Exercices de mécanique du point

1) Deux billes, de masses m_1 et m_2, se déplacent sur un même axe Ox. Les mesures algébriques de leurs vitesses sont v_1 et v_2. Elles entrent en collision et leur choc est parfaitement élastique.

a) Trouver les vitesses v_1' et v_2' après le choc.

b) Montrer que la vitesse relative $\vec{w} = \vec{v_2} - \vec{v_1}$ est conservée en module, mais que son sens s'inverse.

c) Etudier les cas particuliers : 1) $m_1 = m_2$; 2) $m_1 >> m_2$.

2) Exprimer la perte d'énergie cinétique au cours d'un choc parfaitement mou, en fonction de la vitesse relative des 2 particules et de leur masse réduite μ. $\left(\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$.

3) On tire une balle de fusil A, de masse m, dans un bloc de bois B de masse M placé sur un plan horizontal (S).

Le bloc B peut glisser sans frottement sur (S) et son mouvement est freiné par un ressort dont le coefficient d'élasticité est k.

Avant le choc, le ressort ne subit aucune déformation. Le phénomène est étudié dans le référentiel du laboratoire $R(Oxyz)$ supposé galiléen, dont l'origine O coïncide au moment du choc l'extrémité du ressort lié à B. Après le choc le bloc B se déplace suivant la direction Ox.

a) Calculer, si le choc est mou, v_B la vitesse du bloc juste après le choc, sachant que v_A est la vitesse de A juste avant le choc.

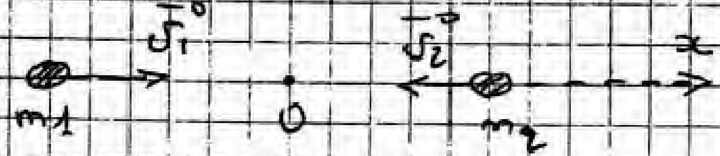
b) Calculer à présent, le déplacement maximum x_m de B.

4) Le but est d'étudier la réponse d'un oscillateur amorti à une excitation sinusoïdale. Un corps A assimilé à un point matériel de masse m peut glisser le long d'une tige horizontale fixe, il est lié au ressort EA parfaitement élastique, de raideur k et de masse négligeable. Au corps A est fixé une palette qui se déplace dans un liquide, l'ensemble des actions du liquide est équivalent, pour le point A à une force de frottement fluide d'expression $\vec{F} = -h\vec{v}$, h est une constante positive. On néglige tous les autres frottements. On note T_0 la période et ω_0 la pulsation des oscillations libres. On pose $\tau=2m/h$. A $t=0$ l'ensemble du dispositif est immobile, l'abscisse de A est $x(0)=0$. Un dispositif excitateur impose au point E un mouvement de translation d'équation $x_e(t) = x_{em} \sin\omega_0 t$.

a) Etablir l'équation différentielle du mouvement du point A, en déduire l'équation $x(t)$ du mouvement.

b) Application numérique $\tau=5\ s$, $\omega_0=1\ rad/s$ et $x_{em}=1\ cm$. Tracer la courbe de $x(t)$. commenter.

Exercice n° 1



1°) Conservation de $\vec{P}$ et de E_c

$$(1) \qquad m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$(2) \qquad m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2$$

Soit $(3) \qquad m_1 \left[v_1 - v_1' \right] = -m_2 \left[v_2 - v_2' \right]$

$$(4) \qquad m_1 \left[v_1^2 - v_1'^2 \right] = -m_2 \left[v_2^2 - v_2'^2 \right]$$

$v_1 = v_1'$, $v_2 = v_2'$ n'est pas possible car elle signifierait que les billes se traversent sans modification de leurs vitesses.

