



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

L

QA
31
E84
1883





EUCLIDIS

OPERA OMNIA.

EDIDERUNT

I. L. HEIBERG ET H. MENGE.



LIPSIÆ

IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.

MDCCCLXXXV.

EUCLIDIS

E L E M E N T A.

5-65-05-

EDIDIT ET LATINE INTERPRETATUS EST

I. L. HEIBERG,

DR. PHIL.

UOL. IV.

LIBROS XI—XIII CONTINENS.



LIPSIAE

IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.

MDCCCLXXXV.

LIPSIÆ: TYPIS B. G. TEUBNERI.

PRAEFATIO.

Prodit iam, uti dixeram in uol. II p. XXII, quartum Elementorum uolumen ante tertium, id quod hoc adtulit incommodum, quod propositiones quaedam libri X non iis numeris citandae erant, quibus in editionibus uulgatis feruntur, sed iis, quibus in hac editione cum codicibus significabuntur. sed hoc incommodum edito tertio uolumine sublatum erit, et nunc quoque propositiones illae facile reperientur addita ad numerum a me citatum unitate.

In hoc uolumine praeter codices solitos PBFV*) (u. uol. I p. VIII—IX) his subsidiis usus sum:

b — cod. Bononiensi, de quo u. uol. I p. IX; extremam partem libri XI et totum librum XII in append. II recepi, sicut in codice legitur; cfr. p. 385 not.

q — cod. Parisino 2344, de quo u. uol. II p. V. usurpatus est ab initio libri XII, quia in XII, 3 p. 154, 7 deficit F.

*) Hoc loco additamenta quaedam cod. B subiungam, quibus in adparatu locus non fuit. XI, 4 enim p. 14, 1 supra ἀπειλήφθωσαν add. τετμήσθωσαν m. rec. XI, 10 p. 30, 2 supra παρά add. ἦτοι παράλληλοι ταῖς δυσὶν εὐθείαις ταῖς ἀπτομέναις ἀλλήλων m. rec. XII, 12 p. 208, 9 in mg. add. pro scholio ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρω ἀντῶν m. 1.

L — cod. palimpsesto Londinensi Musei Britannici Add. 17211, qui praeter partes quasdam libri X etiam XIII, 14 continet ab initio p. 296, 3 ad uocabulum ἰση p. 300, 4. de hoc codice pluribus egi et scripturam plenam edidi in Philologi uol. XLIV p. 353—366.

Praeuideram fore, ut inter hoc uolumen et prius satis magnum temporis spatium intercederet; sed maius etiam euenit, quam putaueram, quia interim nouum munus scholasticum suscepi et praeterea alio opere ad usum scholarum destinato occupatus fui. sed finito iam hoc labore et primis difficultatibus noui officii superatis spero, me breui hoc opus diuturnum ad finem perducturum esse, praesertim cum materiam reliquorum uoluminum iam omnem fere collectam habeam.

Scr. Hauniae mense Iunio MDCCCLXXXV.

I. L. Heiberg.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ.

ια'.

Ὅροι.

α'. Στερεόν ἐστὶ τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον.

β'. Στερεοῦ δὲ πέρασ ἐπιφάνεια.

5 γ'. Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστίν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ [ὑποκειμένῳ] ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας.

δ'. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστίν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ᾖσιν.

ε'. Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστίν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου 15 ἐπὶ τὸ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρασ τῆς εὐθείας εὐθεῖα ἐπιξευχθῇ, ἢ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς ἐφεστώσης.

ς'. Ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστίν ἢ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ 20 τομῇ ἀγομένων πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

Def. 1—2. Hero def. 13, Psellus p. 49. 3—4. Hero def. 115, 2.

Εὐκλείδου στοιχείων $\bar{\alpha}$ P V et b, sed mg. m. 1: γρ. στερεῶν. Εὐκλείδου στερεῶν α στοιχ. $\bar{\alpha}$ B. Εὐκλείδου στερεῶν $\bar{\alpha}$, add. στοιχείων F. 1. ὅροι] om. codd. Numeros om. codd. 7. ὑποκειμένῳ] supra scr. m. rec. P, supra m. 1 V; αὐτῷ b, mg.

XI.

Definitiones.

1. Solidum est, quod longitudinem et latitudinem et altitudinem habet.

2. Terminus autem solidi superficies est.

3. Recta ad planum perpendicularis est, ubi ad omnes rectas eam tangentes et in plano illo ductas rectos angulos efficit.

4. Planum ad planum perpendicularare est, ubi rectae ad communem sectionem planorum perpendicularares in alterutro planorum ductae ad alterum planum perpendicularares sunt.

5. Rectae ad planum inclinatio est, ubi ab eleuato termino rectae ad planum perpendiculararis ducitur, et ab puncto ita orto ad terminum rectae in plano positum recta ducitur, angulus a recta ita ducta et ab erecta comprehensus.

6. Plani ad planum inclinatio est angulus acutus comprehensus a rectis in utroque plano ad idem punctum perpendicularibus ad communem sectionem ductis.

m. 1: γρ. ὑποκειμένω; F mg. m. 1: γρ. ἐν τῷ αὐτῷ. ποιεῖ F, et P, corr. m. 2. 9. πρὸς — 10. ἐπιπέδων] mg. m. 1 V. 10. τῷ] καὶ τῷ V, καὶ supra scr. m. 2 F. 12. εὐθείας] -ας post ins. m. 1 P. εὐθείας — 17. ἐφεστώσης] m. 2 B, om. F b. 15. ἐπὶ τό] P, ἀπὸ τοῦ B (sed corr.), in ras. V, m. rec. P. πέρασ] P, πέρατος B (sed corr.), e corr. V, m. rec. P. 19. ὀξεῖα] om. V (ras. est 3 litt.). 20. Post τομῆ spatium 4 litt. relinquitur in F. τῶν ἐπιπέδων] corr. ex τῆς ἐπιπέδου m. 1 b.

ζ'. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾦσιν.

· η'. Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι τὰ ἀσύμπτωτα.

8 θ'. Ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τὸ πλῆθος.

ι'. Ἴσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει.

10 ια'. Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἢ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν πρὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις. Ἄλλως· στερεὰ γωνία ἐστὶν ἢ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γωνιῶν ἐπιπέδων περιεχομένη μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ
15 ἐπιπέδῳ πρὸς ἐνὶ σημείῳ συνισταμένων.

ιβ'. Πυραμὶς ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον ἀπὸ ἐνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἐνὶ σημείῳ συνεστῶς.

ιγ'. Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὁμοιά
20 ἐστι καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα.

ιδ'. Σφαῖρά ἐστὶν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

ιε'. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν ἢ μένουσα
25 εὐθεΐα, περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται.

ισ'. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου.

8. Hero def. 115, 2. 9. ib. 118, 2. 11. ib. 24.
12. ib. 100. 14. ib. 77. 11—15. Psellus p. 49—50.

3. ωσι Vb. 4. παράλληλα ἐπί- in ras., -πεδα mg. m.
2 V. 5. ὑπό] corr. ex ἀπό m. 1 b. 12. πρὸς] B; ἢ πρὸς

7. Planum ad planum similiter inclinatum dicitur atque aliud planum ad aliud, ubi anguli inclinationum, quos definiuimus, aequales sunt inter se.

8. Parallela plana sunt, quae non concurrunt.

9. Similes figurae solidae sunt, quae planis similibus continentur numero aequalibus.

10. Aequales autem et similes figurae solidae sunt, quae planis similibus continentur et numero et magnitudine aequalibus.

11. Solidus angulus est amplius quam duarum rectarum inter se tangentium nec in eadem superficie positarum ad omnes rectas inclinatio.¹⁾ Aliter. Solidus angulus est, qui amplius quam duobus angulis planis continetur non in eodem plano positus et ad unum punctum coniunctus.

12. Pyramis est figura solida planis comprehensa, quae ab uno plano ad unum punctum componitur.

13. Prisma est figura solida planis comprehensa, quorum duo opposita et aequalia et similia sunt, reliqua autem parallelogramma.

14. Sphaera est figura comprehensa, ubi manente diametro semicirculi semicirculus circumactus rursus ad eundem locum restituitur, unde ferri coeptus est.

15. Axis autem sphaerae est recta manens, circum quam semicirculus circumagitur.

16. Centrum autem sphaerae idem est ac semicirculi.

1) Haec definitio, quae loquendi genere ab Euclide abhorret, fortasse ex Elementis antiquioribus ab eo desumpta est.

PFV b. 13. ἐπιπέδων'' γωνιῶν' F, ἐπιπέδων γωνιῶν B.

15. Ante ἐνί del. εν F. 17. συνεστός Bb; in P non liquet.

18. ἐστίν PF. 19. ὄν] om. φ. 20. ἐστίν F. 22. τὸ ἡμι-

κύκλιον] mg. m. 1 b. 26. ἐστίν F.

ιζ'. Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεΐα τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ιη'. Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου με-
 5 νούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῆ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. καὶν μὲν ἢ μένουσα εὐθεΐα ἴση ἢ τῇ λοιπῇ [τῇ] περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένη, ὀρθογώνιος ἔσται ὁ κῶνος,
 10 εἰάν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος, εἰάν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος.

ιδ'. Ἄξων δὲ τοῦ κῶνου ἐστὶν ἢ μένουσα εὐθεΐα, περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται.

κ'. Βάσις δὲ ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης
 15 εὐθείας γραφόμενος.

κα'. Κύλινδρός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῆ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι,
 20 τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

κβ'. Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἢ μένουσα εὐθεΐα, περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται.

κγ'. Βάσεις δὲ οἱ κύκλοι οἱ ὑπὸ τῶν ἀπεναντίον περιεγομένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι.

25 κδ'. Ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν οἷ τε ἄξονες καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσιν.

18. Hero def. 84, 2. 21—23. ib. 96. 18—23. Psellus p. 50.

1. σφαίρας] σ- supra scr. m. 1 P. 3. τά] om. b. μέρει φ.
 4. τρι- in ras. m. 1 B. 5. πλευρᾶς μιᾶς V. τῶν] corr. ex
 τοῦ m. 1 b. ὀρθὴν] om. V b, -ν euan. F. γωνία φ. 8. τῇ]

17. Diametrus autem sphaerae est recta aliqua per centrum ducta et ad utramque partem superficie sphaerae terminata.

18. Conus est figura comprehensa, ubi manente alterutro latere trianguli rectanguli eorum, quae rectum angulum comprehendunt, triangulus circumactus rursus ad eundem locum restituitur, unde ferri coeptus est. et si recta manens aequalis est reliquae ad angulum rectum positae, quae circumagitur, conus rectangulus erit, sin minor est, obtusiangulus, sin maior, acutiangulus.

19. Axis autem conici recta est manens, circum quam triangulus circumagitur.

20. Basis autem circulus est, qui a recta circumacta describitur.

21. Cylindrus est figura comprehensa, ubi alterutro laterum parallelogrammi rectanguli rectum angulum comprehendentium manente parallelogrammum circumactum rursus ad eundem locum restituitur, unde ferri coeptum est.

22. Axis autem cylindri recta est manens, circum quam parallelogrammum circumagitur.

23. Bases autem circuli sunt, qui a duobus lateribus inter se oppositis in circumagendo describuntur.

24. Similes conici et cylindri sunt, quorum axes et basium diametri proportionales sunt.

m. rec. P, om. V b φ. 9. Post ὀρθήν add. γωνίαν Psellus et F, sed punctis del. 10. ἀμβυγωνιος φ. 12. δέ] supra scr. m.
 1 V. εὐθεία] om. V. 16. δέ ἐστιν V. 18. γωνίαν] om.
 B. 23. βάσις V b φ. ἀπεναντίων b. 26. ἀνάλογοι V b.
 ὅσιν F, εἰσι V b.

κε'. Κύβος ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἕξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον.

κς'. Ὀκτάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

5 κζ'. Εἰκοσάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

κη'. Δωδεκάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

10

α'.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μὲν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν μετεωροτέρῳ.

15 Εἰ γὰρ δυνατόν, εὐθείας γραμμῆς τῆς $AB\Gamma$ μέρος μὲν τι τὸ AB ἔστω ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι τὸ $B\Gamma$ ἐν μετεωροτέρῳ.

Ἔσται δὴ τις τῆ AB συνεχῆς εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. ἔστω ἡ $B\Delta$ δύο ἄρα εὐθειῶν τῶν $AB\Gamma$, $AB\Delta$ κοινὸν τμήμα ἐστὶν ἡ AB .
20 ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, ἐπειδήπερ ἐὰν κέντρῳ τῷ B καὶ διαστήματι τῷ AB κύκλον γράψωμεν, αἱ διάμετροι ἀνίσους ἀπολήφονται τοῦ κύκλου περιφερείας.

Εὐθείας ἄρα γραμμῆς μέρος μὲν τι οὐκ ἔστιν ἐν

25. Hero def. 104. 26. ib. 102. 27. ib. 101.
28. ib. 103. 25—28. Psellus p. 50—51.

2. Post ἴσων eras. καὶ ἰσοπλεύρων V. Def. 27—28 hoc ordine habent P et Psellus; permutavit Theon (BFVb).
5. σχῆμα στερεόν] τό V, et b, sed mg. m. 1: γρ. σχῆμα στερεόν.
εἴκοσι] ἢ F. 7. ἐστὶν F. δώδεκα] in ras. V. 8. -γωνίων supra ras. m. 1 V. 10. θεώρημα α' V. 12. τι ἐν] τι ἐν τῷ BF. μετεώρῳ b, mg. m. 1: γρ. ἐν τῷ μετεωροτέρῳ.
16. ἐν] ἐν τῷ F. 18. ἄρα] δὴ B, supra scr. m. 1.

25. Cubus est figura solida sex quadratis aequalibus comprehensa.

26. Octaëdrum est figura solida octo triangulis aequalibus et aequilateris comprehensa.

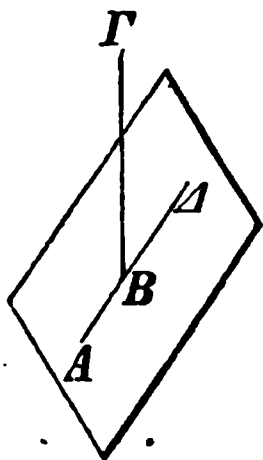
27. Icosaëdrum est figura solida uiginti triangulis aequalibus et aequilateris comprehensa.

28. Dodecaëdrum est figura solida duodecim pentagonis aequalibus et aequilateris et aequiangulis comprehensa.

I.

Fieri non potest, ut rectae lineae pars sit in plano subiacenti, pars autem in eleuatiore.

Nam si fieri potest, rectae lineae $AB\Gamma$ pars AB sit in plano subiacenti, pars autem $B\Gamma$ in eleuatiore.



erit igitur in plano subiacenti recta aliqua rectam AB in directum continuans. sit $B\Delta$. itaque duarum rectarum $AB\Gamma$, $AB\Delta$ pars communis est AB ; quod fieri non potest, quia, si centro B , radio autem

AB circulum describerimus, diametri [$AB\Gamma$, $AB\Delta$] inaequales arcus circuli abscindent.¹⁾

Ergo fieri non potest, ut rectae lineae pars sit in

1) Eos scilicet, qui inter puncta A , Γ et inter A , Δ positi sunt. tum cfr. I def. 17.

19. δοθεισῶν εὐθειῶν Theon. (BF V b). AB] B in ras. m. 1 B. ἦ] in ras. V, τό b. 20. ἐστίν] om. V. ἐπειδήπερ — 22. περιφερείας] P (ἐάν m. 1 ex ἄν corr.); εὐθεῖα γὰρ εὐθεία οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεία ἢ καθ' ἓν· εἰ δὲ μή, ἐφαρμόσουσιν ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι Theon? (BF V b); idem mg. m. rec. P., add. οὕτως ἐν ἄλλοις εὗρηται, ἔπειτα τό· εὐθείας ἄρα γραμμῆς.

τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν μετεωροτέρῳ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἐνί
5 εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἐνί ἐστὶν ἐπιπέδῳ.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ $AB, \Gamma\Delta$ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ E σημεῖον· λέγω, ὅτι αἱ $AB, \Gamma\Delta$ ἐν ἐνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἐνί ἐστὶν ἐπιπέδῳ.

10 Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῶν $E\Gamma, EB$ τυχόντα σημεῖα τὰ Z, H , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $\Gamma B, ZH$, καὶ διήχθωσαν αἱ $Z\Theta, HK$ · λέγω πρῶτον, ὅτι τὸ $E\Gamma B$ τρίγωνον ἐν ἐνί ἐστὶν ἐπιπέδῳ. εἰ γὰρ ἐστὶ τοῦ $E\Gamma B$ τριγώνου μέρος ἦτοι τὸ $Z\Theta\Gamma$ ἢ τὸ HBK ἐν τῷ ὑπο-
15 κειμένῳ [ἐπιπέδῳ], τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ μιᾶς τῶν $E\Gamma, EB$ εὐθειῶν μέρος μὲν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ. εἰ δὲ τοῦ $E\Gamma B$ τριγώνου τὸ $Z\Gamma B H$ μέρος ἦ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ ἀμφοτέρων τῶν
20 $E\Gamma, EB$ εὐθειῶν μέρος μὲν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. τὸ ἄρα $E\Gamma B$ τρίγωνον ἐν ἐνί ἐστὶν ἐπιπέδῳ. ἐν ᾧ δὲ ἐστὶ τὸ $E\Gamma B$ τρίγωνον, ἐν τούτῳ καὶ ἑκατέρα τῶν $E\Gamma, EB$, ἐν ᾧ δὲ ἑκατέρα τῶν $E\Gamma, EB$, ἐν τούτῳ καὶ αἱ
25 $AB, \Gamma\Delta$. αἱ $AB, \Gamma\Delta$ ἄρα εὐθεῖαι ἐν ἐνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἐνί ἐστὶν ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. τὸ δέ] P b, μέρος δέ τι B F V. ἐν] ἐν τῷ F. 7. αἱ] om. F. 10. $E\Gamma, EB$] in ras. V. 11. ΓB] corr. in B F V. 12. $E\Gamma B$] litt. B in ras. m. 1 P; $EB\Gamma B$. 14. $Z\Gamma\Theta P$. ἐν — 15. ἄλλῳ] om. b, mg. m. 1 V. 15. ἐπιπέδῳ] om. P.

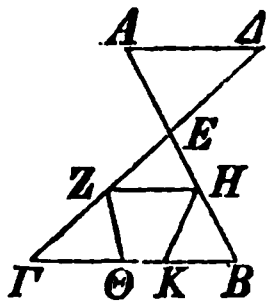
plano subiacenti, pars autem in eleuatiore; quod erat demonstrandum.

II.

Si duae rectae inter se secant, in eodem plano sunt, et omnis triangulus in eodem plano est.

Nam duae rectae $AB, \Gamma\Delta$ inter se secant in puncto E . dico, rectas $AB, \Gamma\Delta$ in eodem plano esse, et omnem triangulum in eodem plano esse.

sumantur enim in $E\Gamma, EB$ quaelibet puncta Z, H , et ducantur $\Gamma B, ZH$ et eas secantes $Z\Theta, HK$. dico primum, triangulum $E\Gamma B$ in eodem plano esse.



nam si pars trianguli $E\Gamma B$ uel $Z\Theta\Gamma$ uel HBK in subiacenti est, reliquum autem in alio, etiam rectarum $E\Gamma, EB$ pars in plano subiacenti, pars autem in alio erit. sin trianguli $E\Gamma B$ pars, quae est $Z\Gamma B H$, in plano subiacenti est, re-

liquum autem in alio, etiam utriusque rectae $E\Gamma, EB$ pars in subiacenti plano erit, pars autem in alio; quod demonstraui absurdum esse [prop. I]. ergo triangulus $E\Gamma B$ in eodem plano est. in quo autem est triangulus $E\Gamma B$, in eo est etiam utraque $E\Gamma, EB$, in quo uero utraque $E\Gamma, EB$, in eo etiam $AB, \Gamma\Delta$ sunt [prop. I]. ergo rectae $AB, \Gamma\Delta$ in eodem plano sunt, et omnis triangulus in eodem plano est; quod erat demonstrandum.

II. Galen. III. p. 830.

16. EB] ΓB φ . 18. $\Gamma Z B H$ V. η] P, $\epsilon\lambda\eta$ BFVb, $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ bene August. 19. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\alpha\iota$] $\epsilon\lambda\eta$ $\acute{\alpha}\nu$ F. 20. $EB, E\Gamma$ F.
 21. $\alpha\lambda\lambda\omega\iota$ F. 22. $E\Gamma B$] litt. ΓB in ras. V, $EB''\Gamma'$ b.
 23. $E\Gamma B$] litt. ΓB in ras. V, $EB''\Gamma'$ b. 24. $EB, E\Gamma$ Vb.
 25. $\epsilon\upsilon\theta\epsilon\iota\alpha$ φ (non F). 27. $\delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] : \sim F.

γ'.

Ἐὰν δύο επίπεδα τέμνη ἄλληλα, ἡ κοινή αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστίν.

Δύο γὰρ επίπεδα τὰ AB , $BΓ$ τεμνέτω ἄλληλα, 5 κοινή δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ $ΔB$ γραμμὴ· λέγω, ὅτι ἡ $ΔB$ γραμμὴ εὐθεῖά ἐστίν.

Εἰ γὰρ μή, ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ $Δ$ ἐπὶ τὸ B ἐν μὲν τῷ AB ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ $ΔEB$, ἐν δὲ τῷ $BΓ$ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ $ΔZB$. ἔσται δὴ δύο εὐθειῶν τῶν 10 $ΔEB$, $ΔZB$ τὰ αὐτὰ πέρατα, καὶ περιέξουσιν δηλαδὴ χωρίον· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα αἱ $ΔEB$, $ΔZB$ εὐθειαί εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις ἀπὸ τοῦ $Δ$ ἐπὶ τὸ B ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἔσται πλὴν τῆς $ΔB$ κοινῆς τομῆς τῶν AB , $BΓ$ ἐπιπέδων.

15 Ἐὰν ἄρα δύο επίπεδα τέμνη ἄλληλα, ἡ κοινή αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ'.

Ἐὰν εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλή-
λας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπι-
20 σταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς
ἔσται.

Εὐθεῖα γὰρ τις ἡ EZ δύο εὐθείαις ταῖς AB , $ΓΔ$
τεμνούσαις ἀλλήλας κατὰ τὸ E σημεῖον ἀπὸ τοῦ E
πρὸς ὀρθὰς ἐφεστάτω· λέγω, ὅτι ἡ EZ καὶ τῷ διὰ
25 τῶν AB , $ΓΔ$ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν.

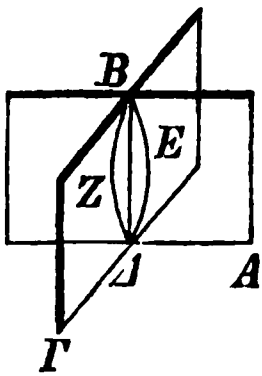
3. ἐστι V, comp. b. 4. $BΓ$] $ΓΔ$ F. τεμνέτωσαν BFVb.
7. τό] τοῦ φ. 9. ἔσται δὴ] ἔστω μὲν ἡ φ. 10. περιέξουσιν
PV, et B, sed corr.; F hic legi uix potest. 12. δὴ] δέ Pb.
οὐδ' Vb. 13. ἐστι F. 16. ἐστίν ἡ $ΔB$ F. 18. ἔάν

III.

Si duo plana inter se secant, communis eorum sectio recta est.

Nam duo plana AB , $B\Gamma$ inter se secant, et communis eorum sectio sit linea ΔB . dico, lineam ΔB rectam esse.

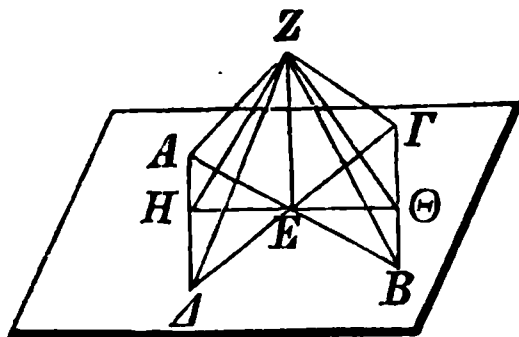
nam si minus, ab Δ ad B in plano AB ducatur recta ΔEB , in plano autem $B\Gamma$ recta ΔZB . itaque duarum rectarum ΔEB , ΔZB iidem termini erunt, et ita spatium comprehendunt; quod absurdum est. quare ΔEB , ΔZB rectae non sunt. similiter demonstrabimus, ne aliam quidem ullam a Δ ad B ductam rectam esse praeter ΔB communem sectionem planorum AB , $B\Gamma$.



Ergo si duo plana inter se secant, communis eorum sectio recta est; quod erat demonstrandum.

IV.

Si recta ad duas rectas inter se secantes in communi sectione perpendicularis erecta erit, etiam ad planum earum perpendicularis erit.



Nam recta EZ ad duas rectas AB , $\Gamma\Delta$ inter se in puncto E secantes ab E perpendicularis erecta sit. dico, EZ etiam ad planum rectarum AB , $\Gamma\Delta$ perpendicularem esse.

— 19. ὀρθός] in ras. V. 20. αὐτόν F, sed corr. 22. ἐν-
θείας τὰς b. 23. τεμνοῦσας b. 25. τῶν] τῆς b, corr. m. 1.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ $AE, EB, GE, E\Delta$ ἴσαι
 ἀλλήλαις, καὶ διήχθω τις διὰ τοῦ E , ὡς ἔτυχεν, ἢ
 $HE\Theta$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $A\Delta, \Gamma B$, καὶ ἔτι ἀπὸ
 τυχόντος τοῦ Z ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ZA, ZH, Z\Delta, Z\Gamma,$
 5 $Z\Theta, ZB$. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ $AE, E\Delta$ δυοὶ ταῖς $GE,$
 EB ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα
 ἢ $A\Delta$ βάσει τῆς ΓB ἴση ἐστίν, καὶ τὸ $AE\Delta$ τρίγωνον
 τῷ $ΓEB$ τριγώνῳ ἴσον ἔσται· ὥστε καὶ γωνία ἢ ὑπὸ
 ΔAE γωνία τῆς ὑπὸ $EB\Gamma$ ἴση [ἐστίν]. ἔστι δὲ καὶ
 10 ἢ ὑπὸ AEH γωνία τῆς ὑπὸ $BE\Theta$ ἴση. δύο δὲ τρί-
 γωνά ἐστι τὰ $AHE, BE\Theta$ τὰς δύο γωνίας δυοὶ γω-
 νίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρῃ καὶ μίαν πλευρὰν
 μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν AE
 τῆς EB . καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς
 15 πλευραῖς ἴσας ἔξουσιν. ἴση ἄρα ἢ μὲν HE τῆς $E\Theta$,
 ἢ δὲ AH τῆς $B\Theta$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστίν ἢ AE τῆς EB ,
 κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἢ ZE , βάσις ἄρα ἢ ZA
 βάσει τῆς ZB ἐστίν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἢ $Z\Gamma$
 τῆς $Z\Delta$ ἐστίν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστίν ἢ $A\Delta$ τῆς ΓB ,
 20 ἔστι δὲ καὶ ἢ ZA τῆς ZB ἴση, δύο δὲ αἱ $ZA, A\Delta$
 δυοὶ ταῖς $ZB, \Gamma B$ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρῃ ἑκατέρῃ· καὶ
 βάσις ἢ $Z\Delta$ βάσει τῆς $Z\Gamma$ ἐδείχθη ἴση· καὶ γωνία ἄρα
 ἢ ὑπὸ ZAD γωνία τῆς ὑπὸ $ZB\Gamma$ ἴση ἐστίν. καὶ
 ἐπεὶ πάλιν ἐδείχθη ἢ AH τῆς $B\Theta$ ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ
 25 ἢ ZA τῆς ZB ἴση, δύο δὲ αἱ ZA, AH δυοὶ ταῖς
 $ZB, B\Theta$ ἴσαι εἰσὶν. καὶ γωνία ἢ ὑπὸ ZAH ἐδεί-
 χθη ἴση τῆς ὑπὸ $ZB\Theta$. βάσις ἄρα ἢ ZH βάσει τῆς

3. $HE\Theta$] $E\Theta F$, et V m. 1, corr. m. 2; E eras. B. αἱ — 4. ἐπεξεύχθωσαν] postea ins. m. 1 P. 5. $E\Delta$] corr. ex EB m. 2 F.

6. περιέχουσι F V b. 7. $B\Gamma F$. ἐστίν] comp. F b, εἰσὶν V. 8. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. τριγώνῳ] om. B F V b.

abscindantur enim AE , EB , ΓE , $E\Delta$ inter se aequales, et per E quaelibet recta $HE\odot$ ducatur, et ducantur $A\Delta$, ΓB , et praeterea a quolibet puncto Z ducantur ZA , ZH , $Z\Delta$, $Z\Gamma$, $Z\odot$, ZB . et quoniam duae rectae AE , $E\Delta$ duabus ΓE , EB aequales sunt et aequales angulos comprehendunt [I, 15], basis $A\Delta$ basi ΓB aequalis est, et triangulus $AE\Delta$ triangulo ΓEB aequalis [I, 4]. quare etiam $\angle \Delta AE = EB\Gamma$ [id.]. uerum etiam $\angle AEH = BE\odot$ [I, 15]. itaque duo trianguli sunt AHE , $BE\odot$ duos angulos duobus angulis alterum alteri aequalem habentes et unum latus uni lateri aequale, quod ad angulos aequales positum est, $AE = EB$. itaque etiam reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt [I, 26]. quare $HE = E\odot$, $AH = B\odot$. et quoniam $AE = EB$, et ZE communis est et perpendicularis, erit $ZA = ZB$ [I, 4]. eadem de causa erit etiam $Z\Gamma = Z\Delta$. et quoniam $A\Delta = \Gamma B$ et $ZA = ZB$, duo latera ZA , $A\Delta$ duobus lateribus ZB , $B\Gamma$ alterum alteri aequalia sunt; et demonstratum est, esse $Z\Delta = Z\Gamma$. erit igitur etiam $\angle Z\Delta\Delta = ZB\Gamma$ [I, 8]. et quoniam rursus demonstratum est, esse $AH = B\odot$, et est $ZA = ZB$, duo latera ZA , AH duobus ZB , $B\odot$ aequalia sunt; et demonstratum est, esse $\angle ZAH = ZB\odot$. itaque $ZH = Z\odot$ [I, 4]. et quoniam rursus demonstratum

9. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$] om. P. 11. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] $\acute{\epsilon}\lambda\iota\alpha\iota$ FV. 12. $\acute{\epsilon}\chi\omicron\nu\tau\alpha\varsigma$ φ .
 13. $\tau\acute{\eta}\nu$] $\tau\acute{\alpha}$? V. $\tau\acute{\alpha}\varsigma$ $\acute{\iota}\sigma\alpha\varsigma$ Vb. $\gamma\omega\nu\lambda\acute{\iota}\alpha\varsigma$ b φ . 14. $\tau\eta\bar{\eta}$] supra
 scr. m. 1 b. 17. $Z\Delta$] A in ras. B. 20. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ B. $A\Delta$] A e
 corr. V. 23. $\acute{\eta}$] m. 2 F. Ante $Z\Delta\Delta$ eras. $\tau\acute{\omega}\nu$ F. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$] comp. b, $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$ P. 25. $Z\Delta$] (alt.) A e corr. m. 1 F. 26. $\acute{\epsilon}\lambda\iota\sigma\tau\acute{\iota}\nu$] comp. F, $\acute{\epsilon}\lambda\iota\sigma\tau\iota$ Vb. ZAH] corr. ex ZAB m. 1 b. 27. $ZB\odot$] B e corr. m. 1 F. $\acute{\alpha}\varphi\alpha$] om. V. ZH] $H''Z'$ b.

$Z\Theta$ ἔστιν ἴση. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐδείχθη ἢ HE τῇ
 $E\Theta$, κοινὴ δὲ ἢ EZ , δύο δὲ αἰ HE , EZ δυοὶ ταῖς
 ΘE , EZ ἴσαι εἰσὶν· καὶ βάσις ἢ ZH βάσει τῇ $Z\Theta$
 ἴση· γωνία ἄρα ἢ ὑπὸ HEZ γωνία τῇ ὑπὸ ΘEZ
 5 ἴση ἐστίν. ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ HEZ , ΘEZ
 γωνιῶν. ἢ ZE ἄρα πρὸς τὴν $H\Theta$ τυχόντως διὰ τοῦ
 E ἀχθεῖσαν ὀρθὴ ἐστίν. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι ἢ
 ZE καὶ πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ
 οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γω-
 10 νίας. εὐθεῖα δὲ πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὴ ἐστίν, ὅταν
 πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας
 ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας· ἢ ZE ἄρα
 τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν. τὸ δὲ ὑπο-
 κείμενον ἐπίπεδόν ἐστὶ τὸ διὰ τῶν AB , $\Gamma\Delta$ εὐθειῶν.
 15 ἢ ZE ἄρα πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῷ διὰ τῶν AB , $\Gamma\Delta$
 ἐπιπέδῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας
 πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ
 δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι

20

ε'.

Ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἀπτομέναις
 ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπι-
 σταθῇ, αἰ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ εἰσὶν ἐπιπέδῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἢ AB τρισὶν εὐθείαις ταῖς $B\Gamma$,
 25 $B\Delta$, BE πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ B ἀφῆς ἐφε-
 στάτω· λέγω, ὅτι αἰ $B\Gamma$, $B\Delta$, BE ἐν ἐνὶ εἰσὶν ἐπι-
 πέδῳ.

3. εἰσὶν] comp. F. 5. ἐστίν ἴση BFV. 6. ἢ διὰ b.
 7. ἀχθεῖσα Fb. 8. αὐτῆς] corr. ex αὐτῇ m.
 1 B. 9. τῷ] τῷ αὐτῷ F, sed corr. 11. πρὸς] ins. m.

est, esse $HE = E\Theta$, et ZE communis est, duo latera HE , EZ duobus ΘE , EZ aequalia sunt; et $ZH = Z\Theta$. itaque $\angle HEZ = \Theta EZ$ [I, 8]. itaque uterque angulus HEZ , ΘEZ rectus est [I def. 10]. ergo ZE ad rectam $H\Theta$ fortuito per E ductam perpendicularis est. iam eodem modo demonstrabimus, ZE ad omnes rectas eam tangentes et in plano subiacenti positas rectos efficere angulos. recta autem ad planum perpendicularis est, ubi ad omnes rectas eam tangentes et in eodem plano ductas rectos angulos efficit [def. 3]. itaque ZE ad planum subiacens perpendicularis est. subiacens autem planum id est, quod per rectas AB , $\Gamma\Delta$ ductum est. itaque ZE ad planum rectarum AB , $\Gamma\Delta$ perpendicularis est.

Ergo si recta ad duas rectas inter se secantes in communi sectione perpendicularis erecta erit, etiam ad planum earum perpendicularis erit; quod erat demonstrandum.

. V.

Si recta ad tres rectas inter se tangentes in communi sectione perpendicularis erecta erit, tres illae rectae in eodem plano sunt.

Nam recta AB ad tres rectas $B\Gamma$, $B\Delta$, BE in puncto sectionis B perpendicularis erecta sit. dico, rectas $B\Gamma$, $B\Delta$, BE in eodem plano esse.

2 F. $\alpha\upsilon\tau\eta\varsigma$] corr. ex $\alpha\upsilon\tau\eta$ m. 1 B. 12. $\acute{\epsilon}\nu$] $\acute{\epsilon}\pi\acute{\iota}$ φ .
 $\alpha\upsilon\tau\omega$] om. V. $\kappa\omicron\iota\sigma\acute{\iota}$ P. 13. $\acute{\epsilon}\nu$ $\tau\omega$ B. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] comp.
 Fb, $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ P. 14. $\tau\omega\nu$] bis V, sed corr. 15. $\Gamma\Delta$ $\acute{\epsilon}\upsilon\theta\epsilon\iota\omega\nu$
 V b. 16. $\acute{\epsilon}\pi\iota\kappa\acute{\epsilon}\delta\omega\nu$ b. 17. $\acute{\epsilon}\upsilon\theta\epsilon\iota\alpha$ $\delta\upsilon\circ$ $\acute{\epsilon}\upsilon\theta\epsilon\iota\alpha\iota\varsigma$] β $\epsilon\nu\theta\theta$ F.
 $\delta\upsilon\circ$ — 19. $\delta\epsilon\acute{\iota}\xi\alpha\iota$] $\kappa\alpha\lambda$ $\tau\grave{\alpha}$ $\acute{\epsilon}\xi\eta\varsigma$ B. 17. $\tau\epsilon\mu\nu\acute{o}\upsilon\sigma\alpha\iota\varsigma$ — 19.
 $\acute{\epsilon}\sigma\tau\alpha\iota$] $\kappa\alpha\lambda$ $\tau\grave{\alpha}$ $\acute{\epsilon}\xi\eta\varsigma$ F. 19. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ V b. $\acute{\omicron}\pi\epsilon\varrho$ $\acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\acute{\iota}\xi\alpha\iota$] comp. F. 25. $\acute{\alpha}\varphi\epsilon\sigma\tau\acute{\alpha}\tau\omega$] corr. ex $\acute{\alpha}\varphi\epsilon\sigma\tau\acute{\alpha}\tau\omega$ m. rec. P.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἕστωσαν αἱ μὲν $B\Delta$,
 BE ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ $B\Gamma$ ἐν μετεω-
ροτέρῳ, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν AB , $B\Gamma$ ἐπί-
πεδον· κοινὴν δὴ τομὴν ποιήσῃ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ
5 ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω τὴν BZ . ἐν ἐνὶ ἄρα
εἰσὶν ἐπιπέδῳ τῷ διηγμένῳ διὰ τῶν AB , $B\Gamma$ αἱ τρεῖς
εὐθεῖαι αἱ AB , $B\Gamma$, BZ . καὶ ἐπεὶ ἡ AB ὀρθὴ ἐστὶ
πρὸς ἑκατέραν τῶν $B\Delta$, BE , καὶ τῷ διὰ τῶν $B\Delta$, BE
ἄρα ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ AB . τὸ δὲ διὰ τῶν $B\Delta$,
10 BE ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστὶν· ἡ AB ἄρα ὀρθὴ
ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὥστε καὶ πρὸς
πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὕσας ἐν τῷ
ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσῃ γωνίας ἡ AB .
ἄπτεται δὲ αὐτῆς ἡ BZ οὕσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπι-
15 πέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ ABZ γωνία ὀρθὴ ἐστὶν. ὑπόκειται
δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ ὀρθὴ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ABZ γω-
νία τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$. καὶ εἰσὶν ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ· ὅπερ
ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ $B\Gamma$ εὐθεῖα ἐν μετεωρο-
τέρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ $B\Gamma$, $B\Delta$,
20 BE ἐν ἐνὶ εἰσὶν ἐπιπέδῳ.

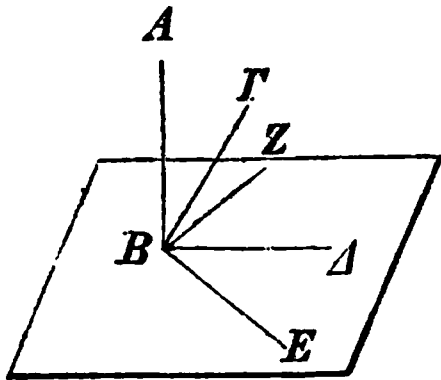
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖαι τρισὶν εὐθείαις ἀπτομέναις ἀλλή-
λων ἐπὶ τῆς ἀφῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῆ, αἱ τρεῖς
εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ εἰσὶν ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5'.

25 Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς
ὀρθὰς ὦσιν, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

1. $B\Delta$] e corr. m. 1 b. 2. ἡ δέ — 5. εὐθεῖαν] mg. m. 1 V,
in textu ras. est. 2. μετεώρῳ V. 3. καὶ] καὶ δι' b. 4. δὴ]
postea ins. F. 5. καὶ εὐθεῖαν b, et B, corr. m. 2; καὶ (comp.)
ins. m. 1 F. ποιήτω φ. εἰσὶν ἄρα b. 7. ἐστὶν P; ἔσται B,

ne sint enim, uerum, si fieri potest, $B\Delta$, BE in plano subiacenti sint, $B\Gamma$ autem in eleuatiore, et producatum planum per AB , $B\Gamma$. communem igitur sectionem in plano subiacenti rectam efficiet [prop. III]. efficiat BZ .



itaque tres rectae AB , $B\Gamma$, BZ in eodem plano sunt, quod per AB , $B\Gamma$ ducitur. et quoniam AB ad utramque $B\Delta$, BE perpendicularis est, etiam ad planum rectarum $B\Delta$, BE perpendicularis est AB [prop. IV]. planum autem rectarum $B\Delta$, BE subiacens est; AB igitur ad planum subiacens perpendicularis est. quare etiam ad omnes rectas eam tangentes et in subiacenti plano positas rectos angulos efficiet AB [def. 3]. tangit autem eam BZ in subiacenti plano posita. itaque $\angle ABZ$ rectus est. supposuimus autem, etiam $\angle AB\Gamma$ rectum esse. erit igitur $\angle ABZ = \angle AB\Gamma$. et in eodem plano sunt; quod fieri non potest. itaque recta $B\Gamma$ in plano eleuatiore posita non est; itaque tres rectae $B\Gamma$, $B\Delta$, BE in eodem plano sunt.

Ergo si recta ad tres rectas inter se tangentes in puncto tactionis perpendicularis erecta erit, tres illae rectae in eodem plano sunt; quod erat demonstrandum.

VI.

Si duae rectae ad idem planum perpendiculares sunt, rectae parallelae erunt.

corr. m. 1. 8. $B\Delta$] (alt.) B in ras. m. 1 B. 9. $\alpha\phi\alpha$] prius α
 in ras. m. 1 P. 10. AB] $B''A'F$. 12. $\alpha\upsilon\tau\eta\iota$ b. 19. $B\Gamma$]
 corr. ex AB V; AB supra scr. Γ m. 1 b. 26. $\omega\sigma\iota$ PVb.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB , $\Gamma\Delta$ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἕστωσαν· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$.

Συμβαλλέτωσαν γὰρ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ
 5 τὰ B , Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $B\Delta$ εὐθεῖα, καὶ ἤχθω τῇ $B\Delta$ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔE , καὶ κείσθω τῇ AB ἴση ἡ ΔE , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ BE , AE , $A\Delta$.

Καὶ ἐπεὶ ἡ AB ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον
 10 ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας [ἄρα] τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἄπτεται δὲ τῆς AB ἑκατέρα τῶν
 • $B\Delta$, BE οὔσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $AB\Delta$, ABE γωνιῶν. διὰ τὰ
 15 αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $\Gamma\Delta B$, $\Gamma\Delta E$ ὀρθὴ ἐστὶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ ΔE , κοινὴ δὲ ἡ $B\Delta$, δύο δὴ αἱ AB , $B\Delta$ δυοῖν ταῖς $E\Delta$, ΔB ἴσαι εἰσὶν· καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ $A\Delta$ βάσει τῇ BE ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ ΔE ,
 20 ἀλλὰ καὶ ἡ $A\Delta$ τῇ BE , δύο δὴ αἱ AB , BE δυοῖν ταῖς $E\Delta$, ΔA ἴσαι εἰσὶν· καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ AE · γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ABE γωνία τῇ ὑπὸ $E\Delta A$ ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ABE · ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $E\Delta A$ · ἡ $E\Delta$ ἄρα πρὸς τὴν ΔA ὀρθὴ ἐστὶν.
 25 ἐστὶ δὲ καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ ὀρθὴ. ἡ $E\Delta$ ἄρα τρισὶν εὐθείαις ταῖς $B\Delta$, ΔA , $\Delta\Gamma$ πρὸς ὀρθὰς

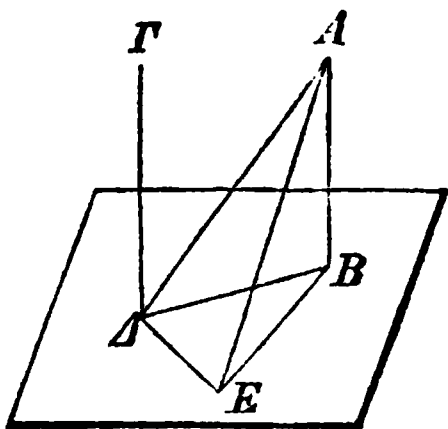
1. αἱ] supra m. rec. P. 4. συμβαλέτωσαν P (συμπιπέτωσαν supra scr. m. rec.) et supra scr. 1 V. 5. $B\Delta$] corr. ex B m. 2 B.

6. τῷ] τῷ αὐτῷ P. 9. ἐστὶν F. 10. ἄρα] om. P. 12. Ante τῶν ras. 2 litt. V, τῆς τῶν b. 13. οὔσαι F. 16. τῇ — $B\Delta$] mg. m. 1 P.

17. ταῖς] miro comp. F, ut lin. 21. εἰσί V b, comp. supra scr. φ.

18. καί] comp. supra scr. φ. περιέχουσι B V b $A\Delta$] corr. ex

Nam duae rectae AB , $\Gamma\Delta$ ad planum subiacens perpendicularares sint. dico, AB rectae $\Gamma\Delta$ parallelam esse.



concurrant enim cum plano subiacenti in punctis B , Δ , et ducatur recta $B\Delta$, et ad rectam $B\Delta$ perpendicularis in plano subiacenti ducatur ΔE , et ponatur

$$AB = \Delta E,$$

et ducantur BE , AE , $A\Delta$.

et quoniam AB ad planum subiacens perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano subiacenti positas rectos angulos efficit [def. 3]. uerum utraque $B\Delta$, BE in plano subiacenti positae rectam AB tangunt; itaque uterque angulus $AB\Delta$, ABE rectus est. eadem de causa etiam uterque angulus $\Gamma\Delta B$, $\Gamma\Delta E$ rectus est. et quoniam $AB = \Delta E$, et $B\Delta$ communis est, duo latera AB , $B\Delta$ duobus $E\Delta$, ΔB aequalia sunt; et aequales angulos comprehendunt. itaque $A\Delta = BE$ [I, 4]. et quoniam $AB = \Delta E$, et $A\Delta = BE$, duo latera AB , BE duobus $E\Delta$, ΔA aequalia sunt; et basis eorum communis est AE . itaque $\angle ABE = E\Delta A$ [I, 8]. uerum $\angle ABE$ rectus est; quare etiam $\angle E\Delta A$ rectus est. itaque $E\Delta$ ad ΔA perpendicularis est. sed etiam ad utramque $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ perpendicularis est. itaque $E\Delta$ ad tres rectas $B\Delta$, ΔA , $\Delta\Gamma$ perpendicularis in puncto tactio-

AB m. 1 b. 19. ἴση ἐστίν V. 21. εἰς Vb, comp. F. 23. ἴση ἐστίν Vb. ἦ] (prius) ins. m. 2 F. 24. τῶν $E\Delta A P$. 25. ἐστι] supra scr. comp. m. 1 F. Sequentia usque ad p. 22, 5: ἐπιπέδῳ in ras. V. ὀρθῆ] corr. ex ορθῆ m. rec. P.

ἐπὶ τῆς ἀφῆς ἐφέστηκεν· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ $B\Delta$, ΔA , $\Delta\Gamma$ ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἐν ᾧ δὲ αἱ ΔB , ΔA , ἐν τούτῳ καὶ ἡ AB · πᾶν γὰρ τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· αἱ ἄρα AB , $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ 5 εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $AB\Delta$, $B\Delta\Gamma$ γωνιῶν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ᾧσιν, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

ξ'.

Ἐὰν ᾧσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῆ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

15 Ἐστῶσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ AB , $\Gamma\Delta$, καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ E , Z · λέγω, ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ E , Z σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω ἐν μετεωροτέρῳ 20 ὡς ἡ EHZ , καὶ διήχθω διὰ τῆς EHZ ἐπίπεδον· τομὴν δὴ ποιήσῃ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιεῖτω ὡς τὴν EZ · δύο ἄρα εὐθεῖαι αἱ EHZ , EZ χωρὶον περιέξουσιν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὸ Z ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν μετεω- 25 ροτέρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· ἐν τῷ διὰ τῶν AB , $\Gamma\Delta$ ἄρα

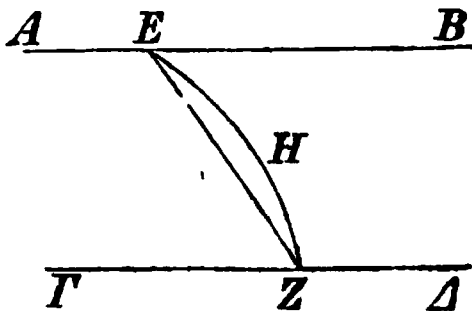
2. ἐν ᾧ — 5. ἐπιπέδῳ] om. b. 2. ΔB , ΔA] ΔA , ΔB P; $B\Delta$, ΔA , $\Delta\Gamma$ F. 6. $B\Delta\Gamma$] B in ras. V; $\Gamma\Delta B$ P. ἄρα] corr. ex α m. 2 P. 8. ἐπιπέδῳ] om. V. 9. ᾧσι Vb. ἀλλήλαις αἱ V. 11. ᾧσιν B. 13. αὐτῷ] supra m. 2 B. 17. λέγω — E , Z] mg. m. 1 F. σημεῖα] om. V. 20. ἡ] φ, αἱ? F. 21. ἐπιπέδῳ] mg. V. 21. ἐπιπέδῳ] mg. V.

nis erecta est; quare tres rectae $B\Delta$, ΔA , $\Delta\Gamma$ in eodem plano sunt [prop. V]. in quo autem plano sunt ΔB , ΔA , in eodem est etiam AB ; omnis enim triangulus in eodem plano est [prop. II]. itaque rectae AB , $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ in eodem plano sunt. et uterque angulus $AB\Delta$, $B\Delta\Gamma$ rectus est. itaque AB rectae $\Gamma\Delta$ parallela est [I, 28].

Ergo si duae rectae ad idem planum perpendiculares sunt, rectae parallelae erunt; quod erat demonstrandum.

VII.

Si duae rectae parallelae sunt, et in utraque quaelibet puncta sumuntur, recta puncta coniungens in eodem plano est, in quo parallelae.



Sint duae rectae parallelae AB , $\Gamma\Delta$, et in utraque quaelibet puncta sumantur E , Z . dico, rectam puncta E , Z coniungentem in eodem plano esse, in quo sint rectae parallelae.

ne sit enim, sed, si fieri potest, in eleuatiore sit ut EHZ , et per EHZ planum ducatur. itaque in plano subiacenti sectionem efficiet rectam [prop. III]. efficiat EZ . ergo duae rectae EHZ , EZ spatium comprehendent; quod fieri non potest. itaque recta E , Z coniungens in plano eleuatiore non est. ergo recta E , Z coniungens in plano parallelarum AB , $\Gamma\Delta$ est.

22. ὁς] supra scr. m. 1 B, om. FVb.

EHZ] HZ V.

23. περιέχουσιν V b.

ἀδύνατον] mg. V.

25. ἄρα] supra

scr. V.

παραλλήλων ἐστὶν ἐπιπέδῳ ἢ ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὸ Z ἐπιξενυγνυμένη εὐθεΐα.

Ἐὰν ἄρα ὥσι δύο εὐθεΐαι παράλληλοι, ληφθῆ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἢ ἐπὶ τὰ σημεῖα
 5 ἐπιξενυγνυμένη εὐθεΐα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η'.

Ἐὰν ὥσι δύο εὐθεΐαι παράλληλοι, ἢ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ἢ, καὶ
 10 ἢ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Ἐστῶσαν δύο εὐθεΐαι παράλληλοι αἱ $AB, \Gamma\Delta$, ἢ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἢ AB τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ ἢ λοιπὴ ἢ $\Gamma\Delta$ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

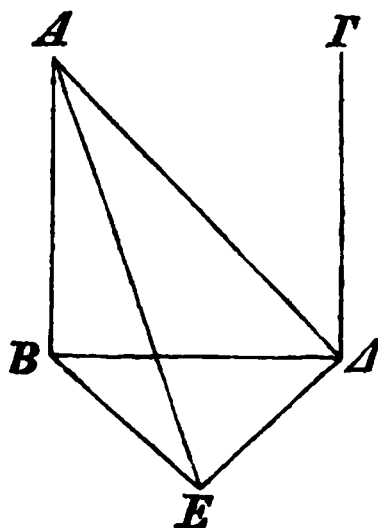
15 Συμβαλλέτωσαν γὰρ αἱ $AB, \Gamma\Delta$ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ B, Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ $B\Delta$. αἱ $AB, \Gamma\Delta, B\Delta$ ἄρα ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἤχθω τῇ BA πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἢ ΔE , καὶ κείσθω τῇ AB ἴση ἢ ΔE , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ
 20 $BE, AE, A\Delta$. καὶ ἐπεὶ ἢ AB ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπομείνας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν ἢ AB · ὀρθὴ ἄρα [ἐστὶν] ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $AB\Delta, ABE$ γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ εἰς
 25 παραλλήλους τὰς $AB, \Gamma\Delta$ εὐθεΐα ἐμπέπτωκεν ἢ $B\Delta$, αἱ ἄρα ὑπὸ $AB\Delta, \Gamma\Delta B$ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἢ ὑπὸ $AB\Delta$ · ὀρθὴ ἄρα καὶ ἢ ὑπὸ $\Gamma\Delta B$ · ἢ $\Gamma\Delta$ ἄρα πρὸς τὴν $B\Delta$ ὀρθὴ ἐστὶν. καὶ

3. ὥσιν PB. 8. ὥσιν PB. ἢ δέ] ἢ δὲ ἢ V. 9. ἢ] om. V. 10. πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ b. 12. Ante

Ergo si duae rectae parallelae sunt, et in utraque quaelibet puncta sumuntur, recta puncta coniungens in eodem plano est, in quo parallelae; quod erat demonstrandum.

VIII.

Si duae rectae parallelae sunt, et alterutra ad planum aliquod perpendicularis est, etiam reliqua ad idem planum perpendicularis erit.



Sint duae rectae parallelae AB , $\Gamma\Delta$, et alterutra earum AB ad planum subiacens perpendicularis sit. dico, etiam reliquam $\Gamma\Delta$ ad idem planum perpendicularem fore.

concurrant enim AB , $\Gamma\Delta$ cum plano subiacenti in punctis B , Δ , et ducatur $B\Delta$. itaque AB , $\Gamma\Delta$, $B\Delta$ in eodem plano sunt [prop. VII]. ad $B\Delta$ in plano subiacenti perpendicularis ducatur ΔE , et ponatur $\Delta E = AB$, et ducantur BE , AE , $A\Delta$. et quoniam AB ad planum subiacens perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano subiacenti positas perpendicularis est AB [def. 3]. rectus igitur uterque angulus $AB\Delta$, ABE . et quoniam in parallelas AB , $\Gamma\Delta$ recta incidit $B\Delta$, anguli $AB\Delta$, $\Gamma\Delta B$ duobus rectis aequales sunt [I, 29]. uerum $\angle AB\Delta$ rectus est; quare etiam $\angle \Gamma\Delta B$ rectus est. quare $\Gamma\Delta$ ad $B\Delta$ perpendicularis est.

$\acute{\epsilon}\pi\iota\pi\acute{\epsilon}\delta\omega$ m. 1 del. $\acute{\epsilon}\nu$ P. 13. $\kappa\alpha\iota$ $\acute{\eta}$] F, $\delta\acute{\eta}$ φ . 17. $\Gamma\Delta$] Δ
 corr. ex B m. rec. B. 20. AE] ΔE φ . $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. 23. $\pi\rho\acute{o}\varsigma$
 $\acute{o}\rho\theta\acute{\alpha}\varsigma$] $\acute{o}\rho\theta\acute{\eta}$ BFV. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] (alt.) om. P. 25. $\epsilon\upsilon\theta\epsilon\iota\alpha\varsigma$ V.
 26. $\gamma\omega\nu\lambda\alpha\iota$] F, $\gamma\omega\nu\lambda\alpha$ φ .

ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ ΔE , κοινὴ δὲ ἡ $B\Delta$, δύο
 δὴ αἰ AB , $B\Delta$ δυσὶ ταῖς $E\Delta$, ΔB ἴσαι εἰσὶν· καὶ
 γωνία ἡ ὑπὸ $AB\Delta$ γωνία τῇ ὑπὸ $E\Delta B$ ἴση· ὀρθὴ
 γὰρ ἑκατέρω· βάσις ἄρα ἡ $A\Delta$ βάσει τῇ BE ἴση.
 5 καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AB τῇ ΔE , ἡ δὲ BE τῇ
 $A\Delta$, δύο δὴ αἰ AB , BE δυσὶ ταῖς $E\Delta$, ΔA ἴσαι
 εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω· καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ AE .
 γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ABE γωνία τῇ ὑπὸ $E\Delta A$ ἐστὶν
 ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ABE . ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ
 10 $E\Delta A$. ἡ $E\Delta$ ἄρα πρὸς τὴν $A\Delta$ ὀρθὴ ἐστὶν. ἔστι
 δὲ καὶ πρὸς τὴν ΔB ὀρθὴ· ἡ $E\Delta$ ἄρα καὶ τῷ διὰ
 τῶν $B\Delta$, ΔA ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἐστὶν. καὶ πρὸς πάσας
 ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ
 διὰ τῶν $B\Delta A$ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ $E\Delta$.
 15 ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν $B\Delta A$ ἐπιπέδῳ ἐστὶν ἡ $\Delta\Gamma$, ἐπει-
 δήπερ ἐν τῷ διὰ τῶν $B\Delta A$ ἐπιπέδῳ εἰσὶν αἰ AB ,
 $B\Delta$, ἐν ᾧ δὲ αἰ AB , $B\Delta$, ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ ἡ $\Delta\Gamma$.
 ἡ $E\Delta$ ἄρα τῇ $\Delta\Gamma$ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν· ὥστε καὶ ἡ $\Gamma\Delta$
 τῇ ΔE πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν. ἔστι δὲ καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ τῇ $B\Delta$
 20 πρὸς ὀρθὰς. ἡ $\Gamma\Delta$ ἄρα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλ-
 λήλας ταῖς ΔE , ΔB ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Δ τομῆς πρὸς
 ὀρθὰς ἐφέστηκεν· ὥστε ἡ $\Gamma\Delta$ καὶ τῷ διὰ τῶν ΔE ,
 ΔB ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν. τὸ δὲ διὰ τῶν ΔE ,
 ΔB ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστὶν· ἡ $\Gamma\Delta$ ἄρα τῷ
 25 ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν.

Ἐὰν ἄρα ὧσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία

2. AB] BA b. εἰσί V b, comp. F. 4. ἐστὶν ἴση BV b.
 7. ἑκατέρω] supra scr. F. ἡ] supra scr. m. 1 V.
 8. $E\Delta A$] $B\Delta$ seq. ras. 1 litt. φ. ἐστὶν] supra scr. m. 1 F.
 9. ὀρθὴ — ABE] in ras. plurium litt. F. 10. $A\Delta$] ΔA P.
 11. ΔB] in ras. V. 12. ἐστὶ V, comp. F b. 14. $B\Delta A$] P;
 $A\Delta$, ΔB B; $B\Delta$, AB b et in ras. F V. ΔE P. 15. $B\Delta$,

et quoniam $AB = \Delta E$, et $B\Delta$ communis est, duo latera AB , $B\Delta$ duobus $E\Delta$, ΔB aequalia sunt; et $\angle AB\Delta = E\Delta B$ (uterque enim rectus est); itaque $A\Delta = BE$ [I, 4]. et quoniam $AB = \Delta E$, et $BE = A\Delta$, duo latera AB , BE duobus $E\Delta$, ΔA aequalia sunt; et basis eorum communis est AE ; itaque $\angle ABE = E\Delta A$ [I, 8]. uerum $\angle ABE$ rectus est; itaque etiam $\angle E\Delta A$ rectus est; ergo $E\Delta$ ad $A\Delta$ perpendicularis est. uerum etiam ad ΔB perpendicularis est. $E\Delta$ igitur etiam ad planum rectarum $B\Delta$, ΔA perpendicularis est [prop. IV]. quare etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano rectarum $B\Delta$, ΔA positas rectos angulos efficiet $E\Delta$. in plano autem rectarum $B\Delta$, ΔA posita est $\Delta\Gamma$, quoniam AB , $B\Delta$ in plano rectarum $B\Delta$, ΔA sunt [prop. II], in quo autem plano sunt AB , $B\Delta$, in eodem etiam $\Delta\Gamma$ posita est. itaque $E\Delta$ ad $\Delta\Gamma$ perpendicularis est; quare etiam $\Gamma\Delta$ ad ΔE perpendicularis est. uerum $\Gamma\Delta$ etiam ad $B\Delta$ perpendicularis est. $\Gamma\Delta$ igitur ad duas rectas inter se secantes ΔE , ΔB in sectione Δ perpendicularis erecta est; quare $\Gamma\Delta$ etiam ad planum rectarum ΔE , ΔB perpendicularis est [prop. IV]. uerum planum rectarum ΔE , ΔB subiacens est. itaque $\Gamma\Delta$ ad planum subiacens perpendicularis est.

Ergo si duae rectae parallelae sunt, et alterutra ad planum aliquod perpendicularis est, etiam reliqua

ΔA BFb, in ras. V. 17. $\Delta\Gamma$] $\Gamma\Delta$ b. 18. $\Delta\Gamma$] in ras.
m. 1 PV. 19. $\tau\eta$ — $\Gamma\Delta$] bis P, corr. m. 1. $\kappa\alpha\iota$] om.
P. $\tau\eta$] $\kappa\alpha\iota$ $\tau\eta$ P. $B\Delta$] ΔB F. 20. $\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\alpha\iota\varsigma$ b,
corr. m. 1. 21. ΔB] in ras. V. 22. η] $\kappa\alpha\iota$ η V.
23. ΔB] ΔE b. 24. $\upsilon\pi\omicron\kappa\epsilon\iota\mu\epsilon\nu\acute{o}\nu$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] in ras. V. 26.
 $\acute{\omega}\sigma\iota\nu$ PB.

αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ἤ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ
αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ'.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὐ-
5 σαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἀλλήλαις
εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω γὰρ ἑκατέρα τῶν $AB, \Gamma\Delta$ τῇ EZ παράλ-
ληλος μὴ οὐσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω, ὅτι
παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$.

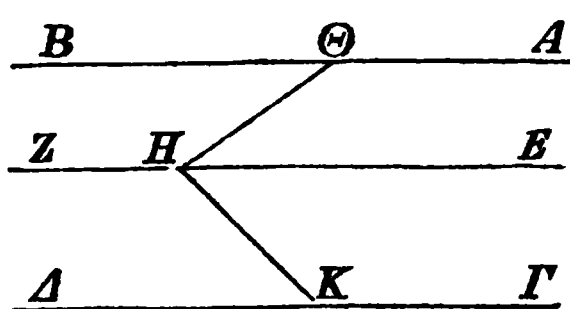
10 Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς EZ τυχὸν σημεῖον τὸ H ,
καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῇ EZ ἐν μὲν τῷ διὰ τῶν EZ, AB
ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ $H\Theta$, ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν
 $ZE, \Gamma\Delta$ τῇ EZ πάλιν πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ HK . καὶ
ἐπεὶ ἡ EZ πρὸς ἑκατέραν τῶν $H\Theta, HK$ ὀρθὴ ἐστιν,
15 ἡ EZ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν $H\Theta, HK$ ἐπιπέδῳ πρὸς
ὀρθὰς ἐστιν. καὶ ἐστιν ἡ EZ τῇ AB παράλληλος·
καὶ ἡ AB ἄρα τῷ διὰ τῶν ΘHK ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρ-
θὰς ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ τῷ διὰ τῶν
 ΘHK ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστιν· ἑκατέρα ἄρα τῶν
20 $AB, \Gamma\Delta$ τῷ διὰ τῶν ΘHK ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς
ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς
ὀρθὰς ᾧσιν, παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι· παράλληλος
ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. ἡ] ἐστιν φ, supra scr. ἡ. 2. ἔσται] ἐστιν BFV.
6. εἰσὶν P. 7. γὰρ] γ corr. ex π m. rec. B. παράλληλος τῇ
 EZ V. παράλληλοι B. 9. $\Delta\Gamma$ V. 10. Post τυχὸν ras. 2
litt. V. 12. ἡ] supra m. 1 P. 13. ZE] in ras. V.
 HK] NK F, H post ins. V. 14. ἡ] αἱ F. 15. $H\Theta$] Θ
b supra scr. m. 1; litt. H postea ins. m. 1 BF. 16. ἐστὶν]
comp. Fb, ἐστι PV. καὶ — 18. ἐστὶν] mg. m. 2 B.
17. ἄρα] om. P. 19. ἑκατέρα — 21. ἐστὶν] mg. m. 1 in ras.

ad idem planum perpendicularis erit; quod erat demonstrandum.

IX.

Quae eidem rectae parallelae sunt, etiam si in eodem plano non sunt, etiam inter se parallelae sunt.



Nam utraque AB , $\Gamma\Delta$ rectae EZ parallela sit, non positae in eodem plano. dico, AB rectae $\Gamma\Delta$ parallelam esse.

sumatur enim in EZ quoduis punctum H , et ab eo ad rectam EZ perpendicularis ducatur in plano EZ , AB rectarum $H\Theta$, in plano autem ZE , $\Gamma\Delta$ rectarum ad EZ rursus perpendicularis ducatur HK . et quoniam EZ ad utramque $H\Theta$, HK perpendicularis est, EZ etiam ad planum rectarum $H\Theta$, HK perpendicularis est [prop. IV]. et EZ rectae AB parallela est. itaque etiam AB ad planum rectarum ΘH , HK perpendicularis est [prop. VIII]. eadem de causa etiam $\Gamma\Delta$ ad planum rectarum ΘH , HK perpendicularis est; quare utraque AB , $\Gamma\Delta$ ad planum rectarum ΘH , HK perpendicularis est. si duae rectae ad idem planum perpendiculares sunt, rectae parallelae sunt [prop. VI]. ergo AB rectae $\Gamma\Delta$ parallela est; quod erat demonstrandum.

P. 19. ἄρα] supra F. 20. τῶ] corr. ex τῶν P. $H\Theta$,
 HK m. 2 FV. 22. ὡς Vb. εἰσιν] ἔσονται V.
 23. ὅπερ εἶδει δεῖξαι] om. V.

ι'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων ὧσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν.

5 Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ $AB, B\Gamma$ ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς $\Delta E, EZ$ ἀπτομένας ἀλλήλων ἔστωσαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ .

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ $BA, B\Gamma, E\Delta, EZ$ ἴσαι
10 ἀλλήλαις, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $A\Delta, \Gamma Z, BE, A\Gamma, \Delta Z$. καὶ ἐπεὶ ἡ BA τῇ $E\Delta$ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, καὶ ἡ $A\Delta$ ἄρα τῇ BE ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓZ τῇ BE ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος· ἑκατέρα ἄρα τῶν $A\Delta, \Gamma Z$ τῇ BE ἴση ἐστὶ
15 καὶ παράλληλος. αἱ δὲ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὔσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $A\Delta$ τῇ ΓZ καὶ ἴση. καὶ ἐπιξενγνύουσιν αὐτὰς αἱ $A\Gamma, \Delta Z$ · καὶ ἡ $A\Gamma$ ἄρα τῇ ΔZ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. καὶ ἐπεὶ
20 δύο αἱ $AB, B\Gamma$ δυοὶ ταῖς $\Delta E, EZ$ ἴσαι εἰσὶν, καὶ βάσις ἡ $A\Gamma$ βάσει τῇ ΔZ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ ἐστὶν ἴση.

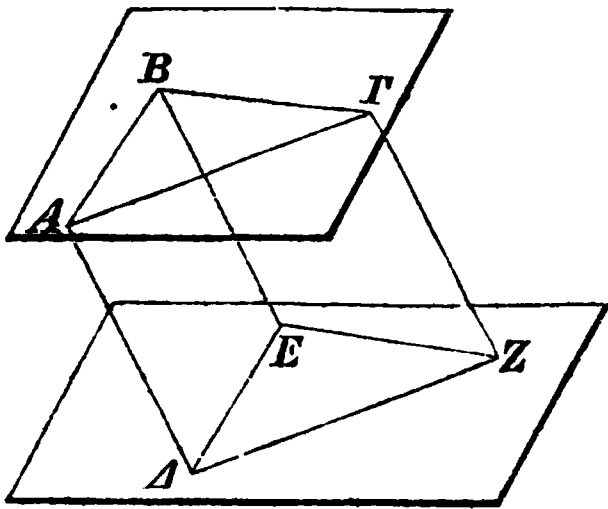
Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων ὧσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ
25 ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3. ὧσιν PB. 4. οὔσαι, ἴσας b. περιέξουσι Vb. 5. αἱ $AB, B\Gamma$] om. BFV. $B\Gamma$] postea ins. m. 1 P. 6. αἱ $AB, B\Gamma$ παρὰ BFV. 7. αὐτῷ] supra scr. F. 9. BA] in ras. m. 1 P. EZ] litt. Z e corr. V. 11. ἐστίν B. 12. ἐστὶν ἴση BFb. 14. ἑκατέρα — 15. παράλληλος] bis F, sed corr. m. 1; mg. V. 16. καὶ μὴ — ἐπιπέδῳ] om. V. 17. παράλληλοι] supra scr. m. 1 F. ἄρα] supra scr. m. 2 B. 18. καί] (primum) supra m. 1 V. 19. ἐστίν PB. 20. εἰσί Vb, comp. F.

X.

Si duae rectae inter se tangentes duabus rectis inter se tangentibus non positis in eodem plano parallelae sunt, angulos aequales comprehendent.

Nam duae rectae AB , $B\Gamma$ inter se tangentes duabus



rectis inter se tangentibus ΔE , EZ non positis in eodem plano parallelae sint. dico, esse $\angle AB\Gamma = \angle \Delta EZ$.

ponantur enim $BA = B\Gamma = E\Delta = EZ$, et ducantur $A\Delta$, ΓZ , BE , $A\Gamma$, ΔZ . et quoniam BA

rectae $E\Delta$ aequalis et parallela est, etiam $A\Delta$ rectae BE aequalis et parallela est [I, 33]. eadem de causa etiam ΓZ rectae BE aequalis et parallela est. itaque utraque $A\Delta$, ΓZ rectae BE aequalis et parallela est. quae autem eidem rectae parallelae sunt, etiam si in eodem plano non sunt, etiam inter se parallelae sunt [prop. IX]. itaque $A\Delta$ rectae ΓZ parallela est et aequalis. et eas iungunt $A\Gamma$, ΔZ ; quare etiam $A\Gamma$ rectae ΔZ aequalis et parallela est [I, 33]. et quoniam duo latera AB , $B\Gamma$ duobus ΔE , EZ aequales sunt, et $A\Gamma = \Delta Z$, erit $\angle AB\Gamma = \angle \Delta EZ$ [I, 8].

Ergo si duae rectae inter se tangentes duabus rectis inter se tangentibus non positis in eodem plano parallelae sunt, angulos aequales comprehendent; quod erat demonstrandum.

22. ὑπό] om. V. 23. ἀπτόμεναι — 25. δείξαι] καὶ τὰ ἐξῆς V.
 24. ὡς (ὡσιν F) παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων BFb. ὡσιν P.

ΙΑ΄.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετεώρου ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον κάθετου εὐθείαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

5 Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον μετέωρον τὸ A , τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετου εὐθείαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Διήχθω γάρ τις ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα,
10 ὥς ἔτυχεν, ἢ $BΓ$, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὴν $BΓ$ κάθετος ἢ $AΔ$. εἰ μὲν οὖν ἢ $AΔ$ κάθετός ἐστι καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ οὐ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ A σημείου τῇ $BΓ$ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἢ $ΔE$,
15 καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὴν $ΔE$ κάθετος ἢ AZ , καὶ διὰ τοῦ Z σημείου τῇ $BΓ$ παράλληλος ἤχθω ἢ $HΘ$.

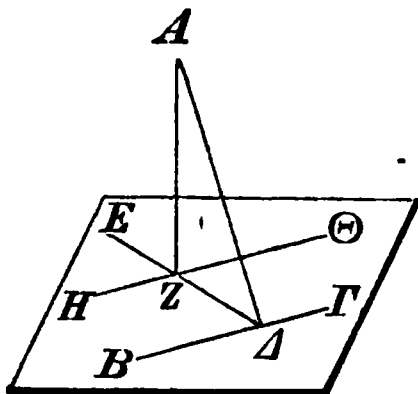
Καὶ ἐπεὶ ἢ $BΓ$ ἑκατέρω τῶν $ΔA$, $ΔE$ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν, ἢ $BΓ$ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν $EΔA$ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν. καὶ ἐστίν αὐτῇ παράλληλος ἢ
20 $HΘ$. εἰ δὲ ὡς δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἢ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ἦ, καὶ ἢ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν· καὶ ἢ $HΘ$ ἄρα τῷ διὰ τῶν $EΔ$, $ΔA$ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν. καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ
25 οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν $EΔ$, $ΔA$ ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἐστίν ἢ $HΘ$. ἄπτεται δὲ αὐτῆς ἢ AZ οὔσα ἐν τῷ διὰ

2. μετέωρον φ (non F), μετεωροτέρου b. 3. δοθέν] P, ὑποκείμενον BFVb, P mg. m. 1. 9. γάρ] om. V. εὐθεῖα] postea ins. F. 10. ΓB F. 12. ἐστι καὶ] ἐστίν e corr. m. 2 F. ἐπί] om. b. γεγονός] eras. V. 13. τό] supra scr. F. δέ] supra scr. V. 17. ἐπί φ.

XI.

A dato puncto eleuato ad datum planum perpendiculararem lineam rectam ducere.

Nam datum punctum eleuatum sit A , et datum planum sit, quod subiacet. oportet igitur a puncto A ad planum subiacens rectam lineam perpendiculararem ducere.



ducatur enim in plano subiacenti recta quaelibet $B\Gamma$, et ab A puncto ad $B\Gamma$ perpendicularis ducatur $A\Delta$ [I, 12]. iam si $A\Delta$ etiam ad planum subiacens perpendicularis est, factum est, quod propositum erat.

sin minus, a Δ puncto in plano subiacenti ad rectam $B\Gamma$ perpendicularis ducatur ΔE [I, 11], et ab A ad ΔE perpendicularis ducatur AZ [I, 12], et per Z punctum rectae $B\Gamma$ parallela ducatur $H\Theta$ [I, 31].

et quoniam $B\Gamma$ ad utramque ΔA , ΔE perpendicularis est, etiam ad planum rectarum $E\Delta$, ΔA perpendicularis est $B\Gamma$ [prop. IV]. et ei parallela est $H\Theta$. sin duae rectae parallelae sunt, et alterutra ad planum aliquod perpendicularis est, etiam reliqua ad idem planum perpendicularis est [prop. VIII]; itaque etiam $H\Theta$ ad planum rectarum $E\Delta$, ΔA perpendicularis est. quare etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano rectarum $E\Delta$, ΔA positas perpendicularis est $H\Theta$ [def. 3]. uerum AZ eam tangit in plano

21—24 nonnulla in F euan. 23. ἐστίν] comp. Fb, ἐστι P, ἔσται V. 25. ΔA] Δ , ut uidetur, e corr. F. 26. ΘH B.

ἐν τῷ] sustulit reparatio in F.

τῶν $E\Delta$, ΔA ἐπιπέδῳ· ἢ $H\Theta$ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν $Z A$ · ὥστε καὶ ἢ $Z A$ ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ΘH . ἔστι δὲ ἢ $A Z$ καὶ πρὸς τὴν ΔE ὀρθή· ἢ $A Z$ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν $H\Theta$, ΔE ὀρθή ἐστίν. ἐὰν δὲ
 5 εὐθεῖα δυσὶν εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ἐπὶ τῆς τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ἢ $Z A$ ἄρα τῷ διὰ τῶν $E\Delta$, $H\Theta$ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν. τὸ δὲ διὰ τῶν $E\Delta$, $H\Theta$ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ὑποκείμενον· ἢ $A Z$ ἄρα τῷ ὑποκει-
 10 μένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν.

