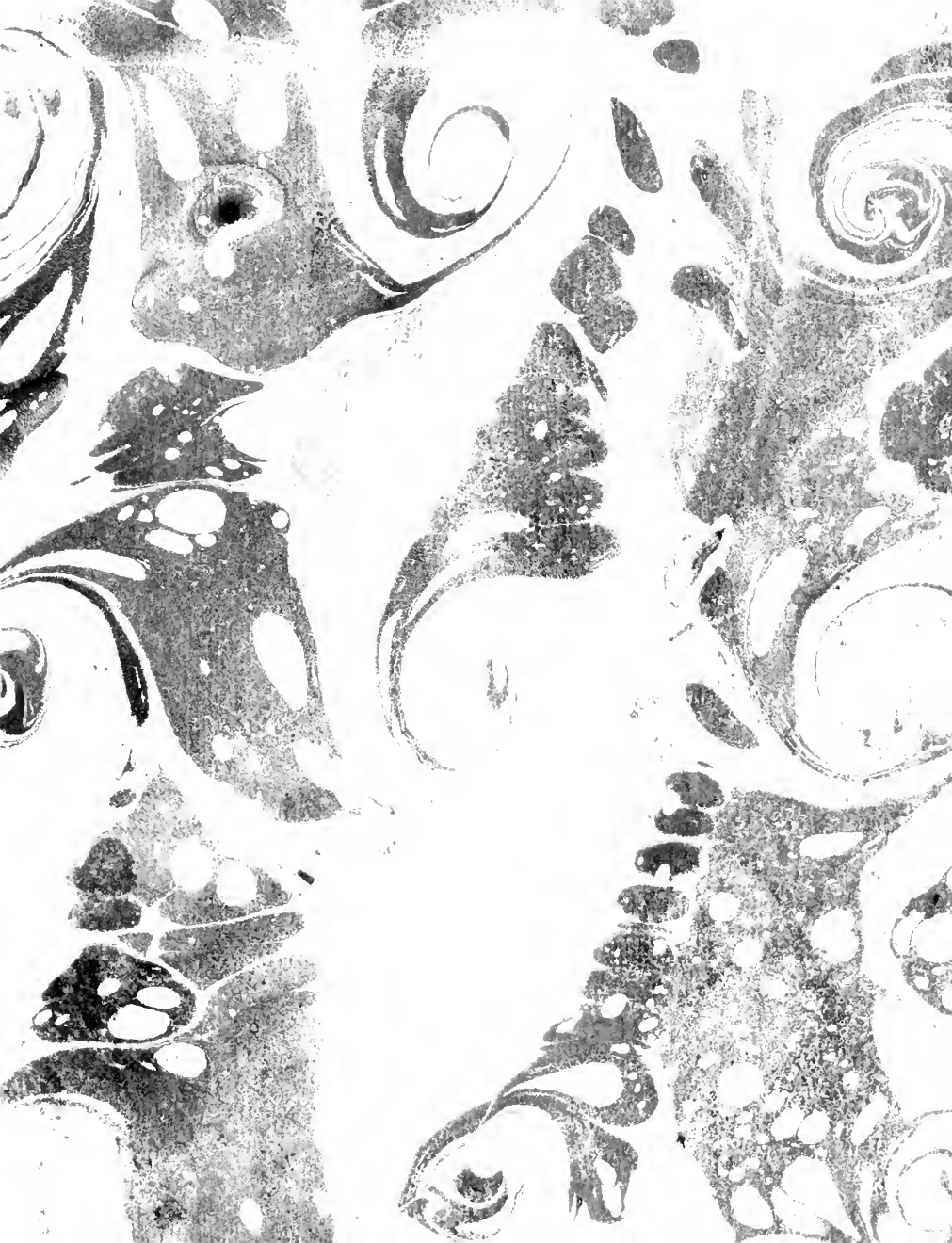


*Quincy, Mass.*











E U C L I D I S  
E L E M E N T O R U M

L I B R I P R I O R E S S E X,

I T E M

U N D E C I M U S E T D U O D E C I M U S,

E X V E R S I O N E L A T I N A

F E D E R I C I C O M M A N D I N I;

Sublatis iis quibus olim Libri hi a THEONE, aliove, Vitiati sunt,  
Et quibusdam EUCLIDIS Demonstrationibus Restitutis,

A R O B E R T O S I M S O N, M. D.

In Academia Glasguensi Matheos Professore.

G L A S G U A E,

I N A E D I B U S A C A D E M I C I S

E X C U D E B A N T R O B E R T U S E T A N D R E A S F O U L I S

A C A D E M I A E T Y P O G R A P H I

M. DCC. LVI.



GEORGIO,  
WALLIAE PRINCIPI,

CUI MULTUM JAM DEBENT,

PLURIMUM OLIM DEBEBUNT,

BONAE ARTES ET SCIENTIAE,

HOSCE

ELEMENTORUM EUCLIDIS

PRAECIPUOS LIBROS,

BENEVOLO SUO PERMISSU,

EA, QUA PAR EST,

ANIMI GRATI VENERATIONE,

PRINCIPI JUVENTUTIS

D. D. C. Q.

ROBERTUS SIMSON.



# P R A E F A T I O.

**D**E auctore Geometriae Elementorum, quae Euclidis nomine infigniantur, variae admodum sunt Recentiorum sententiae, quae non paullum inter se discrepant; etenim Petrus Ramus tam Propositiones quam earundem Demonstrationes Theoni adscribit; alii Propositiones Euclidi, Demonstrationes vero Theoni tribuunt; alii denique, inter quos in primis nominandi sunt viri doctissimi Joannes Buteo et Henricus Savilius, Propositiones et Demonstrationes omnes Euclidis esse strenue contendunt. inter has verisimilior visa est Buteonis et Savilii sententia, quam proinde plerique post eos Geometrae amplexi sunt. Savilius, post adducta quaedam in hanc rem argumenta, ex illis concludit, “Theonis fuisse partes, in Euclide paucissimis quidem in locis interpolando, explicando, augendo, ultra hoc nullas.” verum saepius perpendendo atque inter se comparando Demonstrationes quae in Euclide nunc extant, inveni Theonem, vel quicumque Editor fuit textus Graeci quem nunc habemus, multo plura, et quidem in pejus, mutasse quam praedicti viri docti, aliique existimant; addendo scilicet, demendo, aut sua miscendo; praesertim in Libro quinto et undecimo quos iste Editor non leviter vitavit. Ex. gr. substituendo breviorē, at paralogisticam, vice legitimae Demonstrationis Propositionis 18<sup>v<sup>a</sup></sup> Libri 5<sup>ti</sup>; et ex hoc Libro, auferendo, inter alia, bonam Euclidis vel Eudoxi rationis compositae Definitionem, cujus loco posuit Definitionem absurdam, 5<sup>am</sup> sc. Libri 6<sup>ti</sup>, quā neque Euclides, neque Archimedes, Apollonius aut ullus ante Theonem Geometra usus fuit, cujusque apud illos nullum vestigium invenitur. hanc autem Theonis Definitionem, quae sola multum negotii Tyronibus facessere solet, ex huius Elementis nunc sublata est, atque ejus loco alia, quam sine dubio Euclides dederat, posita est  
inter

## P R A E F A T I O.

inter Definitiones Libri 5<sup>ii</sup>, ex qua doctrina de Ratione Composita facilis redditur. Praeterea inter Definitiones Libri 11<sup>mi</sup> habetur haec quae 10<sup>ma</sup> est, “Aequales et similes solidae figurae sunt, quae similibus planis multitudine et magnitudine aequalibus continentur;” est vero Propositio haec Theorema, non Definitio, quoniam aequalitas figurarum quarumcunque demonstranda est, non vero assumenda. quamvis igitur vera fuisset, demonstrari debuit haec Propositio; non autem semper vera est extra casum in quo figurarum anguli solidi non pluribus tribus angulis planis continentur, in aliis enim casibus, duae figurae solidae possunt contineri planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus, et tamen inter se inaequales esse, ut in Notis, hisce Elementis annexis, perspicue ostendetur. similiter, in Demonstratione Propositionis 26<sup>ae</sup> Libri 11<sup>mi</sup>, assumitur duos angulos solidos inter se aequales esse, si angulis planis multitudine et magnitudine aequalibus contineantur; sed neque hoc semper verum est extra casum in quo anguli solidi non pluribus tribus angulis planis continentur, cujus tamen casus nulla, quamvis omnino sit necessaria, in Elementis Demonstratio hactenus habetur. Ex Definitione autem 10<sup>ma</sup> pendunt Propositiones 25<sup>ta</sup> et 28<sup>va</sup> Libri 11<sup>mi</sup>, et ex Propositione 25<sup>ta</sup> vel 26<sup>ta</sup> pendunt octo aliae, viz. Propp. 27<sup>ma</sup>, 31<sup>ma</sup>, 32<sup>da</sup>, 33<sup>tia</sup>, 34<sup>ta</sup>, 36<sup>ta</sup>, 37<sup>ma</sup>, 40<sup>ma</sup> Libri ejusdem; et 12<sup>ma</sup> Libri 12<sup>mi</sup> pendet ex 8<sup>va</sup> ejusdem, eademque 8<sup>va</sup>, Corollarium 17<sup>mac</sup>, et Prop. 18<sup>va</sup> Libri 12<sup>mi</sup> pendent ex Definitione 9<sup>na</sup> Libri 11<sup>mi</sup>; quae minime proba est, quoniam possunt esse figurae solidae contentae planis similibus, multitudine aequalibus, quae tamen minime sunt similes. omnes igitur haec Propositiones infirmo hactenus innitebantur fundamento. Alia etiam sunt, non pauca, quae minime videntur Euclidis esse, et quae fatis ostendunt Elementa ejus a Geometriae imperitiis non leviter esse corrupta; et quidem quamvis haec non aequae crassa sint ac praedicta errata, sunt tamen necessario



## P R A E F A T I O.

fario corrigenda. quorum omnium ratio in Notis ad finem Libri red-  
detur.

Operae igitur pretium videbatur, neque ingratum fore putabam vi-  
ris eruditis, praesertim iis qui accuratis demonstrationibus in Geometria  
delectantur, hosce Elementorum Euclidis praecipuos Libros ab hisce  
naevis vindicare, et ad pristinam ἀκρίβειαν restituere, quantum sc. in-  
genium valebat; praesertim cum fundamentum sint scientiae quae mag-  
nam in multis rebus utilitatem adfert, quin et aliis quibusdam scientiis,  
et plerisque omnibus pacis et belli artibus est necessaria, cujusque ope  
veri inquisitio et investigatio, quantum finit mentis humanae imbecillitas,  
promovetur. atque hoc facere conati sumus, tollendo falsa minimeque  
accurata quae pro veris et germanis accuratissimi Geometrae scriptis sup-  
posuerunt imperiti Editores, et Euclidi restituendo, a Theone aliisque, ab  
eo surrepta, quae per multa saecula haecenus sepulta jacuerunt.



E U C L I D I S  
E L E M E N T O R U M  
L I B E R P R I M U S.

DEFINITIONES.

I.

**P**UNCTUM, seu signum, est, cujus nulla est pars, vel quod magnitudinem nullam habet.

II.

Linea vero est longitudo latitudinis experta.

III.

Lineae extrema sunt puncta.

IV.

Recta linea est, quae ex aequo suis interjicitur punctis.

V.

Superficies est id, quod longitudinem, et latitudinem tantum habet.

VI.

Superficies extrema sunt lineae.

VII.

Plana superficies est, in qua sumptis utcumque duobus punctis, recta linea inter ea, tota jacet in illa superficie.

A

“ Planus

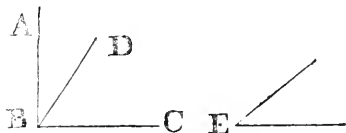
## EUCLIDIS ELEMENTORUM

## VIII.

“ Planus angulus est duarum linearum in plano sese tangentium, et non  
 “ in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.”

## IX.

Angulus planus rectilineus est duarum rectarum sese tangentium, et non  
 in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.



‘ N. B. Si plures anguli ad unum punctum B existant, quilibet eorum  
 ‘ designatur tribus alphabeti literis, quarum ea quae est ad verticem an-  
 ‘ guli, hoc est ad punctum in quo rectae angulum continentes sibi mu-  
 ‘ tuo occurrunt, in medio reliquarum ponitur; harum autem una est  
 ‘ alicubi ad unam ex rectis illis, altera ad alteram. ita angulus qui rectis  
 ‘ AB, CB continetur, designatur literis ABC, vel CBA; qui vero rectis  
 ‘ AB, DB continetur, literis ABD, vel DBA; et qui rectis DB, CB  
 ‘ continetur, literis DBC, vel CBD designatur. si autem unus tantum  
 ‘ angulus ad punctum existat, designari potest litera ad punctum illud  
 ‘ posita, ut angulus ad E.’

## X.

Cum vero recta linea super recta linea insistens, eos,  
 qui deinceps sunt angulos, aequales inter se fe-  
 cerit, rectus est uterque aequalium angulorum;  
 et quae insitit recta linea, perpendicularis voca-  
 tur ad eam cui insitit.



## XI.

Obtusus angulus est, qui major est recto.

Acutus



XII.

Acutus autem, qui minor est recto.

XIII.

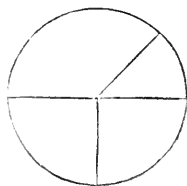
“Terminus est, quod alicujus est extremum.”

XIV.

Figura est, quae aliquo, vel aliquibus terminis continetur.

XV.

Circulus est figura plana, una linea contenta, quae circumferentiâ appellatur; ad quam ab uno puncto intra figuram existente omnes rectae lineae pertinentes sunt aequales.



XVI.

Hoc autem punctum, centrum circuli nuncupatur.

XVII.

Diameter circuli est recta quaedam linea per centrum ducta, et ex utraque parte circumferentiâ circuli terminata.

XVIII.

Semicirculus est figura quae continetur diametro et circumferentiâ circuli quae a diametro intercipitur.

A z

“Segmentum

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

XIX.

“ Segmentum circuli est figura quae rectâ linea et circuli circumferentiâ continetur.”

XX.

Rectilineae figurae sunt, quae rectis continentur lineis.

XXI.

Trilaterae quidem, quae tribus.

XXII.

Quadrilaterae, quae quatuor.

XXIII.

Multilaterae vero, quae pluribus quam quatuor rectis lineis continentur.

XXIV.

Trilaterarum figurarum, aequilaterum est triangulum, quod tria latera habet aequalia.

XXV.

Isoceles, quod duo tantum aequalia latera habet.



XXVI.

Scalenum vero, quod tria inaequalia habet latera.

XXVII.

Ad haec, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem triangulum est, quod rectum angulum habet.

XXVIII.

Obtusangulum est, quod obtusum habet angulum.



Acutangulum

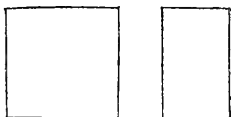
# LIBER PRIMUS.

XXIX.

Acutangulum vero, quod tres acutos angulos habet.

XXX.

Quadrilaterarum figurarum, quadratum est, quod et aequilaterum est et rectangulum.



XXXI.

Altera parte longior figura est, quae rectangula quidem aequilatera vero non est.

XXXII.

Rhombus, quae aequilatera quidem, sed rectangula non est.



XXXIII.

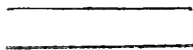
Rhomboides, quae opposita latera inter se aequalia habens, neque aequilatera est, neque rectangula.

XXXIV.

Praeter has autem reliquae quadrilaterae figurae trapezia vocentur.

XXXV.

Parallelae, seu aequidistantes rectae lineae sunt, quae cum in eodem sint plano, et ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter se conveniunt.



POSTU-

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

## POSTULATA.

I.

**P**OSTULETUR, a quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

II.

Et rectam lineam terminatam, in continuum et directum producere.

III.

Et quovis centro et intervallo circulum describere.

## AXIOMATA.

I.

**Q**UAE eidem aequalia, et inter se sunt aequalia.

II.

Et si aequalibus aequalia adjiciantur, tota sunt aequalia.

III.

Et si ab aequalibus aequalia auferantur, reliqua sunt ~~in~~aequalia.

IV.

Et si inaequalibus aequalia adjiciantur, tota sunt inaequalia.

V.

Et si ab inaequalibus aequalia auferantur, reliqua sunt inaequalia.

VI.

Et quae ejusdem sunt duplicia, inter se sunt aequalia.

VII.

Et quae ejusdem sunt dimidia, inter se sunt aequalia.

VIII.

Et quae sibi mutuo congruunt, inter se sunt aequalia.

Totum



# LIBER PRIMUS.

7

IX.

Totum est sua parte majus.

X.

Duae rectae lineae spatium non comprehendunt.

XI.

Omnes anguli recti inter se aequales sunt.

XII.

“ Et si in duas rectas lineas recta linea incidens, interiores et ad easdem partes angulos duobus rectis minores fecerit, duae illae rectae lineae in infinitum productae, inter se convenient ex ea parte ad quam sunt anguli duobus rectis minores. Vid. notas ad Prop. 29. Lib. I.”

PRO-

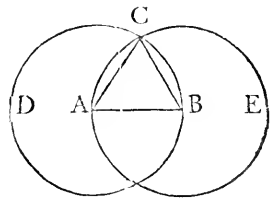
## PROPOSITIO I. PROBLEMA.

**S**UPER data rectâ lineâ terminatâ triangulum æquilaterum constituere.

Sit data recta linea terminata AB, oportet vero super rectâ AB triangulum æquilaterum constituere.

a. 3. Postulat. Centro quidem A intervallo autem AB circulus describatur <sup>a</sup> BCD; et rursus centro B, intervallo BA describatur circulus ACE; et a puncto

C, in quo circuli se invicem secant ad puncto  
b. 2. Post. t<sup>o</sup> A, B ducantur <sup>b</sup> rectae CA, CB. erit  
AEC triangulum æquilaterum.



Quoniam igitur punctum A centrum  
est circuli BCD, erit AC ipsi AB æqua-  
lis<sup>c</sup>; rursus quoniam punctum B centrum  
est circuli CAE, erit BC æqualis rectae

BA. ostensa autem est recta CA æqualis ipsi AB; utraque igitur ip-  
farum CA, CB, ipsi AB est æqualis. quae autem eidem sunt æqualia,  
et inter se æqualia sunt<sup>d</sup>; recta igitur CA ipsi CB est æqualis. tres  
igitur CA, AB, BC inter se sunt æquales. æquilaterum propterea est  
triangulum ABC, et constitutum est super datâ recta linea terminata  
AB. Quod erat faciendum.

## PROP. II. PROB.

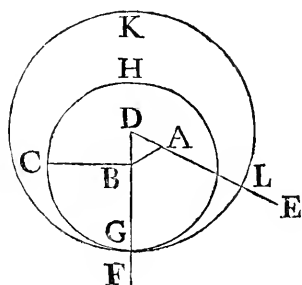
**A**D datum punctum, datae rectae lineae æqualem rec-  
tam lineam ponere.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea BC; oportet ad  
punctum A, rectae BC æqualem rectam lineam ponere.

Ducatur

Ducatur a puncto A ad B recta linea AB<sup>a</sup>, et super ipsâ constitua-  
tur triangulum aequilaterum DAB<sup>b</sup>; et producantur in directum ipsi  
DA, DB rectae lineae AE, BF<sup>c</sup>, centroque B, intervallo autem BC, c. Post. 1.  
circulus CGH describatur<sup>d</sup>. et rursus centro D, intervallo DG describatur  
circulus GKL.

Quoniam igitur punctum B cen-  
trum est CGH circuli, erit BC ipsi BG  
aequalis<sup>e</sup>. et rursus quoniam D cen-  
trum est circuli GKL, erit DL aequa-  
lis DG, quarum DA est aequalis DB;  
reliqua igitur AL reliquae BG est ae-  
qualis<sup>f</sup>. ostensa autem est BC aequa-  
lis ipsi BG. quare utraque ipsarum AL, BC est aequalis rectae BG.  
quae autem eidem aequalia, et inter se sunt aequalia. ergo et recta AL  
aequalis est ipsi BC. Ad datum igitur punctum A datae rectae lineae  
BC aequalis posita est AL. Quod facere oportebat.



d. Post. 3.

e. Def. 15.

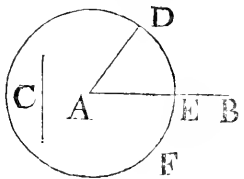
f. Ax. 3.

PROP. III. PROB.

**D**ATIS duabus rectis lineis inaequalibus, a majore  
minori aequalem abscindere.

Sint duae datae rectae inaequales AB et C, quarum major sit AB;  
oportet a majore AB minori C aequalem  
rectam lineam abscindere.

Ponatur ad punctum A ipsi C aequalis  
recta linea AD<sup>a</sup>; et centro quidem A, in-  
tervallo autem AD describatur circulus  
DEF<sup>b</sup>. et quoniam A centrum est DEF



a. 2. 1.

b. Post. 3.

B

circuli,

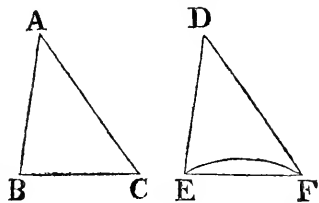
circuli, erit  $AE$  ipsi  $AD$  aequalis. sed et recta  $C$  aequalis est ipsi  $AD$ : utraque igitur ipsarum  $AE$ ,  $C$  ipsi  $AD$  aequalis erit. quare et recta  $AE$  ipsi  $C$  est aequalis. Duabus igitur datis rectis lineis inaequalibus  $AB$  et  $C$ , a maiore  $AB$  minori  $C$  aequalis abscissa est. Quod erat faciendum.

## PROP. IV. THEOREMA.

**S**I duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri; habeant autem et angulum angulo aequalem, qui aequalibus rectis lineis continetur: et basim basi aequalem habebunt; et triangulum triangulo aequale erit; et reliqui anguli reliquis angulis aequales, alter alteri, quibus aequalia latera subtenduntur.

Sint duo triangula  $ABC$ ,  $DEF$ , quae duo latera  $AB$ ,  $AC$  duobus lateribus  $DE$ ,  $DF$  aequalia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem  $AB$  lateri  $DE$  aequale, latus vero  $AC$  ipsi  $DF$ ; et angulum  $BAC$  angulo  $EDF$  aequalem. dico, et basim  $BC$  basi  $EF$  aequalem esse, et triangulum  $ABC$  aequale triangulo  $DEF$ ; et reliquos angulos reliquis angulis aequales, alterum alteri, quibus aequalia latera subtenduntur; nempe angulum  $ABC$  angulo  $DEF$ , et angulum  $ACB$  angulo  $DFE$ .

Triangulo enim  $AEC$  applicato ipsi  $DEF$ , et puncto quidem  $A$  posito in  $D$ , recta vero linea  $AB$  in ipsa  $DE$ ;



congruet et punctum  $B$  puncto  $E$ , quod  $AB$  ipsi  $DE$  sit aequalis. congruente autem  $AB$  ipsi  $DE$ , congruet et  $AC$  recta linea rectae lineae  $DF$ , quia  $BAC$  angulus aequalis est angulo  $EDF$ . quare et punctum  $C$  congruet puncto  $F$ , quia recta  $AC$  est aequalis rectae lineae  $DF$ .

fed

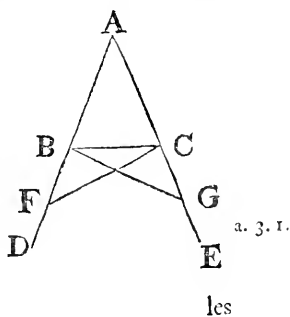
fed et punctum B congruebat puncto E; quare basis BC basi EF congruet. Nam si puncto quidem B congruente ipsi E, C vero ipsi F, basis BC basi EF non congruit; duae rectae lineae spatium comprehendent, quod fieri non potest<sup>1</sup>. Congruet igitur BC basi basi EF, et a. Ax. 10. ipsi aequalis erit. Quare et totum ABC triangulum congruet toti triangulo DEF, et ipsi erit aequale; et reliqui anguli reliquis angulis congruent, et ipsis aequales erunt. Videlicet angulus ABC angulo DEF, et angulus ACB angulo DFE. si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri; habeant autem et angulum angulo aequalem, qui aequalibus rectis lineis continetur: et basim basi aequalem habebunt; et triangulum triangulo aequale erit; et reliqui anguli reliquis angulis aequales, alter alteri, quibus aequalia latera subtenduntur. Quod erat demonstrandum.

PROP. V. THEOR.

**I**SOSCELIUM triangulorum qui ad basim sunt anguli inter se sunt aequales; et, productis aequalibus rectis lineis, anguli qui sunt sub basi inter se aequales erunt.

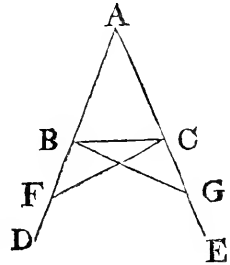
Sit isosceles triangulum ABC, habens latus AB lateri AC aequale, et producantur in directum ipsis AB, AC rectae lineae BD, CE. dico angulum quidem ABC angulo ACB, angulum vero CBD angulo BCE aequalem esse.

Sumatur enim in recta BD punctum quodvis F; atque a majore AE minori AF aequalis auferatur AG<sup>2</sup>, et jungantur FC, GB. quoniam igitur AF est aequalis AG, AB vero ipsi AC; duae FA, AC duabus GA, AB aequa-



## EUCLIDIS ELEMENTORUM

les sunt, altera alteri; et angulum FAG communem continent; b. 4. 1. fis igitur FC basi GB est aequalis<sup>b</sup>, et triangulum AFC aequale triangulo AGB; et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, alter alteri, quibus aequalia latera subtenduntur; videlicet angulus quidem ACF aequalis angulo ABG, angulus vero AFC angulo AGB. et quoniam tota AF toti AG est aequalis, quarum AB est aequalis ipsi AC; erit et reliqua BF reliquae CG aequalis<sup>c</sup>. ostensa est autem FC aequalis GB; duae igitur BF, FC duabus CG, GB aequales sunt, altera alteri, et angulus BFC aequalis angulo GCB; estque basis ipsorum BC communis; erit igitur et triangulum BFC aequale<sup>b</sup> triangulo GCB, et reliqui anguli reliquis angulis aequales, alter alteri, quibus aequalia latera subtenduntur. angulus igitur FBC est aequalis angulo GCB, et angulus BCF angulo CBG. itaque quoniam totus AEC angulus toti angulo ACF aequalis ostensus est, quorum angulus CBG est aequalis ipsi BCF; erit reliquus ABC reliquo ACB aequalis, et sunt ad basim trianguli ABC. ostensus autem est et FBC angulus aequalis angulo GCB, qui sunt sub basi. Isoscelium igitur triangulorum &c. Q. E. D.



COR. Hinc omne triangulum aequilaterum est quoque aequiangulum.

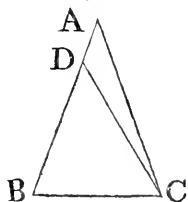
## PROP. VI. THEOR.

**S**I trianguli duo anguli inter se sint aequales, et aequales angulos subtendentia latera inter se aequalia erunt.

Sit triangulum ABC, habens angulum ABC angulo ACB aequalem; dico et AB latus lateri AC aequale esse.

Si

Si enim inaequalis est recta AB ipsi AC, altera ipsarum est major. fit major AB; atque a majori AB minori AC aequalis auferatur DB<sup>1</sup>, et DC jungatur. quoniam igitur DB est aequalis ipsi AC, communis autem BC, erunt duae DB, BC duabus AC, CB aequales, altera alteri, et angulus DBC angulo ACB est aequalis; basis igitur DC basi AB aequalis est, et triangulum DBC aequale<sup>b</sup> triangulo ACB, minus majore; quod est absurdum. non igitur inaequalis est AB ipsi AC; ergo aequalis erit. si igitur trianguli &c. Q. E. D.



a. 3. 1.

b. 4. 1.

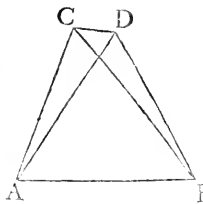
COR. Hinc omne triangulum aequiangulum est quoque aequilaterum.

PROP. VII. THEOR.

**SUPER** eadem basi, et ad eandem ejus partes, duo triangula non constituentur, quae habent et latera quae ad alterum basis terminum, et ea quae ad reliquum terminum ducta sunt, inter se aequalia.

Si enim fieri potest, super eadem basi AB, et ad eandem ejus partes constituentur duo triangula ACB, ADB quae habent et latera CA, DA inter se aequalia, et latera CB, DB.

Jungatur CD; vel igitur vertex neutrius trianguli est intra reliquum triangulum, vel vertex alterius est intra reliquum. Primo fit neutrius trianguli vertex intra reliquum; et quoniam AC est aequalis ipsi AD, erit et angulus ACD angulo ADC aequalis<sup>a</sup>. est autem angulus ACD major angulo BCD, major igitur est ADC angulus angulo BCD. quare angulus BDC angulo BCD



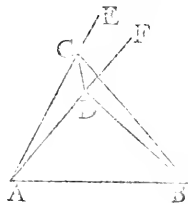
a. 5. 1.

multo

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

multo major erit. rursus quoniam CB est aequalis ipsi DB, et angulus BDC aequalis <sup>a</sup> erit angulo BCD; ostensus autem est ipso major; quod fieri non potest.

Sed sit alterutrius trianguli vertex, puta D, intra reliquum triangulum ACB; quoniam igitur AC est aequalis ipsi AD, erunt anguli ECD, FDC sub basi inter se aequales<sup>a</sup>; est autem angulus ECD major angulo BCD, quare FDC angulus major est angulo BCD; multo igitur angulus BDC major est angulo BCD. rursus quoniam CB aequalis est ipsi DB, erit angulus BDC aequalis angulo BCD<sup>a</sup>; ostensus autem est BDC angulus eodem BCD major. quod fieri non potest. casus autem in quo vertex unius trianguli cadit in latus alterutrum reliqui demonstratione non eget.



Non igitur super eadem basi, et ad eandem ejus partes constituentur duo triangula, quae habent et latera quae ad alterum basis terminum, et ea quae ad reliquum terminum ducta sunt, inter se aequalia. Q. E. D.

## PROP. VIII. THEOR.

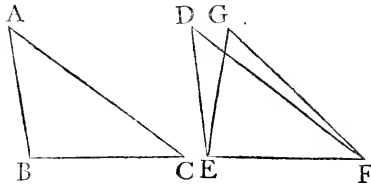
**S**I duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri, habeant autem et basim basi aequalem; angulum quoque, qui aequalibus lateribus continetur, angulo aequalem habebunt.

Sint duo triangula ABC, DEF quae duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF aequalia habeant, alterum alteri, AB quidem aequale DE, AC vero ipsi DF; habeant autem et basim BC basi EF aequalem. dico angulum quoque BAC angulo EDF aequalem esse.

Triangulo enim ABC applicato ipsi DEF triangulo, et puncto quidem



dem B posito in E, rectè vero lineà BC in EF; congruet et C punctum puncto F, quoniam BC ipsi EF est aequalis. itaque congruente BC ipsi EF, congruent et BA, AC ipsis ED, DF. si enim basis quidem BC basi EF congruit, latera autem BA, AC lateribus ED, DF non congruunt, sed situm mutant, ut EG, GF; constituentur super eadem basi, et ad eandem ejus partes, duo triangula, quae habent et latera quae ad alterum basis terminum, et ea quae ad reliquum ducta sunt, inter se aequalia. non constituuntur autem<sup>a. 7. 1.</sup> non igitur si basis BC congruit basi EF, non congruent et BA, AC latera lateribus ED, DF. congruent igitur. quare et angulus BAC angulo EDF congruet, et ipsi erit aequalis<sup>b.</sup> si igitur duo triangula &c. b. Ax. 8: Q. E. D.



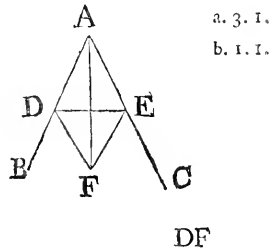
PROP. IX. PROB.

**D**ATUM angulum rectilineum bifariam fecare.

Sit datus angulus rectilincus BAC; itaque oportet ipsum bifariam fecare.

Sumatur in AB quodvis punctum D, et a recta linea AC ipsi AD aequalis auferatur<sup>a</sup> AE; junctaque DE constituitur super eà triangulum aequilaterum<sup>b</sup> DEF, et AF jungatur. dico angulum BAC a recta linea AF bifariam fecari.

Quoniam enim AD est aequalis ipsi AE, communis autem AF; duae DA, AF duabus EA, AF aequales sunt, altera alteri; et basis



## EUCLIDIS ELEMENTORUM

DF est aequalis basi EF; angulus igitur DAF angulo EAF est aequalis. *s. 8. 1. lis<sup>c</sup>.* quare datus angulus rectilincus BAC a recta linea AF bifariam sectus est. Q. E. F.

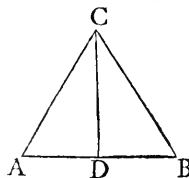
## PROP. X. PROB.

**D**ATAM rectam lineam terminatam bifariam fecare.

Sit data recta linea terminata AB; oportet ipsam AB bifariam fecare.

*a. 1. 1.* Constituitur super eâ triangulum aequilaterum <sup>a</sup> ABC, et secetur *b. 9. 1.* ACB angulus bifariam <sup>b</sup> rectâ linea CD. dico AB rectam lineam in puncto D bifariam secari.

Quoniam enim AC est aequalis CB, communis autem CD; duae AC, CD duabus BC, CD aequales sunt, altera alteri; et angulus ACD est aequalis angulo BCD; basis igitur AD basi DB



*c. 4. 1.* est aequalis <sup>c</sup>. recta igitur linea terminata AB bifariam secta est in puncto D. Q. E. F.

## PROP. XI. PROB.

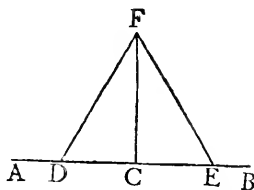
**D**ATAE rectae lineae, a puncto in ipsa dato, ad rectos angulos rectam lineam ducere.

Sit data recta linea AB, et datum in ipsa punctum C; oportet a puncto C ipsi AB ad rectos angulos rectam lineam ducere.

*a. 3. 1.* Sumatur in AC punctum quodvis D, ipsique CD aequalis ponatur <sup>a</sup> *b. 1. 1.* CE, et super DE constituitur triangulum aequilaterum <sup>b</sup> DFE, et FC jungatur. dico datae rectae lineae AB a puncto C in ipsa dato, ad rectos angulos ductam esse FC.

Quoniam

Quoniam enim DC est aequalis CE, et FC communis; duae DC. CF duabus EC, CF sunt aequales, altera alteri; et basis DF est aequalis basi FE; angulus igitur DCF angulo ECF est aequalis<sup>c</sup>, et sunt deinceps. Quando autem recta linea super recta lineam insitens, eos qui deinceps sunt angulos aequales inter se fecerit, rectus<sup>d</sup> est uterque aequalium angulorum; ergo uterque ipsorum DCF, FCE est rectus. Datae igitur rectae lineae AB, a puncto in ipsa dato C, ad rectos angulos ducta est recta linea FC. Q. E. F.

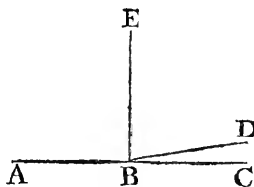


c. 8. 1.

d. 10. Def. 1.

COR. Hinc ostendi potest duas rectas lineas non habere segmentum commune.

Non enim, sed si fieri potest, habeant duae rectae lineae ABC, ABD segmentum commune AB. a puncto B ducatur BE ad rectos angulos ipsi AB; quoniam igitur recta linea est ABC, erit<sup>d</sup> angulus CBE aequalis angulo EBA; similiter quoniam recta linea est ABD, erit angulus DBE angulo EBA aequalis. est igitur angulus DBE ipsi CBE angulo aequalis, minor majori, quod fieri non potest. igitur duae rectae lineae non possunt habere segmentum commune.



PROP. XII. PROB.

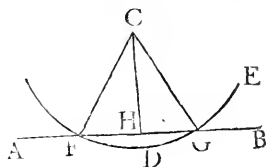
**S**UPER datam rectam lineam infinitam, a dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

Sit data quidem recta linea AB, datum vero punctum C, quod in ea non est. oportet super datam rectam lineam infinitam AB, a dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sumatur enim ad alteras partes ipsius AB rectae lineae, punctum quodvis D, et centro quidem C, intervallo autem CD circulus describitur<sup>a</sup> EGF, quae rectae AB in F, G, occurrat; et FG in H bifariam

b. 10. 1. secetur<sup>b</sup>, junganturque CF, CH, CG. dico super datam rectam lineam infinitam AB, a dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularem CH ductam esse.



Quoniam enim aequalis est FH ipsi HG, communis autem HC, duae FH, HC, duabus GH, HC sunt aequales, altera alteri; et basis CF est aequalis basi CG<sup>c</sup>; angulus igitur CHF angulo CHG est aequalis<sup>d</sup>, et sunt deinceps sunt angulos, aequales inter se fecerit, rectus est uterque aequalium angulorum; et quae insidit recta linea perpendicularis appellatur ad eam cui insidit. super datam igitur rectam lineam infinitam AB a dato puncto C, quod in ea non est, perpendicularis ducta est CH. Q. E. F.

c. Def. 15.  
d. 8. 1.

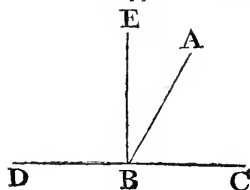
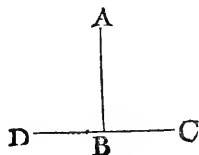
## PROP. XIII. THEOR.

**CUM** recta linea super rectam insidens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis aequales efficiet.

Recta enim linea quaedam AB super rectam CD insidens, angulos faciat CBA, ABD. dico CBA, ABD angulos vel duos rectos esse, vel duobus rectis aequales.

e. Def. 10. Si enim angulus CBA est aequalis ipsi ABD, duo recti sunt<sup>a</sup>. si minus,

minus, ducatur a puncto B ipsi CD ad rectos angulos<sup>b</sup> BE. anguli igitur CBE, EBD sunt duo recti<sup>a</sup>. et quoniam CBE duobus CBA, ABE<sup>a</sup>. Def. 10. est aequalis, communis apponatur EBD; ergo anguli CBE, EBD tribus angulis CBA, ABE, EBD sunt aequales<sup>c</sup>. rursus quoniam DBA angulus est aequalis duobus DBE, EBA, communis apponatur ABC; an-



guli igitur DBA, ABC tribus DBE, EBA, ABC aequales sunt. ostendi autem sunt anguli CBE, EBD iisdem tribus aequales; quae vero eidem sunt aequalia, et inter se aequalia sunt<sup>d</sup>; igitur et anguli CBE, EBD ipsi DBA, ABC sunt aequales. sed CBE, EBD sunt duo recti; igitur DBA, ABC duobus rectis aequales sunt. ergo cum recta linea &c. Q. E. D.

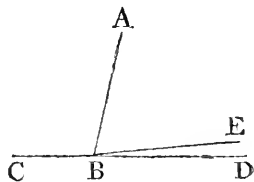
## PROP. XIV. THEOR.

**S**I ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea duae rectae lineae non ad eandem partes positae angulos, qui deinceps sunt, duobus rectis aequales fecerint; ipsae rectae lineae in directum sibi invicem erunt.

Ad aliquam rectam lineam AB, atque ad punctum in ea B, duae rectae lineae BC, BD non ad eandem partes positae angulos, qui deinceps sunt, ABC, ABD duobus rectis aequales faciant. dico BD ipsi CB in directum esse.

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

- Si enim BD non est in directum ipsi CB, fit ipsi CB in directum BE. Quoniam igitur recta linea AB super recta CBE insistit, anguli
- a. 13. 1. ABC, ABE duobus rectis sunt aequales<sup>a</sup>. sunt autem et anguli ABC, ABD aequales duobus rectis. anguli igitur CBA, ABE ipsis CBA, ABD aequales erunt. communis auferatur ABC; reliquus igitur ABE
- b. 3. Ax. reliquo ABD est aequalis<sup>b</sup>, minor majori, quod fieri non potest. non igitur BE est in directum ipsi BC. similiter ostendemus neque aliam quampiam esse praeter BD. in directum igitur est CB ipsi BD. si igitur ad aliquam rectam lineam &c. Q. E. D.



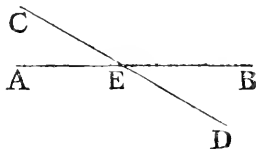
## PROP. XV. THEOR.

**S**I duae rectae lineae se invicem secuerint, angulos qui ad verticem sunt, inter se aequales efficiunt.

Duae enim rectae lineae AB, CD se invicem fecerint in puncto E. dico angulum quidem AEC angulo DEB, angulum vero CEB angulo AED aequalem esse.

Quoniam enim recta linea AE super recta CD insistens angulos facit CEA, AED; erunt CEA, AED duobus rectis

- a. 13. 1. aequales<sup>a</sup>. rursus quoniam recta linea DE super recta AB insistens facit angulos AED, DEB, erunt AED, DEB anguli aequales duobus rectis<sup>a</sup>. ostensi autem sunt anguli quoque CEA, AED duobus rectis aequales; anguli igitur CEA, AED angulis AED, DEB aequales sunt. communis auferatur AED; reliquus igitur CEA reliquo



reliquo BED est aequalis. simili ratione ostendetur et angulos CEB, AED aequales esse. si igitur duae rectae lineae &c. Q. E. D.

COR. 1. Ex hoc manifeste constat duas rectas lineas se invicem secantes, facere angulos ad sectionem quatuor rectis aequales.

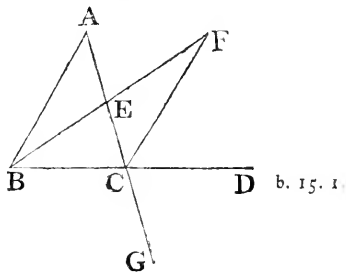
COR. 2. Et propterea, omnes anguli circa unum punctum constituti conficiunt angulos quatuor rectis aequales.

PROP. XVI. THEOR.

**O**MNIS trianguli, uno latere producto, exterior angulus utrovis interiore et opposito est major.

Sit triangulum ABC, et unum ipsius latus BC ad D producatur. dico exteriorem angulum ACD utrovis interiore et opposito, videlicet CBA, BAC majorem esse.

Secetur AC bifariam in E, et juncta BE producatur ad F, ponaturque ipsi BE aequalis EF; jungatur etiam FC, et AC ad G producatur.



Quoniam igitur AE quidem est aequalis EC, BE vero ipsi EF, duae AE, EB duabus CE, EF aequales sunt, altera alteri; et angulus AEB, angulo CEF est aequalis<sup>b</sup>, ad verticem enim sunt. Basis igitur AB aequalis est basi CF, et AEB triangulum triangulo CEF, et reliqui anguli reliquis angulis aequalis<sup>c</sup>, alter alteri, quibus aequalia latera subtenduntur. angulus igitur c. 4. 1. BAE est aequalis angulo ECF. major autem est angulus ECD ipso ECF; quare major est angulus ACD angulo BAE. similiter recta lineâ

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

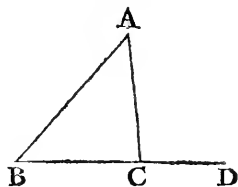
neâ BC bifariam sectâ, ostendetur etiam BCG angulus, hoc est ACD  
 d. 15. 1. angulus <sup>d</sup> angulo ABC major. Omnis igitur trianguli &c. Q. E. D.

## PROP. XVII. THEOR.

**O**MNIS trianguli duo anguli duobus rectis minores sunt, quomodocunque sumpti.

Sit triangulum ABC; dico ipsius ABC trianguli duos angulos quomodocunque sumptos duobus rectis minores esse.

Producatur enim BC ad D; et quoniam trianguli ABC exterior angulus est ACD, erit ACD major interiore et opposito  
 a. 16. 1. fito ABC<sup>a</sup>; communis apponatur ACB; anguli igitur ACD, ACB angulis ABC, ACB  
 b. 13. 1. majores sunt. sed ACD, ACB sunt aequales duobus rectis<sup>b</sup>; anguli igitur ABC, BCA duobus rectis sunt minores. similiter ostendemus angulos quoque BAC, ACB, itemque CAB, ABC duobus rectis minores esse. Omnis igitur trianguli &c. Q. E. D.

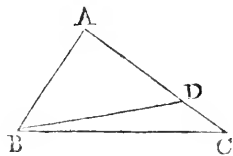


## PROP. XVIII. THEOR.

**O**MNIS trianguli majus latus majorem angulum subtendit.

Sit triangulum ABC habens latus AC latere AB majus; dico et ABC angulum angulo BCA majorem esse.

Quoniam enim AC major est quam AB,  
 a. 3. 1. ponatur ipsi AB aequalis AD<sup>1</sup>, et BD



jungatur.



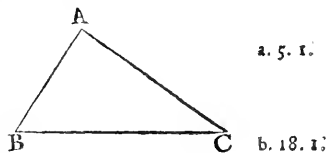
jungatur. et quoniam trianguli BDC exterior angulus est ADB, erit ADB major interiore et opposito DCB<sup>b</sup>. aequalis autem est ADB ipfi<sup>b</sup>. 16. 1. ABD, quod et latus AB lateri AD fit aequale<sup>c</sup>; major igitur est et c. 5. 1. ABD angulus angulo ACB; quare ABC ipfo ACB multo major erit. Omnis igitur trianguli &c. Q. E. D.

## PROP. XIX. THEOR.

**O**MNIS trianguli major angulus a majore latere subtenditur.

Sit triangulum ABC habens ABC angulum majorem angulo BCA. dico et latus AC latere AB majus esse.

Si enim non est majus, vel AC est aequale ipfi AB, vel ipfo minus. aequale autem non est, nam et angulus ABC angulo ACB aequalis esset<sup>a</sup>; non est autem; non igitur AC ipfi AB est aequale. sed neque minus est latus AC ipfo AB; esset enim et angulus ABC angulo ACB minor<sup>b</sup>; atqui non est; non igitur AC latus minus est ipfo AB. ostensum autem est neque aequale esse; est igitur AC ipfo AB majus. Omnis igitur trianguli &c. Q. E. D.



## PROP. XX. THEOR.

**O**MNIS trianguli duo latera reliquo majora sunt, quomodocunque sumpta.

Sit enim triangulum ABC; dico ipsius ABC trianguli duo latera reliquo majora esse, quomodocunque sumpta; videlicet latera quidem BA, AC

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

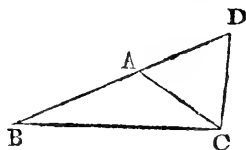
AC majora latere BC; latera vero AB, BC majora latere AC; et latera BC, CA majora ipso AB.

Productur enim BA ad punctum D, ponaturque ipsi CA aequalis  
a. 3. 1. AD<sup>a</sup>, et DC jungatur.

Quoniam igitur DA est aequalis AC, erit et angulus ADC angulo  
b. 5. 1. ACD aequalis<sup>b</sup>. sed BCD angulus major

est angulo ACD; angulus igitur BCD angulo ADC est major. et quoniam triangulum est DCB habens BCD angulum majorem angulo BDC, majorem autem angulum majus latus subtendit<sup>c</sup>, erit latus DB latere BC majus. est autem DB aequale ipsis BA, AC; majora igitur sunt latera BA, AC ipso BC. similiter ostendemus, et latera quidem AB, BC majora esse latere CA; latera vero BC, CA ipso AB majora.

2. 19. 1. Omnis igitur trianguli &c. Q. E. D.



latus DB latere BC majus. est autem DB aequale ipsis BA, AC; majora igitur sunt latera BA, AC ipso BC. similiter ostendemus, et latera quidem AB, BC majora esse latere CA; latera vero BC, CA ipso AB majora. Omnis igitur trianguli &c. Q. E. D.

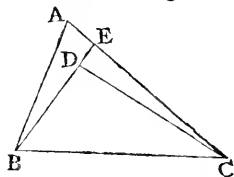
## PROP. XXI. THEOR.

**S**I a terminis unius lateris trianguli duae rectae lineae intra constituentur, haec reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem vero angulum continebunt.

Trianguli enim ABC in uno latere BC a terminis B, C duae rectae lineae intra constituentur BD, DC. dico BD, DC reliquis duobus trianguli lateribus BA, AC minores quidem esse, continere vero angulum BDC majorem angulo BAC.

Productur enim BD ad E; et quoniam omnis trianguli duo latera  
a. 25. 1. reliquo sunt majora<sup>a</sup>, erunt trianguli ABE duo latera BA, AE, majora latere BE. communis apponatur EC; sunt igitur latera BA, AC  
ipfis

ipsis BE, EC majora<sup>b</sup>. rursus quoniam CED trianguli duo latera CE, ED sunt majora latere CD, communis apponatur DB; sunt igitur CE, EB majora ipsis CD, DB<sup>b</sup>. sed ostensum est BA, AC majora esse BE, EC; multo igitur BA, AC, ipsis BD, DC majora sunt.



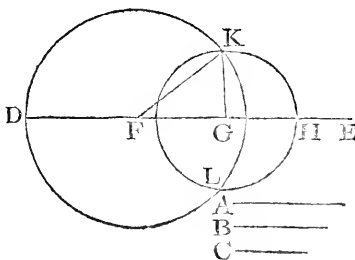
Rursus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore et opposito est major<sup>c</sup>, erit trianguli CDE exterior angulus BDC major ipso CED. ead. r. 16. 1. eadem ratione et trianguli ABE exterior angulus CEB ipso BAC est major. sed angulus BDC ostensus est major angulo CEB; multo igitur BDC angulus angulo BAC major erit. si igitur a terminis unius lateris &c. Q. E. D.

PROP. XXII. PROB.

**E**X tribus rectis lineis, quae tribus rectis lineis datis aequales sunt, triangulum constituere. oportet autem duas reliqua majores esse, quomodocunque sumptas<sup>a</sup>. a. 20. 1.

Sint tres datae rectae lineae A, B, C, quarum duae reliqua majores sunt, quomodocunque sumptae, ut scilicet A, B, quidem sint majores quam C; A, C, vero majores quam B; et praeterea B, C majores quam A. itaque oportet ex rectis lineis aequalibus ipsis A, B, C, triangulum constituere.

Exponatur aliqua recta



D

linea

linea DE, terminata quidem ad D, infinita vero ad E; et ponatur ipsi

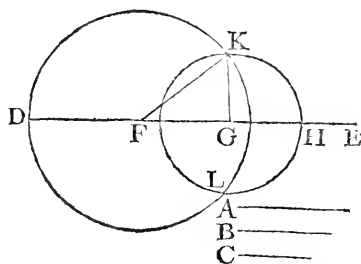
a. 3. 1. quidem A aequalis <sup>a</sup> DF, ipsi vero B aequalis FG, et ipsi C aequalis

b. Post. 3. GH; et centro F, intervallo autem FD circulus describatur <sup>b</sup> DKL.

rursusque centro G et intervallo GH alius circulus KLH describatur, et jungantur KF, KG. dico ex tribus rectis lineis aequalibus ipsis A, B, C, triangulum KFG constitutum esse.

Quoniam enim punctum F centrum est DKL circuli,

e. Def. 15. erit FD aequalis FK <sup>c</sup>; sed FD est aequalis rectae lineae A; est igitur FK aequalis ipsi A. rursus quoniam punctum G centrum est circuli LKH, erit GH aequalis GK <sup>c</sup>; sed GH est aequalis ipsi C; igitur et GK ipsi C aequalis erit. est autem et FG aequalis B; tres igitur rectae lineae KF, FG, GK tribus A, B, C aequales sunt. ex tribus igitur rectis lineis KF, FG, GK quae sunt aequales tribus datis rectis lineis A, B, C, triangulum constitutum est KFG. Q. E. F.



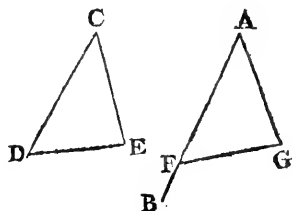
PROP. XXIII. PROB.

**A**D datam rectam lineam, et ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo aequalem angulum rectilineum constituere.

Sit data quidem recta linea AB, datum vero in ipsa punctum A, et datus angulus rectilineus DCE; oportet ad datam rectam lineam AB, et ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo DCE aequalem angulum rectilineum constituere.

Sumantur

Sumantur in utraque ipsarum CD, CE quaevis puncta D, E, jun-  
gaturque DE; et ex tribus rectis li-  
neis, quae aequales sint tribus CD,  
DE, EC triangulum constituatur<sup>a</sup>  
AFG, ita ut CD sit aequalis AF,  
et CE ipsi AG, et DE ipsi FG.  
Quoniam igitur duae DC, CE dua-  
bus FA, AG aequales sunt, altera  
alteri, et basis DE est aequalis basi



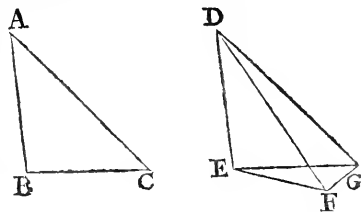
8. 22. 1.

FG; angulus DCE aequalis erit angulo FAG<sup>b</sup>. Ad datam igitur b. 8. r.  
rectam lineam AB, et ad datum in ea punctum A, dato angulo recti-  
lineo DCE aequalis angulus retilineus constitutus est FAG. Q. E. F.

PROP. XXIV. THEOR.

**S**I duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia  
habeant, alterum alteri, angulum autem angulo ma-  
jorem, qui aequalibus rectis lineis continetur; et basim  
basi majorem habebunt.

Sint duo triangula ABC, DEF, quae duo latera AB, AC duobus  
lateribus DE, DF aequalia habe-  
ant, alterum alteri, videlicet latus  
quidem AB aequale lateri DE,  
latus vero AC aequale DF; at  
angulus BAC angulo EDF fit  
major. dico, basim BC basi EF  
majorem esse.



Rectarum enim DE, DF sit DE ea quae non major est altera  
DF, et constituatur ad rectam lineam DE, et ad punctum in ea D,

- a. 23. 1. angulo BAC aequalis angulus EDG<sup>a</sup>; ponaturque alterutri ipsarum  
 b. 3. 1. AC, DF aequalis DG<sup>b</sup>, et EG, GF jungantur.

Itaque quoniam AB quidem est aequalis DE, AC vero ipsi DG, duae BA, AC duabus ED, DG aequales sunt, altera alteri; et angulus BAC est aequalis angulo EDG;

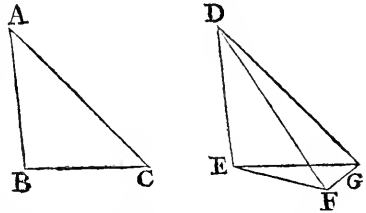
basis igitur BC basi EG est ae-

- c. 4. 1. qualis<sup>c</sup>. rursus quoniam aequalis est DG ipsi DF, est angulus DFG

- d. 5. 1. angulo DGF aequalis<sup>d</sup>; major autem est angulus DGF angulo EGF, crit itaque DFG angulus

angulo EGF major; multo igitur major est EFG angulus ipso EGF. et quoniam triangulum est EFG angulum EFG majorem habens an-

- e. 19. 1. gulo EGF, majori autem angulo latus majus subtenditur<sup>e</sup>; crit latus EG latere EF majus. sed EG latus est aequale lateri BC; ergo et BC ipso EF majus crit. si igitur duo triangula &c. Q. E. D.



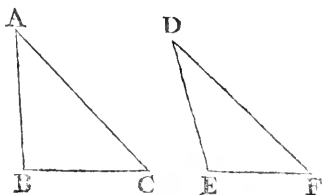
PROP. XXV. THEOR.

**S**I duo triangula duo latera duobus lateribus aequalia habeant, alterum alteri, basim vero basi majorem; et angulum angulo, qui aequalibus lateribus continetur, majorem habebunt.

Sint duo triangula ABC, DEF, quae duo latera AB, AC duobus lateribus DE, DF aequalia habeant, alterum alteri, videlicet latus AB aequale lateri DE, et latus AC lateri DF; basis autem BC basi EF fit major. dico, et angulum BAC angulo EDF majorem esse.

Si enim non est major, vel aequalis est vel minor. aequalis autem non est angulus BAC angulo EDF, esset enim et basis BC basi EF aequalis<sup>1</sup>.

aequalis<sup>a</sup>. Non est autem; non igitur aequalis est BAC angulus an- a. 4. 1.  
gulo EDF. sed neque minor; mi-  
nor enim esset et basis BC basi EF<sup>b</sup>.  
atqui non est; non igitur angulus  
BAC angulo EDF est minor. osten-  
sum autem est neque aequalem esse;  
angulus igitur BAC angulo EDF  
major erit. si igitur duo trian-  
gula &c. Q. E. D.

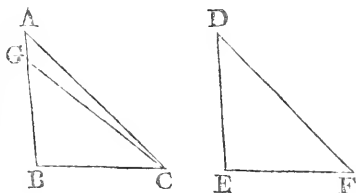


b. 24. 1.

## PROP. XXVI. THEOR.

**S**I duo triangula duos angulos duobus angulis aequales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri aequale, vel quod aequalibus adjacet angulis, vel quod uni aequalium angulorum subtenditur; et reliqua latera reliquis lateribus aequalia, alterum alteri, et reliquum angulum reliquo angulo aequalem habebunt.

Sint duo triangula ABC, DEF, quae duos angulos ABC, BCA duobus angulis DEF, EFD aequales habeant, alterum alteri, videlicet angulum quidem ABC aequalem angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD; habeant autem et unum latus uni lateri aequale; et primo, quod aequalibus adjacet angulis, nempe latus BC lateri EF. dico et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habere, alterum alteri, latus scilicet AB lateri DE, et la-

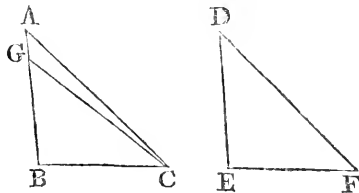


tus

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

tus AC lateri DF; et reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF  
aequalem.

Si enim inaequalis est recta linea AB ipsi DE, una ipsarum major  
est. sit major AB, ponaturque BG aequalis DE, et GC jungatur.  
Quoniam igitur BG quidem est aequalis DE, BC vero ipsi EF, duae  
GB, BC duabus DE, EF aequales sunt, altera alteri; et angulus GBC  
est aequalis angulo DEF: basis  
a. 4. 1. igitur GC basi DF est aequalis<sup>a</sup>,  
et GBC triangulum triangulo  
DEF, et reliqui anguli reliquis  
angulis aequales, alter alteri, qui-  
bus aequalia latera subtenduntur;  
ergo GCB angulus est aequalis an-  
gulo DFE; sed angulus DFE angulo BCA aequalis ponitur; quare et  
BCG angulus angulo BCA est aequalis, minor majori, quod fieri non  
potest. non igitur inaequalis est AB ipsi DE; ergo aequalis erit. est  
autem et BC aequalis EF; itaque duae AB, BC duabus DE, EF aequa-  
les sunt, altera alteri, et angulus ABC aequalis est angulo DEF; basis igi-  
tur AC basi DF, et reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est  
aequalis<sup>a</sup>.



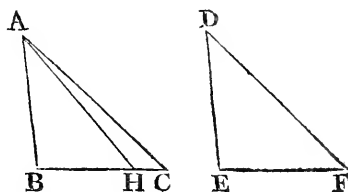
Sed rursus sint latera quae aequalibus angulis subtenduntur aequa-  
lia, ut AB ipsi DE; dico rursus, et reliqua latera reliquis lateribus ae-  
qualia esse, AC quidem ipsi DF, BC vero ipsi EF; et adhuc reliquum  
angulum BAC reliquo angulo EDF aequalem.

Si enim inaequalis est recta linea BC ipsi EF, una ipsarum major  
est. sit major BC, si fieri potest, ponaturque BH aequalis EF, et AH  
jungatur. Quoniam igitur BH quidem est aequalis EF, AB vero ipsi  
DE; duae AB, BH duabus DE, EF aequales sunt, altera alteri; et  
aequales angulos continent; ergo basis AH basi DF est aequalis, et ABH  
triangulum



triangulum triangulo DEF, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, alter alteri, quibus aequalia latera subtenduntur. aequalis igitur est angulus BHA angulo EFD. sed EFD est aequalis angulo BCA<sup>b</sup>; b. ex hyp: ergo et BHA angulus angulo BCA est aequalis, trianguli scilicet AHC

exterior angulus BHA aequalis interiori et opposito BCA, quod fieri non potest<sup>c</sup>. quare non inaequalis est BC ipsi EF; aequalis igitur; est autem et AB aequalis DE; duae igitur AB, BC duabus DE, EF aequales sunt, al-



c. 16. 1.

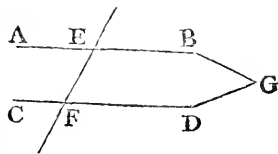
tera alteri; angulosque aequales continent; quare basis AC aequalis est basi DF, et reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF est aequalis. si igitur duo triangula &c. Q. E. D.

## PROP. XXVII. THEOR.

**S**I in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter se aequales fecerit, parallelae erunt rectae lineae.

In duas enim rectas lineas AB, CD recta linea EF incidens alternos angulos AEF, EFD aequales inter se faciat; dico rectam lineam AB ipsi CD parallelam esse.

Si enim non est parallela, productae AB, CD, vel ad partes BD convenient, vel ad partes AC. producantur, convenientque ad partes BD in puncto G; itaque GEF trianguli exterior angulus AEF major est interiore et opposito EFG<sup>a</sup>; sed et aequalis, a. 16. 1. quod



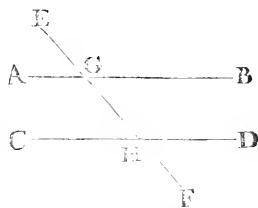
- quod fieri non potest. non igitur AB, CD productæ ad partes BD convenient. similiter demonstrabitur neque convenire ad partes AC. quæ  
 3. Def. 35. vero ad neutras partes conveniunt, parallelæ inter se sunt<sup>b</sup>. parallelæ igitur est AB ipsi CD. quare si in duas rectas lineas &c. Q. E. D.

## PROP. XXVIII. THEOR.

**S**I in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, et opposito, et ad easdem partes æqualem fecerit; vel interiores et ad easdem partes duobus rectis æquales: parallelæ erunt inter se rectæ lineæ.

In duas enim rectas lineas AB, CD recta linea EF incidens exteriorem angulum EGB interiori et opposito ad easdem partes GHD æqualem faciat; vel interiores et ad easdem partes BGH, GHD duobus rectis æquales. dico rectam lineam AB rectæ CD parallelam esse.

- Quoniam enim EGB angulus æqualis est angulo GHD, angulus  
 a. 15. 1. autem EGB angulo AGH<sup>a</sup>, erit et angulus AGH angulo GHD æ-  
 b. 27. 1. qualis; et sunt alterni; parallelæ<sup>b</sup> igitur est  
 AB ipsi CD. rursus quoniam anguli BGH,  
 c. ex hyp. GHD duobus rectis sunt æquales<sup>c</sup>, et sunt  
 d. 13. 1. AGH, BGH æquales duobus rectis<sup>d</sup>; erunt  
 anguli AGH, BGH æquales duobus rectis<sup>d</sup>; erunt  
 anguli AGH, BGH æquales duobus rectis<sup>d</sup>; erunt  
 æquales. communis auferatur BGH; reli-  
 quus igitur AGH est æqualis reliquo GHD;  
 et sunt alterni; ergo AB ipsi CD parallelæ crit. si igitur in duas rectas  
 lineas &c. Q. E. D.



## PROP. XXIX.

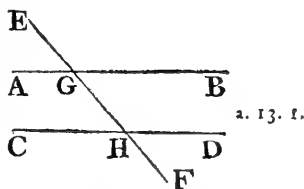
## PROP. XXIX. THEOR.

**I**n parallelas rectas lineas recta linea incidens, et alter-  
nos angulos inter se aequales; et exteriorem interiori  
et opposito et ad eandem partes aequalem; et interiores  
et ad eandem partes, duobus rectis aequales efficiet.

Vid. Notas  
ad hanc Prop.

In parallelas enim rectas lineas AB, CD recta linea incidat EF. dico alternos angulos AGH, GHD inter se aequales efficere; et exteriorem EGB interiori et opposito et ad eandem partes GHD aequalem; et interiores et ad eandem partes BGH, GHD duobus rectis aequales.

Si enim inaequalis est AGH ipsi GHD, unus ipsorum major est; sit major AGH. et quoniam AGH angulus major est angulo GHD, communis apponatur BGH; anguli igitur AGH, BGH angulis BGH, GHD majores sunt. sed anguli AGH, BGH sunt aequales duobus rectis<sup>a</sup>; ergo BGH, GHD anguli sunt duobus rectis minores. quae vero cum aliqua recta angulos interiores et ad eandem partes minores duobus



a. 13. 1.

rectis efficiunt, in infinitum productae inter se conveniunt<sup>\*</sup>; ergo rectae lineae AB, CD in infinitum productae inter se conveniunt. atqui non conveniunt, cum parallelae ponantur. non igitur inaequalis est angulus AGH angulo GHD; est igitur aequalis. angulus autem AGH aequalis est angulo EGB<sup>b</sup>; ergo et EGB ipsi GHD aequalis erit. communis

\* Ax. 12. Vid.  
Notas ad hanc  
Prop.

apponatur BGH; anguli igitur EGB, BGH sunt aequales angulis BGH, GHD; sed EGB, BGH aequales<sup>a</sup> sunt duobus rectis; ergo et BGH, GHD duobus rectis aequales erunt. in parallelas igitur rectas lineas &c. Q. E. D.

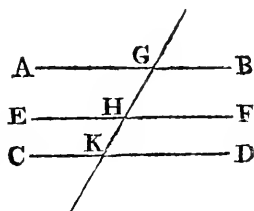
b. 15. 1.

## PROP. XXX. THEOR.

**Q**UAE eidem rectae lineae sunt parallelae, et inter se sunt parallelae.

Sit utraque ipsarum AB, CD ipsi EF parallelae; dico et AB ipsi CD parallelam esse.

- Incidat enim in ipsas recta linea GHK; et quoniam in parallelas rectas lineas AB, EF, recta linea GK incidit, angulus AGH angulo GHF est aequalis<sup>a</sup>. rursus quoniam in parallelas rectas lineas EF, CD recta linea incidit GK, aequalis est GHF angulo GKD<sup>a</sup>. ostensus autem est et angulus AGK angulo GHF aequalis; ergo et AGK ipsi GKD aequalis crit. et sunt alterni; parallela igitur est AB ipsi CD<sup>b</sup>. Ergo quae eidem rectae lineae &c. Q. E. D.

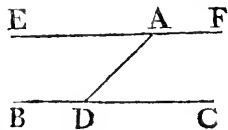


## PROP. XXXI. PROB.

**P**ER datum punctum, datae rectae lineae parallelam rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum A, data vero recta linea BC; oportet per A punctum ipsi BC rectae lineae parallelam rectam lineam ducere.

- Sumatur in BC quodvis punctum D, et jungatur AD; constituaturque ad rectam lineam DA, et ad punctum in ipsa A, angulo ADC aequalis<sup>a</sup> DAE; et in directum ipsi EA recta linea AF producat. Quoniam



Quoniam igitur in duas rectas lineas BC, EF recta linea AD incidens alternos angulos EAD, ADC inter se aequales efficit, EF ipsi BC parallela crit<sup>b</sup>. Per datum igitur punctum A datae rectae lineae BC <sup>b. 27. 1.</sup> parallela ducta est recta linea EAF. Q. E. F.

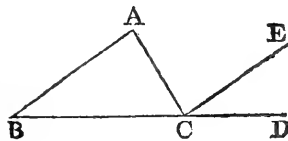
## PROP. XXXII. THEOR.

**O**MNIS trianguli, uno latere producto, exterior angulus duobus interioribus et oppositis est aequalis; et trianguli tres interiores anguli duobus rectis aequales sunt.

Sit triangulum ABC; et unum ipsius latus BC in D producatur. dico angulum exteriorem ACD duobus interioribus et oppositis CAB, ABC aequalem esse; et trianguli tres interiores angulos ABC, BCA, CAB duobus rectis esse aequales.

Ducatur enim per punctum C ipsi AB rectae lineae parallela <sup>a</sup> CE. <sup>a. 31. 1.</sup> et quoniam AB ipsi CE parallela est, et in ipsas incidit AC, alterni anguli BAC, ACE inter se aequales sunt<sup>b</sup>. b. 29. 1.

rurfus quoniam AB parallela est CE, et in ipsas incidit recta linea BD, exterior angulus ECD interiori et opposito ABC est aequalis<sup>b</sup>. ostensus autem est angulus ACE aequalis angulo BAC; quare totus

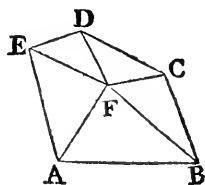


ACD exterior angulus aequalis est duobus interioribus et oppositis CAB, ABC. communis apponatur ACB; anguli igitur ACD, ACB tribus CBA, BAC, ACB aequales sunt. sed anguli ACD, ACB sunt aequales duobus rectis<sup>c</sup>; ergo et CBA, BAC, ACB duobus rectis sunt<sup>c. 13. 1.</sup> aequales. Omnis igitur trianguli uno latere producto &c. Q. E. D.

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

COR. 1. Omnes simul anguli interiores cujuscunque figurae rectilineae, una cum quatuor rectis angulis, conficiunt bis tot rectos quot sunt latera figurae.

Nam figura quacvis rectilinea ABCDE dividi potest in tot triangula quot sunt ejus latera, ducendo scilicet rectas a puncto F intra figuram ad omnes ejus angulos. triangulorum autem omnes anguli, per prae-

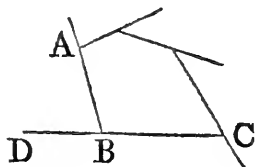


cedentem, simul aequales sunt bis tot rectis quot sunt triangula, hoc est quot sunt latera figurae. omnes autem iidem anguli aequales sunt angulis figurae, una cum angulis ad F verticem communem triangulorum, hoc est una cum quatuor rectis<sup>a</sup>. ergo omnes anguli figurae una cum quatuor rectis aequales sunt bis tot rectis quot sunt latera.

a. 2. Cor. 15. 1.

COR. 2. Omnes simul anguli exteriores cujuscunque figurae rectilineae aequales sunt quatuor rectis.

Angulus enim interior ABC simul cum exteriore adjacente ABD, aequalis<sup>b</sup> est duobus rectis; ergo omnes interiores simul cum exterioribus aequales sunt bis tot rectis quot sunt latera figurae, hoc est, per Corollarium praecedens, omnibus interioribus angulis figurae una cum quatuor rectis. Ergo exteriores aequales sunt quatuor rectis.



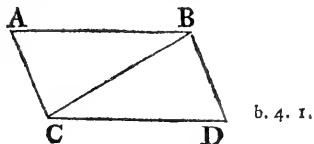
## PROP. XXXIII. THEOR.

**Q**UAE aequales et parallelas ad easdem partes conjungunt rectae lineae, et ipsae aequales et parallelae sunt.

Sint

Sint aequales et parallelae AB, CD, et ipsas jungant ad eandem partes rectae lineae AC, BD; dico AC, BD aequales, et parallelas esse.

Jungatur enim BC; et quoniam AB parallela est CD, in ipsasque incidit BC, alterni anguli ABC, BCD aequales sunt<sup>a</sup>. et quoniam AB<sup>a</sup>. 29. 1. est aequalis CD, communis autem BC, duae AB, BC duabus DC, CB sunt aequales; et angulus ABC aequalis est angulo BCD; basis igitur AC basi BD est aequalis<sup>b</sup>, triangulumque ABC triangulo BCD, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt<sup>b</sup>, alter alteri, quibus aequalia latera subtenduntur. ergo angulus ACB angulo CBD est aequalis. et quoniam in duas rectas lineas AC, BD recta linea BC incidens, alternos angulos ACB, CBD aequales inter se efficit, parallela est AC ipsi BD<sup>c</sup>. ostensa autem est et eidem aequalis. Quae igitur aequales et <sup>c</sup>. 27. 2. parallelas &c. Q. E. D.

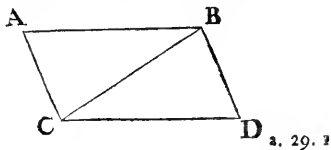


## PROP. XXXIV. THEOR.

**P**ARALLELOGRAMMORUM spatiorum latera quae ex opposito, et anguli, inter se aequalia sunt; et diameter ea bifariam fecat.

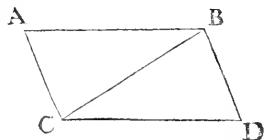
Sit parallelogrammum ABDC, cujus diameter BC. dico ABCD parallelogrammi latera quae ex opposito et angulos, inter se aequalia esse; et diametrum BC ipsum bifariam fecare.

Quoniam enim parallela est AB ipsi CD, et in ipsas incidit recta linea BC, anguli alterni ABC, BCD inter se aequales sunt<sup>a</sup>. rursus quoniam AC ipsi BD parallela est, et in ipsas incidit BC, alterni



anguli

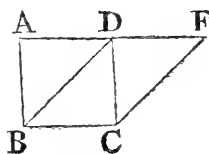
- a. 29. 1. anguli ACB, CBD aequales sunt inter se<sup>a</sup>. duo igitur triangula sunt ABC, CBD, quae duos angulos ABC, BCA duobus angulis BCD, CBD aequales habent, alterum alteri, et unum latus uni lateri aequale quod est ad aequales angulos, commune utrique BC; erga et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt, alterum alteri, et reliquum angu-
- b. 26. 1. lum reliquo angulo aequalem<sup>b</sup>; aequale igitur est latus quidem AB lateri CD, latus vero AC ipsi BD, et angulus BAC angulo BDC aequalis. et quoniam angulus ABC est aequalis angulo BCD, et angulus CBD angulo ACB; erit totus angulus ABD aequalis toti ACD. ostensus autem est et angulus BAC angulo BDC aequalis; parallelogrammorum igitur spatiorum latera, quae ex opposito, et anguli inter se aequalia sunt. dico etiam diametrum ea bifariam fecere. Quoniam enim aequalis est AB ipsi CD, communis autem BC; duae AB, BC duabus DC, CB aequales sunt, altera alteri; et angulus ABC aequalis est angulo BCD;
- c. 4. 1. triangulum igitur ABC triangulo BCD aequale erit<sup>c</sup>. Ergo diameter BC parallelogrammum ACDB bifariam secat. Q. E. D.



## PROP. XXXV. THEOR.

**P**ARALLELOGRAMMA super eadem basi, et in eisdem parallelis constituta, inter se aequalia sunt.

Sint parallelogramma ABCD, EBCF super  
 vid. Fig. 2. eadem basi BC, et in eisdem parallelis AF, BC  
 et 3. constituta. dico ABCD parallelogrammum  
 EBCF parallelogrammo aequale esse.



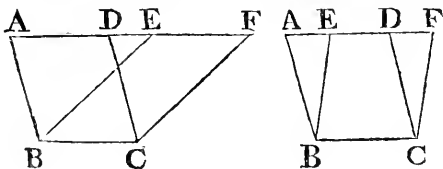
Si enim parallelogrammorum ABCD, EBCF  
 latera AD, DF basi BC opposita, in eodem

puncto



puncto D terminata fuerint, manifestum est utrumque parallelogrammum duplum esse trianguli BDC<sup>a</sup>; quare et inter se sunt aequalia. a. 34. 1.

Non autem sint parallelogrammorum ABCD, EBCF latera AD, EF basi opposita, in eodem puncto terminata; et quoniam parallelogrammum est ABCD, aequalis est AD ipsi BC<sup>a</sup>; eadem quoque ratione et EF aequalis est BC; quare et AD ipsi EF aequalis erit<sup>b</sup>; et b. Ax. 1. communis est DE; tota igitur vel reliqua AE toti vel reliquae DF est



aequalis<sup>c</sup>. est autem et AB aequalis DC; ergo duae EA, AB duabus c. Ax. 2. 3. FD, DC aequales sunt, altera alteri; et angulus FDC aequalis est angulo EAB exteriori interiori<sup>d</sup>; basis igitur EB basi FC est aequalis, et d. 29. 1. EAB triangulum aequale<sup>e</sup> triangulo FDC. auferatur triangulum FDC c. 4. 1. e trapezio ABCF, et ex eodem trapezio auferatur triangulum EAB, reliquum igitur parallelogrammum ABCD aequale erit reliquo parallelogrammo EBCF<sup>f</sup>. Ergo parallelogramma super eadem basi &c. f. Ax. 3. Q. E. D.

## PROP. XXXVI. THEOR.

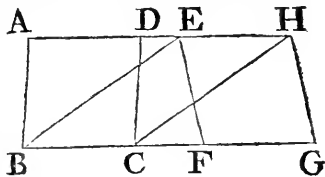
**P**ARALLELOGRAMMA super aequalibus basibus, et in eisdem parallelis constituta, inter se aequalia sunt.

Sint parallelogramma ABCD, EFGH super aequalibus basibus BC, FG, et in eisdem parallelis AH, BG constituta; dico parallelogrammum ABCD ipsi EFGH aequale esse.

Jungantur

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

- Jungantur enim BE, CH; et quoniam aequalis est BC ipsi FG, et  
 a. 34. 1. FG ipsi EH<sup>a</sup>, erit et BC ipsi EH aequalis; suntque parallelae, et ip-  
 fas conjungunt BE, CH. quae autem  
 aequales et parallelas ad eandem par-  
 tes conjungunt, aequales et parallelae  
 b. 33. 1. sunt<sup>b</sup>; ergo EB, CH et aequales sunt  
 et parallelae. parallelogrammum igitur  
 c. 35. 1. est EBCH, et aequale ipsi ABCD<sup>c</sup>,  
 basim enim eandem habet BC, et in eisdem parallelis BC, AD consti-  
 tuitur. simili ratione et EFGH parallelogrammum eidem EBCH est  
 aequale. Ergo et parallelogrammum ABCD est aequale ipsi EFGH.  
 Parallelogramma igitur super aequalibus basibus &c. Q. E. D.

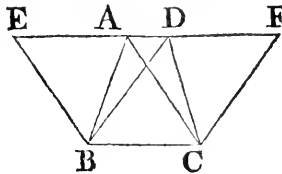


## PROP. XXXVII. THEOR.

**T**RIANGULA super eâdem basi, et in eisdem parallelis  
 constituta, inter se aequalia sunt.

Sint triangula ABC, DBC super eadem basi BC, et in eisdem paral-  
 lelis AD, BC constituta. dico ABC triangulum triangulo DBC aequale  
 esse.

- Producatur AD ex utraque parte in E, F puncta, et per B quidem  
 ipsi CA parallela ducatur BE; per C vero  
 a. 31. 1. ipsi BD parallela ducatur CF<sup>a</sup>. Paralle-  
 logrammum igitur est utrumque ipsorum  
 EBCA, DBCF; et parallelogrammum  
 b. 35. 1. EBCA est aequale ipsi DBCF<sup>b</sup>; etenim  
 super eâdem sunt basi BC, et in eisdem  
 parallelis BC, EF; estque parallelogrammi quidem EBCA dimidium  
 c. 34. 1. ABC triangulum<sup>c</sup>, diameter enim AB ipsum bifariam secat; parallelo-  
 grammi



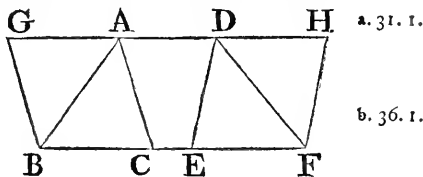
Grammi vero DBCF dimidium triangulum DBC<sup>c</sup>, ipsum enim bifariam e. 34. 1. fecat diameter DC. aequalium autem dimidia inter se aequalia sunt<sup>d</sup>; d. Ax. 7. ergo triangulum ABC triangulo DBC est aequale. Triangula igitur super eadem basi &c. Q. E. D.

PROP. XXXVIII. THEOR.

**T**RIANGULA super basibus aequalibus, et in eisdem parallelis constituta, inter se sunt aequalia.

Sint triangula ABC, DEF super aequalibus basibus BC, EF et in eisdem parallelis BF, AD constituta. dico ABC triangulum DEF triangulo aequale esse.

Producatur enim AD ex utraque parte in G, H puncta, et per B quidem ipsi CA parallela ducatur BG, per F vero ducatur FH parallela ipsi ED<sup>a</sup>. parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum GBCA, DEFH; atque est GBCA aequale ipsi DEFH<sup>b</sup>; super aequalibus enim sunt basibus BC, EF et in eisdem parallelis BF, GH; parallelogrammi vero GBCA dimidium est ABC triangulum, nam diameter AB ipsum bifariam fecat; et parallelogrammi DEFH dimidium est triangulum DEF<sup>c</sup>, diameter enim DF ipsum fecat bifariam. aequalium autem dimidia inter se aequalia sunt<sup>d</sup>; ergo ABC triangulum DEF est aequale. Triangula igitur super aequalibus basibus &c. Q. E. D.



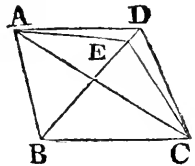
## EUCLIDIS ELEMENTORUM

## PROP. XXXIX. THEOR.

**T**RIANGULA aequalia super eadem basi, et ad eandem partes constituta, in eisdem sunt parallelis.

Sint aequalia triangula ABC, DBC super eadem basi BC constituta, et ad eandem partes; dico in eisdem esse parallelis.

Jungatur enim AD, dico AD parallelam esse ipsi BC; si enim non  
 a. 31. i. est, ducatur per A punctum ipsi BC parallela recta linea AE<sup>a</sup>, et EC  
 jungatur. aequale igitur est ABC triangulum tri-  
 b. 37. i. angulo EBC<sup>b</sup>, super eadem enim est basi BC, et  
 in eisdem parallelis BC, AE. sed ABC triangulum  
 triangulo DBC est aequale; ergo et triangulum  
 DBC aequale est EBC triangulo, majus minori,  
 quod fieri non potest. Non igitur AE ipsi BC  
 parallela est. similiter ostendemus neque aliam quampiam parallelam  
 esse, praeter ipsam AD; ergo AD ipsi BC est parallela. Triangula igitur  
 aequalia &c. Q. E. D.

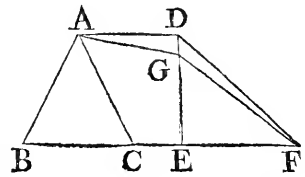


## PROP. XL. THEOR.

**T**RIANGULA aequalia super basibus aequalibus, et ad eandem partes constituta, in eisdem sunt parallelis.

Sint aequalia triangula ABC, DEF super aequalibus basibus BC, EF constituta, et ad eandem partes; dico etiam in eisdem esse parallelis.

Jungatur enim AD, dico AD ipsi BF parallelam esse. Nam si non est,



ducatur

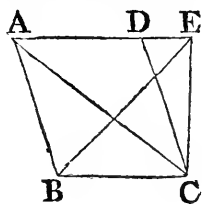
ducatur per A ipfi BF parallela <sup>a</sup> AG, et GF jungatur. Triangulum <sup>a. 31. r.</sup> igitur ABC triangulo GEF est aequale<sup>b</sup>, sunt enim super aequalibus <sup>b. 38. r.</sup> b. basibus BC, EF, et in eisdem parallelis BF, AG. sed triangulum ABC aequale est triangulo DEF; ergo et triangulum DEF triangulo GEF aequale erit, majus minori, quod fieri non potest. non igitur AG ipfi BF est parallela. similiter ostendemus neque aliam quampiam parallelam esse, praeter AD. Ergo AD ipfi BF parallela est. Aequalia igitur triangula &c. Q. E. D.

## PROP. XLI. THEOR.

**S**I parallelogrammum et triangulum eandem basim habeant, in eisdemque sint parallelis; parallelogrammum ipsius trianguli duplum erit.

Parallelogrammum enim ABCD et triangulum EBC basim habeant eandem BC, et in eisdem sint parallelis BC, AE; dico parallelogrammum ABCD trianguli EBC duplum esse.

Jungatur enim AC; triangulum igitur ABC triangulo EBC est aequale <sup>a</sup>, etenim super eadem basi BC, et in eisdem sunt parallelis BC, AE. sed ABCD parallelogrammum duplum est trianguli ABC<sup>b</sup>, diameter enim AC ipsum bifariam fecit; quare et ABCD ipfius trianguli EBC duplum erit. si igitur parallelogrammum &c.



a. 37. r.

b. 34. r.

Q. E. D.

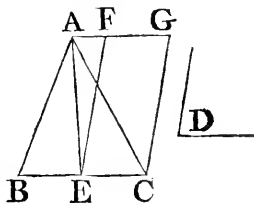
## PROP. XLII. PROB.

**D**ATO triangulo aequale parallelogrammum, in angulo rectilineo dato angulo aequali, constituere.

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

Sit datum triangulum ABC, datus autem rectilineus angulus D. itaque oportet, dato triangulo ABC aequale parallelogrammum constituere in angulo rectilineo ipsi D aequali.

2. 10. 1. Scedatur BC bifariam<sup>a</sup> in E, jungatur AE, et ad rectam lineam EC  
 b. 23. 1. atque ad punctum in ea E, constituatur angulus CEF aequalis ipsi D<sup>b</sup>;  
 e. 31. 1. et per A quidem ipsi EC parallela ducatur AG<sup>c</sup>, per C vero ipsi EF  
 ducatur parallela CG<sup>c</sup>. parallelogrammum  
 igitur est FECG. et quoniam BE est ae-  
 qualis EC, erit et ABE triangulum trian-  
 d. 38. 1. gulo AEC aequale<sup>d</sup>, super aequalibus enim  
 sunt basibus BE, EC, et in eisdem BC, AG  
 parallelis; ergo triangulum ABC trianguli  
 AEC est duplum. est autem et parallelo-  
 e. 41. 1. grammum FECG duplum trianguli AEC<sup>e</sup>, basim enim eandem habet,  
 et in eisdem est parallelis. aequale igitur est FECG parallelogrammum  
 triangulo ABC, habetque CEF angulum aequalem angulo D dato.  
 Dato igitur triangulo ABC aequale parallelogrammum FECG consti-  
 tutum est, in angulo CEF qui angulo D est aequalis. Q. E. F.



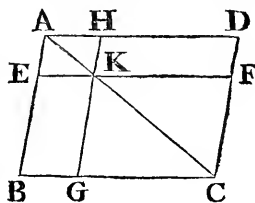
## PROP. XLIII. THEOR.

**O**MNIS parallelogrammi spatii eorum, quae circa dia-  
 metrum sunt, parallelogrammorum complementa  
 inter se sunt aequalia.

Sit parallelogrammum ABCD, ejus diameter AC, et circa ipsam  
 AC parallelogramma quidem sint EH, FG, quae vero complementa di-  
 cuntur BK, KD; dico BK complementum complemento KD aequale  
 esse.

Quoniam enim parallelogrammum est ABCD, et ejus diameter AC,  
 aequale

aequale est ABC triangulum triangulo ADC<sup>a</sup>. rursus quoniam EKHA<sup>a</sup> 34. 1. parallelogrammum est, cujus diameter AK, triangulum AEK triangulo AHK aequale erit<sup>a</sup>. eadem ratione, et triangulum KGC triangulo KFC est aequale. Quoniam igitur triangulum quidem AEK aequale est triangulo AHK, triangulum vero KGC ipsi KFC; erit triangulum AEK una cum triangulo KGC aequale triangulo AHK una cum KFC triangulo. est autem et totum triangulum ABC aequale toti ADC<sup>a</sup>; reliquum igitur BK complementum reliquo complemento KD est aequale. Ergo omnis parallelogrammi &c. Q. E. D.

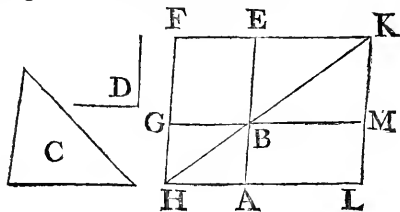


PROP. XLIV. PROB.

**A**D datam rectam lineam, dato triangulo aequale parallelogrammum applicare, in angulo rectilineo dato angulo aequali.

Sit data quidem recta linea AB, datum vero triangulum C, et datus angulus rectilineus D. oportet igitur ad datam rectam lineam AB, dato triangulo C, aequale parallelogrammum applicare, in angulo ipsi D aequali.

Constituatur triangulo C aequale parallelogrammum BEFG in angulo EBG qui aequalis est angulo D<sup>a</sup>, et ponatur BE in directum ipsi AB, producatique FG ad H; et per A alterutri ipsarum BG, EF parallela ducatur AH<sup>b</sup>, et HB jungatur. b. 31. 1.

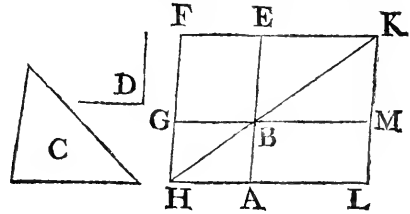


a. 42. 1.

Quoniam

Quoniam igitur in parallelas AH, EF recta linea HF incidit, anguli  
 c. 29. 1. AHF, HFE duobus rectis aequales sunt<sup>c</sup>; quare BHF, HFE duobus  
 rectis sunt minores. quae vero cum aliqua recta angulos interiores et  
 ad eandem partes duobus rectis minores efficiunt, in infinitum produc-  
 d. Ax. 12. tac inter se convenient<sup>d</sup>. ergo HB, FE convenient; producantur, et con-  
 veniant in K, perque K al-

terutri ipsarum EA, FH pa-  
 rallela ducatur KL, et HA,  
 GB ad L, M puncta produ-  
 cantur. parallelogrammum  
 igitur est HLKF, cuius dia-  
 meter HK, et circa HK pa-



rallelogramma quidem sunt AG, ME; ea vero quae complementa di-  
 e. 43. 1. cuntur LB, BF; ergo LB ipsi BF est aequale<sup>e</sup>. sed et BF est aequale  
 triangulo C; quare et LB triangulo C aequale erit. et quoniam GBE  
 f. 15. 1. angulus aequalis est angulo ABM<sup>f</sup>, sed et GBE aequalis angulo D; e-  
 rit et angulus ABM angulo D aequalis. Ad datam igitur rectam lineam  
 AB, dato triangulo C aequale parallelogrammum constitutum est LB,  
 in angulo ABM qui est aequalis angulo D. Q. E. F.

PROP. XLV. PROB.

**R**ECTILINEO dato aequale parallelogrammum confi-  
 tuere in angulo rectilineo dato angulo aequali.

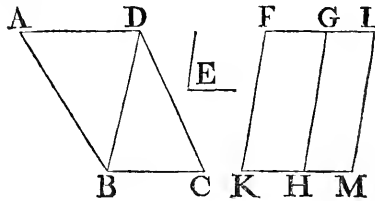
Sit datum rectilineum ABCD, datus vero angulus rectilineus E.  
 oportet rectilineo ABCD aequale parallelogrammum constituere in an-  
 gulo ipsi E aequali.

Jungatur enim DB, et constituatur triangulo ADB aequale paralle-  
 3. 42. 1. logrammum FH<sup>g</sup>, in angulo HKF qui est aequalis angulo E; et ad  
 rectam



rectam lineam GH applicetur triangulo DBC aequale parallelogrammum GM, in angulo GHM qui angulo E est aequalis<sup>b</sup>. et quoniam b. 44. 1. angulus E aequalis est utrique ipsorum FKH, GHM, erit et FKH angulus aequalis ipsi GHM; communis apponatur KHG, anguli igitur FKH, KHG angulis KHG, GHM aequales sunt. sed FKH, KHG sunt aequales duobus rectis<sup>c</sup>; ergo et KHG, GHM duobus rectis ae-

quales erunt. itaque quoniam ad aliquam rectam GH, et ad punctum in ea H duae rectae lineae KH, HM non ad easdem partes positae angulos deinceps duobus rectis aequales efficiunt, in directum erit KH ipsi HM<sup>d</sup>. et quoniam in parallelas KM, FG recta linea HG incidit, al-



d. 14. 1. terni anguli MHG, HGF aequales sunt<sup>e</sup>; communis apponatur HGL; anguli igitur MHG, HGL, angulis HGF, HGL sunt aequales. at anguli MHG, HGL aequales sunt duobus rectis<sup>e</sup>; quare et anguli HGF, HGL duobus rectis aequales erunt; in directum igitur est FG ipsi GL. et quoniam KF ipsi HG est parallela, sed et HG ipsi ML; erit KF ipsi ML parallela<sup>e</sup>. et parallelae sunt KM, FL; parallelogrammum igitur est KFLM. et quoniam triangulum quidem ABD aequale est parallelogrammo HF, triangulum vero DBC parallelogrammo GM; erit totum ABCD rectilineum toti parallelogrammo KFLM aequale. Dato igitur rectilineo ABCD aequale parallelogrammum KFLM constitutum est in angulo FKM qui est aequalis angulo E dato. Q. E. F.

COR. Ex jam dictis manifestum est, quomodo ad datam rectam lineam dato rectilineo aequale parallelogrammum applicari possit, in angulo rectilineo dato angulo aequali; si scilicet ad datam rectam lineam applicetur<sup>b</sup>

b. 44. 1. applicetur <sup>b</sup> parallelogrammum aequale triangulo primo ABD, in angulo dato angulo aequali.

## PROP. XLVI. PROB.

**A** Data recta linea quadratum describere.

Sit data recta linea AB; oportet ab ipsa AB quadratum describere.

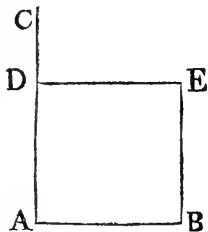
Ducatur rectae lineae AB, a puncto A quod in ea est, ad rectos angulos <sup>a. 11. 1.</sup> AC; et ipsi AB aequalis ponatur AD<sup>b</sup>, perque punctum D ducatur DE ipsi AB parallela<sup>c</sup>, et per B ipsi AD parallela ducatur <sup>c. 31. 1.</sup> BE.

parallelogrammum igitur est ADEB; quare AB quidem est aequalis DE<sup>d</sup>, AD vero ipsi BE<sup>d</sup>. sed BA ipsi AD est aequalis; quatuor igitur BA, AD, DE, EB inter se aequales sunt, ideoque aequilaterum est ADEB parallelogrammum. dico etiam rectangulum esse; quoniam enim in parallelas AB, DE recta linea incidit AD, anguli BAD,

a. 29. 1. ADE duobus rectis sunt aequales<sup>e</sup>; rectus autem est BAD, ergo et ADE rectus erit. parallelogrammorum autem spatorum, quae ex opposito sunt latera, et anguli inter se aequalia sunt<sup>d</sup>; rectus igitur est uterque oppositorum angulorum ABE, BED; quare rectangulum est ADEB. ostensum autem est aequilaterum esse; quadratum igitur est, atque a recta linea AB descriptum. Q. E. F.

COR. Hinc omne parallelogrammum habens unum angulum rectum est rectangulum.

PROP. XLVII.

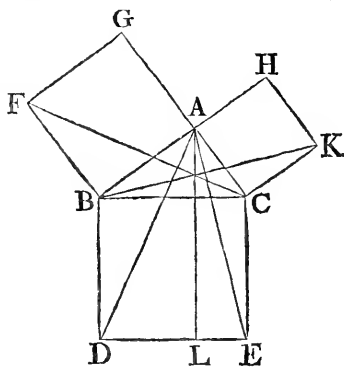


## PROP. XLVII. THEOR.

**I**N reſtanguſis triangulis, quod a latere reſtū angulum ſubtendente deſcribitur, quadratum æquale eſt quadratis quæ a lateribus reſtū angulum continentibus deſcribuntur.

Sit triangulum reſtanguſum ABC, reſtū habens BAC angulum; dico quadratum a reſtā BC æquale eſſe quadratis ab ipſis BA, AC deſcriptis.

Deſcribatur enim a BC quidem quadratum <sup>a</sup> BDEC, ab ipſis vero <sup>a. 46. 1.</sup> BA, AC quadrata GB, HC; perque A alterutri ipſarum BD, CE parallelū ducatur <sup>b</sup> AL, et AD, FC jungantur. Quoniam igitur uterque <sup>b. 31. 1.</sup> angulorum BAC, BAG reſtus eſt <sup>c.</sup>, ad aliquam reſtā lineam BA, et ad punctum in ea A duæ reſtæ lineæ AC, AG non ad eandem partes poſitæ, angulos qui deinceps ſunt duobus reſtis æquales efficiunt; in directum igitur eſt CA ipſi AG <sup>d.</sup> eadem ratione, et AB ipſi AH eſt in directum. et quoniam angulus DBC eſt æqualis angulo FBA, reſtus enim uterque eſt, communis apponatur ABC, totus igitur DBA angulus toti FBC eſt æqualis <sup>e.</sup> et quoniam duæ AB, <sup>e. Ax. 2.</sup> BD duabus FB, BC æquales ſunt, altera alteri, et angulus DBA æqualis angulo FBC; erit et baſis AD baſi FC æqualis, et ABD triangulum triangulo FBC æquale <sup>f.</sup> eſtque trianguli quidem ABD duplum <sup>f. 4. 1.</sup>



c. Def. 30.

