.)

7° (Fol. 43 r° à 47 v°.)

Sur la signification du dixième livre (d'Euclide).

فى معنى المقالة العاشرة

8° (Fol. 48 r° à 50 v°.)

Traité sur la manière de mener deux lignes issues d'un point et renfermant un angle donné, d'après la méthode de l'analyse, par Wîdjan Ben Wastam, connu sous le nom d'Aboû Sahl Alkoûhî **.

كتاب اخراج الخطين من نقطة على زاوية معلومة بطريق التحليل استخرجه ويجن بن وستم المعروف با (*sic*) سهل القوهى

(Collationné avec le manuscrit autographe.)

9° (Fol. 51 r° à 52 r°.)

Sur l'objet et le contenu des Éléments d'Euclide.

10° (Fol. 52 v° à 53 v°, l. 10.)

Lettre d'Ahmed Ben Mohammed Ben Abd Aldjalîl sur la solution d'un

* Ce sont les énoncés des propositions du Ier livre et de la 1re proposition du IIe livre du traité d'Archimède, *De iis quæ in humido vehuntur*. (Voir *Archimède*, édit. d'Oxford, p. 333 et suiv.)

** Une analyse succinte de ce traité a été donnée dans l'*Algèbre d'Omar Alkhayyâmi*, p. 55, l. 7 en rem. et suiv. de la traduction française.

raison, j'ai rassemblé plusieurs passages relatifs à cet auteur, extraits de divers manuscrits arabes, et au moyen desquels je crois

problème tiré de l'ouvrage de Yoûhanna Ben Yoûçouf, et relatif à la division d'une ligne droite en deux parties égales, et révélation de l'erreur de Yoûhanna à ce sujet.

رسالة احمد بن محمد بن عبد الجليل فى جواب مسألة عن كتاب يوحنا بن يوسف من انقسام خط مستقيم بنصفين وتبيين خطاء يوحنا فى ذلك

11° (Fol. 53 v°, l. 11 à 55 v°.)

Traité d'Euclide sur la division (des figures planes)*.

كتاب اقليدس فى القسمة

12° (Fol. 56 r°.)

Fragment relatif à un sujet astronomique.

13° (Fol. 56 v° à 59 r°, l. 17.)

Traité de Thâbit (Ben Korrah) sur la retardation du mouvement dans la sphère des signes et sur son accélération suivant les points de l'excentrique où se trouve le (corps en) mouvement.

كتاب الفه ثابت فى ابطاء الحركة فى فلك البروج وسرعتها بحسب المواضع التى تكون فيها من الفلك الخارج المركز

14° (Fol. 59 r°, l. 18 à 60 r°, l. 8.)

Fragment relatif à la théorie du mouvement de la lune.

(Date de la copie : Chîrâz, le dernier jeudi du mois de rabîa second de l'an 359 de l'hégire, 10 mars 970.)

15° (Fol. 60 v° à 75 v°.)

Traité d'Aboûl Haçan Thâbit Ben Korrah, le Sabéen, sur la composition des rapports.

كتاب ابى الحسن ثابت بن قرة الصابئ فى تاليف النسب

Ce traité est divisé en trois chapitres, qui occupent respectivement une page et demie, treize pages et demie, et seize pages.

(Date de la copie : Chîrâz, à la fin du mois de djoumâdâ second de l'an 359, mai 970.)

16° (Fol. 76 r° à 78 r°.)

Lettre sur le calcul des racines sourdes, adressée par Mohammed Ben Abd Alazîz Alhâchimî (محمد بن عبد العزيز الهاشمى) à l'émir Aboûl Fadhl Djafar Ben Almoqtafî (ابو الفضل جعفر بن المكتفى).

* Une traduction de ce traité a été publiée dans le *Journal asiatique*, cahier de septembre-octobre 1851, p. 233 et suiv.

pouvoir résoudre ces deux questions d'une manière assez satisfaisante, quelque difficile qu'il soit de restituer avec exactitude

17° (Fol. 78 v° à 80 v°, l. 5.)

Lettre d'Alfadhl Ben Hâtim Alnaïrîzî sur l'azimut de la Kiblah.

رسالة الفضل بن حاتم النيريزى فى سمت القبلة

18° (Fol. 80 v°, l. 6 et suiv.)

Additions à quelques propositions du dixième livre (d'Euclide), existant en langue grecque, et traduites par Nazhîf Ben Yaman, le médecin *.

هذا ما نقله نظيف بن يمن المتطبب مما وجد فى اليونانى من الزيادة فى اشكال المقالة العاشرة

19° (Fol. 81 r° à 86 r°.)

Fragment, manquant de commencement, relatif à la formation des triangles rectangles en nombres rationnels ou entiers.

20° (Fol. 86 v° à 92 v°.)

Lettre du chaïkh Aboû Djafar Mohammed Ben Alhoçaïn à Aboû Mohammed Abdallah Ben Alî, le calculateur, sur la formation des triangles rectangles ayant des côtés rationnels, et sur l'utilité qu'offre leur connaissance.

رسالة الشيخ ابى جعفر محمد بن الحسين الى ابى محمد عبد الله بن على الحاسب فى انشاء المثلثات القائمة الزوايا المنطقة الاضلاع والمنفعة فى معرفتها

(Collationné avec le manuscrit autographe.)

21° (Fol. 93 r°.)

Fragment relatif à un sujet astronomique.

22° (Fol. 93 v° à 95 r°, l. 8.)

Recette d'une médecine universelle avec manière de s'en servir. — Au milieu de ce morceau, on trouve intercalées (fol. 94 v°) les observations de quelques conjonctions qui ont été citées et traduites par M. Caussin, dans son Mémoire sur les tables d'Ibn Yoûnis (*Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque du Roi*, t VII, p. 238).

23° (Fol. 95 r°, l. 9 et suiv.)

Sur la manière de prendre les heures égales sur le dos de l'astrolabe.

* Ce sont deux démonstrations, l'une de la 1re et l'autre de la 6e proposition du dixième livre d'Euclide. La première est la première des deux démonstrations de la 1re proposition qui se trouvent dans l'édition d'Oxford. La seconde n'est pas essentiellement différente de la 1re des deux démonstrations de la 6e proposition qu'on trouve dans la même édition. (Comparer ci-après au n° 34, et un passage du *Târîkh Alhoqamâ* rapporté par Casiri, t. I, p. 340, col. *a*, l. 14 et suiv. et p. 341, l. 22 et suiv.)

des noms grecs, autrement inconnus, d'après la transcription si imparfaite des manuscrits arabes, et au milieu des leçons souvent

24° (Fol. 95 v° à 122 r°.)
Traité de Thâbit Ben Korrah sur la mesure des corps paraboliques.

(مقالة) لثابت بن قرة فى مساحة الجسمات المكافية

(Date de la copie : Chîrâz, samedi 22 de rabîa premier de l'an 358, 13 février 969.)

25° (Fol. 122 v° à 134 v°, l. 13.)
Traité de Thâbit Ben Korrah sur la mesure de la parabole.

كتاب ثابت بن قرة فى مساحة قطع المخروط الذى يسمى المكافى

26° (Fol. 134 v°, l. 14 à 136 v°, l. 4.)
Traité d'Ibrâhîm Ben Sinân sur la mesure de la parabole.

كتاب ابرهيم بن سنان فى مساحة القطع المكافى

(Date de la copie : Chîrâz, au mois d'ardabehicht de l'an 338 d'Yezdedjird, avril-mai 969 de notre ère.)

27° (Fol. 136 v°, l. 5 à 137 r°.)
Lettre d'Ahmed Ben Mohammed Ben Abd Aldjalîl à Aboû Alî Nazhîf Ben Yaman, le médecin, sur la construction d'un triangle acutangle au moyen de deux lignes droites inégales.

رسالة احمد بن محمد بن عبد الجليل الى ابى على نظيف بن يمن المتطبب فى عمل مثلث حاد الزوايا من خطين مستقيمين مختلفين

(Date de la copie : le jeudi, dî-bâder du mois d'abân de l'an 339 d'Yezdedjird, 27 octobre 970.)

28° (Fol. 137 v° à 139 r°.)
Lettre d'Ahmed Ben Mohammed Ben Abd Aldjalîl au chaïkh Aboûl Hoçaïn Mohammed Ben Abd Aldjalîl sur les sections produites dans les paraboloïdes et hyperboloïdes de révolution.
(Date de la copie : le lundi, râm-rôz du mois de bahmen de l'an 340 d'Yezdedjird, 12 février 972.)

29° (Fol. 139 v° à 140 v°.)
Mémoire d'Alalâ Ben Sahl sur les propriétés des trois sections (coniques).

فى خواص القطوع الثلثة استخراج العلاء بن سهل

(Collationné avec le manuscrit autographe.)

fautives et contradictoires produites par la négligence des copistes.

30° (Fol. 141 r° à 150 v°.)

Traité sur la construction de l'astrolabe appelé *Almobthakh*, d'après Aboû Djafar Ahmed Ben Abdallah.

كتاب عمل الاسطرلاب المبطخ مما وضعه ابو جعفر احمد بن عبد الله

31° (Fol. 151 r° à 156 v°, l. 11.)

Traité d'Ahmed Ben Mohammed Ben Abd Aldjalîl sur les solutions de divers problèmes que lui avaient proposés plusieurs géomètres de Chîrâz.

كتاب احمد بن محمد بن عبد الجليل فى الاجوبة عن مسائل سالها عنه بعض مهندسى شيراز

32° (Fol. 156 v°, l. 12, à 160 r°, l. 4.)

Traité de Thâbit Ben Korrah sur (le théorème) que deux droites menées de manière à renfermer (avec une troisième) moins de deux angles droits se rencontrent.

مقالة ثابت بن قرة فى ان الخطين اذا اخرجا على اقل من زاويتين قائمتين التقيا

(Collationné avec le manuscrit autographe. Date de la copie : le mercredi, 27 du mois de rabîa second de l'an 359, 9 mars 970.)

33° (Fol. 160 r°, l. 5 et suiv.)

Une construction de la trisection de l'angle.

34° (Fol. 161 r°.)

Fragment relatif à la théorie des quantités irrationnelles, reproduisant, à quelques légères modifications près, les propositions 7 et 8, et une partie du corollaire de la proposition 9 du X[e] livre d'Euclide, telles qu'elles se trouvent dans l'édition d'Oxford. Ce fragment paraît être la suite du n° 18.

35° (Fol. 161 v°.)

Problèmes intéressants et beaux sur les nombres.

مسائل عددية لطيفة حسنة

36° (Fol. 162 r° à 164 r°, l. 12.)

Le traité d'Hypsiclès sur les ascensions, traduit par Ishâk Ben Honaïn et revu par Thâbit Ben Korrah.

كتاب ابسقلاوس فى المطالع نقل اسحق بن حنين واصلاح ثابت بن قرة

1° Ms. n° 952. 2, suppl. arabe, fol. 23 v°.

Titre du premier livre de ce commentaire :

المقالة الاولى من كتاب بلس فى الاعظام المنطقة والصم التى

37° (Fol. 164 r°, l. 13 à 170 v°, l. 11.)

Lettre d'Aboûl Haçan Thâbit Ben Korrah sur la figure de la section (*al-kathâ'*).

رسالة ابى الحسن ثابت بن قرة فى الشكل القطاع *

38° (Fol. 170 v°, l. 12 à 180 v°, l. 7.)

Traité d'Aboûl Haçan Thâbit Ben Korrah sur la manière de trouver des nombres amiables d'après une méthode facile**.

مقالة الفها ابو الحسن ثابت بن قرة فى استخراج الاعداد المتحابة بسهولة المسلك الى ذلك

(Date de la copie : Chîrâz, à la fin du mois de khordâd de l'an 338 d'Yezdedjird, juin 969.)

39° (Fol. 180 v°, l. 8 à 181 v°, l. 3.)

Fragment d'un commentaire d'Almâhâni sur le dixième livre d'Euclide.

تفسير المقالة العاشرة من كتاب اوقليدس للماهانى

40° (Fol. 181 v°, l. 4 à 15.)

Démonstration d'une proposition de géométrie.

41° (Fol. 181 v°, l. 16 à 187 r°, l. 12.)

Exposé du calcul des apotomes et des droites de deux noms.

(Date de la copie : Chîrâz, à la fin du mois de chabân de l'an 358 de l'hégire, juillet 969.)

42° (Fol. 187 r°, l. 13 à 188 r°.)

Discussion de la proposition que toute quantité continue est divisible à l'infini.

القول فى ان كل متصل فانه منقسم الى اشياء تنقسم دائما بغير نهاية

43° (Fol. 188 v° à 191 r°.)

Traité d'Aboûl Haçan Thâbit Ben Korrah adressé à Ibn Wahab sur la

* Ce titre se trouve répété de la même manière dans la table placée à la fin du volume; mais il serait plus correct d'écrire شكل, sans article.

** Une analyse de ce traité a été publiée dans le *Journal asiatique*, cahier d'octobre-novembre 1852, p. 420 et suiv.

ذكرها فى المقالة العاشرة من كتاب اوقليدس فى الاسطقسات
ترجمة ابى عثمن الدمشقى

manière de parvenir à trouver la construction des problèmes géométriques.

كتاب ابى الحسن ثابت بن قرة الى ابن وهب فى التاتى لاستخراج عمل المسائل الهندسية

(Collationné avec le manuscrit autographe.)

44° (Fol. 191 v°.)

Fragment du Commentaire d'Eutocius sur la 2e proposition du second livre de la sphère et du cylindre d'Archimède, traduit par Thâbit Ben Korrah*.

كتاب اوطوقيس فى حكاية ما استخرجه القدماء من خطين بين خطين حتى يتوالى الاربعة متناسبة نقل ابى الحسن ثابت بن قرة

45° (Fol. 192 v° à 195 r°.)

Trisection de l'angle rectiligne, par Thâbit Ben Korrah Alharrânî.

قسمة الزاوية المستقيمة الخطين بثلثة اقسام متساوية صنعة ثابت بن قرة الحرانى

46° (Fol. 195 v° à 198 r°.)

