Faculté des Sciences et Technique – Tanger
Département de Physique

2010/2011

Exercices de mécanique du point

1) Soit $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ le repère cartésien. Calculer les vecteurs vitesse et accélération d'un point M par rapport à R en coordonnées : cartésiennes, cylindriques et sphériques.

2) Un point M se déplace sur l'axe $x'Ox$ d'un référentiel orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ avec une accélération $a = -k v^2$ où k constante positive. Les conditions initiales sont : $t_0 = 0\ s$, $x_0 = 0\ m$ et v_0 non nulle.

a) Donner l'expression de la vitesse en fonction du temps.
b) En déduire l'équation horaire : $x = f(t)$.
c) Trouver la relation donnant la vitesse v en fonction de x : $v = g(x)$.

3) Dans le référentiel $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un point décrit une hélice circulaire avec la vitesse angulaire $\theta = \omega t$ constante (*fig. 1*). :

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = h\theta \end{cases}$$

A l'instant $t = 0$ le point est en $A\ (R,0,0)$
a) Calculer dans R les composantes du vecteur vitesse. Donner sa norme.
b) Calculer dans R les composantes du vecteur accélération, en déduire le rayon de courbure.
c) Evaluer la distance parcourue sur l'hélice à l'instant t.

4) Une particule M a pour coordonnées à l'instant t :

$$\begin{cases} x = 2A(1 + \cos\omega t) \\ y = A\sin\omega t \\ z = 0 \end{cases}$$

Où A et ω sont des constantes positives.
a) Trouver l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes, préciser sa nature.
b) Donner l'expression vectorielle de la vitesse instantanée ainsi que son module.
c) Calculer les composantes tangentielle et normale de l'accélération ainsi que le rayon de courbure de la trajectoire à l'instant t.

5) Un disque de rayon r tourne uniformément autour de son axe à la vitesse angulaire ω dans le sens horaire. Son centre C se déplace sur la droite horizontale $z = r$, à la vitesse constante V.
Soit R le référentiel fixe $(O\,x\,y\,z)$ et R^* le référentiel $(C\,x^*\,y^*\,z^*)$.
A est un point du cercle repéré par l'angle $\theta = (Cz^*, CA)$ (*fig. 2*).

a) Exprimer, dans la base $(\vec{i}, \vec{k})$, les vecteurs vitesse et accélération de A par rapport à R^*.

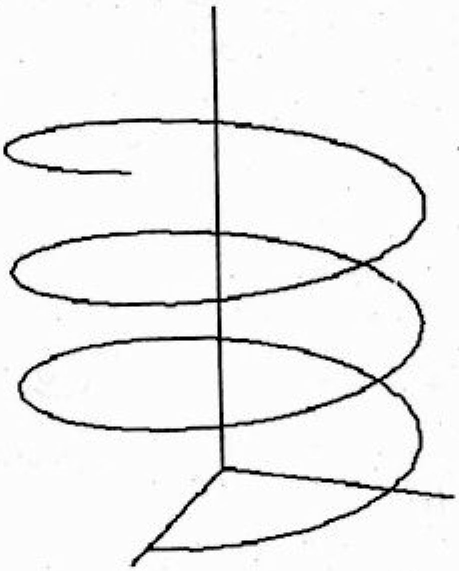
b) Exprimer dans la base $(\vec{i}, \vec{k})$, les vecteurs vitesse et accélération de A par rapport à R.

c) Quelle vitesse faut-il donner à C pour que le point B ait une vitesse nulle par rapport à R ?

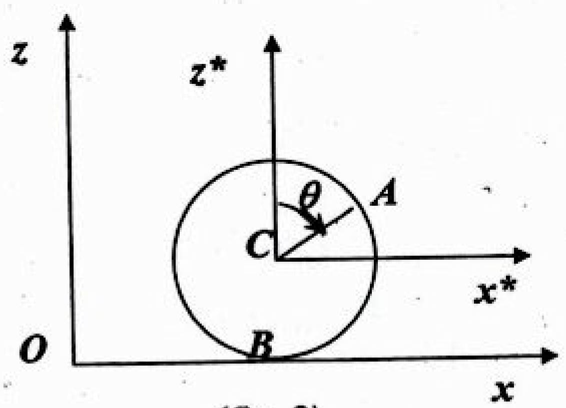
6) Soit $R_0(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère absolu et $R(O_1, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{k})$ un repère relatif tel que $\theta(t) = (\vec{i}, \vec{e_1}) = (\vec{j}, \vec{e_2})$.
Le mouvement de O_1 est défini par : $\overrightarrow{OO_1} = x(t)\,\vec{i} + ax^2(t)\,\vec{j}$ où a est constante positive et où $x(t)$ est une fonction du temps. On pose $\overrightarrow{O_1M} = \lambda(t)\,\vec{e_1}$ (*fig. 3*).