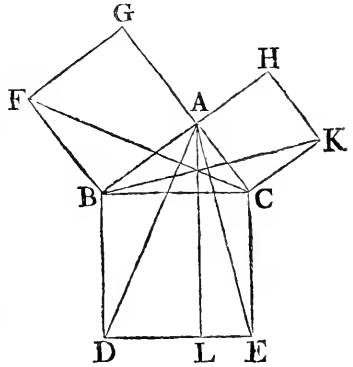
d. 14. 1.

G

BL

g. 41. 1. BL parallelogrammum<sup>a</sup>, basim enim eandem habent BD, et in eisdem sunt parallelis BD, AL; trianguli vero FBC duplum est GB quadratum, rursus enim basim habent eandem FB, et in eisdem sunt parallelis FB, GC. quae autem aequalium du-

h. Ax. 6. plicia inter se aequalia sunt<sup>b</sup>. aequale igitur est parallelogrammum BL ipsi GB quadrato. similiter junctis AE, BK ostendetur etiam CL parallelogrammum aequale quadrato HC. totum igitur BDEC quadratum duobus quadratis GB, HC est aequale. et descriptum quidem est BDEC quadratum a recta linea BC, quadrata vero GB, HC ab ipsis BA, AC. quadratum igitur BE a latere BC descriptum aequale est quadratis a lateribus, BA AC. Ergo in rectangulis triangulis &c. Q. E. D.



PROP. XLVIII. THEOR.

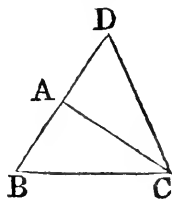
**S**I quadratum ab uno latere trianguli, aequale sit quadratis a reliquis trianguli lateribus descriptis; angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit.

Quadratum enim ab uno latere BC trianguli ABC descriptum, aequale sit quadratis a reliquis trianguli lateribus BA, AC. dico angulum BAC rectum esse.

a. 11. 1. Ducatur<sup>a</sup> enim a puncto A ipsi AC ad rectos angulos AD, ponaturque AD ipsi BA aequalis, et DC jungatur. Quoniam igitur DA est aequalis AB, erit et quadratum ex DA aequale quadrato ex AB; com-

mune

mune apponatur quadratum ex AC, ergo quadrata ex DA, AC aequalia sunt quadratis ex BA, AC. sed quadratis quidem ex DA, AC aequale est quadratum ex DC<sup>b</sup>, rectus enim angulus est DAC; quadratis vero ex BA, AC aequale ponitur quadratum ex BC; quadratum igitur ex DC aequale est quadrato ex BC; ergo et latus DC lateri CB est aequale. et quoniam DA est aequalis AB, communis autem AC, duae DA, AC aequales sunt duabus BA, AC; et basis DC est aequalis basi BC; angulus igitur DAC angulo BAC est aequalis<sup>c</sup>. rectus autem est *c. 8. 1.* DAC, ergo et BAC rectus erit. si igitur quadratum &c. Q. E. D.



b. 47. 1.

E U C L I D I S  
E L E M E N T O R U M  
L I B E R S E C U N D U S.

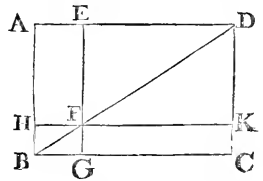
DEFINITIONES.

I.

**O**MNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur a duabus rectis lineis, quae rectum angulum continent.

II.

Omnis parallelogrammi spatii, unumquodvis eorum quae circa diametrum ipsius sunt parallelogrammorum una cum duobus complementis, gnomon vocetur. ‘Ita parallelogrammum ‘HG una cum complementis AF, FC ‘est gnomon, qui brevitatis gratia designatur literis AGK vel EHC ad ‘oppositos angulos parallelogrammorum qui gnomonem componunt.’



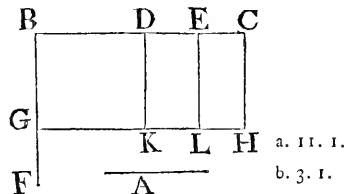
PROP. I.

## PROP. I. THEOR.

**S**I sint duae rectae lineae, altera autem ipsarum secta fuerit in quocunque partes; rectangulum a duabus rectis lineis contentum aequale est rectangulis, quae a recta linea infecta, et singulis partibus continentur.

Sint duae rectae lineae A, BC; et secta sit BC utcunque in punctis D, E; dico rectangulum rectis lineis A, BC contentum aequale esse rectangulo contento ab ipsis A, BD; et ei ab ipsis A, DE; et adhuc ei ab ipsis A, EC contento.

Ducatur enim a puncto B ipsi BC ad rectos angulos BF<sup>a</sup>, atque ipsi A ponatur aequalis BG<sup>b</sup>; et per G quidem ipsi BC parallela ducatur GH; per D, E, C vero



ducantur DK, EL, CH parallelae ipsi BG<sup>c</sup>. rectangulum igitur BH est aequale rectangulis BK, DL, EH; atque est BH quidem quod ipsis A, BC continetur, etenim continetur a GB, BC, et BG ipsi A est aequalis; BK autem continetur ab ipsis A, BD, continetur enim a GB, BD, quarum GB est aequalis A; et DL est contentum ab ipsis A, DE, quoniam DK, hoc est BG<sup>d</sup> ipsi A est aequalis; et similiter rectangulum EH contentum est ab ipsis A, EC. rectangulum igitur ab ipsis A, BC contentum est aequale rectangulo contento ab ipsis A, BD, et contento ab A, DE, et adhuc contento ab ipsis A, EC. si igitur sint duae rectae lineae &c. Q. E. D.

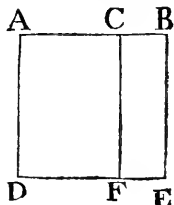
## PROP. II.

## PROP. II. THEOR.

**S**I recta linea secta fuerit utcunque, rectangula quae a tota et singulis partibus continentur, aequalia sunt quadrato ex tota.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in puncto C; dico rectangulum ab AB, BC contentum, una cum rectangulo contento ab AB, AC aequale esse quadrato ex AB.

- a. 46. 1. Describatur enim ex AB quadratum ADEB<sup>a</sup>, et per C ducatur al-
- b. 31. 1. terutri ipsarum AD, BE parallela CF<sup>b</sup>. aequale igitur est AE rectangulis AF, CE; atque est AE quidem quadratum ex AB; AF vero rectangulum a BA, AC contentum, etenim a DA, AC continentur, quarum AD ipsi AB est aequalis; et CE continetur ab ipsis AB, BC, aequalis enim est BE ipsi AB. rectangulum igitur ab AB, AC, una cum rectangulo ab ipsis AB, BC contento, aequale est quadrato ex AB. si igitur recta linea secta fuerit &c. Q. E. D.



## PROP. III. THEOR.

**S**I recta linea utcunque secta fuerit, rectangulum a tota et una ejus parte contentum aequale est et rectangulo a partibus contento, et quadrato ex praedictâ parte.

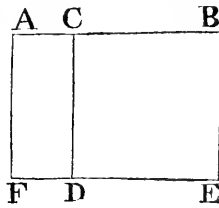
Recta enim linea AB secta sit utcunque in puncto C; dico rectangulum ab AB, BC contentum aequale esse rectangulo contento ab AC, CB una cum quadrato ex BC.

- a. 46. 1. Describatur enim ex BC quadratum CDEB<sup>a</sup>, et producaturs ED in F,
- et



et per A alterutri ipsarum CD, BE, parallela ducatur AF<sup>b</sup>. aequale igitur <sup>b</sup>. 31. 1.

tur est AE ipfis AD, CE; et est AE quidem rectangulum contentum ab AB, BC, etenim ab AB, BE continetur, quarum BE est aequalis BC; AD vero continetur ab ipfis AC, CB, aequalis enim est CD ipfi CB; et est DB quadratum ex BC. rectangulum igitur contentum ab AB, BC est aequale rectangulo contento ab ipfis AC, CB, una cum quadrato ex BC. si igitur recta linea &c.



Q. E. D.

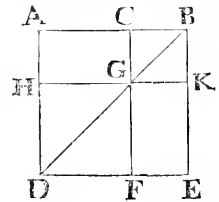
PROP. IV. THEOR.

**S**I recta linea secta fuerit utcunque, quadratum ex tota aequale est, et quadratis ex partibus, et rectangulo bis a partibus contento.

Recta enim linea AB secta sit utcunque in C; dico quadratum ex AB aequale esse, et quadratis ex AC, CB et rectangulo bis ab ipfis AC, CB contento.

Describatur enim ex AB quadratum ADEB<sup>1</sup>, jungaturque BD, et a. 46. 1.

per C quidem alterutri ipsarum AD, BE parallela ducatur CGF<sup>b</sup>; per G vero alterutri ipsarum AB, DE ducatur parallela HK<sup>b</sup>. et quoniam CF est parallela ipfi AD, et in ipfas incidit BD, erit exterior angulus BGC interiori et opposito ADB aequalis<sup>c</sup>; angulus autem ADB est aequalis angulo ABD<sup>d</sup>, quoniam et latus BA aequale est lateri AD; quare CGB angulus angulo GBC est aequalis, ac propterea latus BC lateri CG aequale<sup>e</sup>. sed et latus CB aequale est la-



b. 31. 1.

c. 29. 1.

d. 5. 1.

teri

f. 34. 1. teri GK, et CG ipsi BK<sup>f</sup>, ergo et GK est aequale KB; aequilaterum igitur est CGKB. dico insuper etiam rectangulum esse; quoniam enim CG parallela est ipsi BK, et in ipsas incidit CB, anguli KBC, GCB duobus rectis sunt aequales; rectus autem est KBC angulus, rectus igitur est GCB; quare et anguli huius oppositi CGK, GKB recti erunt<sup>f</sup>; rectangulum igitur est CGKB. sed ostensum fuit et aequilaterum esse; quadratum igitur est, et est ex CB.

eadem ratione et HF est quadratum, et est ex HG, hoc est ex AC. ergo HF, CK ex ipsis AC, CB quadrata sunt. et quoniam AG est aequale

g. 43. 1. ipsi GE<sup>g</sup>, atque est AG quod ab AC, CB continetur, est enim GC ipsi CB aequalis; erit et GE aequale ei quod continetur ab AC, CB;

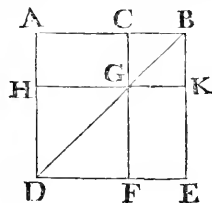
quare AG, GE aequalia sunt ei quod bis ab AC, CB continetur. sunt autem et HF, CK quadrata ex AC, CB; quatuor igitur HF, CK, AG, GE aequalia sunt et quadratis ex AC, CB, et ei quod bis ab AC, CB continetur rectangulo. sed HF, CK, AG, GE sunt totum ADEB quod est quadratum ex AB. quadratum igitur ex AB aequale est et quadratis ex AC, CB, et rectangulo quod bis ab AC, CB continetur. si igitur recta linea secta fuerit &c. Q. E. D.

COR. Ex his manifestum est, in quadratis spatiis parallelogramma quae sunt circa diametrum quadrata esse.

PROP. V. THEOR.

**S**I recta linea secta fuerit in partes aequales, et in partes inaequales; rectangulum ab inaequalibus totius partibus contentum, una cum quadrato rectae lineae quae inter sectiones interjicitur, aequale est quadrato ex dimidia.

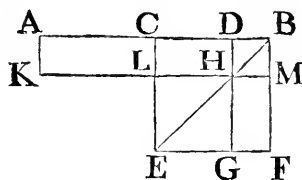
Recta



Recta enim linea quacvis AB secta fit in partes aequales ad C, et in partes inaequales ad D; dico rectangulum contentum ab AD, DB una cum quadrato ex CD aequale esse quadrato ex CB.

Describatur enim ex BC quadratum<sup>a</sup> CEFB, jungaturque BE; et a. 46. 1. per D quidem alterutri ipsarum CE, BF parallela ducatur<sup>b</sup> DHG; per b. 31. 1. H vero ducatur KLM parallela alterutri ipsarum CB, EF; et rursus per A ducatur alterutri CL, BM parallela AK. et quoniam CH complementum aequale est complemento

HF<sup>c</sup>, commune apponatur DM, totum igitur CM toti DF est aequale; sed CM est aequale AL<sup>d</sup>, quoniam et AC ipsi CB; ergo et AL aequale est DF. commune apponatur CH, totum



c. 43. 1.

d. 36. 1.

igitur AH ipfis DF, CH aequalis erit. sed AH quidem est quod continetur ab AD, DB, aequalis enim est DH ipsi DB<sup>e</sup>; DF, CH vero e. Cor. 4. 2. est gnomon CMG; gnomon igitur CMG aequalis est ei quod ab AD, DB continetur. commune apponatur LG, quod aequale est quadrato<sup>e</sup> ex CD; ergo CMG gnomon et LG aequalia sunt rectangulo ab AD, DB contento, et quadrato ex CD. sed CMG gnomon et LG sunt totum quadratum CEFB, quod fit ex CB. rectangulum igitur ipfis AD, DB contentum, una cum quadrato ex CD, aequale est quadrato ex CB. si igitur recta linea secta fuerit &c. Q. E. D.

## PROP. VI. THEOR.

**S**I recta linea bifariam fecetur, atque ipsi in directum ad-  
jiciatur quaedam recta linea; rectangulum a tota cum  
adjecta, et ipsa adjecta contentum, una cum quadrato ex  
dimidia, aequale est quadrato quod ex ea quae composita est  
ex dimidia et adjecta, tanquam ab una recta linea, descri-  
bitur.

Recta enim linea quaevis AB fecetur bifariam in puncto C, et ad-  
jiciatur ipsi in directum quaedam BD; dico rectangulum ab AD, DB  
contentum una cum quadrato ex CB aequale esse quadrato ex CD.

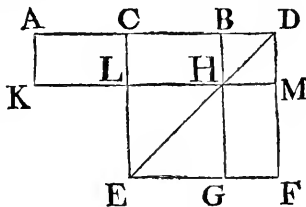
a. 46. 1. Describatur enim ex CD quadratum <sup>a</sup>CEFD, et jungatur DE; per  
b. 31. 1. que B alterutri ipsarum CE, DF parallela ducatur <sup>b</sup>BHG, et per H du-  
catur KLM parallela alterutri ipsarum AD, EF, et adhuc per A alteru-  
tri CL, DM parallela AK. itaque quoniam AC est aequalis CB, erit et AL

e. 36. 1. rectangulum <sup>c</sup> ipsi CH aequale; sed CH

d. 43. 1. aequale est HF <sup>d</sup>; ergo et AL ipsi HF  
aequale erit. commune apponatur CM;  
totum igitur AM gnomoni CMG est ae-  
quale. atque est AM quod ab ipsis AD,

e. Cor. 4. 2. DB continetur, etenim DM est aequalis DB <sup>e</sup>. ergo et gnomon CMG  
aequalis est rectangulo ab AD, DB contento. commune apponatur LG,  
quod aequale est quadrato ex CB; rectangulum igitur ab AD, DB con-  
tentum una cum quadrato ex CB aequale est gnomoni CMG et ipsi LG.  
sed gnomon CMG et LG sunt totum quadratum CEFD, quod est ex CD;  
ergo rectangulum ab AD, DB contentum una cum quadrato ex CB ae-  
quale est quadrato ex CD. si igitur recta linea bifariam &c. Q. E. D.

PROP. VII.



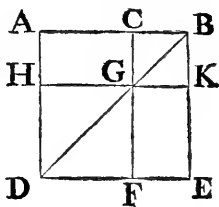
## PROP. VII. THEOR.

**S**I recta linea utcumque secta fuerit, quae ex tota, et una parte fiunt utraque quadrata aequalia sunt et rectangulo quod bis a tota ac dicta parte continetur, et quod ex reliqua parte fit quadrato.

Recta enim linea quaevis AB secta fit utcumque in puncto C; dico quadrata ex AB, BC aequalia esse et rectangulo quod bis ab AB, BC continetur, et quadrato ex AC.

Describatur enim ex AB quadratum ADEB<sup>a</sup>, et figura construatur. a. 46. 1. et quoniam AG rectangulum aequale est ipsi GE<sup>b</sup>, commune appona-

tur CK, quare totum AK toti CE est aequale; rectangula igitur AK, CE dupla sunt ipsius AK. sed AK, CE sunt AKF gnomon et quadratum CK; gnomon igitur AKF et quadratum CK dupla sunt rectanguli AK. est autem et id quod bis continetur ab AB, BC duplum ipsius AK, etenim BK est aequalis BC<sup>c</sup>. gnomon igitur AKF et quadratum CK aequalia sunt ei quod bis ab AB, BC continetur. commune apponatur HF,



c. Cor. 4. 2.

quod est aequale quadrato ex AC; gnomon igitur AKF et quadrata CK, HF aequalia sunt ei quod bis ab AB, BC continetur rectangulo, et quadrato ex AC. sed gnomon AKF et quadrata CK, HF totum sunt ADEB, et CK, quae sunt ex AB, BC quadrata. Quadrata igitur ex AB, BC aequalia sunt rectangulo quod bis ab AB, BC continetur, una cum quadrato ex AC. si igitur recta linea &c. Q. E. D.

## PROP. VIII. THEOR.

**S**I recta linea utcunque secta fuerit, quod quater a tota et una parte continetur rectangulum una cum quadrato ex reliqua parte, aequale est quadrato quod ex tota et dicta parte, tanquam ex una recta, describitur.

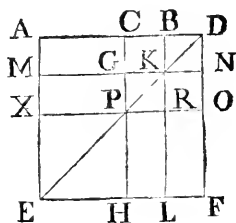
Recta enim linea AB secta fit utcunque in C; dico rectangulum quater ab AB, BC contentum una cum quadrato ex AC aequale esse quadrato quod ex AB, BC tanquam ex una recta linea describitur.

Producatur enim in directum rectae lineae AB recta BD, et ipsi CB ponatur aequalis BD, describaturque ex AD quadratum AEFD; et dupla figura construatur. Quoniam igitur CB est aequalis BD, atque est  
 a. 34. 1. CB ipsi GK aequalis<sup>a</sup>, BD vero ipsi KN; erit et GK aequalis KN. eadem ratione et PR ipsi RO est aequalis.

et quoniam CB est aequalis BD, et GK ipsi KN, erit rectangulum quidem CK aequale  
 b. 36. 1. ipsi BN, GR vero ipsi RN<sup>b</sup>. sed CK est  
 c. 43. 1. aequale RN<sup>c</sup>. complementa enim sunt parallelogrammi CO; ergo et BN aequale est GR. quatuor igitur BN, CK, GR, RN sunt inter se aequalia, ideoque quadrupla sunt ipsius CK. rursus quoniam CB est aequalis

d. Cor. 4. 2. BD, et BD quidem ipsi BK<sup>d</sup>, hoc est ipsi CG aequalis; CB vero ipsi GK, hoc est GP<sup>d</sup>; erit et CG aequalis GP. et quoniam CG quidem aequalis est GP, PR vero ipsi RO, aequale erit et AG quidem rectangulum ipsi MP; PL vero ipsi RF. sed MP est aequale<sup>e</sup> PL, complementa enim sunt parallelogrammi ML; quare et AG ipsi RF est aequale. quatuor igitur AG, MP, PL, RF inter se aequalia sunt, ac prop-

terea



terea ipsius AG quadrupla. ostensum autem est, et quatuor CK, BN, GR, RN quadrupla esse ipsius CK. octo igitur quae continent gnomonem AOH ipsius AK quadrupla sunt. et quoniam AK est quod ab AB, BC continetur, etenim BK est aequalis BC; erit contentum quater ab AB, BC ipsius AK quadruplum. at ostensus est gnomon AOH quadruplus ipsius AK; quod igitur quater ab AB, BC continetur aequale est gnomoni AOH. commune apponatur XH, quod aequale est quadrato ex AC<sup>d</sup>; erit rectangulum quod quater ab AB, BC continetur d. Cor. 4. 2. una cum quadrato ex AC aequale ipsi AOH gnomoni, et quadrato XH. sed AOH gnomon et XH totum sunt AEFD quadratum, quod est ex AD. rectangulum igitur quater ab AB, BC contentum una cum quadrato ex AC aequale est ei quod ex AD, hoc est ex AB, BC tanquam ex una recta linea, describitur quadrato. si igitur recta linea utcumque &c. Q. E. D.

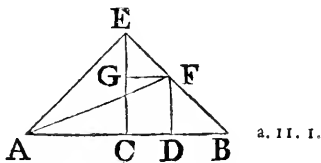
PROP. IX. THEOR.

**S**I recta linea in partes aequales, et in partes inaequales secta fuerit; quadrata ex inaequalibus totius partibus, dupla sunt et quadrati ex dimidia, et quadrati ex eâ quae inter sectiones interjicitur.

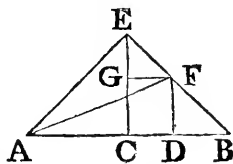
Recta enim linea quaevis AB secta sit in partes quidem aequales ad C, in partes vero inaequales ad D. dico quadrata ex AD, DB quadratorum ex AC, CD dupla esse.

Ducatur enim a puncto C ipsi AB ad rectos angulos CE<sup>a</sup>, et alterutri ipsarum AC, CB aequalis ponatur, junganturque EA,

EB; ac per D quidem ipsi CE parallela ducatur <sup>b</sup> DF, per F vero <sup>b. 31. 1.</sup> ipsi



- b. 31. 1. ipsi AB parallela<sup>b</sup> FG; et AF jungatur. itaque quoniam AC est aequalis CE, erit et angulus EAC angulo AEC aequalis<sup>c</sup>; et quoniam d. 32. 1. rectus est angulus ad C, reliqui AEC, EAC uni recto aequales erunt<sup>d</sup>; et sunt inter se aequales; uterque igitur ipsorum AEC, EAC recti est dimidium. eadem ratione et recti dimidium est uterque ipsorum CEB, EBC; totus igitur angulus AEB rectus est. et quoniam angulus GEF dimidium est recti, rectus autem EGF, aequalis enim est interiori et e. 29. 1. opposito<sup>e</sup> ECB, erit reliquus EFG recti dimidium; aequalis igitur est f. 6. 1. GEF angulus ipsi EFG, quare et latus EG lateri GF est aequalis<sup>f</sup>. rursus quoniam angulus ad B dimidium est recti, rectus autem FDB, rursus enim aequalis est interiori et opposito<sup>e</sup> ECB, reliquus BFD recti erit dimidium; angulus igitur ad B aequalis est angulo BFD, ideoque latus DF lateri DB aequalis<sup>f</sup>. et quoniam AC est aequalis CE, erit et ex AC quadratum aequale quadrato ex CE; quadrata igitur ex AC, CE dupla sunt quadrati ex AC. quadratis



- g. 47. 1. autem ex AC, CE aequale est quadratum ex EA<sup>g</sup>, siquidem rectus est angulus ACE; ergo quadratum ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus quoniam EG aequalis est GF, erit et quadratum ex EG quadrato ex GF aequale; quadrata igitur ex EG, GF dupla sunt quadrati ex GF; quadratis vero ex EG, GF aequale est quadratum ex EF; t. 34. 1. ergo quadratum ex EF quadrati ex GF duplum erit. aequalis<sup>h</sup> autem est GF ipsi CD; quadratum igitur ex EF duplum est quadrati ex CD. sed et quadratum ex AE quadrati ex AC est duplum; quadrata igitur ex AE, EF dupla sunt quadratorum ex AC, CD. quadratis vero ex AE, EF aequale est ex AF quadratum<sup>g</sup>, quoniam angulus AEF rectus est; quadratum igitur ex AF quadratorum ex AC, CD est duplum. sed quadrato ex AF aequalia sunt quadrata ex AD, DF, rectus enim est angulus



gulus qui ad D; ergo ex AD, DF quadrata dupla sunt quadratorum ex AC, CD. est autem DF ipsi DB aequalis; quadrata igitur ex AD, DB quadratorum ex AC, CD dupla erunt. si igitur recta linea secetur &c. Q. E. D.

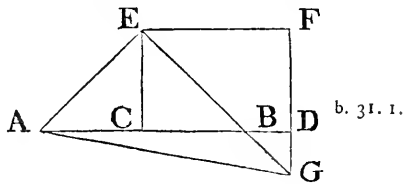
## PROP. X. THEOR.

**S**I recta linea secetur bifariam, et ipsi in directum quaevis recta linea adjiciatur, quae ex tota cum adjecta, et adjecta fiunt utraque quadrata, dupla sunt et quadrati ex dimidia, et quadrati quod ex ea quae composita est ex dimidia et adjecta, tanquam ab una recta linea describitur.

Recta enim linea AB secetur bifariam in C, et ipsi in directum adjiciatur quaevis recta linea BD; dico quadrata ex AD, DB quadratorum ex AC, CD dupla esse.

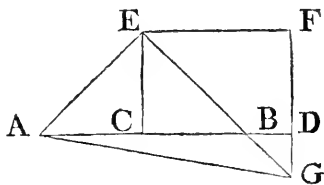
Ducatur enim a puncto C ipsi AB ad rectos angulos<sup>a</sup> CE, et alteru-

tri ipsarum AC, CB aequalis ponatur, junganturque AE, EB; et per E quidem ipsi AB parallela ducatur<sup>b</sup> EF, per D vero ducatur DF parallela<sup>b</sup> ipsi CE. et quoniam in



parallelas EC, FD recta quaedam linea EF incidit, anguli CEF, EFD aequales sunt duobus rectis<sup>c</sup>; anguli igitur BEF, EFD duobus rectis sunt minores. quae vero cum aliqua recta angulos duobus rectis minores efficiunt, in infinitum productae inter se conveniunt<sup>d</sup>. ergo EB, FD productae ad partes BD convenient; producantur, et conveniant in G, et AG jungatur. itaque quoniam AC est aequalis CE, erit et angulus CEA angulo EAC aequalis<sup>e</sup>;

- e. 5. 1. qualis<sup>e</sup>; atque est rectus qui ad C; uterque igitur ipsorum CEA, EAC est recti dimidium. eadem ratione, et recti dimidium est uterque CEB, EBC; ergo AEB est rectus. et quoniam EBC est dimidium recti, erit
- f. 15. 1. et recti dimidium DBG<sup>f</sup>; sed et BDG rectus est, etenim est aequalis
- c. 29. 1. ipsi DCE alterno<sup>e</sup>; reliquus igitur DGB dimidium est recti; est igitur
- g. 6. 1. DGB ipsi DBG aequalis, ergo et latus BD aequale lateri DG<sup>g</sup>. rursus quoniam EGF est dimidium recti, rectus autem qui ad F, est enim
- h. 34. 1. angulo opposito ad C aequalis<sup>h</sup>, erit et reliquus FEG recti dimidium; est igitur angulus EGF aequalis ipsi FEG, quare et latus GF lateri FE est aequale<sup>g</sup>. et quoniam EC est aequalis CA, erit et quadratum ex EC aequale quadrato ex CA; ergo quadrata ex EC, CA dupla sunt quadrati ex CA. quadratis autem ex EC, CA aequale est quadratum ex
- i. 47. 1. EA<sup>i</sup>; quadratum igitur ex EA quadrati ex AC est duplum. rursus quoniam GF est aequalis FE, erit et ex GF quadratum aequale quadrato ex FE; quadrata igitur ex GF, FE quadrati ex EF sunt dupla. at quadratis ex GF, FE aequale est quadratum ex EG<sup>i</sup>; ergo quadratum ex EG duplum est quadrati ex EF. aequalis autem est EF ipsi CD, quadratum igitur ex EG quadrati ex CD duplum erit. sed ostensum est quadratum ex EA duplum quadrati ex AC; ergo ex AE, EG quadrata, quadratorum ex AC, CD sunt dupla. quadratis vero ex AE, EG aequale est quadratum ex AG<sup>i</sup>; quadratum igitur ex AG duplum est quadratorum ex AC, CD. at quadrato ex AG aequalia sunt quadrata ex AD, DG<sup>i</sup>; ergo quadrata ex AD, DG sunt dupla quadratorum ex AC, CD. sed DG est aequalis DB; quadrata igitur ex AD, DB quadratorum ex AC, CD sunt dupla. si igitur recta linea fecerit &c. Q. E. D.



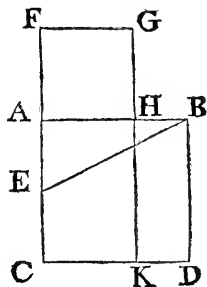
PROP. XI. PROB.

**D**ATAM rectam lineam fecare ita ut rectangulum a tota et altera parte contentum, aequale fit quadrato ex reliqua parte.

Sit data recta linea AB; oportet ipsam AB ita fecare, ut rectangulum contentum a tota et altera parte aequale fit quadrato ex reliqua parte.

Describatur enim ex AB quadratum <sup>a</sup> ABDC, feceturque AC bifariam <sup>b</sup> in E, et BE jungatur, et producat CA in F, ponaturque ipsi <sup>b</sup> BE aequalis EF <sup>c</sup>, et ex AF describatur quadratum FGHA <sup>a</sup>, et GH ad c. 3. <sup>1</sup>. K producatur. dico AB sectam esse in H, ita ut rectangulum ab AB, BH contentum aequale fit quadrato ex AH.

Quoniam enim recta linea AC bifariam secta est in E, et ipsi in directum adjecta est AF, rectangulum a CF, FA contentum, una cum quadrato ex AE, aequale erit quadrato ex EF <sup>d</sup>. sed EF est aequalis EB; rectangulum igitur contentum ab ipsis CF, FA, una cum quadrato ex AE aequale est quadrato ex EB. quadrato autem ex EB aequalia sunt quadrata ex BA, AE <sup>e</sup>, etenim angulus ad <sup>e</sup>. 47. 1. A rectus est; ergo rectangulum a CF, FA, una cum quadrato ex AE aequale est quadratis ex BA, AE. commune auferatur quadratum ex AE; reliquum igitur rectangulum a CF, FA contentum aequale est quadrato ex AB. et FK quidem est rectangulum a CF, FA contentum, aequalis enim est AF ipsi FG; AD vero est quadratum ex AB. aequale igitur est FK ipsi AD. commune auferatur AK; ergo reliquum



d. 6. 2.

I

FH

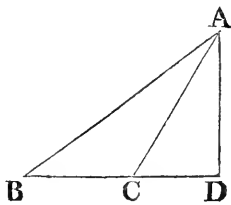
FH reliquo HD est aequale. et est HD quidem rectangulum ab AB, BH, est enim AB aequalis ipsi BD; FH vero est quadratum ex AH. rectangulum igitur contentum ab AB, BH quadrato ex AH aequale erit. quare data recta linea AB facta est in H, ita ut contentum ab AB, BH rectangulum quadrato ex AH sit aequale. Q. E. F.

## PROP. XII. THEOR.

**I**N obtusangulis triangulis quadratum ex latere obtusum angulum subtendente, majus est quam quadrata ex lateribus obtusum angulum continentibus, rectangulo contento bis ab uno laterum quae sunt circa obtusum angulum in quod productum perpendicularis cadit, et recta linea intercepta exterius a perpendiculari ad angulum obtusum.

Sit obtusangulum triangulum ABC, obtusum angulum habens ACB, et ducatur a puncto A ad BC productam perpendicularis<sup>a</sup> AD. dico quadratum ex AB majus esse quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis a BC, CD contento.

Quoniam enim recta linea BD facta est utcumque in puncto C, erit quadratum ex BD aequale quadratis ex BC, CD, et rectangulo bis ab ipsis BC, CD contento<sup>b</sup>. commune apponatur quadratum ex DA; quadrata igitur ex BD, DA aequalia sunt et quadratis ex BC, CD, DA, et rectangulo bis a BC, CD contento. sed quadratis quidem ex BD, DA aequale est quadratum ex BA<sup>c</sup>, rectus enim est angulus ad D; quadratis vero ex CD, DA aequale est quadratum ex CA<sup>c</sup>. Quadratum igitur ex BA aequale est et quadratis



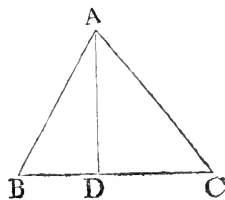
quadratis ex BC, CA et contento bis a BC, CD rectangulo; itaque quadratum ex BA majus est quam quadrata ex BC, CA, rectangulo bis ab ipfis BC, CD contento. In obtusangulis igitur triangulis &c. Q. E. D.

## PROP. XIII. THEOR.

**I**N omni triangulo, quadratum ex latere acutum angulum subtendente, minus est quam quadrata ex lateribus angulum illum acutum continentibus, rectangulo contento bis ab uno laterum quae sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, et recta linea intercepta a perpendiculari ad angulum acutum.

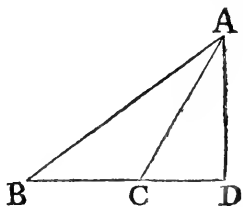
Sit triangulum ABC, acutum habens angulum ad B, et ducatur a puncto A ad BC perpendicularis<sup>a</sup> AD. dico quadratum ex AC minus a. 12. 1. esse quam quadrata ex CB, BA, rectangulo bis a CB, BD contento.

Cadat primo AD intra triangulum ABC; et quoniam recta linea CB secta est utcumque in D, erunt quadrata ex CB, BD aequalia et rectangulo bis a CB, BD contento, et quadrato ex DC<sup>b</sup>. commune apponatur b. 7. 2. ex AD quadratum; quadrata igitur ex CB, BD, DA aequalia sunt et rectangulo bis ab ipfis CB, BD contento, et quadratis ex AD, DC. sed quadratis quidem ex BD, DA aequale est ex AB quadratum<sup>c</sup>, rectus enim angulus est qui ad D; quadratis vero ex AD, DC aequale est quadratum ex AC. quadrata igitur ex CB, BA sunt aequalia quadrato ex AC, et contento bis a CB, BD rectangulo; itaque solum quadratum ex AC minus est quam quadrata ex CB, BA rectangulo bis a CB, BD contento.



c. 47. 1.

Sed cadat AD extra triangulum ABC. quoniam igitur rectus est angulus ad D, crit angulus ACB major recto<sup>d</sup>; quadratum igitur ex AB aequale est et quadratis ex AC, CB, et rectangulo bis ab ipsis BC, CD contento<sup>e</sup>. commune apponatur ex BC quadratum; erunt igitur quadrata ex AB, BC aequalia quadrato ex AC, quadrato ex BC bis, et contento bis a BC, CD rectangulo. quoniam autem recta linea BD secta est utcunque in C, rectangulum a DB, BC contentum aequale est rectangulo a BC, CD et quadrato ex BC<sup>f</sup>, et ipsorum dupla sunt aequalia. quadrata igitur ex AB, BC aequalia sunt quadrato ex AC, et rectangulo bis a DB, BC contento. solum igitur quadratum ex AC minus est quadratis ex AB, BC rectangulo bis contento ab ipsis CB, BD.



Denique fit latus AC perpendiculare ad ipsum BC; est igitur BC recta ab AC ad angulum acutum B intercepta, et manifestum est quadrata ex AB, BC aequalia esse quadrato ex AC, et bis quadrato ex BC<sup>e</sup>. In omni igitur triangulo &c. Q. E. D.



## PROP. XIV. PROB.

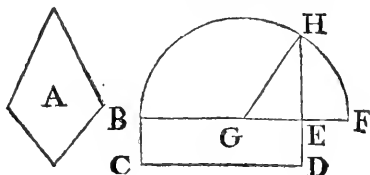
**D**ATO rectilineo aequale quadratum constituere.

Sit datum rectilineum A; oportet ipsi A rectilineo aequale quadratum constituere.

2. 45. 1. Constituaturs rectilineo A aequale parallelogrammum rectangulum<sup>a</sup> BCDE. si igitur BE est aequalis ED, factum jam erit quod proponebatur; etenim rectilineo A aequale quadratum constitutum est BD. sin minus, producaturs BE ad F, ponaturque ipsi ED aequalis EF, et feceretur

tur BF bifariam in G; et centro quidem G, intervallo vero uni ipsarum GB, GF aequali femicirculus describatur BHF, producaturque DE in H, et GH jungatur. Quoniam igitur recta linea BF secta est in partes quidem aequales ad G, in partes vero inaequales ad E, erit rectangulum a BE, EF contentum,

una cum quadrato ex EG aequale quadrato ex GF<sup>b</sup>. est autem GF aequalis GH; rectangulum igitur a BE, EF, una cum quadrato ex EG aequale



b. 5. 2.

est quadrato ex GH. sed quadrato ex GH aequalia sunt ex HE, EG quadrata<sup>c</sup>. rectangulum igitur a BE, EF, una cum quadrato ex EG c. 47. 1.

aequale est quadratis ex HE, EG. commune auferatur ex EG quadratum; reliquum igitur rectangulum a BE, EF contentum est aequale quadrato ex EH. sed contentum a BE, EF est ipsum BD, quoniam EF est aequalis ED; ergo BD parallelogrammum quadrato ex EH est aequale. est autem BD aequale rectilineo A; rectilineum igitur A quadrato ex EH descripto aequale erit. Dato igitur rectilineo A aequale quadratum constitutum est, ex ipsa videlicet EH descriptum. Q. E. F.

E U C L I D I S  
E L E M E N T O R U M  
L I B E R T E R T I U S.

DEFINITIONES.

I.

**A**EQUALES circuli sunt, quorum diametri sunt aequales, vel quorum quae ex centris sunt aequales.

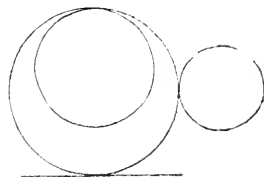
‘Haec non est definitio sed Theorema cujus veritas patet; si enim circuli, quorum quae ex centris sunt aequales, sibi mutuo applicentur ita ut centra eorum congruant, congruent et ipsi circuli.’

II.

Recta linea circulum contingere dicitur, quae tangens circulum et producta ipsum non secat.

III.

Circuli contingere sese dicuntur, qui tangentibus se mutuo, se ipsos non secant.

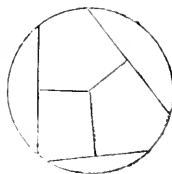


In



## IV.

In circulo aequaliter distare a centro rectae lineae dicuntur, quando a centro ad ipsas perpendiculares ductae sunt aequales.



## V.

Magis autem distare a centro dicitur ea in quam major perpendicularis cadit.

## VI.

Segmentum circuli est figura, quae recta linea et circuli circumferentia continetur.

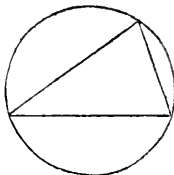


## VII.

“Segmenti autem angulus est, qui recta linea et circuli circumferentia continetur.”

## VIII.

In segmento angulus est, quando in circumferentia segmenti sumitur aliquod punctum, atque ab ipso ad extrema rectae lineae quae basis est segmenti, rectae lineae ducuntur, angulus rectis ductis contentus.

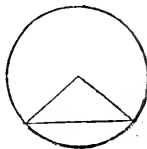


## IX.

Quando autem continentes angulum rectae lineae assumunt circumferentiam, illi insistere angulus dicitur.

## X.

Sector circuli est, quando angulus ad centrum confiterit, figura contenta rectis lineis quae angulum continent, et circumferentia ab ipsis assumpta.



Similia

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

## XI.

Similia circulorum segmenta sunt, quae angulos capiunt aequales, vel in quibus anguli sunt inter se aequales.



## PROP. I. PROB.

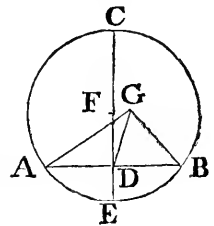
**D**ATI circuli centrum invenire.

Sit datus circulus ABC; oportet circuli ABC centrum invenire.

- a. 10. 1. fariam fecetur<sup>a</sup>, a puncto autem D ipsi AB ad rectos angulos ducatur  
 b. 11. 1. DC,<sup>b</sup> et ad E producat, et fecetur CE bifariam in F. dico punctum F centrum esse circuli ABC.

Non enim; sed si fieri potest sit G centrum, et jungantur GA, GD, GB. itaque quoniam DA est aequalis DB, communis autem DG, erunt duae AD, DG duabus BD, DG aequales, altera alteri, et basis GA aequalis est basi GB, sunt enim ex centro G; angulus igitur ADG

- c. 8. 1. angulo GDB est aequalis<sup>c</sup>. cum autem recta linea super rectam lineam insistens angulos qui  
 d. 10. Def. 1. deinceps sunt aequales inter se fecerit, rectus<sup>d</sup> est uterque aequalium angulorum; ergo angulus GDB est rectus. sed et rectus est FDB; aequalis igitur est angulus FDB angulo GDB, major minori, quod fieri non potest. quare G non est circuli ABC centrum. similiter ostendimus neque aliud esse praeter ipsum F. ergo F centrum est circuli ABC. Quod erat inveniendum.



COR.

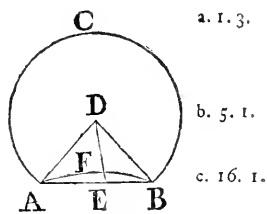
COR. Ex hoc manifestum est, si in circulo recta linea, rectam lineam bifariam et ad angulos rectos fecet, in secante erit centrum circuli.

## PROP. II. THEOR.

**S**I in circumferentia circuli duo quaevis puncta sumantur, quae ipsa conjungit recta linea intra circulum cadet.

Sit circulus ABC, et in circumferentia ipsius sumantur duo quaevis puncta A, B; dico rectam lineam a puncto A ad B ductam, intra circulum cadere.

Non enim, sed si fieri potest cadat extra ut AEB; et sumatur circuli ABC centrum<sup>a</sup>, et sit D, junganturque AD, DB, occurratque DE circumferentiae in F. Quoniam igitur DA est aequalis DB, erit et angulus DAB aequalis<sup>b</sup> angulo DBA; et quoniam trianguli DAE unum latus AEB producitur, erit angulus DEB angulo DAE major<sup>c</sup>; angulus autem DAE aequalis est angulo DBE, ergo DEB angulus angulo DBE est major. sed majori angulo majus latus subtenditur<sup>d</sup>; d. 19. 1. major igitur est DB ipsa DE. aequalis autem est DB ipsi DF; ergo DF est major DE, minor majore, quod fieri non potest. recta igitur linea a puncto A ducta ad B non cadet extra circulum. similiter ostendemus neque in ipsam cadere circumferentiam. cadet igitur intus. si igitur in circumferentia &c. Q. E. D.

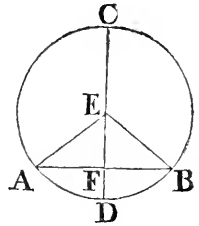


## PROP. III. THEOR.

**S**I in circulo recta linea per centrum ducta, rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam fecet; et ad angulos rectos ipsam fecabit. quod si ad angulos rectos ipsam fecet, et bifariam fecabit.

Sit circulus ABC, et in ipso recta linea per centrum ducta CD rectam lineam quandam AB non ductam per centrum bifariam fecet in puncto F. dico et ad angulos rectos ipsam fecare.

- a. 1. 3. Sumatur enim circuli ABC centrum<sup>a</sup>, et sit E, et EA, EB jungantur. Quoniam igitur AF est aequalis FB, communis autem FE, duae AF, FE duabus BF, FE aequales sunt, et basis EA basi EB est aequalis; ergo et angulus AFE angulo BFE aequalis erit<sup>b</sup>. cum autem recta linea super rectam insistens, angulos qui deinceps sunt, aequales inter se fecerit, rectus est uterque aequalium angulorum<sup>c</sup>. uterque igitur AFE, BFE est rectus; quare recta linea CD per centrum ducta rectam lineam AB non ductam per centrum bifariam fecans, et ad angulos rectos ipsam fecabit.



Sed fecet CD ipsam AB ad rectos angulos, dico et bifariam ipsam fecare, hoc est AF ipsi FB aequalem esse.

- Idem enim constructis, quoniam EA quae ex centro est aequalis EB, et angulus EAF angulo EBF aequalis erit<sup>d</sup>; est autem et AFE rectus aequalis recto BFE. duo igitur triangula sunt EAF, EBF quae duos angulos duobus angulis aequales habent, unumque latus uni lateri aequale, EF commune scilicet utrisque, quod uni aequalium angulorum subtenditur; ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt<sup>e</sup>.

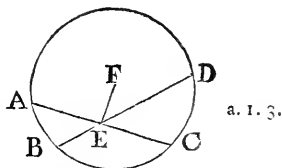
bebunt<sup>e</sup>. aequalis igitur est AF ipsi FB. si igitur in circulo recta li- e. 26. 1.  
nea &c. Q. E. D.

## PROP. IV. THEOR.

**S**I in circulo duae rectae lineae non ductae per centrum  
se invicem fecent, sese bifariam non fecabunt.

Sit circulus ABCD, et in ipso duae rectae lineae AC, BD se invi-  
cem fecent in puncto E, non ductae per centrum. dico eas sese bifa-  
riam non fecare.

Si enim fieri potest, fecent sese bifariam, ita ut AE sit aequalis EC,  
et BE ipsi ED. si igitur una rectarum per centrum transit, manifestum  
est eam non posse bifariam secari ab altera quae  
non transit per centrum. si vero neutra ipsarum  
per centrum transit, sumatur centrum ABCD cir-  
culi<sup>a</sup>, et sit F, et EF jungatur. Quoniam igitur recta linea FE per centrum ducta rectam li-  
neam AC non ductam per centrum bifariam  
secat, et ad rectos angulos ipsam secabit<sup>b</sup>; quare rectus est FEA an-  
gulus. rursus quoniam recta linea FE rectam lineam BD non ductam  
per centrum bifariam secat, et ad angulos rectos ipsam secabit<sup>b</sup>; rectus  
igitur angulus est FEB. ostensus autem est rectus et FEA; ergo FEA  
angulus ipsi FEB aequalis erit, minor majori, quod fieri non potest.  
non igitur AC, BD sese bifariam fecant. si igitur in circulo &c.  
Q. E. D.



b. 3. 3.

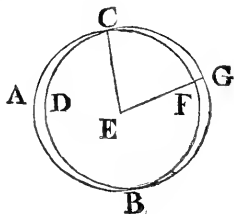
## PROP. V. THEOR.

**S**I duo circuli se invicem fecent, non erit ipsorum idem  
centrum.

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

Duo enim circuli ABC, CDG se invicem secant in punctis B, C. dico ipsorum idem centrum non esse.

Si enim fieri potest, sit centrum E; jungaturque EC, et EFG utcumque ducatur. et quoniam E centrum est circuli ABC, erit CE ipsi EF aequalis. rursus quoniam E centrum est CDG circuli, aequalis est CE ipsi EG. sed ostensa est CE aequalis EF; ergo FE ipsi EG aequalis erit, minor majori, quod fieri non potest. non igitur punctum E centrum est circulorum ABC, CDG. si igitur duo circuli &c. Q. E. D.

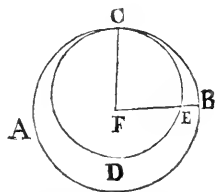


## PROP. VI. THEOR.

**S**I duo circuli sese intra contingant, ipsorum idem centrum non erit.

Duo enim circuli ABC, CDE contingant sese intra in puncto C. dico ipsorum non esse idem centrum.

Si enim fieri potest, sit F; jungaturque FC, et FEB utcumque ducatur. Quoniam igitur F centrum est circuli ABC, aequalis est CF ipsi FB. rursus quoniam F centrum est circuli CDE, erit CF aequalis FE. ostensa autem est CF aequalis FB; ergo et FE ipsi FB est aequalis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur F punctum centrum est circulorum ABC, CDE. si igitur duo circuli &c. Q. E. D.

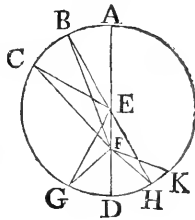


## PROP. VII.

## PROP. VII. THEOR.

**S**I in circuli diametro aliquod punctum sumatur quod non sit centrum circuli, et ab eo in circumferentiam cadant quaevis rectae lineae; maxima quidem erit in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum autem propinquier ei quae per centrum transit semper remotiore maior est. at duae tantum aequales ab eodem puncto in circumferentiam cadent ad utrafque partes minimae.

Sit circulus ABCD, diameter autem ejus AD, et in ipsa AD sumatur aliquod punctum F quod non sit centrum circuli; sit autem centrum circuli E, et a puncto F in circumferentiam ABCD cadant quaedam rectae lineae FB, FC, FG. dico FA maximam esse, et FD minimam; reliquarum autem, FB quidem majorem quam FC, FC vero majorem quam FG.



a. 20. 1.

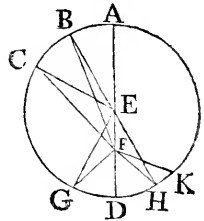
Jungantur enim BE, CE, GE; et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo sunt majora<sup>a</sup>, erunt BE, EF majores quam BF; est autem AE aequalis BE, ergo BE, EF ipsi AF sunt aequales; major igitur est AF quam FB. rursus quoniam BE est aequalis CE, communis autem FE; duae BE, EF duabus CE, EF aequales sunt; sed BEF angulus major est angulo CEF, basis igitur BF basi FC est major<sup>b</sup>. eadem ratione et CF major est quam FG. rursus<sup>b</sup> quoniam GF, FE majores sunt quam EG<sup>c</sup>, aequalis autem EG ipsi ED, erunt GF, FE majores quam ED. communis auferatur FE; ergo reliqua GF major est quam reliqua FD. maxima igitur est FA, et FD minima; major vero BF quam FC, et FC quam FG.

b. 24. 1.

Dico

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

- Dico et a puncto F duas tantum rectas lineas aequales cadere in circumferentiam ABCD ad utrasque partes minimae FD. constituantur enim ad rectam lineam EF, et ad punctum
- c. 23. 1. in ea E, angulo GEF aequalis angulus ° FEH, et FH jungatur. Quoniam igitur GE est aequalis EH, communis autem EF, duae GE, EF duabus HE, EF aequales sunt; et angulus GEF est aequalis angulo HEF; basis igitur FG basi FH aequalis erit<sup>d</sup>. dico a puncto F ad circumferentiam non cadere aliam ipsi FG aequalem. si enim fieri potest, cadat FK, et quoniam FK est aequalis FG, estque ipsi FG aequalis FH, crit et FK ipsi FH aequalis, videlicet propinquior ei quae per centrum transit aequalis remotiori; quod fieri non potest. si igitur in circuli &c. Q. E. D.



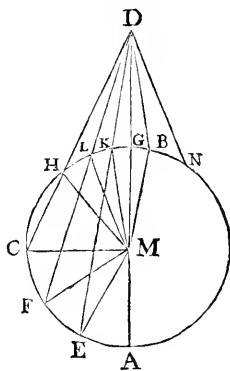
## PROP. VIII. THEOR.

**S**I extra circulum aliquod punctum sumatur, atque ab eo ad circumferentiam ducantur quaedam rectae lineae, quarum una per centrum transeat, reliquae vero utcunque; earum quidem quae in concavam circumferentiam cadunt, maxima est quae per centrum transit; aliarum autem propinquior ei quae per centrum, semper remotiore major est. at earum quae in convexam circumferentiam cadunt, minima est quae inter punctum et diametrum interjicitur; aliarum vero quae propinquior minimae, semper remotiore est minor. duae autem tantum aequales a puncto in circumferentiam cadunt ad utrasque partes minimae.



Sit circulus ABC, et extra circulum sumatur aliquod punctum D; ab eo autem ad circumferentiam ducantur rectae lineae quaedam DA, DE, DF, DC, sitque DA per centrum. dico earum quidem quae in concavam circumferentiam AEFB cadunt maximam esse DA quae per centrum transit; et quae propinquior est ei quae per centrum semper major erit remotiore, videlicet DE quidem quam DF, DF vero quam DC: earum vero quae in convexam circumferentiam HLKG cadunt, minimam esse DG quae inter punctum D et diametrum AG interjicitur, et quae propinquior minimae semper est minor remotiore, videlicet DK quam DL, et DL quam DH.

Sumatur enim centrum circuli <sup>a</sup> ABC, quod sit M, et jungantur ME, MF, MC, MK, ML, MH. et quoniam AM est aequalis ME, communis apponatur MD, ergo AD est aequalis ipsis EM, MD; sed EM, MD sunt majores quam ED<sup>b</sup>, ergo et AD quam ED est major. rursus quoniam aequalis est ME ipsi MF, communis autem MD, crunt EM, MD ipsis FM, MD aequales; at angulus EMD major est angulo FMD, basis igitur ED basi FD major erit<sup>c</sup>. similiter ostendemus et FD majorem esse quam CD. c. 24. 1. ergo maxima est DA; major autem DE quam DF, et DF quam DC. et quoniam MK, KD sunt majores quam MD<sup>b</sup>, et MK est aequalis MG, erit reliqua KD quam reliqua GD major<sup>d</sup>, quare GD minor quam KD; minima igitur est GD. et quoniam super trianguli MLD uno latere MD, duae rectae lineae MK, KD intra constituuntur, erunt MK, KD minores ipsis ML, LD<sup>e</sup>, quarum MK est aequalis e. 21. 1. ML; reliqua igitur DK minor est quam reliqua DL. similiter ostendemus,



a. I. 3.

b. 20. 1.

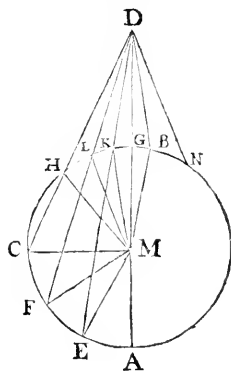
c. 24. 1.

d. Ax. 4.

e. 21. 1.

mus,

mus, et DL quam DH minorem esse. ergo DG minima est, minor vero DK quam DL, et DL quam DH. dico etiam duas tantum aequales a puncto D in circumferentiam cadere ad utraque minimae partes. constituatur ad rectam lineam MD, et ad punctum in ea M, angulo KMD aequalis angulus DMB, et DB jungatur. itaque quoniam MK est aequalis MB, communis autem MD, duae KM, MD duabus BM, MD aequales sunt, altera alteri, et angulus KMD aequalis angulo BMD; l. 4. 1. basi igitur DK basi DB est aequalis<sup>f</sup>. dico autem a puncto D aliam ipsi DK aequalem in circumferentiam non cadere. si enim fieri potest, cadat DN; et quoniam DK est aequalis DN, et DK ipsi DB est aequalis, erit et DB aequalis DN, propinquior scilicet minimae aequalis remotiori, quod fieri non posse ostensum est. si igitur extra circumulum &c. Q. E. D.



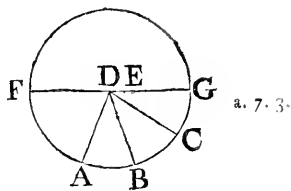
## PROP. IX. THEOR.

**S**I intra circumulum fumatur aliquod punctum, atque ab eo ad circumferentiam cadant plures quam duae rectae lineae aequales; punctum quod fumitur circumuli centrum erit.

Sumatur enim intra circumulum ABC punctum aliquod D, atque a puncto D ad circumferentiam cadant plures quam duae rectae lineae aequales DA, DB, DC. dico punctum D centrum esse circumuli AEC.

Non enim; sed si fieri potest, sit E centrum, et juncta DE ad puncta

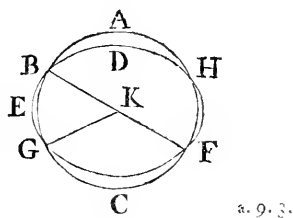
puncta F, G producat; ergo FG diameter est circuli ABC. itaque quoniam in FG diametro circuli ABC sumptum est aliquod punctum D quod non est centrum circuli, maxima quidem erit DG, major autem DC quam DB, et DB quam DA<sup>a</sup>. sed et aequalis quod fieri non potest; non igitur E centrum est circuli ABC. similiter ostendimus neque aliud punctum centrum esse praeter ipsum D; est igitur D centrum circuli ABC. si igitur intra circulum &c. Q. E. D.



PROP. X. THEOR.

**C**IRCULUS circulum in pluribus quam duobus punctis non secat. 'N. B. Hoc de ipsorum circumferentiis intelligendum est.'

Si enim fieri potest, circulus ABC circulum DEF secet in pluribus punctis quam duobus, nempe in B, G, F, et circuli ABC centrum sumatur K, et KB, KG, KF jungantur. Quoniam igitur intra circulum DEF sumptum est aliquod punctum K, et ab ipso K in circumferentiam DEF incidant plures quam duae rectae lineae aequales KB, KG, KF, erit punctum K circuli DEF centrum<sup>a</sup>.

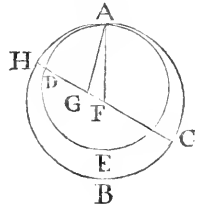


est autem et K circuli ABC centrum; duorum igitur circulorum qui sese secant idem est centrum, quod fieri non potest<sup>b</sup>. quare circulus b. 5. 3. circulum in pluribus quam duobus punctis non secat. Q. E. D.

## PROP. XI. THEOR.

**S**I duo circuli sese intus contingant. et sumantur centra ipsorum; recta linea ipsorum centra conjungens producta in circulorum contactum cadet.

Duo enim circuli ABC, ADE sese intus contingant in puncto A, et sumatur circuli quidem ABC centrum F, circuli vero ADE centrum G. dico rectam lineam conjungentem puncta G, F, si producat, in punctum A cadere.



Non enim; sed si fieri potest, cadat ut FGDH, et AF, AG jungantur. itaque quoniam AG, 2. 20. 1. GF majores sunt quam FA hoc est quam FH, (est enim FA aequalis ipsi FH, nam ab eodem sunt centro) communis auferatur FG, reliqua igitur AG major est quam reliqua GH. sed AG est aequalis GD, ergo GD ipsa GH est major, minor majore, quod fieri non potest. non igitur puncta F, G conjungens recta linea extra contactum A cadet. cadet igitur in ipsum. si igitur duo circuli &c. Q. E. D.

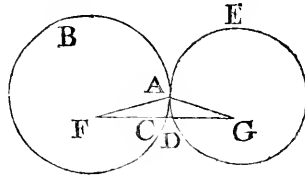
## PROP. XII. THEOR.

**S**I duo circuli sese extra contingant, recta linea ipsorum centra conjungens per contactum transibit.

Duo enim circuli ABC, ADE sese extra contingant in puncto A; et sumatur circuli quidem ABC centrum F, circuli vero ADE centrum G. dico rectam lineam puncta F, G conjungentem per contactum A transire.

Non

Non enim, sed, si fieri potest, cadat ut FCDG, et FA, AG jungantur. quoniam igitur F centrum est circuli ABC, erit AF aequalis FC. rursus quoniam G centrum est ADE circuli, erit AG ipsi GD aequalis. sunt igitur FA. AG ipsi FC, DG aequales: ergo tota FG major est quam FA, AG. sed et minor<sup>b</sup>; quod fieri non potest. non igitur a. 20. 1.

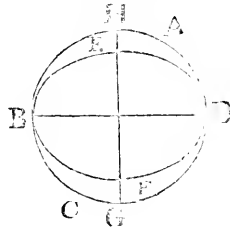
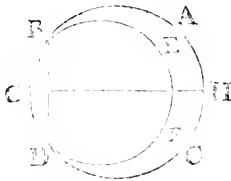


puncta E, G conjungens recta linea per contactum non transibit. per ipsum igitur transit. si igitur duo circuli &c. Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

**C**IRCULUS circulum non contingit in pluribus punctis quam uno, sive intus sive extra contingat.

Si enim fieri potest, circulum ABC circulus EBFc ontingat primum intus in pluribus punctis quam uno, videlicet in B, D; jungatur BD, et ducatur \* GH bifariam et ad rectos angulos secans ipsam BD. Quoniam \* 10, 11. 1:

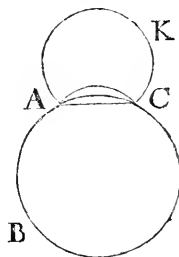


igitur puncta B, D sunt in circumferentia utriusque circuli, recta BD cadet intra utrumque circulum<sup>a</sup>. igitur in recta GH quae ipsam BD bifariam et ad rectos angulos secat, erit utriusque circuli centrum<sup>b</sup>; et igitur GH b. Cor. 1. 3.

e. 11. 3. producta cadet in circulorum contactum<sup>c</sup>; sed, in contactum non cadit, quia B, D puncta sunt extra rectam GH, quod est absurdum. non igitur circulus circulum intus contingit in pluribus punctis quam uno.

Dico etiam neque extra contingere; si enim fieri potest circulum ABC contingat circulus AKC in pluribus punctis quam uno, videlicet in A, C, et AC jungatur. itaque quoniam in circumferentia circuli AKC sumpta sunt duo puncta A, C recta linea AC

a. 2. 3. quae ipsa conjungit intra circulum AKC cadet<sup>a</sup>. est autem circulus AKC extra circulum ABC, quare recta AC est extra ABC circulum; quoniam vero A, C puncta sunt in circumferentia ipsius ABC circuli, recta AC est intra<sup>a</sup> eundem, quod est absurdum. non igitur circulus circulum extra contingit in pluribus punctis quam uno. ostensum autem est neque intus. circulus igitur circulum non contingit in pluribus punctis quam uno, sive intus sive extra contingit. Q. E. D.



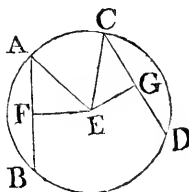
PROP. XIV. THEOR.

**I**N circulo aequales rectae lineae aequaliter a centro distant; et quae aequaliter a centro distant sunt inter se aequales.

Sit circulus ABDC, et in ipso aequales sint rectae lineae AB, CD. dico eas a centro aequaliter distare.

Sumatur enim circuli ABDC centrum, sitque E, et ab ipso ad AB, CD perpendiculares ducantur EF, EG, et AE, EC jungantur. Quoniam igitur recta linea quaedam EF per centrum ducta rectam lineam AB non ductam per centrum ad rectos angulos fecit, et ipsam bifariam

riam fecabit<sup>a</sup>. quare AF est aequalis FB, ideoque AB dupla est ipsius a. 3. 3. AF. eadem ratione, et CD dupla est CG. atque est AB ipsi CD aequalis; aequalis igitur et AF ipsi CG. et quoniam AE est aequalis EC, erit et quadratum ex AE quadrato ex EC aequale. sed quadrato quidem ex AE aequalia sunt ex AF, FE quadrata<sup>b</sup>, rectus enim est b. 47. 1. angulus ad F; quadrato vero ex EC aequalia sunt quadrata ex EG, GC, rectus est enim angulus ad G. quadrata igitur ex AF, FE aequalia sunt quadratis ex CG, GE, quorum quadratum ex AF est aequale quadrato ex CG, etenim aequalis est AF ipsi CG; reliquum igitur ex FE aequale est reliquo quadrato ex EG, quare recta FE ipsi EG est aequalis. in circulo autem aequaliter a centro distare rectae lineae dicuntur, quando a centro ad ipsas perpendiculares ductae aequales sunt<sup>c</sup>. igitur AB, CD a centro c. 4. Def. 3. aequaliter distant.



Sed AB, CD aequaliter distant a centro, hoc est, aequalis sit FE ipsi EG; dico AB ipsi CD aequalem esse. iisdem enim constructis, similiter ostendemus AB quidem duplam esse ipsius AF, CD vero ipsius CG. et quoniam aequalis est AE ipsi EC, erit et ex AE quadratum quadrato ex EC aequale. sed quadrato quidem ex AE aequalia sunt<sup>b</sup> quadrata ex EF, FA, quadrato vero ex EC aequalia<sup>b</sup> quadrata ex EG, GC; quadrata igitur ex EF, FA quadratis ex EG, GC aequalia sunt; quorum quadratum ex FE aequale est quadrato ex EG, est enim FE ipsi EG aequalis; reliquum igitur ex AF quadratum aequale est reliquo ex CG; est igitur recta linea AF aequalis ipsi CG. et est AB quidem dupla ipsius AF, CD vero dupla ipsius CG; aequalis igitur est AB ipsi CD. in circulo igitur aequales rectae lineae &c. Q. E. D.

## PROP. XV. THEOR.

**I**N circulo maxima quidem est diameter; aliarum vero semper propinquior centro remotiore major est; et quae major est, propinquior erit centro minore.

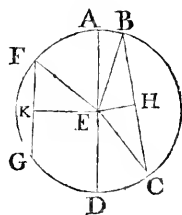
Sit circulus ABCD, cujus diameter AD, centrum vero E: et propinquior quidem centro sit BC, remotior autem FG. dico AD maximam esse, et BC majorem quam FG.

Ducantur enim a centro ad BC, FG perpendiculares EH, EK, et EB, EC, EF jungantur. Quoniam igitur aequalis est AE ipsi EB, et ED ipsi EC, erit AD aequalis ipsis BE, EC. sed  
 a. 20. 1. BE, EC majores sunt quam BC<sup>a</sup>, quare et AD quam BC major erit.

Et quoniam BC propinquior est centro, remotior vero FG, erit EK major quam EH<sup>b</sup>. est autem, ut in praecedente ostensum fuit, BC dupla ipsius BH, et FG dupla ipsius FK, et quadrata ex EH, HB aequalia quadratis ex EK, KF, quorum quadratum ex EH minus est quadrato ex EK, minor enim est EH ipsa EK; reliquum igitur quadratum ex BH reliquo ex FK majus erit, quare recta BH major erit ipsa FK; et propterea BC erit major quam FG.

Sed sit BC major quam FG, erit BC propinquior centro quam FG, hoc est, iisdem constructis, erit EH minor quam EK. Quoniam enim BC major est quam FG, erit et BH major quam FK. quadrata autem ex BH, HE aequalia sunt quadratis ex FK, KE, quorum ex BH quadratum quadrato ex FK est majus, est enim BH major quam FK; reliquum igitur quadratum ex EH reliquo ex EK minus erit, et recta linea EH minor erit quam EK. in circulo igitur &c. Q. E. D.

PROP. XVI.





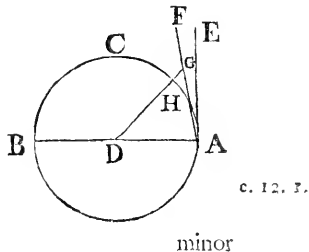
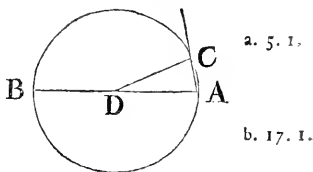
## PROP. XVI. THEOR.

**Q**UAE diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducta est, cadit extra circumulum; et in locum inter rectam lineam et circumferentiam recta linea non cadet; sive, quod idem est, circumferentia circuli transit inter rectam quae diametro est ad rectos angulos, et rectam quae cum diametro angulum acutum quantumvis magnum continet, vel quae angulum quantumvis parvum continet cum recta quae ad rectos angulos est diametro.

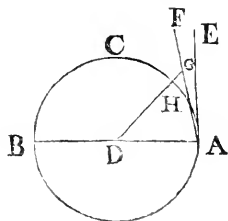
Sit circulus ABC circa centrum D, et diametrum AB; dico rectam lineam, quae ab extremitate A diametri ipsi AB ad rectos angulos ducta est, extra circumulum cadere.

Non enim; sed, si fieri potest, cadat intus ut AC, et DC jungatur. Quoniam igitur aequalis est DA ipsi DC, erit et angulus DAC angulo ACD aequalis<sup>a</sup>; rectus autem est DAC, rectus igitur est ACD; quare anguli DAC, ACD duobus rectis aequales sunt; quod fieri non potest<sup>b</sup>. non igitur a puncto A ipsi BA ad rectos angulos ducta cadet intra circumulum. similiter ostendemus neque in circumferentiam cadere; extra igitur cadet, ut AE, in figura sequente.

Dico in locum inter rectam lineam AE et circumferentiam ABC rectam lineam non cadere. si enim fieri potest, cadat ut FA, et a puncto D ad FA perpendicularis ducatur<sup>c</sup> DHG. et quoniam rectus est angulus AGD,



b. 17. 1. minor autem recto DAG<sup>b</sup>, erit DA quam DG major<sup>d</sup>. aequalis autem  
 d. 19. 1. est DA ipsi DH; major igitur est DH ipsa  
 DG, minor majore, quod fieri non potest. non  
 igitur in locum inter rectam lineam et circum-  
 ferentiam, recta linea cadet. sive, quod idem  
 est, circumferentia circuli transit inter rectam  
 quae diametro est ad rectos angulos, et rec-  
 tam quae cum diametro angulum acutum  
 quantumvis magnum continet, vel quae angu-  
 lum quantumvis parvum continet cum recta quae ad rectos angulos est  
 diametro. ‘Et hoc, nihil vero aliud, intelligendum est quando in textu  
 ‘Graeco et versionibus, semicirculi angulus dicitur major omni angulo  
 ‘acuto, et reliquis minor.’



COR. Ex his manifestum est rectam lineam quae ab extremitate dia-  
 metri circuli eidem ad rectos angulos ducta est, circumulum contingere; et  
 rectam lineam contingere circumulum in uno tantum puncto, quoniam quae  
 e. 2. 3. occurrit in duobus punctis intra ipsum cadere ostensa est<sup>c</sup>. ‘Et praeter-  
 ‘ca, unicam tantum rectam posse circumulum in eodem puncto contin-  
 ‘gere.’

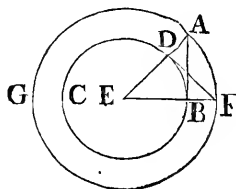
## PROP. XVII. PROB.

**A** Dato puncto extra circumulum, vel in ejus circumfe-  
 rentia, rectam lineam ducere quae datum circumulum  
 contingat.

Primo, sit datum punctum A extra datum circumulum BCD. oportet  
 a puncto A rectam lineam ducere quae datum circumulum contingat.  
 a. 1. 3. Sumatur enim centrum circuli E<sup>a</sup>, et AE jungatur; et centro qui-  
 dem E, intervallo autem EA circumulum AFG describatur; et a puncto D  
 ipsi

ipſi EA ad rectos angulos ducatur <sup>b</sup> DF, junganturque EBF, AB. dico b. 11. 1. a puncto A ductam eſſe AB quae circumulum BCD contingit.

Quoniam enim E centrum eſt circumulorum BCD, AFG, erit EA aequalis EF, et ED ipſi EB; duae igitur AE, EB duabus FE, ED aequales ſunt, et angulum commune ad E continent; ergo baſis DF baſi AB eſt aequalis, triangulumque EDF aequale triangulo EBA, et reliqui anguli reliquis angulis <sup>c</sup>. aequalis igitur eſt angulus EBA angulo EDF. rectus autem eſt EDF, rectus igitur eſt EBA. atque eſt EB ex centro; quae autem diametro circumuli ab extremitate ad rectos angulos ducta eſt, circumulum contingit <sup>d</sup>. con-d. Cor. 16. 3. tingit igitur AB circumulum.



c. 4. 1.

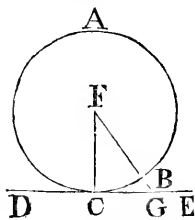
‘ Sit autem datum punctum in circumferentia circumuli, ut punctum D, et ad centrum E ducatur DE, et a puncto D, ipſi DE ad rectos angulos ducatur <sup>b</sup> DF; contingit <sup>d</sup> haec circumulum.’ A dato igitur puncto ducta eſt recta linea quae datum circumulum contingit. Q. E. F.

PROP. XVIII. THEOR.

**SI** circumulum contingat quaedam recta linea, a centro autem ad tactum recta linea ducatur, ducta ad contingentem perpendicularis erit.

Circulum enim ABC contingat quaedam recta linea DE in puncto C, et circumuli ABC ſumatur centrum F, et ab F ad C ducatur FC; dico FC ad ipſam DE perpendicularem eſſe.

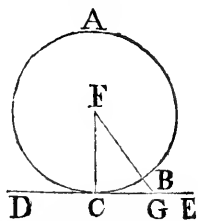
Si enim non ſit, ducatur a puncto F ad DE



M

perpendicularis <sup>a</sup>

a. 12. 1. perpendicularis<sup>a</sup> FBG. Quoniam igitur angulus FGC rectus est, erit  
 b. 17. 1. GCF acutus<sup>b</sup>; majorem autem angulum ma-  
 c. 19. 1. jus latus subtendit<sup>c</sup>. major igitur est FC quam  
 FG; aequalis autem FC ipsi FB; major igitur  
 est FB ipsâ FG, minor majore, quod fieri  
 non potest. non igitur FG est perpendicularis  
 ad DE. similiter ostendemus neque aliam  
 quampiam praeter ipsam FC. est igitur FC per-  
 pendicularis ad DE. si igitur circumulum contingat &c. Q. E. D.

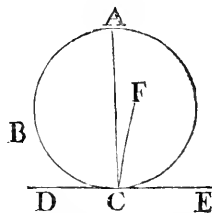


## PROP. XIX. THEOR.

**S**I circumulum contingat quaedam recta linea, a tactu au-  
 tem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur;  
 in ducta erit centrum circuli.

Circulum enim ABC contingat quaedam recta linea DE in C, et a  
 C ipsi DE ad rectos angulos ducatur CA; dico in ipsa CA centrum  
 circuli esse.

Non enim; sed, si fieri potest, sit F centrum, et jungatur CF.  
 quoniam igitur circumulum ABC contingit quae-  
 dam recta linea DE, et a centro ad tactum  
 ducta est FC, erit FC ad ipsam DE perpendi-  
 a 18. 3. cularis<sup>a</sup>; rectus igitur angulus est FCE. est au-  
 tem et ACE rectus; angulus igitur FCE est  
 aequalis ipsi ACE, minor majori, quod fieri  
 non potest. non igitur F centrum est circuli  
 ABC. similiter ostendemus neque aliud aliquod esse praeterquam in  
 ipsa CA, centrum igitur est in CA. quare si circumulum contingat &c.  
 Q. E. D.



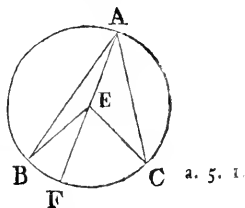
## PROP. XX.

## PROP. XX. THEOR.

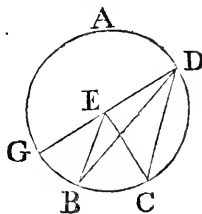
**I**N circulo angulus qui ad centrum duplus est ejus qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem pro basi habent.

Sit circulus ABC, et ad centrum quidem ejus sit angulus BEC, ad circumferentiam vero BAC, habeant autem eandem circumferentiam BC pro basi; dico BEC angulum anguli BAC duplum esse.

Primo, sit centrum E intra angulum BAC, et jungatur AE et ad F producatur. quoniam igitur EA est aequalis EB, erit et angulus EAB angulo EBA aequalis<sup>a</sup>; anguli igitur EAB, EBA dupli sunt ipsius EAB; sed angulus BEF est aequalis angulis EAB, EBA<sup>b</sup>; ergo et angulus BEF ipsius EAB est duplus. *ea-b. 32. 1* eadem ratione et angulus FEC duplus est ipsius EAC. totus igitur BEC totius BAC duplus erit.



Rursus inflectatur BDC ad circumferentiam, ita ut centrum E sit extra angulum BDC, junctaque DE ad G producatur. similiter ostendemus angulum GEC anguli GDC duplum esse, quorum GEB duplus est ipsius GDB; reliquus igitur BEC reliqui BDC est duplus. in circulo igitur angulus &c. Q. E. D.



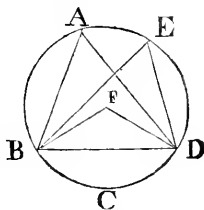
## PROP. XXI. THEOR.

**I**N circulo qui in eodem segmento sunt anguli inter se aequales sunt.

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

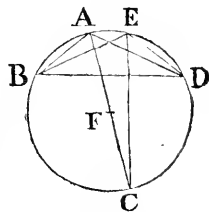
Sit circulus ABCD, et in eodem segmento BAED anguli sint BAD, BED; dico eos inter se aequales esse.

Sumatur enim circuli ABCD centrum, fitque F. et primo, fit BAED segmentum majus semicirculo, et jungantur BF, FD. et quoniam angulus quidem BFD est ad centrum, angulus vero BAD ad circumferentiam, et circumferentiam eandem BCD pro basi habent, erit BFD angu-



a. 20. 3. lus anguli BAD duplus<sup>a</sup>. eadem ratione angulus BFD duplus est etiam anguli BED. angulus igitur BAD angulo BED aequalis erit.

Sit vero segmentum BAED non majus semicirculo, et in ipso sint anguli BAD, BED, erunt hi inter se aequales. ad centrum enim F ducatur AF, et producatur ad C, et CE jungatur. segmentum igitur BAEC majus est semicirculo, quare anguli in eo BAC, BEC sunt inter se aequales. eadem ratione aequales inter se sunt anguli CAD, CED. totus igitur angulus BAD toti BED est aequalis. in circulo igitur qui in eodem segmento sunt anguli, inter se aequales sunt. Q. E. D.



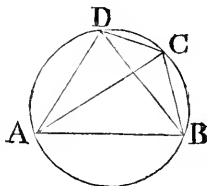
## PROP. XXII. THEOR.

**Q**UADRILATERORUM quae in circulis sunt, anguli oppositi sunt duobus rectis aequales.

Sit circulus ABCD, et in ipso quadrilaterum ABCD; dico angulos ipsius oppositos duobus rectis aequales esse.

Jungantur AC, BD; quoniam igitur omnis trianguli tres anguli a. 32. 1. duobus rectis sunt aequales<sup>a</sup>, erunt trianguli ABC tres anguli CAB, ABC,

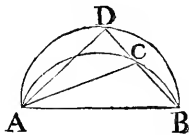
ABC, BCA aequales duobus rectis. aequalis <sup>b</sup> autem est angulus CAB <sup>b. 21. 3.</sup> angulo CDB, in eodem enim sunt segmento BADC; angulus vero ACB aequalis est ipsi ADB, sunt enim in eodem segmento ADCB. totus igitur ADC angulis BAC, ACB aequalis est. communis apponatur ABC angulus; anguli igitur ABC, CAB, BCA angulis ABC, ADC sunt aequales. sed ABC, CAB, BCA sunt duobus rectis aequales; ergo et anguli ABC, ADC duobus rectis aequales erunt. similiter ostendemus angulos quoque BAD, DCB duobus rectis esse aequales. quadrilaterorum igitur quae in circulis sunt &c. Q. E. D.



PROP. XXIII. THEOR.

**SUPER** eadem recta linea duo circularum segmenta similia, et non sibi mutuo congruentia, ex eadem parte non constituentur.

Si enim fieri potest, super eadem recta linea AB duo circularum segmenta ACB, ADB similia, et sibi mutuo non congruentia, ex eadem parte constituentur. quoniam igitur circulus ACB circulum ADB secat in duobus punctis A, B, idem eundem non secabit in alio puncto <sup>a</sup>. necesse igitur est ut unum segmentum cadat intra alterum; cadat ACB intra ipsum ADB, et ducatur recta linea BCD, junganturque CA, DA. itaque quoniam segmentum ACB simile est segmento ADB, similia autem circularum segmenta sunt quae angulos capiunt aequales <sup>b</sup>; erit ACB angulus aequalis angulo ADB, <sup>b. 11. Def. 3.</sup> exterior interiori, quod fieri non potest <sup>c</sup>. non igitur super eadem recta <sup>e. 16. 1.</sup>



a. 10. 3.

linea,

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

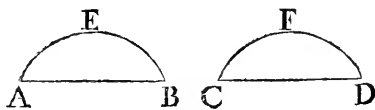
linea, duo circularum segmenta, similia, et sibi mutuo non congruentia, ex eadem parte constituentur. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

**SUPER** aequalibus rectis lineis similia circularum segmenta inter se aequalia sunt.

Sint enim super aequalibus rectis lineis AB, CD similia circularum segmenta AEB, CFD; dico segmentum AEB segmento CFD aequale esse.

Applicato enim segmento AEB segmento CFD, et posito quidem puncto A in C, recta vero linea AB super CD, congruet et B punctum



puncto D, propterea quod AB ipsi CD sit aequalis. non igitur, congruente recta linea AB ipsi CD, non congruet segmentum AEB segmento CFD<sup>a</sup>. congruet igitur et ipsi aequale erit. super aequalibus igitur rectis lineis &c. Q. E. D.

PROP. XXV. PROB.

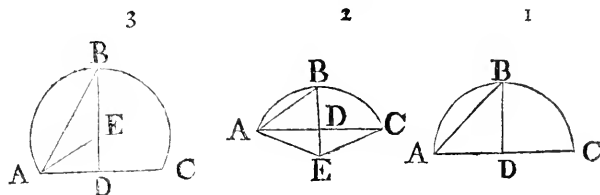
**CIRCULI** segmento dato describere circulum cujus est segmentum.

Sit datum circuli segmentum ABC; oportet describere circulum cujus ABC est segmentum.

a. 10. 1. Secetur AC bifariam<sup>a</sup> in D, et a puncto D ipsi AC ad rectos angulos



gulos ducatur<sup>b</sup> DB, et AB jungatur. si igitur \* anguli ABD, BAD inter se aequales fuerint, erit recta BD aequalis<sup>c</sup> ipsi DA, et propterea<sup>b. 11. 1. \* Fig. 1. c. 6. 1.</sup> ipsi DC. et quoniam tres rectae lineae DA, DB, DC sunt inter se aequales, erit D centrum circuli<sup>d</sup>. centro igitur D, intervallo autem uni<sup>d. 9. 3.</sup> ipsarum DA, DB, DC aequali, circulus describatur; transibit hic per reliqua puncta, et circulus cujus segmentum est ABC descriptus erit. quoniam vero centrum D est in ipsa AC, erit ABC segmentum semicirculus. si autem \* anguli ABD, BAD inter se inaequales fuerint, ad<sup>\* Fig. 2, 3.</sup> rectam lineam AB atque ad punctum in ea A constituatur angulus BAE aequalis angulo<sup>e</sup> ABD, et DB ad E producatur, jungaturque EC.<sup>c. 23. 1.</sup> Quoniam igitur angulus ABE est aequalis angulo BAE, erit et BE



recta linea ipsi EA aequalis<sup>e</sup>. et quoniam AD est aequalis DC, communis autem DE, duae AD, DE duabus CD, DE aequales sunt, altera alteri; et angulus ADE est aequalis angulo CDE, rectus enim uterque est; igitur et basis AE basi EC est aequalis<sup>f</sup>. sed ostensa est AE aequalis<sup>f. 4. 1.</sup> EB, quare et BE ipsi EC est aequalis; ac propterea tres rectae lineae AE, EB, EC inter se aequales sunt; quare et E centrum est circuli<sup>d</sup>. centro igitur E, intervallo autem uni ipsarum AE, EB, EC aequali, circulus describatur, hic per reliqua transibit puncta, et circulus cujus segmentum est ABC descriptus erit. et manifestum est si angulus ABD major fuerit angulo BAD, centrum E cadere extra segmentum ABC, quod propterea minus erit semicirculo. si autem angulus ABD minor

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

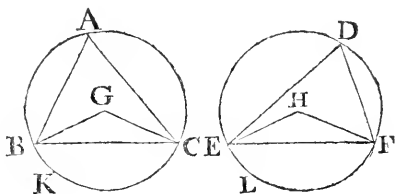
minor fuerit ipso  $BAD$ , centrum  $E$  cadet intra segmentum  $ABC$ , quod propterea majus erit semicirculo. Circuli igitur segmento dato, descriptus est circulus cujus est segmentum.  $Q. E. F.$

## PROP. XXVI. THEOR.

**I**N aequalibus circulis aequales anguli aequalibus insistunt circumferentiis, sive ad centra, sive ad circumferentias insistunt.

Sint aequales circuli  $ABC$ ,  $DEF$ , et in ipsis aequales anguli ad centra quidem  $BGC$ ,  $EHF$ , ad circumferentias autem  $BAC$ ,  $EDF$ . dico  $BKC$  circumferentiam circumferentiae  $ELF$  aequalem esse.

Jungantur enim  $BC$ ,  $EF$ ; et quoniam aequales sunt  $ABC$ ,  $DEF$  circuli, erunt et quae ex centris aequales; duae igitur  $BG$ ,  $GC$  duabus  $EH$ ,  $HF$  aequales sunt; et angulus ad  $G$  est aequalis angulo ad



- a. 4. 1.  $EH$ ; basis igitur  $BC$  basi  $EF$  est aequalis<sup>a</sup>. et quoniam aequalis est angulus ad  $A$  angulo ad  $D$ , segmentum  $BAC$  simile erit segmento<sup>b</sup>  $EDF$ ; et sunt super aequalibus rectis lineis  $BC$ ,  $EF$ ; quae autem super aequalibus rectis lineis similia sunt circulorum segmenta, inter se aequalia c. 24. 3. sunt<sup>c</sup>; segmentum igitur  $BAC$  segmento  $EDF$  est aequale. sed et totus  $ABC$  circulus aequalis est toti  $DEF$ , reliquum igitur segmentum  $BKC$

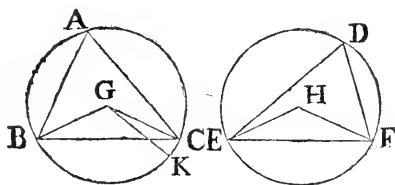
BKC reliquo ELF est aequale; circumferentia igitur BKC circumferentiae ELF aequalis crit. in aequalibus igitur circulis &c. Q. E. D.

## PROP. XXVII. THEOR.

**I**N aequalibus circulis anguli qui aequalibus insunt circumferentiis inter se aequales sunt, sive ad centra, sive ad circumferentias insistant.

In aequalibus enim circulis ABC, DEF, aequalibus circumferentiis BC, EF insistant anguli ad centra quidem BGC, EHF, ad circumferentias vero BAC, EDF. dico angulum BGC angulo EHF, et angulum BAC angulo EDF aequalem esse.

Si quidem igitur angulus BGC aequalis sit angulo EHF, manifestum est angulum quoque BAC angulo EDF esse aequalem<sup>a</sup>. fin minus unus a. 20. 3.



ipforum est major. fit major BGC, et constituatur ad rectam lineam BG, et ad punctum in ipsa G, angulo EHF aequalis angulus<sup>b</sup> BGK; b. 23. 1. aequales autem anguli aequalibus insunt circumferentiis quando ad centra fuerint<sup>c</sup>; aequalis igitur est circumferentia BK circumferentiae e. 26. 3. EF. sed EF aequalis est ipsi BC, ergo et BK ipsi BC est aequalis, minor majori, quod fieri non potest. non igitur inaequalis est angulus BGC angulo EHF; ergo est aequalis. atque est anguli quidem BGC dimidium angulus qui ad A, anguli vero EHF dimidium qui ad D<sup>a</sup>.

N

angulus

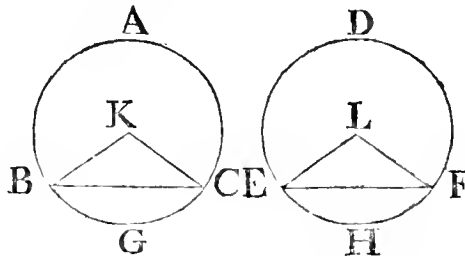
angulus igitur qui ad A angulo qui ad D est aequalis. in aequalibus igitur circulis &c. Q. E. D.

## PROP. XXVIII. THEOR.

**I**N aequalibus circulis aequales rectae lineae circumferentias aequales auferunt, majorem quidem majori, minorem vero minori.

Sint aequales circuli ABC, DEF, et in ipsis aequales rectae lineae BC, EF quae circumferentias quidem BAC, EDF majores auferant, minores vero BGC, EHF. dico circumferentiam BAC majorem majori EDF, et minorem circumferentiam BGC minori EHF aequalem esse.

a. 1. 3. Sumantur enim centra circulorum<sup>a</sup> K, L junganturque BK, KC, EL, LF. et quoniam circuli aequales sunt, erunt et quae ex centris aequales,



duae igitur BK, KC sunt aequales duabus EL, LF; et basis BC aequalis est basi EF, angulus igitur BKC angulo ELF est aequalis<sup>b</sup>. aequales autem anguli aequalibus insunt circumferentiis quando ad centra fuerint<sup>c</sup>, circumferentia igitur BGC aequalis est circumferentiae EHF; sed et totus ABC circulus toti EDF est aequalis; reliqua igitur circumferentia BAC reliquae EDF aequalis erit. ergo in aequalibus circulis &c. Q. E. D.

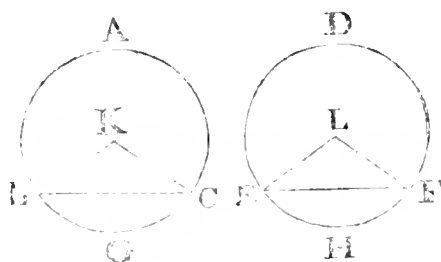
## PROP. XXIX.

## PROP. XXIX. THEOR.

**I**N aequalibus circulis aequales circumferentias aequales  
rectae lineae subtendunt.

Sint aequales circuli ABC, DEF, et in ipsis aequales sumantur circumferentiae BGC, EHF, et BC, EF jungantur. dico rectam lineam BC rectae EF aequalem esse.

Sumantur enim centra circulorum<sup>a</sup> K, L, et jungantur BK, KC, EL, LF. et quoniam circumferentia BGC est aequalis circumferentiae EHF,



erit et angulus BKC angulo ELF aequalis<sup>b</sup>. et quoniam circuli ABC, DEF sunt aequales, et quae ex centris aequales crunt; duae igitur BK, KC sunt aequales duabus EL, LF, et aequales angulos continent. basis igitur BC basi EF est aequalis<sup>c</sup>. in aequalibus igitur circulis &c. c. 4. 1. Q. E. D.

## PROP. XXX. PROB.

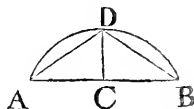
**D**ATAM circumferentiam bifariam fecare.

Sit data circumferentia ADB, oportet ADB circumferentiam bifariam fecare.

Jungatur AB, et in C bifariam fecetur<sup>a</sup>; a puncto autem C ipsi AB<sup>a. 10. 1.</sup>

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

ad rectos angulos ducatur CD, et jungantur AD, DB. Quoniam igitur AC est aequalis CB, communis autem CD, duae AC, CD duabus BC, CD aequales sunt; et angulus ACD aequalis angulo BCD, rectus enim uterque est; basis igitur AD basi BD est



- b. 4. 1. aequalis<sup>b</sup>. aequales autem rectae lineae circumferentias aequales au-  
 c. 28. 3. ferunt<sup>c</sup>, majorem quidem majori, minorem vero minori, et est utraque  
 ipsarum AD, DB femicirculo minor; circumferentia igitur AD circum-  
 ferentiae DB est aequalis. Data igitur circumferentia bifariam secta est.  
 Q. E. F.

## PROP. XXXI. THEOR.

**I**N circulo angulus qui in femicirculo, rectus est; qui vero in majori segmento, minor est recto; et qui in minori, major recto.

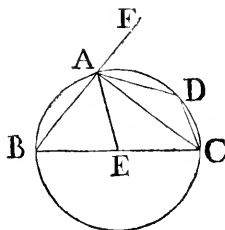
Sit circulus ABCD, diameter autem ejus sit BC, centrum vero E; et ducatur CA circumulum dividens in segmento ABC, ADC, et jungantur BA, AD, DC. Dico angulum quidem qui est in femicirculo BAC rectum esse, qui vero in segmento ABC majore femicirculo, videlicet angulum ABC, minorem esse recto, et qui est in segmento ADC minore femicirculo, sc. ADC angulum, recto majorem esse.

- Jungatur AE, et BA ad F producat. itaque quoniam BE est  
 a. 5. 1. aequalis EA, erit et angulus EAB aequalis ipsi EBA<sup>a</sup>; rursus quoniam  
 AE est aequalis EC, aequalis erit et angulus EAC angulo ECA<sup>a</sup>; totus igitur angulus BAC est aequalis duobus angulis ABC, ACB. est autem et angulus FAC extra triangulum ABC, duobus ABC, ACB aequa-  
 b. 32. 1. lis<sup>b</sup>; angulus igitur BAC est aequalis angulo FAC, ac propterea uter-  
 a. 10. Def. 1. que ipsorum rectus<sup>c</sup>. quare in femicirculo BAC angulus CAB rectus est.

Et

Et quoniam trianguli ABC duo anguli ABC, BAC duobus rectis sunt minores<sup>d</sup>, rectus autem BAC, erit ABC angulus recto minor; at-d. 17. 1. que est in segmento ABC majore semicirculo.

Et quoniam in circulo quadrilaterum est ABCD, quadrilaterorum vero qui in circulis describuntur, anguli oppositi duobus rectis sunt aequales<sup>e</sup>, erunt ABC, ADC anguli aequales duobus rectis; et angulus ABC minor est recto, reliquus igitur ADC recto major erit; atque est in segmento ADC minore semicirculo. Q. E. D.



Et patet circumferentiam AB cadere extra rectam AB quae cum AC basi se. segmenti continet angulum rectum versus partes majoris segmenti ABC, circumferentiam vero AD cadere intra rectam AF quae cum eadem AC angulum rectum continet versus partes minoris segmenti ADC. ‘Et hoc, nihilque aliud, intelligendum est quando in textu Graeco et versione<sup>f</sup> bus, angulus segmenti majoris, major; angulus vero segmenti minoris minor esse dicitur angulo recto.’

COR. Ex hoc manifestum est, si trianguli unus angulus sit aequalis duobus reliquis, cum rectum esse; propterea quod et qui deinceps est, iidem est aequalis. quando autem anguli deinceps sunt aequales, recti sunt<sup>g</sup>.

c. Def. 10. 1.

PROP. XXXII. THEOR.

**S**I circulum contingat quaedam recta linea, a tactu autem ducatur recta linea circulum secans; anguli quos ad contingentem facit, aequales erunt iis qui sunt in alternis circuli segmentis.

Circulum

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

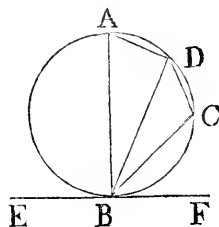
Circulum enim ABCD contingat quaedam recta linea EF in B, et a puncto B ad circulum ABCD ducatur recta linea BD ipsum fecans. dico angulos quos BD facit cum contingente EF aequales esse iis qui sunt in alternis circuli segmentis, hoc est angulum quidem FBD esse aequalem angulo qui est in DAB segmento, angulum vero DBE aequalem angulo in segmento BCD.

a. 11. 1. Ducatur enim a puncto B ipsi EF ad rectos angulos <sup>a</sup> BA, et in circumferentia BD sumatur quodvis punctum C, junganturque AD, DC, CB. et quoniam circulum ABCD contingit recta linea EF in puncto B, et a tactu B ad rectos angulos contingenti ducta est BA, erit

b. 19. 3. in ipsa BA centrum ABCD circuli<sup>b</sup>; angulus

a. 31. 3. igitur ADB in semicirculo est rectus<sup>c</sup>; reliqui propterea anguli BAD, ABD uni recto aequales sunt<sup>d</sup>. sed et ABF est rectus; ergo angulus ABF aequalis est angulis BAD, ABD.

d. 32. 1. communis auferatur ABD; reliquus igitur DBF ei qui est in alterno circuli segmento, ipsi scilicet BAD, aequalis est. et quoniam in circulo quadrilaterum est ABCD, anguli ejus oppositi aequales sunt duobus rectis<sup>e</sup>; aequales igitur erunt anguli BAD, BCD ipsis DBF, DBE<sup>f</sup>, quorum DBF ostensus est aequalis ipsi BAD; reliquus igitur DBE ei qui est in alterno circuli segmento, videlicet angulo DCB aequalis erit. si igitur circulum contingat &c. Q. E. D.



e. 22. 3.  
f. 13. 1.

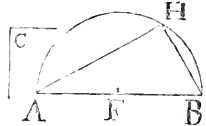
## PROP. XXXIII. PROB.

**S**UPER datam rectam lineam describere segmentum circuli, quod capiat angulum dato angulo rectilineo aequalem.

Sic



Sit data recta linea AB, datus autem angulus reſtilineus qui ad C; itaque oportet ſuper datam rectam lineam AB deſcribere ſegmentum circuli, quod capiat angulum aequalem angulo qui eſt ad C.

