Exercices de mécanique du point

1) Un point matériel de masse $m = 1\ kg$ soumise à la résultante des forces $\vec{R}$, se déplace au cours du temps t, dans le plan Oxy avec la vitesse $\vec{V} = t^2\vec{i} + (2t-3)\vec{j}$.

a) Calculer la puissance de la résultante $\vec{R}$: $P(t)$.

b) Montrer qu'à $t = 1\ s$ la résultante $\vec{R}$ est perpendiculaire au déplacement.

2) Soit la force $\vec{F} = (3x+y)\vec{i} + 2xy\vec{j}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Calculer le travail W de cette force entre les points $O(0,0)$ et $A(1,2)$ dans les déplacements suivant

a) segment OH puis segment HA, avec $H(1,0)$;

b) arc de la parabole reliant O à A.

Cette force dérive-t-elle d'une énergie potentielle ?

3) Un satellite de masse m gravite autour de la terre sue une orbite circulaire de rayon r. L'accélération de la pesanteur est $g = \frac{G\,M}{r^2}$; G est la constante de gravitation et M la masse de la terre. Calculer en fonction de m, G, M et r les énergies cinétique, potentielle et mécanique du satellite.

4) Soit $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$ un repère fixe galiléen. On considère un système S constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de même masse m, soumis à l'action de la pesanteur $\vec{g} = -g\vec{z_0}$. Le point M_1 est astreint à se déplacer sans frottement sur l'axe matériel $\vec{z_0}$. Le point M_2 est astreint à se déplacer sans frottement sur le cercle C de centre O, de rayon a fixe dans le plan $(O, \vec{x_0}, \vec{y_0})$. Les points M_1 et M_2 exercent entre eux une force d'interaction définie par

$$\vec{F}_{M_1 \to M_2} = -\vec{F}_{M_2 \to M_1} = -\alpha \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\|^3}$$

Où α est une constante positive. On pose $\overrightarrow{OM_1} = \lambda(t)\vec{z_0}$, $\overrightarrow{OM_2} = a\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\theta} = \vec{z_0} \wedge \vec{e_\rho}$. On définit l'angle $\theta(t) = \left(\vec{x_0}, \vec{e_\rho}\right) = \left(\vec{y_0}, \vec{e_\theta}\right)$. On exprimera les résultats dans la base $B\left(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}, \vec{z_0}\right)$.

a) Calculer les vitesses et les accélérations des points M_1 et M_2 par rapport à R_0.

b) Calculer les moments cinétiques des points M_1 et M_2 au point O par rapport à R_0.

c) Calculer l'énergie cinétique du système S.

d.1) Ecrire les équations différentielles obtenues par application de la relation fondamentale de la dynamique en projection sur la base $B\left(\vec{e_\rho}, \vec{e_\theta}, \vec{z_0}\right)$ pour le point M_1 puis pour le point M_2.

d.2) Ecrire les équations obtenues par application du théorème du moment cinétique en O pour le système S.

e.1) Calculer l'énergie potentielle d'interaction entre les points M_1 et M_2.

e.2) A-t-on l'intégrale première de l'énergie pour le point M_1 ? Si oui l'expliciter.

Exo 1 :

M de masse $m = 1\,Kg$ soumis à $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$,

$\vec{V} = t^2 \vec{i} + (2t-3)\vec{j}$

a)

Déf : $P = \vec{R}.\vec{V}$ PFD $\vec{R} = m\dfrac{d\vec{V}}{dt}$

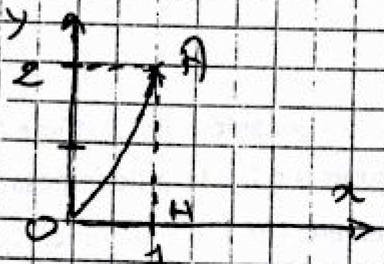
$= \left(m\dfrac{d\vec{V}}{dt}\right).\vec{V}$ or $\dfrac{d\vec{V}}{dt} = 2t\vec{i} + 2\vec{j}$

