

TD Physique 1
(Compléments mathématiques)

Exercice 1

Dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, on a :

$$\vec{V}_1 = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y - 2\vec{e}_z$$

$$\vec{V}_2 = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z$$

$$\vec{V}_3 = -\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$$

1- Calculer les produits scalaires : $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$, $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3$ et $\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_3$. En déduire les angles : $\theta_1 = (\vec{V}_1, \vec{V}_2)$;

$$\theta_2 = (\vec{V}_1, \vec{V}_3) \text{ et } \theta_3 = (\vec{V}_2, \vec{V}_3)$$

2- Calculer les produits vectoriels : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$; $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3$ et $\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1$

3- Calculer les produits mixtes : $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3$; $(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_1$; $(\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2$

Exercice 2

Dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, on a :

$$\vec{V}_1 = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - \vec{e}_z$$

$$\vec{V}_2 = 3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$$

2- Déterminer le vecteur unitaire \vec{u} porté par le vecteur : $\vec{C} = \vec{V}_1 + 2\vec{V}_2$

Exercice 3

Soit un vecteur $\vec{v}(t) = V(t) \cdot \vec{u}(t)$, où $\vec{u}(t)$ est son vecteur unitaire.

1- Montrer que si \vec{v} a un module constant, le vecteur dérivée $\frac{d\vec{v}}{dt}$ lui est orthogonal.

2- Montrer que d'une manière générale : $\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = V \cdot \frac{dV}{dt}$

Exercice 4

1- Exprimer la différentielle totale de la fonction suivante : $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy \cdot \exp(z)$

2- Soient les fonctions de deux variables x et y : $f(x, y) = \cos(x^2 y)$ et $g(x, y) = \exp(x^2 + 2y)$

- Calculer la différentielle totale de chaque fonction
- Calculer les dérivées partielles $\partial^2 f / \partial x^2$, $\partial^2 f / \partial x \partial y$; $\partial^2 f / \partial y \partial x$.

Exercice 5

1- Un point $M(x, y, z)$ est repéré par le rayon vecteur $\vec{r} = \overline{OM}$ de module : $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$$\text{calculer : } \overline{\text{grad}} r, \overline{\text{grad}} \left(\frac{1}{r}\right), \overline{\text{grad}} (\text{Log } r)$$

2- Soit $U(x, y, z) = 3x^2 y z^2 + 4y^2 z x^3$ un champ scalaire.

Montrer que $\overline{\text{grad}} U$ au point $M(1, -1, 2)$ est parallèle au plan Oyz

Exercice 6

En explicitant la relation $dU = \overline{\text{grad}} U \cdot \vec{dl}$

Donner l'expression du gradient en coordonnées cylindriques et en coordonnées sphériques

Exercice 7

Soit $U(x, y) = x^2 + y^2 + xy$; un champ scalaire, et \overline{dl} le déplacement élémentaire dans la direction faisant l'angle θ avec Ox.

- 1- Calculer en fonction de x, y et θ , la dérivée $\frac{dU}{dl}$.
- 2- Déterminer, en dérivant par rapport à θ , la valeur θ_0 pour laquelle cette dérivée est maximale.
- 3- Montrer que la direction ainsi définie est celle du vecteur gradient.

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial U}{\partial l} \right) = 0 \right)$$

Exercice 8

- 1- Calculer la divergence du rayon vecteur : $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.
- 2- Calculer la divergence de $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$, faire le même calcul en appliquant la relation :

$$\text{div} (f \vec{A}) = \vec{A} \cdot \text{grad} f + f \text{div} \vec{A}$$

Exercice 9r

- 1- Calculer $\overline{\text{rot}} \vec{r}$ et $\overline{\text{rot}} \frac{\vec{r}}{r^3}$, avec $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.
- 2- Calculer $\overline{\text{rot}} \vec{A}$ avec $\vec{A} = 3x^2y\vec{e}_x - 2yz^3\vec{e}_y + x^2y\vec{e}_z$ au point M (1, 2, 1).
Déterminer les points de l'espace où $\overline{\text{rot}} \vec{A}$ est nul

Exercice 10

En chaque point M(x, y, z) de l'espace, on définit un vecteur \vec{v} par la relation $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ avec $\vec{\omega} = w\vec{k}$ et $\vec{r} = \overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Montrer que $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \overline{\text{rot}} \vec{v}$