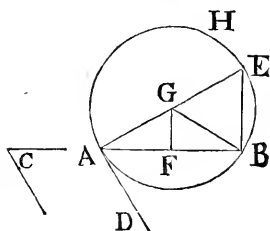


a. 10. 1.

Et primum ſit angulus ad C reſtus, et bifariam ſecetur <sup>a</sup> AB in F, centroque F, et intervallo FA deſcribatur ſemicirculus AHB; erit igitur angulus AHB in ſemicirculo aequalis reſto angulo <sup>b</sup> ad C. b. 31. 3.

Non autem ſit angulus ad C reſtus, et ad rectam lineam AB, et ad punctum in ea A conſtituatur angulus BAD angulo qui eſt ad C aequalis <sup>c</sup>,

a puncto vero A ipſi AD ad reſtos angulos ducatur <sup>d</sup> AE; ſecetur <sup>a</sup> autem AB bifariam in F, atque a puncto F ducatur FG ad reſtos angulos <sup>d</sup> ipſi AB, et GB jungatur. et quoniam AF eſt aequalis FB, communis autem FG, duae AF, FG duabus BF, FG ſunt aequales; et angulus AFG aequalis eſt angulo BFG;



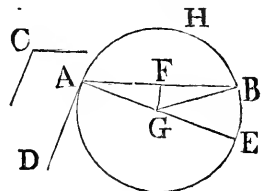
c. 23. 1.

d. 11. 1.

basi igitur AG baſi GB eſt aequalis <sup>e</sup>. itaque centro quidem G inter-

vallo vero GA circulus deſcriptus tranſibit etiam per B. deſcribatur et

ſit AHB. Quoniam igitur a puncto A extremitate diametri AE ducta eſt AD ad reſtos angulos ipſi AE, continget AD circulum <sup>f</sup>. et quoniam circulum AHB contingit recta linea AD, et a taſtu ad A ducta eſt recta linea AB ſecans circulum,



f. 16. 3.

erit angulus DAB aequalis angulo in alterno circuli ſegmento AHB. ſed angulus DAB angulo ad C eſt aequalis, ergo et angulus ad C angulo in ſegmento AHB aequalis erit. ſuper datam igitur rectam lineam

AB

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

AB segmentum circuli descriptum est AHB quod capiat angulum dato angulo ad C aequalem. Q. E. F.

## PROP. XXXIV. PROB.

**A** Dato circulo segmentum abscindere quod capiat angulum dato angulo rectilineo aequalem.

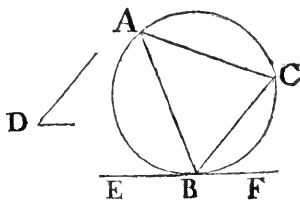
Sit datus circulus ABC, datus autem angulus rectilineus qui ad D. oportet a circulo ABC segmentum abscindere quod capiat angulum angulo ad D aequalem.

a. 17. 3. Ducatur recta linea EF circulum ABC in puncto B contingens<sup>a</sup>, et

b. 23. 1. ad rectam lineam BF et ad punctum in ea B constituatur angulus FBC angulo qui est ad D aequalis<sup>b</sup>. Quoniam

igitur circulum ABC contingit quaedam recta linea EF, et a tactu B ducta est BC, erit angulus FBC aequalis ei qui in alterno circuli segmento BAC con-

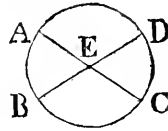
c. 32. 3. stituitur<sup>c</sup>. sed FBC angulus angulo qui ad D est aequalis; angulus igitur in segmento BAC angulo ad D aequalis erit. A dato igitur circulo ABC abscissum est segmentum BAC capiens angulum dato angulo rectilineo qui est ad D aequalem. Q. E. F.



## PROP. XXXV. THEOR.

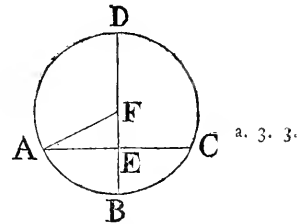
**S**I in circulo duae rectae lineae sese mutuo secent, rectangulum a segmentis unius contentum, aequale est rectangulo contento segmentis alterius.

In circulo enim ABCD duae rectae lineae AC, BD sese mutuo fecerit in puncto E; dico rectangulum contentum ipsis AE, EC aequale esse rectangulo quod continetur ipsis BE, ED.



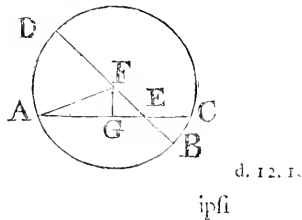
Si igitur AC, BD per centrum transeant, ita ut E sit centrum circuli ABCD, manifestum est, aequalibus existentibus AE, EC, BE, ED, et rectangulum contentum ipsis AE, EC aequale esse rectangulo quod BE, ED continetur.

Transeat autem una rectarum BD per centrum, secetque ad angulos rectos alteram AC per centrum non transeuntem in E. Bifariam igitur secta BD in F, erit F centrum circuli ABCD; jungatur vero AF. et quoniam BD per centrum ducta rectam lineam AC non ductam per centrum ad rectos angulos secat in E, aequales inter se erunt <sup>a</sup> AE, EC. Quoniam vero recta linea BD secta est in partes aequales in F, et in partes inaequales in E, erit rectangulum contentum ipsis BE, ED una cum quadrato ex EF aequale quadrato ex FB<sup>b</sup>, hoc est ex FA; quadrato vero b. 5. 2.



ex FA aequalia sunt quadrata ex AE, EF<sup>c</sup>; rectangulum igitur BE, ED una cum quadrato ex EF aequale est quadratis ex AE, EF. commune auferatur quadratum ex EF, reliquum igitur rectangulum BE, ED reliquo quadrato ex AE, hoc est rectangulo contento AE, EC aequale erit.

Sed BD per centrum ducta secet alteram AC per centrum non ductam, sed non ad angulos rectos, in puncto E. rursus igitur, bifariam secta BD in F, erit F centrum circuli. Jungatur AF, a centro vero F ducatur ad AC perpendicularis <sup>d</sup> FG; est igitur AG aequalis



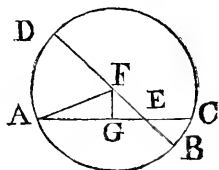
O

ipfi

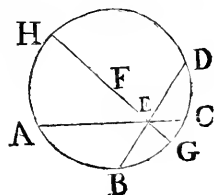
- a. 3.3. ipsi  $GC^a$ , et propterea rectangulum  $AE, EC$  una cum quadrato ex  
 b. 5.2.  $EG$  aequale est quadrato ex  $AG^b$ . commune addatur ex  $GF$  quadratum, rectangulum igitur  $AE, EC$  una cum quadratis ex  $EG, GF$  aequale est quadratis ex  $AG, GF$ . sed quadratis quidem ex  $EG, GF$  aequale est quadratum ex  $EF$ ; quadratis vero  
 c. 47.1. ex  $AG, GF$  aequale est ex  $AF$  quadratum<sup>c</sup>.

Ergo rectangulum  $AE, EC$  una cum quadrato ex  $EF$  aequale est quadrato ex  $AF$ , hoc est ex  $FB$ . quadrato vero ex  $FB$  aequale est rectangulum  $BE, ED$  una cum quadrato ex  $EF^b$ ;

ergo rectangulum  $AE, EC$  una cum quadrato ex  $EF$  aequale est rectangulo  $BE, ED$  una cum quadrato ex  $EF$ . commune auferatur ex  $EF$  quadratum, reliquum igitur rectangulum  $AE, EC$  reliquo rectangulo  $BE, ED$  aequale erit.



Denique neutra rectarum  $AC, BD$  per centrum transeat, sumatur igitur centrum circuli  $ABCD$ , sitque  $F$ , et per  $E$  intersectionem scilicet rectarum  $AC, BD$  ducatur diameter  $GEFH$ . et quoniam rectangulum  $AE, EC$  ostensum est aequale rectangulo  $GE, EH$ ; et similiter rectangulum  $BE, ED$  est aequale eidem  $GE, EH$  rectangulo; erit rectangulum contentum  $AE, EC$  aequale contento ipsis  $BE, ED$  rectangulo. Quare si in circulo duae rectae lineae &c.  $Q. E. D.$

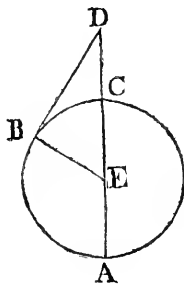


## PROP. XXXVI. THEOR.

**S**I extra circulum aliquod punctum fumatur, et ab eo in circulum cadant duae rectae lineae, quarum altera quidem circulum fecerit, altera vero contingat; rectangulum quod a terra secante, et exterius assumpta inter punctum et convexam circumferentiam continetur, aequale erit quadrato ex contingente.

Extra circulum enim AFC fumatur aliquod punctum D, et ab eo ad circulum cadant duae rectae lineae DCA, DB; et DCA quidem circulum fecerit, DB vero contingat. dico rectangulum ab AD, DC contentum quadrato ex DB aequale esse.

Vel igitur DCA per centrum transit vel non; primum transeat per centrum, sitque E centrum circuli ABC, et EB jungatur; erit igitur angulus EBD rectus<sup>a</sup>. et quoniam recta linea AC bifariam secta est in E, et ipsi adjicitur CD, rectangulum ab AD, DC, una cum quadrato ex EC aequale erit quadrato ex ED<sup>b</sup>. aequalis autem est CE ipsi EB, rectangulum igitur ab AD, DC una cum quadrato ex EB aequale est quadrato ex ED. sed quadratum ex ED est aequale quadrato ex ipsis EB, BD<sup>c</sup>, rectus enim angulus est EBD. rectangulum igitur ab AD, DC una cum quadrato ex EB aequale est quadrato ex EB, BD. commune auferatur quadratum ex EB, reliquum igitur ab AD, DC rectangulum aequale erit quadrato ex contingente DB.



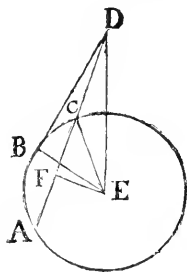
a. 18. 3.

b. 6. 2.

c. 47. 1.

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

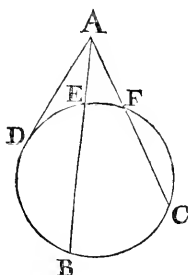
Sed DCA non transeat per centrum circuli ABC, fumaturque cen-  
 d. 1. 3. trum <sup>d</sup> E, et ad AC perpendicularis ducatur EF <sup>e</sup>, et jungantur EB, EC,  
 e. 12. 1. ED; rectus igitur est EFD angulus. et quoniam recta linea quaedam  
 EF per centrum ducta, rectam lineam AC non ductam per centrum  
 f. 3. 3. ad rectos angulos secat, et bifariam ipsam secabit<sup>f</sup>; aequalis igitur est  
 AF ipsi FC. et quoniam recta linea AC bifariam secata est in F, at-  
 que ipsi adjicitur CD, erit rectangulum ab AD, DC una cum quadrato  
 h. 6. 2. ex FC aequale quadrato ex FD<sup>b</sup>. commune apponatur ex FE qua-  
 dratum, rectangulum igitur ab AD, DC una cum quadratis ex CF, FE  
 est aequale quadratis ex DF, FE. sed quadratis quidem ex DF, FE



aequale est quadratum ex ED, etenim rectus est angulus EFD; qua-  
 dratis vero ex CF, FE aequale est quadratum ex EC; rectangulum igitur  
 ab AD, DC una cum quadrato ex CE est aequale quadrato ex  
 ED. aequalis autem est CE ipsi EB, rectangulum igitur ab AD, DC  
 una cum quadrato ex EB, aequale est ex ED quadrato. sed qua-  
 a. 18. 3. drato ex ED aequalia sunt quadrata ex EB, BD, siquidem rectus <sup>a</sup> est  
 angulus EED; ergo rectangulum ab AD, DC una cum quadrato ex  
 EB aequale est quadratis ex EB, BD. commune auferatur quadratum  
 ex EB, reliquum igitur ab AD, DC rectangulum quadrato ex DB ac-  
 quale erit. si igitur extra circulum &c. Q. E. D.

COR.

COR. Hinc si a puncto quovis extra circulum ducantur rectae lineae AB, AC circulum secantes, rectangula contenta totis, et parti-



bus externis, viz. rectangula BA, AE; CA, AF inter se sunt aequalia. utrumque enim ipsorum aequale est quadrato ex contingente AD.

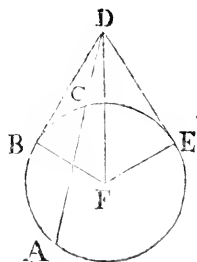
## PROP. XXXVII. THEOR.

**S**I extra circulum sumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duae rectae lineae, quarum altera quidem circulum secet, altera vero incidat; sit autem rectangulum contentum a tota secante et exterius assumpta inter punctum et convexam circumferentiam aequale quadrato ex incidente; quae incidit circulum continget.

Extra circulum enim ABC sumatur aliquod punctum D, atque ab ipso in circulum cadant duae rectae lineae DCA, DB, et DCA quidem circulum secet, DB vero incidat; sitque rectangulum ab AD, DC aequale quadrato ex DB. Dico ipsam DB circulum ABC contingere.

Ducatur enim recta linea DE contingens circulum<sup>a</sup> ABC, et sumatur a. 17. §. tur

- tur centrum circuli F, junganturque FE, FB, FD; rectus igitur est an-  
 b. 18. 3. gulus FED<sup>b</sup>. et quoniam DE circulum ABC contingit, fecat autem  
 DCA, rectangulum ab AD, DC aequale erit  
 c. 36. 3. quadrato ex DE<sup>c</sup>. sed rectangulum AD, DC  
 ponitur aequale quadrato ex DB; quadratum  
 igitur ex DE quadrato ex DB aequale erit, ac  
 propterea DE erit ipsi DB aequalis. est autem  
 et FE aequalis FB, duae igitur DE, EF dua-  
 bus DB, BF aequales sunt, et basis communis  
 d. 8. 1. FD; angulus igitur DEF est aequalis ipsi DBF<sup>d</sup>,  
 rectus autem est DEF, ergo et DBF est rectus,  
 atque FB producta est diameter, quae vero diametro circuli ad rectos  
 e. 16. 3. angulos ab extremitate ducitur, circulum contingit<sup>e</sup>. circulum igitur  
 ABC contingit DB. si igitur extra circulum &c. Q. E. D.





## E U C L I D I S

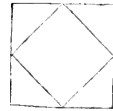
## E L E M E N T O R U M

## LIBER QUARTUS.

## DEFINITIONES.

I.

**F**IGURA rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, quando unusquisque figurae inscriptae angulus, unumquodque latus ejus in qua inscribitur tangit.

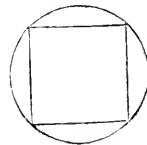


II.

Figura similiter circa figuram circumscribi dicitur, quando unumquodque latus circumscriptae, unumquemque angulum ejus circa quam circumscribitur tangit.

III.

Figura rectilinea in circulo inscribi dicitur, quando unusquisque inscriptae figurae angulus circuli circumferentiam tangit.



Figura

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

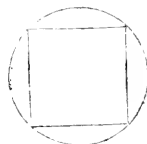
## IV.

Figura reſtilinea circa circulum dicitur circumſcribi, quando unumquodque latus circumſcriptae, circuli circumferentiam contingit.



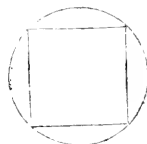
## V.

Circulus ſimiliter in figura reſtilinea inſcribi dicitur, quando circuli circumferentiam unumquodque latus ejus in qua inſcribitur contingit.



## VI.

Circulus circa figuram reſtilineam circumſcribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ejus circa quam circumſcribitur tangit.



## VII.

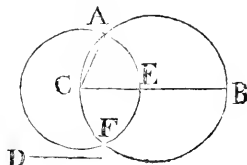
Reſta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus extrema in circuli circumferentia fuerint.

## PROP. I. PROB.

**I**N dato circulo datae reſtae lineae, quae diametro ejus major non ſit, aequalem reſtam lineam aptare.

Sit datus circulus ABC, data autem reſta linea D, non major circuli diametro; oportet in circulo ABC reſtae lineae D aequalem reſtam lineam aptare.

Ducatur circuli ABC diameter BC; ſiquidem igitur BC ſit aequalis ipſi D, factum jam erit quod proponebatur; etenim in



circulo

circulo ABC aptata est BC rectae lineae D aequalis. sin minus, major est BC quam D, ponaturque ipsi D aequalis CE<sup>a</sup>, et centro quidem C, a. 3. 1 intervallo autem CE circulus describatur AEF, et CA jungatur. Quoniam igitur punctum C centrum est AEF circuli, erit CA ipsi CE aequalis; sed D est aequalis CE, ergo et D ipsi CA aequalis crit. In dato igitur circulo ABC datae rectae lineae D, non majori circuli diametro, aequalis aptata est AC. Q. E. F.

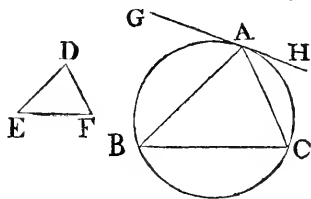
PROP. II. PROB.

**I**n dato circulo, triangulo dato aequiangulum triangulum inscribere.

Sit datus circulus ABC, datum autem triangulum DEF; oportet in ABC circulo inscribere triangulum triangulo DEF aequiangulum.

Ducatur recta linea GAH contingens circulum<sup>a</sup> ABC in puncto a. 17. 3. A, et ad rectam lineam AH, et ad punctum in ea A, angulo DEF aequalis angulus constituatur<sup>b</sup> HAC; ad rectam vero AG, et ad punctum in ea A, angulo DFE aequalis constituatur angulus GAB, et BC jungatur. Quoniam igitur circulum ABC contingit recta linea HAG, a tactu autem ducta est AC, crit HAC angulus aequalis angulo in alterno circuli segmento<sup>c</sup>,

videlicet ipsi ABC. sed HAC aequalis est ipsi DEF, ergo et angulus ABC ipsi DEF est aequalis. eadem ratione et ACB est aequalis angulo DFE; reliquis igitur BAC reliquo EDF angulo est aequalis<sup>d</sup>. d. 32. 1. ergo triangulum ABC triangulo DEF est aequiangulum, et inscriptum



o. 32. 3.

P

est

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

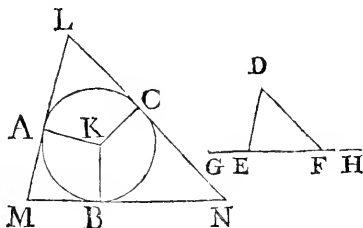
est in circulo ABC. In dato igitur circulo dato triangulo aequiangulum triangulum inscriptum est. Q. E. F.

## PROP. III. PROB.

**C**IRCA datum circulum triangulo dato aequiangulum triangulum circumscribere.

Sit datus circulus ABC, datum autem triangulum DEF; oportet circa ABC circulum triangulum circumscribere triangulo DEF aequiangulum.

Protrahatur ex utraque parte EF ad puncta G, H, et fumatur circuli ABC centrum K, et recta linea KB utcumque ducatur; constituanturque ad rectam lineam KB, et ad punctum in ea K, angulo quidem  
 a. 23. 1. DEG aequalis angulus<sup>a</sup> BKA, angulo autem DFH aequalis angulus<sup>a</sup> BKC; et per A, B, C puncta ducantur rectae lineae LAM, MBN, NCL circulum ABC contingentes<sup>b</sup>. Quoniam igitur circulum ABC contingunt LM, MN, NL in punctis A, B, C, a centro autem K ad A, B, C puncta ductae sunt KA, KB, KC, erunt  
 c. 18. 3. anguli ad puncta A, B, C recti<sup>c</sup>. et quoniam quadrilateri AMBK



anguli quatuor, quatuor rectis aequales sunt, etenim in duo triangula dividitur, quorum anguli KAM, KBM sunt recti, erunt reliqui AKB, AMB duobus rectis aequales. sunt autem et DEG, DEF aequales duobus rectis<sup>d</sup>; anguli igitur AKB, AMB angulis DEG, DEF aequales sunt, quorum AKB ipse DEG est aequalis; reliquus igitur AMB reliquo DEF aequalis erit. similiter ostendetur angulus LNM ipse DFE aequalis;

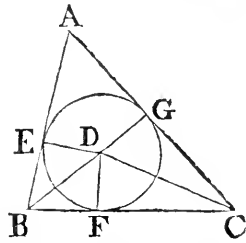
qualis; ergo et reliquus  $MLN$  est aequalis reliquo  $^{\circ} EDF$ . aequiangulum igitur est  $LMN$  triangulum triangulo  $DEF$ , et circumscriptum est circa  $ABC$  circulum. Circa datum igitur circulum, dato triangulo aequiangulum triangulum circumscriptum est. Q. E. F.

PROP. IV. PROB.

**I**n dato triangulo circulum inscribere.

Sit datum triangulum  $ABC$ ; oportet in triangulo  $ABC$  circulum inscribere.

Secentur anguli  $ABC$ ,  $BCA$  bifariam <sup>a</sup> rectis lineis  $BD$ ,  $CD$  quae <sup>a. 9. 1.</sup> convenient inter se in  $D$  puncto, et a puncto  $D$  ad rectas lineas  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  perpendiculares ducantur <sup>b</sup>  $DE$ ,  $DF$ ,  $DG$ . et quoniam angulus  $EBD$  est aequalis ipsi  $FBD$ , bifariam enim sectus est  $ABC$ , est autem et rectus  $BED$  recto  $BFD$  aequalis, erunt duo triangula  $EBD$ ,  $FBD$  duos angulos duobus angulis aequales habentia, et unum latus  $BD$  utrique commune, quod scilicet uni aequalium angulorum subtenditur; reliqua igitur latera reliquis lateribus aequalia habebunt<sup>c</sup>, <sup>e. 26. 1.</sup> et erit  $DE$  aequalis  $DF$ . eadem ratione et  $DG$  aequalis erit  $DF$ ; tres igitur rectae lineae  $DE$ ,  $DF$ ,  $DG$  inter se aequales sunt; quare centro  $D$ , intervallo autem unius ipsarum  $DE$ ,  $DF$ ,  $DG$  circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, et rectas lineas  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  continget, propterea quod recti sunt anguli ad  $E$ ,  $F$ ,  $G$  puncta; quae enim diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur circulum contingit<sup>d</sup>. circulum igitur contingit unaquaeque ipsarum  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ , <sup>d. 16. 3.</sup>



## EUCLIDIS ELEMENTORUM

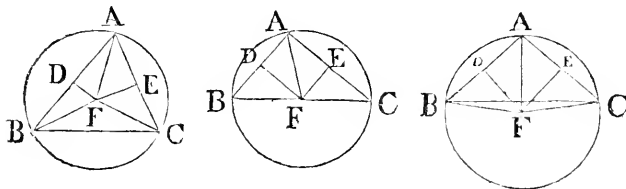
atque erit circulus inscriptus in triangulo ABC. In dato igitur triangulo ABC circulus EFG inscriptus est. Q. E. F.

PROP. V. PROB.

### CIRCA datum triangulum circulum circumscribere.

Sit datum triangulum ABC; oportet circa datum triangulum ABC circulum circumscribere.

- a. 10. 1. Secentur AB, AC bifariam<sup>a</sup> in D, E punctis, et a punctis D, E  
 b. 11. 1. ipsis AB, AC ad rectos angulos ducantur<sup>b</sup> DF, EF, quae quidem productae necessario convenient, nam si non conveniunt, erunt inter se parallelae; quare AB, AC quae ipsis sunt ad rectos angulos erunt parallelae, quod est absurdum; convenient in F, et BF, FC, FA jungantur. Quoniam igitur AD est aequalis DB, communis autem et ad rectos an-



- c. 4. 1. gulos DF, erit basis AF basi FB aequalis<sup>c</sup>. similiter ostendemus et CF aequalem FA; ergo et BF est aequalis FC; tres igitur FA, FB, FC inter se aequales sunt. centro igitur F, intervallo autem unius ipsarum FA, FB, FC circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta; atque erit circulus circumscriptus circa triangulum ABC. Circa datum igitur triangulum circumscriptus est circulus. Q. E. F.

COR. Et manifestum est, si centrum circuli intra triangulum ceciderit, unumquemque ejus angulum minorem esse recto<sup>d</sup>, quoniam unumquisque

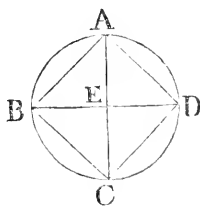
quisque est in segmento femicirculo majore. si autem in uno laterum fuerit centrum, angulus cui latus hoc subtenditur, in femicirculo existens, rectus erit. et si extra triangulum ceciderit centrum, ad partes alicujus lateris, angulus cui subtenditur hoc latus existens in segmento femicirculo minore, major erit recto<sup>d</sup>. Quare si datum triangulum acutangu-<sup>d. 31. 3.</sup> lum fuerit, centrum circuli erit intra triangulum; si rectangulum fuerit, erit centrum in latere angulo recto opposito; et si fuerit obtusangulum, cadet centrum extra triangulum, ad partes lateris obtuso angulo oppositi.

## PROP. VI. PROB.

**I**N dato circulo quadratum inscribere.

Sit datus circulus ABCD; oportet in ABCD circulo quadratum inscribere.

Ducantur circuli ABCD diametri ad rectos angulos inter se AC, BD; et AB, BC, CD, DA jungantur. Quoniam igitur BE est aequalis ED, etenim centrum est E, communis autem et ad rectos angulos EA; erit basis BA aequalis basi AD<sup>a</sup>. et eadem ratione utraque ipsarum BC, CD, utrique BA, AD est aequalis; aequilaterum igitur est ABCD quadrilaterum. Dico et rectangulum esse. Quoniam enim recta linea BD diameter est ABCD circuli, erit BAD femicirculus; quare angulus BAD rectus est<sup>b</sup>. et eadem ratione unus-<sup>b. 31. 3.</sup> quisque ipsorum ABC, BCD, CDA est rectus; rectangulum igitur est ABCD quadrilaterum. ostensum autem est et aequilaterum esse, quadratum igitur est; et inscriptum est in circulo ABCD. In dato igitur ABCD circulo quadratum ABCD inscriptum est. Q. E. F.



a. 4. 1.

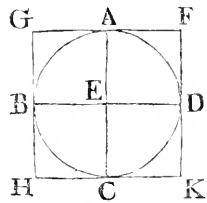
PROP. VII.

## PROP. VII. PROB.

## CIRCA datum circulum quadratum circumscribere.

Sit datus circulus ABCD; oportet circa ABCD circulum quadratum circumscribere.

- Ducantur circuli ABCD duae diametri AC, BD ad rectos inter se angulos, et per puncta A, B, C, D ducantur circulum ABCD contin-
- a. 17. 3. gentes <sup>a</sup> FG, GH, HK, KF. Quoniam igitur FG contingit circulum ABCD, a centro autem E ad tactum qui est ad A ducta est EA,
- b. 18. 3. erunt anguli ad A recti<sup>b</sup>. eadem ratione et anguli ad puncta B, C, D recti sunt. et quoniam angulus AEB rectus est, est autem et rectus EBG,
- c. 28. 1. erit GH ipsi AC parallela<sup>c</sup>. eadem ratione, et AC parallela est ipsi FK. similiter ostendemus et utramque ipsarum GF, HK ipsi BED parallelam esse. parallelogramma igitur sunt GK,
- d. 34. 1. GC, AK, FB, BK; aequalis<sup>d</sup> igitur est GF quidem ipsi HK, GH vero ipsi FK. et quoniam AC aequalis est BD, sed AC quidem utrique ipsarum GH, FK est aequalis; BD vero aequalis utrique GF, HK; erit et utraque GH, FK utrique GF, HK aequalis. aequilaterum igitur est FGHK quadrilaterum. Dico et rectangulum esse; quoniam enim parallelogrammum est GBEA, atque est rectus AEB angulus, rectus<sup>d</sup> erit et AGB. similiter ostendemus angulos etiam ad H, K, F rectos esse. rectangulum igitur est quadrilaterum FGHK. ostensum autem est aequilaterum; quadratum igitur est; et circumscriptum est circa ABCD circulum. circa datum igitur circulum quadratum circumscriptum est. Q. E. F.



PROP. VIII.

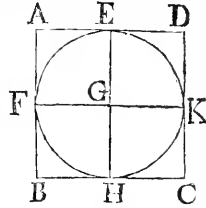


## PROP. VIII. PROB.

**I**N dato quadrato circulum inscribere.

Sit datum quadratum ABCD; oportet in quadrato ABCD circulum inscribere.

Secetur utraque ipsarum AB, AD bifariam<sup>a</sup> in punctis F, E, et per a. 10. 1. E quidem alterutri ipsarum AB, CD, parallela ducatur<sup>b</sup> EH, per F b. 31. 1. vero ducatur FK parallela alterutri AD, BC. parallelogrammum igitur est unumquodque ipsorum AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD, et latera ipsorum opposita sunt aequalia<sup>c</sup>. et quoniam AD est aequalis e. 34. 1. AB, et ipsius quidem AD dimidium est AE, ipsius vero AB dimidium AF; erit AE ipsi AF aequalis. quare et opposita latera sunt aequalia, ergo FG est aequalis GE. similiter ostendimus et utramque ipsarum GH, GK utrique FG, GE aequalem esse. quatuor igitur GE, GF, GH, GK inter se sunt aequales. itaque centro quidem G, intervallo autem unius ipsarum GE, GF, GH, GK circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, et rectas lineas AB, BC, CD, DA continget, propterea quod anguli ad E, F, H, K recti sunt<sup>d</sup>; d. 29. 1. quae enim diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur circulum contingit<sup>e</sup>. circulum igitur contingit unaquaeque ipsarum AB, e. 16. 3. BC, CD, DA, atque erit circulus in quadrato ABCD inscriptus. In dato igitur quadrato circulus inscriptus est. Q. E. F.



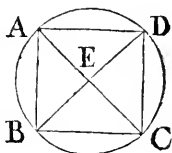
## PROP. IX. PROB.

**C**IRCA datum quadratum circulum circumscribere.

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

Sit datum quadratum ABCD; oportet circa ABCD quadratum circulum circumscribere.

- Jungantur enim AC, BD, quae se invicem fecerint in E. et quoniam DA est aequalis AB, communis autem AC, duae DA, AC duabus BA, AC aequales sunt; et basis DC est aequalis basi BC, quare angulus DAC angulo BAC aequalis erit<sup>a</sup>; angulus igitur DAB bifariam secus est rectâ lineâ AC. similiter ostendemus unumquemque angulorum ABC, BCD, CDA rectis lineis AC, BD bifariam sectum esse. Quoniam igitur angulus DAB angulo ABC est aequalis, atque est anguli quidem DAB dimidium EAB, ipsius vero ABC dimidium EBA, erit et EAB angulus aequalis ipsi EBA; igitur et
- a. 8. 1. DAC angulo BAC aequalis erit<sup>a</sup>; angulus igitur DAB bifariam secus est rectâ lineâ AC. similiter ostendemus unumquemque angulorum ABC, BCD, CDA rectis lineis AC, BD bifariam sectum esse. Quoniam igitur angulus DAB angulo ABC est aequalis, atque est anguli quidem DAB dimidium EAB, ipsius vero ABC dimidium EBA, erit et EAB angulus aequalis ipsi EBA; igitur et
- b. 6. 1. latus EA lateri EB est aequale<sup>b</sup>. similiter vero demonstrabimus et utramque rectarum linearum EC, ED utrique EA, EB aequalem esse. Quatuor igitur rectae lineae EA, EB, EC, ED inter se sunt aequales. centro igitur E intervallo autem unius ipsarum EA, EB, EC, ED circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, atque erit circa ABCD quadratum circumscriptus. Circa datum igitur quadratum circulus est circumscriptus. Q. E. F.



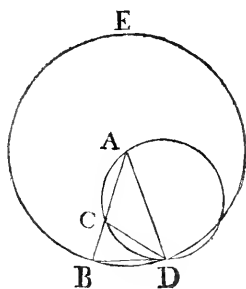
## PROP. X. PROB.

**I**SOSCELES triangulum constituere habens utrumque angulorum qui sunt ad basim duplum reliqui.

- a. 11. 2. Exponatur recta quaedam linea AB, et secetur in C puncto, ita ut rectangulum contentum ab AB, BC aequale sit quadrato ex CA<sup>a</sup>; et centro quidem A, intervallo autem AB circulus describatur BDE, appeturque in BDE circulo recta linea BD aequalis ipsi AC quae non est major

major diametro circuli BDE<sup>b</sup>; junganturque DA, DC, et circa ADC b. 1. 4. triangulum circulus ACD circumfcribatur<sup>c</sup>. Triangulum ifofceles ABD c. 5. 4. habebit utrumque angulorum ABD, ADB ad bafim, duplum reliqui BAD.

Quoniam enim reftangulum ab AB, BC aequale eft quadrato ex AC, aequalis autem eft AC ipfi BD, erit ab AB, BC reftangulum quadrato ex BD aequale. et quoniam extra circulum ACD fumptum eft punctum B, et a puncto B in circulum cadunt duae reftae lineae BCA, BD, et altera quidem ipfarum fecat, altera vero incidit, atque eft reftangulum ab AB, BC aequale quadrato ex BD; refta linea BD circulum continget<sup>d</sup>. quoniam igitur BD contingit, et a taetu D ducta eft DC, erit BDC angulus aequalis angulo in alterno circuli fegmento<sup>e</sup>, videlicet ipfi DAC; communis apponatur CDA; totus igitur BDA eft aequalis duobus angulis CDA, DAC. fed ipfis CDA, DAC aequalis eft exterior angulus BCD<sup>f</sup>; ergo et BDA aequalis eft ipfi BCD. fed BDA eft aequalis angulo CBD, quoniam et latus AD lateri AB eft aequale<sup>g</sup>; ergo et CBD, i. e. DBA ipfi BCD aequalis erit. tres igitur g. 5. 1. anguli BDA, DBA, BCD inter fe aequales funt. et quoniam angulus DBC aequalis eft angulo BCD, erit et latus BD lateri DC aequale<sup>h</sup>, h. 6. 1. fed BD ponitur aequalis ipfi CA, ergo et CA eft aequalis CD; quare et angulus CDA aequalis <sup>8</sup> eft ipfi DAC. ipfi igitur CDA, DAC fimul dupli funt anguli DAC. eft autem et BCD ipfis CDA, DAC aequalis; ergo et BCD duplus eft ipfius DAC. aequalis autem eft BCD alterutri ipforum BDA, DBA; uterque igitur ipforum BDA, DBA, ipfius DAB eft duplus. Ifofceles igitur triangulum conftitutum



d. 37. 3.

e. 32. 3.

f. 32. 1.

g. 5. 1.

h. 6. 1.

Q

est

est ABD, habens utrumque angulorum qui sunt ad basim BD duplum reliqui. Q. E. F.

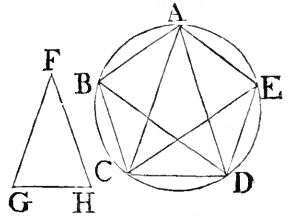
## PROP. XI. PROB.

**I**N dato circulo pentagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

Sit datus circulus ABCDE; oportet in ABCDE circulo pentagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

- Exponatur triangulum isosceles FGH habens utrumque angulorum  
 a. 10. 4. ad G, H duplum anguli ad F<sup>a</sup>; et inscribatur in circulo ABCDE tri-  
 b. 2. 4. angulo FGH aequiangulum triangulum<sup>b</sup> ACD, ita ut angulo quidem  
 ad F aequalis sit CAD; utrique vero ipsorum ad G, H, sit aequalis  
 uterque ACD, CDA; et uterque igitur ipsorum ACD, CDA anguli  
 c. 9. 1. CAD est duplus. secetur uterque ACD, CDA bifariam<sup>c</sup> rectis lineis  
 CE, DB, et AB, BC, DE, EA jungantur.

- Quoniam igitur uterque angulorum ACD, CDA duplus est ipsius  
 CAD, et secti sunt bifariam rectis lineis CE, DB; quinque anguli DAC,  
 ACE, ECD, CDB, BDA inter se sunt  
 aequales. aequales autem anguli aequa-  
 l. 26. 3. libus circumferentiis insunt<sup>d</sup>; quin-  
 que igitur circumferentiae AB, BC, CD,  
 DE, EA aequales sunt inter se. sed ae-  
 quales circumferentiae aequales rectae li-  
 n. 29. 3. neae subtendunt<sup>e</sup>; ergo et quinque rectae  
 lineae AB, BC, CD, DE, EA inter se aequales sunt. aequilaterum igitur  
 est ABCDE pentagonum. Dico et aequiangulum esse. Quoniam  
 enim circumferentia AB aequalis est circumferentiae DE, communis ap-  
 ponatur BCD; tota igitur AECD circumferentia toti EDCB est ae-  
 qualis.



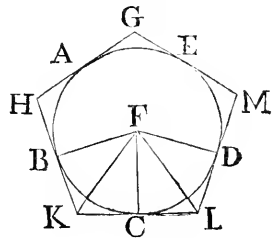
qualis. et circumferentiae quidem ABCD insitit angulus AED, circumferentiae vero EDCB insitit angulus BAE; igitur et BAE angulus est aequalis ipsi AED<sup>f</sup>. eadem ratione et unusquisque angulorum f. 27. 3. ABC, BCD, CDE utriusque ipsorum BAE, AED est aequalis. aequiangulum igitur est ABCDE pentagonum; ostensum autem est et aequilaterum esse. In dato igitur circulo pentagonum aequilaterum et aequiangulum inscriptum est. Q. E. F.

PROP. XII. PROB.

CIRCA datum circulum pentagonum aequilaterum et aequiangulum circumscribere.

Sit datus circulus ABCDE; oportet circa circulum ABCDE pentagonum aequilaterum et aequiangulum circumscribere.

Intelligantur pentagoni in circulo inscripti angulorum puncta esse A, B, C, D, E, ita ut circumferentiae AB, BC, CD, DE, EA sint aequales<sup>a</sup>; et per puncta A, B, C, D, E ducantur circulum contingentes<sup>b</sup> GH, HK, KL, LM, MG; sumaturque circuli ABCDE centrum F, et jungantur FB, FK, FC, FL, FD. Quoniam igitur recta linea KL contingit circulum ABCDE in C, et a centro F ad tactum qui est ad C ducta est FC, erit FC ad ipsam KL perpendicularis<sup>c</sup>; rectus igitur est uterque angulorum qui sunt ad C. eadem ratione et anguli ad puncta B, D, recti sunt. et quoniam rectus angulus est FCK, quadratum ex FK aequale est quadratis ex FC, CK<sup>d</sup>. eadem ratione quadratis ex FB, BK aequale est ex FK quadratum. quadrata igitur ex FC, CK quadratis ex FB, BK aequalia sunt, quorum ex FC ei quod



a. 11. 4.  
b. 17. 3.

c. 18. 3.

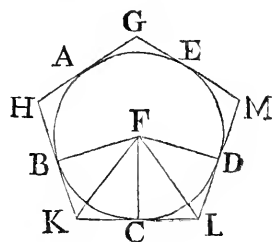
d. 47. 1.

Q 2

ex

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

- ex FB est aequale; reliquum igitur quadratum ex CK reliquo ex BK aequale erit; aequalis igitur est BK ipsi CK. et quoniam FB est aequalis FC, communis autem FK, duae BF, FK duabus CF, FK aequales sunt; et basis BK est aequalis basi KC; angulus igitur BFK angulo KFC est aequalis<sup>e</sup>, angulus vero BKF angulo FKC. duplus igitur est BFC anguli KFC, et BKC duplus ipsius FKC. eadem ratione et angulus CFD ipsius CFL est duplus, CLD vero duplus anguli CLF. et quoniam circumferentia BC circumferentiae CD est aequalis, erit et
7. 27. 3. angulus BFC aequalis ipsi CFD<sup>f</sup>. atque est BFC quidem anguli KFC duplus, CFD vero duplus ipsius CFL; aequalis igitur est angulus KFC ipsi CFL; est autem et rectus FCK recto FCL aequalis. itaque duo triangula sunt FKC, FLC duos angulos duobus angulis aequales habentia, alterum alteri, et unum latus uni lateri aequale ipsis commune FC quod aequalibus adjacet angulis; ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt, et reliquum angulum reliquo angulo aequalem<sup>g</sup>. recta igitur linea KC est aequalis ipsi CL, angulus vero FKC angulo FLC. et quoniam KC est aequalis CL, erit KL ipsius KC dupla. eadem ratione et HK ipsius BK dupla ostendetur. et quoniam BK ostensa est aequalis ipsi KC, atque est KL quidem dupla KC, HK vero ipsius BK dupla, erit HK ipsi KL aequalis. similiter et unaquaeque ipsarum GH, GM, ML ostendetur aequalis utrique HK, KL. aequilaterum igitur est GHKLM pentagonum. Dico et acuiangulum esse. Quoniam enim angulus FKC est aequalis ipsi FLC, et ostensus est angulus HKL duplus ipsius FKC, ipsius vero FLC duplus KLM, erit et HKL ipsi KLM aequalis. similiter ostendetur et unufisque ipsorum KHG, HGM, GML utrique HKL, KLM aequalis.
- quinque



quinque igitur anguli GHK, HKL, KLM, LMG, MGH inter se aequales sunt; aequiangulum igitur est GHKLM pentagonum. ostensum autem est etiam aequilaterum esse; et circumscriptum est circa ABCDE circum. Q. E. F.

PROP. XIII. PROB.

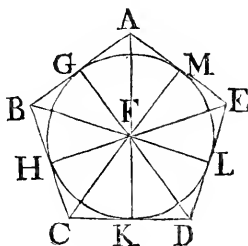
**I**N dato pentagono aequilatero et aequiangulo circumum inscribere.

Sit datum pentagonum aequilaterum et aequiangulum ABCDE; oportet in ABCDE pentagono circumum inscribere.

Secetur uterque angulorum BCD, CDE bifariam a rectis lineis CF, a. 9. 1.

DF, et a puncto F in quo conveniunt inter se CF, DF ducantur rectae lineae FB, FA, FE. Quoniam igitur BC est aequalis CD, communis autem CF, duae BC, CF duabus DC, CF aequales sunt, et angulus BCF est aequalis ipsi DCF; basis igitur BF basi FD est aequalis<sup>b</sup>, et BFC triangulum aequale triangulo DFC, et reliqui anguli reliquis angulis aequales quibus aequalia latera subtenduntur; angulus igitur CBF angulo CDF aequalis erit. et quoniam angulus CDE ipsius CDF est duplus, et CDE quidem aequalis ipsi CBA, angulus vero CDF ipsi CBF, erit et CBA duplus anguli CBF;

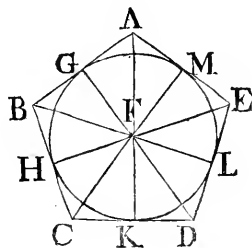
angulus igitur ABF angulo CBF est aequalis; quare angulus ABC bifariam sectus est recta linea BF. similiter ostendetur unumquemque angulorum BAE, AED rectis lineis AF, FE bifariam sectum esse. a puncto F ad rectas lineas AB, BC, CD, DE, EA ducantur perpendiculares<sup>c</sup> c. 12. 1. FG, FH, FK, FL, FM. et quoniam angulus HCF est aequalis ipsi KCF,



b. 4. 1.

KCF,

- KCF, est autem et rectus FHC recto FKC aequalis; erunt duo triangula FHC, FKC duos angulos duobus angulis aequales habentia, et unum latus commune utrisque, viz. FC, quod uni aequalium angulorum subtenditur; ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habent.
- d. 26. 1. bunt<sup>d</sup>; perpendicularis igitur FH perpendiculari FK est aequalis. similiter ostendetur et unaquaeque ipsarum FL, FM, FG aequalis utrique FH, FK; quinque igitur rectae lineae FG, FH, FK, FL, FM inter se aequales sunt. quare centro F, intervallo autem unius ipsarum FG, FH, FK, FL, FM circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, et rectas lineas AB, BC, CD, DE, EA continget, propterea quod anguli ad G, H, K, L, M recti sunt; quae enim ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos diametro ducitur circulum contingit<sup>e</sup>. circulum igitur contingit unaquaeque ipsarum AB, BC, CD, DE, EA, atque erit circulus in pentagono ABCDE inscriptus. In dato igitur pentagono aequilatero et aequiangulo circulus inscriptus est. Q. E. F.



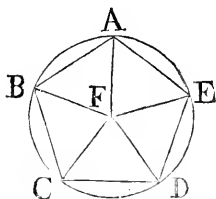
## PROP. XIV. PROB.

**C**IRCA datum pentagonum aequilaterum et aequiangulum circulum circumscribere.

- Sit datum pentagonum aequilaterum et aequiangulum ABCDE; oportet circa pentagonum ABCDE circulum circumscribere.
- 4.9. 1. Secetur uterque angulorum BCD, CDE bifariam<sup>a</sup> rectis lineis CF, FD, et a puncto F in quo conveniunt rectae lineae, ad puncta B, A, E ducantur FB, FA, FE. similiter ut in antecedente ostendetur unamque



quemque angulorum CBA, BAE, AED rectis lineis BF, FA, FE bifariam sectum esse. et quoniam angulus BCD ipsi CDE est aequalis, atque est anguli quidem BCD dimidium FCD, ipsius vero CDE dimidium CDF; erit et FCD aequalis ipsi FDC; quare et latus CF lateri FD est aequale<sup>b</sup>. similiter ostendetur et unaquaeque ipsarum FB, FA, FE aequalis utrique FC, FD. quinque igitur rectae lineae FA, FB, FC, FD, FE inter se aequales sunt. centro igitur F, intervallo autem unius ipsarum FA, FB, FC, FD, FE circulus descriptus etiam per reliqua transibit puncta, atque circumscriptus erit circa pentagonum aequilaterum et aequiangulum ABCDE. Circa datum igitur pentagonum aequilaterum et aequiangulum circulus est circumscriptus. Q. E. D.



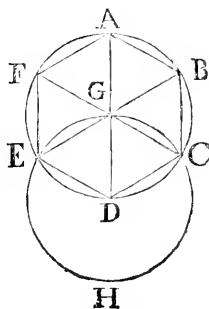
b. 6. r.

PROP. XV. PROB.

**I**N dato circulo hexagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

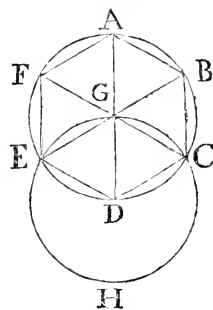
Sit datus circulus ABCDEF; oportet in circulo ABCDEF hexagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

Sumatur G centrum circuli ABCDEF, et ducatur diameter AGD; et centro quidem D, intervallo autem DG circulus describatur EGCH, et junctae EG, CG ad puncta B, F producantur, junganturque AB, BC, CD, DE, EF, FA. Dico hexagonum ABCDEF aequilaterum et aequiangulum esse.



Quoniam

- Quoniam enim  $G$  punctum centrum est  $ABCDEF$  circuli, erit  $GE$  ipsi  $GD$  aequalis. rursus quoniam  $D$  centrum est circuli  $EGCH$ , erit  $DE$  aequalis  $DG$ ; sed  $GE$  ipsi  $GD$  aequalis ostensa est, ergo  $GE$  ipsi  $ED$  est aequalis; aequilaterum igitur est  $EGD$  triangulum, ideoque tres ipsius anguli  $EGD$ ,  $GDE$ ,  $DEG$  inter se aequales sunt, quoniam tri-
- a. 5. 1. angulorum isoscelium anguli ad basim sunt inter se aequales<sup>a</sup>. et sunt tri-
- b. 3. 2. 1. anguli tres anguli aequales duobus rectis<sup>b</sup>; angulus igitur  $EGD$  duorum rectorum tertia pars est. similiter ostendetur et  $DGC$  duorum rectorum tertia pars. et quoniam recta linea  $GC$  super rectam  $EB$  insilens angulos qui deinceps sunt  $EGC$ ,  $CGB$  duobus
- c. 13. 1. rectis aequales efficit<sup>c</sup>, erit reliquus  $CGB$  tertia pars duorum rectorum; anguli igitur  $EGD$ ,  $DGC$ ,  $CGB$  inter se sunt aequales. et qui ipsis ad verticem sunt anguli  $BGA$ ,  $AGF$ ,  $FGE$
- d. 15. 1. aequales sunt ipsis  $EGD$ ,  $DGC$ ,  $CGB$ <sup>d</sup>. sex igitur anguli  $EGD$ ,  $DGC$ ,  $CGB$ ,  $BGA$ ,  $AGF$ ,  $FGE$  inter se aequales sunt. sed aequales an-
- e. 26. 3. guli aequalibus circumferentiis insilunt<sup>e</sup>; sex igitur circumferentiae  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EF$ ,  $FA$  inter se sunt aequales. aequales autem circumferentias aequales
- f. 29. 3. rectae lineae subtendunt<sup>f</sup>; ergo et sex rectae lineae inter se aequales sunt. aequilateram igitur est  $ABCDEF$  hexagonum. Dico et aequi-
- angulum esse. quoniam enim circumferentia  $AF$  circumferentiae  $ED$  est aequalis, communis apponatur circumferentia  $ABCD$ : tota igitur  $FABCD$  circumferentia aequalis est toti circumferentiae  $EDCBA$ . et circumferentiae quidem  $FABCD$  angulus  $FED$  insilit, circumferentiae vero  $EDCBA$  insilit angulus  $AFE$ ; angulus igitur  $AFE$  ipsi  $DEF$  est aequalis. similiter ostendentur et reliqui anguli hexagoni  $ABCDEF$  sigillatim aequales utriusque ipsorum  $AFE$ ,  $DEF$ . aequiangulum igitur est



est ABCDEF hexagonum. ostensum autem est et aequilaterum esse; et inscriptum est in circulo ABCDEF. In dato igitur circulo hexagonum aequilaterum et aequiangulum inscriptum est. Q. E. F.

COR. Ex hoc manifestum est hexagoni latus, ei quae est ex centro circuli aequale esse.

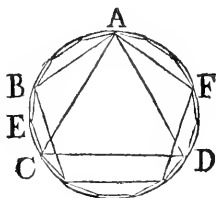
Et si per puncta A, B, C, D, E, F contingentes circulum ducamus, circa circulum hexagonum aequilaterum et aequiangulum circumferibitur, consequenter iis quae in pentagono dicta sunt; et praeterea similiter in dato hexagono aequilatero et aequiangulo circulum inscribemus, et circa illud circumferibemus.

PROP. XVI. PROB.

**I**N dato circulo quindecagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

Sit datus circulus ABCD; oportet in ABCD circulo quindecagonum aequilaterum et aequiangulum inscribere.

Sit in circulo ABCD trianguli quidem aequilateri ipsi inscripti latus AC<sup>a</sup>, pentagoni vero aequilateri et aequianguli latus<sup>b</sup> AB; qualium<sup>a. 2. 4. b. 11. 4.</sup> igitur partium est ABCD, tota scilicet circumferentia, quindecim, earum circumferentia quidem ABC tertia existens totius erit quinque; circumferentia vero AB, quae quinta est totius, erit trium; reliqua igitur BC est duarum. secetur BC bifariam<sup>c</sup> in E; quare utraque ipsarum BE, EC circumferentiarum quintadecima pars est circumferentiae circuli ABCD. si igitur jungentes BE, EC aequales ipsis in continuum rectas lines in circulo ABCD aptemus<sup>d, d. 1. 4.</sup>



c. 30. 3.

R

in

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

in ipso inscriptum erit quindecagonum aequilaterum et aequiangulum.  
Q. E. F.

Similiter autem iis quae dicta sunt in pentagono, si per circumferentiae divisiones, contingentes circulum ducamus, circa ipsum circumscribetur quindecagonum aequilaterum et aequiangulum. et insuper in dato quindecagono aequilatero et aequiangulo similiter circulum inscribemus, et circa illud circumscribemus.

EUCLIDIS

## E U C L I D I S

## E L E M E N T O R U M

## LIBER QUINTUS.

## DEFINITIONES.

I.

**M**AGNITUDO dicitur pars magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metitur.

II.

Major dicitur multiplex minoris, quando majorem minor metitur.

III.

“ Ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis, secundum quantitatem, mutua quaedam habitudo.”

IV.

Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quarum minor multiplicata majorem superare potest.

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

## V.

In eadem ratione magnitudines esse dicuntur, prima ad secundam et tertia ad quartam, quando primae et tertiae aequae multiplices, secundae et quartae aequae multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraque utramque, vel unà superant, vel unà aequales sunt, vel unà deficiunt, inter se comparatae.

## VI.

Magnitudines quae eandem rationem habent, proportionales vocentur.

## VII.

Quando autem aequae multiplicium, multiplex quidem primae superaverit multiplicem secundae, multiplex autem tertiae non superaverit multiplicem quartae, tunc prima ad secundam majorem rationem habere dicitur quam tertia ad quartam. et contra tertia ad quartam minorem rationem habere dicitur quam prima ad secundam.

## VIII.

“Proportio est rationum similitudo.”

## IX.

Proportio vero in tribus terminis ad minimum consistit.

## X.

Quando tres magnitudines proportionales sunt, prima ad tertiam, duplicatam rationem habere dicitur ejus quam habet ad secundam.

## XI.

Quando autem quatuor magnitudines sunt deinceps proportionales, prima ad quartam, triplicatam habere rationem dicitur ejus quam habet ad secundam. et sic deinceps, una amplius, quotcunque fuerint proportionales.

Definitio A, viz. rationis compositae.

Si fuerint quotcunque magnitudines ejusdem generis, prima ad ultimam habere dicitur rationem compositam ex ratione quam habet prima ad secundam,

secundam, et ratione secundae ad tertiam, et eâ quam habet tertia ad quartam, et ita deinceps usque ad ultimam.

Exemp. gr. sint magnitudines A, B, C, D, prima A habere dicitur ad ultimam D rationem compositam ex ratione ipsius A ad B, et ratione B ad C, et ratione C ad D. vel ratio A ad D dicitur composita esse ex rationibus A ad B, B ad C, et C ad D.

Si igitur ratio A ad B, eadem sit rationi E ad F; et ratio B ad C, eadem fuerit rationi G ad H; et ratio C ad D eadem rationi K ad L; A ad D habere dicitur rationem compositam ex rationibus quae eadem sunt rationibus E ad F, G ad H, et K ad L. idemque intelligitur quando, brevitatis gratia, dicitur A ad D habere rationem compositam ex rationibus E ad F, G ad H, et K ad L.

Similiter, si ratio M ad N eadem sit rationi A ad D, praecedentibus manentibus, brevitatis gratia, dicitur ratio M ad N eadem esse rationi compositae ex rationibus E ad F, G ad H, et K ad L.

## XII.

Homologae magnitudines, in proportionalibus, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, et consequentes consequentibus.

‘Vocabulis sequentibus, apud Geometras veteres designantur modi quidam mutandi sive ordinem, sive magnitudinem proportionalium, ita tamen ut proportionales mancant.’

## XIII.

Εναλλάξ, i. e. Permutando; hoc vocabulo utuntur quando quatuor sunt proportionales, et concluditur esse ut prima ad tertiam, ita secunda ad quartam; ut ostensum est in Prop. 16. Libri hujus 5ti.

## XIV.

Ανάπαινον, Invertendo; quando quatuor sunt proportionales, et concluditur esse ut secunda ad primam, ita quarta ad tertiam. Prop. B. Lib. 5.

Συνθέσσις,

## XV.

*Συιθέντι*, Componendo; quando quatuor sunt proportionales, et concluditur ut prima una cum secunda ad secundam, ita tertia una cum quarta ad quartam. Prop. 18. Lib. 5.

## XVI.

*Διελόντι*, Dividendo; quando quatuor sunt proportionales, et concluditur ut excessus quo prima superat secundam ad secundam, ita excessus quo tertia superat quartam ad quartam. Prop. 17. Lib. 5.

## XVII.

*Αναστρέφαντι*, Convertendo; quando quatuor sunt proportionales, et concluditur ut prima ad excessum quo superat secundam, ita tertia ad excessum quo superat quartam. Prop. E. Lib. 5.

## XVIII.

*Δίσει*, Ex aequo, sive ex aequali, sc. intervallo; quando pluribus existentibus magnitudinibus, et aliis ipsis numero aequalibus, quae binae sumptae sunt in eadem ratione; et concluditur ut prima ad ultimam in primis magnitudinibus, ita, in secundis magnitudinibus, prima ad ultimam. ‘Hujus duae sunt species sequentes.’

## XIX.

*Δίσει*, Sive ex aequali simpliciter; quando fuerit prima ad secundam in primis magnitudinibus, ut in secundis prima ad secundam; ut autem, in primis, secunda ad tertiam, ita in secundis, secunda ad tertiam; et ita deinceps. et concluditur ut in praecedente dictum fuit. Prop. 22. Lib. 5.

## XX.

*Δίσει ἐν τῇ τεταραγμένη ἀναλογίᾳ\**, Ex aequali in proportione perturbata, seu inordinata; quando, in primis magnitudinibus, fuerit prima ad secundam, ut, in secundis, penultima ad ultimam; ut au-

\* Prop. 4. Lib. 2. Archimedis de sphaera et cylindro.



tem, in primis, secunda ad tertiam, ita, in secundis antepenultima ad penultimam; et ut, in primis, tertia ad quartam, ita, in secundis, tertia ab ultima ad antepenultimam; et ita deinceps. et concluditur ut in Definitione 18va dictum fuit. Prop. 23. Lib. 5.

## A X I O M A T A.

I.

**E**JUSDEM sive aequalium aequae multiplices, inter se aequales sunt.

II.

Quarum eadem aequae multiplex est, vel quarum aequales sunt aequae multiplices, et ipsae inter se sunt aequales.

III.

Multiplex majoris major est aequae multiplici minoris.

IV.

Magnitudo cujus multiplex major est aequae multiplici alterius, major est alterâ illa magnitudine.

## PROP. I. THEOR.

**S**I fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, aequalium numero, singulae singularum aequae multiplices; quam multiplex est una magnitudo unius, tam multiplices erunt et omnes omnium.

Sint quotcunque magnitudines AB, CD, quotcunque magnitudinum E, F, aequalium numero, singulae singularum aequae multiplices. Dico  
quam

quam multiplex est AB ipfius E, tam multiplices esse et AB, CD simul ipfarum E, F simul.

Quoniam enim AB aequae multiplex est ipfius E, ac CD ipfius F; quot magnitudines sunt in AB aequales ipfi E, tot erunt et in CD aequales ipfi F. dividatur AB quidem in partes ipfi E aequales, quae sint AG, GB; CD vero in partes aequales

ipfi F, videlicet CH, HD. erit igitur multitudo partium CH, HD aequalis multitudini ipfarum AG, GB. et quoniam AG est aequalis E, et CH aequalis F; erunt et AG,

2. Ax. 2. 1. CH, aequales<sup>a</sup> ipfis E, F. eadem ratione quoniam GB est aequalis E, et HD ipfi F; erunt GB, HD aequales<sup>a</sup> ipfis E, F. quot sunt itaque in AB aequales ipfi E, tot sunt et in AB, CD aequales ipfis E, F. Ergo quam multiplex est AB ipfius E, tam multiplices erunt et AB, CD simul ipfarum E, F simul.

Si igitur fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, aequalium numero, singulae singularum aequae multiplices; quam multiplex est una magnitudo unius, tam multiplices erunt et omnes omnium. eadem enim demonstratio tenet in quotcunque magnitudinibus. Q. E. D.

PROP. II. THEOR.

**S**I prima secundae aequae multiplex fuerit ac tertia quartae, fuerit autem et quinta secundae aequae multiplex ac sexta quartae; erit etiam prima una cum quinta secundae aequae multiplex ac tertia cum sexta quartae.

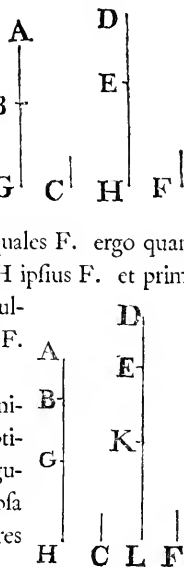
Prima enim AB secundae C aequae multiplex sit, atque tertia DE quartae F; sit autem et quinta BG secundae C aequae multiplex ac sexta

EH

EH quartae F. Dico primam una cum quinta sc. AG, secundae C aequae multiplicem esse, ac tertiam una cum sexta sc. DH quartae F.

Quoniam enim AB aequae multiplex est ipsius C, ac DE ipsius F; quot magnitudines sunt in AB aequales C, tot erunt et in DE aequales F. eadem ratione et quot sunt in BG aequales C, tot et in EH erunt aequales F. quot igitur sunt in tota AG aequales C, tot erunt et in tota DH aequales F. ergo quam multiplex est AG ipsius C tam multiplex est et DH ipsius F. et prima igitur una cum quinta AG secundae C aequae multiplex erit, ac tertia cum sexta DH quartae F. Quare &c. Q. E. D.

COR. Hinc sequitur si fuerint quotcunque magnitudines AB, BG, GH multiplices ipsius C; ac totidem DE, EK, KL aequae multiplices ipsius F, singularum, erunt omnes priores simul sc. ipsa AH ipsius C aequae multiplex, ac omnes posteriores simul sc. ipsa DL ipsius F.



PROP. III. THEOR.

SI prima secundae aequae multiplex fuerit ac tertia quartae; sumantur autem aequae multiplices primae et tertiae; erit et ex aequali, sumptarum utraque utriusque aequae multiplex, altera quidem secundae, altera vero quartae.

Prima enim A secundae B aequae multiplex sit ac tertia C quartae D;

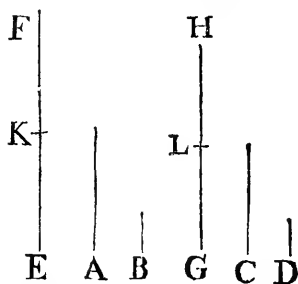
S

et

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

et fumantur ipſarum A, C, aeque multiplices, EF, GH. Dico EF aeque multiplicem eſſe ipſius B, ac GH ipſius D.

Quoniam enim EF aeque multiplex eſt ipſius A, ac GH ipſius C; quot magnitudines ſunt in EF aequales A, tot erunt et in GH aequales C. dividatur EF quidem in magnitudines ipſi A aequales EK, KF; GH vero in magnitudines aequales C videlicet GL, LH; crit igitur ipſarum EK, KF, multitudo aequalis multitudini ipſarum GL, LH. et quoniam aeque multiplex eſt A ipſius B ac C ipſius D, aequalis autem EK ipſi A, et GL ipſi C; crit EK aeque multiplex ipſius B, ac GL ipſius D. eadem ratione aeque multiplex crit KF



ipſius B, ac LH ipſius D; et ſimiliter ſi plures ſint partes in EF, GH ipſis A, C aequales. quoniam igitur prima EK ſecundae B aeque multiplex eſt, ac tertia GL quartae D; eſt autem et quinta KF ſecundae B aeque multiplex ac ſexta LH quartae D; erit et prima una cum ſexta fc. ipſa EF ſecundae B aeque multiplex<sup>3</sup>, ac tertia cum ſexta fc. GH quartae D. ſi igitur prima &c. Q. E. D.

## PROP. IV. THEOR.

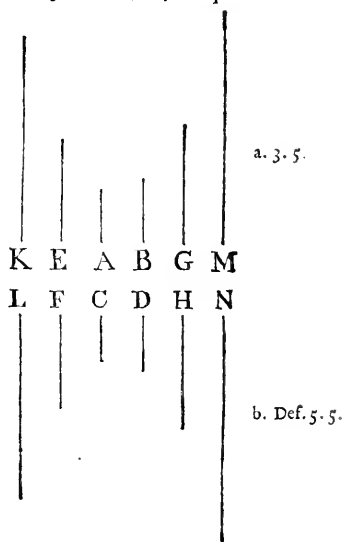
**S**I prima ad ſecundam eandem habet rationem quam tertia ad quartam; et aeque multiplices primae et tertiae ad aeque multiplices ſecundae et quartae, juxta quamvis multiplicationem, eandem rationem habebunt, inter ſe comparatae.

Prima enim A ad ſecundam B eandem rationem habeat quam tertia

tia C ad quartam D; et sumantur ipsarum quidem A, C utrunque aequae multiplices E, F; ipsarum vero B, D aliae utrunque aequae multiplices G, H. Dico E ad G, ita esse ut F ad H.

Sumantur ipsarum E, F utrunque aequae multiplices K, L, et ipsarum G, H aliae utrunque aequae multiplices M, N. quoniam igitur E aequae multiplex est ipse A, atque F ipse C, sumantur autem ipsarum E, F aequae multiplices K, L; erit K aequae multiplex<sup>a</sup> ipse A, atque L ipse C. eadem ratione M aequae multiplex erit ipse B, atque N ipse D. et quoniam est ut A ad B, ita C ad D; sumptae autem sunt ipsarum A, C aequae multiplices quaedam K, L; et ipsarum B, D aliae quaedam aequae multiplices M, N: si K superat M, superabit et L ipsam N; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor<sup>b</sup>. suntque K, L quidem ipsarum E, F utrunque aequae multiplices; M, N vero ipsarum G, H aliae utrunque aequae multiplices. ut igitur E ad G, ita<sup>b</sup> erit F ad H. Quare si &c. Q. E. D.

Sumantur ipsarum E, F utrunque aequae multiplices K, L, et ipsarum G, H aliae utrunque aequae multiplices M, N. quoniam igitur E aequae multiplex est ipse A, atque F ipse C, sumantur autem ipsarum E, F aequae multiplices K, L; erit K aequae multiplex<sup>a</sup> ipse A, atque L ipse C. eadem ratione M aequae multiplex erit ipse B, atque N ipse D. et quoniam est ut A ad B, ita C ad D; sumptae autem sunt ipsarum A, C aequae multiplices quaedam K, L; et ipsarum B, D aliae quaedam aequae multiplices M, N: si K superat M, superabit et L ipsam N; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor<sup>b</sup>. suntque K, L quidem ipsarum E, F utrunque aequae multiplices; M, N vero ipsarum G, H aliae utrunque aequae multiplices. ut igitur E ad G, ita<sup>b</sup> erit F ad H. Quare si &c. Q. E. D.



COR. Et similiter, si prima ad secundam eandem habeat rationem, quam tertia ad quartam; et aequae multiplices primae et tertiae, juxta quamvis multiplicationem, ad secundam et quartam eandem rationem habebunt. et similiter prima et tertia, ad aequae multiplices quasvis secundae et quartae eandem habebunt rationem.

Prima enim A ad secundam B eandem rationem habeat quam tertia C ad quartam D, et sumantur ipsarum A, C utrunque aequae multiplices E, F; erit E ad B, ut F ad D.

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

Sumantur ipsarum E, F utcumque aequae multiplices K, L, et ipsarum B, D aliae utcumque aequae multiplices G, H; et ut in praemissis ostenditur K aequae multiplex ipsius A, atque L ipsius C. et quoniam est A ad B, ut C ad D, sumptae autem sunt ipsarum A, C aequae multiplices quaedam K, L, et ipsarum B, D aliae quaedam aequae multiplices G, H; si K superat G, superabit et L ipsam H; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. suntque K, L ipsarum E, F utcumque aequae multiplices, G, H vero ipsarum B, D aliae utcumque aequae multiplices. ut igitur E ad B, ita F ad D. similiter ostenditur alter casus.

## PROP. V. THEOR.

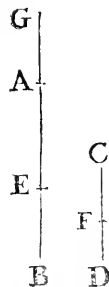
**S**I magnitudo magnitudinis aequae multiplex sit atque ablata ablatas; erit et reliqua reliquae aequae multiplex atque tota totius.

Magnitudo enim AB magnitudinis CD aequae multiplex sit atque ablata AE ablatas CF. Dico et reliquam EB reliquae FD aequae multiplicem esse atque totam AB totius CD.

Quam multiplex enim est AE ipsius CF, tam multiplex fiat et AG

a. 1. 5. ipsius FD. erit igitur<sup>a</sup> AE aequae multiplex ipsius CF atque EG ipsius CD; ponitur autem AE aequae multiplex ipsius CF atque AB ipsius CD; sunt igitur EG, AB ipsius CD aequae multiplices; ac propterea EG ipsi

b. 1. Ax. 5. AB est aequalis<sup>b</sup>. communis auferatur AE, reliqua igitur AG aequalis est reliquae EB. itaque quoniam AE aequae multiplex est CF atque AG ipsius FD, estque AG aequalis ipsi EB; erit AE aequae multiplex CF atque EB ipsius FD. aequae multiplex autem ponitur AE ipsius CF atque AB ipsius CD; ergo EB ae-



que

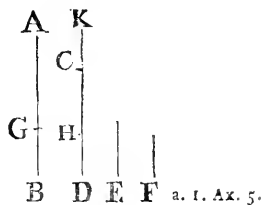
que multiplex est ipſius FD atque AB ipſius CD. Quare ſi &c.  
Q. E. D.

PROP. VI. THEOR.

**S**I duae magnitudines duarum magnitudinum aequae multiplices ſint, et ablatae quaedam ſint earundem aequae multiplices; erunt et reliquae vel eiſdem aequales, vel ipſarum aequae multiplices.

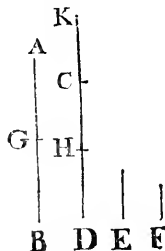
Duae enim magnitudines AB, CD duarum magnitudinum E, F aequae multiplices ſint, et ablatae AG, CH earundem E, F ſint aequae multiplices. Dico et reliquas GB, HD vel ipſis E, F aequales eſſe, vel ipſarum aequae multiplices.

Sit enim primum GB aequalis E; dico et HD ipſi F eſſe aequalem. Ponatur ipſi F aequalis CK. et quoniam AG aequae multiplex eſt E atque CH ipſius F, eſtque GB quidem aequalis E, CK vero aequalis F; erit AB aequae multiplex E atque KH ipſius F. aequae autem multiplex ponitur AB ipſius E atque CD ipſius F; ergo KH aequae multiplex eſt ipſius F atque CD ejuſdem F. aequalis igitur eſt <sup>a</sup> KH ipſi CD. communis auferatur CH; ergo reliqua KC reliquae HD eſt aequalis. ſed KC eſt aequalis F, et HD igitur ipſi F eſt aequalis. ſi igitur GB ipſi E, et HD ipſi F aequalis erit.



Sed ſit GB multiplex ipſius E, erit HD aequae multiplex ipſius F. Quam multiplex enim eſt GB ipſius E, tam multiplex fiat CK ipſius F; et quoniam aequae multiplex eſt AG ipſius E, atque CH ipſius F, aequae multiplex autem eſt GB ipſius E, atque CK ipſius F, erit <sup>b</sup> AB a. 2. 5. aequae multiplex ipſius E, atque KH ipſius F. aequae autem multiplex  
ponitur

ponitur AB ipfius E, atque CD ipfius F; ergo KH aeque multiplex  
 2. 1. Ax. 5. est F, atque CD ejuſdem F. aequalis igitur <sup>a</sup> est  
 KH ipfi CD. communis auferatur CH; ergo re-  
 liqua KC reliquae HD est aequalis. Quam multi-  
 plex autem est GB ipfius E, tam multiplex est KC  
 ipfius F, fed KC est aequalis HD. Ergo tam  
 multiplex est HD ipfius F, atque GB ipfius E.  
 ſi igitur duae &c. Q. E. D.



## PROP. A. THEOR.

**S**I prima ad ſecundam eandem habet rationem quam  
 tertia ad quartam, fueritque prima maior ſecunda;  
 erit tertia maior quarta; et ſi aequalis, aequalis; et ſi mi-  
 nor, minor.

Sumantur enim quacvis aeque multiplices omnium, puta duplae, et,  
 per Definitionem 5tam hujus, ſi dupla primae maior fuerit dupla ſe-  
 cundae, erit dupla tertiae maior dupla quartae. ſi autem prima ma-  
 jor fuerit ſecunda, erit dupla primae maior dupla ſecundae. quare et  
 dupla tertiae maior erit dupla quartae; unde tertia maior erit quarta.  
 Ergo ſi prima maior fuerit ſecunda, erit tertia maior quarta. ſimiliter  
 ſi prima aequalis fuerit ſecundae, aut ipſa minor, oſtendetur tertia ae-  
 qualis quartae, aut ipſa minor. Q. E. D.

## PROP. B.

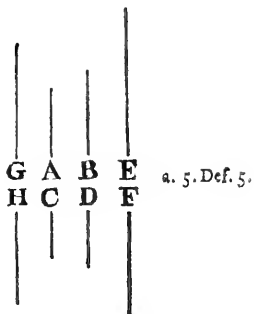


PROP. B. THEOR.

**S**I quatuor magnitudines proportionales fuerint, et inversè proportionales erunt.

Sit A ad B, ut C ad D; erit inversè B ad A, ut D ad C.

Sumantur enim ipsarum B, D, aequae multiplices quaecunque E, F; et ipsarum A, C, aliae utcunque aequae multiplices G, H. et primum sit E major G; erit igitur G minor E; et quoniam est A ad B, ut C ad D, et ipsarum A, C aequae multiplices sumptae sunt G, H; et ipsarum B, D aliae aequae multiplices E, F; et est G minor E, erit H minor F<sup>a</sup>; quare est F major H. si igitur E major sit G, et F quam H major crit. similiter, si E aequalis fuerit ipsi G, ostendetur F aequalis ipsi H; et si minor, minor. suntque E, F ipsarum B, D, utcunque aequae multiplices; et G, H ipsarum A, C, aliae utcunque aequae multiplices. Ergo ut B ad A, ita est D ad C<sup>a</sup>. Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, et inversè proportionales erunt.



PROP. C.

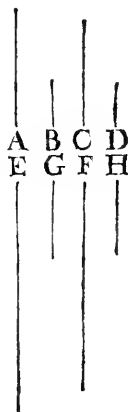
## PROP. C. THEOR.

**SI** prima aequae multiplex fuerit, vel eadem pars, secundae, atque tertiae quartae; erit prima ad secundam ut tertia ad quartam.

Sit prima  $A$  aequae multiplex secundae  $B$ , atque tertia  $C$  quartae  $D$ . erit  $A$  ad  $B$ , ut  $C$  ad  $D$ .

Sumantur enim ipsarum  $A$ ,  $C$  aequae multiplices quaecunque  $E$ ,  $F$ ; ipsarumque  $B$ ,  $D$ , aliae uterunque aequae multiplices  $G$ ,  $H$ . et quoniam  $A$  aequae multiplex est  $B$ , atque  $C$  ipsius  $D$ ;  $E$  vero aequae multiplex  $A$ , atque  $F$  ipsius  $C$ ,  
 a. 3. 5. erit  $E$  aequae multiplex  $B$ , atque  $F$  ipsius  $D$ . sunt autem  $G$ ,  $H$  ipsarum  $B$ ,  $D$  aequae multiplices; ergo si  $E$  major fuerit multiplex ipsius  $B$ , quam  $G$  ejusdem  $B$ , erit et  $F$  major multiplex ipsius  $D$ , quam  $H$  ejusdem  $D$ ; hoc est si  $E$  major fuerit  $G$ , erit  $F$  major  $H$ . similiter si  $E$  aequalis fuerit  $G$ , aut ipsa minor, ostendetur  $F$  aequalis  $H$ , aut ipsa minor. sunt autem  $E$ ,  $F$  ipsarum  $A$ ,  $C$  uterunque aequae multiplices; et  $G$ ,  $H$  ipsarum  $B$ ,  $D$  aliae uterunque aequae multiplices. Ergo est  $A$  ad  $B$ , ut  
 a. Def. 5.  $C$  ad  $D$ <sup>b</sup>.

Sed sit prima  $A$  eadem pars secundae  $B$ , atque tertia  $C$  quartae  $D$ . erit  $A$  ad  $B$ , ut  $C$  ad  $D$ . etenim erit  $B$  eadem multiplex  $A$ , atque  $D$  ipsius  $C$ ; quare per Casum I. est  $B$  ad  $A$ , ut  $D$  ad  $C$ , et  
 c. B. 5. invertendo<sup>c</sup>, erit  $A$  ad  $B$ , ut  $C$  ad  $D$ . si igitur prima &c. Q. E. D.



PROP. D.

PROP. D. THEOR.

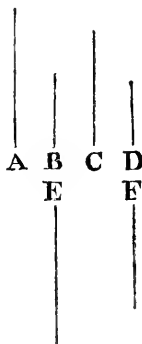
**S**I fuerit prima ad secundam, ut tertia ad quartam; fueritque prima multiplex, vel pars secundae; erit tertia eadem multiplex, vel eadem pars quartae.

Sit A ad B, ut C ad D; fitque A multiplex ipsius B, erit C eadem multiplex ipsius D.

Sumatur enim E aequalis ipsi A, et quam multiplex est A five E ipsius B, tam multiplex fiat F ipsius D. Ergo quoniam A ad B eandem habet rationem, quam C ad D, et secundae B et quartae D aequae multiplices sumptae sunt E, F, erit <sup>a</sup> A ad E, ut C ad F. et est A aequalis ipsi E; ergo C aequalis est ipsi F<sup>o</sup>. est autem F aequae multiplex ipsius D, atque E five A ipsius B. Ergo C aequae multiplex est D, atque A ipsius B.

Sed sit prima A pars secundae B, erit tertia C eadem pars quartae D.

Quoniam enim est A ad B, ut C ad D, invertendo<sup>c</sup>, erit B ad A, ut D ad C. est autem A pars ipsius B, hoc est B multiplex est ipsius A, quare, per casum praecedentem, D eadem est multiplex ipsius C, hoc est C eadem pars est ipsius D, atque A ipsius B. si igitur fuerit prima &c. Q. E. D.



a. Cor. 4. 5.  
b. Prop. A. 5.

c. B. 5.

PROP. VII. THEOR.

**A**EQUALES ad eandem, eandem habent rationem; et eadem ad aequales.

Sint aequales magnitudines A, B, alia autem quaecvis magnitudo sit

T

C. Dico

C. Dico utramque A, B ad C eandem rationem habere; et C ad utramque A, B similiter eandem habere rationem.

Sumantur enim ipsarum A, B utcumque aequae multiplices D, E, et ipsius C alia utcumque multiplex F. quoniam igitur aequae multiplex est D ipsius A, atque E ipsius B, estque

a. 1. Ax. 5. A ipsi B aequalis; erit et D aequalis ipsi E<sup>a</sup>. Ergo si D superat F, et E ipsam F superabit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. et sunt D, E quidem ipsarum A, B utcumque aequae multiplices; F vero alia utcumque multiplex ipsius C. erit igitur ut A ad C,

b. 5. Def. 5. ita B ad C<sup>b</sup>.

Dico insuper C ad utramque ipsarum A, B eandem habere rationem. iisdem enim constructis similiter ostendemus D ipsi E aequalem esse. si igitur F superat D, ipsum quoque E superabit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. atque est F quidem ipsius C utcumque multiplex; D, E vero aliae utcumque aequae multiplices ipsarum A, B. Ergo<sup>b</sup> ut C ad A, ita erit C ad B. Aequales igitur &c. Q. E. D.



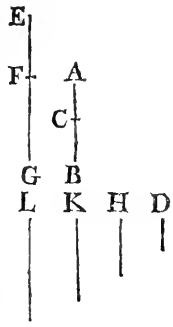
### PROP. VIII. THEOR.

**I**NAEQUALIUM magnitudinum major ad eandem, majorem habet rationem quam minor. et eadem ad minorem, majorem habet rationem quam ad majorem.

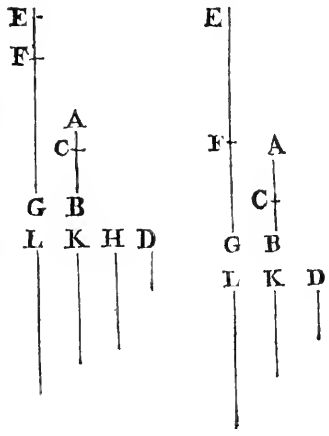
Sint inaequales magnitudines AB, BC, et sit AB major; alia vero utcumque sit D. habebit AB ad D majorem rationem quam BC ad D. et D ad BC majorem rationem habebit quam ad AB.

Si ea quae non major est ipsarum AC, CB non minor sit quam D; sumantur

sumantur ipsarum AC, CB duplae EF, FG, ut in Fig. 1. si vero ea quae non major est ipsarum AC, CB minor sit quam D, (ut in duabus reliquis figuris) ea, siue fuerit AC siue CB, multiplicata maior aliquando erit quam D. multiplicetur quoad fiat maior quam D, et quoties multiplicata fuerit, toties multiplicetur altera; sitque EF multiplex ipsius AC, FG vero eadem multiplex ipsius CB. utraque igitur EF, FG maior est quam D. in omnibus autem casibus, sumatur ipse D dupla H, tripla K, et deinceps una amplius, quoad ea quae sumitur fiat multiplex ipsius D quae primò major est ipsâ FG. sumatur, sitque L ipse D multiplex quae primò major est FG, K vero sit ea multiplex ipsius D quae proxime minor est quam L.



Quoniam igitur L multiplex est ipsius D quae primò major sit ipsâ FG, non erit K major quam FG, ideoque FG non minor erit quam K. et cum aequae multiplex sit EF ipsius AC, atque FG ipsius CB, erit <sup>a</sup> et FG aequae multiplex ipsius CB, atque EG ipsius AB; quare EG, FG ipsarum AB, CB sunt aequae multiplices. ostensa autem fuit FG non minor quam K, et ex constructione, est EF maior quam D; ergo tota EG utrisque simul K, D major erit. sed utraque simul K, D aequales sunt ipsi L; superat igitur EG ipsam L; FG vero non superat L; et sunt EG, FG ip-



a. 1. 5.

T 2

farum

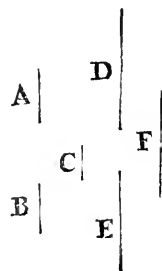
farum AB, BC aequae multiplices, et L ipfius D alia quaedam multiplex; b. Def. 7. 5. ergo AB ad D majorem habet rationem quam BC ad D<sup>b</sup>.

Practerea D ad BC majorem habebit rationem quam ad AB. iifdem enim conffructis, fimiliter oftendetur L fuperare FG, ipfam vero EG non fuperare. atque eft L multiplex ipfius D, FG vero et EG funt aliae quaedam ipfarum CB, AB aequae multiplices. Ergo D ad CB majorem habet rationem quam D ad AB<sup>b</sup>. Inaequalium igitur &c. Q. E. D.

## PROP. IX. THEOR.

**Q**UAE ad eandem, eandem rationem habent, inter fe funt aequales; et ad quas eadem eandem rationem habet, ipfae funt inter fe aequales.

Habeat enim utraque ipfarum A, B ad C eandem rationem; dico A ipfi B aequalem effe. nam fi non fit aequalis, altera ipfarum eft major; fit A major; funt igitur, ut oftendam fuit in propofitione praecedente, quaedam ipfarum A, B aequae multiplices, et quaedam ipfius C multiplex tales ut multiplex ipfius A fuperet multiplicem ipfius C, multiplex vero ipfius B eandem non fuperet. fumantur, et fint D, E ipfarum A, B aequae multiplices, F vero ipfius C multiplex, ita ut D fuperet F, E vero eandem F non fuperet. quoniam vero eft A ad C, ut B ad C, et ipfarum A, B fumptae funt quaedam aequae multiplices D, E, et ipfius C fumpta eft quaedam



a. 5. Def. 5. multiplex F, et eft D major F, erit <sup>a</sup> E major F; eft autem et E non major F, quod fieri non potest. non igitur inaequalis eft A ipfi B; ergo aequalis erit.

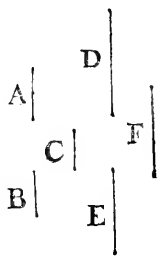
Habeat

Habeat rursus C ad utramque ipsarum A, B eandem rationem. Dico A aequalem esse ipsi B. si enim non sit, altera ipsarum est major; sit major A, est igitur <sup>b</sup> quaedam multiplex F ipsius C, suntque quaedam ip- b. 8. 5.  
 farum B, A aequae multiplices E, D, tales ut F superet E non vero ip-  
 sam D superet. Quoniam vero est C ad B, ut C ad A, et est F mul-  
 tiplex primae C major E multiplici secundae B, erit <sup>a</sup> F multiplex ter- a. 5. Def. 5.  
 tia C major D multiplici quartae A. est autem et F non major D.  
 Quod fieri non potest. Ergo est A aequalis ipsi B. Quae igitur ad  
 eandem &c. Q. E. D.

PROP. X. THEOR.

**A**D eandem magnitudinem rationem habentium, quae majorem rationem habet, illa major est; ad quam vero eadem majorem habet rationem, illa minor est.

Habeat enim A ad C majorem rationem, quam B ad C; dico A quam B majorem esse. Quoniam enim A ad C majorem habet ratio-  
 nem, quam B ad C, sunt <sup>a</sup> quaedam ipsarum A, B aequae multiplices, et ipsius C quaedam multiplex, ut  
 multiplex quidem ipsius A superet multiplicem C, multiplex vero B non superet eandem. sumantur,  
 et sint ipsarum A, B aequae multiplices D, E; ipsius vero C multiplex sit F, ita ut D quidem superet F,  
 E autem non superet eandem F. est igitur D major quam E. et quoniam D, E ipsarum A, B sunt aequae  
 multiplices, et est D major quam E, erit A major quam B<sup>b</sup>.



a. Def. 7. 5.

b. Ax. 4. 5.

Habeat rursus C ad B majorem rationem quam C ad A. Dico B minorem esse quam A. est enim <sup>a</sup> quaedam multiplex F ipsius C, sunt- que

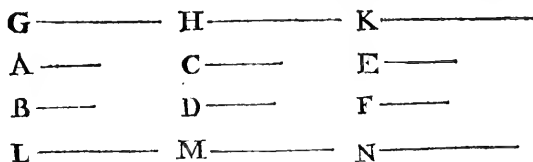
que ipsarum B, A quaedam aequae multiplices E, D, ita ut F superet E, non vero superet ipsam D. est igitur E minor quam D; et quoniam  
 5. Ax. 4. 5. E, D ipsarum B, A sunt aequae multiplices, erit <sup>b</sup> B minor quam A. ad eandem igitur &c. Q. E. D.

## PROP. XI. THEOR.

**Q**UAE eidem eadem sunt rationes, et inter se eadem sunt.

Sint enim ut A ad B, ita C ad D; ut autem C ad D, ita E ad F. Dico ut A ad B, ita E ad F.

Sumantur enim ipsarum quidem A, C, E aequae multiplices quaevis G, H, K; ipsarum vero B, D, F aliae utcumque aequae multiplices, L, M, N. Quoniam igitur est ut A ad B, ita C ad D, et sumptae sunt ipsarum A, C aequae multiplices G, H; et ipsarum B, D aliae aequae  
 4. 5. Def. 5. multiplices L, M; si G superat L, et H ipsam M superabit<sup>a</sup>; et si ae-



qualis, aequalis; et si minor, minor. rursus quoniam est ut C ad D, ita E ad F, et sumptae sunt ipsarum C, E aequae multiplices H, K; ipsarum vero D, F aliae aequae multiplices M, N, si H superat M, et K ipsam N superabit<sup>a</sup>; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. sed si G superat L, ostensum est H superare M; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor; quare si G superat L, et K ipsam N superabit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. et sunt G, K quidem ipsarum  
 A, E



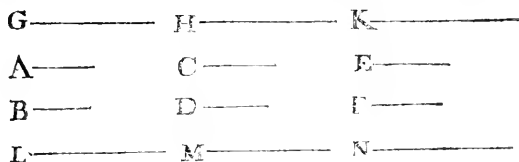
A, E utrunque aeque multiples; L, N vero ipsarum B, F aliae utrunque aeque multiples. Ergo ut A ad B, ita erit E ad F. Quae igitur eidem &c. Q. E. D.

PROP. XII. THEOR.

**S**I quotcunque magnitudines proportionales fuerint; ut una antecedentium ad unam consequentium, ita erunt antecedentes omnes simul ad omnes consequentes simul.

Sint quotcunque magnitudines proportionales A, B, C, D, E, F; et ut A ad B, ita sit C ad D, et E ad F. Dico ut A ad B, ita esse A, C, E ad B, D, F.

Sumantur enim ipsarum A, C, E utrunque aeque multiples G, H, K, et ipsarum B, D, F aliae utrunque aeque multiples L, M, N. Quoniam igitur ut A ad B, ita est C ad D, et E ad F; et sumptae sunt ipsa-



rum quidem A, C, E aeque multiples G, H, K, ipsarum vero B, D, F aliae aeque multiples L, M, N; si <sup>a</sup> G superat L, et H ipsam M a. 5. Def. 5. superabit, et K ipsam N; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. Quare et si G superat L, superabunt et G, H, K ipsas L, M, N; et si aequalis, aequales; et si minor, minores. suntque G, et G, H, K ipsarum A, et A, C, E utrunque aeque multiples, quoniam si fuerint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, aequalium numero, singulae

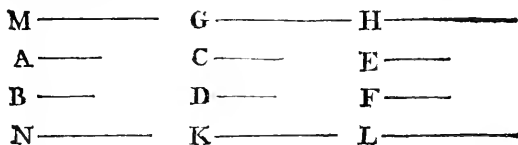
lingulae singularum aequae multiplicae; quam multiplex est una magnitudo  
 b. 1. 5. unius, tam multiplicae<sup>b</sup> erunt et omnes omnium. eadem ratione L, et  
 L, M, N ipsarum B, et B, D, F sunt utcumque aequae multiplicae. Est  
 a. Def. 5. 5. igitur<sup>a</sup> ut A ad B, ita A, C, E ad B, D, F. Quare si &c. Q. E. D.

## PROP. XIII. THEOR.

**S**I prima ad secundam eandem habeat rationem quam  
 tertia ad quartam, tertia autem ad quartam majorem  
 rationem habeat quam quinta ad sextam; et prima  
 ad secundam majorem habebit rationem quam quinta ad  
 sextam.

Prima enim A ad secundam B eandem rationem habeat quam ter-  
 tia C ad quartam D, tertia autem C ad quartam D majorem habeat rati-  
 onem quam quinta E ad sextam F. Dico et primam A ad secundam  
 B majorem rationem habere, quam quintam E ad sextam F.

Quoniam enim C ad D majorem habet rationem quam E ad F,  
 sunt quaedam ipsarum C, E aequae multiplicae, et ipsarum D, F aliae



quaedam aequae multiplicae, ut multiplex quidem C superet multiplicem  
 a. 7. Def. 5. D; multiplex vero E non superet multiplicem ipsius F<sup>a</sup>. sumantur, et  
 sint ipsarum C, E aequae multiplicae G, H; et ipsarum D, F aliae aequae  
 multiplicae K, L; ita ut G quidem superet K, H vero ipsam L  
 non superet; et quam multiplex est G ipsius C, tam multiplex fiat M  
 ipsius A; quam multiplex autem est K ipsius D, tam multiplex fiat N  
 ipse

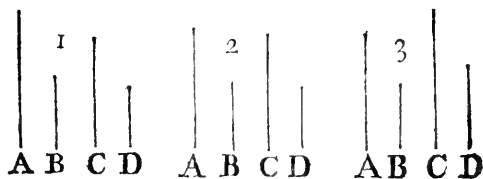
ipſius B. et quoniam eſt ut A ad B, ita C ad D, et ſumptae ſunt ipſarum A, C aequae multiplices M, G, et ipſarum B, D aliae quaedam aequae multiplices N, K; ſi M ſuperat N, et G ipſam K ſuperabit; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor. ſed G ſuperat K, ergo et M ipſam N ſuperabit. H vero non ſuperat L; ſuntque M, H ipſarum A, E aequae multiplices, et N, L ipſarum B, F aliae quaedam aequae multiplices. Ergo A ad B majorem rationem habebit<sup>a</sup> quam E a. 7. Def. 5; ad F. ſi igitur &c. Q. E. D.

COR. Et ſi prima ad ſecundam majorem rationem habeat, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam eandem rationem habeat, quam quinta ad ſextam; ſimiliter oſtendetur primam ad ſecundam majorem rationem habere, quam quintam ad ſextam.

PROP. XIV. THEOR.

**S**I prima ad ſecundam eandem habeat rationem, quam tertia ad quartam; prima autem major ſit quam tertia; et ſecunda quam quarta major erit; et ſi aequalis, aequalis; et ſi minor, minor.

Prima enim A ad ſecundam B eandem rationem habeat, quam tertia C ad quartam D; major autem ſit A quam C. Dico et B quam D majorem eſſe.



Quoniam enim A major eſt quam C, et alia eſt utcumque magnitudo  
 U B, ha-

- a. 8. 5. B, habebit <sup>a</sup> A ad B majorem rationem quam C ad B. sed ut C ad b. 3. 5 D, ita est A ad B; ergo et C ad D majorem habebit <sup>b</sup> rationem quam c. 10. 5. C ad B. ad quam vero eadem majorem rationem habet, illa minor <sup>c</sup> est. quare D est minor quam B, ac propterea B quam D major erit.



Secundo, Sit A aequalis ipsi C; erit B aequalis ipsi D. quoniam e. 9. 5. nim est A ad B, ut C hoc est A ad D, erit B aequalis ipsi D<sup>d</sup>.

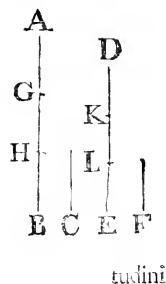
Tertio, Sit A minor C; erit B minor D. Etenim erit C major A, et quoniam est C ad D, ut A ad B, erit D major B per Casum primum. quare B minor erit D. si igitur prima &c. Q. E. D.

PROP. XV. THEOR.

**P**ARTES inter se comparatae eandem habent rationem, quam habent earum aequae multiplices.

Sit enim AB aequae multiplex C, atque DE ipsius F. Dico ut C ad F, ita esse AB ad DE.

Quoniam enim aequae multiplex est AB ipsius C, atque LE, ipsius F; quot magnitudines sunt in AB aequales ipsi C, totidem erunt et in DE aequales F. Dividatur AB in magnitudines ipsi C aequales, quae sint AG, GH, HB; et DE dividatur in magnitudines aequales F, videlicet in DK, KL, LE. erit igitur ipsarum AG, GH, HB multitudo aequalis multi-



tudini

tudini ipsarum DK, KL, LE. et quoniam aequales sunt AG, GH, HB, suntque DK, KL, LE inter se aequales; erit ut AG ad DK, ita GH ad KL, et HB ad LE<sup>a</sup>. atque ut una antecedentium ad unam con- a. 7. 5. sequentium, ita erunt omnes antecedentes ad omnes consequentes<sup>b</sup>; est b. 12. 5. igitur ut AG ad DK, ita AB ad DE. sed AG ipsi C est aequalis, et DK ipsi F. Ergo ut C ad F, ita erit AB ad DE. Partes igitur &c. Q. E. D.

PROP. XVI. THEOR.

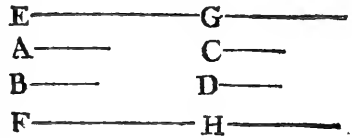
**S**I quatuor magnitudines quae omnes ejusdem sunt generis proportionales fuerint, et permutatae proportionales erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales A, B, C, D, sitque ut A ad B, ita C ad D. Dico et permutatas proportionales esse, videlicet ut A ad C, ita B ad D.

Sumantur enim ipsarum quidem A, B aequae multiplices quaecunque E, F; ipsarum vero C, D, aliae **E**—————**G**—————  
utcumque aequae multiplices G, H. **A**————— **C**—————  
et quoniam aequae multiplex est E **B**————— **D**—————  
ipsius A, atque F ipsius B; partes autem inter se comparatae **F**————— **H**—————

eandem habent<sup>a</sup> rationem quam habent earum aequae multiplices; e. a. 15. 5. erit ut A ad B, ita E ad F. ut autem A ad B, ita C ad D. Ergo et ut C ad D ita E ad F. rursum quoniam G, H sunt ipsarum C, D b. 11. 5. aequae multiplices, erit<sup>a</sup> ut C ad D, ita G ad H; ut autem C ad D, ita E ad F. Ergo et ut E ad F, ita G ad H. Quod si quatuor magnitudines proportionales sint, prima autem major sit quam tertia, et secunda quam quarta major erit; et si aequalis, aequalis; et si minor,

c. 14. 5. minor<sup>c</sup>. si igitur E superat G, et F ipsam H superabit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. sunt-  
 que E, F ipsarum A, B, utrun-  
 que aequae multiplices, et G, H  
 ipsarum C, D aliae utrunque aequae  
 d. Def. 5. 5 multiplices. Ergo<sup>d</sup> ut A ad  
 C, ita B ad D. si igitur quatuor &c. Q. E. D.