Ἀπὸ τοῦ ἄρα δοθέντος σημείου μετεώρου τοῦ A ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται ἢ $A Z$ · ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβ'.

15 Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ πρὸς αὐτῷ σημεῖον τὸ A · δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ A σημείου τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν
 20 γραμμὴν ἀναστῆσαι.

Νενοήσθω τι σημεῖον μετέωρον τὸ B , καὶ ἀπὸ τοῦ B ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω ἢ $B\Gamma$, καὶ διὰ τοῦ A σημείου τῇ $B\Gamma$ παράλληλος ἤχθω
 25 ἢ $A\Delta$.

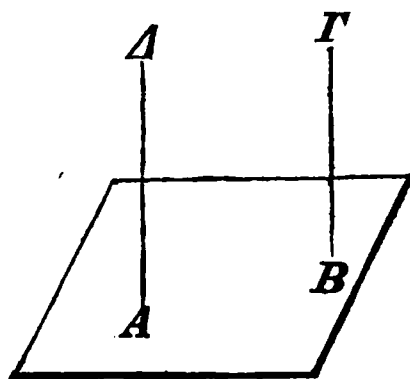
1. ἐστίν PV. 2. ἐστίν φ. ΘH] ΘK φ, $H\Theta$ B, ZH P, et b, sed corr. m. 1. 3. ἔστι — καί] sustulit reparatio in F. ἢ] (prius) καὶ ἢ V. τὴν] m. 2 F. AZ] (alt.) e corr. m. 2 F, seq. ras. 1 litt. ἄρα καί F. 5. εὐθείας] εὐθεῖαι φ. τεμνούσαις] Pb, F mg.; ἀπτομέναις BFV, b mg. ἀλλήλας] -ας in ras. m. 1 b, ἀλλήλων BFV. 6. δι'] om. φ. 8. ἐστίν] comp.

rectarum $E\Delta$, ΔA posita. itaque $H\Theta$ ad ZA perpendicularis est; quare etiam ZA ad $H\Theta$ perpendicularis est. uerum AZ etiam ad ΔE perpendicularis est. AZ igitur ad utramque $H\Theta$, ΔE perpendicularis est. sin recta ad duas rectas inter se secantes in sectione perpendicularis erigitur, etiam ad planum earum perpendicularis erit [prop. IV]. itaque ZA ad planum rectarum $E\Delta$, $H\Theta$ perpendicularis est. uerum planum rectarum $E\Delta$, $H\Theta$ subiacens est. itaque AZ ad planum subiacens perpendicularis est.

Ergo a dato puncto eleuato A ad planum subiacens perpendicularis ducta est recta linea AZ ; quod oportebat fieri.

XII.

Ad datum planum a puncto in eo dato rectam lineam perpendicularem erigere.



Sit datum planum, quod subiacet, et punctum in eo datum sit A . oportet igitur, ab A puncto ad planum subiacens perpendicularem rectam lineam erigere.

supponatur eleuatum aliquod punctum B , et a B ad planum subiacens perpendicularis ducatur $B\Gamma$ [prop. XI], et per A punctum rectae $B\Gamma$ parallela ducatur $A\Delta$.

Fb, ἐστὶ PBV. 9. ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ὑποκείμενον] ἐπιπέδων πρὸς ὀρθάς ἐστιν φ ZA b. 10. ἔσται V. 11. ἄρα] om. F. δοθέντος ἄρα V. 13. ἡ AZ] om. Fb; add. m. 2 B. ποιῆσαι] δεῖξει P. 15. ἐαυτῶ P, sed corr. 16. δοθέντι σημεῖον φ (non F). Post γραμμὴν del. ἀγαγεῖν m. 1 b. 19. αὐτό V, et P, sed corr. Post prius A ras. 1 litt. F. 22. μετέωρον τι σημεῖον P. 23. κάθετος] comp. in ras. F. 24. τῇ $B\Gamma$] om. b.

Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν αἱ $ΑΔ$, $ΓΒ$, ἢ δὲ μία αὐτῶν ἢ $ΒΓ$ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, καὶ ἢ λοιπὴ ἄρα ἢ $ΑΔ$ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

5 Τῷ ἄρα δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου τοῦ A πρὸς ὀρθὰς ἀνέσταται ἢ $ΑΔ$. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιγ'.

10 Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθάς οὐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ A τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ $ΑΒ$, $ΑΓ$ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ διήχθω τὸ
15 διὰ τῶν $ΒΑ$, $ΑΓ$ ἐπίπεδον· τομὴν δὲ ποιήσει διὰ τοῦ A ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω τὴν $ΔΑΕ$. αἱ ἄρα $ΑΒ$, $ΑΓ$, $ΔΑΕ$ εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἢ $ΓΑ$ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς
20 ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἄπτεται δὲ αὐτῆς ἢ $ΔΑΕ$ οὔσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἢ ἄρα ὑπὸ $ΓΑΕ$ γωνία ὀρθή ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἢ ὑπὸ $ΒΑΕ$ ὀρθή ἐστιν· ἴση ἄρα ἢ ὑπὸ $ΓΑΕ$ τῇ ὑπὸ $ΒΑΕ$.
25 καὶ εἰσιν ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ

1. εἰσιν αἱ] om. φ (non F). 3. ἐστι FV, comp. b.
4. ἐστι BV, comp. Fb. 5. ἀπό — 7. ποιῆσαι] καὶ τὰ ἐξῆς V.
5. αὐτό b. 6. τοῦ — ἀνέσταται] euan. F. 7. ποιῆσαι]
δειξαι P. 9. ἀπό — ἐπιπέδῳ] PBFV, b mg. m. 1 (γρ.);
in textu b: τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου,
et idem in mg. habuit F, sed uestigia sola restant. 10. ἀνα-

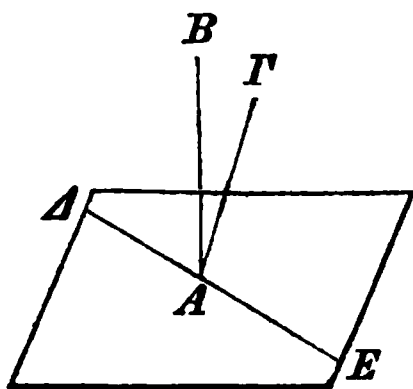
iam quoniam duae rectae parallelae sunt $A\Delta$, ΓB , et altera earum $B\Gamma$ ad planum subiacens perpendicularis est, etiam reliqua $A\Delta$ ad planum subiacens perpendicularis est [prop. VIII].

Ergo ad datum planum a puncto in eo dato A perpendicularis erecta est $A\Delta$; quod oportebat fieri.

XIII.

Ab eodem puncto ad idem planum duae rectae perpendiculares ad easdem partes erigi non possunt.

Nam si fieri potest, ab eodem puncto A ad planum subiacens duae rectae AB , $A\Gamma$ perpendiculares erigantur ad easdem partes, et ducatur per BA , $A\Gamma$ planum. sectionem igitur in plano subiacenti rectam efficiet per A punctum [prop. III]. efficiat ΔAE . itaque AB , $A\Gamma$, ΔAE rectae in eodem plano positae



sunt. et quoniam ΓA ad planum subiacens perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano subiacenti positae rectos angulos efficiet [def. 3]. tangit autem eam ΔAE in plano subiacenti po-

sita. itaque $\angle \Gamma AE$ rectus est. eadem de causa etiam $\angle BAE$ rectus est. quare $\Gamma AE = BAE$; et in eodem plano positi sunt; quod fieri non potest.

Ergo ab eodem puncto ad idem planum perpen-

σταθήσονται b. 13. α] ins. m. 1 F. 15. BA] B e corr. V. 16. εὐθείαν] om. V. ποιεῖτω] -τω supra add. m. 2 B. 17. Supra τήν add. εὐθ. V. ΔAE] corr. ex ΔA m. 2 V. ΔAE] corr. ex ΔE m. 1 b. 19. ἐστι BV, comp. Fb. 23. ΓAE] seq. ras. $\frac{1}{5}$ lin. V. ἐστι PV, comp. Fb. 25. ἐν] P, τῷ ἐν] BFV; τῷ αὐτῷ b, mg. γρ. ἐν ἐν] ἐπίπ.; αὐτῷ mg. F., in quo τῷ in ras. est. 26. τῶν αὐτῶν φ (non F).

δύο εὐθείαι πρὸς ὀρθὰς ἀνασταθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθὴ ἐστίν, 5 παράλληλα ἔσται τὰ ἐπίπεδα.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB πρὸς ἑκάτερον τῶν $\Gamma\Delta$, EZ ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω, ὅτι παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. συμ- 10 πιπτέτωσαν· ποιήσουσι δὴ κοινὴν τομὴν εὐθείαν. ποιείτωσαν τὴν $H\Theta$, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς $H\Theta$ τυχὸν σημεῖον τὸ K , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AK , BK . καὶ ἐπεὶ ἡ AB ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ EZ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς τὴν BK ἄρα εὐθείαν οὔσαν ἐν τῷ EZ ἐκβλη- 15 θέντι ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ AB . ἡ ἄρα ὑπὸ ABK γωνία ὀρθὴ ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ BAK ὀρθὴ ἐστίν. τριγώνου δὴ τοῦ ABK αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ABK , BAK δυσὶν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ $\Gamma\Delta$, EZ ἐπίπεδα ἐκβαλ- 20 λόμενα συμπεσοῦνται· παράλληλα ἄρα ἐστὶ τὰ $\Gamma\Delta$, EZ ἐπίπεδα.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἄρα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθὴ ἐστίν, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. ἀναστήσονται V. 4. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 5. ἔσται] P, ἐστὶ BFVb. ἐπίπεδα] αὐτὰ μέρη φ. 6. $\Gamma\Delta$] in ras. V.
7. EZ] ZE b. 12. BK] corr. ex KB m. 2 V; KB B; K'' B' b. 18. καὶ] (alt.) supra scr. comp. m. 1 b. 16. ἐστὶ BV, comp. Fb; item lin. 17. 17. ABK] corr. ex AB F. αἱ] om. V. 18. εἰσὶν] supra m. 1 P. ἴσαι εἰσὶν V.
20. ἐστὶ] comp. F.; εἰσὶν in ras. m. 1 P. 22. ἃ] om. φ (non F). ἐστὶ B, et corr. in ἐστὶν V, comp. Fb. 23. ἐπίπεδα] ι in ras. m. 1 P. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. V.

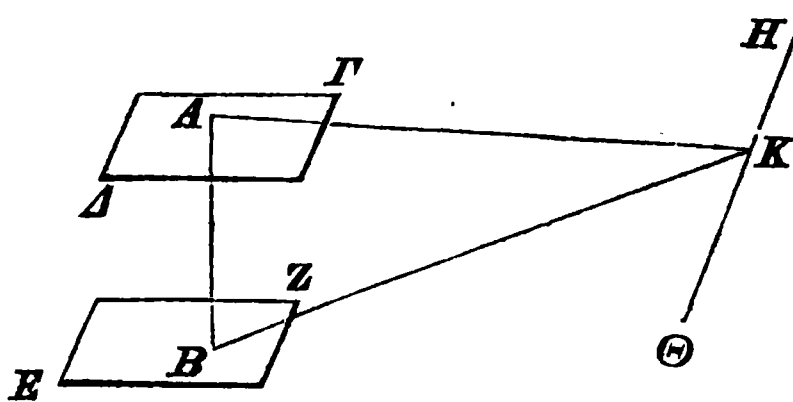
diculares duae rectae ad easdem partes erigi non possunt; quod erat demonstrandum.

XIV.

Ad quae plana eadem recta perpendicularis est, ea parallela erunt.

Recta enim AB ad utrumque planum $\Gamma\Delta$, EZ perpendicularis sit. dico, plana parallela esse.

nam si minus, producta concurrent. concurrant; communem igitur sectionem rectam facient [prop. III]. faciant $H\Theta$, et in $H\Theta$ punctum quodlibet sumatur K , et ducantur AK , BK . et quoniam AB perpendicularis est ad planum EZ , etiam ad rectam BK in



plano EZ producto positam perpendicularis est AB . ergo $\angle ABK$ rectus est [def. 3]. eadem de causa etiam $\angle BAK$

rectus est. trianguli igitur ABK duo anguli $ABK + BAK$ duobus rectis aequales sunt; quod fieri non potest [I, 17]. itaque plana $\Gamma\Delta$, EZ non concurrent producta. ergo plana $\Gamma\Delta$, EZ parallela sunt [def. 8].

Ergo ad quae plana eadem recta perpendicularis est, ea parallela sunt; quod erat demonstrandum.

ιε'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων ὧσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι, παράλληλά ἐστι τα δι' αὐτῶν ἐπίπεδα.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων αἱ AB , $BΓ$ παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων τὰς $ΔE$, EZ ἔστωσαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι· λέγω, ὅτι ἐκβαλλόμενα τὰ διὰ τῶν AB , $BΓ$, $ΔE$, EZ ἐπίπεδα οὐ συμπεσεῖται ἀλλήλοις.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ B σημείου ἐπὶ τὸ διὰ τῶν $ΔE$, EZ ἐπίπεδον κάθετος ἡ BH καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ H σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ H τῇ μὲν $EΔ$ παράλληλος ἦχθω ἡ $HΘ$, τῇ δὲ EZ ἡ HK . καὶ ἐπεὶ ἡ BH ὀρθὴ ἐστι πρὸς τὸ διὰ τῶν $ΔE$, EZ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν $ΔE$, EZ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἄπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν $HΘ$, HK οὔσα ἐν τῷ διὰ τῶν $ΔE$, EZ ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $BHΘ$, BHK γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ BA τῇ $HΘ$, αἱ ἄρα ὑπὸ HBA , $BHΘ$ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ $BHΘ$ ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ HBA ἡ HB ἄρα τῇ BA πρὸς ὀρθάς ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ HB καὶ τῇ $BΓ$ ἐστι πρὸς ὀρθάς. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ HB δυσὶν εὐθείαις ταῖς BA , $BΓ$ τεμνού-

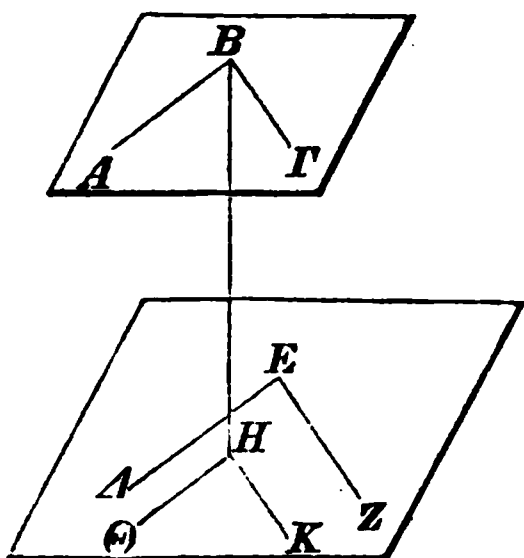
3. Ante ὧσι ras. 3 litt. V; ὧσιν B. 4. ἐστιν P. 6. $BΓ$] corr. ex $ΓB$ V; $ΓB$ B. 10. συμ- in ras. V. συμπεσοῦνται b, corr. m. 1. 11. B] e corr. m. 1 b. 13. τοῦ H] τοῦ H σημείου b, σημείου add. m. 2 F. 15. ἐστιν PV, comp. F. 16. αὐτῆς] om. φ. 17. διὰ τῶν] om. P. 19. τῶν $HΘ$ — 20. ἑκατέρα] mg. m. 1 V. 20. ἐστὶν] om. V. $BHΘ$] $Θ$ in ras. V.

XV.

Si duae rectae inter se tangentes duabus rectis inter se tangentibus parallelae sunt non in eodem plano positae, plana earum inter se parallelae sunt.

Nam duae rectae inter se tangentes AB , $B\Gamma$ duabus rectis inter se tangentibus ΔE , EZ parallelae sint non in eodem plano positae. dico, plana rectarum AB , $B\Gamma$ et ΔE , EZ producta inter se non concurrere.

ducatur enim a B puncto ad planum rectarum ΔE , EZ perpendicularis BH [prop. XI] et cum plano in H puncto concurrat, et per H rectae $E\Delta$ parallela



ducatur $H\Theta$, rectae autem EZ parallela HK . et quoniam BH ad planum rectarum ΔE , EZ perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano rectarum ΔE , EZ positas rectos angulos efficiet [def. 3]. uerum utraque $H\Theta$, HK eam tangit in plano rectarum ΔE , EZ posita. itaque uterque angulus $BH\Theta$, BHK rectus est. et quoniam BA rectae $H\Theta$ parallela est [prop. IX], anguli $HBA + BH\Theta$ duobus rectis aequales sunt [I, 29]. uerum $\angle BH\Theta$ rectus est; itaque etiam $\angle HBA$ rectus. HB igitur ad BA perpendicularis est. eadem de causa HB etiam ad $B\Gamma$ perpendicularis est. iam quoniam recta HB ad duas rectas inter se secantes BA , $B\Gamma$ perpendicularis

22. HBA] H ins. V.

in ras. V, BH Bb.

BF Vb.

23. η] (alt.) supra scr. V.

$\alpha\alpha$] in ras. V.

25. HB]

26. HB] P, BH

$\epsilon\upsilon\theta\epsilon\lambda\alpha\iota\varsigma$] $\acute{o}\rho\theta\alpha\iota\varsigma$ B, supra scr. $\epsilon\upsilon\theta\epsilon\lambda\alpha\iota\varsigma$ m. 2.

σαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν, ἡ HB ἄρα καὶ
 τῷ διὰ τῶν BA , $BΓ$ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.
 [διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ BH καὶ τῷ διὰ τῶν $HΘ$, HK
 ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. τὸ δὲ διὰ τῶν $HΘ$, HK
 5 ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν $ΔE$, EZ . ἡ BH ἄρα τῷ
 διὰ τῶν $ΔE$, EZ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἐδείχθη
 δὲ ἡ HB καὶ τῷ διὰ τῶν AB , $BΓ$ ἐπιπέδῳ πρὸς
 ὀρθάς]. πρὸς ἃ δὲ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθὴ
 ἐστιν, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα· παράλληλον ἄρα ἐστὶ
 10 τὸ διὰ τῶν AB , $BΓ$ ἐπίπεδον τῷ διὰ τῶν $ΔE$, EZ .

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο
 εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων ὥσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπι-
 πέδῳ, παράλληλά ἐστι τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα· ὅπερ
 ἔδει δεῖξαι.

15

ις'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου
 τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλ-
 ληλοὶ εἰσιν.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα παράλληλα τὰ AB , $ΓΔ$ ὑπὸ ἐπι-
 20 πέδου τοῦ $EZHΘ$ τεμνέσθῳ, κοιναὶ δὲ αὐτῶν τομαὶ
 ἔστωσαν αἱ EZ , $HΘ$. λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ
 EZ τῇ $HΘ$.

Εἰ γὰρ μὴ, ἐμβαλλόμεναι αἱ EZ , $HΘ$ ἦτοι ἐπὶ

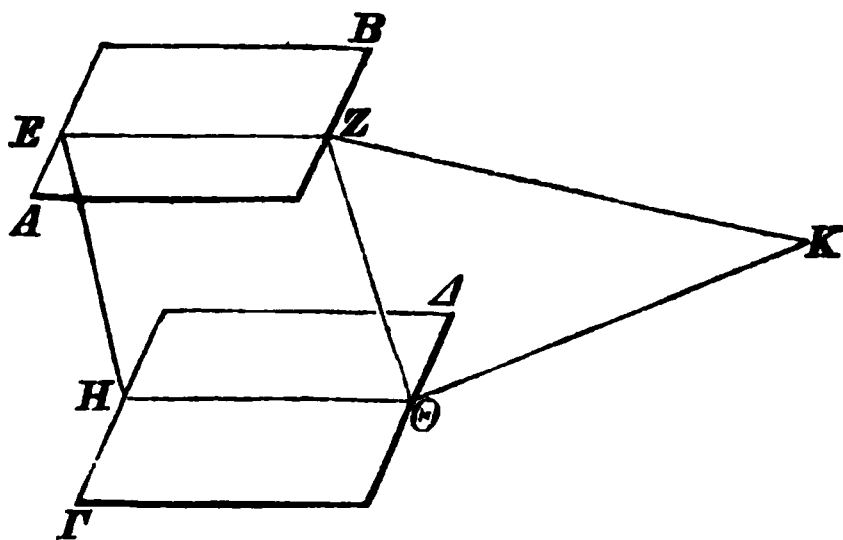
2. ἐστὶ $BV\varphi$, comp. b. 3. διὰ τὰ — 8. ὀρθάς] mg. m.
 2 B, punctis del. m. 2 V. 4. ἐστὶ BV , comp. Fb. 5. ἐστὶν
 P. Post EZ del. ἐπὶ m. 1 P. 7. $BΓ$] $ΑΓ$ BV . Ad lin. 3
 —8 mg. b m. 1: γρ. ἐστὶ δὲ καὶ τῷ διὰ τῶν $ΔE$, EZ ἐπιπέδῳ
 ὀρθὴ· ἡ BH ἄρα πρὸς ἐκάτερον τῶν διὰ τῶν $ABΓ$, $ΔEZ$ ἐπι-
 πέδων ὀρθὴ ἐστὶ; idem in textu BV (τῷ corr. ex τὸ, $Γ$ in ras.
 V; ἐστὶν B), mg. m. 1 F. 9. ἐστὶ BV , comp. Fb. 12. ὥσιν
 B. ἐπιπέδῳ οὔσαι B. 13. ἐστὶ τὰ] τὰ seq. lac. φ. ὅπερ
 ἔδει δεῖξαι] om. V. 17. παράλληλοι] ἔστωσαν φ. 18. εἰσι

erecta est, HB etiam ad planum rectarum BA , $B\Gamma$ perpendicularis est [prop. IV].¹⁾ ad quae autem plana eadem recta perpendicularis est, ea parallela sunt [prop. XIV]. itaque planum rectarum AB , $B\Gamma$ parallelum est plano rectarum ΔE , EZ .

Ergo si duae rectae inter se tangentes duabus rectis inter se tangentibus parallelae sunt non in eodem plano positae, plana earum parallela sunt; quod erat demonstrandum.

XVI.

Si duo plana parallela plano aliquo secantur, communes eorum sectiones parallelae sunt.



Nam duo plana parallela AB , $\Gamma\Delta$ plano $EZH\Theta$ secantur, communes autem eorum sectiones sint EZ , $H\Theta$. dico, EZ rectae $H\Theta$ parallelam esse.

nam si minus, EZ , $H\Theta$ productae concurrent aut

1) Uerba $\delta\iota\acute{\alpha}$ $\tau\acute{\alpha}$ lin. 3 — $\acute{o}\rho\theta\acute{\alpha}\varsigma$ lin. 8 ab Euclide profecta esse nequeunt, quippe quae per ambages demonstrant, BH ad planum rectarum ΔE , EZ perpendicularem esse, id quod e praeparatione patet (p. 40, 11), ad quam Euclides tacite respicit contra morem suum. inde factum est, ut uerba illa interpolarentur et id quidem iam ante Theonem. scriptura codicis B per se bona sine dubio e coniectura satis recenti orta est.

τὰ Z, Θ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ E, H συμπεσοῦνται. ἐκβε-
 βλήσθωσαν ὡς ἐπὶ τὰ Z, Θ μέρη καὶ συμπιπέτωσαν
 πρότερον κατὰ τὸ K . καὶ ἐπεὶ ἡ EZK ἐν τῷ AB
 ἐστὶν ἐπιπέδῳ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς EZK ση-
 5 μεῖα ἐν τῷ AB ἐστὶν ἐπιπέδῳ. ἐν δὲ τῶν ἐπὶ τῆς
 EZK εὐθείας σημείων ἐστὶ τὸ K . τὸ K ἄρα ἐν τῷ
 AB ἐστὶν ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ K καὶ ἐν
 τῷ $\Gamma\Delta$ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· τὰ $AB, \Gamma\Delta$ ἄρα ἐπίπεδα ἐκ-
 βαλλόμενα συμπεσοῦνται. οὐ συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ
 10 παράλληλα ὑποκείσθαι· οὐκ ἄρα αἱ $EZ, H\Theta$ εὐθεῖαι
 ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ Z, Θ μέρη συμπεσοῦνται. ὁμοίως
 δὴ δείξομεν, ὅτι αἱ $EZ, H\Theta$ εὐθεῖαι οὐδὲ ἐπὶ τὰ $E,$
 H μέρη ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. αἱ δὲ ἐπὶ μηδ-
 ἕτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσιν. παρ-
 15 ἄλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ $H\Theta$.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου
 τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοι
 εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ'.

20 Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπε-
 δων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμη-
 θήσονται.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ $AB, \Gamma\Delta$ ὑπὸ παραλλήλων
 ἐπιπέδων τῶν $H\Theta, K\Lambda, MN$ τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ
 25 $A, E, B, \Gamma, Z, \Delta$ σημεία· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AE
 εὐθεῖα πρὸς τὴν EB , οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν $Z\Delta$.

1. τὰ] (alt.) supra scr. m. 2 B. συμπεσοῦνται] om. V.
 ἐκβεβλήσθω in ras. V. 2. ὡς] P, F m. 1; πρότερον ὡς BV b,
 F m. 2. 3. πρότερον] om. BFV. Post καὶ spatium 6 litt.
 reliq. φ. τῷ AB] ἐνί b, mg. γρ. ἐν τῷ AB ἐστὶν. 4. ἐπιπέδῳ

ad Z , Θ partes aut ad E , H . producantur ad Z , Θ partes et prius concurrant in K . et quoniam EZK in plano AB posita est, etiam omnia rectae EZK puncta in plano AB posita sunt [prop. I]. ex punctis autem rectae EZK unum est K . itaque K in plano AB positum est. eadem de causa K etiam in plano $\Gamma\Delta$ positum est. quare plana AB , $\Gamma\Delta$ producta concurrent. uerum non concurrunt, quia parallela esse supponuntur. itaque rectae EZ , $H\Theta$ productae ad Z , Θ partes non concurrent. iam similiter demonstrabimus, rectas EZ , $H\Theta$ ne ad E , H quidem partes productas concurrere. quae autem ad neutras partes concurrunt, parallelae sunt. itaque EZ rectae $H\Theta$ parallela est.

Ergo si duo plana parallela plano aliquo secantur, communes eorum sectiones parallelae sunt; quod erat demonstrandum.

XVII.

Si duae rectae planis parallelis secantur, secundum eandem rationem secabuntur.

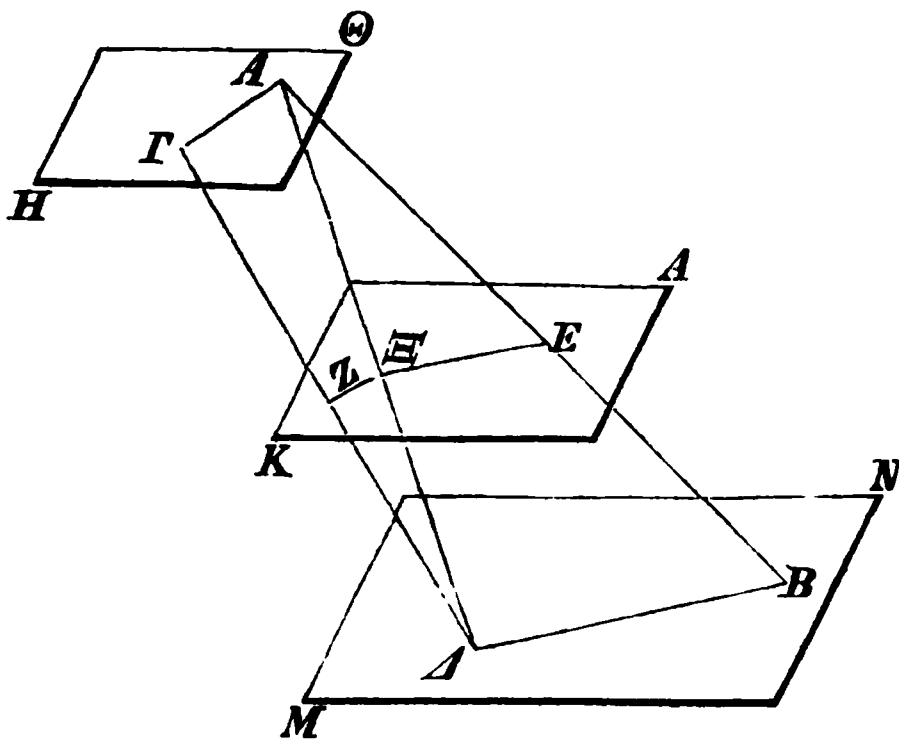
Nam duae rectae AB , $\Gamma\Delta$ planis parallelis $H\Theta$, $K\Lambda$, MN in punctis A , E , B et Γ , Z , Δ secantur. dico, esse $AE : EB = \Gamma Z : Z\Delta$.

ἐστίν F. καί — δ. ἐπιπέδῳ] mg. F (euan.). δ. ἐπιπέδῳ ἐστίν BV, F?; ἐπιπέδῳ εἰσίν b. τῶν] τῶ B, et V, sed corr. m. rec. 6. σημείῳ Bφ, et V (corr. m. rec.); σημείον b. 12. αἱ] καὶ αἱ BV. οὐδ' P. 13. μέρη] supra scr. m. 1 F. ἐκβαλλόμεναι οὐ b. ἐπὶ] ἐπὶ τὰ Vφ. 14. τὰ] om. BV. εἰσι V b, comp. F. 15. ἡ] post ins. V. τῆ] om. b. 16. παράλληλα — 18. δεῖξαι]: ~ V. 17. τέτμηται B. 21. τέμνονται P, corr. m. 1. 24. τεμνέτωσαν b. 25. A] insert. postea V. B] in ras. V. Δ, Z B. 26. ZΔ] e corr. V, in ras. m. 1 P; ΔZ B.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ $ΑΓ$, $ΒΔ$, $ΑΔ$, καὶ συμβαλλέτω ἡ $ΑΔ$ τῷ $ΚΑ$ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ $Ξ$ σημεῖον, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΕΞ$, $ΞΖ$. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ $ΚΑ$, $ΜΝ$ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ $ΕΒΔΞ$
 5 τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ $ΕΞ$, $ΒΔ$ παράλληλοι εἰσιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ $ΗΘ$, $ΚΑ$ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ $ΑΞΖΓ$ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ $ΑΓ$, $ΞΖ$ παράλληλοι εἰσιν. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $ΑΒΔ$ παρὰ μίαν τῶν
 10 πλευρῶν τὴν $ΒΔ$ εὐθεῖα ἤκται ἡ $ΕΞ$, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΕ$ πρὸς $ΕΒ$, οὕτως ἡ $ΑΞ$ πρὸς $ΞΔ$. πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $ΑΔΓ$ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν $ΑΓ$ εὐθεῖα ἤκται ἡ $ΞΖ$, ἀνάλογόν ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΞ$ πρὸς $ΞΔ$, οὕτως ἡ $ΓΖ$ πρὸς $ΖΔ$. ἐδείχθη
 15 δὲ καὶ ὡς ἡ $ΑΞ$ πρὸς $ΞΔ$, οὕτως ἡ $ΑΕ$ πρὸς $ΕΒ$. καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΑΕ$ πρὸς $ΕΒ$, οὕτως ἡ $ΓΖ$ πρὸς $ΖΔ$.
 Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2. τῷ] τό φ. 3. $ΞΖ$] $Ξ'' Ζ'$ b. ἐπίπεδοι φ. 4. παράλληλα] = οἱ φ. $ΕΒΔΞ$] $Ξ$ in ras. V, corr. ex Z m. 1 F.
 5. $ΕΞ$, $ΒΔ$] in ras. V, $Ξ$ eras. B; $ΕΖ$, $ΒΔ$ b. 6. εἰσι Vb, comp. F. διὰ — 9. εἰσιν] mg. V. 7. ἐπιπέδου τοῦ] corr. ex ἐπιπέδου P. m. 2. $ΑΞΖΓ$] $Ξ$ in ras. V. 8. $ΞΖ$] corr. ex Z m. 2 B. 9. εἰσι b, comp. F. μία φ. 10. τὴν] τῆ b. εὐθεῖαν B, sed corr. 11. ἐστὶν] om. V. τὴν $ΕΒ$ V.
 12. $ΑΔ'' Γ'$ b. 13. τὴν] τῶν φ (non F). εὐθεῖαν B, sed corr. ἐστὶν] ἄρα FV. 14. τὴν $ΞΔ$ BF. $ΓΖ$] Z in ras. m. rec. V. τὴν $ΖΔ$ BFVb. ἐδείχθη — 15. $ΕΒ$] mg. m. 2 B. 15. τὴν $ΞΔ$ FVb. τὴν $ΕΒ$ V. 16. καὶ ὡς ἄρα] ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς b, ῥ in spat. plur. litt. φ. $ΑΕ$] A in ras. m. 2 V. τὴν $ΕΒ$ BFb. τὴν $ΖΔ$ B. 17. ὑπό — 19. δεῖξαι] καὶ τὰ ἐξῆς V. 18. τέμνωνται, εἰς] στερεῶν seq. lac. φ. τμηθῶνται B, corr. m. 2.

ducantur enim $A\Gamma$, $B\Delta$, $A\Delta$, et $A\Delta$ cum plano $K\Lambda$ concurrat in puncto Ξ , et ducantur $E\Xi$, ΞZ . et quoniam duo plana parallela $K\Lambda$, MN plano $EB\Delta\Xi$ secantur, communes eorum sectiones $E\Xi$, $B\Delta$ parallelae sunt [prop. XVI]. eadem de causa, quoniam



duo plana parallela $H\Theta$, $K\Lambda$ plano $A\Xi Z\Gamma$ secantur, communes eorum sectiones $A\Gamma$, ΞZ parallelae sunt. et quoniam in triangulo $AB\Delta$ uni laterum $B\Delta$ parallela ducta est recta $E\Xi$, erit $AE : EB = A\Xi : \Xi\Delta$ [VI, 2]. rursus quoniam in triangulo $A\Delta\Gamma$ uni laterum $A\Gamma$ parallela ducta est recta ΞZ , erit $A\Xi : \Xi\Delta = \Gamma Z : Z\Delta$. sed demonstratum est, esse etiam $A\Xi : \Xi\Delta = AE : EB$. quare etiam $AE : EB = \Gamma Z : Z\Delta$.

Ergo si duae rectae planis parallelis secantur, secundum eandem rationem secabuntur; quod erat demonstrandum.

ιη'.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾗ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

5 Εὐθεῖα γάρ τις ἢ AB τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς AB ἐπίπεδα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστιν.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ διὰ τῆς AB ἐπίπεδον τὸ ΔE , καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τοῦ ΔE ἐπιπέδου καὶ τοῦ ὑπο-
 10 κειμένου ἢ GE , καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς GE τυχὸν σημεῖον τὸ Z , καὶ ἀπὸ τοῦ Z τῇ GE πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ ΔE ἐπιπέδῳ ἢ ZH . καὶ ἐπεὶ ἢ AB πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθὴ ἔστιν, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑπο-
 15 κειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἔστιν ἢ AB · ὥστε καὶ πρὸς τὴν GE ὀρθὴ ἔστιν· ἢ ἄρα ὑπὸ ABZ γωνία ὀρθὴ ἔστιν. ἔστι δὲ καὶ ἢ ὑπὸ HZB ὀρθὴ· παράλληλος ἄρα ἔστιν ἢ AB τῇ ZH . ἢ δὲ AB τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστιν· καὶ ἢ ZH ἄρα τῷ ὑπο-
 20 κειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστιν. καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἔστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ᾧσιν. καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ GE ἐν ἐνὶ τῶν
 25 ἐπιπέδων τῷ ΔE πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἢ ZH ἐδείχθη

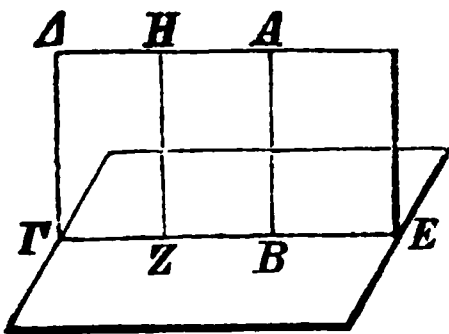
4. ἔσται] corr. ex ἔστιν V. 5. εὐθεῖα — 7. ἔστιν] mg. m. 1 V. 6. τῆς] om. φ (non F). 13. ἔστι PBFV, comp. b. 14. οὔσα P. 16. ἔστι V. γωνίαν φ. 17. HZB] in ras. V. 18. ἔστιν] om. V. τῷ] τῷ αὐτῷ F. 19. ἔστι B. καὶ ἢ — 20. ἔστιν] om. b, mg. V. 19. HZ P. 20. ἔστι PBV, comp. F. καί] καὶ ἐπεὶ BV. 21. πρὸς ἐπίπεδον] supra m. 2 V. 23. ἐπιπέδῳ] τῶν ἐπιπέδων V. ᾧσι V b.

XVIII.

Si recta ad planum aliquod perpendicularis est, etiam omnia plana, quae per eam ducuntur, ad idem planum perpendicularia erunt.

Nam recta AB ad planum subiacens perpendicularis sit. dico, etiam omnia plana, quae per AB ducuntur, ad planum subiacens perpendicularia esse.

ducatur enim per AB planum $\triangle ADE$, et communis sectio plani $\triangle ADE$ et subiacentis sit ΓE , et in ΓE sumatur punctum aliquod Z , et ab Z ad ΓE perpendicularis in plano $\triangle ADE$ ducatur ZH .



et quoniam AB ad planum subiacens perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano subiacenti positas perpendicularis est AB [def. 3], quare etiam

ad ΓE perpendicularis est. itaque $\angle ABZ$ rectus est. verum etiam $\angle HZB$ rectus est. itaque AB rectae ZH parallela est [I, 28]. AB autem ad planum subiacens perpendicularis est. itaque etiam HZ ad planum subiacens perpendicularis est [prop. VIII]. et planum ad planum perpendiculare est, si rectae in altero plano ad communem planorum sectionem perpendiculares ductae ad reliquum planum perpendiculares sunt [def. 4]. et demonstratum est, ZH in altero plano $\triangle ADE$ ad communem planorum sectionem ΓE perpendicularem ductam ad planum subiacens perpen-

XVIII. Eutocius in Apollon. p. 23.

24. τῶν ἐπιπέδων τομῆ b. τομῆ] τομῆ ἄρα φ. τῆ] -ῆ e corr. V.

τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς· τὸ ἄρα ΔE ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς AB ἐπίπεδα ὀρθὰ τυγχανοντα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον.

5 Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθάς ἦ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστὶ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ
10 τινὶ πρὸς ὀρθάς ἦ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστὶ.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ AB , $B\Gamma$ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἐστω η $B\Delta$. λέγω, ὅτι ἡ $B\Delta$ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς
15 ὀρθάς ἐστίν.

Μὴ γάρ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐν μὲν τῷ AB ἐπιπέδῳ τῇ $A\Delta$ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθάς ἡ ΔE , ἐν δὲ τῷ $B\Gamma$ ἐπιπέδῳ τῇ $\Gamma\Delta$ πρὸς ὀρθάς ἡ ΔZ . καὶ ἐπεὶ τὸ AB ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστὶ πρὸς τὸ ὑπο-
20 κείμενον, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ $A\Delta$ πρὸς ὀρθάς ἐν τῷ AB ἐπιπέδῳ ἦκται ἡ ΔE , ἡ ΔE ἄρα ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὴ

2. ἐστίν P. Post ὑποκείμενον add. ἐπίπεδον b et mg. m. rec. V. 5. καὶ — 7. δεῖξαι]: ~ V. 6. τὰ δι' αὐτῆς ἐπι- euan. F. 9. τέμνοντα] στερεοντα φ (non F). ἐπιπέδῳ τινί] om. F, sed videtur fuisse in mg. 10. τομῇ] in ras. m. 1 P. 12. τῷ] bis P; corr. m. 1. 15. ἐστὶ BV, comp. F. 16. ἀπό] ὑπό P. 17. τῇ] e corr. b. πρὸς] om. φ. ΔE] Δ e corr. V. 18. δέ] om. P. $\Gamma\Delta$] $\Delta\Gamma$ b. ΔZ] Z in ras. V. 19. ἐστὶ] om. φ (non F). 20. καὶ] ἐπίπεδον, καὶ b. $A\Delta$] A in ras. FV.

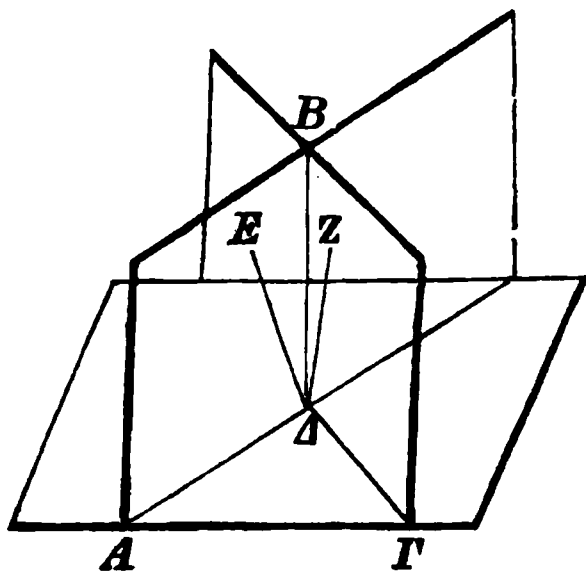
diculare esse. ergo $\triangle E$ planum ad subiacens perpendicularare est. iam similiter demonstrabimus, etiam omnia plana, quae per AB ducantur, ad planum subiacens perpendiculararia esse.

Ergo si recta ad planum aliquod perpendicularis est, etiam omnia plana, quae per eam ducuntur, ad idem planum perpendiculararia erunt; quod erat demonstrandum.

XIX.

Si duo plana inter se secantia ad planum aliquod perpendiculararia sunt, etiam communis eorum sectio ad idem planum perpendicularis erit.

Nam duo plana AB , $B\Gamma$ ad planum subiacens perpendiculararia sint, et communis eorum sectio sit $B\Delta$. dico, $B\Delta$ ad planum subiacens perpendiculararem esse.



Ne sit enim, et a Δ puncto in plano AB ad rectam $A\Delta$ perpendicularis ducatur $\triangle E$, in $B\Gamma$ autem plano ad $\Gamma\Delta$ perpendicularis $\triangle Z$.¹⁾

et quoniam AB planum ad subiacens perpendicularare est, et ad communem eorum sectionem $A\Delta$ in plano AB perpendicularis ducta est $\triangle E$, $\triangle E$ ad planum subiacens perpendicularis est [def. 4]. similiter demonstrabimus,

1) Nam si communis planorum sectio ad planum subiacens perpendicularis non est, ad rectas $\triangle A$, $\triangle \Gamma$ rectos angulos non efficiet. ergo et in plano AB et in $B\Gamma$ locus est perpendiculari ad $A\Delta$ et ad $\triangle \Gamma$ in Δ erectae.

δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔZ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄρα σημείου τοῦ Δ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνεσταμέναι εἰσὶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἐστὶν ἀδύ-
 5 νατον. οὐκ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἀνασταθήσεται πρὸς ὀρθὰς πλὴν τῆς ΔB κοινῆς τομῆς τῶν $AB, B\Gamma$ ἐπιπέδων.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ
 τινὶ πρὸς ὀρθὰς ἦ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ
 10 ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ'.

Ἐὰν στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται, δύο ὁποιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

15 Στερεὰ γὰρ γωνία ἡ πρὸς τῷ A ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ $BA\Gamma, \Gamma A\Delta, \Delta AB$ περιεχέσθω· λέγω, ὅτι τῶν ὑπὸ $BA\Gamma, \Gamma A\Delta, \Delta AB$ γωνιῶν δύο ὁποιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

20 Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ $BA\Gamma, \Gamma A\Delta, \Delta AB$ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, φανερόν, ὅτι δύο ὁποιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν. εἰ δὲ οὐ, ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ $BA\Gamma$, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ ὑπὸ ΔAB γωνίᾳ ἐν τῷ

1. ὅτι καὶ ἡ] om. φ (non F). ΔZ] $\Delta'' Z'$ b. 4. ἐστίν] om. V. 6. τῆς] e corr. m. 1 b. 8. ἐπίπεδα — 10. δεῖξαι] : ~ V. 9. ἦ, καί] euan. F. 14. μείζους V φ. πάντῃ seq. ras. 1 litt. P. 15. τῶν corr. in τό m. 1 b. 16. περιεχέσθω — 17. γωνιῶν] mg. m. 2 V, in text. eras. γωνιῶν. 16. $\Gamma\Delta A$ b. 20. $\Gamma A\Delta$] Δ e corr. V. 21. ἴσαι] εἰσι ἴσαι

etiam $\triangle Z$ perpendiculararem esse ad planum subiacens. itaque ab eodem puncto Δ ad planum subiacens duae rectae ad easdem partes perpendiculares erectae sunt; quod fieri non potest [prop. XIII]. itaque a Δ puncto nulla recta ad planum subiacens perpendicularis erigetur praeter $\triangle B$, quae communis est sectio planorum AB , $B\Gamma$.

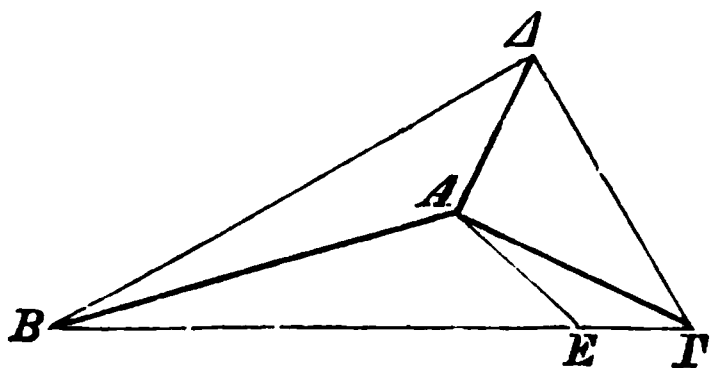
Ergo si duo plana inter se secantia ad planum aliquod perpendicularia sunt, etiam communis eorum sectio ad idem planum perpendicularis erit; quod erat demonstrandum.

XX.

Si angulus solidus tribus angulis planis continetur, duo quilibet reliquo maiores erunt quoquo modo coniuncti.

Nam angulus solidus, qui ad A positus est, tribus

angulis planis $B\Delta\Gamma$, $\Gamma A\Delta$, $\triangle AB$ contineatur. dico, duos quoslibet angulorum $B\Delta\Gamma$, $\Gamma A\Delta$, $\triangle AB$ reliquo maiores esse quoquo modo coniunctos.



iam si anguli $B\Delta\Gamma$, $\Gamma A\Delta$, $\triangle AB$ inter se aequales sunt, adparet, duos quoslibet reliquo maiores esse. si minus, maior¹⁾ sit $\angle B\Delta\Gamma$, et ad rectam AB et punctum eius A in plano rectarum BA , $A\Gamma$ angulo $\triangle AB$

1) Sc. angulo $\triangle AB$. neque enim necesse est, omnium eum maximum esse.

V. εἰσίν] om. V. 22. εἶσι V, comp. F. 24. $\triangle AB$] $\triangle A\Gamma$ P. ἐν] om. B, supra scr. V.

διὰ τῶν $ΒΑΓ$ ἐπιπέδῳ ἴση ἢ ὑπὸ $ΒΑΕ$, καὶ κείσθω
 τῇ $ΑΔ$ ἴση ἢ $ΑΕ$, καὶ διὰ τοῦ $Ε$ σημείου διαχθεῖσα
 ἢ $ΒΕΓ$ τεμνέτω τὰς $ΑΒ$, $ΑΓ$ εὐθείας κατὰ τὰ $Β$, $Γ$
 σημεία, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΔΒ$, $ΔΓ$. καὶ ἐπεὶ ἴση
 5 ἐστὶν ἢ $ΔΑ$ τῇ $ΑΕ$, κοινὴ δὲ ἢ $ΑΒ$, δύο δυσὶν
 ἴσαι· καὶ γωνία ἢ ὑπὸ $ΔΑΒ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΒΑΕ$ ἴση·
 βάσις ἄρα ἢ $ΔΒ$ βάσει τῇ $ΒΕ$ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ
 δύο αἱ $ΒΔ$, $ΔΓ$ τῆς $ΒΓ$ μείζονές εἰσιν, ὧν ἢ $ΔΒ$ τῇ
 $ΒΕ$ ἐδείχθη ἴση, λοιπὴ ἄρα ἢ $ΔΓ$ λοιπῆς τῆς $ΕΓ$
 10 μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ $ΔΑ$ τῇ $ΑΕ$,
 κοινὴ δὲ ἢ $ΑΓ$, καὶ βάσις ἢ $ΔΓ$ βάσεως τῆς $ΕΓ$
 μείζων ἐστίν, γωνία ἄρα ἢ ὑπὸ $ΔΑΓ$ γωνίας τῆς ὑπὸ
 $ΕΑΓ$ μείζων ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἢ ὑπὸ $ΔΑΒ$ τῇ
 ὑπὸ $ΒΑΕ$ ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ $ΔΑΒ$, $ΔΑΓ$ τῆς ὑπὸ
 15 $ΒΑΓ$ μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ
 λοιπαὶ σύνδυο λαμβανόμεναι τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν.

Ἐὰν ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπι-
 πέδων περιέχεται, δύο ὁποιαοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές
 εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20

κα'.

Ἐὰν στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων [ἢ] τεσσ-
 σάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται.

Ἐστω στερεὰ γωνία ἢ πρὸς τῷ $Α$ περιεχομένη ὑπὸ
 ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ὑπὸ $ΒΑΓ$, $ΓΑΔ$, $ΔΑΒ$ · λέγω,
 25 ὅτι αἱ ὑπὸ $ΒΑΓ$, $ΓΑΔ$, $ΔΑΒ$ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσ-
 σονές εἰσιν.

1. ἐπιπέδῳ] in ras. m. 1 P. ἢ] supra scr. V, ut lin. 2.
 κείσθω τῇ] διὰ τοῦ $Ε$ ση $φ$ (non F). Hinc plerasque ineptias
 manus $φ$ omisi, maxime ubi aut certa uestigia ueri super-
 erant, aut certe nulla erat causa de scriptura cod. F dubitandi.

aequalis construatur $\angle BAE$, et ponatur $AE = A\Delta$, et $BE\Gamma$ per punctum E ducta rectas AB , $A\Gamma$ secet in B , Γ punctis, et ducantur ΔB , $\Delta\Gamma$. et quoniam $\Delta A = AE$, et AB communis est, duo latera duobus aequalia sunt; et $\angle \Delta AB = BAE$. itaque $\Delta B = BE$ [I, 4]. et quoniam $B\Delta + \Delta\Gamma > B\Gamma$ [I, 20], et demonstratum est, esse $\Delta B = BE$, erit $\Delta\Gamma > E\Gamma$. et quoniam $\Delta A = AE$, et $A\Gamma$ communis est, et $\Delta\Gamma > E\Gamma$, erit $\angle \Delta A\Gamma > EA\Gamma$ [I, 25]. et demonstratum est, esse etiam $\angle \Delta AB = BAE$. itaque $\Delta AB + \Delta A\Gamma > BA\Gamma$. eodem modo demonstrabimus, etiam reliquos angulos duo simul coniunctos reliquo maiores esse.

Ergo si angulus solidus tribus angulis planis continetur, duo quilibet reliquo maiores sunt quoquo modo coniuncti; quod erat demonstrandum.

XXI.

Omnis angulus solidus planis angulis minoribus, quam sunt quattuor anguli recti, continentur.

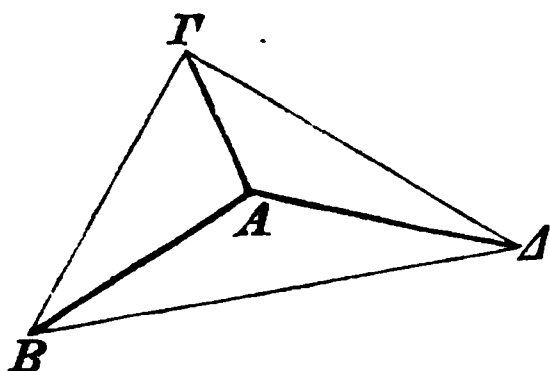
Sit angulus solidus, qui ad A positus est, comprehensus planis angulis $BA\Gamma$, $\Gamma A\Delta$, ΔAB . dico, esse $BA\Gamma + \Gamma A\Delta + \Delta AB$ minores quattuor rectis.

3. $\Gamma]$ corr. ex E m. 1 b. 4. $\Delta B]$ $B\Delta$ F. 6. Post $\dot{\iota}\sigma\alpha\iota$ ras. 4 litt. hab. V. 7. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu \dot{\iota}\sigma\eta]$ $\dot{\iota}\sigma\eta$ seq. spatio uacuo 3 litt. V. 8. $B\Delta]$ $B''\Delta'$ b, ΔB BV. $\tau\tilde{\eta}$ V? 10. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu]$ (prius) $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ PBV, comp. Fb. $AE]$ in ras. V. 11. $\Delta\Gamma]$ corr. ex ΔE B. 12. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ PBV, comp. F. Dein add. $\kappa\alpha\iota$ V. $\Delta A\Gamma]$ $\Delta B\Gamma$ φ . 14. $\tau\tilde{\eta}\varsigma]$ bis P, corr. m. 1; $\tau\omicron\iota\varsigma$ F. 17. $\acute{\upsilon}\pi\acute{o}$ — 19. $\delta\epsilon\dot{\iota}\xi\alpha\iota]$ $\kappa\alpha\iota \tau\grave{\alpha} \acute{\epsilon}\xi\tilde{\eta}\varsigma$ V. 21. $\acute{\upsilon}\pi\acute{o}]$ corr. ex $\acute{\alpha}\pi\acute{o}$ P. $\tilde{\eta}]$ om. P. 22. $\acute{\epsilon}\pi\iota\pi\acute{\epsilon}\delta\omega\nu \acute{o}\rho\theta\acute{\omega}\nu \gamma\omega\nu\iota\acute{\omega}\nu$ V. 23. $\tau\tilde{\omega}]$ corr. in $\tau\acute{o}$ m. 1 b. 24. $\acute{\upsilon}\pi\acute{o}$ — 25. $\alpha\dot{\iota}]$ mg. m. 2 B. 24. $\Gamma A\Delta]$ $\Delta A\Gamma$ φ et in ras. V. 25. $\acute{\upsilon}\pi\acute{o}]$ eras. B; m. 2 V. $\Gamma A\Delta]$ F m. 1, $\Delta A\Gamma$ F m. 2 et V in ras. 26. $\acute{\epsilon}\dot{\iota}\sigma\iota$ V.

Εἰλήφθω γὰρ ἐφ' ἐκάστης τῶν AB , AG , AD τυ-
χόντα σημεῖα τὰ B , Γ , Δ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $B\Gamma$,
 $\Gamma\Delta$, ΔB . καὶ ἐπεὶ στερεὰ γωνία ἢ πρὸς τῷ B ὑπὲρ
τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται τῶν ὑπὸ $\Gamma B A$,
5 $AB\Delta$, $\Gamma B\Delta$, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν· αἱ
ἄρα ὑπὸ $\Gamma B A$, $AB\Delta$ τῆς ὑπὸ $\Gamma B\Delta$ μείζονές εἰσιν.
διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ μὲν ὑπὸ $B\Gamma A$, $A\Gamma\Delta$ τῆς
ὑπὸ $B\Gamma\Delta$ μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ ὑπὸ $\Gamma\Delta A$, $A\Delta B$ τῆς
ὑπὸ $\Gamma\Delta B$ μείζονές εἰσιν· αἱ ἔξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ
10 $\Gamma B A$, $AB\Delta$, $B\Gamma A$, $A\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta A$, $A\Delta B$ τριῶν τῶν
ὑπὸ $\Gamma B\Delta$, $B\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta B$ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ τρεῖς
αἱ ὑπὸ $\Gamma B\Delta$, $B\Delta\Gamma$, $B\Gamma\Delta$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν·
αἱ ἔξ ἄρα αἱ ὑπὸ $\Gamma B A$, $AB\Delta$, $B\Gamma A$, $A\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta A$,
 $A\Delta B$ δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ἐκάστου
15 τῶν $AB\Gamma$, $A\Gamma\Delta$, $A\Delta B$ τριγώνων αἱ τρεῖς γωνίαι
δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, αἱ ἄρα τῶν τριῶν τριγώνων
ἐννέα γωνίαι αἱ ὑπὸ $\Gamma B A$, $A\Gamma B$, $B\Delta\Gamma$, $A\Gamma\Delta$,
 $\Gamma\Delta A$, $\Gamma A\Delta$, $A\Delta B$, $\Delta B A$, $B A\Delta$ ἔξ ὀρθαῖς ἴσαι
εἰσίν, ὧν αἱ ὑπὸ $AB\Gamma$, $B\Gamma A$, $A\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta A$, $A\Delta B$,
20 $\Delta B A$ ἔξ γωνίαι δύο ὀρθῶν εἰσι μείζονες· λοιπαὶ ἄρα
αἱ ὑπὸ $B A\Gamma$, $\Gamma A\Delta$, $\Delta A B$ τρεῖς [γωνίαι] περιέχουσαι
τὴν στερεὰν γωνίαν τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.

2. Γ] supra scr. m. 1 V. 3. ΔB] AB φ. 4. Ante τριῶν
ins. γὰρ m. 2 V. 5. $\Gamma B\Delta$] in ras. m. 1 P. 6. ὑπό] (alt.) om.
F. εἰσι BV, comp. Fb. 7. $B\Gamma A$] supra A scr. Δ m. 1 b.
8. $B\Gamma\Delta$] $\Gamma B\Delta$ F, corr. m. 2 (sed euan.). εἰσι BVb, comp. F.
αἱ δέ] καὶ ἔτι αἱ BFVb. 10. $AB\Delta$] $B\Delta$ in ras. B, item litt. seq.
 $\Gamma\Delta A$] in ras. V. 11. $B\Gamma\Delta$] $\Gamma\Delta$ in ras. V. $\Gamma\Delta B$] in ras. V.
ἀλλ' b. 12. $B\Gamma\Delta$] B et Δ in ras. V. εἰσί V, comp. F.
13. $AB\Delta$] m. rec. V. $\Gamma\Delta A$] in ras. V; $A\Delta\Gamma$ e corr. m. 2 B.
14. δύο] $AB\Delta$ δύο V. εἰσι BVb, comp. F. 15. αἱ τρεῖς τρι-
γώνων F, corr. m. 1. τριγώνου P, et b, sed corr. m. 1.
17. $\Gamma B A$] $\Gamma B\Delta$ F, $B A$ e corr. V. $A\Gamma B$] $AB\Gamma$ P. 18. $\Gamma\Delta A$]

sumatur enim in singulis rectis AB , $A\Gamma$, $A\Delta$ quaelibet puncta B , Γ , Δ , et ducantur $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔB .



et quoniam angulus solidus, qui ad B positus est, tribus angulis planis continetur $\Gamma B A$, $AB\Delta$, $\Gamma B\Delta$, duo quilibet reliquo maiores sunt [prop. XX]. itaque $\Gamma B A + AB\Delta > \Gamma B\Delta$.

eadem de causa erunt etiam $B\Gamma A + A\Gamma\Delta > B\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta A + A\Delta B > \Gamma\Delta B$.

itaque $\Gamma B A + AB\Delta + B\Gamma A + A\Gamma\Delta + \Gamma\Delta A + A\Delta B > \Gamma B\Delta + B\Gamma\Delta + \Gamma\Delta B$. uerum

$$\Gamma B\Delta + B\Delta\Gamma + B\Gamma\Delta$$

duobus rectis aequales sunt [I, 32]. itaque sex anguli

$$\Gamma B A + AB\Delta + B\Gamma A + A\Gamma\Delta + \Gamma\Delta A + A\Delta B$$

duobus rectis maiores sunt. et quoniam singulorum triangulorum $AB\Gamma$, $A\Gamma\Delta$, $A\Delta B$ tres anguli duobus rectis aequales sunt, nouem anguli trium triangulorum $\Gamma B A + A\Gamma B + B A\Gamma + A\Gamma\Delta + \Gamma\Delta A + \Gamma A\Delta + A\Delta B + \Delta B A + B A\Delta$ sex rectis aequales sunt, quorum

$$AB\Gamma + B\Gamma A + A\Gamma\Delta + \Gamma\Delta A + A\Delta B + \Delta B A$$

duobus rectis maiores sunt. itaque reliqui

$$B A\Gamma + \Gamma A\Delta + \Delta A B,$$

qui angulum solidum continent, quattuor rectis minores sunt.

in ras. V; $\Delta A\Gamma B$. $\Gamma A\Delta$] $A\Delta$ in ras. V; $\Gamma\Delta A B$. $B A\Delta$] $B\Delta A P$. 20. $\mu\epsilon\lambda\lambda\omicron\nu\epsilon\varsigma$ $\epsilon\lambda\sigma\iota(\nu)$ $B V$. 21. $\gamma\omega\nu\lambda\alpha\iota$] om. P. 22. $\epsilon\lambda\sigma\iota$ V, comp. F. Seq. in V $\pi\acute{\alpha}\nu\tau\eta$, sed del.

Ἄπαντα ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων [ἤ] τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ'.

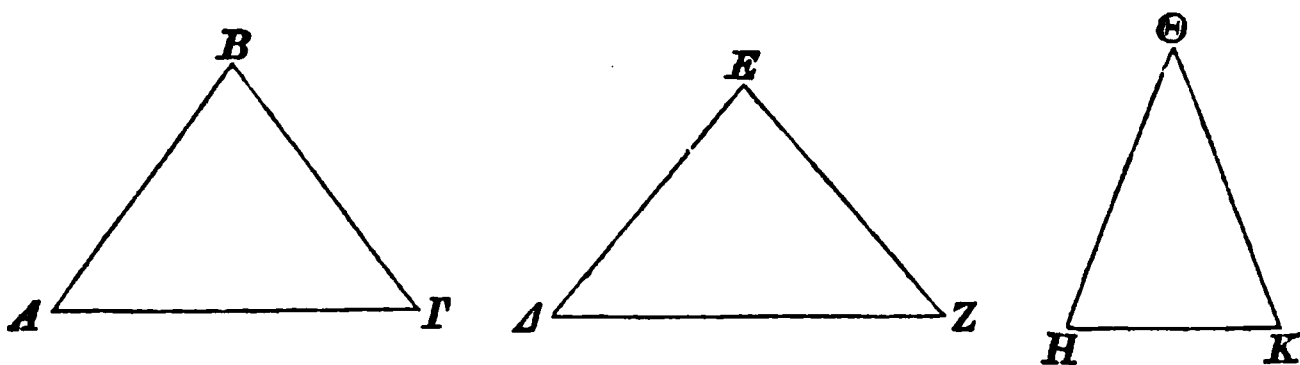
- 5 Ἐὰν ὧσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι, δυνατόν ἐστὶν ἐκ τῶν ἐπιξευγνυουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας τρίγωνον συστήσασθαι.
- 10 Ἐστῶσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ὑπὸ $AB\Gamma$, ΔEZ τῆς ὑπὸ $H\Theta K$, αἱ δὲ ὑπὸ ΔEZ , $H\Theta K$ τῆς ὑπὸ $AB\Gamma$, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ $H\Theta K$, $AB\Gamma$ τῆς ὑπὸ ΔEZ , καὶ ἔστῶσαν
- 15 ἴσαι αἱ AB , $B\Gamma$, ΔE , EZ , $H\Theta$, ΘK εὐθεῖαι, καὶ ἐπεξεύχθῶσαν αἱ $A\Gamma$, ΔZ , HK . λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς $A\Gamma$, ΔZ , HK τρίγωνον συστήσασθαι, τουτέστιν ὅτι τῶν $A\Gamma$, ΔZ , HK δύο ὁποιαοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν.
- 20 Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, φανερόν, ὅτι καὶ τῶν $A\Gamma$, ΔZ , HK ἴσων γινομένων δυνατόν ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς $A\Gamma$, ΔZ , HK τρίγωνον συστήσασθαι. εἰ δὲ οὐ,

1. ἄρα] supra scr. m. 1 P. ὑπό — 3. δεῖξαι]: ~ V.
 1. ἤ] postea add. m. 1 P. 7. περιέχωσιν P, περιέχουσι F.
 8. Supra ἴσας add. γωνίας m. 2 B, del. m. rec.
 εὐθείας] γωνίας εὐθειῶν V. 11. εἰσι] ἔστῶσαν BFV et b
 (εσ- in ras.) 15. εὐθεῖαι] m. rec. V. 17. συστήσασθαι
 P, corr. m. 2. 18. ὅτι] corr. ex τό m. 2 F. 19. μείζους
 V. εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι Theon (BFV b). 21. εἰσι
 ἴσαι V. εἰσίν] εἰσί PBb, comp. F.; om. V. 22. γινομένων
 F, γενομένων b.

Ergo omnis¹⁾ angulus solidus planis angulis minoribus, quam sunt quattuor recti, continetur; quod erat demonstrandum.

XXII.

Si tres anguli plani sunt, quorum duo reliquo maiores sunt quoquo modo coniuncti, et eos aequales



continent rectae, fieri potest, ut ex rectis aequales rectas coniungentibus triangulus construatur.

Sint tres anguli plani $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$, quorum duo reliquo maiores sunt quoquo modo coniuncti,

$$AB\Gamma + \Delta EZ > H\Theta K, \quad \Delta EZ + H\Theta K > AB\Gamma,$$

$$H\Theta K + AB\Gamma > \Delta EZ,$$

et sit $AB = B\Gamma = \Delta E = EZ = H\Theta = \Theta K$, et ducantur $A\Gamma$, ΔZ , HK . dico, fieri posse, ut ex rectis aequalibus rectis $A\Gamma$, ΔZ , HK triangulus construatur, hoc est, rectarum $A\Gamma$, ΔZ , HK duas quaslibet reliqua maiores esse.

iam si anguli $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$ inter se aequales sunt, manifestum est, cum etiam $A\Gamma$, ΔZ , HK aequales sint [I, 4], fieri posse, ut ex rectis aequalibus rectis $A\Gamma$, ΔZ , HK triangulus construatur. sin minus, in-

1) Nam in angulis solidis, qui plus quam tribus planis angulis continentur, similiter ratiocinandum est.

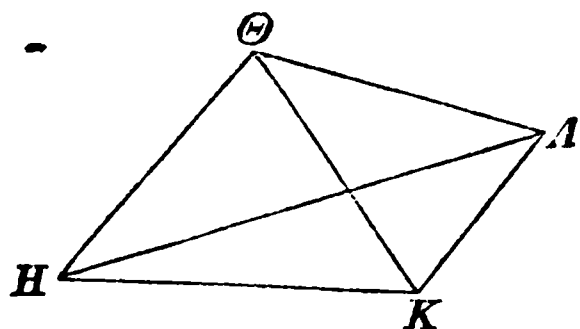
ἔστωσαν ἄνισοι, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΘK εὐθείᾳ
καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνίᾳ
ἴση ἢ ὑπὸ $K\Theta\Lambda$ · καὶ κείσθω μιᾶ τῶν $AB, B\Gamma, \Delta E,$
 $EZ, H\Theta, \Theta K$ ἴση ἢ $\Theta\Lambda$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $K\Lambda,$
5 $H\Lambda$. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ $AB, B\Gamma$ δυσὶ ταῖς $K\Theta, \Theta\Lambda$
ἴσαι εἰσὶν, καὶ γωνία ἢ πρὸς τῷ B γωνία τῇ ὑπὸ
 $K\Theta\Lambda$ ἴση, βάσις ἄρα ἢ $A\Gamma$ βάσει τῇ $K\Lambda$ ἴση. καὶ
ἐπεὶ αἱ ὑπὸ $AB\Gamma, H\Theta K$ τῆς ὑπὸ ΔEZ μείζονές
εἰσιν, ἴση δὲ ἢ ὑπὸ $AB\Gamma$ τῇ ὑπὸ $K\Theta\Lambda$, ἢ ἄρα ὑπὸ
10 $H\Theta\Lambda$ τῆς ὑπὸ ΔEZ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ
 $H\Theta, \Theta\Lambda$ δύο ταῖς $\Delta E, EZ$ ἴσαι εἰσὶν, καὶ γωνία ἢ
ὑπὸ $H\Theta\Lambda$ γωνίας τῆς ὑπὸ ΔEZ μείζων, βάσις ἄρα
ἢ $H\Lambda$ βάσεως τῆς ΔZ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ αἱ $HK,$
 $K\Lambda$ τῆς $H\Lambda$ μείζονές εἰσιν. πολλῶν ἄρα αἱ $HK, K\Lambda$
15 τῆς ΔZ μείζονές εἰσιν. ἴση δὲ ἢ $K\Lambda$ τῇ $A\Gamma$ · αἱ
 $A\Gamma, HK$ ἄρα τῆς λοιπῆς τῆς ΔZ μείζονές εἰσιν.
ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν $A\Gamma, \Delta Z$ τῆς HK
μείζονές εἰσιν, καὶ ἔτι αἱ $\Delta Z, HK$ τῆς $A\Gamma$ μείζονές
εἰσιν. δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς $A\Gamma,$
20 $\Delta Z, HK$ τρίγωνον συστήσασθαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κγ'.

Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς
λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι,

1. Post ἄνισοι add. καὶ ἔστω μείζων ἢ πρὸς τῷ E mg. m.
rec. V. 2. αὐτήν b. 3. AB] $A\Gamma$ φ. 4. ἴση ἢ $\Theta\Lambda$] supra
scr. m. 2 V; Λ in ras. B. ἐπεξεύχθωσαν — 5. καὶ] postea ins.
m. 1 P. 6. AB] in ras. m. 1 P. 7. εἰσί B V b, comp. F.
τῷ] mutat. in τό b. 8. $\Theta K\Lambda$ F. ἐστὶν ἴση B F. 9. αἱ] om.
F; uidetur supra scr. fuisse, sed euan. ΔEZ] in ras. V.
10. $\Theta H\Lambda$ F. ἐστὶ P B V, comp. F. 11. δυσὶ P. εἰσί V b,

aequales sint, et ad rectam ΘK et punctum eius Θ angulo $AB\Gamma$ aequalis construatur $\angle K\Theta A$, et ponatur ΘA cuilibet rectarum $AB, B\Gamma, \Delta E, EZ, H\Theta, \Theta K$ aequalis, et ducantur $K\Lambda, H\Lambda$. et quoniam duae $AB, B\Gamma$ duabus $K\Theta, \Theta A$ aequales sunt, et angulus



ad B positus angulo $K\Theta A$ aequalis est, erit etiam $A\Gamma = K\Lambda$ [I, 4]. et quoniam $AB\Gamma + H\Theta K > \Delta EZ$, et $AB\Gamma = K\Theta A$, erit $\angle H\Theta A > \Delta EZ$. et quoniam duae

$H\Theta, \Theta A$ duabus $\Delta E, EZ$ aequales sunt, et $\angle H\Theta A > \Delta EZ$, erit $H\Lambda > \Delta Z$ [I, 24]. uerum $HK + K\Lambda > H\Lambda$ [I, 20]. itaque multo magis erunt

$$HK + K\Lambda > \Delta Z.$$

sed $K\Lambda = A\Gamma$. itaque $A\Gamma + HK > \Delta Z$. iam similiter demonstrabimus, esse etiam $A\Gamma + \Delta Z > HK$, $\Delta Z + HK > A\Gamma$. itaque fieri potest, ut ex rectis aequalibus rectis $A\Gamma, \Delta Z, HK$ triangulus construatur; quod erat demonstrandum.

XXIII.

Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo maiores sunt quoquo modo coniuncti, angulum solidum

comp. F. 12. ὑπὸ ΔEZ] πρὸς τῷ E V, et fort. F in mg., sed euan. 13. ἐστὶ V, comp. F. 14. εἶσι PV, comp. F.
 16. Post εἶσιν una linea eras. in V. 17. ὅτι καὶ] καὶ ὅτι V. 18. εἶσι P, comp. F. καὶ ἔτι αἰ] P; αἰ δὲ Theon (BFV b); sed cfr. p. 64, 4. $\Delta Z'' HK'$ b, $HK, \Delta Z$ BFV. μείζονές εἶσιν] om. BFV. 19. εἶσι b. 20. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. V. Seq. demonstr. alt.; u. app. 22. αἰ] οἱ F.

στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς τρεῖς
τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ
 $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες
5 ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, ἔτι δὲ αἱ τρεῖς
τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων
ταῖς ὑπὸ $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$ στερεὰν γωνίαν συστή-
σασθαι.

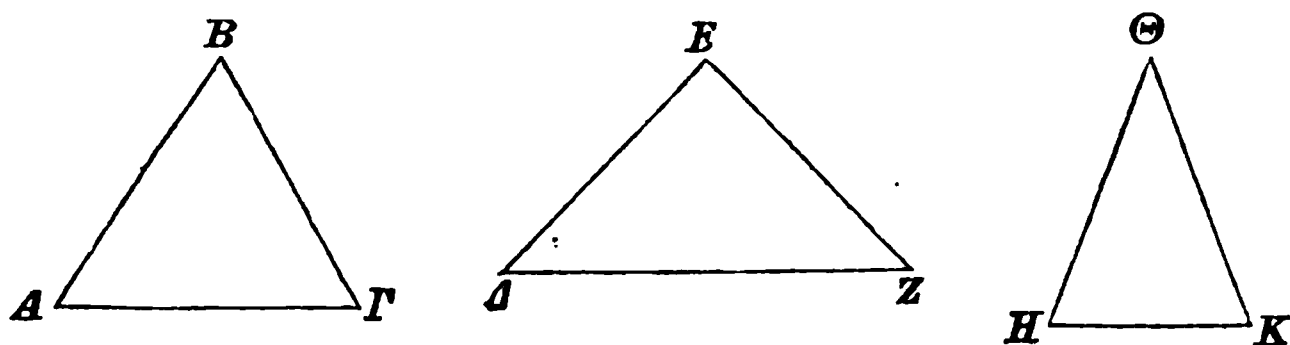
Ἀπειλήφθωσαν ἴσαι αἱ AB , $B\Gamma$, ΔE , EZ , $H\Theta$,
10 ΘK , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $A\Gamma$, ΔZ , HK . δυνατὸν
ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς $A\Gamma$, ΔZ , HK τρίγωνον
συστήσασθαι. συνεστάτω τὸ ΛMN , ὥστε ἴσην εἶναι
τὴν μὲν $A\Gamma$ τῇ ΛM , τὴν δὲ ΔZ τῇ MN , καὶ ἔτι
τὴν HK τῇ $N\Lambda$, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΛMN
15 τρίγωνον κύκλος ὁ ΛMN , καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέν-
τρον καὶ ἔστω τὸ Ξ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $\Lambda \Xi$, $M \Xi$,
 $N \Xi$. λέγω, ὅτι ἡ AB μείζων ἐστὶ τῆς $\Lambda \Xi$. εἰ γὰρ μή,
ἦτοι ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Lambda \Xi$ ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον
ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Lambda \Xi$, ἀλλὰ ἡ μὲν AB
20 τῇ $B\Gamma$ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ $\Xi \Lambda$ τῇ ΞM , δύο δὴ αἱ AB ,
 $B\Gamma$ δύο ταῖς $\Lambda \Xi$, ΞM ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω· καὶ

1. στερεὰ γωνία F, sed corr. συστήσασθαι γωνίαν V. συν-
στήσασθαι P, corr. m. 2. 2. ἐλάττονας P. Post εἶναι add.
διὰ τὸ καὶ πᾶσαν στερεὰν γωνίαν ὑπὸ τριῶν (φ) ἢ τεσσάρων
ὀρθῶν γωνιῶν περιέχεσθαι F. 4. ὧν αἱ] γωνίαι F, ὧν αἱ
add. m. 2. 6. ἐλάττονες P, ἐλάσσονες FV. Dein add. ἔστω-
σαν F. 7. συστήσασθαι P, corr. m. 2. 9. $B\Gamma$] $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$
b. ΔE] corr. ex ΓE m. 1 b. 11. ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων
ταῖς] δὴ ἐκ τριῶν τῶν b; mg. γρ. ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων.
12. συστήσασθαι P, corr. m. 2. 13. ΛM] ΛB φ. 14. τῇ]
supra scr. V. $N\Lambda$] ΛN BFV. 15. Post κέντρον add.
ἔσται δὴ ἦτοι ἐντὸς τοῦ ΛMN τριγώνου ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευ-
ρῶν αὐτοῦ ἢ ἐκτός. ἔστω πρότερον ἐντὸς BV. 17. ἐστί] ἐστὶν

construere; oportet igitur¹⁾, tres angulos illos quattuor rectis minores esse [prop. XXI].