Traité d'Ahmed Ben Mohammed Ben Abd Aldjalîl sur la mesure des sphères au moyen des sphères.

كتاب احمد بن محمد بن عبد الجليل فى مساحة الاكر بالاكر

47° (Fol. 198 v° à 199 r°.)

Sur la construction des deux moyennes proportionnelles par la méthode de la géométrie fixe**, par le chaïkh Aboû Djafar Mohammed Ben Alhoçaïn.

فى استخراج خطين بين خطين متوالية متناسبة من طريق الهندسة الثابتة للشيخ ابى جعفر محمد بن الحسين

48° (Fol. 199 v° à 203 v°.)

Traité de Yoûhannâ Ben Yoûçouf Ben Alharth sur les quantités rationnelles et irrationnelles.

مقالة يوحنا بن يوسف بن الحرث فى المقادير المنطقة والصم

(Collationné avec le manuscrit autographe.)

* Comparer l'*Algèbre d'Omar Alkhayyâmî*, p. XIII de la préface, 2e note.

** Comparer, relativement à cette expression, l'*Algèbre d'Omar Alkhayyâmî*, p. 120.

« Premier livre du traité de *B. los*[1], sur les quantités ration-

49° (Fol. 204 r° à 215 r°.)

Lettre du chaïkh Aboû Djafar Mohammed Ben Alhoçaïn à Abdallah Ben Alî, le calculateur, sur la démonstration d'une certaine propriété des nombres, suivie d'une lettre du même au même sur la construction des triangles rectangles en nombres rationnels.

رسالة الشيخ ابى جعفر محمد بن الحسين ايده الله الى عبد الله بن على الحاسب فى البرهان على انه الخ يتلوا رسالته اليه فى انشاء المثلثات القائمة الزوايا المنطقة الاضلاع

(Collationné avec le manuscrit autographe.)

50° (Fol. 215 v° à 216 v°.)

Table des traités contenus dans ce volume.

Dans cette table, les numéros qui précèdent sont classés dans l'ordre suivant :

1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 19 (?), 20, 13, 14, 15, 17, 16, 18, 35, 36, 37, 38, 39, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49.

La table est signée de la date du 11 moharram de l'an 657, 8 janvier 1259 de notre ère.

51° (Fol. 217 r° à 219 v°.)

Diverses propositions relatives à la théorie des quantités irrationnelles.

Le volume entier se compose de deux cent vingt feuillets, dont le premier non numéroté. Le verso du folio 160 et le recto du folio 192 sont laissés en blanc. Plusieurs parties du manuscrit ont été évidemment déplacées lorsqu'il a reçu sa reliure actuelle. Les cent quatre-vingt-douze premiers feuillets du volume présentent une seule et même écriture. Ainsi que l'attestent les post-scriptum ci-dessus mentionnés, cette partie a été écrite à Chîrâz, principalement pendant les années 969 et 970 de notre ère, par le géomètre Ahmed Ben Mohammed Ben Abd Aldjalîl Alsidjzî, qui formait probablement ce recueil pour son propre usage. Depuis le folio 192 v° à 216 v°, on trouve une ou plutôt plusieurs écritures, différentes de celle de la première partie du volume, mais qui, cependant, en quelques endroits, ressemblent beaucoup à cette dernière écriture. Les trois derniers feuillets, 217 à 219, sont d'une écriture complétement différente. On aura remarqué que plusieurs des copies contenues dans ce volume ont été collationnées avec les manuscrits autographes des auteurs, ainsi qu'il résulte des notes finales que j'ai reproduites dans l'énumération ci-dessus. Cette circonstance ne peut qu'ajouter à la valeur du manuscrit.

M. Caussin, en citant les observations astronomiques mentionnées ci-dessus (n° 22), ajoute que ce manuscrit a été rapporté d'Égypte par M. Reiche, un de ses anciens disciples.

[1] Je marque par un point les places des voyelles brèves qui ne sont pas exprimées dans l'écriture ordinaire des manuscrits arabes.

nelles et irrationnelles qui forment le sujet du dixième livre du Traité d'Euclide sur les Éléments. Traduit par Aboû Othmân le Damascène. »

2° Même ms. fol. 31 v°.

Titre du second livre de ce commentaire :

المقالة الثانية من تفسير المقالة العاشرة من كتاب اوقليدس فى الاصول

« Second livre du commentaire du dixième livre du Traité d'Euclide sur les Éléments. »

3° Même ms. fol. 42 v°, à la fin du second livre :

تمت المقالة الثانية وتم تفسير المقالة العاشرة من كتاب اوقليدس نقل ابى عثمن الدمشقى

« Fin du second livre; et fin du commentaire du dixième livre du Traité d'Euclide. Traduit par Aboû Othmân le Damascène. »

4° Même ms. fol. 215 v°.

Titres du premier et du second livre répétés dans la table des ouvrages contenus dans le manuscrit :

د المقالة الاولى من كتاب بلس فى الاعظام المنطقة والصم التى ذكرها فى المقالة العاشرة من كتاب اوقليدس ه المقالة الثانية من تفسير المقالة العاشرة من كتاب اقليدس

« 4° Le premier livre du traité de *B. los* sur les quantités rationnelles et irrationnelles qui forment le sujet du dixième livre du Traité d'Euclide. 5° Le second livre du commentaire du dixième livre du Traité d'Euclide. »

5° Ms. du *Târîkh Alhoqamâ*. Suppl. arabe, n° 672, page 56 (à l'article Euclide).

رايت شرح المقالة العاشرة لرجل يونانى قديم اسمه بليس

« J'ai vu un commentaire du dixième livre par un Grec ancien nommé *B. līs.* »

Le même passage est reproduit par Casiri, t. I, p. 342, de la manière suivante :

رايت شرح المقالة العاشرة لبليــس

« J'ai vu un commentaire du dixième livre par *B. līs.* »

6° Même ms. p. 76.

بنـس الرومى كان عالما بعلم الرياضة خبيـرا بفوايـض الهنـدسة مقيما بالاسكندرية وزمنه بعـد زمن بطلميـوس القلـوذى ومن تصانيفه تفسيركتاب بطلميوس فى تسطيح الكرة نقـله ثابـت الى العربى تفسيرالمقالة العاشرة من كتاب اقليدس مقالتان

« *B.n.s* le Roûmî[1] était versé dans la science des mathématiques, et possédait de vastes connaissances en géométrie. Il vécut à Alexandrie, et son temps est postérieur au temps de Claude Ptolémée. De ses ouvrages (nous citons) le commentaire du traité de Ptolémée sur le planisphère, traduit en arabe par Thâbit (Ben Korrah); puis, *le commentaire du dixième livre du Traité d'Euclide, en deux livres.* »

7° Ms. du *Qitâb Alfihrist.* Ancien fonds arabe, n° 4136, t. II, fol. 114 v°.

بلس الرومى وله من الكتب كتاب تفسيركتاب بطلميوس فى تسطيح الكرة نقـل ثابت الى العربى كتـاب تفسيـر المقالة العاشرة من اقليدس فى مقالتــين

« *B.l.s* le Roûmî. Ouvrages de cet auteur : Commentaire du traité de Ptolémée sur le planisphère, traduit en arabe par Thâbit (Ben Korrah). *Commentaire du dixième livre d'Euclide, en deux livres.* »

[1] Les auteurs arabes désignent par *Roûmî* un Grec du Bas-Empire.

En rapprochant entre elles les diverses leçons du nom en question, présentées par tous ces passages, je suis disposé à croire que ce nom était *Valens*, en grec Βάλης, ce qui, en arabe, devait se transcrire par بَلِيْس, ou aussi seulement par بَلْس; car nous trouvons, dans les écrits arabes, des exemples nombreux de ce dernier mode de transcription, à commencer par le nom d'Euclide (Εὐκλείδης) même, qui n'est jamais rendu par اوقليديس, mais toujours par اوقليدس ou اقليدس. Il ne serait pas impossible que ce Valens ne fût le même que l'astrologue *Vettius Valens*, sur lequel on trouve une notice assez étendue dans la Bibliothèque grecque de Fabricius[1].

Relativement aux circonstances de la vie de notre commentateur, le passage ci-dessus extrait du manuscrit du *Târîkh Alhoqamâ* est suffisamment explicite. Les expressions de ce passage pourraient faire croire un moment qu'il se rapporte à Pappus, dont le nom aurait été rendu en arabe par بَبّْس, ce qui, par l'inadvertance des copistes, aurait été changé en بنس. Mais dans un passage du ms. 952. 2 suppl. arabe, où il est indubitablement question de Pappus, le nom de ce géomètre est écrit بابوس[2], ce qui suffit pour faire abandonner cette supposition, peu admissible aussi sous d'autres rapports.

Quant au commentaire même, un examen sérieux de cet ouvrage met hors de toute question qu'il est d'origine grecque. Malheureusement, les bornes de ce mémoire ne me permettent pas d'en fournir les preuves en faisant connaître le contenu de ce commentaire d'une manière plus détaillée; mais, du moins, j'en donnerai ci-dessous[3] une analyse rapide, qu'on ne parcourra peut-être pas sans intérêt.

Il est vrai que le premier livre de ce commentaire, rempli presque entièrement de spéculations métaphysiques sur les quantités irra-

[1] Édition de Harles, Hambourg, 1795, vol. IV, p. 144 et suiv.
[2] Voir l'édition ci-dessus citée de l'*Algèbre d'Omar Alkhayyâmî*, préface, p. XIII.
[3] Voir §§ 19 et 20.

tionnelles, ne peut intéresser que médiocrement les géomètres; mais le second livre est d'une importance réelle pour l'histoire des mathématiques, attendu qu'il contient plusieurs beaux théorèmes, relatifs aux quantités irrationnelles, qu'on ne trouve pas dans les Éléments d'Euclide, et qu'il traite cette théorie à un point de vue plus général et plus élevé que ne le fait l'auteur des Éléments.

On remarquera, sous ce rapport, les numéros 5, 9 à 12, 14 et 15 de l'analyse du second livre de ce commentaire.

Enfin, ce qui mérite surtout de fixer l'attention des géomètres, ce sont les notices sur les travaux perdus d'Apollonius, contenues dans les passages dont on trouve ci-dessous le texte et la traduction.

Avant de passer à l'interprétation de ces passages, j'ai cru devoir faire connaître au lecteur, par un résumé succinct, le sujet et le but du dixième livre d'Euclide, seul écrit grec sur les quantités irrationnelles qu'on ait connu jusqu'à présent, et sans une intelligence approfondie duquel il est impossible de comprendre le sens et d'apprécier la portée des passages en question qui forment le sujet du présent mémoire.

DES LIGNES IRRATIONNELLES TRAITÉES PAR EUCLIDE.

§ 4.

Les lignes irrationnelles traitées par Euclide sont au nombre de treize.

Il les définit, les construit et en démontre les propriétés.

Rien, certes, n'est plus beau ni plus parfait que l'ordre et le parallélisme des hexades du dixième livre; c'est là surtout que brille de tout son éclat le génie profondément systématique de l'auteur des Éléments. Mais, pour faire saisir au lecteur d'un seul coup d'œil l'aperçu général de la théorie d'Euclide, nécessaire pour l'intelligence des conjectures suivantes sur les travaux d'Apollonius, je ne peux pas suivre la méthode purement et strictement synthétique du géomètre ancien.

D'un côté, il sera indispensable de faire ressortir surtout la raison déterminante du nombre des genres d'irrationnelles exposés. D'un autre côté, lorsque Euclide détermine des couples de lignes qui doivent servir ensuite à la construction des irrationnelles, et qui jouissent de diverses propriétés, il faudra montrer comment quelques-unes de ces propriétés découlent naturellement des autres, tandis qu'Euclide se contente d'en démontrer la coexistence. Car, généralement, deux quantités (et les lignes ne représentent ici que des quantités) sont déterminées par deux conditions auxquelles elles doivent satisfaire. Si donc elles satisfont à plus de deux conditions, l'esprit éprouve le besoin de distinguer les propriétés essentielles d'avec les autres, et de se rendre compte de la manière dont celles-ci se rattachent aux premières.

C'est pourquoi j'ai tâché de suivre une marche plus analytique dans l'exposé que l'on trouve ci-après. Je me suis efforcé en même temps d'y reproduire, dans le plus court espace possible, le contenu essentiel du dixième livre d'Euclide. D'ailleurs, je fais observer que je ne me propose pas tant de donner une analyse détaillée de ce livre, que de faire connaître quels genres et quelles espèces d'irrationnelles ont été traitées par Euclide, et quelles sont les propriétés qu'il en a connues.

Avant d'entrer en matière, il faut que j'explique encore en quelques mots l'usage qu'Euclide fait du mot *rationnel,* parce qu'il donne à ce terme une signification plus large que nous ne faisons aujourd'hui. C'est qu'il appelle rationnelles aussi les lignes dont les carrés seulement sont rationnels, et qui s'expriment, en conséquence, par des racines carrées. La ligne rationnelle d'Euclide a donc les deux formes m et $\sqrt{m}$. Au contraire, comme selon les idées des anciens on ne saurait former le carré d'un espace, la surface rationnelle est chez Euclide uniquement de la forme m, tandis que $\sqrt{m}$, comme expression d'un espace, désigne l'espace médial, qui est un espace irrationnel. Je me conformerai, dans ce qui suit, à la terminologie d'Euclide, pour ne pas trop embrouiller les énoncés des définitions que je dois donner d'après lui. Toutes les fois que j'emploierai le mot *rationnel* dans son acception moderne, j'aurai soin d'en avertir le lecteur. Je fais observer encore que je désignerai par m, m', n, n', p, q, etc., des quantités rationnelles dans l'acception moderne de ce mot, et qui ne sont pas des carrés, à moins que cela ne soit dit expressément.

I.

§ 5.

Si deux droites commensurables en puissance seulement comprennent un rectangle rationnel, ces droites sont nécessairement médiales; si elles comprennent un rectangle médial, elles peuvent être médiales ou rationnelles[1].