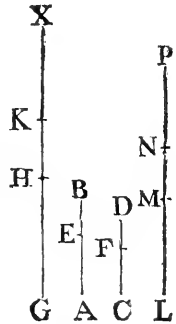
## PROP. XVII. THEOR.

**S**I compositae magnitudines sint proportionales, et di-  
 visae proportionales erunt.

Sint compositae magnitudines proportionales AB, BE; CD, DF, hoc est ut AB ad BE, ita sit CD ad DF. Dico etiam divisas proportionales esse, videlicet ut AE ad EB, ita esse CF ad FD.

Sumantur enim ipsarum AE, EB, CF, FD utrunque aequae multiplices GH, HK, LM, MN; ipsarum vero EB, FD rursus sumantur aliae utrunque aequae multiplices KX, NP. et quoniam aequae multiplex est GH ipsius AE, atque HK ipsius EB;

a. 1. 5. crit<sup>a</sup> GH ipsius AE aequae multiplex, atque GK ipsius AB. aequae autem multiplex est GH ipsius AE, atque LM ipsius CF. ergo GK aequae multiplex est AB, atque LM ipsius CF. rursus, quoniam aequae multiplex est LM ipsius CF, atque MN ipsius FD; erit<sup>a</sup> LM aequae multiplex CF, atque LN ipsius CD. sed aequae multiplex erat LM ipsius CF, atque GK ipsius AB. aequae igitur multiplex est GK ipsius AB, atque LN ipsius CD; quare GK, LN ipsarum AB, CD aequae multiplices



multiplices erunt. rursus, quoniam aeque multiplex est HK ipfius EB, atque MN ipfius FD; est autem et KX ipfius EB aeque multiplex, atque NP ipfius FD; et composita HX ipfius EB aeque multiplex erit <sup>b</sup> b. 2. 5. atque composita MP ipfius FD. et quoniam est ut AB ad BE, ita CD ad DF, et sumptae sint ipsarum quidem AB, CD aeque multiplices GK, LN, ipsarum vero EB, FD aliae quaedam aeque multiplices HX, MP; si <sup>c</sup> GK superat HX, et LN superabit MP; et si aequalis, ae- c. 5. Def. 5. qualis; et si minor, minor. si autem GH superat KX, additâ communi HK, superabit GK ipsam HX; quare et LN superabit MP; communique MN ablatâ, superabit LM ipsam NP. Quare si GH superat KX, et LM superabit ipsam NP. similiter demonstrabimus et si GH sit aequalis KX, et LM ipsi NP esse aequalem; et si minor, minorem. sunt autem GH, LM ipsarum AE, CF utcunque aeque multiplices, et ipsarum EB, FD aliae utcunque aeque multiplices sunt KX, NP. ergo ut AE ad EB, ita erit CF ad FD. si igitur compositae magnitudines sint &c. Q. E. D.

PROP. XVIII.

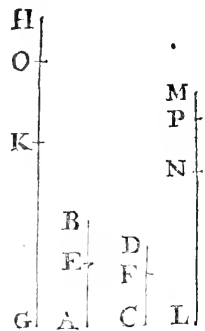
## PROP. XVIII. THEOR.

**S**I divisee magnitudines sint proportionales, et compositae proportionales erunt.

Sint divisee magnitudines proportionales AE, EB; CF, FD, hoc est ut AE ad EB, ita sit CF ad FD; dico etiam compositas proportionales esse, videlicet ut AB ad BE, ita esse CD ad DF.

Sumantur enim ipsarum AB, DE, CD, DF utcumque aequae multiplices GH, HK, LM, MN; ipsarum autem BE, DF aliae rursus sumantur utcumque aequae multiplices KO, NP. et quoniam KO, NP aequae multiplices sunt ipsarum BE, DF; et KH, NM earundem sunt aequae multiplices, si KO multiplex ipsius BE major sit KH multiplici ejusdem BE, erit et NP multiplex ipsius DF major NM multiplici ejusdem DF; et si KO aequalis sit KH, erit NP aequalis NM; et si minor,

Sit primum KO non major KH, igitur erit NP non major NM. et quoniam GH, HK aequae multiplices sunt ipsarum AB, BE, et est  
 \* 3. Ax. 5. AB major BE, erit GH major \* KH; est autem KO non major KH; quare GH major est KO. similiter ostendetur LM majorem esse NP. Ergo si KO non major sit KH, erit GH multiplex ipsius AB semper major KO multiplici ipsius BE, et simul LM multiplex ipsius CD major erit NP multiplici ipsius DF.



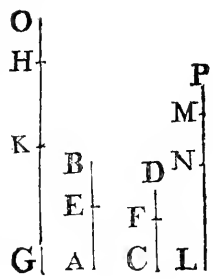
Sed sit KO major quam KH; erit igitur, ut ostensum, NP major NM. et quoniam est tota GH aequae multiplex totius AB, atque ab-

lata



lata HK ablatae BE, erit <sup>a</sup> et reliqua GK reliquae AE aequae multi-  
 plex atque GH ipfius AB. hoc est atque LM ipfius CD. fimiliter quo-  
 niam LM aequae multiplex est ipfius CD, atque ablata MN ablatae DF,  
 erit <sup>a</sup> reliqua LN aequae multiplex reliquae CF, atque LM ipfius CD.  
 fed aequae multiplex offensa est LM ipfius CD,

atque GK ipfius AE; aequae igitur multiplex  
 est GK ipfius AE, atque LN ipfius CF. quare  
 GK, LN ipfarum AE, CF funt aequae multi-  
 plices. quoniam vero KO, NP ipfarum BE, DF  
 funt aequae multiplices, et ablatae funt KH, NM  
 earundem aequae multiplices, erunt reliquae HO,  
 MP vel aequales ipfis BE, DF, vel earundem  
 aequae multiplices<sup>b</sup>. funt primùm HO, MP ac-

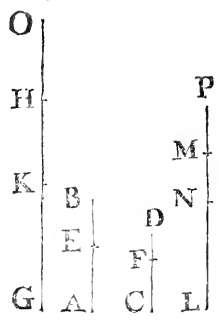


b. 6. 5.

quales ipfis BE, DF; et quoniam est AE ad EB, ut CF ad FD, et  
 fumptae funt GK, LN ipfarum AE, CF aequae multiplices, erit <sup>c</sup> GK  
 ad EB, ut LN ad FD. est autem HO aequalis EB, et MP ipfi FD;  
 quare est GK ad HO, ut LN ad MP. Ergo fi GK superat HO, su-  
 perabit LN ipfam MP; et fi aequalis, aequalis; et fi minor, minor<sup>d</sup>.  
 d. A. 5.

Sed funt HO, MP ipfarum EB, FD aequae multiplices; et quoniam

est AE ad EB, ut CF ad FD, et fumptae funt  
 ipfarum AE, CF aequae multiplices GK, LN;  
 ipfarum vero EB, FD aliae quaedam aequae  
 multiplices HO, MP; fi GK superat HO, et  
 LN superabit MP; et fi aequalis, aequalis; et  
 fi minor, minor<sup>e</sup>; quod etiam in casu praece-  
 dente obfervatum fuit. fi igitur GH superat  
 KO, ablatae communis KH fuperabit GK ipfam  
 HO; quare et LN fuperabit MP; et ad idem  
 communis NM, fuperabit LM ipfam NP. Ergo



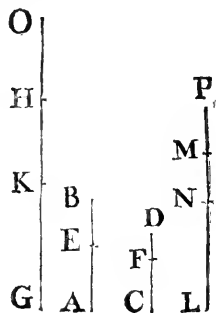
e. 5. Def. 5.

fi GH

fi GH superat KO, et LM ipsam NP superabit. similiter demonstrabitur si GH aequalis sit KO, et LM ipsi NP aequalis esse; et si minor, minorem. et in casu in quo KO non major est KH, ostensum fuit GH semper majorem esse KO, et simul LM majorem NP. sunt autem GH, LM ipsarum AB, CD utcumque aeque multiplices, et KO, NP ipsarum BE, DF aliae utcumque

e. 5. Def. 5. aeque multiplices; ergo <sup>e</sup> ut AB ad BE, ita est CD ad DF. Quare si divisae &c.

Q. E. D.



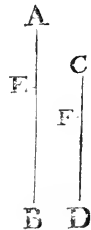
## PROP. XIX. THEOR.

**S**I fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; et reliqua ad reliquam erit ut tota ad totam.

Sit enim ut tota AB ad totam CD, ita ablata AE ad ablatam CF. Dico et reliquam EB ad reliquam FD ita esse ut tota AB ad totam CD.

a. 16. 5. Quoniam enim est ut tota AB ad totam CD, ita AE ad CF; et per

b. 17. 5. mutando erit <sup>a</sup> ut BA ad AE, ita DC ad CF. quoniam vero compositae magnitudines sunt proportionales, et divisae proportionales erunt<sup>b</sup>; ut igitur BE ad EA, ita DF ad FC; rursumque permutando, ut BE ad DF, ita EA ad FC. sed ut AE ad CF, ita posita est AB ad CD. et reliqua igitur EB erit ad reliquam FD, ut tota AB ad totam CD. quare si &c. Q. E. D.



COR. Si fuerit ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam;

erit

erit et reliqua ad reliquam ut ablata ad ablatam. hoc enim in ipsa demonstratione ostensum est.

PROP. E. THEOR.

**S**I quatuor magnitudines proportionales sint, et convertendo proportionales erunt.

Sit enim ut AB ad BE, ita CD ad DF; convertendo erit ut BA ad AE, ut DC ad CF.

Quoniam enim ut AB ad BE, ita CD ad DF, dividendo<sup>a</sup> erit AE ad EB, ut CF ad FD; et invertendo<sup>b</sup>, BE ad EA, ut DF ad FC. Quare componendo<sup>c</sup>, erit BA ad AE, ut DC ad CF. si igitur &c. Q. E. D.



a. 17. 5.  
b. B. 5.  
c. 18. 5.

PROP. XX. THEOR.

**S**I sint tres magnitudines, et aliae ipsis numero aequales, quae binae sumantur in eadem ratione; prima autem major sit quam tertia; et quarta quam sexta major erit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor.

Sint tres magnitudines A, B, C, et aliae ipsis numero aequales D, E, F, quae binae sumptae sunt in eadem ratione; sit scilicet ut A ad B, ita D ad E; et ut B ad C, ita E ad F; major autem sit A quam C. Dico et D quam F majorem esse; et si aequalis, aequalem; et si minor, minorem.

Quoniam enim A major est quam C, alia vero utcumque est B, et major ad eandem majorem habet rationem quam minor<sup>a</sup>; habebit A ad B majorem rationem, quam



a. 8. 5.

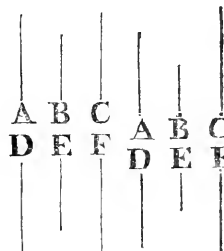
X

C ad

- b. 13. 5. C ad B. sed ut D ad E, ita A ad B; ergo <sup>b</sup> et D ad E majorem habet rationem, quam C ad B. et quoniam est B ad C, ut E ad F, invertendo erit C ad B, ut F ad E; ostensa autem est D ad E majorem rationem habere quam C ad B; ergo <sup>c</sup> D ad E majorem habet rationem quam F ad E. ad eandem vero rationem habentium, quae d. 10. 5. majorem habet rationem illa major est <sup>d</sup>. major igitur est D quam F.

Secundo, Sit A aequalis ipsi C; erit et D aequalis ipsi F. Quoniam enim aequales sunt A, C, et alia utcumque e. 7. 5. est B, erit <sup>e</sup> A ad B, ut C ad B. est autem A ad B, ut D ad E; et C ad B, ut F ad E; f. 11. 5. ergo <sup>f</sup> est D ad E, ut F ad E; et propterea g. 9. 5. <sup>g</sup> D aequalis est ipsi F.

Tertio, Sit A minor C, erit et D minor F. quoniam enim A minor est C, erit C major quam A. et quoniam ex hypothesis, et invertendo, est C ad B, ut F ad E; et B ad A, ut E ad D; et est C major A; erit et F major D, per Casum primum, et ob id erit D minor F. si igitur &c. Q. E. D.



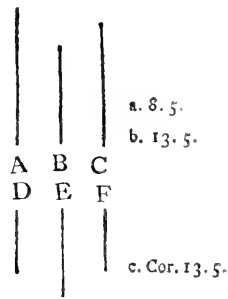
## PROP. XXI. THEOR.

**S**I sint tres magnitudines, et aliae ipsis numero aequales, quae binae sumantur in eadem ratione; sit autem perturbata earum proportio; prima autem major sit quam tertia, et quarta quam sexta major erit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor.

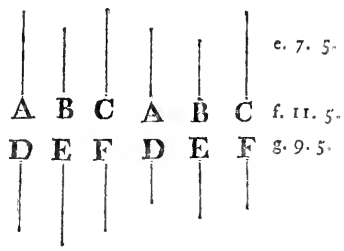
Sint tres magnitudines A, B, C, et aliae ipsis numero aequales D, E, F quae binae sumptae sint in eadem ratione; sit autem perturbata earum proportio, videlicet ut A quidem ad B, ita E ad F; ut vero B ad

ad C, ita D ad E. major autem sit A quam C. Dico et D quam F majorem esse; et si aequalis, aequalem; et si minor, minorem.

Quoniam enim major est A quam C, alia vero est B; habebit <sup>a</sup> A ad B majorem rationem quam C ad B. sed ut E ad F, ita A ad B; ergo <sup>b</sup> et E ad F majorem habebit rationem, quam C ad B. quoniam vero est B ad C, ut D ad E, invertendo erit C ad B, ut E ad D. ostensa autem est E ad F majorem rationem habere quam C ad B; ergo <sup>c</sup> E ad F majorem habet rationem quam E ad D. ad quam vero eadem majorem habet rationem illa minor est <sup>d</sup>; minor igitur est F quam D, et propterea D quam F major erit.



Secundo, Sit A aequalis ipsi C; erit et D aequalis ipsi F. Quoniam enim aequales sunt A, C, alia vero est B, erit <sup>e</sup> A ad B, ut C ad B. est autem A ad B, ut E ad F; et C ad B, ut E ad D. ergo <sup>f</sup> est E ad F, ut F ad D. aequalis igitur est D ipsi F.



Tertio, Sit A minor C; erit et D minor F. quoniam enim A minor est C, erit C major A. et quoniam ex hypothese, et invertendo, est C ad B, ut E ad D; et B ad A, ut F ad E; et est C major A, erit F major D per Casum primum; et ob id erit D minor F. si igitur &c. Q. E. D.

## PROP. XXII. THEOR.

**S**I sint quotcunque magnitudines, et aliae ipsis numero aequales, quae binae sumantur in eadem ratione; et ex aequali in eadem ratione erunt.

Sint primùm tres magnitudines A, B, C, et aliae ipsis numero aequales D, E, F, binae sumptae in eadem ratione, hoc est ut A quidem ad B, ita D ad E; ut autem B ad C, ita E ad F. Dico et ut A ad C, ita esse D ad F.

Sumantur enim ipsarum quidem A, D aequae multiplices utcunque G, H; ipsarum vero B, E aliae utcunque aequae multiplices K, L; et ipsarum C, F aliae utcunque aequae multiplices M, N.

Quoniam igitur est ut A ad B, ita D ad E, et sumptae sunt ipsarum A, D aequae multiplices G, H, et ipsarum B, E aliae aequae multiplices K, L; erit <sup>a</sup> ut G ad K, ita H ad L. eadem quoque ratione erit ut K ad M, ita L ad N. et cum sint tres magnitudines G, K, M, et aliae ipsis numero aequales H, L, N binae sumptae et in eadem ratione; si G superat M, et H ipsam N superabit; et si aequalis, aequalis; et si minor,

minor<sup>b</sup>. suntque G, H ipsarum A, D utcunque aequae multiplices, et M, N ipsarum C, F, aliae utcunque aequae multiplices. ut igitur A ad C, ita erit <sup>c</sup> D ad F.

Sint jam quatuor magnitudines A, B, C, D, et aliae ipsis numero aequales E, F, G, H quae binae sumptae sunt in eadem ratione; videlicet ut A ad B, ita E

A.	B.	C.	D.
E.	F.	G.	H.

ad

ad F; ut vero B ad C, ita F ad G; et ut C ad D, ita G ad H; erit A ad D, ut E ad H.

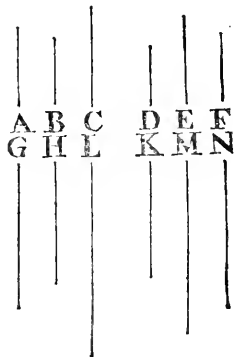
Quoniam enim tres sunt magnitudines A, B, C et aliae ipsis numero aequales, E, F, G quae binae sumptae sunt in eadem ratione, erit, per Casum primum, A ad C, ut E ad G; est autem et C ad D, ut G ad H; quare rursus per Casum primum, est A ad D, ut E ad H. et sic quotcumque fuerint magnitudines. Quare si &c. Q. E. D.

PROP. XXIII. THEOR.

**S**I sint quotcumque magnitudines, et aliae ipsis numero aequales, quae binae sumantur in eadem ratione; sit autem perturbata seu inordinata earum proportio: et ex aequali in eadem ratione erunt.

Sint primum tres magnitudines A, B, C, et aliae ipsis numero aequales, binae sumptae et in eadem ratione D, E, F; sit autem perturbata earum proportio, hoc est sit ut A ad B, ita E ad F; et ut B ad C, ita D ad E. Dico ut A ad C, ita esse D ad F.

Sumantur ipsarum quidem, A, B, D utcumque aequae multiples G, H, K; ipsarum vero C, E, F aliae utcumque aequae multiples L, M, N. et quoniam G, H aequae multiples sunt ipsarum A, B, partes autem eandem habent rationem quam habent earum aequae multiples; erit ut A ad B, ita G ad H. et simili ratione ut E ad F, ita M ad N. atque est ut A ad B, ita E ad F. ut igitur G ad H, ita <sup>b</sup> M ad N. et b. 11. 5. quoniam



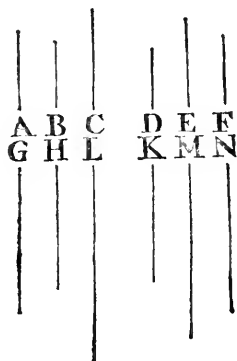
a. 15. 5.

et b. 11. 5.

quoniam

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

quoniam est ut B ad C, ita D ad E, et sumptae sunt ipsarum B, D aequae multiples H, K, ipsarum vero C, E, aliae aequae multiples  
 2. 4. 5. L, M; erit  $\epsilon$  ut H ad L, ita K ad M. ostensum autem est et ut G ad H, ita esse M ad N. quoniam igitur tres sunt magnitudines G, H, L, et



aliae ipsi numero aequales K, M, N binae sumptae in eadem ratione,  
 2. 21. 5. estque perturbata earum proportio; si  $\delta$  G superat L, et K ipsam N superabit; et si aequalis, aequalis; et si minor, minor. sunt autem G, K, ipsarum A, D, utcunque aequae multiples; et L, N utcunque aequae  
 2. Def. 5. 5. multiples ipsarum C, F. ut igitur  $\epsilon$  A ad C, ita D ad F.

Sint jam quatuor magnitudines A, B, C, D et aliae ipsi numero aequales E, F, G, H quae binae sumptae in eadem sunt ratione; sit autem perturbata earum proportio, videlicet ut A ad B, ita G ad H; ut vero B ad C, ita F ad G; et ut C ad D, ita E ad F. erit A ad D, ut E ad H.

A.	B.	C.	D.
E.	F.	G.	H.

Quoniam enim tres sunt magnitudines A, B, C et aliae ipsi numero aequales F, G, H quae binae sumptae sunt in eadem ratione, estque perturbata



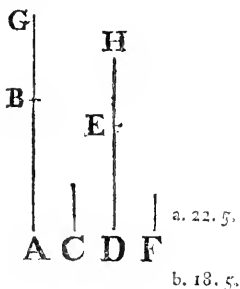
perturbata earum proportio; erit, per Casum primum, ut A ad C, ita F ad H; est autem C ad D, ut E ad F; quare, rursus per Casum primum, est A ad D, ut E ad H. et sic quotecunque fuerint magnitudines. Quare si fuerit &c. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

**S**I prima ad secundam eandem habeat rationem quam tertia ad quartam; habeat autem et quinta ad secundam rationem eandem quam sexta ad quartam; et composita prima cum quinta ad secundam eandem rationem habebit, quam tertia cum sexta ad quartam.

Prima enim AB ad secundam C eandem habeat rationem, quam tertia DE ad quartam F; habeat autem et quinta BG ad secundam C rationem eandem quam sexta EH ad quartam F. Dico et compositam primam cum quinta AG ad secundam C eandem rationem habere, quam tertia cum sexta DH ad quartam F.

Quoniam enim est ut BG ad C, ita EH ad F; erit invertendo C ad BG, ut F ad EH. et quoniam ut AB ad C, ita est DE ad F; ut autem C ad BG, ita F ad EH; erit <sup>a</sup> ex aequali ut AB ad BG, ita DE ad EH. et quoniam divisae magnitudines sunt proportionales, et compositae proportionales erunt<sup>b</sup>; ut igitur AG ad GB, ita est DH ad HE. sed et ut GB ad C, ita HE ad F. ergo ex aequali<sup>a</sup>, ut AG ad C, ita DH ad F. si igitur &c. Q. E. D.



COR. 1. Manente hypothefi Propositionis, erit excessus primae et quintae ad secundam, ut excessus tertiae et sextae ad quartam. Demonstratio

monstratio eadem est cum ea Propositionis dummodo vice componendo utatur dividendo.

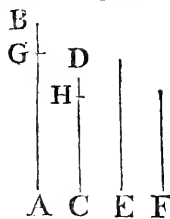
**COR. 2.** Ipsa autem Propositio vera est de quocunque magnitudinibus, quarum priores ad communem secundam easdem habent rationes quas habent reliquae ad communem quartam, singulae sc. priorum ad secundam, eandem quam singulae reliquarum ad quartam; ut patet.

**PROP. XXV. THEOR.**

**S**I quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipsarum et minima duabus reliquis majores erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales AB, CD, E, F; et sit ut AB ad CD, ita E ad F. sit autem maxima ipsarum AB, et propterea  
 a. A. et 14. 5. <sup>a</sup> F minima. Dico AB et F ipsis CD et E majores esse.

Ponatur enim ipsi quidem E aequalis AG, ipsi vero F aequalis CH. Quoniam igitur est ut AB ad CD, ita E ad F; estque AG aequalis E, et CH aequalis F; erit ut AB ad CD, ita AG ad CH. et quoniam est ut tota AB ad totam CD, ita ablata AG ad ablatam CH; erit et reliqua GB  
 b. 19. 5 ad reliquam HD, ut tota AB ad totam <sup>b</sup> CD. ma-  
 c. A. 5. jor autem est AB quam CD; ergo <sup>c</sup> et GB major erit quam HD. et quoniam AG aequalis est ipsi E, CH vero ipsi F; erunt AG et F aequales ipsis CH et E. inaequalibus igitur existentibus GB, HD, quarum major est GB, si addantur AG et F ipsi quidem GB, ipsi vero HD addantur CH et E; fient AB et F ipsis CD et E majores. si igitur quatuor &c.  
 Q. E. D.



**PROP. F.**

## PROP. F. THEOR.

**R**ATIONES ex rationibus inter se iisdem compositae, sunt inter se eadem.

Sit enim ut A ad B, ita D ad E; ut vero B ad C, ita E ad F. erit ratio composita ex rationibus A ad B, et B ad C, hoc est, per definitionem rationis compositae, ratio A ad C, eadem rationi D ad F, quae sc. composita est ex rationibus D ad E, et E ad F.

A. B. C.
D. E. F.

Quoniam enim tres sunt magnitudines A, B, C et aliae ipsi numero aequales D, E, F quae binae sumptae in eadem sunt ratione, erit <sup>a.</sup> 22. 5. ex aequali A ad C, ut D ad F.

Rursus sit ut A ad B, ita E ad F; ut vero B ad C, ita D ad E; erit igitur ex aequali in proportione perturbata<sup>b</sup>, A ad C, ut D ad F, hoc est ratio A ad C, quae sc. composita est ex rationibus A ad B, et B ad C, eadem est rationi D ad F, quae composita est ex rationibus D ad E, et E ad F. et similiter si fuerint plures rationes in utroque casu. Rationes igitur &c. Q. E. D.

A. B. C.
D. E. F.

## PROP. G. THEOR.

**S**I rationes quaedam eadem sint quibusdam rationibus, singulae singulis; ratio quae composita est ex rationibus quae eadem sunt rationibus prioribus, singulae singulis, eadem erit rationi quae composita est ex rationibus quae eadem sunt posterioribus, singulae singulis.

Sit ut A ad B, ita E ad F; ut vero C ad D, ita G ad H. fitque  
 Y ut

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

ut A ad B, ita K ad L; ut vero C ad D, ita L ad M. ratio igitur K ad M, per Definitionem rationis compositae, composita est ex rationibus K ad L, et L ad M, quae eadem sunt rationibus A ad B, et C ad D. fitque praeterea ut E ad F, ita N ad O, ut vero G ad H, ita O ad P; ratio igitur N ad P composita est ex rationibus N ad O, et O ad P, quae eadem sunt rationibus E ad F, et G ad H. et ostendendum est rationem K ad M eandem esse rationi N ad P, sive ut K ad M, ita esse N ad P.

A.	B.	C.	D.	K.	L.	M.
E.	F.	G.	H.	N.	O.	P.

Quoniam est K ad L, ut (A ad B, hoc est ut E ad F, hoc est ut) N ad O; ut vero L ad M, ita est (C ad D, et ita G ad H, et ita) O ad P.

a. 22. 5. crit<sup>a</sup> ex aequali K ad M, ut N ad P. Si igitur rationes &c. Q. E. D.

## PROP. H. THEOR.

**S**I ratio ex quibusdam rationibus composita eadem sit rationi ex quibusdam aliis rationibus compositae, fueritque una ratio ex prioribus, vel ratio ex quibusdam ex prioribus composita, eadem uni rationi ex posterioribus, vel rationi ex quibusdam ex posterioribus compositae; erit reliqua ratio ex prioribus, vel ratio ex reliquis prioribus composita, eadem rationi reliquae ex posterioribus, vel rationi ex reliquis posterioribus compositae.

Sint rationes A ad B, B ad C, C ad D, D ad E, et E ad F; et aliae rationes G ad H, H ad K, K ad L, et L ad M. fitque ratio A ad F, quae sc. composita est<sup>a</sup> ex prioribus, eadem rationi G ad M, quae composita est<sup>a</sup> ex posterioribus. et praeterea ratio A ad D quae composita est ex rationibus A ad B, B ad C,

a. Def. rationis comp.

A.	B.	C.	D.	E.	F.
G.	H.	K.	L.	M.	

et

et C ad D, eadem fit rationi G ad K quae composita est ex rationibus G ad H, et H ad K. erit ratio D ad F quae composita est ex reliquis rationibus prioribus D ad E, et E ad F, eadem rationi K ad M quae composita est ex reliquis rationibus posterioribus K ad L, et L ad M.

Quoniam enim, ex hypothesi, est A ad D, ut G ad K, erit invertendo<sup>b</sup>, D ad A, ut K ad G; ut vero A ad F, ita est G ad M; ergo<sup>c</sup>, ex aequali, erit D ad F, ut K ad M. si igitur &c. Q. E. D.

## PROP. K. THEOR.

**S**I fuerint quotcunque rationes, quae dicantur priores, fuerintque aliae quotcunque rationes, quae dicantur posteriores; sitque ratio quae composita est ex rationibus quae eadem sunt rationibus prioribus, singulae singulis, eadem rationi quae composita est ex rationibus quae, singulae singulis, eadem sunt rationibus posterioribus; una vero ratio ex prioribus, vel ratio quae composita est ex rationibus quae, singulae singulis, eadem sunt totidem ex prioribus, eadem fit uni rationi ex posterioribus, vel rationi quae composita est ex rationibus quae, singulae singulis, eadem sunt totidem ex posterioribus: erit reliqua ratio ex prioribus, vel, si plures fuerint, erit ratio quae composita est ex rationibus quae eadem sunt reliquis ex prioribus, singulae singulis, eadem rationi reliquae ex posterioribus, vel, si plures fuerint, rationi quae composita est ex rationibus quae, singulae singulis, eadem sunt reliquis ex posterioribus.

Sint rationes A ad B, C ad D, E ad F, priores; posteriores vero sint rationes G ad H, K ad L, M ad N, O ad P, Q ad R. et fit ut

Y 2

A ad

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

A ad B, ita S ad T, et ut C ad D, ita T ad V, ut vero E ad F, ita V ad X. erit igitur, ex Definitione rationis compositae, ratio S ad X composita ex rationibus S ad T, T ad V, V ad X, quae scilicet eadem sunt, singulae singulis, rationibus A ad B, C ad D, E ad F. fit etiam ut G ad H, ita Y ad Z, et ut K ad L, ita Z ad a, ut M ad N, ita a ad b, ut O ad P, ita b ad c, et ut Q ad R, ita c ad d. est igitur, ex eadem Definitione, ratio Y ad d composita ex rationibus Y ad Z, Z ad a, a ad b, b ad c, et c ad d, quae scilicet eadem sunt, singulae singulis, rationibus G ad H, K ad L, M ad N, O ad P, et Q ad R. igitur, ex hypothesi, est S ad X, ut Y ad d. praeterea fit ratio A ad B, sive ratio S ad T, una sc. ex prioribus eadem rationi e ad g quae composita est ex rationibus e ad f, et f ad g, quae eadem sunt, ex hypothesi, rationibus G ad H, et K ad L ex posterioribus; fitque ratio h ad l composita ex rationibus h ad k, et k ad l, quae eadem sunt rationibus reliquis ex prioribus, ipsis sc. C ad D, et E ad F; et fit ratio m ad p composita ex rationibus m ad n, n ad o, o ad p, quae, singulae singulis, eadem sunt reliquis ex posterioribus rationibus, ipsis sc. M ad N, O ad P, Q ad R. erit ratio h ad l eadem rationi m ad p, sive erit h ad l, ut m ad p.

h, k, l.		
A, B;	C, D;	E, F.
G, H;	K, L;	M, N;
O, P;	Q, R.	S, T, V, X.
Y, Z, a, b, c, d.		
e, f, g.	m, n, o, p.	

Etenim quoniam est e ad f, ut (G ad H, hoc est ut) Y ad Z; est autem f ad g, ut (K ad L, hoc est ut) Z ad a; erit, ex aequali, e ad g, ut Y ad a. et, ex hypothesi, est A ad B sive S ad T, ut e ad g; quare

quare est S ad T, ut Y ad a, et, invertendo, T ad S, ut a ad Y; est autem S ad X, ut Y ad d; ergo, ex aequali, erit T ad X, ut a ad d. praeterea quoniam est h ad k, ut (C ad D, hoc est ut) T ad V; ut vero k ad l, ita (E ad F, hoc est ita) V ad X; erit ex aequali h ad l, ut T ad X. similiter ostendetur esse m ad p, ut a ad d. ostensum autem fuit esse T ad X, ut a ad d. ergo<sup>a</sup> est h ad l, ut m ad p. a. 11. 5.

Q. E. D.

Propositiones G et K apud veteres et recentiores Geometras comprehendendi solent in enuntiatione Propositionum F et H, brevitatis scilicet gratia. quo autem sensu hoc fieri potest, operae pretium fuit ostendere; saepissime enim a Geometris usurpantur.

## E U C L I D I S

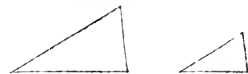
## E L E M E N T O R U M

## L I B E R   S E X T U S.

## DEFINITIONES.

I.

**S**IMILES figurae rectilineae sunt, quae et singulos angulos aequales habent, et circa aequales angulos latera proportionalia.



II.

“ Reciprocae figurae, triangula sc. et parallelogramma, sunt quando circa duos angulos latera ita sunt proportionalia, ut latus primae sit ad latus secundae, ut reliquum secundae latus ad latus reliquum primae.”

III.

Extrema ac media ratione fecari recta linea dicitur, quando ut tota ad majus segmentum, ita fuerit majus segmentum ad minus.

Altitudo



IV.

Altitudo cujusque figurae est recta a vertice ad  
basim perpendicularis ducta.



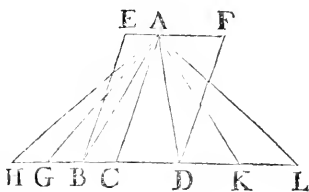
PROP. I. THEOR.

**T**RIANGULA et parallelogramma quae eandem  
habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

Sint triangula quidem ABC, ACD, parallelogramma vero EC, CF, quae eandem habent altitudinem, videlicet perpendicularem a puncto A ad BD ductam. Dico ut basis BC ad CD basim, ita esse triangulum ABC ad triangulum ACD, et parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum.

Producatur enim BD ex utraque parte ad puncta H, L, et ipsi quidem basi BC aequales quotcunque ponantur BG, GH; ipsi vero basi CD ponantur quotcunque aequales DK, KL; et AG, AH, AK, AL

jungantur. Quoniam igitur CB, BG, GH inter se aequales sunt, erunt et triangula AHG, AGB, ABC inter se aequalia<sup>a</sup>. ergo quam multiplex est basis HC ipsius BC basis, tam multiplex est AHC triangulum trian-



a. 38. 1.

guli ABC. eadem ratione quam multiplex est LC basis ipsius basis CD, tam multiplex est et triangulum ALC ipsius ACD trianguli. et si aequalis est HC basis basi CL, et triangulum AHC triangulo ALC erit aequale<sup>a</sup>; et si basis HC basim CL superat, et triangulum AHC superabit triangulum ALC; et si minor, minus erit. quatuor igitur magnitudinibus existentibus, videlicet dua-

bus

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

bus basibus BC, CD, et duobus triangulis ABC, ACD, sumpta sunt aequae multiplicia utcumque basis quidem BC, et ABC trianguli, videlicet basis HC, et AHC triangulum; basis vero CD et trianguli ACD, alia utcumque multiplicia, nempe CL basis, et ALC triangulum; atque ostensum est si HC basis basim CL superat, et triangulum AHC superare triangulum ALC; et si aequalis, aequale; et si minor, minus. est

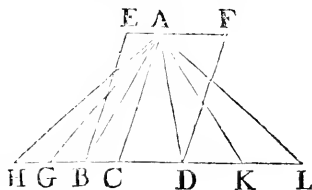
b. 5. Def. 5. igitur <sup>b</sup> ut BC basis ad basim CD, ita triangulum ABC ad ACD triangulum.

Et quoniam trianguli ABC duplicem est <sup>c</sup> parallelogrammum EC, et trianguli ACD parallelogrammum CF duplicem <sup>c</sup>, partes autem eandem inter

d. 15. 5. se rationem habent quam earum aequae multiplices <sup>d</sup>; erit ut ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Quoniam igitur ostensum est ut basis BC ad CD basim, ita esse ABC triangulum ad triangulum ACD; ut autem ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum; erit <sup>e</sup> ut BC basis ad basim CD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Quare triangula &c. Q. E. D.

COR. Hinc triangula et parallelogramma, quae aequales habent altitudines, sunt inter se ut bases.

Positis enim figuris ita ut bases earum sint in eadem recta linea, et ductis perpendicularibus a verticibus triangulorum ad bases, erit recta f. 33. 1. linea quae vertices jungit parallela rectae in qua sunt bases <sup>f</sup>, quia perpendicularares sunt inter se aequales et parallelae. et iisdem constructis quae in Propositione constructa fuerunt, Demonstratio eadem erit cum ea Propositionis.

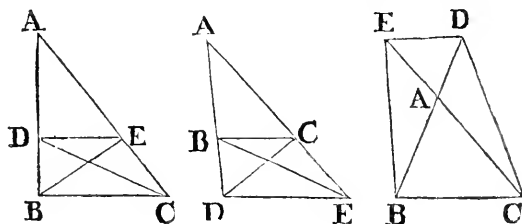


## PROP. II. THEOR.

**S**I uni laterum trianguli parallela quaedam recta linea ducta fuerit, proportionaliter fecabit reliqua trianguli latera, vel latera producta. et si latera trianguli, vel latera producta proportionaliter secata fuerint, quae sectiones conjungit recta linea, reliquo trianguli lateri parallela erit.

Trianguli enim ABC uni laterum BC, parallela ducatur DE. Dico ut BD ad DA, ita esse CE ad EA.

Jungantur enim BE, CD; triangulum igitur BDE triangulo CDE est aequale<sup>a</sup>, super eadem enim sunt basi DE, et in eisdem parallelis<sup>a</sup>. 37. 1. DE, BC. aliud autem triangulum est ADE; aequalia vero ad idem eandem habent rationem<sup>b</sup>; ergo ut triangulum BDE ad triangulum<sup>b</sup>. 7. 5.



ADE, ita est CDE triangulum ad triangulum ADE; ut autem triangulum BDE ad triangulum ADE, ita est<sup>c</sup> BD ad DA; nam cum eandem<sup>c</sup>. 1. 6. altitudinem habent, videlicet perpendicularem a puncto E ad AB ductam, inter se sunt ut bases. et ob eandem causam ut CDE triangulum ad triangulum ADE, ita CE ad EA. ut igitur BD ad DA, ita est CE ad EA<sup>d</sup>.

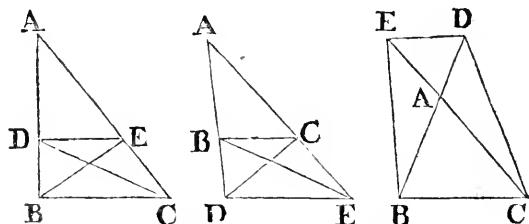
d. 11. 5.

Sed trianguli ABC latera AB, AC, vel latera producta proportiona-  
Z liter

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

liter facta sint in punctis D, E, hoc est ut BD ad DA, ita sit CE ad EA, et jungatur DE. Dico DE ipsi BC parallelam esse.

Idem enim constructis, quoniam est ut BD ad DA, ita CE ad EA;  
 e. 1. 6. ut autem BD ad DA, ita est BDE triangulum ad triangulum ADE<sup>c</sup>;  
 et ut CE ad EA, ita CDE triangulum ad triangulum ADE; erit ut



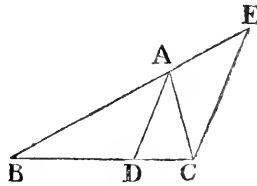
triangulum BDE ad triangulum ADE, ita CDE triangulum ad triangulum ADE. utrumque igitur triangulorum BDE, CDE ad triangulum ADE eandem habet rationem; quare triangulum BDE triangulo CDE est aequale<sup>e</sup>. et sunt super eadem basi DE; aequalia autem tri-  
 e. 9. 5. angula et super eadem basi constituta etiam in eisdem sunt parallelis<sup>f</sup>;  
 f. 39. 1. ergo DE ipsi BC parallela est. Si igitur uni &c. Q. E. D.

## PROP. III. THEOR.

**S**I trianguli angulus bifariam secetur, secans autem angulum recta linea secet etiam basim; basis segmenta eandem rationem habebunt, quam reliqua trianguli latera. et si basis segmenta eandem rationem habeant, quam reliqua trianguli latera; quae a vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam secabit.

Sit triangulum ABC, et fecetur angulus BAC bifariam rectâ lineâ AD. Dico ut BD ad DC, ita esse BA ad AC.

Ducatur enim per C ipsi DA parallela<sup>a</sup> CE, et producta BA con- a. 31. 1. veniat cum ipsa in puncto E. Quoniam igitur in parallelas AD, EC incidit recta linea AC, erit ACE angulus angulo alterno CAD aequalis<sup>b</sup>. sed CAD angulus ponitur aequalis angulo BAD; ergo et BAD b. 29. 1. ipsi ACE angulo aequalis erit. Rurfus, quoniam in parallelas AD, EC recta linea BAE incidit, exterior angulus BAD aequalis est<sup>b</sup> interiori et opposito AEC. ostensus autem est et angulus ACE angulo BAD aequalis; ergo et ACE ipsi AEC aequalis erit; et propterea latus AE aequale lateri AC<sup>c</sup>. et quoniam uni laterum trianguli BCE, videlicet c. 6. 1. ipsi EC parallela ducta est AD; erit<sup>d</sup> ut BD ad DC, ita BA ad AE. d. 2. 6. aequalis autem est AE ipsi AC; est igitur<sup>e</sup> ut BD ad DC, ita BA e. 7. 5. ad AC.



Sit autem ut BD ad DC, ita BA ad AC, et jungatur AD; dico angulum BAC bifariam sectam esse recta linea AD.

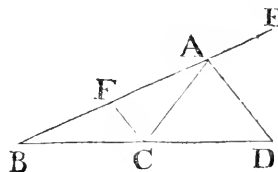
Iisdem enim constructis, quoniam est ut BD ad DC, ita BA ad AC; sed et ut BD ad DC, ita BA ad AE<sup>d</sup>, etenim uni laterum trianguli BCE, videlicet ipsi EC, parallela ducta est AD, erit<sup>f</sup> et ut BA ad AC, f. 11. 5. ita BA ad AE. ergo AC est aequalis AE<sup>g</sup>, et propterea et angulus AEC g. 9. 5. angulo ACE aequalis<sup>h</sup>. sed angulus quidem AEC est aequalis angulo h. 5. 1. exteriori BAD<sup>b</sup>; angulus vero ACE aequalis alterno CAD. quare et BAD angulus ipsi CAD aequalis erit. angulus igitur BAC bifariam sectus est recta linea AD. Ergo si trianguli &c. Q. E. D.

## PROP. A. THEOR.

**S**I trianguli, uno latere producto, angulus exterior bifariam fecetur, fecans autem angulum recta linea fecet etiam basim productam; basis productae segmenta inter fecantem et basis terminos eandem rationem habebunt, quam reliqua trianguli latera. et si basis productae segmenta eandem habeant rationem quam reliqua trianguli latera, quae a vertice ad sectionem ducitur recta linea, trianguli angulum exteriorem bifariam fecabit.

Sit triangulum ABC, et recta AD bifariam fecet angulum trianguli exteriorem CAE, et basi BC productae occurrat in D. erit ut BD ad DC, ita BA ad AC.

3. 31. 1. Ducatur <sup>a</sup> enim per C recta CF parallela ipsi AD. Quoniam igitur in parallelas AD, FC incidit recta linea AC, erit <sup>b</sup> ACF angulus angulo alterno CAD aequalis. sed CAD angulus ponitur aequalis angulo DAE; ergo et angulus DAE ipsi ACF angulo aequalis erit. Rursus quoniam in parallelas AD, FC recta linea FAE incidit, exterior angulus DAE aequalis est <sup>b</sup> interiori et opposito CFA. ostensus autem est et angulus ACF angulo DAE aequalis; ergo et ACF ipsi CFA aequalis erit, et propterea latera AF aequale lateri AC. et quoniam uni laterum trianguli BCF, 3. 2. 6. videlicet ipsi FC, parallela ducta est AD; erit <sup>d</sup> ut BD ad DC, ita BA ad AF; aequalis autem est AF ipsi AC; est igitur ut BD ad DC, ita BA ad AC.



Sit

Sit autem ut  $BD$  ad  $DC$ , ita  $BA$  ad  $AC$ , et  $AD$  jungatur. erit angulus  $CAE$  bifariam sectus rectâ lineâ  $AD$ .

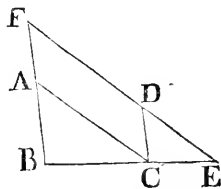
Isdem enim constructis, quoniam est ut  $BD$  ad  $DC$ , ita  $BA$  ad  $AC$ ; est autem <sup>d</sup> ut  $BD$  ad  $DC$ , ita  $BA$  ad  $AF$ , etenim uni laterum <sup>d. 2. 6.</sup> trianguli  $BCF$ , videlicet ipsi  $FC$ , parallela ducta est  $AD$ , erit ut  $BA$  ad  $AC$ , ita  $BA$  ad  $AF$ <sup>e</sup>. Ergo  $AC$  est aequalis  $AF$ <sup>f</sup>, et propterea angulus  $AFC$  angulo  $ACF$  aequalis. sed angulus quidem  $AFC$  est aequalis angulo exteriori  $EAD$ , angulus vero  $ACF$  aequalis alterno  $CAD$ ; quare et  $EAD$  angulus ipsi  $CAD$  aequalis erit. angulus igitur  $CAE$  bifariam sectus est recta linea  $AD$ . Ergo si &c. Q. E. D.

## PROP. IV. THEOR.

**A**EQUIANGULORUM triangulorum latera circum aequalis angulos proportionalia sunt. et homologa sunt latera quae aequalibus angulis subtenduntur.

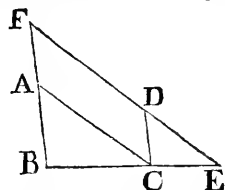
Sint aequiangula triangula  $ABC$ ,  $DCE$  quae angulum quidem  $ABC$  angulo  $DCE$ , angulum vero  $ACB$  angulo  $DEC$ , aequalem habeant, et propterea <sup>a</sup> angulum  $BAC$  angulo  $CDE$ . Dico triangulorum  $ABC$ ,  $DCE$  <sup>a. 32. 1.</sup> proportionalia esse latera quae sunt circa aequales angulos; et homologa latera esse quae aequalibus angulis subtenduntur.

Ponatur <sup>b</sup> enim triangulum  $DCE$  ita ut latus ejus  $CE$  in directum sit ipsi  $BC$ . et quoniam anguli  $ABC$ ,  $ACB$  duobus rectis minores sunt <sup>c</sup>, aequalis autem est angulus  $ACB$  angulo  $DEC$ ; erunt <sup>c. 17. 1.</sup>  $ABC$ ,  $DEC$  anguli duobus rectis minores. quare  $BA$ ,  $ED$  productae inter se convenient <sup>d</sup>; producantur et conveniant in puncto  $F$ . et quoniam <sup>d. Ax. 12. 1.</sup> angulus  $DCE$  est aequalis angulo  $ABC$ , erit  $BF$  ipsi  $CD$  parallela <sup>e</sup>.



b. 22. 1.

- e. 28. 1. Iela<sup>e</sup>. rursus, quoniam aequalis est angulus ACB angulo DEC, parallela erit<sup>e</sup> AC ipsi FE. parallelogrammum igitur est FACD; ac propterea AF quidem ipsi CD, AC vero ipsi FD est aequalis<sup>f</sup>. et quoniam uni laterum trianguli FBE, videlicet ipsi FE, parallela ducta est AC; erit<sup>g</sup> ut BA ad AF, ita BC ad CE. aequalis autem est AF ipsi CD; ut igitur<sup>h</sup> BA ad CD, ita BC ad CE; et permutando ut AB ad BC, ita DC ad CE. rursus, quoniam CD parallela est BF, erit<sup>g</sup> ut BC ad CE, ita FD ad DE. sed FD est aequalis AC; ergo ut BC ad CE, ita AC ad DE. permutando igitur, ut BC ad CA, ita CE ad ED. itaque quoniam ostensum est, ut AB ad BC, ita DC ad CE; ut autem BC ad CA, ita CE ad ED; i. 22. 5. erit<sup>i</sup> ex aequali, ut BA ad AC, ita CD ad DE aequiangulorum igitur &c. Q. E. D.



## PROP. V. THEOR.

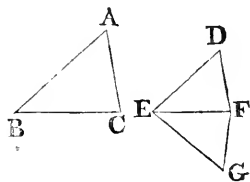
**S**I duo triangula latera proportionalia habeant, aequiangula erunt triangula, et aequales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur.

Sint duo triangula ABC, DEF, quae latera proportionalia habeant, hoc est, sit ut AB quidem ad BC, ita DE ad EF; ut autem BC ad CA, ita EF ad FD; et propterea ex aequali ut BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum esse, et aequales habere angulos quibus homologa latera subtenduntur, angulum quidem ABC angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD, et praeterea angulum BAC angulo EDF.

- a. 23. 1. Constituat<sup>a</sup>ur enim<sup>a</sup> ad rectam lineam EF et ad puncta in ipsa E, F, angulo



angulo quidem ABC aequalis angulus FEG, angulo autem BCA angulus EFG. quare reliquus BAC angulus reliquo EGF est aequalis<sup>b</sup>; ideo- b. 32. 1. que aequiangulum est triangulum ABC triangulo EGF. triangulorum igitur ABC, EGF proportionalia sunt latera quae aequalibus angulis subtenduntur<sup>c</sup>. ergo ut AB ad BC, ita GE ad EF; sed ut AB ad BC, ita DE ad EF; ut igitur DE ad EF, ita GE ad EF<sup>d</sup>. quare utraque ipsarum DE, GE ad EF eandem habet proportionem, et propterea DE ipsi GE est aequalis<sup>e</sup>; eadem ratione et DF aequalis est FG.



c. 4. 6.

d. 11. 5.

e. 9. 5.

itaque quoniam DE est aequalis EG, communis autem EF, duae DE, EF duabus GE, EF sunt aequales; et basis DF basi FG est aequalis; angulus igitur DEF est aequalis angulo GEF<sup>f</sup>, et DEF triangulum f. 8. 1. aequale triangulo GEF, et reliqui anguli reliquis angulis aequales<sup>g</sup>, quibus aequalia latera subtenduntur. ergo angulus quidem DFE est aequalis angulo GFE, angulus vero EDF angulo EGF. et quoniam angulus DEF est aequalis angulo GEF, et angulus GEF angulo ABC, erit et angulus ABC angulo DEF aequalis. eadem ratione et angulus ACB aequalis est angulo DFE, et adhuc angulus ad A angulo ad D. ergo ABC triangulum triangulo DEF aequiangulum erit. Si igitur duo &c. Q. E. D.

## PROP. VI. THEOR.

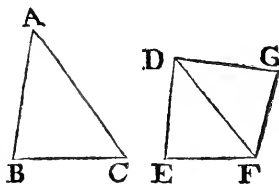
**S**I duo triangula unum angulum uni angulo aequalem habeant, circa aequales autem angulos latera proportionalia; aequiangula erunt triangula, et aequales habebunt angulos quibus homologa latera subtenduntur.

Sint

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

Sint duo triangula ABC, DEF, unum angulum BAC uni angulo EDF aequalem habentia, circa aequales autem angulos latera proportionalia, videlicet ut BA ad AC, ita fit ED ad DF. dico triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum esse, et angulum quidem ABC habere aequalem angulo DEF, angulum vero ACB angulo DFE.

- a. 23. 1. Constituitur <sup>a</sup> enim ad rectam lineam DF, et ad puncta in ipsa D, F, alterutri angulorum BAC, EDF, aequalis angulus FDG, angulo autem ACB aequalis DFG. reliquus igitur qui ad B reliquo qui ad G est aequalis <sup>b</sup>.
- b. 32. 1. ergo triangulum ABC triangulo DGF aequiangulum est; ac propterea ut BA ad AC, ita est <sup>c</sup> GD ad DF. ponitur autem et ut BA ad AC, ita ED ad DF; ut igitur ED ad DF,
- d. 11. 5. ita GD ad DF <sup>d</sup>; quare ED aequalis est ipsi DG <sup>e</sup>; et communis DF; ergo duae ED, DF duabus GD, DF aequales sunt, et angulus EDF
- f. 4. 1. angulo GDF est aequalis; basis igitur EF est <sup>f</sup> aequalis basi FG, triangulumque EDF triangulo GDF, et reliqui anguli reliquis angulis aequales, alter alteri, quibus aequalia latera subtenduntur. angulus igitur DFG est aequalis angulo DFE; angulus vero ad G angulo ad E. sed angulus DFG aequalis est angulo ACB; angulus igitur ACB angulo DFE est aequalis. ponitur autem et BAC angulus aequalis angulo EDF; ergo et reliquus qui ad B aequalis est reliquo ad E. aequiangulum igitur est triangulum ABC triangulo DEF. Quare si duo triangula &c. Q. E. D.



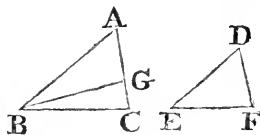
## PROP. VII. THEOR.

**S**I duo triangula unum angulum uni angulo aequalem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, et reliquorum utrumque simul minorem, vel non minorem recto; vel si eorum alter rectus fuerit: aequiangula erunt triangula, et aequales habebunt angulos circa quos latera sunt proportionalia.

Sint duo triangula ABC, DEF, unum angulum uni angulo aequalem habentia, videlicet angulum BAC angulo EDF aequalem, circa alios autem angulos ABC, DEF latera proportionalia, ut sit AB ad BC, sicut DE ad EF; et reliquorum qui ad C, F primò utrumque simul minorem recto. Dico triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum esse, angulumque ABC aequalem angulo DEF, et reliquum videlicet qui ad C reliquo qui ad F aequalem.

Si enim inaequalis est angulus ABC angulo DEF, unus ipsorum major erit; sit major ABC, et constituatur<sup>a</sup> ad rectam lineam AB, et a. 23. 1.

ad punctum in ipsa B, angulo DEF aequalis angulus ABG. et quoniam angulus quidem A est aequalis angulo D, angulus vero ABG angulo DEF; erit<sup>b</sup> reliquus AGB reliquo DFE aequalis.



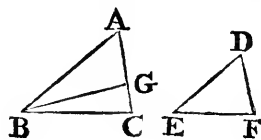
b. 32. 1.

aequiangulum igitur est ABG triangulum triangulo DEF; quare ut AB ad BG, sic DE ad EF; ut vero DE ad EF, sic ponitur AF ad e. 4. 6. BC; ut igitur<sup>d</sup> AB ad BC, sic AB ad BG; ideoque AB ad utrumque d. 11. 5. BC, BG eandem habet rationem. erit igitur BC ipsi BG aequalis<sup>e</sup>, ac e. 9. 5. propterea angulus BGC est aequalis angulo ECG<sup>f</sup>. minor autem recto f. 5. 1. ponitur angulus BCG; ergo et BGC minor est recto, et ob id qui ei

A a

deinceps

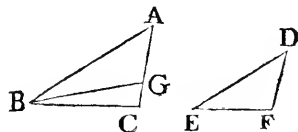
g. 13. 1. deinceps est AGB major est recto<sup>s</sup>. atque ostensus est angulus AGB aequalis angulo qui ad F; angulus igitur qui ad F recto major est. atqui ponitur minor recto; quod est absurdum. non est igitur angulus ABC inaequalis angulo DEF; ergo ipsi est aequalis.



est autem angulus qui ad A aequalis ei qui ad D; quare et reliquus qui ad C aequalis est reliquo qui ad F. aequiangulum igitur est triangulum ABC triangulo DEF.

Sed rursus ponatur uterque angulorum qui ad C, F, non minor recto. Dico rursus et sic triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum esse.

Idem enim constructis, similiter demonstrabimus BC aequalem ipsi BG, angulumque ad C angulo BGC aequalem.

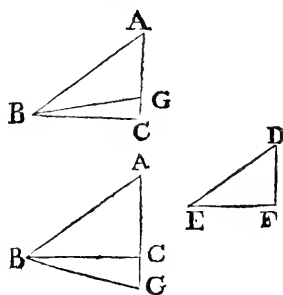


sed angulus qui ad C non minor est recto; non est igitur minor recto BGC. quare trianguli BGC duo anguli non sunt duobus rectis mino-

h. 17. 1. res; quod fieri non potest<sup>h</sup>; ac propterea triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum est, ut in praecedente casu ostensum fuit.

Sit denique alter angulorum ad C, F, puta qui ad C, rectus; erit et in hoc casu triangulum ABC triangulo DEF aequiangulum.

Si enim non fit, ad rectam AB, et ad punctum in ea B constituitur angulo DEF aequalis angulus ABG; et, ut in primo casu, ostendetur recta BG aequalis ipsi BC, et angulus BCG angulo BGC; est autem angulus BCG rectus, quare et an-



gulus

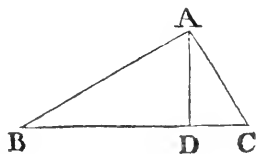
gulus BGC rectus erit<sup>f</sup>. trianguli igitur BGC duo anguli non sunt<sup>f. 5. 1.</sup>  
 minores duobus rectis, quod fieri non potest<sup>h</sup>; et propterea triangulum<sup>h. 17. 1.</sup>  
 ABC triangulo DEF aequiangulum est. si igitur duo triangula &c.  
 Q. E. D.

## PROP. VIII. THEOR.

**S**I in triangulo rectangulo, ab angulo recto ad basim  
 perpendicularis ducatur; quae ad perpendicularem  
 sunt triangula, et toti, et inter se sunt similia.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC;  
 et a puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD. Dico triangula  
 ABD, ADC toti triangulo ABC, et inter se similia esse.

Quoniam enim angulus BAC est aequalis angulo ADB, rectus enim  
 uterque est, et angulus ad B communis duo-  
 bus triangulis ABC, ABD; erit<sup>a</sup> reliquus  
 ACB reliquo BAD aequalis. aequiangulum  
 igitur est triangulum ABC triangulo  
 ABD; quare latera circa aequales angulos  
 proportionalia habent<sup>b</sup>, et propterea inter  
 se similia sunt<sup>c</sup>. eadem ratione demonstrabitur etiam ADC trian-  
 gulum triangulo ABC simile esse.



a. 32. 1.

b. 4. 6.

c. 1. Def. 6.

Dico insuper triangula ABD, ADC etiam inter se similia esse.

Quoniam enim rectus angulus BDA est aequalis recto ADC, sed et  
 BAD ostensus aequalis angulo ad C; erit<sup>a</sup> reliquus ad B reliquo DAC  
 aequalis. aequiangulum igitur et simile<sup>c</sup> est triangulum ABD trian-  
 gulo ADC. Quare si in triangulo &c. Q. E. D.

COR. Ex hoc manifestum est, in triangulo rectangulo perpendicu-  
 larem ab angulo recto ad basim ductam, mediam proportionalem esse  
 inter

inter segmenta basif: et praeterea inter basim et basif segmentum utrumlibet, latus segmento conterminum medium esse proportionale.  
 b. 4. 6. est enim  $BD$  ad  $DA$ , ut  $DA$  ad  $DC^b$ , in triangulis aequiangulis  $BDA$ ,  $ADC$ ; et  $BC$  ad  $BA$ , ut  $BA$  ad  $BD^b$ , in triangulis aequiangulis  $ABC$ ,  $DBA$ ; et  $BC$  ad  $CA$ , ut  $CA$  ad  $CD$ , in triangulis aequiangulis  $ABC$ ,  $DAC$ .

## PROP. IX. PROB.

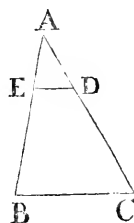
**A** Data recta linea imperatam partem abscindere.

Sit data recta linea  $AB$ ; oportet ab ipsa  $AB$  imperatam partem abscindere.

Ducatur a puncto  $A$  quaedam recta linea  $AC$ , quae cum ipsa  $AB$  angulum quemlibet contineat; sumaturque in  $AC$  quodvis punctum  $D$ , et quam multiplex est  $AB$  partis abscindendae, tam multiplex fiat  $AC$  ipsius  $AD$ ; deinde jungatur  $BC$ , et per  $D$  ipsi  $BC$  parallela ducatur  $DE$ .

Itaque quoniam uni laterum trianguli  $ABC$ , videlicet ipsi  $BC$ , parallela ducta est  $ED$ ; erit <sup>a</sup> ut  $CD$   
 a. 2. 6.  
<sup>b</sup> 18. 5. ad  $DA$ , ita  $BE$  ad  $EA$ ; et componendo<sup>b</sup>, ut  $CA$   
 c. D. 5. ad  $AD$ , ita  $BA$  ad  $AE$ . est autem  $CA$  multiplex ipsius  $AD$ ; ergo  $BA$  eadem est multiplex ipsius  $AE$ <sup>c</sup>.

quare quaecunque pars  $AD$  est ipsius  $AC$ , eadem pars erit  $AE$  ipsius  $AB$ ; est igitur  $AE$  pars a recta  $AB$  abscindenda. a data igitur recta linea  $AB$  imperata pars abscissa est. Quod facere oportebat.



## PROP. X. PROB.

**D**ATAM rectam lineam infectam, datae rectae lineae sectae similiter fecare.

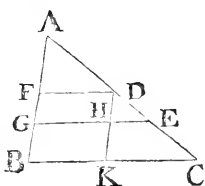
Sit

Sit data quidem recta linea infecta AB, secta vero AC; oportet rectam lineam AB infectam ipsi AC sectae similiter secare.

Sit AC secta in punctis D, E, et ponantur ita rectae AB, AC, ut angulum quemvis contineant, jungaturque BC, et per puncta D, E ipsi BC parallelae ducantur<sup>a</sup> DF, EG; per D vero ipsi AB ducatur parallela DHK.

parallelogrammum igitur est utrumque ipsorum FH, HB; ac propterea DH quidem est aequalis<sup>b</sup> FG, HK vero ipsi GB. et quoniam uni laterum trianguli DKC, ipsi scilicet KC, parallela ducta est HE, erit<sup>c</sup> ut CE ad ED, ita KH ad HD.

aequalis autem est KH ipsi BG, HD vero ipsi GF; est igitur ut CE ad ED, ita BG ad GF. rursus, quoniam uni laterum trianguli AGE, nimirum ipsi EG, parallela ducta est FD, ut ED ad DA, ita erit GF ad FA. sed ostensum est ut CE ad ED, ita esse BG ad GF; ut igitur CE ad ED, ita est BG ad GF, et ut ED ad DA, ita GF ad FA. ergo data recta linea infecta AB, datae rectae lineae sectae AC similiter secta est. Quod facere oportebat.



a. 31. 1.

b. 34. 1.

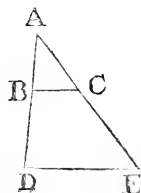
c. 2. 6.

PROP. XI. PROB.

**D**UABUS datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.

Sint datae duae rectae lineae AB, AC, et ponantur ita ut angulum quemvis contineant; oportet ipsis AB, AC tertiam proportionalem invenire.

Producantur enim AB, AC ad puncta D, E; ponaturque ipsi AC aequalis ED; et juncta BC, ducatur<sup>a</sup> per D ipsi BC parallela DE. quoniam igitur



a. 31. 1.

tur

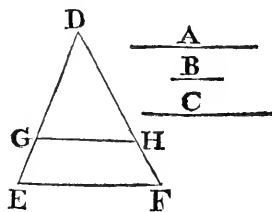
tur uni laterum trianguli ADE, videlicet ipsi DE, parallela ducta est  
 5. 2. 6. BC, erit<sup>b</sup> ut AB ad BD, ita AC ad CE. aequalis autem est BD ipsi  
 AC, ut igitur AB ad AC, ita est AC ad CE. quare datis duabus rectis  
 lineis AB, AC tertia proportionalis inventa est CE. Q. E. F.

## PROP. XII. PROB.

**T**RIBUS datis rectis lineis quartam proportionalem invenire.

Sint datae tres rectae lineae A, B, C; oportet ipsis A, B, C quartam proportionalem invenire.

Exponantur duae rectae lineae DE, DF angulum quemvis EDF  
 continentes; et ponatur ipsi quidem A  
 aequalis DG, ipsi vero B aequalis GE,  
 et ipsi C aequalis DH; junctaque GH,  
 a. 31. 1. per E ipsi parallela ducatur EF<sup>a</sup>. itaque  
 quoniam uni laterum trianguli DEF, ni-  
 mirum ipsi EF, parallela ducta est GH,  
 b. 2. 6. erit ut DG ad GE, ita DH ad HF<sup>b</sup>.



est autem DG ipsi A aequalis, GE vero aequalis B, et DH aequalis  
 C; ut igitur A ad B, ita C ad HF. Quare tribus datis rectis lineis A,  
 B, C quarta proportionalis inventa est HF. Q. E. F.

## PROP. XIII. PROB.

**D**UABUS datis rectis lineis, mediam proportionalem invenire.

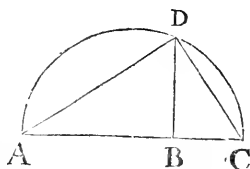
Sint datae duae rectae lineae AB, BC; oportet inter ipsas AB, BC  
 mediam proportionalem invenire.

Ponantur



Ponantur in directum, et super ipsa AC describatur semicirculus ADC, ducaturque<sup>a</sup> a puncto B ipsi AC ad rectos angulos BD, et AD, DC jungantur.

Quoniam igitur angulus ADC in semicirculo rectus est<sup>b</sup>, et quoniam in triangulo rectangulo ADC, ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est DB, erit DB media



a. 11. 1.

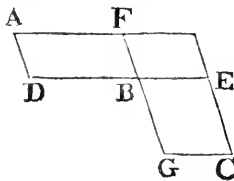
b. 31. 3.

proportionalis inter segmenta basis AB, BC<sup>c</sup>. duabus igitur datis rectis e. Cor. 8. 6. lineis AB, BC media inter ipsas proportionalis inventa est DB. Q. E. F.

PROP. XIV. THEOR.

**P**ARALLELOGRAMMORUM aequalium, et unum uni aequalem habentium angulum, latera, quae circum aequales angulos, reciproce sunt proportionalia: et quorum parallelogrammorum unum uni aequalem habentium angulum, latera, quae circum aequales angulos, sunt reciproce proportionalia; ea inter se sunt aequalia.

Sint aequalia parallelogramma AB, BC, aequales habentia angulos ad B, et ponantur in directum DB, BE; ergo et in directum erunt FB, BG<sup>a</sup>. Dico parallelogrammorum AB, EC latera quae sunt circa aequales angulos esse reciproce proportionalia; hoc est ut DB ad BE, ita esse GB ad BF.



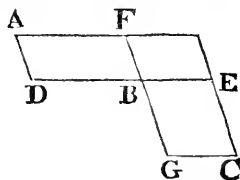
a. 14. 1.

Compleatur enim parallelogrammum FE; et quoniam parallelogrammum AB aequale est parallelogrammo EC, aliud autem est FE parallelogrammum, erit ut AB ad FE, ita BC ad FE<sup>b</sup>. sed ut AB quidem ad FE, ita est DB ad BE<sup>c</sup>; ut autem BC ad FE, ita GB ad BF<sup>c</sup>; e. 1. 6.

ut

d. 11. 5. ut igitur DB ad BE, ita GB ad BF<sup>d</sup>. ergo parallelogrammorum AB, BC latera, quae circum aequales angulos, sunt reciproce proportionalia.

Sint autem latera, quae circum aequales angulos, reciproce proportionalia, sit nempe ut DB ad BE, ita GB ad BF; dico parallelogrammum AB parallelogrammo BC aequale esse.



Quoniam enim est ut DB ad BE, ita GB ad BF; ut autem DB ad BE, ita AB parallelogrammum ad parallelogrammum c. 1. 6. FE<sup>e</sup>; et ut GB ad BF, ita BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE<sup>e</sup>; erit<sup>d</sup> et ut AB ad FE, ita BC ad FE. aequale igitur<sup>e</sup> est AB parallelogrammum parallelogrammo BC. Ergo parallelogrammorum &c. Q. E. D.

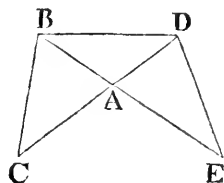
PROP. XV. THEOR.

**T**RIANGULORUM aequalium, et unum uni aequalem habentium angulum, latera, quae circum aequales angulos, sunt reciproce proportionalia: et quorum triangulorum unum uni aequalem habentium angulum latera, quae circum aequales angulos, sunt reciproce proportionalia, ea inter se sunt aequalia.

Sint aequalia triangula ABC, ADE unum angulum uni angulo aequalem habentia, angulum scilicet BAC angulo DAE; dico triangulorum BAC, DAE latera quae circum aequales angulos esse reciproce proportionalia, hoc est ut CA ad AD, ita esse EA ad AB.

Ponantur enim ita ut in directum sit CA ipsi AD; ergo et EA ipsi AB in directum erit; et jungatur BD. Quoniam igitur triangulum ABC

ABC aequale est triangulo ADE, aliud autem est ABD; erit ut CAB  
 triangulum ad triangulum BAD, ita <sup>b</sup> triangulum EAD ad triangulum <sup>b. 7. 5.</sup>  
 DAB. sed ut triangulum quidem CAB ad  
 BAD triangulum, ita CA ad AD<sup>c</sup>; ut au-  
 tem triangulum EAD ad ipsum DAB, ita  
 EA ad AB<sup>c</sup>; ut igitur <sup>d</sup> CA ad AD, ita  
 EA ad AB. quare triangulorum ABC,  
 ADE latera, quae circum aequales angulos  
 reciproce sunt proportionalia.



e. 1. 6.

d. 11. 5.

Sint autem latera triangulorum ABC, ADE circum aequales angulos  
 reciproce proportionalia, scilicet fit ut CA ad AD, ita EA ad AB;  
 dico triangulum ABC triangulo ADE aequale esse. junctâ enim rur-  
 sus BD, quoniam ut CA ad AD, ita est EA ad AB, ut autem CA ad  
 AD, ita est BAC triangulum ad triangulum BAD<sup>c</sup>; et ut EA ad AB,  
 ita triangulum EAD ad triangulum BAD<sup>c</sup>; erit <sup>d</sup> ut triangulum BAC  
 ad triangulum BAD, ita triangulum EAD ad BAD triangulum. ae-  
 quale igitur <sup>e</sup>, est triangulum ABC triangulo ADE. Aequalium igitur  
 tur &c. Q. E. D. e. 9. 5.

PROP. XVI. THEOR.

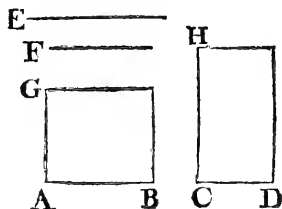
**S**I quatuor rectae lineae proportionales fuerint, rectangu-  
 lum ab extremis contentum aequale est ei rectangulo  
 quod a mediis continetur: et si rectangulum ab extremis  
 contentum aequale fuerit ei quod a mediis continetur,  
 quatuor rectae lineae proportionales erunt.

Sint quatuor rectae lineae proportionales AB, CD, E, F, fit scilicet  
 ut AB ad CD, ita E ad F; dico rectangulum contentum a rectis li-  
 neis AB, F aequale esse ei quod ipsis CD, E continetur.

B b

Ducantur

- a. 11. 1. Ducantur <sup>a</sup> enim a punctis A, C ipsis AB, CD ad rectos angulos AG, CH; ponaturque ipsi quidem F aequalis AG, ipsi vero E aequalis CH, et compleantur BG, DH parallelogramma. Quoniam igitur est ut AB ad CD, ita E ad F; est autem E aequalis CH, et F ipsi
- b. 7. 5. AG; crit <sup>b</sup> ut AB ad CD, ita CH ad AG. parallelogrammorum igitur BG, DH latera, quae sunt circum aequales angulos, reciproce proportionalia sunt; quorum autem aequiangulorum parallelogrammorum latera, quae sunt circum aequales angulos, reciproce sunt
- c. 14. 6. proportionalia, ea inter se sunt aequalia <sup>c</sup>; ergo parallelogrammum BG aequale est parallelogrammo DH. atque est parallelogrammum quidem BG, quod rectis lineis AB, F continetur, etenim AG est aequalis F; parallelogrammum vero DH, quod continetur ipsis CD, E, est enim CH ipsi E aequalis. rectangulum igitur contentum rectis AB, F est aequale ei quod ipsis CD, E continetur.



Sed sit rectangulum contentum rectis AB, F aequale ei quod ipsis CD, E continetur; dico quatuor rectas lineas proportionales esse, videlicet ut AB ad CD, ita E ad F.

Iisdem enim constructis, quoniam rectangulum contentum rectis AB, F est aequale ei quod CD, E continetur, atque est rectangulum BG contentum quidem rectis AB, F, etenim AG est aequalis F; contentum vero ipsis CD, E est rectangulum DH, est enim CH ipsi E aequalis; crit parallelogrammum BG aequale parallelogrammo DH; et sunt aequiangula. aequalium autem et aequiangulorum parallelogrammorum latera, quae circum aequales angulos, sunt reciproce proportionalia <sup>c</sup>. quare ut AB ad CD, ita CH ad AG; aequalis autem est CH ipsi

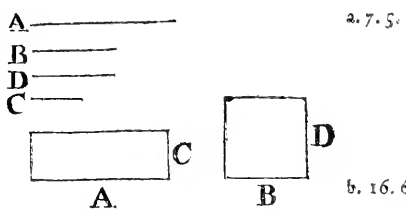
ipſi E, et AG ipſi F. ut igitur AB ad CD, ita E ad F. ergo ſi quatuor rectae &c. Q. E. D.

PROP. XVII. THEOR.

**S**I tres rectae lineae proportionales fuerint, rectangulum ab extremis contentum aequale est ei quod a media fit quadrato: et si rectangulum ab extremis contentum aequale fuerit ei quod a media fit quadrato, tres rectae lineae proportionales erunt.

Sint tres rectae lineae proportionales A, B, C; fit scilicet ut A ad B, ita B ad C; dico rectangulum contentum rectis A, C aequale esse ei quod à media B fit quadrato.

Ponatur ipſi B aequalis D; et quoniam ut A ad B, ita B ad C, aequalis autem est B ipſi D; erit <sup>a</sup> ut A ad B, ita D ad C. si autem quatuor rectae lineae proportionales fuerint, rectangulum ab extremis contentum est aequale ei quod à mediis continetur<sup>b</sup>. Ergo rectangulum rectis A, C contentum est aequale ei quod continetur ipſis B, D. sed rectangulum contentum rectis B, D est aequale quadrato quod fit ex ipſa B; etenim B est aequalis D. rectangulum igitur contentum rectis A, C est aequale ei quod ex B fit quadrato.



Sed ſit rectangulum contentum rectis A, C aequale ei quod ex B fit quadrato; dico ut A ad B, ita eſſe B ad C.

Iiſdem enim conſtructis, quoniam rectangulum contentum A, C aequale eſt quadrato quod ſit ex B, at quadratum quod ſit ex B eſt rec-

tangulum quod ipsis B, D continetur, est enim B aequalis ipsi D; erit rectangulum contentum A, C aequale ei quod ipsis B, D continetur. si autem rectangulum ab extremis contentum aequale fuerit ei quod à mediis continetur, quatuor rectae lineae proportionales erunt<sup>b</sup>. est igitur ut A ad B, ita D ad C; aequalis autem est B ipsi D; ergo ut A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectae lineae &c. Q. E. D.

## PROP. XVIII. PROB.

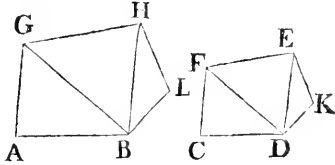
**A** Data recta linea dato rectilineo simile, et similiter positum rectilineum describere.

Sit data recta linea AB, datum autem rectilineum CDEF quadrilaterum; oportet à recta linea AB rectilineo CDEF simile, et similiter positum rectilineum describere.

Jungatur DF, et ad rectam lineam AB, et ad puncta in ipsa A, B angulo quidem ad C aequalis angulus constituatur<sup>a</sup> BAG, angulo autem CDF angulus ABG; reliquus igitur CFD angulus reliquo AGB est aequalis<sup>b</sup>. ergo aequiangulum est FCD triangulum triangulo GAB. rursus, constituatur<sup>a</sup> ad rectam lineam BG, et ad puncta in ipsa G, B, angulo quidem DFE aequalis angulus BGH, angulo autem FDE aequalis GBH; ergo reliquus FED reliquo GHB est aequalis. aequiangulum igitur est triangulum FDE triangulo GBH. Quoniam igitur angulus AGB aequalis est angulo CFD, et angulus BGH ipsi DFE, erit totus AGH angulus toti CFE aequalis. eadem ratione et ABH est aequalis ipsi CDE; et praeterea angulus quidem ad A angulo ad C aequalis, angulus vero GHB angulo FED. aequiangulum igitur est rectilineum ABHG rectilineo CDEF. sed et latera circa aequales angulos proportionalia habent. Quoniam enim triangula GAB, FCD sunt aequiangula, erit BA ad AG, ut DC ad CF<sup>c</sup>; et quoniam est AG ad GB,

GB, ut CF ad FD; ut vero GB ad GH, ita, propter aequiangula triangula BGH, DFE, est FD ad FE; erit ex aequali <sup>d</sup> AG ad GH, d. 22. 5. ut CF ad FE. similiter ostendetur AB ad BH, ut CD ad DE. et est GH ad HB, ut FE ad ED<sup>e</sup>. quoniam igitur aequiangula sunt recta. c. 4. 6. tilinea, ABHG, CDEF, et latera circum aequales angulos proportionalia habent, erunt inter se similia<sup>e</sup>. e. 1. Def. 6.

Describendum jam fit à data recta linea AB quinquelaterum simile, et similiter positum quinquelatero dato CDKEF.



Jungatur DE, et à data recta linea AB describatur quadrilaterum ABHG simile, et similiter positum ipsi CDEF, et ad rectam lineam BH, et ad puncta in ipsa data B, H, angulo quidem EDK aequalis angulus constituatur HBL, angulo autem DEK aequalis angulus BHL. reliquis igitur ad K reliquo ad L est aequalis. Quoniam vero similia sunt quadrilatera ABHG, CDEF, erit angulus GHB aequalis angulo FED, et est BHL angulus aequalis angulo DEK; totus igitur GHL angulus toti FEK est aequalis. eadem ratione et ABL angulus aequalis est ipsi CDK. aequiangula propterea sunt quinquelatera AGHLB, CFEKD. et quoniam similia sunt quadrilatera AGHB, CFED, erit GH ad HB, ut FE ad ED; ut vero HB ad HL, ita ED ad EK<sup>e</sup>; ergo ex aequali <sup>d</sup> est GH ad HL, ut FE ad EK. eadem ratione est AB ad BL, ut CD ad DK. et est BL ad LH, ut DK ad KE, quia aequiangula sunt triangula BLH, DKE. Quoniam igitur quinquelatera AGHLB, CFEKD sunt aequiangula, et latera circum aequales angulos proportionalia habent, erunt inter se similia<sup>e</sup>. eademque ratione rectilincum a data recta linea describi potest simile, et similiter positum dato Hexagono et ita deinceps. Q. E. F.

PROP. XIX.

## PROP. XIX. THEOR.

**S**IMILIA triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

Sint similia triangula ABC, DEF habentia angulum ad B aequalem angulo ad E, et sit ut AB ad BC, ita DE ad EF, ita ut latus BC homologum sit lateri EF. Dico ABC triangulum ad triangulum DEF duplicatam rationem habere ejus quam habet BC ad EF.

a. 11. 6. Sumatur enim ipsis BC, EF tertia proportionalis <sup>a</sup> BG, ut fit sicut BC ad EF, ita EF ad BG, et jungatur GA. Quoniam igitur ut AB ad BC, ita est DE ad EF, erit per-

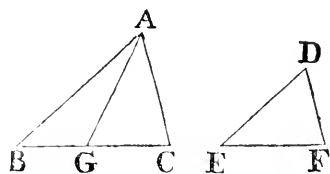
b. 16. 5. mutando <sup>b</sup> ut AB ad DE, ita BC ad EF. sed ut BC ad EF, ita EF ad BG; ut igitur AB ad DE, ita

c. 11. 5. EF ad BG<sup>c</sup>. quare triangulorum ABG, DEF latera, quae circum aequales angulos, reciproce sunt proportionalia. quorum autem triangulorum unum angulum uni aequalem habentium latera, quae circum aequales angulos, sunt reciproce proportionalia, ea inter se sunt aequalia.

d. 15. 6. aequale igitur <sup>d</sup> est ABG triangulum triangulo DEF. et quoniam est ut BC ad EF, ita EF ad BG; si autem tres rectae lineae proportionales sint, prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur <sup>e</sup> ejus quam habet ad secundam; habebit igitur BC ad BG duplicatam rationem ejus quam habet BC ad EF. ut autem BC ad BG, ita ABC tri-

f. 1. 6. angulum ad triangulum ABG<sup>f</sup>. ergo et ABC triangulum ad triangulum ABG duplicatam rationem habet ejus quam BC habet ad EF. est autem

g. 7. 5. ABG triangulum triangulo DEF aequale; et triangulum igitur <sup>g</sup> ABC ad





ad triangulum DEF, duplicatam habebit rationem ejus quam habet BC ad EF. Quare similia triangula &c. Q. E. D.

COR. Ex hoc manifestum est, si tres rectae lineae proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse triangulum quod fit à prima ad triangulum quod à secunda simile, et similiter descriptum. Quoniam ostensum est ut CB ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum DEF.

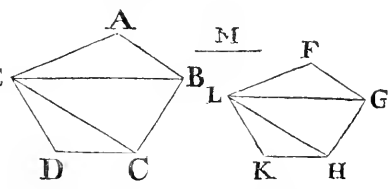
PROP. XX. THEOR.

**S**IMILIA polygona in similia triangula dividuntur, et numero aequalia, et homologa totis; et polygonum ad polygonum duplicatam rationem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus.

Sint similia polygona ABCDE, FGHL, et sit AB latus homologum ipsi FG. Dico polygona ABCDE, FGHL in similia triangula dividi, et numero aequalia et homologa totis; et polygonum ABCDE ad polygonum FGHL duplicatam rationem habere ejus quam habet AB ad FG.

Jungantur BE, EC, GL, LH. et quoniam simile est ABCDE polygonum polygono FGHL, angulus BAE angulo GFL est aequalis<sup>a</sup>, atque est ut BA ad AE,

ita GF ad FL<sup>a</sup>. quoniam igitur duo triangula sunt ABE, EFG unum angulum uni angulo aequalem habentia, circum aequales autem an-



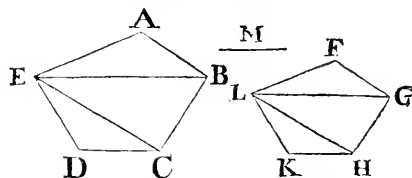
a. 1. Def. 6.

gulos latera proportionalia; erit triangulum ABE triangulo FGL aequiangulum<sup>b</sup>; ergo et simile<sup>c</sup>. angulus igitur ABE aequalis est angulo<sup>b. 6. 6.</sup> FGL. est autem et totus ABC angulus aequalis toti FGH<sup>a</sup>, propter<sup>c. 4. 6.</sup> similitudinem

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

similitudinem polygonorum. ergo reliquus EBC reliquo LGH est aequa-  
 a. 1. Def. 6. lis. et quoniam ob similitudinem triangulorum ABE, FGL, est <sup>a</sup> ut  
 EB ad BA, ita LG ad GF; sed et propter similitudinem polygonorum  
 est <sup>a</sup> ut AB ad BC, ita FG ad GH; erit ex aequali ut EB ad BC,  
 d. 22. 5. ita LG ad GH<sup>d</sup>; hoc est circum aequales angulos EBC, LGH latera  
 b. 6. 6. sunt proportionalia; aequiangulum igitur <sup>b</sup> est EBC triangulum trian-  
 c. 4. 6. gulo LGH; quare et simile<sup>c</sup>. eadem ratione et ECD triangulum si-  
 mile est triangulo LHK. similia igitur polygona ABCDE, FGHLK  
 in similia trianguia dividuntur, et numero aequalia.

Dico et homologa totis, hoc est ut proportionalia sint trianguia sibi  
 invicem et totis polygonis; et antecedentia quidem esse ABE, EBC,  
 ECD, consequentia autem ipsorum FGL, LGH, LHK; et ABCDE  
 polygonum ad polygonum FGHLK duplicatam rationem habere ejus  
 quam latus homologum ha-  
 bet ad homologum latus, hoc  
 est AB ad FG.



Quoniam enim simile est  
 ABE triangulum triangulo  
 FGL, habebit ABE trian-  
 gulum ad triangulum FGL duplicatam rationem ejus quam habet BE  
 e. 19. 6. ad GL<sup>e</sup>. eadem ratione, et triangulum BEC ad GLH triangulum du-  
 plicatam rationem habet ejus quam BE ad GL<sup>e</sup>. est igitur ut ABE  
 triangulum ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH trian-  
 f. 11. 5. gulum<sup>f</sup>. rursus, quoniam simile est triangulum EBC triangulo LGH,  
 habebit EBC triangulum ad triangulum LGH duplicatam rationem ejus  
 quam recta linea CE habet ad rectam HL<sup>e</sup>. eadem ratione et ECD  
 triangulum ad triangulum LHK duplicatam rationem habet ejus quam  
 CE ad HL. est igitur ut triangulum EBC ad triangulum LGH, ita  
 ECD triangulum ad triangulum LHK. ostensum autem est et ut EBC  
 triangulum

triangulum ad triangulum LGH, ita triangulum ABE ad triangulum FGL. Ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita triangulum EBC ad LGH triangulum, et triangulum ECD ad ipsum LHK. et igitur ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia<sup>g</sup>. Ergo ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita ABCDE polygonum ad polygonum FGHLK; fed ABE triangulum ad triangulum FGL duplicatam rationem habet ejus quam latus homologum AB habet ad homologum latus FG<sup>e</sup>. Ergo et ABCDE polygonum ad polygonum FGHLK duplicatam rationem habet ejus quam AB latus homologum habet ad FG homologum latus. Similia igitur polygona &c. Q. E. D.

COR. 1. Eodem modo et in similibus quadrilateris et multilateris quibuscunque ostendetur ea esse in duplicata ratione laterum homologorum. ostensum autem est in triangulis<sup>e</sup>. Quare universè similes figurae rectilineae sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

COR. 2. Et si ipsis AB, FG tertiam proportionalem sumamus quae fit M, habebit AB ad M duplicatam rationem ejus quam habet AB ad FG<sup>h</sup>. habet autem et polygonum super AB ad polygonum super FG, et quadrilaterum ad quadrilaterum duplicatam rationem ejus quam habet latus homologum ad homologum latus, hoc est quam AB ad FG. Ergo ut AB ad M, ita est figura super AB ad eam super FG. atque ostensum est hoc in triangulis<sup>i</sup>. Universè igitur manifestum est, si tres rectae lineae proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita esse figuram rectilineam quae fit a prima ad eam quae a secunda, similem et similiter descriptam.

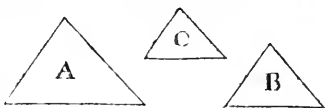
## PROP. XXI. THEOR.

QUAE eidem rectilineo sunt similia, et inter se similia sunt.

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

Sit enim utrumque rectilineorum  $A$ ,  $B$  simile rectilineo  $C$ ; dico et rectilineum  $A$  rectilineo  $B$  simile esse.

Quoniam enim simile est  $A$  rectilineum rectilineo  $C$ , et ipsi aequiangulum erit, et circum aequales angulos latera habebit proportionalia<sup>a</sup>.  
 a. 1. Def. 6. rursus, quoniam simile est rectilineum  $B$  rectilineo  $C$ , aequiangulum



ipsi erit, et circa aequales angulos latera proportionalia habebit<sup>a</sup>. utrumque igitur rectilineorum  $A$ ,  $B$  ipsi  $C$  aequiangulum est, et circum aequales angulos latera habet proportionalia. quare et rectilineum  $A$   
 b. 1. Ax. 1. ipsi  $B$  est aequiangulum<sup>b</sup>, lateraque circum aequales angulos proportio-  
 c. 11. 5. nalia habet<sup>c</sup>; ac propterea  $A$  ipsi  $B$  est simile<sup>a</sup>. Q. E. D.

## PROP. XXII. THEOR.

**S**I quatuor rectae lineae proportionales fuerint, et rectilinea quae ab ipsis fiunt similia, et similiter descripta, proportionalia erunt. et si rectilinea quae ab ipsis fiunt similia, et similiter descripta, proportionalia fuerint, et ipsae rectae lineae proportionales erunt.

Sint quatuor rectae lineae proportionales  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$ ,  $GH$ , sit scilicet ut  $AB$  ad  $CD$ , ita  $EF$  ad  $GH$ , et descripta sint ab ipsis quidem  $AB$ ,  $CD$  similia, et similiter posita rectilinea  $KAB$ ,  $LCD$ ; ab ipsis vero  $EF$ ,  $GH$  describantur rectilinea similia, et similiter posita  $MF$ ,  $NH$ . Dico ut  $KAB$  rectilineum ad rectilineum  $LCD$ , ita esse rectilineum  $MF$  ad ipsum  $NH$  rectilineum.

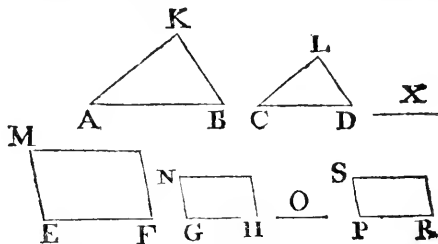
a. 11. 6. Sumatur enim ipsis quidem  $AB$ ,  $CD$  tertia proportionalis  $X^a$ ; ipsis vero  $EF$ ,  $GH$ , tertia proportionalis  $O$ . et quoniam est ut  $AB$  ad  $CD$ ,  
 b. 11. 5. ita  $EF$  ad  $GH$ , erit ut  $CD$  ad  $X$ , ita  $GH$  ad  $O^b$ ; quare ex aequali<sup>c</sup>  
 c. 22. 5. ut

ut AB ad X, ita EF ad O. sed ut AB quidem ad X, ita est rectilineum KAB ad LCD rectilineum<sup>d</sup>, ut autem EF ad O, ita rectilineum MF ad rectilineum NH<sup>d</sup>. ut igitur KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita est rectilineum MF ad NH rectilineum<sup>b</sup>.

b. 11. 5.

Sed fit ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad rectilineum NH; dico ut AB ad CD, ita esse EF ad GH. fiat enim ut AB ad CD, ita EF ad PR<sup>e</sup>, et describatur<sup>f</sup> ab ipsa PR alterutri rectilineorum MF, NH simile, et similiter positum rectilineum SR. quoniam igitur est ut AB ad CD, ita EF ad PR, et descripta sunt ab ipsis quidem AB, CD similia, et similiter posita rectilinea KAB, LCD,

e. 12. 6.  
f. 18. 6.



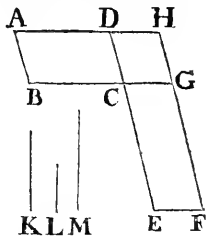
ab ipsis vero EF, PR similia, et similiter posita rectilinea MF, SR, erit, ex prius demonstratis, ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineum MF ad rectilineum SR; ponitur autem et ut rectilineum KAB ad rectilineum LCD, ita MF rectilineum ad rectilineum NH. rectilineum igitur MF ad utrumque ipsorum NH, SR eandem habet rationem; ergo rectilineum NH est ipsi SR aequale<sup>g</sup>. est autem ipsi simile<sup>g. 9. 5.</sup> et similiter positum; ergo GH est aequalis PR. et quoniam ut AB ad CD, ita EF ad PR; aequalis autem PR ipsi GH; erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectae lineae &c. Q. E. D.

## PROP. XXIII. THEOR.

**A**EQUIANGULA parallelogramma inter se rationem habent ex laterum rationibus compositam.

Sint acuiangula parallelogramma AC, CF aequalem habentia angulum BCD angulo ECG. Dico parallelogrammum AC ad parallelogrammum CF rationem habere compositam ex laterum rationibus.

- Ponantur enim ut BC fit in directum ipsi CG; ergo et DC ipsi
- a. 14. 1. CE in directum erit<sup>a</sup>; et compleatur DG parallelogrammum; expo-
- b. 12. 6. naturque recta linea quaedam K, et fiat<sup>b</sup> ut BC ad CG, ita K ad L; ut autem DC ad CE, ita L ad M. rationes igitur ipsius K ad L, et L ad M eadem sunt rationibus laterum videlicet BC ad CG, et DC ad CE. sed ratio K ad M composita dicitur<sup>c</sup> ex ratione K ad L, et ratione L ad M. quare et K ad M rationem habet ex laterum rationibus compositam. et quoniam est ut BC ad CG, ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH<sup>d</sup>; sed et ut BC ad CG, ita K ad L; erit<sup>e</sup> ut K ad L, ita parallelogrammum AC ad CH parallelogrammum. rursus, quoniam est ut DC ad CE, ita CH parallelogrammum ad parallelogrammum CF; ut autem DC ad CE, ita L ad M; erit ut L ad M, ita parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum. itaque cum ostensum sit ut K quidem ad L, ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH; ut autem L ad M, ita parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum; erit ex aequali<sup>f</sup> ut K ad M, ita AC parallelogrammum ad ipsum CF. habet autem K ad M rationem ex laterum rationibus compositam. Ergo et AC parallelogrammum ad parallelogrammum



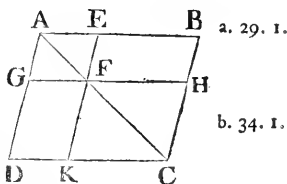
rallelogrammum CF rationem habet ex laterum rationibus compositam. Aequiangula igitur parallelogramma &c. Q. E. D.

PROP. XXIV. THEOR.

**O**MNIS parallelogrammi, quae circa diametrum sunt parallelogramma, et toti, et inter se sunt similia.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter AC; circa diametrum vero AC parallelogramma sint EG, HK. Dico parallelogramma EG, HK et toti ABCD, et inter se similia esse.

Quoniam enim parallelae sunt DC, GF, erit angulus ADC angulo AGF aequalis<sup>a</sup>. eadem ratione quoniam parallelae sunt BC, EF, aequalis erit angulus ABC ipsi AEF. uterque vero angulus BCD, EFG opposito DAB est aequalis<sup>b</sup>, quare et inter se aequales erunt. parallelogramma igitur ABCD, AEFG inter se sunt aequiangula. et quoniam angulus ABC aequalis est angulo AEF, communis vero BAC, erunt triangula BAC, EAF inter se aequiangula; ut igitur AB ad BC, ita<sup>c</sup> est AE ad EF. et quoniam latera parallelogrammorum opposita sunt inter se aequalia<sup>b</sup>, erit<sup>d</sup> et AB ad AD, ut AE ad AG; et DC ad CB, ut GF ad FE; et praeterea CD ad DA, ut FG ad GA. Ergo parallelogrammorum ABCD, AEFG latera, quae circum aequales angulos, sunt proportionalia; ac propterea ABCD parallelogrammum ipsi AEFG est simile<sup>e</sup>. eadem ratione parallelogrammum ABCD simile est ipsi FHCK. utrumque igitur ipforum GE, KH parallelogrammorum ipsi DB est simile. quae autem eidem rectilineo sunt similia, et inter se similia sunt<sup>f</sup>; parallelogrammum igitur GE simile est ipsi KH. Quare f. 21. 6. omnis &c. Q. E. D.



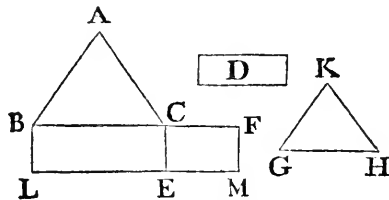
PROP. XXV.

## PROP. XXV. PROB.

**D**ATO rectilineo, simile, et alteri dato aequale idem constituere.

Sit datum quidem rectilineum cui oportet simile constituere ABC, cui autem aequale sit D. oportet ipsi ABC simile, et ipsi D aequale idem constituere.

- a. Cor. 45. 1. Applicetur <sup>a</sup> enim ad rectam quidem lineam BC rectilineo ABC aequale parallelogrammum BE; ad rectam vero CE applicetur <sup>a</sup> parallelogrammum CM aequale ipsi D, in angulo FCE qui CBL angulo est aequalis. in directum igitur est BC ipsi CF<sup>b</sup>, et LE ipsi EM. sumatur-  
 b. { <sup>29.</sup> 1. qualis. in directum igitur est BC ipsi CF<sup>b</sup>, et LE ipsi EM. sumatur-  
     { <sup>14.</sup> 1. que inter BC, CF media proportionalis GH<sup>c</sup>, et ab ipsa GH describitur  
 c. 13. 6. tur <sup>d</sup> rectilineum KGH simile et similiter positum rectilineo ABC. et  
 d. 18. 6. quoniam est ut BC ad GH, ita GH ad CF, si autem tres rectae pro-



- portionales sint, ut prima ad tertiam, ita est figura quae fit a prima, ad  
 e. 2. Cor. 20. 6. eam quae a secunda similem, et similiter descriptam<sup>e</sup>; erit ut BC ad  
 CF, ita ABC rectilineum ad rectilineum KGH. sed et ut BC ad CF,  
 f. 1. 6. ita parallelogrammum BE ad EF parallelogrammum<sup>f</sup>; ut igitur rectili-  
 g. 11. 5. neum ABC ad rectilineum KGH, ita <sup>g</sup> BE parallelogrammum ad paral-  
 lelogrammum EF. est autem rectilineum ABC aequale parallelogrammo  
 h. 14. 5. BE; aequale igitur est <sup>h</sup> et KGH rectilineum parallelogrammo EF.

f.d



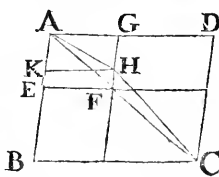
fed EF parallelogrammum aequale est rectilineo D. ergo et rectilineum KGH ipsi D est aequale; est autem KGH simile rectilineo ABC. Dato igitur rectilineo ABC simile, et alteri dato D aequale idem constitutum est KGH. Q. E. F.