$P = m\left(2t\vec{i} + 2\vec{j}\right).\left[t^2\vec{i} + (2t-3)\vec{j}\right]$

$= m\left[2t^3 + 2(2t-3)\right]$

b) à $t = 1s$ $P = 0$ càd $\vec{R}.\vec{V} = 0 \Rightarrow \vec{R} \perp \vec{V}$

Ex n° 2 :



$\vec{F} = (3x+y)\vec{i} + 2xy\vec{j}$
$= F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$

a) On sait que $P = \vec{F}.\vec{V} = \vec{F}\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ donc $P\,dt = \vec{F}.d\vec{r} = \delta W$

$\delta W = \vec{F}.\vec{dr}$ avec $\vec{dr} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$

$= F_x\,dx + F_y\,dy = (3x+y)\,dx + 2xy\,dy$

<u>sur</u> <u>OH</u> on a $y = 0$ donc $dy = 0$

$\delta W_1 = 3x\,dx \Rightarrow W_1 = \int_0^1 3x\,dx = \frac{3}{2}\left[x^2\right]_0^1 = 1{,}5\,J$

<u>sur</u> <u>HA</u> on a $x = 1$ donc $dx = 0$

$\delta W_2 = 2y\,dy \Rightarrow W_2 = \int_0^2 2y\,dy = \frac{2}{2}\left[y^2\right]_0^2 = 4\,J$

$W = W_1 + W_2 = 5{,}5\,J$

b) trajectoire parabole qui passe par O et A   éq parabole $y = ax^2$.

$A(1, 2) \Rightarrow 2 = a \times 1 \Rightarrow a = 2$

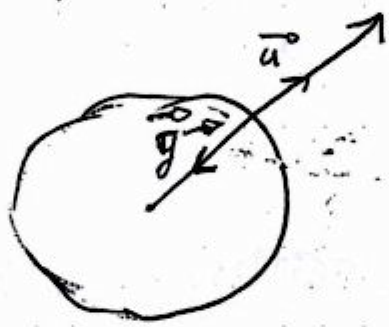
$$y = 2x^2 \quad \text{et} \quad dy = 4x\,dx$$

$$\delta W = (3x + 2x^2)\,dx + 2x\,2x^2\,4x\,dx$$

$$= (3x + 2x^2 + 16x^4)\,dx$$

$$W = \left[\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{16}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{161}{30} \simeq 5{,}365\ \text{J}$$

Travail dépend du chemin suivi, $\vec{F}$ ne dérive pas donc d'un potentiel.



$$\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}$$

* $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

or PFD $\quad \sum_i \vec{F}_i = \vec{P} = m\vec{g} = m\vec{a}$

or Mvt circulaire $\quad a = a_n = \frac{v^2}{r}$ donc

$$g = a = \frac{v^2}{r} \quad \text{càd}$$

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \frac{GM}{r}$$

* $E_p = ?$ on sait que $\delta W = -dE_p$

donc $E_p = -W + cte$

$$W = \int \delta W = \int \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int -\frac{GMm}{r^2}\vec{u} \cdot dr\vec{u}$$