Dans le premier cas, on aura

$$x^2 : y^2 = m \qquad x . y = n,$$

donc

$$x = \sqrt{n\sqrt{m}} \qquad y = \sqrt{\frac{n}{\sqrt{m}}}\ ^{2}.$$

Dans le second cas, on aura

$$x^2 : y^2 = m \qquad x . y = n\sqrt{n'},$$

[1] D'un autre côté, si deux droites commensurables en puissance seulement sont rationnelles, elles comprennent nécessairement un rectangle médial; si elles sont médiales, elles peuvent comprendre un rectangle rationnel ou médial.

[2] La construction d'Euclide (X, 28) est ramenée à son expression algébrique lorsqu'on pose les lignes α et β de cette construction respectivement égales à $\sqrt{p}$ et $\sqrt{n}$, où l'une des deux quantités p, n, peut être un carré, et l'on trouve

$$\gamma = \sqrt[4]{n\,p} \qquad \delta = \sqrt{n\sqrt{\frac{n}{p}}};$$

c'est ce qu'on obtient en posant dans nos formules $m = \frac{p}{n}$.

donc

$$x = \sqrt{n\sqrt{m n'}} \qquad y = \sqrt{n\sqrt{\frac{n'}{m}}}\ ^{1}.$$

Ces dernières formules représentent, en général, des quantités médiales; mais, dans les cas de $m = n'$, ou de $m = \frac{n^2}{n'}$, on aura

$$x = \sqrt{n n'} \qquad y = \sqrt{n}$$

ou

$$x = n \qquad y = \sqrt{n'},$$

formules qui présentent l'expression générale[2] de deux quantités rationnelles et commensurables en puissance.

Ceci donne lieu à trois cas :

1° Deux droites rationnelles commensurables en puissance seulement et comprenant un rectangle médial :

La moyenne géométrique entre deux lignes de cette espèce est *la médiale;*

Leur somme est *la droite de deux noms;*

Leur différence est l'*apotome*.

2° Deux droites médiales commensurables en puissance seulement et comprenant un rectangle rationnel :

La somme de deux lignes de cette espèce est *la première de deux médiales;*

[1] Ici, on posera dans la construction d'Euclide (X, 29) $\alpha = \sqrt{q}$, $\beta = \sqrt{p}$, $\gamma = \sqrt{n'}$, où l'une des trois quantités q, p, n' peut être un carré, et l'on trouve

$$\delta = \sqrt[4]{p q} \qquad \varepsilon = \sqrt{n'\sqrt{\frac{q}{p}}};$$

c'est ce qu'on obtient en posant dans nos formules $m = \frac{p}{n'}$ et $n = \sqrt{q}$.

[2] On peut encore poser $n' = \frac{p}{n}$; alors on aura respectivement

$$\sqrt{p} \quad \text{et} \quad \sqrt{n},$$

puis

$$n \quad \text{et} \quad \sqrt{n'}.$$

Leur différence est *le premier apotome de la médiale.*

3° Deux droites médiales commensurables en puissance seulement et comprenant un rectangle médial :

La somme de deux lignes de cette espèce est *la seconde de deux médiales;*

Leur différence est *le second apotome de la médiale.*

II.

§ 6.

Pour trouver deux droites dont la somme des carrés ainsi que le rectangle compris sous elles doivent satisfaire à certaines conditions, posons

$$x^2 + y^2 = S \qquad x \cdot y = R,$$

il suit

$$x = \sqrt{\frac{S + \sqrt{S^2 - 4R^2}}{2}} \qquad y = \sqrt{\frac{S - \sqrt{S^2 - 4R^2}}{2}}.$$

Maintenant, si la somme des carrés doit être rationnelle et le rectangle médial, on posera

$$S = m \qquad R = n\sqrt{n'}$$

et l'on aura

$$x = \sqrt{\frac{m + \sqrt{m^2 - 4n^2n'}}{2}} \qquad y = \sqrt{\frac{m - \sqrt{m^2 - 4n^2n'}}{2}}$$ [1].

[1] Euclide (X, 34) pose $\alpha\beta = p$, $\beta\gamma = \frac{pq}{\sqrt{q^2 + r^2}}$ (voir X, 31), où $q^2 + r^2$ n'est pas un carré, et trouve ensuite

$$\alpha\zeta = \sqrt{\frac{p^2}{2}\left\{1 + \frac{r}{\sqrt{q^2 + r^2}}\right\}} \qquad \beta\zeta = \sqrt{\frac{p^2}{2}\left\{1 - \frac{r}{\sqrt{q^2 + r^2}}\right\}};$$

c'est ce qu'on obtient en posant dans nos formules $m = p^2$, $n = \frac{p^2}{2}$, $n' = \frac{q^2}{q^2 + r^2}$.

Si la somme des carrés doit être médiale et le rectangle rationnel, on posera

$$S = m\sqrt{m'} \qquad R = n;$$

et l'on aura

$$x = \sqrt{\frac{m\sqrt{m'} + \sqrt{m^2 m' - 4n^2}}{2}} \qquad y = \sqrt{\frac{m\sqrt{m'} - \sqrt{m^2 m' - 4n^2}}{2}}\ ^{1}.$$

Si la somme des carrés doit être médiale, et le rectangle médial et incommensurable avec la somme des carrés, on posera

$$S = m\sqrt{m'} \qquad R = n\sqrt{n'},$$

où $m\sqrt{m'}$ et $n\sqrt{n'}$ désignent des espaces incommensurables entre eux, et l'on aura

$$x = \sqrt{\frac{m\sqrt{m'} + \sqrt{m^2 m' - 4n^2 n'}}{2}} \qquad y = \sqrt{\frac{m\sqrt{m'} - \sqrt{m^2 m' - 4n^2 n'}}{2}}\ ^{2}.$$

En formant le quotient $\frac{x^2}{y^2}$, on obtient

$$\frac{S^2 - 2R^2 + S\sqrt{S^2 - 4R^2}}{2R^2},$$

[1] Euclide (X, 35) pose $\alpha\beta = \sqrt[4]{p(p-q)}$, $\beta\gamma = \frac{p-q}{\sqrt[4]{p(p-q)}}$ (voir X, 32), où l'une des deux quantités p, q, peut être un carré, et trouve ensuite

$$\alpha\delta = \sqrt{\frac{(\sqrt{p}+\sqrt{q})\sqrt{p-q}}{2}} \qquad \beta\delta = \sqrt{\frac{(\sqrt{p}-\sqrt{q})\sqrt{p-q}}{2}};$$

c'est ce qu'on obtient en posant dans nos formules $m = \sqrt{p}$, $m' = p - q$, $n = \frac{p-q}{2}$.

[2] Euclide (X, 36) pose $\alpha\beta = \sqrt[4]{pm'}$, $\beta\gamma = \frac{\sqrt{(p-q)m'}}{\sqrt[4]{pm'}}$ (voir X, 33), où l'une des trois quantités p, q, m', ou même m' et q simultanément, peuvent être des carrés; puis il trouve

$$\alpha\delta = \sqrt{\frac{(\sqrt{p}+\sqrt{q})\sqrt{m'}}{2}} \qquad \beta\delta = \sqrt{\frac{(\sqrt{p}-\sqrt{q})\sqrt{m'}}{2}};$$

c'est ce qu'on obtient en posant dans nos formules $m = \sqrt{p}$, $n = \frac{1}{2}$, $n' = m'(p-q)$.

ou, en désignant le quotient $\frac{S}{R}$ par Q,

$$\tfrac{1}{2}\left\{ Q^2 - 2 + \sqrt{Q^4 - 4\,Q^2} \right\};$$

d'après les suppositions faites dans les cas considérés ci-dessus, Q sera irrationnel et Q^2 rationnel (dans l'acception moderne de ce terme), et, à moins que Q^2 ne satisfasse à l'équation indéterminée

$$(Q^2)^2 - 4\,Q^2 = Z^2,$$

le quotient $\frac{x^2}{y^2}$ sera irrationnel.

En général, x et y seront donc, dans les cas ci-dessus, deux droites incommensurables en puissance, tandis que, dans le paragraphe précédent, on considérait trois couples de droites commensurables en puissance.

De là trois autres combinaisons :

4° Deux droites incommensurables en puissance, dont la somme des carrés est rationnelle, tandis que le rectangle compris sous elles est médial :

La somme de deux lignes de cette espèce est *la majeure;*

Leur différence est *la mineure.*

5° Deux droites incommensurables en puissance, dont la somme des carrés est médiale, tandis que le rectangle compris sous elles est rationnel :

La somme de deux lignes de cette espèce est *celle qui peut une rationnelle et une médiale;*

Leur différence est *la droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial.*

6° Deux droites incommensurables en puissance, dont la somme des carrés est médiale, tandis que le rectangle compris sous elles est également médial, mais incommensurable avec la somme de leurs carrés :

La somme de deux lignes de cette espèce est *celle qui peut deux médiales;*

Leur différence est *la droite qui fait avec une surface médiale un tout médial.*

III.

§ 7.

Si l'on a deux droites x, y, commensurables en puissance seulement, de sorte que

$$x^2 : y^2 = n,$$

il s'ensuit

$$x^2 : (x^2 - y^2) = n : (n - 1);$$

c'est-à-dire que le carré de x surpassera le carré de y du carré d'une droite commensurable *en puissance* avec x; mais lorsque n est de la forme $\frac{p^2}{p^2 - 1}$, on voit aisément que le carré de x surpassera le carré de y du carré d'une droite commensurable *en longueur* avec x.

La droite de deux noms et l'*apotome* étant de la forme $x \pm y$, où x et y représentent deux droites rationnelles commensurables en puissance seulement, on pourra donc, en supposant toujours $x > y$, distinguer deux cas

1° $\quad \frac{x^2}{x^2 - y^2} = n^2 \quad$ ou $\quad x : y = n : \sqrt{n^2 - 1}$,

2° $\quad \frac{x^2}{x^2 - y^2} = n \quad$ ou $\quad x : y = \sqrt{n} : \sqrt{n - 1}$.

Puis, comme x et y sont rationnels et commensurables en puissance, et qu'on suppose $x > y$, on pourra distinguer, dans chacun de ces deux cas, trois subdivisions, selon que x et y sont respectivement de la forme

$$m \quad \text{et} \quad \sqrt{m'}$$

ou

$$\sqrt{m} \quad \text{et} \quad m'$$

ou

$$\sqrt{m} \quad \text{et} \quad \sqrt{m'}.$$

On obtient de cette manière :

dans le premier cas

1° $x = n$ $y = \sqrt{n^2 - 1}$

2° $x = \dfrac{m' n}{\sqrt{n^2 - 1}}$ $y = m'$

3° $x = \dfrac{n\sqrt{m'}}{\sqrt{n^2 - 1}}$ $y = \sqrt{m'}$;

dans le second cas

4° $x = m$ $y = \dfrac{m\sqrt{n - 1}}{\sqrt{n}}$

5° $x = \dfrac{m'\sqrt{n}}{\sqrt{n - 1}}$ $y = m'$

6° $x = \sqrt{n}$ $y = \sqrt{n - 1}$.

En combinant les x et y de ces six numéros par addition et par soustraction, on obtient respectivement *la première, seconde, troisième, quatrième, cinquième, sixième de deux noms*, et *le premier, second, troisième, quatrième, cinquième, sixième apotome*[1].

[1] *Substitutions à faire pour ramener à nos formules les constructions d'Euclide.*

1° Prop. 49. $\varepsilon\zeta = n$, $\alpha\beta = p^2$, $\gamma\beta = q^2$.
Prop. 86. $\beta\eta = n$, $\varepsilon\delta = p^2$, $\varepsilon\zeta = q^2$.

La formule d'Euclide $n \pm \sqrt{n^2 - \dfrac{n^2 q^2}{p^2}}$

se ramène à la nôtre lorsqu'on pose $p = nq$.

2° Prop. 50. $\zeta\eta = m'$, $\alpha\beta = n^2$, $\beta\gamma = q^2$.
Prop. 87. $\gamma\eta = m'$, $\delta\varepsilon = n^2$, $\varepsilon\zeta = q^2$.

La formule d'Euclide $\dfrac{m' n}{\sqrt{n^2 - q^2}} \pm m'$

se ramène à la nôtre lorsqu'on pose $q = 1$.

3° Prop. 51. $\alpha\beta = n^2$, $\beta\gamma = p^2$, $\delta = q$, $\varepsilon = r$.
Prop. 88. $\beta\gamma = n^2$, $\beta\delta = p^2$, $\varepsilon = q$, $\alpha = r$.

IV.

§ 8.

Après avoir terminé les constructions précédentes, Euclide démontre que les racines carrées des six droites de deux noms et des six apotomes sont respectivement les six irrationnelles formées par addition et les six irrationnelles formées par soustraction suivant l'ordre, et réciproquement que ces douze irrationnelles ont pour carrés les six droites de deux noms et les six apotomes suivant l'ordre.

Il démontre, ensuite, que toute ligne commensurable à une

La formule d'Euclide

$$r\sqrt{\frac{n^2}{q}} \pm r\sqrt{\frac{n^2-p^2}{q}} = \frac{n}{\sqrt{n^2-p^2}}\sqrt{\frac{r^2(n^2-p^2)}{q}} \pm \sqrt{\frac{r^2(n^2-p^2)}{q}}$$

se ramène à la nôtre lorsqu'on pose $p = 1$, $\dfrac{r^2(n^2-1)}{q} = m'$

4° Prop. 52. $\alpha\gamma = p$, $\gamma\beta = q$, $\varepsilon\zeta = m$.
Prop. 89. $\varepsilon\zeta = p$, $\zeta\delta = q$, $\beta\eta = m$.

La formule d'Euclide $m \pm m\sqrt{\dfrac{p}{p+q}}$

se ramène à la nôtre lorsqu'on pose $q = 1$, $p + 1 = n$.

5° Prop. 53. $\zeta\eta = m'$, $\alpha\gamma = p$, $\gamma\beta = q$.
Prop. 90. $\gamma\eta = m'$, $\zeta\varepsilon = p$, $\zeta\delta = q$.