PROP. XXVI. THEOR.

**S**I a parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, et similiter positum, communem ipsi angulum habens; circa eandem diametrum est cum toto.

A parallelogrammo enim ABCD parallelogrammum AEFG auferatur, simile ipsi ABCD, similiterque positum, communemque ipsi angulum habens DAB. Dico parallelogrammum ABCD circa eandem esse diametrum cum parallelogrammo AEFG.

Non enim, sed si fieri potest, sit parallelogrammi BD diameter AHC, et occurrat GF ipsi AHC in H; ducaturque per H alterutri ipsarum AD, BC parallela HK. Quoniam igitur circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum cum parallelogrammo AKHG, erit parallelogrammum ABCD parallelogrammo AKHG simile<sup>a</sup>. ergo ut DA ad AB, ita GA ad AK<sup>b</sup>. est autem et propter similitudinem parallelogrammorum ABCD, AEFG, ut DA ad AB, ita GA ad AE. et igitur ut GA ad AE, ita GA ad AK<sup>c</sup>. quare GA ad<sup>c</sup>. utramque ipsarum AE, AK eandem rationem habet; erit igitur AE ipsi AK aequalis<sup>d</sup>, major minori, quod fieri non potest. non igitur<sup>d</sup>. circa eandem diametrum est ABCD parallelogrammum cum parallelogrammo AKHG. quare circa eandem diametrum est cum ipso AEFG. Si igitur a parallelogrammo &c. Q. E. D.



a. 24. 6.  
b. 1. Def. 6.

<sup>d</sup> Ut

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

‘ Ut fequentes tres Propofitiones facilius intelligantur praemittenda  
‘ funt fequentia.

‘ 1. Parallelogrammum ad rectam lineam applicari dicitur, quando  
‘ super recta illa defcribitur. Ex. gr. parallelogrammum AC applicari  
‘ dicitur ad rectam AB, quando super AB defcribitur.

‘ 2. Sed parallelogrammum AE applicari dicitur ad rectam AB defi-  
‘ ciens figurâ parallelogrammâ, quando AD  
‘ bafis ipfius AE minor est rectâ AB, et  
‘ propterea parallelogrammum AE deficit  
‘ ab ipfo AC quod super recta AB defcribi-  
‘ tur in eodem angulo, et inter eafdem parallelas, figurâ parallelogram-  
‘ mâ DC, quae quidem dicitur defectus ipfius AE.



‘ 3. Et parallelogrammum AG applicari dicitur ad rectam AB, ex-  
‘ cedens figurâ parallelogrammâ, quando AF bafis ipfius AG major  
‘ est rectâ AB, et propterea AG excedit ipfam AC figurâ parallelo-  
‘ grammâ BG.’

## PROP. XXVII. THEOR.

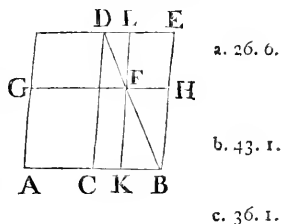
**O**MNIUM parallelogrammorum fecundum eandem rec-  
tam lineam applicatorum, et deficientium figuris  
parallelogrammis fimilibus, et fimiliter pofitis ei quae a  
dimidia defcribitur, maximum est quod ad dimidiam est  
applicatum, fimile exiftens defectui.

Sit recta linea AB, feceturque bifariam in C; et ad AB rectam li-  
neam applicetur parallelogrammum AD deficiens figura parallelogramma  
CE quae a CB dimidia ipfius AB defcripta est, cui feilicet fimilis est  
AD. Dico omnium parallelogrammorum ad rectam lineam AB ap-  
plicatorum

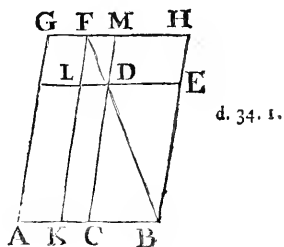
plicatorum, et deficientium figuris parallelogrammis similibus, et similiter positis ipsi CE, maximum esse AD.

Applicetur enim ad rectam lineam AB parallelogrammum AF, deficientis figura parallelogramma KH simili et similiter posita ipsi CE; dico AD parallelogrammum parallelogrammo AF majus esse.

Sit primò recta AK basis ipsius AF major ipsa AC; et quoniam simile est parallelogrammum CE parallelogrammo KH, circa eandem diametram sunt<sup>a</sup>. ducatur eorum diameter DB, et describatur figura. quoniam igitur parallelogrammum CF est aequale ipsi FE<sup>b</sup> commune apponatur KH; totum igitur CH toti KE est aequale. sed CH est aequale CG<sup>c</sup>, quoniam et recta linea AC ipsi CB est aequalis; ergo et CG est aequale ipsi KE. commune apponatur CF; totum igitur AF est aequale gnomoni CHL; quare et CE, hoc est AD parallelogrammum parallelogrammo AF est majus.



Secundò, Sit AK basis ipsius AF minor AC, iisdemque constructis, quoniam parallelogrammum DH aequale est ipsi DG<sup>c</sup>, etenim HM ipsi MG est aequalis<sup>d</sup>, erit DH ipso LG majus. est autem DH aequale ipsi DK<sup>b</sup>; majus igitur est DK ipso LG. commune apponatur AL; ergo totum AD toto AF est majus. Omnium igitur &c. Q. E. D.



## PROP. XXVIII. PROB.

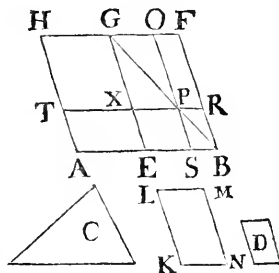
**A**D datam rectam lineam dato rectilineo aequale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma quae similis sit alteri datae. oportet autem datum rectilineum cui aequale applicandum est, non majus esse eo quod ad dimidiam applicatur, similibus existentibus defectibus, et ejus quod ad dimidiam, et ejus parallelogrammi cui oportet simile deficere.

Sit data quidem recta linea AB; datum autem rectilineum, cui oportet aequale ad datam rectam lineam AB applicare, sit C, non majus existens eo quod ad dimidiam applicatum est, similibus existentibus defectibus; cui autem oportet simile deficere sit D. oportet ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C aequale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quae similis sit ipsi D.

a. 10. 1. Secetur AB bifariam in E<sup>a</sup>, et ab ipsa

b. 18. 6. EB describatur<sup>b</sup> simile, et similiter positum ipsi D; quod sit EBSG, et compleatur AG parallelogrammum. itaque AG vel aequale est ipsi C, vel eo majus, ob determinationem. et si quidem AG sit aequale C, factum jam erit quod proponebatur; etenim ad rectam lineam

AB dato rectilineo C aequale parallelogrammum AG applicatum est, deficiens figura parallelogramma EF ipsi D simili. si autem non est aequale, erit AG majus quam C; atque EF aequale est AG; ergo, et EF quam C est majus. quo autem EF superat C, ei excessui aequale, ipsi



ipſi vero D ſimile, et ſimiliter poſitum, idem conſtituatur <sup>c</sup> KLMN. c. 25. 6. ſed D eſt ſimile EF; quare et KM ipſi EF ſimile erit <sup>d</sup>. ſit igitur d. 21. 6. reſta linea KL homologa ipſi EG, LM vero ipſi GF. et quoniam ae-  
quale eſt EF ipſis C et KM, erit EF ipſo KM majus; major igitur  
eſt reſta linea GE ipſâ LK, et GF ipſâ LM. ponatur GX aequalis  
LK, et GO aequalis LM, et compleatur XGOP parallelogrammum.  
aequale igitur et ſimile eſt XO ipſi KM; ſed KM ſimile eſt EF; ergo  
et XO ipſi EF eſt ſimile <sup>d</sup>. circa eandem igitur eſt diametrum XO cum  
ipſo EF <sup>e</sup>. ſit ipſorum diameter GPB, et figura deſcribatur. itaque e. 26. 6.  
quoniam EF eſt aequale ipſis C et KM ſimul, quorum XO eſt ae-  
quale KM, erit reliquus ERO gnomon aequalis reliquo C. et quo-  
niam OR eſt aequale <sup>f</sup> XS, commune apponatur SR; totum igitur OB <sup>f</sup>. 43. 1.  
toti XB eſt aequale. ſed XB eſt aequale <sup>g</sup> TE, quoniam et latus AE <sup>g</sup>. 36. 1.  
aequale eſt lateri EB; quare et TE ipſi OB aequale eſt. commune  
apponatur XS; ergo totum TS eſt aequale toti gnomoni ERO. at  
ERO gnomon ipſi C oſtenſus eſt aequalis; et TS igitur ipſi C aequale  
erit. quare ad datam reſtam lineam AB, dato reſtilineo C, aequale pa-  
rallelogrammum TS applicatum eſt, deficiens figura parallelogramma  
SR ipſi D ſimili, quoniam et SR ſimile eſt ipſi EF <sup>h</sup>. Q. E. F. h. 24. 6.

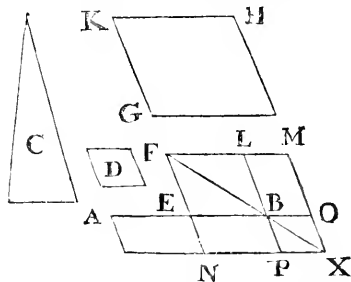
## PROP. XXIX. PROB.

**A**D datam reſtam lineam, dato reſtilineo aequale paral-  
lelogrammum applicare, excedens figura parallelo-  
gramma, quae ſimilis ſit alteri datae.

Sit data reſta linea AB, datum vero reſtilineum cui oportet aequale  
ad ipſam AB applicare ſit C; cui autem oportet ſimile excedere ſit D.  
oportet ad reſtam lineam AB, dato reſtilineo C aequale parallelogram-  
mum applicare, excedens figura parallelogramma ſimili D.

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

- Secetur AB bifariam in E, atque à EB ipsi D simile, et similiter positum parallelogrammum describatur <sup>a</sup> EL. et utrisque quidem EL et C aequale, ipsi vero D simile, et similiter positum idem constituatur <sup>b</sup> GH. simile igitur est GH ipsi EL <sup>c</sup>. sitque KH quidem latus homologum lateri FL, KG vero ipsi FE. et quoniam parallelogrammum GH majus est ipso EL, erit recta linea KH major quam FL, et KG major quam FE. producantur FL, FE, et ipsi quidem KH aequalis sit FLM, ipsi vero KG aequalis FEN, et compleatur MN parallelogrammum. ergo MN aequale est et simile ipsi GH; sed GH est simile EL; MN igitur ipsi EL simile erit, ac propterea circa eandem diametrum est EL cum ipso MN <sup>d</sup>. ducatur ipsorum diameter FX, et figura describatur. itaque quoniam GH ipsis EL et C est aequale, sed GH aequale est MN; erit et MN aequale ipsis EL et C. commune auferatur EL; reliquus igitur NOL gnomon ipsi C est aequalis. et quoniam AE est aequalis EB, aequale erit <sup>e</sup> et AN parallelogrammum parallelogrammo NB, hoc est ipsi BM <sup>f</sup>. commune apponatur NO; totum igitur AX parallelogrammum aequale est gnomoni NOL. sed NOL gnomon est aequalis C; ergo et AX ipsi C erit aequale. ad datam igitur rectam lineam AB dato rectilineo C aequale parallelogrammum applicatum est AX, excedens figura parallelogramma PO, ipsi D simili, quoniam et ipsi EL simile est PO <sup>g</sup>. Q. E. F.



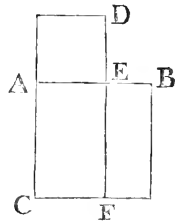
PROP. XXX. PROB.

**D**ATAM rectam lineam terminatam secundum extremam ac mediam rationem fecare.

Sit data recta linea AB, oportet ipsam AB secundum extremam ac mediam rationem fecare.

Describatur <sup>a</sup> ex AB quadratum BC, et ad AC ipsi BC aequale parallelogrammum applicetur <sup>b</sup> CD, excedens figura AD ipsi BC simili. b. 29. 6.

quadratum autem est BC, ergo et AD quadratum erit. et quoniam BC est aequale CD, commune auferatur CE; reliquum igitur BF reliquo AD est aequale. est autem et ipsi acquiangulum. ergo ipsorum BF, AD latera, quae circum aequales angulos, reciproce sunt proportionalia <sup>c</sup>. ut igitur FE ad ED, ita AE ad EB. est autem FE aequalis AC <sup>d</sup>, hoc est ipsi AB; et ED ipsi AE. quare ut BA ad AE, ita AE ad EB. sed AB major est quam AE; ergo AE quam EB est major <sup>e</sup>. recta igitur linea AB secundum extremam ac mediam rationem secta est in E <sup>f</sup>. Q. E. F.



c. 14. 6.

d. 34. 1.

e. 14. 5.

f. 3. Def. 6.

Aliter,

Sit data recta linea AB; oportet ipsam AB secundum extremam ac mediam rationem fecare.

Secetur AB in C, ita ut rectangulum quod continetur ipsis AB, BC aequale sit quadrato ex AC <sup>g</sup>. Quoniam igitur rectangulum ab AB, BC aequale est quadrato ex AC, erit ut BA ad AC, ita AC ad CB <sup>h</sup>. Ergo AB recta linea secundum extremam ac mediam rationem secta est in C <sup>i</sup>. Q. E. F.

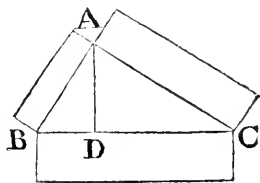
PROP. XXXI.

## PROP. XXXI. THEOR.

**I**N triangulis rectangulis figura rectilinea quae fit a latere rectum angulum subtendente, aequale est eis quae a lateribus rectum angulum continentibus fiunt, similibus et similiter descriptis.

Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC. Dico figuram rectilineam quae fit à BC aequalem esse eis quae à BA, AC fiunt similibus, et similiter descriptis.

- Dueatur perpendicularis AD; quoniam igitur in triangulo rectangulo ABC ab angulo recto qui est ad A, ad BC basim perpendicularis
- a. 8. 6. ducta est AD, erunt <sup>a</sup> triangula ABD, ADC similia toti ABC, et inter se. et quoniam simile est ABC triangulum triangulo ABD, erit ut CB
- b. 4. 6. ad BA, ita BA ad BD<sup>b</sup>. et quoniam tres rectae lineae proportionales sunt, ut prima ad tertiam, ita erit figura quae fit à prima ad eam quae à secunda, <sup>c</sup>
- c. 2. Cor. 20. 6. similem, et similiter descriptam<sup>c</sup>. ut igitur CB ad BD, ita figura quae fit à CB ad eam quae fit à BA, similem et simili-
- d. B. 5. ter descriptam. et invertendo<sup>d</sup>, ut DB ad BC, ita figura quae fit à BA ad eam quae à BC. eadem ratione, et ut DC ad CB, ita figura quae fit à CA ad eam quae fit à CB. quare et ut BD, DC simul ad BC, ita figurae
- e. 24. 5. quae à BA, AC ad eam quae à BC<sup>e</sup>. aequales autem sunt BD, DC simul ipsi BC. ergo figura quae fit à BC aequalis est iis quae à BA, AC
- f. A. 5. fiunt<sup>f</sup>, similibus, et similiter descriptis. In triangulis igitur rectangulis &c.
- Q. E. D.



PROP. XXXII.

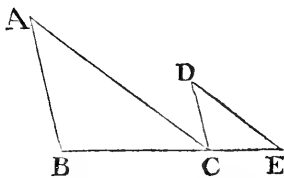


## PROP. XXXII. THEOR.

**S**I duo triangula, quae duo latera duobus lateribus proportionalia habent, componantur ad unum angulum, ita ut homologa latera ipsorum sint parallela; reliqua triangulorum latera in directum sibi invicem erunt.

Sint duo triangula ABC, DCE quae duo latera BA, AC duobus lateribus CD, DE proportionalia habeant, sc. fit ut BA ad AC, ita CD ad DE; parallela autem fit AB ipsi DC, et AC ipsi DE. Dico BC ipsi CE in directum esse.  $\square$

Quoniam enim AB parallela est DC, et in ipsas incidit recta linea AC, erunt anguli alterni BAC, ACD aequales inter se<sup>a</sup>; eadem ratione a. 29. 1. et angulus CDE aequalis est angulo ACD; quare et BAC ipsi CDE est aequalis. et quoniam duo triangula sunt ABC, DCE, unum angulum ad A uni ad D aequalem habentia, circum aequales autem angulos latera proportionalia, scilicet BA ad AC, ut CD ad DE; erit triangulum ABC triangulo DCE aequiangulum<sup>b</sup>. Ergo ABC angulus est aequalis angulo DCE. ostensus autem est et angulus BAC aequalis angulo ACD. totus igitur ACE duobus ABC, BAC est aequalis. communis apponatur ACB; ergo anguli ACE, ACB angulis ABC, BAC, ACB aequales sunt. sed ABC, BAC, ACB anguli duobus rectis sunt aequales<sup>c</sup>; et anguli igitur ACE, ACB duobus rectis aequales erunt. itaque c. 32. 1.



b. 6. 6.

ad quandam rectam lineam AC, et ad punctum in ipsa C, duae rectae lineae BC, CE non ad eandem partes positae, angulos qui deinceps sunt

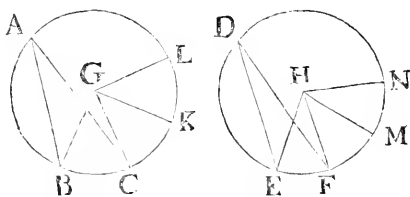
sunt ACE, ACB duobus rectis aequales efficiunt. Ergo BC ipsi CE  
 a. 14. 1. in directum erit<sup>d</sup>. Si igitur duo triangula &c. Q. E. D.

## PROP. XXXIII. THEOR.

**I**N circulis aequalibus anguli eandem habent rationem  
 quam circumferentiae quibus insunt, sive sint ad cen-  
 tra, sive ad circumferentias. adhuc etiam et sectores.

Sint aequales circuli ABC, DEF; et ad centra quidem ipsorum  
 G, H sint anguli BGC, EHF, ad circumferentias vero anguli BAC,  
 EDF. Dico ut circumferentia BC ad EF circumferentiam, ita esse  
 et BGC angulum ad angulum EHF, et angulum BAC ad angulum  
 EDF; et adhuc sectorem BGC ad EHF sectorem.

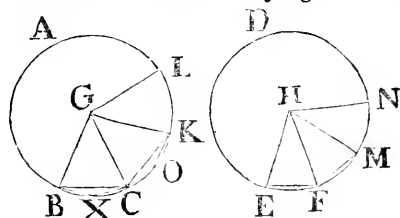
Ponantur enim circumferentiae quidem BC aequales quotcumque de-  
 inceps CK, KL; circumferentiae vero EF, rursus aequales quotcumque



FM, MN; et jungantur GK, GL, HM, HN. Quoniam igitur circum-  
 ferentiae BC, CK, KL inter se sunt aequales, et anguli BGC, CGK,  
 a. 27. 3. KGL inter se aequales erunt<sup>d</sup>. quam multiplex igitur est circumferen-  
 tia BL circumferentiae BC, tam multiplex est et BGL angulus anguli  
 BGC. eadem ratione et quam multiplex est circumferentia EN cir-  
 cumferentiae EF, tam multiplex est et EHN angulus anguli EHF. et si  
 aequalis est BL circumferentia circumferentiae EN, et angulus BGL  
 angulo

angulo EHN erit aequalis<sup>a</sup>; et si circumferentia BL major est circum-<sup>a. 27. 3.</sup>  
ferentia EN, major erit et BGL angulus angulo EHN; et si minor,  
minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus nimirum  
circumferentiis BC, EF, et duobus angulis BGC, EHF; sumpta sunt  
circumferentiae BC, et BGC anguli utcumque aeque multiplicia, videli-  
cet circumferentia BL et BGL angulus; circumferentiae vero EF, et  
EHF anguli, alia utcumque aeque multiplicia, nempe circumferentia  
EN, et angulus EHN. atque ostensum est si circumferentia BL supe-  
rat circumferentiam EN, et BGL angulum superare angulum EHN;  
et si aequalis, aequalem; et si minor, minorem esse. ut igitur<sup>b</sup> circum-<sup>b. 5. Def. 5.</sup>  
ferentia BC ad EF circumferentiam, ita angulus BGC ad angulum  
EHF. sed ut angulus BGC ad angulum EHF, ita angulus BAC ad  
EDF angulum<sup>c</sup>, uterque enim utriusque est duplus<sup>d</sup>. et ut igitur BC<sup>c. 15. 5.</sup>  
circumferentia ad circumferentiam EF, ita et angulus BGC ad angulum<sup>d. 20. 3.</sup>  
EHF, et angulus BAC ad EDF angulum. Quare in circulis aequalibus  
anguli eandem habent rationem quam circumferentiae quibus insistent,  
sive sint ad centra, sive ad circumferentias. Q. E. D.

Dico insuper et ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita  
esse sectorem BGC ad EHF sectorem. Jungantur enim BC, CK, et

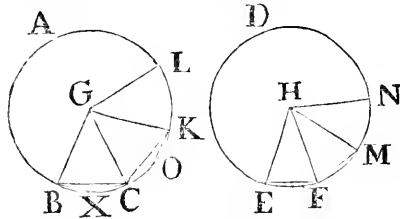


sumptis in circumferentiis BC, CK punctis X, O. jungantur BX, XC,  
CO, OK. itaque quoniam duae BG, GC duabus CG, GK aequales  
sunt, et angulos aequales continent, erit et basis BC basi CK aqua-

E e

lis,

- e. 4. 1. is, et triangulum GBC triangulo GCK <sup>e</sup> aequale. et quoniam circumferentia BC circumferentiae CK est aequalis, et reliqua circumferentia quae complet totum circulum ABC aequalis est reliquae quae eundem
- a. 27. 3. circulum complet. quare et angulus BXC angulo COK est aequalis<sup>1</sup>;
- f. 11. Def. 3. simile igitur est BXC segmentum segmento COK<sup>f</sup>; et sunt super aequalibus rectis lineis BC, CK. super aequalibus autem rectis lineis similia
- g. 24. 3. circulorum segmenta, inter se aequalia sunt<sup>g</sup>. Ergo segmentum BXC est aequale segmento COK. est autem et BGC triangulum triangulo CGK aequale. et totus igitur sector BGC toti sectori CGK aequalis erit. eadem ratione et KGL sector utrique ipsorum BGC, CGK aequalis erit. similiter et sectores EHF, FHM, MHN inter se sunt ae-



quales. quam multiplex igitur est BL circumferentia circumferentiae BC, tam multiplex est BGL sector sectoris BGC. eadem ratione et quam multiplex est circumferentia EN circumferentiae EF, tam multiplex est et EHN sector sectoris EHF. et si circumferentia BL circumferentiae EN est aequalis, et sector BGL aequalis est sectori EHN; et si circumferentia BL superat circumferentiam EN, superat et BGL sector sectorem EHN; et si minor, minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, duabus quidem BC, EF circumferentiis, duobus vero sectoribus BGC, EHF, sumpta sunt utcumque aequae multiplicia circumferentiae quidem BC et BGC sectoris, circumferentia BL et BGL sector; circumferentiae vero EF et sectoris EHF, alia utcumque aequae multiplicia,

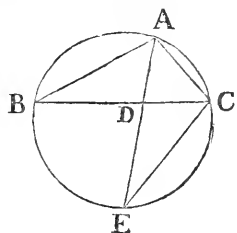
multiplicia, circumferentia EN et EHN sector; atque ostensum est si BL circumferentia superat circumferentiam EN, et sectorem BGL superare sectorem EHN; et si aequalis, aequalem esse; et si minor minorem. est igitur ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita sector BGC ad EHF sectorem.

## PROP. B. THEOR.

**S**I trianguli angulus bifariam secetur, fecans autem angulum recta linea secet etiam basim; rectangulum a lateribus trianguli contentum, aequale erit rectangulo contento a segmentis basis una cum quadrato rectae lineae quae angulum bifariam secat.

Sit ABC triangulum, et bifariam secetur angulus BAC recta linea AD; erit rectangulum BA, AC aequale rectangulo BDC una cum quadrato ex AD.

Circa triangulum describatur <sup>a</sup> circulus ACB, et producat AD ad a. 5. 4. circumferentiam in E, et jungatur EC. igitur quoniam angulus BAD aequalis est angulo CAE, et angulus ABD angulo <sup>b</sup> AEC, sunt enim in eodem segmento; erunt ABD, AEC triangula inter se aequiangula. Ergo ut BA ad AD, ita est <sup>c</sup> EA ad AC, et rectangulum BA, AC aequale erit <sup>d</sup> rectangulo EA, AD, hoc est <sup>e</sup> rectangulo ED, DA una cum quadrato ex AD. est autem rectangulum ED, DA aequale <sup>f</sup> rectangulo BD, DC. f. 35. 3. rectangulum igitur BA, AC aequale est rectangulo BD, DC una cum quadrato ex AD. Quare si trianguli &c. Q. E. D.



b. 21. 3.

c. 4. 6.

d. 16. 6.

e. 3. 2.

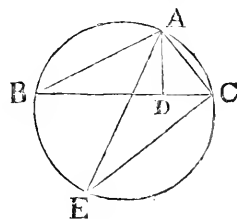
f. 35. 3.

## PROP. C. THEOR.

**S**I ab angulo trianguli ducatur perpendicularis ad basim, erit rectangulum lateribus trianguli contentum aequale rectangulo contento a perpendiculari et diametro circuli circa triangulum descripti.

Sit triangulum  $ABC$ , et ab angulo  $A$  ducatur  $AD$  perpendicularis ad basim  $BC$ , erit rectangulum  $BA, AC$  aequale rectangulo contento ab  $AD$  et diametro circuli circa triangulum descripti.

- a. 5. 4. Circa triangulum describatur <sup>a</sup> circulus  $ACB$ , et ducatur diameter  $AE$ , et  $EC$  jungatur. Quoniam igitur angulus rectus  $BDA$
- b. 31. 3. aequalis est angulo  $ECA$  in semicirculo <sup>b</sup>,
- c. 21. 3. est autem angulus  $ABD$  aequalis <sup>c</sup> ipsi  $AEC$



in eodem segmento; aequiangula erunt triangula  $ABD, AEC$ . ut igitur  $BA$  ad  $AD$ , ita est <sup>d</sup>  $EA$  ad  $AC$ , et propterea <sup>e</sup> rectangulum  $BA, AC$  aequale est rectangulo  $EA, AD$ . Si igitur ab angulo &c. **Q. E. D.**

d. 4. 6. tur  $BA$  ad  $AD$ , ita est <sup>d</sup>  $EA$  ad  $AC$ , et propterea <sup>e</sup> rectangulum  $BA,$

e. 16. 6.

## E U C L I D I S

## E L E M E N T O R U M

## LIBER UNDECIMUS.

## DEFINITIONES.

I.

**S**OLIDUM est quod longitudinem, latitudinem et crassitudinem  
habet.

II.

Solidi vero terminus est superficies.

III.

Recta linea ad planum recta, sive perpendicularis, est, quando ad omnes rectas lineas quae ipsam tangunt, et in subiecto sunt plano, rectos angulos efficit.

IV.

Planum ad planum rectum est, cum rectae lineae quae communi planorum sectioni ad rectos angulos in uno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

Rectae

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

## V.

Rectae lineae ad planum inclinatio est, cum a sublimi termino rectae illius lineae ad planum ducta fuerit perpendicularis, atque a puncto quo plano occurrit, ad terminum rectae lineae qui est in plano, recta linea fuerit adjuncta; est, scilicet, angulus acutus adjuncta recta linea et insistente contentus.

## VI.

Plani ad planum inclinatio est, angulus acutus rectis lineis contentus, quae ad rectos angulos communi planorum sectioni, ad idem ipsius punctum, in utroque planorum ducuntur.

## VII.

Planum ad planum similiter inclinari dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint aequales.

## VIII.

Parallela plana sunt, quae inter se non conveniunt.

## IX.

Solidus angulus est qui pluribus quam duobus planis angulis in eodem non existentibus plano, et ad unum punctum constitutis continetur.

## X.

‘ Omissa est Definitio decima ob rationes in Notis adductas.’

## XI.

Similes solidae figurae sunt, quae et singulos angulos solidos aequales habent, et quae similibus planis continentur, multitudine aequalibus.

## XII.

Pyramis est figura solida planis contenta, quae ab uno plano ad unum punctum constituuntur.

## XIII.

Prisma est figura solida quae planis continetur, quorum adversa duo sunt et aequalia et similia, et parallela; alia vero parallelogramma.

Sphaera



## XIV.

Sphaera est figura descripta, quando semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus revoluitur, donec in eundem locum a quo moveri coeperat restituitur.

## XV.

Axis autem sphaerae est quiescens illa recta linea circum quam semicirculus convertitur.

## XVI.

Centrum sphaerae est idem quod et semicirculi.

## XVII.

Diameter autem sphaerae est recta quaedam linea per centrum ducta, et utrinque a sphaerae superficie terminata.

## XVIII.

Conus est figura descripta, quando rectanguli trianguli manente uno latere eorum quae circa rectum angulum, circumductum triangulum revoluitur, donec in eundem locum a quo moveri coeperat restituitur.

Et si quidem quiescens recta linea aequalis sit reliquae circa rectum angulum, quae sc. convertitur, orthogonius erit conus; si vero minor, amblygonius; si vero major, oxygonius.

## XIX.

Axis autem Coni est quiescens illa recta, circa quam triangulum convertitur.

## XX.

Basis vero Coni est circulus qui a circumducta recta linea describitur.

## XXI.

Cylindrus est figura descripta, quando rectanguli parallelogrammi manente uno latere eorum quae circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum revoluitur, donec in eundem locum a quo coeperat moveri restituitur.

Axis

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

XXII.

Axis autem Cylindri est quiescens illa recta linea, circum quam parallelogrammum convertitur.

XXIII.

Bases vero Cylindri sunt circuli a duobus adversis lateribus quae circumaguntur descripti.

XXIV.

Similes Coni et Cylindri sunt, quorum axes et basium diametri proportionales sunt.

XXV.

Cubus est figura solida sex quadratis aequalibus contenta.

XXVI.

Tetraedrum est figura solida quatuor triangulis aequalibus et aequilateris contenta.

XXVII.

Octaedrum est figura solida octo triangulis aequalibus et aequilateris contenta.

XXVIII.

Dodecaedrum est figura solida duodecim pentagonis aequalibus, et aequilateris et aequiangulis contenta.

XXIX.

Icofaedrum est figura solida viginti triangulis aequalibus, et aequilateris contenta.

DEF. A.

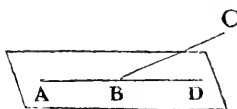
Parallelepipedum est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum quae ex adverso parallelae sunt, contenta.

PROP. I.

## PROP. I. THEOR.

**R**ECTAE lineae pars quaedam non est in subiecto plano, quaedam vero in sublimi.

Si enim fieri potest, rectae lineae ABC pars quidem AB sit in subiecto plano, pars vero BC in sublimi. Erit igitur recta lineae quaedam ipsi AB in directum continuata in subiecto plano; sit DB. duabus igitur rectis lineis ABC, ABD commune



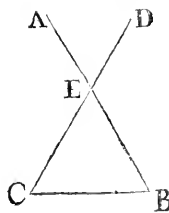
segmentum est AB, quod fieri non potest<sup>a</sup>. Non igitur rectae &c. Q. E. D. 2. Cor. II. 1.

## PROP. II. THEOR.

**S**I duae rectae lineae se invicem fecerint, in uno sunt plano; et quaelibet tres rectae quae sibi mutuo occurrunt, sunt in uno plano.

Duae enim rectae lineae AB, CD se invicem in puncto E fecerint; erunt AB, CD in uno plano. et tres rectae EC, CB, BE quae sibi mutuo occurrunt in uno sunt plano.

Per rectam EB ducatur quodvis planum, et circa EB, productam si opus fuerit, convertatur planum donec transeat per punctum C; quoniam igitur puncta E, C sunt in plano hoc, in eodem erit<sup>a</sup> recta EC; eadem ratione, in eodem plano est recta BC; et in eodem, ex hypothese, est recta EB. igitur tres rectae lineae EC, CB, BE in uno sunt plano. in quo autem plano sunt EC, EB in eodem sunt<sup>b</sup> et rectae CD, AB.



a. 7. Def. 1.

b. 1. 11.

F f

Ergo

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

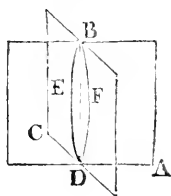
Ergo rectae lineae AB, CD in uno sunt plano. Igitur si duae rectae lineae &c. Q. E. D.

## PROP. III. THEOR.

**S**I duo plana se invicem fecerint, communis ipsorum sectionis recta linea erit.

Duo plana AB, BC se invicem fecerint, communis autem ipsorum sectionis sit DB linea. Dico lineam DB esse rectam. si enim non ita sit, ducatur a puncto D ad B in plano quidem AB recta linea DEB; in plano autem BC recta linea DFB. Erunt igitur duarum rectarum linearum DEB, DFB iisdem termini, et ipse spatium continebunt, quod est absurdum<sup>2</sup>. igitur planorum AB, BC, communis sectionis BD non potest non esse recta linea; recta igitur est. Si igitur duo plana &c. Q. E. D.

2. 10. AX. I.



## PROP. IV. THEOR.

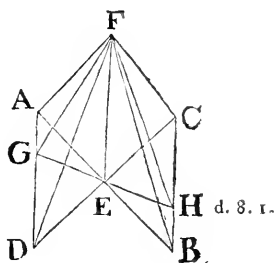
**S**I recta linea duabus rectis lineis se invicem secantibus in communi sectione ad rectos angulos insistat, etiam ducto per ipsas plano ad rectos angulos erit.

Recta linea quaedam EF duabus rectis lineis AB, CD, se invicem secantibus in E puncto, ab ipso E ad rectos angulos insistat. Dico EF etiam plano per AB, CD ducto ad rectos angulos esse.

Sumantur enim rectae lineae AE, EB, CE, ED inter se aequales; et per E ducatur in plano per AB, CD, recta linea GEH utcumque, junganturque AD, CB; deinde a quovis, in recta EF, puncto F ducantur FA, FG, FD, FC, FH, FB. Et quoniam duae rectae lineae AE,

ED

ED duabus rectis lineis BE, EC aequales sunt, et angulos aequales AED, BEC continent<sup>a</sup>, erit AD basis basi CB aequalis, et angulus a. 15. 1. DAE aequalis angulo EBC<sup>b</sup>. est autem et angulus AEG, aequalis an- b. 4. 1. gulo BEH<sup>a</sup>. duo igitur triangula sunt AGE, BHE, duos angulos duobus angulis aequales habentia, alterum alteri, et unum latus AE uni lateri EB aequale quod aequalibus adjacet angulis; quare et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt<sup>c</sup>. ergo GE quidem est aequa- c. 26. 1. lis EH; AG vero ipsi BH. et quoniam AE est aequalis EB, communis autem, et ad rectos angulos FE, erit basis AF basi FB aequalis<sup>b</sup>; eadem quoque ratione et CF aequalis erit FD. praeterea quoniam AD est aequalis BC, et AF ipsi FB, erunt duae FA, AD duabus FB, BC aequales, altera alteri; et ostensa est basis DF aequalis basi FC; angulus igitur<sup>d</sup> FAD angulo FBC est aequalis. rursus, ostensa est AG aequalis BH, sed et AF ipsi FB est aequalis; duae igitur FA, AG duabus FB, BH aequales sunt, et angulus FAG aequalis ostensus est angulo FBH; basis igitur GF basi FH est aequalis<sup>b</sup>. rursus, quoniam GE ostensa est aequalis EH, communis autem EF; erunt duae GE, EF aequales duabus HE, EF; et basis GF est aequalis basi FH; angulus igitur GEF angulo HEF est aequalis<sup>d</sup>, et ideo rectus est uterque angulorum GEF, HEF<sup>e</sup>. Ergo FE ad GH utcumque per E ductam e. 10. Def. 1. rectos efficit angulos. similiter ostendemus FE etiam ad omnes rectas lineas, quae ipsam tangunt, et in subiecto sunt plano, rectos angulos efficere. recta autem ad planum recta est quando ad omnes rectas lineas ipsum tangentes, et in eodem existentes plano rectos efficit angulos<sup>f</sup>. Quare FE subiecto plano ad rectos angulos insitit. Si igitur f. 3. Def. 11. recta linea &c. Q. E. D.

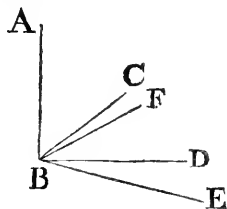


## PROP. V. THEOR.

**S**I recta linea tribus rectis lineis sese tangentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insittat, tres illae rectae lineae in uno plano erunt.

Recta linea quaedam AB tribus rectis lineis BC, BD, BE, in tactu B, ad rectos angulos insittat; dico BC, BD, BE in uno plano esse.

- Non enim, sed si fieri potest, sint BD, BE quidem in subiecto plano, BC vero in sublimi; et planum per AB, BC producatur; communem igitur sectionem in subiecto plano faciet rectam lineam<sup>a</sup>; faciat BF. in uno igitur sunt plano per AB, BC ducto, tres rectae lineae AB, BC, BF. et quoniam AB utrique ipsarum BD, BE, ad rectos angulos insittit, et ducto per ipsas DB, BE plano ad rectos angulos erit<sup>b</sup>. planum autem per DB, BE est subiectum planum; ergo AB ad subiectum planum recta est; quare et ad omnes rectas lineas ipsam tangentes, quae in eodem plano sunt, rectos<sup>c</sup> faciet angulos; sed ipsam tangit BF in subiecto existens plano. Ergo angulus ABF rectus est. ponitur autem et AÛC angulus rectus; aequalis igitur est angulus ABF angulo ABC, et in eodem sunt plano, quod fieri non potest. recta igitur linea BC non est in sublimi; quare tres rectae lineae BC, BD, BE in uno sunt plano. Si igitur recta linea &c. Q. E. D.



## PROP. VI. THEOR.

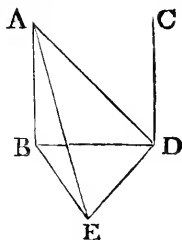
**S**I duae rectae lineae eidem plano ad rectos angulos fuerint, illae inter se parallelae erunt.

Duae

Duae enim rectae lineae AB, CD subiecto plano sunt ad rectos angulos; dico AB, ipsi CD parallelam esse.

Occurrant enim subiecto plano in punctis B, D, jungaturque BD recta linea, cui ad rectos angulos in subiecto plano ducatur DE, et ponatur DE aequalis ipsi AB, junganturque BE, AE, AD. Quoniam igitur AB recta est ad subiectum planum, et ad omnes rectas lineas quae ipsam tangunt, et in subiecto sunt plano rectos angulos efficiet<sup>a</sup>. a. 3. Def. 11. tangit autem ipsam AB utraque ipsarum BD, BE existens in subiecto plano.

Ergo uterque angulorum ABD, ABE rectus est. eadem ratione rectus etiam est uterque ipsorum CDB, CDE. et quoniam AB aequalis est ipsi DE, communis autem BD, erunt duae AB, DE duabus ED, DB aequales; et rectos angulos continent; basis igitur AD basi BE est aequalis<sup>b</sup>. rursus, quoniam AB est aequalis DE, et BE ipsi AD, duae AB, BE duabus ED, DA aequales sunt, et basis AE communis; ergo angulus ABE angulo EDA est aequalis<sup>c</sup>. sed ABE rectus est; rectus igitur et EDA; et idcirco ED<sup>c</sup>. 8. 1. ad DA est perpendicularis. sed et perpendicularis est ad utramque ipsarum BD, DC. quare ED tribus rectis lineis BD, DA, DC in tactu ad rectos angulos insistit. tres igitur rectae lineae BD, DA, DC in uno sunt plano<sup>d</sup>. in quo autem sunt BD, DA, in eo est AB, quaevis enim<sup>d</sup>. 5. 11. tres rectae lineae quae sibi mutuo occurrunt, in uno sunt plano<sup>e</sup>. sunt e. 2. 11. igitur AB, BD, DC in uno plano. atque est uterque angulorum ABD, BDC rectus; parallela igitur est AB ipsi CD<sup>f</sup>. Quare si duae rectae<sup>f</sup>. 28. 1. lineae &c. Q. E. D.



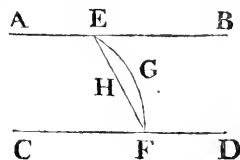
b. 4. 1.

## PROP. VII. THEOR.

**S**I duae rectae lineae parallelae sint, fumantur autem in utraque ipsarum quaelibet puncta; quae dicta puncta conjungit recta in eodem erit plano in quo et parallelae.

Sint duae rectae lineae parallelae AB, CD, et in utraque ipsarum fumantur quaelibet puncta E, F; dico rectam lineam quae conjungit E, F in eodem plano esse in quo sunt parallelae.

Non enim sed, si fieri potest, sit in sublimi, ut EGF; et in plano ABCD, in quo sunt parallelae, ducatur a puncto E ad F recta linea EHF; et recta ponitur EGF.



Ergo duae rectae lineae EHF, EGF spatium continebunt, quod fieri a. 10. AX. I. non potest<sup>2</sup>. non igitur quae a puncto E ad F ducitur recta linea in sublimi est, quare erit in plano quod per AB, CD parallelas transit. Si igitur duae rectae &c. Q. E. D.

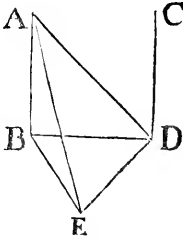
## PROP. VIII. THEOR.

**S**I duae rectae lineae parallelae sint, altera autem ipsarum plano alicui sit ad rectos angulos; et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

Sint duae rectae lineae parallelae AB, CD, et altera ipsarum AB subiecto plano sit ad rectos angulos. Dico reliquam CD eidem plano ad rectos angulos esse.

Occurrant enim AB, CD subiecto plano in punctis B, D, et BD jungatur.



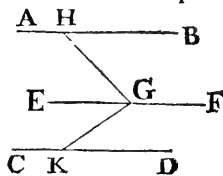
jungatur. Ergo AB, CD, BD in uno sunt plano. ducatur ipsi BD ad  
 rectos angulos in subiecto plano DE, et ponatur DE ipsi AB aequalis,  
 junganturque BE, AE, AD. et quoniam AB perpendicularis est ad sub-  
 jectum planum, et ad omnes rectas lineas quae ipsam tangunt suntque  
 in subiecto plano, perpendicularis erit<sup>a</sup>. rectus igitur est uterque angu- a. 3. Def. 11.  
 lorum ABD, ABE. quoniam vero in parallelas rectas lineas AB, CD  
 recta incidit BD, erunt anguli ABD, CDB duobus rectis aequales<sup>b</sup>. rec- b. 29. 1.  
 tus autem est ABD; ergo et CDB est rectus, ac propterea CD perpen-  
 dicularis est ad BD. et quoniam AB est aequalis DE, communis autem  
 BD, duae AB, BD duabus ED, DB aequales sunt; et angulus ABD  
 est aequalis angulo EDB, rectus enim uterque est;  c. 4. 1.  
 basis igitur AD basi BE est aequalis<sup>c</sup>. rursus, quoniam AB aequalis est DE, et BE ipsi AD; erunt  
 duae AB, BE duabus ED, DA aequales; et basis  
 communis AE; quare angulus ABE est aequalis  
 angulo EDA<sup>d</sup>. rectus autem est ABE; ergo et  
 EDA est rectus, et ED ad DA perpendicularis.  
 sed et perpendicularis est ad BD; ergo ED etiam  
 ad planum per BD, DA perpendicularis erit<sup>e</sup>, et ad omnes rectas lineas e. 4. 11.  
 quae in eodem existentes plano ipsam tangunt, rectos faciet angulos<sup>f</sup>. f. 3. Def. 11.  
 at in plano per BD, DA est DC, omnes enim tres sunt in plano in quo  
 sunt rectae parallelae AB, CD. quare ED ipsi CD est ad rectos angu-  
 los; ideoque CD ad rectos angulos est ipsi DE; sed et CD etiam ipsi  
 DB. Ergo CD duabus rectis lineis DE, DB se mutuo secantibus in  
 communi sectione D ad rectos angulos insistit; ac propterea plano per  
 DE, DB est ad rectos angulos<sup>e</sup>. planum autem per DE, DB est sub-  
 jectum planum. Ergo CD subiecto plano ad rectos angulos erit.  
 Q. E. D.

## PROP. IX. THEOR.

**Q**UAE eidem rectae lineae sunt parallelae, non exi-  
tentes in eodem in quo ipsa plano, etiam inter se  
parallelae erunt.

Sit utraque ipsarum AB, CD parallela ipsi EF, non existentes in  
eodem in quo ipsa plano. Dico AB ipsi CD parallelam esse.

- Sumatur in EF punctum quodvis G, a quo ipsi EF in plano qui-  
dem per EF, AB transeunte, ad rectos angulos ducatur GH; in plano  
autem transeunte per EF, CD rursus ducatur ipsi EF ad rectos angulos GK. et quoniam  
EF ad utramque ipsarum GH, GK est perpendicularis, erit etiam EF ad rectos angulos  
a. 4. 11. plano per GH, GK transeunte<sup>a</sup>. atque est EF  
ipsi AB parallela; ergo et AB plano per HGK  
b. 8. 11. ad rectos angulos est<sup>b</sup>. eadem ratione et CD plano per HGK est ad rectos  
angulos. utraque igitur ipsarum AB, CD plano per HGK ad rectos angulos  
erit. Si autem duae rectae lineae eidem plano ad rectos angulos fuerint,  
c. 6. 11. parallelae erunt inter se<sup>c</sup>. Ergo AB ipsi CD parallela est. Q. E. D.



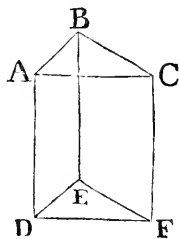
## PROP. X. THEOR.

**S**I duae rectae lineae sese tangentes, duabus rectis li-  
neis sese tangentibus sint parallelae, non autem in  
eodem plano; aequales angulos continebunt.

Duae rectae lineae sese tangentes AB, BC, duabus rectis lineis DE,  
EF sese tangentibus sint parallelae, non autem in eodem plano. Dico  
angulum ABC angulo DEF aequalem esse.

Affumantur

Affumantur enim BA, BC, ED, EF inter se aequales; et jungantur AD, CF, BE, AC, DF. Quoniam igitur BA ipsi ED aequalis est et parallela, erit et AD aequalis et parallela ipsi BE<sup>a</sup>. eadem ratione et CF ipsi BE aequalis et parallela erit. utraque igitur ipsarum AD, CF ipsi BE aequalis est et parallela. quae autem eidem rectae lineae sunt parallelae, non existentes in eodem plano, et inter se parallelae erunt. Ergo AD parallela est ipsi CF<sup>b</sup>; et ei est aequalis<sup>c</sup>; atque ipsas conjungunt AC, DF; et AC igitur ipsi DF aequalis est et parallela<sup>a</sup>. et quoniam duae rectae lineae AB, BC duabus DE, EF aequales sunt, et basis AC est aequalis basi DF; erit angulus ABC angulo DEF aequalis<sup>d</sup>. Si igitur duae rectae lineae &c. Q. E. D.



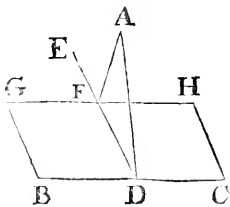
b. 9. 11.  
c. 1. Ax. 1.

PROP. XI. PROB.

**A** Dato puncto in sublimi, ad subiectum planum, perpendicularem rectam lineam ducere.

Sit datum quidem punctum in sublimi A, datum autem subiectum planum BH. oportet a puncto A ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

In subiecto plano ducatur quaedam recta linea uterunque BC, et a puncto A ad BC perpendicularis agatur AD<sup>a</sup>. siquidem igitur AD perpendicularis sit etiam ad subiectum planum, factum jam erit quod proponebatur; sin minus, ducatur a puncto D ipsi BC, in subiecto plano, ad rectos angulos DE<sup>b</sup>; et a puncto A ad DE perpendicularis ducatur<sup>a</sup> AF; denique per F ducatur



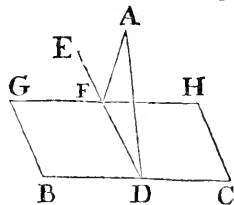
a. 12. 11.

b. 11. 1.

G g

tur

- c. 31. 1. tur GH ipsi BC parallela<sup>c</sup>. et quoniam BC utrique ipsarum ED, DA est ad rectos angulos, erit et BC ad rectos angulos plano per ED, DA transeunti<sup>d</sup>. atque ipsi BC parallela est GH; si autem sint duae rectae lineae parallelae quarum una plano alicui sit ad rectos angulos, et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit<sup>e</sup>; quare et GH plano per ED, DA transeunti ad rectos angulos est, ac propterea ad omnes rectas lineas quae in eodem plano existentes ipsam tangunt est perpendicularis<sup>f</sup>. tangit autem ipsam recta AF existens in plano per ED, DA. Ergo GH perpendicularis est ad AF, et ob id AF est perpendicularis ad GH. est autem AF ad DE perpendicularis; ergo AF perpendicularis est ad utramque ipsarum GH, DE. si autem recta linea duabus rectis lineis sese tangentibus, in communi sectione, ad rectos angulos insistat, etiam plano per ipsas ducto ad rectos angulos erit<sup>d</sup>. quare AF plano per ED, GH ducto est ad rectos angulos. planum autem per ED, GH ductum est subiectum planum; ergo AF ad subiectum planum est perpendicularis. A dato igitur puncto sublimi A, ad subiectum planum, perpendicularis recta linea ducta est AF. Q. E. F.



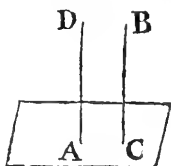
## PROP. XII. PROB.

**D**ATO plano, a puncto quod in ipso datum est, ad rectos angulos rectam lineam constituere.

Sit datum quidem planum illud quod est subiectum, punctum autem quod in ipso sit A. oportet à puncto A subiecto plano ad rectos angulos rectam lineam constituere.

Intelligatur aliquod punctum sublime B, a quo ad subiectum planum agatur

agatur perpendicularis BC<sup>a</sup>; et per A ipsi BC parallela ducatur AD<sup>b</sup>.  
 Quoniam igitur duae rectae parallelae sunt AD, CB, una autem ipsarum BC subiecto plano est ad rectos angulos, et reliqua AD subiecto plano ad rectos angulos erit<sup>c</sup>. Dato igitur plano a puncto quod in ipso est datum, ad rectos angulos recta linea constituta est. Q. E. F.

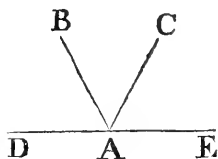


a. 11. 11.  
 b. 31. 1.  
 c. 8. 11.

PROP. XIII. THEOR.

**D**ATO plano, a puncto quod in ipso est, duae rectae lineae ad rectos angulos non constituentur ex eadem parte. et unica est perpendicularis a puncto in sublimi ad subiectum planum.

Si enim fieri potest, dato plano, a puncto quod in ipso est A, duae rectae lineae AB, AC ad rectos angulos constituentur ex eadem parte; et ducatur planum per BA, AC, quod faciet sectionem per A in subiecto plano rectam lineam<sup>a</sup>; faciat DAE. Ergo rectae lineae AB, AC, DAE in uno sunt plano. et quoniam CA subiecto plano ad rectos angulos est, et ad omnes rectas lineas, quae in subiecto plano existentes ipsam tangunt, rectos faciet angulos. tangit autem ipsam DAE, quae est in subiecto plano; angulus igitur CAE rectus est. eadem ratione et rectus est BAE. Ergo angulus CAE ipsi BAE est aequalis; et in uno sunt plano, quod fieri non potest. Non igitur a dato plano a puncto quod in ipso est, duae rectae lineae ad rectos angulos constituentur ex eadem parte. Et a puncto in sublimi ad subiectum planum una tantum duci potest perpendicularis. si enim duae duci possint ab



a. 3. 11.

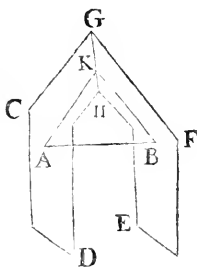
b. 6. 11. eodem puncto, essent inter se parallelæ<sup>b</sup>, quod est absurdum. Una igitur tantum duci potest. Q. E. D.

PROP. XIV. THEOR.

**A**D quæ plana eadem recta linea est perpendicularis, ea parallela sunt.

Recta enim quaedam linea AB ad utrumque ipsorum planorum CD, EF sit perpendicularis. Dico ea plana parallela esse.

Si enim non ita sit, producta convenient inter se; convenient, facient autem communem sectionem rectam lineam; faciant GH; et in ipsa GH sumpto quovis puncto K, jungantur AK, BK. Quoniam igitur AB recta est ad EF planum, erit et perpendicularis ad ipsam BK rectam  
 a. 3. Def. 11. lineam in plano EF producto existentem<sup>a</sup>. quare angulus ABK rectus est. eadem ratione et BAK est rectus; ideoque trianguli ABK duo anguli ABK, BAK duobus rectis sunt æquales, quod  
 b. 17. 1. fieri non potest<sup>b</sup>. non igitur plana CD, EF producta inter se convenient. Quare plana CD,  
 c. 5. Def. 11. EF sunt parallela<sup>c</sup>. Ad quæ igitur plana &c. Q. E. D.



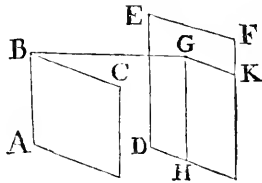
PROP. XV. THEOR.

**S**I duæ rectæ lineæ sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus sint parallelæ, non autem in eodem plano; et quæ per ipsas transeunt plana parallela erunt.

Duæ enim rectæ lineæ sese tangentes AB, BC, duabus rectis lineis sese tangentibus DE, EF parallelæ sint, et non in eodem plano. Dico plana

plana quae per ABC, DEF transeunt, si producantur, inter se non conuenire.

Ducatur \* a puncto B ad planum quod per DEF tranfit, perpen- \* 11. 11.  
dicularis BG, quae plano in puncto G occurrat; et per G ducatur \*\* 31. 1.  
ipfi quidem ED parallela GH; ipfi uero EF parallela GK. itaque quo-  
niam BG perpendicularis est ad planum per DE, EF, et ad omnes  
rectas lineas quae ipsam tangunt, et in eo-  
dem sunt plano, rectos faciet angulos<sup>a</sup>. tangit autem ipsam utraque ipfarum GH,  
GK, quae in eo sunt plano. rectus igitur  
est uterque angulorum BGH, BGK. et  
quoniam BA parallela est ipfi GH\*, (utra-  
que enim ipfarum parallela est ipfi DE



a. 3. Def. 11.

\* 9. 11.

non in eodem cum ipsa plano) anguli GBA, BGH duobus rectis sunt  
aequales<sup>b</sup>. rectus autem est BGH, ergo et GBA rectus erit, ideoque GB<sup>b</sup>. 29. 1.  
ad BA est perpendicularis. eadem ratione et GB perpendicularis est ad  
BC. quoniam igitur recta linea GB duabus rectis lineis BA, BC se  
inuicem secantibus ad rectos angulos insistat, erit GB etiam ad planum  
per BA, BC ductum perpendicularis<sup>c</sup>. atque est ad planum per DE, c. 4. 11.  
EF perpendicularis; ergo BG perpendicularis est ad utrumque plano-  
rum quae per ABC, DEF transeunt. ad quae uero plana eadem recta  
linea est perpendicularis, ea parallela sunt<sup>d</sup>. parallelum igitur est pla- d. 14. 11.  
num per AB, BC plano per DE, EF. Quare si duae rectae lineae &c.  
Q. E. D.

PROP. XVI. THEOR.

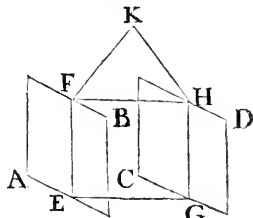
SI duo plana parallela ab aliquo plano secantur, com-  
munes ipforum sectiones parallelae erunt.

Duo

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

Duo plana parallela AB, CD a plano aliquo EFHG fecentur, communes autem ipforum sectiones sint EF, GH. Dico EF ipsi GH parallelam esse.

Si enim non est parallela, productae EF, GH inter se convenient, vel ad partes FH, vel ad partes EG. producantur prius, ut ad partes FH, et convenient in K. quoniam igitur EFK est in plano AB, et omnia quae in EFK sumuntur puncta in eodem plano erunt; unum autem punctorum quae sunt in EFK est ipsum K punctum; ergo K est in plano AB. eadem ratione et K est in CD plano. ergo plana AB, CD producta inter se convenient; non conveniunt autem, cum parallela ponantur. non igitur EF, GH rectae lineae productae convenient ad partes FH. similiter demonstrabimus neque rectas EF, GH ad partes EG convenire, si producantur. quae autem, in eodem plano, productae neutra ex parte convenient parallelae sunt. Ergo EF ipsi GH est parallela. Si igitur duo plana &c. Q. E. D.



## PROP. XVII. THEOR.

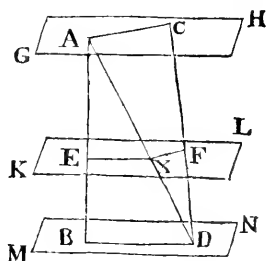
**SI** duae rectae lineae a parallelis fecentur planis, in eadem ratione fecabuntur.

Duae enim rectae lineae AB, CD a parallelis planis GH, KL, MN fecentur in punctis A, E, B; C, F, D. Dico ut AE recta linea ad ipsam EB, ita esse CF ad FD.

Jungantur enim AC, BD, AD, et occurrat AD plano KL in puncto X; et EX, XF jungantur. Quoniam igitur duo plana parallela KL, MN a plano EBDX fecantur, communes ipforum sectiones EX, BD parallelae



parallelae sunt<sup>a</sup>. eadem ratione quoniam duo plana parallela GH, KL a. 16. 11. a plano AXFC fecantur, communes ipsorum sectiones AC, XF sunt parallelae. et quoniam uni laterum trianguli ABD, videlicet ipsi BD, parallela ducta est EX, ut AE ad EB, ita erit AX ad XD<sup>b</sup>. rursus, quoniam uni laterum trianguli ADC, nempe ipsi AC, parallela ducta est XF, erit ut AX ad XD, ita CF ad FD. ostensum autem est ut AX ad XD, ita esse AE ad EB. ut igitur AE ad EB, ita CF ad FD<sup>c</sup>. Quare si duae rectae c. 11. 5. lineae &c. Q. E. D.



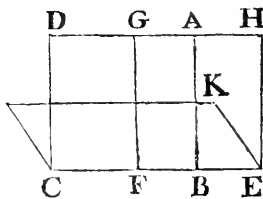
b. 2. 6.

PROP. XVIII. THEOR.

**S**I recta linea plano alicui sit ad rectos angulos, et omnia quae per ipsum transeunt plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

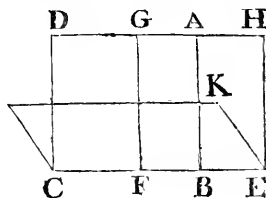
Recta enim linea quaedam AB subiecto plano sit ad rectos angulos. Dico et omnia plana quae per ipsam AB transeunt subiecto plano ad rectos angulos esse.

Producatur enim per AB planum DE, sitque plani DE et subiecti plani communis sectio CE; et sumatur in CE quodvis punctum F, a quo ipsi CE ad rectos angulos, in DE plano ducatur FG. quoniam igitur AB ad subiectum planum est perpendicularis, et ad omnes rectas lineas, quae ipsam tangunt et in subiecto sunt plano perpendicularis erit<sup>2</sup>; quare etiam ad CE<sup>a</sup>. 3. Def. 11.



est

- est perpendicularis. angulus igitur ABF<sup>a</sup> rectus est; sed et GFB est  
 b. 28. 1. rectus; ergo AB parallela est ipsi FG<sup>b</sup>. est autem AB subiecto plano  
 ad rectos angulos; et FG igitur eidem  
 c. 8. 11. plano ad rectos angulos erit<sup>c</sup>. at planum  
 ad planum rectum est, quando communi  
 planorum sectioni ad rectos angulos ductae  
 rectae lineae in uno planorum, reliquo pla-  
 d. 4. Def. 11. no ad rectos angulos sunt<sup>d</sup>; communi  
 vero planorum sectioni CE in uno plano  
 DE ad rectos angulos ducta FG, ostensa est subiecto plano ad rectos  
 esse angulos; ergo planum DE rectum est ad subiectum planum. si-  
 militer demonstrabuntur et omnia quae per AB transeunt plana subiecto  
 plano recta esse. Si igitur recta linea &c. Q. E. D.

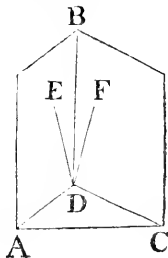


## PROP. XIX. THEOR.

**S**I duo plana se invicem secantia plano alicui sint ad  
 rectos angulos; et communis ipsorum sectio eidem  
 plano ad rectos angulos erit.

Duo enim plana se invicem secantia AB, BC subiecto plano sint ad  
 rectos angulos; communis autem ipsorum sectio sit  
 BD. Dico BD subiecto plano ad rectos angulos esse.

Non enim sit; et a puncto D ducatur in plano  
 quidem AB rectae lineae AD ad rectos angulos ipsa  
 DE. in plano autem BC ducatur ipsi CD ad rectos  
 angulos DF. et quoniam planum AB ad subiec-  
 tum planum rectum est, et communi ipsorum sec-  
 tionis AD ad rectos angulos in plano AB ducta est  
 DE, erit DE ad subiectum planum perpendicula-



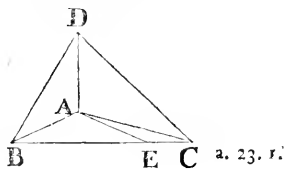
ris<sup>a</sup>. fimiliter oftendemus et DF perpendicularẽ effẽ ad fubjectum a. 4. Def. 11. planum. quare ab eodem puncto D fubjecto plano duæ rectæ lineæ ad rectos angulos conftitutæ funt ex eadem parte, quod fieri non potest<sup>b</sup>. non igitur fubjecto plano a puncto D ad rectos angulos conftituetur alia recta linea præter ipfam DB communem planorum AB, BC fectionem. Quare DB fubjecto plano est perpendicularis. Ergo fi duo plana &c. Q. E. D.

## PROP. XX. THEOR.

**S**I folidus angulus tribus angulis planis contineatur, duo quilibet reliquo majores funt, quomodocunque fumpti.

Solidus enim angulus ad A tribus angulis planis BAC, CAD, DAB contineatur. Dico angulorum BAC, CAD, DAB duos quoslibet reliquo majores effe, quomodocunque fumptos.

Si enim BAC, CAD, DAB anguli inter fe æquales funt, perfpicuum est duos quoslibet reliquo majores effe, quomodocunque fumptos. fin minus, fit angulus BAC non minor utrovis ex reliquis, major autem quam DAB; et ad rectam lineam AB et punctum in ipfa A, conftituatur angulo DAB<sup>a</sup>, in plano per BA, AC tranfeunte, æqualis angulus BAE; ponaturque ipfi AD æqualis AE; et per E ducta BEC fecet rectas lineas AB, AC in punctis B, C, et DB, DC jungantur. itaque quoniam DA est æqualis AE, communis autem AB, duæ DA, AB duabus EA, AB æquales funt, et angulus DAB æqualis est angulo BAE. bafis igitur DB bafi BE est æqualis<sup>b</sup>. et quoniam duæ BD, DC ipfa CB majores b. 4. 1. funt<sup>c</sup>, quarum DB æqualis ostensa est ipfi BE; erit reliqua DC quam c. 20. 1.

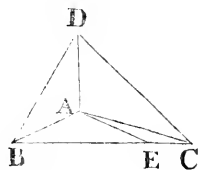


H h

reliqua

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

reliqua EC major. et quoniam DA est aequalis AE, communis autem AC et basis DC major basi EC; crit angulus DAC angulo EAC major<sup>d</sup>. et ex constructione est DAB angulus aequalis ipsi BAE; quare DAB, DAC anguli, angulo BAC majores sunt. est autem angulus BAC non minor utrovis ex ipsis DAB, DAC, quare BAC una cum altero ex ipsis, reliquo crit major. Si igitur solidus angulus &c. Q. E. D.

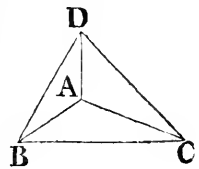


## PROP. XXI. THEOR.

**O**MNIS solidus angulus, minoribus quam quatuor rectis continetur.

Primum, Sit solidus angulus ad A, tribus planis angulis BAC, CAD, DAB contentus. Dico angulos BAC, CAD, DAB quatuor rectis esse minores.

Sumantur enim in unaquaque ipsarum AB, AC, AD quaevis puncta B, C, D, et BC, CD, DB jungantur. Quoniam igitur solidus angulus ad B, tribus planis angulis CBA, ABD, DBC continetur, duo quilibet reliquo majores sunt<sup>a</sup>; anguli igitur CBA, ABD, angulo DBC sunt majores. eadem ratione, et anguli quidem BCA, ACD majores sunt angulo DCB; anguli vero CDA, ADB majores angulo BDC. quare sex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB tribus angulis DBC, BCD, CLB sunt majores. sed tres anguli DBC, BCD, CDB, sunt aequales duobus rectis<sup>b</sup>. sex igitur anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB duobus rectis majores sunt. et quoniam singulorum triangulorum ABC,

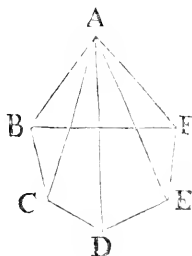


ABC, ACD, ADB tres anguli sunt aequales duobus rectis, erunt trium triangulorum novem anguli CBA, BAC, ACB, ACD, CDA, DAC, ADB, DBA, BAD aequales sex rectis. quorum sex anguli CBA, ACB, ACD, CDA, ADB, DBA duobus rectis sunt majores. reliqui igitur tres anguli BAC, CAD, DAB, qui solidum continent angulum, quatuor rectis minores sunt.

Sed sit solidus angulus ad A contentus quotcunque planis angulis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB; erunt hi omnes simul minores quatuor rectis.

Occurrat planum aliquod planis in quibus sunt anguli, sintque communes ejus sectiones cum hisce planis rectae BC, CD, DE, EF, FB. Quoniam igitur solidus angulus ad B, tribus planis angulis CBA, ABF, FBC continetur, duo quilibet reliquo majores sunt<sup>a</sup>; anguli igitur CBA, ABF, angulo FBC sunt majores. eadem ratione et duo anguli plani ad unumquodque ex punctis C, D, E, F, qui anguli sunt ad bases triangulorum quorum vertex communis est A, majores sunt reliquo angulo ad idem punctum, qui scilicet est angulus polygoni BCDEF. Omnes igitur anguli qui sunt ad bases triangulorum simul majores sunt omnibus polygoni angulis.

Quoniam vero omnes anguli triangulorum simul aequales sunt bis tot rectis quot sunt triangula<sup>b</sup>, hoc est quot sunt latera polygoni BCDEF; omnes autem anguli polygoni una cum quatuor rectis aequales etiam sunt bis tot rectis quot sunt polygoni latera<sup>c</sup>; c. 1. Cor. 32. 1. erunt omnes triangulorum anguli aequales omnibus angulis polygoni una cum quatuor rectis. Omnes vero anguli ad bases triangulorum majores ostensi sunt omnibus polygoni angulis. Ergo triangulorum reliqui anguli, quibus scilicet solidus angulus ad A continetur minores sunt



a. 20. 11.

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

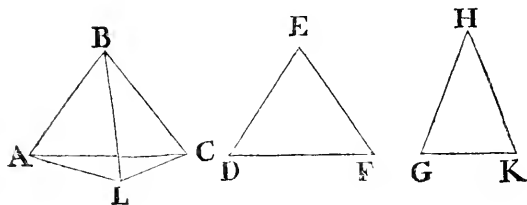
quatuor rectis. Omnis igitur solidus angulus minoribus quam quatuor rectis angulis planis continetur. Q. E. D.

## PROP. XXII. THEOR.

**S**I sint tres anguli plani quorum duo reliquo sunt majores, quomodocunque sumpti, contineant autem ipsos rectae lineae aequales; fieri potest, ut ex iis quae rectas aequales conjungunt, triangulum constituatur.

Sint tres anguli plani ABC, DEF, GHK, quorum duo reliquo sunt majores, quomodocunque sumpti; contineant autem ipsos aequales rectae lineae AB, BC, DE, EF, GH, HK, et AC, DF, GK jungantur. Dico fieri posse ut ex rectis ipsis AC, DF, GK aequalibus triangulum constituatur; hoc est duas reliquas majores esse quomodocunque sumptas.

Si quidem igitur anguli ad B, E, H sint aequales, et AC, DF, GK  
2. 4. 1. aequales erunt<sup>a</sup>, et duae reliquas majores. sin minus, sint inaequales



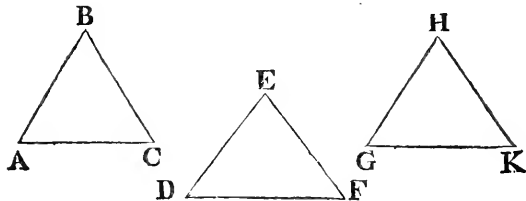
anguli ad B, E, H, et sit angulus ad B non minor utrovis ex ipsis ad  
2. 4. 1. E, H. non igitur minor est et recta AC utraque ex ipsis DF, GK<sup>b</sup>.  
et manifestum est ipsam AC unam cum altera ipsarum DF, GK, reliquam  
2. 23. 1. esse majorem. Dico et DF, GK ipsam AC majores esse. constituatur<sup>c</sup>  
ad rectam lineam AB et ad punctum in ea B, angulo GHK aequalis  
angulus

angulus  $ABL$ , et uni ipsarum  $AB$ ,  $BC$ ,  $DE$ ,  $EF$ ,  $GH$ ,  $HK$  ponatur aequalis  $BL$ , et  $AL$ ,  $LC$  jungantur. Quoniam igitur duae  $AB$ ,  $BL$  duabus  $GH$ ,  $HK$  aequales sunt, altera alteri, et angulos aequales continent, erit basis  $AL$  basi  $GK$  aequalis<sup>a</sup>. et quoniam anguli ad  $E$ ,  $H$ ,<sup>a. 4. 1.</sup> angulo  $ABC$  majores sunt, quorum angulus  $GHK$  est aequalis ipsi  $ABL$ ; erit reliquus qui ad  $E$ , angulo  $LBC$  major. et quoniam duae  $LB$ ,  $BC$  duabus  $DE$ ,  $EF$  aequales sunt, altera alteri, et angulus  $DEF$  angulo  $LBC$  major, basis  $DF$  basi  $LC$  major erit<sup>d</sup>. ostensa autem est d. 24. 1.  $GK$  aequalis  $AL$ ; ergo  $DF$ ,  $GK$ , ipsis  $AL$ ,  $LC$  sunt majores. sed  $AL$ ,  $LC$  majores sunt ipsa  $AC$ <sup>e</sup>; multo igitur  $DF$ ,  $GK$ , ipsa  $AC$  majores e. 20. 1. sunt. Quare rectarum linearum  $AC$ ,  $DF$ ,  $GK$  duae reliqua majores sunt, quomodocunque sumptae; ac propterea fieri potest<sup>f</sup> ut ex aequa-f. 22. 1. libus ipsis  $AC$ ,  $DF$ ,  $GK$  triangulum constituatur. Q. E. D.

## PROP. XXIII. PROB.

**E**X tribus datis angulis planis, quorum duo reliquo sunt majores, quomodocunque sumpti, solidum angulum constituere. oportet autem tres angulos quatuor rectis esse minores.

Sint dati tres anguli plani  $ABC$ ,  $DEF$ ,  $GHK$ , quorum duo re-

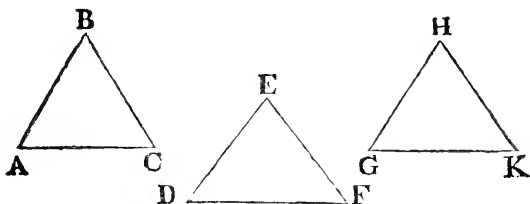


liquo sunt majores, quomodocunque sumpti, sintque tres anguli quatuor rectis

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

rectis minores. oportet ex aequalibus ipsis ABC, DEF, GHK solidum angulum constituere.

Abfcindantur aequales AB, BC, DE, EF, GH, HK; et AC, DF, GK jungantur. fieri igitur potest ut ex aequalibus ipsis AC, DF,

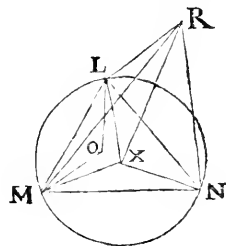


- a. 22. 11. GK constituatur triangulum<sup>a</sup>. Itaque constituatur<sup>b</sup> LMN, ita ut AC quidem sit aequalis LM, DF vero ipsi MN, et praeterea GK ipsi NL;  
 b. 22. 1.  
 c. 5. 4. et circa triangulum LMN circulus LMN describatur<sup>c</sup>; sumaturque ipfius centrum X, quod vel crit intra triangulum LMN, vel in uno ejus latere, vel extra.

Sit primum intra, et LX, MX, NX jungantur. Dico AB majorem esse LX. si enim non ita sit, vel AB erit aequalis LX, vel eâ minor; sit primum aequalis. Quoniam igitur AB est aequalis LX, atque est AB ipsi BC aequalis, et LX ipsi XM, duae AB, BC duabus LX, XM aequales erunt, altera alteri; et basis AC basi LM aequalis ponitur; quare angulus

- d. 8. 1. ABC angulo LXM est aequalis<sup>d</sup>. eadem ratione et angulus quidem DEF est aequalis angulo MXN, angulus vero GHK angulo NXL.

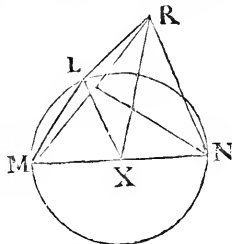
- tres igitur anguli ABC, DEF, GHK tribus LXM, MXN, NXL aequales sunt. sed tres LXM, MXN, NXL quatuor rectis sunt aequales<sup>e</sup>; ergo et tres ABC, DEF, GHK aequales erunt quatuor rectis. atqui ponuntur





ponuntur quatuor rectis minores; quod est absurdum. non igitur AB ipsi LX est aequalis. Dico praeterea neque AB minorem esse LX. si enim fieri potest, sit minor, et super rectam lineam LM ad partes ejus ad quas est centrum X constituatur triangulum LOM, cujus latera LO, OM aequalia sint ipsis AB, BC<sup>b</sup>; et quoniam basis LM basi AC est b. 22. 1. aequalis, erit angulus LOM aequalis angulo ABC<sup>d</sup>. ponitur autem recta d. 8. 1. AB, hoc est LO, minor ipsa LX; quare LO, MO cadent intra triangulum LXM, si enim congruerent ipsis LX, XM, vel caderent extra, aequales, vel majores essent ipsis LX, XM<sup>f</sup>. angulus igitur LOM, hoc f. 21. 1. est ABC, major est angulo LXM<sup>f</sup>. similiter ostendetur angulus DEF major angulo MXN, et angulus GHK major ipso NXL. tres igitur anguli ABC, DEF, GHK tribus LXM, MXN, NXL, hoc est quatuor rectis, sunt majores. anguli autem ABC, DEF, GHK ponuntur quatuor rectis minores; quod est absurdum. non igitur AB minor est quam LX. ostensum autem est neque esse aequalem. major igitur est AB quam LX.

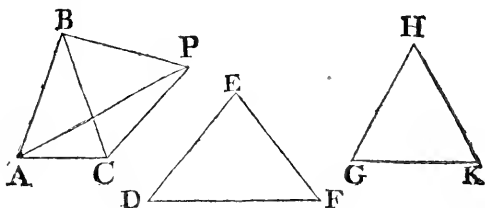
Sed sit centrum circuli in uno laterum trianguli, videlicet in MN, et sit X, atque XL jungatur. Dico rursus AB majorem esse LX. si enim non ita sit, vel AB est aequalis LX, vel ipsa minor. sit primum aequalis. duae igitur AB, BC, hoc est DE, EF duabus MX, XL, hoc est ipsi MN aequales sunt, sed MN ponitur aequalis DF; ergo DE, EF ipsi DF sunt aequales; quod fieri non potest\*. non igitur AB est aequalis LX. similiter neque minor; multo enim magis absurdum sequeretur. major igitur est AB ipsa LX.



\* 20. 1.

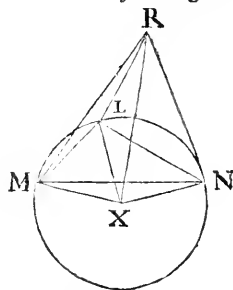
Sed sit centrum circuli X extra triangulum LMN, et LX, MX, NX jungantur. Dico et sic AB ipsa LX majorem esse. si enim non ita sit, vel

vel aequalis est, vel minor. sit primum aequalis, et omnino ut in primo casu ostendetur angulus quidem ABC aequalis angulo MXL, angulus vero GHK angulo LXN; totus igitur MXN est aequalis duobus ABC, GHK. sed ipsi ABC, GHK simul angulo DEF majores sunt; et angulus igitur MXN ipso DEF est major. quoniam vero duae DE, EF duabus MX, XN aequales sunt, et basis DF basi MN, erit MXN angulus angulo DEF aequalis<sup>d</sup>. ostensus autem est major; quod est ab-



surdum. non igitur AB est aequalis LX. Dico vero neque minorem esse AB ipsam LX. si enim fieri potest, sit minor; erit igitur, ut in primo casu ostensum, angulus quidem ABC angulo MXL major, angulus vero GHK major angulo LXN. constituatur ad rectam lineam BC, et ad punctum in ea B, angulo GHK aequalis angulus CBP, et ponatur BP aequalis ipsi HK, et jungantur CP, AP. et quoniam CB est aequalis GH, duae CB, BP aequales sunt duabus GH, HK, et aequales angulos continent; basis igitur CP basi GK sive LN est aequalis. in triangulis autem isoscelibus ABC, MXL quoniam angulus ABC major est angulo MXL, erit angulus MLX ad basim ma-

g. 32. 1. jor angulo ad basim ACB<sup>g</sup>. eadem ratione quoniam GHK, hoc est angulus CBP, major est angulo LXN, et angulus XLN major erit ipso BCP.



BCP. totus igitur MLN major est toto ACP. et quoniam duae ML, LN duabus AC, CP sunt aequales, et angulus MLN major angulo ACP, erit et basis MN basi AP major<sup>b</sup>. sed MN est aequalis DF; ergo et h. 24. 1. DF quam AP major erit. quoniam igitur duae DE, EF duabus AB, BP aequales sunt, altera alteri, et basis DF major basi AP, erit angulus DEF angulo ABP major<sup>b</sup>. aequalis autem est angulus ABP an-k. 25. 1. angulis ABC, CBP, hoc est angulis ABC, GHK; ergo DEF angulus angulis ABC, GHK major est; sed et minor; quod fieri non potest. non igitur AB minor est quam LX. ostensum autem est neque esse aequalem; major igitur est AB quam LX.

Constituatur a puncto X, circuli LMN plano ad rectos angulos XR<sup>l</sup>. 1. 12. 11. et quoniam in omnibus casibus AB ostensa est major LX, excessui quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX, ponatur aequale quadratum quod sit ex RX, et RL, RM, RN jungantur. quoniam igitur RX perpendicularis est ad planum LMN circuli, et ad unamquamque ipsarum LX, MX, NX erit perpendicularis<sup>m</sup>. et quoniam LX est ae-m. 3. D:f. 11. qualis XM, communis autem et ad rectos angulos XR, erit basis RL basi RM aequalis. eadem ratione et RN utriusque ipsarum RL, RM est aequalis. tres igitur rectae lineae RL, RM, RN inter se aequales sunt. et quoniam quadratum ab XR ponitur aequale excessui quo quadratum ex AB superat quadratum ex LX; erit quadratum ex AB quadratis ex LX, XR aequale. quadratis autem ex LX, XR aequale<sup>n</sup>. 47. 1. est quadratum ex RL; rectus enim angulus est LXR. ergo quadratum ex AB quadrato ex RL aequale erit; ideoque AB ipsi RL est aequalis. Sed ipsi quidem AB aequalis est unaquaeque ipsarum BC, DE, EF, GH, HK; ipsi vero RL aequalis utraque ipsarum RM, RN. unaquaeque igitur ipsarum AB, BC, DE, EF, GH, HK unicuique ipsarum RL, RM, RN est aequalis. et quoniam duae RL, RM duabus AB, BC aequales sunt, et basis LM est aequalis basi AC; erit an-

2. 8. 1. gulus LRM aequalis <sup>d</sup> angulo ABC. eadem ratione et angulus quidem MRN angulo DEF, angulus autem NRL angulo GHK est aequalis. Ex tribus igitur angulis planis LRM, MRN, NRL, qui aequales sunt tribus datis ABC, DEF, GHK solidus angulus constitutus est ad R. Q. E. F.

## PROP. A. THEOR.

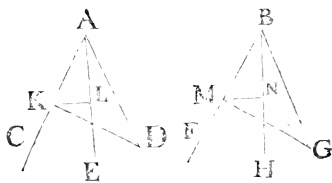
**S**I sint duo anguli solidi, quorum uterque continetur tribus angulis planis qui inter se aequales sunt, singuli singulis; plana in quibus sunt aequales anguli erunt ad se invicem similiter inclinata.

Sint duo anguli solidi ad puncta A, B; et contineatur angulus ad A tribus planis angulis CAD, CAE, EAD; angulus vero B contineatur tribus angulis planis FBG, FBH, HBG, quorum angulus quidem CAD angulo FBG est aequalis, angulus vero CAE angulo FBH, et EAD ipsi HBG. erunt plana in quibus sunt aequales anguli similiter ad se invicem inclinata.

Sumatur enim in recta linea AC punctum quodvis K, et a puncto K ad rectos angulos ipsi AC ducatur in plano quidem CAD recta KD, in plano vero CAE recta KL. est igitur angulus DKL inclinatio plani

2. 6. Def. 11. CAD ad ipsum CAE: in recta vero BF ipsi AK aequalis ponatur BM, et a puncto M ducantur in planis FEG, FBH rectae lineae MG, MN ad rectos angulos ipsi BF; erit igitur

angulus GMN inclinatio plani FBG ad ipsum FBH. jungantur LD, NG; et quoniam in triangulis KAD, MBG aequales sunt KAD, MBG

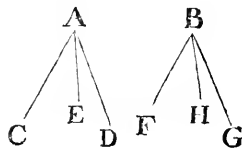


MBG anguli, ut et AKD, BMG, uterque enim est rectus; suntque latera AK, BM quae aequalibus angulis adjacent inter se aequalia; crit KD quidem aequalis ipsi MG, AD vero ipsi BG<sup>b</sup>. eadem ratione, in b. 26. 1. triangulis KAL, MBN, crit KL aequalis MN, AL vero ipsi BN. in triangulis autem LAD, NBG duae LA, AD duabus NB, BG aequales ostensae sunt, altera alteri, et aequales continent angulos; basis igitur LD basi NG est aequalis<sup>c</sup>. Denique in triangulis KLD, MNG, c. 4. 1. duae DK, KL duabus GM, MN sunt aequales, et est basis LD aequalis basi NG; angulus igitur DKL aequalis est angulo GMN<sup>d</sup>. est d. 8. 1. vero angulus DKL inclinatio plani CAD ad planum CAE, et angulus GMN inclinatio plani FBG ad ipsum FBH, quae propterea plana ad se invicem sunt similiter inclinata<sup>e</sup>. et eadem ratione reliqua plana in e. 7. Def. 11. quibus sunt aequales anguli ad se invicem similiter inclinata ostendentur. Si igitur sint duo anguli solidi &c. Q. E. D.

## PROP. B. THEOR.

**S**I sint duo anguli solidi, quorum uterque continetur tribus planis angulis qui inter se sunt aequales, singuli singulis, et similiter positi; erunt anguli solidi inter se aequales.

Sint anguli solidi ad puncta A, B; et contineatur angulus A tribus planis angulis CAD, CAE, EAD; angulus vero B contineatur tribus FBG, FBH, HBG; quorum CAD aequalis est ipsi FBG; CAE ipsi FBH; et EAD ipsi HBG. crit solidus angulus ad A solido angulo ad B aequalis.

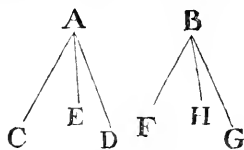


Applicato enim solido angulo ad A, solido angulo ad B; et pri-

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

mum applicato plano angulo CAD ipsi FBG, puncto quidem A posito in B, rectâ vero linea AC in ipsa BF; recta AD congruet rectae BG, quod angulus CAD aequalis sit angulo

2. A. 11. plani FBH ad planum FBG<sup>3</sup>, et congruit planum CAD plano FBG, congruet et



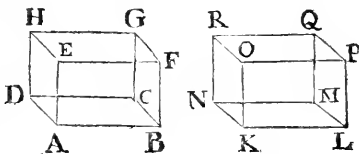
planum CAE plano FBH; ac propterea recta linea AE congruet ipsi BH, quia scilicet angulus CAE est aequalis angulo FBH. et ostensa est recta AD congruere ipsi BG; quare planum EAD congruit plano HBG. Ergo solidus angulus ad A congruit solido angulo ad B, et in-

ter se sunt aequales<sup>b</sup>. Q. E. D.

## PROP. C. THEOR.

**S**OLIDAE figurae quae continentur planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus, et similiter positis, quarumque nullus angulus solidus pluribus quam tribus planis angulis continetur, sunt inter se aequales et similes.

Sint AG, KQ figurae solidae quae continentur planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus, et similiter positis; sitque planum AC simile et aequale plano KM; planum AF ipsi KP; BG ipsi LQ; GD ipsi QN; DE ipsi NO; et FH denique simile et aequale ipsi PR. Erit figura solida AG aequalis et simi-



lis ipsi KQ.

Quoniam

Quoniam angulus solidus ad A continetur tribus angulis planis BAD, BAE, EAD, qui, singuli singulis, ex hypothefi aequales sunt planis angulis LKN, LKO, OKN quibus continetur angulus solidus ad K; erit angulus solidus ad A angulo folido ad K aequalis<sup>a</sup>. fimiliter a. B. II. reliqui figurarum anguli folidi inter fe aequales ostendentur. applicatâ igitur figurâ folida AG figurae folidae KQ, et primum applicatâ figura plana AC figurae planae KM, politâ fcilicet recta AB in ipfa KL, congruet figura AC figurae KM, quod ipfae fint aequales et fimiles. congruent igitur rectae AD, DC, CB ipfis KN, NM, ML, fingulae fingulis; et puncta A, D, C, B punctis K, N, M, L, angulus autem folidus ad A congruet angulo folido ad K<sup>a</sup>, quare et planum AF congruet plano KP, et figura AF figurae KP, quia sunt inter fe aequales et fimiles. congruent igitur rectae AE, EF, FB rectis KO, OP, PL; et puncta E, F ipfis O, P. fimiliter ostendetur figura AH congruere ipfi KR, recta DH rectae NR, et punctum H puncto R. et quoniam folidus angulus ad B aequalis est folido angulo ad L, fimiliter ostendetur figura BG congruere figurae LQ, et recta CG rectae MQ, punctumque G puncto Q. Quoniam igitur plana, et latera omnia figurae folidae AG congruunt planis et lateribus figurae folidae KQ, erit AG aequalis et fimilis ipfi KQ. Et fimiliter aliae figurae folidae quaecunque quae continentur planis fimilibus, multitudine et magnitudine aequalibus, et fimiliter politis, quarumque nullus angulus folidus continetur pluribus quam tribus angulis planis, aequales et fimiles inter fe ostendentur. Q. E. D.

## PROP. XXIV. THEOR.

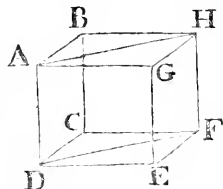
**S**I folidum sex parallelis planis contineatur, oppofita ipfius plana, parallelogramma erunt fimilia et aequalia.

Solidum

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

Solidum enim CDGH parallelis planis AC, GF; BG, CE; FB, AE, contineatur. Dico opposita ejus plana, parallelogramma esse similia et aequalia.

- Quoniam enim duo plana parallela BG, CE a plano AC secantur, a. 16. 11. communes ipsorum sectiones parallelae sunt<sup>1</sup>; ergo AB ipsi CD est parallela. rursus, quoniam duo plana BF, AE secantur a plano AC, communes ipsorum sectiones parallelae sunt<sup>2</sup>, parallela igitur est AD ipsi BC. ostensa autem est AB parallela CD; ergo AC parallelogrammum erit. similiter demonstrabimus, et unumquodque ipsorum CE, FG, GB, BF, AE parallelogrammum esse. jungantur AH, DF; et quoniam parallela est AB quidem ipsi DC, BH vero ipsi CF; erunt duae rectae lineae AB, BH sese tangentes duabus DC, CF sese tangentibus parallelis, et non in eodem plano; quare aequales angulos continebunt<sup>3</sup>. angulus igitur ABH angulo DCF est aequalis. et quoniam duae AB, BH duabus DC, CF aequales sunt, et angulus ABH aequalis angulo DCF, crit basis AH basi DF aequalis, et ABH triangulum aequale triangulo DCF<sup>4</sup>. et est ipsius quidem ABH trianguli duplum<sup>d</sup> BG parallelogrammum; ipsius vero DCF trianguli duplum parallelogrammum CE; crit igitur BG parallelogrammum aequale et simile parallelogrammo CE. similiter demonstrabimus, et AC parallelogrammum parallelogrammo GF, et parallelogrammum AE parallelogrammo BF aequale esse et simile. Si igitur solidum &c. Q. E. D.



## PROP. XXV. THEOR.

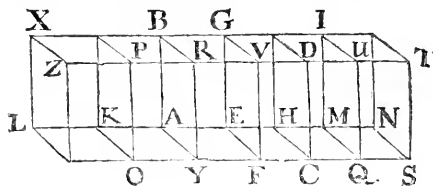
**S**I solidum parallelepipedum plano secetur oppositis planis parallelo, crit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Solidum .



Solidum enim parallelepipedum ABCD, plano EV secetur oppositis planis AR. HD parallelo. Dico ut basis AEFY ad basim EHCF, ita esse ABFV solidum ad solidum EGCD.

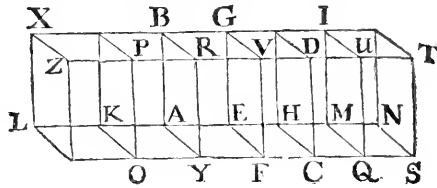
Producatur enim AH ex utraque parte; et ponantur ipsi quidem EH aequales quotcumque HM, MN; ipsi vero EA aequales quotcumque AK, KL, et compleantur parallelogramma LO, KY, HQ, MS, et solida LP, KR, HU, MT. quoniam igitur aequales inter se sunt LK, KA, AE rectae lineae, erunt et parallelogramma LO, KY, AF inter se aequalia<sup>a</sup>; itemque aequalia inter se parallelogramma KX, a. 36. 1. KB, AG, et adhuc parallelogramma LZ, KP, AR inter se aequalia<sup>b</sup>; opposita enim sunt. eadem ratione et parallelogramma<sup>a</sup> b. 24. 11. EC, HQ, MS sunt aequalia inter se; itemque parallelogramma



<sup>a</sup> HG, HI, IN inter se aequalia; et insuper parallelogramma<sup>b</sup> HD, MU, NT. tria igitur plana solidi LP aequalia et similia sunt tribus planis solidi KR, atque etiam solidi AV. sed tria tribus oppositis sunt aequalia et similia<sup>b</sup>, et nullus ex ipsorum angulis solidis continetur pluribus quam tribus angulis planis. Ergo tria solida LP, KR, AV inter se aequalia erunt<sup>c</sup>. eadem ratione et tria solida ED, HU, MT sunt aequalia inter se. quam multiplex igitur est basis LF ipsius AF basis, tam multiplex est et LV solidum solidi AV. eadem ratione quam multiplex est NF basis ipsius basis HF, tam multiplex est et solidum NV ipsius ED solidi. et si basis LF est aequalis basi NF, et solidum LV solidum

NV

c. c. 11. NV aequale erit<sup>c</sup>; et si basis LF superat NF basim, et solidum LV solidum NV superabit; et si minor, minus. quatuor igitur magnitudinibus existentibus, duabus scilicet basibus AF, FH, et duobus solidis AV, ED; basis quidem AF et AV solidi sumpta sunt utcumque aequae multiplicia, videlicet basis LF et solidum LV; basis vero FH et ED solidi



sumpta sunt alia utcumque aequae multiplicia, nempe basis FN et solidum NV. et demonstratum est si basis LF superat basim FN et LV solidum solidum NV superare; et si aequalis, aequale; et si minor, minus. est igitur ut AF basis ad basim FH, ita AV solidum ad solidum ED. Quare si solidum &c. Q. E. D.

PROP. XXVI. PROB.

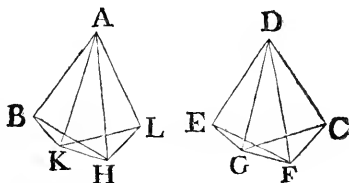
**A**D datam rectam lineam, et ad datum in ipsa punctum dato angulo solido tribus planis angulis contento, aequalem angulum solidum constituere.

Sit data quaedam recta linea AB, datum autem in ipsa punctum A, et datus solidus angulus ad D qui angulis planis EDC, EDF, FDC continetur. oportet ad datam rectam lineam AB, et ad datum in ipsa punctum A, dato angulo solido ad D aequalem angulum solidum constituere.

Sumatur enim in recta linea DF quodvis punctum F, a quo ad  
planum

planum per ED, DC transfrens ducatur perpendicularis FG<sup>a</sup>, et plano a. 11. 11.  
 in puncto G occurrat; jungaturque DG, et ad rectam lineam AB, et  
 ad datum in ipsa punctum A, angulo quidem EDC aequalis angulus  
 constituitur BAL; angulo autem EDG constituitur aequalis BAK<sup>b</sup>. b. 23. 1.  
 deinde ipsi DG ponatur aequalis AK, et a puncto K plano BAL ad  
 rectos angulos erigatur KH<sup>c</sup>; ponaturque ipsi GF aequalis KH, et c. 12. 11.  
 HA jungatur. Dico angulum solidum ad A qui angulis planis BAL,  
 BAH, HAL continetur, aequalem esse angulo solido ad D, planis an-  
 gulis EDC, EDF, FDC contento.

Sumantur enim aequales rectae lineae AB, DE, et jungantur HB,  
 KB, FE, GE. Quoniam igitur FG perpendicularis est ad subiectum  
 planum, et ad omnes rectas lineas  
 quae ipsam tangunt, et in subiecto  
 sunt plano, rectos faciet angulos<sup>d</sup>.  
 uterque igitur angulorum FGD,  
 FGE rectus est. eadem ratione, et  
 uterque ipsorum HKA, HKB est  
 rectus. et quoniam duae KA, AB



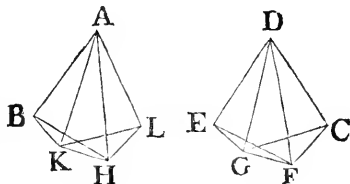
d. 3. Def. 11.

duabus GD, DE aequales sunt, altera alteri, et angulos aequales con-  
 tinent, erit basis BK basi EG aequalis<sup>e</sup>. est autem et KH aequalis GF,<sup>e. 4. 1.</sup>  
 atque angulos rectos continent; aequalis igitur erit HB ipsi FE<sup>e</sup>. rur-  
 sus, quoniam duae AK, KH duabus DG, GF aequales sunt, et rectos  
 continent angulos; erit basis AH basi DF aequalis; estque AB aequa-  
 lis DE; duae igitur HA, AB duabus FD, DE sunt aequales, et basis  
 HB est aequalis basi FE; ergo angulus BAH angulo EDF aequalis  
 erit<sup>f</sup>. eadem ratione, et angulus HAL angulo FDC est aequalis. quan- f. 8. 1.  
 doquidem si assumamus aequales AL, DC, et jungamus KL, HL, GC,  
 FC, quoniam totus angulus BAL est aequalis toti EDC, quorum BAK  
 ipsi EDG ponitur aequalis; erit reliquus KAL aequalis reliquo GDC.