Sint dati tres anguli plani $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$, quorum duo reliquo maiores sint quoquo modo coniuncti, et praeterea tres illi quattuor rectis minores. oportet igitur ex angulis aequalibus angulis $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$ angulum solidum construere.

abscindantur inter se aequales AB , $B\Gamma$, ΔE , EZ , $H\Theta$, ΘK , et ducantur $A\Gamma$, ΔZ , HK . fieri igitur



potest, ut ex rectis aequalibus rectis $A\Gamma$, ΔZ , HK triangulus construatur [prop. XXII]. construatur ΔMN , ita ut sit $A\Gamma = \Delta M$, $\Delta Z = MN$, $HK = N\Delta$, et circum triangulum ΔMN circulus describatur ΔMN [IV, 5], et sumatur centrum eius et sit Ξ , et ducantur $\Delta \Xi$, $M\Xi$, $N\Xi$. dico, esse $AB > \Delta \Xi$; nam si minus, erit aut $AB = \Delta \Xi$ aut $AB < \Delta \Xi$. sit prius $AB = \Delta \Xi$. et quoniam $AB = \Delta \Xi$, et $AB = B\Gamma$, $\Xi \Delta = \Xi M$, duo latera AB , $B\Gamma$ duobus lateribus $\Delta \Xi$, ΞM alterum alteri aequalia sunt; et supposuimus,

1) Nam $\delta\eta$ cum omnibus codicibus retinendum est. idem I, 22 p. 52, 17 pro $\delta\acute{\epsilon}$ cum codicibus restituendum est. nam etiam apud Eutocium in Apollonium p. 10 in codd. $\delta\eta$ scribi pro $\delta\acute{\epsilon}$, nunc cognoui.

P. $\tau\eta\varsigma$] corr. ex $\tau\eta\iota$ B. 18. $\iota\sigma\eta$] supra scr. m. 1 V.
19. $\acute{\alpha}\lambda\lambda'$ BF. 20. $\Xi\Delta$] $\Delta\Xi$ Bb. 21. $\delta\acute{\upsilon}\omicron$] $\delta\upsilon\sigma\iota$ b.

βάσις ἢ $ΑΓ$ βάσει τῆ $ΑΜ$ ὑπόκειται ἴση· γωνία ἄρα
 ἢ ὑπὸ $ΑΒΓ$ γωνία τῆ ὑπὸ $ΑΞΜ$ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ
 αὐτὰ δὴ καὶ ἢ μὲν ὑπὸ $ΔΕΖ$ τῆ ὑπὸ $ΜΞΝ$ ἐστὶν
 ἴση, καὶ ἔτι ἢ ὑπὸ $ΗΘΚ$ τῆ ὑπὸ $ΝΞΑ$ · αἱ ἄρα τρεῖς
 5 αἱ ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, $ΗΘΚ$ γωνίαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ
 $ΑΞΜ$, $ΜΞΝ$, $ΝΞΑ$ εἰσιν ἴσαι. ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ
 ὑπὸ $ΑΞΜ$, $ΜΞΝ$, $ΝΞΑ$ τέτταρσιν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι·
 καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, $ΗΘΚ$ τέτταρσιν
 ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὑπόκεινται δὲ καὶ τεσσάρων ὀρ-
 10 θῶν ἐλάσσονες· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἢ $ΑΒ$ τῆ $ΑΞ$
 ἴση ἐστίν. λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἢ $ΑΒ$
 τῆς $ΑΞ$. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ κείσθω τῆ μὲν
 $ΑΒ$ ἴση ἢ $ΞΟ$, τῆ δὲ $ΒΓ$ ἴση ἢ $ΞΠ$, καὶ ἐπεξεύχθω
 ἢ $ΟΠ$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ $ΑΒ$ τῆ $ΒΓ$, ἴση ἐστὶ
 15 καὶ ἢ $ΞΟ$ τῆ $ΞΠ$ · ὥστε καὶ λοιπὴ ἢ $ΑΟ$ τῆ $ΠΜ$
 ἐστὶν ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἢ $ΑΜ$ τῆ $ΟΠ$, καὶ
 ἰσογώνιον τὸ $ΑΜΞ$ τῷ $ΟΠΞ$ · ἐστὶν ἄρα ὡς ἢ $ΞΑ$
 πρὸς $ΑΜ$, οὕτως ἢ $ΞΟ$ πρὸς $ΟΠ$ · ἐναλλάξ ὡς ἢ $ΑΞ$
 πρὸς $ΞΟ$, οὕτως ἢ $ΑΜ$ πρὸς $ΟΠ$. μείζων δὲ ἢ $ΑΞ$
 20 τῆς $ΞΟ$ · μείζων ἄρα καὶ ἢ $ΑΜ$ τῆς $ΟΠ$. ἀλλὰ ἢ
 $ΑΜ$ κείται τῆ $ΑΓ$ ἴση· καὶ ἢ $ΑΓ$ ἄρα τῆς $ΟΠ$ μεί-

2. $ΑΞΜ$] supra ras. m. 2 B. 3. $ΜΞΝ$] $ΞΝ$ in ras.
 m. 1 P V. 5. τρισί] ἴσαι εἰσὶ τρισί V. 6. $ΜΞΝ$] corr. ex
 $ΜΝΞ$ V, $ΜΝΞ$ b. $ΝΞΑ$ — 7. $ΜΞΝ$] mg. m. 2 B.
 6. εἰσιν ἴσαι] om. V φ, ἴσαι εἰσίν B b. ἀλλ' b. αἱ] (alt.)
 supra m. 2 F. 7. τέτταρσιν B F V b. ἴσαι εἰσίν B V. 8. καὶ
 αἱ — 9. εἰσίν] mg. m. 2 V, euan. in F. 8. ἄρα αἱ] αἱ ἄρα
 P. τέσσαρσιν V, τέτταρσι B F b. 9. εἰσιν ἴσαι B b. 11. ἐστὶν
 ἴση V. 13. ἢ] (prius) supra scr. V. 14. ἐστὶ] ἐστίν P B, δέ
 euan. V. 15. $ΟΑ$ B. λοιπὴ τῆ Theon (B F V b). $ΠΜ$]
 in ras. V, $ΜΠ$ F. 16. ἐστὶν] in ras. V. ἐστίν] om.
 V. $ΑΜ$] $Α$ in ras. m. 1 B. 17. Post $ΑΜΞ$ add. τρίγω-
 νον comp. b. $ΞΑ$] $ΑΞ$ F, corr. m. 2. 18. τὴν $ΑΜ$, $Μ$

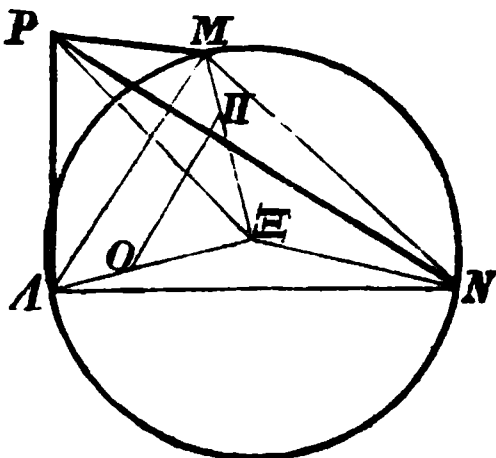
esse $AG = AM$. itaque erit $\angle AB\Gamma = \angle \Xi M$ [I, 8].
eadem de causa etiam

$$\angle \Delta EZ = \angle \Xi N, \angle H\Theta K = \angle \Xi A.$$

ergo

$$\angle AB\Gamma + \angle \Delta EZ + \angle H\Theta K = \angle \angle \Xi M + \angle \Xi N + \angle \Xi A.$$

sed $\angle \angle \Xi M + \angle \Xi N + \angle \Xi A$ quattuor rectis aequales sunt.¹⁾ quare etiam $\angle AB\Gamma + \angle \Delta EZ + \angle H\Theta K$ quattuor



rectis aequales sunt. uerum supposuimus, eos quattuor rectis minores esse; quod absurdum est. itaque non erit $AB = A\Xi$. iam dico, ne minorem quidem esse AB quam $A\Xi$. nam si fieri potest, sit minor. et ponatur $\Xi O = AB$, $\Xi \Pi = B\Gamma$, et ducatur $O\Pi$. et quoniam $AB = B\Gamma$, erit etiam $\Xi O = \Xi \Pi$. quare etiam $AO = \Pi M$. ergo AM rectae $O\Pi$ parallela est [VI, 2], et $\angle M\Xi$ triangulo $O\Pi\Xi$ aequiangulus est [I, 29]. itaque erit $\Xi A : AM = \Xi O : O\Pi$ [VI, 4]. permutando $A\Xi : \Xi O = AM : O\Pi$ [V, 16]. uerum $A\Xi > \Xi O$. itaque etiam $AM > O\Pi$ [V, 14]. sed posuimus $AM = AG$. itaque etiam $AG > O\Pi$. quo-

1) Hoc nusquam demonstratum est, sed facillime ex I, 13 concluditur; cfr. ad I, 15 coroll.

in ras. V. $\tau\eta\nu$ $O\Pi$ V. $\acute{\omega}\varsigma$] $\acute{\alpha}\rho\alpha$ $\acute{\omega}\varsigma$ V (F?). $\grave{\eta}$] ins.
m. 2 V. 20. $\kappa\alpha\iota$] om. V. $\grave{\eta}$] ins. m. 2 F. $\acute{\alpha}\lambda\lambda'$ BF.

ζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο αἰ AB , $BΓ$ δυσὶ ταῖς $OΞ$,
 $ΞΠ$ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἢ $ΑΓ$ βάσεως τῆς $OΠ$ μεί-
 ζων ἐστίν, γωνία ἄρα ἢ ὑπὸ $ΑΒΓ$ γωνίας τῆς ὑπὸ
 $OΞΠ$ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἢ
 5 μὲν ὑπὸ $ΔΕΖ$ τῆς ὑπὸ $ΜΞΝ$ μείζων ἐστίν, ἢ δὲ
 ὑπὸ $ΗΘΚ$ τῆς ὑπὸ $ΝΞΑ$. αἰ ἄρα τρεῖς γωνίαι αἰ
 ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, $ΗΘΚ$ τριῶν τῶν ὑπὸ $ΑΞΜ$, $ΜΞΝ$,
 $ΝΞΑ$ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἰ ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$,
 $ΗΘΚ$ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες ὑπόκεινται· πολλῶ
 10 ἄρα αἰ ὑπὸ $ΑΞΜ$, $ΜΞΝ$, $ΝΞΑ$ τεσσάρων ὀρθῶν
 ἐλάσσονές εἰσιν. ἀλλὰ καὶ ἴσαι· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον.
 οὐκ ἄρα ἢ $ΑΒ$ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς $ΑΞ$. ἐδείχθη δέ,
 ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἢ $ΑΒ$ τῆς $ΑΞ$. ἀνεστάτω
 δὴ ἀπὸ τοῦ $Ξ$ σημείου τῶ τοῦ $ΑΜΝ$ κύκλου ἐπιπέδῳ
 15 πρὸς ὀρθὰς ἢ $ΞΡ$, καὶ ᾧ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$
 τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΞ$, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ
 ἀπὸ τῆς $ΞΡ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἰ $ΡΑ$, $ΡΜ$, $ΡΝ$.
 καὶ ἐπεὶ ἢ $ΡΞ$ ὀρθή ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ $ΑΜΝ$ κύκλου
 ἐπίπεδον, καὶ πρὸς ἐκάστην ἄρα τῶν $ΑΞ$, $ΜΞ$, $ΝΞ$
 20 ὀρθή ἐστὶν ἢ $ΡΞ$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ $ΑΞ$ τῇ $ΞΜ$,
 κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἢ $ΞΡ$, βάσις ἄρα ἢ $ΡΑ$
 βάσει τῇ $ΡΜ$ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἢ $ΡΝ$
 ἑκατέρω τῶν $ΡΑ$, $ΡΜ$ ἐστὶν ἴση· αἰ τρεῖς ἄρα αἰ $ΡΑ$,
 $ΡΜ$, $ΡΝ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ᾧ μείζον
 25 ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΞ$, ἐκείνῳ ἴσον
 ὑπόκειται τὸ ἀπὸ τῆς $ΞΡ$, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ ἴσον

1. Post δύο add. εὐθεῖαι FV, B supra scr. m. 2. δυσί] δύο b(F?). 2. εἰσί Vb, comp. F. 3. ἐστὶ BVb, comp. F.
 5. ΜΞΝ] Ξ in ras. m. 1 P. 6. ὑπό] (prius) om. V, supra scr. m. 2 B. 7. ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ P. τριῶν — 9. ΗΘΚ] mg. m. 2 V. 8. ἀλλ' FVb. 9. ἐλάττονες

niam igitur duo latera AB , $B\Gamma$ duobus $OΞ$, $ΞΠ$ aequalia sunt, et $A\Gamma > OΠ$, erit $\angle AB\Gamma > OΞΠ$ [I, 25]. similiter demonstrabimus, esse etiam $\angle ΔEZ > MΞN$, $\angle HΘK > NΞΛ$. itaque $AB\Gamma + ΔEZ + HΘK > ΔΞM + MΞN + NΞΛ$. uerum supposuimus, esse

$$AB\Gamma + ΔEZ + HΘK$$

quattuor rectis minores. multo igitur magis $ΔΞM + MΞN + NΞΛ$ quattuor rectis minores sunt. sed iidem quattuor rectis aequales sunt; quod absurdum est. itaque AB recta $ΔΞ$ minor non est. et demonstratum est, eam ne aequalem quidem esse. ergo $AB > ΔΞ$. erigatur igitur in puncto $Ξ$ ad planum circuli AMN perpendicularis $ΞP$ [prop. XII]. et sit $ΞP^2 = AB^2 \div ΔΞ^2$, et ducantur $PΔ$, PM , PN . et quoniam $PΞ$ ad planum circuli AMN perpendicularis est, $PΞ$ ad singulas rectas $ΔΞ$, $MΞ$, $NΞ$ perpendicularis est. et quoniam $ΔΞ = ΞM$, et $ΞP$ communis est et perpendicularis, erit

$$PΔ = PM \text{ [I, 4].}$$

eadem de causa erit etiam $PN = PΔ = PM$. itaque $PΔ$, PM , PN inter se aequales sunt. et quoniam suppositum est, esse $ΞP^2 = AB^2 \div ΔΞ^2$, erit $AB^2 = ΔΞ^2 + ΞP^2$. uerum

P. 10. $MΞN$] $ΞN$ in ras. m. 1 P. 11. $είσιν$ $ελάσσονες$
P. $έστιν$] om. V. 12. $έστιν$ P. 13. $άρα$] $έστιν$ $άρα$ F.
 $άνεστάτω$] bis b; litt. ν in ras. m. 1 P. 14. $κύκλου$] om. φ .
15. $έστιν$ P. 16. $τό$] corr. ex $\tau\tilde{\omega}$ m. 2 F.
17. PN] supra scr. V. 18. $PΞ$] $ΞP$ B. $έστιν$ P.
 $έπίπεδον$ $κύκλου$ F. 20. $ΞM$] $MΞ$ corr. ex $NΞ$ m. 1 b.
22. PN] N e corr. V. 23. $ίση$ $έστιν$ V. 24. $είσί$ b, corr. ex $είσιν$ V, comp. F. 26. $τό$] (prius) corr. ex $\tau\tilde{\omega}$ F.

ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΛΞ$, $ΞΡ$. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν $ΛΞ$,
 $ΞΡ$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΛΡ$. ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ $ΛΞΡ$.
τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΡΑ$. ἴση
ἄρα ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΡΑ$. ἀλλὰ τῇ μὲν $ΑΒ$ ἴση ἐστὶν ἐκάστη
5 τῶν $ΒΓ$, $ΔΕ$, $ΕΖ$, $ΗΘ$, $ΘΚ$, τῇ δὲ $ΡΑ$ ἴση ἐκατέρω
τῶν $ΡΜ$, $ΡΝ$. ἐκάστη ἄρα τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΔΕ$, $ΕΖ$,
 $ΗΘ$, $ΘΚ$ ἐκάστη τῶν $ΡΑ$, $ΡΜ$, $ΡΝ$ ἴση ἐστίν. καὶ
ἐπεὶ δύο αἱ $ΛΡ$, $ΡΜ$ δυσὶ ταῖς $ΑΒ$, $ΒΓ$ ἴσαι εἰσίν,
καὶ βάσις ἡ $ΛΜ$ βάσει τῇ $ΑΓ$ ὑπόκειται ἴση, γωνία
10 ἄρα ἡ ὑπὸ $ΛΡΜ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΑΒΓ$ ἐστὶν ἴση. διὰ
τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ $ΜΡΝ$ τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$ ἐστὶν
ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ $ΛΡΝ$ τῇ ὑπὸ $ΗΘΚ$.

Ἐκ τριῶν ἄρα γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ $ΛΡΜ$,
 $ΜΡΝ$, $ΛΡΝ$, αἱ εἰσὶν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις ταῖς
15 ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, $ΗΘΚ$, στερεὰ γωνία συνέσταται
ἡ πρὸς τῷ $Ρ$ περιεχομένη ὑπὸ τῶν $ΛΡΜ$, $ΜΡΝ$,
 $ΛΡΝ$ γωνιῶν. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Λήμμα.

Ὅν δὲ τρόπον, ᾧ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τοῦ
20 ἀπὸ τῆς $ΛΞ$, ἐκείνω ἴσον λαβεῖν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΞΡ$,
δειξομεν οὕτως. ἐκκείσθωσαν αἱ $ΑΒ$, $ΛΞ$ εὐθεῖαι,

1. τοῖς δέ — 2. $ΛΡ$] mg. m. 1 F. 3. $ΡΑ$] e corr. V.
4. $ΡΑ$] corr. ex $ΛΡ$ V. 5. $ΘΚ$] corr. ex $ΗΚ$ m. 1 B.
Ante $ΡΑ$ del. $Α$ m. 1 P. 6. Post $ΡΝ$ ras. 3 litt. V.
7. ἐστίν] om. V. 8. $ΛΡ$] $ΡΑ$ F. εἰσί Vb, comp. F.
9. Ante γωνία ins. καί m. 2 V. 10. γωνία] om. B; post
ins. F. 11. $ΜΝΡ$ F. ἴση ἐστίν FV. 14. τρισίν B.
15. συνίσταται FVb. 16. ἡ] om. φ. τῷ] mut. in
τό b, τό φ. τῶν] τῶν ὑπό b. 17. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι] om.
V. ποιῆσαι] δεῖξαι Pb, γρ. ποιῆσαι mg. b. Seq. duo casus
singulares cum demonstrationibus, u. app. Hoc lemma in
b et in textu (b) et in mg. a m. 1 (β) reperitur, add. γρ.

$$AP^2 = AE^2 + EP^2 \text{ [I, 47];}$$

nam $\angle AEP$ rectus est. quare $AB^2 = PA^2$. itaque $AB = PA$. sed

$$AB = BG = AE = EZ = H\Theta = \Theta K \quad \text{et} \\ PA = PM = PN.$$

itaque

$$AB = BG = AE = EZ = H\Theta = \Theta K = PA = PM \\ = PN.$$

et quoniam duae rectae AP , PM duabus rectis AB , BG aequales sunt, et suppositum est, esse $AM = AG$, erit etiam $\angle APM = ABG$ [I, 8]. eadem de causa erit etiam $\angle MPN = AEZ$, $\angle APN = H\Theta K$.

Ergo ex tribus angulis planis APM , MPN , APN , qui tribus datis angulis ABG , AEZ , $H\Theta K$ aequales sunt, solidus angulus constructus est, qui ad P positus est angulis APM , MPN , APN comprehensus; quod oportebat fieri.¹⁾

Corollarium.

Quomodo autem fieri possit, ut sumatur $EP^2 = AB^2 \div AE^2$, sic demonstrabimus.

exponentur rectae AB , AE , et maior sit AB , et

1) Quae in codd. sequuntur demonstrationes casuum singularium, ab Euclide profectae esse non possunt. nam praeparatio p. 62, 14 (u. adn. crit.) omnino necessaria, si tres casus separantur, manifesto interpolata est, neque post clausulam legitimam p. 68, 13—17 plura addi possunt. praeterea demonstrationes ipsae uerbosiores sunt neque apud Campanum inueniuntur, neque consuetudo fert Euclidis, ut ad omnes casus respiciatur.

οὕτως.

sed euan.

18. λήμμα] om. codd.

21. δείξωμεν P.

20. τό] om. F; add. m. 2,

καὶ ἔστω μείζων ἢ AB , καὶ γεγράφθω ἐπ' αὐτῆς ἡμι-
 κύκλιον τὸ $AB\Gamma$, καὶ εἰς τὸ $AB\Gamma$ ἡμικύκλιον ἐνηρ-
 μόσθω τῇ $A\Xi$ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς AB δια-
 μέτρου ἴση ἢ AG , καὶ ἐπεξεύχθω ἢ GB . ἐπεὶ οὖν
 5 ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ AGB γωνία ἐστὶν ἢ ὑπὲρ AGB , ὀρθή
 ἄρα ἐστὶν ἢ ὑπὸ AGB . τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AB ἴσον
 ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AG , GB . ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς AB
 τοῦ ἀπὸ τῆς AG μείζον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς GB . ἴση
 δὲ ἢ AG τῇ $A\Xi$. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς
 10 $A\Xi$ μείζον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς GB . ἐὰν οὖν τῇ $B\Gamma$
 ἴσην τὴν ΞP ἀπολάβωμεν, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ
 ἀπὸ τῆς $A\Xi$ μείζον τῷ ἀπὸ τῆς ΞP ὅπερ προέκειτο
 ποιῆσαι.

κδ'.

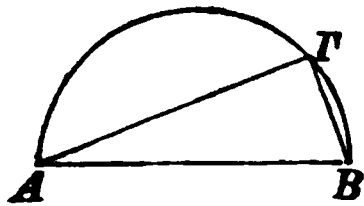
15 Ἐὰν στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων
 περιέχῃται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα
 τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν.

Στερεὸν γὰρ τὸ $\Gamma\Delta\Theta H$ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέ-
 δων περιεχέσθω τῶν AG , HZ , $A\Theta$, ΔZ , BZ , AE .
 20 λέγω, ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ
 παραλληλόγραμμά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ BH , GE
 ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ AG τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν το-

1
 2. AGB b. εἰς — ἡμικύκλιον] om. b. $AB\Gamma$
 AB P. ἡμικύκλιον] © β. ἡρμόσθω β. 3. μὴ μείζονι
 — διαμέτρου] om. Bb. AB] m. 2 P. 5. τῷ] corr. ex τό m.
 1 F. τῷ AGB γωνία] om. b. AGB] B ins. m. 1 P, B in
 ras. F. ὑπό] om. b. ὀρθή — 6. AGB] γωνία ὀρθή ἐστὶν
 b. 7. τῶν] τῆς b. GB] supra scr. m. rec. P. ὥστε]
 om. b. AB] AB ἄρα b. 8. μείζον ἐστὶ] ὑπερέχει P.
 9. τῇ] postea ins. V. τὸ ἄρα] ὥστε τό P; τό b. AB] AB
 ἄρα b, AB μείζον ἐστὶ P. 10. μείζον ἐστὶ] om. P. τῆς]
 m. 2 F. ἐὰν — 13. ποιῆσαι] om. b. 10. $B\Gamma$] corr. ex

in ea semicirculus describatur $AB\Gamma$, et in semicirculo $AB\Gamma$ recta $A\Gamma$ aptetur [IV, 1] rectae $A\Xi$ aequalis, quae maior non est diametro AB , et ducatur ΓB .



iam quoniam in semicirculo $AB\Gamma$ positus est $\angle A\Gamma B$, rectus erit $\angle A\Gamma B$ [III, 31]. itaque $AB^2 = A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ [I, 47]. quare erit $AB^2 \div A\Gamma^2 = \Gamma B^2$. uerum $A\Gamma = A\Xi$. itaque $\Gamma B^2 = AB^2 \div A\Xi^2$.

ergo si sumpserimus $\Xi P = B\Gamma$, erit $\Xi P^2 = AB^2 \div A\Xi^2$; quod oportebat fieri.

XXIV.

Si solidum planis parallelis comprehenditur, plana eius inter se opposita aequalia sunt et parallelogramma.¹⁾

Nam solidum $\Gamma\Delta\Theta H$ planis parallelis comprehendatur $A\Gamma$, HZ , $A\Theta$, ΔZ , BZ , AE . dico, plana eius inter se opposita aequalia esse et parallelogramma.

nam quoniam duo plana parallela BH , ΓE plano $A\Gamma$ secantur, communes eorum sectiones inter se

1) Haec propositio parum diligenter exposita est; intelligitur enim solidum sex planis parallelis comprehensum neque pluribus, et plana, quamquam omnia parallelogramma sunt, non omnia aequalia sunt, sed opposita sola inter se aequalia.

ΓB V, ΓB BF β . 11. τό] τῷ β . AB μείζον P. 12. μείζον] om. P. $P\Xi$ P. ὅπερ — 13. ποιῆσαι] om. V.
 14. κδ'] corr. ex κη' F. 17. παραλληλόγραμμα] παράλληλα b, mg. m. 1 γρ. παραλληλόγραμμα (comp.). -γραμμά ἐστι φ, m. 2 add. V. ἐστι Bb. 18. $\Gamma\Delta\Theta H$] corr. ex $\Gamma\Delta H\Theta$ V, $\Gamma\Delta H\Theta$ b. 19. ZB BF. 21. παράλληλά b et seq. ras. F. -γραμμά ἐστιν supra m. 2 V. 22. Post ἐπίπεδα ins. ὅμοια m. 2 F. παράλληλα] supra ras. m. 2 V.
 23. τέμνονται V.

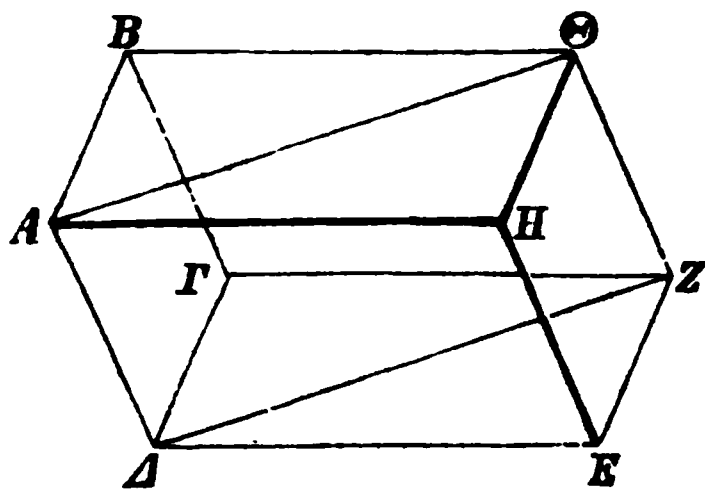
μαὶ παράλληλοί εἰσιν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB
 τῆ $\Delta\Gamma$. πάλιν, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ BZ ,
 AE ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ AG τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν
 5 τομαὶ παράλληλοί εἰσιν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $B\Gamma$
 τῆ $A\Delta$. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ AB τῆ $\Delta\Gamma$ παράλληλος·
 παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ AG . ὁμοίως δὲ δει-
 ξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν ΔZ , ZH , HB , BZ , AE
 παραλληλόγραμμόν ἐστίν.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ $A\Theta$, ΔZ . καὶ ἐπεὶ παράλληλός
 10 ἐστὶν ἡ μὲν AB τῆ $\Delta\Gamma$, ἡ δὲ $B\Theta$ τῆ ΓZ , δύο δὴ
 αἱ AB , $B\Theta$ ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας
 τὰς $\Delta\Gamma$, ΓZ ἀπτομένας ἀλλήλων εἰσὶν οὐκ ἐν τῷ
 αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἴσας ἄρα γωνίας περιέξουσιν· ἴση ἄρα
 ἡ ὑπὸ $AB\Theta$ γωνία τῆ ὑπὸ $\Delta\Gamma Z$. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ
 15 AB , $B\Theta$ δυσὶ ταῖς $\Delta\Gamma$, ΓZ ἴσαι εἰσὶν, καὶ γωνία ἡ
 ὑπὸ $AB\Theta$ γωνία τῆ ὑπὸ $\Delta\Gamma Z$ ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα
 ἡ $A\Theta$ βάσει τῆ ΔZ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ $AB\Theta$ τρίγωνον
 τῷ $\Delta\Gamma Z$ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν $AB\Theta$
 20 διπλάσιον τὸ BH παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ $\Delta\Gamma Z$
 διπλάσιον τὸ ΓE παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα τὸ BH
 παραλληλόγραμμον τῷ ΓE παραλληλογράμμῳ. ὁμοίως
 δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ τὸ μὲν AG τῷ HZ ἐστὶν ἴσον,
 τὸ δὲ AE τῷ BZ .

Ἐὰν ἄρα στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περι-
 25 ἔχεται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ
 παραλληλόγραμμά ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. εἰσί V b, comp. F. 2. $\Gamma\Delta B$. παράλληλα] om. V.
 BZ] supra scr. Γ b; corr. ex $B\Gamma$ V. 3. τέμνεται] corr. ex
 τέμνονται b. 4. εἰσί V b, comp. F. $B\Gamma$] corr. ex $A\Gamma$ b; B
 in ras. B. 9. ἐστὶ παράλληλος V b. 10. $\Delta\Gamma$] corr. ex $\Gamma\Delta$ V,
 $\Gamma\Delta$ b. 13. περιέχουσιν BF (in F corr. m. 2). 15. εἰσί V b,

parallelae sunt [prop. XVI]. itaque AB rectae $\Delta\Gamma$ parallela est. rursus quoniam duo plana parallela BZ , AE plano $A\Gamma$ secantur, communes eorum sectiones



parallelae sunt. itaque $B\Gamma$ rectae $A\Delta$ parallela est. sed demonstratum est, esse etiam AB rectae $\Delta\Gamma$ parallelam. itaque $A\Gamma$ parallelogrammum est. similiter demonstrabimus, etiam singula ΔZ ,

ZH , HB , BZ , AE parallelogramma esse.

ducantur $A\Theta$, ΔZ . et quoniam AB rectae $\Delta\Gamma$, $B\Theta$ rectae ΓZ parallelae sunt, duae rectae AB , $B\Theta$ inter se tangentibus duabus rectis $\Delta\Gamma$, ΓZ inter se tangentibus parallelae sunt non in eodem plano positae. aequales igitur comprehendunt angulos [prop. XV]. itaque $\angle AB\Theta = \Delta\Gamma Z$. et quoniam duae rectae AB , $B\Theta$ duabus $\Delta\Gamma$, ΓZ aequales sunt [I, 34], et $\angle AB\Theta = \Delta\Gamma Z$, erit etiam $A\Theta = \Delta Z$, et $\Delta AB\Theta = \Delta\Gamma Z$ [I, 4]. et $BH = 2AB\Theta$, $\Gamma E = 2\Delta\Gamma Z$ [I, 34]. itaque $BH = \Gamma E$. similiter demonstrabimus, esse etiam $A\Gamma = HZ$, $AE = BZ$.

Ergo si solidum planis parallelis comprehenditur, plana eius inter se opposita aequalia sunt et parallelogramma; quod erat demonstrandum.

comp. F. 17. ἴση ἐστὶ BV b. 18. ἴσον ἐστίν· καὶ ἐστι] om. F, hab. φ. ἐστίν] ἐστὶ PBV, comp. b. 20. BH] φ seq. lac. 4 litt. 21. τῷ ΓE παραλληλογράμῳ] om. F. 22. HZ] mut. in HΞ b. 24. ἐπιπέδων — 26. δεῖξαι] καὶ τα ἐξῆς V. 26. παραλληλόγραμμα] παράλληλα b, corr. mg. m. 1.

κε'.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ
 τμηθῆ παραλλήλῳ ἔντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπι-
 πέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕ-
 5 τως τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ $ΑΒΓΔ$ ἐπι-
 πέδῳ τῷ ZH τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναν-
 τίον ἐπιπέδοις τοῖς PA , $ΔΘ$. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ
 $AEZΦ$ βάσις πρὸς τὴν $EΘΓZ$ βάσιν, οὕτως τὸ
 10 $ABZΓ$ στερεὸν πρὸς τὸ $EΗΓΔ$ στερεόν.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ $ΑΘ$ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ
 κείσθωσαν τῇ μὲν AE ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ AK ,
 KA , τῇ δὲ $EΘ$ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ $ΘM$, MN , καὶ
 συμπληρώσθω τὰ $ΛO$, $KΦ$, $ΘX$, $MΣ$ παραλληλό-
 15 γραμμα καὶ τὰ $ΔΠ$, KP , $ΔM$, MT στερεά. καὶ ἐπεὶ
 ἴσαι εἰσὶν αἱ AK , KA , AE εὐθεῖαι ἀλλήλαις, ἴσα
 ἐστὶ καὶ τὰ μὲν $ΛO$, $KΦ$, AZ παραλληλόγραμμα
 ἀλλήλοις, τὰ δὲ $KΞ$, KB , AH ἀλλήλοις καὶ ἔτι τὰ
 $ΛΨ$, $KΠ$, AP ἀλλήλοις ἀπεναντίον γάρ. διὰ τὰ
 20 αὐτὰ δὴ καὶ τὰ μὲν $EΓ$, $ΘX$, $MΣ$ παραλληλόγραμμα
 ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις, τὰ δὲ $ΘH$, $ΘI$, IN ἴσα εἰσὶν ἀλ-
 λήλοις, καὶ ἔτι τὰ $ΔΘ$, $MΩ$, NT τρία ἄρα ἐπίπεδα
 τῶν $ΔΠ$, KP , AT στερεῶν τρισὶν ἐπιπέδοις ἐστὶν
 ἴσα. ἀλλὰ τὰ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἐστὶν ἴσα.

1. κε'] κθ' F. 2. παράλληλον ἐπίπεδον F b.
 4. οὕτω B. 6. παράλληλον ἐπίπεδον F b. τῷ b.
 10. $ABZΓ$] Z in ras. m. 1 B. 14. $ΛO$] in ras. F; corr. ex
 $ΔΘ$ m. 1 b. 15. $ΔΠ$] Δ corr. ex Δ b. $ΔM$] $M'' Δ'$
 b. MT] $NT P$, $MΓ$ b. 19. AP] A e corr. b. 21. τὰ
 δέ — ἀλλήλοις] mg. m. 2 euan. F. $ΘI$] $ΘP$ e corr. b.
 IN] $I''N$, I corr. ex P b. 23. ἐστίν] εἰσὶν P. 24. τρι-
 σὶν P. ἐστίν] mut. in εἰσὶν b, εἰσὶν F.

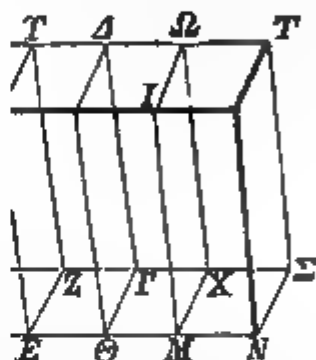
XXV.

Si solidum parallelepipedum¹⁾ plano secatur planis inter se oppositis parallelo, erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Nam solidum parallelepipedum $AB\Gamma\Delta$ secetur plano ZH planis $PA, \Delta\Theta$ parallelo. dico, esse

$$AEZ\Phi : E\Theta\Gamma Z = ABZT : EH\Gamma\Delta.$$

producatur enim $A\Theta$ in utramque partem, et ponantur quotlibet rectae AK, KA rectae AE aequales,



rectae autem $E\Theta$ aequales quotlibet $\Theta M, MN$, et expleantur parallelogramma $AO, K\Phi, \Theta X, M\Sigma$ et solida $A\Pi, KP, \Delta M, MT$. et quoniam $AK = KA = AE$, erit $AO = K\Phi = AZ$, $K\Xi = KB = AH^2)$ et praeterea $A\Psi = K\Pi = AP$; nam inter se opposita sunt [prop. XXIV]. eadem de causa erit etiam $E\Gamma = \Theta X = M\Sigma$, $\Theta H = \Theta I = IN$, $\Delta\Theta = M\Omega = NT$. itaque solidorum $A\Pi, KP, AT$ tria plana tribus planis aequalia sunt. uerum tria illa plana tribus,

1) Sicut in primo libro (prop. 34) post propositionem praecedenti correspondentem sine definitione infertur uocabulum *παράλληλόγραμμον*, ita hic *παράλληλεπίπεδον* usurpatur, nomen per se perspicuum etiam nulla praemissa definitione.

2) Nam et angulos et latera aequalia habent. ergo etiam similia sunt.

τὰ ἄρα τρία στερεὰ τὰ $\Lambda\Pi$, $K\rho$, $A\Gamma$ ἴσα ἀλλήλοις
 ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ τρία στερεὰ τὰ $E\Delta$,
 ΔM , $M\Gamma$ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστίν
 ἢ ΛZ βάσις τῆς AZ βάσεως, τοσανταπλάσιόν ἐστι
 5 καὶ τὸ $\Lambda\Gamma$ στερεὸν τοῦ $A\Gamma$ στερεοῦ. διὰ τὰ αὐτὰ
 δὴ ὁσαπλασίων ἐστίν ἢ NZ βάσις τῆς $Z\Theta$ βάσεως,
 τοσανταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ $N\Gamma$ στερεὸν τοῦ $\Theta\Gamma$ στε-
 ρεοῦ. καὶ εἰ ἴση ἐστίν ἢ ΛZ βάσις τῆς NZ βάσει,
 ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ $\Lambda\Gamma$ στερεὸν τῷ $N\Gamma$ στερεῷ, καὶ εἰ
 10 ὑπερέχει ἢ ΛZ βάσις τῆς NZ βάσεως, ὑπερέχει καὶ
 τὸ $\Lambda\Gamma$ στερεὸν τοῦ $N\Gamma$ στερεοῦ, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλ-
 λείπει. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βά-
 σεων τῶν AZ , $Z\Theta$, δύο δὲ στερεῶν τῶν $A\Gamma$, $\Gamma\Theta$,
 εἴληπται ἰσάκεις πολλαπλάσια τῆς μὲν AZ βάσεως καὶ
 15 τοῦ $A\Gamma$ στερεοῦ ἢ τε ΛZ βάσις καὶ τὸ $\Lambda\Gamma$ στερεόν,
 τῆς δὲ ΘZ βάσεως καὶ τοῦ $\Theta\Gamma$ στερεοῦ ἢ τε NZ
 βάσις καὶ τὸ $N\Gamma$ στερεόν, καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερ-
 ἔχει ἢ ΛZ βάσις τῆς ZN βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ
 $\Lambda\Gamma$ στερεὸν τοῦ $N\Gamma$ [στερεοῦ], καὶ εἰ ἴση, ἴσον, καὶ
 20 εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. ἔστιν ἄρα ὡς ἢ AZ βάσις πρὸς
 τὴν $Z\Theta$ βάσιν, οὕτως τὸ $\Lambda\Gamma$ στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Theta$
 στερεόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κς'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ
 25 σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνία ἴσην στερεᾶν
 γωνίαν συστήσασθαι.

1. ἄρα] ἄ supra m. rec. P; post ras. 2 litt. F. τὰ] e
 corr. V. $\Lambda\Pi$] KH F; supra Λ scr. A m. 1 b. 2. ἐστὶ] BV ,
 comp. b, εἰσί F. τὰ] (alt.) ins. m. 2 F. 3. ἐστίν] mut.
 in εἰσίν m. 1 P. 4. AZ] ΔZ supra scr. AB m. 1 b.
 τοσανταπλάσιων b et e corr. F. 7. ἐστι] supra m. 1 P.

quae iis opposita sunt, aequalia sunt [prop. XXIV]. ergo $AP = KP = AT$.¹⁾ eadem de causa erit $E\Delta = \Delta M = MT$. itaque quoties multiplex est AZ basis basis AZ , toties multiplex erit etiam solidum AT solidi AT . eadem de causa quoties multiplex est basis NZ basis $Z\Theta$, toties multiplex erit etiam solidum NT solidi ΘT . et si $AZ = NZ$, erit etiam $AT = NT$, sin $AZ > NZ$, erit etiam $AT > NT$, sin autem $AZ < NZ$, erit $AT < NT$. itaque datis quatuor magnitudinibus, duabus basibus AZ , $Z\Theta$ et duobus solidis AT , $T\Theta$ sumpta sunt aequae multiplicia basis AZ et solidi AT basis AZ et solidum AT , basis autem ΘZ et solidi ΘT basis NZ et solidum NT , et demonstratum est, si $AZ > ZN$, esse etiam $AT > NT$, sin $AZ = ZN$, esse $AT = NT$, sin autem $AZ < ZN$, esse $AT < NT$. erit igitur $AZ : Z\Theta = AT : T\Theta$ [V def. 5]; quod erat demonstrandum.

XXVI.

Ad datam rectam et punctum eius angulum solidum construere dato angulo solido aequalem.

1) Ex def. 10, quia plana ea comprehendunt etiam similia sunt bina simul coniuncta. de trinis u. pag. 75 not. 2. de ceteris ex prop. 24 sequitur, nec opus erat, ut ibi propria demonstratione ostenderetur, quia p. 72, 17 demonstratum est, triangulos congruentes esse (u. I, 4), h. e. ἴσα τε καὶ ὅμοια.

8. ἡ AZ] bis P, corr. m. 1. 9. ἐστὶ] supra scr. comp. m. 2 F.
 AT] supra A scr. A m. 1 b. 10. NZ] Z in ras. V.
 13. τῶν] supra scr. m. 2 B. δέ] corr. ex δὴ m. 2 V, δὴ b.
 τῶν] supra scr. m. 2 B. 15. AZ] corr. ex AZ m. 1 et
 m. 2 b. 16. ΘT] $E\Delta$, E in ras. P. 18. ZN] NZ BV b.
 19. στερεοῦ] om. BFV b. ἴση] ἴσον PFV et in ras. b.
 20. ἡ] supra scr. m. 1 P. 25. -σην e corr. m. rec. V.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB , τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ δοθὲν σημεῖον τὸ A , ἡ δὲ δοθεῖσα στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Δ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ὑπὸ $E\Delta\Gamma$, $E\Delta Z$, $Z\Delta\Gamma$ γωνιῶν ἐπιπέδων· δεῖ δὴ πρὸς τῇ AB
 5 εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

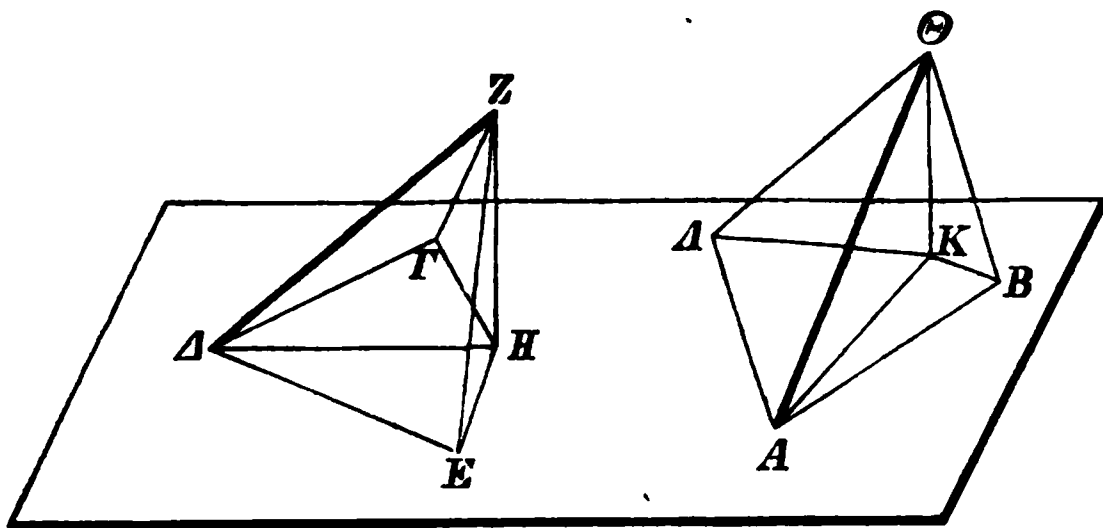
Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΔZ τυχὸν σημεῖον τὸ Z , καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ διὰ τῶν $E\Delta$, $\Delta\Gamma$ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ZH , καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ
 10 κατὰ τὸ H , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔH , καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ μὲν ὑπὸ $E\Delta\Gamma$ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ BAA , τῇ δὲ ὑπὸ $E\Delta H$ ἴση ἡ ὑπὸ BAK , καὶ κείσθω τῇ ΔH ἴση ἡ AK , καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ K σημείου τῷ διὰ τῶν
 15 BAA ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ $K\Theta$, καὶ κείσθω ἴση τῇ HZ ἡ $K\Theta$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘA . λέγω, ὅτι ἡ πρὸς τῷ A στερεὰ γωνία περιεχομένη ὑπὸ τῶν BAA , $BA\Theta$, ΘAA γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ τῇ περιεχομένη ὑπὸ τῶν $E\Delta\Gamma$, $E\Delta Z$, $Z\Delta\Gamma$
 20 γωνιῶν.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ ἴσαι αἱ AB , ΔE , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘB , KB , ZE , HE . καὶ ἐπεὶ ἡ ZH ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ
 25 ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας· ὀρθὴ ἄρα

3. τῷ] mut. in τό m. 1 b. 4. $E\Delta Z$] Z non liquet in F.
 5. τῷ Δ] τῇ ΔP . 9. τῷ] om. P. τῷ ἐπιπέδῳ] supra scr. m. 1 F.
 12. δέ] om. F. 14. AK] K e corr. m. 1 F. 16. ἡ] (tert.) supra m. 2 P.
 18. ἐστίν B , corr. m. 2. Post Δ ras. 1 lit. B.
 19. τῇ] om. Vbφ. $Z\Delta\Gamma$] supra scr. m. 2 B. 21. αἱ ἴσαι B , corr. m. 2.
 22. KB , ZE , HE] $ZE'' HE'' KB'$ Vb (in HE tertia lineola add. in b); ZE , HE F uel potius φ, in ZE uestig. 2 lineolarum.

Sit data recta AB et datum eius punctum A , datus autem angulus solidus is, qui ad Δ positus est angulis planis $E\Delta\Gamma$, $E\Delta Z$, $Z\Delta\Gamma$ comprehensus. oportet igitur ad rectam AB et punctum eius A angulum solidum construere solido angulo, qui ad Δ positus est, aequalem.

sumatur enim in ΔZ punctum aliquod Z , et a Z ad planum rectarum $E\Delta$, $\Delta\Gamma$ perpendicularis ducatur ZH [prop. XI], et cum plano concurrat in H , et du-



catur ΔH , et ad rectam AB et punctum eius A construatur $\angle BAA = E\Delta\Gamma$, $\angle BAK = E\Delta H$ [I, 23], et ponatur $AK = \Delta H$, et in puncto K ad planum rectarum BA , $A\Delta$ perpendicularis erigatur $K\Theta$ [prop. XII], et ponatur $K\Theta = HZ$, et ducatur ΘA . dico, angulum solidum, qui ad A positus sit angulis BAA , $BA\Theta$, ΘAA comprehensus, aequalem esse angulo solido, qui ad Δ positus sit angulis $E\Delta\Gamma$, $E\Delta Z$, $Z\Delta\Gamma$ comprehensus.

abscendantur enim AB , ΔE inter se aequales, et ducantur ΘB , KB , ZE , HE . et quoniam ZH ad planum subiacens perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano subiacenti positas

ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $ZH\Delta$, ZHE γωνιῶν. διὰ τὰ
 αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΘKA , ΘKB γωνιῶν
 ὀρθή ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ KA , AB δύο ταῖς $H\Delta$,
 ΔE ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνίας ἴσας περι-
 5 ἔχουσιν, βάσις ἄρα ἡ KB βάσει τῇ HE ἴση ἐστίν.
 ἔστι δὲ καὶ ἡ $K\Theta$ τῇ HZ ἴση· καὶ γωνίας ὀρθὰς
 περιέχουσιν· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘB τῇ ZE . πάλιν ἐπεὶ
 δύο αἱ AK , $K\Theta$ δυοὶ ταῖς ΔH , HZ ἴσαι εἰσὶν, καὶ
 γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ $A\Theta$ βάσει τῇ
 10 $Z\Delta$ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ AB τῇ ΔE ἴση· δύο
 δὴ αἱ ΘA , AB δύο ταῖς ΔZ , ΔE ἴσαι εἰσὶν. καὶ
 βάσις ἡ ΘB βάσει τῇ ZE ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ
 $BA\Theta$ γωνία τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$ ἐστίν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ
 δὴ καὶ ἡ ὑπὸ $\Theta A\Delta$ τῇ ὑπὸ $Z\Delta\Gamma$ ἐστίν ἴση [ἐπειδήπερ
 15 ἂν ἀπολάβωμεν ἴσας τὰς $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ καὶ ἐπιζεύξωμεν
 τὰς KA , ΘA , $H\Gamma$, $Z\Gamma$, ἐπεὶ ὅλη ἡ ὑπὸ $BA\Delta$ ὅλη
 τῇ ὑπὸ $E\Delta\Gamma$ ἐστίν ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ BAK τῇ ὑπὸ
 $E\Delta H$ ὑπόκειται ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $KA\Delta$ λοιπῇ
 τῇ ὑπὸ $H\Delta\Gamma$ ἐστίν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ KA , $A\Delta$
 20 δυοὶ ταῖς $H\Delta$, $\Delta\Gamma$ ἴσαι εἰσὶν, καὶ γωνίας ἴσας περι-
 ἔχουσιν, βάσις ἄρα ἡ KA βάσει τῇ $H\Gamma$ ἐστίν ἴση.
 ἔστι δὲ καὶ ἡ $K\Theta$ τῇ HZ ἴση· δύο δὴ αἱ ΔK , $K\Theta$
 δυοὶ ταῖς ΓH , HZ εἰσὶν ἴσαι· καὶ γωνίας ὀρθὰς
 περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΘA βάσει τῇ $Z\Gamma$ ἐστίν ἴση.
 25 καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘA , $A\Delta$ δυοὶ ταῖς $Z\Delta$, $\Delta\Gamma$ εἰσὶν
 ἴσαι, καὶ βάσις ἡ ΘA βάσει τῇ $Z\Gamma$ ἐστίν ἴση, γωνία
 ἄρα ἡ ὑπὸ $\Theta A\Delta$ γωνία τῇ ὑπὸ $Z\Delta\Gamma$ ἐστίν ἴση].
 ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $BA\Delta$ τῇ ὑπὸ $E\Delta\Gamma$ ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB καὶ τῷ πρὸς

3. ἐστὶ V, comp. Fb.
 ἔχουσι PVb.

5. BK B.

δύο] (alt.) δυοὶ Vb. 4. περι-
 HE] E·H· F. ἐστίν] om. Vb.

rectos angulos efficiet [def. 3]. itaque uterque angulus $ZH\Delta$, ZHE rectus est. eadem de causa etiam uterque angulus $\odot KA$, $\odot KB$ rectus est. et quoniam duae rectae KA , AB duabus $H\Delta$, ΔE singulae singulis aequales sunt, et angulos aequales comprehendunt, erit $KB = HE$ [I, 4]. uerum etiam $K\odot = HZ$; et angulos rectos comprehendunt. itaque $\odot B = ZE$ [id.]. rursus quoniam duae rectae AK , $K\odot$ duabus ΔH , HZ aequales sunt, et angulos rectos comprehendunt, erit $A\odot = Z\Delta$ [id.]. uerum etiam $AB = \Delta E$. itaque duae rectae $\odot A$, AB duabus ΔZ , ΔE aequales sunt; et $\odot B = ZE$. itaque $\angle B A \odot = \angle E \Delta Z$ [I, 8]. eadem de causa¹⁾ erit etiam $\angle \odot A \Delta = \angle Z \Delta \Gamma$. uerum erat etiam $\angle B A \Delta = \angle E \Delta \Gamma$.

Ergo²⁾ ad datam rectam AB et punctum eius A

1) Haec uerba (lin. 13 seq.) satis ostendunt, ea quae sequuntur lin. 14—27 genuina esse non posse; huc adcedit, quod totus ille locus perplexiore sententiarum nexu laborat, quam quo utitur Euclides.

2) Simsonus iure uituperauit, quod nusquam demonstratum est, angulos solidos, qui aequalibus angulis planis eodem ordine contineantur, aequales esse. nam hoc quasi axioma nititur demonstratio Euclidis. saltem ad similitudinem def. 10 definiri debuerunt aequales anguli solidi.

6. $\xi\sigma\tau\iota\nu$ PB, comp. b. 7. $\pi\epsilon\rho\iota\acute{\epsilon}\chi\omicron\upsilon\sigma\iota$ V b φ . $\iota\sigma\eta$] $\beta\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma$ V b et φ (non F). $\kappa\alpha\iota$] om. V et φ (non F). $Z E$] $Z E$

$\iota\sigma\eta$ $\xi\sigma\tau\iota$ V b; $\gamma\varrho$. $\iota\sigma\eta$ $\acute{\alpha}\rho\alpha$ $\kappa\alpha\iota$ η $\odot B$ $\tau\eta$ $Z E$ mg. m. 1 b.

8. $\xi\sigma\tau\iota$ V b, comp. F. 9. $\pi\epsilon\rho\iota\acute{\epsilon}\chi\omicron\upsilon\sigma\iota$ V b et φ (non F).

10. $Z\Delta$] $\Xi\Delta$ F, ΔZ B. $\xi\sigma\tau\iota\nu$ B. 11. ΔZ , ΔE] " ΔZ ' $Z E$, supra alt. Z scr. Δ m. 1 b; litt. ΔZ , Z eras. V; $Z\Delta$, ΔE B.

$\xi\sigma\tau\iota$ V, comp. F b. 14. $\odot A \Delta$] $\odot \Delta A$, corr. m. 1 b. $Z \Delta \Gamma$] " $\Delta Z \Gamma$ " F. 15. $\Delta \Gamma$] $\Lambda \Gamma$, sed corr., b. 16. $K \Delta$] ΔK F.

$\odot A$] corr. ex $\odot A$ F b. 20. $\delta\upsilon\sigma\iota\nu$ B. $\xi\sigma\tau\iota\nu$] comp. F, $\xi\sigma\tau\iota$ P V b. $\pi\epsilon\rho\iota\acute{\epsilon}\chi\omicron\upsilon\sigma\iota\nu$] B F, $\pi\epsilon\rho\iota\acute{\epsilon}\chi\omicron\upsilon\sigma\iota$ P V b φ . 22. $\xi\sigma\tau\iota\nu$ F B.

$K \odot$] $\odot K$ F. ΔK] e corr. b. 24. $\pi\epsilon\rho\iota\acute{\epsilon}\chi\omicron\upsilon\sigma\iota$ V b.

25. $\iota\sigma\alpha\iota$ $\xi\sigma\tau\iota\nu$ B. 26. $Z \Gamma$] ΓZ F. $\gamma\omega\nu\iota\alpha$] $\kappa\alpha\iota$ $\gamma\omega\nu\iota\alpha$ B F V b.

27. $\odot A \Delta$] corr. ex $\odot B A$ m. 1 b.

αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση συνέσταται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κξ'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB , τὸ δὲ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ $\Gamma\Delta$ · δεῖ δὲ ἀπὸ τῆς
10 δοθείσης εὐθείας τῆς AB τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ $\Gamma\Delta$ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ πρὸς τῷ Γ στερεᾷ γωνία ἴση
15 ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν $BA\Theta$, ΘAK , KAB , ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ $BA\Theta$ γωνίαν τῇ ὑπὸ $E\Gamma Z$, τὴν δὲ ὑπὸ BAK τῇ ὑπὸ $E\Gamma H$, τὴν δὲ ὑπὸ $KA\Theta$ τῇ ὑπὸ $H\Gamma Z$ · καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ $E\Gamma$ πρὸς τὴν ΓH , οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν AK , ὡς δὲ ἡ $H\Gamma$ πρὸς
20 τὴν ΓZ , οὕτως ἡ KA πρὸς τὴν $A\Theta$. καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $E\Gamma$ πρὸς τὴν ΓZ , οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν $A\Theta$. καὶ συμπληρώσθω τὸ ΘB παραλληλόγραμμον καὶ τὸ AA στερεόν.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $E\Gamma$ πρὸς τὴν ΓH , οὕτως ἡ
25 BA πρὸς τὴν AK , καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ $E\Gamma H$, BAK αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ HE παραλληλόγραμμον τῷ KB παραλληλο-

2. συνέσταται, $\acute{\epsilon}$ in ras., V; συνεστάτω φ. ποιῆσαι] δεῖξαι, mg. γρ. ποιῆσαι, m. 1 Vb. 3. κξ'] m. rec. F. 5. παραλληλωεπιπ. corr. in παραλληλοεπιπ. b, qui hanc formam lin. 6

dato angulo solido, qui ad Δ positus est, aequalis angulus constructus est; quod oportebat fieri.

XXVII.

In data recta solidum parallelepipedum construere dato solido parallelepipedo simile et similiter positum.

Sit data recta AB et datum solidum parallelepipedum $\Gamma\Delta$. oportet igitur in data recta AB solidum parallelepipedum construere dato solido parallelepipedo $\Gamma\Delta$ simile et similiter positum.

construatur enim ad rectam AB et punctum eius A solido angulo, qui ad Γ positus est, aequalis angulus angulis $BA\Theta$, ΘAK , KAB comprehensus, ita ut sit $\angle BA\Theta = E\Gamma Z$, $BAK = E\Gamma H$, $KA\Theta = H\Gamma Z$ [prop. XXVI]. et fiat

$$E\Gamma : \Gamma H = BA : AK, \quad H\Gamma : \Gamma Z = KA : A\Theta.$$

quare etiam ex aequo erit $E\Gamma : \Gamma Z = BA : A\Theta$ [V, 22]. et expleantur parallelogrammum ΘB et solidum AA .

et quoniam est $E\Gamma : \Gamma H = BA : AK$, et latera aequales angulos $E\Gamma H$, BAK comprehenduntia proportionalia sunt¹⁾, erit $HE \sim KB$. eadem de causa

1) H. e. „et quoniam aequales sunt anguli, quos latera haec proportionalia comprehendunt“. de eo, quod inde concluditur, esse $HE \sim KB$, cfr. uol. II p. 153 not. 2.

praebet. 8. εὐθεία] postea add. m. 1 P. 14. γωνία
στερεᾶ V b. 15. τῶν] τῶν ὑπό V b. 17. τὴν δέ] καὶ
ἔτι τὴν Theon (BFVb). 18. HΓZ] litt. H Γ e corr. b.
τὴν] om. FVb. 19. HΓ] ΓH Vb. 21. ΓE P.
ZΓ P. 22. ΘB] Pb et corr. ex ΘΓ m. 1 V; BΘ B et
ut uidetur F (HEφ). 23. AA] in ras. V, AA b. 24. ἡ]
(prius) supra m. 1 F. τὴν ΓH] mg. m. 1 V, Γ litt. e corr.
b. 26. αὐ] καὶ comp. b, καὶ corr. in αὐ V. Ante ἄρα eras.
γ m. 1 P. 27. ἐστίν P. KB] litt. B e corr. b. παρ-
αλληλογράμῳ P.

γράμμω. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν $K\Theta$ παραλληλό-
 γραμμον τῷ HZ παραλληλογράμμω ὁμοίον ἐστὶ καὶ
 ἐτι τὸ ZE τῷ ΘB . τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ
 $\Gamma\Delta$ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ $ΑΛ$ στε-
 5 ρεοῦ ὁμοιά ἐστίν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναν-
 τίων ἴσα τέ ἐστὶ καὶ ὁμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς
 ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστὶ καὶ ὁμοια. ὅλον ἄρα τὸ $\Gamma\Delta$
 στερεὸν ὅλω τῷ $ΑΛ$ στερεῷ ὁμοίον ἐστίν.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς $ΑΒ$ τῷ δο-
 10 θέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδω τῷ $\Gamma\Delta$ ὁμοίον τε καὶ
 ὁμοίως κείμενον ἀναγέγραπται τὸ $ΑΛ$. ὅπερ ἔδει
 ποιῆσαι.

κη'.

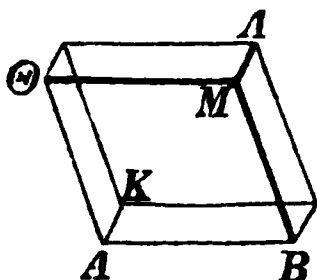
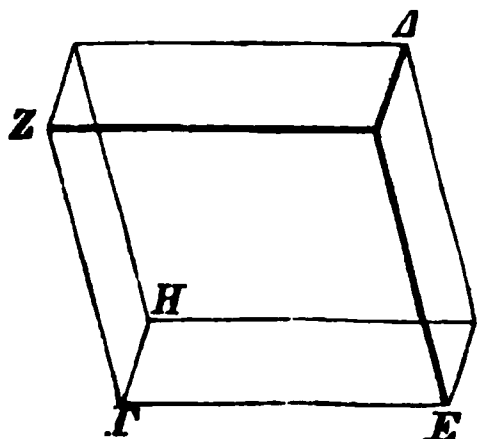
Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδω
 15 τμηθῆ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον
 ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ
 ἐπιπέδου.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ $ΑΒ$ ἐπιπέδω
 τῷ $\Gamma\Delta EZ$ τετμήσθω κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεν-
 20 αντίον ἐπιπέδων τὰς ΓZ , ΔE . λέγω, ὅτι δίχα τμηθή-
 σεται τὸ $ΑΒ$ στερεὸν ὑπὸ τοῦ $\Gamma\Delta EZ$ ἐπιπέδου.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν $\Gamma H Z$ τρίγωνον τῷ
 $\Gamma Z B$ τριγώνω, τὸ δὲ $Α Δ E$ τῷ $\Delta E \Theta$, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ
 μὲν ΓA παραλληλόγραμμον τῷ $E B$ ἴσον· ἀπεναντίον
 25 γὰρ· τὸ δὲ $H E$ τῷ $\Gamma \Theta$, καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περι-

1. μέν] mg. m. 1 V. 3. τοῦ] mg. m. 1 V; ante hoc vocab.
 rep. lin. 2. ὁμοίον — 3. τοῦ, sed delet. m. 1 V. 4. τρισίν B.
 6. τε] om. P. τὰ δέ — 7. ὁμοια] punctis del. b, del. m.
 2 B, om. F V. 6. τρισίν P. 9. ἄρα δοθείσης Theon (B F V b).
 12. ποιῆσαι] δεῖξαι P F V b; γρ. ποιῆσαι mg. m. 1 b. 13. λβ'
 F. 16. -μη- in ras. m. 1 P. 21. ὑπὸ τοῦ $\Gamma\Delta$ in ras. m. 1 B.
 23. $\Gamma Z'' B'$ V b. ἐστίν P. καί] καὶ ὡς P. 24. B E F.

erit etiam $K\Theta \sim HZ$ et $ZE \sim \Theta B$. itaque tria parallelogramma solidi $\Gamma\Delta$ tribus parallelogrammis solidi

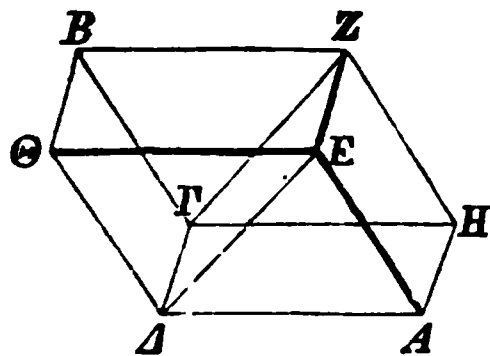


AA similia sunt. uerum in utroque solido tria parallelogramma tribus, quae iis opposita sunt, aequalia¹⁾ sunt et similia. itaque $\Gamma\Delta \sim AA$ [def. 9].

Ergo in data recta AB dato solido parallelepipedo $\Gamma\Delta$ simile et similiter positum constructum est AA ; quod oportebat fieri.

XXVIII.

Si solidum parallelepipedum secundum diagonales planorum inter se oppositorum plano secatur, solidum plano in duas partes aequales secabitur.



Nam solidum parallelepipedum AB plano $\Gamma\Delta EZ$ secundum diagonales planorum ΓZ , ΔE inter se oppositorum secetur. dico, solidum AB plano $\Gamma\Delta EZ$ in duas partes aequales secari.

Quoniam enim $\Gamma H Z = \Gamma Z B$ et $A \Delta E = \Delta E \Theta$ [I, 34], et praeterea $\Gamma A = B E$ (nam inter se opposita sunt) et $H E = \Gamma \Theta$ [prop. XXIV], prisma duobus

1) Ex prop. XXIV. cur eadem similia sint, supra dictum est p. 77 not. hoc solo utitur; nam ut adhibeatur def. 9, satis est demonstrare, duo solida omnibus planis similibus contineri.

εχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν $\Gamma H Z$, $A \Delta E$,
 τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν $H E$, $A \Gamma$, ΓE ἴσον
 ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τρι-
 γώνων τῶν $\Gamma Z B$, $\Delta E \Theta$, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων
 5 τῶν $\Gamma \Theta$, $B E$, ΓE . ὑπὸ γὰρ ἴσων ἐπιπέδων περιέχου-
 ται τῷ τε πλήθει καὶ τῷ μεγέθει. ὥστε ὅλον τὸ AB
 στερεὸν δίχα τέτμηται ὑπὸ τοῦ $\Gamma \Delta E Z$ ἐπιπέδου· ὅπερ
 ἔδει δεῖξαι.

κθ'.

10 Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παρ-
 αλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ
 ἐφεςτῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, ἴσα
 ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς AB στερεὰ παρ-
 15 αλληλεπίπεδα τὰ ΓM , ΓN ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ
 ἐφεςτῶσαι αἱ AH , AZ , ΔM , ΔN , $\Gamma \Delta$, ΓE , $B \Theta$,
 BK ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἔστωσαν τῶν ZN , ΔK .
 λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓM στερεὸν τῷ ΓN στερεῷ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστὶν ἐκάτερον τῶν
 20 $\Gamma \Theta$, ΓK , ἴση ἐστὶν ἡ ΓB ἐκατέρῃ τῶν $\Delta \Theta$, EK .
 ὥστε καὶ ἡ $\Delta \Theta$ τῇ EK ἐστὶν ἴση. κοινὴ ἀφηρησθῶ
 ἡ $E \Theta$. λοιπὴ ἄρα ἡ ΔE λοιπῇ τῇ ΘK ἐστὶν ἴση.
 ὥστε καὶ τὸ μὲν $\Delta \Gamma E$ τρίγωνον τῷ $\Theta B K$ τριγώνῳ
 ἴσον ἐστίν, τὸ δὲ ΔH παραλληλόγραμμον τῷ ΘN
 25 παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ AZH τρί-
 γωνον τῷ $M \Delta N$ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. ἐστὶ δὲ καὶ

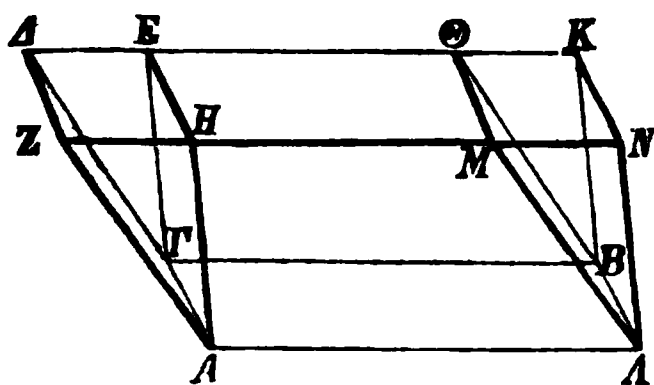
7. τέμνεται BF. 9. λγ' F. 15. ὑπό] ὑ- e corr. m.
 2 b. 16. AH] e corr. b, AZ BF V. AZ] AH BF et
 e corr. V. 20. ΓB] BΓ F. 23. ΘBK] ΘB...K...F, ΘKB

triangulis $\Gamma H Z$, $A \Delta E$ et tribus parallelogrammis $H E$, $A \Gamma$, ΓE comprehensum prismati duobus triangulis $\Gamma Z B$, $\Delta E \Theta$ et tribus parallelogrammis $\Gamma \Theta$, $B E$, ΓE comprehenso aequale est; nam planis et numero et magnitudine aequalibus comprehenduntur [def. 10].¹⁾ quare totum solidum $A B$ plano $\Gamma \Delta E Z$ in duas partes aequales sectum est; quod erat demonstrandum.

XXIX.

Solida parallelepipeda in eadem basi collocata et eandem altitudinem habentia, quorum rectae eminentes in iisdem rectis sint, inter se aequalia sunt.

In eadem basi $A B$ solida parallelepipeda ΓM , ΓN



collocata sint eandem altitudinem habentia, quorum rectae eminentes $A H$, $A Z$, ΔM , ΔN , $\Gamma \Delta$, ΓE , $B \Theta$, $B K$ in iisdem sint rectis $Z N$, ΔK . dico, esse $\Gamma M = \Gamma N$.

Nam quoniam utrumque $\Gamma \Theta$, ΓK parallelogrammum est, erit ΓB utrique $\Delta \Theta$, $E K$ aequalis [I, 34]. quare etiam $\Delta \Theta = E K$. auferatur, quae communis est, $E \Theta$. itaque $\Delta E = \Theta K$. quare etiam

$$\Delta \Gamma E = \Theta B K \text{ [I, 4] et } \Delta H = \Theta N \text{ [I, 36].}$$

eadem de causa erit etiam $A Z H = M \Delta N$. uerum

1) Cum hic nihil ad rem pertineat, quod parallelogramma, quae solida comprehendunt, et ipsa solida eadem similia sunt, parte sola definitionis 10 usus est Euclides.

e corr. V. 24. ἐστὶ PB, comp. Fb. ἐστίν, τό] ἐστι τό,
 corr. ex ἐστίν V. 25. AZH] AHZ BF.

τὸ μὲν ΓZ παραλληλόγραμμον τῷ BM παραλληλο-
 γράμμῳ ἴσον, τὸ δὲ ΓH τῷ BN ἀπεναντίον γάρ-
 και τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τρι-
 γώνων τῶν AZH , ΔGE , τριῶν δὲ παραλληλογράμ-
 5 μων τῶν $A\Delta$, ΔH , ΓH ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ
 περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν $M\Delta N$,
 ΘBK , τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν BM , ΘN ,
 BN . κοινὸν προσκείσθω τὸ στερεὸν, οὗ βάσις μὲν
 τὸ AB παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $HE\Theta M$.
 10 ὅλον ἄρα τὸ ΓM στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ
 ΓN στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστίν.

Τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παρ-
 αλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι
 ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσὶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.
 15 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λ'.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παρ-
 αλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφ-
 εστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα
 20 ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς AB στερεὰ παρ-
 αλληλεπίπεδα τὰ ΓM , ΓN ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ
 ἐφεστῶσαι αἱ AZ , AH , ΔM , ΔN , $\Gamma\Delta$, ΓE , $B\Theta$,
 BK μὴ ἔστωσαν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· λέγω, ὅτι
 25 ἴσον ἐστὶ τὸ ΓM στερεὸν τῷ ΓN στερεῷ.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ NK , $\Delta\Theta$ καὶ συμπιπέ-

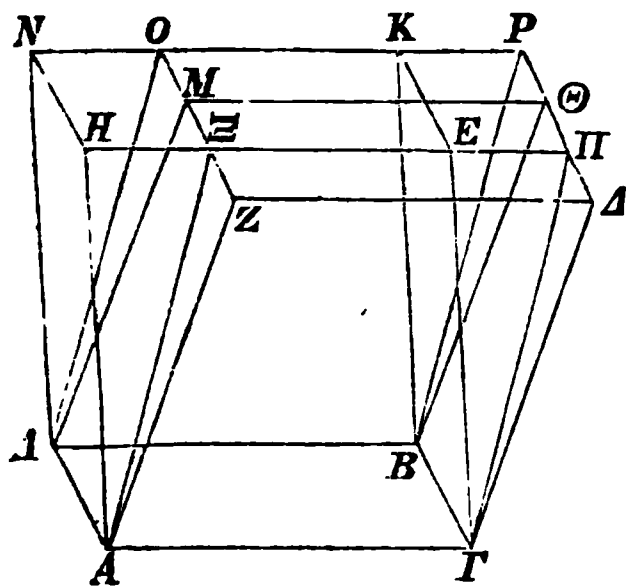
2. τό] corr. ex τῷ m. 1 F. 3. μὲν ὑπὸ δύο Vb.
 4. ΔGE] $\Delta E\Gamma$ B. 5. ΓH] $H\Gamma$ V, et supra scr. m. 1,
 corr. in ΓH m. 2 b. 6. $M\Delta N$] N e corr. V. 7. τῶν]
 sustulit macula in V, supra est ω add. ν m. 2. ΘN] $N\Theta$
 BF et e corr. V. 9. τὸ $HE\Theta M$] mg. (addito γρ.) b; in textu

etiam $\Gamma Z = BM$, $\Gamma H = BN$ [prop. XXIV]; nam inter se opposita sunt. itaque etiam prisma duobus triangulis AZH , $\Delta \Gamma E$ et tribus parallelogrammis $A\Delta$, ΔH , ΓH comprehensum prismati duobus triangulis MAN , ΘBK et tribus parallelogrammis BM , ΘN , BN comprehenso aequale est. commune adiiciatur solidum, cuius basis est AB parallelogrammum, ei autem oppositum $HE\Theta M$. itaque $\Gamma M = \Gamma N$.

Ergo solida parallelepipeda in eadem basi collocata et eandem altitudinem habentia, quorum rectae eminentes in iisdem rectis sint, inter se aequalia sunt; quod erat demonstrandum.

XXX.

Solida parallelepipeda in eadem basi collocata et



eandem altitudinem habentia, quorum rectae eminentes in iisdem rectis non sint, inter se aequalia sunt.

In eadem basi AB solida sint parallelepipeda ΓM , ΓN eandem altitudinem habentia, quorum rectae eminentes AZ , AH , ΔM , ΔN , $\Gamma \Delta$, ΓE , $B\Theta$, BK in iisdem rectis non sint. dico, esse $\Gamma M = \Gamma N$.

producantur enim NK , $\Delta \Theta$ et inter se concurrant

ras. est. 10. στερε- in ras. m. 1 B. 11. ΓN] N e corr. F.
 ἐστὶ V, comp. Fb. 16. λ'] om. φ. 21. ἐστῶσαν BFV.
 παράλληλα ἐπίπεδα F. 22. αὶ] supra scr. m. rec. P.
 26. NK] N e corr. m. 2 b.

τωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ P , καὶ ἔτι ἐκβεβλήσθωσαν
 αἱ ZM , HE ἐπὶ τὰ O , Π , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $A\Xi$,
 AO , $\Gamma\Pi$, BP . ἴσον δὴ ἐστὶ τὸ ΓM στερεόν, οὗ βάσις
 μὲν τὸ $A\Gamma B\Lambda$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ
 5 $Z\Delta\Theta M$, τῷ ΓO στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ $A\Gamma B\Lambda$
 παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $\Xi\Pi P O$. ἐπὶ τε
 γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς $A\Gamma B\Lambda$ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ
 ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ AZ , $A\Xi$, AM , AO , $\Gamma\Delta$,
 $\Gamma\Pi$, $B\Theta$, BP ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ZO ,
 10 ΔP . ἀλλὰ τὸ ΓO στερεόν, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ
 $A\Gamma B\Lambda$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $\Xi\Pi P O$,
 ἴσον ἐστὶ τῷ ΓN στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ $A\Gamma B\Lambda$
 παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $HEKN$. ἐπὶ τε
 γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς $A\Gamma B\Lambda$ καὶ
 15 ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ AH , $A\Xi$,
 GE , $\Gamma\Pi$, AN , AO , BK , BP ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν
 εὐθειῶν τῶν $H\Pi$, NP . ὥστε καὶ τὸ ΓM στερεόν
 ἴσον ἐστὶ τῷ ΓN στερεῷ.

Τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως στερεὰ παραλληλ-
 20 ἐπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ
 εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν·
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3. ἐστιν P . 5. $Z\Delta\Theta M$] Δ e corr. b, $Z\Delta M\Theta$ F?, sed
 $M\Theta$ euan.; corr. in mg. Pro τὸ $Z\Delta\Theta M$ in B est τὸ $\Xi\Pi P O$,
 sed del. τὸ $Z\Delta\Theta M$ — 6. $\Xi\Pi P O$] mg. m. rec. B. 5. $A\Gamma B$
 B. 6. τε] eras. V. 7. ἐστὶ comp. V. $A\Gamma B\Lambda$] Λ e corr.,
 supra scr. A m. 1 b. καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος] August; om.
 $P\varphi$; καὶ BV b. 8. ὧν] om. φ ; αὐτῶν B et corr. ex αὐτῶν
 ὧν m. 2 V; αὐτῶν ὧν b. AZ] corr. ex $A\Xi$ m. 2 V.
 9. $\Gamma\Pi$] $\Upsilon\Pi$, sed Υ e corr. m. 2 b; GE P, sed corr. m. 2 euan.
 10. μὲν] om. B, supra add. postea m. 1 F. ἐστὶ] om. F V b.
 11. $A\Gamma B\Lambda$] Γ in ras. m. 2 B. $\Xi\Pi'' O P'$ V, $\Xi\Pi P' O'$ b.
 12. μὲν] om. P. μὲν τὸ $A\Gamma B\Lambda$] om. φ . 13. ἐπὶ] corr.

in P , et praeterea producantur ZM , HE ad O , Π , et ducantur $A\Xi$, ΛO , $\Gamma\Pi$, BP . itaque solidum ΓM , cuius basis est parallelogrammum $A\Gamma B\Lambda$, ei autem oppositum $Z\Delta\Theta M$, aequale est solido ΓO , cuius basis est parallelogrammum $A\Gamma B\Lambda$, ei autem oppositum $\Xi\Pi P O$; nam in eadem basi sunt $A\Gamma B\Lambda$ et sub eadem altitudine, et rectae eorum eminentes AZ , $A\Xi$, ΛM , ΛO , $\Gamma\Delta$, $\Gamma\Pi$, $B\Theta$, BP in iisdem rectis sunt ZO , ΔP [prop. XXIX]. sed solidum ΓO , cuius basis est parallelogrammum $A\Gamma B\Lambda$, ei autem oppositum $\Xi\Pi P O$, aequale est solido ΓN , cuius basis est parallelogrammum $A\Gamma B\Lambda$, ei autem oppositum $HEKN$; nam rursus in eadem basi sunt $A\Gamma B\Lambda$ et sub eadem altitudine, et rectae eorum eminentes AH , $A\Xi$, ΓE , $\Gamma\Pi$, ΛN , ΛO , BK , BP in iisdem rectis sunt $H\Pi$, NP [id.]. quare erit $\Gamma M = \Gamma N$.

Ergo solida parallelepipeda in eadem basi collocata et eandem altitudinem habentia, quorum rectae eminentes in iisdem rectis non sint, inter se aequalia sunt; quod erat demonstrandum.

ex *ἐπεὶ* V. 14. *πάλιν*] om. BF. *καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος*] August; om. PF; *καὶ* BVb. 15. *ᾧν*] *αὐτῶν* B et corr. ex *αὐτῶν ᾧν* V; *αὐτὸ ᾧν* b. 16. $\Gamma\Pi$] e corr. m. 2 V, $\Gamma''\Pi'$ b. ΛN] N e corr. m. 2 V. 19. *τῆς αὐτῆς βάσεως στερεά*] P; *τ. α. β. ὄντα στερεά* in ras. V, *τῆς αὐτῆς βάσεως* b; *ἴσων βάσεων στερεά* BF et mg. Vb m. 1. 20. *αὶ*] *καὶ* P, supra scr. *αὶ* m. 2. 21. *αὐτῶν*] om. F. *ἐστίν*] *εἰσίν* BF.

λα'.

Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

6 Ἐστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν $AB, ΓΔ$ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ $AE, ΓΖ$ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ AE στερεὸν τῷ $ΓΖ$ στερεῷ.

Ἐστῶσαν δὴ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ $ΘΚ, ΒΕ, ΑΗ, ΑΜ, ΟΠ, ΔΖ, ΓΞ, ΡΣ$ πρὸς ὀρθὰς ταῖς $AB, ΓΔ$ βάσεσιν, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ $ΓΡ$ εὐθεία $η ΡΤ$, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ $ΡΤ$ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ P τῇ ὑπὸ $ΑΑΒ$ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ $ΤΡΤ$, καὶ κείσθω τῇ μὲν $ΑΑ$ ἴση ἢ $ΡΤ$, τῇ δὲ $ΑΒ$ ἴση ἢ $ΡΤ$, καὶ συμπληρώσθω ἢ τε PX βάσεις καὶ τὸ $ΨΤ$ στερεόν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ $ΤΡ, ΡΤ$ 15 δυοὶ ταῖς $ΑΑ, ΑΒ$ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ PX παραλληλόγραμμον τῷ $ΘΑ$ παραλληλογράμῳ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἢ $ΑΑ$ τῇ $ΡΤ$, ἢ δὲ $ΑΜ$ τῇ $ΡΣ$, καὶ γωνίας θὰς περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον ἐστὶ τὸ $PΨ$ παραλληλόγραμμον τῷ $ΑΜ$ παραλληλογράμῳ. διὰ τὰ τὰ δὴ καὶ τὸ AE τῷ $ΣΤ$ ἴσον τέ ἐστὶ καὶ ὅμοιον· ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ AE στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ $ΨΤ$ στερεοῦ ἴσα τέ ἐστὶ καὶ ἴσα. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα

1. λα'] om. φ. 5. AB] A e corr. b. 7. AE] E e corr. b.
9. $ΡΣ$] $Σ$ e corr. B. ταῖς] e corr. m. 2 B. AB] A e
r. b. 10. βάσσει Vb Deīn add. B: ἢ δὲ ὑπὸ $ΑΑΒ$ τῇ
] $ΓΡΔ$ ἄριστος. τῇ] τῆς Fb. 12. $ΑΑΒ$] A e corr. m. 2 b.
13. $ΑΑ$] corr. ex $ΗΑ$ et m. 1 et m. 2 b. 14. $ΒΑ$ F.
 $ΑΑ$] ut lin. 13 b. εἰσαί BVb, comp. F. 18. $ΘΑ$] $Θ$ e
r. b; $ΑΘ$ F, et V, corr. ex $ΘΑ$. 19. μὲν ἢ] ἢ μὲν B.

XXXI.¹⁾

Solida parallelepipeda in aequalibus basibus collocata et eandem altitudinem habentia inter se aequalia sunt.

Solida parallelepipeda AE , ΓZ in aequalibus basibus AB , $\Gamma\Delta$ collocata eandem altitudinem habeant. dico, esse $AE = \Gamma Z$.

Iam prius rectae eminentes ΘK , BE , AH , AM , $O\Pi$, ΔZ , $\Gamma\Xi$, $P\Sigma$ ad bases AB , $\Gamma\Delta$ perpendiculares sint, et recta ΓP in directum producat, ut fiat PT , et ad rectam PT et punctum eius P angulo $A\Lambda B$ aequalis construatur $\angle TPT$ [I, 23], et ponatur $PT = A\Lambda$, $PT = \Lambda B$, et expleantur basis PX et solidum ΨT . et quoniam duae rectae TP , PT duabus $A\Lambda$, ΛB aequales sunt, et angulos aequales comprehendunt, parallelogrammum PX parallelogrammo $\Theta\Lambda$ et aequale et simile est [VI, 14]. et rursus quoniam $A\Lambda = PT$, $AM = P\Sigma$, et rectos angulos comprehendunt, parallelogrammum $P\Psi$ parallelogrammo AM aequale et simile est [id.]. eadem de causa etiam AE parallelogrammo ΣT et aequale et simile est. itaque tria parallelogramma solidi AE tribus parallelogrammis solidi ΨT et aequalia et similia sunt. uerum in utro-

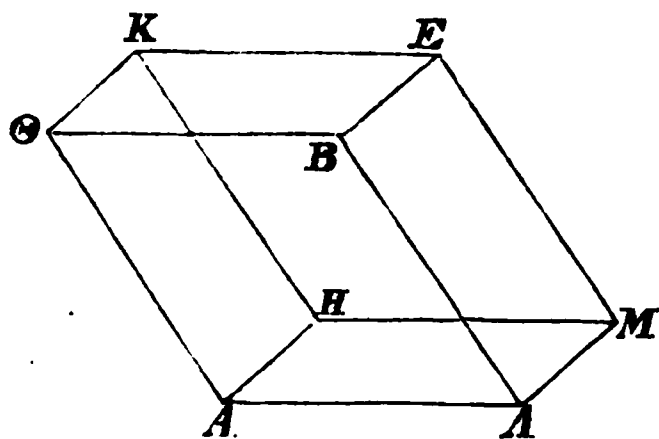
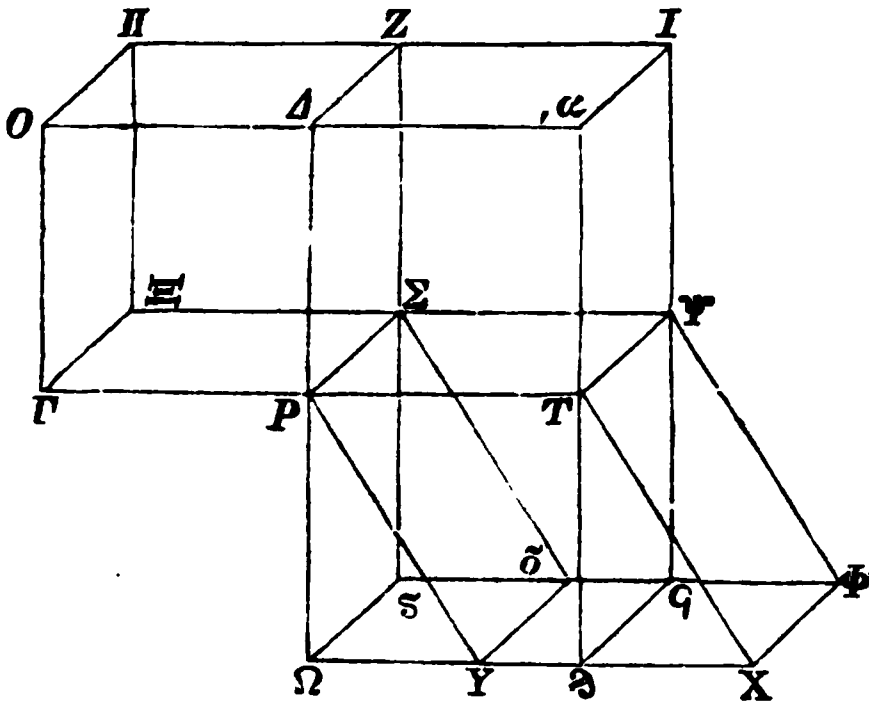
1) Prior figura huius propositionis ita prorsus descripta est, ut in cod. P inuenitur, in quo in mg. add. m. 1: $\gamma\varrho$. $\acute{\epsilon}\nu$ $\acute{\alpha}\lambda\lambda\omicron\iota\varsigma$ γ (id quod ad litt. sine compendium \omicron referendum est), nisi quod solidum AE ibi non satis accurate descriptum hic emendatum est.

$A\Lambda$] A e corr. b. 21. AM] A e corr. b. 22. ΣT] T in ras. B. 23. $\tau\acute{\alpha}$ $\tau\rho\lambda\alpha$ F. 24. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. 25. $\mu\acute{\epsilon}\nu$] supra scr. F et m. 2 B. $\acute{\upsilon}\pi\epsilon\nu\alpha\nu\tau\lambda\omicron\nu$ F. Ante $\iota\sigma\alpha$ in b $\tau\acute{\alpha}$ $\delta\acute{\epsilon}$ $\tau\rho\lambda\alpha$ $\tau\rho\iota\sigma\iota$ $\tau\omicron\iota\varsigma$ $\acute{\upsilon}\pi\epsilon\nu\alpha\nu\tau\lambda\omicron\nu$ (v corr. in α m. 1) del. m. 2.

τέ ἐστὶ καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον· ὅλον ἄρα τὸ AE στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλω τῷ $\Psi\Upsilon$ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστίν. διήχθωσαν αἱ ΔP , $X\Upsilon$ καὶ συμπιπέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ω ,
 5 καὶ διὰ τοῦ T τῆ $\Delta\Omega$ παράλληλος ἤχθω ἡ $\alpha T\mathcal{D}$, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ $O\Delta$ κατὰ τὸ α , καὶ συμπεπληρώσθω τὰ $\Omega\Psi$, PI στερεά. ἴσον δὴ ἐστὶ τὸ $\Psi\Omega$ στερεόν, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $P\Psi$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $\Omega\alpha$, τῷ $\Psi\Upsilon$ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ
 10 $P\Psi$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $T\Phi$. ἐπιτε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς $P\Psi$ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ $P\Omega$, $P\Upsilon$, $T\mathcal{D}$, TX , $\Sigma\varsigma$, $\Sigma\omicron$, $\Psi\alpha$, $\Psi\Phi$ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΩX , $\epsilon\Phi$. ἀλλὰ τὸ $\Psi\Upsilon$ στερεὸν τῷ AE ἐστὶν ἴσον·

1. τὰ δὲ τρία — ἀπεναντίον] om. BFVb. 2. στερεόν] bis P, alterum del. m. 1, sed renou. π. 3. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 4. ΔP] e corr. V. 5. $\Delta\Omega$] Δ e corr. V. $\alpha T\mathcal{D}$] $\tau\mathcal{D}$ post ras. 1 litt. FV, $\tau\mathcal{D}$ B, eras. \mathcal{D} , $\lambda\tau\epsilon$ b, $\tau\mathcal{D}$ mg. m. 2. 6: α] corr. ex λ m. 2b. 9. $\omega\alpha$ B, eras. α ; $\omega\varsigma$ b, corr. m. 2. 10. $T\Phi$] e corr. m. 2 b. 11. εἰσι] comp. in ras. V, corr. ex ἐστὶ b; εἰσιν B. 12. ὧν] PFVb, καὶ αὐτῶν B; γρ. καὶ αὐτῶν καὶ (comp.) mg. b m. 1. αἱ] (alt.) om. B. $T\mathcal{D}$] \mathcal{D} in ras. FV, e corr. m. 2b. TX] in ras. V, ras. 4 litt. b. 13. $\Sigma\varsigma$] in ras. V, $\sigma\xi$ F. $\Sigma\omicron$] $\overline{\sigma\omicron}$ P; $\sigma\varsigma$ F, supra scr. $\sigma\eta$ m. 1; $\sigma\gamma$ in ras. V et corr. ex $\epsilon\gamma$ B; $\overline{\sigma\gamma}$ b (γ e corr.). $\Psi\alpha$] α e corr. b. 14. τῷ] post ras. 1 litt. b; corr. ex τό m. 1 P.

que solido tria parallelogramma tribus, quae iis opposita sunt, et aequalia et similia sunt [p. 77 not. 1]. itaque totum solidum parallelepipedum AE toti solido parallelepipedo ΨT aequale est [def. 10]. edu-



cantur ΔP , $X T$ et inter se concurrant in Ω , et per T rectae $\Delta \Omega$ parallela ducatur $\alpha T \mathcal{D}$, et producat^{ur} $O \Delta$ ad α , et expleantur solida $\Omega \Psi$, PI . itaque solidum $\Psi \Omega$, cuius basis est $P \Psi$ parallelogrammum, ei autem oppositum $\Omega \Phi$, solido ΨT , cuius basis est $P \Psi$ parallelogrammum, ei autem oppositum $T \Phi$, aequale est; nam et in eadem basi sunt $P \Psi$ et sub eadem altitudine, et rectae eorum eminentes $P \Omega$, $P T$, $T \mathcal{D}$, $T X$, $\Sigma \varsigma$, $\Sigma \delta$, $\Psi \varsigma$, $\Psi \Phi$ in iisdem rectis sunt ΩX , $\varsigma \Phi$ [prop. XXIX].

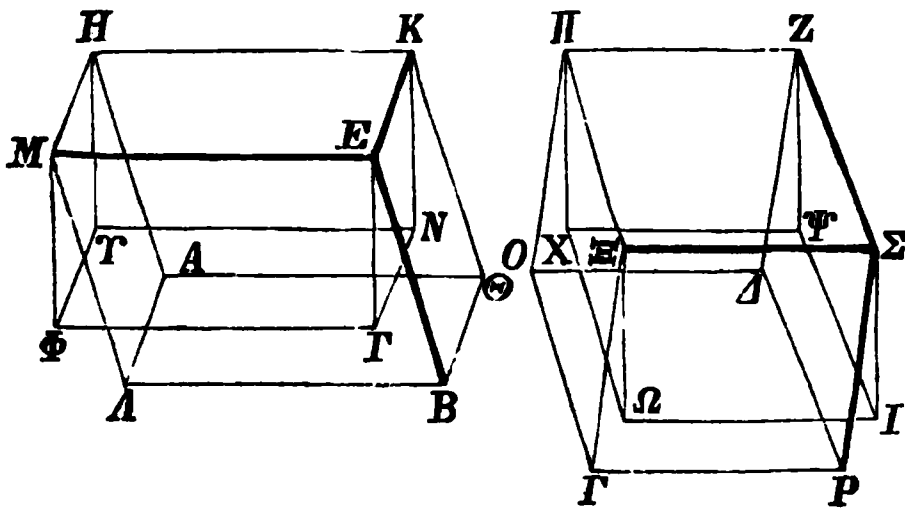
καὶ τὸ $\Psi\Omega$ ἄρα στερεὸν τῷ AE στερεῷ ἔστιν ἴσον.
καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ $PT\chi T$ παραλληλόγραμμον τῷ
 ΩT παραλληλογράμμῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως
εἰσι τῆς PT καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς PT ,
5 ΩX · ἀλλὰ τὸ $PT\chi T$ τῷ $\Gamma\Delta$ ἔστιν ἴσον, ἐπεὶ καὶ
τῷ AB , καὶ τὸ ΩT ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ $\Gamma\Delta$
ἔστιν ἴσον. ἄλλο δὲ τὸ ΔT · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $\Gamma\Delta$
βάσις πρὸς τὴν ΔT , οὕτως ἡ ΩT πρὸς τὴν ΔT . καὶ
ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓI ἐπιπέδῳ τῷ PZ
10 τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις,
ἔστιν ὡς ἡ $\Gamma\Delta$ βάσις πρὸς τὴν ΔT βάσιν, οὕτως
τὸ ΓZ στερεὸν πρὸς τὸ PI στερεόν. διὰ τὰ αὐτὰ
δὴ, ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΩI ἐπιπέδῳ
τῷ $P\Psi$ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπι-
15 πέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ΩT βάσις πρὸς τὴν $T\Delta$ βάσιν,
οὕτως τὸ $\Omega\Psi$ στερεὸν πρὸς τὸ PI . ἀλλ' ὡς ἡ $\Gamma\Delta$
βάσις πρὸς τὴν ΔT , οὕτως ἡ ΩT πρὸς τὴν ΔT · καὶ
ὡς ἄρα τὸ ΓZ στερεὸν πρὸς τὸ PI στερεόν, οὕτως
τὸ $\Omega\Psi$ στερεὸν πρὸς τὸ PI . ἐκάτερον ἄρα τῶν ΓZ ,
20 $\Omega\Psi$ στερεῶν πρὸς τὸ PI τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον
ἄρα ἐστὶ τὸ ΓZ στερεὸν τῷ $\Omega\Psi$ στερεῷ. ἀλλὰ τὸ
 $\Omega\Psi$ τῷ AE ἐδείχθη ἴσον· καὶ τὸ AE ἄρα τῷ ΓZ
ἔστιν ἴσον.

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ AH , ΘK , BE ,
25 AM , ΓN , $O\Pi$, ΔZ , $P\Sigma$ πρὸς ὀρθὰς ταῖς AB , $\Gamma\Delta$
βάσεσιν· λέγω πάλιν, ὅτι ἴσον τὸ AE στερεὸν τῷ

2. $PT\chi T$] T e corr. b. 4. εἰσιν B. PT] (prius) $P\Gamma B$.
5. ἴσον ἐστίν BF. 6. AB] A e corr. m. 1 b. ΩT] T e
corr. m. 2 P. ἄρα] supra scr. m. rec. B. 7. $\Gamma\Delta$] $\Delta\Gamma F$;
" $\Delta\Gamma V$ b. 11. οὕτω PB. 12. τό] (alt.) e corr. F. 13. ΩI]
 I add. m. 2 b. 15. $T\Delta$] T e corr. m. 2 P. 16. οὕτω B.
ἀλλ' ὡς — 19. PI] om. F. 17. ΩT βάσις P. ΔT] in ras. V;

uerum $\Psi T = AE$. itaque etiam $\Psi \Omega = AE$. et quoniam $PTXT = \Omega T$ (nam et in eadem basi sunt PT et in iisdem parallelis $PT, \Omega X$ [I, 35]), sed $PTXT = \Gamma \Delta$, quoniam $PTXT = AB$, erit etiam $\Omega T = \Gamma \Delta$. aliud autem quoduis est ΔT . itaque $\Gamma \Delta : \Delta T = \Omega T : \Delta T$ [V, 7]. et quoniam solidum parallelepipedum ΓI sectum est plano PZ parallelo planis oppositis, erit $\Gamma \Delta : \Delta T = \Gamma Z : PI$ [prop. XXV]. iam eadem de causa, quoniam solidum parallelepipedum ΩI sectum est plano $P\Psi$ parallelo planis oppositis, erit $\Omega T : T\Delta = \Omega \Psi : PI$ [id.]. sed $\Gamma \Delta : \Delta T = \Omega T : \Delta T$. quare etiam $\Gamma Z : PI = \Omega \Psi : PI$. itaque utrumque solidum $\Gamma Z, \Omega \Psi$ ad PI eandem rationem habet. quare $\Gamma Z = \Omega \Psi$ [V, 9]. uerum demonstratum est, esse $\Omega \Psi = AE$. quare etiam $AE = \Gamma Z$.

iam rectae eminentes $AH, \Theta K, BE, \Lambda M, \Gamma N,$



$O\Pi, \Delta Z, P\Sigma$ ad bases $AB, \Gamma \Delta$ perpendiculares ne sint. rursus dico, esse $AE = \Gamma Z$. ducantur enim a

$T\Delta B$; " $T'\Delta$ b. 19. PI] I euan. V. Dein add. στερεόν Theon (BFVb). 20. στερεόν B, corr. m. rec. λόγον έχει B. 21. ἐστίν P. τό] (alt.) mut. in τῷ b; τῷ BV. 22. $\Omega \Psi$] Ω e corr. b. τῷ] mut. in τό b, τό BV; οὕτως ἐν ἄλλῳ mg. m.*1 Vb. 23. ἴσον ἐστίν Vb. Dein add. ὅπερ εἶδει δεῖξαι PFVb. 25. ΓN] N in ras. V. 26. βάσει b et supra scr. m. 2 V. ἴσον ἐστίν Theon (BFVb).

ΓΖ στερεῶ. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Κ, Ε, Η, Μ,
 Π, Ζ, Ν, Σ σημείων ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον
 κάθετοι αἱ ΚΞ, ΕΤ, ΗΥ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΝΩ,
 ΣΙ, καὶ συμβαλλέτωσαν τῷ ἐπιπέδῳ κατα τὰ Ξ, Τ,
 5 Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ι σημεία, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ
 ΞΤ, ΞΥ, ΥΦ, ΤΦ, ΧΨ, ΧΩ, ΩΙ, ΙΨ. ἴσον δὴ
 ἐστὶ τὸ ΚΦ στερεὸν τῷ ΠΙ στερεῶ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων
 βάσεων εἰσι τῶν ΚΜ, ΠΣ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος,
 ὧν αἱ ἐφεστῶσαι πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν. ἀλλὰ
 10 τὸ μὲν ΚΦ στερεὸν τῷ ΑΕ στερεῶ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ
 ΠΙ τῷ ΓΖ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι καὶ
 ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσιν ἐπὶ
 τῶν αὐτῶν εὐθειῶν. καὶ τὸ ΑΕ ἄρα στερεὸν τῷ ΓΖ
 στερεῶ ἐστὶν ἴσον.

15 Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλ-
 επίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν·
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λβ'.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλλ-
 20 ληλεπίπεδα πρὸς ἀλληλά ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστω ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα
 τα ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι τὰ ΑΒ, ΓΔ στερεὰ παραλληλ-
 επίπεδα πρὸς ἀλληλά ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν
 ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ βᾶσις πρὸς τὴν ΓΖ βᾶσιν, οὕτως
 25 τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν.

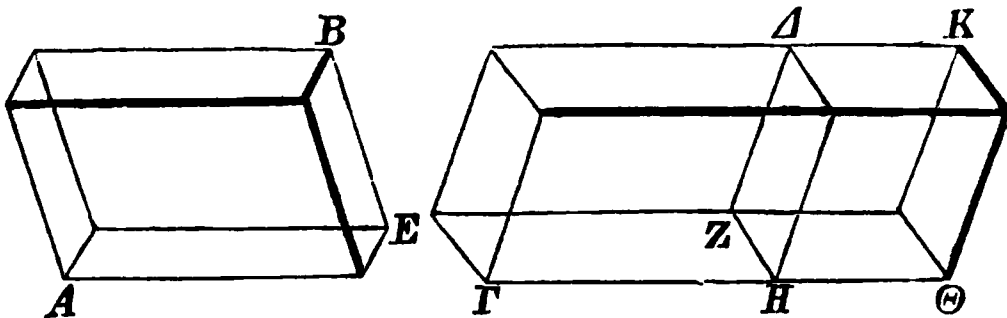
2. Π] e corr. b. N] in ras. V. 3. ΚΞ] ΚΖ F; Ξ in
 ras. V. ΠΧ] Π in ras. m. 1 P. ΝΩ] Ν in ras. V.
 4. ΣΥ P. συμβαλέτωσαν V. Ξ] in ras. V. Υ, Υ b.
 5. σημείω B, ω in ras. 6. ΞΤ] Ξ in ras. V. ΞΥ] Ξ in
 ras. V; ΥΦ F. ΥΦ] ΞΥ F. ΙΨ] ΩΨ b. 7. ΚΦ] Φ e corr.
 V. 8. ΠΣ] corr. ex ΠΕ m. 1 b. ὑπό] ἐπὶ b; corr. mg. m.
 1. 9. εἰσιν B. 11. εἰσιν P. 12. ὑπό] ἐπὶ b; corr. mg.

punctis $K, E, H, M, \Pi, Z, N, \Sigma$ ad planum subiacens perpendiculares $K\Xi, ET, HT, M\Phi, \Pi X, Z\Psi, N\Omega, \Sigma I$, et cum plano in punctis $\Xi, T, \Upsilon, \Phi, X, \Psi, \Omega, I$ concurrant, et ducantur $\Xi T, \Xi \Upsilon, \Upsilon \Phi, T\Phi, X\Psi, X\Omega, \Omega I, I\Psi$. iam erit $K\Phi = \Pi I$; nam in aequalibus basibus sunt $KM, \Pi\Sigma$ et sub eadem altitudine, et rectae eorum eminentes ad bases perpendiculares sunt [per priorem partem huius prop.]. uerum $K\Phi = AE, \Pi I = \Gamma Z$; nam et in eadem basi sunt et sub eadem altitudine, et rectae eorum eminentes in iisdem rectis non sunt [prop. XXX]. itaque etiam $AE = \Gamma Z$.

Ergo solida parallelepipeda in aequalibus basibus collocata et eandem altitudinem habentia inter se aequalia sunt; quod erat demonstrandum.

XXXII.

Solida parallelepipeda, quae eandem habent altitudinem, inter se eandem rationem habent quam bases.



Solida parallelepipeda $AB, \Gamma\Delta$ eandem altitudinem habeant. dico, solida parallelepipeda $AB, \Gamma\Delta$ eandem inter se rationem habere quam bases, hoc est, esse $AE : \Gamma Z = AB : \Gamma\Delta$.

m. 1. 13. στερεόν ἄρα b. 14. ἴσον ἐστίν b. 18. λβ']
 om. φ. 19. παραλληλοεπίπεδα, eras. o, V; item lin. 22.
 21. παραλληλοεπίπεδα V, ut p. 100, 3, 6. 23. ἐστίν] om. φ.
 βάσις] om. FV. 25. στερεόν] (prius) om. V.



Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ την ZH τῷ AE ἴσον
τὸ $Z\Theta$, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς $Z\Theta$, ὕψους δὲ τοῦ
αὐτοῦ τῷ $\Gamma\Delta$ στερεὸν παραλληλεπίπεδον συμπλη-
ρώσθω το HK . ἴσον δὴ ἐστὶ τὸ AB στερεὸν τῷ HK
5 στερεῷ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν AE , $Z\Theta$
καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλλη-
επίπεδον τὸ ΓK ἐπιπέδῳ τῷ ΔH τέτμηται παραλλήλῳ
ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα ὅς ἡ ΓZ
βάσις πρὸς την $Z\Theta$ βάσιν, οὕτως το $\Gamma\Delta$ στερεὸν
10 πρὸς τὸ $\Delta\Theta$ στερεόν. ἴση δὲ ἡ μὲν $Z\Theta$ βάσις τῇ
 AE βάσει, τὸ δὲ HK στερεὸν τῷ AB στερεῷ· ἔστιν
ἄρα καὶ ὡς ἡ AE βάσις πρὸς τὴν ΓZ βάσιν, οὕτως
τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Delta$ στερεόν.

Τὰ ἄρα ὑπο τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλ-
15 ἐπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει
δειῆσαι.

λγ'.

Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλ-
ληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων
20 πλευρῶν.

Ἔστω ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ AB , $\Gamma\Delta$,
ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ AE τῇ ΓZ · λέγω, ὅτι το AB
στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Delta$ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει,
ἥπερ ἡ AE πρὸς τὴν ΓZ .

25 Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπ' εὐθείας ταῖς AE , HE ,
 ΘE αἱ EK , EA , EM , καὶ κείσθω τῇ μὲν ΓZ ἴση ἡ
 EK , τῇ δὲ ZN ἴση ἡ EA , καὶ ἔτι τῇ ZP ἴση ἡ EM ,
καὶ συμπληρώσθω το KA παραλληλόγραμμον καὶ
το KO στερεόν.

3. τῷ] τό post ins., euan. F; supra scr. V. καὶ συμπ.
b. 4. ἐστὶν P. 5. τε] om. b. εἰσι] ἐστι B, om. FV.

nam rectae ZH parallelogrammo AE aequale adplicetur $Z\Theta$ [I, 45], et in $Z\Theta$ basi, altitudine autem eadem, qua $\Gamma\Delta$, solidum parallelepipedum expleatur HK . erit igitur $AB = HK$; nam et in aequalibus basibus sunt AE , $Z\Theta$ et sub eadem altitudine [prop. XXXI]. et quoniam solidum parallelepipedum ΓK sectum est plano ΔH parallelo planis oppositis, erit

$$\Gamma Z : Z\Theta = \Gamma\Delta : \Delta\Theta \text{ [prop. XXV].}$$

uerum $Z\Theta = AE$ et $HK = AB$. erit igitur

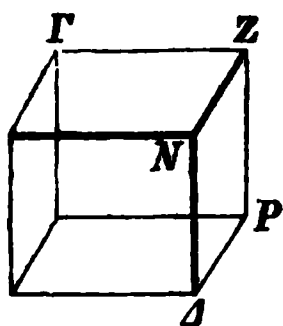
$$AE : \Gamma Z = AB : \Gamma\Delta.$$

Ergo solida parallelepipeda, quae eandem habent altitudinem, inter se eandem rationem habent quam bases; quod erat demonstrandum.

XXXIII.

Similia solida parallelepipeda triplicatam inter se rationem habent quam latera correspondentia.

Similia sint solida parallelepipeda AB , $\Gamma\Delta$, et AE lateri ΓZ correspondens. dico, esse $AB : \Gamma\Delta = AE^3 : \Gamma Z^3$.



producantur enim in directum AE , HE , ΘE , ut fiant EK , $E\Lambda$, EM , et ponatur

$$EK = \Gamma Z, \quad E\Lambda = ZN, \quad EM = ZP,$$

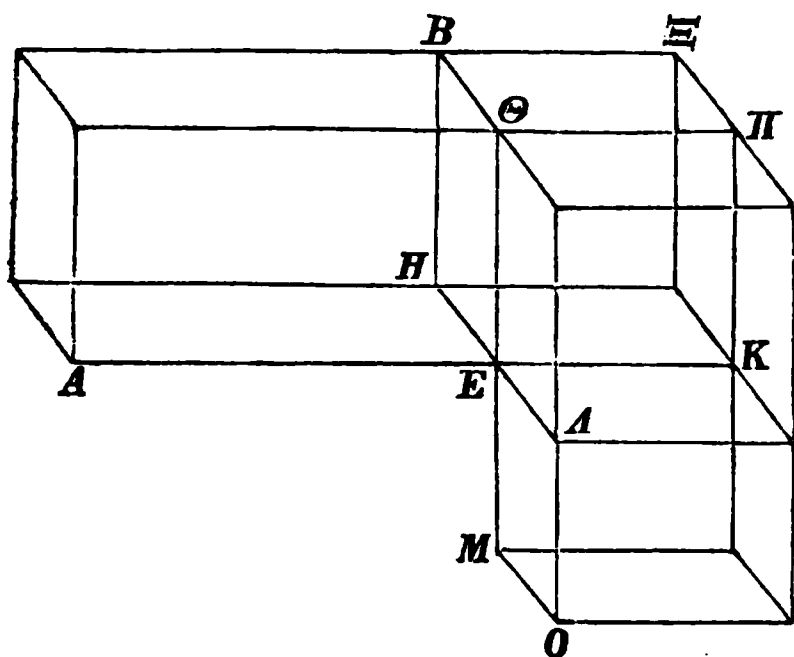
et expleantur parallelogrammum $K\Lambda$ et solidum KO .

8. ἄρα] om. FV. ΓZ] P; " ΓZ b; ΘZ BFV. 9. $Z\Theta$] Pb; ΓZ B; $Z\Gamma F$ et in ras. V. οὕτω B. $\Gamma\Delta$] P, " $\Gamma\Delta$ " b; $\Theta\Delta$ BFV. 10. $\Delta\Theta$] P, ' $\Delta\Theta$ b; $\Delta\Gamma$ BFV. 12. ΓZ] Z in ras. F. 14. παραλληλοεπίπεδα V. 15. ἐστίν] εἰσιν FV. 17. λγ'] om. φ. 18. παραλληλοεπίπεδα V, ut lin. 21. 19. εἰσίν B. 22. AE] corr. ex ΛE m. 2 P. 25. ταῖς] τῆς b. 26. αἱ] supra m. 2 B; εὐθεῖαι αἱ FV. EM] M corr. ex N m. 1 F. 27. ἔτι] om. φ. 29. KO] in ras. B; O in ras. m. 1 P.

Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ $ΚΕ$, $ΕΛ$ δυσὶ ταῖς $ΓΖ$, $ΖΝ$
 ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΚΕΛ$ γωνία τῆ
 ὑπὸ $ΓΖΝ$ ἐστὶν ἴση, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΕΗ$ τῆ
 ὑπὸ $ΓΖΝ$ ἐστὶν ἴση διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν $ΑΒ$, $ΓΔ$
 5 στερεῶν, ἴσον ἄρα ἐστὶ [καὶ ὅμοιον] τὸ $ΚΑ$ παραλληλό-
 γραμμον τῷ $ΓΝ$ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δη
 καὶ τὸ μὲν $ΚΜ$ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ καὶ
 ὅμοιον τῷ $ΓΡ$ [παραλληλογράμμῳ] καὶ ἔτι τὸ $ΕΟ$
 τῷ $ΔΖ$ · τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ $ΚΟ$ στερεοῦ
 10 τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ $ΓΔ$ στερεοῦ ἴσα ἐστὶ
 καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον
 ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον
 ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ $ΚΟ$ στερεὸν ὅλῳ τῷ
 $ΓΔ$ στερεῶ ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον. συμπεπληρώσθω
 15 τὸ $ΗΚ$ παραλληλόγραμμον, καὶ ἀπὸ βάσεων μὲν τῶν
 $ΗΚ$, $ΚΑ$ παραλληλογράμμων, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ
 τῷ $ΑΒ$ στερεὰ συμπεπληρώσθω τὰ $ΕΞ$, $ΑΠ$. καὶ
 ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν $ΑΒ$, $ΓΔ$ στερεῶν ἐστὶν
 ὡς ἡ $ΑΕ$ πρὸς τὴν $ΓΖ$, οὕτως ἡ $ΕΗ$ πρὸς τὴν $ΖΝ$,
 20 καὶ ἡ $ΕΘ$ πρὸς τὴν $ΖΡ$, ἴση δὲ ἡ μὲν $ΓΖ$ τῆ $ΕΚ$,
 ἡ δὲ $ΖΝ$ τῆ $ΕΛ$, ἡ δὲ $ΖΡ$ τῆ $ΕΜ$, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ
 $ΑΕ$ πρὸς τὴν $ΕΚ$, οὕτως ἡ $ΗΕ$ πρὸς τὴν $ΕΛ$ καὶ
 ἡ $ΘΕ$ πρὸς τὴν $ΕΜ$. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ $ΑΕ$ πρὸς τὴν $ΕΚ$,
 οὕτως τὸ $ΑΗ$ [παραλληλόγραμμον] πρὸς τὸ $ΗΚ$ παρ-

1. $ΚΕ$] $ΕΚ$ BFV. 4. $ΓΖΝ$] $ΖΝ$ in ras. B. ἐστὶν ἴση]
 supra m. 2 V. κατὰ κορυφὴν γάρ mg. m. 1 b. 5. καὶ ὅμοιον]
 postea add. mg. m. 1 P. 7. παραλληλόγραμμον] om. F.
 8. παραλληλογράμμῳ] om. P. $ΕΟ$] $Ο$ in ras. B. 9. $ΖΔ$
 BFV. στερεοῦ] εο eras. B. 10. ἴσα — 11. ἀπεναντίον]
 mg. m. 2 B. 10. ἐστὶ] εἰσίν P. 12. ἐστὶ] εἰσίν P; τέ ἐστὶ
 FV. τρία] λοιπὰ τρία V et bis F. 13. ἴσα] ἴσα τε b; τε
 add. m. 2 B. ἐστὶ] τε FV. In V lin. 12 τὰ δέ — 13. ὅμοια
 punctis del. 13. $ΚΟ$] $Ο$ in ras. V. 15. ἀπό] ἐπί b.

et quoniam duo latera KE , EA duobus ΓZ , ZN aequalia sunt, uerum etiam $\angle KEA = \Gamma ZN$ (quia $\angle AEH = \Gamma ZN$ propter similitudinem solidorum AB , $\Gamma\Delta$)¹⁾, erit $KA = \Gamma N$.²⁾ eadem de causa etiam KM parallelogrammum parallelogrammo ΓP aequale est et simile et praeterea EO parallelogrammo ΔZ . itaque tria parallelogramma solidi KO tribus paralle-



logrammis solidi $\Gamma\Delta$ aequalia sunt et similia. uerum in utroque solido tria parallelogramma tribus, quae iis opposita sunt, aequalia sunt et similia [prop. XXIV]. itaque totum solidum KO toti solido $\Gamma\Delta$ aequale est

et simile [def. 10]. expleatur parallelogrammum HK , et in basibus parallelogrammis HK , KA , altitudine autem eadem, qua AB , solida expleantur $E\Xi$, $\Lambda\Pi$. et quoniam propter similitudinem solidorum AB , $\Gamma\Delta$ est $AE:\Gamma Z = EH:ZN = E\Theta:ZP$ [def. 9; VI def. 1], et $\Gamma Z = EK$, $ZN = EA$, $ZP = EM$, erit $AE:EK$

1) Def. 9; VI def. 1. et $\angle AEH = KEA$ [I, 15].

2) VI, 14. eadem similia esse ut per se intellegitur, ita addi debuit. sed cfr. p. 75 not. 2.

17. τῶ] corr. ex τοῦ m. 1 V. 20. EΘ] Θ e corr. m. 1 b. ΓZ] $\Gamma\Gamma$ V. 22. AE] EA b. ἢ HE — 24. οὕτως] om. b. 24. παραλληλόγραμμον] om. P. τό] corr. ex τήν V.

αλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ HE πρὸς τὴν EA , οὕτως
 τὸ HK πρὸς τὸ KA , ὡς δὲ ἡ OE πρὸς EM , οὕτως
 τὸ PE πρὸς τὸ KM . καὶ ὡς ἄρα τὸ AH παραλλη-
 λόγραμμον πρὸς τὸ HK , οὕτως τὸ HK πρὸς τὸ KA
 5 καὶ τὸ PE πρὸς τὸ KM . ἀλλ' ὡς μὲν τὸ AH πρὸς
 τὸ HK , οὕτως τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ $EΞ$ στερεόν,
 ὡς δὲ τὸ HK πρὸς τὸ KA , οὕτως τὸ $ΞE$ στερεὸν
 πρὸς τὸ $ΠA$ στερεόν, ὡς δὲ τὸ PE πρὸς τὸ KM ,
 οὕτως τὸ $ΠA$ στερεὸν πρὸς τὸ KO στερεόν. καὶ ὡς
 10 ἄρα τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ $EΞ$, οὕτως τὸ $EΞ$ πρὸς
 τὸ $ΠA$ καὶ τὸ $ΠA$ πρὸς τὸ KO . ἐὰν δὲ τέσσαρα με-
 γέθη κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἢ, τὸ πρῶτον πρὸς
 τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ πρὸς τὸ δεύ-
 τερον. τὸ AB ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ KO τριπλασίονα
 15 λόγον ἔχει ἢπερ τὸ AB πρὸς τὸ $EΞ$. ἀλλ' ὡς τὸ
 AB πρὸς τὸ $EΞ$, οὕτως τὸ AH παραλληλόγραμμον
 πρὸς τὸ HK καὶ ἡ AE εὐθεῖα πρὸς τὴν EK . ὥστε
 καὶ τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ KO τριπλασίονα λόγον
 ἔχει ἢπερ ἡ AE πρὸς τὴν EK . ἴσον δὲ τὸ [μὲν] KO
 20 στερεὸν τῷ $ΓΔ$ στερεῷ, ἡ δὲ EK εὐθεῖα τῇ $ΓΖ$. καὶ
 τὸ AB ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ $ΓΔ$ στερεὸν τριπλασίονα
 λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ὁμόλογος αὐτοῦ πλευρὰ ἡ AE πρὸς
 τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν $ΓΖ$.

Τὰ ἄρα ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἐν τριπλα-
 25 σίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ὅπερ ἔδει
 δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι
 ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην,

1. HE] corr. ex NE m. 1 b. 2. τὴν EM BV .
 3. Post $ΠE$ add. παραλληλόγραμμον V et m. rec. F . 5. τὸ

$= HE : EA = \Theta E : EM$. sed $AE : EK = AH : HK$,
 $HE : EA = HK : KA$, $\Theta E : EM = PE : KM$ [VI, 1].

itaque $AH : HK = HK : KA = PE : KM$. uerum

$$AH : HK = AB : EZ, \quad HK : KA = ZE : PA,$$

$$PE : KM = PA : KO \text{ [prop. XXXII].}$$

quare $AB : EZ = EZ : PA = PA : KO$. sin quattuor magnitudines deinceps proportionales sunt, prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur quam ad secundam [V def. 10]. itaque $AB : KO = AB^3 : EZ^3$.

est autem $AB : EZ = AH : HK = AE : EK$. quare

$$AB : KO = AE^3 : EK^3. \quad \text{sed } KO = \Gamma A, \quad EK = \Gamma Z.$$

quare etiam $AB : \Gamma A = AE^3 : \Gamma Z^3$.

Ergo similia solida parallelepipedata triplicatam rationem habent quam latera correspondentia; quod erat demonstrandum.

Corollarium.¹⁾

Hinc manifestum est, si quattuor rectae inter se proportionales sint, esse, ut prima ad quartam, ita

1) Num hoc corollarium genuinum sit, iure ambigi potest.

KM] KM F. 7. τὸ KA] KA b. 11. KO] O non liquet, supra scr. Θ m. 1 b. 13. ἡπερ] τὸ πρῶτον φ. 14. KO] O in ras. B. τριπλασί- in ras. m. 1 P. 16. τὸ AH] τὸ τε AH F? (F hoc loco difficilis est lectu). AH] corr. ex AB m. 1 b; H e corr. B m. rec. 18. KO] O in ras. B; supra scr. Θ m. 1 b. 19. μέν] om. P. KO] O in ras. B. 20. στερεῶ] om. b. 21. στερεὸν ἄρα B. 23. αὐτοῦ πλευράν b. 24. παραλληλοεπ. V. 25. ἐστίν B. 28 sq. Ex porismate nullum uestigium est in F; in b totum in mg. est m. 1, add. οὕτως ἐν ἄλλω. 29. Ante ἀνάλογον ras. 1 litt. P.

οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν παραλληλεπίπεδον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, ἐπείπερ καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ πρὸς τὴν δευτέραν.

5

λδ'.

Τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

10 Ἔστω ἴσα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ AB , $\Gamma\Delta$. λέγω, ὅτι τῶν AB , $\Gamma\Delta$ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ $E\Theta$ βάσις πρὸς τὴν $N\Pi$ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ $\Gamma\Delta$ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ AB στερεοῦ ὕψος.

15 Ἔστωσαν γὰρ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ AH , EZ , AB , ΘK , ΓM , $N\Xi$, $O\Delta$, ΠP πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $E\Theta$ βάσις πρὸς τὴν $N\Pi$ βάσιν, οὕτως ἡ ΓM πρὸς τὴν AH .

20 εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ $E\Theta$ βάσις τῇ $N\Pi$ βάσει, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ AB στερεὸν τῷ $\Gamma\Delta$ στερεῷ ἴσον, ἐστὶ καὶ ἡ ΓM τῇ AH ἴση. τὰ γὰρ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστὶν ὡς αἱ βά-

1. οὕτως FVb. παραλληλοεπ. V. 3. ἐπειδήπερ BV.
 5. λ seq. ras. 1 litt. F. 7. ὕψει Vb et seq. ras. 3 litt. φ.
 12. ὕψει FVb. 16. AB] A e corr. B. ΘK] corr. ex
 ΘH m. 1 b. ΓM] supra scr. N m. 1 b. 17. βάσεις b.
 αὐτῶν] om. b. 18. AH] inter A et H 1 litt. eras. P.
 20. ἐστὶν B. ἐστὶ] ἐστὶ Vbφ. 21. τὰ γὰρ — 22. βάσεις]
 om. BV; hab. Pb et fuerunt in F, sed nihil relictum est nisi
 το υψος στερε, quibus add. φ: -ον τοῖς ὕψει omissis uerbis εἰ
 γὰρ — οὐσῶν p. 108, 1.

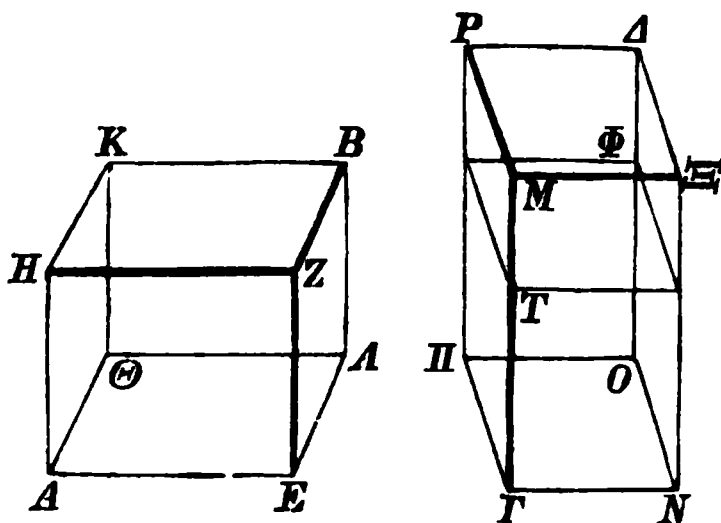
solidum parallelepipedum in prima descriptum ad solidum in secunda simile et similiter descriptum, quoniam etiam prima ad quartam triplicatam habet rationem quam ad secundam.

XXXIV.

Aequalium solidorum parallelepipedorum bases in contraria ratione sunt atque altitudines; et quorum solidorum parallelepipedorum bases in contraria ratione sunt atque altitudines, ea aequalia sunt.

Sint $AB, \Gamma\Delta$ aequalia solida parallelepipeda. dico, solidorum parallelepipedorum $AB, \Gamma\Delta$ bases in contraria ratione esse atque altitudines, et esse, ut $E\Theta$ ad $N\Pi$, ita altitudinem solidi $\Gamma\Delta$ ad altitudinem solidi AB .

Prius enim rectae eminentes $AH, EZ, AB, \Theta K, \Gamma M, N\Xi, O\Delta, \Pi P$ ad bases suas perpendiculares sint. dico, esse $E\Theta : N\Pi = \Gamma M : AH$.



iam si $E\Theta = N\Pi$, et $AB = \Gamma\Delta$, erit etiam $\Gamma M = AH$; nam solida parallelepipeda, quae eandem ha-

σεις [εἰ γὰρ τῶν $E\Theta$, $N\Pi$ βάσεων ἴσων οὐσῶν μὴ
εἶη τὰ AH , ΓM ὕψη ἴσα, οὐδ' ἄρα τὸ AB στερεὸν
ἴσον ἔσται τῷ $\Gamma\Delta$. ὑπόκειται δὲ ἴσον· οὐκ ἄρα ἄνισόν
ἔστι τὸ ΓM ὕψος τῷ AH ὕψει· ἴσον ἄρα]. καὶ ἔσται
5 ὡς ἡ $E\Theta$ βάσις πρὸς τὴν $N\Pi$, οὕτως ἡ ΓM πρὸς
τὴν AH , καὶ φανερόν, ὅτι τῶν AB , $\Gamma\Delta$ στερεῶν παρ-
αλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.
Μὴ ἔστω δὴ ἴση ἡ $E\Theta$ βάσις τῇ $N\Pi$ βάσει, ἀλλ'
ἔστω μείζων ἡ $E\Theta$. ἔστι δὲ καὶ τὸ AB στερεὸν τῷ
10 $\Gamma\Delta$ στερεῷ ἴσον· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓM τῆς AH
[εἰ γὰρ μή, οὐδ' ἄρα πάλιν τὰ AB , $\Gamma\Delta$ στερεὰ ἴσα
ἔσται· ὑπόκειται δὲ ἴσα]. κείσθω οὖν τῇ AH ἴση ἡ
 ΓT , καὶ συμπληρώσθω ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς $N\Pi$,
ὕψους δὲ τοῦ ΓT , στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ $\Phi\Gamma$.
15 καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ AB στερεὸν τῷ $\Gamma\Delta$ στερεῷ,
ἔξωθεν δὲ τὸ $\Gamma\Phi$, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν
ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Phi$
στερεόν, οὕτως τὸ $\Gamma\Delta$ στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Phi$ στερεόν.
ἀλλ' ὡς μὲν τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Phi$ στερεόν,
20 οὕτως ἡ $E\Theta$ βάσις πρὸς τὴν $N\Pi$ βάσιν· ἰσοῦψῃ γὰρ
τὰ AB , $\Gamma\Phi$ στερεά· ὡς δὲ τὸ $\Gamma\Delta$ στερεὸν πρὸς τὸ
 $\Gamma\Phi$ στερεόν, οὕτως ἡ $M\Pi$ βάσις πρὸς τὴν $T\Pi$ βάσιν
καὶ ἡ ΓM πρὸς τὴν $I'T$ · καὶ ὡς ἄρα ἡ $E\Theta$ βάσις
πρὸς τὴν $N\Pi$ βάσιν, οὕτως ἡ $M\Gamma$ πρὸς τὴν ΓT . ἴση
25 δὲ ἡ ΓT τῇ AH · καὶ ὡς ἄρα ἡ $E\Theta$ βάσις πρὸς τὴν

2. εἶη] ἔστω φ. 3. ἔσται] ἐστὶ b. $\Gamma\Delta$ στερεῷ FV.
5. $N\Pi$ βάσιν b. 7. ὕψει Vbφ. 10. ἐστὶ] om. V.
11. πάλιν] supra m. rec. V. 12. ἔσονται P. ὑπόκεινται
BV. AH] H in ras. m. 1 P. 14. ΓT] Γ in ras. B.
παραλληλοεπ. V. $\Phi\Gamma$] Γ in ras. B. 16. ἔξωθεν δέ] ἄλλο
δέ τί ἐστὶ b, ἄλλο δέ τι V, ἄλλο τι supra scr. δέ m. 2 B.
 $\Phi\Gamma$ Bb, et F, sed corr. Dein add. στερεόν FV. In F uerba

bent altitudinem, inter se eandem rationem habent quam bases [prop. XXXII].¹⁾ et erit

$$E\Theta : N\Pi = \Gamma M : AH,$$

et adparet, solidorum AB , $\Gamma\Delta$ parallelepipedorum bases in contraria ratione esse atque altitudines.

iam ne sit $E\Theta = N\Pi$, sed $E\Theta > N\Pi$. uerum etiam $AB = \Gamma\Delta$. itaque etiam $\Gamma M > AH$.²⁾

ponatur igitur $\Gamma T = AH$, et in basi $N\Pi$, altitudine autem ΓT expleatur solidum parallelepipedum $\Phi\Gamma$. et quoniam $AB = \Gamma\Delta$, extrinsecus autem adsumptum est $\Gamma\Phi$, et aequalia ad idem eandem rationem habent [V, 7], erit $AB : \Gamma\Phi = \Gamma\Delta : \Gamma\Phi$. uerum $AB : \Gamma\Phi = E\Theta : N\Pi$ [prop. XXXII]; nam solida AB , $\Gamma\Phi$ eandem habent altitudinem. et $\Gamma\Delta : \Gamma\Phi = M\Pi : T\Pi$ [prop. XXV] = $\Gamma M : \Gamma T$ [VI, 1]. quare etiam $E\Theta : N\Pi = M\Gamma : \Gamma T$. sed $\Gamma T = AH$. itaque etiam

1) Ita concludi uoluit Euclides: adparet, solida aequalia eandem rationem habere quam bases et ipsas aequales, nec hoc fieri potest, nisi altitudines et ipsae aequales erunt. et hanc concludendi rationem recte, sed paullo breuius indicauit citata prop. 32. hoc interpreti alicui satis antiquo ansam dedit uerbis $\epsilon\lambda\ \gamma\acute{\alpha}\rho$ — $\iota\sigma\omicron\nu\ \acute{\alpha}\rho\alpha$ lin. 1—4 interpolatis mentem Euclidis uerbose explicandi. quo facto in codd. deterioribus uerba illa genuina $\tau\grave{\alpha}\ \gamma\acute{\alpha}\rho$ — $\beta\acute{\alpha}\sigma\epsilon\iota\varsigma$ p. 106, 21—22 deleta sunt, cum intellexeretur, duplicem causae indicationem per $\gamma\acute{\alpha}\rho$ illatam ferri non posse. illo loco damnato sequitur, uerba simillima $\epsilon\lambda\ \gamma\acute{\alpha}\rho$ — $\iota\sigma\alpha$ p. 108, 11—12 et ipsa esse interpolata. et per se suspectissima sunt, quippe quae causam idoneam eius rei, quam confirmare debeant, minime contineant.

2) Hoc uia indirecta ex prop. 31 demonstrari potest, cum adpareat, solida augeri et basibus et altitudinibus auctis.

$\acute{\alpha}\lambda\lambda\omicron\ \delta\acute{\epsilon}\ \acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\ \tau\omicron\ \Phi\Gamma\ \sigma\tau\epsilon\omicron\upsilon\sigma\omicron\nu\ \text{mg. m. 1, ut uidetur. 17. } \sigma\tau\epsilon\omicron\upsilon\sigma\omicron\nu]$ om. V. 18. $\omicron\upsilon\tau\omega$ BV, comp. F. 22. $\sigma\tau\epsilon\omicron\upsilon\sigma\omicron\nu]$ ins. m. 2 F. $T\Pi]$ mut. in ΠT V, ΠT Bb. 23. $M\Gamma$ BFV. 24. $\beta\acute{\alpha}\sigma\iota\nu]$ supra m. 2 F. $M\Gamma]$ $N\Gamma$ B.

$ΝΠ$ βάσιν, οὕτως ἢ $ΜΓ$ πρὸς τὴν $ΑΗ$. τῶν $ΑΒ$, $ΓΔ$ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Πάλιν δὴ τῶν $ΑΒ$, $ΓΔ$ στερεῶν παραλληλεπιπέδων
 5 ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἢ $ΕΘ$ βάσις πρὸς τὴν $ΝΠ$ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ $ΓΔ$ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ $ΑΒ$ στερεοῦ ὕψος· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $ΑΒ$ στερεὸν τῷ $ΓΔ$ στερεῷ.

Ἔστωσαν [γὰρ] πάλιν αἱ ἐφεστηκυῖαι πρὸς ὀρθὰς
 10 ταῖς βάσεσιν. καὶ εἰ μὲν ἴση ἐστὶν ἢ $ΕΘ$ βάσις τῇ $ΝΠ$ βάσει, καὶ ἐστὶν ὡς ἢ $ΕΘ$ βάσις πρὸς τὴν $ΝΠ$ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ $ΓΔ$ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ $ΑΒ$ στερεοῦ ὕψος, ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ $ΓΔ$ στερεοῦ ὕψος τῷ τοῦ $ΑΒ$ στερεοῦ ὕψει. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων
 15 βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒ$ στερεὸν τῷ $ΓΔ$ στερεῷ.

Μὴ ἔστω δὴ ἢ $ΕΘ$ βάσις τῇ $ΝΠ$ [βάσει] ἴση, ἀλλ' ἔστω μείζων ἢ $ΕΘ$ · μείζον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ $ΓΔ$ στερεοῦ
 20 ὕψος τοῦ τοῦ $ΑΒ$ στερεοῦ ὕψους, τουτέστιν ἢ $ΓΜ$ τῆς $ΑΗ$. κείσθω τῇ $ΑΗ$ ἴση πάλιν ἢ $ΓΤ$, καὶ συμπληρώσθω ὁμοίως τὸ $ΓΦ$ στερεόν. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ $ΕΘ$ βάσις πρὸς τὴν $ΝΠ$ βάσιν, οὕτως ἢ $ΜΓ$ πρὸς τὴν $ΑΗ$, ἴση δὲ ἢ $ΑΗ$ τῇ $ΓΤ$, ἐστὶν ἄρα ὡς ἢ $ΕΘ$
 25 βάσις πρὸς τὴν $ΝΠ$ βάσιν, οὕτως ἢ $ΓΜ$ πρὸς τὴν $ΓΤ$. ἀλλ' ὡς μὲν ἢ $ΕΘ$ [βάσις] πρὸς τὴν $ΝΠ$ βάσιν, οὕτως τὸ $ΑΒ$ στερεὸν πρὸς τὸ $ΓΦ$ στερεόν· ἰσοῦψῃ γὰρ ἐστὶ τὰ $ΑΒ$, $ΓΦ$ στερεά· ὡς δὲ ἢ $ΓΜ$ πρὸς τὴν

1. $ΓΜ$ b. $ΑΒ$, $ΓΔ$] om. F V. 2. ἄρα] δε F.
 3. ὕψει V b. 4. $ΓΔ$ ἄρα b. παραλληλεπιπέδων] om. V.

$E\Theta : N\Pi = M\Gamma : AH$. ergo solidorum parallelepipedorum AB , $\Gamma\Delta$ bases in contraria ratione sunt atque altitudines.

Rursus solidorum parallelepipedorum AB , $\Gamma\Delta$ bases in contraria ratione sint atque altitudines, et sit ut $E\Theta$ ad $N\Pi$, ita altitudo solidi $\Gamma\Delta$ ad altitudinem solidi AB . dico, esse $AB = \Gamma\Delta$.

rursus rectae eminentes ad bases perpendiculares sint. et si $E\Theta = N\Pi$, et est ut basis $E\Theta$ ad basim $N\Pi$, ita altitudo solidi $\Gamma\Delta$ ad altitudinem solidi AB , erit altitudo solidi $\Gamma\Delta$ altitudini solidi AB aequalis. uerum solida parallelepipeda in aequalibus basibus collocata et eandem altitudinem habentia inter se aequalia sunt [prop. XXXI]. ergo $AB = \Gamma\Delta$.

iam ne sit $E\Theta = N\Pi$, sed $E\Theta > N\Pi$. itaque etiam altitudo solidi $\Gamma\Delta$ maior est altitudine solidi AB [p. 109 not. 2], hoc est $\Gamma M > AH$. ponatur rursus $\Gamma T = AH$, et similiter expleatur solidum $\Gamma\Phi$. quoniam $E\Theta : N\Pi = M\Gamma : AH$, et est $AH = \Gamma T$, erit $E\Theta : N\Pi = \Gamma M : \Gamma T$. uerum $E\Theta : N\Pi = AB : \Gamma\Phi$ [prop. XXXII]; nam solida AB , $\Gamma\Phi$ eandem altitudi-

5. ἀντιπεπόνθασι b. ὕψει V b. 6. βάσιν] om. V.
 $\Gamma\Delta$] in ras. V. 7. AB] in ras. V. λέγω — 8. ἐστὶ] mg. φ.
 9. γάρ] om. P. 10. βάσει V b φ. ἐστίν] om. V φ.
 ἢ $E\Theta$ βάσις] mg. φ. 12. τό] (prius) mg. m. 2 P. 13. ἴσον
 ἄρα — 14. ὕψει] om. φ. 13. ἐστὶ] om. V. καὶ] om. b.
 14. δέ] δ' b. 15. βάσεων ὄντα Theon (BF V b). παρ-
 αλληλοεπ. V. 16. ἐστὶ] ἐστίν P. 18. βάσει] om. BF V b.
 19. μείζον] μείζων F. ἐστὶ] om. V. 21. τῆς] τῆ b.
 22. Ante ἐπεὶ add. καὶ m. 2 V. 23. ΓM b.
 25. ΓM] PB, V m. 2; $M\Gamma$ b, V m. 1, F in mg. m. 2.
 πρὸς — 26. βάσιν] om. F; in mg. quaedam euan. 26. βάσις]
 om. P. 27. οὕτως — πρὸς] φ.

ΓΤ, οὕτως ἢ τε ΜΠ βάσις πρὸς τὴν ΠΤ βάσιν καὶ
τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν. καὶ ὡς ἄρα
τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, οὕτως τὸ ΓΔ
στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν· ἐκάτερον ἄρα τῶν ΑΒ,
5 ΓΔ πρὸς τὸ ΓΦ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα
ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Μὴ ἔστωσαν δὲ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΖΕ, ΒΛ, ΗΑ,
ΘΚ, ΞΝ, ΔΟ, ΜΓ, ΡΠ πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν
αὐτῶν, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Ζ, Η, Β, Κ, Ξ, Μ,
10 Δ, Ρ σημείων ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΕΘ, ΝΠ ἐπίπεδα κάθετοι
καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ Σ, Τ, Υ,
Φ, Χ, Ψ, Ω, ς, καὶ συμπληρώσθω τὰ ΖΦ, ΞΩ
στερεά· λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἴσων ὄντων τῶν ΑΒ, ΓΔ
στερεῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ
15 ἐστὶν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ
τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος.

Ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ,
ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΒΤ ἐστὶν ἴσον· ἐπὶ τε γὰρ τῆς
αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος
20 [ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν]·
τὸ δὲ ΓΔ στερεὸν τῷ ΔΨ ἐστὶν ἴσον· ἐπὶ τε γὰρ
πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΞ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ
ὕψος [ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐ-
θειῶν]· καὶ τὸ ΒΤ ἄρα στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῷ ἴσον
25 ἐστίν [τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ὧν
τὰ ὕψη πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντι-

2. στερεόν] (alt.) om. B. 6. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] del.
August. 7. μῆ] e corr. m. 2 V. αἱ] (prius) om. F V. ΒΛ]
supra scr. Δ m. 1 b. 8. ΘΚ] supra scr. Α? m. 1 b.
9. Κ] corr. ex Γ V. 10. ἐπεὶ F, et V, sed corr. διά] om.
B. ΝΠ βάσεων B. 11. συμβαλέτωσαν P V. Σ] postea ins.
B; ras. 1 litt. b. 12. ς] renou. m. 2 B. Post ς in fine lin.

nem habent. et $\Gamma M : \Gamma T = M\Pi : \Pi T$ [VI, 1] = $\Gamma\Delta : \Gamma\Phi$ [prop. XXV]. quare etiam $AB : \Gamma\Phi = \Gamma\Delta : \Gamma\Phi$. itaque utrumque AB , $\Gamma\Delta$ ad $\Gamma\Phi$ eandem rationem habet. ergo $AB = \Gamma\Delta$ [V, 9].

Iam rectae eminentes ZE , BA , HA , ΘK , ΞN , ΔO , $M\Gamma$, $P\Pi$ ad bases suas perpendiculares ne sint, et ducantur a punctis Z , H , B , K , Ξ , M , Δ , P ad plana per $E\Theta$, $N\Pi$ ducta perpendiculares, et cum planis in punctis Σ , T , Υ , Φ , X , Ψ , Ω , ς concurrant, et expleantur solida $Z\Phi$, $\Xi\Omega$. dico, sic quoque, si $AB = \Gamma\Delta$, bases in contraria ratione esse atque altitudines, et esse ut $E\Theta$ ad $N\Pi$, ita altitudinem solidi $\Gamma\Delta$ ad altitudinem solidi AB .

quoniam $AB = \Gamma\Delta$, et $AB = BT$ [prop. XXIX—XXX] (nam in eadem basi sunt ZK et eandem habent altitudinem)¹⁾, et $\Gamma\Delta = \Delta\Psi$ [id.] (nam rursus in eadem basi sunt $P\Xi$ et eandem habent altitudinem), erit etiam $BT = \Delta\Psi$. erit igitur²⁾ ut ZK basis ad

1) Rectissime obseruauit Simsonus p. 402: „inepte excluditur alter casus“. quare cum eo uerba $\omega\nu\ \alpha\iota\ \text{---}\ \epsilon\nu\theta\epsilon\iota\omega\nu$ lin. 20, 23 — 24, p. 116, 7—8 pro interpolatione imperita habenda sunt.

2) Quae sequuntur uerba $\tau\omega\nu\ \delta\epsilon\ \text{---}\ \upsilon\psi\epsilon\sigma\iota\nu$ p. 112, 25 — p. 114, 1 et p. 116, 2—4 inepta sunt, quia altitudines semper ad bases perpendiculares sint necesse est, quae est iusta eiusdem Simsoni obiectio. sed $\tau\alpha\ \upsilon\psi\eta$ cum Augusto in $\alpha\iota\ \epsilon\phi\epsilon\sigma\tau\omega\sigma\alpha\iota$ mutare temerarium est; quare uerba illa delenda sunt.

$\kappa\alpha\iota$, dein mg. m. 2 add. $\sigma\eta\mu\epsilon\iota\alpha$ F; $\varsigma\ \sigma\eta\mu\epsilon\iota\alpha$ V. $\Xi\Omega$] Ω in ras. V. 13. $\delta\tau\iota$] $\delta\eta$ V. 14. $\upsilon\psi\epsilon\sigma\iota$ V b. 15. $N\Pi$] ΠN in ras. V. 17. Post $\epsilon\pi\epsilon\iota$ add. $\gamma\acute{\alpha}\rho$ BFb, et supra scr. m. 1, sed deletum V. $\tau\acute{o}$] corr. ex $\tau\omega$ m. 1 V. 18. BT] T in ras. V. 19. $\epsilon\lambda\iota\sigma\iota\nu$ P. $\upsilon\pi\acute{o}$] $\epsilon\pi\acute{\iota}$ V. 22. $\epsilon\lambda\iota\sigma\iota$] $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ comp. b. $P\Xi$] ΞP Bb. $\upsilon\pi\acute{o}$] $\epsilon\pi\acute{\iota}$ V. 24. Post $\tau\acute{o}$ del. $\tau\omega\upsilon$ F. BT] B e corr. V. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ $\acute{\iota}\sigma\omicron\nu$ V. 25. $\tau\omega\nu$] corr. ex $\omega\nu$ m. 2 F; $\omega\nu$ V. $\omega\nu$] om. V. 26. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] $\epsilon\lambda\iota\sigma\iota$ b.

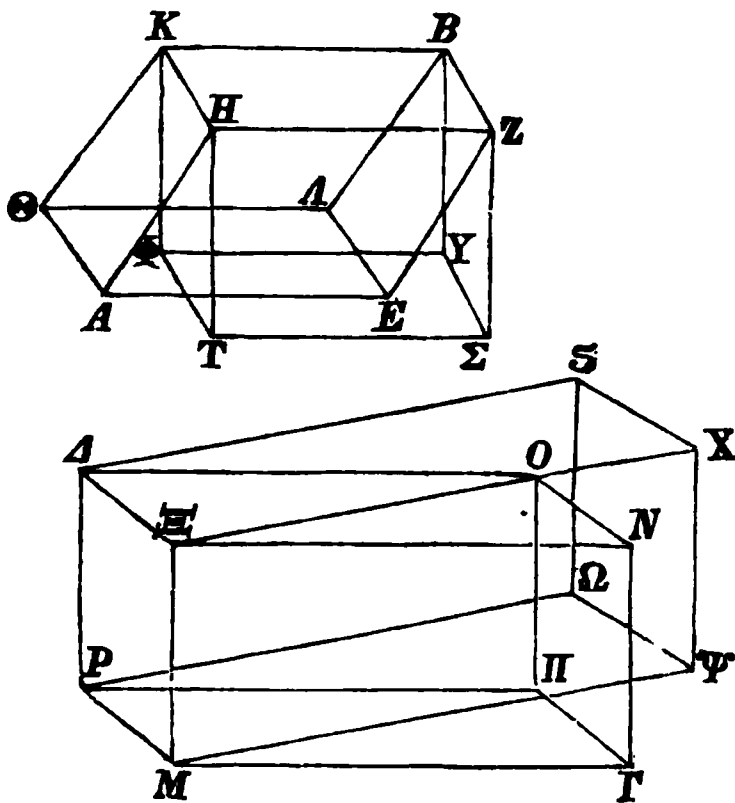
πεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν]. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ
 ZK βάση πρὸς τὴν ΞP βάση, οὕτως τὸ τοῦ $\Delta \Psi$
στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ BT στερεοῦ ὕψος. ἴση δὲ
ἡ μὲν ZK βάση τῇ $E\Theta$ βάσει, ἡ δὲ ΞP βάση τῇ
5 NI βάσει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $E\Theta$ βάση πρὸς τὴν NI
βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ $\Delta \Psi$ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ
 BT στερεοῦ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν $\Delta \Psi$,
 BT στερεῶν καὶ τῶν $\Delta \Gamma$, BA · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $E\Theta$
βάσις πρὸς τὴν NI βάση, οὕτως τὸ τοῦ $\Delta \Gamma$ στερεοῦ
10 ὕψος πρὸς τὸ τοῦ AB στερεοῦ ὕψος. τῶν AB , $\Gamma \Delta$
ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ
βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Πάλιν δὴ τῶν AB , $\Gamma \Delta$ στερεῶν παραλληλεπιπέδων
ἀντιπεπονθέτως αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς
15 ἡ $E\Theta$ βάση πρὸς τὴν NI βάση, οὕτως τὸ τοῦ $\Gamma \Delta$
στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ AB στερεοῦ ὕψος· λέγω,
ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ AB στερεὸν τῷ $\Gamma \Delta$ στερεῷ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἔστιν ὡς
ἡ $E\Theta$ βάση πρὸς τὴν NI βάση, οὕτως τὸ τοῦ $\Gamma \Delta$
20 στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ AB στερεοῦ ὕψος, ἴση δὲ
ἡ μὲν $E\Theta$ βάση τῇ ZK βάσει, ἡ δὲ NI τῇ ΞP ,
ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ZK βάση πρὸς τὴν ΞP βάση, οὕτως
τὸ τοῦ $\Gamma \Delta$ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ AB στερεοῦ
ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν AB , $\Gamma \Delta$ στερεῶν
25 καὶ τῶν BT , $\Delta \Psi$ · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ZK βάση πρὸς
τὴν ΞP βάση, οὕτως τὸ τοῦ $\Delta \Psi$ στερεοῦ ὕψος πρὸς
τὸ τοῦ BT στερεοῦ ὕψος. τῶν BT , $\Delta \Psi$ ἄρα στε-

2. τὴν ΞP] corr. ex τη $N \Xi P$ V. 3. BT] $T e$ corr. V.
4. $E\Theta$] e corr. V. 5. βάσει ἐστὶν ἴση V. τῇ NI
βάσει b. 7. στερεοῦ] om. B. 10. $\Gamma \Delta$] in ras. P.
11. στερεῶν ἄρα B. 12. ὕψεσι V b φ. 14. ὕψεσι F V b.

basim ΞP , ita altitudo solidi $\Delta \Psi$ ad altitudinem solidi BT [p. 110, 1 sq.]. uerum $ZK = E\Theta$, $\Xi P = N\Pi$.



erit igitur ut $E\Theta$ basis ad basim $N\Pi$, ita altitudo solidi $\Delta \Psi$ ad altitudinem solidi BT . sed solidorum $\Delta \Psi$, BT et $\Delta \Gamma$, BA eadem est altitudo. quare erit ut basis $E\Theta$ ad basim $N\Pi$, ita altitudo solidi $\Delta \Gamma$ ad altitudinem solidi AB . ergo solidorum AB , $\Gamma \Delta$ parallelepipedorum bases in con-

traria ratione sunt atque altitudines.

Iam rursus solidorum parallelepipedorum AB , $\Gamma \Delta$ bases in contraria ratione sint atque altitudines, et sit ut $E\Theta$ basis ad basim $N\Pi$, ita altitudo solidi $\Gamma \Delta$ ad altitudinem solidi AB . dico, esse $AB = \Gamma \Delta$.

iisdem enim comparatis, quoniam est ut basis $E\Theta$ ad $N\Pi$ basim, ita altitudo solidi $\Gamma \Delta$ ad altitudinem solidi AB , et $E\Theta = ZK$, $N\Pi = \Xi P$, erit ut basis ZK ad ΞP basim, ita altitudo solidi $\Gamma \Delta$ ad altitudinem solidi AB . sed solidorum AB , $\Gamma \Delta$ et BT , $\Delta \Psi$ eadem est altitudo. erit igitur ut ZK basis ad basim ΞP , ita altitudo solidi $\Delta \Psi$ ad altitudinem solidi BT . itaque solidorum parallelepipedorum BT , $\Delta \Psi$ bases

17. ἴσον] om. V φ. ἴσον τῷ V φ. 19. ΓΔ] bis φ.
 23. AB] BA FV. 27. BT] (alt.) T in ras. V.

ρεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς
 ὕψεσιν [ᾧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων τὰ ὕψη
 πρὸς ὀρθάς ἐστι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασιν
 δὲ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα]. ἴσον ἄρα
 5 ἐστὶ τὸ BT στερεὸν τῷ $\Delta\Psi$ στερεῷ. ἀλλὰ τὸ μὲν
 BT τῷ BA ἴσον ἐστίν· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως
 [εἰσι] τῆς ZK καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [ᾧν αἱ ἐφεστῶ-
 σαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν]. τὸ δὲ $\Delta\Psi$
 στερεὸν τῷ $\Delta\Gamma$ στερεῷ ἴσον ἐστίν [ἐπὶ τε γὰρ πάλιν
 10 τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς ΞP καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος
 καὶ οὐκ ἐν ταῖς αὐταῖς εὐθείαις]. καὶ τὸ AB ἄρα στε-
 ρεὸν τῷ $\Gamma\Delta$ στερεῷ ἐστὶν ἴσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λε'.

Ἐὰν ᾧσι δύο γωνίαί ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ
 15 τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐπι-
 σταθῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν
 ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρῃ, ἐπὶ δὲ
 τῶν μετεώρων ληφθῆ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ'
 αὐτῶν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσὶν αἱ ἐξ ἀρ-
 20 χῆς γωνίαί, κἀθετοὶ ἀχθῶσιν, ἀπὸ δὲ τῶν γε-
 νομένων σημείων ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐπὶ τὰς ἐξ
 ἀρχῆς γωνίας ἐπιξευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἴσας γω-
 νίας περιέξουσιν μετὰ τῶν μετεώρων.

Ἔστωσαν δύο γωνίαί εὐθύγραμμοι ἴσαι αἱ ὑπὸ
 25 $BA\Gamma$, $E\Delta Z$, ἀπὸ δὲ τῶν A , Δ σημείων μετέωροι
 εὐθεῖαι ἐφεστάτωσαν αἱ AH , ΔM ἴσας γωνίας περι-
 έχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρῃ,

2. τὰ ὕψη] αἱ ἐφεστηκυῖαι August. 3. ἐστι] φ, comp.
 b, ἐστὶν P, εἰσι BV. ἀντιπεπόνθασιν PV. 4. δέ] supra

in contraria ratione sunt atque altitudines. quare $BT = \triangle \Psi$ [p. 112, 5 sq.]. sed $BT = BA$ [prop. XXIX—XXX]; nam in eadem basi sunt ZK et eandem habent altitudinem; et $\triangle \Psi = \triangle \Gamma$ [id.].¹⁾ ergo $AB = \Gamma \Delta$; quod erat demonstrandum.

XXXV.

Si datis duobus angulis planis aequalibus in uerticibus eorum rectae sublimes eriguntur angulos singulos singulis aequales cum iis, quae a principio erant, comprehendentes, et in erectis puncta quaeuis sumuntur, et ab iis ad plana, in quibus sunt anguli illi, perpendiculares ducuntur, et a punctis, quae in planis oriuntur, ad angulos²⁾ a principio datos rectae ducuntur, hae cum erectis aequales angulos comprehendent.

Duo anguli rectilinei sint BAG , $E\Delta Z$, et a punctis A , Δ rectae AH , ΔM sublimes erigantur angulos singulos singulis aequales cum iis, quae a principio

1) Uerba *ἐπί τε — εὐθείαις* lin. 9—11 subditiua existimo.

2) H. e. ad uertices eorum.

scr. m. 2 V. 6. BA] AB P. 7. *εἶσι*] om. P. 9. $\tau\tilde{\omega}$
 $\Delta \Gamma$ — 10. *βάσεως*] F, praecedentibus iisdem uerbis a manu φ .
 9. $\Gamma \Delta$ b. *τῆς αὐτῆς πάλιν* V et φ (non F). 10. *ἔστι*
 comp. b. $P\Xi$ b. 11. *ἄρα*] om. V, ins. m. 2 F.
 12. $\Delta \Gamma$ B. 13. *λε'*] non liquet in F. 14. *ᾧσιν* PB.
 Post *ἐπί* del. *πέδω* m. 1 P. 17. *ἐκατέραν*] *-αν* in ras. B.
 19. *ἐπί τά*] om. F. *εἶσι* b. 21. *ἐν*] *ὑπὸ τῶν καθέτων*
ἐν Theon (BFVb). 23. *μετεωροτέρων* V φ . 26. AH] H
 in ras. B. ΔH , AM F.

τὴν μὲν ὑπὸ $M\Delta E$ τῆ ὑπὸ HAB , τὴν δὲ ὑπὸ $M\Delta Z$
 τῆ ὑπὸ HAG , καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῶν AH , ΔM τυ-
 χόντα σημεῖα τὰ H , M , καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν H , M
 σημείων ἐπὶ τὰ διὰ τῶν BAG , $E\Delta Z$ ἐπίπεδα κάθετοι
 5 αὶ HA , MN , καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ
 τὰ N , Δ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αὶ AA , $N\Delta$. λέγω, ὅτι
 ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ HAA γωνία τῆ ὑπὸ $M\Delta N$ γωνία.

Κείσθω τῆ ΔM ἴση ἡ $A\Theta$, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ
 σημείου τῆ HA παράλληλος ἡ ΘK . ἡ δὲ HA κάθετός
 10 ἐστὶν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν BAG ἐπίπεδον· καὶ ἡ ΘK ἄρα
 κάθετός ἐστὶν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν BAG ἐπίπεδον. ἤχθω-
 σαν ἀπὸ τῶν K , N σημείων ἐπὶ τὰς AB , AG , ΔZ ,
 ΔE εὐθείας κάθετοι αὶ $K\Gamma$, NZ , KB , NE , καὶ
 ἐπεξεύχθωσαν αὶ $\Theta\Gamma$, ΓB , MZ , ZE . ἐπεὶ το ἀπὸ
 15 τῆς ΘA ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘK , KA , τῶ δὲ ἀπὸ
 τῆς KA ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $K\Gamma$, ΓA , καὶ τὸ ἀπὸ
 τῆς ΘA ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘK , $K\Gamma$, ΓA .
 τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΘK , $K\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\Theta\Gamma$.
 τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘA ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $\Theta\Gamma$, ΓA .
 20 ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\Theta\Gamma A$ γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ
 καὶ ἡ ὑπὸ ΔZM γωνία ὀρθὴ ἐστὶν. ἴση ἄρα ἐστὶν
 ἡ ὑπὸ $A\Gamma\Theta$ γωνία τῆ ὑπὸ ΔZM . ἐστὶ δὲ καὶ ἡ
 ὑπὸ $\Theta A\Gamma$ τῆ ὑπὸ $M\Delta Z$ ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστὶ
 τὰ $M\Delta Z$, $\Theta A\Gamma$ δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα
 25 ἑκατέραν ἑκατέρα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην
 τὴν ὑποτείνουσιν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν τὴν
 ΘA τῆ $M\Delta$ · καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς

2. AH] HA V. 4. σημείων] om. V. BAG] B in ras. B.
 5. συμβαλλέτωσαν V et supra scr. λ m. 1 P. 6. N, Δ] supra Δ
 quaedam euan. F m. 2, ras. V. καί] σημεῖα καὶ V. 7. ἴση
 ἐστίν] ins. m. 1 F, om. V. γωνία τῆ ὑπὸ $M\Delta N$] in mg. trans-

πλευραῖς ἴσας ἔξει ἑκατέραν ἑκατέρα. ἴση ἄρα ἐστὶν
 ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΔΖ$. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ $ΑΒ$
 τῇ $ΔΕ$ ἐστὶν ἴση [οὕτως· ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΘΒ$,
 $ΜΕ$. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΘ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ
 5 τῶν $ΑΚ$, $ΚΘ$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς $ΑΚ$ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ
 τῶν $ΑΒ$, $ΒΚ$, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΚ$, $ΚΘ$ ἴσα
 ἐστὶ τῷ ἀπὸ $ΑΘ$. ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΒΚ$, $ΚΘ$ ἴσον
 ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΘ$. ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ $ΘΚΒ$ γωνία
 διὰ τὸ καὶ τὴν $ΘΚ$ κάθετον εἶναι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον
 10 ἐπίπεδον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΑΘ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν
 $ΑΒ$, $ΒΘ$. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΑΒΘ$ γωνία. διὰ
 τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΔΕΜ$ γωνία ὀρθὴ ἐστίν.
 ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΑΘ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΕΔΜ$ ἴση·
 ὑπόκεινται γάρ· καὶ ἐστὶν ἡ $ΑΘ$ τῇ $ΔΜ$ ἴση· ἴση
 15 ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΔΕ$]. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ
 μὲν $ΑΓ$ τῇ $ΔΖ$, ἡ δὲ $ΑΒ$ τῇ $ΔΕ$, δύο δὲ αἱ $ΓΑ$,
 $ΑΒ$ δυσὶ ταῖς $ΖΔ$, $ΔΕ$ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ γωνία
 ἡ ὑπὸ $ΓΑΒ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΖΔΕ$ ἐστὶν ἴση· βάσεις
 ἄρα ἡ $ΒΓ$ βάσει τῇ $ΕΖ$ ἴση ἐστὶ καὶ τὸ τρίγωνον
 20 τῷ τριγώνῳ καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις·
 ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΖΕ$. ἔστι δὲ
 καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $ΑΓΚ$ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ $ΔΖΝ$ ἴση· καὶ
 λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΒΓΚ$ λοιπῇ τῇ ὑπὸ $ΕΖΝ$ ἐστὶν
 ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΓΒΚ$ τῇ ὑπὸ $ΖΕΝ$
 25 ἐστὶν ἴση. δύο δὲ τρίγωνα ἐστὶ τὰ $ΒΓΚ$, $ΕΖΝ$
 [τὰς] δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν
 ἑκατέρα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς
 ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν $ΒΓ$ τῇ $ΕΖ$ · καὶ τὰς λοιπὰς

1. ἴση] ἴσην P, corr. m. 1. 3. ἴση] om. B. 4. τοῖς] τὸ
 P. 7. τῆς $ΑΘ$ V. 8. γάρ] in ras. m. 1 P. 9. εἶναι] om.

ribus aequalia habebunt singula singulis [I, 26]. itaque $AG = AZ$. iam eodem modo demonstrabimus, esse $AB = AE$.¹⁾ iam quoniam $AG = AZ$, $AB = AE$, duae rectae GA , AB duabus ZA , AE aequales sunt. sed etiam $\angle GAB = ZAE$. quare etiam $BG = EZ$, et triangulus triangulo aequalis et reliqui anguli reliquis angulis [I, 4]. itaque $\angle AGB = AZE$. uerum etiam $\angle AGK = AZN$, quia recti sunt. ergo etiam $\angle B GK = EZN$. eadem de causa etiam $\angle GBK = ZEN$. quare duo trianguli sunt $B GK$, EZN duos angulos duobus angulis singulos singulis aequales habentes et unum latus uni aequale, quod ad angulos aequales positum est, $BG = EZ$. itaque etiam reliqua

1) Sequentia p. 120, 3–15, quae post *ὁμοίως* lin. 2 prorsus inutilia sunt et inusitata, rectissime interpolatori tribuerunt Simsonus et August; om. Campanus.

φ. 10. τῆς] corr. ex τῶν m. 1 b. 11. AB] B corr. ex Θ
 V. Post BΘ ras. 1 litt. b. ἐστίν] corr. ex ἐστί m. 1 P.
 13. ἔστιν B. EΔM] E supra scr., post Δ ras. 1 litt. V.
 14. γὰρ ἴσαι FV. 15. ἐστί] om. P. 17. δυσί] δύο P.
 ΔZ BVbφ. ἀλλὰ] ἐκατέρα ἐκατέρα Vφ. 18. ZΔE]
 Z et E in ras. V, Z'' Δ' E b. ἐστιν] om. Vφ. 19. ἐστίν
 P. καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ] mg. V. 21. ἴση] ἴη b.
 ΔZE] corr. ex EZA m. 1 b. ἐστίν B. 22. ΔZN]
 N in ras. m. 1 B; pro N in b est E, supra scr. M m. 1.
 καί] om. Vφ. 23. EZN] ante N ras. 1 litt. V; N corr. ex
 H b. ἴση ἐστίν P. 25. ENZ V. 26. τὰς] deleo.
 γωνίαις] γωνίας P. ἔχοντας PVφ; in P σ del. m. 2.
 28. ἴσαις] supra scr. m. 2 B.

ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξουσιν. ἴση
 ἄρα ἐστὶν ἡ ΓK τῇ ZN . ἐστὶ δὲ καὶ ἡ $A\Gamma$ τῇ ΔZ
 ἴση· δύο δὲ αἱ $A\Gamma$, ΓK δυσὶ ταῖς ΔZ , ZN ἴσαι
 εἰσὶν· καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσιν. βάσις ἄρα ἡ
 5 AK βάσει τῇ ΔN ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ
 $A\Theta$ τῇ ΔM , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $A\Theta$ τῷ ἀπὸ
 τῆς ΔM . ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς $A\Theta$ ἴσα ἐστὶ τὰ
 ἀπὸ τῶν AK , $K\Theta$ · ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ $AK\Theta$ · τῷ δὲ
 ἀπὸ τῆς ΔM ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΔN , NM · ὀρθὴ γὰρ
 10 ἡ ὑπὸ ΔNM · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AK , $K\Theta$ ἴσα ἐστὶ
 τοῖς ἀπὸ τῶν ΔN , NM , ὧν τὸ ἀπὸ τῆς AK ἴσον
 ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔN · λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $K\Theta$
 ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς NM · ἴση ἄρα ἡ ΘK τῇ MN .
 καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘA , AK δυσὶ ταῖς $M\Delta$, ΔN ἴσαι
 15 εἰσὶν ἑκατέρωθεν ἑκατέρωθεν, καὶ βάσις ἡ ΘK βάσει τῇ MN
 ἐδείχθη ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘAK γωνία τῇ ὑπὸ
 $M\Delta N$ ἐστὶν ἴση.

Ἐὰν ἄρα ὅσι δύο γωνίαὶ ἐπίπεδοι ἴσαι καὶ τὰ
 ἐξῆς τῆς προτάσεως [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

20

Πόρισμα.

Ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν ὅσι δύο γωνίαὶ
 ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπισταθῶσι δὲ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι
 εὐθεῖαι ἴσαι ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ
 ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρωθεν, αἱ ἀπ' αὐτῶν κάθετοι
 25 ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσὶν αἱ ἐξ ἀρχῆς
 γωνίαὶ, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. ἔξουσι V; dein 1 linea eras. 2. ZN] corr. ex ZM B.
 ἔστιν B. 3. εἰσὶν ἴσαι V. 4. εἰσί P, comp. Fb. περι-
 ἔχουσι Vb. 5. ἐστὶ V, comp. Fb. 7. ἴσα] post ι del. α m.
 2 P. 8. $AK\Theta$] $K\Theta$ e corr. V. 9. ΔN] N corr. ex M Bb.
 10. $\Delta M''N'$ b. 11. ΔM B, sed corr.; item lin. 14. 12. τῷ

latera reliquis aequalia habebunt [I, 26]. ergo $\Gamma K = ZN$. sed etiam $A\Gamma = \Delta Z$. ergo duae rectae $A\Gamma$, ΓK duabus ΔZ , ZN aequales sunt; et rectos angulos comprehendunt. itaque $AK = \Delta N$. et quoniam $A\Theta = \Delta M$, erit etiam $A\Theta^2 = \Delta M^2$. uerum $A\Theta^2 = AK^2 + K\Theta^2$; nam $\angle AK\Theta$ rectus est [I, 47]; et $\Delta M^2 = \Delta N^2 + NM^2$; nam $\angle \Delta NM$ rectus est [id.]. itaque $AK^2 + K\Theta^2 = \Delta N^2 + NM^2$; quorum $AK^2 = \Delta N^2$. itaque $K\Theta^2 = NM^2$ et $K\Theta = NM$. et quoniam duo latera ΘA , AK duobus $M\Delta$, ΔN singula singulis aequalia sunt, et basim ΘK basi MN aequalem esse demonstrauius, erit $\angle \Theta AK = M\Delta N$ [I, 8].

Ergo si datis duobus angulis planis aequalibus, cetera, ut in propositione.

Corollarium.

Hinc manifestum est, si datis duobus angulis planis aequalibus in iis aequales rectae sublimes eriguntur angulos singulos singulis aequales cum rectis a principio datis comprehendentes, rectae ab iis ad ea plana perpendiculares ductae, in quibus sunt anguli ab initio dati, inter se aequales sunt.¹⁾ — quod erat demonstrandum.

1) Nam demonstratum est (lin. 13), esse $K\Theta = NM$.

$\acute{\alpha}\pi\acute{o}$ — 13. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$] mg. m. 2B. 12. $\tau\eta\varsigma$] (prius) om. P.
 13. $\tau\acute{\omega}$] corr. ex $\tau\omicron\upsilon$ V. ΘK] e corr. V. 14. $\delta\acute{\upsilon}\omicron$] $\alpha\acute{\iota}$ $\delta\acute{\upsilon}\omicron$
 b. 17. $M\Delta N \acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] in ras. m. 1 P. 18. $\acute{\omega}\sigma\iota\nu$ F.
 $\acute{\iota}\sigma\alpha\iota \acute{\epsilon}\pi\acute{\iota}\pi\epsilon\delta\omicron\iota$ P. 19. $\tau\eta\varsigma \pi\rho\omicron\tau\acute{\alpha}\sigma\epsilon\omega\varsigma$] P; om. BFVb.
 20. $\pi\acute{o}\rho\iota\sigma\mu\alpha$] mg. m. 2 FV. 22. $\acute{\iota}\sigma\alpha\iota$] $\epsilon\upsilon\theta\acute{\upsilon}\gamma\rho\alpha\mu\mu\omicron\iota \acute{\iota}\sigma\alpha\iota$
 Theon (B FVb). $\acute{\epsilon}\pi\iota\sigma\tau\alpha\theta\acute{\omega}\sigma\iota\nu$ PBF. $\alpha\upsilon\tau\acute{\alpha}\varsigma$ P. 23. $\acute{\iota}\sigma\alpha\iota$] om. b. 26. $\acute{\omicron}\pi\epsilon\rho \acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota \delta\epsilon\acute{\iota}\xi\alpha\iota$] P; om. Theon (BFVb).

λς'.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσιν, τὸ ἐκ τῶν
 τριῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ
 ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἰσο-
 5 πλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ A, B, Γ , ὡς
 ἢ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἢ B πρὸς τὴν Γ . λέγω, ὅτι
 τὸ ἐκ τῶν A, B, Γ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B
 στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

10 Ἐκκείσθω στερεὰ γωνία ἢ πρὸς τῷ E περιεχομένη
 ὑπὸ τῶν ὑπὸ $\Delta E H, H E Z, Z E \Delta$, καὶ κείσθω τῇ
 μὲν B ἴση ἐκάστη τῶν $\Delta E, H E, E Z$, καὶ συμπλη-
 ρώσθω τὸ $E K$ στερεὸν παραλληλεπίπεδον, τῇ δὲ A
 ἴση ἢ ΔM , καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔM εὐθεῖα καὶ
 15 τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ πρὸς τῷ E στερεᾷ
 γωνία ἴση στερεὰ γωνία ἢ περιεχομένη ὑπὸ τῶν $N \Lambda \Xi,$
 $\Xi \Lambda M, M \Lambda N$, καὶ κείσθω τῇ μὲν B ἴση ἢ $\Lambda \Xi$, τῇ
 δὲ Γ ἴση ἢ ΛN . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ A πρὸς τὴν
 B , οὕτως ἢ B πρὸς τὴν Γ , ἴση δὲ ἢ μὲν A τῇ ΔM ,
 20 ἢ δὲ B ἐκατέρῃ τῶν $\Lambda \Xi, E \Delta$, ἢ δὲ Γ τῇ ΛN , ἔστιν

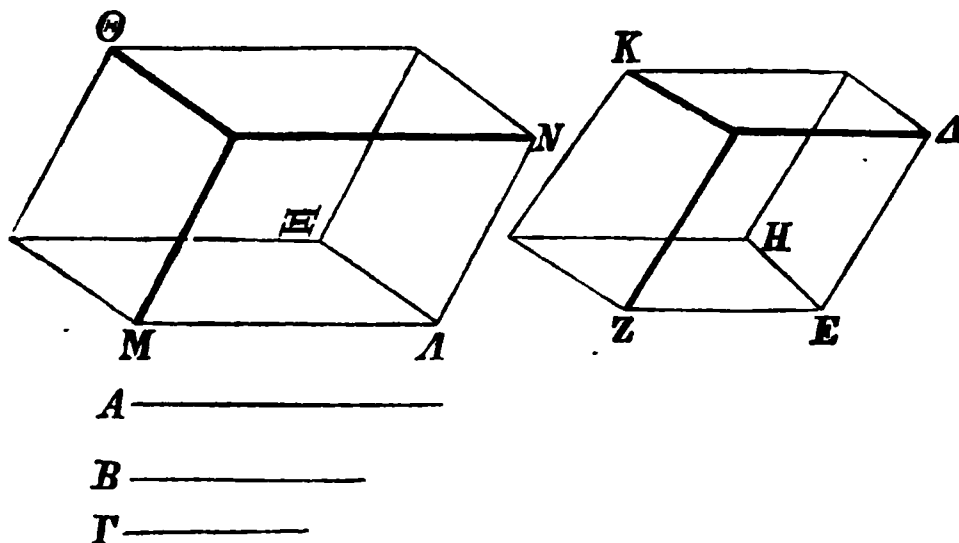
1. λς'] non liquet in F. Hinc usque ad finem libri XII
 b tanto opere discrepat, ut scriptura eius integra in appen-
 dicem reiicienda fuerit. 2. ᾧσι V. 3. στερεῶν F; -ον in
 ras. V. ἐστίν V, sed corr. 4. στερεῷ] om. V. 8. τό] postea
 ins. m. 1 P. ἐκ] ἀπό B, ὑπό F V. Post Γ supra add.
 περιεχόμενον F. στερεόν] -όν in ras. V. 10. τῷ] corr. ex
 τό V. 11. Post prius ὑπό add. τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων m.
 rec. F V; ὑπό τριῶν γ. ἐ. mg. m. 2 B; in textu ὑπό del. m. 2.
 ὑπό] (alt.) om. B F V. 12. $H E$] $E H$ P. $E Z$] corr. ex
 $Z E$ V. 14. ἴση κείσθω B. 16. στερεὰ γωνία] P; om. Theon
 (B F V). 17. $M \Lambda N$] $M \theta$ corr. V. 18: Post ΛN add. καὶ συμ-
 πληρῶσθω τὸ $\Lambda \theta$ στερεόν F V, in V punctis del.; θ e corr.
 V. 20. ἐκατέρῃ] P; ἐκάστη Theon (B F V). $\Lambda \Xi$] $\Lambda \Xi, E Z,$
 $E H$ Theon (B F V). $E \Delta$] corr. ex $E H$ V. Ante Γ ras. 1 litt. B.

XXXVI.

Si tres rectae proportionales sunt, solidum parallelepipedum ex tribus illis constructum aequale est solido parallelepipedo ex media constructo, quod aequilaterum est et priori aequiangulum.

Tres rectae proportionales sint A, B, Γ , ita ut sit $A : B = B : \Gamma$. dico, solidum ex A, B, Γ constructum aequale esse solido ex B constructo, quod aequilaterum est et priori aequiangulum.

ponatur angulus solidus ad E angulis $\triangle E H, H E Z, Z E \triangle$ comprehensus, et ponatur $\triangle E = H E = E Z = B$, et expleatur solidum parallelepipedum $E K$, ponatur¹⁾



autem $\triangle M = A$, et ad rectam $\triangle M$ et punctum eius A angulo solido, qui ad E positus est, aequalis angulus solidus construatur angulis $N \triangle E, E \triangle M, M \triangle N$ comprehensus [prop. XXIII, cfr. prop. XXI], et ponatur $\triangle E = B, \triangle N = \Gamma$. et quoniam est $A : B = B : \Gamma$ et $A = \triangle M, B = \triangle E = E \triangle$ ²⁾, $\Gamma = \triangle N$,

1) Intellegitur $\kappa\epsilon\iota\sigma\theta\omega$ ex lin. 11; sed fortasse uerba $\kappa\alpha\iota$ — $\pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\epsilon\pi\epsilon\delta\omicron\nu$ lin. 12—13 interpolata sunt. cfr. lin. 18.

2) Propter sequentia expectaueris $B = E Z = \triangle E$.

ἄρα ὡς ἡ AM πρὸς τὴν EZ , οὕτως ἡ $ΔE$ πρὸς τὴν
 AN . καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ NAM , $ΔEZ$
 αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ MN
 παραλληλόγραμμον τῷ $ΔZ$ παραλληλογράμμῳ. καὶ
 5 ἐπεὶ δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι εἰσὶν αἱ
 ὑπὸ $ΔEZ$, NAM , καὶ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι
 ἐφεστᾶσιν αἱ $ΛΞ$, EH ἴσαι τε ἀλλήλαις καὶ ἴσας γω-
 νίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν
 ἑκατέρα, αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν H , $Ξ$ σημείων κάθετοι ἀγό-
 10 μεναι ἐπὶ τὰ διὰ τῶν NAM , $ΔEZ$ ἐπίπεδα ἴσαι
 ἀλλήλαις εἰσὶν· ὥστε τὰ $ΛΘ$, EK στερεὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ
 ὕψος ἐστίν. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλ-
 ἐπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν·
 ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΘΛ$ στερεὸν τῷ EK στερεῷ. καὶ
 15 ἐστὶ τὸ μὲν $ΛΘ$ τὸ ἐκ τῶν A , B , $Γ$ στερεόν, τὸ δὲ
 EK τὸ ἀπὸ τῆς B στερεόν· τὸ ἄρα ἐκ τῶν A , B , $Γ$
 στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B
 στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ·
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20

λξ'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσιν, καὶ
 τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὁμοιά
 τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ἔσται·
 καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα
 25 ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον
 ᾧ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

2. AN] NA P. 6. καὶ αἱ B. εὐθεῖαι] om. FV. 8. ἑκα-
 τέραν] supra F. 10. ἴσα V, sed corr. 11. AO P. 12. ἐστὶ
 PBV, comp. F. 13. ὑπό] corr. ex ἐπί m. 2 B. ἐστίν· ἴσον
 ἄρα] om. φ. 14. ἐστὶ] ἐστίν P. OL P. 15. AO P.

erit $AM : EZ = \angle E : \angle N$. et latera aequales angulos NAM , $\angle EZ$ comprehendunt in contraria ratione sunt.¹⁾ itaque $MN = \angle Z$ [VI, 14]. et quoniam duo anguli plani rectilinei aequales sunt $\angle EZ$, NAM , et in iis sublimes erectae sunt rectae $A\Xi$, EH , quae et inter se aequales sunt et angulos singulos singulis aequales cum rectis a principio datis comprehendunt, rectae a punctis H , Ξ ad plana per NAM , $\angle EZ$ ducta perpendiculares ductae inter se aequales sunt [prop. XXXV coroll.]; quare solida $A\Theta$, EK eandem altitudinem habent. solida autem parallelepipeda, quae in aequalibus basibus sunt posita et eandem altitudinem habent, inter se aequalia sunt [prop. XXXI]. itaque $\Theta A = EK$. et $A\Theta$ solidum est ex A , B , Γ constructum, EK autem solidum ex B constructum. ergo solidum parallelepipedum ex A , B , Γ constructum aequale est solido ex B constructo, quod aequilaterum est et priori aequiangulum; quod erat demonstrandum.

XXXVII.

Si quattuor rectae proportionales sunt, etiam solida parallelepipeda in iis similia et similiter constructa proportionalia erunt; et si solida parallelepipeda in rectis similia et similiter constructa proportionalia sunt, etiam rectae ipsae proportionales erunt.

1) Cfr. p. 83 not. 1.

στερεόν] om. V. 17. παραλληλ' επίπεδον, ut semper fere, P; hic' in o mut. m. 2; item lin. 24. 20. λξ'] non liquet in F. 21. ὡσι V. 22. παράλληλα επίπεδα F. 23. ἔσται] miro comp. F (corr. ex √.?). 24. παράλληλα επίπεδα F.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθείαι ἀνάλογον αἱ $AB, \Gamma\Delta, EZ, H\Theta$, ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ τῶν $AB, \Gamma\Delta, EZ, H\Theta$ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ $KA, \Lambda\Gamma, ME, NH$. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ KA πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma$, οὕτως τὸ ME πρὸς τὸ NH .

Ἐπεὶ γὰρ ὁμοίον ἐστὶ τὸ KA στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ $\Lambda\Gamma$, τὸ KA ἄρα πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma$ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$. διὰ τὰ
10 αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ME πρὸς τὸ NH τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$. καὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$. καὶ ὡς ἄρα τὸ AK πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma$, οὕτως τὸ ME πρὸς τὸ NH .

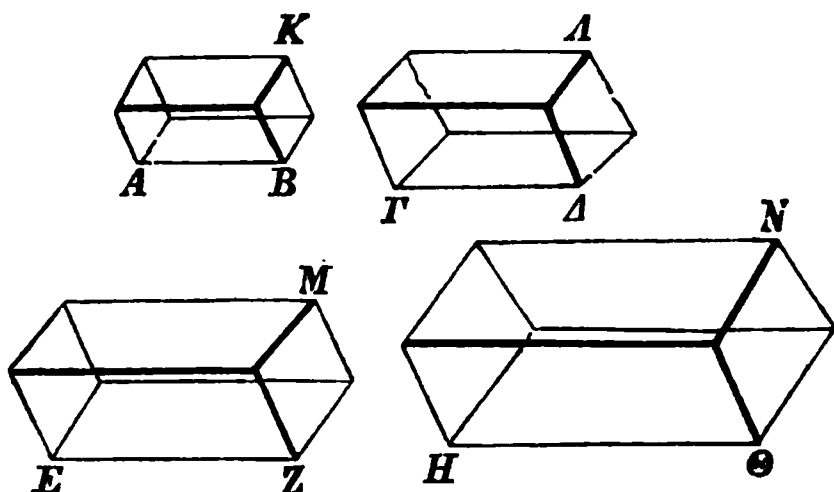
Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ AK στερεὸν πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma$
15 στερεόν, οὕτως τὸ ME στερεὸν πρὸς τὸ NH . λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB εὐθεῖα πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$.

Ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ KA πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma$ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, ἔχει δὲ καὶ τὸ
20 ME πρὸς τὸ NH τριπλασίονα λόγον ἢπερ ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$, καὶ ἐστὶν ὡς τὸ KA πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma$, οὕτως τὸ ME πρὸς τὸ NH , καὶ ὡς ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσι καὶ τὰ
25 ἐξῆς τῆς προτάσεως ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4. Ante τε m. 1 del. στερεά F. 5. $\Lambda\Gamma$] $\Lambda\Gamma, \Lambda M$ F.
7. ὁμοιον] om. Theon (BFV). ἐστὶν B. 8. $\Lambda\Gamma$ ὁμοιον Theon (BFV). 12. ἡ EZ] EZ F. καί] om. B. 13. NH] H non liquet in F. 14. $\Lambda\Gamma$] $\Gamma\Lambda$ V. 15. στερεόν] om. V. EM V. στερεόν] om. V. HN V. 18. KA] A eras. P. 19. ἔχει] (alt.) ἐδείχθη V. 20. NH] ME F. λόγον ἔχον V.

Sint quattuor rectae proportionales $AB, \Gamma\Delta, EZ, H\Theta$, ita ut sit $AB : \Gamma\Delta = EZ : H\Theta$, et in $AB, \Gamma\Delta, EZ, H\Theta$ similia et similiter posita construantur so-



lida parallelepipeda $KA, A\Gamma, ME, NH$. dico, esse $KA : A\Gamma = ME : NH$.

Nam quoniam $KA \sim A\Gamma$, erit $KA : A\Gamma = AB^3 : \Gamma\Delta^3$ [prop. XXXIII]. eadem de causa erit etiam $ME : NH = EZ^3 : H\Theta^3$. et $AB : \Gamma\Delta = EZ : H\Theta$. quare etiam $KA : A\Gamma = ME : NH$.

At uero sit $KA : A\Gamma = ME : NH$. dico, esse

$$AB : \Gamma\Delta = EZ : H\Theta.$$

nam quoniam rursus $KA : A\Gamma = AB^3 : \Gamma\Delta^3$ [prop. XXXIII], et $ME : NH = EZ^3 : H\Theta^3$, et $KA : A\Gamma = ME : NH$, erit etiam $AB : \Gamma\Delta = EZ : H\Theta$.

Ergo si quattuor rectae proportionales sunt, et quae sequuntur in propositione; quod erat demonstrandum.

21. $A\Gamma$] A e corr. m. 1 F. 24. ὡς καὶ τὰ] ὡς F. ὡς B. De propositione, quae uulgo est 38, u. app.

λη'.

Ἐὰν κύβου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσιν, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῆ, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων
 5 καὶ ἡ τοῦ κύβου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.

Κύβου γὰρ τοῦ AZ τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν ΓZ , $A\Theta$ αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ K , Λ , M , N , Ξ , Π , O , P σημεῖα, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω τὰ KN , ΞP , κοινὴ δὲ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἔστω ἡ $\Gamma\Sigma$, τοῦ δὲ AZ κύβου διαγώνιος ἡ ΔH . λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓT τῇ $T\Sigma$, ἡ δὲ ΔT τῇ TH .

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ ΔT , ΓE , $B\Sigma$, ΣH . καὶ
 15 ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ $\Delta\Xi$ τῇ OE , αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ $\Delta\Xi T$, $\Gamma O E$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν $\Delta\Xi$ τῇ OE , ἡ δὲ ΞT τῇ ΓO , καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΔT τῇ ΓE ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ $\Delta\Xi T$ τρίγωνον τῷ $O\Gamma E$ τρι-
 20 γώνῳ ἐστὶν ἴσον καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $\Xi T\Delta$ γωνία τῇ ὑπὸ $O\Gamma E$ γωνία. διὰ δὲ τοῦτο εὐθεῖά ἐστὶν ἡ $\Delta T E$. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ $B\Sigma H$ εὐθεῖά ἐστὶν, καὶ ἴση ἡ

1. λθ' codd. 2. κύβου] στερεοῦ παραλληλεπιπέδου Theon (BFV). ἀπεναντίον] corr. ex ἀπεναντίων m. 1 P. 3. τμηθῶσι FV. 4. ἐκβληθῆ ἢ] ἐκβληθείη F. 5. κύβου] στερεοῦ παραλληλεπιπέδου Theon (BFV). 7. κύβου γὰρ] στερεοῦ γὰρ παραλληλεπιπέδου Theon (BFV). 10. KN] ras. 2 litt. V. ΞP] Ξ e corr. P, eras. V. τῶν ἐπιπέδων τομὴ BFV. 11. κύβου] στερεοῦ παραλληλεπιπέδου Theon (BFV). 12. ἡ] ἔστω ἡ FV. ὅτι] om. F; ὅτι αἱ (ἢ VF) $\Gamma\Sigma$, ΔE δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας, τουτέστιν ὅτι BV et mg. m. rec. F. ἴση ἐστὶν] om. BFV. $\Gamma\Sigma$ ἴση ἐστὶν BFV. 13. ΔT] $T\Delta$ P.

XXXVIII.

Si in cubo¹⁾ latera planorum inter se oppositorum in duas partes aequales secantur, et per puncta sectionum plana ducuntur, communis planorum sectio et cubi diametrus inter se in duas partes aequales secabunt.

Nam in cubo AZ latera planorum inter se oppositorum ΓZ , $A\Theta$ in duas partes aequales secantur in punctis K , Λ , M , N , Ξ , Π , O , P , et per puncta sectionum plana ducantur KN , ΞP , et communis planorum sectio sit $\Upsilon\Sigma$, diametrus autem cubi AZ sit ΔH . dico, esse $\Upsilon T = T\Sigma$, $\Delta T = TH$.

ducantur enim $\Delta\Upsilon$, ΥE , $B\Sigma$, ΣH . et quoniam $\Delta\Xi$ rectae OE parallela est, anguli alterni $\Delta\Xi\Upsilon$, ΥOE inter se aequales sunt [I, 29]. et quoniam $\Delta\Xi = OE$, $\Xi\Upsilon = \Upsilon O$, et aequales angulos comprehendunt, erit $\Delta\Upsilon = \Upsilon E$ et $\Delta\Xi\Upsilon = O\Upsilon E$, et reliqui anguli reliquis aequales [I, 4]. itaque $\angle \Xi\Upsilon\Delta = O\Upsilon E$. quare recta est $\Delta\Upsilon E$ [I, 14]. eadem de causa etiam

1) In hac scriptura tuenda consentiunt Campanus, Bononiensis, Vaticanus P, quamquam in hoc legitur mg. m. 1: γρ. ἐὰν στερεοῦ παραλληλεπιπέδου. sane eadem demonstratio de quouis parallelepipedo ualet, sed cum propositio de cubo solo demonstrata propositioni 17 libri XIII, cui soli inseruit haec nostra propositio, satisfaceret, Euclides hoc casu speciali contentus fuit.

14. γάρ] om. F. $B\Sigma$] corr. ex BE m. 2 F. 15. αί] supra m. 1 F. 16. αί] om. F. εἰσί V, comp. F. 17. OE] ΘE F. 18. περιέχουσι V. τῆ] βάσει τῆ F V. 19. ἴση ἐστὶ V. ΥOE B; $O\Upsilon E$ F; $OE\Upsilon$, supra $E\Upsilon$ ras., V. 20. ἴσον ἐστίν B. 21. ἴσαι] om. BF; ἴσαι ἐσονται ἑκατέρω ἑκατέρω V.

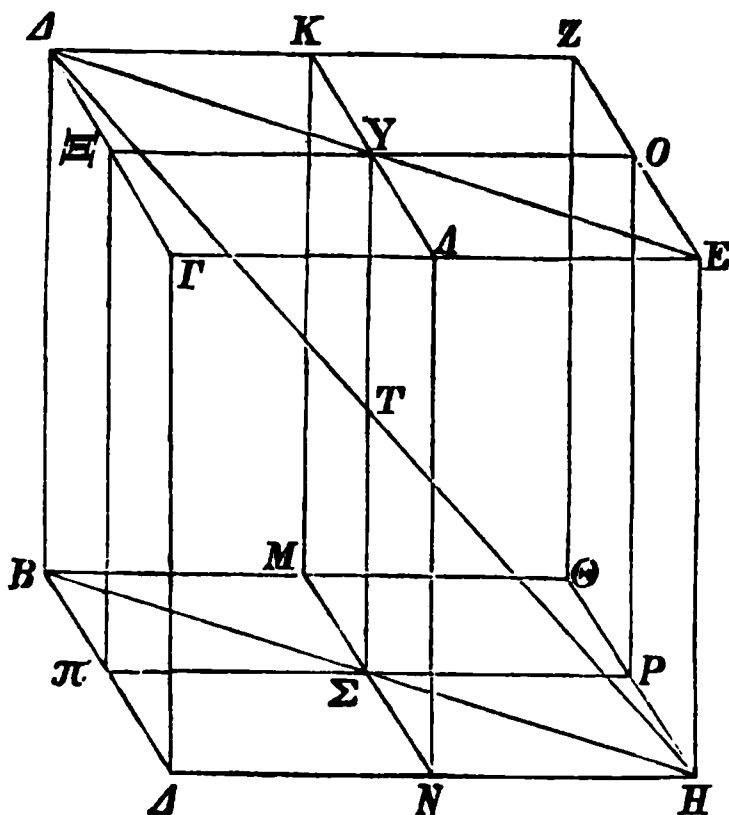
22. $O\Upsilon E$] ΥOE B; supra ΥE add. . . et . m. 2 F.
23. ἐστὶ PV, comp. F. ἴση] supra scr. m. 2 B.

$B\Sigma$ τῆ ΣH . καὶ ἐπεὶ ἡ ΓA τῆ ΔB ἴση ἐστὶ καὶ
 παράλληλος, ἀλλὰ ἡ ΓA καὶ τῆ $E H$ ἴση τέ ἐστὶ καὶ
 παράλληλος, καὶ ἡ ΔB ἄρα τῆ $E H$ ἴση τέ ἐστὶ καὶ
 παράλληλος. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ
 5 ΔE , $B H$. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔE τῆ $B H$. ἴση
 ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ $E \Delta T$ γωνία τῆ ὑπὸ $B H T$. ἐναλλάξ
 γάρ· ἡ δὲ ὑπὸ $\Delta T T$ τῆ ὑπὸ $H T \Sigma$. δύο δὲ τρίγωνά
 ἐστὶ τὰ $\Delta T T$, $H T \Sigma$ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γω-
 νίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην
 10 τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν τὴν
 ΔT τῆ $H \Sigma$. ἡμίσειαι γάρ εἰσι τῶν ΔE , $B H$. καὶ τὰς
 λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει. ἴση
 ἄρα ἡ μὲν ΔT τῆ $T H$, ἡ δὲ $T T$ τῆ $T \Sigma$.

Ἐὰν ἄρα κύβου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ
 15 δίχα τμηθῶσιν, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῆ,

1. ΣH] in ras. V. ἡ] corr. ex αἱ V. ἐστὶν B; item
 lin. 2, 3. 2. καὶ τῆ] τῆ FV. 3. ἄρα] om. V. $E H$] H
 e corr. F; $E H$ ἄρα V. 5. Post alt. $B H$ add. Theon: καὶ
 εἴληπται ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Δ , T (Δ , $E T$
 F), H , Σ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔH , $T \Sigma$. ἐν ἐνὶ ἄρα εἰσὶν
 ἐπιπέδω αἱ ΔH , $T \Sigma$. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστὶν ἡ ΔE τῆ $B H$
 (BFV). Dein in FV seq. καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ
 ΔH . 6. μὲν] om. B. 7. ἡ δέ] ἐστὶν δὲ ἡ B. $H T \Sigma$] $T \Sigma$
 in ras. m. 1 P; $H T \Sigma$ ἴση B. 8. ἐστὶν B. 9. πλευρὰν]
 om. V. 11. εἰσὶν B. 13. ΔT] Δ e corr. V. 14. κύβου]
 στερεοῦ παραλληλεπιπέδου Theon (BFV); item p. 134 lin. 1.
 15. τμηθῶσι V.

$B\Sigma H$ recta est, et $B\Sigma = \Sigma H$. et quoniam ΓA rectae ΔB et aequalis est et parallela, et ΓA etiam rectae $E H$ et aequalis et parallela est, etiam ΔB rectae $E H$ et aequalis est et parallela [prop. IX].



et eas coniungunt rectae ΔE , BH . itaque ΔE rectae BH parallela est [I, 33]. itaque¹⁾ $\angle E\Delta T = BHT$ (nam alterni sunt) [I, 29], et $\angle \Delta T\Upsilon = HT\Sigma$ [I, 15]. quare duo trianguli sunt $\Delta T\Upsilon$, $HT\Sigma$ duos angulos duobus angulis aequales habentes et unum latus uni lateri aequale, quod sub altero angulorum aequalium subtendit, $\Delta T = H\Sigma$ (nam dimidiae sunt rectarum ΔE , BH), et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt [I, 26]. ergo $\Delta T = TH$, $\Upsilon T = T\Sigma$.

Ergo si in cubo latera planorum inter se oppositorum in duas partes aequales secantur, et per puncta sectionum plana ducuntur, communis planorum sectio

1) Nam ΔE , ΔH , BH in eodem plano sunt (prop. VII).

ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ κύβου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ'.

Ἐὰν ἡ δύο πρίσματα ἰσοῦψῃ, καὶ τὸ μὲν ἔχη
5 βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, δι-
πλάσιον δὲ ἢ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τρι-
γώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα.

Ἔστω δύο πρίσματα ἰσοῦψῃ τὰ $ΑΒΓΔΕΖ$,
 $ΗΘΚΛΜΝ$, καὶ τὸ μὲν ἐχέτω βάσιν τὸ AZ παρα-
10 ληλόγραμμον, τὸ δὲ τὸ $ΗΘΚ$ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ
ἔστω τὸ AZ παραλληλόγραμμον τοῦ $ΗΘΚ$ τριγώνου·
λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔΕΖ$ πρίσμα τῷ $ΗΘΚΛΜΝ$
πρίσματι.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ $AΞ$, $ΗΟ$ στερεά. ἐπεὶ
15 διπλάσιόν ἐστὶ τὸ AZ παραλληλόγραμμον τοῦ $ΗΘΚ$
τριγώνου, ἔστι δὲ καὶ τὸ $ΘΚ$ παραλληλόγραμμον
διπλάσιον τοῦ $ΗΘΚ$ τριγώνου, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ AZ
παραλληλόγραμμον τῷ $ΘΚ$ παραλληλογράμῳ. τὰ δὲ
ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ
20 ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ
τὸ $AΞ$ στερεὸν τῷ $ΗΟ$ στερεῷ. καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν
 $AΞ$ στερεοῦ ἡμισυ τὸ $ΑΒΓΔΕΖ$ πρίσμα, τοῦ δὲ
 $ΗΟ$ στερεοῦ ἡμισυ τὸ $ΗΘΚΛΜΝ$ πρίσμα· ἴσον

3. μ' codd. (in F seq. ras. 1 litt.). 10. δέ] δὲ λοιπόν F.
τό] ο e corr. m. 2 B. διπλάσιον — 11. τριγώνου] om. F.
14. ΗΟ] in ras. m. 2 V; Η e corr. m. rec. P. Ante ἐπεὶ
add. καί m. 1—2 V. 16. ἔστιν B. ἔστι — 17. τριγώνου] mg.
m. 2 V. 18. δέ] δ' F. 20. ἴσα] om. F. ἐστίν] ἐστίν
ἴσον F, ἐστίν ἴσα m. 2. 21. ΗΟ] O non liquet FV. ἐστίν
B. 22. ΑΒΓΔΖΕ F, corr. m. 2. 23. ΗΘ? F.

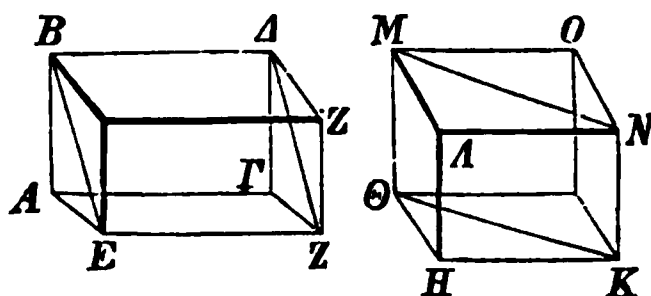
et cubi diametrus inter se in duas partes aequales secabunt; quod erat demonstrandum.

XXXIX.

Si duorum prismatum eandem altitudinem habentium alterum basim parallelogrammum, alterum triangulum habet, et parallelogrammum duplo maius est triangulo, prismata aequalia sunt.

Duo prismata sint $AB\Gamma\Delta EZ$, $H\Theta K\Lambda MN$ eandem altitudinem habentia, et alterum basim habeat AZ parallelogrammum, alterum triangulum $H\Theta K$, et sit $AZ = 2H\Theta K$. dico, esse $AB\Gamma\Delta EZ = H\Theta K\Lambda MN$.

expleantur enim solida $A\Xi$, HO . quoniam $AZ = 2H\Theta K$, et $\Theta K = 2H\Theta K$ [I, 34], erit $AZ = \Theta K$.



solida autem parallelepipeda, quae in aequalibus sunt basibus et eandem altitudinem habent, aequalia sunt [prop. XXXI]. itaque $A\Xi = HO$. et $AB\Gamma\Delta EZ = \frac{1}{2} A\Xi$, $H\Theta K\Lambda MN = \frac{1}{2} HO$ [prop. XXVIII]. itaque $AB\Gamma\Delta EZ = H\Theta K\Lambda MN$.

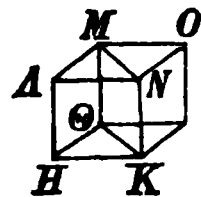
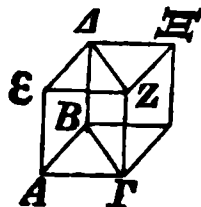
ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔΕΖ$ πρίσμα τῷ $ΗΘΚΛΜΝ$ πρίσματι.

Ἐὰν ἄρα ἦ δύο πρίσματα ἰσοῦψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχη βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἦ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

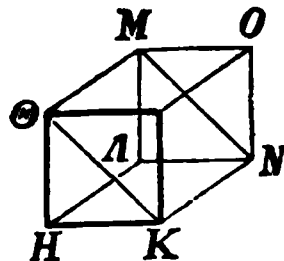
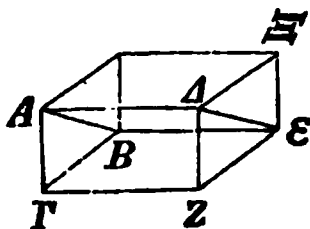
1. πρίσμα] om. BF. 3. ἔχει φ et P (corr. m. 2).
 Εὐκλείδου στοιχείων ια PF; Εὐκλείδου στερεῶν ια B.

Ergo si duorum prismatum eandem altitudinem habentium alterum basim parallelogrammum, alterum triangulum habet, et parallelogrammum duplo maius est triangulo, prismata aequalia sunt; quod erat demonstrandum.¹⁾

1) In PB figura haec est:



Deinde haec sequitur addito σαφῆς (σαφεστέρα B) καταγραφή



In B in fig. alt. pro E est B, et B in Δ mutatum est.

ιβ'.

α'.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἀλληλά ἐστὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετραγωνα.

5 Ἐστῶσαν κύκλοι οἱ $AB\Gamma$, $ZH\Theta$, καὶ ἐν αὐτοῖς ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K\Lambda$, διαμετροὶ δὲ τῶν κύκλων ἔστῶσαν αἱ BM , HN . λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς BM τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HN τετραγώνου, οὕτως τὸ $AB\Gamma\Delta E$ πολύ-
10 γωνον πρὸς τὸ $ZH\Theta K\Lambda$ πολύγωνον.

Ἐπεξεύχθῶσαν γὰρ αἱ BE , AM , HA , ZN . καὶ ἐπεὶ ὅμοιον τὸ $AB\Gamma\Delta E$ πολύγωνον τῷ $ZH\Theta K\Lambda$ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ BAE γωνία τῇ ὑπὸ HZA , καὶ ἐστὶν ὡς ἡ BA πρὸς τὴν AE , οὕτως ἡ
15 HZ πρὸς τὴν ZA . δύο δὴ τρίγωνα ἐστὶ τὰ BAE , HZA μίαν γωνίαν μιᾶ γωνία ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ BAE τῇ ὑπὸ HZA , περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABE τρί-

Εὐκλείδου στοιχείων ιβ P; Εὐκλείδου στοιχείων τῆς Θεωνος ἐκδόσεως ιβ F; Εὐκλείδου στερεῶν β στοιχείων ιβ BV; Εὐκλείδου ιβ q. 1. α'] om. V. 2. πολυγώνια B. 5. Ante κύκλοι eras. ἴσοι V. $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K\Lambda$ Theon (BFVq).

6. πολυγώνια B. 7. λέγω] ω e corr. V. 8. BM] B supra scr. V. 9. πολυγώνιον B, item lin. 10. 12. ἐστὶ τὸ BVq. 13. ἐστὶ καὶ] ἐστὶν q; ἐστὶν καὶ B. ὑπό] (alt.) bis F. 14. HZA]

Liber XII.

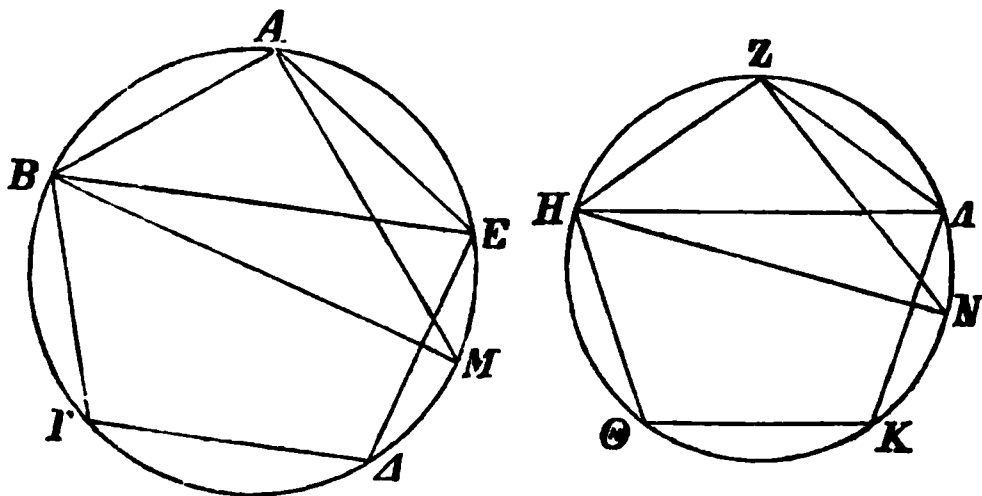
I.

Similia polygona in circulis inscripta eam inter se rationem habent quam quadrata diametrorum.

Sint circuli $AB\Gamma$, $ZH\Theta$, et in iis inscripta sint polygona $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K\Lambda$, diametri autem circulorum sint BM , HN . dico, esse

$$BM^2 : HN^2 = AB\Gamma\Delta E : ZH\Theta K\Lambda.$$

ducantur enim BE , AM , $H\Lambda$, ZN . et quoniam $AB\Gamma\Delta E \sim ZH\Theta K\Lambda$, erit $\angle BAE = HZA$ et $BA : AE = HZ : ZA$ [VI def. 1]. itaque duo trianguli



sunt BAE , HZA unum angulum uni angulo aequalem habentes, $\angle BAE = HZA$, et latera aequales angulos comprehendentia proportionalia. itaque triangulus ABE

in ras. m. 1 P; HZ in ras. m. 2 B. $\tau\eta\nu$] $\tau\eta$ F. 16. HZA] HZA F (puncta post add.); $ZH\Lambda$ V, $H\Lambda Z$ Bq. $\tau\eta\nu$] $\tau\iota\nu$ V.

γωνον τῷ ZHA τριγώνῳ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ AEB
 γωνία τῇ ὑπὸ ZAH . ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ AEB τῇ ὑπὸ
 AMB ἐστὶν ἴση· ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βε-
 βήκασιν· ἡ δὲ ὑπὸ ZAH τῇ ὑπὸ ZNH · καὶ ἡ ὑπὸ
 5 AMB ἄρα τῇ ὑπὸ ZNH ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ὀρθῇ
 ἡ ὑπὸ BAM ὀρθῇ τῇ ὑπὸ HZN ἴση· καὶ ἡ λοιπὴ
 ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABM
 τρίγωνον τῷ ZHN τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς
 ἡ BM πρὸς τὴν HN , οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν HZ .
 10 ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς BM πρὸς τὴν HN λόγου διπλασίῳ
 ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς BM τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ
 τῆς HN τετράγωνον, τοῦ δὲ τῆς BA πρὸς τὴν HZ
 διπλασίῳ ἐστὶν ὁ τοῦ $ABΓΔΕ$ πολυγώνου πρὸς τὸ
 $ZHΘΚΛ$ πολύγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BM
 15 τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HN τετράγωνον, οὕτως
 τὸ $ABΓΔΕ$ πολύγωνον πρὸς τὸ $ZHΘΚΛ$ πολύγωνον.
 Τὰ ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς
 ἀλληλά ἐστὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα·
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20

β'.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ
 τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ $ABΓΔ$, $EZHΘ$, διάμετροι
 δὲ αὐτῶν [ἔστωσαν] αἱ $BΔ$, $ZΘ$ · λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς
 25 ὁ $ABΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $EZHΘ$ κύκλον, οὕτως τὸ

1. ZHA] corr. ex ZAH V, ZAH B, HZA φ. 2. ZAH] $ZH\Lambda$ F. 3. Supra περιφερείας m. rec. add. τῆς BA P.
 4. δέ] δ' P. 5. ὑπό] bis V. ἔστιν B. 6. ἡ] ἡ γωνία ἡ F. ABM F. ἴση] om. B. ἡ] om. q. 7. AMB B.
 9. HZ] H in ras. m. 1 P. 10. MB V. 12. δέ] δὲ ἀπό F, et del. ἀπό V. 24. ἔστωσαν] mg. postea add. m. 1 P.

triangulo ZHA aequiangulus est [VI, 6]. quare $\angle AEB = ZAH$. sed $\angle AEB = AMB$ (nam in eodem arcu positi sunt) [III, 27], et $\angle ZAH = ZNH$. quare etiam $\angle AMB = ZNH$. uerum etiam

$\angle BAM = HZN$; nam uterque rectus est [III, 31].

itaque etiam reliquus reliquo aequalis est. triangulus igitur ABM triangulo ZHN aequiangulus est. quare $BM : HN = BA : HZ$ [VI, 4]. uerum $BM^2 : HN^2$ ratio duplicata est quam $BM : HN$, et

$$AB\Gamma\Delta E : ZH\Theta K\Lambda = BA^2 : HZ^2 \text{ [VI, 20].}$$

itaque etiam

$$BM^2 : HN^2 = AB\Gamma\Delta E : ZH\Theta K\Lambda.$$

Ergo similia polygona in circulis inscripta eam inter se rationem habent quam quadrata diametrorum; quod erat demonstrandum.

II.

Circuli eam inter se rationem habent quam quadrata diametrorum.

Sint circuli $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ et eorum diametri $B\Delta$, $Z\Theta$. dico, esse

$$AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = B\Delta^2 : Z\Theta^2.$$

II. Simplicius in phys. fol. 15. Psellus p. 65.

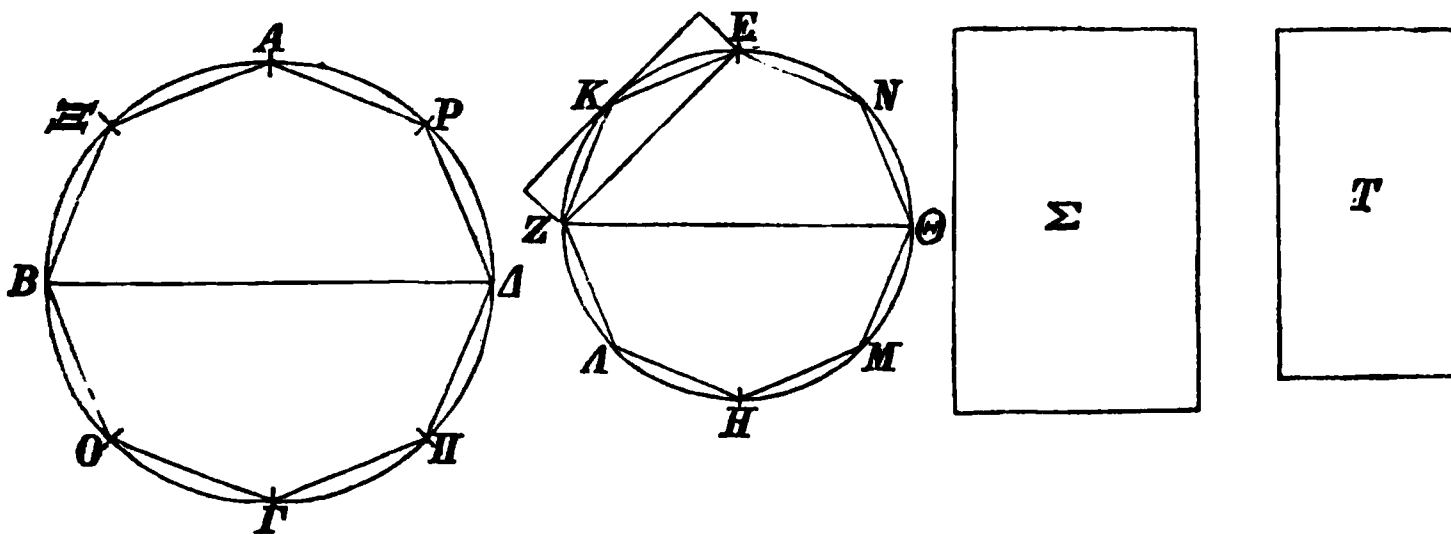
$\Delta B F$. λέγω — p. 142, 5. ὡς τὸ ἀπὸ] λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετραγώνου (comp. add. m. 2 V) πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ τετραγώνου (om. V) οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν (hic seq. in q: ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$) ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετραγώνου (om. V) πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ (τετραγώνου add. Vq), οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον (οὕτως — κύκλον om. q), ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ (πρὸς τὸν — ἀπὸ om. F) $BFVq$ et P mg. m. 2 (γρ. καὶ οὕτως et in fine ἢ δῆτα γραφὴ καὶ κρείττων ἐστίν).

ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ τετράγωνον.

Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὡς ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ
 5 ἀπὸ τῆς $Z\Theta$, ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ
 τῆς $Z\Theta$, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος ἦτοι πρὸς ἔλασσόν
 τι τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου χωρίον ἢ πρὸς μείζον. ἔστω
 πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Σ . καὶ ἐγγεγράφθω εἰς
 τὸν $EZH\Theta$ κύκλον τετράγωνον τὸ $EZH\Theta$. τὸ δὲ
 10 ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ
 τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου, ἐπειδήπερ ἂν διὰ τῶν $E, Z,$
 H, Θ σημείων ἐφαπτομένας [εὐθείας] τοῦ κύκλου
 ἀγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον τετρα-
 γώνου ἡμισὺ ἐστὶ τὸ $EZH\Theta$ τετράγωνον, τοῦ δὲ περι-
 15 γραφέντος τετραγώνου ἐλάττων ἐστὶν ὁ κύκλος· ὥστε
 τὸ $EZH\Theta$ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μείζον ἐστὶ τοῦ
 ἡμίσεως τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου. τετμήσθωσαν δίχα αἱ
 $EZ, ZH, H\Theta, \Theta E$ περιφέρειαι κατὰ τὰ $K, \Lambda, M,$
 N σημεία, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $EK, KZ, Z\Lambda, \Lambda H,$
 20 $HM, M\Theta, \Theta N, NE$. καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν $EKZ,$
 $Z\Lambda H, HM\Theta, \Theta NE$ τριγώνων μείζον ἐστὶν ἢ τὸ
 ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου, ἐπειδήπερ
 ἂν διὰ τῶν K, Λ, M, N σημείων ἐφαπτομένας τοῦ
 κύκλου ἀγάγωμεν καὶ ἀναπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν
 25 $EZ, ZH, H\Theta, \Theta E$ εὐθειῶν παραλληλόγραμμα, ἕκαστον

3. ὁ] supra m. 1 P. 5. τῆς $B\Delta$ — 6. κύκλος] om. F.
 5. $B\Delta$ τετράγωνον V. 7. τι] om. V; supra ἔλασσον ras. est.
 κύκλου] supra scr. m. 1 V. 9. $EZH\Theta$] (alt.) E supra m. 1 V.
 δὴ] δέ F V. 12. εὐθείας] om. B F V q. 13. διάγωμεν
 B q, διαγάγωμεν B m. 2 et F (δι- euan.). 15. ἐλάσσων φ.
 17. ἡμίσεος B V q. 18. ΘE] supra m. 2 B. 20. EKZ]
 Z e corr. m. 1 V. 21. $HM\Theta$] H e corr. π; $\Theta HM\Theta$, del.

Nam si non est $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = B\Delta^2 : Z\Theta^2$, erit ut $B\Delta^2 : Z\Theta^2$, ita $AB\Gamma\Delta$ aut ad minus aliquod circulo $EZH\Theta$ spatium aut ad maius. sit prius ad minus, Σ . et in circulo $EZH\Theta$ inscribatur quadratum $EZH\Theta$ [IV, 6]. quadratum igitur inscriptum maius est quam dimidium circuli $EZH\Theta$, quoniam, si per puncta E, Z, H, Θ rectas circulum contingentes duxerimus, quadratum $EZH\Theta$ dimidium¹⁾ est quadrati circum circulum circumscripti, et circulus minor est quadrato circumscripto; quare quadratum inscriptum $EZH\Theta$ maius est quam dimidium circuli $EZH\Theta$.



iam arcus $EZ, ZH, H\Theta, \Theta E$ in punctis K, Λ, M, N in binas partes aequales secantur, et ducantur $EK, KZ, Z\Lambda, \Lambda H, HM, M\Theta, \Theta N, NE$. itaque etiam singuli trianguli $EKZ, Z\Lambda H, HM\Theta, \Theta NE$ maiores sunt quam dimidia segmentorum circuli ad eos pertinentium, quoniam si per puncta K, Λ, M, N rectas circulum contingentes duxerimus et parallelogramma in rectis $EZ, ZH, H\Theta, \Theta E$ posita expleuerimus,

1) Hoc facile ex I, 47 demonstratur, coll. VI, 20 coroll.

pr. Θ et supra scr. bis $M F$. ΘNE] supra add. $N m. 2 F$.

22. $\acute{\epsilon}\alpha\nu\tau\acute{o}$] corr. ex $\acute{\epsilon}\alpha\nu\tau\acute{o}\nu$ m. 2 B. 25. Post $\acute{\epsilon}\kappa\alpha\sigma\tau\omicron\nu$ add. $\acute{\epsilon}\rho\alpha$ m. 2 F.

τῶν EKZ , $ZΛΗ$, $ΗΜΘ$, $ΘNE$ τριγώνων ἡμισυ
 ἔσται τοῦ καθ' ἑαυτὸ παραλληλογράμμου, ἀλλὰ το
 καθ' ἑαυτὸ τμήμα ἑλαττόν ἐστι τοῦ παραλληλογράμμου·
 ὥστε ἕκαστον τῶν EKZ , $ZΛΗ$, $ΗΜΘ$, $ΘNE$ τρι-
 5 γώνων μείζον ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμή-
 ματος τοῦ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας
 περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ τοῦτο
 αἰ ποιοῦντες καταλείψομεν τινὰ ἀποτμήματα τοῦ κύκλου,
 ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει ὁ $EZHΘ$
 10 κύκλος τοῦ Σ χωρίου. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ
 θεωρήματι τοῦ δεκάτου βιβλίου, ὅτι δύο μεγεθῶν
 ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ
 μείζον ἢ τὸ ἡμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ
 τὸ ἡμισυ, καὶ τοῦτο αἰ γίνηται, λειφθήσεται τι μέ-
 15 γεθος, ὃ ἔσται ἑλάσσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος
 μεγέθους. λελείφθω οὖν, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν EK ,
 KZ , $ZΛ$, $ΛΗ$, $ΗΜ$, $ΜΘ$, $ΘN$, NE τμήματα τοῦ
 $EZHΘ$ κύκλου ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει
 ὁ $EZHΘ$ κύκλος τοῦ Σ χωρίου. λοιπὸν ἄρα τὸ
 20 $EKZΛΗΜΘN$ πολύγωνον μείζον ἐστι τοῦ Σ χωρίου.
 ἐγγεγράψθω καὶ εἰς τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον τῷ $EKZΛΗΜΘN$
 πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ $ΑΞΒΟΓΠΔΡ$. ἔστιν
 ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $BΔ$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
 $ZΘ$ τετράγωνον, οὕτως τὸ $ΑΞΒΟΓΠΔΡ$ πολύγωνον
 25 πρὸς τὸ $EKZΛΗΜΘN$ πολύγωνον. ἀλλὰ καὶ ὡς
 τὸ ἀπὸ τῆς $BΔ$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ZΘ$,
 οὕτως ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον· καὶ ὡς
 ἄρα ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον, οὕτως τὸ

1. EKZ] KZ in ras. m. 1 P; EZK q. Post $ΘNE$ ras.
 2 litt. B. τριγώνων] ι in ras. m. 2 B. ἡμισυ — 4. τριγώνων]
 bis B. 2. ἑαυτό] corr. ex ἑαυτόν m. 2 B (priore tantum loco).

singuli trianguli EKZ , $Z\Lambda H$, $HM\Theta$, ΘNE dimidia sunt parallelogrammorum ad eos pertinentium, et segmenta ad eos pertinentia minora sunt parallelogrammis; quare singuli trianguli EKZ , $Z\Lambda H$, $HM\Theta$, ΘNE maiores sunt quam dimidia segmentorum ad eos pertinentium. itaque relictos arcus secantes et rectas ducentes et hoc semper facientes segmenta quaedam circuli relinquemus, quae minora erunt excessu, quo circulus $EZH\Theta$ spatium Σ excedit; nam in primo theoremate decimi libri demonstratum est, si datis duabus magnitudinibus inaequalibus a maiore plus quam dimidium subtrahatur et a relictis plus quam dimidium et hoc semper fiat, magnitudinem relictam iri, quae minor sit data magnitudine minore. relinquatur igitur, et segmenta circuli $EZH\Theta$ in rectis EK , KZ , $Z\Lambda$, ΛH , HM , $M\Theta$, ΘN , NE posita minora sint excessu, quo circulus $EZH\Theta$ spatium Σ excedit. itaque $EKZ\Lambda HM\Theta N > \Sigma$. inscribatur etiam in circulo $AB\Gamma\Delta$ polygonum $A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P$ polygono $EKZ\Lambda HM\Theta N$ simile. erit igitur $B\Delta^2 : Z\Theta^2 = A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P : EKZ\Lambda HM\Theta N$ [prop. I]. uerum etiam $B\Delta^2 : Z\Theta^2 = AB\Gamma\Delta : \Sigma$. quare etiam $AB\Gamma\Delta : \Sigma$

3. αὐτό P. ἔλασσον B (utroque loco), V q; comp. F.
 4. ὥστε καὶ V. 5. ἡμίσεος BFV q. 8. αἰεὶ F, αἰεὶ φ.
 τμήματα B. 9. ἐλάττονα BFV q. 10. Σ] corr. ex E B.
 12. ἐκ- corr. ex ἐγ- in scr. F. 13. καὶ — 14. ἡμισυ] om. P.
 14. ληφθήσεται q. 15. ἔσται] ἐστίν FV. 16. λελήφθω
 F et V (sed corr.); ἐλλήφθω q. 17. HM] mg. m. 1 P.
 τμήματα — 18. κύκλου] mg. m. 1 V. 18. EZHΘ] EZΘ V,
 EZ q. ἐλάσσονα B. 19. EZHΘ] pro E c in ras. φ.
 20. EZKΛHMΘN P. πολυγώνιον q. 22. ὅμοιον] in ras.
 m. 2 V. O in ras. m. 1 B; Γ mg. V. 24. οὕτως — 26.
 ZΘ] bis V, corr. m. 1.

$A\Xi B O \Gamma \Pi \Delta P$ πολύγωνον πρὸς τὸ $E K Z \Lambda H M \Theta N$
 πολύγωνον· ἐναλλάξ ἄρα ὡς ὁ $A B \Gamma \Delta$ κύκλος πρὸς
 τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸ
 $E K Z \Lambda H M \Theta N$ πολύγωνον. μείζων δὲ ὁ $A B \Gamma \Delta$ κύ-
 5 κλος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου· μείζον ἄρα καὶ τὸ Σ
 χωρίον τοῦ $E K Z \Lambda H M \Theta N$ πολυγώνου. ἀλλὰ καὶ
 ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ
 ἀπὸ τῆς $B \Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z \Theta$, οὕτως
 ὁ $A B \Gamma \Delta$ κύκλος πρὸς ἕλασσόν τι τοῦ $E Z H \Theta$ κύκλου
 10 χωρίον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ $Z \Theta$
 πρὸς τὸ ἀπὸ $B \Delta$, οὕτως ὁ $E Z H \Theta$ κύκλος πρὸς ἕλασ-
 σόν τι τοῦ $A B \Gamma \Delta$ κύκλου χωρίον.

Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B \Delta$ πρὸς τὸ
 ἀπὸ τῆς $Z \Theta$, οὕτως ὁ $A B \Gamma \Delta$ κύκλος πρὸς μείζόν τι
 15 τοῦ $E Z H \Theta$ κύκλου χωρίον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μείζον τὸ Σ . ἀνά-
 παλιν ἄρα [ἐστὶν] ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $Z \Theta$ τετράγωνον
 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔB , οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν
 $A B \Gamma \Delta$ κύκλον. ἀλλ' ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν $A B \Gamma \Delta$
 20 κύκλον, οὕτως ὁ $E Z H \Theta$ κύκλος πρὸς ἕλαττόν τι τοῦ
 $A B \Gamma \Delta$ κύκλου χωρίον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $Z \Theta$
 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $B \Delta$, οὕτως ὁ $E Z H \Theta$ κύκλος πρὸς
 ἕλασσόν τι τοῦ $A B \Gamma \Delta$ κύκλου χωρίον· ὅπερ ἀδύνατον
 ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B \Delta$ τετρά-
 25 γωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z \Theta$, οὕτως ὁ $A B \Gamma \Delta$ κύκλος
 πρὸς μείζόν τι τοῦ $E Z H \Theta$ κύκλου χωρίον. ἐδείχθη
 δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἕλασσον· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς
 $B \Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z \Theta$, οὕτως ὁ $A B \Gamma \Delta$
 κύκλος πρὸς τὸν $E Z H \Theta$ κύκλον.

3. ἐν αὐτῷ] $A\Xi B O \Gamma \Pi \Delta P$ V. 4. μείζων] corr. ex μεί-
 ζον m. 1 BV. 5. καί] supra m. 2 B. 7. ἐστίν] om. V.

$= A\Xi B O \Gamma \Pi \Delta P : EKZ \Lambda H M \Theta N$. itaque permu-
tando [V, 16]

$$AB\Gamma\Delta : A\Xi B O \Gamma \Pi \Delta P = \Sigma : EKZ \Lambda H M \Theta N.$$

sed $AB\Gamma\Delta > A\Xi B O \Gamma \Pi \Delta P$. quare etiam

$$\Sigma > EKZ \Lambda H M \Theta N.$$

uerum etiam $\Sigma < EKZ \Lambda H M \Theta N$; quod fieri non
potest. itaque non est ut $B\Delta^2$ ad $Z\Theta^2$, ita circulus
 $AB\Gamma\Delta$ ad spatium aliquod minus circulo $EZH\Theta$.
iam similiter demonstrabimus, ne circulum $EZH\Theta$
quidem ad spatium aliquod minus circulo $AB\Gamma\Delta$ eam
rationem habere quam $Z\Theta^2 : B\Delta^2$.

Iam dico, ne ad maius quidem spatium aliquod
circulo $EZH\Theta$ circulum $AB\Gamma\Delta$ eam rationem habere
quam $B\Delta^2 : Z\Theta^2$.

nam si fieri potest, habeat ad Σ maius circulo
 $EZH\Theta$. e contrario igitur [V, 7 coroll.] $Z\Theta^2 : B\Delta^2$
 $= \Sigma : AB\Gamma\Delta$. uerum ut Σ spatium ad circulum
 $AB\Gamma\Delta$, ita circulus $EZH\Theta$ ad spatium minus circulo
 $AB\Gamma\Delta$ [u. lemma]. quare etiam ut $Z\Theta^2 : B\Delta^2$, ita
circulus $EZH\Theta$ ad spatium aliquod minus circulo
 $AB\Gamma\Delta$; quod fieri non posse demonstratum est. ita-
que non est, ut $B\Delta^2 : Z\Theta^2$, ita circulus $AB\Gamma\Delta$ ad
spatium aliquod maius circulo $EZH\Theta$. demonstra-
uimus autem, ne ad minus quidem eum illam habere
rationem. est igitur $B\Delta^2 : Z\Theta^2 = AB\Gamma\Delta : EZH\Theta$.