La formule d'Euclide $m'\sqrt{\dfrac{p+q}{p}} \pm m'$

se ramène à la nôtre lorsqu'on pose $q = 1$, $p + 1 = r$

6° Prop. 54. $\alpha\gamma = p$, $\gamma\beta = q$, $\delta = s$, $\varepsilon = r$
Prop. 91. $\gamma\delta = p$, $\beta\delta = q$, $\varepsilon = s$, $\alpha = r$.

La formule d'Euclide $r\sqrt{\dfrac{p+q}{s}} \pm r\sqrt{\dfrac{p}{s}}$

se ramène à la nôtre lorsqu'on pose $r = 1$, $q = 1$, $s = 1$, $p + 1 = n$.

des irrationnelles est une irrationnelle du même genre et de la même espèce que la ligne à laquelle elle est commensurable, et que les lignes irrationnelles proposées dans ce qui précède sont toutes essentiellement différentes entre elles.

Suivent encore : une autre méthode de construction de ces irrationnelles; puis quelques théorèmes énonçant diverses conséquences de la vérité mathématique que le produit de $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ en $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ est rationnel; enfin, la démonstration que la diagonale et le côté d'un carré sont incommensurables en longueur.

L'avant-dernière proposition du dixième livre mérite encore d'être particulièrement remarquée; en voici l'énoncé :

« Il résulte d'une médiale une infinité d'irrationnelles, dont aucune n'est la même qu'aucune de celles qui la précèdent. »

Euclide prend ici la moyenne proportionnelle γ entre une médiale et une rationnelle, puis la moyenne δ entre γ et la même rationnelle, et ainsi de suite. Les irrationnelles qu'il obtient sont donc successivement de la forme $\sqrt{r\sqrt[4]{m}}$, $\sqrt{r\sqrt{r\sqrt[4]{m}}}$, $\sqrt{r\sqrt{r\sqrt{r\sqrt[4]{m}}}}$, etc. c'est-à-dire de la forme $\sqrt[8]{n}$, $\sqrt[16]{p}$, $\sqrt[32]{q}$, etc.

TEXTE DES PASSAGES DU MANUSCRIT ARABE RELATIFS AUX TRAVAUX PERDUS D'APOLLONIUS SUR LES QUANTITÉS IRRATIONNELLES.

§ 9.

I.

(Fol. 23 v°.) ان القصد فى المقالة العاشرة من كتاب اوقليدس
فى الاصول هو البحث عن الاعظام المشتركة والمتباينة والمنطقة
والصمّ وذلك ان هذا العلم ابتدأ به اولا شيعة بوثاغورس وزاد
فيه زيادة كثيرة ثاطيطس الاثينى الذى كان على حال من

الفطنة فى هذه الاشياء وغيرها من اصناف التعاليم يستحق
بها التعجب منه وكان مع ذلك من اجود الناس جبلة ووقوعا
على استخراج الحق الذى فى هذه العلوم كما يشهد له بذلك
فلاطن فى الكتاب الذى سماه باسمه فاما تمييزها اليقينى وبراهينها
التى لا يلحقها طعن فاظن ان هذا الرجل خاصة احكمها وبعده
ابلونيوس الجليل الذى هو فى غاية ما يكون فى القوة فى التعاليم
حرص وعنى الى ان زاد فيها فنونا عجيبة لان ثاطيطس ميّز
القوى المشتركة فى الطول من المتباينة وقسّم المشهورة جدّا من
الخطوط الصم على الوسائط فجعل الخط الموسط للهندسة وذا
الاسمين للعدد والمنفصل للتأليف كما اخبر واقتص اوذيمس
المشّاء فاما اوقليدس فانه قصد قصد قوانين لا يلحقها طعن
فوضعها لكل اشتراك وتباين ووضع حدودا وفصولا للمنطقة والصم
ووضع ايضا مراتبا كثيرة للصم ثم آخِر ذلك اوضح جميع التناهى
الذى فيها واما ابلونيوس ففصل انواع الصم المنتظمة واستخرج
علم التى تسمى غير منتظمة وولد منها جملة كثيرة جدّا بالطرق
اليقينية ۞

II.

(Fol. 29 r° à 30 r°.) وبعد نظره فى الخط الموسط واستخراجه اياه
أخذ فى البحث لمّا امعن عن الخطوط الصم فى التركيب والقسمة
على حسب ما استعمل من البحث عن الاشتراك والتباين وذلك

ان الاشتراك والتباين قد تجدهما فى الخطوط المركبة والمنفصلة وذو الاسمين يتقدم الخطوط التى بالتركيب لانه ايضا اكثر الخطوط مجانسةً للخط المنطق وذلك انه مركب من خطين منطقين فى القوة مشتركين والمنفصل يتقدم الخطوط التى بالتفصيل وذلك ان حدوث المنفصل ايضا انما يكون بان يفصل من خط منطق خط منطق مشارك للكل فى القوة وذلك ان نستخرج الخط الموسط بان نضع ضلعا منطقا وقطرا مفروضا ونأخذ خطا متوسطا فى النسبة بين هذين الخطين وذلك ان نستخرج ذا الاسمين بان نركب الضلع والقطر وذلك ان نستخرج المنفصل بان نفصل الضلع من القطر وقد ينبغى ان تعلم ايضا انه ليس متى يركب خطان فقط منطقان فى القوة مشتركان أخذنا الذى من اسمين لكن قد يحدث ذلك ايضا ثلثة خطوط واربعة على ذلك المثال اما اولا فقد يحدث الذى من ثلثة اسماء اذا كان الخط كله اصمّ وثانيا يحدث الذى من اربعة اسماء ويمرّ ذلك بلا نهاية والبرهان على ان الذى من ثلثة خطوط منطقة فى القوة مشتركة [اصمّ] هو بعينه البرهان الذى تبرهن به على الخطين المركبين بل قد ينبغى ان نقول من الراس هكذا انه ليس انما يمكنّا ان نأخذ خطا واحدا فقط متوسطا بين خطين فى القوة مشتركين بل قد يمكننا ان نأخذ ثلثة واربعة ويمرّ ذلك الى غير نهاية اذ كان قد يمكننا ان نأخذ فيما بين كل خطين مستقيمين

مفروضين خطوطا كم شئنا على نسبة وفى التى بالتركيب ايضا
فليس انما يمكننا ان نعمل خطا من اسمين فقط بل قد يمكننا ايضا
ان نعمل الذى من ثلثة اسماء والذى من ثلثة موسطات الاول
والثانى والذى من ثلثة خطوط مستقيمة متباينة فى القوة
يصير احدها مع كل واحد من الاثنين بمجموع المربع الكائن منهما
منطقا والقائم الزوايا الذى منهما موسطا حتى يصير الاعظم
مركبا من ثلثة خطوط ويصير على ذلك المثال الخط الذى يقوى
على منطق وموسط من ثلثة خطوط وكذلك الذى يقوى على
موسطين وذلك انا ننزل ثلثة خطوط منطقة فى القوة فقط مشتركة
فالخط اذًا المركب من الاثنين اصم وهو الذى من اسمين فالموضع
اذًا الذى من هذا الخط ومن الخط الباقى اصم والموضع ايضا الذى
من هذين الخطين مرتين اصم فمربع الخط كله المركب من الثلثة
الخطوط اصم فالخط اذًا اصم ويسمى من ثلثة اسماء واذا كانت
اربعة خطوط كما قلنا مشتركة فى القوة جرى الأمر فيها هذا
المجرى بعينه وما يتلو ذلك فعلى هذا المثال فليكن ثلثة خطوط
موسطة مشتركة فى القوة احدها مع كل واحد من الباقيين
يحيطان بمنطق فالمركب الذى منهما اذًا اصم يسمى من موسطين
الاول والخط الباقى موسط والموضع الذى منهما اصم فمربع الكل
اذًا اصم والحال فى سائر الاخر حال واحدة فالخطوط المركبة اذًا فى
جميع التى تكون بالتركيب تمرّ بلا نهاية وكذلك ليس ينبغى ان

نقتصر فى الخطوط الصم التى بالتفصيل على ان نفصلها انفصالا واحدا فقط حتى نجد الخط المنفصل او منفصل الموسط الاول او منفصل الموسط الثانى او الاصغر او الذى يجعل الكل موسطا مع منطق او الذى يجعل الكل موسطا مع الموسط لكنا نفصلها بفصلين وثلثة واربعة فانا اذا فعلنا ذلك بينا على ذلك المثال ان الخطوط التى تبقى صم وان كل واحد منها واحد من الخطوط التى بالتفصيل اعنى انا اذا فصلنا من خط منطق خطا منطقا مشاركا للكل فى القوة كان لنا الخط الباقى منفصلا وان فصلنا من ذلك الخط المفصول المنطق الذى سماه اقليدس اللفق خطا اخر منطقا مشاركا له فى القوة كان لنا الجزء الباقى منه منفصلا كما انا ايضا ان فصلنا من الخط المنطق المفصول من ذلك الخط خطا اخر مشاركا له فى القوة صار الباقى منفصلا وكذلك الحال فى تفصيل سائر الخطوط فليس يمكن اذًا الوقوف لا فى التى بالتركيب ولا فى التى بالتفصيل لكنه يمرّ بلا نهاية اما فى تيك فبالزيادة واما فى هذه فبتنقيص الخط المفصول وتشبّه ان يكون عدم نهاية الصم يظهر بامثال هذه الطرق من غير ان يقف التناسب فى كثرة محدودة للوسائط ولا ينتهى التركيب بالمركبات ولا يتحصل الانفصال عند حدّ ما ۞

III.

(Fol. 31 v°.) الذى ينبغى ان نعلمه فى نظام الصم بايجاز هو هذا

اما اولا فان اوقليدس افادنا المنتظمة منها والمجانسة للمنطقة وذلك ان الصم منها ما هى غير منتظمة وهى من حيّز الهيولى التى يقال لها المعورة وتخرج بلا نهاية ومنها ما هى منتظمة ويحيط بها علم ونسبتها الى تيك نسبة المنطقة اليها واوقليدس انما عنى بالمنتظمة المجانسة للمنطقة التى ليس خروجها عنها خروجا كثيرا فاما ابلونيوس يعنى بغير المنتظمة التى البعد بينها وبين المنطقة بعد كثير ثم بعد ذلك ينبغى ان نعلم ان الصم وجدت على ثلث جهات اما بالتناسب واما بالتركيب واما بالتفصيل ولم توجد على جهة اخرى غير هذه الثلث جهات اصلا وذلك ان غير المنتظمة انما اخذت من المنتظمة باخذ هذه الجهات واوقليدس انما وجد خطا واحدا اصم بالتناسب وستة بالتركيب وستة بالتفصيل وعند ذلك يتم جميع عدد الصم المنتظمة ۞

IV.

(Fol. 42 v°.) وقد علمنا ايضا علما كافيا ان عدد الصم كثير بل هو بلا نهاية اعنى التى بالتركيب والتى بالتفصيل والخط الموسط نفسه كما بين اوقليدس لما حكم بانه قد يكون من الخط الموسط خطوط اخر صم بلا نهاية بحسب نوع الخطوط التى تقدّم وصفها وان كان يحدث من الخط الموسط خطوط بلا نهاية فما قولك فيما يحدث من سائر الصم الباقية على الترتيب وعلى غير الترتيب

من البيّن عند كل احد انه قد يمكنك ان تقول انه قد يحدث من ذلك عدّة غير متناهية مرارًا [غير] متناهية ۞

TRADUCTION DES PASSAGES DU MANUSCRIT ARABE RELATIFS AUX TRAVAUX PERDUS D'APOLLONIUS SUR LES QUANTITÉS IRRATIONNELLES.

I.

§ 10.

« Le but du dixième livre du traité d'Euclide sur les Éléments est l'examen des quantités commensurables et incommensurables, rationnelles et irrationnelles.

« Cette théorie prit naissance dans l'école de Pythagore. Elle fut considérablement développée par Théétète l'Athénien, qui fit preuve, dans cette partie des mathématiques, et dans d'autres, d'une sagacité qui lui a valu une juste admiration. En outre, il était un des hommes les plus heureusement doués, et s'adonnait, avec une noble ardeur, à la recherche des vérités contenues dans ces sciences, comme Platon lui en donne le témoignage dans l'ouvrage qu'il intitula d'après son nom[1]. Quant aux distinctions exactes des susdites quantités, et aux démonstrations rigoureuses des propositions auxquelles cette théorie donne lieu, je crois qu'elles furent établies principalement par ce mathématicien; et, plus tard, le grand[2] Apollonius, dont le génie atteignit au plus haut degré de supériorité dans les mathématiques, ajouta à ces découvertes d'admirables théories après bien des efforts et de travaux.

« Car Théétète avait distingué les puissances commensurables en longueur d'avec les incommensurables[3], et avait divisé des es-

[1] Voir Platon, *Théétète*, page 143, E et suiv. de l'édition d'Étienne.

[2] Comparer le passage d'Eutocius, cité page 1.

[3] C'est-à-dire qu'il avait distingué les surfaces planes suivant que les côtés des carrés auxquels elles sont égales (ou, d'après la terminologie des anciens, « suivant

pèces très-connues des lignes irrationnelles d'après les différentes médiétées, assignant la médiale à la géométrie, la droite de deux noms à l'arithmétique, et l'apotome à l'harmonie[1], comme cela est rapporté et raconté par Eudème le Péripatéticien[2].

« Quant à Euclide, il se proposa de donner des règles rigoureuses qu'il établit relativement à la commensurabilité et à l'incommensurabilité en général; il précisa les définitions et les distinctions des quantités rationnelles et irrationnelles, il exposa un

que les lignes, les longueurs qui peuvent ces surfaces ») sont commensurables ou incommensurables. — Comparer *Théétète*, p. 147, D et suiv.

[1] Dans le second livre de son commentaire (fol. 36, recto et suiv. du ms. arabe), l'auteur donne à cette découverte de Théétète des développements ultérieurs, et démontre que toutes les irrationnelles formées par addition peuvent être construites au moyen de la proportion arithmétique, et toutes les irrationnelles formées par soustraction au moyen de la proportion harmonique.

Quant à la médiale, on a vu ci-dessus (§ 5) qu'elle est la moyenne géométrique entre deux lignes rationnelles commensurables en puissance seulement.