a) Calculer la vitesse relative $\vec{V_r}(M)$, la vitesse d'entrainement $\vec{V_e}$ et la vitesse absolue $\vec{V_a}(M)$.

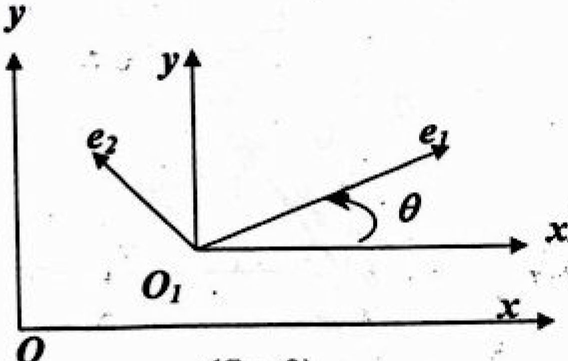
b) Calculer l'accélération relative $\vec{a_r}(M)$, l'accélération de Coriolis $\vec{a_C}$, l'accélération d'entrainement $\vec{a_e}$ puis l'accélération absolue $\vec{a_a}(M)$.



(*fig. 1*)



(*fig. 2*)



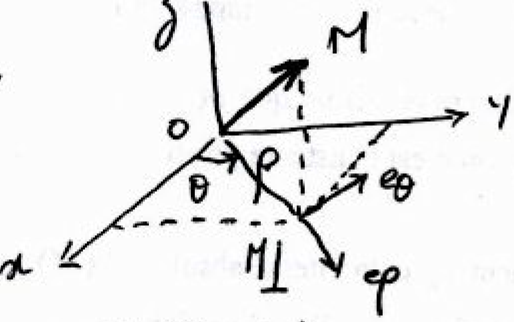
(*fig. 3*)

Exercice 1 : $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

a) $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{V}_R(M) = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$, $\vec{a}_R(M) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$.

b)



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_\perp} + \overrightarrow{M_\perp M}$

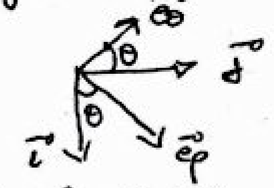
$\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\vec{k}$

$x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$

$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{k})$

$$\vec{V}_R(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big|_R = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\Big|_R + \dot{z}\vec{k}$$

$\vec{e}_\rho = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ et $\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$

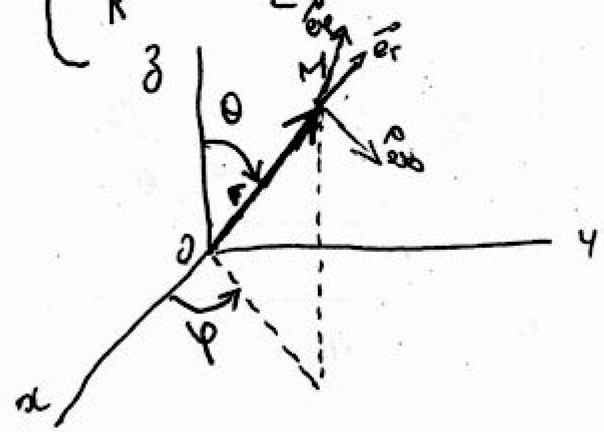


$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\Big|_R = -\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{i} + \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{j} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = \dot{\theta}\,\vec{k}\wedge\vec{e}_\rho$$

$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\Big|_R = \vec{\omega}\wedge\vec{e}_\rho$ on montre aussi $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}\Big|_R = \vec{\omega}\wedge\vec{e}_\theta$

donc
$$\begin{cases} \vec{V}_R(M) = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{k}. \\ \vec{a}_R(M) = \left[\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right]\vec{e}_\rho + \left[2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}\right]\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{k} \end{cases}$$

c)