$(5) = (4)/(3) \qquad v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$

$(6) = (3) \qquad m_1 (v_1 - v_1') = -m_2 (v_2 - v_2')$

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

En valeur Algébrique

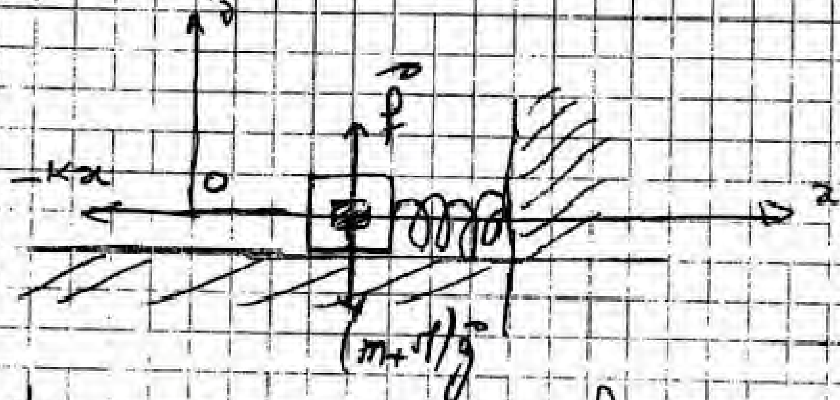
$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

2°) $\overline{NN'} = v_2' - v_1'$ Mesure algébrique.

$$= v_1 - v_2$$

$$= -\overline{NN}$$

Exercice n° 3



- Choc mou, la vitesse de A et B sont les mêmes après choc

Soit v_B vitesse après choc on a conservation $\vec{p}$

$$m\vec{v}_{A_1} + \vec{0} = (m+M)\vec{v}_B$$

Calcul $\quad v_B = \dfrac{m\,v_{A1}}{m+M}$

- Soit la déformation du ressort est maximum, la vitesse du Bloc B est nulle. On connait donc les vitesses du Bloc quand $x = 0$ et $x = x_M$.

Si x est la déformation du ressort, les forces en présentes sont $\vec{P} = (m+M)\vec{g}$

la réaction $\vec{f}$ sur B

la force élastique du ressort $-K\vec{x}$.

Appliquons le th de l'Ec

$$W_{\Sigma F} = E_c^2 - E_c^1$$

$$\int_0 (m+M)\vec{g}\cdot d\vec{x} + \int_0 \vec{f}\cdot d\vec{x} + \int -K\vec{x}\cdot d\vec{x} = 0 - \frac{1}{2}(m+M)v_B^2$$

3°) a) $m_1 = m_2$ $\quad v'_1 = v_2$ et $v'_2 = v_1$

les vitesses des deux boules s'échangent

b) $m_1 \gg m_2 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \varepsilon$ petit

$$v'_1 = \frac{(1-\varepsilon)v_1 + 2\varepsilon v_2}{1+\varepsilon} \simeq v_1$$

$$v'_2 = \frac{(\varepsilon - 1)v_2 + 2v_1}{1+\varepsilon} \simeq 2v_1 - v_2$$

La vitesse de la boule la plus lourde n'est pas modifiée.

~~Exercice n° 2~~

Conservation de $\vec{P}$ $\quad m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1+m_2)\vec{v}\,'$

Choc mou même vitesse après le choc

La perte d'Ec est donné par :

$$E_c - E'_c = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)v'^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}\frac{(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)^2}{m_1+m_2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left[v_1^2 + v_2^2 - 2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mu\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right)^2$$