Exercice 11

- 1- Montrer que, dans le plan, on a, en tout point sauf à l'origine, $\Delta(\text{Log } r) = 0$
- 2- Dédire de la relation de définition $\Delta U = \text{div} \overline{\text{grad}} U$ l'expression du Laplacien en coordonnées cylindriques

$$\text{On donne en coordonnées cylindriques : } \text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta) + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Exercice 12

On donne le vecteur $\vec{A} = 4xy\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}$. Calculer de deux façons différentes le flux de ce vecteur à travers la surface du cube délimité par $x=0, x=1; y=0, y=1; z=0, z=1$

$$-\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 y \, dx \, dy \, dz = -\int_0^1 \int_0^1 y \, dy \, dx \int_0^1 dz$$

Exercice 13

- Quel est l'angle solide sous lequel on voit, depuis le centre O d'une sphère, un élément dS de sa surface compris entre les méridiens φ et $\varphi + d\varphi$ et les parallèles θ et $\theta + d\theta$.
- En déduire l'angle solide sous lequel on voit, depuis O :
 - 1- L'espace compris entre deux méridiens φ et $\varphi + d\varphi$
 - 2- L'espace compris entre deux parallèles θ et $\theta + d\theta$.

Exercice 14

- 1- Calculer l'angle solide Ω_1 sous lequel on voit une face négative d'un disque depuis le point O_1 de son axe.
- 2- Quelle est la valeur de l'angle solide Ω_2 sous lequel depuis un point O_2 de son axe, on voit la face positive d'un disque.

TD1 (Compléments)

Exercice 1:

$$1 - \vec{V}_1 = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y - 2\vec{e}_z$$

$$\vec{V}_1 = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = -2$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3 = 0$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3 = 3$$

On sait que $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \|\vec{V}_2\| \cos \theta$

$$\|\vec{V}_1\| = \sqrt{4+1+4} = 3$$

$$\|\vec{V}_2\| = \sqrt{14}$$

$$\Rightarrow \cos \theta_1 = \frac{-2}{3\sqrt{14}} \Rightarrow \theta_1 = 100,26^\circ$$

$$\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_3 = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ \quad (\vec{V}_2 \perp \vec{V}_3)$$

de même, on trouve $\theta_3 = 68,99^\circ$

$$2 - \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

$$\star \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\star \vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$3 - (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -13$$

$$(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -12 - 3 - 8 = -23$$

$$(\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -23$$

$$(\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_1 = (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2 = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3$$

La permutation circulaire des vecteurs ne fait pas changer le produit mixte.

Exercice 2:

$$\vec{A} = \|\vec{A}\| \cdot \vec{u}_A$$

où \vec{u}_A est le vect. unitaire porté par \vec{A} .

$$\Rightarrow \vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

* Dans ce cas, on a: $\vec{C} = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$

$$\vec{C} = 8\vec{e}_x + (-1)\vec{e}_y + 3\vec{e}_z$$

$$\|\vec{C}\| = \sqrt{74}$$

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{74}} \vec{e}_x - \frac{1}{\sqrt{74}} \vec{e}_y + \frac{3}{\sqrt{74}} \vec{e}_z$$

Exercice 3:

$$\vec{v}(t) = v(t) \cdot \vec{u}(t)$$

1- si $v(t) = ct \Rightarrow \vec{v} \perp \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = (\vec{v})^2 = v^2$$

$$\frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = 0 \quad (v = ct)$$

$$\frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$2 - \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = v(t) \cdot \vec{u}(t) \cdot \frac{d(v(t) \vec{u}(t))}{dt}$$

$$= v(t) \cdot \vec{u}(t) \cdot \left[\frac{dv(t)}{dt} \cdot \vec{u}(t) + v(t) \cdot \frac{d\vec{u}(t)}{dt} \right]$$

$$= v(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} + \underbrace{v^2(t) \cdot \vec{u}(t) \cdot \frac{d\vec{u}(t)}{dt}}_0 \quad (\text{car } \|\vec{u}(t)\| = 1 = ct)$$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = v \frac{dv}{dt}$$

$$\left(\left\| \frac{d\vec{v}}{dt} \right\| \neq \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} \right)$$

Exercice 4:

$$1- f(x) = x^2 + y^2 + z^2 + xy \exp(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{y,z} = 2x + ye^z$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x,z} = 2y + xe^z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{x,y} = 2z + xy e^z$$

$$\Rightarrow df = (2x + ye^z)dx + (2y + xe^z)dy + (2z + xy e^z)dz$$

$$2- f(x,y) = \cos(x^2y) \text{ et } g(x,y) = e^{x^2+2y}$$

$$df = (-2xy \sin(x^2y))dx - (x^2 \sin(x^2y))dy$$

$$dg = (2xe^{x^2+2y})dx + (2e^{x^2+2y})dy$$

$$* \frac{\partial f}{\partial x} = -2xy \sin(x^2y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$= -2y (\sin(x^2y) + 2x^2 \cos(x^2y))$$

$$* \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \text{dérivées croisées}$$