$$= \int GMm \frac{-dr}{r^2} = GMm \frac{1}{r} + cste.$$

donc $E_p = -\frac{GMm}{r} + cste.$

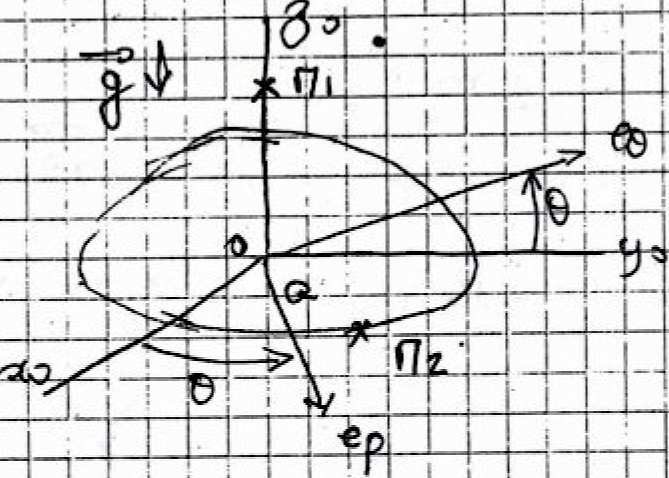
En général, on choisit la constante de façon que $E_p(\infty) = 0$. càd $cste = 0$

$$E_p = -\frac{GMm}{r}.$$

* $E_M = E_c + E_p$

$$= \frac{GMm}{2r} - \frac{2GMm}{2r} = -\frac{GMm}{2r}$$

[redacted]



$R_0(Ox_0y_0z_0)$

$R(Oe_p e_\theta z_0)$

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1} = -\alpha \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|^3}$$

$$\overrightarrow{OM_1} = d\vec{z_0}, \quad \overrightarrow{OM_2} = a\vec{e_p}$$

1) $\vec{V}_{R_0}(M_1) = \dot{\lambda}\,\vec{z_0}$, $\vec{a}_{R_0}(M_1) = \ddot{\lambda}\,\vec{z_0}$

$\vec{V}_{R_0}(M_2) = a\left(\dot{\theta}\vec{z_0} \wedge \vec{e_\rho}\right) = a\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$.

$\vec{a}_{R_0}(M_2) = a\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} + a\dot{\theta}\left(\dot{\theta}\vec{z_0} \wedge \vec{e_\theta}\right)$

$= a\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} - a\dot{\theta}^2\,\vec{e_\rho}$.

2) $\vec{\sigma}_0(M_1/R_0) = \vec{OM_1} \wedge m\,\vec{V}_{R_0}(M_1)$

$= \lambda\vec{z_0} \wedge m\dot{\lambda}\vec{z_0} = \vec{0}$

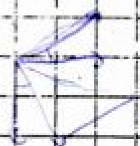
$\vec{\sigma}_0(M_2/R_0) = \vec{OM_2} \wedge m\,\vec{V}_{R_0}(M_2)$

$= a\vec{e_\rho} \wedge m a\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}$

$= ma^2\dot{\theta}\;\vec{e_\rho} \wedge \vec{e_\theta} = ma^2\dot{\theta}\,\vec{z_0}$

$E_c(S/R_0) = E_c(M_1/R_0) + E_c(M_2/R_0)$

$= \frac{1}{2}m\dot{\lambda}^2 + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$



3) a) PFD pour M_1 sur R

$\vec{P} + \vec{R_1} + \vec{F_{21}} = m\,\vec{a}_{R_0}(M_1)$

$\vec{P} = -mg\vec{z_0}$, $\vec{R_1}$ représente la réaction de l'axe $O\vec{z_0}$

$\vec{R_1} \perp O\vec{z_0}$ (pas de frottement)

$\vec{R_1} = R_1\,\vec{e_\rho} + N_1\,\vec{e_\theta}$

$\vec{F_{21}} = \alpha\,\dfrac{a\vec{e_\rho} - \lambda\vec{z_0}}{(a^2+\lambda^2)^{3/2}}$ action de M_2 sur M_1

Par projection $\begin{cases} R_1 + \dfrac{\alpha a}{(a^2+\lambda^2)^{3/2}} = 0 \\ N_1 = 0 \\ -mg - \dfrac{\alpha \lambda}{(a^2+\lambda^2)^{3/2}} = m\ddot{\lambda} \end{cases}$

PFD pour M_2 sur R $\qquad \vec{P} + \vec{R_2} + \vec{F_2} = m \, \vec{a}_{R_0}(M_2)$