$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$

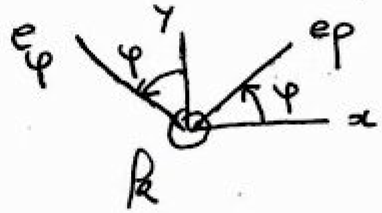
$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$

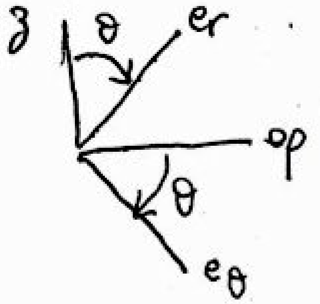
$z = r\cos\theta$

$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

deux rotations $\varphi / \vec{k}$



$$\begin{array}{cc|c|} x & y & z \\ e_\rho & e_\varphi & z \end{array} \quad \dot{\varphi}\vec{k}$$



$$\begin{array}{c|c|c} e_\rho & e_\varphi & z \\ e_\theta & e_\varphi & e_r \end{array} \quad \dot{\theta}\vec{e_\varphi}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e_\varphi}$$

Calcul de $\vec{V}_R(M) = \dot{r}\vec{e_r} + r\left.\dfrac{d\vec{e_r}}{dt}\right|_R$ avec $\dfrac{d\vec{e_r}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{e_r}$

$$= \dot{r}\vec{e_r} + r\left[\left(\dot{\varphi}\vec{k} + \dot{\theta}\vec{e_\varphi}\right)\wedge\vec{e_r}\right]$$

$$= \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\varphi}\left(\vec{k}\wedge\vec{e_r}\right) + r\dot{\theta}\left(\vec{e_\varphi}\wedge\vec{e_r}\right)$$

$$= \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e_\varphi} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$$

donc $\vec{V}_R(M) = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e_\varphi}$

Calcul de $\vec{a}_R(M)$ on aura besoin de

$$\left.\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right|_R = \vec{\omega}\wedge\vec{e_r} = \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e_\varphi} + \dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

$$\left.\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}\right|_R = \vec{\omega}\wedge\vec{e_\theta} = \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e_\varphi} - \dot{\theta}\vec{e_r}$$

$$\left.\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt}\right|_R = \vec{\omega}\wedge\vec{e_\varphi} = -\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e_\theta} - \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e_r}$$

donc $\vec{a}_R(M) = \left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right]\vec{e_r}$

$$+ \left[2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right]\vec{e_\theta}$$

$$+ \left[2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta\right]\vec{e_\varphi}.$$

~~Ex n° 2~~ :

1) $a = -Kv^2 \iff \frac{dv}{dt} = -Kv^2$

càd $\frac{dv}{v^2} = -K\,dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} -\frac{dv}{v^2} = K\int_0^t dt$

$\left[\frac{1}{v}\right]_{v_0}^{v} = K\left[t\right]_0^t \Rightarrow \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = Kt$

Donc $v = \frac{v_0}{1+Kv_0 t}$

2) $v = \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1+Kv_0t} \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \frac{v_0\,dt}{1+Kv_0t}$

$x = \frac{1}{K}\int_0^t \frac{Kv_0\,dt}{1+Kv_0t} = \frac{1}{K}\left[\log(1+Kv_0t)\right]_0^t$

d'où $x = \frac{1}{K}\log(1+Kv_0t)$

3) de 2) on aura $e^{Kx} = (1+Kv_0t)$

et de 1) $v = \frac{v_0}{e^{Kx}} = v_0 e^{-Kx}$

Ex n° 3 :

$x = R\cos\omega t$
$y = R\sin\omega t$
$z = h\omega t$

1) $\vec{V} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$

$= -R\omega\sin\omega t\,\vec{i} + R\omega\cos\omega t\,\vec{j} + h\omega\vec{k}$

$\|\vec{V}\| = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} = \sqrt{R^2\omega^2\sin^2\omega t + R^2\omega^2\cos^2\omega t + h^2\omega^2}$

$= \omega\sqrt{R^2+h^2} = C^{te}$.