- Si les dérivées secondes sont continues alors les dérivées croisées égalent:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Exercice 5:

$$\vec{r} = \vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$r = \|\vec{r}\| = \|\vec{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{\text{grad}} r = \frac{\partial r}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial r}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial r}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$\vec{\text{grad}} r = \frac{x}{r} \vec{e}_x + \frac{y}{r} \vec{e}_y + \frac{z}{r} \vec{e}_z$$

$$= \frac{1}{r} (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)$$

$$= \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= \left(-\frac{1}{r^2} \right) \frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial (f(r))}{\partial x} = \frac{\partial (f(r))}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$$

f dépend de r et

r " de x

$$\text{de même on trouve: } \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}$$

$$\Rightarrow \text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\# \text{ grad}(\log r) = \frac{\partial(\log r)}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial(\log r)}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial(\log r)}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{On a } \frac{\partial(\log r)}{\partial x} = \frac{\partial(\log r)}{\partial r} = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r} \cdot \frac{x}{r} = \frac{x}{r^2}$$

$$\frac{\partial(\log r)}{\partial y} = \frac{y}{r^2}, \quad \frac{\partial(\log r)}{\partial z} = \frac{z}{r^2}$$

$$\text{Alors } \text{grad}(\log r) = \frac{\vec{r}}{r^2}$$

$$2 - \text{grad}(U) = (6xyz^2 + 12x^2yz) \vec{e}_x + (3x^2z^2 + 4yzx^3) \vec{e}_y + (6x^3yz + 4y^2x^3) \vec{e}_z$$

$$\text{au pt } M, \quad x=1, \quad y=-1, \quad z=2$$

$$\text{grad}(U)_M = -\vec{e}_y + \vec{e}_z + 0\vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \text{grad}(U)_M \perp \text{Oyz}$$

Exercice 6:

Une fct scalaire dépendant de (ρ, θ, z)

$$\Rightarrow \begin{cases} dU = ? \\ dl = ? \end{cases}$$

$$\text{On pose: } \vec{A} = \text{grad } U = \nabla U$$

$$\vec{A} = A_\rho \vec{e}_\rho + A_\theta \vec{e}_\theta + A_z \vec{e}_z$$

$$dU = \text{grad } U \cdot d\vec{l}$$

\Rightarrow diff totale de U

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

$$d\vec{l} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

$$\vec{A} \cdot d\vec{l} = A_\rho d\rho + A_\theta \rho d\theta + A_z dz$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_\rho = \frac{\partial U}{\partial \rho} \\ \rho A_\theta = \frac{\partial U}{\partial \theta} \Rightarrow A_\theta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ A_z = \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

$$\vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

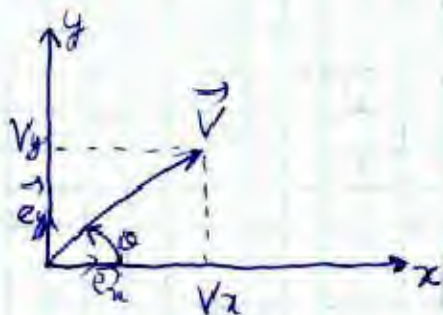
Exercice 7 :

$$\textcircled{1} V(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2y$$

$$\theta = (d\vec{l}, \vec{\sigma}_x)$$

Rappel :

$$\vec{V} = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y$$



D'une manière générale :

$$\vec{V} = \text{Proj}_{\vec{e}_x}(\vec{V}) \vec{e}_x + \text{Proj}_{\vec{e}_y}(\vec{V}) \vec{e}_y$$

$$\text{or : } \text{Proj}_{\vec{u}}(\vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{u}$$