Quant aux irrationnelles formées par addition, on sait que, si i est la moyenne arithmétique entre x et y, on a $i = \frac{x+y}{2}$. En donnant donc à x et y successivement les valeurs développées ci-dessus (§§ 5 à 7), on obtient les irrationnelles formées par addition.

Quant aux irrationnelles formées par soustraction, on sait que, si i est la moyenne harmonique entre x et y, on a $i = \frac{2xy}{x+y}$. En donnant à x et y les valeurs ci-dessus, on aura au numérateur un espace rationnel ou médial, et au dénominateur successivement les différentes irrationnelles formées par addition. Or l'auteur démontre, dans le second livre de son commentaire, un très-beau théorème, qui est la généralisation des propositions 113 à 115 du dixième livre d'Euclide, à savoir que, si un espace rationnel ou médial est compris sous deux droites, dont l'une est une des irrationnelles formées par addition, l'autre droite sera l'irrationnelle correspondante formée par soustraction (voir ci-dessous, § 20, n[os] 11 et 12). Il en résulte que notre ligne $i = \frac{2xy}{x+y}$ représentera successivement les irrationnelles formées par soustraction, lorsqu'on donne successivement à x et y les valeurs ci-dessus développées.

[2] Voir Proclus, *Commentaire du premier livre des Éléments d'Euclide*, édition de Bâle, 1533, p. 35, l. 7; p. 92, l. 11; p. 99, l. 28. — Le *Commentaire* d'Eutocius, p. 204 de l'édition d'Oxford des *Œuvres d'Archimède*. — Fabricii *Bibliotheca Græca*, 4[e] édition, Hambourg, 1793, vol. III, p. 464 et 492.

grand nombre d'ordres des quantités irrationnelles, et, en dernier lieu, il démontra clairement toute leur étendue[1].

« Enfin, Apollonius distingua les espèces des irrationnelles *ordonnées,* et découvrit la science des quantités appelées (irrationnelles) *inordonnées,* dont il produisit un très-grand nombre par des méthodes exactes. »

II.

§ 11.

« Après s'être occupé de l'examen et de la construction de la ligne médiale, et après avoir consacré (aux sujets précédemment mentionnés) une partie considérable (du dixième livre), Euclide commence la discussion des lignes irrationnelles formées par composition et par division[2], en faisant l'application de ses recherches antérieures sur la commensurabilité et l'incommensurabilité; car la commensurabilité et l'incommensurabilité existent aussi dans les lignes formées par addition et par soustraction[3].

« La droite de deux noms est la première des lignes formées par addition, parce qu'elle est la ligne qui a le plus d'affinité avec la ligne rationnelle; car elle est composée de deux lignes rationnelles commensurables en puissance. De même, l'apotome est la première des lignes formées par soustraction, parce qu'on la forme en retranchant d'une ligne rationnelle une ligne rationnelle,

[1] Par cette dernière observation, l'auteur fait allusion à la proposition 116 du dixième livre.

[2] Telle est la signification littérale des deux mots arabes employés dans le texte; je me servirai dans la suite des termes *addition* et *soustraction,* pour éviter des malentendus.

[3] En effet, on a vu ci-dessus (§§ 5 et 6) que les deux parties constitutives, x et y, de chaque irrationnelle sont commensurables ou incommensurables en puissance; en outre, les lignes irrationnelles elles-mêmes sont commensurables ou incommensurables entre elles, selon qu'elles sont de même espèce ou d'espèces différentes (voir Euclide, *Éléments,* X, propositions 67 à 71 et 104 à 108).

commensurable en puissance à la ligne entière. Car nous construisons la ligne médiale en prenant un côté rationnel et une diagonale proposée [1], et en trouvant la moyenne proportionnelle entre ces deux lignes; nous construisons la droite de deux noms en ajoutant le côté à la diagonale, et nous construisons l'apotome en retranchant le côté de la diagonale.

« Il faut aussi qu'on sache que, non-seulement lorsqu'on joint ensemble deux lignes rationnelles et commensurables en puissance, on obtient la droite de deux noms, mais que trois ou quatre lignes produisent d'une manière analogue la même chose. Dans le premier cas, on obtient la droite de trois noms, puisque la ligne entière est irrationnelle; et, dans le second cas, on obtient la droite de quatre noms, et ainsi de suite jusqu'à l'infini. La démonstration [de l'irrationnalité] de la ligne composée de trois lignes rationnelles et commensurables en puissance est exactement la même que la démonstration relative à la combinaison de deux lignes [2].

« Mais il faut recommencer encore et dire que nous pouvons, non-seulement prendre une seule ligne moyenne entre deux lignes commensurables en puissance, mais que nous pouvons en prendre trois ou quatre, et ainsi de suite jusqu'à l'infini, puisque nous

[1] C'est-à-dire, en construisant un carré sur une diagonale qui est la ligne proposée comme rationnelle (voir Euclide, *Éléments*, X, déf. 5), carré dont le côté sera rationnel, mais commensurable en puissance seulement avec la diagonale (voir *ibid.* prop. 117). De cette façon, on obtient deux droites rationnelles commensurables en puissance seulement, c'est-à-dire les deux éléments nécessaires à la construction de la médiale, de la droite de deux noms, et de l'apotome (voir ci-dessus, § 5).

Je fais observer que le mot arabe qui a été traduit par diagonale, signifie aussi diamètre. Or, soit AB la droite proposée comme rationnelle, et prenons sur AB la partie AC rationnelle et commensurable en puissance seulement à AB. Si l'on décrit sur AB comme diamètre un demi-cercle, et si l'on élève au point C une perpendiculaire à AB qui coupe le demi-cercle en D, $AD=\sqrt{AB.AC}$ sera la médiale, $AB+AC$ la droite de deux noms, et $BC=AB-AC$ l'apotome. Ce serait là une autre manière d'interpréter les expressions un peu vagues du texte.

[2] Voir Euclide, *Éléments*, X, proposition 37, et ci-dessous, p. 41 et 42.

pouvons prendre entre deux lignes droites données quelconques autant de lignes que nous voulons, en proportion continue [1].

« Et [2], de même, dans les lignes formées par addition, nous pouvons, non-seulement construire la droite de deux noms, mais nous pouvons aussi construire celle de trois noms [3], ainsi que la première [4]

[1] Si, entre deux lignes données, k et k', on prend m moyennes proportionnelles, de sorte que :

$$k : l_1 = l_1 : l_2 = l_2 : l_3 = \ldots\ldots = l_{m-1} : l_m = l_m : k',$$

on trouve facilement qu'on a

$$1^\circ \quad l_n^{n+1} = l_{n+1}^{n} \,.\, k,$$

et

$$2^\circ \quad l_n^{m-n}\, k' = l_{n+1}^{m-n+1};$$

puis, en éliminant l_{n+1} entre ces deux équations, on trouve

$$l_n^{m+1} = k^{m+1-n} \,.\, k'^{n}$$

ou

$$l_n = \sqrt[m+1]{k^{m+1-n}.\, k'^{n}}.$$

Lorsque k et k' sont deux lignes rationnelles commensurables en puissance seulement, l_n sera de la forme $\sqrt[2(m+1)]{a^{m+1-n}.\, b^{n}}$. — Relativement à la manière dont les anciens trouvaient un nombre donné de moyennes proportionnelles entre deux droites données, voyez Archimède, édition d'Oxford, p. 144 et suiv.

[2] Comme le passage qui commence ici doit servir de base à une partie des conjectures que j'aurai à faire par la suite sur la nature des quantités irrationnelles traitées par Apollonius, et que, par conséquent, il m'importe de le faire connaître au lecteur aussi exactement que possible, j'en fais suivre ici une traduction latine littérale :

« Ac similiter in iis quæ fiunt per compositionem, non solum licet nobis efficere « lineam ex binis tantum nominibus, sed etiam licet nobis efficere eam quæ est ex « ternis nominibus, et eam quæ est ex ternis mediis, primam et secundam, et eam « quæ est ex ternis lineis rectis incommensurabilibus potentia, quarum una efficit « cum unaquaque duarum (reliquarum) summam quadrati productam ex ambabus « rationalem et rectangulum quod fit ex ambabus medium, ita ut evadat major « composita ex ternis lineis. Et simili ratione evadit linea quæ potest rationale ac « medium (composita) ex ternis lineis, et eodem modo ea quæ potest bina media. »

[3] Voir ci-dessous, p. 41 et 42.

[4] Voir ci-dessous, p. 42 et 43.

et la seconde[1] de trois médiales; puis, la ligne composée de trois droites incommensurables en puissance et telles que l'une d'elles donne avec chacune des deux autres une somme des carrés rationnelle, tandis que le rectangle compris sous les deux lignes est médial, de sorte qu'il en résulte une majeure composée de trois lignes[2].

1

$$x = \sqrt[4]{ac} \qquad y = \sqrt[4]{\frac{c}{a}} \qquad z = \sqrt[4]{\frac{c}{ab^2}}$$

$$x^2 : y^2 = a \qquad x^2 : z^2 = ab \qquad y^2 : z^2 = b$$

$$xy = \sqrt{c} \qquad xz = \sqrt{\frac{c}{b}} \qquad yz = \sqrt{\frac{c}{ab}}$$

$$(x+y+z)^2 = \sqrt{ac} + \sqrt{\frac{c}{a}} + \sqrt{\frac{c}{ab^2}} + 2\left\{\sqrt{c} + \sqrt{\frac{c}{b}} + \sqrt{\frac{c}{ab}}\right\}.$$

2

$$x^2 + y^2 = a \qquad x^2 + z^2 = b \qquad yz = \sqrt{c}$$

$$x = \sqrt{\frac{a+b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + c}} \qquad y = \sqrt{\frac{a-b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + c}}$$

$$z = \sqrt{\frac{b-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + c}}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + c}$$

$$xy = \sqrt{(a-b)\,\frac{b}{2} - c \pm b\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + c}}$$

$$xz = \sqrt{(b-a)\,\frac{a}{2} - c \pm a\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + c}}$$

$$yz = \sqrt{c}.$$

Ou bien

$$x^2 + y^2 = a \qquad x^2 + z^2 = b \qquad xy = \sqrt{c}$$

Et, d'une manière analogue, on obtient la droite qui peut une

$$x=\sqrt{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-c}} \qquad y=\sqrt{\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-c}} \qquad z=\sqrt{b-\left\{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-c}\right\}}$$

$$x^2+y^2+z^2=b+\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-c}$$

$$xy=\sqrt{c}$$

$$xz=\sqrt{(b-a)\frac{a}{2}+c+(b-a)\sqrt{\frac{a^2}{4}-c}}$$

$$yz=\sqrt{\frac{ab}{2}-c-b\sqrt{\frac{a^2}{4}-c}}$$

On obtient des formules tout à fait analogues à ces dernières, en remplaçant $xy=\sqrt{c}$ par $xz=\sqrt{c}$.

Si l'on voulait interpréter le texte de façon à y voir énoncé les équations suivantes :

$$1^\circ \quad x^2+y^2=a \qquad\qquad 2^\circ \quad x^2+z^2=b$$

$$3^\circ \quad xy=\sqrt{c} \qquad\qquad 4^\circ \quad xz=\sqrt{d}$$

ces conditions seraient incompatibles ; car, de 1°, 2° et 3°, il suit, comme on vient de le voir, $xz=\sqrt{(b-a)\frac{a}{2}+c+(b-a)\sqrt{\frac{a^2}{4}-c}}$, ce qui n'est pas un espace médial. On pourrait aussi tirer de 3° et 4°

$$x^2(y^2-z^2)=c-d \qquad \text{ou} \qquad y^2-z^2=\frac{c-d}{x^2};$$

et l'on aurait en même temps

$$x^2+y^2=a;$$

donc

$$x^2+z^2=a-\frac{c-d}{x^2}=a-\frac{c-d}{\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-c}},$$

ce qui n'est pas un espace rationnel.

rationnelle et une médiale, composée de trois droites[1], et de même celle qui peut deux médiales[2].

« Car, supposons trois lignes rationnelles commensurables en puissance seulement. La ligne composée de deux de ces lignes, à savoir la droite de deux noms, est irrationnelle, et, en conséquence, l'espace compris sous cette ligne et sous la ligne restante est irrationnel, et, de même, le double de l'espace compris sous ces deux lignes sera irrationnel. Donc, le carré de la ligne entière,

Si l'on déduit les expressions pour x, y, z des trois conditions

$$x^2+y^2=a \qquad xy=\sqrt{b} \qquad xz=\sqrt{c},$$

on aura

$$x+y+z=\sqrt{\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}}+\sqrt{\frac{2b}{a\pm\sqrt{a^2-4b}}}+\sqrt{\frac{2c}{a\pm\sqrt{a^2-4b}}}$$

et $$(x+y+z)^2=a+2\left\{\sqrt{b}+\sqrt{c}\right\}+\frac{2}{a\pm\sqrt{a^2-4b}}\left\{2\sqrt{bc}+c\right\}.$$

Cette combinaison produit une ligne composée $x+y+z$ dont le carré ne contient plus des racines de racines, tandis que les combinaisons précédentes ont l'inconvénient de conduire à des lignes dont le carré contient encore des racines d'expressions irrationnelles. C'est pourquoi je ne suis pas éloigné de croire que la combinaison $x^2+y^2=a$, $xy=\sqrt{b}$, $xz=\sqrt{c}$ est réellement celle qui avait été adoptée par Apollonius, dans sa généralisation des théories d'Euclide. Il est vrai que notre texte s'oppose à cette supposition, parce qu'il parle expressément de « la somme des carrés de l'une de ces lignes avec chacune des deux autres; » mais, dans ce qui suit, j'aurai l'occasion de faire remarquer que l'auteur ne paraît pas avoir toujours mis un très-grand soin à reproduire avec une exactitude rigoureuse les énoncés des généralisations dont il donne ici une indication rapide. (Voir la deuxième note de la page 42 et § 17.)