2) $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$

$$= -R\omega^2\cos\omega t\,\vec{i} - R\omega^2\sin\omega t\,\vec{j}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = R\omega^2$$

Calcul rayon de courbure $\quad a_n = \frac{V^2}{R_c} \Rightarrow R_c = \frac{V^2}{a_n}$

or $\quad a_n^2 + a_t^2 = a^2 = [R\omega^2]^2$

et $\quad a_t = \frac{dV}{dt} = 0$ car $V = c^{te}$

donc $\quad a_n = a = R\omega^2$ et par suite $R_c = \frac{V^2}{R\omega^2}$

$$R_c = \frac{\omega^2(R^2+h^2)}{R\omega^2} = \frac{R^2+h^2}{R}$$

3) on sait que $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v\,dt$

$$ds = \omega\sqrt{R^2+h^2}\,dt$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t \omega\sqrt{R^2+h^2}\,dt$$

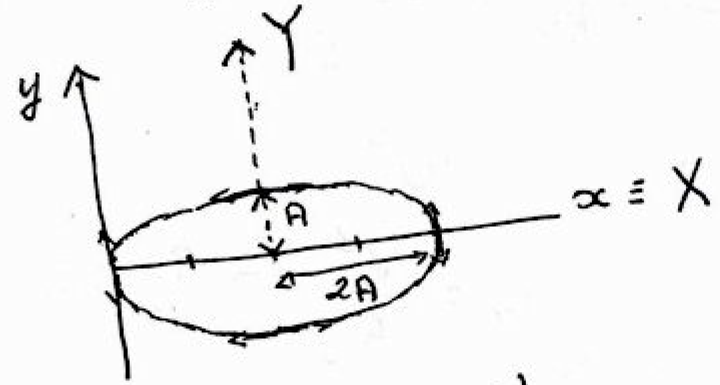
$$s = \omega\sqrt{R^2+h^2}\,t$$

Ex n°4 :

1) $\begin{cases} \left(\frac{x}{2A} - 1\right)^2 = \cos^2\omega t \\ \frac{y^2}{A^2} = \sin^2\omega t \end{cases}$

on pose $\quad X = x - 2A \quad , \quad Y = y$

$$\frac{X^2}{4A^2} + \frac{Y^2}{A^2} = 1$$



2)

$$\dot{x} = -2A\omega \sin \omega t$$
$$\dot{y} = A\omega \cos \omega t$$

$$\vec{V}_R(M) = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j}$$

$$V = \|\vec{V}_R(M)\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = A\omega\sqrt{4 - 3\cos^2\omega t}$$

3) * $a_t = \frac{dV}{dt} = \frac{3A\omega^2 \sin\omega t \cos\omega t}{\sqrt{4 - 3\cos^2\omega t}}$

* Calcul de a_n : $a_t^2 + a_n^2 = a^2$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$$

or $\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} = -2A\omega^2 \cos\omega t\,\vec{i} - A\omega^2 \sin\omega t\,\vec{j}$

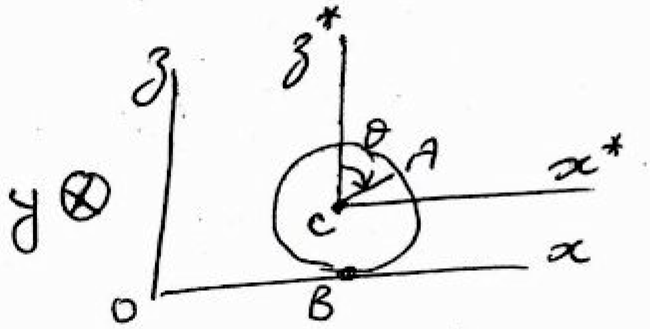
càd $a = A\omega^2\sqrt{1 + 3\cos^2\omega t}$

donc $a_n = \frac{2A\omega^2}{\sqrt{4 - 3\cos^2\omega t}}$

* Rayon de courbure à partir de $a_n = \frac{V^2}{R_c}$

$$R_c = \frac{V^2}{a_n} = \frac{A}{2}\left[4 - 3\cos^2\omega t\right]^{3/2}.$$

Exo 5 :



1) $\theta = \omega t$

$\dot{\theta} = \omega = cste$

$\dot{\omega} = 0$

$$\vec{V}_{R^*}(A) = \frac{d\vec{CA}}{dt}\Big|_{R^*} = \vec{\omega} \wedge \vec{CA}$$

$$\vec{V}_{R^*}(A) = \omega \vec{j} \wedge \left(R\sin\theta\,\vec{i} + R\cos\theta\,\vec{k}\right)$$

$$= -R\omega\sin\theta\,\vec{k} + R\omega\cos\theta\,\vec{i}$$

$$* \quad \vec{a}_{R^*}(A) = -R\omega^2\cos\theta\,\vec{k} - R\omega^2\sin\theta\,\vec{i}$$

