Faculté des Sciences et Technique – Tanger
Département de Physique

2010/2011

Exercices de mécanique du point

1) Une goutte d'eau sphérique, de masse m_0, de rayon r_0, tombe en chute libre dans l'air, sans vitesse initiale.

1) La résistance de l'air est $\vec{F} = -am_0\vec{v}$ (*a* constante indépendante de la masse de la goutte). Quelle est la vitesse limite v_l de la goutte d'eau ? $g=10\ ms^{-2}$, $a=40\ s^{-1}$.

2) Ecrire la loi de variation de la vitesse en fonction du temps.

3) A l'instant *T*, la goutte pénètre dans un nuage saturé de vapeur d'eau : de l'eau se condense sur la goutte dont le rayon croît linéairement avec le temps suivant la loi $r = r_0(1+bt)$ (*b* est une constante) on néglige dans cette question la résistance de l'air.
a) Montrer que le taux d'accroissement de masse (*dm/dt*) est proportionnel à la surface de la goutte sphérique.
b) Déterminer l'équation différentielle que vérifie la vitesse de la goutte à l'intérieur du nuage.

2) Un point matériel *M* de masse *m* est assujetti à se déplacer sans frottement à l'intérieur d'une cuvette sphérique de rayon *R*, dans un plan vertical passant par le centre de la sphère. On supposera le contact maintenu durant le mouvement.
1) Quelle est la position d'équilibre stable du point matériel ?

2) On l'écarte d'une petite quantité de cette position. Quel est le mouvement du point *M* ? Déterminer le module de l'action de contact exercée sur le point matériel.

3) Un point *M* de masse *m* et de vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ($\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, *O* centre d'un repère galiléen), est soumis dans ce repère à une force d'attraction dirigée de *M* vers *O* et de module $\frac{\alpha}{r^2}$.

1) En appliquant le théorème du moment cinétique, montrer que la trajectoire de la particule est plane et décrite suivant la loi des aires.

2) Monter que r et $\ddot{r}$ satisfont à l'équation différentielle :

$$\ddot{r} + \frac{\alpha}{mr^2} - \frac{C^2}{r^3} = 0, \quad C : constante\ des\ aires$$

4) Un pendule simple de longueur *l*, de masse *m*, est accroché au plafond d'un wagon dont le mouvement est uniformément accéléré ($\vec{a_e}$: accélération d'entraînement). Sachant que le mouvement du wagon est une translation, quelle est pour le voyageur placé dans le wagon, l'inclinaison du fil à l'équilibre ?

Ex n° 1 :

1) PFD $\quad m_0\vec{g} - a m_0 \vec{v} = m_0 \frac{d\vec{v}}{dt}$

projection/vertical $\quad g - a v = \frac{dv}{dt} \quad (E)$

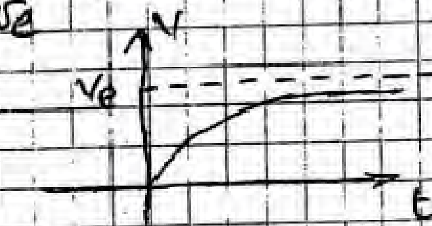
le mvt est accéléré $\quad$ qd $v \nearrow$ $\quad \frac{dv}{dt} \searrow$ jusqu'à tendre $\to 0$

càd $\quad g - a v_e = 0 \implies v_e = g/a = 0{,}25\ m/s$

2) $\quad (E) \implies \frac{dv}{dt} = a(v_e - v)$ càd $\frac{-dv}{v_e - v} = -a\,dt$

On intègre $(t_0 = 0,\ v_0 = 0)$ $\quad \log \frac{v_e - v}{v_e} = -at$

$$v = v_e(1 - e^{-at})$$



3) a) $\frac{dm}{dt} = ?$, on sait que $\rho = \frac{m}{V}$

donc $\quad m = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$ et $r = r_0(1 + bt)$

On peut écrire $\quad \frac{dm}{dr} = \rho 4\pi r^2$ et $\frac{dr}{dt} = r_0 b$

et par suite :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dr}\frac{dr}{dt} = \rho 4\pi r^2 r_0 b$$

si on pose $S = 4\pi r^2$ alors $\frac{dm}{dt} = \rho b r_0 S$

b) PFD $\quad \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$ avec $\vec{F} = m\vec{g}$ $\Big\{$ on néglige la résistance

