Faculté des Sciences et Technique – Tanger
Département de Physique

2010/2011

Exercices de mécanique du point

1) Une goutte d'eau sphérique, de masse m_0, de rayon r_0, tombe en chute libre dans l'air, sans vitesse initiale.

1) La résistance de l'air est $\vec{F} = -am_0\vec{v}$ (a constante indépendante de la masse de la goutte). Quelle est la vitesse limite v_l de la goutte d'eau ? $g=10\ ms^{-2}$, $a=40\ s^{-1}$.

2) Ecrire la loi de variation de la vitesse en fonction du temps.

3) A l'instant T, la goutte pénètre dans un nuage saturé de vapeur d'eau : de l'eau se condense sur la goutte dont le rayon croît linéairement avec le temps suivant la loi $r = r_0(1+bt)$ (b est une constante) on néglige dans cette question la résistance de l'air.
a) Montrer que le taux d'accroissement de masse (dm/dt) est proportionnel à la surface de la goutte sphérique.
b) Déterminer l'équation différentielle que vérifie la vitesse de la goutte à l'intérieur du nuage.

2) Un point matériel M de masse m est assujetti à se déplacer sans frottement à l'intérieur d'une cuvette sphérique de rayon R, dans un plan vertical passant par le centre de la sphère. On supposera le contact maintenu durant le mouvement.
1) Quelle est la position d'équilibre stable du point matériel ?

2) On l'écarte d'une petite quantité de cette position. Quel est le mouvement du point M ? Déterminer le module de l'action de contact exercée sur le point matériel.

3) Un point M de masse m et de vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ($\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, O centre d'un repère galiléen), est soumis dans ce repère à une force d'attraction dirigée de M vers O et de module $\frac{\alpha}{r^2}$.

1) En appliquant le théorème du moment cinétique, montrer que la trajectoire de la particule est plane et décrite suivant la loi des aires.

2) Monter que r et $\ddot{r}$ satisfont à l'équation différentielle :

$$\ddot{r} + \frac{\alpha}{mr^2} - \frac{C^2}{r^3} = 0, \quad C : constante\ des\ aires$$

4) Un pendule simple de longueur l, de masse m, est accroché au plafond d'un wagon dont le mouvement est uniformément accéléré ($\overrightarrow{a_e}$: accélération d'entraînement). Sachant que le mouvement du wagon est une translation, quelle est pour le voyageur placé dans le wagon, l'inclinaison du fil à l'équilibre ?

Ex n° 1 :

1) PFD $\quad m_0\vec{g} - a m_0 \vec{v} = m_0 \frac{d\vec{v}}{dt}$

projection/vertical $\quad g - av = \frac{dv}{dt} \quad (E)$

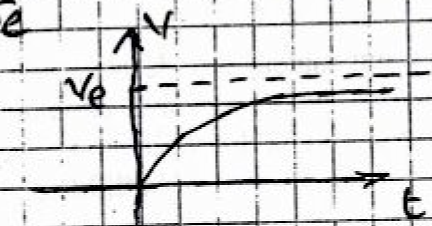
le mvt est accéléré qd $v \nearrow$ $\quad \frac{dv}{dt} \searrow$ jusqu'à tendre $\to 0$

càd $\quad g - av_\ell = 0 \implies v_\ell = g/a = 0{,}25\,m/s$

2) $(E) \implies \frac{dv}{dt} = a(v_\ell - v)$ càd $\frac{-dv}{v_\ell - v} = -a\,dt$

On intègre $(t_0 = 0,\ v_0 = 0)$ $\quad \text{Log}\,\frac{v_\ell - v}{v_\ell} = -at$

$$v = v_\ell\left(1 - e^{-at}\right)$$



3) a) $\frac{dm}{dt} = ?$, on sait que $\rho = \frac{m}{V}$

donc $\quad m = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$ et $r = r_0(1 + bt)$

On peut écrire $\quad \frac{dm}{dr} = \rho 4\pi r^2$ et $\frac{dr}{dt} = r_0 b$

et par suite :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dr}\frac{dr}{dt} = \rho 4\pi r^2 r_0 b$$

si on pose $S = 4\pi r^2$ alors $\frac{dm}{dt} = \rho b r_0 S$

b) PFD $\quad \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$ avec $\vec{F} = m\vec{g}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{on néglige}\\ \text{la résistance}\end{array}\right.$