[1] $$x^2+y^2=\sqrt{a} \qquad x^2+z^2=\sqrt{b} \qquad xy=c$$

$$x=\sqrt{\frac{\sqrt{a}}{2}+\sqrt{\frac{a}{4}-c^2}} \quad y=\sqrt{\frac{\sqrt{a}}{2}-\sqrt{\frac{a}{4}-c^2}} \quad z=\sqrt{\sqrt{b}-\left\{\frac{\sqrt{a}}{2}+\sqrt{\frac{a}{4}-c^2}\right\}}.$$

[2] $$x^2+y^2=\sqrt{a} \qquad x^2+z^2=\sqrt{b} \qquad xy=\sqrt{c}$$

$$x=\sqrt{\frac{\sqrt{a}}{2}+\sqrt{\frac{a}{4}-c}} \quad y=\sqrt{\frac{\sqrt{a}}{2}-\sqrt{\frac{a}{4}-c}} \quad z=\sqrt{\sqrt{b}-\left\{\frac{\sqrt{a}}{2}+\sqrt{\frac{a}{4}-c}\right\}}.$$

composée de trois lignes, est irrationnel, et, conséquemment, la ligne est irrationnelle, et on l'appelle droite de trois noms[1].

« Et, si l'on a quatre lignes commensurables en puissance, comme nous l'avons dit, le procédé sera exactement le même; et on traitera les lignes suivantes d'une manière analogue.

« Qu'on ait ensuite trois lignes médiales commensurables en puissance, et dont l'une comprenne avec chacune des deux autres un rectangle rationnel[2]; alors la droite composée des deux lignes est irrationnelle et s'appelle la première de deux médiales; la ligne restante est médiale, et l'espace compris sous ces deux lignes est

[1] $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2+2\{\sqrt{a}+\sqrt{b}\}\sqrt{c}+c$, où l'une des trois quantités a, b, c peut être un carré. — Cette démonstration n'est pas tout à fait rigoureuse. Quant au terme $2\{\sqrt{a}+\sqrt{b}\}\sqrt{c}$, il est égal à la somme des deux espaces médiaux $\sqrt{4\,ac}+\sqrt{4\,bc}$, et, par une démonstration analogue à celle de la 27ᵉ proposition du Xᵉ livre d'Euclide, on prouvera que la somme de deux espaces médiaux est irrationnelle. D'un autre côté, on a démontré (X, 37) que le carré $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ est irrationnel. Mais il n'est pas généralement vrai que la somme de deux espaces irrationnels soit irrationnelle. Il reste donc à démontrer que la somme formée des deux espaces irrationnels $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ et $2\{\sqrt{a}+\sqrt{b}\}\sqrt{c}$ et de l'espace rationnel c, est irrationnelle.

[2] Ces deux conditions sont incompatibles; car, supposons trois lignes, x, y, z, dont l'une, x, comprenne avec chacune des deux autres un rectangle rationnel; on aura $xy=m$, $xz=n$; donc $y:z=m:n$; c'est-à-dire, y et z ne seront plus commensurables en *puissance* seulement, mais aussi en *longueur*. Il faut donc rectifier l'énoncé du texte de la manière suivante: « Qu'on ait trois lignes médiales, dont l'une soit commensurable avec les deux autres en puissance seulement, et dont la même comprenne avec chacune des deux autres un rectangle rationnel, etc. » On aura alors:

$$x:y=\sqrt{a} \qquad x:z=x:(py)=\frac{\sqrt{a}}{p}$$

$$xy=b \qquad xz=x.(py)=pb$$

donc

$$x=\sqrt{b\sqrt{a}} \qquad y=\sqrt{\frac{b}{\sqrt{a}}} \qquad z=p\sqrt{\frac{b}{\sqrt{a}}}$$

et

$$(x+y+z)^2=(x+y)^2+2(x+y)z+z^2.$$

Des trois termes de cette dernière somme, le premier est irrationnel (X, 38); le second se compose de l'espace $2\,xz$ qui est rationnel, et de l'espace $2\,yz$ qui irrationnel. Conséquemment, le carré de la ligne entière est irrationnel. Le reste des autres lignes se trouve dans les mêmes circonstances. Les lignes composées s'étendent donc jusqu'à l'infini dans toutes les espèces formées au moyen de l'addition.

« De même, il n'est pas nécessaire que, dans les lignes irrationnelles formées au moyen de la soustraction, nous nous bornions à n'y faire qu'une seule soustraction, de manière à obtenir l'apotome, ou le premier apotome de la médiale, ou le second apotome de la médiale, ou la mineure, ou la droite qui fait avec une surface rationnelle un tout médial, ou celle qui fait avec une surface médiale un tout médial; mais nous pourrons y effectuer deux ou trois ou quatre soustractions.

« Lorsque nous faisons cela, nous démontrons, d'une manière analogue à ce qui précède, que les lignes restantes sont irrationnelles, et que chacune d'elles est une des lignes formées par soustraction. C'est-à-dire que, si d'une ligne rationnelle nous retranchons une autre ligne rationnelle commensurable à la ligne entière en puissance, nous obtenons pour ligne restante un apotome; et si nous retranchons de cette ligne retranchée et rationnelle, qu'Euclide appelle la *congruente* (*προσαρμόζουσα*), une autre ligne rationnelle qui lui est commensurable en puissance, nous obtenons, comme partie restante, un apotome; de même que, si nous retranchons de la ligne rationnelle et retranchée de cette ligne une autre ligne qui lui est commensurable en puissance, le reste est un apotome [1]. Il en est de même pour la soustraction des autres lignes.

est irrationnel; le troisième est le carré d'une ligne médiale, et, par conséquent, irrationnel. On obtient en définitive

$$x+y+z=\sqrt{\frac{b}{\sqrt{a}}\left\{a+(p+1)^2\right\}+2b(p+1)}.$$

[1] C'est-à-dire que si l'on forme successivement les différences $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $\sqrt{b}-\sqrt{c}$, $\sqrt{c}-\sqrt{d}$, etc., toutes ces expressions représenteront des apotomes. On se serait attendu, sans doute, à voir l'auteur former et discuter les expressions suivantes: $(\sqrt{a}-\sqrt{b})-\sqrt{c}$, $\left\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})-\sqrt{c}\right\}-\sqrt{d}$, etc.

« Il est donc alors impossible de s'arrêter, soit dans les lignes formées par addition, soit dans celles formées par soustraction; mais on procède à l'infini, dans celles-là, en ajoutant, et dans celles-ci, en ôtant la ligne retranchée. Et, naturellement, l'infinité des quantités irrationnelles se manifeste par des procédés tels que les précédents, vu que la proportion continue ne s'arrête pas à un nombre déterminé pour les médiales, que l'addition n'a pas de fin pour les lignes formées par addition, et que la soustraction n'arrive pas non plus à un terme quelconque. »

III.

§ 12.

« Voici maintenant, en peu de mots, ce qu'il faut qu'on sache au sujet de l'*ordre* des irrationnelles.

« En premier lieu, Euclide nous a donné (la théorie de) celles d'entre elles qui sont *ordonnées* et homogènes aux rationnelles; car les irrationnelles se divisent premièrement en *inordonnées*, c'est-à-dire celles qui tiennent de la matière qu'on appelle corruptible, et qui s'étendent à l'infini; et, secondement, en *ordonnées*, qui forment le sujet limité d'une science, et qui sont aux *inordonnées* comme les rationnelles sont aux irrationnelles *ordonnées*. Or Euclide s'occupa seulement des *ordonnées* qui sont homogènes aux rationnelles, et qui ne s'en éloignent pas considérablement; ensuite Apollonius s'occupa des *inordonnées*, entre lesquelles et les rationnelles la distance est très-grande.

« En second lieu, il faut qu'on sache que les irrationnelles sont produites de trois manières : au moyen de la proportionnalité, au moyen de la composition (addition), ou au moyen de la division (soustraction), et pas d'une autre manière du tout, hormis ces trois manières; car les *inordonnées* ne sont dérivées des *ordonnées* qu'au moyen de ces méthodes. Or Euclide n'a trouvé qu'une seule ligne irrationnelle au moyen de la proportionnalité, six au moyen de la composition, et six au moyen de la division; et à ceci se borne le nombre entier des irrationnelles *ordonnées*. »

$9 + 2\square + 1 = 4$

$\square = -3$

IV.

§ 13.

« Nous avons aussi acquis une connaissance suffisante de ce que le nombre des irrationnelles est grand, ou plutôt infini; c'est-à-dire le nombre des irrationnelles formées par addition et par soustraction, et de la ligne médiale elle-même, ainsi que le démontra Euclide, attendu qu'il énonça que de la ligne médiale il résulte d'autres lignes irrationnelles infinies en nombre par rapport à l'espèce des lignes précédemment décrites[1]; mais, si de la ligne médiale on déduit une infinité de lignes, que dira-t-on au sujet de celles qu'on déduit des autres lignes irrationnelles suivant l'ordre ou en négligeant l'ordre? Il est évident pour chacun qu'on peut dire qu'il en résulte un nombre de lignes infiniment de fois infini. »

ESSAI D'UNE RESTITUTION CONJECTURALE DES TRAVAUX PERDUS D'APOLLONIUS SUR LES QUANTITÉS IRRATIONNELLES.

I.

§ 14.

Avant d'esquisser l'essai d'une restitution conjecturale des développements donnés par Apollonius à la théorie des quantités irrationnelles, développements qui doivent avoir consisté essentiellement dans une généralisation de la théorie d'Euclide, il sera nécessaire de jeter encore un coup d'œil sur les traits généraux et sur les points essentiels des constructions de ce dernier géomètre.

[1] C'est-à-dire, il en résulte une infinité d'irrationnelles, dont aucune n'est de la même espèce qu'aucune de celles qui la précèdent. (*Éléments*, X, 116.) — Toutes ces lignes ont la forme de la médiale, ce sont des médiales d'ordres supérieurs. Notre auteur peut donc dire avec raison que le nombre des médiales est infini, aussi bien que celui des irrationnelles formées par addition et par soustraction.

Comme d'un côté les noms donnés par Euclide aux différentes espèces d'irrationnelles sont en partie d'une longueur gênante, et que, d'un autre côté, les remarques que j'aurai à faire porteront toujours à la fois sur l'espèce formée par addition et sur l'espèce correspondante formée par soustraction, je désignerai, dans la suite, les irrationnelles construites dans les propositions 37 et 74, 38 et 75, 39 et 76, 40 et 77, 41 et 78, 42 et 79 du X^e livre, respectivement comme la 1re, 2^e, 3^e, 4^e, 5^e, 6^e irrationnelle d'Euclide.

Pour toutes ces lignes, le but constant des démonstrations d'Euclide est de prouver que chacune d'elles peut un espace qui n'est ni rationnel, ni médial. Or l'espace que peut la ligne $x \pm y$, c'est l'expression

$$x^2 + y^2 \pm 2\,xy = S \pm 2\,R,$$

si nous désignons par S la somme des carrés des deux éléments de la ligne, et par R le rectangle compris sous eux;
donc

$$x \pm y = \sqrt{S \pm 2\,R}.$$

Euclide ne définit d'une manière positive que deux genres d'espaces, l'espace rationnel et l'espace médial. Ces deux genres d'espaces donnent lieu à quatre combinaisons pour la nature de la somme $S \pm 2\,R$:

1° S rationnel et R rationnel;
2° S rationnel et R médial;
3° S médial et R rationnel;
4° S médial et R médial.

La première combinaison doit être rejetée, parce qu'elle rendrait la somme $S \pm 2\,R$ rationnelle; et la quatrième doit être assujettie à la condition que S et R soient incommensurables, parce que sans cela la somme $S \pm 2\,R$ serait médiale.

On exclut les cas inadmissibles par une seule condition générale, en demandant que S et R soient incommensurables entre eux.

De cette manière, on aura

$$1^{\circ}\qquad x^2+y^2=a \qquad\qquad xy=\sqrt{b}$$

$$x\pm y=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}};$$

ce qui est la 4^e irrationnelle d'Euclide.

$$2^{\circ}\qquad x^2+y^2=\sqrt{a} \qquad\qquad xy=b$$

$$x\pm y=\sqrt{\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-4b^2}}{2}}\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-4b^2}}{2}};$$

ce qui est la 5^e irrationnelle d'Euclide.

$$3^{\circ}\qquad x^2+y^2=\sqrt{a} \qquad\qquad xy=\sqrt{b}$$

$$x\pm y=\sqrt{\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a-4b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-4b}}{2}};$$

ce qui est la 6^e irrationnelle d'Euclide.

Les combinaisons possibles sous les circonstances données étant ainsi épuisées, on se demande naturellement d'où viennent maintenant les trois premières irrationnelles d'Euclide.

Or celles-ci ne sont, en effet, que des cas particuliers des trois dernières, spécifiés par la condition que les deux éléments x et y doivent être commensurables en puissance, ce qui est compatible avec la condition que les espaces S et R soient incommensurables; car de

$$x^2 : y^2 = m : n,$$

on tire

$$(x^2+y^2) : xy = (m+n) : \sqrt{mn}\,[1].$$

[1] Naturellement, l'inverse n'a pas lieu. De $(x^2+y^2) : xy=\sqrt{m}$ on tire $x^2 : y^2 = \frac{(x^2+y^2)^2}{m.y^4}$. Dans les trois cas généraux $(x^2+y^2)^2$ sera une quantité rationnelle, mais y^4 sera irrationnel (dans l'acception moderne de ce terme). Au contraire, dans les trois cas particuliers où y est une droite rationnelle ou médiale (§ 5), y^4 est effectivement rationnel (dans l'acception moderne de ce terme).

Aussi nous avions remarqué ci-dessus (§ 6) que la commensurabilité en puissance des éléments x et y est cette exception à leur incommensurabilité, qui a lieu dans le cas particulier où l'expression $Q^4 - 4Q^2$ est le carré d'une quantité rationnelle. Or, Q n'étant autre chose que le quotient $\frac{x^2+y^2}{xy}$, de $\frac{x^2}{y^2} = \frac{m}{n}$, il suit effectivement $Q^4 - 4Q^2 = \left(\frac{m^2-n^2}{mn}\right)^2$.