 \vec{u} : vect unitaire porté par (Δ)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{V} &= (\vec{V} \cdot \vec{e}_x) \vec{e}_x + (\vec{V} \cdot \vec{e}_y) \vec{e}_y \\ &= \frac{\|\vec{V}\| \cos \theta}{\cancel{V_x}} \vec{e}_x + \frac{\|\vec{V}\| \sin \theta}{V_y} \vec{e}_y \end{aligned}$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$= (2x+y) dx + (2y+x) dy$$

$$\text{or } d\vec{l} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y$$

$$\vec{d\vec{l}} \begin{cases} dx = \text{Proj}_{\vec{e}_x}(d\vec{l}) = dl \cos \theta \\ dy = \text{Proj}_{\vec{e}_y}(d\vec{l}) = dl \sin \theta \end{cases}$$

$$du = (2x+y) dl \cos \theta + (2y+x) dl \sin \theta$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dl} = (2x+y) \cos \theta + (2y+x) \sin \theta$$

$$\textcircled{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{du}{dl} \right) = -(2x+y) \sin \theta + (2y+x) \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2y+x}{2x+y}$$

$$\theta = \theta_0 : \text{tg} \theta_0 = \frac{2y+x}{2x+y}$$

3- On prendra, α l'angle entre $\vec{\text{grad}} U$ et l'axe Ox

$$\vec{\nabla}u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y \vec{e}_x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x \vec{e}_y$$
$$= (2x+4)\vec{e}_x + (2y+x)\vec{e}_y$$

$$\text{On a : } \begin{cases} \|\vec{\nabla}u\| \cos(\alpha) = 2x+4 \\ \|\vec{\nabla}u\| \sin(\alpha) = 2y+x \end{cases}$$

$$\text{Donc } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \frac{2y+x}{2x+4}$$

$$\tan \alpha = \tan 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Exercice 8 :

$$1- \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$\text{div } \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\text{div } \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r}\right)$$

$$\star \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(x \cdot \frac{1}{r}\right)$$

$$= \frac{1}{r} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= \frac{1}{r} + x \left(-\frac{3}{r^3}\right)$$

$$= \frac{1}{r} - \frac{3x^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r}\right) = \frac{1}{r} - \frac{3y^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2}$$

donc $\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}$

$$\operatorname{div}(\beta \vec{A}) = \vec{A} \cdot \operatorname{grad} \beta + \beta \operatorname{div} \vec{A}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = ?$$

$$\operatorname{div} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \vec{r} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \operatorname{div}(\vec{r})$$

$$\text{Or } \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{2}{r^3} \vec{e}_x - \frac{2}{r^3} \vec{e}_y - \frac{2}{r^3} \vec{e}_z$$

$$= -\frac{2}{r^3} (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z)$$

$$= -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Or $\operatorname{div}(\vec{r}) = 3$

$$\text{Donc } \operatorname{div} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = \vec{r} \cdot \left(-\frac{\vec{r}}{r^3} \right) + \frac{1}{r} \cdot (3) = -\frac{r^2}{r^3} + \frac{3}{r} = \frac{2}{r}$$

Exercice 9:

$$\vec{A} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \wedge \vec{A}$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{0}$$

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{A}}{r} = ?$$

$$\varepsilon \cdot \vec{A} = \underbrace{3x^2 y}_{A_x} \vec{e}_x - \underbrace{2yz^3}_{A_y} \vec{e}_y + \underbrace{xy^2}_{A_z} \vec{e}_z$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow (x^2 + 6yz^3) \vec{e}_x + (0 - 2xy) \vec{e}_y + (0 - 3x^2) \vec{e}_z$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = (x^2 + 6yz^3) \vec{e}_x - 2xy \vec{e}_y - 3x^2 \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} (\vec{A})_M = 13 \vec{e}_x - 4 \vec{e}_y - 3 \vec{e}_z$$

$$\vec{rot} R = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 6xy + y^2 = 0 \\ -2xy = 0 \\ -3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 6xy + y^2 = 0 \\ 2y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ oder } y = -x \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M(0, y, z) \Rightarrow M \in OY \\ M(x, 0, z) \Rightarrow M \in OZ \end{cases}$$

Exercise 11.

1) $-\Delta(\log r) = 0$

$$\Delta \vec{f} = \text{div}(\text{grad} \vec{f})$$

$$\Delta(\log r) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log r + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \log r + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \log r$$

$$\text{on a. } \vec{\text{grad}}(\log r) = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{x^2 + y^2}$$

$$\text{div}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right) \Rightarrow \Delta(\log r) \neq 0$$

TD 1 (Compléments)

Exercice 12.

$$\textcircled{+} \vec{A} = 4xy\vec{i} - y^2\vec{j} + yz\vec{k}$$

$$\star \phi = \iint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \text{div}(\vec{A}) d\tau$$