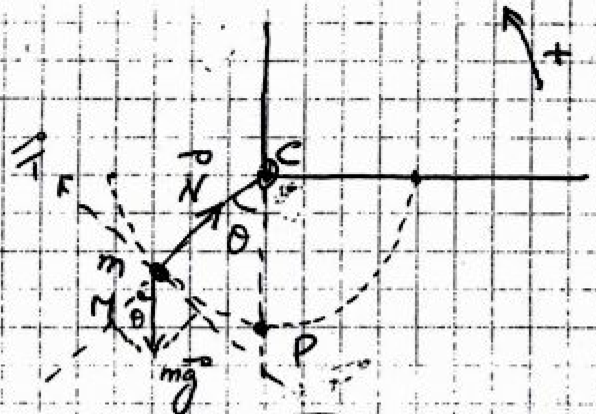
$$m\vec{g} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v}$$

projection vertical descendant $\quad g = \frac{dv}{dt} + \left(\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\right)v$

or $\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} = \frac{3br_0}{r}$ $\quad$ On trouve

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3br_0}{r}v = g$$

Ex n° 2 :



1) Bilan des forces $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{N}$ normale à la surface (car pas de frottement) $\vec{N}$ dirigée vers MC

A l'équilibre ces 2 forces doivent être opposées, la position d'équilibre est le point P. Position stable car en écartant M de P, les 2 forces ont une somme tendant à ramener M vers P

2) PFD $\quad m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} \qquad \theta = (\vec{CP}, \vec{CM})$

Projection : * sur $\vec{MC}$ $\quad ma_n = -mg\cos\theta + N$

or $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\dot{\theta})^2}{R} = R\dot{\theta}^2$

donc $\left(mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + N \right)$

* sur la tangente en M au cercle

$ma_t = -mg\sin\theta$

or $a_t = \frac{dv}{dt} = R\ddot{\theta}$

donc $\left(mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \right) \qquad \ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0$

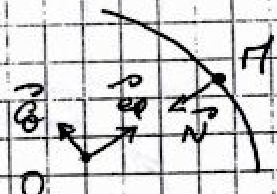
si θ faible $\Rightarrow \ddot{\theta} + g/R\,\theta = 0 \qquad \omega^2 = g/R$

Mvt sinusoïdal $\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \qquad \begin{cases} \theta = \theta_0\cos\omega t \\ t = 0,\ \theta = \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 = 0 \end{cases}$

Calcul de N $\quad N = mg\cos\theta + mR\dot{\theta}^2$

$N = m\left(g\cos\theta + R\theta_0^2\omega^2\sin^2\omega t\right)$

Ex n° 3 :



$\vec{N} \equiv -\vec{e_\rho}$

1) Appliquons Th du moment cinétique en O

$$\frac{d\vec{\sigma_0}}{dt} = \underbrace{\vec{OM}\wedge\vec{F}}_{//} \quad \text{avec} \quad \vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{e_\rho}$$

or $\vec{OM} = \|\vec{OM}\|\,\vec{e_\rho}$ donc $\frac{d\vec{\sigma_0}}{dt} = \vec{0}$

$\vec{\sigma_0}$ vecteur constant

or $\vec{\sigma_0} = \vec{OM}\wedge m\vec{V}$

le plan $(\vec{OM},\vec{V})$ est celui de la trajectoire : sa normale $\vec{\sigma_0}$ a une direction fixe dans l'espace, par conséquent le plan de la trajectoire est fixe dans le repère galiléen.