Nous n'avons donc qu'à faire $(x^2+y^2) : xy = (m+n) : \sqrt{mn}$, pour dériver des trois dernières irrationnelles d'Euclide les trois premières suivant l'ordre.

Pour cela, nous posons,

1° $$a = m + n \qquad b = mn;$$

ces valeurs, substituées dans l'expression de la 4ᵉ irrationnelle, donnent

$$x \pm y = \sqrt{m} \pm \sqrt{n};$$

ce qui est la 1ʳᵉ irrationnelle d'Euclide.

2° $$a = (m+n)^2\, mn \qquad b = mn;$$

ces valeurs, substituées dans l'expression de la 5ᵉ irrationnelle, donnent

$$x \pm y = \sqrt{m\sqrt{mn}} \pm \sqrt{n\sqrt{mn}};$$

ce qui est la 2ᵉ irrationnelle d'Euclide.

3° $$a = m + n \qquad b = \frac{mn}{m+n};$$

ces valeurs, substituées dans l'expression de la 6ᵉ irrationnelle, donnent

$$x \pm y = \sqrt{\frac{m}{\sqrt{m+n}}} \pm \sqrt{\frac{n}{\sqrt{m+n}}};$$

ce qui est la 3ᵉ irrationnelle d'Euclide.

II.

§ 15.

Voici maintenant les définitions et la discussion des irrationnelles généralisées que je suppose avoir formé le sujet des travaux d'Apollonius.

1° *La somme de n droites rationnelles commensurables en puissance seulement, et comprenant deux à deux un rectangle médial :*

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\ldots\ldots$$

L'espace que peut cette ligne a la forme suivante :

$$a+b+c+d+\ldots\ldots+$$
$$+2\{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\ldots+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\ldots+\sqrt{cd}+\ldots\}$$

2° *La somme de n droites médiales, dont l'une est commensurable avec toutes les autres en puissance seulement, et dont la même comprend avec chacune des autres un rectangle rationnel :*

$$\sqrt{a\sqrt{m}}+\sqrt{\frac{ab^2}{\sqrt{m}}}+\sqrt{\frac{ac^2}{\sqrt{m}}}+\sqrt{\frac{ad^2}{\sqrt{m}}}+\ldots\ldots$$

L'espace que peut cette ligne a la forme suivante :

$$\frac{a}{\sqrt{m}}\{m+(b+c+d+\ldots\ldots)^2\}+2a(b+c+d+\ldots\ldots).$$

3° *La somme de n droites médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant deux à deux un rectangle médial :*

$$\sqrt{a\sqrt{m}}+\sqrt{b\sqrt{m}}+\sqrt{c\sqrt{m}}+\sqrt{d\sqrt{m}}+\ldots\ldots$$

L'espace que peut cette ligne a la forme suivante :

$$\{a+b+c+d+\ldots\ldots+$$
$$+2(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\ldots+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\ldots+\sqrt{cd}+\ldots)\}\sqrt{m}.$$

On voit que cette ligne n'est autre chose que la première irrationnelle généralisée multipliée par $\sqrt[4]{m}$, en sorte que la première est ce cas particulier de la troisième qui a lieu lorsque m est le carré ou le carré du carré d'une quantité rationnelle. C'est ce que nous avions déjà remarqué ci-dessus (§ 5), car on a

$$\sqrt{n\sqrt{mn'}} \pm \sqrt{n\sqrt{\frac{n'}{m}}} = \left(\sqrt{n} \pm \sqrt{\frac{n}{m}}\right)\sqrt[4]{mn'},$$

et, dans le cas de $m = n'$, ou de $m = \frac{n^2}{n'}$, mn' sera le carré d'une quantité rationnelle.

4° *La somme de n droites dont l'une est incommensurable avec toutes les autres, et dont la même donne, avec une des autres, une somme des carrés rationnelle, et comprend avec chacune des autres un rectangle médial :*

$$\alpha^2 + \beta^2 = a,\ \alpha\beta = \sqrt{b},\ \alpha\gamma = \sqrt{c},\ \alpha\delta = \sqrt{d},\ \ldots.$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots\ldots =$$

$$= \sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}} + \sqrt{\frac{2b}{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}} + \sqrt{\frac{2c}{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}} +$$

$$+ \sqrt{\frac{2d}{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}} + \ldots\ldots$$

L'espace que peut cette ligne a la forme suivante :

$$a + 2\left\{\sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \ldots\ldots\right\} +$$

$$+ \frac{2}{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}\left\{2\sqrt{b}\,(\sqrt{c} + \sqrt{d} + \ldots) + (\sqrt{c} + \sqrt{d} + \ldots)^2\right\}.$$

5° *La somme de n droites dont l'une est incommensurable avec toutes les autres, et dont la même donne, avec une des autres, une somme des* *carrés médiale, et comprend avec chacune des autres un rectangle rationnel :*

$$\alpha^2+\beta^2=\sqrt{a},\ \alpha\beta=b,\ \alpha\gamma=c,\ \alpha\delta=d,\ \ldots\ldots$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots=$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b^2}}{2}}+\sqrt{\frac{2b^2}{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b^2}}}+\sqrt{\frac{2c^2}{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b^2}}}+$$

$$+\sqrt{\frac{2d^2}{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b^2}}}+\ldots\ldots$$

L'espace que peut cette ligne a la forme suivante :

$$2\{b+c+d+\ldots\}+\sqrt{a}+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b^2}}\{2b(c+d+\ldots\ldots)+(c+d+\ldots\ldots)^2\}.$$

6° *La somme de n droites dont l'une est incommensurable avec toutes les autres, et dont la même donne, avec une des autres, une somme des carrés médiale, et comprend avec chacune des autres un rectangle médial :*

$$\alpha^2+\beta^2=\sqrt{a},\ \alpha\beta=\sqrt{b},\ \alpha\gamma=\sqrt{c},\ \alpha\delta=\sqrt{d},\ \ldots\ldots$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots=$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b}}{2}}+\sqrt{\frac{2b}{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b}}}+\sqrt{\frac{2c}{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b}}}+$$

$$+\sqrt{\frac{2d}{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b}}}+\ldots\ldots$$

L'espace que peut cette ligne est de la forme

$$\sqrt{a}+2\{\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\ldots\ldots\}+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b}}\{2\sqrt{b}(\sqrt{c}+\sqrt{d}+\ldots\ldots)+(\sqrt{c}+\sqrt{d}+\ldots)^2\}.$$

Comme ci-dessus, les trois premières irrationnelles sont des cas particuliers des trois dernières, ce qu'on démontre au moyen des mêmes substitutions.

Lorsque dans 4° on a

$$a = m + n \qquad b = mn,$$

on obtiendra

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = \sqrt{m} + \sqrt{\frac{b}{m}} + \sqrt{\frac{c}{m}} + \sqrt{\frac{d}{m}} + \ldots .$$

Lorsque dans 5° on a

$$a = (m + n)^2\, mn \qquad b = mn,$$

on obtiendra

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = \sqrt{m\sqrt{mn}} + \sqrt{\frac{b^2}{m\sqrt{mn}}} + \sqrt{\frac{c^2}{m\sqrt{mn}}} + \sqrt{\frac{d^2}{m\sqrt{mn}}} + \ldots$$

Lorsque dans 6° on a

$$a = m + n \qquad b = \frac{mn}{m+n},$$

on obtiendra

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = \sqrt{\frac{m}{\sqrt{m+n}}} + \sqrt{\frac{b}{m}\sqrt{m+n}} + \sqrt{\frac{c}{m}\sqrt{m+n}} + \sqrt{\frac{d}{m}\sqrt{m+n}} + \ldots =$$

$$= \left\{ \sqrt{\frac{m}{m+n}} + \sqrt{\frac{b}{m}} + \sqrt{\frac{c}{m}} + \sqrt{\frac{d}{m}} + \ldots \right\} \sqrt[4]{m+n}.$$

§ 16.

Je vais maintenant faire suivre encore une autre conjecture sur les formes de la 4^e, 5^e et 6^e irrationnelle généralisées, mais qui, cependant, me paraît moins probable.

4° *La somme de n droites incommensurables, dont l'une comprend, avec une des autres, un rectangle médial, et donne avec chacune des autres une somme des carrés rationnelle.*

$$\alpha^2+\beta^2=a,\ \alpha\beta=\sqrt{b},\ \alpha^2+\gamma^2=c,\ \alpha^2+\delta^2=d,\ \ldots\ldots$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots=$$

$$=\sqrt{\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}}+\sqrt{a-\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}}+\sqrt{c-\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}}+$$

$$+\sqrt{d-\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}}+\ldots\ldots$$

L'espace que peut cette ligne a la forme suivante:

$$a+c+d+\ldots\ldots-(n-2)\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}+2\sqrt{b}+$$

$$+2\left\{\sqrt{c\varphi-\varphi^2}+\sqrt{d\varphi-\varphi^2}+\ldots\ldots\right.$$

$$+\sqrt{ac-(a+c)\varphi+\varphi^2}+\sqrt{ad-(a+d)\varphi+\varphi^2}+\ldots$$

$$\left.+\sqrt{cd-(c+d)\varphi+\varphi^2}+\ldots\ldots\qquad+\ldots\ldots\right\},$$

où $\varphi=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$ et $\varphi^2=\left(\frac{a^2}{2}-b\right)\pm a\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}$.

5° *La somme de n droites incommensurables, dont l'une comprend, avec une des autres, un rectangle rationnel, et donne avec chacune des autres une somme des carrés médiale.*

$$\alpha^2+\beta^2=\sqrt{a},\ \alpha\beta=b,\ \alpha^2+\gamma^2=\sqrt{c},\ \alpha^2+\delta^2=\sqrt{d},\ \ldots\ldots$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots=$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b^2}}{2}}+\sqrt{\sqrt{a}-\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b^2}}{2}}+$$

$$+\sqrt{\sqrt{c}-\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b^2}}{2}}+\sqrt{\sqrt{d}-\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b^2}}{2}}+\ldots\ldots\ldots$$

L'espace que peut cette ligne a la forme suivante :

$$\sqrt{a}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\ldots\ldots-(n-2)\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b^2}}{2}+2b+$$

$$+2\left\{\sqrt{\sqrt{c}\,\chi-\chi^2}+\sqrt{\sqrt{d}\,\chi-\chi^2}+\ldots\ldots\right.$$

$$+\sqrt{\sqrt{ac}-(\sqrt{a}+\sqrt{c})\,\chi+\chi^2}+\sqrt{\sqrt{ad}-(\sqrt{a}+\sqrt{d})\,\chi+\chi^2}+\ldots$$

$$\left.+\sqrt{\sqrt{cd}-(\sqrt{c}+\sqrt{d})\,\chi+\chi^2}+\ldots\ldots+\ldots\ldots\right\},$$

où $\chi=\frac{\sqrt{a}}{2}\pm\sqrt{\frac{a}{4}-b^2}$ et $\chi^2=\left(\frac{a}{2}-b^2\right)\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-ab^2}$.

6° *La somme de n droites incommensurables, dont l'une comprend, avec une des autres, un rectangle médial, et donne avec chacune des autres une somme des carrés médiale.*

$$\alpha^2+\beta^2=\sqrt{a},\ \alpha\beta=\sqrt{b},\ \alpha^2+\gamma^2=\sqrt{c},\ \alpha^2+\delta^2=\sqrt{d},\ \ldots$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots\ldots=$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b}}{2}}+\sqrt{\sqrt{a}-\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b}}{2}}+$$

$$+\sqrt{\sqrt{c}-\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b}}{2}}+\sqrt{\sqrt{d}-\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b}}{2}}+\ldots\ldots$$

L'espace que peut cette ligne a la forme suivante :

$$\sqrt{a}+\sqrt{c}+\sqrt{d}+\ldots\ldots-(n-2)\frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-4b}}{2}+2\sqrt{b}+$$

$$+2\left\{\sqrt{\sqrt{c}\,\psi-\psi^2}+\sqrt{\sqrt{d}\,\psi-\psi^2}+\ldots\ldots\right.$$

$$+\sqrt{\sqrt{ac}-(\sqrt{a}+\sqrt{c})\,\psi+\psi^2}+\sqrt{\sqrt{ad}-(\sqrt{a}+\sqrt{d})\,\psi+\psi^2}+\ldots$$

$$\left.+\sqrt{\sqrt{cd}-(\sqrt{c}+\sqrt{d})\,\psi+\psi^2}+\ldots\ldots+\ldots\ldots\right\},$$

où $\psi=\frac{\sqrt{a}}{2}\pm\sqrt{\frac{a}{4}-b}$ et $\psi^2=\left(\frac{a}{2}-b\right)\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-ab}$.

Voici, enfin, une troisième combinaison que je considérerais comme la plus probable de toutes, si elle s'accordait parfaitement avec la lettre du passage ci-dessus (p. 695 et 696) relatif à la majeure composée de trois éléments. On demandera qu'il soit

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \ldots\ldots = A,$$
$$\alpha\beta = B,\ \alpha\gamma = C,\ \alpha\delta = D,\ \ldots\ldots$$

et, si l'on pose

$$B^2 + C^2 + D^2 + \ldots\ldots = \sigma,$$

on aura

$$\alpha = \sqrt{\frac{A \pm \sqrt{A^2 - 4\sigma}}{2}},\ \beta = \sqrt{\frac{2B^2}{A \pm \sqrt{A^2 - 4\sigma}}},\ \gamma = \sqrt{\frac{2C^2}{A \pm \sqrt{A^2 - 4\sigma}}},$$
$$\delta = \sqrt{\frac{2D^2}{A \pm \sqrt{A^2 - 4\sigma}}},\ \ldots\ldots$$

La ligne $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots\ldots$ représentera successivement la 4[e], 5[e], 6[e] irrationnelle, selon qu'on donne à A, B, C, D, ... les valeurs a, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$, ... ou $\sqrt{a}$, b, c, d,... ou $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{d}$, ... Puis, dans les cas particuliers où l'on aura respectivement $a = m + n$ et $\sigma = mn$, ou $a = (m+n)^2 . mn$ et $\sigma = (mn)^2$, ou $a = m + n$ et $\sigma = \frac{mn}{m+n}$, les trois dernières irrationnelles se transformeront dans les trois premières suivant l'ordre.