$\vec{P} = -mg\vec{z_0}$, $\vec{R_2} = R_2 \vec{e\rho} + N_2 \vec{z_0}$ (Réact° du cercle)

$\vec{F_{12}} = -\alpha \dfrac{a\vec{e\rho} - \lambda\vec{z_0}}{(a^2+\lambda^2)^{3/2}}$ action de M_1 sur M_2

Par projection $\begin{cases} R_2 - \dfrac{\alpha a}{(a^2+\lambda^2)^{3/2}} = -ma\dot{\theta}^2 \\ 0 = ma\ddot{\theta} \\ -mg + N_2 + \dfrac{\alpha \lambda}{(a^2+\lambda^2)^{3/2}} = 0 \end{cases}$

b)

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{\sigma_0}(S/R_0)\right] = \sum \vec{M_0}(f_{ext}\ \text{à}\ S)$$

on a $\quad \vec{\sigma_0}(S/R_0) = \vec{\sigma_0}(M_1) + \vec{\sigma_0}(M_2) = ma^2\dot{\theta}\vec{z_0}$

$\vec{M_0}(\vec{P_1}) = \vec{OM_1} \wedge (-mg\vec{z_0}) = \vec{0}$

$\vec{M_0}(\vec{P_2}) = \vec{OM_2} \wedge (-mg\vec{z_0}) = mga\,\vec{e_\theta}$

$\vec{M_0}(\vec{R_1}) = \vec{OM_1} \wedge \vec{R_1} = \lambda R_1 \vec{e_\theta}$

$\vec{M_0}(R_2) = \vec{OM_2} \wedge \vec{R_2} = -aN_2\vec{e_\theta}$, on obtient

$$ma^2\ddot{\theta}\,\vec{z_0} = (mga + \lambda R_1 - aN_2)\vec{e_\theta} \text{ , donc}$$

$$ma^2\ddot{\theta} = 0 \quad \text{et} \quad mga + \lambda R_1 - aN_2 = 0$$

$$P = \vec{F}_{12} \cdot \vec{V}_{R_0}(2) + \vec{F}_{21} \cdot \vec{V}_{R_0}(1)$$

$$= \vec{F}_{21} \left[\vec{V}_{R_0}(1) - \vec{V}_{R_0}(2) \right]$$

$$= \alpha \frac{a\vec{e}_\rho - \lambda \vec{z}_0}{\left[a^2+\lambda^2\right]^{3/2}} \left[\dot{\lambda} \vec{z}_0 - a\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right]$$

$$= -\alpha \frac{\lambda \dot{\lambda}}{\left[a^2+\lambda^2\right]^{3/2}} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\alpha}{(a^2+\lambda^2)^{1/2}} + cte\right]$$

d'où $\quad E_p = -\dfrac{\alpha}{(a^2+\lambda^2)^{1/2}} + cte$

b) Calcul de la puissance de la somme des forces qui s'exercent sur M_1.

$$P\left(\sum \vec{F}_{ext} \text{ à } M_1\right) = \left(\sum \vec{F}_{ext} \text{ à } M_1\right) \cdot \vec{V}(M_1/R_0)$$

$$= \left[-mg\vec{z}_0 + \vec{R}_1 + \vec{F}_{e1}\right] \cdot \vec{V}(M_1/R_0)$$

$$= -mg\dot{\lambda} - \alpha \frac{\lambda \dot{\lambda}}{(a^2+\lambda^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[-mg\lambda + \frac{\alpha}{(a^2+\lambda^2)^{1/2}} + cte\right]$$

$$E_p = mg\lambda - \frac{\alpha}{(a^2+\lambda^2)^{1/2}} + cte$$

$E_c(M_1/R_0) + E_p = cte$ Intégrale première

$$\frac{1}{2} m \dot{\lambda}^2 + mg\lambda - \frac{\alpha}{(a^2+\lambda^2)^{1/2}} = cste.$$