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{div}(\vec{A}) = 4y - 2y + y$$

$$= 3y$$

$$d\tau = dx dy dz$$

$$\phi = \iiint 3y dx dy dz$$

$$= \int_0^1 dx \cdot \int_0^1 3y dy \cdot \int_0^1 dz$$

$$= 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$$



$$\textcircled{+} \phi = \sum \phi_i = \sum_{i=1}^6 \left(\iint_{(S_i)} \vec{A} \cdot d\vec{S}_i \right)$$

- Pour la face $x=1$ ($xy \leq 1$, $xz \leq 1$)

$$\Rightarrow \phi = \iint \vec{A} \cdot d\vec{S}_1$$

$$d\vec{S}_1 = dS_1 \cdot \vec{n}$$

$$= dy dz \vec{i}$$

$$\phi_1 = \iint 4y dy dz = \int_0^1 4y dy \int_0^1 dz = 2 \quad (x=1)$$

- Pour la face $y=1$ on a $dS_2 = dx dz$ et $\vec{n} = \vec{j}$

$$\phi_2 = - \iint y^2 dx dz = - \int_0^1 dx \int_0^1 dz = -1 \quad (y=1)$$

- Pour la face $z=1$ on a $dS_3 = dx dy$ et $\vec{n} = \vec{k}$

On peut définir alors que l'angle solide sous lequel on voit depuis O tout l'espace autour de O est 4π

Exercice 24

1 -

Une élément de surface de disque

$$dS = r dr d\alpha$$

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^r r dr d\alpha$$



$\Rightarrow d\alpha$: l'angle solide élément sous lequel, on voit l'élément dS de disque est $d\alpha = \frac{dS \cdot u}{r^2}$

$$\Rightarrow d\alpha = \frac{r dr d\alpha \cos \varphi}{r^2}$$

Cherchons à remplacer: r par φ
et l par φ

$$\Rightarrow r = a \tan \varphi \quad \text{et} \quad l = \frac{a}{\cos \varphi}$$

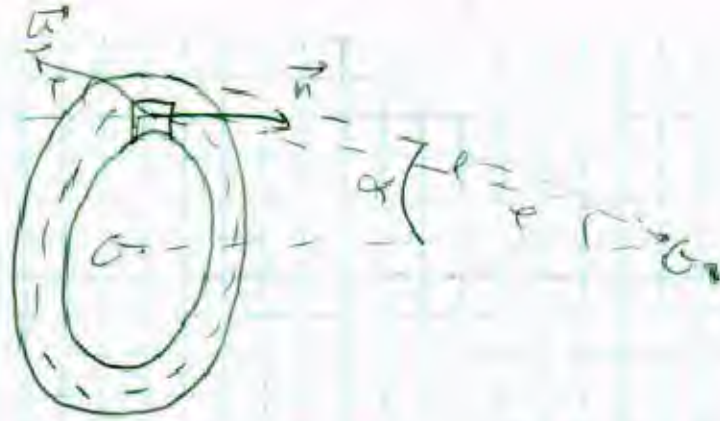
$$dr = \frac{a}{\cos^2 \varphi} d\varphi$$

$$\Rightarrow d\alpha = d\varphi \sin \varphi d\varphi$$

$$\Rightarrow \Omega_1 = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\varphi} \sin \varphi d\varphi = 2\pi (1 - \cos \alpha)$$

$$\varphi =$$

$$-(\vec{u}, \vec{n}) = \pi - \varphi$$



$$d\omega = \frac{dS \cdot \vec{n}}{r^2} = \frac{dS \cos(\pi - \varphi)}{r^2} = -\frac{dS \cos \varphi}{r^2}$$

$$\omega = -2\pi(1 - \cos \alpha)$$

Exercice 11

$$\Delta U = \text{div}(\text{grad } U)$$

$$\text{C.C. grad } U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$= A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_z \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

$$\Delta U = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} + r \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

TD1 (Compléments)

Exercice 101

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

$$\text{avec } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$$

on sait que $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

$$\text{Alors: } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y\vec{i} - (-x\omega)\vec{j} \\ = -\omega y\vec{i} + x\omega\vec{j}$$

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \begin{vmatrix} -\omega y & x\omega & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x\omega}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{-\partial \omega y}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial \omega y}{\partial z} - \frac{\partial x\omega}{\partial x} \right) \vec{k} \\ = 0 + 0 + (\omega + \omega)\vec{k} \\ = 2\omega\vec{k}$$

Alors $\text{rot } \vec{v} = 2\omega\vec{k}$ et puisque $\omega\vec{k} = \vec{\omega}$

donc $\text{rot } \vec{v} = 2\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$$



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Diapo
Chimie
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..