$\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ — $\acute{\alpha}\rho\alpha$] supra m. 2 B. 8. $\tau\eta\varsigma$] om. Bq. $\acute{\alpha}\pi\omicron$ $\tau\eta\varsigma$] om. V. $Z\Theta$ τετράγωνον BFVq. 9. ἔλαττον B. 10. $\tau\eta\varsigma$ $Z\Theta$ V. 11. $\tau\eta\varsigma$ $B\Delta$ V. 13. $\delta\eta$] $\delta\acute{\epsilon}$ FV. οὐδ' F. 17. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$] om. P. 18. ΔB] $B\Delta$ τετράγωνον V. 19. $\acute{\alpha}\lambda\lambda'$ ὡς — 20. κύκλον] om. q. 20. κύκλον] om. V; mg. m. 1: ὡς εὐθύς ἐρεῖ P. ἔλασσον BVq. 24. $B\Delta$] AB P. 27. $\pi\rho\acute{o}\varsigma$] om. V. 28. $B\Delta$] AB P. $Z\Theta$ τετράγωνον BV.

Οἱ ἄρα κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν
διαμέτρων τετράγωνα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λήμμα.

Λέγω δὴ, ὅτι τοῦ Σ χωρίου μείζονος ὄντος τοῦ
5 $EZH\Theta$ κύκλου ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$
κύκλον, οὕτως ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς ἕλαττόν τι τοῦ
 $AB\Gamma\Delta$ κύκλου χωρίον.

Γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$
κύκλον, οὕτως ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς τὸ T χωρίον.
10 λέγω, ὅτι ἕλαττόν ἐστὶ τὸ T χωρίον τοῦ $AB\Gamma\Delta$ κύ-
κλου. ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$
κύκλον, οὕτως ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς τὸ T χωρίον,
ἐναλλάξ ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύ-
κλον, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸ T χωρίον.
15 μείζον δὲ τὸ Σ χωρίον τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου· μείζων
ἄρα καὶ ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος τοῦ T χωρίου. ὥστε ἐστὶν
ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, οὕτως ὁ
 $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς ἕλαττέν τι τοῦ $AB\Gamma\Delta$ κύκλου
χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20

γ'.

Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαι-
ρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας
ἀλλήλαις καὶ [ὁμοίας] τῇ ὅλῃ τριγώνου ἐχού-
σας βάσεις καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· καὶ τὰ
25 δύο πρίσματα μείζονά ἐστὶν ἢ τὸ ἡμισυ τῆς
ὅλης πυραμίδος.

3. λήμμα] om. codd. 6. ἔλασσον BVq. 7. κύκλου]
om. V. 9. τό] corr. ex τόν m. 1 P. 10. ἔλασσον B, comp.
F. 12. κύκλος] om. V. 13. Σ] E F. 15. μείζον] -ον

Ergo circuli eam inter se rationem habent quam quadrata diametrorum; quod erat demonstrandum.

Corollarium.¹⁾

Dico, si $EZH\textcircled{\ominus} > \Sigma$, esse ut Σ spatium ad circulum $AB\Gamma\Delta$, ita circulus $EZH\textcircled{\ominus}$ ad spatium aliquod minus circulo $AB\Gamma\Delta$.

fiat enim $\Sigma : AB\Gamma\Delta = EZH\textcircled{\ominus} : T$. dico, esse $T < AB\Gamma\Delta$. nam quoniam est $\Sigma : AB\Gamma\Delta = EZH\textcircled{\ominus} : T$, permutando erit [V, 16] $\Sigma : EZH\textcircled{\ominus} = AB\Gamma\Delta : T$. sed $\Sigma > EZH\textcircled{\ominus}$. quare etiam $AB\Gamma\Delta > T$ [V, 14]. est igitur, ut spatium Σ ad $AB\Gamma\Delta$ circulum, ita circulus $EZH\textcircled{\ominus}$ ad spatium minus circulo $AB\Gamma\Delta$; quod erat demonstrandum.

III.

Omnia pyramis triangulam basim habens in duas pyramidas inter se et aequales et similes totique similes triangulas bases habentes et in duo prismata aequalia diuiditur; et duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

1) Hoc lemma an genuinum non sit, dubitare licet; etiam loci quidam in ipsa demonstratione suspecti sunt. sed de hoc toto genere, scilicet interpolationibus ante Theonem ortis, post modo uidebimus.

e corr. V. Σ] E F. 18. ἔλασσον BFVq. κύκλου] om. V. 20. γ'] om. q; non liquet F. 21. Post τρίγωνον 4 litt. eras. P. 22. Post εἰς ins. τε m. 2 F. τε καὶ ὁμοίας] supra m. 2 B, om. FVq. 23. ἀλλήλας P, -ας e corr. Dein seq. in BFVq: τριγώνους (ου e corr. V) ἐχούσας (corr. ex ἔχουσα m. 2 F) βάσεις. ὁμοίας] om. P. τριγώνου P, corr. m. 1. τριγώνους ἐχούσας βάσεις] om. BFVq. 24. ἴσα] om. F, in ras. V. καὶ τὰ δύο πρίσματα] om. F.

Ἔστω πυραμὶς, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον· λέγω, ὅτι ἡ $AB\Gamma\Delta$ πυραμὶς διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βᾶσεις ἐχούσας καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς
 5 δύο πρίσματα ἴσα· καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Τετμήσθωσαν γὰρ αἱ AB , $B\Gamma$, ΓA , $A\Delta$, ΔB , $\Delta\Gamma$ δίχα κατὰ τὰ E , Z , H , Θ , K , Λ σημεῖα, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΘE , $E H$, $H\Theta$, ΘK , $K\Lambda$, $\Lambda\Theta$, KZ ,
 10 ZH . ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AE τῇ EB , ἡ δὲ $A\Theta$ τῇ $\Delta\Theta$, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $E\Theta$ τῇ ΔB . διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘK τῇ AB παράλληλός ἐστὶν. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘEBK . ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘK τῇ EB . ἀλλὰ ἡ EB τῇ EA ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ
 15 AE ἄρα τῇ ΘK ἐστὶν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ $A\Theta$ τῇ $\Theta\Delta$ ἴση· δύο δὴ αἱ EA , $A\Theta$ δυσὶ ταῖς $K\Theta$, $\Theta\Delta$ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $EA\Theta$ γωνία τῇ ὑπὸ $K\Theta\Delta$ ἴση· βᾶσις ἄρα ἡ $E\Theta$ βᾶσει τῇ $K\Delta$ ἐστὶν ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ $AE\Theta$
 20 τρίγωνον τῷ $\Theta K\Delta$ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $A\Theta H$ τρίγωνον τῷ $\Theta\Lambda\Delta$ τριγώνῳ ἴσον τέ ἐστὶ καὶ ὁμοιον. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων αἱ $E\Theta$, ΘH παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένης ἀλλήλων τὰς $K\Delta$, $\Delta\Lambda$ εἰσὶν οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι, ἴσας
 25 γωνίας περιέξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $E\Theta H$ γωνία τῇ ὑπὸ $K\Delta\Lambda$ γωνία. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ $E\Theta$, ΘH δυσὶ ταῖς $K\Delta$, $\Delta\Lambda$ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκα-

1. τό] corr. ex ἡ m. 2 F. $AB\Gamma\Delta$ F, et B, eras. Δ .
 τρίγωνον] Δ F. 7. ΔB] ΔE F. 8. $\Delta\Gamma$] Γ e corr. m.
 1 F. 9. $E H$] $H E$ FV. ΘK] supra scr. m. 2 B.
 11. $\Delta\Theta$] in ras. V, $\Theta\Delta$ B, $E\Delta$ F. ΔB] ΔE F. 12. ἐστὶ

Sit pyramis, cuius basis sit $AB\Gamma$ triangulus, uertex autem punctum Δ . dico, pyramidem $AB\Gamma\Delta$ in duas pyramides diuidi inter se aequales triangulas bases habentes et toti similes et in duo prismata aequalia, et duo prismata maiora esse dimidio totius pyramidis.

secentur enim $AB, B\Gamma, \Gamma A, A\Delta, \Delta B, \Delta\Gamma$ in duas partes aequales in punctis $E, Z, H, \Theta, K, \Lambda$, et ducantur $\Theta E, EH, H\Theta, \Theta K, K\Lambda, \Lambda\Theta, KZ, ZH$. iam quoniam $AE = EB, A\Theta = \Delta\Theta$, erit $E\Theta$ rectae ΔB parallela [VI, 2]. eadem de causa etiam ΘK rectae AB parallela est. itaque parallelogrammum est ΘEBK . itaque $\Theta K = EB$ [I, 34]. uerum etiam $EB = EA$. quare etiam $EA = \Theta K$. uerum etiam $A\Theta = \Theta\Delta$. itaque duae rectae $EA, A\Theta$ duabus $K\Theta, \Theta\Delta$ aequales sunt singulae singulis; et $\angle EA\Theta = K\Theta\Delta$ [I, 29]. itaque $E\Theta = K\Delta$ [I, 4]. quare triangulus $AE\Theta$ triangulo $\Theta K\Delta$ et aequalis est et similis [I, 4]. eadem de causa etiam triangulus $A\Theta H$ triangulo $\Theta\Lambda\Delta$ et aequalis est et similis. et quoniam duae rectae inter se tangentes $E\Theta, \Theta H$ duabus rectis inter se tangentibus $K\Delta, \Delta\Lambda$ parallelae sunt in eodem plano non positae, aequales angulos comprehendunt [XI, 10]. itaque $\angle E\Theta H = K\Delta\Lambda$. et quoniam duae rectae $E\Theta, \Theta H$ duabus rectis $K\Delta, \Delta\Lambda$ aequales sunt singulae

q. 14. EA] in ras. V, AE BF. 15. AE] EA P. $\xi\sigma\tau\iota$] $\xi\sigma\tau\iota\upsilon$ P. $A\Theta$] ΘA P. 16. $\Theta\Delta$] $\Delta\Theta$ B. EA] $E\Delta$ q, AE BV. 17. $EA, A\Theta$ PB. 18. $K\Theta, \Theta\Delta$ PBF.
 19. $\xi\sigma\eta$ $\xi\sigma\tau\iota$ q. $AE\Theta\Delta$ F. 20. $\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\omicron\nu$] comp. F. $K\Theta\Delta$ FV. 21. ABH φ . $\Theta K\Delta$ F. Post $\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\omicron\nu$ rep. in F: $\delta\iota\acute{\alpha}$ $\tau\acute{\alpha}$ $\alpha\nu\tau\acute{\alpha}$ $\delta\eta$ $\kappa\alpha\iota$ $\tau\acute{o}$ $A\Theta H$ $\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\omicron\nu$ $\tau\acute{\omega}$ $\Theta\Lambda\Delta$ $\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\omicron\nu$. $\tau\epsilon$] om. P. 23. $\acute{\alpha}\pi\tau\acute{o}\mu\epsilon\nu\alpha\iota$ q. 25. $\xi\sigma\tau\alpha\iota$ q. $E\Theta, \Theta H$ PBF. 26. $K\Delta, \Delta\Lambda$ PF, et B, alt. Δ eras.

τέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $E\Theta H$ γωνία τῇ ὑπὸ $K\Delta\Lambda$
 ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα ἡ EH βάσει τῇ $K\Lambda$ [ἐστὶν] ἴση·
 ἴσον ἄρα καὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ $E\Theta H$ τρίγωνον τῷ $K\Delta\Lambda$
 τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ AEH τρίγωνον τῷ
 5 $\Theta K\Lambda$ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὁμοίον ἐστὶν. ἡ ἄρα πυρα-
 μίς, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ AEH τρίγωνον, κορυφή
 δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση καὶ ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς
 βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $\Theta K\Lambda$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ
 σημεῖον. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $A\Delta B$ παρὰ μίαν
 10 τῶν πλευρῶν τὴν AB ἤκται ἡ ΘK , ἰσογώνιον ἐστὶ
 τὸ $A\Delta B$ τρίγωνον τῷ $\Delta\Theta K$ τριγώνῳ, καὶ τὰς πλευ-
 ρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν· ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $A\Delta B$ τρί-
 γωνον τῷ $\Delta\Theta K$ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ
 μὲν $\Delta B\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Delta K\Lambda$ τριγώνῳ ὁμοίον ἐστὶν,
 15 τὸ δὲ $A\Delta\Gamma$ τῷ $\Delta\Lambda\Theta$. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἀπτό-
 μεναι ἀλλήλων αἱ BA , $A\Gamma$ παρὰ δύο εὐθείας ἀπτο-
 μένας ἀλλήλων τὰς $K\Theta$, $\Theta\Lambda$ εἰσιν οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ
 ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ
 ὑπὸ BAG γωνία τῇ ὑπὸ $K\Theta\Lambda$. καὶ ἐστὶν ὡς ἡ BA
 20 πρὸς τὴν $A\Gamma$, οὕτως ἡ $K\Theta$ πρὸς τὴν $\Theta\Lambda$. ὁμοιον
 ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Theta K\Lambda$ τριγώνῳ. καὶ
 πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον,
 κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς
 βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $\Theta K\Lambda$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ
 25 σημεῖον. ἀλλὰ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν [ἐστὶ] τὸ $\Theta K\Lambda$
 τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐδείχθη

1. $E\Theta$, ΘH PF, et B, eras. alt. Θ . $K\Delta$, $\Delta\Lambda$ PBF.
 2. EH] HE F, ὑπὸ EH B. ἐστὶν] om. P. 3. $K\Lambda\Delta$ FV.
 4. EAH FV. 5. τέ ἐστὶν καὶ ὁμοιον P. 7. ἐστὶ] ἐστὶ
 τῇ FVq. 8. $\Theta K\Lambda$] Θ in ras. B. 11. $AB\Delta$ P. τοῦ
 $\Delta\Theta K$ τριγώνου F. $\Delta\Theta K$] $\Theta\Delta K$ V; $\Delta K\Theta$ B. 12. $A\Delta B$]
 corr. ex $AB\Delta$ V, $AB\Delta$ F. 14. ἐστὶ PBVq, comp. F.

singulis¹⁾, et $\angle E\Theta H = K\Delta\Lambda$, erit $EH = K\Lambda$. quare triangulus $E\Theta H$ triangulo $K\Delta\Lambda$ et aequalis est et similis [I, 4]. eadem de causa etiam triangulus AEH triangulo $\Theta K\Lambda$ et aequalis est et similis. itaque pyramis, cuius basis est triangulus AEH , uertex autem punctum Θ , aequalis est et similis pyramidi, cuius basis est $\Theta K\Lambda$ triangulus, uertex autem punctum Δ [XI def. 10]. et quoniam in triangulo $A\Delta B$ uni lateri AB parallela ducta est ΘK , triangulus $A\Delta B$ triangulo $\Delta\Theta K$ aequiangulus est [I, 29], et latera proportionalia habent. itaque triangulus $A\Delta B$ triangulo $\Delta\Theta K$ similis est [VI def. 1]. eadem de causa etiam triangulus $\Delta B\Gamma$ triangulo $\Delta K\Lambda$ similis est et $A\Delta\Gamma$ triangulo $\Delta\Lambda\Theta$. et quoniam duae rectae inter se tangentes BA , $A\Gamma$ duabus rectis inter se tangentibus $K\Theta$, $\Theta\Lambda$ parallelae sunt non in eodem plano, aequales angulos comprehendunt [XI, 10]. itaque $\angle B\Delta\Gamma = K\Theta\Lambda$. et $BA : A\Gamma = K\Theta : \Theta\Lambda$.²⁾ itaque triangulus $AB\Gamma$ triangulo $\Theta K\Lambda$ similis est [VI, 6]. quare etiam pyramis, cuius basis est triangulus $AB\Gamma$, uertex autem Δ punctum, similis est pyramidi, cuius basis est triangulus $\Theta K\Lambda$, uertex autem Δ punctum [XI def. 9]. sed pyramis, cuius basis est triangulus $\Theta K\Lambda$, uertex autem Δ punctum, similis est pyramidi, cuius basis

1) Nam $E\Theta = K\Delta$ et $\Delta A\Theta H \simeq \Theta\Delta\Lambda$.

2) Nam $AB : \Theta K = A\Delta : \Theta\Delta$, quia $\Delta AB\Delta \sim \Theta K\Delta$; et $A\Delta : \Theta\Delta = A\Gamma : \Theta\Lambda$, quia $\Delta A\Gamma\Delta \sim \Delta\Theta\Lambda$. tum u. V, 16.

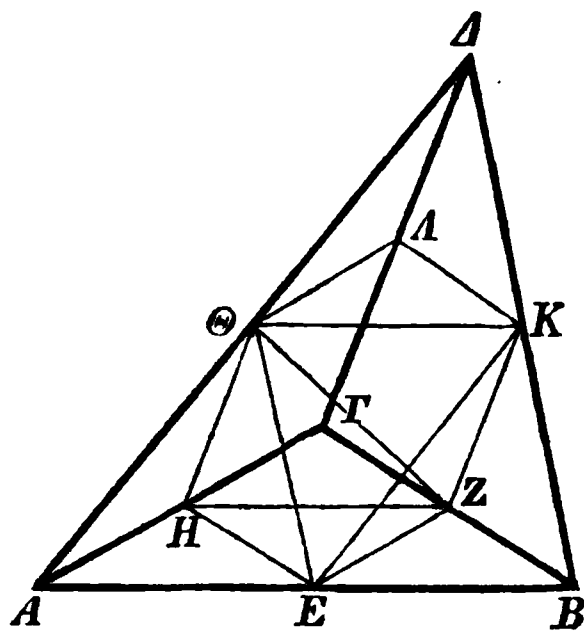
15. $AB\Gamma F$. $\Delta\Lambda\Theta$ τριγώνω Theon (BFVq). 16. Post
 $\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\omega\nu$ del. m. 1: $\alpha\iota BA, A\Gamma P$. 17. $\Theta K FV$. 19. $\gamma\omega$
 $\nu\iota\alpha$] om. V. $\acute{\omega}\varsigma$] supra m. 1 V. η] corr. ex $A V$.
 22. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] om. FV. 23. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu B$. 25. $\eta\varsigma \beta\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma$] mg. m. 1 P.
 $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] om. PF. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota \tau\acute{o}$ — p. 154, 1 $\mu\acute{\epsilon}\nu \acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] mg. m. 2 B.

πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ AEH τρίγωνον, κο-
 ρυφή δὲ τὸ Θ σημεῖον [ὥστε καὶ πυραμῖς, ἧς βάσις
 μὲν τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον,
 ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ AEH τρίγω-
 5 νον, κορυφή δὲ τὸ Θ σημεῖον]. ἑκατέρα ἄρα τῶν
 $AEH\Theta$, $\Theta K\Lambda\Delta$ πυραμίδων ὁμοία ἐστὶ τῇ ὅλη τῇ
 $AB\Gamma\Delta$ πυραμίδι. — Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BZ τῇ
 $Z\Gamma$, διπλάσιόν ἐστὶ τὸ $EBZH$ παραλληλόγραμμον
 τοῦ $HZ\Gamma$ τριγώνου. καὶ ἐπεὶ, ἐὰν ἡ δύο πρίσματα
 10 ἰσοῦψῃ, καὶ τὸ μὲν ἔχη βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ
 δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἢ τὸ παραλληλόγραμμον
 τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα, ἴσον ἄρα ἐστὶ
 τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων
 τῶν BKZ , $E\Theta H$, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν
 15 $EBZH$, $EBK\Theta$, ΘKZH τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ
 ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν $HZ\Gamma$, $\Theta K\Lambda$, τριῶν δὲ
 παραλληλογράμμων τῶν $KZ\Gamma\Lambda$, $\Lambda\Gamma H\Theta$, ΘKZH .
 καὶ φανερόν, ὅτι ἑκάτερον τῶν πρισμάτων, οὗ τε βάσις
 τὸ $EBZH$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘK
 20 εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις τὸ $HZ\Gamma$ τρίγωνον, ἀπεναντίον
 δὲ τὸ $\Theta K\Lambda$ τρίγωνον, μείζον ἐστὶν ἑκατέρας τῶν πυρα-
 μίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ AEH , $\Theta K\Lambda$ τρίγωνα, κο-
 ρυφαὶ δὲ τὰ Θ , Δ σημεία, ἐπειδήπερ [καί] ἐὰν ἐπι-
 ζεύξωμεν τὰς EZ , EK εὐθείας, τὸ μὲν πρίσμα, οὗ
 25 βάσις τὸ $EBZH$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ
 ἡ ΘK εὐθεῖα, μείζον ἐστὶ τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις
 τὸ EBZ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ K σημεῖον. ἀλλ'

1. ἐστὶ] om. Fq. τό] et in textu et mg. m. 2 B.
 2. ὥστε — δ. σημεῖον] om. P. 3. μὲν ἐστὶ V. 4. ἐστὶ] om.
 F. μὲν ἐστὶ V. τρίγωνον] ΔN F. 7. πυραμίδι] in syll.
 πυρα des. F; reliquam partem a φ suppletam hic neglexi.
 10. ἔχη] corr. ex ἔχει m. 2 P. 11. ἡ] εἶη V. 14. KZB V.

est AEH triangulus, uertex autem Θ punctum, ut demonstrauius. itaque utraque pyramis $AEH\Theta$, $\Theta K\Lambda\Delta$ similis est toti pyramidi $AB\Gamma\Delta$.

Et quoniam $BZ = Z\Gamma$, erit $EBZH = 2HZ\Gamma$ [I, 41]. et quoniam, si datis duobus prismatis eandem altitudi-



nem habentibus alterum basim habet parallelogrammum, alterum triangulum, et parallelogrammum duplo maius est triangulo, prismata aequalia sunt, prisma comprehensum duobus triangulis BKZ , $E\Theta H$ et tribus parallelogrammis $EBZH$, $EBK\Theta$, ΘKZH aequale est pris-

mati comprehenso duobus triangulis $HZ\Gamma$, $\Theta K\Lambda$ et tribus parallelogrammis $KZ\Gamma\Lambda$, $\Lambda\Gamma H\Theta$, ΘKZH [XI, 39]. et adparet, utrumque prisma, et cuius basis sit $EBZH$ parallelogrammum, ei autem opposita recta ΘK , et cuius basis sit triangulus $HZ\Gamma$, ei autem oppositus triangulus $\Theta K\Lambda$, maius esse utraque pyramide, quarum bases sint trianguli AEH , $\Theta K\Lambda$, uertices autem puncta Θ , Δ , quoniam, si duxerimus rectas EZ , EK , prisma, cuius basis est parallelogrammum $EBZH$, ei autem opposita recta ΘK , maius est pyramide, cuius basis est triangulus EBZ , uertex autem

17. Post τῶν del. Z m. 1 V. $KZ\Gamma\Lambda$, $\Lambda\Gamma H\Theta$, ΘKZH] mg. m. 2 B, in textu eras. \overline{EB} , \overline{ZH} , $\overline{K\Theta}$. 18. ὅτι καὶ V.
 19. $EBZH$] B in ras. B. 22. βάσις PVq, et B, sed corr. AEH] in ras. V. κορυφή q. 23. καὶ] om. BVq.
 26. μείζον] supra scr. ω m. rec. P. τῆς] om. V.
 27. τρίγωνόν ἐστι V.

ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ EBZ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ K σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις τὸ AEH τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Θ σημεῖον· ὑπὸ γὰρ ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται. ὥστε καὶ τὸ πρίσμα,
 5 οὗ βάσις μὲν τὸ $EBZH$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘK εὐθεῖα, μείζον ἐστὶ πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ AEH τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Θ σημεῖον. ἴσον δὲ τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις τὸ $EBZH$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘK εὐθεῖα, τῷ πρίσματι,
 10 οὗ βάσις μὲν τὸ $HZ\Gamma$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $\Theta K\Lambda$ τρίγωνον· ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ AEH τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις τὸ $\Theta K\Lambda$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον. τὰ ἄρα εἰρημένα δύο πρίσματα μείζονά ἐστὶ τῶν εἰρη-
 15 μένων δύο πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ AEH , $\Theta K\Lambda$ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Θ , Δ σημεία.

Ἡ ἄρα ὅλη πυραμὶς, ἧς βάσις τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον, διήρηται εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις [καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ] καὶ εἰς δύο
 20 πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ'.

Ἐὰν ὥσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἕκα-
 25 τέρα αὐτῶν εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα

2. τό] (alt.) τά q. 4. τό] om. V. 15. δύο] β V (in mg. transit). πυραμίδων] in ras. m. 1 B. βάσεις] βάσις B (corr. m. 2), q, comp. V. $\Theta K\Lambda$] ΘK in ras. V. 18. τε] om. V. 19. ἴσας τε καὶ ὁμοίας edd. καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ] om. P.

punctum K ; pyramis autem, cuius basis est triangulus EBZ , uertex autem punctum K , aequalis est pyramidi, cuius basis est AEH triangulus, uertex autem punctum Θ ; nam planis aequalibus et similibus comprehenduntur; quare etiam prisma, cuius basis est $EBZH$ parallelogrammum, ei autem opposita recta ΘK , maius est pyramide, cuius basis est triangulus AEH , uertex autem punctum Θ . prisma autem, cuius basis est parallelogrammum $EBZH$, ei autem opposita recta ΘK , aequale est prismati, cuius basis est triangulus $HZ\Gamma$, ei autem oppositus triangulus $\Theta K\Lambda$; pyramis autem, cuius basis est triangulus AEH , uertex autem Θ punctum, aequalis est pyramidi, cuius basis est triangulus $\Theta K\Lambda$, uertex autem Δ punctum. itaque duo illa prismata, quae nominauimus, maiora sunt duabus pyramidibus, quas nominauimus, quarum bases sunt trianguli AEH , $\Theta K\Lambda$, uertices autem puncta Θ , Δ .

Ergo tota pyramis, cuius basis est $AB\Gamma$ triangulus, uertex autem punctum Δ , in duas pyramides inter se aequales diuisa est et in duo prismata aequalia, et duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis; quod erat demonstrandum.

IV.

Datis duabus pyramidibus sub eadem altitudine et bases triangulas habentibus si utraque in duas pyramides inter se aequales totique similes et duo prismata aequalia diuiditur; erit ut basis alterius pyra-

20. $\mu\epsilon\lambda\lambda\omicron\nu\alpha$] ξ corr. ex β . V.
1 P. $\omega\sigma\iota\nu$ B.

23. $\acute{\epsilon}\acute{\alpha}\nu$] $-\alpha\nu$ postea add. m.

ἴσα, ἔσται ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

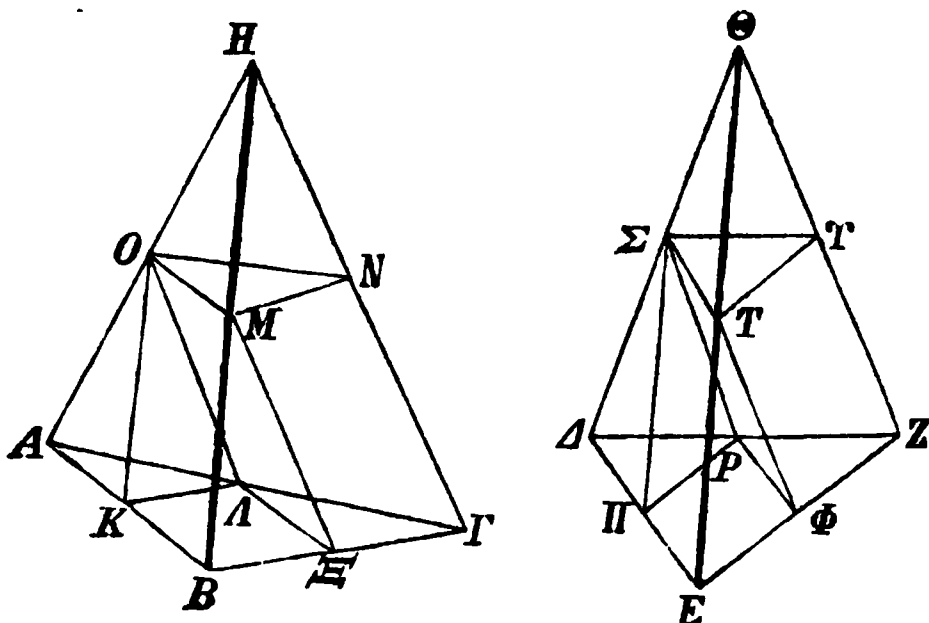
5 Ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς $AB\Gamma$, ΔEZ , κορυφὰς δὲ τὰ H , Θ σημεία, καὶ διηρήσθω ἑκατέρᾳ αὐτῶν εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· λέγω, ὅτι ἔστιν ὡς ἡ $AB\Gamma$
10 βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $AB\Gamma H$ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι πρίσματα ἰσοπληθῆ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἔστιν ἡ μὲν $B\Xi$ τῇ $\Xi\Gamma$, ἡ δὲ AA τῇ $\Lambda\Gamma$, παράλληλος ἄρα ἔστιν ἡ $A\Xi$ τῇ AB καὶ
15 ὁμοιον τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Lambda\Xi\Gamma$ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΔEZ τρίγωνον τῷ $P\Phi Z$ τριγώνῳ ὁμοιόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ διπλασίων ἔστιν ἡ μὲν $B\Gamma$ τῆς $\Gamma\Xi$, ἡ δὲ EZ τῆς $Z\Phi$, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν $\Gamma\Xi$, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $Z\Phi$. καὶ ἀναγέγραπται
20 ἀπὸ μὲν τῶν $B\Gamma$, $\Gamma\Xi$ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ $AB\Gamma$, $\Lambda\Xi\Gamma$, ἀπὸ δὲ τῶν EZ , $Z\Phi$ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα [εὐθύγραμμα] τὰ ΔEZ ,

1. Post ἴσα add. Theon: καὶ τῶν γενομένων (γεναμ. B) πυραμίδων ἑκατέρᾳ τὸν (e corr. V) αὐτὸν τρόπον, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίνηται (γίνεται q) (BVq). ἔσται — τῆς] supra scr. m. 2 B (ἔστιν). 2. ἑτέρας] post ρ del. ε m. 1 P. οὕτω BV. 3. πρίσματα — 4. πυραμίδι] mg. m. 2 B. 4. πάντα] om. V. 8. ὁμοίως V. 9. Post ἴσα add. καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρᾳ τὸν αὐτὸν τρόπον νενοήσθω διηρημένη καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω Bq, V mg. m. 2. 10. βάσιν] om. V. οὕτω Bq. 13. BZ q. 14. ἔστιν] om. V. 16. ὁμοιόν ἐστι τῷ $P\Phi Z$ τριγώνῳ BVq ($P\Phi$ in ras. V). 18. $\Gamma\Xi$] corr. ex $\Xi\Gamma$ V. Post δέ ras. 1 litt. P. $Z\Phi$] corr. ex ΦZ V. 22. εὐθύγραμμα] om. P.

midis ad basim alterius, ita omnia prismata alterius pyramidis ad omnia prismata numero aequalia¹⁾ alterius pyramidis.

Sint duae pyramides sub eadem altitudine triangulas bases habentes $AB\Gamma$, ΔEZ , uertices autem H ,



⊙ puncta, et utraque in duas pyramides inter se aequales totique similes et duo prismata aequalia diuidatur [prop. III]. dico, esse ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita omnia prismata pyramidis $AB\Gamma H$ ad prismata numero aequalia pyramidis $\Delta EZ \odot$.

Nam quoniam $B\Xi = \Xi\Gamma$, $A\Lambda = \Lambda\Gamma$ [prop. III], erit $A\Xi$ rectae AB parallela et $AB\Gamma \sim A\Xi\Gamma$ [p. 152, 9]. eadem de causa erit etiam $\Delta EZ \sim P\Phi Z$. et quoniam $B\Gamma = 2\Gamma\Xi$, $EZ = 2Z\Phi$, erit $B\Gamma : \Gamma\Xi = EZ : Z\Phi$. et in $B\Gamma$, $\Gamma\Xi$ constructae sunt figurae rectilineae similes et similiter positae $AB\Gamma$, $A\Xi\Gamma$, in EZ , $Z\Phi$

1) πάντα et ἰσοπληθῆ addidit Euclides ad finem propositionis p. 160, 26 respiciens, ubi eam quasi quodam corollario dilatavit.

$P\Phi Z$ ἔστιν ἄρα ὡς τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον πρὸς τὸ $A\Xi\Gamma$
 τρίγωνον, οὕτως τὸ ΔEZ τρίγωνον πρὸς τὸ $P\Phi Z$
 τρίγωνον· ἐναλλάξ ἄρα ἔστιν ὡς τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον
 πρὸς τὸ ΔEZ [τρίγωνον], οὕτως τὸ $A\Xi\Gamma$ [τρίγωνον]
 5 πρὸς τὸ $P\Phi Z$ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς τὸ $A\Xi\Gamma$ τρίγωνον
 πρὸς τὸ $P\Phi Z$ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις
 μὲν [ἔστι] τὸ $A\Xi\Gamma$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ OMN ,
 πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ $P\Phi Z$ τρίγωνον,
 ἀπεναντίον δὲ τὸ $\Sigma\Gamma\Gamma$ · καὶ ὡς ἄρα τὸ $AB\Gamma$ τρίγω-
 10 νον πρὸς τὸ ΔEZ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ
 βάσις μὲν τὸ $A\Xi\Gamma$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ OMN ,
 πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ $P\Phi Z$ τρίγωνον,
 ἀπεναντίον δὲ τὸ $\Sigma\Gamma\Gamma$. ὡς δὲ τὰ εἰρημένα πρίσματα
 πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ
 15 $KB\Xi A$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ OM
 εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ $ΠΕΦΡ$
 παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣT εὐθεῖα. καὶ
 τὰ δύο ἄρα πρίσματα, οὗ τε βάσις μὲν τὸ $KB\Xi A$
 παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ OM , καὶ οὗ
 20 βάσις μὲν τὸ $A\Xi\Gamma$, ἀπεναντίον δὲ τὸ OMN , πρὸς
 τὰ πρίσματα, οὗ τε βάσις μὲν τὸ $ΠΕΦΡ$, ἀπεναντίον
 δὲ ἡ ΣT εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις μὲν τὸ $P\Phi Z$ τρίγω-
 νον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $\Sigma\Gamma\Gamma$. καὶ ὡς ἄρα ἡ $AB\Gamma$
 βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα δύο
 25 πρίσματα πρὸς τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα.

Καὶ ὁμοίως, ἐὰν διαιρεθῶσιν αἱ $OMNH$, $\Sigma\Gamma\Gamma\Theta$
 πυραμίδες εἰς τε δύο πρίσματα καὶ δύο πυραμίδας,

1. $P\Phi Z$] P e corr. V, $E\Phi Z$ q. 2. τρίγωνον] (prius) om.
 V. 4. τρίγωνον] (prius) om. P. τρίγωνον] (alt.) om. P.
 6. οὕτω B. 7. ἔστι] om. P. OMN τρίγωνον V. 8. μὲν
 ἔστι V. 11. μὲν ἔστι V. 12. τρίγωνον] supra comp. B.
 13. ὡς δέ — p. 162, 14] mutavit Theon; u. app.

autem similes et similiter positae $\triangle EZ$, $P\Phi Z$. erit igitur [VI, 22]

$$AB\Gamma : \triangle EZ = \triangle EZ : P\Phi Z.$$

itaque permutando $AB\Gamma : \triangle EZ = \triangle EZ : P\Phi Z$ [V, 16]. sed ut $\triangle EZ : P\Phi Z$, ita prisma, cuius basis est $\triangle EZ$ triangulus, ei autem oppositus OMN , ad prisma, cuius basis est $P\Phi Z$ triangulus, ei autem oppositus $\Sigma T\Upsilon$ [u. lemma]. quare etiam ut $AB\Gamma : \triangle EZ$, ita prisma, cuius basis est $\triangle EZ$ triangulus, ei autem oppositus OMN , ad prisma, cuius basis est $P\Phi Z$ triangulus, ei autem oppositus $\Sigma T\Upsilon$. uerum quam rationem habent duo prismata, quae diximus, eam habet prisma, cuius basis est parallelogrammum $KB\Xi A$, ei autem opposita recta OM , ad prisma, cuius basis est parallelogrammum $\Pi E\Phi P$, ei autem opposita recta ΣT [XI, 39; cfr. prop. III]. quare etiam duo prismata, et cuius basis est parallelogrammum $KB\Xi A$, ei autem opposita OM , et cuius basis est $\triangle EZ$, ei autem oppositus OMN , ad duo prismata, et cuius basis est $\Pi E\Phi P$, ei autem opposita ΣT recta, et cuius basis est $P\Phi Z$ triangulus, ei autem oppositus $\Sigma T\Upsilon$, illam habent rationem [V, 12].¹⁾ quare etiam ut $AB\Gamma : \triangle EZ$, ita duo prismata, quae diximus, ad duo prismata, quae diximus.

Et similiter, si pyramides $OMNH$, $\Sigma T\Upsilon\Theta$ in duo prismata duasque pyramides diuiduntur, erunt ut

1) Sint prismata p p_1 P P_1 . demonstrauius $AB\Gamma : \triangle EZ = p : p_1$; $p : p_1 = P : P_1 = p + P : p_1 + P_1$. ergo
 $AB\Gamma : \triangle EZ = p + P : p_1 + P_1$.

14. διὰ τὰ ἀντά mg. m. 1 P, qui ad lin. 8 adscr. hab. m. 1: ὡς εὐθὺς ἐρεῖ. 18. $KB\Xi B$, sed ΞB in ras. e corr. P.

ἔσται ὡς ἡ OMN βάσις πρὸς τὴν $\Sigma\Gamma\Upsilon$ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $OMNH$ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $\Sigma\Gamma\Upsilon\Theta$ πυραμίδι δύο πρίσματα. ἀλλ' ὡς ἡ OMN βάσις πρὸς τὴν $\Sigma\Gamma\Upsilon$ βάσιν, οὕτως ἡ $AB\Gamma$ βάσις
 5 πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν· ἴσον γὰρ ἑκάτερον τῶν OMN , $\Sigma\Gamma\Upsilon$ τριγώνων ἑκατέρῳ τῶν $\Lambda\Xi\Gamma$, $P\Phi Z$. καὶ ὡς ἄρα ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως τὰ τέσσαρα πρίσματα πρὸς τὰ τέσσαρα πρίσματα. ὁμοίως δὲ κἂν τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας διέλωμεν εἰς τε
 10 δύο πυραμίδας καὶ εἰς δύο πρίσματα, ἔσται ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $AB\Gamma H$ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15

Λήμμα.

Ὅτι δὲ ἔστιν ὡς τὸ $\Lambda\Xi\Gamma$ τρίγωνον πρὸς τὸ $P\Phi Z$ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οἷ βάσις τὸ $\Lambda\Xi\Gamma$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ OMN , πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ $P\Phi Z$ [τρίγωνον], ἀπεναντίον δὲ τὸ $\Sigma\Gamma\Upsilon$,
 20 οὕτω δεικτέον.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς νενοήσθωσαν ἀπὸ τῶν H , Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ ἐπίπεδα, ἴσαι δηλαδή τυγχάνουσαι διὰ τὸ ἰσοῦψεῖς ὑποκεῖσθαι τὰς πυραμίδας. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἦ τε $H\Gamma$ καὶ ἡ ἀπὸ
 25 τοῦ H κάθετος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν $AB\Gamma$, OMN τέμνονται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται. καὶ τέτμηται ἡ $H\Gamma$ δίχα ὑπὸ τοῦ OMN ἐπιπέδου κατὰ τὸ N · καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ H ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ

15. λήμμα] om. BV.
 ZPΦ P.

17. οὕτω B.

16. $\Lambda\Xi\Gamma$] Γ e corr. m. 2 V.

19. τρίγωνον om. P. $\Gamma\Sigma\Upsilon$ τρί-

$OMN: \Sigma TT$, ita duo prismata pyramidis $OMNH$ ad duo prismata pyramidis ΣTT \ominus . sed $OMN: \Sigma TT = AB\Gamma: \Delta EZ$; nam uterque triangulus OMN , ΣTT utrique triangulo $\Lambda \Xi \Gamma$, $P\Phi Z$ aequalis est. quare etiam ut $AB\Gamma: \Delta EZ$, ita quattuor prismata ad quattuor prismata [V, 12]. et similiter si etiam reliquas pyramides in duas pyramides duoque prismata diuiserimus, erunt ut $AB\Gamma: \Delta EZ$, ita omnia prismata pyramidis $AB\Gamma H$ ad omnia prismata pyramidis ΔEZ \ominus numero aequalia; quod erat demonstrandum.

L e m m a.

uerum esse, ut $\Lambda \Xi \Gamma: P\Phi Z$, ita prisma, cuius basis sit triangulus $\Lambda \Xi \Gamma$, ei autem oppositus OMN , ad prisma, cuius basis sit $P\Phi Z$, ei autem oppositus ΣTT , ita demonstrandum est.

In eadem enim figura fingantur perpendiculares a punctis H , \ominus ad triangulos $AB\Gamma$, ΔEZ ductae, quae scilicet aequales sunt, quia supposuimus, pyramides aequales altitudines habere. et quoniam duae rectae $H\Gamma$ et perpendicularis ab H ducta planis parallelis $AB\Gamma$, OMN secantur, secundum eandem rationem secabuntur [XI, 17]. et $H\Gamma$ plano OMN in duas partes aequales secta est in N ; quare etiam perpen-

γωνον V. 20. δείξομεν οὕτως V. οὕτω] -ς del. m. 1 P.

21. αὐτὴ ἀπὸ BVq. 22. τῶν] τῆς B. τὰ] τὰ τῶν V.

ΔEZ] ΔEZ τρίγωνα Bq; ΔEZ τριγώνων V. 23. ἰσοψηεῖς]

-ει- e corr. V. 24. ἡ] in ras. V.

$ΑΒΓ$ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ $ΟΜΝ$ ἐπιπέδου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος ἐπὶ τὸ $\Delta ΕΖ$ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ $\Sigma ΤΤ$ ἐπιπέδου. καὶ εἰσιν ἴσαι αἱ ἀπὸ τῶν H, Θ κάθετοι
 5 ἐπὶ τὰ $ΑΒΓ, \Delta ΕΖ$ ἐπίπεδα· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῶν $ΟΜΝ, \Sigma ΤΤ$ τριγώνων ἐπὶ τὰ $ΑΒΓ, \Delta ΕΖ$ κάθετοι. ἰσοῦψῆ ἄρα [ἐστὶ] τὰ πρίσματα, ὧν βάσεις μὲν εἰσι τὰ $\Lambda \Xi \Gamma, Ρ\Phi Ζ$ τρίγωνα, ἀπεναντίον δὲ τὰ $ΟΜΝ, \Sigma ΤΤ$. ὥστε καὶ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα
 10 τὰ ἀπὸ τῶν εἰρημένων πρισμάτων ἀναγραφόμενα ἰσοῦψῆ καὶ πρὸς ἄλληλά [εἰσιν] ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὰ ἡμίση ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $\Lambda \Xi \Gamma$ βάση πρὸς τὴν $Ρ\Phi Ζ$ βάση, οὕτως τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15

ε'.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὔσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν βάσεις
 20 μὲν τὰ $ΑΒΓ, \Delta ΕΖ$ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ H, Θ σημεῖα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΒΓ$ βάση πρὸς τὴν $\Delta ΕΖ$ βάση, οὕτως ἡ $ΑΒΓΗ$ πυραμὶς πρὸς τὴν $\Delta ΕΖ\Theta$ πυραμίδα.

Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΒΓ$ βάση πρὸς τὴν $\Delta ΕΖ$
 25 βάση, οὕτως ἡ $ΑΒΓΗ$ πυραμὶς πρὸς τὴν $\Delta ΕΖ\Theta$ πυραμίδα, ἔσται ὡς ἡ $ΑΒΓ$ βάση πρὸς τὴν $\Delta ΕΖ$ βάση, οὕτως ἡ $ΑΒΓΗ$ πυραμὶς ἤτοι πρὸς ἑλασσόν

1. ἐπίπεδον ἀγομένη V. 3. ἐπίπεδον ἀγομένη V.
 5. ἄρα εἰσί V. αἱ] om. P q. 7. κάθετοι] in ras. V, seq.
 ras. dimid. lin. (ἴσαι . . . ἀπὸ τῶν $\overline{ομν}$). ἐστὶ] om. P.

dicularis ab H ad planum $AB\Gamma$ ducta plano OMN in duas partes aequales secabitur. eadem de causa etiam perpendicularis a Θ ad planum ΔEZ ducta in duas partes aequales secabitur plano ΣTT . et perpendiculares ab H , Θ ad plana $AB\Gamma$, ΔEZ ductae aequales sunt. itaque etiam perpendiculares a triangulis OMN , ΣTT ad $AB\Gamma$, ΔEZ ductae aequales sunt. quare prismata, quorum bases sunt trianguli $\Lambda \Xi \Gamma$, $P\Phi Z$, iis autem oppositi OMN , ΣTT , aequales altitudines habent. itaque solida parallelepipeda a prismatis, quae diximus, constructa eandem habent altitudinem et eam inter se rationem habent quam bases [XI, 32]. itaque etiam prismata, quae diximus, ut quae dimidia sint parallelepipedorum [XI, 28], eam rationem habent, quam $\Lambda \Xi \Gamma : P\Phi Z$; quod erat demonstrandum.¹⁾

V.

Pyramides sub eadem altitudine et bases triangulas habentes eam inter se rationem habent quam bases.

Sint pyramides sub eadem altitudine, quarum bases sint trianguli $AB\Gamma$, ΔEZ , uertices autem H , Θ puncta. dico esse

$$AB\Gamma : \Delta EZ = AB\Gamma H : \Delta EZ\Theta.$$

Nam si non est $AB\Gamma : \Delta EZ = AB\Gamma H : \Delta EZ\Theta$, erit ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita pyramis $AB\Gamma H$ aut ad so-

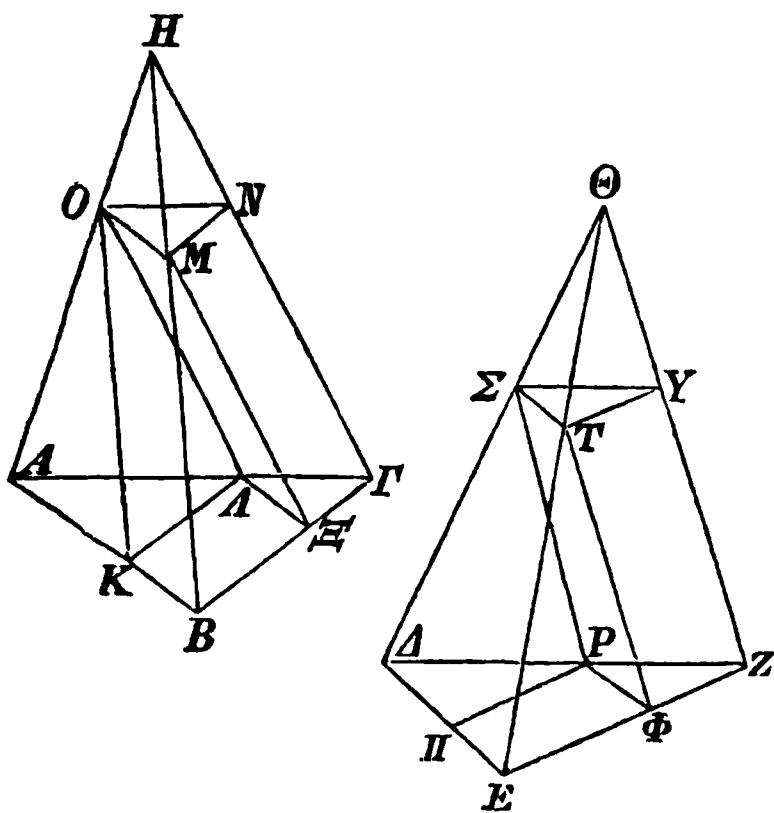
1) Hoc quoque lemma et per se et propter orationis genus suspectum est.

$\beta\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma$ Bq, sed corr. 11. $\kappa\alpha\iota$] (prius) $\tau\upsilon\gamma\chi\acute{\alpha}\nu\omicron\nu\tau\alpha$ Theon (BVq).
 $\epsilon\lambda\iota\sigma\iota\nu$] om. P. 12. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] $\acute{\epsilon}\sigma\tau\alpha\iota$ BVq. 13. $\omicron\upsilon\tau\omega$ Bq. 17. $\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\alpha$ P, corr. m. 2. 24. ΔEZ — 25. $\tau\eta\nu$] mg. m. 2 B. 25. $\Delta EZ\Theta$
 $\pi\upsilon\rho\alpha\mu\acute{\iota}\delta\alpha$] et in textu et mg. m. 2 B. 27. $\eta\tau\omicron\iota$] η V.

τι τῆς $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδος στερεόν ἢ πρὸς μείζον.
 ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ X , καὶ διηρήσθω ἡ
 $\Delta EZ\Theta$ πυραμὶς εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις
 καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· τὰ δὲ
 5 δύο πρίσματα μείζονά ἐστίν ἢ τὸ ἡμισυ τῆς ὅλης
 πυραμίδος. καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως γινόμεναι
 πυραμίδες ὁμοίως διηρήσθωσαν, καὶ τοῦτο αἰεὶ γινέ-
 σθω, ἕως οὗ λειφθῶσί τινες πυραμίδες ἀπὸ τῆς $\Delta EZ\Theta$
 πυραμίδος, αἱ εἰσιν ἐλάττονες τῆς ὑπεροχῆς, ἢ ὑπερ-
 10 ἔχει ἡ $\Delta EZ\Theta$ πυραμὶς τοῦ X στερεοῦ. λειφθῶσαν
 καὶ ἔστωσαν λόγου ἔνεκεν αἱ $\Delta ΠΡΣ$, $\Sigma ΤΥ\Theta$. λοιπὰ
 ἄρα τὰ ἐν τῇ $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι
 τοῦ X στερεοῦ. διηρήσθω καὶ ἡ $ΑΒΓΗ$ πυραμὶς
 ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς τῇ $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι· ἐστίν ἄρα
 15 ὡς ἡ $ΑΒΓ$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως τὰ
 ἐν τῇ $ΑΒΓΗ$ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $\Delta EZ\Theta$
 πυραμίδι πρίσματα. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ $ΑΒΓ$ βάσις πρὸς
 τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως ἡ $ΑΒΓΗ$ πυραμὶς πρὸς τὸ
 X στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΑΒΓΗ$ πυραμὶς πρὸς τὸ X
 20 στερεόν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $ΑΒΓΗ$ πυραμίδι πρίσματα
 πρὸς τὰ ἐν τῇ $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι πρίσματα· ἐναλλάξ
 ἄρα ὡς ἡ $ΑΒΓΗ$ πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα,
 οὕτως τὸ X στερεόν πρὸς τὰ ἐν τῇ $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι
 πρίσματα. μείζων δὲ ἡ $ΑΒΓΗ$ πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ
 25 πρισμάτων· μείζον ἄρα καὶ τὸ X στερεόν τῶν ἐν τῇ
 $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι πρισμάτων. ἀλλὰ καὶ ἐλάττον· ὅπερ

6. γινόμεναι q. 7. γιγνέσθω BV. 8. λειφθῶσι] -ει-
 corr. ex η V, mut. in η m. 1 Bq; λειφθῶσιν PB. ἀπό — 9. πυ-
 ραμίδος] mg. m. 2 BV, om. q. 9. ἐλάσσους BVq. 10. λε-
 λειφθῶσαν] -ει- corr. ex η V, mut. in η q. 11. $ET\Theta$ B,
 corr. m. 2. 12. ἐστίν P. 17. ἡ] post ins. V. 19. καὶ
 ὡς — 20. στερεόν] om. q; suo loco m. 1, sed alio atramento

lidum minus pyramide $\triangle EZ\Theta$ aut ad maius. sit prius ad minus X , et pyramis $\triangle EZ\Theta$ in duas pyramides inter se aequales totique similes et duo prismata aequalia diuidatur. itaque duo prismata maiora sunt quam dimidia totius pyramidis [prop. III]. et rursus pyramides ex diuisione ortae similiter diuidantur, et hoc semper fiat, donec e pyramide $\triangle EZ\Theta$ relinquuntur pyramides quaedam minores excessu, quo pyramis $\triangle EZ\Theta$ excedit spatium X [X, 1]. relinquuntur et sint uerbi causa $\triangle \Pi P \Sigma$, $\triangle T T \Theta$. reliqua igitur prismata pyramidis $\triangle EZ\Theta$ maiora sunt spatio X . iam etiam pyramis $AB\Gamma H$ similiter et toties diuidatur,



quoties $\triangle EZ\Theta$ pyramis. erunt igitur ut $AB\Gamma : \triangle EZ$, ita prismata pyramidis $AB\Gamma H$ ad prismata pyramidis $\triangle EZ\Theta$ [prop. IV]. uerum $AB\Gamma : \triangle EZ = AB\Gamma H : X$. quare etiam ut $AB\Gamma H : X$, ita prismata pyramidis $AB\Gamma H$ ad prismata pyramidis $\triangle EZ\Theta$.

permutando igitur [V, 16] ut pyramis $AB\Gamma H$ ad sua prismata, ita X solidum ad prismata pyramidis $\triangle EZ\Theta$. sed pyramis $AB\Gamma H$ maior est prismatis. itaque etiam X solidum maius est prismatis pyramidis $\triangle EZ\Theta$ [V, 14].

B. 19. ἄρα ἦ] corr. ex ἦ ἄρα m. 1 V, ἄρα ὡς ἦ P.
 23. οὕτω B.

ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΒΓ$ βάσις πρὸς τὴν $ΔΕΖ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ΑΒΓΗ$ πυραμὶς πρὸς ἕλασσόν τι τῆς $ΔΕΖ$ πυραμίδος στερεόν. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ὡς ἡ $ΔΕΖ$ βάσις πρὸς τὴν $ΑΒΓ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ΔΕΖ$ πυραμὶς πρὸς ἕλαττόν τι τῆς $ΑΒΓΗ$ πυραμίδος στερεόν.

Λέγω δὴ, ὅτι οὐκ ἔστιν οὐδὲ ὡς ἡ $ΑΒΓ$ βάσις πρὸς τὴν $ΔΕΖ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ΑΒΓΗ$ πυραμὶς πρὸς μείζον τι τῆς $ΔΕΖ$ πυραμίδος στερεόν.

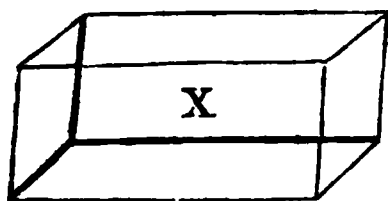
10 Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μείζον τὸ X . ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ΔΕΖ$ βάσις πρὸς τὴν $ΑΒΓ$ βάσιν, οὕτως τὸ X στερεόν πρὸς τὴν $ΑΒΓΗ$ πυραμίδα. ὡς δὲ τὸ X στερεόν πρὸς τὴν $ΑΒΓΗ$ πυραμίδα, οὕτως ἡ $ΔΕΖ$ πυραμὶς πρὸς ἕλασσόν τι τῆς $ΑΒΓΗ$ πυραμίδος, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη· καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΔΕΖ$ βάσις πρὸς τὴν $ΑΒΓ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ΔΕΖ$ πυραμὶς πρὸς ἕλασσόν τι τῆς $ΑΒΓΗ$ πυραμίδος· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΒΓ$ βάσις πρὸς τὴν $ΔΕΖ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ΑΒΓΗ$ πυραμὶς πρὸς μείζον τι τῆς $ΔΕΖ$ πυραμίδος στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἕλασσον. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $ΑΒΓ$ βάσις πρὸς τὴν $ΔΕΖ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ΑΒΓΗ$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ΔΕΖ$ πυραμίδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς'.

25 Αἰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὔσαι πυραμίδες καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

2. ἕλαττον V. 3. $ΔΕΖ$] Θ eras. P; $ΔΕΖΗ$ Θ q.
 δείξομεν V. 5. ἕλασσον B. 11. ἡ βάσις ἡ $ΔΕΖ$ Vq.

uerum etiam minus est; quod fieri non potest. ergo non est ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita pyramis $AB\Gamma H$ ad minus aliquod pyramide ΔEZ solidum. similiter de-



monstrabimus, ne ΔEZ quidem pyramidem ad minus aliquod pyramide $AB\Gamma H$ solidum eam rationem habere quam $\Delta EZ : AB\Gamma$.

Iam dico, ne ad maius quidem aliquod pyramide ΔEZ solidum pyramidem $AB\Gamma H$ eam rationem habere quam $AB\Gamma : \Delta EZ$.

Nam si fieri potest, habeat ad maius aliquod X . e contrario igitur [V, 7 coroll.]

$$\Delta EZ : AB\Gamma = X : AB\Gamma H.$$

uerum ut $X : AB\Gamma H$, ita ΔEZ pyramis ad minus aliquod pyramide $AB\Gamma H$, ut supra demonstratum est [prop. II lemma]. quare etiam ut $\Delta EZ : AB\Gamma$, ita pyramis ΔEZ ad minus aliquod pyramide $AB\Gamma H$; quod absurdum esse demonstrauius. itaque ne ad maius quidem aliquod pyramide ΔEZ solidum pyramis $AB\Gamma H$ eam rationem habet quam $AB\Gamma : \Delta EZ$. demonstrauius autem, eam ne ad minus quidem hanc habere rationem. erit igitur

$$AB\Gamma : \Delta EZ = AB\Gamma H : \Delta EZ;$$

quod erat demonstrandum.

VI.

Pyramides sub eadem altitudine et polygonas bases habentes eam inter se rationem habent quam bases.

17. πυραμίδος στερεόν q; στερεόν add. m. 2 V. 21. βάσις] supra scr. m. 1 P. 25. πυραμίδες ούσαι B. ούσαι] om. V.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν [αί] βάσεις μὲν τὰ $ΑΒΓΔΕ$, $ΖΗΘΚΛ$ πολύγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ $Μ$, $Ν$ σημεία· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΒΓΔΕ$ βάσις πρὸς τὴν $ΖΗΘΚΛ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ΑΒΓΔΕΜ$
 5 πυραμὶς πρὸς τὴν $ΖΗΘΚΛΝ$ πυραμίδα.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ $ΑΓ$, $ΑΔ$, $ΖΘ$, $ΖΚ$. ἐπεὶ οὖν δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ $ΑΒΓΜ$, $ΑΓΔΜ$ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις καὶ ὕψος ἴσον, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $ΑΒΓ$ βάσις πρὸς
 10 τὴν $ΑΓΔ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ΑΒΓΜ$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ΑΓΔΜ$ πυραμίδα. καὶ συνθέντι ὡς ἡ $ΑΒΓΔ$ βάσις πρὸς τὴν $ΑΓΔ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ΑΒΓΔΜ$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ΑΓΔΜ$ πυραμίδα. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ $ΑΓΔ$ βάσις πρὸς τὴν $ΑΔΕ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ΑΓΔΜ$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ΑΔΕΜ$ πυραμίδα. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ
 15 $ΑΒΓΔ$ βάσις πρὸς τὴν $ΑΔΕ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ΑΒΓΔΜ$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ΑΔΕΜ$ πυραμίδα. καὶ συνθέντι πάλιν, ὡς ἡ $ΑΒΓΔΕ$ βάσις πρὸς τὴν $ΑΔΕ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ΑΒΓΔΕΜ$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ΑΔΕΜ$ πυραμίδα. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ὡς ἡ $ΖΗΘΚΛ$ βάσις πρὸς τὴν $ΖΗΘ$ βάσιν, οὕτως καὶ ἡ $ΖΗΘΚΛΝ$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ΖΗΘΝ$ πυραμίδα. καὶ ἐπεὶ δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ $ΑΔΕΜ$, $ΖΗΘΝ$ τριγώνους ἔχουσαι
 20

1. αἱ] deleo. ὧν — 2. κορυφαί] πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς $ΑΒΓΔΕ$, $ΖΗΘΚΛ$, κορυφὰς Theon (BVq). 6. ἐπεξεύχθ. — 10. βάσιν] διηρησθῶ γὰρ ἡ μὲν $ΑΒΓΔΕ$ βάσις εἰς τὰ $ΑΒΓ$, $ΑΓΔ$, $ΑΕΔ$ τρίγωνα, ἡ δὲ $ΖΗΘΚΛ$ (N eras. V) εἰς τὰ $ΖΗΘ$, $ΖΘΚ$, $ΖΚΛ$ τρίγωνα, καὶ νενοήσθωσαν ἀφ' ἐκάστου τριγώνου πυραμίδες ἰσουψεῖς (-εις corr. ex -οι m. rec. V) ταῖς ἐξ ἀρχῆς πυραμίσι (πυραμίσιν B) καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΓΔ$ τρίγωνον Theon (BVq). 11. συνθέντα ἄρα ὡς V.

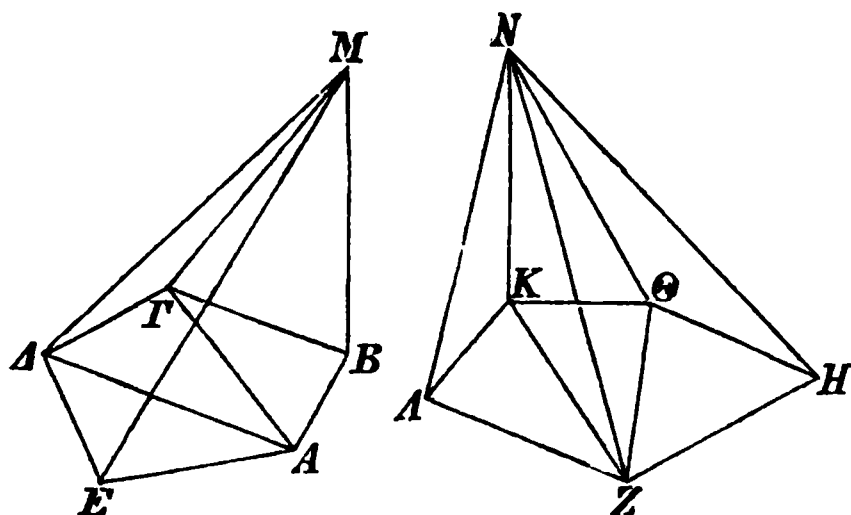
ἡ — 12. βάσιν] mg. γρ. τραπέζιον et γρ. τρίγωνον m. 1 P; τὸ $ΑΒΓΔ$ τραπέζιον πρὸς τὸ $ΑΓΔ$ τρίγωνον Theon (BVq).

Sint sub eadem altitudine pyramides, quarum bases sint $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K\Lambda$ polygona, uertices autem M , N puncta. dico, esse

$$AB\Gamma\Delta E : ZH\Theta K\Lambda = AB\Gamma\Delta EM : ZH\Theta K\Lambda N.$$

ducantur enim $A\Gamma$, $A\Delta$, $Z\Theta$, ZK . iam quoniam duae pyramides sunt $AB\Gamma M$, $A\Gamma\Delta M$ triangulas bases habentes et altitudinem aequalem, eam inter se rationem habent quam bases [prop. V]. erit igitur $AB\Gamma : A\Gamma\Delta = AB\Gamma M : A\Gamma\Delta M$. et componendo [V, 18] $AB\Gamma\Delta : A\Gamma\Delta = AB\Gamma\Delta M : A\Gamma\Delta M$. uerum etiam [prop. V] $A\Gamma\Delta : A\Delta E = A\Gamma\Delta M : A\Delta EM$. itaque ex aequo [V, 22] $AB\Gamma\Delta : A\Delta E = AB\Gamma\Delta M : A\Delta EM$. et rursus componendo [V, 18] $AB\Gamma\Delta E : A\Delta E = AB\Gamma\Delta EM : A\Delta EM$. similiter demonstrabimus, esse etiam

$$ZH\Theta K\Lambda : ZH\Theta = ZH\Theta K\Lambda N : ZH\Theta N.$$



et quoniam duae pyramides sunt $A\Delta EM$, $ZH\Theta N$ triangulas bases habentes et altitudinem aequalem,

13. $A\Gamma\Delta M$] supra Δ scr. E m. 2 B. η — 14. $\beta\acute{\alpha}\sigma\iota\nu$] τὸ $A\Gamma\Delta$ $\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\nu$ πρὸς τὸ $A\Delta E$ $\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\nu$ Theon (BVq). 15. ἄρα ἐστίν Theon (BVq). 17. $A\Delta EM$] M supra scr. m. rec. P. 18. $\beta\acute{\alpha}\sigma\iota\nu$] om. Bq. 19. $AB\Gamma\Delta E$ add. M m. 2 V. 20. ὁμοίως — ὅτι] διὰ τὰ αὐτὰ δὴ Theon (BVq). 21. $ZH\Theta$] P; $ZK\Lambda$ Theon (Bq et Λ e corr. m. 1 V). 22. $ZK\Lambda N$ Theon (Bq et N in ras. V). 23. $ZK\Lambda N$ Theon (BVq).

βάσεις καὶ ὕψος ἴσον, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $A\Delta E$ βάσις
 πρὸς τὴν $ZH\Theta$ βάσιν, οὕτως ἡ $A\Delta EM$ πυραμὶς πρὸς
 τὴν $ZH\Theta N$ πυραμίδα. ἀλλ' ὡς ἡ $A\Delta E$ βάσις πρὸς
 τὴν $AB\Gamma\Delta E$ βάσιν, οὕτως ἦν ἡ $A\Delta EM$ πυραμὶς
 5 πρὸς τὴν $AB\Gamma\Delta EM$ πυραμίδα. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς
 ἡ $AB\Gamma\Delta E$ βάσις πρὸς τὴν $ZH\Theta$ βάσιν, οὕτως ἡ
 $AB\Gamma\Delta EM$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ZH\Theta N$ πυραμίδα. ἀλλὰ
 μὴν καὶ ὡς ἡ $ZH\Theta$ βάσις πρὸς τὴν $ZH\Theta K\Lambda$ βάσιν,
 οὕτως ἦν καὶ ἡ $ZH\Theta N$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ZH\Theta K\Lambda N$
 10 πυραμίδα. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ $AB\Gamma\Delta E$ βάσις
 πρὸς τὴν $ZH\Theta K\Lambda$ βάσιν, οὕτως ἡ $AB\Gamma\Delta EM$ πυραμὶς
 πρὸς τὴν $ZH\Theta K\Lambda N$ πυραμίδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ'.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαι-
 15 ρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τρι-
 γώνους βάσεις ἐχούσας.

Ἔστω πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον,
 ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔEZ . λέγω, ὅτι τὸ $AB\Gamma\Delta EZ$
 πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις
 20 τριγώνους ἐχούσας βάσεις.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ $B\Delta$, $E\Gamma$, $\Gamma\Delta$. ἐπεὶ παρα-
 ληλόγραμμόν ἐστι τὸ $ABE\Delta$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ
 ἐστὶν ἡ $B\Delta$, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Delta$ τρίγωνον τῷ
 $EB\Delta$ τριγώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ
 25 $AB\Delta$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ
 πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΔEB τρίγωνον, κορυφὴ
 δὲ τὸ Γ σημεῖον. ἀλλὰ ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ

1. καὶ ὕψος ἴσον] καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος Theon (BVq).
 2. $ZK\Lambda$ Theon (BVq), ut lin. 6, 8. 3. $ZK\Lambda N$ Theon (BVq),
 ut lin. 7, 9. ἀλλ' ὡς — 5. πυραμίδα] ἐπεὶ οὖν ἐστὶν (om.)

erit [prop. V] $A\Delta E:ZH\Theta = A\Delta EM:ZH\Theta N$. uerum
 $A\Delta E:AB\Gamma\Delta E = A\Delta EM:AB\Gamma\Delta EM$. quare etiam
 ex aequo [V, 22] $AB\Gamma\Delta E:ZH\Theta = AB\Gamma\Delta EM:ZH\Theta N$.
 uerum etiam $ZH\Theta:ZH\Theta K\Lambda = ZH\Theta N:ZH\Theta K\Lambda N$.
 quare etiam ex aequo [V, 22] $AB\Gamma\Delta E:ZH\Theta K\Lambda$
 $= AB\Gamma\Delta EM:ZH\Theta K\Lambda N$; quod erat demonstrandum.

VII.

Omne prisma triangulam basim habens in tres
 pyramides inter se aequales diuiditur triangulas bases
 habentes.

Sit prisma, cuius basis sit $AB\Gamma$ triangulus, ei autem
 oppositus ΔEZ . dico, prisma $AB\Gamma\Delta EZ$ in tres py-
 ramides inter se aequales diuidi triangulas bases ha-
 bentes.

ducantur enim $B\Delta$, $E\Gamma$, $\Gamma\Delta$. quoniam parallelo-
 grammum est $ABE\Delta$, diametrus autem eius $B\Delta$,
 erit $AB\Delta = EB\Delta$ [I, 34]. quare etiam pyramis,
 cuius basis est triangulus $AB\Delta$, uertex autem Γ
 punctum, aequalis est pyramidi, cuius basis est trian-
 gulus ΔEB , uertex autem Γ punctum [prop. V]. uerum

VII. Hero stereom. II, 39.

Bq) $\acute{\omega}\varsigma$ η $AB\Gamma\Delta E$ $\beta\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma$ $\pi\rho\acute{\omicron}\varsigma$ $\tau\eta\nu$ $A\Delta E$ $\beta\acute{\alpha}\sigma\iota\nu$, $\omicron\upsilon\tau\omega\varsigma$ η ($\eta\nu$ η
 q) $AB\Gamma\Delta EM$ $\pi\upsilon\rho\alpha\mu\iota\delta\alpha$ $\pi\rho\acute{\omicron}\varsigma$ $\tau\eta\nu$ $A\Delta EM$ $\pi\upsilon\rho\alpha\mu\iota\delta\alpha$ Theon (BVq);
 dein add. $\acute{\omega}\varsigma$ $\delta\epsilon$ η $A\Delta E$ $\beta\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma$ $\pi\rho\acute{\omicron}\varsigma$ $\tau\eta\nu$ $ZK\Lambda$ $\beta\acute{\alpha}\sigma\iota\nu$, $\omicron\upsilon\tau\omega\varsigma$ η
 $A\Delta EM$ $\pi\upsilon\rho\alpha\mu\iota\delta\alpha$ $\pi\rho\acute{\omicron}\varsigma$ $\tau\eta\nu$ $ZK\Lambda N$ $\pi\upsilon\rho\alpha\mu\iota\delta\alpha$ Vq et mg. m. 2 B.

5. $\kappa\alpha\iota$] om. Theon (BVq). 6. $\beta\acute{\alpha}\sigma\iota\nu$] om. BVq.

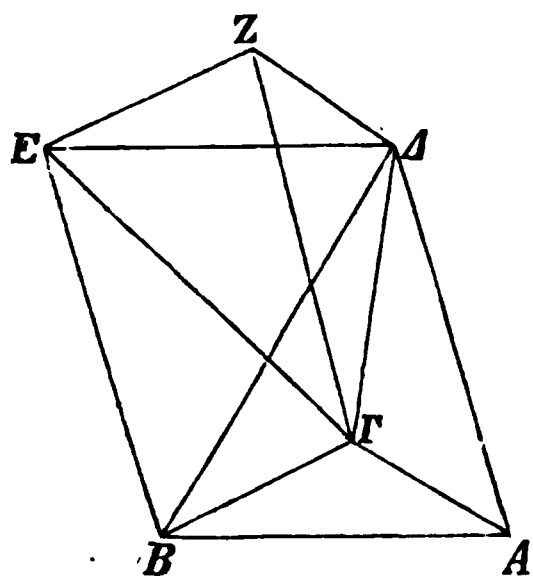
$\omicron\upsilon\tau\omega\varsigma$] om. q. 8. $ZH\Theta K\Lambda$] $K\Lambda$ add. B m. 2. 9. $\eta\nu$] om.
 V. 10. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] $\pi\acute{\alpha}\lambda\iota\nu$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ Bq; $\acute{\alpha}\rho\alpha$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ V. 12. $ZH\Theta K\Lambda M$
 q. 17. $\beta\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma$ q. 20. $\beta\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma$ $\acute{\epsilon}\chi\omicron\upsilon\sigma\alpha\varsigma$ V. 21. $\kappa\alpha\iota$ $\acute{\epsilon}\pi\epsilon\iota$
 Bq. 24. $E\Delta B$ B. $\mu\acute{\epsilon}\nu$] om. V. 25. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ PB, $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ $\tau\eta$
 V. 26. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ B. 27. $\acute{\alpha}\lambda\lambda\acute{\alpha}$ — p. 174, 1. $\sigma\eta\mu\epsilon\iota\omicron\nu$] om. q.
 27. $\acute{\alpha}\lambda\lambda'$ B. η] om. V.

τὸ $\triangle E\Gamma B$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτὴ ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $E\Gamma B$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον· ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $AB\Delta$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $E\Gamma B$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον. πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστὶ τὸ $Z\Gamma B E$, διάμετρος δὲ ἐστὶν αὐτοῦ ἡ ΓE , ἴσον ἐστὶ τὸ $\Gamma E Z$ τρίγωνον τῷ $\Gamma B E$ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $B\Gamma E$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $E\Gamma Z$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον. ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $B\Gamma E$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐδείχθη πυραμίδι, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $AB\Delta$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημεῖον· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $\Gamma E Z$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βᾶσις μὲν [ἐστὶ] τὸ $B\Delta$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημεῖον· διήρηται ἔτι τὸ $AB\Gamma\Delta E Z$ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας κήλαις τριγώνους ἐχούσας βᾶσεις.

Καὶ ἐπεὶ πυραμὶς, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $AB\Delta$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτὴ ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βᾶσις τὸ $\Gamma A B$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον· ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχονται· καὶ πυραμὶς, ἧς βᾶσις τὸ $AB\Delta$ τρίγωνον, κορυφή

2. ἐστὶ] (prius) ἐστὶν PB; ἐστὶ τῆ V. 4. καί] om. q;
 ἡ V. 6. ἐστὶ] ἐστὶν PB; ἐστὶ τῆ V. 8. ἐστὶν] om.
 q. αὐτοῦ ἐστὶν Bq. 9. EΓ V. 12. EΓZ] ΓZ in
 V. 14. BEΓ V. Δ] in ras. m. 2 B. 18. ἐστὶ]
 P. 21. βᾶσεις ἐχούσας, etas. ι, V. 23. ἐστὶ τῆ V.

pyramis, cuius basis est $\triangle E\Gamma B$ triangulus, uertex autem Δ punctum, eadem est ac pyramis, cuius basis est $E\Gamma\Delta$ triangulus, uertex autem Δ punctum; nam iisdem planis continentur. quare etiam pyramis, cuius basis est



$AB\Delta$ triangulus, uertex autem Γ punctum, aequalis est pyramidi, cuius basis est $E\Gamma\Delta$ triangulus, uertex autem Δ punctum. rursus quoniam parallelogrammum est $Z\Gamma B E$, et diametrus eius est ΓE , erit $\Gamma E Z = \Gamma B E$ [I, 34]. quare etiam pyramis, cuius basis est

$B\Gamma E$ triangulus, uertex autem Δ punctum, aequalis est pyramidi, cuius basis est $E\Gamma Z$ triangulus, uertex autem Δ punctum. demonstrauius autem, pyramidem, cuius basis sit $B\Gamma E$ triangulus, uertex autem Δ punctum, aequalem esse pyramidi, cuius basis sit $AB\Delta$ triangulus, uertex autem Γ punctum. quare etiam pyramis, cuius basis est $\Gamma E Z$ triangulus, uertex autem Δ punctum, aequalis est pyramidi, cuius basis est $AB\Delta$ triangulus, uertex autem Γ punctum. ergo prisma $AB\Gamma\Delta EZ$ in tres pyramides aequales diuisum est triangulas bases habentes.

et quoniam pyramis, cuius basis est $AB\Delta$ triangulus, uertex autem Γ punctum, eadem est ac pyramis, cuius basis est ΓAB triangulus, uertex autem Δ punctum (nam iisdem planis continentur), pyramidem autem,

24. τό] (prius) μὲν τό q; μὲν ἐστὶ τό V. ΓAB] e corr. V.
 26. τό] ἐστὶ τό V.