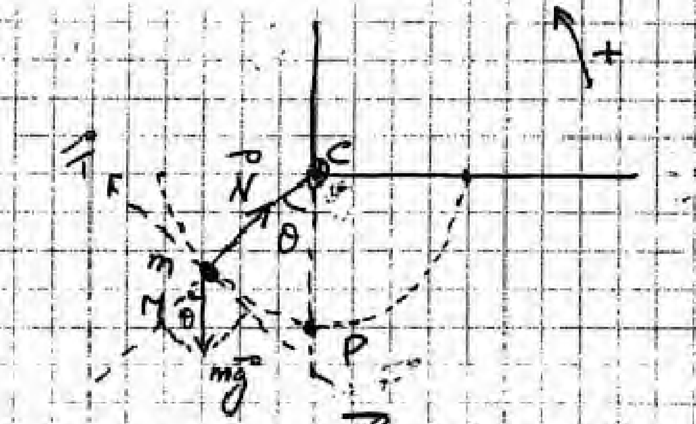
$$m\vec{g} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v}$$

Projection vertical descendante $\quad g = \frac{dv}{dt} + \left(\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}\right)v$

or $\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} = \frac{3br_0}{r}$ $\quad$ On trouve

$$\frac{dv}{dt} + \frac{3br_0}{r} v = g$$

Ex n° 2 :



1) Bilan des forces $\vec{P} = m\vec{g}$ et la réaction $\vec{N}$ normale à la surface (car pas de frottement) $\vec{N}$ dirigée vers MC

A l'équilibre ces 2 forces doivent être opposées, la position d'équilibre est le point P. Position stable car en écartant M de P, les 2 forces ont une somme tendant à ramener M vers P

2) PFD $\quad m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} \qquad \theta = (\vec{CP}, \vec{CM})$

Projection : $\ast$ sur $\vec{MC}$ $\quad ma_n = -mg\cos\theta + N$

or $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\dot{\theta})^2}{R} = R\dot{\theta}^2$

donc $\left(mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + N \right)$

$\ast$ Sur la tangente en M au cercle

$ma_t = -mg\sin\theta$

or $a_t = \frac{dv}{dt} = R\ddot{\theta}$

donc $\left(mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \right) \qquad \ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0$

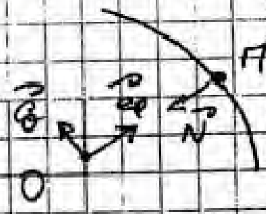
$\sin\theta$ faible $\Rightarrow \ddot{\theta} + g/R\,\theta = 0 \qquad \omega^2 = g/R$

Mvt sinusoïdal $\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \qquad \begin{cases} \theta = \theta_0\cos\omega t \\ t=0,\ \theta = \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 = 0 \end{cases}$

Calcul de N $\quad N = mg\cos\theta + mR\dot{\theta}^2$

$N = m\left(g\cos\theta + R\theta_0^2\omega^2\sin^2\omega t\right)$

Ex n° 3 :



$\vec{N} \equiv -\vec{e_\rho}$

1) Appliquons Th du moment cinétique en O

$$\frac{d\vec{\sigma_o}}{dt} = \underbrace{\vec{OM} \wedge \vec{F}}_{//} \quad \text{avec} \quad \vec{F} = +\frac{\alpha}{r^2}\,\vec{e_\rho}$$

or $\vec{OM} = \|\vec{OM}\|\,\vec{e_\rho}$ donc $\dfrac{d\vec{\sigma_o}}{dt} = \vec{0}$

$\vec{\sigma_o}$ vecteur constant

or $\vec{\sigma_o} = \vec{OM} \wedge m\vec{V}$

le plan $(\vec{OM}, \vec{V})$ est celui de la trajectoire : sa normale $\vec{\sigma_o}$ a une direction fixe dans l'espace, par conséquent le plan de la trajectoire est fixe dans le repère galiléen.