2) $\vec{V}_R(A) = \vec{V}_{R^*}(A) + \vec{V}_e$ avec $\vec{V}_e = \vec{V}_R(C) = V\vec{i}$

car R^* Translat° uniforme /R

$$\vec{V}_R(A) = (V + R\omega\cos\theta)\,\vec{i} - R\omega\sin\theta\,\vec{k}$$

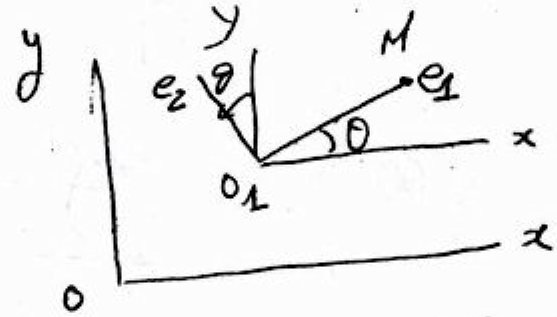
$$* \quad \vec{a}_R(A) = \vec{a}_{R^*}(A) + \underbrace{\vec{a}_e + \vec{a}_c}_{\vec{0}}$$

3) $\vec{V}_R(B) = \vec{V}_R(A, \theta = \pi) = (V - R\omega)\,\vec{i} = \vec{0}$

$$V = R\omega$$

$\Rightarrow$ appelée condition de Roulement sans Glissement.

Exo C :



$\vec{OO_1} = x\vec{i} + ax^2\vec{j}$

$\vec{O_1M} = \lambda\vec{e_1}$

$R_1 \quad (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$R_2 \quad (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{k})$

Rotation $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}$

1) * $\vec{V_r} = \vec{V}_{R_2}(M) = \frac{d\vec{O_1M}}{dt}\Big|_{R_2} = \frac{d\,\lambda\vec{e_1}}{dt}\Big|_{R_2} = \dot{\lambda}\vec{e_1}$

** $\vec{V_e} = \vec{V}_{R_1}(O_1) + \vec{\omega}\wedge\vec{O_1M} = (\dot{x}\vec{i} + 2a\dot{x}x\vec{j}) + \dot{\theta}\vec{k}\wedge\lambda\vec{e_1}$

$= \dot{x}\vec{i} + \lambda\dot{\theta}\vec{e_2} + 2ax\dot{x}\vec{j}$

*** $\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e} = \dot{\lambda}\vec{e_1} + \lambda\dot{\theta}\vec{e_2} + \dot{x}\vec{i} + 2ax\dot{x}\vec{j}$

2) * $\vec{a_r} = \vec{a}_{R_2}(M) = \ddot{\lambda}\vec{e_1}$

** $\vec{a_e} = \vec{a}_{R_1}(O_1) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{O_1M} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{O_1M})$

$\vec{a}_{R_1}(O_1) = \ddot{x}\vec{i} + 2a(\dot{x}^2 + x\ddot{x})\vec{j}$

$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\vec{O_1M} = \ddot{\theta}\vec{k}\wedge\lambda\vec{e_1} = \lambda\ddot{\theta}\vec{e_2}$

$\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{O_1M}) = \dot{\theta}\vec{k}\wedge(\dot{\theta}\vec{k}\wedge\lambda\vec{e_1}) = \dot{\theta}\vec{k}\wedge(\lambda\dot{\theta}\vec{e_2}) = -\lambda\dot{\theta}^2\vec{e_1}$

*** $\vec{a_c} = 2\vec{\omega}\wedge\vec{V_r}(M) = 2\dot{\theta}\vec{k}\wedge\dot{\lambda}\vec{e_1} = 2\dot{\lambda}\dot{\theta}\vec{e_2}$

$\vec{a_a}(M) = (\ddot{\lambda} - \lambda\dot{\theta}^2)\vec{e_1} + (\lambda\ddot{\theta} + 2\dot{\lambda}\dot{\theta})\vec{e_2} + \ddot{x}\vec{i} + 2a(\dot{x}^2 + x\ddot{x})\vec{j}.$