δὲ τὸ Γ σημεῖον, τρίτον ἐδείχθη τοῦ πρίσματος, οὗ
 βάσις τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔEZ ,
 καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, κο-
 ρυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον, τρίτον ἐστὶ τοῦ πρίσματος
 5 τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον,
 ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔEZ .

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον
 μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος
 10 αὐτῇ καὶ ὕψος ἴσον [ἐπειδήπερ κἂν ἕτερόν τι σχῆμα
 εὐθύγραμμον ἔχη ἢ βάσις τοῦ πρίσματος, τοιοῦτο καὶ
 τὸ ἀπεναντίον, καὶ διαιρεῖται εἰς πρίσματα τρίγωνα
 ἔχοντα τὰς βάσεις καὶ τὰ ἀπεναντίον, καὶ ὡς ἡ ὅλη
 βάσις πρὸς ἕκαστον]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15

η'.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι
 βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολό-
 γων πλευρῶν.

Ἐστῶσαν ὅμοιαι καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες,
 20 ὧν βάσεις μὲν εἰσὶ τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ τρίγωνα, κορυφαὶ
 δὲ τὰ H , Θ σημεία· λέγω, ὅτι ἡ $AB\Gamma H$ πυραμὶς
 πρὸς τὴν $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει
 ἢπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ .

1. βάσις ἐστὶ τὸ V . 3. ἡ] om. V . 5. τοῦ — αὐτὴν] οὗ
 βάσις V . 11. ἡ — πρίσματος] βάσιν τὸ πρίσμα q . τοιοῦτο]
 om. BVq . 12. τό] τὸ αὐτό Bq et corr. ex αὐτό τό V .
 καί] om. BVq . τριγώνους, -ους e corr. m. 2 V . 13. τὰς]
 om. q . καί] om. q . τὰ] τὰς q . καὶ ὡς — 14. δεῖξαι]
 om. Theon (BVq). 17. εἰσὶν B . 20. βάσις B , corr. m. 2.
 κορυφή B , corr. m. 1. 21. δέ] δὲ αὐτῶν ἔστω V .

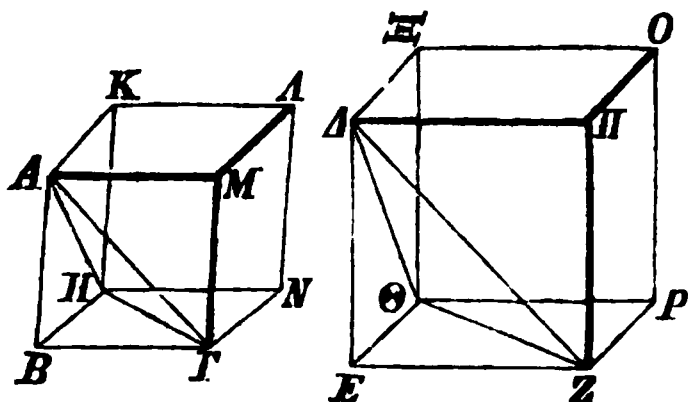
cuius basis est $AB\Delta$ triangulus, uertex autem Γ punctum, tertiam partem esse demonstrauius prismatis, cuius basis sit $AB\Gamma$ triangulus, ei autem oppositus ΔEZ , etiam pyramis, cuius basis est $AB\Gamma$ triangulus, uertex autem Δ punctum, tertia pars est prismatis eandem basim habentis triangulum $AB\Gamma$, ei autem oppositum ΔEZ .

Corollarium.

Hinc manifestum est, omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis, quod eandem basim habeat et altitudinem aequalem.¹⁾ — quod erat demonstrandum.

VIII.

Similes pyramides triangulas bases habentes triplicatam inter se rationem habent quam latera correspondentia.



Sint pyramides similes et similiter positae, quarum bases sint $AB\Gamma$, ΔEZ trianguli, uertices autem H , Θ puncta. dico, esse $AB\Gamma H : \Delta EZ \Theta = B\Gamma^3 : EZ^3$.

1) Quae sequuntur uerba lin. 10—14 sine dubio subditia sunt. scripturam codicis P in fine lacunam habere, recte significauit August; nam uerba $\kappa\alpha\iota \acute{\omega}\varsigma \eta \acute{\omicron}\lambda\eta \beta\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma \acute{\epsilon}\kappa\alpha\sigma\tau\omicron\nu$ principium est amplioris demonstrationis. cetera in P satis emendate leguntur, cum in codd. Theoninis omni sensu careant. sed etiamsi sana essent omnia, haec uerba tamen suspecta essent, quia, ut saepius monui, demonstrationem corollarii adferre nihil adtinet.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ $BHMA$, $E\Theta\Pi O$ στερεὰ
 παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ $ABGH$
 πυραμὶς τῇ $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν
 ὑπὸ ABG γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ γωνία, ἡ δὲ ὑπὸ HBG
 5 τῇ ὑπὸ ΘEZ , ἡ δὲ ὑπὸ ABH τῇ ὑπὸ $\Delta E\Theta$; καὶ
 ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΔE , οὕτως ἡ BG πρὸς τὴν
 EZ , καὶ ἡ BH πρὸς τὴν $E\Theta$. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ
 AB πρὸς τὴν ΔE , οὕτως ἡ BG πρὸς τὴν EZ , καὶ
 περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὁμοιον
 10 ἄρα ἐστὶ τὸ BM παραλληλόγραμμον τῷ $E\Pi$ παραλ-
 ληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν BN τῷ
 EP ὁμοίον ἐστὶ, τὸ δὲ BK τῷ $E\Xi$. τὰ τρία ἄρα τὰ
 MB , BK , BN τρισὶ τοῖς $E\Pi$, $E\Xi$, EP ὁμοιά ἐστὶν.
 ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τὰ MB , BK , BN τρισὶ τοῖς ἀπεναν-
 15 τίον ἴσα τε καὶ ὁμοιά ἐστὶν, τὰ δὲ τρία τὰ $E\Pi$, $E\Xi$,
 EP τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὁμοιά ἐστὶν. τὰ
 $BHMA$, $E\Theta\Pi O$ ἄρα στερεὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων
 ἴσων τὸ πλῆθος περιέχεται. ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $BHMA$
 στερεὸν τῷ $E\Theta\Pi O$ στερεῷ. τὰ δὲ ὁμοια στερεὰ παρ-
 20 αλληλεπίπεδα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων
 πλευρῶν. τὸ $BHMA$ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ $E\Theta\Pi O$
 στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ὁμόλογος
 πλευρὰ ἡ BG πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν EZ .
 ὡς δὲ τὸ $BHMA$ στερεὸν πρὸς τὸ $E\Theta\Pi O$ στερεόν,
 25 οὕτως ἡ $ABGH$ πυραμὶς πρὸς τὴν $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδα,
 ἐπειδήπερ ἡ πυραμὶς ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ
 διὰ τὸ καὶ τὸ πρίσμα ἡμισυ ὄν τοῦ στερεοῦ παραλ-
 ληλεπιπέδου τριπλάσιον εἶναι τῆς πυραμίδος. καὶ ἡ

2. ἡ] bis P, corr. m. 1. 5. ΘEZ] e corr. V. 9. ἐστὶν
 q. 10. παραλληλόγραμμον] (prius) om. V. 13. ἐστὶ V.

Expleantur enim solida parallelepipeda $BHMA$, $E\Theta\Pi O$. et quoniam similis est $AB\Gamma H$ pyramis pyramidi $\Delta EZ\Theta$, erit $\angle AB\Gamma = \angle EZ\Theta$, $\angle HB\Gamma = \Theta EZ$, $\angle ABH = \angle E\Theta$, et est $AB : \Delta E = B\Gamma : EZ = BH : E\Theta$ [XI def. 9]. et quoniam est $AB : \Delta E = B\Gamma : EZ$, et latera angulos aequales comprehendentia proportionalia sunt, erit $BM \sim E\Pi$ [p. 83 not. 1]. eadem de causa erit etiam $BN \sim EP$, $BK \sim E\Xi$. itaque tria MB , BK , BN tribus $E\Pi$, $E\Xi$, EP similia sunt. verum tria MB , BK , BN tribus oppositis aequalia sunt et similia, tria autem $E\Pi$, $E\Xi$, EP tribus oppositis aequalia sunt et similia [XI, 24]. itaque solida $BHMA$, $E\Theta\Pi O$ planis similibus numero aequalibus continentur. ergo $BHMA \sim E\Theta\Pi O$ [XI def. 9]. similia autem solida parallelepipeda triplicatam rationem habent quam latera correspondentia [XI, 33]. itaque $BHMA : E\Theta\Pi O = B\Gamma^3 : EZ^3$. sed $BHMA : E\Theta\Pi O = AB\Gamma H : \Delta EZ\Theta$, quoniam pyramis sexta pars est solidi, propterea quod prisma, quod dimidium est so-

15. ἴσα τε καί] om. V. ἐστι q, comp. V. τά] (alt.) om. B.

16. τρισί — ἐστίν] ἴσα τε καὶ ὅμοια τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἐστὶ BVq. 16. ἐστι P. 17. στερεὰ παραλληλοεπίπεδα V.

19. στερεόν] om. V. 20. ἐστίν B. 22. τὸν τριπλασίονα q.

26. ἕκτον] ε q. 27. παραλληλοεπιπ. V.

ΑΒΓΗ ἄρα πυραμὶς πρὸς τὴν *ΔΕΖΘ* πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἢ *ΒΓ* πρὸς τὴν *ΕΖ*. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

5 Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. διαιρεθεισῶν γὰρ αὐτῶν εἰς τὰς ἐν αὐταῖς πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας τῷ καὶ τὰ ὅμοια πολύγωνα
10 τῶν βάσεων εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖσθαι καὶ ἴσα τῷ πλήθει καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις ἔσται ὡς [ἢ] ἐν τῇ ἑτέρᾳ μία πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ μίαν πυραμίδα τρίγωνον ἔχουσαν βάσιν, οὕτως καὶ ἅπασαι αἱ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδες
15 τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς τὰς ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας, τουτέστιν αὐτὴ ἢ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν πυραμίδα. ἢ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν
20 ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἔστι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· καὶ ἢ πολύγωνον ἄρα βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν ὁμοίαν βάσιν ἔχουσαν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἢ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

θ'.

25 Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἔχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν·

2. ὅπερ] punctis del. V. 3. ἔδει δεῖξαι] om. V.
4. πόρισμα] om. q. πόρ. — 23. πλευράν] mg. m. 1 P.
5. αἱ] om. q. 7. εἰσὶν PB. 8. ἐν] om. V. αὐτάς V,
αὐτοῖς q. 10. καὶ] καὶ εἰς V. 11. ἢ] om. P.
12. τριγώνους et βάσεις V, corr. m. 1. 13. μίαν πυραμίδα]

lidi parallelepipedo [XI, 28], triplo maius est pyramide [prop. VII]. ergo etiam $ABGH: \triangle EZ\Theta = B\Gamma^3: EZ^3$; quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Hinc manifestum est, etiam pyramides similes, quae polygonas bases habeant, triplicatam rationem habere quam latera correspondentia. nam si eas in pyramides triangulas bases habentes diuiserimus, eo quod etiam similia polygonas basium in similes triangulos numero aequales et totis correspondentes diuiduntur [VI, 20], erunt, ut in altera una pyramide triangulam habens basim ad unam pyramidem alterius triangulam basim habentem, ita omnes pyramides alterius pyramidis triangulas bases habentes ad omnes pyramides alterius pyramidis triangulas bases habentes [V, 12], h. e. ipsa pyramis polygonam basim habens ad pyramidem polygonam basim habentem. pyramis autem triangulam basim habens ad pyramidem triangulam basim habentem triplicatam rationem habet quam latera correspondentia [prop. VIII]. ergo etiam ea, quae polygonam basim habens ad eam, quae similem basim habet, triplicatam habet rationem quam latus ad latus.

IX.

Pyramidum aequalium et triangulas bases habentium bases in contraria ratione sunt atque altitudines;

VIII. coroll. Psellus p. 55.

πυραμίδι (ι ο corr.) μίαν V. βάσιν ἔχουσαν BV. 14. ἐν]
 ἐπί q. 15. βάσεις ἔχουσαι V. 20. ἐστὶ] om. q.
 22. τριπλάσιον V. 26. ὕψει PV q.

καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἔχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι.

Ἔστωσαν γὰρ ἴσαι πυραμίδες τριγώνους βάσεις ἔχουσαι τὰς $ABΓ$, $ΔEZ$, κορυφὰς δὲ τὰ H , $Θ$ σημαῖα· λέγω, ὅτι τῶν $ABΓH$, $ΔEZΘ$ πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ $ABΓ$ βᾶσις πρὸς τὴν $ΔEZ$ βᾶσιν, οὕτως τὸ τῆς $ΔEZΘ$ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς $ABΓH$ πυραμίδος ὕψος.

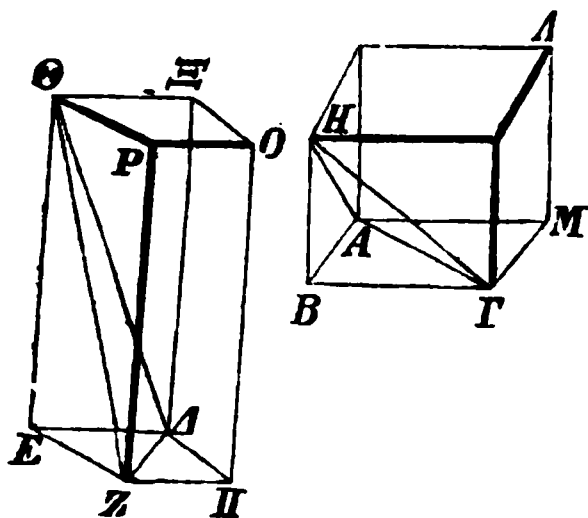
Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ $BHMΛ$, $EΘΠO$ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ABΓH$ πυραμὶς τῇ $ΔEZΘ$ πυραμίδι, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν $ABΓH$ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ $BHMΛ$ στερεόν, τῆς δὲ $ΔEZΘ$ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ $EΘΠO$ στερεόν, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $BHMΛ$ στερεόν τῷ $EΘΠO$ στερεῷ. τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ BM βᾶσις πρὸς τὴν $EΠ$ βᾶσιν, οὕτως τὸ τοῦ $EΘΠO$ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ $BHMΛ$ στερεοῦ ὕψος. ἀλλ' ὡς ἡ BM βᾶσις πρὸς τὴν $EΠ$, οὕτως τὸ $ABΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΔEZ$ τρίγωνον. καὶ ὡς ἄρα τὸ $ABΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΔEZ$ τρίγωνον, οὕτως τὸ τοῦ $EΘΠO$ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ $BHMΛ$ στερεοῦ ὕψος. ἀλλὰ τὸ μὲν τοῦ $EΘΠO$ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστὶ τῷ τῆς $ΔEZΘ$ πυραμίδος ὕψει, τὸ δὲ τοῦ $BHMΛ$ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστὶ τῷ τῆς $ABΓH$ πυραμίδος ὕψει· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $ABΓ$

2. ἴσαι εἰσὶν] mg. m. 1 postea add. P; ἴσα (corr. m. rec.) ἐστὶν V. 3. ἐκεῖνα V, corr. m. rec. 4. ἴσαι] om. q.

et quarum pyramidum triangulas bases habentium bases in contraria ratione sunt atque altitudines, eae aequales sunt.

Sint enim aequales pyramides bases triangulas habentes $AB\Gamma$, ΔEZ , uertices autem H , Θ puncta. dico, pyramidum $AB\Gamma H$, $\Delta EZ\Theta$ bases in contraria ratione esse atque altitudines, et esse ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita altitudinem pyramidis $\Delta EZ\Theta$ ad altitudinem pyramidis $AB\Gamma H$.

expleantur enim solida parallelepipeda $BHM\Lambda$, $E\Theta\Pi O$. et quoniam $AB\Gamma H = \Delta EZ\Theta$, et $BHM\Lambda = 6 AB\Gamma H$, $E\Theta\Pi O = 6 \Delta EZ\Theta$ [p. 178, 26], erit $BHM\Lambda = E\Theta\Pi O$. uerum aequalium solidorum par-



allelepipedorum bases in contraria ratione sunt atque altitudines [XI, 34]. erit igitur, ut $BM : E\Pi$, ita altitudo solidi $E\Theta\Pi O$ ad altitudinem solidi $BHM\Lambda$. sed $BM : E\Pi = AB\Gamma : \Delta EZ$ [I, 34]. quare etiam ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita altitudo solidi $E\Theta\Pi O$ ad alti-

tudinem solidi $BHM\Lambda$. uerum altitudo solidi $E\Theta\Pi O$ eadem est atque altitudo pyramidis $\Delta EZ\Theta$, altitudo autem solidi $BHM\Lambda$ eadem est atque altitudo pyramidis $AB\Gamma H$; itaque ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita altitudo

ἔχουσαι βάσεις B. 7. ὕψει V q. 15. πυραμίδος] om. V.
 $E\Theta O\Pi$ V. 16. ἐστὶ] om. V. 19. $E\Theta\Pi\Theta$ q.
 21. MB V q. $E\Pi$ βάσιν V q. 22. $AB\Gamma$ τρίγωνον] $E\Theta\Pi O$
 στερεοῦ ὕψος V, corr. mg. m. 2. τό] ins. m. 1 q.
 26. ἐστὶν PB. 27. ἐστὶν B.

βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔEZ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς $ABGH$ πυραμίδος ὕψος. τῶν $ABGH$, ΔEZ ἄρα πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

5 Ἀλλὰ δὴ τῶν $ABGH$, ΔEZ πυραμίδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ABG βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔEZ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς $ABGH$ πυραμίδος ὕψος· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ $ABGH$ πυραμὶς
10 τῇ ΔEZ πυραμίδι.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ABG βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔEZ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς $ABGH$ πυραμίδος ὕψος, ἀλλ' ὡς ἡ ABG βάσις πρὸς τὴν ΔEZ
15 βάσιν, οὕτως τὸ BM παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $E\Pi$ παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα τὸ BM παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $E\Pi$ παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ τῆς ΔEZ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς $ABGH$ πυραμίδος ὕψος. ἀλλὰ τὸ [μὲν] τῆς ΔEZ πυραμίδος
20 ὕψος τὸ αὐτό ἐστὶ τῷ τοῦ $E\Pi O$ παραλληλεπιπέδου ὕψει, τὸ δὲ τῆς $ABGH$ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστὶ τῷ τοῦ $BHMA$ παραλληλεπιπέδου ὕψει· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ BM βάσις πρὸς τὴν $E\Pi$ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ $E\Pi O$ παραλληλεπιπέδου ὕψος πρὸς τὸ τοῦ
25 $BHMA$ παραλληλεπιπέδου ὕψος. ὅν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $BHMA$ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ $E\Pi O$ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ.

3. ἄρα] om. V. -θασιν in ras. V. 6. ὕψει V q.
15. τί] (prius) bis V. 17. παραλληλόγραμμον P. 18. τῆς]

pyramidis $\triangle EZ$ ad altitudinem pyramidis $ABGH$. ergo pyramidum $ABGH$, $\triangle EZ$ bases in contraria ratione sunt atque altitudines.

Iam uero pyramidum $ABGH$, $\triangle EZ$ bases in contraria ratione sint atque altitudines, et sit ut $ABG : \triangle EZ$, ita altitudo pyramidis $\triangle EZ$ ad altitudinem pyramidis $ABGH$. dico, esse

$$ABGH = \triangle EZ.$$

nam iisdem comparatis quoniam est, ut $ABG : \triangle EZ$, ita altitudo pyramidis $\triangle EZ$ ad altitudinem pyramidis $ABGH$, et $ABG : \triangle EZ = BM : E\Pi$ [I, 34], erit etiam ut $BM : E\Pi$, ita altitudo pyramidis $\triangle EZ$ ad altitudinem pyramidis $ABGH$. uerum altitudo pyramidis $\triangle EZ$ eadem est atque altitudo parallelepipedo $E\Pi O$, altitudo autem pyramidis $ABGH$ eadem atque altitudo parallelepipedo $BHMA$. quare ut $BM : E\Pi$, ita altitudo parallelepipedo $E\Pi O$ ad altitudinem parallelepipedo $BHMA$. quorum autem solidorum parallelepipedorum bases in contraria ratione sunt atque altitudines, ea aequalia sunt. itaque $BHMA$

(prius) ins. m. 1 V.

ἔστι τῶ] ἔστω q.

27. ἔστί] om. V.

19. μέν] om. P.

22. ἐστίν B.

25. παραλληλεπίπεδου ὕψος] om. V.

καί ἐστι τοῦ μὲν ΒΗΜΛ ἕκτον μέρος ἢ ΑΒΓΗ πυραμῖς, τοῦ δὲ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ἕκτον μέρος ἢ ΔΕΖΘ πυραμῖς· ἴση ἄρα ἢ ΑΒΓΗ πυραμῖς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι.

5 Τῶν ἄρα ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἔχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἔχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἶσιν ἐκεῖναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

ι'.

Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

Ἐχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρου βάσιν τε τὴν αὐτὴν τὸν ΑΒΓΔ κύκλον καὶ ὕψος ἴσον· λέγω, ὅτι ὁ κῶνος
15 τοῦ κυλίνδρου τρίτον ἐστὶ μέρος, τουτέστιν ὅτι ὁ κύλινδρος τοῦ κῶνου τριπλασίων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ κῶνου τριπλασίων, ἔσται ὁ κύλινδρος τοῦ κῶνου ἢτοι μείζων ἢ τριπλασίων ἢ ἐλάσσων ἢ τριπλασίων. ἔστω πρότερον
20 μείζων ἢ τριπλασίων, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ δὲ ΑΒΓΔ τετράγωνον μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἡμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πρίσμα ἰσοῦψές τῷ κυλίνδρῳ. τὸ δὲ ἀνιστάμενον πρίσμα μείζον

1. ἐστὶν PB. 3. ἴση ἄρα ἢ] ἢ ἄρα BVq. 4. πυραμίδι ἴση ἐστὶν BVq. 6. ὕψει q. 7. -μίδων τρι- in ras. m. rec. V. 8. ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα P. 9. ἔδει δεῖξαι] in ras. m. rec. V. 14. ΑΒΓ P. 15. μέρος ἐστὶ V. 16. τριπλάσιον P, corr. m. 2. ἔσται B. 17. εἰ — 18. ἔσται] om. B, mg. add. m. 2: εἰ γὰρ — μείζων, deletis uerbis ὁ κύλινδρος τοῦ κῶνου. 17. μὴ γὰρ P. 19. ἐλάττων V. 20 γεγράφθω q. 21. τὸ ΑΒΓΔ] supra m. 2 B. 23. καί] om. q. 24. ἀνεσταμένον PBVq.

$= E\Theta\Pi O$. et $AB\Gamma H = \frac{1}{6}BHM\Lambda$, $\Delta EZ\Theta = \frac{1}{6}E\Theta\Pi O$
[p. 178, 26]. itaque $AB\Gamma H = \Delta EZ\Theta$.

Ergo aequalium pyramidum et triangulas bases habentium bases in contraria ratione sunt atque altitudines; et quarum pyramidum triangulas bases habentium bases in contraria ratione sunt atque altitudines, eae aequales sunt; quod erat demonstrandum.

X.

Omnis conus tertia est pars cylindri, qui basim eandem habet et altitudinem aequalem.

Nam conus eandem basim habeat, quam cylindrus, circulum $AB\Gamma\Delta$, et altitudinem aequalem. dico, conum tertiam esse partem cylindri, h. e. cylindrum triplo maiorem esse cono.

nam si cylindrus cono triplo maior non est, erit cylindrus aut maior quam

triplo maior cono aut minor.

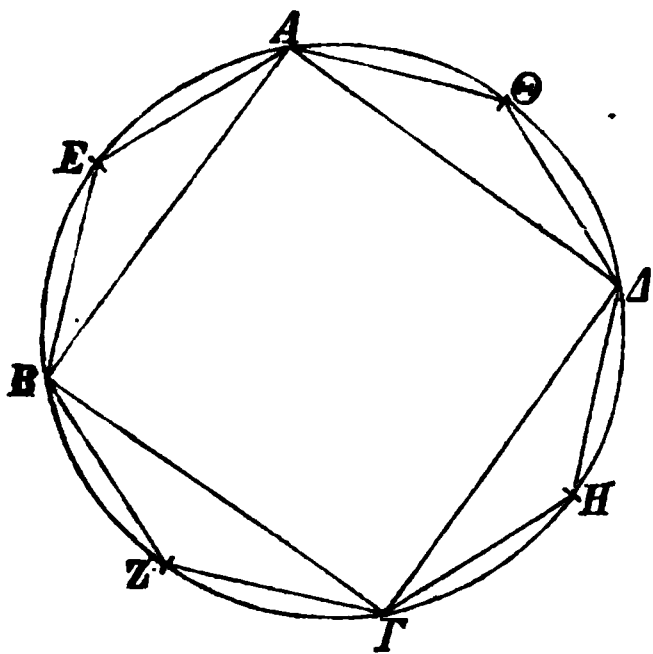
prius sit maior, et in circulo $AB\Gamma\Delta$ inscribatur quadratum $AB\Gamma\Delta$

[IV, 6]. itaque quadratum $AB\Gamma\Delta$ maius est quam

dimidium circuli $AB\Gamma\Delta$ [p. 142, 9]. et in quadrato $AB\Gamma\Delta$ construatur

prisma eandem altitudinem habens quam cylindrus.

itaque prisma constructum maius est quam dimidium cylindri, quoniam



itaque prisma constructum maius est quam dimidium cylindri, quoniam

ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ' ἂν περι-
 τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, τὸ ἐγγε-
 γραμμένον εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον τετράγωνον ἥμισυ
 ἐστὶ τοῦ περιγεγραμμένου· καὶ ἐστὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀν-
 5 ιστάμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρίσματα ἰσοῦψῃ·
 τὰ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα
 πρὸς ἄλληλά ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ $AB\Gamma\Delta$
 ἄρα τετραγώνου ἀνασταθὲν πρίσμα ἥμισυ ἐστὶ τοῦ
 ἀνασταθέντος πρίσματος ἀπὸ τοῦ περιτὸν $AB\Gamma\Delta$
 10 κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· καὶ ἐστὶν ὁ κύλιν-
 δρος ἐλάττων τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ
 τοῦ περιτὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου·
 τὸ ἄρα πρίσμα τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ $AB\Gamma\Delta$ τετρα-
 γώνου ἰσοῦψές τῳ κυλίνδρῳ μείζον ἐστὶ τοῦ ἡμίσεως
 15 τοῦ κυλίνδρου. τετμήσθωσαν αἱ $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$
 περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ E, Z, H, Θ σημεία, καὶ
 ἐπεζεύχθωσαν αἱ $AE, EB, BZ, Z\Gamma, \Gamma H, H\Delta, \Delta\Theta,$
 ΘA · καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν $AEB, BZ\Gamma, \Gamma H\Delta, \Delta\Theta A$
 τριγώνων μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ
 20 τμήματος τοῦ $AB\Gamma\Delta$ κύκλου, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν.
 ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν $AEB, BZ\Gamma, \Gamma H\Delta, \Delta\Theta A$
 τριγώνων πρίσματα ἰσοῦψῃ τῳ κυλίνδρῳ· καὶ ἕκαστον
 ἄρα τῶν ἀνασταθέντων πρίσμάτων μείζον ἐστὶν ἢ τὸ
 ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κυλίνδρου,
 25 ἐπειδήπερ' ἂν διὰ τῶν E, Z, H, Θ σημείων παραλ-
 λήλους ταῖς $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ ἀγάγωμεν, καὶ συμ-
 πληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ παραλ-

1. ἔστω q . 4. ἐστὶ] (prius) ἔσται q ; ἐστὶν B . 5. ἰσοῦψῃ
 στερεὰ Theon (BVq). πρίσματα] om. q . ἰσοῦψῃ] om. Theon
 (BVq). 6. δέ — παραλληλεπίπεδα] ἄρα πρίσματα Theon

si circum circulum $AB\Gamma\Delta$ quadratum circumscribimus [IV, 7], quadratum in circulo $AB\Gamma\Delta$ inscriptum dimidium est circumscripti [p. 143 not. 1]; et solida in iis constructa parallelepiped¹⁾ sunt prismata eandem altitudinem habentia. solida autem parallelepiped^a eandem altitudinem habentia eam inter se rationem habent quam bases [XI, 32]. quare etiam prisma in quadrato $AB\Gamma\Delta$ constructum dimidium est prismatis constructi in quadrato circum $AB\Gamma\Delta$ circulum circumscripto; et cylindrus prismate in quadrato circum $AB\Gamma\Delta$ circulum circumscripto minor est; itaque prisma in quadrato $AB\Gamma\Delta$ constructum eandem altitudinem habens, quam cylindrus, maius est dimidio cylindri. secentur arcus AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA in punctis E , Z , H , Θ in binas partes aequales, et ducantur AE , EB , BZ , $Z\Gamma$, ΓH , $H\Delta$, $\Delta\Theta$, ΘA . itaque etiam singuli trianguli AEB , $BZ\Gamma$, $\Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$ maiores sunt dimidio segmentorum ad eos pertinentium circuli $AB\Gamma\Delta$, ut supra demonstrabamus [p. 142, 22]. iam in singulis triangulis AEB , $BZ\Gamma$, $\Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$ prismata construuntur eandem altitudinem habentia quam cylindrus. itaque etiam singula prismata constructa maiora sunt quam dimidia segmentorum cylindri ad ea pertinentium, quoniam si per puncta E , Z , H , Θ rectas rectis AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA parallelas ducimus, et parallelo-

1) *παράλληλεπίπεδα* hic ut semper fere adiectivum est, sed pertinet ad *πρίσματα*, non ad *στερεά*. expectaveris *ἀνιστάμενα πρίσματα στερεά παράλληλεπίπεδα ἰσουψῆ* (*ἀνιστ. πρίσματα ἰσουψῆ στερεά παραλλ.* coniecit August).

(BV q). 7. εἰσιν Bq. ἐπί] ἀπό q. 14. ἡμίσεος BV q.
19. τρίγωνον q. 21. ἐφ'] ἀφ' V. 23. -ν ἦ] add. m. 2 P.

ληλόγραμμα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀναστήσωμεν στερεὰ
 παραλληλεπίπεδα ἰσοῦψῃ τῷ κυλίνδρῳ, ἐκάστου τῶν
 ἀνασταθέντων ἡμίση ἐστὶ τὰ πρίσματα τὰ ἐπὶ τῶν
 $ΑΕΒ$, $ΒΖΓ$, $ΓΗΔ$, $ΔΘΑ$ τριγώνων· καὶ ἐστὶ τὰ
 5 τοῦ κυλίνδρου τμήματα ἐλάττωνα τῶν ἀνασταθέντων
 στερεῶν παραλληλεπιπέδων· ὥστε καὶ τὰ ἐπὶ τῶν $ΑΕΒ$,
 $ΒΖΓ$, $ΓΗΔ$, $ΔΘΑ$ τριγώνων πρίσματα μείζονά ἐστὶν
 ἢ τὸ ἡμισυ τῶν καθ' ἑαυτὰ τοῦ κυλίνδρου τμημάτων.
 τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ
 10 ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἐκάστου
 τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοῦψῃ τῷ κυλίνδρῳ καὶ
 τοῦτο αἰὲ ποιοῦντες καταλείψομεν τινα ἀποτμήματα
 τοῦ κυλίνδρου, ἃ ἐστὶ ἐλάττωνα τῆς ὑπεροχῆς, ἢ
 ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου.
 15 λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ $ΑΕ$, $ΕΒ$, $ΒΖ$, $ΖΓ$, $ΓΗ$, $ΗΔ$,
 $ΔΘ$, $ΘΑ$ · λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ
 $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυ-
 λίνδρῳ, μείζον ἐστὶν ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου. ἀλλὰ
 τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύ-
 20 γωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τριπλάσιόν ἐστὶ
 τῆς πυραμίδος, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$
 πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ· καὶ ἡ πυ-
 ραμις ἄρα, ἥς βάσις μὲν [ἐστὶ] τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πο-
 λύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ
 25 τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον.
 ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ

3. ἡμίσεια Β V q. πρίσμα P, corr. m. rec. 5. ἀποτμή-
 ματα Β V q. 8. ἦ] bis P. τῶν] τοῦ q. ἑαυτὰ] -τά
 e corr. m. rec. P; ἐτά q. 10. ἐφ'] ἀφ' V. 13. ἄ] supra
 scr. m. 2 B. ἐλάττωνα P. 14. κώνου q. 15. λε-
 λήφθω q. 17. $ΑΒΕΖΓΗΔΘΑ$ P, $ΑΕΒΖΓΗΔΘΑ$ V.
 18. κώνου q. 21. ἐστὶ] om. V. $ΑΕΒΖΓΗΘΔ$ V.

gramma in rectis AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA explemus et in iis solida parallelepipeda construimus eandem altitudinem habentia, quam cylindrus, prismata in triangulis AEB , $BZ\Gamma$, $\Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$ constructa dimidia sunt singulorum parallelepipedorum¹⁾; et segmenta cylindri minora sunt solidis parallelepipedis, quae construximus; quare prismata in triangulis AEB , $BZ\Gamma$, $\Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$ constructa maiora sunt quam dimidia segmentorum cylindri ad ea pertinentium. itaque si arcus relictos in duas partes aequales secuerimus et rectas duxerimus et in singulis triangulis prismata construxerimus eandem altitudinem habentia, quam cylindrus, et hoc semper fecerimus, frusta quaedam cylindri relinquemus, quae minora sunt excessu, quo cylindrus triplum cono excedit [X, 1]. relinquuntur et sint AE , EB , BZ , $Z\Gamma$, ΓH , $H\Delta$, $\Delta\Theta$, ΘA . itaque quod relinquitur prisma, cuius basis est polygonum $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$, altitudo autem eadem ac cylindri, maius est quam triplo maius cono. uerum prisma, cuius basis est polygonum $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$, altitudo autem eadem ac cylindri, triplo maius est pyramide, cuius basis est polygonum $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$, uertex autem idem ac cono [prop. VII coroll.]. quare etiam pyramis, cuius basis est polygonum $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$, uertex autem idem ac cono, maior est cono, qui basim habet $AB\Gamma\Delta$ circulum. uerum etiam minor est (nam

1) Hoc ex XI, 28 colligitur ductis ab E , Z , H , Θ rectis ad AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA perpendicularibus.

22. $\kappa\acute{o}\nu\omega$ q. 23. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] om. P. 24. $\kappa\acute{o}\nu\omega$ q. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$
P. 25. $\kappa\acute{o}\nu\omega$ in ras. q. 26. $\acute{\upsilon}\pi'$] corr. ex $\acute{\alpha}\pi'$ m. 2 B.

ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἢ τριπλάσιος.

Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου.

- 5 Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω ἐλάττων ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κώνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον τετράγωνον τὸ $ΑΒΓΔ$ · τὸ $ΑΒΓΔ$ ἄρα τετράγωνον μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ
- 10 $ΑΒΓΔ$ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ $ΑΒΓΔ$ τετραγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἢ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου, ἐπειδήπερ, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν, ὅτι ἔαν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν,
- 15 ἔσται τὸ $ΑΒΓΔ$ τετράγωνον ἥμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένου τετραγώνου· καὶ ἔαν ἀπὸ τῶν τετραγώνων στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀναστήσωμεν ἰσοῦψῃ τῷ κώνῳ, ἃ καὶ καλεῖται πρίσματα, ἔσται τὸ ἀνασταθέν ἀπὸ τοῦ $ΑΒΓΔ$ τετραγώνου ἥμισυ τοῦ
- 20 ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· πρὸς ἄλληλα γὰρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. ὥστε καὶ τὰ τρίτα· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βᾶσις τὸ $ΑΒΓΔ$ τετράγωνον, ἥμισύ ἐστι τῆς πυραμίδος τῆς ἀνασταθείσης ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετρα-
- 25 γώνου. καὶ ἐστὶ μείζων ἢ πυραμὶς ἢ ἀνασταθεῖσα ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου τοῦ κώνου· ἐμπεριέχει γὰρ αὐτόν. ἢ ἄρα πυραμὶς, ἧς βᾶσις τὸ

1. ἐστίν] om. V. ἐστίν] ἔσται B V. κώνου q et sic postea saepe. 3. ἐστίν] om. V. τριπλάσιός ἐστίν V. 8. τὸ $ΑΒΓΔ$ — 9. τετράγωνον] mg. m. 1 P. 10. τετραγώνου] in ras. q. 13. μέρος] om. V. 14. περιγράψωμεν

ab eo comprehenditur); quod fieri non potest. itaque cylindrus maior non est quam triplo maior cono.

Iam dico, cylindrum ne minorem quidem esse quam triplo maiorem cono.

Nam si fieri potest, sit cylindrus minor quam triplo maior cono. e contrario igitur conus maior est tertia parte cylindri. iam in circulo $AB\Gamma\Delta$ quadratum inscribatur $AB\Gamma\Delta$ [IV, 6]. itaque quadratum $AB\Gamma\Delta$ maius est quam dimidium circuli $AB\Gamma\Delta$ [p. 142, 11]. et in quadrato $AB\Gamma\Delta$ pyramis construatur eundem uerticem habens, quem conus. itaque pyramis ita constructa maior est quam dimidium cono, quoniam, ut supra demonstrabamus [p. 143 not. 1], si circum circumscriptum quadratum circumscriberimus [IV, 7], quadratum $AB\Gamma\Delta$ dimidium erit quadrati circum circumscripti; et si in quadratis solida parallelepipeda eandem altitudinem habentia, quam conus, construxerimus, quae eadem prismata uocantur, solidum in quadrato $AB\Gamma\Delta$ constructum dimidium erit solidi constructi in quadrato circum circumscripto (nam eam inter se rationem habent quam bases) [XI, 32]. quare etiam partes tertiae. itaque etiam pyramis, cuius basis est quadratum $AB\Gamma\Delta$, dimidium est pyramidis, quae in quadrato circum circumscripto construitur [prop. VII coroll.]. et pyramis in quadrato circum circumscripto constructa maior est cono (nam eum comprehendit). itaque pyramis, cuius basis est

τετράγωνον ΒVq. 15. ἡμισυ] -μι- in ras. V. 16. περιγεγραμμένου] περιγραφόμενου V. τετραγώνου] om. V.
18. καλεῖ in fine lin. P. 19. τοῦ] (alt.) corr. ex τό m. 1 P.
22. τρία q, corr. m. 1. 23. ἐστιν P. 27. περιέχει q.

$ΑΒΓΔ$ τετράγωνον, κορυφή δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ $ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ$ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ $Ε, Ζ, Η, Θ$ σημεῖα, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ$ καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν $ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ$ τριγώνων μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ $ΑΒΓΔ$ κύκλου. καὶ ἀνεστάτωσαν ἐφ' ἑκάστου τῶν $ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ$ τριγώνων πυραμίδες τὴν αὐτὴν κορυφήν ἔχουσαι τῷ κώνῳ· καὶ ἕκαστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὲ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιξενγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδα τὴν αὐτὴν κορυφήν ἔχουσαν τῷ κώνῳ καὶ τοῦτο αἰεὶ ποιῶντες καταλείψομεν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ἢ ὑπερέχει ὁ κώνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν $ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ$ λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἥς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, κορυφή δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου. ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἥς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, κορυφή δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ πρίσματος, οὗ βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ· τὸ ἄρα πρίσμα, οὗ βᾶσις

2. τό] om. P. αἱ] bis P, sed corr. 3. τά] τό q.
 5. ΘΑ] om. B. 8. ἐφ'] ἀφ' BVq. 10. ἔχοντες V.
 12. μείζον P, corr. m. rec. ἑαυτό PVq; corr. ed. Basil.
 17. τμήματα BV. 19. λελήφθω q. 21. ΑΕΒΖΓΗΔΘ] Θ

quadratum $AB\Gamma\Delta$, uertex autem idem ac conii, maior est quam dimidium conii. iam arcus AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA in punctis E , Z , H , Θ in duas partes aequales secantur, et ducantur AE , EB , BZ , $Z\Gamma$, ΓH , $H\Delta$, $\Delta\Theta$, ΘA . itaque singuli trianguli AEB , $BZ\Gamma$, $\Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$ maiores sunt quam dimidium segmentorum circuli $AB\Gamma\Delta$ ad eos pertinentium [p. 142, 22]. et in singulis triangulis AEB , $BZ\Gamma$, $\Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$ pyramides construuntur eundem uerticem habentes, quem conus. itaque etiam singulae pyramides, quas construximus, eadem ratione¹⁾ maiores sunt quam dimidium segmentorum conii ad eas pertinentium. si igitur arcus reliquos in duas partes aequales secuerimus et rectas duxerimus et in singulis triangulis pyramides construxerimus eundem uerticem habentes, quem conus, et hoc semper fecerimus, frustra quaedam conii relinquemus, quae minora erunt excessu, quo conus tertiam partem cylindri excedit [X, 1]. relinquuntur et sint ea, quae in AE , EB , BZ , $Z\Gamma$, ΓH , $H\Delta$, $\Delta\Theta$, ΘA posita sunt. itaque quae relinquitur pyramis, cuius basis est polygonum $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$, uertex autem idem ac conii, maior est tertia parte cylindri. uerum pyramis, cuius basis est polygonum $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$, uertex autem idem ac conii, tertia pars est prismatis, cuius basis est polygonum $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$, altitudo autem eadem ac cylindri.

1) Sc. ac supra p. 192, 12 sq. in pyramidibus, quae in quadratis constructae erant.

corr. ex B uel Z q. 22. η] om. q. 24. $AEB\Gamma H\Delta\Theta$ V.
 26. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ B. $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$] Z supra scr. m. 2 V. 27. $\tau\acute{o}$] θ in ras. m. 2 B. $\tau\acute{o}$ $\acute{\alpha}\rho\alpha$ — p. 196, 2. $\kappa\upsilon\lambda\iota\upsilon\delta\epsilon\sigma\sigma\iota$] om. q.

μέν ἐστὶ τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔ$ πολύγωνον, ὕψος δὲ το
 αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζον ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου, οὗ
 βάσις ἐστὶν ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ἐμ-
 περιέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ
 5 ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλά-
 σιος. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων ἢ τριπλάσιος· τρι-
 πλάσιος ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ὥστε ὁ κῶνος
 τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ κυλίνδρου.

Πᾶς ἄρα κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ
 10 τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον· ὅπερ
 ἔδει δεῖξαι.

ια'.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύ-
 λινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι,
 15 ὧν βάσεις μὲν [εἰσὶν] οἱ $ΑΒΓΔ$, $ΕΖΗΘ$ κύκλοι,
 ἄξονες δὲ οἱ $ΚΑ$, $ΜΝ$, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ
 $ΑΓ$, $ΕΗ$ · λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς
 τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον, οὕτως ὁ $ΑΔ$ κῶνος πρὸς τὸν
 20 $ΕΝ$ κῶνον.

Εἰ γὰρ μή, ἔσται ὡς ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν
 $ΕΖΗΘ$ κύκλον, οὕτως ὁ $ΑΔ$ κῶνος ἦτοι πρὸς ἔλασ-
 σόν τι τοῦ $ΕΝ$ κώνου στερεὸν ἢ πρὸς μείζον. ἔστω
 πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ $Ξ$, καὶ ᾧ ἔλασσόν ἐστὶ τὸ
 25 $Ξ$ στερεὸν τοῦ $ΕΝ$ κώνου, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ $Ψ$
 στερεόν· ὁ $ΕΝ$ κῶνος ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς $Ξ$, $Ψ$ στε-
 ρεοῖς. ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον τετρά-
 γωνον τὸ $ΕΖΗΘ$ · τὸ ἄρα τετράγωνον μείζον ἐστὶν

3. μέν ἐστὶν Vq.

4. ἐστὶν] om. V.

ἐστὶν ὁ] mg. m. 1 P.

8. μέρος ἐστὶ V.

ἐλάττων Vq.

9. ἄρα ὁ V.

prisma igitur, cuius basis est $AEBZ\Gamma H\Delta$ polygonum, altitudo autem eadem ac cylindri, maius est cylindro, cuius basis est circulus $AB\Gamma\Delta$. uerum etiam minus (nam ab eo comprehenditur); quod fieri non potest. itaque cylindrus minor non est quam triplo maior cono. demonstrauius autem, eum ne maiorem quidem esse. triplo igitur maior est cylindrus cono. itaque conus tertia pars est cylindri.

Ergo omnis conus tertia pars est cylindri, qui eandem basim habet et altitudinem aequalem; quod erat demonstrandum.

XI.

Coni et cylindri, qui eandem habent altitudinem, eam inter se rationem habent quam bases.

Eandem altitudinem habeant coni et cylindri, quorum bases sunt circuli $AB\Gamma\Delta$, EZH , axes autem KA , MN , diametri autem basium AG , EH . dico, esse $AB\Gamma\Delta : EZH = AA : EN$.

Nam si minus, erit ut $AB\Gamma\Delta : EZH$, ita conus AA aut ad minus aliquod cono EN solidum aut ad maius. prius sit ad minus Ξ , et sit $\Psi = EN \div \Xi$. itaque $EN = \Xi + \Psi$. iam in circulo EZH inscribatur quadratum EZH [IV, 6]. itaque quadratum maius est dimidio circuli [p. 142, 11]. in quadrato

τοῦ τήν — 11. δεῖξαι] καὶ τὰ ἐξῆς V. 10. ἴσον] supra m. 2 B. 12. ἰα'] om. q. 15. καί] ἦ B. 16. εἶσιν] om. P. 17. διάμετροι — 18. EH] om. q; mg. m. 2 B. 19. κύκλον] supra m. 2 B. AA B, sed corr. πρόσ — 22. κῶνος] mg. m. 2 B. 20. κῶνον] om. BVq. 21. ἔστω Vq. 22. κύκλον] om. q. ἦτοι] om. q; ἦ BV. ἦτοι — 23. ἦ] et in textu et in mg. m. 2 B (ἦ pro ἦτοι). 24. πρότερον] om. q. 28. ἐστι q.

ἢ το ἥμισυ τοῦ κύκλου. ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ $EZH\Theta$
 τετραγώνου πυραμὶς ἰσοῦψῆς τῷ κώνῳ· ἢ ἄρα ἀνα-
 σταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώ-
 νου, ἐπειδήπερ ἐὰν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον
 5 τετράγωνον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀναστήσωμεν πυραμίδα
 ἰσοῦψῆ τῷ κώνῳ, ἢ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς ἥμισύ ἐστι
 τῆς περιγραφείσης· πρὸς ἀλλήλας γάρ εἰσιν ὡς αἱ
 βάσεις· ἐλάττων δὲ ὁ κώνος τῆς περιγραφείσης πυρα-
 μίδος. τετμήσθωσαν αἱ $EZ, ZH, H\Theta, \Theta E$ περι-
 10 φέρειαι δίχα κατὰ τὰ O, Π, P, Σ σημεῖα, καὶ ἐπεξεύχθω-
 σαν αἱ $\Theta O, OE, E\Pi, \Pi Z, ZP, PH, H\Sigma, \Sigma\Theta$.
 ἕκαστον ἄρα τῶν $\Theta OE, E\Pi Z, ZPH, H\Sigma\Theta$ τριγώ-
 νων μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμή-
 ματος τοῦ κύκλου. ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν $\Theta OE,$
 15 $E\Pi Z, ZPH, H\Sigma\Theta$ τριγώνων πυραμὶς ἰσοῦψῆς τῷ
 κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων
 μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος
 τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περι-
 φερείας δίχα καὶ ἐπιξευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες
 20 ἐπὶ ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοῦψεῖς τῷ
 κώνῳ καὶ ἀεὶ τοῦτο ποιοῦντες καταλείψομεν τινα

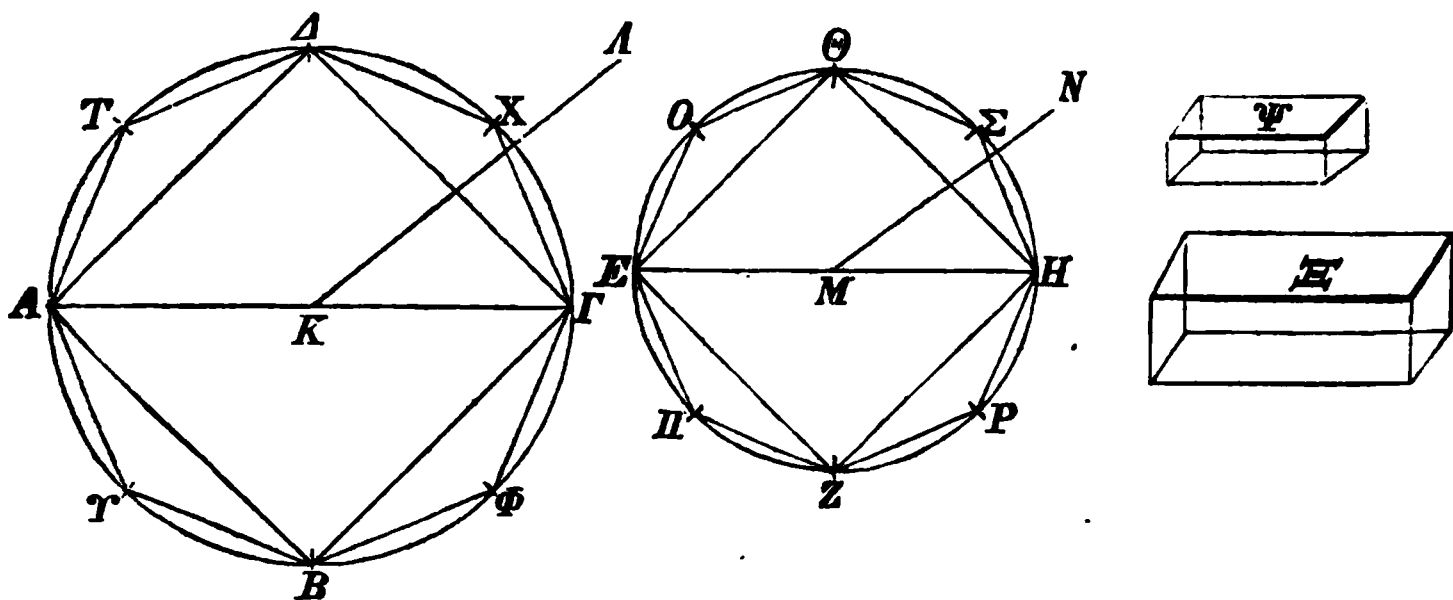
6. ἐστιν P. 7. ἄλληλα B, corr. m. 2. 8. ἐλάσσων P.

Post πυραμίδος add. ἢ ἄρα πυραμὶς, ἥς βάσις τὸ $EZH\Theta$
 τετράγωνον, κορυφή δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ
 ἥμισυ τοῦ κώνου Vq, mg. m. 2 B. 10. τὰ] τό q. P, Σ]
 corr. ex Π, P m. rec. P. 11. OE] ΘE q. 12. HE Θ q.

13. αὐτό V. 14. ἀφ' Bq; perba ἀφ' ἑκάστου supra m.
 2 V (uidetur fuisse ἐφ' ἑκάστῳ). 16. καί] om. V.

17. μέρος τοῦ V. ἑαυτήν] corr. in ἑαυτό V; ἑαυτό corr. ex
 ἑαυτοῦ P. 20. ἑκάστῳ V.

$EZH\Theta$ pyramis construatur, quae eandem altitudinem habeat, quam conus. pyramis igitur constructa maior est dimidio coni, quoniam si circum circulum quadratum circumscripserimus [IV, 7] et in eo pyramidem construxerimus eandem altitudinem habentem, quam conus, pyramis inscripta dimidia est circumscriptae; nam eam inter se rationem habent, quam bases [prop. VI]; conus autem pyramide circumscripta minor est. secentur arcus EZ , ZH , $H\Theta$, ΘE in punctis O , Π , P , Σ in duas partes aequales, et ducantur ΘO , OE , $E\Pi$,



ΠZ , ZP , PH , $H\Sigma$, $\Sigma\Theta$. singuli igitur trianguli ΘOE , $E\Pi Z$, ZPH , $H\Sigma\Theta$ maiores sunt dimidio segmentorum circuli ad eos pertinentium [p. 142, 22]. iam in singulis triangulis ΘOE , $E\Pi Z$, ZPH , $H\Sigma\Theta$ pyramis construatur eandem altitudinem habens, quam conus. itaque etiam singulae pyramides constructae maiores sunt dimidio segmentorum cono ad eas pertinentium [p. 194, 10]. quare si arcus reliquos in duas partes aequales secuerimus et rectas duxerimus et in singulis triangulis pyramides construxerimus eandem altitudinem habentes, quam conus, et hoc semper fece-

ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Ψ
στερεοῦ. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν $\Theta Ο Ε$,
 $Ε Π Ζ$, $Ζ Ρ Η$, $Η Σ \Theta$. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἣς βάσις
τὸ $\Theta Ο Ε Π Ζ Ρ Η Σ$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ
5 κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. ἐγγεγράφθω καὶ
εἰς τὸν $Α Β Γ Δ$ κύκλον τῷ $\Theta Ο Ε Π Ζ Ρ Η Σ$ πολυ-
γώνῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ
 $Δ Τ Α Τ Β Φ Γ Χ$, καὶ ἀνεστάτω ἐπ' αὐτοῦ πυραμὶς
ἰσοῦψῆς τῷ $Α Δ$ κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ
10 τῆς $Α Γ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Ε Η$, οὕτως τὸ $Δ Τ Α Τ Β Φ Γ Χ$
πολύγωνον πρὸς τὸ $\Theta Ο Ε Π Ζ Ρ Η Σ$ πολύγωνον, ὡς δὲ
τὸ ἀπὸ τῆς $Α Γ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Ε Η$, οὕτως ὁ
 $Α Β Γ Δ$ κύκλος πρὸς τὸν $Ε Ζ Η \Theta$ κύκλον, καὶ ὡς ἄρα
ὁ $Α Β Γ Δ$ κύκλος πρὸς τὸν $Ε Ζ Η \Theta$ κύκλον, οὕτως τὸ
15 $Δ Τ Α Τ Β Φ Γ Χ$ πολύγωνον πρὸς τὸ $\Theta Ο Ε Π Ζ Ρ Η Σ$
πολύγωνον. ὡς δὲ ὁ $Α Β Γ Δ$ κύκλος πρὸς τὸν $Ε Ζ Η \Theta$
κύκλον, οὕτως ὁ $Α Δ$ κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεόν, ὡς
δὲ τὸ $Δ Τ Α Τ Β Φ Γ Χ$ πολύγωνον πρὸς τὸ $\Theta Ο Ε Π Ζ Ρ Η Σ$
πολύγωνον, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἣς βάσις μὲν τὸ
20 $Δ Τ Α Τ Β Φ Γ Χ$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Δ$ σημεῖον,
πρὸς τὴν πυραμίδα, ἣς βάσις μὲν τὸ $\Theta Ο Ε Π Ζ Ρ Η Σ$
πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ N σημεῖον. καὶ ὡς ἄρα ὁ
 $Α Δ$ κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεόν, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἣς
βάσις μὲν τὸ $Δ Τ Α Τ Β Φ Γ Χ$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ
25 τὸ $Δ$ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἣς βάσις μὲν τὸ
 $\Theta Ο Ε Π Ζ Ρ Η Σ$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ N σημεῖον·
ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ $Α Δ$ κῶνος πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ
πυραμίδα, οὕτως τὸ Ξ στερεόν πρὸς τὴν ἐν τῷ $Ε Ν$

1. ἔσται] ἐστὶν P. 2. $\Theta Ο Ε$] e corr. q. 3. λοιπόν P.
4. $\Theta Ο Ε Π Ζ Ρ Η Σ$ P B, $Ο Ε Π Ζ Ρ Η Σ \Theta$ V. 5. μείζων V q,
et B, sed corr. ἐστὶν P. 6. $\Theta \Theta Ε Π Ζ Ρ Η Σ$ P B q et e corr.

rimus, frustra quaedam coni-relinquemus minora solido Ψ [X, 1]. relinquuntur et sint ea, quae in ΘOE , $E\Pi Z$, ZPH , $H\Sigma\Theta$ posita sunt. itaque quae relinquitur pyramis, cuius basis est polygonum $\Theta OE\Pi ZPH\Sigma$, altitudo autem eadem ac coni, maior est solido Ξ . etiam in circulo $AB\Gamma\Delta$ polygono $\Theta OE\Pi ZPH\Sigma$ simile et similiter positum polygonum $\Delta TATB\Phi\Gamma X$ inscribatur [cfr. VI, 18], et in eo pyramis construatur eandem altitudinem habens, quam conus AA . iam quoniam est

$AG^2 : EH^2 = \Delta TATB\Phi\Gamma X : \Theta OE\Pi ZPH\Sigma$ [prop. I],
et $AG^2 : EH^2 = AB\Gamma\Delta : EZH\Theta$ [prop. II], erit etiam
 $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = \Delta TATB\Phi\Gamma X : \Theta OE\Pi ZPH\Sigma$.
uerum $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = AA : \Xi$, et ut

$$\Delta TATB\Phi\Gamma X : \Theta OE\Pi ZPH\Sigma,$$

ita pyramis, cuius basis est polygonum $\Delta TATB\Phi\Gamma X$, uertex autem punctum A , ad pyramidem, cuius basis est polygonum $\Theta OE\Pi ZPH\Sigma$, uertex autem N punctum [prop. VI]. quare etiam ut $AA : \Xi$, ita pyramis, cuius basis est polygonum $\Delta TATB\Phi\Gamma X$, uertex autem punctum A , ad pyramidem, cuius basis est polygonum $\Theta OE\Pi ZPH\Sigma$, uertex autem punctum N . permutando igitur erit [V, 16], ut conus AA ad pyramidem in eo comprehensam, ita solidum Ξ ad pyramidem in cono EN comprehensam. conus autem AA maior est

V. 8. $\Delta TATB\Phi\Gamma X$] litt. Γ postea add. V. $\acute{\alpha}\pi'$ q.
 $\alpha\upsilon\tau\omega$ B. 10. $\tau\acute{o}$ (alt.) — 12. $\sigma\upsilon\tau\omega\varsigma$ \acute{o}] mg. m. 1 V.
 11. $O\Theta E\Pi PH\Sigma$ B, et P, corr. m. 1. 12. $\sigma\upsilon\tau\omega\varsigma$ \acute{o}] etiam in
 textu V. 15. $O\Theta E\Pi PH\Sigma$ P, corr. m. 1. 18. $\Delta TAT\Phi\Gamma X$
 V. 20. $\Theta OE\Pi ZPH\Sigma$ B, $\acute{\epsilon}\nu$ $\acute{\epsilon}\tau\acute{\epsilon}\rho\omega$ $\tau\acute{o}$ $\Delta TATB\Phi\Gamma X$ πολύ-
 γωνον mg. m. 2. 24. $\Delta TATB\Phi\Gamma X$] Γ postea add. V.

κῶνῳ πυραμίδα. μείζων δὲ ὁ $ΑΔ$ κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ
 πυραμίδος· μείζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς ἐν τῷ
 $ΕΝ$ κῶνῳ πυραμίδος. ἀλλὰ καὶ ἔλασσον· ὅπερ ἄτοπον.
 οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$
 5 κύκλον, οὕτως ὁ $ΑΔ$ κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ $ΕΝ$
 κῶνου στερεόν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδέ ἐστιν
 ὡς ὁ $ΕΖΗΘ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον, οὕτως
 ὁ $ΕΝ$ κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ $ΑΔ$ κῶνου στερεόν.

Λέγω δὴ, ὅτι οὐδέ ἐστὶν ὡς ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος
 10 πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον, οὕτως ὁ $ΑΔ$ κῶνος πρὸς
 μείζόν τι τοῦ $ΕΝ$ κῶνου στερεόν.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μείζον τὸ Ξ · ἀνάπαλιν
 ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ $ΕΖΗΘ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΑΒΓΔ$ κύ-
 κλον, οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν $ΑΔ$ κῶνον. ἀλλ'
 15 ὡς τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν $ΑΔ$ κῶνον, οὕτως ὁ $ΕΝ$
 κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ $ΑΔ$ κῶνου στερεόν· καὶ
 ὡς ἄρα ὁ $ΕΖΗΘ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον,
 οὕτως ὁ $ΕΝ$ κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ $ΑΔ$ κῶνου
 στερεόν· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς
 20 ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον, οὕτως ὁ
 $ΑΔ$ κῶνος πρὸς μείζόν τι τοῦ $ΕΝ$ κῶνου στερεόν.
 ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ
 $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον, οὕτως ὁ
 $ΑΔ$ κῶνος πρὸς τὸν $ΕΝ$ κῶνον.

25 Ἄλλ' ὡς ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, ὁ κύλινδρος
 πρὸς τὸν κύλινδρον· τριπλασίων γὰρ ἑκάτερος ἑκα-
 τέρου. καὶ ὡς ἄρα ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$
 κύκλον, οὕτως οἱ ἐπ' αὐτῶν ἰσοῦψεῖς [τοῖς κῶνοις]
 κύλινδροι.

1. ἐαυτῷ P. 4. ἐστίν] om. V. 6. οὐδέ ἐστὶν ὡς] οὐδ'
 ὁ V, οὐδ' ὡς ὁ m. 2; οὐδὲ ὡς ἐστὶν q. 13. κύκλον] om. B.

pyramide in eo comprehensa. itaque etiam solidum Ξ maius est pyramide in cono EN comprehensa [V, 14]. uerum idem minus est; quod absurdum est. itaque non est ut $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta$, ita conus AA ad solidum minus cono EN . iam similiter demonstrabimus, ne EN quidem conum ad solidum minus cono AA eam rationem habere quam $EZH\Theta : AB\Gamma\Delta$.

Iam dico, ne ad maius quidem cono EN solidum conum AA eam rationem habere quam

$$AB\Gamma\Delta : EZH\Theta.$$

Nam si fieri potest, habeat ad maius Ξ . itaque e contrario erit $EZH\Theta : AB\Gamma\Delta = \Xi : AA$ [V, 7 coroll.]. uerum ut $\Xi : AA$, ita conus EN ad solidum minus cono AA [prop. II lemma]. quare etiam ut $EZH\Theta : AB\Gamma\Delta$, ita conus EN ad solidum minus cono AA ; quod fieri non posse demonstrauius. itaque non est ut $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta$, ita conus AA ad solidum maius cono EN . demonstrauius autem, eum ne ad minus quidem illam habere rationem. itaque

$$AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = AA : EN.$$

sed ut conus ad conum, ita cylindrus ad cylindrum; nam uterque utroque triplo maior est [prop. X]. itaque etiam ut $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta$, ita cylindri in iis constructi, qui eandem altitudinem habent.¹⁾

1) Uerba τοῖς κώνοις lin. 28 uereor ne antiqua glossa sit; neque enim hic de eo agitur, ut cylindri eandem altitudinem habeant quam conii, sed ut demonstramus, cylindros ἰσοψηεῖς eam rationem habere quam bases.

14. ἀλλ' — 15. κώνον] mg. m. 1 P. 19. ἐστίν] om. V.
 ὡς] om. q. 21. τι] om. q. κώνον] om. V. 25. ἀλλά P.

Οἱ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβ'.

5 Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

Ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ κύκλοι, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ $B\Delta$, $Z\Theta$, ἄξονες δὲ τῶν κῶνων καὶ κυλίνδρων οἱ $ΚΑ$, MN . λέγω, ὅτι ὁ κῶνος, οὗ βᾶσις μὲν [ἐστίν] ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βᾶσις μὲν [ἐστίν] ὁ $EZH\Theta$ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ N σημεῖον, τριπλασίονα λόγον
15 ἔχει ἢπερ ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$.

Εἰ γὰρ μὴ ἔχει ὁ $AB\Gamma\Delta\Lambda$ κῶνος πρὸς τὸν $EZH\Theta N$ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἢπερ ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$, ἔξει ὁ $AB\Gamma\Delta\Lambda$ κῶνος ἢ πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ $EZH\Theta N$ κῶνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἢ πρὸς μείζον. ἐχέτω
20 πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Ξ , καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον τετράγωνον τὸ $EZH\Theta$. τὸ ἄρα $EZH\Theta$ τετράγωνον μείζον ἐστίν ἢ τὸ ἡμισυ τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ $EZH\Theta$ τετραγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφήν ἔχουσα τῷ κῶνῳ· ἢ ἄρα
25 ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἡμισυ μέρος

2. ὅπερ ἔδει δεῖξαι]: ~ V. 5. καί] καὶ οἱ q. 6. εἰσὶν PB. βάσεσιν P. 8. βᾶσις q. 10. αἱ] οἱ BV. δέ] om. q. καί] ἢ BVq. 12. ἐστίν] om. BVq. 13. ἐστίν] om. BVq. 16. ἔχη P, ἔχοι B. 17. τριπλασίον P, postea corr. m. 1. Post λόγον ras. 3 litt. V. 20. πρὸς ἔλασσον πρότερον BVq. 22. κύκλου — 23. $EZH\Theta$] mg. m.

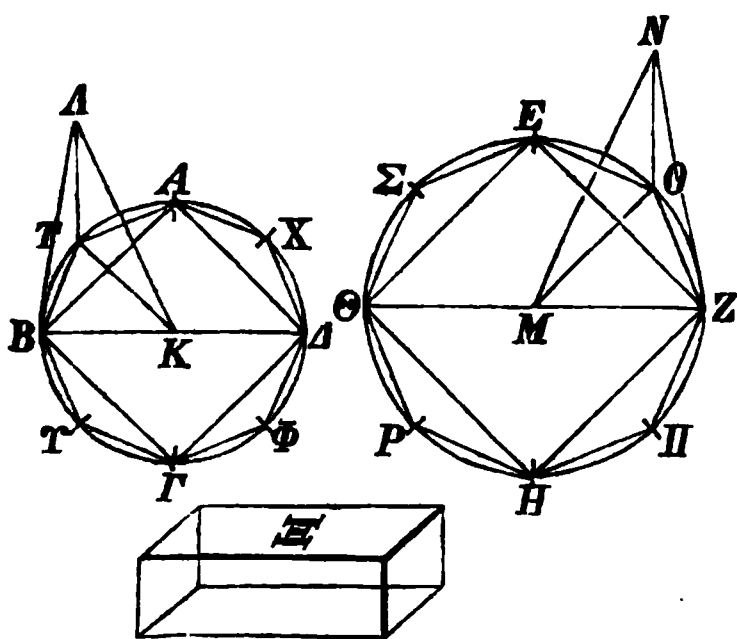
Ergo conii et cylindri, qui eandem habent altitudinem, eam inter se rationem habent quam bases; quod erat demonstrandum.

XII.

Similes conii et cylindri inter se triplicatam rationem habent quam diametri basium.

Sint similes conii et cylindri, quorum bases sint circuli $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$, diametri autem basium $B\Delta$, $Z\Theta$, axes autem conorum et cylindrorum KA , MN . dico, conum, cuius basis sit circulus $AB\Gamma\Delta$, uertex autem A punctum, ad conum, cuius basis sit circulus $EZH\Theta$, uertex autem N punctum, triplicatam rationem habere quam $B\Delta:Z\Theta$.

nam si non est $AB\Gamma\Delta\Delta: EZH\Theta N = B\Delta^3: Z\Theta^3$, conus $AB\Gamma\Delta\Delta$ aut ad solidum aliquod minus cono $EZH\Theta N$ triplicatam rationem habebit aut ad maius.



prius habeat ad minus E , et in circulo $EZH\Theta$ inscribatur quadratum $EZH\Theta$ [IV, 6]. itaque quadratum $EZH\Theta$ maius est dimidio circuli $EZH\Theta$ [p. 142, 11]. et in quadrato $EZH\Theta$ pyramis construatur eundem uerticem habens,

quem conus. itaque pyramis constructa maior erit

XII. Psellus p. 65.

1 P. 23. ἐπί] ἀπό V. ἰσοψηῆς Theon (B V q).

24. τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα]

τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν δὴ αἱ EZ , ZH , $H\Theta$, ΘE
 περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ O , Π , P , Σ σημεῖα, καὶ
 ἐπεξεύχθωσαν αἱ EO , OZ , $Z\Pi$, ΠH , HP , $P\Theta$, $\Theta\Sigma$,
 ΣE . καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν EOZ , $Z\Pi H$, $HP\Theta$,
 5 $\Theta\Sigma E$ τριγώνων μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ
 καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω
 ἐφ' ἑκάστου τῶν EOZ , $Z\Pi H$, $HP\Theta$, $\Theta\Sigma E$ τριγώνων
 πυραμῖς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· καὶ
 ἕκαστη ἄρα τῶν ἀνασταθμισῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν
 10 ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου.
 τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ
 ἐπιξευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν
 τριγώνων πυραμίδας τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσας
 τῷ κώνῳ καὶ τοῦτο αἰεὶ ποιοῦντες καταλείψομεν τινα
 15 ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπερ-
 οχῆς, ἢ ὑπερέχει ὁ $EZH\Theta N$ κώνος τοῦ Ξ στερεοῦ.
 ἄλειψθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν EO , OZ , $Z\Pi$, ΠH ,
 HP , $P\Theta$, $\Theta\Sigma$, ΣE . λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμῖς, ἥς βᾶσις
 μὲν ἐστὶ τὸ $EOZ\Pi HP\Theta\Sigma$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ
 20 N σημεῖον, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. ἐγγεγράφθω
 καὶ εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον τῷ $EOZ\Pi HP\Theta\Sigma$ πολυ-
 γώνῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ
 $ATB\Gamma\Phi\Delta X$, καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ $ATB\Gamma\Phi\Delta X$
 πολυγώνου πυραμῖς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ
 25 κώνῳ, καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἥς
 βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $ATB\Gamma\Phi\Delta X$ πολύγωνον, κορυφὴ
 δὲ τὸ A σημεῖον, ἐν τρίγωνον ἔστω τὸ ABT , τῶν
 δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἥς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ

2. τά] τό V. 4. $HP\Theta$] $HE\Theta$ q. 7. ἀφ' V. EOZ] O
 in ras. m. 2 B, $E\Theta Z$ q. 8. ἔχουσα] χ in ras. B. 9. μεί-

dimidio conii [p. 192, 12]. iam arcus EZ , ZH , $H\Theta$, ΘE in punctis O , Π , P , Σ in duas partes aequales secantur, et ducantur EO , OZ , $Z\Pi$, ΠH , HP , $P\Theta$, $\Theta\Sigma$, ΣE . itaque etiam singuli trianguli EOZ , $Z\Pi H$, $HP\Theta$, $\Theta\Sigma E$ maiores sunt dimidio segmentorum circuli $EZH\Theta$ ad eos pertinentium [p. 142, 22]. et in singulis triangulis EOZ , $Z\Pi H$, $HP\Theta$, $\Theta\Sigma E$ pyramis construatur eundem uerticem habens, quem conus. itaque etiam singulae pyramides constructae maiores sunt dimidio segmentorum conii ad eas pertinentium [p. 194, 11]. iam si arcus reliquos in duas partes aequales secuerimus et rectas duxerimus et in singulis triangulis pyramides construxerimus eundem uerticem habentes, quem conus, et hoc semper fecerimus, frusta quaedam conii relinquemus, quae minora erunt excessu, quo conus $EZH\Theta N$ solidum Ξ excedit. relinquuntur et sint ea, quae in EO , OZ , $Z\Pi$, ΠH , HP , $P\Theta$, $\Theta\Sigma$, ΣE posita sunt. itaque quae relinquuntur pyramis, cuius basis est $EOZ\Pi HP\Theta\Sigma$ polygonum, uertex autem punctum N , maior est solido Ξ . iam etiam in circulum $AB\Gamma\Delta$ polygono $EOZ\Pi HP\Theta\Sigma$ simile et similiter positum polygonum $ATB\Upsilon\Gamma\Phi\Delta X$ inscribatur [VI, 18], et in polygono $ATB\Upsilon\Gamma\Phi\Delta X$ pyramis construatur eundem uerticem habens, quem conus, et ex triangulis comprehendentibus pyramidem, cuius basis est polygonum $ATB\Upsilon\Gamma\Phi\Delta X$, uertex autem A punctum, unus sit $AB\Upsilon$, ex iis autem, qui pyramidem comprehendunt, cuius basis est polygonum

$\xi\omega\nu$] in ras. B. 10. μέρος] om. V. 17. ελήφθω q.
 18. $\Theta\Sigma$] om. q. 20. μείζον q. 23. ἐπί — 24. πολυγώνου]
 ἀπ' αὐτοῦ Theon (BV q). 27. ATB P. 28. τήν] om. V.

ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφή δὲ τὸ Ν σημείον,
 ἐν τρίγωνον ἔστω τὸ ΝΖΟ, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΚΤ,
 ΜΟ. καὶ ἐπεὶ ὁμοίός ἐστιν ὁ ΑΒΓΔΛ κώνος τῷ
 ΕΖΗΘΝ κώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ,
 5 οὕτως ἡ ΚΛ ἄξων πρὸς τὸν ΜΝ ἄξονα. ὡς δὲ ἡ
 ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ· καὶ
 ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν
 ΜΝ. καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως
 ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ
 10 ΒΚΛ, ΖΜΝ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὁμοιον ἄρα
 ἔστι τὸ ΒΚΛ τρίγωνον τῷ ΖΜΝ τριγώνῳ. πάλιν,
 ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΤ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς
 τὴν ΜΟ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΤ, ΖΜΟ,
 ἐπειδήπερ, ὃ μέρος ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΚΤ γωνία τῶν πρὸς
 15 τῷ Κ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ
 καὶ ἡ ὑπὸ ΖΜΟ γωνία τῶν πρὸς τῷ Μ κέντρῳ τεσ-
 σάρων ὀρθῶν· ἐπεὶ οὖν περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ
 ἀνάλογόν εἰσιν, ὁμοιον ἄρα ἔστι τὸ ΒΚΤ τρίγωνον
 τῷ ΖΜΟ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ ΒΚ
 20 πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ, ἴση δὲ
 ἡ μὲν ΒΚ τῇ ΚΤ, ἡ δὲ ΖΜ τῇ ΟΜ, ἔστιν ἄρα ὡς
 ἡ ΤΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΟΜ πρὸς τὴν ΜΝ.
 καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΤΚΛ, ΟΜΝ· ὀρθαὶ
 γάρ· αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὁμοιον ἄρα ἔστι τὸ
 25 ΑΚΤ τρίγωνον τῷ ΝΜΟ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ διὰ
 τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΚΒ, ΝΜΖ τριγώνων ἐστὶν ὡς
 ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΚ, οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΜ,
 διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΚΤ, ΖΜΟ τριγώνων

1. ΕΟΖΠΗΡΟΣ q. 2. ΝΟΖ Ρ. 3. ΑΒΓΔ Β, et
 V, corr. m. 2. 4. ΕΖΗΘ Β, et V, corr. m. 2 (ΖΗ in ras.).

$EOZΠHPΘΣ$, uertex autem N punctum, unus sit NZO , et ducantur KT , MO . et quoniam conus $ABΓΔΑ$ cono $EZHΘN$ similis est, erit $BΔ : ZΘ = KA : MN$ [XI def. 24]. uerum $BΔ : ZΘ = BK : ZM$; quare etiam $BK : ZM = KA : MN$. et permutando [V, 16] $BK : KA = ZM : MN$. et circum angulos aequales BKA , ZMN latera proportionalia sunt. itaque $BKA \sim ZMN$ [VI, 6]. rursus quoniam $BK : KT = ZM : MO$, et angulos aequales BKT , ZMO comprehendunt (quoniam quae pars est $\angle BKT$ quattuor rectorum ad centrum K positorum, eadem¹⁾ pars est $\angle ZMO$ quattuor rectorum ad centrum M positorum), erit $BKT \sim ZMO$. rursus quoniam demonstrauius $BK : KA = ZM : MN$, et $BK = KT$, $ZM = OM$, erit $TK : KA = OM : MN$. et latera aequales angulos TKA , OMN (recti enim sunt) comprehendentia proportionalia sunt. itaque $AKT \sim NMO$ [VI, 6]. et quoniam propter similitudinem triangulorum AKB , NMZ est $AB : BK = NZ : ZM$, et propter similitudinem BKT , ZMO triangulorum $KB : BT = MZ$

1) Nam polygona similia sunt et latera eorum numero aequalia. Deletis uerbis $\acute{\epsilon}\pi\epsilon\iota\delta\acute{\eta}\pi\epsilon\rho$ lin. 14 — $\gamma\omega\nu\lambda\alpha\varsigma$ lin. 17 molestam anacoluthiam euitabimus et solitam orationis formam efficiemus; nec sane iis opus est.