K k

et

et quoniam duae KA, AL duabus GD, DC aequales sunt, et angulos e. 4. 1. aequales continent, basis KL basi GC aequalis erit<sup>e</sup>. est autem et KH aequalis GF, duae igitur LK, KH duabus CG, GF sunt aequales; angulosque rectos continent; ergo basis HL aequalis est basi FC. rursus, quoniam duae HA, AL duabus FD, DC aequales sunt, et basis HL aequalis basi FC, erit angulus HAL aequalis angulo



f. 8. 1. FDC<sup>f</sup>. quoniam igitur tres anguli plani BAL, BAH, HAL quibus continetur angulus solidus ad A, aequales sunt tribus angulis planis EDC, EDF, FDC quibus angulus solidus ad D continetur, singuli singulis, et similiter sunt positi; erit

g. B. 11. solidus angulus ad A angulo solido ad D aequalis<sup>g</sup>. Ad datam igitur rectam lineam, et ad datum in ipsa punctum dato angulo solido tribus planis angulis contento aequalis angulus solidus constitutus est. Q. E. F.

PROP. XXVII. PROB.

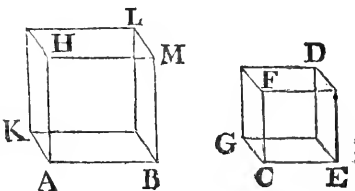
**A** Data recta linea dato solido parallelepipedo simile, et similiter positum solidum parallelepipedum describere.

Sit recta quidem linea AB, datum vero solidum parallelepipedum CD. oportet a data recta linea AB dato solido parallelepipedo CD simile, et similiter positum solidum parallelepipedum describere.

Constituatur enim ad rectam lineam AB, et ad datum in ipsa punctum A angulo solido ad C aequalis angulus<sup>a</sup> qui planis angulis BAK, KAH, HAB, contineatur, ita ut angulus quidem BAK aequalis sit angulo ECG, angulus vero KAH angulo GCF, et adhuc angulus HAB angulo

angulo FCE; et fiat ut EC ad CG, ita BA ad AK, ut autem GC ad CF, ita KA ad AH<sup>b</sup>; ergo ex aequali ut EC ad CF, ita erit BA ad b. 12. 6. AH<sup>c</sup>. compleatur parallelogrammum BH, et AL solidum. quoniam igitur

est ut EC ad CG, ita BA ad AK, circa aequales angulos ECG, BAK latera sunt proportionalia; simile igitur est parallelogrammum BK parallelogrammo EG. eadem quoque ratione parallelogrammum KH simile est paralle-



logrammo GF, et parallelogrammum HB parallelogrammo FE. tria igitur parallelogramma solidi AL tribus parallelogrammis solidi CD similia sunt; sed tria tribus oppositis sunt similia et aequalia<sup>d</sup>. et quoniam anguli plani quibus continentur solidorum anguli solidi, sunt inter se aequales et similiter positi, erunt et anguli solidi inter se aequales<sup>e</sup>. e. B. 11. Ergo AL solidum solido CD simile<sup>f</sup> erit. A data igitur recta linea AB f. 11. Def. 11. dato solido parallelepipedo CD, solidum parallelepipedum AL simile, et similiter positum descriptum est. Q. E. F.

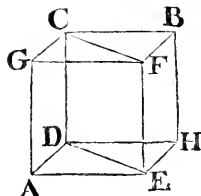
## PROP. XXVIII. THEOR.

**S**I solidum parallelepipedum plano secetur per diagonales oppositorum planorum, ab ipso plano bifariam secabitur.

Sit enim solidum parallelepipedum AB, et oppositorum planorum AH, GB diagonales sint DE, CF quae sc. ductae sunt inter aequales angulos parallelogrammorum AH, GB. et quoniam utraque CD, FE parallela est ipsi GA, non in eodem cum ipsa plano, erunt CD, FE inter se parallelae<sup>a</sup>; quare diagonales CF, DE sunt in plano in quo

b. 16. 11. sunt hae parallelae; et inter se parallelae erunt<sup>b</sup>. Dico igitur solidum AB a plano CDEF bifariam secari.

Quoniam enim aequale est CGF triangulum triangulo CBF, triangulum vero DAE triangulo DHE<sup>c</sup>; est autem et CA parallelogrammum parallelogrammo BE aequale<sup>d</sup>, oppositum enim est; et parallelogrammum GE parallelogrammo CH: erit prisma contentum duobus triangulis CGF, DAE, et tribus parallelogrammis CA, GE, EC aequale prismati quod continetur duobus triangulis CBF, DHE, et tribus parallelogrammis BE, CH, EC<sup>e</sup>; etenim planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus, et similiter positis continentur, et nullus ex ipsorum angulis solidis continetur pluribus quam tribus angulis planis. Ergo totum AB solidum a plano CDEF bifariam secatur. Q. E. D.

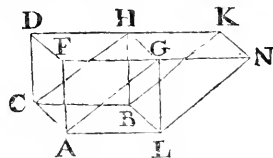


PROP. XXIX. THEOR.

**S**OLIDA parallelepipeda quae in eadem sunt basi, et eadem altitudine, quorum insistentes rectae sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt aequales.

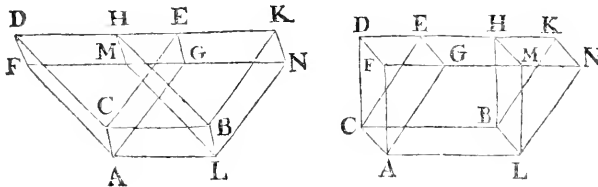
Vid. Fig. 2, 3. Sint enim in eadem basi AB solida parallelepipeda AH, AK, eadem altitudine, quorum insistentes rectae AF, AG, LM, LN; CD, CE, BH, BK sint in eisdem rectis lineis FN, DK. Dico solidum AH solido AK aequale esse.

Vid. Fig. 1. Primo habeant parallelogramma DG, HN basi AB opposita, latus commune HG. quoniam igitur solidum AH sectum est plano AGHC per diagonales



gonales AG, CH oppositorum planorum ALGF, CBHD, bifariam fecabitur AH a plano AGHC<sup>a</sup>. duplum igitur est solidum AH prismatis a. 28. 11. quod triangulis ALG, CBH continetur. eadem ratione, quoniam solidum AK factum est plano LGHB per diagonales LG, BH oppositorum planorum ALNG, CBKH, erit solidum AK duplum ejusdem prismatis quod triangulis ALG, CBH continetur. solidum igitur AH folido AK est aequale.

Non autem habeant parallelogramma basi opposita videlicet DM, EN latas commune. quoniam igitur parallelogrammum est utrumque ipsorum CH, CK, erit CB utriusque rectorum DH, EK aequalis<sup>b</sup>; ergo b. 34. 1. et DH est aequalis EK. communis addatur, aut auferatur HE; erit



igitur DE aequalis HK. quare et CDE triangulum triangulo BHK est aequale<sup>c</sup>. parallelogrammum autem DG est aequale parallelogrammo HN<sup>d</sup>. eadem ratione et AFG triangulum est aequale triangulo LMN. et est parallelogrammum quidem CF aequale parallelogrammo BM, parallelogrammum vero CG parallelogrammo BN<sup>e</sup>; opposita enim e. 24. 11. sunt. Ergo et prisma contentum duobus triangulis AFG, CDE, et tribus parallelogrammis AD, DG, GC est aequale<sup>f</sup> prismati quod duobus triangulis LMN, BHK et tribus parallelogrammis BM, MK, KL continetur. ablato igitur prismate LMN, BHK ex folido cujus basis est parallelogrammum AB, oppositum autem ipsi, FDKN; et ex eodem folido

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

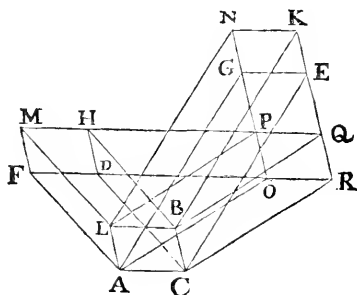
solido ablato prismate AFG, CDE; erit reliquum solidum, parallelepipedum sc. AH aequale reliquo solido, parallelepipedo sc. AK. solida igitur parallelepipeda &c. Q. E. D.

## PROP. XXX. THEOR.

**S**OLIDA parallelepipeda quae in eadem sunt basi, et eadem altitudine, quorum insistentes rectae non sunt in eisdem rectis lineis, inter se sunt aequalia.

Sint enim in eadem basi AB solida parallelepipeda CM, CN, et eadem altitudine, quorum insistentes rectae AF, AG, LM, LN, CD, CE, BH, BK, non sunt in eisdem rectis lineis. Dico solidum CM, solido CN aequale esse.

Producantur enim FD, MH et NG, KE, et conveniant inter se in punctis O, P, Q, R; et AO, LP, BQ, CR jungantur. quoniam



igitur planum LBHM parallelum est plano opposito ACDF, et planum quidem LBHM illud est in quo sunt parallelae rectae LB, MHPQ, in quo etiam est figura BLPQ; planum vero ACDF est illud in quo sunt parallelae AC, FDOR, in quo etiam est figura CAOR; erunt figurae BLPQ,



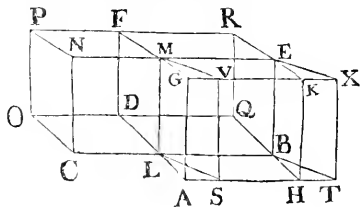
BLPQ, CAOR in planis inter se parallelis. similiter quoniam planum ALNG opposito plano CBKE parallelum est, et planum quidem ALNG illud est in quo sunt parallelae AL, OPGN, in quo etiam est figura ALPO; planum vero CBKE est illud in quo sunt parallelae CB, RQEK, in quo etiam est figura CBQR; erunt figurae ALPO, CBQR in planis inter se parallelis. et sunt plana ACBL, ORQP inter se parallela; solidum igitur CP est parallelepipedum. solidum autem CM cujus basis ACBL, et parallelogrammum ipsi oppositum FDHM, aequale est <sup>a</sup> solido CP cujus basis est parallelogrammum ACBL, et ei <sup>a</sup>. 29. 11. oppositum ORQP; in eadem enim sunt basi, et ipsorum insistentes rectae AF, AO, CD, CR; LM, LP, BH, BQ sunt in eisdem rectis lineis FR, MQ. sed solidum CP est aequale <sup>a</sup> solido CN, etenim in eadem sunt basi ACBL, et eorum insistentes rectae AO, AG, LP, LN; CR, CE, BQ, BK sunt in eisdem rectis lineis ON, RK. Ergo solidum CM, solido CN aequale erit. Solida igitur parallelepipeda &c. Q. E. D.

PROP. XXXI. THEOR.

**S**OLIDA parallelepipeda quae in aequalibus sunt basibus, et eadem altitudine, inter se sunt aequalia.

Sint in aequalibus basibus AB, CD solida parallelepipeda AE, CF, et eadem altitudine. Dico solidum AE solido CF aequale esse.

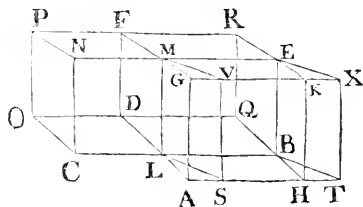
Sint primo insistentes rectae lineae ad rectos angulos basibus AB, CD. ponantur autem solida ita ut bases sint in eodem plano, et ut in directum sint latera



CL,

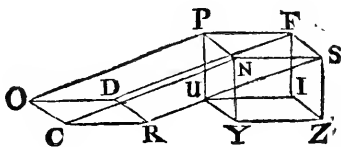
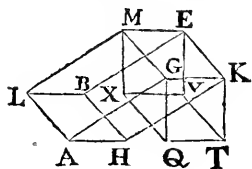
- CL, LB; recta igitur LM quae insitit puncto L communis erit solidis AE, CF<sup>a</sup>; reliquae autem insistentes rectae sint AG, HK, BE; DF, OP, CN. et primo fit angulus ALB aequalis angulo CLD; in directum igitur erunt AL, LD. producantur OD, HB et conveniant in Q, et compleatur solidum parallelepipedum LR cujus basis est parallelogrammum LQ, et LM una ex insistentibus rectis. quoniam igitur AB parallelogrammum parallelogrammo CD est aequale, erit ut basis AB ad basim LQ, ita basis CD ad eandem LQ<sup>b</sup>. et quoniam solidum parallelepipedum AR sectum est plano LMEB oppositis planis AK, DR parallelo, erit ut AB basis ad basim LQ, ita solidum AE ad solidum LR<sup>c</sup>. eadem ratione quoniam solidum parallelepipedum CR sectum est plano LF parallelo planis oppositis CP, BR, ut basis CD ad basim LQ, ita erit solidum CF ad solidum LR. sed ut basis AB ad basim LQ, ita ostensa fuit basis CD ad LQ basim. ut igitur solidum AE ad LR solidum, ita solidum CF ad solidum LR. est igitur solidum AE solido CF aequale<sup>d</sup>.

- Sed sint in aequalibus basibus SB, CD solida parallelepipeda SE, CF, et eadem altitudine, sintque rectae insistentes ad rectos angulos basibus; positisque basibus SB, CD in eodem plano, ita ut in directum sint CL, LB, non fit angulus SLB aequalis angulo CLD; erit solidum SE aequale solido CF. producantur DL, TS et conveniant in A, et per B ducatur ipsi DA parallela BH; productae vero HB, OD in Q conveniant; et compleantur solida AE, LR. solidum igitur AE cujus basis est LE parallelogrammum, et oppositum ipsi AK, aequale est solido SE cujus basis est LE et oppositum ipsi SX<sup>e</sup>; in eadem enim sunt basi LE, et eadem altitudine, et eorum insistentes rectae lineae videlicet



delicet LA, LS, BH, BT; MG, MV, EK, EX in eisdem sunt rectis lineis AT, GX. quoniam vero parallelogrammum AB aequale est ipsi SB<sup>f</sup>, etenim in eadem sunt basi LB, et in eisdem parallelis LB, AT; f. 35. 1. est autem basis SB aequale basi CD; erit basis AB basi CD aequalis. et est angulus ALB angulo CLD aequalis; erit igitur, ex prius ostensis, solidum AE aequale solido CF. solidum autem AE aequale ostensum est solido SE. Ergo et solidum SE solido CF est aequale.

Sed non sint insistentes rectae AG, HK, BE, LM; CN, RS, DF, OP ad rectos angulos ipsis AB, CD basibus. Dico rursus solidum AE aequale esse solido CF. ducantur <sup>g</sup> a punctis G, K, E, M; N, S, F, P; g. 11. 11. ad subiectum planum perpendiculares GQ, KT, EV, MX; NY, SZ, FI, PU; et plano in punctis Q, T, V, X; Y, Z, I, U, occurrant, et jungantur QT, TV, VX, XQ; YZ, ZI, IU, UY. Quoniam igitur



tur GQ, KT ad rectos sunt angulos eidem plano, erunt ipsae inter se parallelae<sup>h</sup>. et parallelae sunt MG, EK; plana igitur MQ, ET<sup>h. 6. 11.</sup> quorum unum transit per MG, GQ, et alterum per EK, KT quae ipsis parallelae sunt et non in eodem plano, sunt inter se parallela<sup>i</sup>. ea-i. 15. 11 dem ratione, et plana MV, GT inter se parallela sunt. solidum igitur QE est parallelepipedum. similiter ostendetur solidum YF parallelepipedum esse. est autem, ex praemissis, solidum EQ aequale solido FY, in aequalibus enim sunt basibus MK, PS, et eadem altitudine, et eorum rectae insistentes ad rectos angulos sunt basibus. sed EQ solidum solido AE est aequale<sup>k</sup>; solidum vero FY aequale est solido CF<sup>k</sup>. si-<sup>k. 29. aut</sup>  
<sup>30. 11.</sup>

L I

quidem

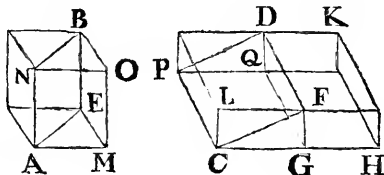
quidem in eadem sunt basi, et eadem altitudine. Ergo et solidum AE folido CF aequale erit. Solida igitur parallelepida &c. Q. E. D.

PROP. XXXII. THEOR.

**S**OLIDA parallelepida quae eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

Sint solida parallelepida AB, CD quae eandem altitudinem habeant. Dico inter se esse ut bases, hoc est ut AE basis ad basim CF, ita solidum AB ad CD solidum.

Applicetur enim ad rectam lineam FG parallelogrammo AE aequale FH, ita ut angulus FGH aequalis sit angulo LCG<sup>a</sup>; et compleatur solidum parallelepipedum GK cujus basis sit FH, et una ex rectis insistentibus sit FD.



a. Cor. 45. 1.

- b. 31. 11. solidum igitur AB folido GK est aequale<sup>b</sup>, in aequalibus enim sunt basibus AE, FH, et eadem altitudine. itaque quoniam solidum parallelepipedum CK plano DG secatur oppositis planis parallelo, erit ut HF a. 25. 11. basis ad basim FC, ita solidum HD ad DC solidum<sup>c</sup>. atque est basis quidem FH basi AE aequalis, solidum vero GK aequale folido AB. est igitur et ut AE basis ad CF, ita solidum AB ad solidum CD. Quare solida parallelepida &c. Q. E. D.

COR. Hinc prismata quorum bases sunt triangula, et quae eandem habent altitudinem, sunt inter se ut bases.

Habeant enim prismata quorum bases sunt triangula AEM, CFG, ipsisque opposita NBO, PDQ eandem altitudinem; et compleantur parallelogramma AE, CF, et solida parallelepida AB, CD, in quorum primo

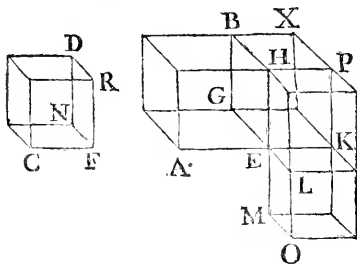
primo fit MO una ex rectis infistentibus, GQ vero in altero. Quoniam igitur solida parallelepipedata AB, CD eandem habent altitudinem, erunt ea inter se ut basis AE ad basim CF; quare prismata quae ipsorum sunt dimidia <sup>d</sup> sunt inter se ut basis AE ad CF basim, hoc est ut tri-d. 23. 11: angulum AEM ad triangulum CFG.

## PROP. XXXIII. THEOR.

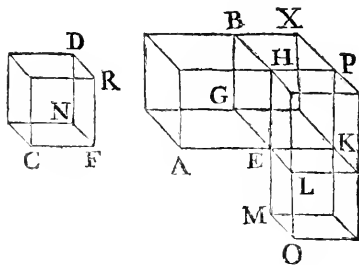
**S**IMILIA solida parallelepipedata inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

Sint similia solida parallelepipedata AB, CD; latus autem AE homologum fit lateri CF. Dico solidum AB ad CD solidum triplicatam rationem habere ejus quam habet AE ad CF.

Producantur enim EK, EL, EM in directum ipsis AE, GE, HE; et ipsi quidem CF aequalis ponatur EK, ipsi vero FN aequalis EL; et adhuc ipsi FR aequalis EM; et KL parallelogrammum, et KO solidum compleantur. quoniam igitur duae KE, EL duabus CF, FN aequales sunt; sed et angulus KEL angulo CFN est aequalis, quia et angulus AEG ipsi CFN aequalis est ob similitudinem solidorum AB, CD; erit et KL parallelogrammum simile et aequale parallelogrammo CN. eadem ratione et parallelogrammum MK aequale est et simile parallelogrammo CR, et adhuc parallelogrammum OE ipsi FD parallelogrammo. tria igitur parallelogramma solidi KO tribus paral-



- leogrammis solidi CD aequalia et similia sunt. sed tria tribus op-  
 a. 24. 11. positis aequalia sunt et similia<sup>a</sup>. solidum igitur KO aequale est et si-  
 b. c. 11. mile solido CD<sup>b</sup>. compleatur GK parallelogrammum, et a basibus qui-  
 dem GK, KL parallelogrammis, altitudine vero eadem cum ipso AB, fo-  
 lida compleantur EX, LP ita scilicet ut recta EH sit una ex earum rectis  
 insistentibus. et quoniam ob similitudinem solidorum AB, CD, et per-  
 mutando, est ut AE ad CF, ita EG ad FN, et EH ad FR; aequa-  
 lis autem FC ipsi EK, et FN ipsi EL, et FR ipsi EM; erit igitur ut  
 AE ad EK, ita EG ad EL, et HE ad EM. sed ut AE quidem ad  
 c. 1. 6. EK, ita<sup>c</sup> AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK; ut au-  
 tem GE ad EL, ita GK ad KL; et ut HE ad EM, ita PE ad KM.  
 et ut igitur AG parallelogrammum ad parallelogrammum GK, ita GK  
 ad KL, et PE ad KM. sed ut  
 AG quidem ad GK, ita AB foli-  
 dum ad solidum EX<sup>d</sup>; ut au-  
 tem GK ad KL, ita solidum EX  
 ad PL solidum; et ut PE ad  
 KM, ita PL solidum ad solidum  
 KO. et ut igitur solidum AB  
 ad solidum EX, ita EX ad PL,  
 et PL ad KO. si autem sint



quatuor magnitudines deinceps proportionales, prima ad quartam tripli-  
 catam rationem habere dicitur ejus quam habet ad secundam. ergo et  
 AB solidum ad solidum KO triplicatam habet rationem ejus, quam AB  
 ad EX. sed ut AB ad EX, ita AG parallelogrammum ad parallelo-  
 grammum GK, et AE recta linea ad ipsam EK. quare et AB solidum  
 ad solidum KO triplicatam rationem habebit ejus, quam AE habet ad  
 EK. aequale autem est solidum KO solido CD, et recta linea EK rec-  
 tae CF est aequalis. Ergo et AB solidum ad solidum CD triplicatam ha-  
 bet

bet rationem ejus, quam ipsius latus homologum AE habet ad homologum latus CF. Q. E. D.

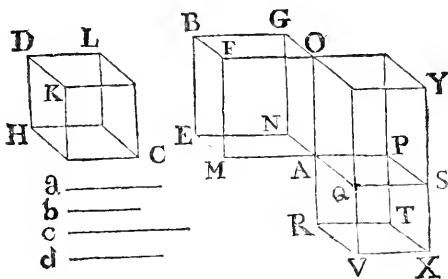
COR. Ex hoc manifestum est, si quatuor rectae lineae proportionales fuerint, ut prima ad quartam, ita esse solidum parallelepipedum quod sit à prima ad solidum quod à secunda, simile et similiter descriptum; quoniam et prima ad quartam triplicatam rationem habet ejus quam prima ad secundam<sup>e</sup>.

e. 11. Def. 5.

PROP. D. THEOR.

**S**OLIDA parallelepipeda quae continentur parallelogrammis quae inter se sunt aequiangula, singula singulis, hoc est quorum anguli solidi sunt inter se aequales; habent rationem inter se eandem ei quae composita est ex laterum rationibus.

Sint solida parallelepipeda AB, CD, quorum AB continetur parallelogrammis AE, AF, AG, quae aequiangula sunt, singula singulis, pa-

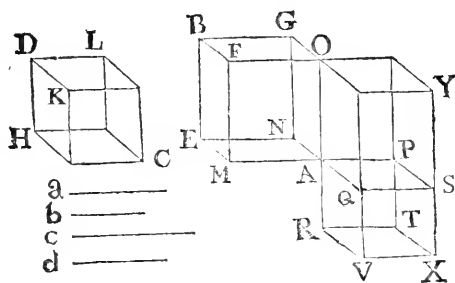


rallelogrammis CH, CK, CL quibus continetur solidum CD. erit ratio quam habet solidum AB ad solidum CD eadem ei quae composita est

ex

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

- ex rationibus laterum AM ad DL, AN ad DK, et AO ad DH. producantur enim MA, NA, OA ad P, Q, R, ita ut AP aequalis sit ipsi DL, AQ ipsi DK, et AR ipsi DH; et compleatur solidum parallelepipedum AX contentum sc. parallelogrammis AS, AT, AV ipsi CH, CK, CL similibus et aequalibus, singula singulis. solidum igitur AX
- a. c. 11. folido CD est aequale<sup>a</sup>. compleatur etiam solidum AY cujus basis est AS, una vero ex rectis insistentibus est AO. exponatur autem recta quaevis a, et ut MA ad AP, ita fiat a ad rectam b; ut vero NA ad AQ, ita fiat b ad c; et ut OA ad AR, ita fiat c ad d. quoniam igi-



- tur AE parallelogrammum acuiangulum est ipsi AS, erit AE ad AS, ut recta a ad ipsam c; hoc enim in 23. 6. ostensum est. solida vero AB, AY quae inter plana parallela BOY, EAS constituuntur, eadem sunt altitudine. est igitur solidum AB ad solidum AY, ut basis AE ad basim AS, hoc est ut recta a ad rectam c. solidum vero AY est ad solidum AX, ut basis OQ ad basim QR, hoc est ut recta OA ad ipsam AR, hoc est ut recta c ad ipsam d. quoniam igitur solidum AB est ad solidum AY, ut recta a ad rectam c; ut vero solidum AY ad solidum AX, ita est recta c ad ipsam d; erit ex aequali solidum AB ad solidum AX five CD, ut recta a ad rectam d. ratio autem a ad d composita



composita dicitur <sup>d</sup> ex rationibus a ad b, b ad c, et c ad d, quae eae-d. A. Def. 5. dem sunt, singulae singulis, rationibus laterum MA ad AP, NA ad AQ, et OA ad AR. latera autem AP, AQ, AR, aequalia sunt lateribus DL, DK, DH, singula singulis. Ergo solidum AB habet ad solidum CD rationem eandem ei quae composita est ex rationibus laterum AM ad DL, AN ad DK, et AO ad DH. Q. E. D.

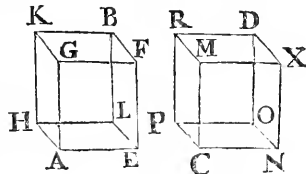
## PROP. XXXIV. THEOR.

**A**EQUALIUM solidorum parallelepipedorum bases sunt reciproce proportionales altitudinibus; et quorum solidorum parallelepipedorum bases sunt reciproce proportionales altitudinibus, ea inter se sunt aequalia.

Sint aequalia solida parallelepipeda AB, CD; dico ipsorum bases esse reciproce proportionales altitudinibus; hoc est ut EH basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem.

Sint enim primum insistentes AG, EF, LB, HK; CM, NX, OD, PR ad rectos angulos basibus ipsorum. Dico ut EH basis ad basim NP, ita esse CM ad AG. si igitur basis EH basi NP sit aequalis, quoniam et AB solidum aequale est solido CD, erit et CM aequalis ipsi AG. si enim basibus EH, NP aequalibus existentibus non sint AG, CM altitudines aequales, neque AB solidum solido CD aequale erit. ponitur autem aequale. non igitur inaequalis est altitudo CM altitudini AG; igitur est aequalis; ac propterea ut EH basis ad basim NP, ita erit CM ad AG.

At vero non sit basis EH aequalis basi NP, sed EH sit major. est autem AB solidum solido CD aequale; ergo major est CM ipsa AG;



## EUCLIDIS ELEMENTORUM

AG; si enim non, neque rursus forent solida AB, CD aequalia; ponuntur autem aequalia. itaque ponatur CT aequalis ipsi AG, et a basi quidem NP, altitudine autem CT solidum parallelepipedum CV compleatur. Quoniam igitur solidum AB solido CD est aequale, erit ut AB solidum ad solidum CV, ita CD

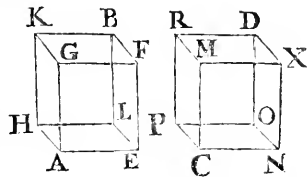
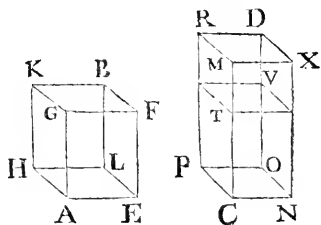
- a. 7. 5. solidum ad solidum CV<sup>a</sup>. sed ut AB solidum ad solidum CV, ita b. 32. 11. sis EH ad NP basim<sup>b</sup>; aequae alta enim sunt AB, CV solida; ut autem solidum CD ad ipsum CV, ita MP b. 25. 11. sis ad basim PT<sup>c</sup>, et recta MC ad d. 1. 6. ipsam CT<sup>d</sup>; et igitur ut basis EH

ad NP basim, ita MC ad CT. est autem CT aequalis AG; ergo et ut EH basis ad basim NP, ita MC ad AG. quare solidorum parallelepipedorum AB, CD bases sunt reciproce proportionales altitudinibus.

Rursus solidorum parallelepipedorum AB, CD bases sint reciproce proportionales altitudinibus; sitque ut EH basis ad basim NP, ita solidi CD altitudo ad altitudinem solidi AB; dico solidum AB solido CD aequale esse. sint enim rursus insistentes ad rectos angulos basibus. et siquidem basis EH sit aequalis basi NP, estque ut EH basis ad basim NP, ita alti-

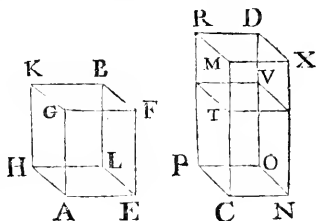
- tudo solidi CD ad solidi AB altitudinem; erit solidi CD altitudo ad e. A. 5. titudini solidi AB aequalis<sup>e</sup>. solida autem parallelepipeda, quae sunt in f. 31. 11. aequalibus basibus et eadem altitudine inter se aequalia sunt<sup>f</sup>; ergo solidum AB solido CD est aequale.

Sed non sit EH basis aequalis basi NP, et sit EH major. quoniam igitur



igitur est ut basis EH ad basim NP, ita CM altitudo solidi CD ad AG  
 altitudinem solidi AB; erit CM major e ipsa AG. ponatur rursus e. A. 5.

ipsi AG aequalis CT, et similiter solidum CV compleatur. itaque quoniam est ut EH basis ad basim NP, ita CM ad ipsam AG; aequalis autem est AG ipsi CT, erit ut basis EH ad NP basim, ita MC ad CT. sed ut basis EH ad NP basim, ita<sup>b</sup> AB solidum ad solidum CV; aeque

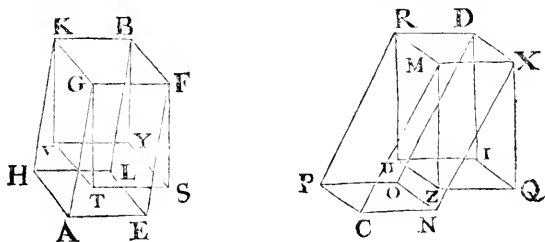


b. 32. 11.

alta enim sunt solida AB, CV; ut autem MC ad CT, ita et MP basis ad basim PT, et solidum CD ad solidum CV<sup>c</sup>. et igitur ut solidum e. 25. 11.

AB ad solidum CV, ita CD solidum ad solidum CV. utrumque igitur solidorum AB, CD ad ipsum CV eandem rationem habet; solidum igitur AB solido CD est aequale. Q. E. D.

Non sint autem stantes FE, BL, GA, KH; XN, DO, MC, RP ad rectos angulos basibus solidorum; et a punctis F, B, K, G; X, D, R, M ad plana basium EH, NP ducantur perpendiculares, quae planis

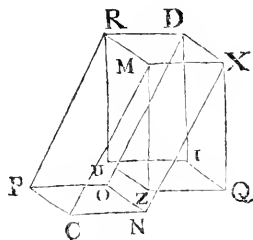
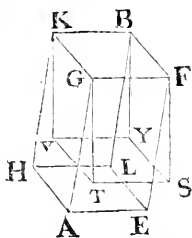


in punctis S, Y, V, T; Q, I, U, Z occurrant, et compleantur solida FV, XU, quae parallelepipeda erunt, ut in casu ultimo Prop. 31. hujus ostensum fuit. Dico et sic aequalibus existentibus solidis AB, CD, ba-

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

fes esse reciproce proportionales altitudinibus, sc. ut EH basis ad basim NP, ita esse altitudinem solidi CD ad solidi AB altitudinem. Quoniam enim solidum AB solido CD est aequale, solido autem AB aequale est solidum BT<sup>g</sup>, in eadem namque sunt basi FK, et eadem altitudine; et solidum DC est aequale solido DZ<sup>g</sup>, in eadem enim rursus sunt basi XR, et eadem altitudine; erit et solidum BT solido DZ aequale. aequalium autem solidorum parallelepipedorum, quorum insistentes basibus ipsorum sunt ad rectos angulos, bases sunt reciproce proportionales altitudinibus, ut ostensum fuit. est igitur ut basis FK ad basim XR, ita solidi DZ altitudo ad altitudinem solidi BT. atque est basis quidem FK

g. 29. aut  
30. 11.



basi EH aequalis, basis vero XR aequalis basi NP. quare ut EH basis ad basim NP, ita est altitudo solidi DZ ad solidi BT altitudinem. eadem autem sunt altitudines solidorum DZ, DC, ut et solidorum BT, BA. est igitur ut EH basis ad basim NP, ita solidi DC altitudo ad altitudinem solidi BA. Ergo solidorum parallelepipedorum AB, CD bases sunt reciproce proportionales altitudinibus.

Rursus, solidorum parallelepipedorum AB, CD bases sint reciproce proportionales altitudinibus, sitque ut EH basis ad basim NP, ita solidi CD altitudo ad altitudinem solidi AB. Dico solidum AB solido CD aequale esse. Iisdem namque constructis, quoniam ut EH basis ad basim NP, ita solidi CD altitudo ad altitudinem solidi AB; et basis quidem

dem  $EH$  est aequalis basi  $FK$ ;  $NP$  vero ipsi  $XR$ ; erit ut  $FK$  basis ad basim  $XR$ , ita altitudo solidi  $CD$  ad solidi  $AB$  altitudinem. eadem autem sunt altitudines solidorum  $AB$ ,  $BT$ , et ipsorum  $CD$ ,  $DZ$ ; est igitur ut  $FK$  basis ad basim  $XR$ , ita solidi  $DZ$  altitudo ad altitudinem solidi  $BT$ . quare solidorum  $BT$ ,  $DZ$  parallelepipedorum bases sunt reciproce proportionales altitudinibus; ipsorum autem insistentes sunt ad rectos angulos basibus; ergo, ut prius ostensum,  $BT$  solidum solido  $DZ$  est aequale. sed solidum quidem  $BT$  aequale  $\S$  est solido  $BA$ , fo-<sup>g. 29. aut</sup>  
lidum vero  $DZ$  est aequale solido  $\S$   $DC$ , siquidem in iisdem sunt basibus,<sup>30. 11.</sup> et eadem altitudine. Ergo et solidum  $AB$  solido  $CD$  est aequale. Q. E. D.

## PROP. XXXV. THEOR.

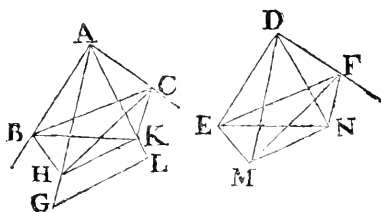
**S**I sint duo anguli plani aequales, et in ipsorum verticibus sublimes rectae lineae insistant, quae cum rectis lineis a principio positis angulos contineant aequales, alterum alteri; in sublimibus autem sumantur quaevis puncta, atque ab ipsis ad plana in quibus sunt anguli, perpendicularares ducantur; et a punctis quae a perpendicularibus fiunt in planis, ad primos angulos jungantur rectae lineae; haec cum sublimibus aequales angulos continebunt.

Sint duo anguli plani aequales  $BAC$ ,  $EDF$ ; et a punctis  $A$ ,  $D$  sublimes rectae lineae  $AG$ ,  $DM$  constituentur, quae cum rectis lineis a principio positis aequales angulos contineant, alterum alteri; angulum quidem  $GAB$  aequalem angulo  $MDE$ , angulum vero  $GAC$  angulo  $MDF$  aequalem; et sumantur in ipsis  $AG$ ,  $DM$  quaevis puncta  $G$ ,  $M$ , a quibus ad plana per  $BAC$ ,  $EDF$  ducantur perpendicularares  $GL$ ,  $MN$

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

occurrentes planis in punctis L, N; et LA, ND jungantur. Dico angulum GAL angulo MDN aequalem esse.

- Ponatur ipsi DM aequalis AH, et per H ipsi GL parallela ducatur HK. est autem GL perpendicularis ad planum BAC; ergo et HK a. 8. 11. ad planum BAC perpendicularis erit<sup>a</sup>. ducantur a punctis K, N ad rectas lineas AB, AC, DE, DF perpendiculares KB, KC, NE, NF; et HB, BC, ME, EF jungantur. Quoniam igitur HK ad rectos angulos est plano BAC, erit et planum HBK quod per ipsam HK tran- b. 18. 11. sit ad rectos angulos plano BAC<sup>b</sup>; ducta autem est in plano BAC recta



- AB ipsi BK planorum communi sectione ad rectos angulos; quare AB c. 4. Def. 11. perpendicularis est ad planum HBK<sup>c</sup>, et ad omnes rectas lineas quae d. 3. Def. 11. in eo plano ipsam tangunt rectos faciet angulos<sup>d</sup>. tangit autem ipsam recta BH, in eo existens plano; rectus igitur est angulus ABH. eadem ratione et angulus DEM est rectus; ergo angulus ABH ipsi DEM est aequalis. est autem et HAB angulus aequalis angulo MDE. duo igitur triangula sunt HAB, MDE duos angulos duobus angulis aequales habentia, alterum alteri, et unum latus uni lateri aequale, quod uni aequalium angulorum subtenditur, videlicet HA ipsi DM; ergo et reli- e. 26. 1. qua latera reliquis lateribus aequalia habebunt, alterum alteri<sup>e</sup>. quare

AB

AB est aequalis DE. similiter, junctis HC, MF demonstrabimus et AC ipsi DF aequalem esse. Quoniam igitur AB quidem est aequalis DE, AC vero ipsi DF, erunt duae BA, AC duabus ED, DF aequales; sed et angulus BAC angulo EDF est aequalis; basis igitur BC basi EF, et reliqui anguli reliquis angulis aequales sunt<sup>f</sup>. ergo angulus f. 4. 1. ABC angulo DEF est aequalis. est autem et rectus ABK aequalis recto DEN, quare et reliquus CBK reliquo FEN est aequalis. eadem ratione, et BCK angulus est aequalis angulo EFN. itaque duo sunt triangula BCK, EFN duos angulos duobus angulis aequales habentia, alterum alteri, et unum latus uni lateri aequale, quod est ad aequales angulos, videlicet BC ipsi EF; ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia e habebunt. aequalis igitur est BK ipsi EN. est autem et AB e. 26. 1. ipsi DE aequalis; quare duae AB, BK duabus DE, EN aequales sunt; et rectos continent angulos. basis igitur AK est aequalis basi DN. et cum AH sit aequalis DM, erit et quod sit ex AH quadratum quadrato ex DM aequale. sed quadrato ex AH aequalia s sunt quadrata ex AK, g. 47. 1. KH; etenim rectus est angulus AKH. quadrato autem ex DM aequalia s sunt ex DN, NM quadrata, quia angulus DNM est rectus. quadrata igitur ex AK, KH quadratis ex DN, NM sunt aequalia, quorum quadratum ex AK aequale est quadrato ex DN. ergo reliquum ex KH quadratum reliquo quadrato ex NM est aequale; et ideo recta linea HK ipsi MN aequalis. et quoniam duae HA, AK duabus MD, DN aequales sunt, altera alteri, et basis HK basi MN ostensa est aequalis, angulus HAK angulo MDN aequalis erit<sup>h</sup>. Q. E. D. h. 3. 1.

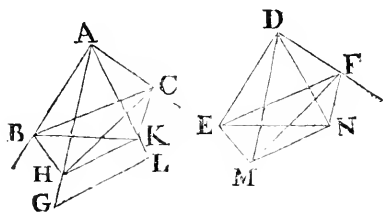
COR. Ex hoc manifestum est, si sint duo anguli plani aequales, ab ipsis autem constituentur sublimes rectae lineae aequales, quae cum rectis lineis a principio positis aequales contineant angulos, alterum alteri, perpendiculares quae ab ipsis ad plana in quibus sunt primi anguli ducuntur, inter se aequales esse.

Corollarii

Corollarîi alia Demonstratio.

Sint duo anguli plani BAC, EDF inter se aequales, et rectae sublimes et aequales AH, DM, cum ipsis BA, AC, et ED, DF aequales contineant angulos, alterum alteri, angulum scilicet HAB angulo MDE, et angulum HAC angulo MDF aequalem; et ad plana BAC, EDF ducantur perpendiculares HK, MN; erit HK ipsi MN aequalis.

Quoniam enim angulus solidus ad A contentus est tribus angulis planis BAC, BAH, HAC qui, singuli singulis, sunt aequales tribus an-



gulis planis EDF, EDM, MDF quibus continetur angulus solidus ad D; erunt anguli solidi ad A et D inter se aequales, et sibi mutuo congruent; scilicet si planus angulus BAC applicetur plano angulo EDF, congruet recta AH rectae DM, ut ostensum fuit in Prop. B. hujus Libri. et quoniam AH aequalis est ipsi DM, punctum H congruet puncto  
 i. 13. 11. M. quare perpendicularis HK ad planum BAC congruet perpendiculari MN ad planum EDF, quia haec plana sibi mutuo congruunt. aequalis igitur est HK rectae MN. Q. E. D.

PROP. XXXVI.



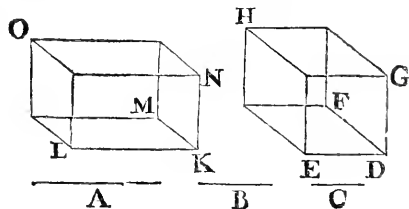
## PROP. XXXVI. THEOR.

**S**I tres rectae lineae proportionales sint, solidum parallelepipedum quod a tribus fit, aequale est solido parallelepipedo quod fit a media, aequilatero quidem, cujusque unus angulus solidus continetur tribus angulis planis, aequalibus planis angulis quibus unus solidus angulus antedicti solidi continetur, singuli singulis.

Sint tres rectae lineae proportionales  $A, B, C$ , fit nempe  $A$  ad  $B$ , ut  $B$  ad  $C$ . Dico solidum quod fit ex ipsis  $A, B, C$ , aequale esse solido quod fit ex  $B$ , aequilatero quidem, aequiangulo autem antedicto.

Exponatur solidus angulus ad  $D$  contentus tribus planis angulis  $EDF, FDG, GDE$ ; et ipsi quidem  $B$  ponatur aequalis unaquaeque ipsarum  $ED, DF, DG$ , et solidum parallelepipedum  $DH$  compleatur.

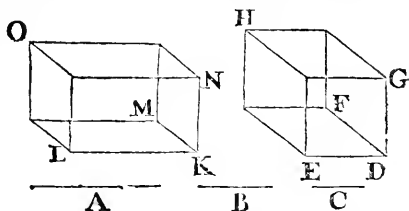
ipsi vero  $A$  ponatur aequalis recta  $LK$ , et ad rectam lineam  $LK$ , et ad punctum in ipsa  $K$ , constituatur <sup>a</sup> angulus solidus contentus planis angulis  $LKM, MKN, NKL$ , ipsis  $EDF, FDG, GDE$



a. 26. 11.

aequalibus singuli singulis; et ponatur ipsi quidem  $B$  aequalis recta  $KN$ , ipsi vero  $C$  aequalis  $KM$ ; et compleatur solidum parallelepipedum  $KO$ . Quoniam igitur est ut  $A$  ad  $B$ , ita  $B$  ad  $C$ , aequalis autem est  $A$  ipsi  $LK$ , et  $B$  utrique ipsarum  $DE, DF$ , et  $C$  ipsi  $KM$ ; erit ut  $LK$  ad  $ED$ , ita  $DF$  ad  $KM$ . igitur circum aequales angulos latera sunt reciproce proportionalia; ergo parallelogrammum  $LM$  parallelogrammo  $EF$  est aequale<sup>b</sup>. et quoniam duo anguli plani aequales sunt  $EDF, b. 14. c$   
 $LKM,$

LKM, et in ipsis sublimes rectae constituuntur DG, KN aequales inter se, et cum rectis lineis a principio positis aequales continentes angulos, alterum alteri; erunt perpendiculares quae a punctis G, N ad plana EDF, LKM ducuntur, inter se aequales<sup>c</sup>. Ergo solida KO, DH eadem sunt altitudine, quae vero in aequalibus basi-  
 bus sunt solida parallelepipeda, et eadem altitudine, inter se sunt aequa<sup>d</sup>. Ergo solidum KO aequale est solido DH. atque est solidum quidem KO quod fit a tribus A, B, C; solidum vero DH quod fit ex B. si igitur tres rectae lineae &c. Q, E, D.



## PROP. XXXVII. THEOR.

**S**I quatuor rectae lineae proportionales sint; et quae ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia et similiter descripta proportionalia erunt. et si qui ab ipsis fiunt solida parallelepipeda similia et similiter descripta proportionalia sint; et ipsae rectae lineae proportionales erunt.

Sint quatuor rectae lineae proportionales AB, CD, EF, GH, sit sc. ut AB ad CD, ita EF ad GH; et describantur ab ipsis similia et similiter posita solida parallelepipeda AK, CL, EM, GN. Dico ut AK ad CL, ita esse EM ad GN.

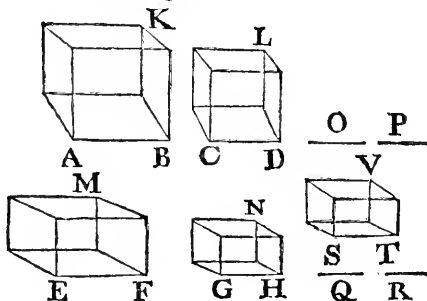
2. 11. 6. Fiant enim deinceps proportionales<sup>a</sup> AB, CD, O, P; ut et EF, GH, Q, R. Quoniam igitur est ut AB ad CD, ita EF ad GH; erit  
 1. 11. 5. et CD ad O, ut GH ad Q; et O ad P, ut Q ad R<sup>b</sup>; ergo ex ac-  
 c. 22. 5. quali, est AB ad P, ut EF ad R<sup>c</sup>. sed ut AB ad P, ita est solidum

AK

AK ad solidum CL<sup>d</sup>; et ut EF ad R, ita est solidum EM ad solidum GN<sup>d</sup>. ut igitur<sup>b</sup> solidum AK ad solidum CL, ita est solidum EM ad GN solidum. *d. Cor. 33. 11. b. 11. 5.*

Sed fit ut solidum AK ad solidum CL, ita EM solidum ad solidum GN. Dico ut recta linea AB ad rectam CD, ita esse rectam EF ad ipsam GH.

Fiat enim ut AB ad CD, ita EF ad ST, et ab ipsa ST describatur<sup>c</sup> solidum parallelepipedum SV simile, et similiter positum alterutri ipsorum EM, GN. Quoniam igitur ut AB ad CD, ita est EF ad ST, et



descripta sunt ab ipsis quidem AB, CD similia et similiter posita parallelepipeda AK, CL; ab ipsis vero EF, ST, similia et similiter posita parallelepipeda EM, SV; erit ut AK ad CL, ita EM ad SV. ponitur autem et ut AK ad CL, ita EM ad GN. aequale<sup>f</sup> igitur est solidum GN solido SV. est autem ipsi simile et similiter positum; ergo plana quibus continentur similia sunt et aequalia, ipsorumque latera homologa GH, ST inter se aequalia erunt. Quoniam igitur ut AB ad CD, ita est EF ad ST; aequalis autem ST ipsi GH; erit ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectae lineae &c. Q. E. D.

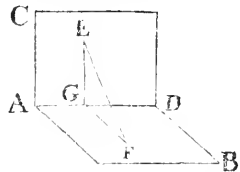
## PROP. XXXVIII. THEOR.

“ SI planum ad planum rectum fit, et ab aliquo puncto  
 “ eorum quae sunt in uno plano, ad alterum planum  
 “ perpendicularis ducatur; ea in planorum communem  
 “ sectionem cadet.

“ Planum enim CD ad planum AB rectum fit, communis autem  
 “ eorum sectio sit AD, et in ipso CD plano, quodvis punctum E fu-  
 “ matur. Dico perpendicularem quae a puncto E ad planum AB du-  
 “ citur, cadere in ipsam AD.

“ Non enim, sed, si fieri potest, cadat extra, ut EF; et plano AB  
 “ in puncto F occurrat; a puncto autem F ad DA in plano AB per-

a. 12. 1. “ perpendicularis ducatur FG<sup>a</sup>, quae quidem  
 b. 4. Def. 11. “ et plano CD ad angulos rectos erit<sup>b</sup>; et  
 “ EG jungatur. Quoniam igitur FG plano  
 “ CD est ad angulos rectos, tangit autem ip-  
 “ sam recta linea EG quae est in eodem CD  
 c. 3. Def. 11. “ plano, erit angulus FGE rectus<sup>c</sup>. sed et



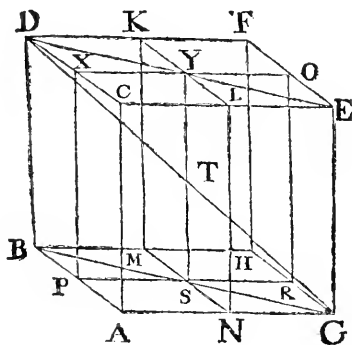
“ EF plano AB ad angulos rectos est; rectus igitur est angulus EFG.  
 “ quare trianguli EFG duo anguli duobus rectis sunt aequales; quod  
 “ est absurdum. non igitur a puncto E ad AB planum perpendicu-  
 “ laris ducta extra rectam lineam AD cadet; cadet igitur in ipsam AD.  
 “ Si igitur planum &c. Q. E. D.”

PROP. XXXIX.

## PROP. XXXIX. THEOR.

**S**I in folido parallelepipedo oppositorum planorum latera fecentur bifariam, per sectiones vero plana ducantur; communis planorum sectio et folidi parallelepipedi diameter se mutuo bifariam fecabunt.

In folido enim parallelepipedo AF, oppositorum planorum CF, AH latera bifariam fecentur in punctis K, L, M, N; X, O, P, R; et jungantur KL, MN, XO, PR. et quoniam DK, CL aequales sunt et parallelae, erunt KL, DC parallelae<sup>a</sup>. eadem ratione, parallelae sunt <sup>a</sup>. 33. 1. MN, BA. est autem BA parallela ipsi DC; quoniam igitur utraque



ipfarum KL, BA parallela est ipsi DC, non in eodem cum ipsâ plano, erit KL parallela<sup>b</sup> ipsi BA. et quoniam utraque ipfarum KL, MN <sup>b</sup>. 9. 17. parallela est ipsi BA, non in eodem cum ipsâ plano, erit KL parallela<sup>b</sup> ipsi MN; quare KL, MN in uno sunt plano. similiter et XO, PR ostendentur in uno esse plano. Communis autem sectio planorum KN,

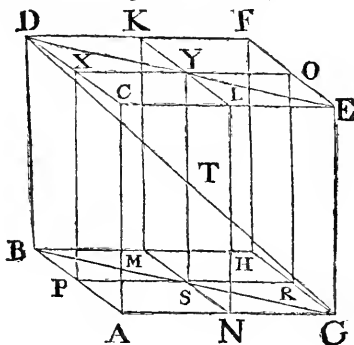
N n 2

XR

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

XR fit YS; et solidi parallelepipedi AF diameter fit DG. Dico YS, DG sibi mutuo occurrere, et sese bifariam fecare.

Jungantur enim DY, YE, BS, SG. Quoniam igitur DX parallela  
 e. 29. 1. est ipsi OE, alterni anguli DXY, YOE inter se aequales sunt<sup>c</sup>. et quoniam DX quidem est aequalis OE, XY vero ipsi YO, et angulos aequales continent; erit basis DY aequalis basi YE, et reliqui anguli red. 4. 1. liquis angulis aequales<sup>d</sup>; angulus igitur XYD est aequalis angulo OYE, e. 14. 1. et ob id recta linea est DYE<sup>e</sup>. eadem ratione, et BSG recta est; atque est BS aequalis SG. et quoniam CA ipsi DB aequalis est et paral-



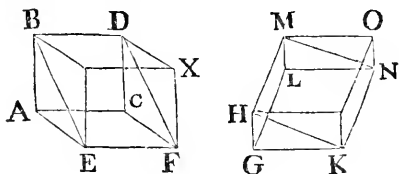
lela, et CA aequalis est et parallela ipsi EG; erit et DB ipsi EG aequalis et parallela<sup>b</sup>. et ipfas conjungunt rectae lineae DE, BG; parale. 33. 1. lela<sup>a</sup> igitur et aequalis est DE ipsi BG. et sumpta sunt in utraque ipsarum quaedam puncta D, Y, G, S, et junctae sunt DG, YS. ergo DG, YS in uno sunt plano. et manifestum est propterea ipfas sibi mutuo occurrere; occurrant in T. et quoniam DE parallela est ipsi BG, erit et EDT angulus angulo BGT aequalis<sup>e</sup>, alterni enim sunt; est autem et DTY angulus aequalis<sup>f</sup> ipsi GTS. duo igitur sunt triangula DTY, GTS duos angulos duobus angulis aequales habentia, et unum  
 latus

latus uni lateri aequale, quod uni aequalium angulorum subtenditur, videlicet DY ipsi GS; dimidia enim sunt ipsarum DE, BG. ergo et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt<sup>s</sup>. quare DT qui- g. 26. 1. dem est aequalis TG, YT vero ipsi TS. Si igitur in solido &c. Q. E. D.

PROP. XL. THEOR.

**S**I sint duo prismata triangularia aequae alta, quorum unum quidem basim habeat parallelogrammum, alterum vero triangulum, et parallelogrammum duplum sit trianguli; aequalia erunt ipsa prismata.

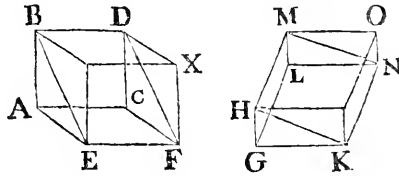
Sint prismata aequae alta ABCDEF, GHKLMN, quorum primum continetur duobus triangulis ABE, CDF, et tribus parallelogrammis AD, DE, EC; alterum vero continetur duobus triangulis GHK, LMN, et tribus parallelogrammis LH, HN, NG; et unum quidem



basim habeat parallelogrammum AF, alterum vero GHK triangulum, et duplum sit AF parallelogrammum trianguli GHK. Dico prismata ABCDEF prismati GHKLMN aequale esse.

Compleantur enim AX, GO solida, et quoniam parallelogrammum AF trianguli GHK est duplum; est autem et HK parallelogrammum duplum<sup>a</sup> trianguli GHK; erit AF parallelogrammum parallelo- a. 34. 1. grammo

grammo  $HK$  aequale. quae vero in aequalibus sunt basibus solida pa-  
 6. 31. 11. rallelepipeda, et eadem altitudine, inter se aequalia <sup>b</sup> sunt. aequale igitur est  $AX$  solidum solido  $GO$ . atque est solidi quidem  $AX$  dimi-



5. 28. 11. dium <sup>c</sup>  $ABCDEF$  prismata, solidi vero  $GO$  dimidium <sup>c</sup> est prismata  $GHKLMN$ . ergo  $ABCDEF$  prismata prismati  $GHKLMN$  est aequale. Si igitur sint duo prismata &c. Q. E. D.



## E U C L I D I S

## E L E M E N T O R U M

## LIBER DUODECIMUS.

## L E M M A I.

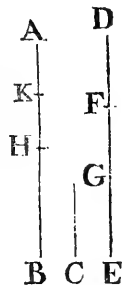
Necessarium quibusdam hujus Libri Propositionibus; est vero Propositio prima Libri decimi.

**D**UABUS magnitudinibus inaequalibus expositis, si a majore auferatur majus quam dimidium, et a reliqua rursus auferatur majus quam dimidium; et hoc semper fiat; relinquetur tandem quaedam magnitudo quae minore magnitudine exposita minor erit.

Sint duae magnitudines inaequales AB, C quarum major AB. Dico si ab AB auferatur majus quam dimidium, et a reliqua rursus auferatur majus quam dimidium, et hoc semper fiat, relinqui tandem magnitudinem quandam, quae magnitudine C minor erit.

Et enim

Etenim C multiplicata fiet aliquando major magnitudine AB. multiplicetur, et sit DE ipsius quidem C multiplex, major autem quam AB; dividaturque DE in partes ipsi C aequales DF, FG, GE. et ab ipsa AB auferatur majus quam dimidium BH, ab ipsa vero AH rursus majus quam dimidium auferatur HK, atque hoc semper fiat quoad divisiones quae sunt in AB multitudine aequales fiant divisionibus quae in DE; sint igitur divisiones AK, KH, HB divisionibus DF, FG, GE multitudine aequales. et quoniam major est DE quam AB, et ablatum est ab ipsa quidem DE minus quam dimidium EG, ab ipsa vero AB majus quam dimidium BH; erit reliquum GD reliquo HA majus. rursus quoniam major est GD quam HA, et ablatum est ab ipsa quidem GD dimidium GF; ab ipsa vero HA majus quam dimidium HK, reliquum FD reliquo AK majus erit. estque FD aequalis ipsi C; ergo C quam AK est major. minor igitur est AK quam C. Ergo ex magnitudine AB relicta est magnitudo AK exposita minore magnitudine C minor. Q. E. D.



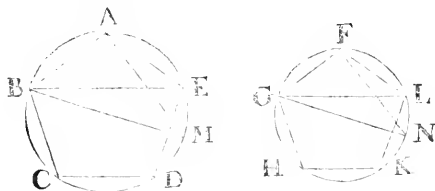
## PROP. I. THEOR.

**S**IMILIA polygona circulis inscripta inter se sunt ut quadrata ex diametris.

Sint circuli ABCDE, FGHL, et in ipsis similia polygona ABCDE, FGHL; diametri autem circulorum sint BM, GN. Dico ut quadratum ex BM ad quadratum ex GN, ita esse ABCDE polygonum ad polygonum FGHL.

Jungantur enim BE, AM, GL, FN. et quoniam polygonum ABCDE simile est polygono FGHL, erit et angulus BAE angulo GFL

GFL aequalis<sup>a</sup>, et ut BA ad AE, ita GF ad FL<sup>a</sup>. duo igitur trian- a. 1. Def. 6.  
gula sunt BAE, GFL unum angulum uni angulo aequalem habentia,  
videlicet angulum BAE angulo GFL, circa aequales autem angulos  
latera proportionalia; quare triangulum ABE triangulo GFL aequian-  
gulum est<sup>b</sup>; ac propterea angulus AEB aequalis est angulo FLG. sed b. 6. 6.  
angulus quidem AEB angulo AMB est aequalis<sup>c</sup>, in eadem enim cir- c. 21. 3.  
cumferentia consistunt; angulus autem FLG aequalis est angulo FNG<sup>c</sup>;  
ergo et AMB angulus est aequalis angulo FNG. est autem et rectus



BAM aequalis recto GFN<sup>d</sup>; quare et reliquis reliquo aequalis. ae- d. 31. 3.  
quiangulum igitur est triangulum ABM triangulo FGN. ergo ut BM  
ad GN, ita BA ad GF<sup>e</sup>; et duplicata ratio ipsius BM ad GN, ea- e. 4. 6.  
dem erit<sup>f</sup> rationi duplicatae rationis BA ad GF. sed rationis quidem f. 10. Def. 5.  
BM ad GN, duplicata est ratio quadrati ex BM ad quadratum ex GN<sup>g</sup>; <sup>et 22. 5.</sup> g. 20. 6.  
rationis vero BA ad GF duplicata est ratio polygoni ABCDE ad po-  
lygonum FGHKL<sup>g</sup>; et igitur ut quadratum ex BM ad quadratum ex  
GN, ita polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL. Quare simi-  
lia polygona &c. Q. E. D.

## PROP. II. THEOR.

**C**IRCULI inter se sunt ut quadrata ex diametris.

Sint circuli ABCD, EFGH, diametri autem ipsorum sint BD, FH.

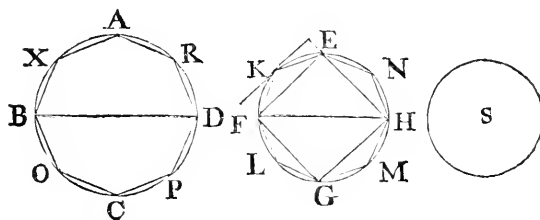
O o

Dico

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

Dico ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita esse circulum ABCD ad EFGH circulum.

Si enim non ita fit, erit ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD vel ad spatium aliquod minus circulo EFGH, vel ad majus\*. fit primum ad minus quod fit S. et in circulo EFGH describatur quadratum EFGH. itaque descriptum in circulo quadratum majus est dimidio circuli EFGH; quoniam si per puncta E, F, G, H contingentes circulum ducamus, erit descripti circa circulum quadrati



41. 1. dimidium quadratum EFGH<sup>a</sup>; circulus autem minor est quadrato circa circulum descripto; ergo quadratum EFGH majus est dimidio circuli EFGH. secentur bifariam circumferentiae EF, FG, GH, HE in punctis K, L, M, N, et EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE jungantur. unumquodque igitur triangulorum EKF, FLG, GMH, HNE majus est dimidio segmenti circuli in quo consistit; quoniam si per puncta K, L, M, N contingentes circulum ducamus, et parallelogramma quae sunt super rectis lineis EF, FG, GH, HE compleamus; erit unumquodque triangulorum EKF, FLG, GMH, HNE dimidium parallelo-

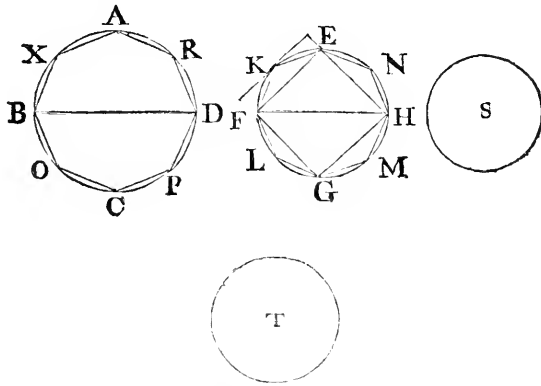
\* Est enim quadratum quoddam aequale circulo ABCD; sit latus ejusdem P. potest igitur esse quarta proportionalis tribus BD, FH et P, quae sit Q. Ergo quadrata ex hisce proportionalia sunt; hoc est, quadratis ex BD,

FH et circulo ABCD potest existere quartum proportionale, sit hoc S. et similiter quaedam in sequentibus quibusdam Propositionibus, intelligenda sunt.

grammi quod ad ipsum est<sup>a</sup>. sed segmentum minus est parallelogram- a. 41. 1.  
 mo. quare unumquodque triangulorum EKF, FLG, GMH, HNE  
 majus est dimidio segmenti circuli in quo consistit. Hæc igitur cir-  
 cumferentias bifariam secantes, et jungentes rectas lineas, atque hoc  
 semper facientes, relinquemus tandem quaedam circuli segmenta, quæ  
 minora erunt excessu, quo circulus EFGH ipsum S spatium superat.  
 etenim ostensum est in præcedenti Lemmate, duabus magnitudinibus  
 inæqualibus expositis, si a majori auferatur majus quam dimidium, et  
 a reliqua, rursus majus quam dimidium, et hoc semper fiat, relinqui  
 tandem magnitudinem aliquam, quæ minori magnitudine exposita sit  
 minor. itaque relicta sint segmenta EK, KF, FL, LG, GM, MH,  
 HN, NE, quæ minora sint excessu, quo circulus EFGH ipsum S  
 spatium superat. Ergo reliquum EKFLGMHN polygonum majus erit  
 spatio S. Describatur etiam in circulo ABCD, polygono EKFLGMHN  
 simile polygonum AXBOCPDR. est igitur ut quadratum ex BD ad  
 quadratum ex FH, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN  
 polygonum<sup>b</sup>. sed et ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita b. 1. 12.  
 ABCD circulus ad spatium S. ergo et ut circulus ABCD ad spatium  
 S, ita polygonum AXBOCPDR ad EKFLGMHN polygonum<sup>c</sup>. c. 11. 5.  
 major autem est circulus ABCD eo quod in ipso est polygono; quare  
 et spatium S majus est polygono EKFLGMHN<sup>d</sup>. sed et minus, d. 14. 5.  
 ut prius ostensum; quod fieri non potest. non igitur est ut quadra-  
 tum ex BD ad quadratum ex FH, ita ABCD circulus ad spatium  
 aliquod minus circulo EFGH. similiter ostendemus neque esse ut qua-  
 dratum ex FH ad quadratum ex BD, ita circulus EFGH ad aliquod  
 spatium minus circulo ABCD. Dico etiam neque esse ut quadratum  
 ex BD ad quadratum ex FH, ita circulum ABCD ad aliquod spa-  
 tium majus circulo EFGH. si enim fieri potest, sit ad majus spa-  
 tium T. erit igitur invertendo ut quadratum ex FH ad quadratum ex

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

BD, ita spatium T ad ABCD circulum. erit autem ut spatium † T ad ABCD circulum, ita circulus EFGH ad spatium quoddam, quod  
 4. 14. 5. quidem minus erit circulo ABCD<sup>d</sup>, quia spatium T majus est EFGH circulo. ergo et ut quadratum ex FH ad quadratum ex BD, ita EFGH circulus ad aliquod spatium minus circulo ABCD; quod fieri non posse



ostensum est. non igitur ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita est circulus ABCD ad spatium aliquod majus EFGH circulo. ostensum autem est neque ad minus. quare ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita erit ABCD circulus ad circulum ‡ EFGH. Circuli igitur sunt ut quadrata ex diametris. Q. E. D.

† Ostensum enim est in praecedenti Nota ad \* posse existere quartum proportionale quadratis ex BD, FH et circulo ABCD quod dicebatur S. et similiter spatium T, circulisque ABCD, EFGH potest esse quartum proportionale. eodem modo in sequentibus quibus-

dam Propositionibus similia intelligenda sunt.

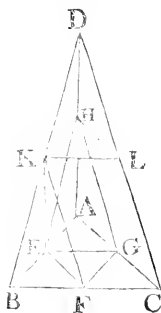
‡ Etenim quoniam potest existere quarta proportionalis quadratis ex BD, FH et circulo ABCD, quae quidem neque minor neque major potest esse circulo EFGH, ut ostensum fuit; igitur circulo huic necessario aequalis erit.

## PROP. III. THEOR.

**O**MNIS pyramis triangularem habens basim dividitur in duas pyramides aequales et similes inter se, quae triangulares bases habent, similesque toti; et in duo prismata aequalia, quae quidem prismata dimidio totius pyramidis sunt majora.

Sit pyramis cujus basis quidem ABC triangulum, vertex autem punctum D. Dico pyramidem ABCD dividi in duas pyramides aequales et similes inter se, triangulares bases habentes, et similes toti; et in duo prismata aequalia; et duo prismata dimidio totius pyramidis esse majora.

Secentur enim AB, BC, CA, AD, DB, DC bifariam in punctis E, F, G, H, K, L, et EH, EG, GH, HK, KL, LH, EK, KF, FG jungantur. Quoniam igitur AE quidem est aequalis EB, AH vero ipsi HD, erit HE ipsi DB parallela<sup>a</sup>. eadem ratione et HK est parallela ipsi AB. parallelogrammum igitur est HEBK; quare HK est aequalis EB<sup>b</sup>. sed EB ipsi AE est aequalis; ergo et AE ipsi HK aequalis erit. est autem et AH aequalis HD; duae igitur EA, AH duabus KH, HD aequales sunt, altera alteri; et angulus EAH aequalis angulo KHD<sup>c</sup>; basis igitur EH basi KD est aequalis, et triangulum AEH aequale<sup>d</sup> et simile triangulo HKD. eadem ratione et triangulum AGH triangulo HLD aequale est et simile. et quoniam duae rectae lineae EH, HG sese tangentes duabus rectis lineis sese tangentibus KD, DL parallelae sunt, non autem in eodem plano;



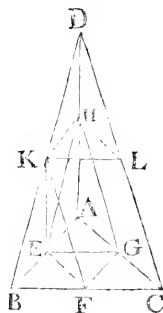
a. 2. 6.

b. 34. 1.

c. 29. 1.

d. 4. 1.

- e. 10. 11. plano, aequales angulos continebunt<sup>e</sup>; ergo angulus EHG est aequalis angulo KDL. rursus quoniam duae rectae lineae EH, HG duabus rectis lineis KD, DL aequales sunt altera alteri, et angulus EHG est a. 4. 1. aequalis angulo KDL; erit basis EG basi KL aequalis<sup>d</sup>, et triangulum EHG triangulo KDL aequale<sup>d</sup> erit et simile. eadem ratione et AEG triangulum est aequale et simile triangulo HKL. Quare pyramis cujus basis quidem est AEG triangulum, vertex autem punctum H, aequalis et similis est pyramidi cujus basis est triangulum KHL, et vertex f. c. 11. D punctum<sup>f</sup>. et quoniam uni laterum trianguli ADB, videlicet ipsi AB, parallela ducta est HK, erit triangulum ADB triangulum HDK aequiangulum, et propterea l. g. 4. 6. tera habent proportionalia<sup>g</sup>. simile igitur est ADB triangulum triangulo HDK. et eadem ratione triangulum quidem DBC simile est triangulo DKL; triangulum vero ADC triangulo HDL; et adhuc triangulum ABC triangulo AEG. ostensum autem est triangulum AEG simile triangulo HKL, ergo et ABC triangulum triangulo h. 21. 6. HKL simile erit<sup>h</sup>. et pyramis igitur cujus basis quidem triangulum ABC, vertex autem punctum D, similis est pyramidi cujus basis triangulum HKL, et vertex punctum i. B. 11. et D<sup>i</sup>. sed pyramis cujus basis quidem HKL triangulum, vertex autem 11. Def. 11. punctum D, ostensa est similis pyramidi cujus basis triangulum AEG, et vertex H punctum. quare et pyramis cujus basis triangulum ABC, et vertex punctum D, similis est pyramidi cujus basis AEG triangulum, et vertex punctum H. utraque igitur ipsarum AEGH, HKLD pyramidum similis est toti pyramidi ABCD. et quoniam BF est aequalis k. 41. 1. FC, erit EBFG parallelogrammum duplum trianguli GFC<sup>k</sup>. et quoniam si duo prismata aequae alta sint, quorum unum quidem basim ha-





bet parallelogrammum, alterum vero triangulum, fitque parallelogrammum duplum trianguli; sunt ea prismata inter se aequalia<sup>1</sup>; aequale l. 40. 11. igitur erit prisma cujus basis est EBFG parallelogrammum, et opposita ipsi recta linea KH, prismati cujus basis est triangulum GFC, et oppositum ipsi triangulum HKL; etenim aequae alta sunt, quia sunt inter plana parallela<sup>m</sup> ABC, HKL. et manifestum est utrumque ipsorum m. 15. 11. prismatum, et cujus basis est EBFG parallelogrammum, opposita autem ipsi HK recta linea, et cujus basis est GFC triangulum, et oppositum ipsi triangulum HKL, majus esse utraque pyramidum, quarum bases quidem AEG, HKL triangula, vertices autem puncta H, D; quoniam si jungamus EF rectam lineam, prisma quidem cujus basis est EBFG parallelogrammum, et opposita ipsi recta linea KH, majus est pyramide cujus basis EBF triangulum, vertex autem punctum K; sed pyramis cujus basis triangulum EBF, et vertex K punctum, est aequalis f. c. 11. pyramidi cujus basis AEG triangulum, et vertex punctum H; aequalibus enim et similibus planis continentur. quare et prisma cujus basis parallelogrammum EBFG, opposita autem ipsi recta linea HK, majus est pyramide cujus basis AEG triangulum et vertex punctum H. prisma vero cujus basis parallelogrammum EBFG, et opposita ipsi recta linea HK est aequale prismati cujus basis GFC triangulum, et ipsi oppositum triangulum HKL; et pyramis cujus basis triangulum AEG, vertex autem H punctum, est aequalis pyramidi cujus basis HKL triangulum, et vertex punctum D. Ergo duo prismata de quibus dictum est, sunt majora duabus dictis pyramidibus quarum bases triangula AEG, HKL, vertices autem H, D puncta. tota igitur pyramis cujus basis ABC triangulum, vertex autem punctum D, divisâ est in duas pyramides aequales, et similes inter se, et similes toti; et in duo prismata aequalia; suntque duo prismata dimidio totius pyramidis majora. Q. E. D.

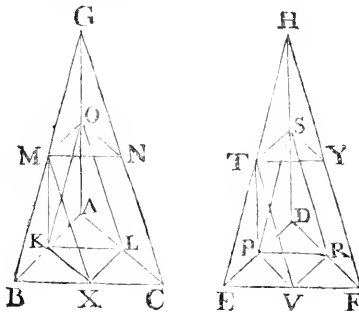
## PROP. IV. THEOR.

**S**I sint duae pyramides aequae altae, quae triangulares bases habent, dividatur autem utraque ipsarum, et in duas pyramides aequales inter se, similesque toti, et in duo prismata aequalia; et factarum pyramidum utraque eodem modo dividatur, atque hoc semper fiat. erit ut unius pyramidis basis ad basim alterius, ita et in una pyramide prismata omnia ad prismata omnia in altera pyramide multitudine aequalia.

Sint duae pyramides aequae altae quae triangulares bases habent ABC, DEF, vertices autem sint puncta G, H; et dividatur utraque ipsarum in duas pyramides aequales inter se similesque toti, et in duo prismata aequalia; et factarum pyramidum utraque eodem modo divisa intelligatur; atque hoc semper fiat. Dico ut ABC basis ad basim DEF, ita esse prismata omnia quae sunt in pyramide ABCG ad prismata omnia quae in pyramide DEFH multitudine aequalia.

Eadem fiat constructio quae in praecedente, et quoniam BX qui-  
 a. 2. 6. dem est aequalis XC, AL vero ipsi LC; erit XL ipsi AB parallela<sup>a</sup>, et  
 triangulum ABC triangulo LXC simile. eadem ratione et triangulum  
 DEF simile est triangulo RVF. et quoniam BC quidem est dupla  
 CX, EF vero dupla ipsius FV, erit ut BC ad CX, ita EF ad FV. et  
 descripta sunt ab ipsis BC, CX similia et similiter posita rectilinea ABC,  
 LXC; ab ipsis vero EF, FV similia et similiter posita rectilinea DEF,  
 RVF. est igitur ut ABC triangulum ad triangulum LXC, ita triangu-  
 b. 2. 6. lum DEF ad RVF triangulum<sup>b</sup>; et permutando ut triangulum ABC  
 ad triangulum DEF, ita LXC triangulum ad triangulum RVF. Quo-  
 c. 15. 11. niam vero parallelae sunt plana ABC, OMN<sup>c</sup>, ut et DEF, STY<sup>c</sup>, per-  
 pendiculares

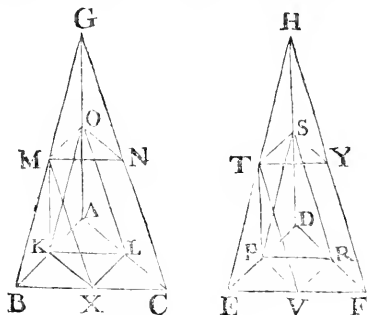
pendiculares a punctis G, H ad bases ABC, DEF, quae sunt inter se  
 aequales, a planis OMN, STY bifariam secabuntur<sup>d</sup>, quia et rectae GC, d. 17. 11.  
 HF bifariam ab iisdem planis sectae sunt in N, Y punctis. acque alta  
 igitur sunt prismata LXC, OMN; RVF, STY; et propterea ut basis  
 LXC ad basim RVF, hoc est ut triangulum ABC ad triangulum DEF,  
 ita est prisma ejus basis est triangulum LXC, oppositum autem ipsi  
 OMN ad prisma ejus basis RVF triangulum, et oppositum ipsi STY<sup>e</sup>. e. Cor. 32, 11;  
 et quoniam duo prismata quae in pyramide ABCG inter se aequalia sunt,  
 sed et quae in pyramide DEFH duo prismata sunt inter se aequalia,



erit ut prisma ejus basis parallelogrammum KBXL, opposita vero ipsi  
 recta linea MO, ad prisma ejus basis LXC triangulum, et oppositum  
 ipsi OMN; ita<sup>f</sup> prisma ejus basis parallelogrammum PEVR, et op- f. 7. 5.  
 posita recta linea TS, ad prisma ejus basis RVF triangulum, opposi-  
 tum vero ipsi STY. quare componendo, ut prismata KBXLMO,  
 LXCOMN ad prisma LXCOMN; ita prismata PEVRTS, RVFSTY  
 ad prisma RVFSTY. et permutando, ut prismata KBXLMO, LXCOMN  
 ad prismata PEVRTS, RVFSTY; ita prisma LXCOMN ad prisma  
 RVFSTY. ut autem prisma LXCOMN ad prisma RVFSTY, ita of-

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

tenfa est ABC bafis ad bafim DEF. ergo et ut bafis ABC ad bafim DEF, ita quae in pyramide ABCG duo prifmata ad duo prifmata quae in pyramide DEFH. fimiliter autem et fi factas pyramides dividamus eodem modo velut OMNG, STYH, erit ut OMN bafis ad bafim STY, ita quae in pyramide OMNG duo prifmata ad duo prifmata quae in pyramide STYH. fed ut OMN bafis ad bafim STY, ita bafis



ABC ad DEF bafim; et ut igitur ABC bafis ad bafim DEF, ita quae in pyramide ABCG duo prifmata ad duo prifmata quae in pyramide DEFH; et quae in pyramide OMNG duo prifmata ad duo prifmata quae in pyramide STYH; et quatuor ad quatuor. eadem autem oftenduntur et in factis prifmatibus ex divifione pyramidum AKLO, et DPRS, et omnium omnino multitudinem aequalium. Q. E. D.

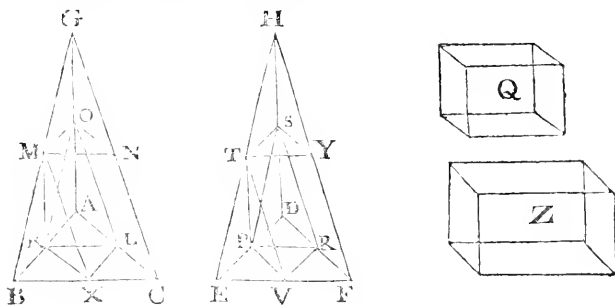
## PROP. V. THEOR.

**P**YRAMIDES quae eadem funt altitudine, et triangulares bafes habent, inter fe funt ut bafes.

Sint eadem altitudine pyramides, quarum bafes quidem triangula  
ABC,

ABC, DEF, vertices autem puncta G, H. Dico ut ABC basis ad basim DEF, sic esse pyramidem ABCG ad DEFH pyramidem.

Si enim non ita sit, erit ut ABC basis ad basim DEF, sic ABCG pyramis vel ad solidum minus pyramide DEFH, vel ad majus\*. sit primum ad solidum minus, sitque Q et dividatur pyramis DEFH in duas pyramides aequales inter se, et similes toti, et in duo prismata aequalia. sunt igitur duo prismata dimidio totius pyramidis majora<sup>a</sup>. et **a. 3. 12.** rursus pyramides ex divisione factae similiter dividantur, atque hoc semper fiat quoad relinquantur quaedam pyramides in pyramide DEFH,

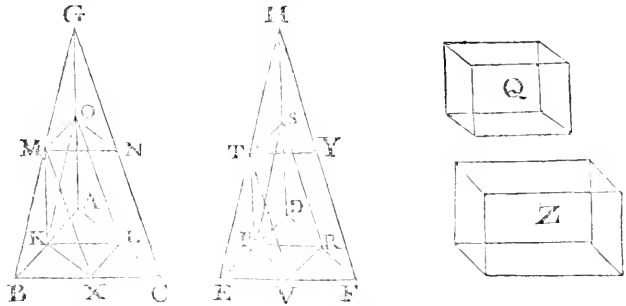


quae sint minores excessu quo pyramis DEFH solidum Q superat. itaque sumantur, et sint exempli causa, pyramides DPRS, STYH. erunt igitur reliqua in pyramide DEFH prismata solido Q majora. dividatur etiam ABCD pyramis similiter et in totidem partes atque pyramis DEFH. ergo ut ABC basis ad basim DEF, ita quae in pyramide ABCG prismata ad prismata quae in pyramide DEFH<sup>b</sup>. sed ut ABC **b. 4. 12.** basis ad basim DEF, ita pyramis ABCG ad solidum Q; et igitur ut ABCG pyramis ad solidum Q, ita quae in pyramide ABCG prismata ad prismata quae in pyramide DEFH. major autem est pyramis

\* Hoc eodem modo ostendi potest quo simile ostensum est in Prop. 2. ad notam\*.

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

ABCG prismatibus quae in ipsa sunt; ergo et solidum Q prismatibus  
 c. 14. 5. quae sunt in pyramide DEFH est majus<sup>c</sup>. sed et minus, quod fieri  
 non potest. non igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis  
 ABCG ad solidum aliquod minus pyramide DEFH. similiter ostendimus  
 neque ut DEF basis ad basim ABC, ita esse pyramidem DEFH ad solidum  
 aliquod pyramide ABCG minus. Dico etiam neque esse ut ABC basis ad  
 basim DEF, ita ABCG pyramidem ad aliquod solidum majus pyramide  
 DEFH. si enim fieri potest, sit ad majus, videlicet ad solidum Z. erit  
 igitur invertendo, ut DEF basis ad basim



ABC, ita solidum Z ad ABCG pyramidem. erit autem ut solidum Z  
 ad ABCG pyramidem, ita DEFH pyramis ad aliquod solidum †, quod  
 quidem minus erit pyramide ABCG<sup>c</sup>, quia solidum Z majus est pyra-  
 mide DEFH. et ut igitur DEF basis ad basim ABC, ita pyramis  
 DEFH ad solidum aliquod pyramide ABCG minus, quod est absurdum.  
 non igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita est ABCG pyramis ad so-  
 lidum aliquod majus pyramide DEFH. ostensum autem est, neque ad  
 minus. Quare ut ABC basis ad basim DEF, ita est pyramis ABCG  
 ad DEFH pyramidem. Pyramides igitur quae &c. Q. E. D.

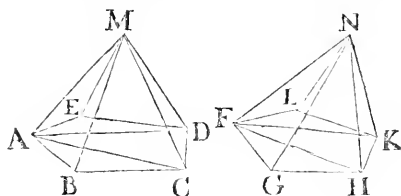
† Hoc eodem modo ostendetur quo simile in Prop. 2. ad notam †.

## PROP. VI. THEOR.

**P**YRAMIDES quae eadem sunt altitudine et polygonas bases habent, inter se sunt ut bases.

Sint eadem altitudine pyramides, polygonas habentes bases ABCDE, FGHL, vertices autem M, N puncta. Dico ut ABCDE basis ad basim FGHL, ita esse ABCDEM pyramidem ad pyramidem FGHLN.

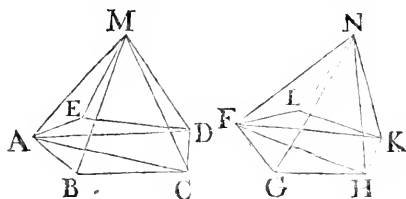
Dividatur enim basis quidem ABCDE in triangula ABC, ACD, ADE; basis vero FGHL in triangula FGH, FHK, FKL. et super unoquoque triangulo intelligantur pyramides quarum quae super basi- bus ABC, ACD, ADE vertex communis sit M punctum, reliquarum



vero communis vertex sit punctum N. Quoniam igitur est ut triangulum ABC ad triangulum FGH, ita ABCM pyramis ad pyramidem FGHN<sup>a</sup>; ut vero triangulum ACD ad triangulum FGH, ita ACDM a. 5. 12. pyramis ad pyramidem FGHN; et adhuc ut ADE triangulum ad triangulum FGH, ita pyramis ADEM ad pyramidem FGHN; erit ut omnes antecedentes primi ad communem consequentem, ita omnes antecedentes reliqui ad consequentem communem<sup>b</sup>; hoc est erit ut basis b. 2. Cor. 24. 5. ABCDE ad basim FGH, ita pyramis ABCDEM ad pyramidem FGHN. eademque ratione ut basis FGHL ad basim FGH, ita erit pyramis FGHLN ad pyramidem FGHN, et invertendo. Quoniam igitur ut basis

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

basis ABCDE ad basim FGH, ita pyramis ABCDEM ad pyramidem FGHN; ut vero FGH basis ad basim FGHKL, ita FGHN pyramis



a. 22. 5. ad pyramidem FGHKLN; erit ex aequali <sup>e</sup> ut basis ABCDE ad basim FGHKL, ita ABCDEM pyramis ad pyramidem FGHKLN. Pyramides igitur quae &c. Q. E. D.

## PROP. VII. THEOR.

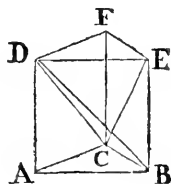
**O**MNE prisma triangularem habens basim, dividitur in tres pyramides aequales inter se, quae triangulares bases habent.

Sit prisma cujus basis quidem triangulum ABC, oppositum autem ipsi DEF. Dico prisma ABCDEF dividi in tres pyramides aequales inter se, quae triangulares habent bases.

Jungantur enim BD, EC, CD; et quoniam parallelogrammum est ABED cujus diameter BD, erit ABD triangulum triangulo EBD aequali <sup>a. 34. 1.</sup>; ergo pyramis cujus basis triangulum ABD, vertex autem punctum C, aequalis est <sup>b</sup> pyramidi cujus basis EBD triangulum, et vertex punctum C. sed pyramis cujus basis EBD triangulum, et vertex punctum C, eadem est cum pyramide cujus basis triangulum EBC, et vertex D punctum; iisdem enim planis continentur. ergo et pyramis cujus basis triangulum ABD, vertex autem punctum C, aequalis est pyramidi



midi ejus basis EBC triangulum, et vertex punctum D. rursus, quoniam FCBE parallelogrammum est ejus diameter CE, triangulum ECF triangulo ECB est aequale<sup>a</sup>; ergo et pyramis ejus basis ECB a. 34. 1. triangulum, vertex autem punctum D, aequalis est pyramidi ejus basis triangulum ECF, et vertex punctum D<sup>b</sup>. sed pyramis ejus basis qui- b. 5. 12. dem ECB triangulum, vertex autem punctum D ostensa est aequalis pyramidi ejus basis triangulum ABD, et vertex C punctum. quare et pyramis ejus basis triangulum ECF, et vertex punctum D, aequalis est pyramidi ejus basis triangulum ABD, et vertex C punctum. prisma igitur ABCDEF dividitur in tres pyramides inter se aequales quae triangulares bases habent, videlicet in ipsas ABDC, EBDC, ECFD. et quoniam pyramis ejus basis ABD triangulum, vertex autem punctum C, eadem est cum pyramide, ejus basis triangulum ABC, et vertex D punctum, iisdem namque planis continentur; pyramis vero ejus basis triangulum ABD, et vertex punctum C, tertia pars ostensa est prismatis ejus basis ABC triangulum, et oppositum ipsi DEF; et pyramis igitur, ejus basis triangulum ABC, vertex autem D punctum, tertia pars est prismatis eandem basim habentis, videlicet ABC triangulum, et oppositum ipsi triangulum DEF. Q. E. D.



COR. 1. Ex hoc manifestum est omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis basim habentis eandem, et altitudinem aequalem; quoniam si basis prismatis aliam quandam figuram rectilineam obtineat, dividi potest prisma in alia prismata quae triangulares bases habent.

COR. 2. Prismata aequae alta sunt inter se ut bases; quoniam pyramides super iisdem basibus et eadem altitudine inter se sunt ut bases<sup>c</sup>. c. 6. 12.

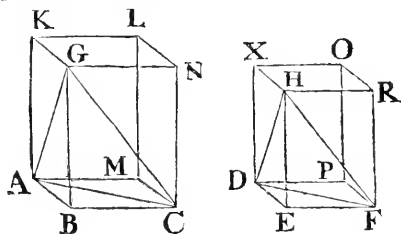
## EUCLIDIS ELEMENTORUM

## PROP. VIII. THEOR.

**S**IMILES pyramides quae triangulares bases habent, in triplicata sunt ratione homologorum laterum.

Sint similes et similiter positae pyramides, quarum bases quidem triangula ABC, DEF, vertices autem G, H puncta. Dico ABCG pyramidem ad pyramidem DEFH, triplicatam rationem habere ejus quam BC habet ad latus homologum EF.

Compleantur enim parallelogramma ABCM, GBCN, ABGK, et solidum parallelepipedum BGML quod hisce planis, ipsisque oppositis continetur. similiter compleatur solidum parallelepipedum EHPO contentum tribus parallelogrammis DEFP, HEFR, DEHX, ipsisque op-



positis. et quoniam pyramis ABCG similis est pyramidi DEFH, erit  
 a. 11. Def. 11. angulus ABC angulo DEF aequalis<sup>a</sup>, angulusque GBC aequalis angulo HEF, et angulus ABG angulo DEH. atque est ut AB ad BC, ita  
 b. 1. Def. 6. DE ad EF<sup>b</sup>, hoc est circum aequales angulos latera sunt proportionalia; parallelogrammum igitur BM parallelogrammo EP simile erit. eadem ratione et parallelogrammum BN simile est parallelogrammo ER, et BK ipsi EX. tria igitur parallelogramma BM, BN, BK tribus EP, ER, EX sunt similia. sed tria quidem BM, BN, BK tribus oppositis

positis aequalia et similia sunt<sup>c</sup>, tria vero EP, ER, EX tribus opposi-  
 tis aequalia et similia. quare solida BGML, EHPO similibus plenis  
 multitudine aequalibus continentur, suntque ipsorum anguli solidi aequa-  
 les<sup>d</sup>; ac propterea simile est BGML solidum solido EHPO<sup>e</sup>. similia.  
 autem solida paralelepieda in triplicata sunt ratione homologorum laterum<sup>f</sup>.  
 ergo solidi BGML ad solidum EHPO ratio triplicata est ejus  
 quam habet latus homologum BC ad EF homologum latus. sed ut  
 BGML solidum ad solidum EHPO, ita ABCG pyramis ad pyramidem  
 DEFH<sup>g</sup>; pyramis enim sexta pars est ipsius solidi, cum prima quod  
 est dimidium solidi paralelepiedi<sup>h</sup>, sit pyramidis triplum<sup>i</sup>. Quare et  
 pyramis ABCG ad pyramidem DEFH triplicatam rationem habet ejus  
 quam BC ad EF. Q. E. D.

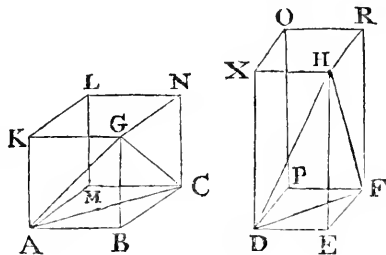
COR. Ex hoc pertpicuum est, et similes pyramides quae multangulas  
 bases habent, inter se esse in triplicata ratione homologorum laterum.  
 ipsis enim divis in pyramides triangulares bases habentes; quoniam et  
 similia polygona quae sunt in basibus, in similia triangula dividuntur,  
 et multitudine aequalia et homologa totis; erit ut una pyramis, in prima  
 pyramide, triangularem habens basim ad unam pyramidem, in secunda,  
 triangularem basim habentem, ita omnes pyramides, in prima  
 pyramide, triangulares habent. s bases ad omnes, in secunda pyramide,  
 triangulares bases habentes; hoc est, pyramis prima multangulam habens  
 basim ad secundam pyramidem quae multangulam basim habet.  
 sed pyramis triangularem habens basim ad pyramidem quae triangula-  
 rem basim habet, est in triplicata ratione homologorum laterum; et  
 pyramis igitur polygonam habens basim ad pyramidem similem basim  
 habentem, triplicatam rationem habet ejus quam latus homologum ad  
 homologum latus.

## PROP. IX. THEOR.

**A**EQUALIUM pyramidum, et triangulares bases habentium, bases et altitudines reciproce sunt proportionales. et quarum pyramidum triangulares bases habentium bases et altitudines reciproce sunt proportionales, illae sunt aequales.

Sint enim pyramides aequales triangulares habentes bases ABC, DEF, vertices vero G, H puncta. Dico pyramidum ABCG, DEFH bases et altitudines esse reciproce proportionales, scilicet ut ABC basim ad basim DEF, ita esse pyramidis DEFH altitudinem ad altitudinem pyramidis ABCG.

Compleantur enim parallelogramma AC, AG, GC ut et DF, DH, HF; compleanturque solida parallelepipedum BGML, EHPO quae



planis illis, ipsisque oppositis continentur. et quoniam pyramis ABCG est aequalis pyramidi DEFH, atque est pyramidis quidem ABCG sextuplum BGML solidum, pyramidis vero DEFH sextuplum solidum

- a. 1. Ax. 5. EHPO; erit solidum BGML solido EHPO aequale<sup>a</sup>. aequalium autem solidorum parallelepipedorum bases et altitudines sunt reciproce
- b. 34. 11. proportionales<sup>b</sup>; est igitur ut BM basis ad basim EP, ita EHPO solidi altitudo ad altitudinem solidi BGML. sed ut BM basis ad basim EP, ita ABC triangulum ad triangulum DEF; ergo et ut ABC triangulum ad triangulum DEF, ita solidi EHPO altitudo ad altitudinem

solidi

solidi BGML. sed solidi quidem EHPO altitudo eadem est cum altitudine pyramidis DEFH; solidi vero BGML altitudo eadem est cum altitudine pyramidis ABCG; est igitur ut ABC basis ad basim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. Quare pyramidum ABCG, DEFH bases et altitudines reciproce sunt proportionales.

Sed pyramidum ABCG, DEFH bases et altitudines reciproce sunt proportionales, sit scilicet ut ABC basis ad basim DEF, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. Dico ABCG pyramidem pyramidi DEFH aequalem esse.

Iisdem enim constructis, quoniam ut ABC basis ad basim DEF, ita est DEFH pyramidis altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG; ut autem ABC basis ad basim DEF, ita BM parallelogrammum ad parallelogrammum EP; erit et ut parallelogrammum BM ad EP parallelogrammum, ita pyramidis DEFH altitudo ad altitudinem pyramidis ABCG. sed pyramidis quidem DEFH altitudo eadem est cum altitudine solidi parallelepipedo EHPO; pyramidis vero ABCG altitudo eadem est cum altitudine solidi parallelepipedo BGML. est igitur ut BM basis ad basim EP, ita EHPO solidi parallelepipedo altitudo ad altitudinem solidi parallelepipedo BGML. quorum autem solidorum parallelepipedorum bases et altitudines reciproce sunt proportionales, ea sunt aequalia<sup>b</sup>. solidum igitur parallelepipedum BGML aequale est solido b. 34. II. parallelepipedo EHPO. atque est solidi quidem BGML sexta pars pyramidis ABCG; solidi vero EHPO sexta pars est pyramidis DEFH. ergo pyramidis ABCG pyramidi DEFH est aequalis. Acqualium igitur pyramidum &c. Q. E. D.

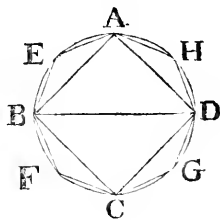
## PROP. X. THEOR.

**O**MNIS conus tertia pars est cylindri, qui eandem basim habet et altitudinem aequalem.

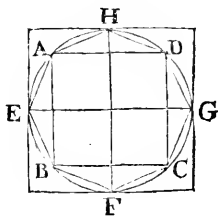
Haebat conus eandem basim quam cylindrus, videlicet circulum ABCD, et altitudinem aequalem. Dico conum tertiam partem esse cylindri, hoc est cylindrum conii triplum esse.