§ 17.

Quant aux irrationnelles d'Apollonius, formées au moyen de la soustraction, elles ne peuvent avoir été que : ou bien, d'après notre texte, des lignes de la forme $\alpha - \beta$, $\beta - \gamma$, $\gamma - \delta$, etc.; ou bien, ce qui paraît plus probable, des lignes de la forme

$$(((\alpha - \beta) - \gamma) - \delta) - \ldots\ldots,$$

où α, β, γ, δ, ... représentent les expressions développées dans ce qui précède.

Si certaines expressions de notre texte pouvaient induire quelque lecteur à croire que les conditions générales pour la formation des lignes $\alpha - \beta$, $\beta - \gamma$, $\gamma - \delta$, etc., étaient les suivantes

$$\begin{array}{ll} \alpha^2 + \beta^2 = A & \alpha\beta = A_1 \\ \beta^2 + \gamma^2 = B & \beta\gamma = B_1 \\ \gamma^2 + \delta^2 = C & \gamma\delta = C_1 \\ \text{etc.}, & \end{array}$$

où $A, B, C, \ldots A_1, B_1, C_1 \ldots$ sont de la forme m ou $\sqrt{m}$; je fais observer qu'on ne peut satisfaire à ces conditions que dans des cas particuliers, attendu qu'il y a plus de conditions à remplir que de lignes à déterminer.

III.

§ 18.

Les généralisations des paragraphes précédents se rapportent au *nombre des termes;* on y remplace les irrationnelles binômes d'Euclide par des irrationnelles polynômes.

Il reste maintenant une autre généralisation à faire, qui concerne le *degré* des irrationnelles, attendu qu'on peut désigner en général les irrationnelles traitées par Euclide, même celles discutées dans la proposition 116 du X[e] livre, comme irrationnelles du second degré.

Mais si l'on voulait appliquer cette généralisation aux irrationnelles polynômes considérées dans les paragraphes précédents, on obtiendrait, pour les conditions qui servent à déterminer les éléments de ces irrationnelles, des systèmes d'équations du troisième degré ou de degrés supérieurs à plusieurs inconnues [1]; et, comme tout ce à quoi les mathématiques grecques se sont élevées

[1] En outre, cette généralisation présupposerait la connaissance du développement de l'expression $(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots)^n$, et ce développement ne présenterait plus d'une manière simple et naturelle les conditions qui doivent servir à la détermination des éléments α, β, γ, $\delta \ldots$

en fait de résolutions d'équations supérieures se borne, d'après nos connaissances actuelles, à la construction géométrique de quelques cas particuliers d'équations du troisième et du quatrième degré, il n'y a pas lieu de croire que la construction d'irrationnelles polynômes de degrés supérieurs ait été tentée par Apollonius.

Mais les anciens possédaient des procédés pour trouver mécaniquement la racine de l'équation binôme d'un degré quelconque, ou, ce qui revient au même, pour trouver un nombre donné de moyennes proportionnelles entre deux droites données; et il résulte de ce que rapporte notre auteur, qu'ils n'ont pas manqué d'en profiter pour considérer des irrationnelles de degrés supérieurs.

Nous avons vu ci-dessus (p. 695) que ces irrationnelles étaient de la forme

$$\sqrt[\mu]{A^{\mu - \nu} . B^{\nu}} .$$

Or, comme on peut varier à l'infini les valeurs des deux nombres entiers μ et ν, et comme pour les deux éléments A et B on peut prendre, soit deux rationnelles, soit une rationnelle et une des innombrables irrationnelles, considérées sous leur forme générale dans les paragraphes précédents, soit deux quelconques de ces irrationnelles, soit enfin les irrationnelles qui résultent de ces substitutions mêmes, on voit que notre auteur est parfaitement en droit de dire que le nombre des irrationnelles qu'on peut construire d'après les indications précédemment données par lui, est « infiniment de fois infini. »

ANALYSE DU COMMENTAIRE DE VALENS SUR LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

PREMIER LIVRE.

§ 19.

1. Esquisse historique du développement successif de la théorie

des quantités irrationnelles chez les Grecs[1]. — Fol. 23 v° du manuscrit arabe.

2. Du fini et de l'infini comme principes de la commensurabilité et de l'incommensurabilité. — Fol. 23 v° à 24 r°.
3. Aperçu de l'arrangement des propositions du dixième livre. — Fol. 24 r° à 24 v°.
4. Différence du rapport de deux quantités finies en général, d'avec celui de deux quantités commensurables, et celui de deux quantités rationnelles. — Fol. 24 v° à 25 v°.
5. De la triade comme principe des quantités irrationnelles. — Fol. 25 v°.
6. Examen comparé de la théorie de Théétète et de celle d'Euclide sur les quantités commensurables en longueur et en puissance, ou en puissance seulement. — Fol. 25 v° à 26 v°.
7. De l'existence réelle des quantités incommensurables dans les choses matérielles. — Fol. 26 v°.
8. Des principes métaphysiques (Dieu et la matière) de la commensurabilité et de l'incommensurabilité. — Fol. 26 v° à 27 r°.
9. Que les lignes rationnelles existent par convention et non pas naturellement. Qu'il existe des lignes rationnelles commensurables en longueur et cependant incommensurables en longueur à la ligne proposée comme rationnelle. — Fol. 27 r° à 28 r°.
10. Différence des opinions de Platon et d'Euclide sur la définition des lignes rationnelles. Classification des lignes rationnelles. — Fol. 28 r° à 28 v°.
11. De l'espace médial et de la ligne médiale. — Fol. 28 v° à 29 r°.
12. Des irrationnelles formées par addition et par soustraction, et des développements dont la théorie d'Euclide est susceptible[2]. — Fol. 29 r° à 30 r°.

[1] Voir ci-dessus, p. 34 et suiv.
[2] Voir ci-dessus, p. 36 et suiv.

13. Division du dixième livre en treize sections, et indication sommaire du contenu de chacune de ces sections. — Fol. 30 r° à 31 r°.

SECOND LIVRE.

§ 20.

1. De l'ordre des irrationnelles[1]. — De la relation qui existe entre les irrationnelles et les espaces qu'elles peuvent. — Fol. 31 v°.
2. De la nature d'un rectangle compris sous deux droites, selon que ces droites sont rationnelles ou irrationnelles, et commensurables en longueur, ou en puissance, ou incommensurables. — Fol. 31 v° à 32 r°.
3. Des irrationnelles formées par addition. Examen des différents cas que présente la composition de deux droites, selon que ces droites sont commensurables en longueur, ou en puissance, ou incommensurables, et selon que, dans chacun des deux derniers cas, la somme de leurs carrés est rationnelle, et le rectangle compris sous elles médial, ou la somme des carrés médiale et le rectangle rationnel, ou la somme des carrés et le rectangle tous les deux médiaux. — Fol. 32 r° à 33 r°.
4. Pourquoi Euclide, dans le cas où les deux éléments sont commensurables en puissance, les désigne, suivant leur espèce, comme rationnels ou médiaux, tandis qu'il ne le fait pas lorsque les deux éléments sont incommensurables. — Fol. 33 r°.
5. Théorème. Lorsque deux lignes sont commensurables en puissance, et que la somme de leurs carrés est rationnelle ou médiale, les deux lignes seront rationnelles ou médiales; si elles sont incommensurables, la même chose

[1] Voir ci-dessus, p. 44.

n'aura plus lieu [1]. Démonstration de ce théorème. — Fol. 33 v° à 34 r°.

6. Des irrationnelles formées par soustraction. Leur affinité avec les irrationnelles formées par addition. — Fol. 34 r°.

7. Comme les irrationnelles formées par addition tiennent leurs noms de la composition des espaces qu'elles peuvent, de même, les irrationnelles formées par soustraction tiennent les leurs de la division (soustraction) des mêmes espaces [2]. Examen des six cas analogues à ceux du n° 3. Génération des irrationnelles formées par soustraction au moyen de deux espaces donnés. — Fol. 34 r° à 35 r°.

8. Génération des irrationnelles formées par addition ou par soustraction, au moyen d'un espace rationnel et d'un espace médial, ou de deux espaces médiaux qu'on combine par addition ou par soustraction, et dont le plus petit [3] est compris sous deux lignes, soit commensurables, soit incommensurables en puissance, et qui, ensemble, peuvent le plus grand [4]. Cela donne lieu à douze cas, correspondant aux douze irrationnelles. — Fol. 35 r° à 36 r°.

[1] Posons $x : y = r$, $x^2 + y^2 = s$; on aura

$$x = \sqrt{\frac{s\,r^2}{r^2+1}} \qquad y = \sqrt{\frac{s}{r^2+1}}$$

Lorsque x et y sont commensurables en puissance, r^2 est rationnel dans l'acception moderne de ce terme, et, comme la ligne qui peut un espace rationnel ou médial est elle-même rationnelle ou médiale, x et y seront, en même temps que s, rationnels ou médiaux. Lorsque, au contraire, x et y sont incommensurables en puissance, r^2 sera irrationnel, et, par conséquent, x et y seront des lignes irrationnelles.

[2] Si le carré d'une irrationnelle formée par addition s'exprime par $S + 2R$, celui de l'irrationnelle correspondante formée par soustraction s'exprime par $S - 2R$.

[3] $2R$; car on a toujours $x^2 + y^2 > 2xy$.

[4] Telles sont les expressions employées à plusieurs reprises dans le texte; pour parler plus exactement, il faut dire que la somme des carrés des deux droites qui comprennent la moitié de l'espace mineur est égale à l'espace majeur.

9. De la relation qui existe entre les trois genres d'irrationnelles et les trois genres de proportions. Génération de la médiale au moyen de la proportion géométrique, et des irrationnelles formées par addition au moyen de la proportion arithmétique. — Fol. 36 r° à 36 v°.

10. Génération des irrationnelles formées par soustraction, au moyen de la proportion harmonique [1]. — Fol. 36 v° à 37 v°.

11. Théorème. Lorsqu'un espace rationnel est compris sous deux droites, dont l'une est une des irrationnelles formées par addition, l'autre droite sera l'irrationnelle correspondante formée par soustraction. Démonstration de ce théorème. — Fol. 37 v° à 38 v°.

12. Démonstration du même théorème pour un espace médial [2]. Fol. 38 v°.

[1] Voir ci-dessus, p. 35.

[2] En posant

$$\frac{E}{x+y} = \xi - \eta$$

on aura

$$\xi = \frac{E}{x^2 - y^2}\, x \qquad \eta = \frac{E}{x^2 - y^2}\, y$$

$$\xi^2 + \eta^2 = \left(\frac{E}{x^2 - y^2}\right)^2 (x^2 + y^2)$$

$$\xi\,\eta = \left(\frac{E}{x^2 - y^2}\right)^2 . \,(x\,y)$$

$$\xi^2 : \eta^2 = x^2 : y^2.$$

Tant que E est un espace rationnel ou médial, et que $x + y$ représente une des six irrationnelles formées par addition, $\left(\frac{E}{x^2 - y^2}\right)^2 = \frac{E^2}{(x^2 + y^2)^2 - (2\,x\,y)^2}$ sera un facteur rationnel, dans l'acception moderne de ce terme. La somme et le rapport des carrés des deux éléments constitutifs, ainsi que le produit de ces deux éléments, c'est-à-dire les expressions qui, comme nous l'avons vu ci-dessus (§§ 5 et 6), décident de la nature de l'irrationnelle composée de ces deux éléments, ne changeront donc pas de nature, lorsque de x et y on passe à ξ et η. En conséquence, $\xi - \eta$ sera une irrationnelle de la même espèce que $x - y$; *c. q. f. d.*

13. Des six droites de deux noms et des six apotomes; et des relations qui existent entre les six droites de deux noms et les six irrationnelles formées par addition d'un côté, et entre les six apotomes et les six irrationnelles formées par soustraction de l'autre côté. — Fol. 39 r° à 39 v°.

14. Théorème. Le carré d'une quelconque des six irrationnelles formées par addition, appliqué à une médiale, fait une largeur qui est la première ou la seconde de deux médiales. Démonstration de ce théorème. — Fol. 39 v° à 41 r°.

15. Théorème. Le carré d'une quelconque des six irrationnelles formées par soustraction, appliqué à une médiale, fait une largeur qui est le premier ou le second apotome de la médiale. Démonstration de ce théorème[1]. — Fol. 41 r° à 42 r°.

16. Remarque sur l'application du carré de la médiale aux irrationnelles formées par addition et par soustraction (voir n° 12); et sur l'application des carrés des irrationnelles for-

[1] En posant

$$\frac{(x \pm y)^2}{\sqrt[4]{m}} = \xi \pm \eta,$$

on aura

$$\xi = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt[4]{m}} \qquad \eta = \frac{2xy}{\sqrt[4]{m}}$$

$$\xi^2 : \eta^2 = \frac{(x^2 + y^2)^2}{(2xy)^2}$$

$$\xi\eta = \frac{(x^2 + y^2) \cdot (2xy)}{\sqrt{m}}.$$

Il résulte de ces formules que, tant que x et y représentent les deux éléments constitutifs d'une des douze irrationnelles formées par addition et par soustraction, ξ et η sont deux médiales commensurables en puissance seulement, et comprenant un rectangle rationnel ou médial. Conséquemment, $\xi \pm \eta$ représentera toujours, soit une première ou une seconde de deux médiales, soit un premier ou un second apotome de la médiale (voir § 5) *c. q. f. d.*

mées par addition aux irrationnelles formées par soustraction, et réciproquement. L'auteur dit que la discussion des largeurs produites par ces dernières applications donne lieu à une foule de propositions et de théorèmes. — Coup d'œil jeté sur l'infinité des irrationnelles[1]. — En se servant des théories exposées, on peut s'occuper du problème suivant : « Une rationnelle ou une médiale et une irrationnelle étant données, trouver la moyenne ou la troisième proportionnelle. » — Fol. 42 v°.

[1] Voir p. 45.

144 280

~~138~~