Dans ce plan fixe $(\vec{OM}, \vec{V})$ choisissons le repère polaire de centre O, de vecteurs unitaires $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta})$

On sait que $\vec{OM} = \rho\,\vec{e_\rho}$ et $\vec{V} = \dot\rho\,\vec{e_\rho} + \rho\dot\theta\,\vec{e_\theta}$

donc $\vec{\sigma_o} = \rho\,\vec{e_\rho} \wedge \left[m\dot\rho\,\vec{e_\rho} + m\rho\dot\theta\,\vec{e_\theta}\right]$ (Notation $\rho \equiv r$)

$$= m\rho^2\dot\theta\,\vec{e_z} = \vec{cste}$$

donc $\rho^2\dot\theta = C$ loi des aires vérifiée

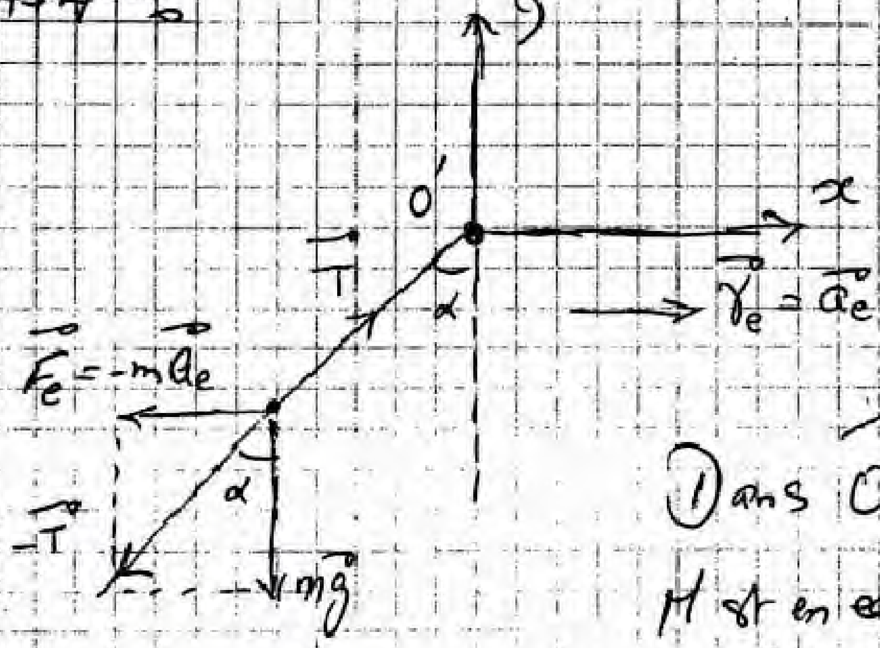
2) RFD projetée sur l'axe support de $\vec{e_\rho}$ on aura la seule force $\vec{F}$ et pour l'accélération la composante

$$\gamma_\rho = \ddot\rho - \rho\dot\theta^2 \quad \text{donc} \quad m\ddot\rho - m\rho\dot\theta^2 = -\frac{\alpha}{\rho^2}$$

$$\text{or } \rho\dot\theta^2 = \frac{\rho\rho^3\dot\theta^2}{\rho^3} = \frac{\rho^4\dot\theta^2}{\rho^3} = \frac{[\rho^2\dot\theta]^2}{\rho^3} = \frac{C^2}{\rho^3}$$

$$\text{donc } \left(\ddot\rho + \frac{\alpha}{m\rho^2} - \frac{C^2}{\rho^3} = 0\right)$$

Exo n°4 P



Dans $O'xy$ lié au wagon

M est en équilibre sous l'action de

son poids $m\vec{g}$, Tension du fil $\vec{T}$, force d'inertie $\vec{F_e}$

pas de force de Coriolis car wagon en translation

PFD dans Repère non galiléen

$$m\vec{a}_{R_1} = \underbrace{m\vec{a}_R}_{m\vec{g}+\vec{T}} + m\vec{a_e} - \underbrace{m\vec{a_c}}_{\vec{0}\ (\text{Translat}^\circ)}$$

$$m\vec{a}_{R_1} = m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{a_e}$$

l'équilibre $\vec{a}_{R_1} = \vec{0}$ donc $m\vec{g} + \vec{T} - m\vec{a_e} = \vec{0}$

3 forces coplanaires $|\operatorname{tg}\alpha| = \left|\dfrac{ma_e}{mg}\right| = \left|\dfrac{a_e}{g}\right|$