$$-K\int_0^{x_M} x\,dx = -\frac{1}{2}(m+M)\,v_B^2$$

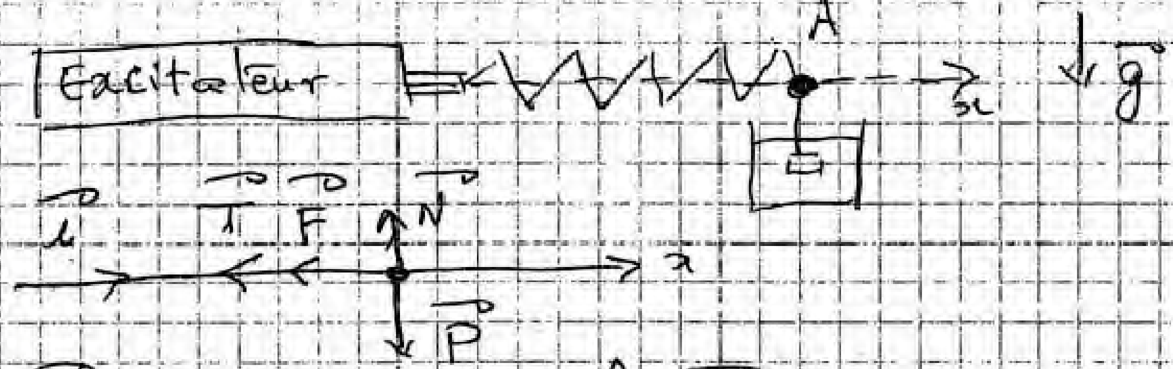
$$-K\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_M} = -\frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m\,v_{A1}}{m+M}\right)^2$$

$$-\cancel{\frac{1}{2}}K\,x_M^2 = -\cancel{\frac{1}{2}}\,\frac{m^2\,v_{A1}^2}{m+M}$$

$$x_M^2 = \frac{m^2\,v_{A1}^2}{K(m+M)}$$

$$x_M = \frac{m\cdot v_{A1}}{\sqrt{K(m+M)}}$$

Exercice n°4



Bilan $\vec{P}$, réaction normale $\vec{N}$

Tension ressort $\vec{T} = -Kx\vec{i} + Kx_{ext}\vec{i}$

Force frottement fluide $\vec{F} = -h\vec{v} = -h\dot{x}\vec{i}$

PFD $\vec{P}+\vec{N}+\vec{T}+\vec{F} = m\vec{\gamma}$, $\vec{\gamma} = \ddot{x}\vec{i}$

proj/Ox $0+0-K(x-x_{ext}) - h\dot{x} = m\ddot{x}$

$$-Kx + Kx_{ext} - h\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{K}{m}x_{ext}$$

$$\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{em} \sin \omega_0 t$$

* eq homogène $\ddot{x} + (2/\tau)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

eq caractéristique $r^2 + (\frac{2}{\tau}) r + \omega_0^2 = 0$

Discriminant Réduit $\Delta' = (\frac{1}{\tau})^2 - \omega_0^2 < 0$ A.Num

Δ' est négatif $\Delta' = -\omega^2$

$$= -\omega_0^2 \left[1 - \frac{1}{\omega_0^2 \tau^2}\right] < 0$$

$$x_h = e^{-\frac{t}{\tau}} \left[p \cos \omega t + q \sin \omega t\right] \quad p, q \text{ cstes}$$

* Solut° particulière $x_p = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$x_m = ?$ et $\varphi = ?$

$$x_p = \frac{1}{2}\omega_0 \tau x_{em} \sin(\omega_0 t - \pi/2)$$

$$= -\frac{1}{2}\omega_0 \tau x_{em} \cos \omega_0 t$$

$x = x_h + x_p$; à $t = 0$ $x(0) = p - \frac{1}{2}\omega_0 \tau x_{em} = 0$

$\dot{x}(0) = -\frac{p}{\tau} + \omega q = 0$

donc $p = \frac{1}{2}\omega_0 \tau x_{em}$

$$q = \frac{p}{\omega \tau} = \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{\omega} x_{em}$$

$$x = \frac{1}{2} x_{em} \left\{ e^{-t/\tau} \left(\omega_0 \tau \cos(\omega t) + \frac{\omega_0}{\omega} \sin(\omega t) \right) - \omega_0 \tau \cos(\omega_0 t) \right\}$$

A.N

$\tau = 5s$

$\omega_0 = 1 \, rd/s$

$\omega_0 \tau = 5$

$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{24}}{5} = 0,979$

$$x = \frac{1}{2} e^{-t/5} \left[5 \cos \frac{\sqrt{24}}{5} t + \frac{5}{\sqrt{24}} \sin \frac{\sqrt{24}}{5} t \right] - 2,5 \cos t$$