Si enim cylindrus non sit triplus conii, vel major erit quam triplus, vel minor. Sit primo major quam triplus; et describatur in ABCD circulo quadratum ABCD; ergo quadratum ABCD majus est quam dimidium ABCD circuli. et a quadrato ABCD erigatur prisina aeque altum cylindro; prisina vero hoc majus erit quam cylindri dimidium; quoniam si circa circulum ABCD quadratum describatur, et ab ipso erigatur prisina aeque altum cylindro, erit inscriptum quadratum dimidium circumscripti. et sunt ab iis basibus quadratis erecta solida parallelepipeda aeque alta, nimirum prisinata; prisina igitur a quadrato ABCD dimidium est prisinae erectae a quadrato quod circa circulum ABCD describitur.

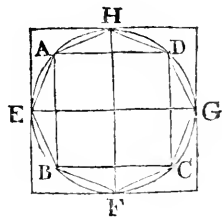
etiam inter se sunt ut bases<sup>a</sup>. atque est cylindrus minor prisinate erecto a quadrato quod describitur circa circulum ABCD. prisina igitur erecta a quadrato ABCD aeque altum cylindro, dimidio cylindri est majus. fiantur circumferentiae AB, BC, CD, DA bisariam in punctis E, F, G, H, et AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA jungantur. unumquodque igitur triangulorum AEB, BFC, CGD, DHA majus est dimidio portionis circuli ABCD, in qua consistit, ut prius ostensum in Prop. 2. hujus. Erigantur ab unoquoque triangulorum AEB, BFC, CGD,



CGD, DHA prismata aequae alta cylindro; ergo et unumquodque erectorum prismatum majus est dimidio portionis cylindri quae ad ipsum est; quoniam si per puncta E, F, G, H parallelae ipsis AB, BC, CD, DA ducantur, et compleantur super ipsis AB, BC, CD, DA parallelogramma, a quibus solida parallelepipeda aequae alta cylindro erigantur; erunt uniuscujusque erectorum dimidia, ea quae super triangulis AEB, EFC, CGD, DHA sunt prismata<sup>b</sup>. et sunt cylindri portio-  
b. 2. Cor. 7. 12.  
 nes crectis solidis parallelepipedis minores. ergo et prismata quae super triangulis AEB, BFC, CGD, DHA majora sunt dimidio portionum cylindri quae ad ipsa sunt. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, jungentesque rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum erigentes prismata aequae alta cylindro, et hoc semper facientes, tandem relinquemus quasdam portiones cylindri quae minores erunt excessu, quo cylindrus conii triplum superat<sup>c</sup>. relinquuntur, et sint ea quae sunt  
c. Lemma.  
 super segmenta circuli AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA; reliquum igitur prisma cujus basis quidem polygonum AEBFCGDH, altitudo autem eadem quae cylindri, majus est quam triplum conii. sed prisma cujus basis AEBFCGDH polygonum, et altitudo eadem quae cylindri, triplum est pyramidis, cujus basis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui conii<sup>d</sup>; et pyramis igitur cujus basis polygonum  
d. 1. Cor. 7. 12.  
 AEBFCGDH, vertex autem idem qui conii, major est cono qui basim habet ABCD circulum. sed et minor; ab ipso enim comprehenditur; quod fieri non potest. Dico insuper neque cylindrum minorem esse triplo conii. si enim fieri potest, sit cylindrus minor quam triplus conii. erit igitur, invertendo, conus major quam tertia pars cylindri. describatur in ABCD circulo quadratum ABCD; ergo quadratum ABCD ma-  
 jus



- jus est quam dimidium ABCD circuli. et a quadrato ABCD erigatur  
 pyramis, verticem habens eundem quem conus; **pyramis** igitur erecta  
 major est quam conus dimidium. quoniam, ut ante demonstravimus, si  
 circa circulum quadratum describatur, erit quadratum ABCD dimidium  
 ejus quod circa circulum descriptum est; et si a quadrato erigantur fo-  
 lida parallelepipedae aequae alta cono, quae et prismata sunt, erit quod a  
 quadrato ABCD erigitur dimidium ejus quod erectum est a quadrato  
 2. 32. 11. circa circulum descripto; etenim inter se sunt ut bases<sup>a</sup>; quare et ter-  
 tiae partes ipsarum. pyramis igitur cujus basis quadratum ABCD, di-  
 midia est ejus pyramidis quae a quadrato circa circulum descripto cri-  
 gitur. sed pyramis erecta a quadrato descripto  
 circa circulum major est cono, ipsam namque  
 comprehendit; ergo pyramis cujus basis  
 ABCD quadratum, vertex autem idem qui  
 conus major est quam conus dimidium. secen-  
 tur circumferentiae AB, BC, CD, DA bifa-  
 riam in punctis E, F, G, H, et jungantur  
 AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. et  
 unumquodque igitur triangulorum AEB, BFC, CGD, DHA majus est  
 quam dimidium portionis circuli in qua consistit. erigantur ab uno-  
 quoque triangulorum AEB, BFC, CGD, DHA pyramides verticem  
 habentes eundem quem conus. Ergo unaquaeque pyramidum hoc  
 modo erectarum major est quam dimidium portionis conus quae est ad  
 ipsam, quod eodem modo ostendetur, quo simile ostensum fuit de pris-  
 matibus et segmentis cylindri. itaque reliquas circumferentias secantes  
 bifariam, jungentesque rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum eri-  
 gentes pyramides verticem habentes eundem quem conus, et hoc semper  
 facientes, relinquemus tandem quasdam conus portiones quae minores  
 2. Lemma. erunt excessu quo conus tertiam cylindri partem superat<sup>c</sup>. relinquuntur,





et sint quae super circuli segmentis AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. reliqua igitur pyramis cujus basis AEBFCGDH, et vertex idem qui conii, major est quam tertia cylindri pars. sed pyramis cujus basis polygonum AEBFCGDH, vertex autem idem qui conii, tertia pars est prismatis cujus basis polygonum AEBFCGDH, altitudo autem eadem quae cylindri. prisma igitur cujus basis AEBFCGDH polygonum, et altitudo eadem quae cylindri, majus est cylindro cujus basis est circulus ABCD. sed et minus, ab ipso enim comprehenditur; quod fieri non potest. non igitur cylindrus minor est quam triplus conii. ostensum autem est neque majorem esse quam triplum. ergo cylindrus conii triplus est; ac propterea conus tertia pars cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est &c. Q. E. D.

## PROP. XI. THEOR.

**C**ONI et cylindri qui eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases.

Sint in eadem altitudine conii et cylindri, quorum bases circuli ABCD, EFGH, axes autem KL, MN, et diametri basium AC, EG. Dico ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita esse conum AL ad conum EN.

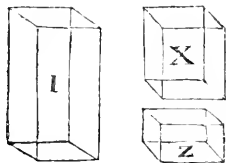
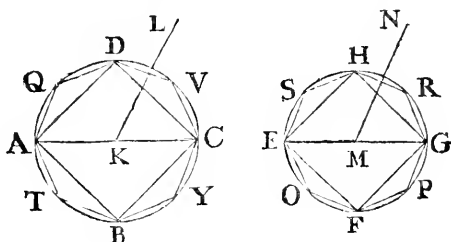
Si enim non ita sit, erit ut ABCD circulus ad circulum EFGH. ita conus AL ad aliquod solidum minus cono EN, vel ad majus. sit primo ad minus quod sit X; et quo minus est solidum X cono EN, ei aequale sit Z solidum; conus igitur EN ipso solidis X, Z est aequalis. describatur in EFGH circulo quadratum EFGH; majus igitur erit quadratum dimidio circuli. erigatur a quadrato EFGH pyramis aequae alta cono\*; pyramis igitur erecta major est conii dimidio. nam si circa

\* Potius, eundem quem conus verticem habens, et sic in sequentibus quibusdam.

circulum

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

circulum quadratum describamus, et ab ipso erigamus pyramidem aequae altam cono, erit inscripta pyramis pyramidis circumscriptae dimidium; a. 6. 12. etenim inter se sunt ut bases<sup>a</sup>. conus autem circumscripta pyramide est minor; ergo pyramis cujus basis quadratum EFGH, vertex autem idem qui cono, major est cono dimidio. secantur circumferentiae EF, FG, GH, HE bifariam in punctis O, P, R, S, et EO, OF, FP, PG, GR, RH, HS, SE jungantur. unumquodque igitur triangulorum EOF, FPG,

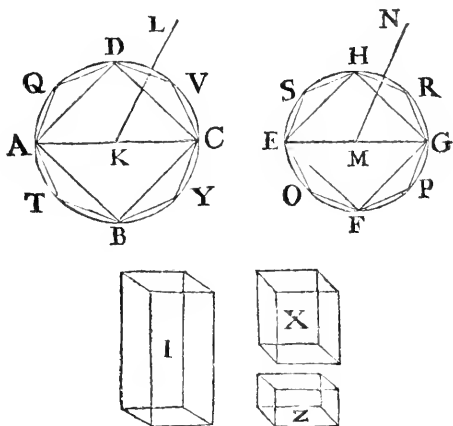


GRH, HSE majus est quam dimidium segmenti circuli in quo consistit. erigatur ab unoquoque triangulorum EOF, FPG, GRI, HSE pyramis aequae altae cono; ergo et unaquaeque eorum pyramidum major est dimidio portionis cono quae est ad ipsam. itaque reliquas circumferentias secantes bifariam, et jungentes rectas lineas, et ab unoquoque triangulorum erigentes pyramides aequae altas cono, atque hoc semper facientes, relinquemus tandem aliquas portiones cono quae solido f. Lemma. Z minores erunt<sup>b</sup>. relinquuntur, et sint quae super circuli segmentis EO,

EO, OF, FP, PG. GR, RH, HS, SE. reliqua igitur pyramis cujus basis polygonum EOPFGRHS, altitudo autem eadem quae cono, major est folido X. deferibatur in circulo ABCD polygono EOPFGRHS fimile polygonum ATBYCVDQ, et ab ipfa erigatur pyramis acque alta cono AL. quoniam igitur est ut quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita ATBYCVDQ polygonum ad polygonum EOPFGRHS<sup>c</sup>; c. 1. 12. ut autem quadratum ex AC ad quadratum ex EG, ita ABCD circulus ad circulum EFGH<sup>d</sup>; erit ut ABCD circulus ad circulum EFGH, d. 2. 12. ita polygonum ATBYCVDQ ad polygonum EOPFGRHS<sup>e</sup>. sed ut e. 11. 5. ABCD circulus ad circulum EFGH, ita conus AL ad X folidum; et ut polygonum ATBYCVDQ ad polygonum EOPFGRHS, ita<sup>a</sup> py-a. 6. 12. ramis cujus basis ATBYCVDQ polygonum, vertex autem punctum L, ad pyramidem cujus basis polygonum EOPFGRHS, et vertex punctum N. ut igitur conus AL ad X folidum, ita pyramis cujus basis polygonum ATBYCVDQ, et vertex punctum L ad pyramidem cujus basis polygonum EOPFGRHS, et vertex N punctum. conus autem AL major est pyramide quae est in ipfo; majus igitur est folidum X pyramide quae est in cono EN<sup>f</sup>. sed et minus; quod est absurdum. non igitur ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita est AL conus ad folidum aliquod minus cono EN. fimiliter demonftrabitur neque ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita esse conum EN ad aliquod folidum minus cono AL. Dico praeterea neque esse ut ABCD circulus ad circulum EFGH, ita AL conum ad aliquod folidum majus cono EN. fi enim fieri potest, fit ad folidum majus, quod fit I. Ergo invertendo ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita erit folidum I ad AL conum. erit autem ut folidum I ad AL conum, ita conus EN ad aliquod folidum, quod quidem minus erit cono AL<sup>f</sup>, quia folidum I majus est cono EN. et igitur ut EFGH circulus ad circulum ABCD, ita conus EN ad aliquod folidum minus cono AL, quod fieri non posse

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

ostensum est. non igitur ut  $ABCD$  circulus ad circulum  $EFGH$ , ita conus  $AL$  ad aliquod solidum majus cono  $EN$ . ostensum autem est neque esse ad minus. Ergo ut  $ABCD$  circulus ad circulum  $EFGH$ , ita est conus  $AL$  ad  $EN$  conum. sed ut conus ad conum, ita est cy-



g. 15. 5. lindrus ad cylindrum $g$ ; est enim uterque utriusque triplus $h$ . et igitur  
 ▲ 10. 12. ut  $ABCD$  circulus ad circulum  $EFGH$ , ita sunt super ipsis cylindri  
 æque alti. Ergo conī et cylindri qui eandem habent altitudinem, in-  
 ter se sunt ut bases. Q. E. D.

## PROP. XII. THEOR.

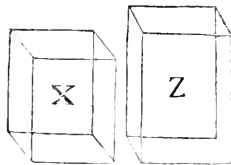
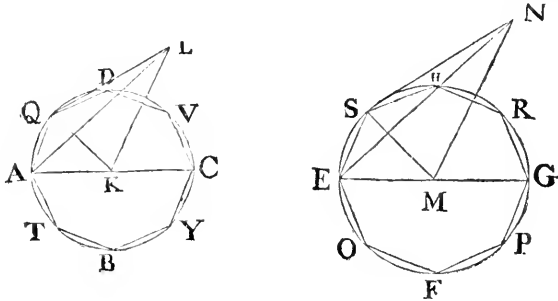
**S**IMILES conī et cylindri inter se sunt in triplicata ra-  
 tione diametrorum basium.

Sint similes conī et cylindri, quorum bases quidem circuli  $ABCD$ ,  
 $EFGH$ , diametri vero basium  $AC$ ,  $EG$ , et axes conorum vel cylindro-  
 rum

# LIBER DUODECIMUS.

rum  $KL$ ,  $MN$ . Dico conum cujus basis  $ABCD$  circulus, vertex autem punctum  $L$ , ad conum cujus basis circulus  $EFGH$ , vertex autem  $N$  punctum, triplicatam habere rationem ejus quam habet  $AC$  ad  $EG$ .

Si enim non habet conus  $ABCDL$  ad conum  $EFGHN$  triplicatam rationem ejus quam  $AC$  ad  $EG$ , habebit  $ABCDL$  conus ad aliquod solidum minus cono  $EFGHN$  triplicatam rationem, vel ad majus. ha-



beat primum ad minus quod fit  $X$ ; iisdemque omnino ut in propositione praecedente constructis, ostendetur, ut in ea, pyramidem cujus basis quidem polygonum  $EOFPGRHS$ , vertex autem  $N$  punctum. majorem esse solido  $X$ . describatur etiam in circulo  $ABCD$ , polygono  $EOFPGRHS$  simile polygonum  $ATBYCVDQ$ , a quo erigatur pyramis eundem verticem habens quem conus; et triangulorum contentium pyramidem cujus basis quidem est polygonum  $ATBYCVDQ$ ,

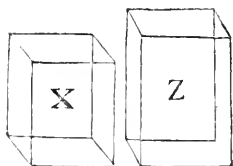
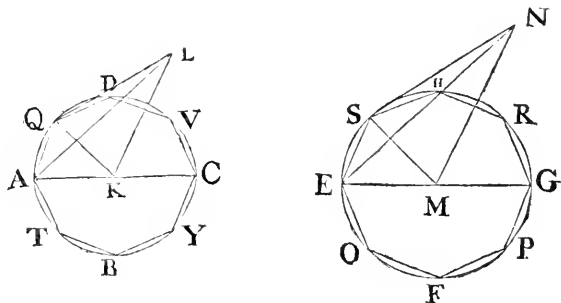
vertex autem punctum  $L$ , unum fit  $LAQ$ ; triangulorum vero contentium pyramidem cujus basis  $EOFPGRHS$  polygonum, et vertex punctum  $N$ , unum fit  $NES$ ; et jungantur  $KQ$ ,  $MS$ . Quoniam igitur conus  $ABCDL$  similis est cono  $EFGHN$ , erit ut  $AC$  ad  $EG$ , ita <sup>a. 24. Def. 11.</sup>  $KL$  axis ad axem  $MN$ <sup>b. 15. 5.</sup>; ut autem  $AC$  ad  $EG$ , ita  $AK$  ad  $EM$ <sup>b</sup>; itaque ut  $AK$  ad  $EM$ , ita  $KL$  ad  $MN$ ; et permutando ut  $AK$  ad  $KL$ , ita  $EM$  ad  $MN$ . et anguli  $AKL$ ,  $EMN$  aequales sunt, rectus enim uterque est; circa igitur aequales angulos latera sunt proportionalia, et

c. 6. 6. propterea simile<sup>c</sup> est  $AKL$  triangulum triangulo  $EMN$ . rursus, quoniam est ut  $AK$  ad  $KQ$ , ita  $EM$  ad  $MS$  et sunt circa aequales angulos  $AKQ$ ,  $EMS$ , etenim quae pars est angulus  $AKQ$  quatuor rectorum qui sunt ad  $K$  centrum, eadem est pars et angulus  $EMS$  quatuor rectorum qui sunt ad centrum  $M$ ; erit triangulum  $AKQ$  triangulo  $EMS$  simile<sup>c</sup>. et quoniam ostensum est ut  $AK$  ad  $KL$ , ita esse  $EM$  ad  $MN$ , aequalis autem est  $AK$  ipsi  $KQ$ , et  $EM$  ipsi  $MS$ , erit ut  $QK$  ad  $KL$ , ita  $SM$  ad  $MN$ ; igitur circa aequales angulos  $QKL$ ,  $SMN$ , sunt enim recti, latera sunt proportionalia; quare triangulum  $LKQ$  simile est triangulo  $NMS$ . et quoniam ob similitudinem triangulorum  $AKL$ ,  $EMN$  est ut  $LA$  ad  $AK$ , ita  $NE$  ad  $EM$ ; ob similitudinem vero triangulorum  $AKQ$ ,  $EMS$ , ut  $KA$  ad  $AQ$ , ita  $ME$  ad  $ES$ ; erit ex aequali

f. 22. 5.<sup>d</sup>  $LA$  ad  $AQ$ , ita  $NE$  ad  $ES$ . rursus, quoniam ob similitudinem triangulorum  $LQK$ ,  $NSM$  est ut  $LQ$  ad  $QK$ , ita  $NS$  ad  $SM$ ; et ob similitudinem triangulorum  $KAQ$ ,  $MES$  ut  $KQ$  ad  $QA$ , ita  $MS$  ad  $SE$ ; ex aequali<sup>d</sup> erit ut  $LQ$  ad  $QA$ , ita  $NS$  ad  $SE$ . ostensum autem est et ut  $QA$  ad  $AL$ , ita  $SE$  ad  $EN$ ; quare rursus ex aequali ut  $QL$  ad  $LA$ , ita  $SN$  ad  $NE$ . triangulorum igitur  $LQA$ ,  $NSE$  proportionalia sunt latera, ideoque aequiangula sunt  $LQA$ ,  $NSE$  triangula<sup>e</sup>, et inter se similia. quare et pyramis cujus basis triangulum  $AKQ$ , vertex autem  $L$  punctum, similis est pyramidi cujus basis  $EMS$  triangulum,

et

et vertex punctum N, sunt enim et ipsarum anguli solidi inter se aequales<sup>f</sup>, et similibus planis multitudine aequalibus continentur. pyra-f. B. 11. mides autem similes, et quae triangulares bases habent, in triplicata sunt ratione homologorum laterum<sup>g</sup>; ergo pyramis AKQL ad pyra-g. 8. 12. midem EMSN triplicatam habet rationem ejus quam AK habet ad EM. similiter a punctis quidem D, V, C, Y, B, T ad K, a punctis



vero H, R, G, P, F, O ad M ducentes rectas lineas, et a triangulis erigentes pyramides vertices eisdem habentes quos coni, ostendemus et unamquamque pyramidum ad unamquamque ejusdem ordinis triplicatam rationem habere ejus quam habet AK latus ad homologum latus EM, hoc est quam AC ad EG. sed ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia<sup>h</sup>; est igitur h. 12. 5. tur et ut AKQL pyramis ad pyramidem EMSN, ita tota pyramis cujus

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

jus basis  $ATBYCVDQ$  polygonum, vertex autem punctum  $L$ , ad totam pyramidem cujus basis polygonum  $EOFPGRHS$ , et vertex punctum  $N$ . quare et pyramis cujus basis  $ATBYCVDQ$  polygonum vertex autem punctum  $L$ , ad pyramidem cujus basis polygonum  $EOFPGRHS$ , et vertex punctum  $N$ , triplicatam rationem habet ejus quam  $AC$  habet ad  $EG$ . ponitur autem conus cujus basis circulus  $ABCD$ , vertex autem punctum  $L$ , ad solidum  $X$  triplicatam rationem habere ejus quam  $AC$  ad  $EG$ ; ut igitur conus cujus basis circulus  $ABCD$ , vertex autem punctum  $L$ , ad solidum  $X$ , ita est pyramis cujus basis  $ATBYCVDQ$  polygonum, vertex autem punctum  $L$ , ad pyramidem cujus basis polygonum  $EOFPGRHS$ , et vertex punctum  $N$ . dictus autem conus major est pyramide quae in ipso, etenim eam comprehendit; majus igitur est solidum  $X$  pyramide cujus basis polygonum  $EOFPGRHS$ , vertex autem punctum  $N$ . sed et minus; quod fieri non potest. non igitur conus cujus basis  $ABCD$  circulus, et vertex punctum  $L$ , ad aliquod solidum minus cono cujus basis circulus  $EFGH$ , et vertex  $N$  punctum, triplicatam rationem habet ejus quam  $AC$  habet ad  $EG$ . similiter demonstrabimus neque conum  $EFGHN$  ad aliquod solidum minus cono  $ABCDL$ , triplicatam rationem habere ejus quam habet  $EG$  ad  $AC$ . Dico neque  $ABCDL$  conum ad solidum majus cono  $EFGHN$  triplicatam habere rationem ejus quam  $AC$  habet ad  $EG$ . si enim fieri potest, habeat ad aliquod solidum majus, quod sit  $Z$ . invertendo igitur, solidum  $Z$  ad conum  $ABCDL$  triplicatam rationem habet ejus quam  $EG$  ad  $AC$ . erit autem ut solidum  $Z$  ad conum  $ABCDL$ , ita  $EFGHN$  conus ad aliquod solidum, quod quidem minus erit cono  $ABCDL$ , quoniam solidum  $Z$  majus est cono  $EFGHN$ . ergo et conus  $EFGHN$  ad solidum aliquod minus cono  $ABCDL$ , triplicatam rationem habebit ejus quam  $EG$  habet ad  $AC$ , quod fieri non posse demonstratum est. non igitur  $ABCDL$  conus ad solidum aliquod

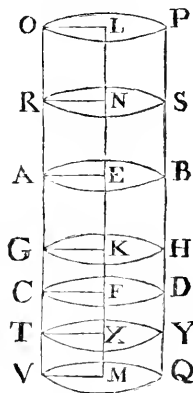


aliquod majus cono EFGHN, triplicatam rationem habet ejus quam AC ad EG. ostensum autem est neque ad minus. Quare conus ABCDL ad EFGHN conum, triplicatam rationem habet ejus quam AC ad EG. ut autem conus ad conum, ita cylindrus ad cylindrum<sup>b</sup>; ostensum enim<sup>k. 15. 5.</sup> est omnem conum tertiam partem esse cylindri eandem quam ipse basim habentis, et aequalem altitudinem. Ergo et cylindrus ad cylindrum triplicatam rationem habebit ejus quam AC ad EG. similes igitur cono et cylindri inter se sunt in triplicata ratione diametrorum basium. Q. E. D.

PROP. XIII. THEOR.

**S**I cylindrus plano secetur oppositis planis parallelo, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

Cylindrus enim AD plano GH secetur oppositis planis AB, CD parallelo, et occurrat axi EF in K puncto, sitque linea GH communis sectio plani GH et superficiei cylindri AD. fit autem AEFC parallelogrammum rectangulum cujus revolutione circa rectam EF cylindrus AD describitur, in quacunq[ue] ejus positione; et sit recta GK communis sectio plani GH et ipsius AEFC. Quoniam igitur plana parallela AB, GH secta sunt plano AEKG, erunt AE, GK communes ipsorum sectiones parallelae<sup>a</sup>; quare parallelogrammum est AK, et propterea KG est aequalis ipsi EA quae sc. est ex centro circuli AB. eadem ratione et omnes rectae quae ducuntur a puncto K ad lineam GH aequales ostendentur iis quae sunt ex centro circuli

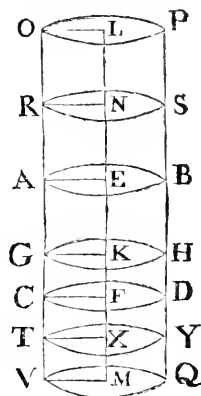


a. 16. 11.

## EUCLIDIS ELEMENTORUM

circuli AB; quare et inter se sunt aequales. linea igitur GH est circum-  
 b. 15. Def. 1. ferentia circuli<sup>b</sup> cuius centrum est punctum K. planum igitur GH cy-  
 lindrum AD dividit in cylindros AH, GD; sunt enim iidem qui de-  
 scriberentur revolutione parallelogrammorum AK, GF circa rectas EK,  
 KF. Dico igitur ut AH cylindrus ad cylindrum HC, ita EK axem  
 ad axem KF.

Producatur enim EF axis ex utraque parte ad puncta L, M; et  
 ipsi quidem EK axi ponantur aequales quotcumque EN, NL; ipsi  
 vero FK aequales quotcumque FX, XM; et  
 per puncta L, N, X, M ducantur plana ip-  
 sis AB, CD parallela. igitur, ut de plano GH  
 ostensum fuit, planorum illorum et superficiei  
 cylindri productae communes sectiones erunt  
 circuli quorum centra sunt L, N, X, M puncta,  
 et abscindent plana cylindros PR, RB, DT,  
 TQ. Quoniam igitur axes LN, NE, EK inter  
 se sunt aequales, erunt cylindri PR, RB, BG  
 c. 11. 12. inter se ut bases<sup>c</sup>. aequales autem sunt bases;  
 ergo et cylindri PR, RB, BG sunt aequales.  
 quoniam vero axes LN, NE, EK sunt inter se  
 aequales, sunt autem et cylindri PR, RB, BG,  
 aequales inter se, atque est ipsorum LN, NE, EK multitudo aequalis  
 multitudini ipsorum PR, RB, BG; quam multiplex est axis KL ipsius  
 KE axis, tam multiplex erit et PG cylindrus cylindri GB. eadem rati-  
 one et quam multiplex est MK axis ipsius axis KF, tam multiplex erit  
 et QG cylindrus cylindri GD. et si quidem axis KL sit aequalis axi  
 KM, erit et PG cylindrus cylindro GQ aequalis; si autem axis KL  
 major sit axe KM, et cylindrus PG major erit cylindro GQ; et si  
 minor, minor. quatuor igitur existentibus magnitudinibus, videlicet  
 axibus



axibus EK, KF, et cylindris BG, GD, sumpta sunt utcumque aequae multiplicia, axis quidem EK et BG cylindri, nempe axis KL et cylindrus PG; axis vero KF et cylindri GD utcumque aequae multiplicia, axis scilicet KM et GQ cylindrus; et demonstratum est si KL axis superat axem KM, et PG cylindrum superare cylindrum GQ; et si aequalis, aequalem esse; et si minor, minorem. est igitur <sup>d</sup> axis EK <sub>d. 5. Def. 5.</sub> ad axem KF, ut BG cylindrus ad cylindrum GD. Quare si cylindrus plano secetur &c. Q. E. D.

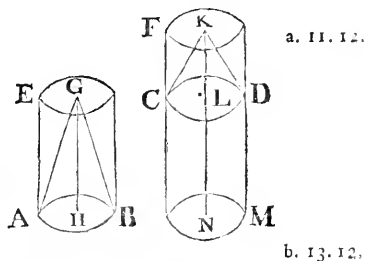
PROP. XIV. THEOR.

**S**UPER aequalibus basibus existentes coni et cylindri, inter se sunt ut altitudines.

Sint enim in aequalibus basibus AB, CD, cylindri EB, FD. Dico ut EB cylindrus ad cylindrum FD, ita esse GH axem ad axem KL.

Producatur enim KL axis ad punctum N, ponaturque ipsi GH axi aequalis LN; et circa axem LN intelligatur cylindrus CM. Quoniam igitur cylindri EB, CM eandem habent altitudinem, inter se sunt ut bases<sup>a</sup>. bases autem sunt aequales; ergo et cylindri EB, CM inter se aequales erunt.

et quoniam cylindrus FM secatur plano CD, oppositis planis parallelo, erit ut CM cylindrus ad cylindrum FD, ita axis LN ad KL axem<sup>b</sup>. aequalis autem est cylindrus quidem CM cylindro EB; axis vero LN axi GH. est igitur ut EB cylindrus ad cylindrum FD, ita axis GH ad KL axem. ut autem EB cylindrus ad cylindrum FD, ita ABG conus ad conum CDK<sup>c</sup>, e. 15. 5. cylindri enim sunt conorum tripli<sup>d</sup>. Ergo et ut GH axis ad axem<sup>d. 10. 12.</sup>



S f

KL,

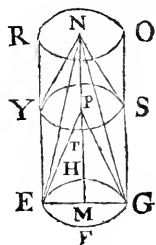
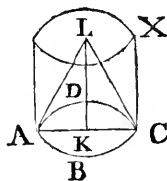
KL, ita est ABG conus ad conum CDK, et cylindrus EB ad FD cylindrum. Super aequalibus igitur &c. Q. E. D.

## PROP. XV. THEOR.

**A**EQUALIUM conorum et cylindrorum bases et altitudines reciproce sunt proportionales; et quorum conorum et cylindrorum bases et altitudines reciproce sunt proportionales, illi inter se sunt aequales.

Sint aequales conus et cylindri, quorum bases quidem ABCD, EFGH circuli, et diametri ipsorum AC, EG; axes autem KL, MN, qui quidem et conorum vel cylindrorum sunt altitudines; et sint conus quidem ALC, ENG, cylindri vero AX, EO. Dico cylindrorum AX, EO bases et altitudines reciproce proportionales esse, hoc est, ut ABCD basis ad basim EFGH, ita esse altitudinem MN ad altitudinem KL.

Altitudo enim KL vel aequalis est altitudini MN, vel non aequalis. sit primum aequalis. est autem AX cylindrus aequalis cylindro EO. qui autem eandem habent altitudinem conus et cy-



2. 11. 12. lindri inter se sunt ut bases<sup>2</sup>; aequalis \* igitur est basis ABCD basi EFGH. est igitur ut basis ABCD ad basim EFGH, ita MN altitudo ad altitudinem KL. non sit autem altitudo KL altitudini MN aequalis, sed major sit MN, et auferatur ab ipsa MN altitudini KL aequalis MP, et per P fecetur EO cylindrus plano TYS oppositis planis circulorum EFGH, RO parallelo; igitur, sectio communis plani TYS et superficies cylindri EO erit circulus, et erit ES cylindrus cujus basis quidem

quidem EFGH circulus, altitudo autem MP. Quoniam igitur AX cylindrus aequalis est cylindro EO, erit ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum<sup>b</sup>. sed ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita basis ABCD ad EFGH basim<sup>a</sup>; cylindri enim AX, ES a. 11. 12. eandem habent altitudinem; ut autem cylindrus EO ad ES cylindrum, ita MN altitudo ad altitudinem MP<sup>c</sup>, nam cylindrus EO fecatur plano c. 13. 12. TYS oppositis planis parallelo. est igitur ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad MP altitudinem. aequalis autem est MP altitudo altitudini KL; quare ut basis ABCD ad EFGH basim, ita MN altitudo ad altitudinem KL. aequalium igitur cylindrorum AX, EO bases et altitudines reciproce sunt proportionales.

Sed cylindrorum AX, EO bases et altitudines sint reciproce proportionales, sit scilicet ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem. Dico AX cylindrum cylindro EO aequalem esse.

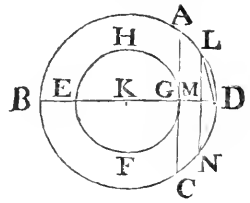
Primo, Sit basis ABCD basi EFGH aequalis; et quoniam ut basis ABCD ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem, erit MN aequalis \* ipsi KL, quare et cylindrus AX aequalis erit<sup>a</sup> cylindro EO. \* A. 5. sed non sit ABCD basis aequalis basi EFGH, et sit ABCD major; et quoniam ut basis ABCD ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem, erit MN major \* KL; iisdemque, ut prius, constructis, quoniam ut ABCD basis ad basim EFGH, ita altitudo MN ad KL altitudinem; quoniam vero altitudo KL aequalis est altitudini MP; erit ut ABCD basis ad basim EFGH, ita AX cylindrus ad cylindrum ES; eandem enim habent altitudinem<sup>a</sup>; ut autem MN altitudo ad altitudinem MP sive KL, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. est igitur ut AX cylindrus ad cylindrum ES, ita cylindrus EO ad ES cylindrum. cylindrus igitur AX cylindro EO est aequalis. similiter autem et in conis. Q. E. D.

## PROP. XVI. THEOR.

**D**UABUS circulis circa idem centrum existentibus, in majori polygonum aequalium laterum, quorumque numerus par sit, describere, quod minorem circulum non attingat.

Sint dati duo circuli ABCD, EFGH circa idem centrum K. oportet in majori circulo polygonum aequalium laterum quorum numerus sit par, describere, non attingens minorem circulum.

- a. 16. 3. Ducatur per K centrum recta linea BD, atque a puncto G ipsi BD ad rectos angulos ducatur GA, et ad C producatur; continget igitur AC circumferentiam EFGH<sup>a</sup>. itaque circumferentiam BAD bifariam secantes, et ejus dimidium rursus bifariam, et hoc semper facientes, tandem relinquemus circumferentiam minorem ipsâ AD<sup>b</sup>. relinquatur sitque LD; et a puncto L ad BD perpendicularis agatur LM, et ad N producatur; junganturque LD, DN.
- c. 3. 3. acqualis igitur<sup>c</sup> est LD ipsi DN, et quoniam LN parallela est ipsi AC, et AC contingit circumferentiam EFGH; ipsa LN circumferentiam EFGH non tanget. et multo minus tanget circumferentiam EFGH rectae lineae LD, DN, quod si ipsi LD aequales deinceps circulo ABCD aptabimus, describetur in eo polygonum aequalium et numero parium laterum non attingens minorem circulum. Q. E. F.

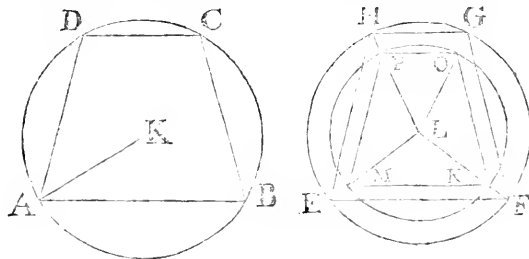


LEMMA II.

## L E M M A II.

**S**I duo trapezia ABCD, EFGH inscripta sint circulis quorum centra K L puncta, fuerint autem latera AB, DC ut et EF, HG parallela; reliqua autem quatuor AD, BC, EH, FG inter se aequalia; sit autem AB latus majus latere EF, et DC majus HG. erit recta KA quae est ex centro circuli in quo majora sunt latera, major ea LE quae est ex centro alterius circuli.

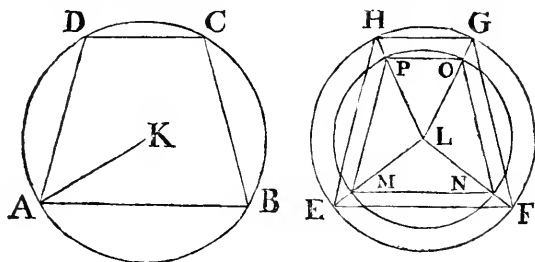
Non enim, si fieri potest, sit KA major recta LE; erit igitur KA vel aequalis ipsi LE vel minor eadem. sit primo KA aequalis LE. quoniam igitur in aequalibus circulis rectae AD, BC aequales sunt ipsis EH, FG, erunt circumferentiae AD, BC aequales circumferentiis EH, FG; quoniam vero rectae AB, DC majores sunt ipsis EF, HG, altera a. 28. 3.



alterâ, erunt circumferentiae AB, DC majores ipsis EF, HG. Ergo tota ABCD circumferentia major est tota EFGH; sed et aequalis, quod fieri non potest. non igitur recta KA aequalis est ipsi LE.

Sed sit KA minor LE, et ipsi KA aequalis ponatur LM, et centro L, intervallo LM describatur circulus MNOP, qui junctis LF, LG, LH,

LH, LE occurrat in N, O, P, M; et jungantur MN, NO, OP, PM, b. 2. 6. quae ipsae EF, FG, GH, HE parallelae<sup>b</sup> et minores erunt; singulae singulis. quoniam igitur EH major est MP, erit et AD quam MP major, et aequales sunt circuli ABCD, MNOP; major igitur est circumferentia AD circumferentiâ MP; eadem ratione circumferentia BC major est ipsâ NO; et quoniam recta AB major est rectâ EF quae ipsâ MN major est, erit AB quam MN multo major. est igitur circumferentia AB major ipsâ MN; eademque ratione DC circumfe-



rentia major est ipsâ PO. tota igitur ABCD major est tota circumferentia MNOP, sed et aequalis, quod fieri non potest. non igitur minor est KA ipsâ LE, sed neque aequalis. Recta igitur KA ipsâ LE necessario est major. Q. E. D.

Cor. Et si fuerit triangulum isosceles cujus latera ipsis AD, BC aequalia sunt, basis autem minor AB majori ipsarum AB, DC; similiter ostendetur recta KA major eâ quae est ex centro circuli circa triangulum descripti.

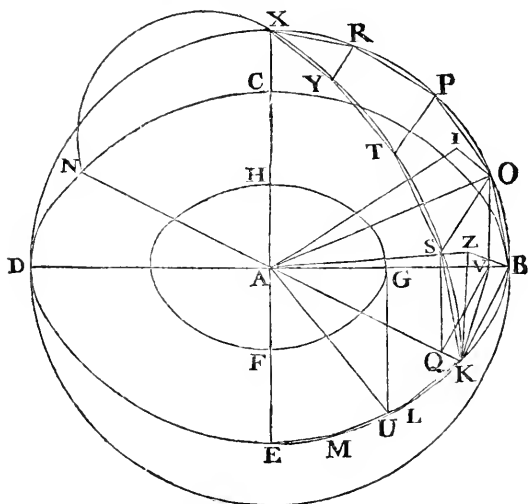


## PROP. XVII. THEOR.

**D**UABUS sphaeris circa idem centrum existentibus, in majori solidum polyedrum describere, cujus superficies minorem sphaeram non attingat.

Intelligentur duae sphaerae circa idem centrum A; oportet in majori sphaera describere solidum polyedrum cujus superficies minorem sphaeram non attingat.

Secentur sphaerae plano aliquo per centrum ducto; itaque sectiones

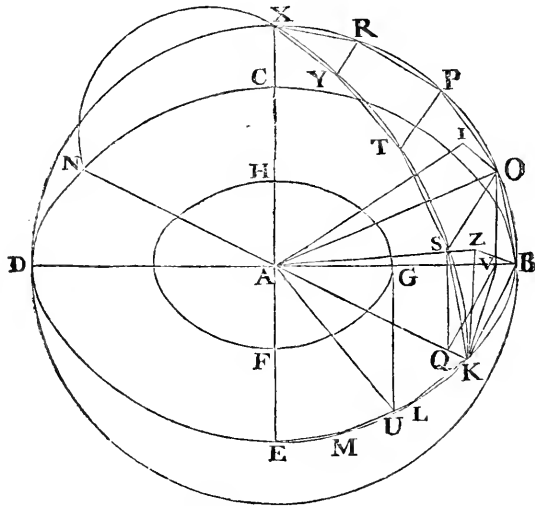


erunt circuli; quoniam diametro manente et fenicirculo circumducto sphaera facta est; ergo in quacunque positione fenicirculum intelligamus, quod per ipsum producitur planum in superficie sphaerae circulum efficiet;



circuli BXD, KXN. Quoniam igitur XA recta est ad planum circuli BCDE, erunt omnia plana quae per ipsam XA transeunt ad planum circuli BCDE recta<sup>c</sup>, quare et semicirculi BXD, KXN recti sunt ad c. 18. 11 illud planum. et quoniam semicirculi BED, BXD, KXN aequales sunt, super aequalibus enim sunt diametris BD, KN, erunt et eorum quadrantes BE, BX, KX inter se aequales. quot igitur latera polygoni sunt in quadrante BE. tot erunt et in quadrantibus BX, KX aequalia ipsis BK, KL, LM, ME. describantur et sint BO, OP, PR, RX; KS, ST, TY, YX, junganturque OS, PT, RY; et a punctis O, S ad rectas AB, AK perpendiculares ducantur OV, SQ. quoniam igitur planum BOXD rectum est ad planum BCDE, et in uno ipsorum BOXD ducta est OV perpendicularis ad AB communem planorum sectionem, erit OV perpendicularis ad planum BCDE<sup>d</sup>. eadem ratione SQ perpendi- d. 4. Def. 11. cularis erit ad idem planum, quia planum KSXN ad rectos angulos est plano BCDE. Jungatur VQ, et quoniam in aequalibus semicirculis BXD, KXN aequales circumferentiae sumptae sunt BO, KS, et ductae perpendiculares OV, SQ ad circulorum diametros, erit OV quidem ipsi SQ aequalis, BV vero aequalis KQ. est autem et tota BA aequalis toti KA, ergo et reliqua VA reliquae QA est aequalis. ut igitur BV ad VA, ita KQ ad QA, ideoque VQ ipsi BK parallela est<sup>e</sup>. et quo- e. 2. 6. niam utraque ipsarum OV, SQ recta est ad circuli BCDE planum, erit OV ipsi SQ parallela<sup>f</sup>; ostensa autem est et ipsi aequalis; ergo f. 6. 11. QV, SO aequales sunt et parallelae<sup>g</sup>. et quoniam QV parallela est ipsi g. 33. 1. SO, sed et parallela ipsi KB, erit et OS ipsi BK parallela<sup>h</sup>; ergo quae h. 9. 11. ipsas conjungunt BO, KS in eodem sunt plano in quo parallelae OS, BK, et quadrilaterum KBOS in uno erit plano. si vero jungantur PB, TK, et a punctis P, T ducantur perpendiculares ad rectas AB, AK, ostendetur recta TP parallela ipsi KB eodem prorsus modo quo ostensa est SO parallela eidem KB; quare <sup>h</sup> TP parallela est ipsi SO,

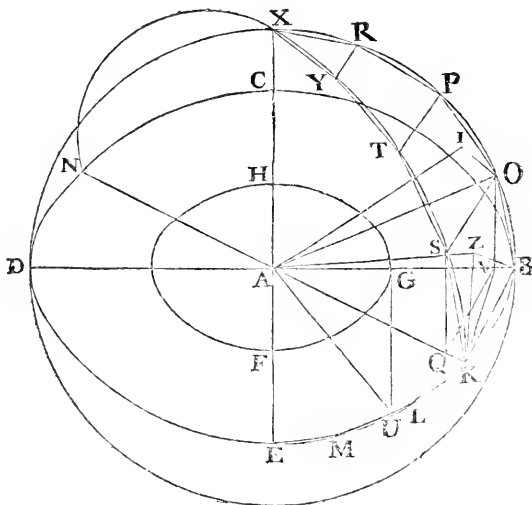
et propterea quadrilaterum  $SOPT$  in uno erit plano. eadem ratione quadrilaterum  $TPRY$  est in uno plano. est autem in uno plano figura  $YRX$ . si igitur a punctis  $O, S, P, T, R, Y$  ad  $A$  ductas rectas lines intelligamus, constituetur quaedam figura solida polyedra inter circumferentias  $BX, KX$ , ex pyramidibus composita, quarum bases quidem  $KBOS, SOPT, TPRY$  quadrilatera, et triangulum  $YRX$ , ver-



tex autem punctum  $A$ . si autem in unoquoque laterum  $KL, LM, ME$  quemadmodum in  $BK$  eadem construamus, et etiam in reliquis tribus quadrantibus, et in reliquo haemisphaerio; constituetur figura quaedam solida polyedra in sphaera descripta, et composita ex pyramidibus, quarum bases sunt quadrilatera jam dicta, et  $YRX$  triangulum, et quae ejusdem ordinis sunt, vertex autem  $A$  punctum. Dicitur autem figurae polyedrae superficies non attinget minorem sphaeram in qua est circulus

lus FGH. Dacatur enim a puncto A ad planum quadrilateri KBOS perpendicularis AZ<sup>b</sup>, cui in puncto Z occurrat, et BZ, ZK jungantur. itaque quoniam AZ recta est ad quadrilateri KBOS planum, et ad omnes rectas lineas quae ipsam contingunt et in eodem sunt plano rectos angulos faciet; ergo AZ ad utramque ipsarum BZ, ZK est perpendicularis. et quoniam AB est aequalis AK, et sunt quadrato quidem ex AB aequalia quadrata ex AZ, ZB; quadrato autem ex AK aequalia ex AZ, ZK quadrata<sup>\*</sup>; ergo quadrata ex AZ, ZB, quadratis<sup>\*</sup> ex AZ, ZK aequalia sunt. commune auferatur quadratum ex AZ, reliquum igitur quadratum ex BZ reliquo ex ZK est aequale; ideoque recta linea BZ rectae ZK aequalis. similiter ostendemus et quae a puncto Z ad puncta O, S ducuntur utrique ipsarum BZ, ZK aequales esse. circulus igitur centro Z, intervallo ZB descriptus per puncta K, O, S transibit, atque erit in circulo quadrilaterum KBOS. et quoniam KB major est quam QV, aequalis autem QV ipsi SO, erit et KB quam SO major. sed KB est aequalis utrique ipsarum BO, KS; quare unaquaeque aequalium circumferentiarum quas auferunt rectae KB, BO, KS, in circulo KBOS major est circumferentia quam auferit recta OS; ideoque tres illae circumferentiae una cum quarta uni ipsarum aequali majores sunt iisdem tribus una cum ea quam auferit recta OS, hoc est tota circumferentia; circumferentia igitur KB in circulo KBOS major est quarta parte totius circumferentiae KBOS circuli, et propterea angulus BZK ad centrum major est angulo recto. Quoniam igitur obtusus est angulus BZK, erit quadratum ex BK majus quadratis ex BZ, ZK<sup>1</sup>, hoc est majus quam duplum quadrati ex BZ. Jungatur KV, et quoniam in triangulis KBV, OBV aequales sunt KB, BV ipsi OB, BV, et aequales continent angulos, erit KVB angulus angulo OVB aequalis<sup>m</sup>. rectus autem est OVB, rectus igitur est angulus KVB. et quoniam BD minor est quam dupla ipsius DV, erit rectangulum con-

n. 8. 6. tentum  $DB$ ,  $BV$  minus duplo rectanguli  $DVB$ , hoc est, erit <sup>n</sup> quadratum ex  $KB$  minus duplo quadrati ex  $KV$ . sed quadratum ex  $KB$  majus est quam duplum quadrati ex  $BZ$ ; ergo quadratum ex  $KV$  quadrato ex  $BZ$  est majus. et quoniam  $BA$  est aequalis  $AK$ , et quadrato quidem ex  $BA$  aequalia sunt quadrata ex  $BZ$ .  $ZA$ , quadrato autem ex  $AK$  aequalia quadrata ex  $KV$ ,  $VA$ , erunt quadrata ex  $BZ$ ,  $ZA$  qua-



dratis ex  $KV$ ,  $VA$ , aequalia; quorum quadratum ex  $KV$  majus est quadrato ex  $BZ$ ; ergo reliquum ex  $VA$  quadratum quadrato ex  $ZA$  est minus, ac propterea recta linea  $AZ$  major quam recta  $AV$ . multo igitur major est  $AZ$  quam  $AG$ , in Propositione enim precedente ostensum est rectam  $KV$  cadere extra circulum  $FGH$ . atque est  $AZ$  quidem ad planum  $KBOS$  perpendicularis, et propterea minima est omnium

nium quae ad planum illud a centro sphaerae duci possunt. Planum igitur KBOS cadit extra minorem sphaeram.

Reliqua etiam plana inter quadrantes BX, KX extra minorem sphaeram cadere ita ostenditur. Ducatur a puncto A ad planum quadrilateri SOPT perpendicularis AI, et IO jungatur. et, ut de plano KBOS et puncto Z ostensum fuit, eodem modo ostenditur punctum I centrum esse circuli circa quadrilaterum SOPT descripti, et rectam OS majorem esse rectam PT, et ostensa est PT parallela ipsi OS. Quoniam igitur trapezia KBOS, SOPT circulis inscripta, habent latera BK, OS parallela, ut et OS, PT; reliqua autem BO, KS, OP, ST inter se aequalia; et est latus BK majus latere OS, et OS majus ipso PT, erit recta ZB major recta IO<sup>o</sup>. Jungatur AO quae aequalis erit ipsi AB, o. 2. Lemma. et quoniam recti sunt anguli AIO, AZB, erunt quadrata ex AI, IO aequalia quadrato ex AO sive AB, hoc est quadratis ex AZ, ZB; et quadratum ex ZB majus est quadrato ex IO, reliquum igitur ex AZ quadratum quadrato ex AI est minus. recta igitur AZ minor est ipsa AI. ostensa autem est AZ major quam AG, multo igitur AI major est recta AG. Ergo planum SOPT cadit extra minorem sphaeram. eadem ratione planum TPRY extra eandem sphaeram cadere ostenditur; ut et planum trianguli YRX, ope sc. Corollarii Lemmatis 2. et similiter reliqua omnia plana quibus continetur solidum polyedrum extra minorem sphaeram cadere ostendentur. Duabus igitur sphaeris circa idem centrum existentibus in majori solidum polyedrum descriptum est ejus superficies minorem sphaeram non attingit. Q. E. D.

Aliter autem et brevius sine ope Prop. 16. ostenditur recta AZ major ipsa AG. Ducatur a puncto G ipsi AG ad rectos angulos GU et AU jungatur. itaque circumferentiam BE bisariam secantes, et dimidium ipsius bisariam, atque hoc semper facientes, tandem relinquemus quandam circumferentiam minorem circumferentia circuli BCDE  
quae

quae subtenditur a recta aequali ipsi GU. relinquatur, fitque circumferentia KB. minor igitur est recta linea KB quam GU. et quoniam angulus BZK est obtusus, ut ostensum fuit, erit BK major quam BZ. sed GU quam BK est major; multo igitur major est GU quam BZ, et quadratum ex GU quadrato ex BZ majus. est autem AU aequalis ipsi AB; ergo quadratum ex AU, hoc est quadrata ex AG, GU, aequale est quadrato ex AB, hoc est quadratis ex AZ, ZB; minus autem est quadratum ex BZ quadrato ex GU; reliquum igitur quadratum ex AZ majus est quadrato ex AG, et ob id recta linea AZ quam recta AG est major.

COR. Si vero et in altera sphaera describatur solidum polyedrum ducendo sc. rectas inter puncta in quibus rectae quae a centro sphaerae ad omnes angulos solidi polyedri in majori sphaera descripti, superficiei minoris occurrunt, eodem ordine quo puncta quibus eadem rectae superficiei majoris sphaerae occurrunt, rectis junguntur; habebit solidum polyedrum in sphaera BCDE ad solidum polyedrum in altera sphaera triplicatam rationem ejus quam diameter sphaerae BCDE habet ad alterius sphaerae diametrum. divisio enim solidis in pyramides numero aequales, et ejusdem ordinis; erunt pyramides similes. etenim habent angulos solidos ad verticem, sphaerae sc. centrum, communes, reliquos

a. B. 11, vero angulos solidos ad bases inter se aequales<sup>a</sup>, quoniam continentur tribus angulis planis qui, singuli singulis, inter se sunt aequales; eademque pyramides continentur similibus planis multitudine aequalibus, et

b. 11. Def. 11, propterea similes sunt<sup>b</sup>. similes autem pyramides inter se in triplicata sunt

c. Cor. 8. 12, ratione homologorum laterum<sup>c</sup>. Ergo pyramis cujus basis est KBOS quadrilaterum, vertex autem punctum A, ad pyramidem in altera sphaera ejusdem ordinis triplicatam rationem habet ejus quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc est quam habet AB ex centro sphaerae majoris, ad eam quae est ex centro alterius sphaerae. similiter



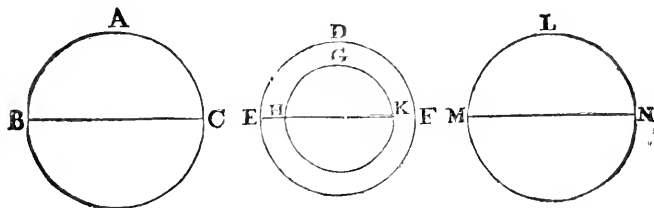
militer et unaquaeque pyramis earum quae sunt in sphaera majori ad unamquamque pyramidum ejusdem ordinis quae sunt in altera sphaera, triplicatam rationem habet ejus quam habet AB ad eam quae est ex centro alterius sphaerae. et ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita antecedentia omnia ad omnia consequentia. Quare totum solidum polyedrum, quod est in sphaera majori, ad totum solidum polyedrum quod in altera sphaera, triplicatam rationem habet ejus quam habet AB ad eam quae est ex centro alterius sphaerae, hoc est quam habet BD diameter ad alterius sphaerae diametrum.

## PROP. XVIII. THEOR.

**S**PHAERAE inter se in triplicata sunt ratione suarum diametrorum.

Intelligentur sphaerae ABC, DEF, quarum diametri BC, EF. Dico ABC sphaeram ad sphaeram DEF triplicatam habere rationem ejus quam habet BC ad EF.

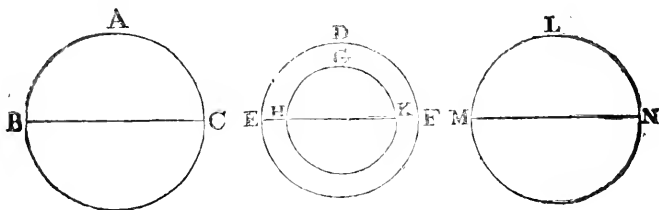
Si enim non habet, sphaera ABC ad sphaeram minorem ipsa DEF,



vel ad majorem, triplicatam rationem habebit ejus, quam habet BC ad EF\*. habeat primo ad minorem, videlicet ad GHK; et intelligatur sphaera

\* Vid. ad hanc notam Prop. 2.

- sphaera DEF circa idem centrum, circa quod est sphaera GHK; describaturque <sup>a</sup> in majori sphaera DEF solidum polyedrum cujus superficies non attingat minorem sphaeram GHK; et in sphaera ABC describatur solidum polyedrum simile ei quod in sphaera DEF descriptum est. solidum igitur polyedrum quod est in sphaera ABC ad solidum polyedrum in sphaera DEF, triplicatam rationem habet ejus quam
3. Cor. 17. 11. BC ad EF<sup>b</sup>. habet autem ABC sphaera ad sphaeram GHK triplicatam rationem ejus quam BC ad EF; ergo ut ABC sphaera ad sphaeram GHK, ita solidum polyedrum in sphaera ABC ad solidum polyedrum in sphaera DEF. major autem est sphaera ABC solido polyedro



- e. 14. 5. quod est in ipsa; ergo <sup>c</sup> et GHK sphaera polyedro quod est in sphaera DEF est major. sed et minor, ab ipso enim comprehenditur, quod fieri non potest. non igitur ABC sphaera ad sphaeram minorem ipsa DEF triplicatam rationem habet ejus quam BC habet ad EF. similiter ostendemus neque DEF sphaeram ad sphaeram minorem ipsa ABC triplicatam rationem habere ejus quam habet EF ad BC. Dico in super sphaeram ABC neque ad majorem sphaeram ipsa DEF triplicatam rationem habere ejus quam BC ad EF. si enim fieri potest, habeat ad majorem LMN; invertendo igitur, sphaera LMN ad ABC sphaeram triplicatam rationem habet ejus quam diameter EF habet ad BC

BC diametrum. ut autem sphaera LMN ad ABC sphaeram, ita sphaera DEF ad aliam quandam sphaeram, quae quidem minor crit sphaera ABC<sup>c</sup>, quoniam sphaera LMN major est sphaera DEF. ergo et DEF c. 14. 5. sphaera ad sphaeram minorem ipsâ ABC, triplicatam rationem habet ejus quam EF ad BC; quod fieri non posse ostensum est. non igitur ABC sphaera ad sphaeram majorem ipsâ DEF triplicatam rationem habet ejus quam BC habet ad EF. ostensum autem est neque ad minorem. Ergo ABC sphaera ad sphaeram DEF triplicatam rationem habet ejus quam BC habet ad EF. Q. E. D.

F I N I S.

U u



# N O T A E

CRITICAE ET GEOMETRICAE;

QUAE

Rationem reddunt eorum in quibus Editio haec differt a Textu Graeco  
Elementorum; inferuntur etiam eisdem paucae in quasdam Propo-  
sitiones observationes.

AUCTORE

ROBERTO SIMSON, M.D.

In Academia Glasguensi Mathematicos Professore.

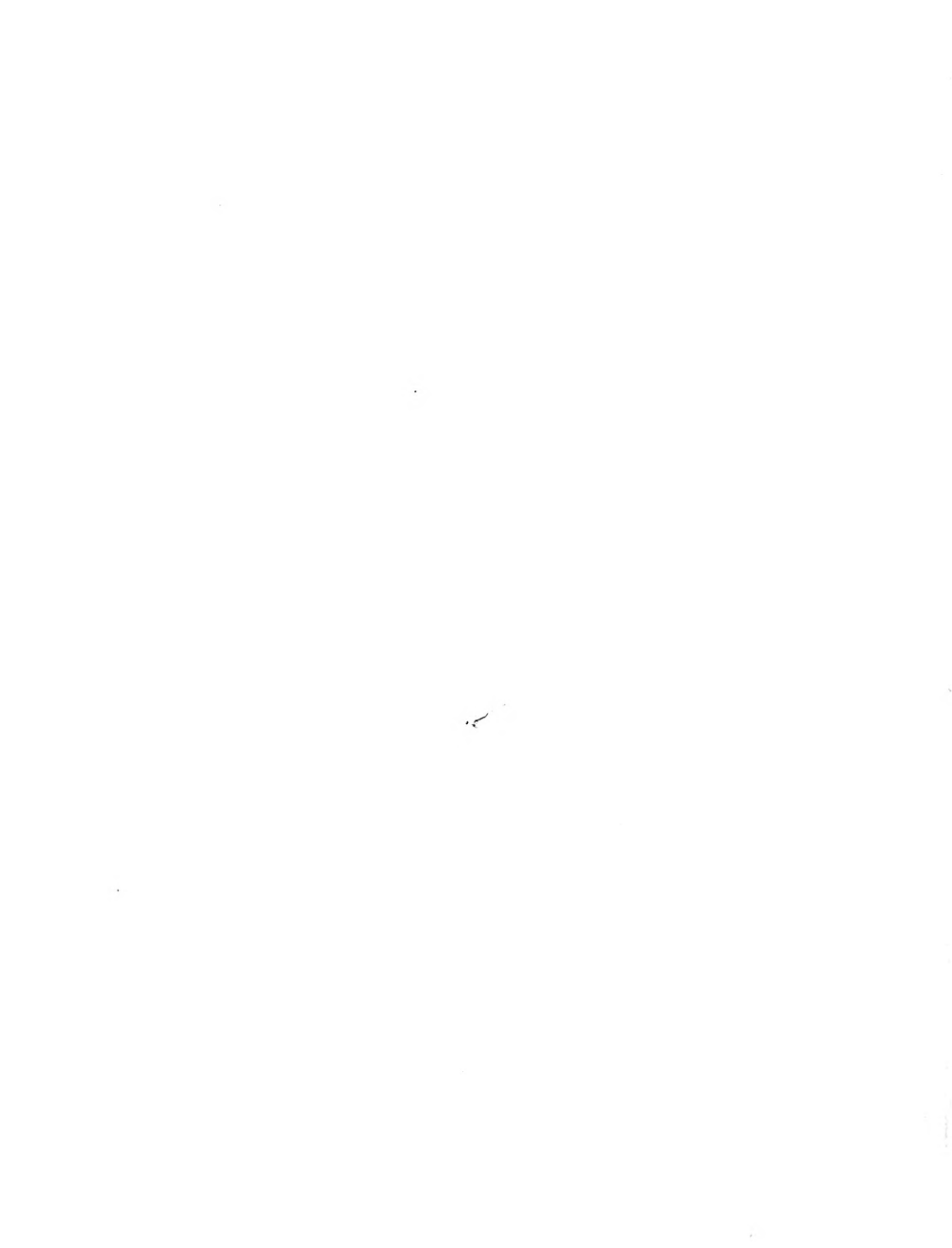
GLASGUAE:

IN AEDIBUS ACADEMICIS

EXCUDEBANT ROBERTUS ET ANDREAS FOULIS

ACADEMIAE TYPOGRAPHI

M. DCC. LVI.



## N O T A E &amp;c.

## Ad DEFINITIONEM VII. LIB. I.

**L**OCO Definitionis quæ habetur in Græcis codicibus alia magis distincta posita est, in qua continetur affectio planæ superficiei quæ in Elementis manifeste ponitur, rectam scilicet lineam duci posse a quovis puncto in plana superficie ad quodvis in eadem, quæ tota sit in ea superficie.

## Ad DEF. VIII. LIB. I.

Videtur cum qui hanc Definitionem posuit voluisse angulum planum in genere definire, hoc est ut non solum angulus qui duabus rectis continetur, sed et is quem aliqui concipiunt contineri rectâ linea et curvâ, vel duabus curvis lineis in plano sibi mutuo occurrentibus, simul definiretur. quamvis autem sensus verborum ἐπ' εὐθείας, in directum, vel in recta linea, manifestus sit quando duæ rectæ dicuntur in directum esse, non tamen apparet quo sensu intelligenda sunt hæc verba, quando recta linea et curva, vel duæ curvæ in directum esse dicuntur; certe hoc loco explicari non potest. verosimile igitur est Definitionem hanc, et Definitionem anguli segmenti, ut et ea quæ de angulo semicirculi, et segmentorum angulis habentur in Prop. 16. et 31. Lib. 3. additamenta esse Editoris minus periti. et ob hanc rationem Definitiones eae, præsertim cum inutiles omnino sunt, notis inversis commatis a reliquis distinguuntur.

## Ad DEF. XVII. LIB. I.

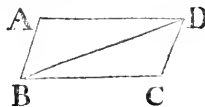
Huic Definitioni adjecta sunt sequentia in omnibus exemplaribus  
 “ quæ

“ quae quidem et bifariam circulum fecat.” haec autem omnifimilis, non enim sunt pars Definitionis, sed Corollarium ex ea. Proclus id ostendit concipiendo unum ex segmentis in quae diameter circulum dividit, altero applicari; manifestum enim est ea necessario sibi mutuo congruere; si enim non congruerent, rectae a centro ad circumferentiam ductae non essent inter se aequales. idem etiam facile ostenditur ex Prop. 31. Lib. 3. et Prop. 24. ejusdem. ex prima enim harum sequitur semicirculos similia esse circuli segmenta; et ex altera segmenta haec aequalia esse.

## Ad DEF. XXXIII. LIB. I.

Definitio haec affectionem continet superfluum rei definitae; etenim omnis figura quadrilatera quae habet latera opposita inter se aequalia, habebit etiam angulos oppositos inter se aequales; et contra.

Sit enim in quadrilatero ABCD, latus AB aequale lateri CD, et latus AD ipsi BC; ducta igitur BD, erunt AD, DB aequales ipsis CB, BD, et basis AB basi CD est aequalis. igitur ex Prop. 8. Lib. 1. erit angulus ADB angulo DBC aequalis; unde per Prop. 4. Lib. 1. erit angulus BAD aequalis ipsi BCD, et ABD ipsi BDC; et propterea angulus ADC aequalis angulo ABC.



Si vero angulus BAD aequalis fuerit angulo BCD, et angulus ABC angulo ADC; erunt et latera opposita inter se aequalia. Quoniam enim ex Prop. 32. Lib. 1. omnes anguli quadrilateri ABCD simul faciunt quatuor rectos, quorum anguli BAD, ADC simul aequales sunt ipsis BCD, ABC; erunt BAD, ADC simul aequales duobus rectis. parallelae igitur sunt AB, CD ex Prop. 28. Lib. 1. similiter, quoniam anguli DAB, ABC aequales sunt duobus rectis, parallelae erunt AD, BC.



BC. parallelogrammum igitur est ABCD; quare opposita ejus latera sunt inter se aequalia ex Prop. 34. Lib. 1.

Omissa igitur est altera ex hisce affectionibus in Def. 33. Lib. 1.

Ad PROP. VII. LIB. I.

Demonstratio hujus duos habet casus, quorum is qui omissus est pariter est necessarius ac ille qui solus habetur in textu Graeco. casum autem omissum primitus fuisse in textu, ex hoc manifestum est, quod secunda pars Prop. 5. Lib. 1. quae scilicet necessaria est demonstrationi casus omissi, nullius sit usus nisi ad hanc demonstrationem; nam clare sequitur haec pars, ex prima et Prop. 13. Lib. 1. addita igitur fuit gratia cujusdam Propositionis inter 5. et 13. nulla autem harum eam indiget praeter 7. hujus igitur gratia posita fuit. versio etiam ex lingua Arabica hunc casum explicite demonstratum habet. et Proclus agnoscit secundam partem Prop. 5. additam fuisse gratia Prop. 7. ob ridiculam tamen rationem, " ut sc. responsio fiat instantiis contra septimam et decimam sex-  
" tam Propositionem Lib. 1." quasi casus omissus, ut ille existimat, instantia esset contra Propositionem ipsam. Vide si lubet Proclum in Prop. 5. et 7. nam piget nugae ejus referre.

Practerea enuntiationem Prop. 7. mutavimus, ejusdem sensu omnino retento. qui enim ex Graecis verbum de verbo reddunt, faciunt eam tyronibus intellectu difficilem.

Ad PROP. XI. LIB. I.

Huic Propositioni Corollarium additum est, quod in Prop. 1. Lib. 11. et alias, necessarium sit.

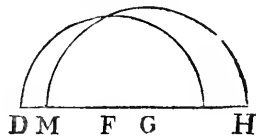
Ad PROP. XX. et XXI. LIB. I.

Refert Proclus in Commentariis in hanc Propositionem Epicureos  
eam

eam impugnasse, utpote asino notam, nullaque demonstratione egentem; ipsisque respondit quamvis duo latera trianguli reliquo majora esse, sensui manifestum sit, quomodo vero hoc fiat dicere ad scientiam spectat. vera autem responso huic objectioni contra hanc et sequentem, aliasque quasdam Propositiones, haec est, numerum axiomatum sine necessitate minime augendum esse. Clarissimus autem Dominus Clairault qui in Praefatione suis Geometriae Elementis, Parisiis Ann. 1741. editis, praefixa, refert Euclidem operam dedisse ut ostendat duo latera trianguli altero triangulo inclusi simul minora esse lateribus ejus qui ipsum includit, oblitus est addere hanc conditionem, viz. si triangula sint super eadem basi; sine hac enim possunt latera trianguli altero inclusi simul majora esse hujus lateribus in data quacunque ratione, quae minor sit quam dupla; ut demonstratum est a Pappo Alexandrino in Prop. 3. Lib. 3. Collect. Mathem.

## Ad PROP. XXII. LIB. I.

Quidam culpant Euclidem quod non ostendat circulos, in constructione hujus Problematis descriptos, sibi mutuo occurrere. perspicuum autem hoc est ex determinatione quam dedit, viz. debere duas ex rectis DF, FG, GH reliquâ majores esse quomodocunque sumptas. Quis enim tyro adeo hebes est ut non ex hac videat circulum, centro F, intervallo FD, descriptum, occurrere rectae FH inter F et H, quoniam FD minor est FH; et similiter circulum centro G, intervallo GH vel GM descriptum, occurrere rectae DG inter G et D; ipsosque sibi mutuo occurrere, quod FD, GH, simul majores sunt reliquâ FG? et quidem determinatio haec simplicior est eâ quam, ex hac deductam, loco ejus posuit Thomas Simpson in Elementis suis Geometriae pag. 49.



ut hanc quam culpat Euclidis omissionem suppleret, nempe debere unam quamlibet ex tribus rectis minorem esse summâ, at majorem excessu reliquarum; ex qua circulos sibi mutuo occurrere in uno casu ostendit, in alio quovis casu dicit idem eodem modo ostendi posse; verum recta GM quam jubet auferre ex recta GF potest ipsâ GF major esse, ut in figura hic apposita, in quo casu demonstratio ejus in aliam mutanda est.

PROP. XXIV. LIB. I.

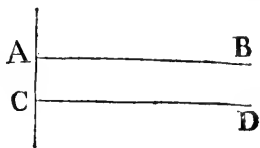
Huic, prope initium, adjecimus verba “rectarum enim DE, DF “ sit DE ea quae non major est quam DF;” hoc est sumatur ea rectarum DE, DF quae non major est alterâ, ad constituendum cum ea angulum EDG aequalem ipsi BAC; etenim sine hac cautione tres essent casus diverfi hujus demonstrationis, ut Campanus aliique faciunt.

PROP. XXIX. LIB. I.

Propositio quae vulgo Postulatum 5<sup>tum</sup>, aut Axioma 11<sup>mum</sup>, a quibusdam 12<sup>mum</sup> dicitur, ex qua haec 29<sup>na</sup> praecipue pendet, haud parum negotii tum veteribus tum recentioribus Geometris praebuit. et quidem inter communes sententias five Axiomata non ponenda videtur, non enim per se manifesta est; sed neque demonstrationem, stricte loquendo, admittit; explicatione autem quadam indiget, ut dilucidior fiat. et hanc, viâ qua possumus facillima, Tyronibus ut sequitur exponemus.

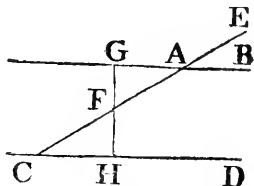
Primo facile potest quispiam concipere duas rectas AB, CD, in eodem plano, quae eidem rectae AC ad rectos sunt angulos, aequidistantes quoque esse, i. e. nullibi ad se invicem accedere, vel a se invicem recedere, quantumvis producantur; vel potius nullus est qui aliter de hisce

rectis concipere potest. etenim una ipsarum AB non potest concipi vergere vel minimum versus alteram CD, ni simul concipiatur AB magis inclinari versus partes rectae AC ad quas est CD, quam versus partes contrarias; quod fieri non potest, recta enim AB ad rectos angulos est ipsi AC. idemque dicendum est



de duabus quibuscumque rectis AB, CD quae cum aliqua recta EAC aequales angulos EAB, ECD ad easdem partes continent; nam haec cuiusdam rectae sunt ad rectos angulos. secetur enim AC bifariam in F,

et ducatur FG perpendicularis ad AB, occurratque rectae CD in H. quoniam igitur in triangulis AFG, CFH, anguli GAF, AFG ipsis HCF, CFH sunt aequales, alter alteri, ex hypothese et Prop. 15. Lib. 1.



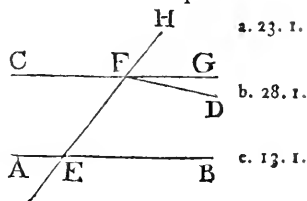
et latus AF aequale est lateri FC, erit AGF angulus aequalis ipsi CHF, ex Prop. 26. Lib. 1. rectus autem est AGF, quare et CHF rectus est. igitur rectae BG, DH ad rectos sunt angulos eidem rectae GH.

Secundo, liquido patet duas rectas ab eodem puncto exeuntes, a se invicem magis et magis divaricare seu divergere, ita ut distantia earum minima, inter finem unius et alteram rectam, fiat datâ quavis major. in longitudine enim ex. gr. decem pedum, sumpta in una rectarum a puncto a quo exeunt, si distantia ipsarum sit unius pedis, productâ rectâ in alios decem pedes, distantia ipsarum augebitur alio pede, eadem ratione qua in prima longitudine; et ita magis et magis. pendet autem hoc ex natura seu definitione rectae lineae quae eandem semper servat directionem, et ex praecedentibus striçte demonstrari non potest.

Hiscè praemissis, sint duae rectae lineae AB, FD, ipsasque secet alia  
recta

recta EFH quae faciat angulos interiores et ad eandem partes, ipsos sc. BEF, EFD simul minores duobus rectis; convenient inter se AB, FD ad partes B, D ad quas sc. anguli sunt minores duobus rectis.

Ad punctum enim F in recta FH angulo interiori BEF aequalis constituatur <sup>a</sup> angulus exterior GFH ad eandem partes rectae FH. igitur ex praemissis rectae parallelae EB, FG<sup>b</sup>, aequidistantes sunt. et quoniam anguli HFG, GFE simul aequales sunt duobus rectis<sup>c</sup>, erunt anguli BEF, EFG simul duobus rectis aequales. anguli autem BEF, EFD simul minores sunt duobus rectis; quare angulus EFG major est angulo EFD, et cadet FD inter aequidistantes seu parallelas rectas EB, FG. productae autem FG, FD quae ab eodem puncto F exeunt, a se invicem tandem distabunt magis quam rectae aequidistantes FG, EB; et propterea recta FD erit tandem ad partes ipsius EB contrarias iis ad quas est punctum F, hoc est convenient cum ipsa EB.



PROP. XXXV. LIB. I.

Demonstratio hujus mutata est in aliam, quoniam tres essent casus seorsim demonstrandi, si argumentum quo auctor ejus utitur adhiberetur, qui quidem casus habentur in versione ex Arabica lingua; in Elementis enim nulli casus qui diversas requirunt demonstrationes, omitendi sunt. aliam igitur viam inivimus, quam primus, quantum scio, ostendit Dominus Clairault in Elementis suis Geometriae, pag. 2 1. eandem postea dedit Thomas Simpson in Elementis suis pag. 3 2. hic autem adhibet Prop. 26. Lib. 1. Euclidis ex qua sola, aequalitas triangulorum non sequitur, nam adhibenda etiam est Prop. 4. Lib. 1. ut

in simili prorsus casu factum videmus in Prop. 34. Lib. 1. Elem. melius igitur est uti solâ quarta.

## PROP. XLV. LIB. I.

Prope finem demonstrationis recta KM parallela ostenditur rectae FL, ope Prop. 33. est autem KH ex constructione parallela ipsi FG, et ostensae fuerunt KHM, FGL rectae lineae. adjectum est Corollarium ex Commandino, quod saepius usui fit.

## PROP. XIII. LIB. II.

**P**ROPOSITIO haec enunciatur solummodo de triangulis acutangulis, quamvis vera sit de omni triangulo. adjecta igitur est Demonstratio in reliquis casibus; Commandinus et Clavius suas etiam dederunt.

## PROP. XIV. LIB. II.

In Demonstratione hujus aliquis inepte interposuit “sin minus, una “ ipfarum BE, ED major est; sit BE major et producat ad F,” quasi aliquod intersit sine major, sine minor earum producta fuerit. vice igitur horum solummodo legendum est “sin minus, producat BE ad F.”

## PROP. I. LIB. III.

**A**UCTORES quidam, praesertim inter recentiores, contra Demonstrationes Apogogicas sine indirectas nimis severe, et quidem imperite disputant, non animadvertentes quaedam esse quae alia via demonstrari non possunt. atque hujus rei Propositio haec exemplum est maxime evidens. directa enim ejus demonstratio afferri minime potest.

nam

nam praeter circuli Definitionem, nullum est principium de circulo ex quo Demonstrationem sive directam sive indirectam conficere licet. ex hac propterea Definitione, et Propositionibus ante demonstratis, necesse omnino est ostendere punctum in Constructione inventum centrum esse circuli. Quoniam igitur in demonstratione utendum est hac Propositione, sc. rectae lineae a centro ad circumferentiam ductae sunt inter se aequales, atque non licitum sit assumere punctum in constructione inventum centrum esse, hoc enim demonstrandum est; manifestum est punctum aliud tanquam centrum assumendum esse. et si ex hoc assumpto absurdum aliquod sequatur, ut quidem Euclides sequi ostendit, tum verum non est punctum assumptum centrum esse; et cum utunque assumptum fuerit, sequitur nullum, praeter inventum in constructione punctum, centrum esse. unde necessitas demonstrationis indirectae, sive ab absurdo patet.

## PROP. XIII. LIB. III.

Quoniam multo facilius est imaginari duos circulos posse se mutuo intus contingere in pluribus punctis quam uno, ad eandem eorum partes, quam ad contrarias; igitur figura hujus casus minime omittenda fuit. ei autem figurae, constructio quae in textu Graeco habetur minus apta fuisset, centra enim circulorum prope eorum circumferentias ponenda essent. alia igitur constructio et demonstratio tradita est, ea scilicet quae est pars posterior ejus quam Campanus ex codicibus Arabicis dedit. nam sine ratione demonstratio apud eum in duas partes divisa est.

## PROP. XV. LIB. III.

Deest conversa partis secundae hujus Propositionis, quamvis in praecedente, in casu simili, conversa enuntiatur et demonstratur; haec igitur  
 conversa

conversa addita est. praeterea in demonstratione primae partis, diametrum AD (in figura Commandini) major ostenditur recta BC ope rectae MN, cum immediate sine hac ostendi potest. alia igitur demonstratio posita est similis ei quae Euclides utitur in praecedente 14. et eadem quam Theodosius tradit in Prop. 6. Lib. 1. Sphaericorum, in casu omnino simili.

## PROP. XVI. LIB. III.

In hac verum sensum Propositionis dedimus sine mentione facta anguli semicirculi, aut ejus quem aliqui concipiunt contineri a circumferentia et contingente, de quibus angulis Clavius, Peletarius aliique recentiores multum inter se contenderunt, et ab iisdem paradoxa satis mira deduxerunt, quibus nullum fundamentum praebet enuntiatio nunc tradita. similiter nihil de angulo segmenti majoris, vel minoris diximus in Prop. 31. hujus Libri; sed sensum Propositionis sine iis enuntiavimus; et haec quidem adulterina esse non temere suspicari aliquem posse affirmat Vieta in pag. 386. Oper. Math.

## PROP. XVII. LIB. III.

Huic casum addidimus in quo punctum datum a quo ducenda est recta linea circulum contingens, est in circuli circumferentia.

## PROP. XX. LIB. III.

Verba ad initium secundae partis hujus demonstrationis, “*κεκλάσθη δὴ πάλιν*” scilicet BDC, male vertuntur a Briggio et Gregorio “Rursus inclinatur,” debent enim verti, ut a Commandino, “Rursus inflectatur.” inflecti autem dicitur recta linea ad lineam, sive rectam sive curvam, quando a puncto ad lineam illam ducta est recta linea, et a puncto occurfus ad aliud punctum ducta est recta linea angulum faciens  
cum



eum priore; ut ex Prop. 90. Datorum manifestum est; ita enim tota linea inter punctum primum et ultimum inflexa sive fracta est ad punctum occurfus sive inflexionis. simili sensu duae rectae lineae inflecti dicuntur a duobus punctis ad tertium punctum, quando angulum faciunt ad punctum hoc; ut in descriptione Locorum planorum Apollonii in Praefatione Pappi Alexandrini ad Librum suum septimum videri potest. Pleniorem autem reddidimus hanc locutionem ex Prop. 90. Datorum.

PROP. XXI. LIB. III.

Hujus Propositionis duo sunt casus, quorum secundus in quo sc. anguli sunt in segmento minore semicirculo, in textu Graeco non habetur. hujus igitur demonstratio addita est simplicior eâ quam Commandinus dedit, utpote ex primo tantum casu sine ope triangulorum derivata.

PROP. XXIII. et XXIV LIB. III.

In Propositione 24. ostenditur segmentum AEB (vid. figuram Commandini) non posse non congruere segmento CFD, et situm diversum ab eo habere ut CGD, occurrentibus circumferentiis sibi mutuo in tertio puncto G, ex eo quod circulus circulum secaret in pluribus quam duobus punctis. verum hoc fieri non posse ostendi debuit in Prop. 23. aequè ac unum ex segmentis non posse intra alterum cadere. hoc igitur ex Prop. 24. sublatum est, et, in proprio suo loco, in Prop. 23. repositum.

PROP. XXV.

## N O T A E.

## PROP. XXV. LIB. III.

Haec divisa est in tres casus, quorum duo eandem constructionem et demonstrationem habent; eam igitur in duas tantum divisimus.

## PROP. XXXIII. LIB. III.

Et Propositio haec in textu Gracco divisa est in tres casus, quorum duo, is scilicet in quo angulus datus est acutus, et is in quo est obtusus, eandem omnino et constructionem et demonstrationem habent; ultimam igitur demonstrationem tanquam superfluum, et imperiti cujusdam additamentum, ex Elementis sustulimus. Praeterea demonstratio casus in quo angulus datus est rectus, in se ipse per ambages facta est, quam propterea in simpliciore, cum Clavio, mutavimus.

## PROP. XXXV. LIB. III.

Ut Propositio 25. et 33. in plures, sic haec 35. in pauciores casus quam oportuit dividitur. neque putandum est Euclidem eos propter ipsorum simplicitatem omisisse; dedit enim omnium facillimum, cum scilicet in quo utraque recta per centrum transit. et in sequente Prop. 36. separatim demonstrat casum in quo recta transit per centrum. Theon igitur, ut videtur, eos brevitate gratia sustulit, quod minime in institutione elementari faciendum, ut antea monitum. Casus igitur omisos, quos et praebent versiones ex Arabico, additi sunt.

## PROP. XXXVII. LIB. III.

Verba ad finem hujus, viz. "similiter demonstrabitur et si centrum fit in AC" deleta sunt, utpote in se ipse a quodam Editore addita.

## Ad DEFINITIONES quasdam LIB. IV.

QUANDO punctum aliquod existit in recta, aut alia quavis linea, punctum illud apud Geometras Graecos *ἀπλεῖσαι*, tangere, dicitur lineam eam. et quando recta aut circulus circulo quovis modo occurrit, alter alterum *ἀπλεῖσαι* dicitur. quando vero recta aut circulus occurrit circulo, ita ut ipsum non fecerit, dicitur *ἐφάπλεῖσαι*, contingere circulum. et hisce verbis nunquam promiscue utuntur. igitur in Definitione 5. Lib. 4. legendum est *ἐφάπλεῖσαι*, contingit, loco simplicis *ἀπλεῖσαι*. et in Definitionibus 1, 2, 3, et 6<sup>ta</sup> in versione Commandini legendum est "tangit" loco verbi "contingit." et in Definitione 2. et 3. Lib. 3. eadem mutatio facienda est. at in textu Graeco Propp. 18, 19. Lib. 3. verbum simplex mutandum est in compositum.

## PROP. IV. LIB. IV.

Circulum rectas lineas contingere in hac, ut et in Propp. 8. et 13. hujus Libri ex absurdo ostenditur, cum tamen idem in Propp. 17. 33. 37. Lib. 3. directe ostendatur; hanc igitur viam secuti sumus in hisce Propositionibus hujus Libri, praesertim cum brevior sit.

## PROP. V. LIB. IV.

Demonstratio hujus a quodam vitiosa est, non enim ostendit rectas quae latera trianguli bifariam et ad rectos angulos secant, inter se convenire; et inepte dividit Propositionem in tres casus, cum una eademque constructio et demonstratio omnibus inferviat, ut Campanus observavit; repetitiones igitur has omisimus. textus etiam Graecus in Corollario hujus manifeste vitiosus est, nam in eo mentio facta est dati anguli; nihil autem in Propositione habetur, vel haberi potest de angulo dato.

## PROP. XV. et XVI. LIB. IV.

In Corollario primæ harum defunt voces “aequilatero et æquiangulo” in textu Græco. et in Prop. 16. habetur circulus vice circumferentiæ, ubi dicitur “quarum igitur partium est ABCDF circulus.”

## DEF. III. LIB. V.

**R**ECENTIORUM multi Definitionem hanc tanquam minime probam rejiciunt. fusc eam explicavit vir doctissimus Isaac Barrow in sine Lect. 3. anni 1666, et, quantum ex natura rei fieri potuit, objectiones contra eam diluit, atque ita sententiam suam in epilogo ejusdem lectionis exponit.

“Nunc tantum adjiciam Elementatori hac in Definitione condenda non aliud forsan propositum fuisse, quam ut methodi plenioris aut ornatûs qualiscunq; causâ, præcludens scilicet accuratioribus istis ejusdem, majoris, et minoris rationis Definitionibus mox subjungendis, generalem quandam et  $\delta\lambda\omicron\chi\epsilon\rho\eta\ \tau\tilde{\epsilon}\ \lambda\omicron\gamma\tilde{\epsilon}$ , ideam discitentium insinuaret animis per Metaphysicam hanc Definitionem; Metaphysicam dico, nec enim proprie Mathematica est, cum ab ea nihil quicquam dependeat, aut deducatur in Mathematicis, nec ut existimo deduci possit. ejusmodi quoque censeri potest posthac tradita Definitio Analogiæ, Analogia est rationum similitudo, quæ nulli Mathematico deserviat usui, nec alio opinor sine proponitur, quam ut per eam generalis quaedam analogiæ notio, crassa licet et confusa, Tyronibus indatur. Definitionibus autem exquisitis Mathematicis mox ab illo subjunctis tota rationum Doctrina, tota res Mathematica subniuntur; ad illas igitur potissimum attendi debet, per illas rationum doctrina perfectius clucescit; hæc et consimiles absque notabili Mathe-

“scos

“ seos detrimento profus omitti possent. sicut in Elem. 7. factum videmus, ubi numerorum analogia definitur et pertractatur, nullâ tamen rationis numero competentis exhibitâ definitione, quamvis illic aequè necessaria fuit et utilis definitio talis atque hic est; sed neutro loco magna fuit necessitas. quamquam haud credo rem ipsam adeo generalem et abstractam, eoque conceptu magis arduam et explicatu, definitionis esse capacem commodioris hâc quam Elementator assignavit, quam ideo visum est uberius explicare; neque non ab oppugnantium captionibus asserere.” Quibus quidem nihil addendum video, praeterquam quod hisce rationibus de inutilitate hujus et sequentis 8<sup>vae</sup> Definitionis persuasus, firmiter credam eas non Euclidis esse, sed cujusdam minus periti Editoris.

DEF. XI. LIB. V.

Verbum “ deinceps ” necessario addendum fuit ante verbum “ proportionales ” in hac definitione; et ita citata habetur in 33. Prop. Lib. 11.

Post hanc Definitionem ponenda fuit, ut in loco proprio, Definitio rationis compositae, cujus species sunt ratio duplicata, triplicata &c. quae in hac et praecedente definiuntur. eam autem rejecit Theon in Def. 5. Lib. 6. ubi rationis compositae Definitionem inutilem omnino et absurdam tradit. aliam igitur ejusdem inter Def. 11. et 12. posuimus, quam, sine dubio, dedit Euclides, citat enim eam explicite in Prop. 23. Lib. 6. quamque tradunt Clavius, Herigonius et Barrovius, retentâ etiam Theonis Definitione, quam ex Elementis sustulisse debuerunt.

DEF. XIII. LIB. V.

Hacc et sequentes terminorum quorundam, qui in Lib. 5. et se-

quentibus occurrunt, explicationem continent, qui quidem, paucis exceptis, ex ipsis Propositionibus hujus libri in quibus primò utuntur factis innotescunt; a Theone vel alio quodam additæ videntur hæc Definitiones. Utut sit, eas paulo distinctius tradere, Tyronum gratia, visum est.

## PROP. IV. LIB. V.

In constructione, demonstrationi hujus præmissa, verba  $\acute{\alpha} \epsilon\tau\upsilon\chi\epsilon$ , utunque, bis omittuntur in textu Græco, et versione Latina; addita igitur sunt, utpote omnino necessaria.

Ibid. in demonstratione; in textu Græco, et in versione Latina Commandini, et in ea Henrici Briggii quæ prodit Londini anno 1620, una cum textu Græco priorum sex Librorum, quamque in hoc loco sequitur David Gregorius in sua editione operum Euclidis, sequentia habentur, viz. "sumptæ autem sunt ipsarum A, C æque multiplices "K, L; et ipsarum B, D aliae ( $\acute{\alpha} \epsilon\tau\upsilon\chi\epsilon$ ) utunque æque multiplices "M, N;" quæ quidem minime vera sunt. delendum igitur fuit verbum "utunque." mirum autem est neque Briggium qui verbum hoc recte omisit in uno loco Prop. 13. hujus Libri, neque Gregorium qui idem verbum mutavit in "quædam" vel ipsum omisit in quatuor locis ejusdem Prop. 13. idem non omisisse in hoc loco Prop. 4. et in secundo loco in quo habetur in Prop. 17. hujus, in quibus, salva veritate, manere non potest. in nullo autem ex his locis verba  $\acute{\alpha} \epsilon\tau\upsilon\chi\epsilon$  è textu Græco deleverunt Editores, ut fecisse debuerunt.

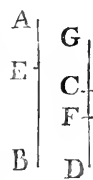
Occurrunt eadem verba in quatuor locis Prop. 11. hujus, in quorum primo et ultimo necessaria sunt, at in secundo et tertio, quamvis vera, sunt tamen superflua; ut etiam sunt in secundo loco in quo habentur eadem verba in Prop. 12. hujus.

COR. PROP. IV. LIB. V.

Corollarium hoc ab imperito quodam additum est vice legitimæ demonstrationis quam Theon aliufve Editor non ex hoc, sed proprio suo loco in hoc libro sine dubio sustulit. volebat enim auctor Corollarii hujus ostendere magnitudines proportionales E, G, F, H etiam inverse proportionales esse, sc. G esse ad E, ut H ad F; quod quidem verum est, minime autem ex hac Propositione vel ejusdem demonstratione dependet. Cum enim dicit “Quoniam igitur demonstratum est, si K superat M, et L ipsam N superare” &c. Ostensum quidem hoc est in demonstratione Propositionis, non tamen ex eo quod proportionales sint E, G, F, H, hoc enim est conclusio ipsius Propositionis. Quare illud “Quoniam igitur demonstratum est” &c. omnino ineptum est. Ostendisse enim debuit si K superat M, et L ipsum N superare, ex hypothefi quod E, G, F, H sunt proportionales, et Def. 5. hujus Libri, quod quidem minime ostendit; habetur autem hoc in Prop. B. quam loco proprio posuimus vice hujus Corollarii. et Corollarium aliud Prop. 4<sup>tae</sup> additum est necessarium quidem Demonstrationi Prop. 18. hujus libri, aliasque non raro utile, cujus demonstratio continetur in ea Propositionis.

PROP. V. LIB. V.

In constructione, demonstrationi hujus præmissâ, quæ habetur in textu Græco, ejusque versionibus Latinis, requiritur ut quotuplex est AE ipsius CF, totuplex fiat EB ipsius CG, hoc est requiritur ut EB secetur in tot partes æquales quot sunt in AE æquales ipsi CF. ex hoc autem manifestum est constructionem hanc non esse Euclidis. non enim docet Euclides quomodo secari possint rectæ lineæ, nedum aliæ magnitudines, in partes æquales, antequam ad Prop. 9. Lib. 6. veniant.



nunquam

nunquam autem in constructione jubet aliquid fieri, quod facere non prius docuerat. Constructionem igitur mutavimus in eam quam sine dubio Euclides dederat, in qua nihil requiritur praeterquam quod magnitudo sibi ipsi aliquoties addatur. et haec quidem habetur in versionibus ex Arabica lingua, quamvis in iisdem enuntiatio Propositionis, ejuisque demonstratio foede depravata sint. Jacobus etiam Peletarius, qui primus, quantum scio, errorem hunc observavit, legitimam constructionem dedit in Euclide suo, postquam erroneam dederat, quam dicit se omittere noluisse, quod subtilis sit et ad similes reperiendas ingenium acuat; cum revera nulla sit inter demonstrationes differentia nisi in constructione, quam quidem ab imperito Librario ortam esse admodum verisimile videtur. Clavius etiam et vulgarem et legitimam constructionem tradit, non tamen observavit, ut neque Peletarius, rationem propter quam una alteri praefenda sit.

## PROP. VI. LIB. V.

Hujus duo sunt casus, quorum prioris tantum, qui magis simplex est, demonstratio in Graecis habetur. et verisimile est Theonem existimasse satis fuisse hunc tradere, cum neuter eorum alicui demonstrationi inserviret in mutilata ejus editione Lib. 5<sup>ti</sup>; et eodem jure alterum casum, ut et Propositionem quintam omisisse potuisset. alterius autem demonstratio addita est, uterque enim, ut et Prop. 5. necessarius est demonstrationi Prop. 18. hujus libri. Versiones etiam ex Arabica lingua breviter praebent utrumque casum.

## PROP. A. LIB. V.

Propositione hâc saepissime utuntur Geometrae, et in 25. hujus Libri, 31. Lib. 6. 34. Lib. 11. et 15. Lib. 12. adhibetur; a Theone autem ex Elementis sublata videtur, quoniam satis evidens apparebat



parebat ei aliisque qui confufaneam et indiftinctam proportionalium ideam apud vulgus receptam, fubftituunt loco accuratae ideae quae ex Definitione 5. Lib. 5. habetur. neque dubium eft Eudoxum vel Euclidem qui hâc nihilo difficiliore 7<sup>imam</sup> fc. et 9<sup>am</sup> hujus Libri demonstratione munivit, etiam huic in Elementis locum dediffe.

Ex ea autem Alphonfus Borrellius anſam arripuit graviter, fed iniquiffime culpandi Definitionem 5. hujus Libri. en ejus verba in pag. 126. Euclidis fui reſtituti Edit. Piſis 1653, “Nec demum hæc minima cognitio ex diſta proprietate” quae fc. continetur in Def. 5. 5. “colligi poteſt, quod ſcilicet, ſi quatuor magnitudines ſint proportionales, cum prima excedit ſecundam, neceſſario tertia magnitudo quartam ſuperare debet; quod Clavius conſtitetur in 16. Prop. Lib. 5. “Elementorum.” Clavius autem hoc diſertis verbis non conſtitetur, ſed occaſionem dedit Borrellio hæc de ſe ſcribendi, cum in loco citato Clavius Commandinum reprehendat, et quidem recte, quod Propoſitionem hanc ex Prop. 16. Lib. 5. demonſtret, neque tamen ipſe Clavius aliquam ejus demonſtrationem tradat, ſed eam perſpicuam eſſe putet ex natura proportionum, ut loquitur in ſine Prop. 14. et 16. 5. ſuae editionis, et cum ſequitur Petrus Herigonius in ſchol. 1. Prop. 14. Lib. 5. quaſi aliqua eſſet natura proportionalium prior eâ quae ex ipſarum Definitione intelligenda eſt. et quidem, quamvis demonſtratio Propoſitionis admodum ſit facilis, nullus tamen, quantum ſcio, eam hætenus dedit, præter Doctiſſimum Barrovium qui in reſponſione ſua ad Borellii objectionem ex Definitione 5<sup>ta</sup> hujus Libri eam indirecete ſed breviter et perſpicue oſtendit pag. 322. Lect. Mathem. facile autem directe demonſtratur ex eadem Definitione, quamobrem poſt Propoſitiones de aequè multiplicibus ei locum dedimus.

## N O T A E.

## PROP. B. LIB. V.

Haec etiam ex Definitione 5<sup>ta</sup> facile fluit, quare post praecedentem merito locatur. ineptissime enim posita fuit ut Corollarium Prop. 4. Lib. hujus. Vid. Notam ad Cor. ejus Prop.

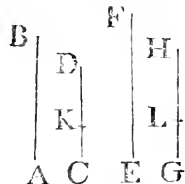
## PROP. C. LIB. V.

Propositio haec saepius a Geometris usurpatur, et necessaria est Prop. 5<sup>tae</sup> et 6<sup>tae</sup> Lib. 10. Clavius in notis post Def. 8. Lib. 5. eam, in numeris tantum, ostendit ope quarundam Propositionum Libri 7. ut sc. Definitionem 5. Lib. 5. quatenus numeris congruit, ex eâ numerorum proportionalium quae habetur in Def. 20. Lib. 7. demonstret. plerique autem Commentatores existimant difficile esse ostendere quatuor magnitudines quae proportionales sunt secundum Def. 20. Lib. 7. proportionales quoque esse secundum Def. 5. Lib. 5. Verum hoc facile ut sequitur ostendi potest.

1mo, Sint A, B, C, D quatuor magnitudines quarum prima A aequae multiplex, vel eadem pars est secundae B, ac tertia C quartae D; erunt A, B, C, D proportionales. Demonstratur hoc in Prop. C.