Dans ce plan fixe $(\vec{OM},\vec{V})$ choisissons le repère polaire de centre O, de vecteurs unitaires $(\vec{e_\rho},\vec{e_\theta})$

On sait que $\vec{OM} = \rho\vec{e_\rho}$ et $\vec{V} = \dot\rho\vec{e_\rho} + \rho\dot\theta\vec{e_\theta}$

donc $\vec{\sigma_0} = \rho\vec{e_\rho}\wedge\left[m\dot\rho\vec{e_\rho} + m\rho\dot\theta\vec{e_\theta}\right]$ (Notation $\rho \equiv r$)

$$= m\rho^2\dot\theta\,\vec{e_z} = \vec{cste}$$

donc $\rho^2\dot\theta = C$ loi des aires vérifiée

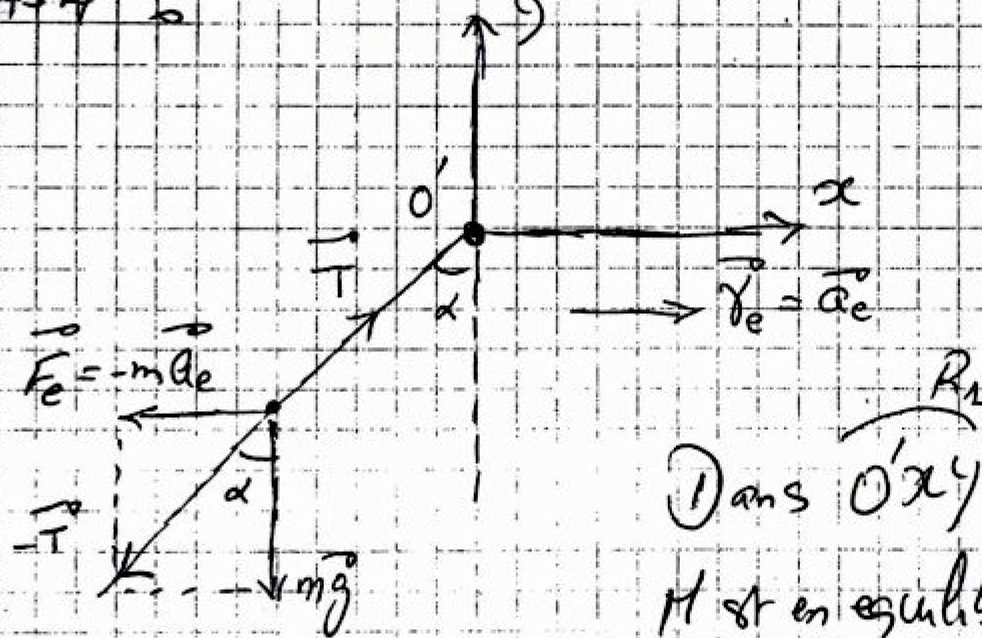
2) PFD projeté sur l'axe support de $\vec{e_\rho}$ on aura la seule force $\vec{F}$ et pour l'accélération la composante

$\gamma_\rho = \ddot\rho - \rho\dot\theta^2$ donc $m\ddot\rho - m\rho\dot\theta^2 = -\frac{\alpha}{\rho^2}$

or $\rho\dot\theta^2 = \frac{\rho\rho^3\dot\theta^2}{\rho^3} = \frac{\rho^4\dot\theta^2}{\rho^3} = \frac{[\rho^2\dot\theta]^2}{\rho^3} = \frac{C^2}{\rho^3}$

donc $\left(\ddot\rho + \frac{\alpha}{m\rho^2} - \frac{C^2}{\rho^3} = 0\right)$

Exo 4 P



① Dans $O'xy$ lié au Wagon

M est en équilibre sous l'action de

son poids $m\vec{g}$, Tension du fil $\vec{T}$, force d'inertie $\vec{F_e}$

pas de force de Coriolis car Wagon en translation

PFD dans Repère non galiléen

$$m\vec{a}_{R_1} = \underbrace{m\vec{a}_R}_{m\vec{g}+\vec{T}} + m\vec{a_e} - \underbrace{m\vec{a_c}}_{\vec{0}\ \text{(Translat°)}}$$

$$m\vec{a}_{R_1} = m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{a_e}$$

l'équilibre $\vec{a}_{R_1} = \vec{0}$ donc $m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{a_e} = \vec{0}$

3 forces coplanaires $|\operatorname{tg}\alpha| = \left|\frac{ma_e}{mg}\right| = \left|\frac{a_e}{g}\right|$