2do, Si fuerit prima AB eadem partes secundae CD, ac tertia EF quartae GH; erit et in hoc casu AB ad CD, ut EF ad GH.

Sit CK pars ipsius CD, et GL eadem pars ipsius GH; et sit AB aequae multiplex CK, atque EF ipsius GL. Ergo per Prop. C. Lib. 5. est AB ad CK, ut EF ad GL. sunt autem CD, GH aequae multiples ipsarum CK, GL; quare per Cor. Prop. 4. Lib. 5. est AB ad CD, ut EF ad GH.



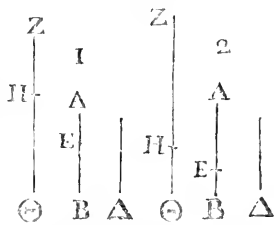
PROP. D.

PROP. D. LIB. V.

Propositio hæc non raro ad alias demonstrandas adhibetur, et necessãria est Propositioni 9. Lib. 6. videtur autem Theonem eam omisissẽ propter rationem in Notis ad Prop. A. memoratam.

PROP. VIII. LIB. V.

In demonstratione hujus Propositionis ut nunc habetur in textu Græco, duo sunt casus, (vid. demonstrationem in editione Hervagii aut Gregorii) quorum primus est is in quo AE minor est EB; et in hoc necessãrio sequitur HΘ multiplicem ipsius EB majorem esse ZH aequè multiplici ipsius AE, quæ quidem ipsius AE multiplex, ex constructione, major est Δ; unde et HΘ major erit Δ. sed in casu secundo, in quo sc. EB minor est ipsa AE, quamvis ZH major fuerit ipsa Δ, potest tamen HΘ minor esse eadem Δ; unde non potest sumi multiplex ipsius Δ quæ primò major sit ipsa K sive HΘ, quoniam simplex Δ eadem est major. quare necesse fuit auctori hujus demonstrationis unam partem constructionis mutare. sine necessitate vero mutavit, in hoc se-



culo casu, aliam partem constructionis in primo adhibitam, quando sc. jubet sumere N multiplicem ipsius Δ primò majorem ipsa ZH; potuit enim sumisissẽ ipsius Δ multiplicem quæ primò major sit ipsa HΘ sive K, ut factum fuit in primo casu. inepte etiam istam K in demonstratione utriusque casus adducit, nulli enim rei inservit, nisi ut demonstratio prolixior evadat. est etiam tertius casus cujus mentio non facta est in hac demonstratione, is sc. in quo AE in primo, aut EB in secundo casu major est quam Δ; in hoc autem sumendæ sunt quæ-

Z z vis

vis ipsius AE, et EB aequae multiplices, puta duplae ipsarum, ut in hac Editione factum est, in qua omnes casus simul demonstrati sunt. ex his autem liquet Theonem aut alium non satis Geometriae peritum Propositionem hanc vitiaffe.

## PROP. IX. LIB. V.

Hujus Propositionis demonstrationem dedimus magis explicitam eâ quae in Elementis haectenus habetur.

## PROP. X. LIB. V.

Aliam hujus demonstrationem tradere necessarium fuit, ea enim quae in Editionibus Graecis et Latinis, aliisque habetur legitima non est. verba enim *major*, *eadem sive aequalis*, *minor* de magnitudinibus et rationibus diverso prorsus sensu dicuntur, ut ex definitione 5<sup>ta</sup> et 7<sup>ima</sup> hujus Libri patet. ope igitur harum examinemus demonstrationem Propositionis decimae, quae ita procedit. “Habeat enim A ad C majorem rationem, quam B ad C. dico A quam B majorem esse. si enim non est major, vel aequalis est vel minor. aequalis autem non est A ipsi B, utraque enim ipsarum A, B ad C eandem haberet rationem; atque eandem non habet. non igitur A ipsi B est aequalis.” vis hujus ratiocinii haec est, si fuerit A ad C, ut B ad C, sumptis ipsarum A, B quibuscunque aequae multiplicibus, et sumptâ quavis multiplici ipsius C, si multiplex ipsius A major fuerit multiplici ipsius C, erit, vi Definitionis 5. Lib. 5. multiplex ipsius B major eadem multiplici ipsius C. sed quoniam, ex hypothesi, A majorem habet rationem ad C, quam B ad C, erunt, vi Definitionis 7. Lib. 5. quaedam ipsarum A, B aequae multiplices, et quaedam multiplex ipsius C tales, ut multiplex ipsius A major sit multiplici ipsius C, at multiplex ipsius B non major sit multiplici ejusdem C. haec autem Propositio directe repugnat praecedenti.

praecedenti. quare A non est aequalis ipsi B. pergit demonstratio, “ sed neque minor est A quam B, haberet enim A ad C, minorem rationem quam B. atqui non habet minorem, non igitur A minor est quam B” &c. hic dicitur “ haberet A ad C, minorem rationem quam B ad C,” sive, quod idem est, haberet B ad C, majorem rationem quam A ad C, hoc est, vi Def. 7. Lib. 5. erunt quaedam ipsarum B, A aequae multiplices, et quaedam ipsius C multiplex tales, ut multiplex ipsius B major sit multiplici ipsius C, at multiplex ipsius A non major sit eadem multiplici ejusdem C. et ostendendum fuit hoc nunquam contingere posse, si ratio A ad C, major fuerit quam ratio B ad C; demonstrandum igitur fuit, in hoc casu multiplicem ipsius A semper superare multiplicem ipsius C, si multiplex ipsius B eandem superet; hoc enim ostenso, manifestum esset non posse B ad C, majorem rationem habere quam A ad C, hoc est non posse A ad C, minorem habere rationem quam B ad C. minime autem ostensum est hoc in demonstratione Propositionis decimae, sed si decima demonstrata esset, immediate ex ea deduci posset; verum sine ejus ope non facile idem ostendetur, ut demonstrationem tentanti patebit. quare demonstratio decimae legitima non est. Videtur autem eum qui demonstrationem decimae, quae jam habetur, posuit vice ejus quam Eudoxus aut Euclides dederat, deceptum fuisse transferendo id quod manifestum quidem est de magnitudinibus, ad rationes, magnitudinem sc. quamvis non posse simul majorem et minorem esse aliã. Quae eidem aequalia, et inter se sunt aequalia, Axioma est maxime evidens, si de magnitudinibus intelligatur; Euclides autem eo non utitur ad ostendendum rationes quae eidem rationi sunt eadem, inter se eandem esse, sed hoc explicite demonstrat in Prop. 11. Lib. 5. Demonstrationem autem decimae quam in textu posuimus eandem esse cum ea Eudoxi aut Euclidis vix dubitandum est, cum ex ipsa Definitione majoris ratio-

nis, 7<sup>ima</sup> sc. Lib. 5. conclusio decimae breviter et directe ostendatur.

Propositio autem praedicta ope decimae ita ostenditur. Habeat A ad C, majorem rationem quam B ad C, si ipsarum A, B sumantur aequae multiplices quaedam, et ipsius C quaedam multiplex, fitque multiplex B major multiplici ipsius C, erit et multiplex A major eadem ipsius C multiplici.

Sint enim ipsarum A, B aequae multiplices D, E, et ipsius C multiplex F, ita ut E multiplex ipsius B major sit F; erit et D multiplex ipsius A major F.

Quoniam enim A habet ad C, majorem rationem quam B ad C, erit per 10. 5. A major quam B; igitur D multiplex ipsius A major erit E aequae multiplici ipsius B. est autem E major F; multo igitur D major est ipsa F.



### PROP. XIII. LIB. V.

In versionibus Commandini, Briggii et Gregorii habetur ad initium demonstrationis, “et multiplex quidem C superat multiplicem D; multiplex vero E non superat multiplicem F.” quae quidem ex textu Graeco ad verbum translata sunt. sensus autem loci manifeste requirit ita legantur, viz. “ut multiplex quidem C superet multiplicem D; multiplex vero E non superet multiplicem F.” et hoc modo hic locus recte restitutus fuit in primis editionibus Elementorum ex versione Commandini quae Oxoniae impressa fuerunt. in posterioribus vero, saltem anni 1747, error textus Graeci retentus est.

Corollarium additum est Propositioni 13<sup>iae</sup> quod necessarium sit Prop. 20, 21. hujus Libri, et aequae utile sit ac ipsa Propositio.

PROP. XIV.

PROP. XIV. LIB. V.

Hujus duos casus, quorum demonstratio non habetur in textu Graeco, visum est addere. Eorum enim demonstratio non omnino similis est demonstrationi primi casus.

PROP. XVII. LIB. V.

Ordo demonstrationis hujus in alium magis naturalem, in paucis, mutatus est. quod etiam factum fuit in Prop. 11.

PROP. XVIII. LIB. V.

Demonstratio hujus minime est Euclidis, nec legitima est. nam in ea ponitur, tribus propositis magnitudinibus, quarum duae saltem sunt ejusdem generis, quartam existere ipsis proportionalem; priusquam autem hoc ostensum fuerit, nihil valebit demonstratio quae nunc legitur. verum hoc sine demonstratione assumitur, neque, quantum video, ostendi potest ope Propositionum hanc praecedentium; tantum abest ut pro Axiomate habeatur, ut Clavius post Definitiones Lib. 5. alios interpretes secutus, volebat. Euclides certe id non ostendit, nedum quomodo quarta illa proportionalis inveniri potest, antequam ad 12. 6<sup>ti</sup> Elementi veniat. nunquam autem aliquid in demonstratione Propositionis assumit quod non prius ostenderat, saltem quod existere posse non perspicuum sit; ope enim Propositionis incertae conclusio certa elici non potest. vice igitur demonstrationis quae nunc habetur, quamque certum est Theonem, vel alium quendam, loco demonstrationis Euclidaeae, utpote prolixioris, substituisse, legitimam reposuimus. ut vero Prop. 17. cujus 18<sup>va</sup> est conversa, demonstratur ope Prop. 1. et 2<sup>dæ</sup> hujus Libri, ita in hac quam dedimus demonstratione Prop. 18. tum Propositio 5<sup>ta</sup>, tum uterque casus Prop. 6<sup>ta</sup>, Lib. 5. necessario adhibentur, quae

quaequidem Propositiones sunt converfae 1<sup>mae</sup> et 2<sup>dæ</sup>. hisce autem, quintâ sc. et sexta, nulla Propositio hujus Libri, ut eum nunc habemus, utitur; neque ulli in Elementis præterquam huic 18<sup>væ</sup> utiles esse possunt. et hoc quidem certum est indicium easdem ab Euclide in sua hujus 18<sup>væ</sup> demonstratione adhibitas fuisse, eamque quam posuimus, quaeque, ut fieri debuit, converfa est demonstrationis 17<sup>mæ</sup>, ab ea Eudoxi vel Euclidis haud differre. nulli enim usui infervirent 5<sup>ta</sup> et 6<sup>ta</sup> si in demonstrationibus Lib. 5. adhibita non essent, ut reliquae de aequae multiplicibus Propositiones omnes adhibitaæ sunt.

Hieronymus Saccherius naevum hunc inesse demonstrationi hujus 18<sup>væ</sup> agnoscit in Libro suo cui Titulus Euclides ab omni naevo vindicatus, Mediolani anno 1733, impresso. ut vero naevum hunc tollat, et demonstratio 18<sup>væ</sup> quam nunc habemus legitima reddatur, demonstrare conatur sequentem Propositionem in pag. 115. Libri prædicti, viz.

“Sint quatuor magnitudines A, B, C, D quarum duæ priores in suo proprio genere, ac similiter posteriores vel in eodem cum prioribus genere, vel in alio quodam suo proprio genere consistant. Dico rationem tertiæ C ad quartam D vel aequalem fore, vel majorem, vel minorem ratione primæ A ad secundam B.” Post duas autem Propositiones, tanquam Lemmata, præmissas ita procedit.

“Vel inter possibiles aequae multiplices primæ A, et tertiæ C, ac simul inter possibiles aequae multiplices secundæ B, et quartæ D, una quæpiam reperitur EF multiplex primæ A, et IK multiplex secundæ B invicem aequales; ac simul (in eodem casu) una quædam GH multiplex tertiæ C aequalis ipsi LM multiplici quartæ D. vel nusquam talis aequalitas reperitur. si primum, constat ex jam demonstratis ita fore A ad B, ut C ad D. sin vero nusquam reperitur ejusmodi simul ex utraque parte aequalitas; vel saltem ad alterutram  
“ partem



“ partem reperitur, ut puta ad partem primae A [et secundae B] vel  
 “ nusquam. si primum; ergo (ex praenissis Euclideae majoris, ac mi-  
 “ noris Proportionis Definitione) habebit A ad B majorem aut mino-  
 “ rem proportionem, quam C ad D; prout GH multiplex tertiae C  
 “ minor fuerit, aut major ipsa LM multiplici quartae D. sin vero se-  
 “ eundum; ergo ex una qui- A — E ——— F  
 “ dem parte, v. g. ad ipsas A B ——— I ——— K  
 “ primam, et B secundam, con-  
 “ tingere poterit, ut illa mul- C ——— G ——— H  
 “ tiplex EF minor sit altera D ——— L ——— M  
 “ multiplici IK, dum vice  
 “ versa ex altera parte illa multiplex GH major est altera multiplici  
 “ LM. Tunc autem (sub eadem Euclidea Definitione) ratio primae A  
 “ ad secundam B erit minor ratione tertiae C ad quartam D; aut vice  
 “ versa.

“ Igitur demonstratum manet substitutum illud Axioma,” [ i. e. Pro-  
 positio praedicta ] &c.

Minime, sed sine demonstratione manet; quod enim dicit posse con-  
 tingere, poterit innumeris casibus nunquam contingere, et propterea de-  
 monstratio ejus nulla est. nam, ex. gr. si fuerit A latus et B diameter  
 quadrati; C vero latus et D diameter alterius quadrati; nunquam po-  
 terit multiplex ipsius A aequalis esse multiplici ipsius B; nec aliqua  
 ipsius C aequalis alicui ipsius D, ut notum est; et tamen nunquam  
 contingere poterit ut, existente multiplici quadam ipsius A majore, vel  
 minore multiplici quadam ipsius B, multiplex ipsius C vice versa minor  
 vel major sit multiplici ipsius D; sumptis sc. ipsarum A, C aeque mul-  
 tiplicibus, et ipsarum B, D aeque multiplicibus. sunt enim A, B, C, D  
 proportionales.

Idem autem judicium ferendum est de Demonstratione quam qui-  
 dam

dam tradunt Propositionis 1. Lib. 6. quod de Demonstratione hujus Prop. 18. datum fuit; quoniam eodem quo haec fundamento, minime sc. demonstrato, innitur.

## PROP. XIX. LIB. V.

Corollarium huic subjunctum est, quod aequae saepe usui sit atque ipsa Propositio. Corollarium autem quod in textu Graeco huic 19<sup>nae</sup> appositum est, manifeste ostendit Librum 5<sup>um</sup> a Geometriae ignaris corruptum fuisse. etenim conversio rationis nullo modo pendet ex 19<sup>na</sup>, et demonstratio ejus quam ope 19<sup>nae</sup> tradunt varii Euclidis interpretes legitima non est, ut recte observavit Clavius, qui demonstrationem legitimam dedit, quam in Propositione E posuimus; eam autem posuit tanquam Corollarium Propositionis 19. quod his verbis incipit, "Hinc facile sequitur," cum nullo modo inde sequatur.

## PROP. XX, XXI, XXII, XXIII, et XXIV. LIB. V.

Demonstrationes Prop. 20. et 21. breviores sunt iis quibus Euclides utitur in Propositionibus hisce facilioribus vel in praecedentibus, vel in libris sequentibus. visum igitur est eas magis explicite tradere. Propositio etiam 22. et 23. ad quocumque magnitudines, ut fieri debuit, extenduntur. et simili modo extendi potest 24. ut in Corollario notatur, et aliud Corollarium additum est, aequae ac Propositio utile. verbum etiam "utrunque" quod in textu Graeco et versionibus deficiebat, additum est prope finem Prop. 23.

In scripto D. Philippi Naudaci, post mortem ejus edito in Historia Academiae Regiae Berolinensis anni 1745, pag. 50. Propositio 23. Lib. 5. Euclidis arguitur tanquam obscure enuntiata, et inde via longiore demonstrata. Verum enuntiatio ibi tradita non est Euclidis sed Tacqueti ut in scripto agnoscitur, quae quidem, quamvis non aequae commoda,

commoda, reipſa eadem eſt cum ea quae nunc habetur in Elementis. in ea autem nihil eſt obſcuro, quamvis auctor ſcripti, magnitudines proportionales perverſo ordine diſponat, unde obſcurior evadit enuntiatio. ſine dubio autem Euclides hanc 23<sup>iam</sup>, aequae ac 22<sup>dam</sup>, de quocunque magnitudinibus, quae binae ſumptae ſunt proportionales, non de ſex tantum enuntiavit; et huic generali caſui Naudaci enuntiatio minime rite accommodari poteſt.

Demonſtratio vero Propositionis 23. Lib. 5. quae in ſcripto illo traditur omnino eſt inepta; ſi enim magnitudines proportionales figurae fuerint planae aut ſolidae, nullum ex ipſis reſtangulum (quod ille imperite productum vocat) fieri intelligi poteſt. et ſi dicatur, in hoc caſu reſtas lineas aſſumendas eſſe figuris proportionales; eo modo demonſtratio, Euclidis demonſtratione multo longior evaderet. quin ſi apta eſſet Naudaci demonſtratio, quis non videt eam non poſſe in Libro 5<sup>to</sup> locum habere?

PROPP. F, G, H, K. LIB. V.

Propoſitiones has ſini Libri 5<sup>ti</sup> adjecimus, quoniam ſaepe iis utuntur Geometrae veteres et recentiores. et quidem in multis caſibus rationes compoſitae in demonſtrationibus ſine earum ope adhiberi non poſſunt.

Qui cupit doctrinam de proportionalibus Libro hoc quinto traditam ſolide deſenſam videre, et argumenta contra eam ab And. Tacquet, Alph. Borellio aliſque adducta pleniffime conſutata, conſulat magni Barrovii Leſiones Mathematicas 7. et 8<sup>vam</sup> Anni 1666.

Emendato jam Libro quinto, ſententiae Clariff. Barrovii lubentiffime aſſentior, “ Nihil” ſcilicet “ extare in toto Elementorum opere “ proportionum doctrina ſubtilius inventum, ſolidius ſtabilitum, ac “ curatius pertractatum.” quod quidem Geometras exiſtimaturos non po-

tuisse dici, eodem quo nunc jure, ex tempore Theonis haftenus, sperare licet.

## DEF. II. et V. LIB. VI.

**D**EFINITIO secunda non videtur Euclidis esse, sed cujusdam imperiti. Nulla enim figurarum reciprocarum mentio fit ab Euclide, neque, quantum scio, a quocunque alio Geometra. obscure enuntiata est, quare eam magis claram exhibuimus. vice autem ejus haec quae sequitur ponenda videtur, viz.

## DEF. II.

Duae magnitudines dicuntur esse reciproce proportionales duabus aliis, quando altera priorum est ad alteram posteriorum, ut reliqua posteriorum ad reliquam priorum.

Definitio autem quinta, quae magno discentium incommodo a Theonis tempore in Elementis locum habuit, ex iis, propter rationes in notis ad Prop. 23. Lib. 6. adducendas, merito sublata est.

## PROP. I, et II. LIB. VI.

Corollarium primae harum additum saepissime adhibetur. Enuntiatio vero secundae magis generalis reddita est.

## PROP. III. LIB. VI.

Casus secundus, qui habetur in Prop. A. pariter utilis ac primus, huic Propositioni additus est; videlicet is in quo angulus trianguli exterior bifariam secatur recta lineâ. Demonstratio ejus sumillima est demonstrationi primi casus, et ob hanc forsân causam tum ea, tum enuntiatio casus, omiſsa est ab imperito quodam editore. Pappus certe hæc, tanquam

tanquam Propositione elementari, sine demonstratione utitur in Prop.  
39. Lib. 7. Collectionum Mathematicarum.

PROP. VII. LIB. VI.

Casum omiffum, et in demonstrationibus non raro occurrentem,  
huic Propositioni addidimus.

PROP. VIII. LIB. VI.

Manifestum est aliquem mutasse demonstrationem quam Euclides  
hujus Propositionis dederat. Etenim auctor ejus postquam demonstra-  
verat triangula esse inter se aequiangula, particulatim ostendit latera eo-  
rum circa aequales angulos proportionalia esse, quasi hoc non factum  
fuisset in Propositione quarta hujus Libri. haec autem superflua non  
inveniuntur in versione ex lingua Arabica et nunc omiffa sunt.

PROP. IX. LIB. VI.

Demonstratio hujus facta est in casu particulari, in quo scilicet pars  
tertia abscindenda est a data recta; quare minime videtur Euclidis esse.  
Practerea in quatuor magnitudinibus proportionalibus concludit Auctor  
tertiam aeque multiplicem esse quartae, atque prima est secundae;  
quod quidem in Libro 5<sup>to</sup>, ut eum nunc habemus, nullibi ostensum est.  
sed hoc, ut alia, assumit Editor ex confusanea apud vulgus recepta pro-  
portionalium notione. generalem igitur et legitimam Demonstrationem  
hujus Propositionis tradere necesse fuit.

PROP. XVIII. LIB. VI.

Demonstratio hujus vitata videtur. nam in quadrilateris tantum,  
ostenditur Propositio, neque dicitur, quo modo extendi possit ad recti-  
linea quinque aut plurium laterum. practerea in duobus triangulis  
A a a 2 inter

inter se acuiangulis concluditur esse latus unius ad latus homologum alterius, ut latus aliud primi ad latus alterius huic homologum, sine permutatione proportionalium, contra morem Euclidis, ut ex sequente Propositione 19<sup>na</sup> manifestum est. eodem vitio laborat conclusio, nam latera circa angulos unius rectilinei non ostenduntur proportionales lateribus circa aequales angulos alterius, rursus enim omisit Auctor demonstrationem permutationem proportionalium. Visum igitur est tradere demonstrationem hujus via Euclideana, eadem sc. quâ utitur in Prop. 2. o. hujus libri; et in figuris quinquelateris, ut modus quo extendi potest ad figuras plurium laterum perspicue appareat.

## PROP. XXIII. LIB. VI.

Nihil in Geometriæ elementis Tyronibus difficilior intellectu haberi solet, doctrinâ de rationum compositione, quam absurdam et ἀγεομετρικὴν reddidit Theon, substituendo Definitionem 5<sup>am</sup>, Lib. 6<sup>ti</sup>, vice Definitionis bonæ rationis compositæ, quam, sine dubio, dederat Eudoxus vel Euclides post Definitionem rationis triplicatæ &c. in Libro 5<sup>to</sup>, proprio scilicet ejus loco. Theonis autem Definitio hæc est; ratio ex rationibus componi dicitur ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσι τινά. quam ita vertit Commandinus, “quando rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam efficiunt rationem.” Wallisius autem πηλικότητες vertit “rationum exponentes.” et Gregorius postrema Definitionis verba reddit “illius facit quantitatem.” quocunque autem sensu accipiantur verba “quantitates” sive “exponentes rationum,” ipsarumque “multiplicatio,” ἀγεομετρικὴ et inutilis erit Definitio. Nulla enim poterit esse multiplicatio nisi per numerum; quantitas autem sive exponens rationis, ut Eutocius in Comment. in Prop. 4. Lib. 2. Archimedis de Sphaera et Cyliandro, et recentiores interpretantur, est numerus qui multiplicans consequentem producit

ducit antecedentem, five, quod eodem redit, numerus ortus ex divisione antecedentis per consequentem; multae autem sunt rationes tales, ut nullus numerus oriri possit ex divisione antecedentis per consequentem; ex. gr. ratio quam diameter quadrati habet ad ejsdem latus; et ratio quam habet circumferentia circuli ad ipsius diametrum; aliaeque ejusmodi. Praeterea Definitionis hujus apud Euclidem, Archimedes, Apollonium, reliquosque veteres, qui ratione compositâ saepius utuntur, nullum vestigium invenitur. In 23<sup>ia</sup> enim 6<sup>ti</sup> Elementi in qua primum rationis compositae fit mentio, hujus Definitionis, quae hic, si ullibi, necessaria fuisset, ne vel verbum apparet; legitima autem Definitio explicite adhibetur his verbis, “ sed ratio K ad M composita est ex ratione K ad L, et ratione L ad M.” inutilis igitur profus et absurda est Theonis Definitio. Theonem enim in Elementa eam induxisse vix dubitari potest; extat enim in commentariis ejus in Ptolomaci *Μεγάλην Σύνταξιν*, pag. 62. commentarii; ubi et puerilem tradit ejus explicationem, utpote solummodo eis rationibus convenientem quae numeris exhiberi possunt; inde autem ad verbum excerpta est, una cum praedicta explicatione, et Libri sexti Definitionibus praefixa, ut constat ex Hervagii Editione. Zambertus vero et Commandinus haec iisdem definitionibus in eorum Latinis versionibus subjungunt. Non autem agnoscit hanc Definitionem Campanus, nec, ut videtur, codices Arabici quibus ille usus fuit. Clivius ad Def. 5. Lib. 6. recte judicavit Definitionem rationis compositae potuisse factam fuisse eadem viâ qua Definitiones rationis duplicatae, triplicatae &c. factae sunt, ut scilicet “ quemadmodum propositis pluribus magnitudinibus proportionalibus, primam ad tertiam dixit Euclides, Def. 10. Lib. 5. habere proportionem duplicatam ejus, quam prima habet ad secundam; primam vero ad quartam habere proportionem triplicatam ejus, quam prima ad secundam habet, hoc est compositam ex duabus aut tribus intermediis portionibus

“ portionibus aequalibus, et sic deinceps: ita quoque si ponantur ordine plures magnitudines ejusdem generis non proportionales, dicitur prima ad ultimam habere proportionem compositam ex omnibus proportionibus intermediis, — solum eam ob causam, quod illae proportionibus intermediae sunt inter extremas duas magnitudines interjectae; quemadmodum Definitione 10<sup>ma</sup>, Lib. 5. proportio primae ad tertiam dicebatur duplicata, hoc solo nomine, quia duae proportionibus aequales interpositae sunt inter extremas duas magnitudines: adeo ut non sit aliud discrimen inter hanc compositionem proportionum, et illam duplicationem, triplicationem &c. quae Libro 5<sup>to</sup> explicata est, quam quod in duplicatione, triplicatione &c. proportionum, interjiciuntur proportionibus omnes aequales, in compositione vero proportionum non necesse est interpositas aequales esse.” Edmundus vero Scarburgh in Euclide suo Anglico, pagg. 238, 266, aperte affirmat Definitionem 5. Lib. 6. supposititiam esse, et veram rationis compositae Definitionem, in Definitione 10. Lib. 5. rationis scilicet duplicatae, contineri, vel ex ea subintelligendam esse, eo videlicet modo quo Clavius eam in praecedente citatione explicavit. Hi autem et alii Recentiores definitionem istam 5<sup>am</sup>, Lib. 6. simul retinent, prolixisque Commentariis illustrant, quum potius eam ex Elementis sustulisse debuissent.

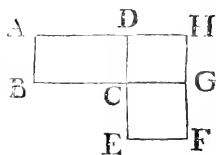
Etenim, comparando Definitionem 5. Lib. 6. cum Propositione 5. Lib. 8. clare apparebit Definitionem istam supposititiam esse. Nam in Propositione illa demonstratur numerum planum cujus latera sunt C, D habere ad numerum planum cujus latera sunt E, Z (vid. Hervagii aut Gregorii Editionem) rationem compositam ex rationibus laterum, hoc est ex rationibus C ad E, et D ad Z. ratio vero composita ex rationibus C ad E, et D ad Z, ex Def. 5. Lib. 6. et explicatione quam ejusdem tradunt omnes Commentatores, est ratio numeri facti ex multiplicatione



riplicatione antecedentium C, D ad factum ex multiplicatione consequentium E, Z, hoc est ratio numeri plani cujus latera sunt C, D ad numerum planum cujus latera sunt E, Z. Igitur Propositio quae est Definitio 5. Lib. 6. eadem omnino est cum Propositione 5. Lib. 8. In altero igitur horum locorum delenda est; absurdum enim est Propositionem in Elementis poni tanquam Definitionem, et eandem in iisdem demonstrari. Nullum autem dubium est Prop. 5. Lib. 8. debere locum habere in Elementis, idem enim in ea demonstratur de numeris planis quod in Prop. 23. Lib. 6. demonstratur de parallelogrammis aequiangulis; quare Definitio 5. Lib. 6. in Elementis locum habere non potest. unde perspicue apparet eam minime positam fuisse ab Euclide, sed a Theone vel alio quodam Geometriae minus perito.

Nullus autem, quantum scio, proprium usum rationis compositae hactenus ostendit, vel propter quam causam in Geometriam introducta fuerit; quum omnia in quibus solet adhiberi ratio composita, possint etiam sine ejusdem auxilio, tum enuntiari, tum demonstrari. Usus autem rationis compositae in hoc unice consistit, quod ejus ope periphrasēs evitentur, et ita Propositiones possint vel enuntiari vel demonstrari brevius, vel utrumque fieri possit. Ex. gr. si Propositio haec 23. Lib. 6. enuntianda esset, non facta rationis compositae mentione, ita fieret; si duo parallelogramma aequiangula fuerint, et fiat ut latus primi ad latus secundi, ita quaevis recta assumpta ad secundam rectam; ut vero latus reliquum primi ad latus reliquum secundi, ita fiat secunda recta ad tertiam; erit parallelogrammum primum ad secundum, ut prima recta ad tertiam rectam. et demonstratio eadem esset cum ea quam nunc habemus. Veteres autem cum vidissent hanc enuntiationem posse breviorē reddi, si nomen impositum esset rationi quam habet prima recta ad ultimam, quo nomine simul indicarentur rationes intermediae, primae scilicet ad secundam, et secundae ad tertiam rectam, et ita deinceps si plures

plures fuerint rectae; rationem hanc primae ad ultimam dixerunt rationem compositam ex rationibus primae ad secundam, et secundae ad tertiam rectam, hoc est, in praesenti casu, ex rationibus quae eadem sunt rationibus laterum. atque ita brevis Propositionem enuntiaverunt, viz. Si fuerint duo aequiangula parallelogramma, habebunt inter se rationem eandem ei quae composita est ex rationibus quae eadem sunt rationibus laterum. quae quidem paucioribus verbis effertur quam praecedens enuntiatio, eodem autem sensu. Vel adhuc brevius; aequiangula parallelogramma inter se rationem habent eandem ei quae composita est ex rationibus laterum. atque hae duae enuntiationes ultimae, prima praesertim, conveniunt demonstrationi quae nunc in textu Graeco habetur. potest autem Propositio brevius demonstrari, ut apud Franciscum Candallam hoc modo, viz. sint aequiangula parallelogramma ABCD, CEF, et compleatur parallelogrammum CDHG; quoniam igitur tria sunt parallelogramma AC, CH, CF, habebit (ex definitione rationis compositae) primum AC ad tertium CF, rationem quae composita est ex ratione AC ad CH, et ratione CH ad CF; est autem parallelogrammum AC ad ipsum CH, ut recta BC ad ipsam CG; et parallelogrammum CH est ad ipsum CF, ut recta DC ad rectam CE; ergo habet parallelogrammum AC ad ipsum CF rationem quae composita est ex rationibus quae eadem sunt rationibus laterum. et huic demonstrationi convenit enuntiatio quae nunc habetur, viz. parallelogramma aequiangula inter se habent rationem ex laterum rationibus compositam. nam vulgaris lectio "ex lateribus compositam" absurda est. retinimus autem in hac Editione demonstrationem quae habetur in textu Graeco, quamvis prolixior em ea quam tradit Candalla, quoniam in illa, non autem in hac, ostenditur quomodo ex datis rationibus laterum, inveniatur ratio



ratio ex iis composita, hoc est ratio parallelogrammorum; ut Tyroneſ in ſimilibus caſibus rationem ex duabus vel pluribus rationibus datis compositam invenire queant.

Ex dictis obſervari poteſt, in magnitudinibus quibuſcunque ejuſdem generis A, B, C, D &c. rationem compositam ex rationibus primae ad ſecundam, ſecundae ad tertiam et ita deinceps ad ultimam, nomen tantum eſſe ſeu modum loquendi, quo ſignificatur ratio quam habet prima A ad ultimam D, et quo ſimul indicantur rationes omnium magnitudinum A ad B, B ad C, C ad D a prima ad ultimam ad ſe invicem, ſive eadem fuerint inter ſe, ſive non fuerint; ſicut in magnitudinibus deinceps proportionalibus A, B, C, D &c. ratio duplicata primae ad ſecundam nomen tantum eſt ſeu modus loquendi, quo ſignificatur ratio quam habet prima A ad tertiam C, et quo ſimul indicatur duas eſſe rationes magnitudinum a prima ad ultimam, primae ſc. A ad ſecundam B, et ſecundae B ad tertiam ſive ultimam C, quae quidem rationes inter ſe ſunt eadem; et ratio triplicata primae ad ſecundam eſt nomen ſive modus loquendi, quo ſignificatur ratio primae A ad quartam D, et quo ſimul indicatur tres eſſe rationes magnitudinum a prima ad ultimam, primae ſc. A ad ſecundam B, et ipſius B ad tertiam C, et ipſius C ad quartam ſeu ultimam D, quae quidem rationes ſunt eadem inter ſe; idemque ſimiliter de aliis rationibus multiplicatis dicendum. hanc autem veram eſſe harum rationum explicationem patet ex Definitionibus rationis duplicatae et triplicatae, in quibus Euclides utitur verbo λέγειται, dicitur ſive nominatur; quo verbo, ſine dubio utebatur etiam in Definitione rationis compositae quam Theon aliuſve ex Elementis ſuſtulit; nam idem verbum retentum eſt in Definitione inepta rationis compositae quae nunc in Def. 5. Lib. 6. habetur. In citationibus autem harum Definitionum aliquando retinetur, ut in Demonſtratione Prop. 19. Lib. 6. “ prima ad tertiam duplicatam rationem ἐχεν λέ-

B b b

“ γέται”

“γεται” quae verba Commandinus aliique male reddunt “habet” vice “habere dicitur;” aliquando autem omititur, ut in Demonstratione Prop. 33. Lib. 11. ubi habetur “prima ad quartam triplicatam rationem ἔχει; sine dubio autem ἔχει hic significat idem quod ἔχειν λέγεται. ita etiam in Prop. 23. Lib. 6. ubi legitur “sed ratio K ad “M σύγκειται” composita est “ex ratione K ad L, et ratione L ad “M,” brevitatis sc. gratia, cum dicendum fuit, ut in Definitione, συγκείσθαι λέγεται, componi dicitur.

Ex his autem, et Propositionibus quas Libro quinto subjunximus, intelligi et explicari possunt omnia quae apud Geometras tum veteres tum recentiores de ratione composita habentur.

## PROP. XXIV. LIB. VI.

Videtur imperitum quendam ex duabus diversis hujus Propositionis demonstrationibus hanc quam nunc habemus composuisse; ex una scilicet quae per Prop. 2. hujus Lib. 6. et alterâ quae per Prop. 4. ejusdem fieri potest. postquam enim per 2. hujus et componendo, permutandoque, ostenderat latera circa communem angulum parallelogrammorum proportionalia esse, immediate concludere potuisset proportionalia esse latera circa reliquos angulos aequales, ope scilicet Prop. 34. Lib. 1. et Prop. 7. Lib. 5. Verum ille hoc negligens pergit ostendere triangula et parallelogramma aequiangula esse, et longo circuitu, ope Prop. 4. hujus, et 22. Lib. 5. concludit rem eandem. manifestum propterea est hanc inficite factam demonstrationem minime Euclidis esse. superfluis igitur rejectis, demonstrationem simpliciorum dedimus ope 4<sup>tae</sup> hujus, eandem scilicet quam praebent codices Arabici ope 2<sup>dae</sup> hujus et componendo; in hisce autem permutatio negligitur, neque parallelogramma aequiangula esse ostenduntur, quod Tyronum gratia faciendum fuit.

PROP. XXV.

PROP. XXV. LIB. VI.

Liquido patet demonstrationem hujus quam Euclides dederat vitiatam fuisse ab Editore quodam Geometriae minus perito. postquam enim ostenderat “ ut rectilineum ABC ad rectilineum KGH, ita BE “parallelogrammum ad parallelogrammum EF” opus fuit solummodo addere, “ est autem rectilineum ABC aequale parallelogrammo BE, aequale igitur est KGH rectilineum parallelogrammo EF; videlicet “ per Prop. 14. Lib. 5.” sed inter has duas sententias interposuit “ quare permutando ut ABC rectilineum ad parallelogrammum BE, “ ita rectilineum KGH ad EF parallelogrammum” putavit scilicet non tam perspicuum esse concludere secundam quatuor proportionalium quartae aequalem esse, ex aequalitate primae et tertiae, quod quidem demonstratum est in Prop. 14. Lib. 5. quam concludere tertiam aequalem esse quartae, ex aequalitate primae et secundae, quod nusquam in Elementis quae jam habemus ostensum est. verum quanvis haec Propositio, tertiam scilicet quatuor proportionalium aequalem esse quartae, si prima aequalis fuerit secundae, fuisset ab Euclide Elementis suis inserta, ut verisimile est eam fuisse, nunquam tamen ille in praesenti casu eadem usus fuisset; quoniam, ut dictum fuit, sine redundante hac permutatione proportionalium conclusio eadem directe elici potest. haec autem fufius ostendimus, tum quoniam certum praebent indicium textum Euclidis vitiatum fuisse, idem enim error invenitur in textu Græco Prop. 23. Lib. 11. bis, et bis in Prop. 2. Lib. 12. et in Propp. 5. 11. 12. 18. ejusdem; in quibus Libri 12. locis excepto ultimo, recte omiffa est haec permutatio proportionalium in versionis Commandini Editione Oxoniensi; tum ut caveant Geometrae ab usu permutationis in simili casu, non raro enim Recentiores, et inter alios ipse Commandinus in Commentario ad Prop. 5. Lib. 3. pag. 6. b. Pappi Alexandrini,

drini, et alibi, incidunt in hunc errorem; praeoccupavit scilicet multorum mentes vulgaris proportionalium idea, qua fit ut accuratam vix percipiant.

Praeterea quamvis rectilineum ABC cui simile faciendum est, possit esse cujuscunque generis, in demonstratione tamen Gracci codices habent triangulum vice rectilinei, qui error correctus est in versionis Commandini editione quae Oxonii impressa est.

PROP. XXVII. LIB. VI.

Secundus casus hujus habet  $\alpha\lambda\lambda\tilde{\omega}\zeta$  praefixum quasi alia esset demonstratio; ab imperito ut videtur Librario. quam vocem recte omisit Gregorius. schema autem hujus secundi casus iisdem literis alphabeti quae in schemate primi casus adhibitae fuerunt, notari debuit. ut jam factum est.

PROP. XXVIII, et XXIX. LIB. VI.

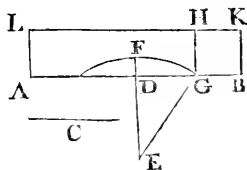
Problemata haec, quorum primo necessaria est Prop. 27<sup>ima</sup>, sunt omnium in Elementis maxime generalia et utilia, et a veteribus in solutione aliorum Problematum saepissime adhibita; et propterea incite admodum ab And. Tacquet et Claud. Dechales in iis quas dederunt Elementorum Editionibus omittuntur, et insulse admodum ab iis dicuntur nullius fere esse usus. Horum casus quando ad datam rectam lineam dato quadrato aequale rectangulum applicandum est, deficiens, aut excedens quadrato; et quando ad datam rectam lineam dato rectangulo aequale rectangulum applicandum est deficiens aut excedens quadrato, frequentissime a Geometris usurpantur. Quare Tyronum gratia visum est eorum constructiones, ut sequitur tradere.

- I. Ad datam rectam lineam dato quadrato aequale rectangulum applicare,

plicare, deficiens quadrato. oportet autem datum quadratum non majus esse eo quod a dimidia describitur.

Sit data recta linea AB, datum autem quadratum cui oportet aequale rectangulum ad AB applicare sit illud quod a data recta C describitur non majus existens eo quod fit a dimidio ipsius AB.

Secetur AB bifariam in D, et si quadratum ex AD aequale fuerit quadrato ex recta C, factum jam erit quod proponebatur. si autem non est aequale, erit AD major quam C ob determinationem. ducatur DE ad rectos angulos ipsi AB, et fiat DE aequalis ipsi C; producaturo vero ED ad F, ut EF aequalis sit ipsi AD seu DB, et centro E intervallo EF describatur circulus qui occurrat rectae AB in G, et super GB describatur quadratum GBKH, et compleatur rectangulum AGHL; jungaturque EG.



Quoniam igitur bifariam secta est AB in D, erit <sup>a</sup> rectangulum <sup>a. 5. 2.</sup> AG, GB una cum quadrato ex DG aequale (quadrato ex DB, hoc est quadrato ex EF sive EG, hoc est) quadratis ex ED, DG. commune auferatur quadratum ex DG, et reliquum rectangulum AG, GB aequale erit quadrato ex ED, hoc est ex C. rectangulum autem AG, GB est ipsum AH rectangulum, quia GH aequalis est ipsi GB. rectangulum igitur AH aequale est dato quadrato ex recta C. Quare ad datam rectam lineam AB dato quadrato ex recta C, aequale rectangulum AH applicatum est deficiens quadrato GK. Quod facere oportebat.

2. Ad datam rectam lineam dato quadrato aequale rectangulum applicare, excedens quadrato.

Sit data recta linea AB, datum autem quadratum sit illud quod a data recta C describitur.

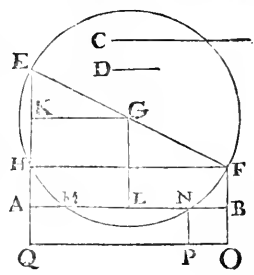
Secetur AB bifariam in D, et ducatur BE ad rectos angulos ipsi AB, fiatque





hoc est rectangulo C, D. et quoniam aequales sunt EG, GF, et AE, LG, BF inter se parallelae, aequales erunt AL, LB, aequales etiam sunt <sup>a</sup> EK, KH. est autem, ob determinationem, rectangulum C, D a. 3. 3.

non majus quadrato ex AL dimidio ipsius AB, ergo et rectangulum EA, AH non majus est quadrato ex AL hoc est ex KG; commune addatur quadratum ex KE, et quadratum <sup>b</sup> ex AK non majus erit quadratis ex EK, KG hoc est quadrato ex EG; quare recta AK seu GL non major est ipsa GE. et siquidem GE aequalis fuerit ipsi GL, circulus EHF continget rectam AB in L, et quadratum ex AL aequale \* erit rectangulo EA, AH \* 36. 3.



b. 6. 2.

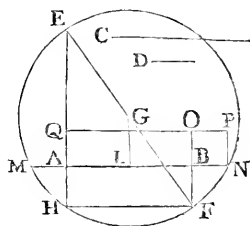
five dato rectangulo C, D, et factum erit quod proponebatur. si vero inaequales fuerint EG, GL erit EG major, et propterea circulus EHF fecabit rectam AB; secet in M, N punctis, et super NB describatur NBOP quadratum, et compleatur rectangulum ANPQ. Quoniam igitur aequales sunt <sup>a</sup> ML, LN, et aequales ostensae sunt AL, LB, aequales erunt AM, NB. rectangulum igitur AN, NB aequale est ipsi NA, AM, hoc est <sup>c</sup> rectangulo EA, AH five rectangulo C, D. rec- c. Cor. 36. 3. tangulum vero AN, NB est ipsum AP, est enim PN aequalis ipsi NB. Ergo rectangulum AP aequale est rectangulo C, D. Igitur ad datam rectam AB, dato C, D rectangulo aequale rectangulum AP applicatum est deficiens quadrato BP. Quod facere oportebat.

4. Ad datam rectam lineam dato rectangulo aequale rectangulum applicare, excedens quadrato.

Sit AB data recta linea, datum autem rectangulum sit id quod rectis C, D continetur. oportet ad datam rectam AB dato rectangulo C, D aequale rectangulum applicare excedens quadrato.

Ducantur

Ducantur  $AE$ ,  $BF$  ad rectos angulos ipsi  $AB$ , et ad contrarias ejus partes, quarum  $AE$  aequalis sit ipsi  $C$ , et  $BF$  rectae  $D$ . jungatur  $EF$  et bifariam secetur in  $G$ , centroque  $G$ , intervallo  $GE$  describatur circulus, occurratque rectae  $AE$  rursus in  $H$ , et jungatur  $HF$ , et ad  $AB$  ducatur  $GL$  parallela ipsi  $AE$ ; occurrat vero circulus rectae  $AB$  productae in  $M$ ,  $N$ , et super  $BN$  describatur quadratum  $NBOP$ , et compleatur rectangulum  $ANPQ$ . Quoniam igitur angulus  $EHF$  in semicirculo aequalis est angulo recto  $EAB$ , parallelae crunt  $AB$ ,



$HF$ ; aequales igitur sunt  $AH$ ,  $BF$ , et rectangulum  $EA$ ,  $AH$  aequale rectangulo  $EA$ ,  $BF$ , hoc est ipsi  $C$ ,  $D$  rectangulo. et quoniam aequales sunt  $ML$ ,  $LN$ , ut et  $AL$ ,  $LB$ , crunt et  $MA$ ,  $BN$  aequales, et propterea rectangulum  $AN$ ,  $NB$  aequale est ipsi  $MA$ ,  $AN$ , hoc est <sup>a</sup> ipsi  $EA$ ,  $AH$  sive rectangulo  $C$ ,  $D$ . rectangulum igitur  $AN$ ,  $NB$ , hoc est ipsum  $AP$  aequale est rectangulo  $C$ ,  $D$ . ad datam igitur rectam  $AB$  dato rectangulo  $C$ ,  $D$  aequale rectangulum  $AP$  applicatum est, excedens quadrato  $BP$ . Quod facere oportebat.

Construções has 3<sup>ta</sup>. et 4<sup>ta</sup>. Problematis primus, quantum scio, dedit Willebrordus Snellius in Apollonio suo Batavo, et postea Cl. Halaeus in Schol. ad Prop. 18. Lib. 8<sup>ti</sup> Conicorum Apollonii, a se refutiti.

Problema 3. ita aliter enuntiatur, datam rectam  $AB$  secare in puncto  $N$ , et facere rectangulum a segmentis  $AN$ ,  $NB$  aequale dato spatio. vel, quod eodem redit, Data summa  $AB$  laterum rectanguli, datoque rectangulo magnitudine, latera invenire.

Et Problema 4. idem est cum hoc, invenire in data recta  $AB$  producta punctum  $N$  quod faciet rectangulum  $AN$ ,  $NB$  aequale dato spatio,

tio, vel quod eodem redit datà differentia AB laterum rectanguli, ipsoque magnitudine dato, invenire latera.

PROP. XXXI. LIB. VI.

In Demonstratione hujus inversio proportionalium bis est omiſſa, addita igitur eſt, ut conclusio rite fieret ope 24<sup>tæ</sup>, Lib. 5. quod Clavius prius fecerat.

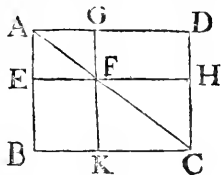
PROP. XXXII. LIB. VI.

Enuntiatio Propositionis 26<sup>tæ</sup>, Lib. 6. non satis generalis est. etenim non tantum duo parallelogramma similia et similiter posita, quae communem habent angulum, sunt circa eandem diametrum; verum etiam duo similia et similiter posita, quorum unum habet angulum angulo alterius ad verticem oppositum, habent diametros in recta linea. videtur vero aliam fuisse horum demonstrationem, directam quidem, cui inserviebat Propositio 32<sup>da</sup>, quae etiam aliter et paulo brevius ut sequitur ostendi potest.

PROP. XXXII. LIB. VI.

Si duo triangula componantur ad unum angulum, &c.

Sint duo triangula GAF, HFC quae duo latera AG, GF, duobus lateribus FH, HC proportionalia habeant, sc. fit sicut AG ad GF, ita FH ad HC; parallela autem sit GA ipsi HF, et GF ipsi HC. erit AF ipsi FC in directum.



a. 31. 1.

Ducatur CK parallela<sup>a</sup> ipsi FH, occurratque rectae GF productae in K. Quoniam

igitur utraque AG, KC parallela est ipsi FH, erunt et AG, KC inter se parallelae<sup>b</sup>, quare anguli AGF, FKC sunt inter se aequales, alterni<sup>b</sup>. 30. 1.

C c c

enim

c. 34. 1. enim sunt. est autem AG ad GF, ut (FH ad HC, hoc est <sup>c</sup>) CK ad  
 d. 6. 6. KF; et sunt circa aequales angulos; ergo aequiangula <sup>d</sup> sunt AGF,  
 CKF triangula, et propterea angulus AFG aequalis est angulo CFK, est

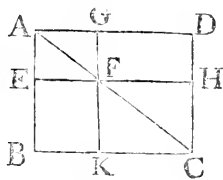
e. 14. 1. autem GFK recta linea; igitur <sup>e</sup> AF ipsi FC est in directum.

Propositio vero 26<sup>ta</sup> ex 32<sup>da</sup> ita demonstratur.

Si duo parallelogramma similia et similiter posita communem habuerint angulum, aut angulos ad verticem oppositos; erunt illorum diametri in recta linea.

Primo, habeant parallelogramma ABCD, AEFG communem angulum BAD, sintque similia et similiter posita, erunt ABCD, AEFG circa eandem diametrum.

Producantur enim EF, GF ad H, K, et jungantur FA, FC. quoniam igitur similia sunt ABCD, AEFG parallelogramma, erit DA ad AB, ut GA ad AE; quare reliqua DG erit ad reliquam  
 a. Cor. 19. 5. EB, ut GA ad AE <sup>a</sup>. est autem DG aequalis ipsi FH, EB ipsi HC, et AE ipsi GF. ergo ut FH ad HC, ita AG ad GF; et parallelae sunt FH, HC ipsis AG, GF; et triangula AGF, FHC ad unum angulum composita sunt in puncto F; quare erunt AF, FC sibi ipsis in  
 b. 32. 6. directum <sup>b</sup>.



Secundo, sint parallelogramma KFHC, GFEA similia et similiter posita, habeantque angulos KFH, EFG ad verticem oppositos; erunt diametri AF, FC sibi ipsis in directum.

Quoniam enim parallelae sunt AG, GF ipsis FH, HC; et est AG ad GF, ut FH ad HC; erunt AF, FC in directum <sup>b</sup>.

PROP. XXXIII. LIB. VI.

Verba “ quippe qui ad centrum sunt constituti ” omiffa sunt, utpote imperiū cuiusdam additamentum.

In Græcis codicibus, et Latina versione deest ἡ ἐτυχη, utcumque, in utriusque partis demonstratione, quae nunc adduntur, omnino enim sunt necessaria. et in demonstratione secundae partis, ubi sc. triangulum BGC aequale ostenditur triangulo CGK, verbum ἀρα omitti debet in textu Græco.

PROPP. B, C. LIB. VI.

Propositiones hae Libro sexto sunt additae, quoniam a Geometris saepius usurpantur.

DEF. IX, et XI. LIB. XI.

**I**N figuris planis similitudo figurarum definitur ex aequalitate angulorum, et laterum circa aequales angulos proportionalitate; etenim ex sola laterum proportionalitate, vel sola angulorum aequalitate non sequitur figuras esse similes extra casum triangulorum. et quidem similis inter se positus rectarum linearum, quibus figurae continentur, partim ex utraque pendet. eademque ratione figurae solidae similes sunt eae quae et singulos angulos solidos aequales habent, et continentur figuris planis similibus, multitudine aequalibus. sunt enim quaedam figurae solidae, figuris planis similibus, multitudine, quin et magnitudine aequalibus, contentae, quae neque similes neque aequales sunt, ut in Demonstratione post Notas ad Def. 10. ostendetur. necesse igitur fuit emendare Definitionem similibus figurarum solidarum, cique praemittere Definitionem

tionem anguli solidi. Ex hisce autem et Definitione decima, satis liquet quam multum ab imperitis depravati sint hi Libri.

N

## DEF. X. LIB. VI.

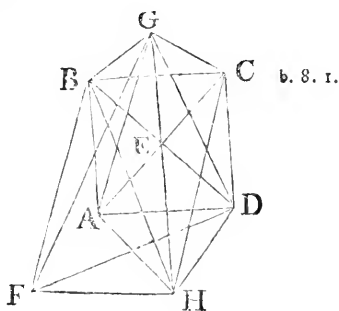
Quoniam sensus verbi “aequalis” notus est ante hanc Definitionem, igitur Propositio quae est Definitio decima hujus Libri est Theorema quod verum aut falsum esse demonstrandum est, non assumendum; quare ex Propositione demonstranda Theon aliufve Editor inepte fecit hanc Definitionem figurarum solidarum similium et aequalium. similes enim esse figuras demonstrandum est ex Definitione similium solidarum figurarum; aequales autem esse ostendendum est ex Axiomate, “Quae sibi mutuo congruunt inter se sunt aequalia,” vel ex Propositione A, vel Prop. 9. aut Prop. 14. Lib. 5. ex quo Axiomate, vel ex earum Propositionum aliqua, omnium omnino figurarum aequalitas ultimo demonstranda venit. in praecedentibus Libris nullam aequalium figurarum Definitionem tradidit Euclides neque certe hanc dedit. quae enim dicitur Definitio prima, Lib. 3. revera est Theorema in quo asseritur eos circulos aequales esse quorum quae ex centris sunt aequales, quod quidem ex Definitione circuli perspicue apparet; ideoque a quodam inter Definitiones non proprie locatum est. non enim aequalitas figurarum definienda est sed demonstranda. Quamvis igitur verum esset figuras solidas, quae similibus planis multitudine et magnitudine aequalibus continentur, inter se aequales esse, merito tamen culpandus est is qui ex hac Propositione demonstranda Definitionem fecit. Quid autem dicendum, si haec Propositio non vera sit? nonne consistendum est Geometras per mille tercentos annos in hac re Elementari deceptos fuisse? et ex hoc quidem modestiam discere debemus, atque agnoscere quam parum nobis cavere possimus, quae est mentis humanae imbecillitas, ne in errores incidamus etiam in principiis scientiarum, quae inter maxime certas merito

rito aestimantur. Propositionem enim hanc minime semper veram esse variis exemplis ostendi potest; sufficit hoc quod sequitur.

Sit quadratum ABCD et ducantur diametri AC, BD sibi mutuo occurrentes in E; et super unam ipsarum BD constituatur, in plano in quo est quadratum, triangulum isosceles BFD, a puncto vero E ad rectos angulos plano ABCD constituatur recta EG, et in ipsa sumpto quovis puncto G, ducantur GA, GB, GC, GD, GF. in triangulis igitur AEG, CEG quoniam AE, EG aequales sunt ipsis CE, EG, altera alteri, et rectos continent angulos, erit basis AG basi GC aequalis<sup>a</sup>. a. 4. 1.

quare in triangulis AGB, CGB aequales sunt AG, GB ipsis CG, GB, et basis AB aequalis est basi BC; angulus igitur<sup>b</sup> AGB aequalis est angulo CGB, et triangulum AGB triangulo CGB aequale<sup>a</sup>. similiter ostendetur triangulum AGD aequale ipsi CGD. Producatur GE ad oppositas partes plani ABCD, et in ea sumatur punctum quodvis H, et jungantur HA, HB, HC, HD, HF, et similiter ostendetur triangulum AHB aequale triangulo CHB, et triangulum AHD triangulo CHD.

sunt igitur duo solida quorum utrumque continetur octo triangulis; unum scilicet contentum quatuor triangulis quorum vertex communis est G, bases vero rectae BA, AD, BF, FD; quatuorque triangulis quorum vertex communis est H, bases vero eadem rectae. alterum autem solidum contentum est quatuor triangulis quorum vertex communis est G, et bases rectae BC, CD, BF, FD; et quatuor triangulis quorum vertex communis est H, et bases eadem rectae BC, CD, BF, FD. quatuor autem triangula AGB, AGD, AHB, AHD aequalia ostensa sunt quatuor



tuor

tuor triangulis CGB, CGD, CHB, CHD singula singulis; quatuor autem reliqua triangula BGF, DGF, BHF, DHF utriusque folido communia sunt. Duo igitur haec folida continentur planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus. inaequalia autem esse manifestum est, cum primum eorum contineatur in altero. non igitur semper verum est aequalia esse folida quae planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus continentur.

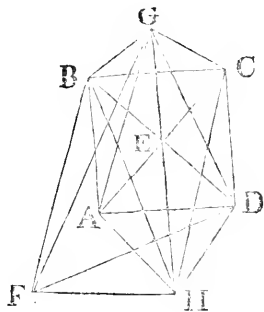
COR. Hinc duo inaequales anguli folidi possunt contineri aequalibus et iisdem multitudine angulis planis.

Angulus enim solidus ad G qui continetur quatuor angulis planis AGB, AGD, FGB, FGD inaequalis omnino est angulo folido ad idem punctum G qui continetur quatuor angulis planis CGB, CGD, FGB, FGD; hic enim priorem illum continet. uterque autem continetur quatuor angulis planis, qui inter se sunt aequales singuli singulis vel iidem, ut ostensum fuit. et quidem innumeri possunt esse anguli folidi inaequales, qui aequalibus angulis planis singuli singulis continentur. Patet etiam figuras solidas prius memoratas minime similes esse, quoniam earum anguli folidi non sunt omnes inter se aequales.

Innumeros autem angulos solidos inter se inaequales posse contineri iisdem angulis planis, eodem ordine positos, ope trium Propositionum sequentium, manifestum erit.

### PROP. I. PROBLEMA.

Datis tribus magnitudinibus A, B, C quartam invenire ita ut tres simul majores sint reliqua, quomodocunque sumptae.





Sit *D* quarta, erit igitur *D* minor ipsis *A*, *B*, *C* simul. sit *A* non minor utràvis ex ipsis *B*, *C*; et primum sint *B*, *C* simul non minores ipsà *A*; erunt igitur *B*, *C*, *D* simul majores quam *A*. et quoniam *A* non minor est *B*, erunt *A*, *C*, *D* majores quam *B*. similiter ostendetur ipsas *A*, *B*, *D* simul majores esse quam *C*. Igitur in casu quo *B* et *C* simul non minores sunt ipsà *A*, quævis *D* quæ minor est ipsis *A*, *B*, *C* simul, propositum efficiet.

Si vero *B* et *C* simul minores sint quam *A*, quoniam requiritur ut *B*, *C*, *D* simul majores sint *A*, ex hisce ablatis *B*, *C* erit *D* major excessu ipsius *A* supra *B*, *C* simul. sumatur igitur quævis *D* quæ minor sit ipsis *A*, *B*, *C* simul, at major excessu ipsius *A* supra *B*, *C* simul. erunt igitur *B*, *C*, *D* simul majores quam *A*; et quoniam *A* major est utràvis ex ipsis *B*, *C*, multo magis erit *A* una cum *D*, et alterutra ex ipsis *B*, *C* major reliqua. et, ex constructione, *A*, *B*, *C* simul majores sunt quam *D*. Q. E. F.

COR. Si præterea requiratur ut *A* et *B* simul non minores sint quam *C* et *D* simul, debet excessus ipsarum *A* et *B* simul supra *C* non minor esse quam *D*, hoc est debet *D* non major esse hoc excessu.

PROP. II. PROBLEMA.

Datis quatuor magnitudinibus *A*, *B*, *C*, *D* quarum *A* et *B* simul non minores sunt quam *C* et *D* simul, et quarum tres simul majores sunt reliquâ quartâ, quomodocunque sumptæ; quintam *E* invenire, ita ut duæ ex tribus *A*, *B*, *E* quomodocunque sumptæ majores sint reliqua tertia, et etiam duæ ex tribus *C*, *D*, *E* quomodocunque sumptæ majores sint reliquâ. sit autem *A* non minor *B*, et *C* non minor *D*.

Primò sit excessus ipsarum *C*, *D* non minor excessu ipsarum *A*, *B*. potest autem sumi quædam *E* quæ minor est summa ipsarum *C*, *D*  
at

at major excessu earundem; sumatur, erit igitur E major excessu ipsarum A, B; quare B et E simul majores sunt quam A; est autem A non minor B, ergo A et E simul majores sunt B. et, ex hypothesi, A una cum B, non minor est quam C una cum D, C autem cum D major est quam E, igitur et A una cum B major est quam E.

Sit autem excessus ipsarum A, B major excessu ipsarum C, D; et quoniam, ex hypothesi, tres B, C, D simul majores sunt quarta A, erunt C et D simul majores excessu ipsarum A, B; igitur sumi potest quaedam E quae minor est ipsis C et D simul, at major excessu ipsarum A, B. sumatur, et quoniam E major est excessu ipsarum A, B, erunt B et E simul majores quam A. et, ut in praecedente casu, ostendetur A una cum E major B, et A una cum B major quam E. igitur in utroque casu ostensum est duas ex ipsis A, B, E quomocunque sumptas, majores esse reliqua.

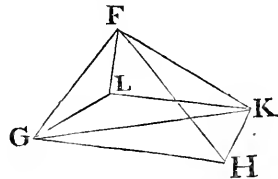
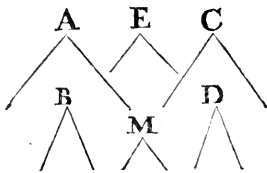
Et quoniam in utroque casu E major est excessu ipsarum C, D, erit E una cum D major quam C; et, ex hypothesi, C non minor est D, ergo E una cum C major erit quam D; est autem ex constructione C una cum D, major quam E. igitur ipsarum C, D, E duae quomocunque sumptae majores sunt reliqua. Q. E. F.

### PROP. III. THEOREMA.

Fieri potest ut ex iisdem quatuor angulis planis constituentur innumeri anguli solidi inter se inaequales.

Sumantur tres anguli plani A, B, C quorum A non minor sit utrovis ex ipsis B, C; sint autem A et B simul minores duobus rectis; et, ope Problematis 1. et Corollarii ejusdem, inveniatur quartus angulus D, ita ut tres ex ipsis A, B, C, D majores sint reliquo, quomocunque sumpti, et ut A et B simul non minores sint ipsis C et D simul. ope vero Problematis 2. inveniatur quintus angulus E, ita ut duo ex angulis

lis A, B, E, reliquo sint majores quomodocunq; sumpti, et etiam duo ex ipsis C, D, E quomodocunq; sumpti sint majores reliquo. et quoniam A et B simul minores sunt duobus rectis angulis, erunt A et B simul bis sumpti minores quatuor rectis. sunt autem A et B simul majores angulo E, quare A et B simul bis sumpti majores erunt angulis A, B, E simul, qui propterea minores erunt quatuor rectis; et duo ex ipsis reliquo sunt majores, quomodocunq; sumpti; ergo ope Prop. 23. Lib. 11. constitui potest angulus solidus ex tribus angulis planis qui ipsis A, B, E, sunt aequales. constituatur, sitque angulus solidus ad F, contentus scilicet planis angulis GFH, HFK, GFK qui angulis A, B, E aequales sunt, singuli singulis. et quoniam anguli C, D simul non



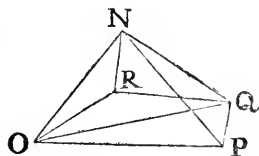
sunt majores ipsis A, B simul, erunt C, D, E simul non majores angulis A, B, E simul. hi autem minores ostensi sunt quatuor rectis, quare et C, D, E simul minores sunt quatuor rectis; et duo ex ipsis reliquo sunt majores, quomodocunq; sumpti; ergo ex tribus angulis planis ipsis C, D, E aequalibus constitui potest angulus solidus [23. 11.]. huic autem angulo solido constitui potest ad punctum F in recta FG angulus solidus aequalis, ope scilicet Prop. 26. Lib. 11. sitque angulus GFK, qui se. aequalis est ipsi E, unus ex tribus angulis planis qui hunc angulum solidum continent, reliqui autem duo sint KFL, GFL ipsis sc. C, D aequales, alter alteri. Igitur ad punctum F constitutus est angulus solidus contentus quatuor angulis planis GFH, HFK, KFL, GFL qui ipsis A, B, C, D angulis sunt aequales, singuli singulis.

D d d

Rursus

Rurfus inveniat<sup>r</sup> alter angulus M talis ut duo ex tribus angulis A, B, M reliquo sint majores, quomodocunque sumpti, et etiam duo ex tribus C, D, M quomodocunque sumpti sint majores reliquo. ostendetur autem, ut in praemis<sup>s</sup>, angulos A, B, M simul minores esse quatuor rectis, angulosque C, D, M simul minores esse quatuor rectis. Constituatur igitur [23. 11.] angulus solidus ad N contentus angulis planis ONP, PNQ, ONQ ipsis A, B, M aequalibus, singuli singulis, et ope Prop. 26. Lib. 11. constituatur ad idem punctum N in recta linea ON angulus solidus contentus

tribus angulis planis, quorum unus sit ipse ONQ aequalis scilicet ipsi M, et reliqui duo QNR, ONR aequales ipsis C, D, alter alteri. erit igitur ad punctum N angulus solidus constitutus qui continetur quatuor angulis planis ONP, PNQ, QNR, ONR ipsis A, B, C, D aequalibus, singuli singulis. solidos autem angulos, qui praedictis quatuor angulis planis ad F et N continentur, non esse inter se aequales, sive non posse sibi mutuo congruere, patet ex eo quod anguli GFK, ONQ sive anguli E, M ex constructione sint inaequales, et propterea rectae GF, FK non possunt congruere rectis ON, NQ. igitur neque anguli solidi sibi mutuo congruent, et propterea inaequales sunt.



Et quoniam ex tribus datis angulis A, B, C possunt innumerari anguli inveniri qui eadem efficiunt cum angulo D, et rursus ex ipsis A, B, C et D, vel uno quovis ex hisce innumeris, inveniri possunt alii qui eadem praestant cum angulis E vel M, innumerari alii solidi anguli constitui possunt qui iisdem quatuor angulis planis continentur, qui omnes inter se sunt inaequales. Q. E. D.

Falluntur igitur Clavius aliique auctores qui asserunt solidos angulos qui aequalibus et iisdem numero planis angulis continentur inter se aequales

aequales esse. patet etiam Propositionem 26. Lib. 11. non legitime demonstratam esse, in ea enim aequalitas solidorum angulorum qui tribus angulis planis aequalibus, singuli singulis, continentur, assumitur, non demonstratur.

PROP. I. LIB. XI.

Verba in fine hujus, “ recta enim linea cum recta linea non convenit in pluribus punctis quam uno, alias rectae lineae sibi ipsis congruent.” omissa sunt tanquam imperiti cujusdam additamentum. demonstrandum enim hoc fuit non assumendum.

PROP. II. LIB. XI.

Propositio haec a quodam mutata et vitata videtur. Etenim secunda pars Enuntiationis, viz. “ et omne triangulum in uno plano consistit” demonstratione non indiget; nam omnes figurae in primo Libro Elementorum definitae, sunt, ex hypothese, figurae planae, hoc est, in plano descriptae, et inter caeteras triangulum. et quidem potest superficies convexa tribus rectis lineis terminari. neque valet demonstratio ad ostendendum duas rectas se invicem secantes in uno esse plano. debet igitur ostendi duas aut tres rectas sibi mutuo occurrentes in uno plano esse. ut hoc fieret Enuntiationem et Demonstrationem in eas quae in textu positae sunt mutavimus.

PROP. III. LIB. XI.

In hac prope finem habentur, “ non igitur DEB, DFB rectae lineae sunt, similiter ostendemus neque aliam quampiam, quae a puncto D ad B ducitur rectam esse,” quae omissa sunt. ex eo enim quod duae lineae spatium comprehendunt, tantum sequitur unam ex ipsis non esse rectam. et vis argumenti ex hoc pendet, si scilicet communis sec-

tio planorum non ponatur esse recta linea, duae rectae lineae spatium comprehendent, quod est absurdum; ergo communis sectio est recta linea.

## PROP. IV. LIB. XI.

“ Et triangulum AED triangulo BEC aequale,” haec etiam omiſſa sunt; saepius enim integra haec conclusio in praecedentibus libris repetita fuit, ut non necesse sit idem in hoc libro facere.

## PROP. V. LIB. XI.

In hac prope finem delenda est vox ἐπιπέδῳ in textu Graeco, utpote imperiti additamentum. et recte omiſſa est vox “plano” in versionis Commandini editione Oxoniensi.

## PROP. VII. LIB. XI.

Manifestum est Propositionem hanc ab Editore quodam minus perito additam fuisse. rectae enim lineae quae ab uno puncto ad aliud, in quovis plano, ducuntur in praecedentibus libris, in eo ponuntur esse plano. et nisi essent, demonstrationes quaedam in quibus una recta alteri occurrere ponitur, nullae essent; non enim occurrerent rectae. Ex. gr. in Prop. 30. Lib. 1. recta GK non occurreret ipsi EF, si non esset GK in plano in quo sunt parallelae AB, CD, in quo etiam, ex hypothesi, est recta EF. praeterea demonstratur haec septima ope praecedentis tertiae, in qua bis id ipsum assumitur quod in septima demonstrandum proponitur, rectam scilicet ab uno puncto ad aliud in quolibet plano ductam, in eo esse plano; idem etiam assumitur in praecedente Prop. 6. nam recta BD quae jungit puncta B, D in subiecto plano, in eo ponitur esse plano. locum autem dedimus septimae, mutata Demonstratione,

stratione, ut numerus Propositionum fervaretur; manifesta enim est ex Def. 7. et 35. Lib. 1. quamvis Elementis non inesset.

PROP. VIII. LIB. XI.

In hac prope finem, in Græcis, et in Commandini et Gregorii versionibus habentur, “at in plano per BA, AD est DC,” vice quorum versionis Commandini Oxoniensis Editio recte habet “at in plano per BD, DA est DC.” sequentia autem quæ in omnibus Editionibus leguntur, viz. “quoniam in plano per BD, DA sunt AB, BD; in quo “autem sunt AB, BD in eodem est ipsa DC,” corrupta sunt, vel a quodam textui inserta; nulla enim necessitas fuit per istas ambages ostendere rectam DC in eodem esse plano in quo sunt BD, DA, cum immediate sequatur ex Prop. 7. præcedente rectas BD, DA esse in plano in quo sunt parallelæ AB, CD. hæc igitur omiſſis, legendum est, “omnes enim tres sunt in plano in quo sunt parallelæ AB, CD.”

PROP. XV. LIB. XI.

Post verba, “et quoniam BA parallela est AH,” addita sunt hæc, “utraque enim ipsarum parallela est ipsi DE non in eodem cum ipsâ “plano,” utpote manifeste omiſſa.

PROP. XVI. LIB. XI.

In hac prope finem vice verborum, “quæ autem neutra ex parte “conveniunt,” legendum est, “quæ autem in eodem plano productæ, “neutra” &c. etenim in citando hanc Definitionem in Prop. 27. Lib. 1. non necesse fuit addere voces, “in eodem plano,” quoniam omnes rectæ de quibus agitur in libris præcedentibus sunt in eodem plano. hic autem omnino fuit necessarium.

PROP. XX.

## PROP. XX. LIB. XI.

In hac prope initium habetur “sin minus, fit major BAC.” potest autem angulus BAC aequalis esse alteri reliquorum. legendum igitur “sin minus, fit angulus BAC non minor utrovis reliquorum, major autem quam DAB.”

Et ad finem hujus legitur, “similiter demonstrabimus,” cum nulla demonstratione opus sit; quoniam enim angulus BAC non minor fit utrovis reliquorum, patet BAC una cum altero ex ipsis reliquo majorem esse.

## PROP. XXII. LIB. XI.

Et in hac legitur prope initium, “sin minus, sint inaequales anguli ad B, E, H, et major fit angulus ad B utrovis ipsorum qui sunt ad “E, H.” haec manifeste vitata sunt, poterit enim angulus ad B aequalis esse uni reliquorum. legendum igitur est “sin minus, sint inaequales anguli ad B, E, H, et fit angulus ad B non minor utrovis ipsorum ad “E, H. non igitur minor est recta AC utraque ipsarum DF, GK.”

## PROP. XXIII. LIB. XI.

Demonstratio hujus paulo brevior reddita est, omittendo in casu tertio ea quae prius ostensa fuerunt in primo; et adhibendo constructionem quam Campanus tradit, qui tamen Casum 2. et 3. non demonstrat. hujus autem tertii constructio et Demonstratio simpliciores paulo quam in textu Graeco factae sunt.

## PROP. XXIV. LIB. XI.

Verbum “similia” Enuntiationi hujus additum est, quoniam plana quibus continentur solida quae in Prop. 25. aequalia inter se ostendenda



denda sunt, similia debent esse et aequalia; ut aequalitas solidorum ex Prop. C. Lib. 11. inferatur. et quidem in Editione Oxoniensi Corollarium adjectum est Prop. 24<sup>ta</sup>, ostendens parallelogramma, de quibus agitur in hac Propositione, similia esse, ut solidorum aequalitas in Prop. 25. ex Def. 10. Lib. 11. ostendatur.

PROP. XXV, et XXVI. LIB. XI.

In Propositione 25<sup>ta</sup> figuræ solidæ quæ continentur planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus, inter se æquales ponuntur. et videtur Theonem aut alium quendam ut tædium effugeret demonstrandi figuras de quibus agitur in hac Propositione æquales esse, Definitionem decimam hujus Libri posuisse vice demonstrationis; quod quidem inscite admodum factum est.

Similiter, in Propositione 26<sup>ta</sup> duo anguli solidi æquales esse ponuntur, si uterque contineatur tribus angulis planis qui, singuli singulis, inter se sunt æquales. et fati mirum est nullum, quantum scio, ex Euclidis interpretibus vidisse aliquid duabus hæc Propositionibus deesse. Clavius quidem ad Def. 11. hujus Libri asserit, “per spicuum esse angulos solidos, qui angulis planis multitudine et magnitudine æqualibus continentur sibi mutuo æquales esse, nam congruent si sese penetrare intelligantur;” sed hoc sine ulla ratione asseritur, neque semper verum est extra casum in quo anguli solidi tribus tantum angulis planis continentur quorum singuli singulis sunt æquales. et in hoc casu idem est ac asserere duo triangula sphaerica inter se æquilatera, esse etiam inter se æquiangula, et sibi mutuo congruere; quod sine demonstratione concedi minime debet. Certe Euclides hoc non assumpsit de triangulis rectilincis; ostendit enim in Propositione 8<sup>va</sup>, Lib. 1. triangula inter se æquilatera, esse inter se æquiangula, unde ipsorum æqualitas ex Prop. 4<sup>ta</sup> ejusdem Libri manifesta est. et Menclaus, in Prop. 4<sup>ta</sup>, Lib. 1.

Lib. 1. Sphaericorum, explicite demonstrat triangula sphaerica inter se aequaliter esse etiam inter se aequiangula; unde et sibi mutuo congruere facile ostendi potest, si scilicet eorum latera eodem ordine et situ disposita fuerint.

Ad defectus igitur hos supplendos necessarium fuit tres Propositiones A, B, C huic Libro inferere. Propositiones enim 25<sup>ta</sup>, 26<sup>ta</sup>, et 28<sup>ta</sup>, et propterea octo aliae hujus Libri quae ex iis pendent, viz. 27. 31. 32. 33. 34. 36. 37. et 40. infirmo omnino haecenus innitebantur fundamento; ut et Prop. 8. 12. Cor. 17. et Prop. 18. Lib. 12. quae pendent ex Definitione 9<sup>na</sup>. figuras enim solidas quae planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus continentur, ut et angulos solidos qui aequalibus et iisdem numero planis angulis continentur, non semper inter se aequales esse, ostensum est in Notis ad Def. 10. hujus Libri.

Observandum est Andream Tacquet in Euclide suo definire angulos solidos aequales esse, "qui intra invicem positi congruunt." Propositio autem haec non est Definitio sed Axioma; vera enim est de magnitudinibus quibuscunque. posuit autem Definitionem hanc inutilem ut ope ejus demonstraret Prop. 36. hujus Libri sine ope Prop. 35. ejusdem. de qua demonstratione vide Notam ad Prop. 36.

PROP. XXVIII. LIB. XI.

In hac ostendi debuit diagonales esse in uno plano, non assumi. defectum hunc supplevit Clavius.

PROP. XXIX. LIB. XI.

Hujus Propositionis tres sunt casus; primus scilicet in quo duo parallelogramma basi AB opposita latus habent commune; secundus in quo parallelogramma haec a se invicem separata sunt, et tertius in quo habent

bent partem communem; et huic soli demonstratio quae haecenus habetur infervit. Primus autem immediate ostenditur ex praecedente Propositione 28<sup>va</sup>, quae quidem huic in hunc finem praemissa videtur; etenim nulli praeter ei et 40<sup>mae</sup> hujus Libri utilis est, quarum ultimae praemissa certe fuisset, si in hac 29<sup>na</sup> Euclides eam non adhibuisset. Hunc autem casum imperitus quidam ex Elementis delevit, et mutilavit Euclidean reliquorum casuum demonstrationem quam nunc restitui-  
mus, quaeque iis simul ostendendis infervit.

PROP. XXX. LIB. XI.

In demonstratione hujus, plana opposita solidi CP in figura nostra, hoc est solidi CO in figura Commandini, non ostenduntur inter se parallela; quod Tyronum gratia visum est ostendere.

PROP. XXXI. LIB. XI.

Hujus Propositionis duo sunt casus; primus in quo rectae insistentes ad rectos angulos sunt basibus; alter in quo non sunt. primus rursus dividitur in alios duos, quorum alter est is in quo bases sunt parallelogramma inter se aequiangula; reliquus in quo non sunt aequiangula. illius textus Graeci Editor mentionem non facit, demonstrationem autem ejus demonstrationi reliqui casus intexuit. quare Corollarium hoc ostendens addidisse debuit. fatius autem visum est casus hos distincte tradere. brevior etiam reddita est demonstratio, viam sequendo qua usus est Euclides in Prop. 14. Lib. 6. Praeterea in demonstratione casus in quo rectae insistentes non sunt ad rectos angulos basibus, non ostendit Editor solida in constructione descripta esse parallelepipeda; quod quidem Euclidem omisisse minime putandum est. Verba autem

ad finem Propositionis, “ quorum insistentes non sunt in iisdem rectis  
“ lineis,” ab imperito quodam addita sunt; nam possunt esse in iisdem  
rectis lineis.

## PROP. XXXII. LIB. XI.

Omisit Editor jubere parallelogrammum FH applicari in angulo FGH  
aequali angulo LCG, quod quidem necessarium est; unde recte hoc  
supplevit Clavius.

Præterea in constructione requiritur ut a basi FH, eadem altitudine  
ipsi CD, solidum paralelepipedum GK compleatur; verum innumera  
possunt esse solida quae eandem habent basim, et eandem altitudinem.  
scribendum igitur est “ et compleatur solidum paralelepipedum GK cu-  
“ jus basis sit FH, et una ex rectis insistentibus sit FD.” eademque  
correctio facienda est in Propositione 33.

## PROP. D. LIB. XI.

Verisimile admodum est Euclidem huic Propositioni locum in Ele-  
mentis dedisse, qui similem de parallelogrammis acquiangulis tradit in  
Prop. 23. Lib. 6.

## PROP. XXXIV. LIB. XI.

In hac ter habentur hæc verba, ὧν αἱ ἐφεσῶσαι ἐκ εἰσὼν ἐπὶ τῶν  
ἰσῶτων εὐθειῶν “ quorum insistentes non sunt in eisdem rectis lineis;”  
quae vel omnino sunt omittenda, ut factum est a Clavio, vel, ipsorum  
vice, scribenda sunt, “ sive insistentes rectae sint in eisdem rectis lineis,  
“ sive non sint,” inepte enim excluditur alter casus.

Et bis habentur ὧν τὰ ὕψη, “ quorum altitudines,” manifesto er-  
rore, vice ὧν αἱ ἐφεσῶσαι, “ quorum insistentes.” altitudo enim semper  
est ad rectos angulos basi.

## PROP. XXXV.

PROP. XXXV. LIB. XI.

In hac breviori via quam in textu Graeco anguli ABH, DEM recti ostenduntur; et similiter ostenditur rectos esse ACH, DFM. repetitio autem ejusdem Demonstrationis quae in textu habetur omissa est. verisimile enim est eam a quodam Editore textui additam fuisse, ut ex verbis, "similiter demonstrabimus" conicere licet; ea enim non solent addi nisi quando Demonstratio non traditur, aut, si tradita sit, in quibusdam differt a praecedente Demonstratione, ut in 26. hujus Libri. Campanus autem non habet hanc repetitionem.

Aliam Corollarii hujus Propositionis Demonstrationem dedimus, cujus ope Propositio 36. quae sequitur, demonstratur sine Prop. 35.

PROP. XXXVI. LIB. XI.

Andreas Tacquet in Euclide suo hanc Propositionem sine ope Prop. 35. demonstrat. patet autem solida quae aequiangula dicuntur, in enuntiatione Propositionis 36. ut nunc habetur in textu Graeco, ea esse quorum anguli solidi tribus angulis planis inter se aequalibus, singuli singulis, et similiter positus, continentur; ut ex constructione manifestum est. hos autem angulos solidos sibi mutuo congruere assumit, non demonstrat Tacquetus; ponit enim ille solida jam facta esse, non ostendit quomodo construantur, ut in textu Graeco factum est. ope autem secundae Demonstrationis praecedentis Corollarii, Demonstratio ejus in hac etiam quae in textu habetur hypothefi legitima redditur.

PROP. XXXVII. LIB. XI.

In hac assumitur rationes triplicatas rationum quae inter se eadem sunt, esse inter se eadem, ut et rationes eadem esse inter se quarum rationes triplicatae sunt inter se eadem; quod sine Demonstratione ni-

nime concedendum est; certe Euclides harum Propositionum primam et faciliorem non assumpsit, sed demonstravit in casu rationis duplicatae, in Prop. 22. Lib. 6. alia igitur Demonstratio tradita est similis ei quae habetur in ea Propositione, ut Clavius prius fecerat.

## PROP. XXXVIII. LIB. XI.

Si a puncto in plano aliquo quod alteri plano ad rectos est angulos, ducenda sit, ad planum hoc, recta perpendicularis; fiet, ducendo ad communem planorum sectionem perpendicularem a puncto illo; erit enim haec perpendicularis ad planum subiectum, vi Definitionis 4. Libri hujus. ineptum enim esset, in hoc casu, uti Propositione 11<sup>ma</sup> hujus. <sup>¶ 17: 12.</sup> sed Euclides\*, Apollonius aliique Geometrae jubent perpendicularem duci a puncto ad planum subiectum, et concludunt eam cadere in communem planorum sectionem; quod hoc idem sit ac si praedicta constructione uterentur, et concluderent rectam ductam perpendicularem esse ad planum subiectum; aliquis autem hoc non videns, putavit necessarium fuisse Propositionem hanc huic Libro addere, cujus quidem nullus est usus.

## PROP. XXXIX. LIB. XI.

In hac rectae lineae quae bifariam secant opposita plana parallelepipedi, in uno ponuntur esse plano, quod quidem demonstrari debuit; ut nunc factum est.

## LIB. XII.

**E**X Epistola Archimedis ad Dositheum libris de Sphaera et Cylindro praemissa, quam integritati suae ex Manuscriptis restituit Doctissimus Collega meus Dom. Jacobus Moor Graccarum literarum Professor

feffor apparet, ipfo me monente, Eudoxum auctorem fuiffe praeccipuarum Propositionum quae in hoc Libro continentur.

PROP. II. LIB. XII.

Ad initium hujus habentur haec “ si enim non ita fit, erit ut quadratum ex BD ad quadratum ex FH, ita circulus ABCD vel ad spatium ali-  
 “ quod minus circulo EFGH, vel ad majus.” et similia rursus occurrunt prope finem hujus Propositionis, ut et in Propp. 5. 11. 12. 18. hujus Libri. de quibus observandum est, demonstrationi Theorematis sufficere, in hisce et similibus casibus, ut res quaedam possit existere, dummodo hoc perspicuum fuerit, quamvis non possit eadem Geometricè inveniri seu exhiberi. ita hic assumitur quartam existere posse proportionalem tribus magnitudinibus, viz. duobus quadratis ex BD, FH et circulo ABCD, quoniam scilicet perspicuum est esse quadratum aliquod aequale circulo ABCD, quamvis illud Geometricè inveniri non potest; tribus autem figuris rectilincis quadratis scilicet ex BD, FH, et quadrato quod circulo ABCD aequale est, existit quartum proportionale quadratum; nam tribus rectis lincis quae ipsorum sunt latera existit quarta proportionalis recta<sup>3</sup>. et spatium quarto huic quadrato aequale illud est quod in hac a. 12. 6. Propositione designatur litera S. simile autem intelligendum est in reliquis Propositionibus citatis; et verisimile est haec ostensa fuiffe ab Euclide, et a quodam Editore ex textu deleta. Lemma enim quod huic Propositioni ab imperito quodam subjungitur huic rei explicandae minime inservit.

PROP. III. LIB. XII.

In textu Graeco et versionibus sequentia habentur, viz. “ Et cum  
 “ duae rectae lineae sese tangentes BA, AC” &c. hic anguli BAC,  
 KHL opè Prop. 10. Lib. 11. aequales ostenduntur, quod prius factum  
 tum

## N O T A E.

tum fuit. triangulum enim EAG simile ostensum fuit ipsi KHL. repetitio igitur haec omiffa est, et triangula ABC, HKL similia esse, brevius ope Prop. 21. Lib. 6. ostenduntur.

## PROP. IV. LIB. XII.

Pauca in hac magis explicite quam in textu Graeco tradita sunt.

## PROP. V. LIB. XII.

In hac prope finem habentur verba *ὡς ἐμπροσθεν ἐδείχθη*, “ut antea ostensum fuit;” quae rursus occurrunt ad finem Propositionis 18. hujus Libri; nullibi tamen, nisi forsan hisce verbis citetur Lemma inutile annexum Propositioni 2<sup>da</sup>, in hisce Elementis hoc ostensum est, et forsan ab imperito Editore omiffa sunt, qui oblitus est delere etiam has voces.

## PROP. VI. LIB. XII.

Breviorem hujus Demonstrationem dedimus. et quae nunc in textu Graeco habetur paulo brevior potest reddi. imperite enim ejus auctor ad finem ejus bis utitur Propositione 22. Lib. 5. quasi ea non de quocunque magnitudinibus, sed tantum de tribus, quae totidem aliis, binae sumptae sunt proportionales, intelligenda sit.

## COR. PROP. VIII. LIB. XII.

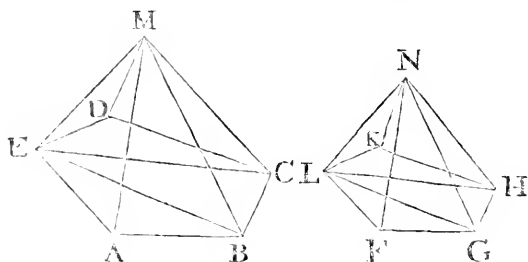
Demonstratio hujus imperfecta est, etenim pyramides in quas eae dividuntur quae habent multangulas bases, non ostenduntur inter se similes, quod necessario fieri debuit, et in simili casu factum est in Prop. 12. hujus Libri. plena Demonstratio est ut sequitur,

Sint similes et similiter positae pyramides, quarum bases quidem polygona ABCDE, FGHKL, vertices autem M, N puncta. habebit pyramis



ramis ABCDEM ad pyramidem FGHKLN triplicatam rationem ejus quam habet latus AB ad homologum latus FG.

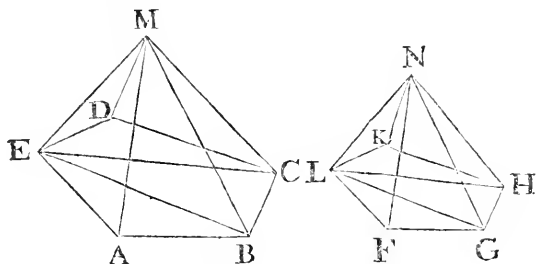
Dividuntur enim polygona in triangula ABE, EBC, ECD, FGL, LGH, LHK, quae inter se similia erunt, singula singulis<sup>a</sup>. quoniam a. 20. 6. vero pyramides sunt similes, erit<sup>b</sup> triangulum EAM simile triangulo<sup>b. 11. Def. 11.</sup> LFM, et triangulum ABM ipsi FGN. est igitur<sup>c</sup> ME ad EA, ut NL<sup>c. 4. 6.</sup> ad LF; ut vero AE ad EB, ita est FL ad LG, quia similia sunt EAB, LFG triangula; ergo ex aequali ut ME ad EB, ita est NL ad LG. similiter ostendetur EB ad BM, ut LG ad GN; rursus igitur, ex aequali, ut EM ad MB, ita est LN ad NG. triangulorum igitur EMB,



LNG proportionalia sunt latera, quare acquiangula<sup>d</sup> sunt EMB, LNG<sup>a. 5. 6.</sup> triangula, et inter se similia. pyramides igitur quarum bases EAB, LFG triangula, et vertices M, N sunt inter se similes, ipsarum enim anguli solidi sunt aequales<sup>e</sup>, et continentur similibus planis multitudine ae-<sup>e. B. 11.</sup> qualibus. eadem ratione pyramis EBCM similis ostendetur pyramidi LGHN, et pyramis ECDM ipsi LHKN. et quoniam pyramis EABM similis est pyramidi LFGN, et triangulares habent bases, habebit pyramis EABM ad ipsam LFGN, triplicatam rationem ejus quam habet EB ad latus homologum LG; eadem ratione, et pyramis EBCM ad pyramidem LGHN habet triplicatam rationem ejus quam habet EB

ad

ad LG. ut igitur pyramis EABM ad pyramidem LFGN, ita pyramis EBCM ad pyramidem LGHN. eadem ratione, erit ut pyramis EBCM ad ipsam LGHN, ita pyramis ECDN ad LHKN pyramidem. et ut unum antecedentium ad unum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. est igitur, ut pyramis EABM ad pyramidem



LFGN, ita tota pyramis ABCDEM ad totam pyramidem FGHLKN. Pyramis autem EABM ad pyramidem LFGN triplicatam rationem habet ejus quam habet AB ad FG, igitur et tota pyramis habet ad totam pyramidem triplicatam rationem quam habet AB ad homologum latus FG. Q. E. D.

PROP. XI, et XII. LIB. XII.

Ordo literarum Alphabeti, contra morem Euclidis, non servatur in figuris harum Propositionum, quem igitur restitimus. unde et prima pars Prop. 12<sup>mae</sup> iisdem verbis quibus prima pars Prop. 11<sup>mae</sup>, ostendi potest. omnia igitur est demonstratio ejus partis, et ex Prop. 11<sup>ma</sup> assumpta.

Demonstrationes Prop. 10, et 11, a diversis auctoribus factae videntur. Etenim in Prop. 10, pyramis super quadratum circulo inscriptum dimidium ostenditur ejus quae super quadratum circumscriptum

erecta

erecta est, ope prismatum super eandem bases; in Propositione autem  
 1 1. id ipsum brevius ostenditur ope Prop. 6. hujus.

PROP. XIII. LIB. XII.

In hac Propositione communis sectio plani basibus cylindri paralleli,  
 et ipsius cylindri circulus esse ponitur, visum igitur est hoc breviter of-  
 tendere; unde satis liquet planum illud cylindrum in duos alios dividere.  
 idem autem et in Prop. 14<sup>ta</sup> suppleri intelligendum est. Verbum etiam  
 “ utcunque ” omissum prope finem Prop. 13. nunc additum est.

PROP. XV. LIB. XII.

“ Et compleantur cylindri AX, EO.” Cylindros acque ac conos ut  
 jam factos enuntiatio et expositio Propositionis exhibent. quare potius le-  
 gendum “ et sint coni quidem ALC, ENG; cylindri vero AX, EO.”

Deest casus primus in secunda parte demonstrationis; quaedam etiam  
 desunt in casu secundo ejusdem, ante verba “ iisdem enim constructis ”  
 quae nunc addita sunt.

PROP. XVII. LIB. XII.

Verba in textu Graeco in Enuntiatione hujus Propositionis, viz.  
*εις τὴν μείζονα σφαιραν σφαιρὸν πολυέδρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῶν τῆς*  
*ἐλάσσονος σφαιρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν,* ita vertuntur a Commandino  
 aliisque interpretibus “ in majori solidum polyedrum describere quod  
 “ minoris sphaerae superficiem non tangat.” referunt scilicet verba *κατὰ*  
*τὴν ἐπιφάνειαν* ad proxima verba *τῆς ἐλάσσονος σφαιρας.* minime au-  
 tem ita verti debent, solidum enim polyedrum non solum superficiem  
 minoris sphaerae sed et totam sphaeram minorem attingit et pervadit.

F f f

referenda

referenda igitur sunt ea verba ad τὸ σφαιρὸν πολυέδρον, et vertenda “in majori sphaera solidum polyedrum describere cujus superficies sphaeram “minorem non attingat;” ut sensus Propositionis necessario requirit.

Demonstratio autem Propositionis depravata est et mutila. Etenim quae facilia sunt explicite admodum ostenduntur, quae vero minus obvia, explicatione destituuntur; ut cum asseritur quadratum ex KB majus esse quam duplum quadrati ex BZ, in prima demonstratione; et angulum BZK obtusum esse in secunda; quae quidem demonstrari debuerunt. praeterea in prima demonstratione habetur “ducatur a puncto K ad “BD perpendicularis KΩ” cum dicendum fuit “jungatur KV,” quae ostendenda fuit perpendicularis ad BD. manifestum enim est ex figura in Hervagii et Gregorii editionibus, et ex ipso textu, Editorem textus Graeci quem nunc habemus non vidisse perpendicularem a puncto K ad BD ductam necessario incidere in ipsum punctum V, incidit enim in punctum Ω diversum a V in eorum figuris; et in demonstratione ponuntur ea puncta tanquam diversa, nam diversis literis V et Ω notantur. Videtur autem Commandinum hoc vidisse, nam in ejus figura unum idemque punctum notatur duabus literis V, Ω. sed et ante Commandinum vir doctus Joannes Dec in Commentariis quae huic Propositioni subjunxit in versione Anglica Elementorum ab Henrico Billingsley facta, Londini A. D. 1570 impressa, errorem hunc explicite notat, et demonstrationem constructioni quae in textu Graeco habetur convenientem tradit, quā scilicet ostendit perpendicularem a puncto K ad BD ductam, necessario cadere in V.

Praeterea quadrilatera SOPT, TPRY et triangulum YRX minime ostenduntur non attingere sphaeram minorem, quod necessarium fuit demonstrare. solus Clavius, quantum scio, hoc observavit et Lemmate demonstravit, quod paulo aliter et brevius ostensum Propositioni huic praemissum est.

In Corollario hujus Propositionis, positum est descriptum esse in altera sphaera solidum polyedrum simile ei quod in sphaera BCDE descriptum fuit. verum constructio qua in altera sphaera polyedrum describi potest non tradita sit, fatius putavimus eam exhibere, et demonstrare similitudinem pyramidum in hoc polyedro, pyramidibus ejusdem ordinis in polyedro solido in sphaera BCDE.

Ex praecedentibus satis liquet quam ab imperitis Editoribus vitata et mutilata fuerint Euclidis accuratissimi Geometrae Elementa. Opinio autem quam plerique viri docti habuerunt de Editione Graeca quae nunc extat, eam scilicet nihil aut parum differre a vero ipsius Euclidis opere, eos sine dubio fefellit, minusque accuratos in Editione hac examinanda reddidit; quo factum est ut a Theonis tempore haecenus, errores quosdam, satis licet crassos non perspexerint. Sperare igitur licet operam quam in eisdem corrigendis et libris hisce emaculandis posuimus, non futuram fore ingratam acquis rerum aestimatoribus, qui Demonstrationes legitimas ab iis quae non sunt discernere valent.

F I N I S.

E R R A T A.

- Fig. 14. linea 5. post ABC; adde, et producantur AC, AD ad puncta E, F;  
 P. 322. l. ult. dele, superfici  
 P. 324. l. 2. DUABUS, lege, DUOBUS  
 P. 348. l. 4. a fine, Apogogicas, lege, Apagogicas  
 P. 408. l. 3. ECDN, lege, ECDM









y. 26.

c. f.



John Adams  
Library.



THE FRIEND OF THE  
BOSTON PUBLIC LIBRARY



SHELF 1.