7. τὴν ZM] ZM V. 9. MN] corr. ex NM m. 1 P.
 11. ἐστὶ] om. V. ZMN] Z corr. ex B m. rec. P.
 12. τὴν KT] KT V. 13. MO] O in ras. m. 2 B. 15. τεσσάρων] corr. ex δ mg. m. 1 P. 16. ZMO] O in ras. m. 2 B.
 17. ἐπεὶ — $\gamma\omega\nu\lambda\alpha\varsigma$] om. q; mg. m. 2 B. 18. ἐστὶ] om. V.
 20. τὴν KA] KA B. 21. BK] K e corr. V. KT] TK P. MO B. 22. ἡ] (prius) om. P. 24. εἰσιν] om. V.
 ἐστὶ] om. V. 27. τὴν] om. BV. τήν] om. BVq.

ἐστὶν ὡς ἡ KB πρὸς τὴν BT , οὕτως ἡ MZ πρὸς
 τὴν ZO , δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BT , οὕτως
 ἡ NZ πρὸς τὴν ZO . πάλιν, ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα
 τῶν ATK , NOM τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ AT πρὸς
 5 τὴν TK , οὕτως ἡ NO πρὸς τὴν OM , διὰ δὲ τὴν
 ὁμοιότητα τῶν TKB , OMZ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ
 KT πρὸς τὴν TB , οὕτως ἡ MO πρὸς τὴν OZ , δι'
 ἴσου ἄρα ὡς ἡ AT πρὸς τὴν TB , οὕτως ἡ NO πρὸς
 τὴν OZ . ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ TB πρὸς τὴν BA ,
 10 οὕτως ἡ OZ πρὸς τὴν ZN . δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ TA
 πρὸς τὴν AB , οὕτως ἡ ON πρὸς τὴν NZ . τῶν
 ATB , NOZ ἄρα τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ
 ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ ATB , NOZ τρίγωνα· ὥστε καὶ
 ὅμοια. καὶ πυραμῖς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ BKT τρί-
 15 γωνον, κορυφὴ δὲ τὸ A σημεῖον, ὅμοια ἐστὶ πυραμίδι,
 ἧς βάσις μὲν τὸ ZMO τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ N
 σημεῖον· ὑπὸ γὰρ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται ἴσων
 τὸ πλῆθος. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους
 ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμο-
 20 λόγων πλευρῶν. ἡ ἄρα $BKTA$ πυραμῖς πρὸς τὴν
 $ZMON$ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ
 BK πρὸς τὴν ZM . ὁμοίως δὲ ἐπιξευγνύντες ἀπὸ τῶν
 A , X , Δ , Φ , Γ , Υ ἐπὶ τὸ K εὐθείας καὶ ἀπὸ τῶν
 E , Σ , Θ , P , H , Π ἐπὶ τὸ M καὶ ἀνιστάντες ἐφ'
 25 ἐκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας τὴν αὐτὴν κορυφὴν
 ἔχούσας τοῖς κώνοις δείξομεν, ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν
 ὁμοταγῶν πυραμίδων πρὸς ἐκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα
 τριπλασίονα λόγον ἔξει ἢπερ ἡ BK ὁμόλογος πλευρὰ

1. τὴν] om. V. 2. τὴν ZO] ZO BVq. 3. MZ B, et
 V, sed corr. ἐπεὶ] om. P. 4. ATK] T supra m. 1 V.

: ZO [VI def. 1], ex aequo erit $AB : BT = NZ : ZO$ [V, 22]. rursus quoniam propter similitudinem triangulorum ATK , NOM est $AT : TK = NO : OM$, et propter similitudinem TKB , OMZ triangulorum $KT : TB = MO : OZ$, ex aequo erit $AT : TB = NO : OZ$. demonstrauius autem, esse etiam $TB : BA = OZ : ZN$. ex aequo igitur erit $TA : AB = ON : NZ$. itaque triangulorum ATB , NOZ latera proportionalia sunt. quare aequianguli sunt trianguli ATB , NOZ [VI, 5]. itaque iidem similes sunt [VI def. 1]. itaque etiam pyramis, cuius basis est triangulus BKT , uertex autem A punctum, similis est pyramidi, cuius basis est triangulus ZMO , uertex autem N punctum; nam planis similibus comprehenduntur numero aequalibus [XI def. 9]. similes autem pyramides, quae triangulas habent bases, in triplicata sunt ratione laterum correspondentium [prop. VIII]. itaque erit

$$BKTA : ZMON = BK^3 : ZM^3.$$

iam ductis rectis ab A , X , Δ , Φ , Γ , Υ ad K et ab E , Σ , Θ , P , H , Π ad M et in singulis triangulis erectis pyramidibus eosdem uertices habentibus, quos coni, similiter demonstrabimus, etiam singulas pyramides eiusdem ordinis ad singulas pyramides eiusdem ordinis eam rationem habere quam $BK^3 : ZM^3$, h. e.

6. OMZ] Z corr. ex N m. rec. P. 7. KT] K in ras. m. 2 B. 8. AT] in ras. V; A corr. ex A m. 2 B. 9. $\tau\eta\nu BA$] BA V. 10. $\tau\eta\nu$] om. Vq. 12. ATB] litt. A non liquet in P. 14. $\alpha\theta\alpha$] alt. α e corr. V. $\mu\acute{\epsilon}\nu \acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ Bq. 19. $\beta\acute{\alpha}\sigma\epsilon\iota\varsigma \acute{\epsilon}\chi\omicron\upsilon\sigma\alpha\iota$ q. $\acute{\epsilon}\iota\sigma\iota\nu$ PB. 23. Δ] postea ins. m. 1 P. 24. $\acute{\epsilon}\varphi' \acute{\epsilon}\kappa\acute{\alpha}\sigma\tau\omicron\upsilon$] $\acute{\epsilon}\pi\iota$ Theon (BVq). 25. $\tau\acute{\alpha}\varsigma \alpha\nu\tau\acute{\alpha}\varsigma \kappa\omicron\rho\upsilon\varphi\acute{\alpha}\varsigma$ Theon (BVq). 28. $\acute{\omicron}\mu\acute{\omicron}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu \pi\lambda\epsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\nu$ P, corr. m. 1.

πρὸς τὴν ZM ομόλογον πλευράν, τουτέστιν ἥπερ ἡ
 $B\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$. καὶ ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς
 ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς
 ἅπαντα τὰ ἐπόμενα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ $BK\Gamma\Delta$ πυ-
 5 ραμὶς πρὸς τὴν $ZMON$ πυραμίδα, οὕτως ἡ ὅλη πυ-
 ραμὶς, ἧς βᾶσις τὸ $ATB\Gamma\Phi\Delta X$ πολύγωνον, κορυφή
 δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα, ἧς βᾶσις
 μὲν τὸ $EOZ\Pi\eta\rho\Theta\Sigma$ πολύγωνον, κορυφή δὲ τὸ N
 σημεῖον· ὥστε καὶ πυραμὶς, ἧς βᾶσις μὲν τὸ $ATB\Gamma\Phi\Delta X$,
 10 κορυφή δὲ τὸ Λ , πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βᾶσις [μὲν]
 τὸ $EOZ\Pi\eta\rho\Theta\Sigma$ πολύγωνον, κορυφή δὲ τὸ N ση-
 μεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν
 $Z\Theta$. ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ κῶνος, οὗ βᾶσις [μὲν] ὁ
 $AB\Gamma\Delta$ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸ Ξ
 15 στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχων ἥπερ ἡ $B\Delta$ πρὸς
 τὴν $Z\Theta$. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κῶνος, οὗ βᾶσις μὲν ἔστιν
 ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ Λ , πρὸς τὸ Ξ στε-
 ρεόν, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βᾶσις μὲν τὸ $ATB\Gamma\Phi\Delta X$
 [πολύγωνον], κορυφή δὲ τὸ Λ , πρὸς τὴν πυραμίδα,
 20 ἧς βᾶσις μὲν ἔστι τὸ $EOZ\Pi\eta\rho\Theta\Sigma$ πολύγωνον, κο-
 ρυφή δὲ τὸ N . ἐναλλάξ ἄρα, ὡς ὁ κῶνος, οὗ βᾶσις
 μὲν ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ Λ , πρὸς τὴν ἐν
 αὐτῷ πυραμίδα, ἧς βᾶσις μὲν τὸ $ATB\Gamma\Phi\Delta X$ πο-
 λύγωνον, κορυφή δὲ τὸ Λ , οὕτως τὸ Ξ [στερεόν] πρὸς
 25 τὴν πυραμίδα, ἧς βᾶσις μὲν ἔστι τὸ $EOZ\Pi\eta\rho\Theta\Sigma$
 πολύγωνον, κορυφή δὲ τὸ N . μείζων δὲ ὁ εἰρημένος
 κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος· ἐμπεριέχει γὰρ αὐτήν.
 μείζων ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεόν τῆς πυραμίδος, ἧς βᾶσις

2. τὴν] om. Bq. καὶ] ἀλλ' BVq. 4. ἄρα] δέ V.
 8. μὲν ἔστι Bq. 10. Λ σημεῖον V. τὴν] om. V. μὲν]

$B\Delta^3 : Z\Theta^3$. et ut unum praecedentium ad unum sequentium, ita omnia praecedentia ad omnia sequentia [V, 12]. est igitur ut $BKTA : ZMON$, ita tota pyramis, cuius basis est polygonum $ATBT\Gamma\Phi\Delta X$, uertex autem A punctum, ad totam pyramidem, cuius basis est polygonum $EOZ\PiHP\Theta\Sigma$, uertex autem N punctum. quare etiam pyramis, cuius basis est $ATBT\Gamma\Phi\Delta X$, uertex autem A , ad pyramidem, cuius basis est polygonum $EOZ\PiHP\Theta\Sigma$, uertex autem N punctum, eam rationem habet quam $B\Delta^3 : Z\Theta^3$. supposuimus autem, etiam conum, cuius basis sit circulus $AB\Gamma\Delta$, uertex autem A punctum, ad Ξ solidum eam rationem habere quam $B\Delta^3 : Z\Theta^3$. itaque ut conus, cuius basis est $AB\Gamma\Delta$ circulus, uertex autem A , ad Ξ solidum, ita pyramis, cuius basis est $ATBT\Gamma\Phi\Delta X$, uertex autem A , ad pyramidem, cuius basis est $EOZ\PiHP\Theta\Sigma$ polygonum, uertex autem N . permutando igitur [V, 16], ut conus, cuius basis est $AB\Gamma\Delta$ circulus, uertex autem A , ad pyramidem suam, cuius basis est polygonum $ATBT\Gamma\Phi\Delta X$, uertex autem A , ita Ξ ad pyramidem, cuius basis est polygonum $EOZ\PiHP\Theta\Sigma$, uertex autem N . uerum conus, quem diximus, maior est pyramide sua; nam eam continet. itaque etiam Ξ solidum maius est pyramide, cuius

om. P. 11. Litt. ΠH e corr. V. σημειον — 21. τὸ N] mg. m. 2 B. 13. μέν] om. P. 14. σημειον] om. B q. 15. έχων] ω in ras. P, έχον q. 16. ἐστιν] om. V. 17. A σημειον V. 19. πολύγωνον] om. P. 22. μέν ἐστιν B q. A σημειον V. 23. πυραμίδος V. 24. στερεόν] m. rec. P. 28. Ξ] Z q?

μέν ἐστὶ τὸ $ΕΟΖΠΗΡΘΣ$ πολύγωνον, κορυφή δὲ τὸ N . ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κῶνος, οὗ βάσις ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ $Δ$ [σημεῖον], πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ κῶνου στερεόν, οὗ
 5 βάσις μὲν ὁ $ΕΖΗΘ$ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ N σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΖΘ$. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ $ΕΖΗΘΝ$ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ $ΑΒΓΔΔ$ κῶνου στερεόν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $ΖΘ$ πρὸς τὴν $ΒΔ$.

10 Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ὁ $ΑΒΓΔΔ$ κῶνος πρὸς μείζον τι τοῦ $ΕΖΗΘΝ$ κῶνου στερεόν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΖΘ$.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μείζον το $Ξ$. ἀνά-
 παλιν ἄρα τὸ $Ξ$ στερεόν πρὸς τὸν $ΑΒΓΔΔ$ κῶνον
 15 τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $ΖΘ$ πρὸς τὴν $ΒΔ$. ὡς δὲ τὸ $Ξ$ στερεόν πρὸς τὸν $ΑΒΓΔΔ$ κῶνον, οὕτως ὁ $ΕΖΗΘΝ$ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ $ΑΒΓΔΔ$ κῶ-
 νου στερεόν. καὶ ὁ $ΕΖΗΘΝ$ ἄρα κῶνος πρὸς ἔλατ-
 τόν τι τοῦ $ΑΒΓΔΔ$ κῶνου στερεόν τριπλασίονα λό-
 20 γον ἔχει ἥπερ ἡ $ΖΘ$ πρὸς τὴν $ΒΔ$. ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ὁ $ΑΒΓΔΔ$ κῶνος πρὸς μείζον τι τοῦ $ΕΖΗΘΝ$ κῶνου στερεόν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΖΘ$. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον. ὁ $ΑΒΓΔΔ$ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘΝ$
 25 κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΖΘ$.

Ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον· τριπλάσιος γὰρ ὁ κύλινδρος τοῦ κῶ-
 νου ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κῶνῳ καὶ ἰσοῦψῆς

1. ἐστὶν P. Z] ins. m. 1 P. 2. ἐλάττων B. ὅπερ ἄτοπον V. 3. βάσις μὲν ἐστὶν ὁ Theon (BVq). 4. σημεῖον]

basis est polygonum $EOZΠHPΘΣ$, uertex autem N . uerum idem minus est; quod fieri non potest. itaque conus, cuius basis est circulus $ABΓΔ$, uertex autem A , ad solidum minus cono, cuius basis est circulus $EZHΘ$, uertex autem N punctum, eam rationem non habet quam $BΔ^3 : ZΘ^3$. iam similiter demonstrabimus, ne $EZHΘN$ quidem conum ad solidum minus cono $ABΓΔΔ$ eam rationem habere quam $ZΘ^3 : BΔ^3$.

iam dico, conum $ABΓΔΔ$ ne ad maius quidem cono $EZHΘN$ solidum eam rationem habere quam $BΔ^3 : ZΘ^3$.

nam si fieri potest, habeat ad maius $Ξ$. e contrario igitur [V, 7 coroll.] $Ξ : ABΓΔΔ = ZΘ^3 : BΔ^3$. uerum ut $Ξ$ solidum ad conum $ABΓΔΔ$, ita conus $EZHΘN$ ad solidum minus cono $ABΓΔΔ$ [prop. II lemma]. itaque etiam conus $EZHΘN$ ad solidum minus cono $ABΓΔΔ$ eam rationem habet quam $ZΘ^3 : BΔ^3$; quod fieri non posse demonstrauius. itaque conus $ABΓΔΔ$ ad solidum maius cono $EZHΘN$ eam rationem non habet quam $BΔ^3 : ZΘ^3$. demonstrauius autem, eum ne ad minus quidem hanc rationem habere. ergo $ABΓΔΔ : EZHΘN = BΔ^3 : ZΘ^3$.

sed ut conus ad conum, ita cylindrus ad cylindrum; nam cylindrus, qui in eadem basi et sub eadem altitudine est ac conus, triplo maior est cono [prop. X].

om. P. $ἐλασσόν$ BV. 5. $EZHΘ$] $HΘ$ in ras. m. 2 B.
 7. $ὅτι οὐδέ$] bis P, corr. m. 1. 8. $ἐλασσόν$ BVq. 9. $ἦ$] ins. V.
 10. $δή$] om. B. $οὐδ'$ V. 16. $ABΓΔ$ q, et B, corr. m. 2.
 $οὕτως καὶ$ q. $οὕτως$ — 17. $κῶνος$] mg. m. 2 B. 17. $ἐλασσόν$
 BVq. $ABΓΔ$ B. 18. $καὶ ὁ$ — 19. $στερεόν$] mg. m. 2 V.
 18. $ἐλασσόν$ BVq. 19. $ABΓΔ$ q. $τριπλάσιον$ V. 22. $στε-$
 $ρεόν$] supra V. 24. $ἐλασσόν$ BV. $ὁ ἄρα ABΓΔΔ$ V.
 27. $τριπλάσιος$ — 216, 1. $αὐτῶ$] om. q, mg. m. 2 B.

αὐτῷ. καὶ ὁ κύλινδρος ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$.

Οἱ ἄρα ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ'.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῆ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

Κύλινδρος γὰρ ὁ $A\Delta$ ἐπιπέδῳ τῷ $H\Theta$ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς AB , $\Gamma\Delta$, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἄξονι τὸ $H\Theta$ ἐπίπεδον κατὰ τὸ K σημεῖον· λέγω, ὅτι ἔστιν ὡς ὁ BH κύλινδρος πρὸς τὸν $H\Delta$ κύλινδρον, οὕτως ὁ EK ἄξων πρὸς τὸν KZ ἄξονα.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ EZ ἄξων ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ A , M σημεία, καὶ ἐκκείσθωσαν τῷ EK ἄξονι ἴσοι ὅσοιδηποτοῦν οἱ EN , NA , τῷ δὲ ZK ἴσοι ὅσοιδηποτοῦν οἱ $Z\Xi$, ΞM , καὶ νοείσθω ὁ ἐπὶ τοῦ AM ἄξονος κύλινδρος ὁ $O\chi$, οὗ βάσεις οἱ $O\Pi$, $\Phi\chi$ κύκλοι. καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῶν N , Ξ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς AB , $\Gamma\Delta$ καὶ ταῖς βάσεσι τοῦ $O\chi$ κυλίνδρου καὶ ποιείτωσαν τοὺς $P\Sigma$, $T\Upsilon$ κύκλους περὶ τὰ N , Ξ κέντρα. καὶ ἐπεὶ οἱ AN , NE , EK

1. Post αὐτῷ add. Theon: ἐδείχθη γὰρ (supra V) πᾶς (haec tria vocab. et in textu et mg. m. 2 B) κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον (BVq).

ὁ] om. P. 4. εἰσὶν PB. βάσεσιν P. 5. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. V. 6. ιγ'] om. q. 13. συμβαλλέτω P. τῷ] τῷ EZ

itaque etiam cylindrus ad cylindrum eam rationem habet quam $B\Delta^3 : Z\Theta^3$.

Ergo similes conii et cylindri triplicatam inter se rationem habent quam diametri basium; quod erat demonstrandum.

XIII.

Si cylindrus plano planis oppositis parallelo secatur, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

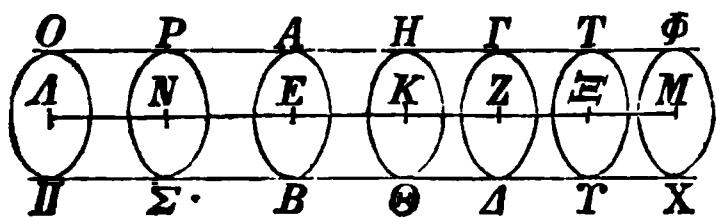
Nam cylindrus $A\Delta$ plano $H\Theta$ planis oppositis $AB, \Gamma\Delta$ parallelo secetur, et planum $H\Theta$ cum axe in puncto K concurrat. dico, esse

$$BH : H\Delta = EK : KZ.$$

producatur enim axis EZ ad utramque partem ad puncta Λ, M , et ponantur axi EK aequales quotlibet

rectae $EN, N\Lambda$, axi autem ZK aequales quotlibet rectae $Z\Xi, \Xi M$, et OX fingatur cylindrus in axe ΛM ,

cuius bases sunt circuli $O\Pi, \Phi X$. et per puncta N, Ξ plana planis $AB, \Gamma\Delta$ et basibus cylindri OX parallela ducantur et circulos $P\Sigma, T\Upsilon$ circum centra N, Ξ efficiant. et quoniam axes $\Lambda N, NE, EK$ inter



Theon (BVq). τὸ $H\Theta$ ἐπιπέδον] om. Theon (BVq).

18. κείσθωσαν q. 20. καὶ — 21. κύκλοι] om. Theon (BVq).

22. ἐκβεβλήσθω] διήχθω Theon (BVq). N, Ξ] $\Lambda, N,$

Ξ, M Theon (BVq). 23. ταῖς βάσεσι — 25. κέντρα] νενοή-

σθωσαν ἐν τοῖς διὰ τῶν Λ, N, Ξ, M ἐπιπέδοις περὶ κέντρα

τὰ Λ, N, Ξ, M , κύκλοι οἱ $O\Pi, P\Sigma, T\Upsilon, \Phi X$ ἴσοι τοῖς $AB, \Gamma\Delta$.

καὶ νενοήσθωσαν κύλινδροι οἱ $\Pi P, P B, \Delta T, T X$ Theon (BVq).

23. βάσεων P. 25. οἱ ΛN] mg. m. 1 V.

ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, οἱ ἄρα ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύ-
 λινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δὲ
 εἰσὶν αἱ βάσεις· ἴσοι ἄρα καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύ-
 λινδροι ἀλλήλοις. ἐπεὶ οὖν οἱ ΑΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξονες
 5 ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύ-
 λινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ πλῆθος τῶ
 πλήθει, ὅσαπλασίων ἄρα ὁ ΚΑ ἄξων τοῦ ΕΚ ἄξονος,
 τοσανταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΒ
 κυλίνδρου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσαπλασίων ἐστὶν ὁ
 10 ΜΚ ἄξων τοῦ ΚΖ ἄξονος, τοσανταπλασίων ἐστὶ καὶ
 ὁ ΧΗ κύλινδρος τοῦ ΗΔ κυλίνδρου. καὶ εἰ μὲν ἴσος
 ἐστὶν ὁ ΚΑ ἄξων τῶ ΚΜ ἄξονι, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ
 ΠΗ κύλινδρος τῶ ΗΧ κυλίνδρῳ, εἰ δὲ μείζων ὁ
 ἄξων τοῦ ἄξονος, μείζων καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυ-
 15 λίνδρου, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. τεσσάρων δὴ με-
 γεθῶν ὄντων, ἀξόνων μὲν τῶν ΕΚ, ΚΖ, κυλίνδρων
 δὲ τῶν ΒΗ, ΗΔ, εἴληπται ἰσάκεις πολλαπλάσια, τοῦ
 μὲν ΕΚ ἄξονος καὶ τοῦ ΒΗ κυλίνδρου ὅ τε ΑΚ
 ἄξων καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος, τοῦ δὲ ΚΖ ἄξονος καὶ
 20 τοῦ ΗΔ κυλίνδρου ὅ τε ΚΜ ἄξων καὶ ὁ ΗΧ κύλιν-
 δρος, καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ὁ ΚΑ ἄξων τοῦ
 ΚΜ ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ
 κυλίνδρου, καὶ εἰ ἴσος, ἴσος, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων.
 ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα, οὕτως
 25 ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον· ὅπερ εἶδει
 δεῖξαι.

ιδ'.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύ-
 λινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη.

1. οἱ ἄρα] καὶ οἱ Ρ. 4. ἀλλήλοις] om. V. οὖν] οὖν
 καὶ Ρ. 5. εἰσὶν] om. V. εἰσί] εἰσὶν Β. 6. πλῆθος τῶν

se aequales sunt, cylindri ΠP , PB , BH eam inter se rationem habent quam bases [prop. XI]. uerum bases inter se aequales sunt; quare etiam $\Pi P = PB = BH$. iam quoniam axes ΛN , NE , EK inter se aequales sunt, et etiam cylindri ΠP , PB , BH inter se aequales, et multitudo multitudini aequalis est, quoties multiplex est axis $K\Lambda$ axis EK , toties erit etiam cylindrus ΠH cylindri HB multiplex. eadem de causa quoties axis MK multiplex est axis KZ , toties etiam cylindrus XH multiplex est cylindri $H\Delta$. et si $K\Lambda = KM$, erit etiam $\Pi H = HX$, sin axis axe maior est, etiam cylindrus cylindro maior est, sin minor est, minor. iam datis quattuor magnitudinibus, axibus EK , KZ et cylindris BH , $H\Delta$, aequae multiplicia sumpta sunt, axis EK et BH cylindri axis ΛK et cylindrus ΠH , axis autem KZ et $H\Delta$ cylindri axis KM et cylindrus HX , et demonstrauius, si $K\Lambda > KM$, esse etiam $\Pi H > HX$, sin $K\Lambda = KM$, esse $\Pi H = HX$, sin $K\Lambda < KM$, esse $\Pi H < HX$. itaque $EK : KZ = BH : H\Delta$ [V def. 5]; quod erat demonstrandum.

XIV.

Coni et cylindri, qui aequales bases habent, eam inter se rationem habent quam altitudines.

ΛN (Λ e corr. m. 2 B), NE , EK τῶ πλήθει τῶν ΠP , PB , BH Theon (BV q). 7. ἄρα ἐστίν B q. $K\Lambda$] ΛK P. EK] KE P. 8. HB] BH V q. 9. ἐστίν] ἐστὶ καὶ q. 10. ἐστὶ V. 12. ἐστὶ] ἐστὶ V. 14. $K\Lambda$ ἄξων τοῦ KM ἄξωνος Theon (BV q). ΠH κύλινδρος τοῦ HX κύλινδρου Theon (BV q). 15. Ante δὴ del. γάρ m. 1 P. ὄντων μεγεθῶν V. 17. πολλαπλάσιος V. 20. ὁ HX] ἢ X q. 21. ΛK P. 23. ἴσος ἐστίν, ἴσος P.

Ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν AB , $\Gamma\Delta$ κύκλων κύλινδροι οἱ EB , $Z\Delta$. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ EB κύλινδρος πρὸς τὸν $Z\Delta$ κύλινδρον, οὕτως ὁ $H\Theta$ ἄξων πρὸς τὸν $ΚΑ$ ἄξονα.

5 Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ $ΚΑ$ ἄξων ἐπὶ τὸ N σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ $H\Theta$ ἄξονι ἴσος ὁ AN , καὶ περὶ ἄξονα τὸν AN κύλινδρος νενοήσθω ὁ ΓM . ἐπεὶ οὖν οἱ EB , ΓM κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δὲ εἰσὶν αἱ βάσεις
 10 ἀλλήλαις· ἴσοι ἄρα εἰσὶ καὶ οἱ EB , ΓM κύλινδροι. καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ZM ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ $\Gamma\Delta$ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ ΓM κύλινδρος πρὸς τὸν $Z\Delta$ κύλινδρον, οὕτως ὁ AN ἄξων πρὸς τὸν $ΚΑ$ ἄξονα. ἴσος δὲ ἐστὶν ὁ
 15 μὲν ΓM κύλινδρος τῷ EB κυλίνδρῳ, ὁ δὲ AN ἄξων τῷ $H\Theta$ ἄξονι· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ EB κύλινδρος πρὸς τὸν $Z\Delta$ κύλινδρον, οὕτως ὁ $H\Theta$ ἄξων πρὸς τὸν $ΚΑ$ ἄξονα. ὡς δὲ ὁ EB κύλινδρος πρὸς τὸν $Z\Delta$ κύλινδρον, οὕτως ὁ ABH κῶνος πρὸς τὸν $\Gamma\Delta K$ κῶνον.
 20 καὶ ὡς ἄρα ὁ $H\Theta$ ἄξων πρὸς τὸν $ΚΑ$ ἄξονα, οὕτως ὁ ABH κῶνος πρὸς τὸν $\Gamma\Delta K$ κῶνον καὶ ὁ EB κύλινδρος πρὸς τὸν $Z\Delta$ κύλινδρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε'.

Τῶν ἴσων κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόν-
 25 θασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι.

1. κύκλων] om. Theon (BVq). 2. $Z\Delta$, EB BVq (Z in V supra scr. m. 1). 5. $ΚΑ$] K ins. m. 1 V. τό] corr. ex

Nam cylindri EB , $Z\Delta$ aequales bases habeant circulos AB , $\Gamma\Delta$. dico, esse $EB : Z\Delta = H\Theta : K\Lambda$.

axis enim $K\Lambda$ ad N punctum producat, et ponatur $AN = H\Theta$, et circum axem AN fingatur cylindrus ΓM . iam quoniam cylindri EB , ΓM eandem altitudinem habent, eam inter se rationem habent



quam bases [prop. XI]. uerum bases inter se aequales sunt. itaque etiam $EB = \Gamma M$. et quoniam cylindrus ZM plano $\Gamma\Delta$ planis oppositis parallelo sectus est, erit [prop. XIII] $\Gamma M : Z\Delta = AN : K\Lambda$. sed $\Gamma M = EB$, $AN = H\Theta$. itaque $EB : Z\Delta = H\Theta : K\Lambda$. uerum $EB : Z\Delta = ABH : \Gamma\Delta K$ [prop. X]. ergo erit

$$H\Theta : K\Lambda = ABH : \Gamma\Delta K = EB : Z\Delta;$$

quod erat demonstrandum.

XV.

Aequalium conorum et cylindrorum bases in contraria ratione sunt atque altitudines; et quorum conorum et cylindrorum bases in contraria ratione sunt atque altitudines, ii aequales sunt.

τόν P. 7. ἐννοήσθω P. 8. εἰσὶ codd. 10. εἰσὶν PB.
 EB] eras. V. κύλινδροι ἀλλήλοις Bq. 11. ἐπιπέδον
 τινὶ V. 19. Post κώνων add. Theon: τριπλάσιοι γὰρ οἱ κύ-
 λινδροὶ τῶν κώνων (BVq). 25. ὕψει q. καὶ — 26. ὕψε-
 οιν] mg. m. 1 V.

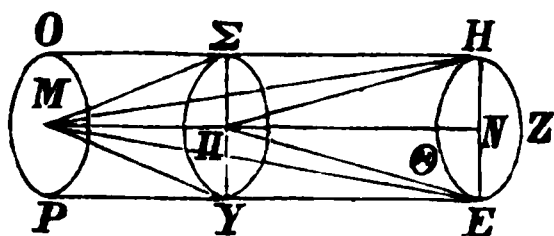
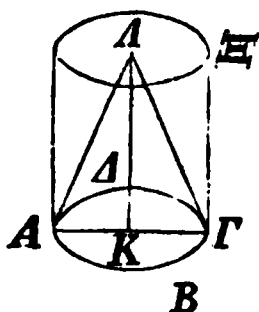
Ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ $ΑΒΓΔ$, $ΕΖΗΘ$ κύκλοι, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ $ΑΓ$, $ΕΗ$, ἄξονες δὲ οἱ $ΚΑ$, $ΜΝ$, οἵτινες καὶ ὕψη εἰσὶ τῶν κῶνων ἢ κυλίνδρων, καὶ συμπληρώσθωσαν
 5 οἱ $ΑΞ$, $ΕΟ$ κύλινδροι. λέγω, ὅτι τῶν $ΑΞ$, $ΕΟ$ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΒΓΔ$ βάση πρὸς τὴν $ΕΖΗΘ$ βάση, οὕτως τὸ $ΜΝ$ ὕψος πρὸς τὸ $ΚΑ$ ὕψος.

Τὸ γὰρ $ΑΚ$ ὕψος τῷ $ΜΝ$ ὕψει ἴσος ἐστὶν
 10 ἢ οὐ. ἔστω πρότερον ἴσον. ἐστὶ δὲ καὶ ὁ $ΑΞ$ κύλινδρος τῷ $ΕΟ$ κυλίνδρῳ ἴσος. οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἴση ἄρα καὶ ἡ $ΑΒΓΔ$ βάση τῇ $ΕΖΗΘ$ βάση. ὥστε καὶ ἀντιπέπονθεν, ὡς ἡ $ΑΒΓΔ$ βάση
 15 πρὸς τὴν $ΕΖΗΘ$ βάση, οὕτως τὸ $ΜΝ$ ὕψος πρὸς τὸ $ΚΑ$ ὕψος. ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ $ΑΚ$ ὕψος τῷ $ΜΝ$ ἴσον, ἀλλ' ἔστω μείζον τὸ $ΜΝ$, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τοῦ $ΜΝ$ ὕψους τῷ $ΚΑ$ ἴσον τὸ $ΠΝ$, καὶ διὰ τοῦ $Π$ σημείου τετμήσθω ὁ $ΕΟ$ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τῷ $ΤΥΣ$
 20 παραλλήλῳ τοῖς τῶν $ΕΖΗΘ$, $ΡΟ$ κύκλων ἐπιπέδοις, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ $ΕΖΗΘ$ κύκλου, ὕψους δὲ τοῦ $ΝΠ$ κύλινδρος νενοήσθω ὁ $ΕΣ$. καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ $ΑΞ$ κύλινδρος τῷ $ΕΟ$ κυλίνδρῳ, ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ $ΑΞ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΕΣ$ κύλινδρον, οὕτως
 25 ὁ $ΕΟ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΕΣ$ κύλινδρον. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ $ΑΞ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΕΣ$ κύλινδρον, οὕτως

1. βάση q. 3. δέ] om. q. ὕψη] corr. ex ὕψει V.
 4. καὶ — 5. κύλινδροι] punctis del. V. 6. ὕψει Vq.
 καὶ] τουτέστιν ὅτι Theon (BVq). 7. βάση] corr. ex
 βάσεις m. 1 P. 8. $ΑΚ$ Bq. 9. $ΚΑ$ P. 10. ἐστὶν P.
 11. ὑπό] corr. ex ἀπό m. rec. P. 16. $ΚΑ$] $ΑΚ$ B; supra
 eras. " V. μὴ] supra scr. m. 1 V. $ΑΚ$] $ΚΑ$ P.

Sint aequales conus et cylindri, quorum bases sint circuli $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$, diametri autem eorum $A\Gamma$, $E\Theta$, axes autem $K\Lambda$, MN , qui iidem altitudines sunt conorum uel cylindrorum, et expleantur cylindri $A\Xi$, EO . dico, cylindrorum $A\Xi$, EO bases in contraria ratione esse atque altitudines, et esse $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = MN : K\Lambda$.

nam altitudo ΛK aut aequalis est altitudini MN aut non aequalis. prius sit aequalis. uerum etiam $A\Xi = EO$. conus autem et cylindri, qui eandem habent altitudinem, eam inter se rationem habent quam bases [prop. XI]. itaque etiam $AB\Gamma\Delta = EZH\Theta$. quare etiam in contraria ratione est $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = MN : K\Lambda$. iam uero ne sit $\Lambda K = MN$, sed sit $MN > \Lambda K$, et ab altitudine MN altitudini $K\Lambda$ aequalis abscindatur ΠN , et per Π punctum cylindrus EO



plano $T\Upsilon\Sigma$ planis circulorum $EZH\Theta$, PO parallelo secetur, et cylindrus fingatur $E\Sigma$ basim habens circulum $EZH\Theta$, altitudinem autem $N\Pi$. et quoniam $A\Xi = EO$, erit $A\Xi : E\Sigma = EO : E\Sigma$ [V, 7]. uerum

17. καί — 18. ΠN] P, B mg. m. 2, V ($\tau\omega$ corr. ex τό, τό ex $\tau\omega$ m. 2; ΠM pro ΠN , sed M e corr. m. 2); καί κείσθω τῷ ΛK ὕψει ἴσον τὸ ΠM B in textu, q ($\tau\omega$ ΠH pro τὸ ΠM), V in textu post καί ἀφηγήσθω — τὸ ΠM , sed punctis del.

19. EO] O in ras. m. 2 B. $T\Upsilon\Sigma$] T eras. P. 20. παραλλήλων ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τῶν $EZH\Theta$, PO κύκλων. καί Theon (BVq). 22. ΠN P, $M\Pi$ corr. ex $N\Pi$ m. 2 V.

23. Post κυλίνδρον add. ἄλλος δέ τις ὁ $E\Sigma$ κύλινδρος Vq, B mg. m. 2.

ἡ $ΑΒΓΔ$ βάσις πρὸς τὴν $ΕΖΗΘ$. ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν οἱ $ΑΞ$, $ΕΣ$ κύλινδροι· ὡς δὲ ὁ $ΕΟ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΕΣ$, οὕτως τὸ $ΜΝ$ ὕψος πρὸς τὸ $ΠΝ$ ὕψος· ὁ γὰρ $ΕΟ$ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τέτμηται
 5 παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ $ΑΒΓΔ$ βάσις πρὸς τὴν $ΕΖΗΘ$ βάσιν, οὕτως τὸ $ΜΝ$ ὕψος πρὸς τὸ $ΠΝ$ ὕψος. ἴσον δὲ τὸ $ΠΝ$ ὕψος τῷ $ΚΑ$ ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $ΑΒΓΔ$ βάσις πρὸς τὴν $ΕΖΗΘ$ βάσιν, οὕτως τὸ $ΜΝ$ ὕψος
 10 πρὸς τὸ $ΚΑ$ ὕψος. τῶν ἄρα $ΑΞ$, $ΕΟ$ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Ἄλλὰ δὴ τῶν $ΑΞ$, $ΕΟ$ κυλίνδρων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ $ΑΒΓΔ$ βάσις πρὸς τὴν $ΕΖΗΘ$ βάσιν, οὕτως τὸ $ΜΝ$ ὕψος
 15 πρὸς τὸ $ΚΑ$ ὕψος· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ $ΑΞ$ κύλινδρος τῷ $ΕΟ$ κυλίνδρῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΒΓΔ$ βάσις πρὸς τὴν $ΕΖΗΘ$ βάσιν, οὕτως τὸ $ΜΝ$ ὕψος πρὸς τὸ $ΚΑ$ ὕψος, ἴσον δὲ τὸ $ΚΑ$ ὕψος
 20 τῷ $ΠΝ$ ὕψει, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $ΑΒΓΔ$ βάσις πρὸς τὴν $ΕΖΗΘ$ βάσιν, οὕτως τὸ $ΜΝ$ ὕψος πρὸς τὸ $ΠΝ$ ὕψος. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ $ΑΒΓΔ$ βάσις πρὸς τὴν $ΕΖΗΘ$ βάσιν, οὕτως ὁ $ΑΞ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΕΣ$ κύλινδρον· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν· ὡς δὲ τὸ $ΜΝ$
 25 ὕψος πρὸς τὸ $ΠΝ$ [ὕψος], οὕτως ὁ $ΕΟ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΕΣ$ κύλινδρον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ $ΑΞ$ κύλιν-

1. $ΕΖΗΘ$ βάσιν ΒV. 3. $ΕΣ$ κύλινδρον V. 4. ΠM B, ΜΠ V. Post ἐπιπέδῳ add. τῷ ΤΣ P m. 3 e corr.; eadem uerba post τέτμηται hab. V et m. 2 B. 6. καί] om. ΒVq. βάσις] βάσιν, sed corr. m. 1, P. 7. ΠM BV. τό] supra add. ω V. 8. ΠM BV. 9. βάσιν] om. ΒVq. 12. ἀλλά

$A\Xi : E\Sigma = AB\Gamma\Delta : EZH\Theta$ (nam eandem altitudinem habent cylindri $A\Xi$, $E\Sigma$) [prop. XI], et $EO : E\Sigma = MN : \Pi N$; nam cylindrus EO plano planis oppositis parallelo sectus est [prop. XIII]. itaque $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = MN : \Pi N$. uerum $\Pi N = K\Lambda$. erit igitur $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = MN : K\Lambda$. ergo cylindrorum $A\Xi$, EO bases in contraria ratione sunt atque altitudines.

Iam uero cylindrorum $A\Xi$, EO bases in contraria ratione sint atque altitudines, et sit $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = MN : K\Lambda$. dico, esse $A\Xi = EO$.

nam iisdem comparatis quoniam est $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = MN : K\Lambda$, et $K\Lambda = \Pi N$, erit $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = MN : \Pi N$. uerum $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = A\Xi : E\Sigma$ (nam eandem habent altitudinem) [prop. XI], et $MN : \Pi N = EO : E\Sigma$ [prop. XIII]. est igitur $A\Xi$

— 13. ὕψειον] mg. m. 2 B. 13. ὕψει BVq. 20. ΠΜ BV.
 21. ΠΜ corr. ex ΠΝ V. 25. ΠΜ corr. ex ΠΝ V.
 ὕψος] om. P. EO] E in ras. m. 1 P. 26. ὡς] supra m.
 rec. P.

δρος πρὸς τὸν $ΕΣ$ κύλινδρον, οὕτως ὁ $ΕΟ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΕΣ$. ἴσος ἄρα ὁ $ΑΞ$ κύλινδρος τῷ $ΕΟ$ κυλίνδρῳ. ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν κώνων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5

ις'.

Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων εἰς τὸν μείζονα κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου.

10 Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο κύκλοι οἱ $ΑΒΓΔ$, $ΕΖΗΘ$ περὶ το αὐτὸ κέντρον τὸ $Κ$. δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν $ΑΒΓΔ$ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ $ΕΖΗΘ$ κύκλου.

15 Ἦχθω γὰρ διὰ τοῦ $Κ$ κέντρον εὐθεῖα ἡ $ΒΚΔ$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Η$ σημείου τῆ $ΒΔ$ εὐθεία πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ $ΗΑ$ καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ $Γ$. ἡ $ΑΓ$ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ $ΕΖΗΘ$ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὴν $ΒΑΔ$ περιφέρειαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα καὶ τοῦτο
20 αἰ ποιοῦντες καταλείψομεν περιφέρειαν ἐλάσσονα τῆς $ΑΔ$. λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ $ΛΔ$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Λ$ ἐπὶ τὴν $ΒΔ$ κάθετος ἤχθω ἡ $ΛΜ$ καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ $Ν$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΛΔ$, $ΔΝ$. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ $ΛΔ$ τῆ $ΔΝ$. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ $ΔΝ$ τῆ $ΑΓ$,
25 ἡ δὲ $ΑΓ$ ἐφάπτεται τοῦ $ΕΖΗΘ$ κύκλου, ἡ $ΔΝ$ ἄρα

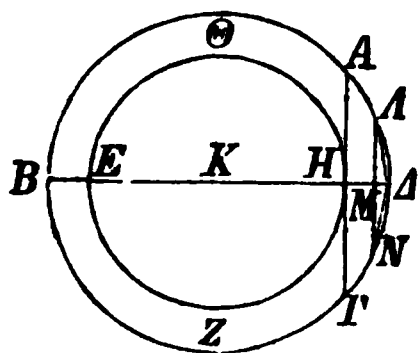
1. ὁ $ΕΟ$] δέ in ras. m. rec. V. 2. κυλίνδρῳ] -φ in ras. V. 3. ὡσαύτως] δει in ras. m. rec. V. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. V. 5. ις'] om. q. 6. κύκλων] κυλίνδρων q. κέντρων P, sed corr. 7. πολύγωνον] om. V. 8. ψαῦσον? V, ψαύοντος q. τοῦ] om. q. 10. οἱ δοθέντες] om. V. 12. κύκλον] om. V. $ΑΒΓΔ$] $ΒΓ$ eras. V. Dein add. κύκλον V. πολυγώνιον q.

: $E\Sigma = EO : E\Sigma$. ergo $A\Xi = EO$ [V, 9]. et eodem modo etiam in conis; quod erat demonstrandum.

XVI.

Datis duobus circum idem centrum circulis in maiorem circulum polygonum aequilaterum, cuius latera

paria sunt numero, ita inscribere, ut minorem circulum non tangat.



Sint dati duo circuli $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ circum idem centrum K . oportet igitur in maiorem circulum $AB\Gamma\Delta$ polygonum aequilaterum, cuius latera paria sunt numero, ita

inscribere, ut circulum $EZH\Theta$ non tangat.

ducatur enim per K centrum recta $BK\Delta$, et ab H puncto ad rectam $B\Delta$ perpendicularis ducatur HA et producat ad Γ . itaque $A\Gamma$ circulum $EZH\Theta$ contingit [III, 16 coroll.]. iam si arcum $BA\Delta$ in duas partes aequales secuerimus et partem eius dimidiam in duas partes aequales et hoc semper fecerimus, arcum arcu $A\Delta$ minorem relinquemus [X, 1]. relinquatur et sit $A\Delta$, et ab A ad $B\Delta$ perpendicularis ducatur AM et ad N producat, et ducantur $A\Delta$, ΔN . itaque $A\Delta = \Delta N$ [III, 3. I, 4]. et quoniam AN rectae $A\Gamma$ parallela est [I, 28], et $A\Gamma$ circulum $EZH\Theta$ contingit,

13. $\mu\eta$] in ras. m. 2 V.

15. $BK\Delta$] $\beta\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma$ in ras. m. rec. V.

17. HA] AH BV.

$\kappa\alpha\iota$] $\iota\sigma\eta$ in ras. m. rec. V.

20. $\kappa\alpha\iota\omicron\upsilon\acute{\nu}\tau\epsilon\varsigma$] $-\epsilon\varsigma$ in ras. m. rec. V.

21. $A\Delta$] AB q.

$A\Delta$] A e corr. m. 1 B.

22. AM] M e corr. m. 2 B.

23. ΔN] $\Delta Z\Theta$, sed $Z\Theta$ in ras. m. rec. V.

$\iota\sigma\eta$] $\iota\sigma$ - eras.

V. 24. AN] AH q.

25. $A\Gamma$] A in ras. m. rec. V.

οὐκ ἐφάπτεται τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου· πολλῶ ἄρα αἱ $\Lambda\Delta$,
 ΔN οὐκ ἐφάπτονται τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου. ἔαν δὴ τῇ
 $\Lambda\Delta$ εὐθείᾳ ἴσας κατὰ τὸ συνεχὲς ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν
 $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, ἐγγραφήσεται εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον
 5 πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον μὴ ψαῦον
 τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ $EZH\Theta$. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιζ'.

Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν
 εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολυέδρον
 10 ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας
 κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Νενοήσθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον
 τὸ A . δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολυέδρον
 ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν
 15 ἐπιφάνειαν.

Τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ
 κέντρον· ἔσονται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι, ἐπειδήπερ με-
 νούσης τῆς διαμέτρου καὶ περιφερομένου τοῦ ἡμικυ-
 κλίου ἐγίγνετο ἡ σφαῖρα· ὥστε καὶ καθ' οἷας ἂν θέ-
 20 σεως ἐπινοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ δι' αὐτοῦ ἐκβαλ-
 λόμενον ἐπίπεδον ποιήσει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς
 σφαίρας κύκλον. καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον, ἐπει-
 δήπερ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἥτις ἐστὶ καὶ τοῦ
 ἡμικυκλίου διάμετρος δηλαδὴ καὶ τοῦ κύκλου, μείζων
 25 ἐστὶ πασῶν τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὴν σφαῖραν δια-
 γομένων [εὐθειῶν]. ἔστω οὖν ἐν μὲν τῇ μείζονι

1. αἱ] ἢ q. 2. κύκλου] -κλου eras. V. δέ B V.
 5. τε] om. P. 6. τοῦ] (alt.) τό q. πόρισμα. καὶ φανερόν,
 ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ A κάθετος ἐπὶ τὴν $B\Delta$ οὐκ ἐφάπτεται τοῦ ἐντὸς
 κύκλου mg. m. 1 P. 10. ἐλάττονος V. 11. περιφέρεια

AN circulum $EZH\Theta$ non contingit. multo igitur magis AA , AN circulum $EZH\Theta$ non contingunt. itaque si rectas rectae AA aequales in circulum $AB\Gamma\Delta$ continue aptauerimus [IV, 1], in circulum $AB\Gamma\Delta$ polygonum aequilaterum, cuius latera paria sunt numero, ita inscribemus, ut minorem circulum $EZH\Theta$ non tangat; quod oportebat fieri.

XVII.

Datis duabus sphaeris circum idem centrum positis in maiorem sphaeram solidum polyedrum ita inscribere, ut minorem sphaeram secundum superficiem non tangat.

Fingantur duae sphaerae circum idem centrum A .¹⁾ oportet igitur in maiorem sphaeram solidum polyedrum ita inscribere, ut minorem sphaeram secundum superficiem non tangat.

secentur sphaerae plano aliquo per centrum posito. sectiones igitur circuli erunt, quoniam sphaera orta est manente diametro et circumacto semicirculo [XI def. 14]; quare in quacunque positione semicirculum finxerimus, planum per eum ductum sectionem in superficie sphaerae efficiet circulum. et adparet, etiam maximum circulum id effecturum esse, quoniam diameter sphaerae, quae eadem diameter est semicirculi et ipsius circuli, ut adparet, maior est omnibus rectis, quae in circulo uel sphaera ducuntur

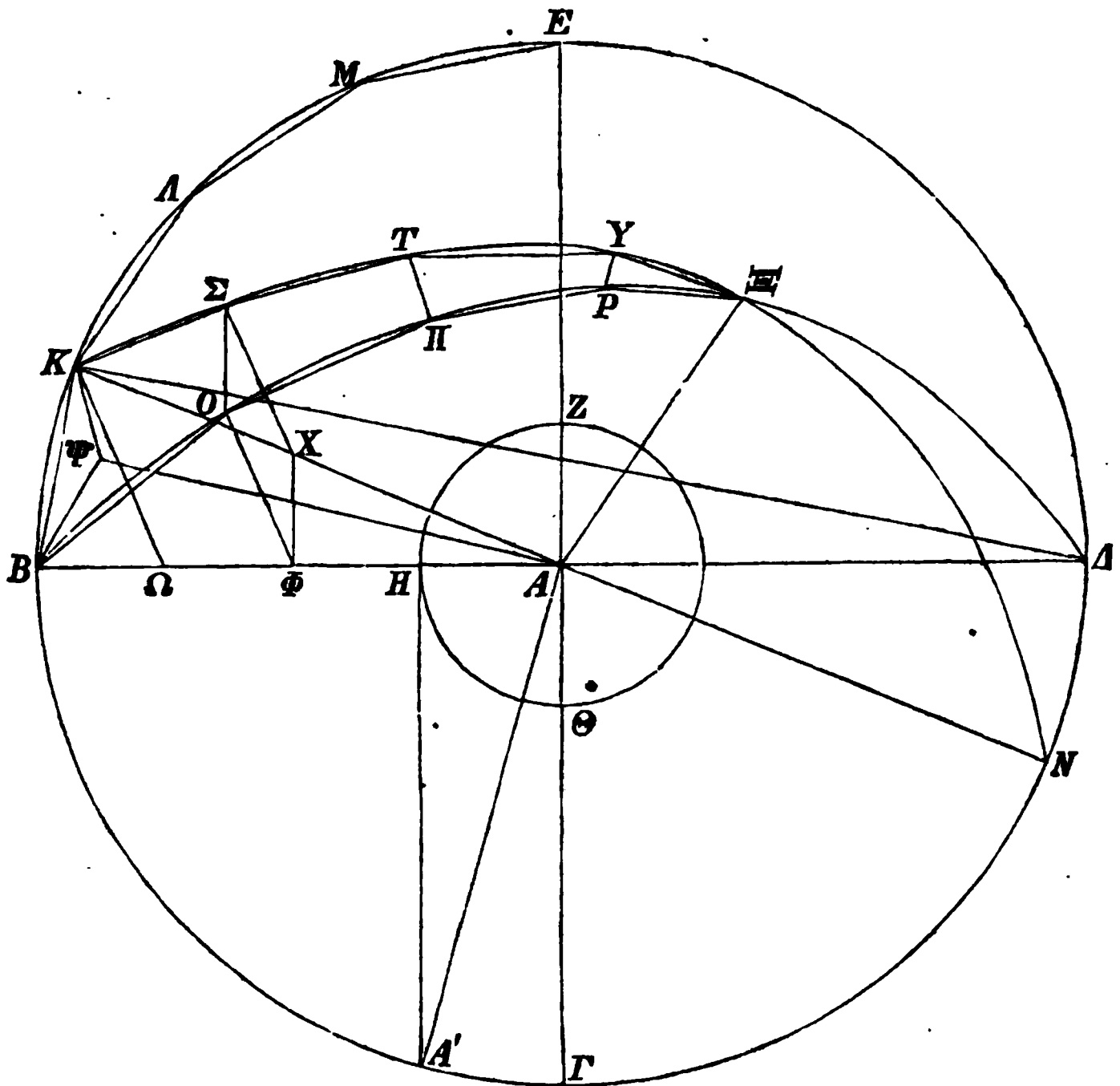
1) Figuram dedi ex P; in B recta $K\Omega$ omissa est. nouam delineauit Peyrardus.

P; γρ. ἐπιφάνειαν supra m. rec. 19. ἐγένετο V (ante τ ras. 1 litt. et accentus corr.). 23. ἐστίν P. 24. καί] ins. m. 1 V. 26. εὐθειῶν] om. P.

σφαίρα κύκλος ὁ $BΓΔΕ$, ἐν δὲ τῇ ἐλάσσονι σφαίρα
 κύκλος ὁ $ZHΘ$, καὶ ἤχθωσαν αὐτῶν δύο διάμετροι
 πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ $BΔ$, $ΓΕ$, καὶ δύο κύκλων
 περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων τῶν $BΓΔΕ$, $ZHΘ$ εἰς
 5 τὸν μείζονα κύκλον τὸν $BΓΔΕ$ πολύγωνον ἰσόπλευρον
 καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος
 κύκλου τοῦ $ZHΘ$, οὗ πλευραὶ ἔστωσαν ἐν τῷ $ΒΕ$
 τεταρτημορίῳ αἱ BK , $ΚΑ$, $ΑΜ$, $ΜΕ$, καὶ ἐπιζευχθεῖσα
 ἡ $ΚΑ$ διήχθω ἐπὶ τὸ N , καὶ ἀνεστᾶτω ἀπὸ τοῦ A ση-
 10 μείου τῷ τοῦ $BΓΔΕ$ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἢ

2. κύκλος] bis P, corr. m. 2. δύο] om. q. 3. $BΔ$,
 $ΓΕ$] $Δ$ et $Γ$ e corr. V; $BΓ$, $ΔΕ$ B. 6. τε καὶ V.
 10. τῷ] om. q.

[III, 15]. iam in maiore sphaera sit circulus $B\Gamma\Delta E$, in minore autem circulus $ZH\Theta$, et duae eorum diametri inter se perpendiculares ducantur $B\Delta$, ΓE , et datis duobus circulis circum idem centrum positus $B\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta$ in maiorem circulum $B\Gamma\Delta E$ polygonum



aequilaterum, cuius latera paria sunt numero, ita inscribatur, ut minorem circulum $ZH\Theta$ non tangat [prop. XVI], et latera eius in BE quarta parte circuli sint $BK, K\Lambda, \Lambda M, ME$, et ducta KA producat ad N , et ab A puncto ad planum circuli $B\Gamma\Delta E$ per-

$A\Xi$ καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ
 τὸ Ξ , καὶ διὰ τῆς $A\Xi$ καὶ ἑκατέρας τῶν $B\Delta$, KN
 ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω· ποιήσουσι δὴ διὰ τὰ εἰρημένα
 ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μεγίστους κύκλους.
 5 ποιείτωσαν, ὧν ἡμικύκλια ἔστω ἐπὶ τῶν $B\Delta$, KN
 διαμέτρων τὰ $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$. καὶ ἐπεὶ ἡ ΞA ὀρθή
 ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ $B\Gamma\Delta E$ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα
 ἄρα τὰ διὰ τῆς ΞA ἐπίπεδά ἐστὶν ὀρθὰ πρὸς τὸ τοῦ
 $B\Gamma\Delta E$ κύκλου ἐπίπεδον· ὥστε καὶ τὰ $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$
 10 ἡμικύκλια ὀρθὰ ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ $B\Gamma\Delta E$ κύκλου ἐπί-
 πεδον. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ $BE\Delta$, $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$ ἡμι-
 κύκλια· ἐπὶ γὰρ ἴσων εἰσὶ διαμέτρων τῶν $B\Delta$, KN .
 ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ BE , $B\Xi$, $K\Xi$ τεταρτημόρια ἀλλήλοις.
 ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ BE τεταρτημορίῳ πλευραὶ τοῦ
 15 πολυγώνου, τοσαῦται εἰσὶ καὶ ἐν τοῖς $B\Xi$, $K\Xi$ τεταρ-
 τημορίοις ἴσαι ταῖς BK , KA , AM , ME εὐθείαις.
 ἐγγεγράφωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ BO , $O\Pi$, ΠP , $P\Xi$,
 $K\Sigma$, ΣT , $T\Gamma$, $\Gamma\Xi$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΣO , $T\Pi$,
 ΓP , καὶ ἀπὸ τῶν O , Σ ἐπὶ τὸ τοῦ $B\Gamma\Delta E$ κύκλου
 20 ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὰς
 κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων τὰς $B\Delta$, KN , ἐπειδήπερ
 καὶ τὰ τῶν $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$ ἐπίπεδα ὀρθὰ ἐστὶ πρὸς τὸ
 τοῦ $B\Gamma\Delta E$ κύκλου ἐπίπεδον. πιπτέτωσαν, καὶ ἔστωσαν
 αἱ $O\Phi$, ΣX , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $X\Phi$. καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις
 25 ἡμικυκλίοις τοῖς $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$ ἴσαι ἀπειλημμένοι εἰσὶν
 αἱ BO , $K\Sigma$, καὶ κάθετοι ἠγμένοι εἰσὶν αἱ $O\Phi$, ΣX ,
 ἴση [ἄρα] ἐστὶν ἡ μὲν $O\Phi$ τῇ ΣX , ἡ δὲ $B\Phi$ τῇ KX .
 ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ BA ὅλη τῇ KA ἴση· καὶ λοιπὴ

3. ποιήσουσιν P, ποιούσι q. 5. ἔστωσαν BVq. 6. τὰ]
 corr. ex τό B. 7. ἐστὶν B. 8. ὀρθὰ ἐστὶ BVq. 10. ἐστὶν
 PB. $B\Delta\Gamma E$ q. 11. ἐστὶν PB. $K\Xi N$] om. P.

pendicularis erigatur $AΞ$ et cum superficie sphaerae concidat in $Ξ$, et per $AΞ$ et utramque $BΔ$, KN plana ducantur. itaque propter ea, quae supra diximus, in superficie sphaerae maximos circulos efficient. eos efficiant, quorum semicirculi in diametris $BΔ$, KN sint, $BΞΔ$, $KΞN$. et quoniam $ΞA$ ad planum circuli $BΓΔE$ perpendicularis est, etiam omnia plana, quae per $ΞA$ ducuntur, ad planum circuli $BΓΔE$ perpendicularia sunt [XI, 18]. quare etiam semicirculi $BΞΔ$, $KΞN$ ad planum circuli $BΓΔE$ perpendiculares sunt. et quoniam semicirculi $BEΔ$, $BΞΔ$, $KΞN$ aequales sunt (nam in aequalibus sunt diametris $BΔ$, KN) [III def. 1], etiam quartae circulorum partes BE , $BΞ$, $KΞ$ inter se aequales sunt. itaque quot sunt in BE quarta parte latera polygoni, totidem etiam in $BΞ$, $KΞ$ quartis partibus sunt rectis BK , $KΔ$, $ΔM$, ME aequalia. inscribantur et sint BO , $OΠ$, $ΠP$, $PΞ$ et $KΣ$, $ΣT$, $TΥ$, $ΥΞ$, et ducantur $ΣO$, $TΠ$, $ΥP$, et ab O , $Σ$ ad planum circuli $BΓΔE$ perpendiculares ducantur. cadent igitur in communes planorum sectiones $BΔ$, KN , quoniam etiam plana circulorum $BΞΔ$, $KΞN$ ad planum circuli $BΓΔE$ perpendicularia sunt [tum u. XI def. 4]. cadant et sint $OΦ$, $ΣX$, et ducatur $XΦ$. et quoniam in aequalibus semicirculis $BΞΔ$, $KΞN$ aequales abscisae sunt BO , $KΣ$ [III, 28], et perpendiculares ductae sunt $OΦ$, $ΣX$, erit $OΦ = ΣX$, $BΦ = KX$ [III, 27. I, 26]. uerum etiam $BA = KA$. itaque $ΦA = XA$. quare

13. Post BE eras. $Δ P$. Post $BΞ$ ras. 1 litt. P. $KΞ$] in ras. m. 1, dein del. N , P. 15. $τσαῦτα$ q. εἰσιν PB .
 21. $καὶ ἐπειδήπερ καὶ$ q. 24. $XΦ$] corr. ex $ΦX$ m. 1 V, $ΦX$ B. 27. ἄρα] m. rec. P. $ΣX$] $Σ$ e corr. V. 28. ἐστὶν B. KA] e corr. m. 2 V.

ἄρα ἡ ΦA λοιπῇ τῇ XA ἐστὶν ἴση· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ
 $B\Phi$ πρὸς τὴν ΦA , οὕτως ἡ KX πρὸς τὴν XA · παρ-
 ἄλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $X\Phi$ τῇ KB . καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα
 τῶν $O\Phi$, ΣX ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ $B\Gamma\Delta E$ κύκλου
 5 ἐπίπεδον, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $O\Phi$ τῇ ΣX . ἐδείχθη
 δὲ αὐτῇ καὶ ἴση· καὶ αἱ $X\Phi$, ΣO ἄρα ἴσαι εἰσὶ καὶ
 παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστὶν ἡ $X\Phi$ τῇ
 ΣO , ἀλλὰ ἡ $X\Phi$ τῇ KB ἐστὶ παράλληλος, καὶ ἡ
 ΣO ἄρα τῇ KB ἐστὶ παράλληλος. καὶ ἐπιξεννύουσιν
 10 αὐτὰς αἱ BO , $K\Sigma$ · τὸ $KBO\Sigma$ ἄρα τετράπλευρον ἐν
 ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ, ἐπειδήπερ, εἰ ὡς δύο εὐθεῖαι
 παράλληλοι, καὶ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν ληφθῆ τυχόντα
 σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιξεννυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ
 αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. διὰ τὰ αὐτὰ
 15 δὴ καὶ ἑκάτερον τῶν $\Sigma O\Pi T$, $T\Pi P T$ τετραπλεύρων
 ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ $T P \Xi$ τρίγωνον
 ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ. εἰ δὴ νοήσωμεν ἀπὸ τῶν O , Σ ,
 Π , T , P , T σημείων ἐπὶ τὸ A ἐπιξεννυμένας εὐθείας,
 συσταθήσεται τι σχῆμα στερεὸν πολυέδρον μεταξὺ
 20 τῶν $B\Xi$, $K\Xi$ περιφερειῶν ἐκ πυραμίδων συγκείμενον,
 ὧν βάσεις μὲν τὰ $KBO\Sigma$, $\Sigma O\Pi T$, $T\Pi P T$ τετρά-
 πλευρα καὶ τὸ $T P \Xi$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ A ση-
 μεῖον. εἰ δὲ καὶ ἐπὶ ἐκάστης τῶν KA , AM , ME
 πλευρῶν καθάπερ ἐπὶ τῆς BK τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν
 25 καὶ ἔτι ἐπὶ τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων, συστα-
 θήσεται τι σχῆμα πολυέδρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν
 σφαῖραν πυραμίσι περιεχόμενον,¹ ὧν βάσεις [μὲν] τὰ

1. τῇ λοιπῇ τῇ q. 2. $B\Phi$] e corr. V m. 2. 4. ἐστὶν
 P. 6. καί] (alt.) om. q. ΣO] O euan. P. εἰσὶν PB.
 7. ἐστὶν] -ιν in ras. V, om. q. ΦX P. 8. $X\Phi$] corr.
 in ΦX m. 1 V. 10. $KBO\Sigma$] $BOK\Sigma$ V. 11. ὡσιν PB.

$B\Phi : \Phi A = KX : XA$. itaque $X\Phi$ rectae KB parallela est [VI, 2]. et quoniam utraque $O\Phi$, ΣX ad planum circuli $B\Gamma\Delta E$ perpendicularis est, $O\Phi$ rectae ΣX parallela est [XI, 6]. demonstrauius autem, esse etiam $O\Phi = \Sigma X$. quare etiam rectae $X\Phi$, ΣO aequales sunt et parallelae [I, 33]. et quoniam $X\Phi$ rectae ΣO parallela est, eadem autem $X\Phi$ rectae KB parallela, etiam ΣO rectae KB parallela est [I, 30]. et eas iungunt BO , $K\Sigma$. itaque quadrilaterum $KBO\Sigma$ in uno plano positum est, quoniam, si datis duabus rectis parallelis in utraque sumuntur quaelibet puncta, recta ad puncta ducta in eodem plano est ac parallelae [XI, 7]. eadem de causa etiam utrumque quadrilaterum $\Sigma O\Pi T$, $T\Pi P T$ in uno est plano. uerum etiam triangulus $T P \Xi$ in uno plano est [XI, 2]. iam si a punctis O , Σ , Π , T , P , T ad A rectas finxerimus ductas, figura quaedam solida polyedra inter arcus $B\Xi$, $K\Xi$ constructur ex pyramidibus composita, quarum bases sunt quadrilatera $KBO\Sigma$, $\Sigma O\Pi T$, $T\Pi P T$ et triangulus $T P \Xi$, uertex autem A punctum. et si etiam in singulis lateribus KA , AM , ME eadem comparauerimus, quae in BK , et praeterea in reliquis tribus quartis circuli partibus eadem, figura quaedam polyedra constructur in sphaera inscripta ex pyramidibus composita, quarum bases sunt quadrilatera,

14. ἐστίν B. 15. ἐκάτερα BV. 16. ἐπιπέδω ἐστίν q.
 ἔστιν B. 21. βάσις BVq. ΠTP T q. 22. τὸν q.
 TΞP P, corr. m. 1. τριγώνου q. 24. κατασκευάσομεν
 e corr. m. 1 q. 25. Post τεταρτημορίων add. Theon: καὶ
 ἐπὶ τοῦ λοιποῦ ἡμισφαιρίου (BVq). 26. σχῆμα] σχῆμα στε-
 ρεόν V. συγγεγραμμένον P. 27. πυραμίσιν P, ἐκ πυρα-
 μίδων BVq. συγκεῖλενον BV. μέν] om. BVq.

εἰρημένα τετράπλευρα καὶ τὸ $\Gamma P \Xi$ τρίγωνον καὶ τὰ ὁμοταγῆ αὐτοῖς, κορυφή δὲ τὸ Λ σημεῖον.

Λέγω, ὅτι τὸ εἰρημένον πολύεδρον οὐκ ἐφάπεται τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐφ' ἧς
 5 ἐστὶν ὁ $ZH\Theta$ κύκλος.

Ἦχθω ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ $KBO\Sigma$ τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ $A\Psi$ καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ψ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΨB , ΨK . καὶ ἐπεὶ ἡ $A\Psi$ ὀρθή ἐστὶ πρὸς
 10 τὸ τοῦ $KBO\Sigma$ τετραπλεύρου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ τετραπλεύρου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστὶν. ἡ $A\Psi$ ἄρα ὀρθή ἐστὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν $B\Psi$, ΨK . καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ AK , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ
 15 τῆς AB τῷ ἀπὸ τῆς AK . καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν $A\Psi$, ΨB . ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ψ . τῷ δὲ ἀπὸ τῆς AK ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν $A\Psi$, ΨK . τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $A\Psi$, ΨB ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $A\Psi$, ΨK . κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς $A\Psi$. λοι-
 20 πὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $B\Psi$ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΨK ἴσον ἐστὶν. ἴση ἄρα ἡ $B\Psi$ τῇ ΨK . ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Ψ ἐπὶ τὰ O , Σ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα τῶν $B\Psi$, ΨK . ὁ ἄρα κέντρον τῷ Ψ καὶ διαστήματι ἐνὶ τῶν ΨB , ΨK
 25 γραφόμενος κύκλος ἤξει καὶ διὰ τῶν O , Σ , καὶ ἔσται ἐν κύκλῳ τὸ $KBO\Sigma$ τετράπλευρον.

Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ KB τῆς $X\Phi$, ἴση δὲ ἡ $X\Phi$ τῇ ΣO , μείζων ἄρα ἡ KB τῆς ΣO . ἴση δὲ ἡ

1. $\Gamma \Xi P B V$. 2. ὁμοιοταγῆ B . 3. λέγω δὴ q .
 9. ΨB] B e corr. P , $B\Psi B V q$. ἐστὶν P . 10. $KBO\Sigma$] Σ
 e corr. m . 1 P , mut. in $BKO\Sigma$ m . 1 V , $BKO\Sigma$ q . τετρα-

quae nominauimus, et triangulus $\Gamma P \Xi$, et quae similem obtinent locum, uertex autem punctum A .

dico, polyedrum, quod significauimus, minorem sphaeram non tangere secundum superficiem, in qua est circulus $ZH\Theta$.

ducatur ab A puncto ad planum quadrilateri $KBO\Sigma$ perpendicularis $A\Psi$ et cum plano in puncto Ψ concidat, et ducantur ΨB , ΨK . et quoniam $A\Psi$ ad planum quadrilateri $KBO\Sigma$ perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano quadrilateri positas perpendicularis est [XI def. 3]. itaque $A\Psi$ ad utramque $B\Psi$, ΨK perpendicularis est. et quoniam $AB = AK$, erit etiam $AB^2 = AK^2$. est autem $A\Psi^2 + \Psi B^2 = AB^2$; nam angulus ad Ψ positus rectus est [I, 47]; et $A\Psi^2 + \Psi K^2 = AK^2$. quare $A\Psi^2 + \Psi B^2 = A\Psi^2 + \Psi K^2$. auferatur, quod commune est, $A\Psi^2$. itaque $B\Psi^2 = \Psi K^2$. quare $B\Psi = \Psi K$. similiter demonstrabimus, etiam rectas a Ψ ad O , Σ ductas aequales esse utrique $B\Psi$, ΨK . itaque circulus, qui centro Ψ et radio alterutra rectarum ΨB , ΨK describitur, etiam per O , Σ ueniet, et quadrilaterum $KBO\Sigma$ in circulo erit.

et quoniam $KB > X\Phi$ et $X\Phi = \Sigma O$, erit $KB > \Sigma O$. uerum $KB = K\Sigma = BO$. quare etiam $K\Sigma$

- πλεύρον] om. V. 12. ἐστίν] ἐστίν ἢ $A\Psi$ Theon (B V q).
 13. ἐστίν P. 14. τό] corr. ex τῶ m. 1 P. 15. ἐστίν P.
 18. ἐστίν P. 19. ἀπό] -πό in ras. V. 21. ἔσται q.
 ΨB P. 22. τὰ O , Σ] corr. m. 2 ex τὸ $O B$.
 23. ΨK] K in ras. V. 24. τῶ] bis P, sed corr. m. 1.
 -στῆ- e corr. m. rec. P. $B\Psi$ V q. 26. τό] corr. ex τῶ V.
 27. ἐστίν V. $X\Phi$] corr. ex ΦX V, ΦX B. 28. τῆ]
 τῆς B. τῆς] τῆ q. ἴση δέ — p. 238, 2. ἐστίν] mg. m. 2 B.

ΚΒ ἑκατέρω τῶν ΚΣ, ΒΟ· καὶ ἑκατέρω ἄρα τῶν
 ΚΣ, ΒΟ τῆς ΣΟ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ
 τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΚΒΟΣ, καὶ ἴσαι αἱ ΚΒ, ΒΟ,
 ΚΣ, καὶ ἐλάττων ἢ ΟΣ, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ
 5 κύκλου ἐστὶν ἡ ΒΨ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ
 τῆς ΒΨ μείζον ἐστὶν ἢ διπλάσιον. ἤχθω ἀπὸ τοῦ
 Κ ἐπὶ τὴν ΒΦ κάθετος ἡ ΚΩ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΔ τῆς
 ΔΩ ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς
 τὴν ΔΩ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΩ πρὸς τὸ ὑπὸ
 10 [τῶν] ΔΩ, ΩΒ, ἀναγραφομένου ἀπὸ τῆς ΒΩ τετρα-
 γώνου καὶ συμπληρουμένου τοῦ ἐπὶ τῆς ΩΔ παραλ-
 λογροῦ καὶ τὸ ὑπὸ ΔΒ, ΒΩ ἄρα τοῦ ὑπὸ ΔΩ,
 ΩΒ ἐλαττόν ἐστὶν ἢ διπλάσιον. καὶ ἐστὶ τῆς ΚΔ
 ἐπιζευγνυμένης τὸ μὲν ὑπὸ ΔΒ, ΒΩ ἴσον τῷ ἀπὸ
 15 τῆς ΒΚ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΩ, ΩΒ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς
 ΚΩ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΩ ἔλασσόν
 ἐστὶν ἢ διπλάσιον. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ
 τῆς ΒΨ μείζον ἐστὶν ἢ διπλάσιον· μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ
 τῆς ΚΩ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ
 20 τῇ ΚΑ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΚ.
 καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΨ,
 ΨΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΚΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΚΩ, ΩΑ·
 τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν
 ΚΩ, ΩΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΚΩ μείζον τοῦ ἀπὸ τῆς
 25 ἀπὸ τῆς ΨΑ. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΩΑ ἔλασσόν ἐστὶ τοῦ
 ἀπὸ τῆς ΨΑ. μείζων ἄρα ἡ ΑΨ τῆς ΑΩ· πολλῶ

1. καὶ] om. q. καὶ — 2. ΒΟ] mg. m. rec. P. 2. ΚΣ,
 ΒΟ] corr. ex ΚΒ, ΣΟ P. ἐστὶ V q. 6. ἤχθω — 7. κά-
 θετος] bis P, sed corr. m. 1. 7. Κ σημείου Β. ΚΩ]
 supra scr. 5, mg. 5 m. 1 P, corr. in ΚΦ m. rec.; ΚΦ ΒV q,
 sed in V supra scr. ω m. 1. 8. ΔΩ] P m. 1, ΔΦ ΒV q, P

$> \Sigma O$, $BO > \Sigma O$. et quoniam in circulo est quadri-
laterum $KBO\Sigma$, et KB , BO , $K\Sigma$ aequales, $O\Sigma$ autem
minor, et radius circuli est $B\Psi$, erit¹⁾ $KB^2 > 2B\Psi^2$.
ducatur a K ad $B\Phi$ perpendicularis $K\Omega$.²⁾ et quo-
niam $BA < 2A\Omega$, et $BA : A\Omega = AB \times B\Omega : A\Omega$
 $\times \Omega B$, constructo in $B\Omega$ quadrato et parallelogrammo
in ΩA expleto erit etiam $AB \times B\Omega < 2A\Omega \times \Omega B$.
et ducta KA erit $AB \times B\Omega = BK^2$, $A\Omega \times B\Omega$
 $= K\Omega^2$ [III, 31. VI, 8 coroll.]. itaque $KB^2 < 2K\Omega^2$.
uerum $KB^2 > 2B\Psi^2$. itaque $K\Omega^2 > B\Psi^2$. et quo-
niam $BA = KA$, erit $BA^2 = AK^2$. et $BA^2 = B\Psi^2$
 $+ \Psi A^2$, $KA^2 = K\Omega^2 + \Omega A^2$ [I, 47]. itaque $B\Psi^2$
 $+ \Psi A^2 = K\Omega^2 + \Omega A^2$, quorum $K\Omega^2 > B\Psi^2$. quare
 $\Omega A^2 < \Psi A^2$ et $A\Psi > A\Omega$. multo igitur magis

1) Nam singula latera KB , BO , $K\Sigma$ maiora sunt latere
quadrati inscripti, quod aequale est $B\Psi\sqrt{2}$.

2) Facile demonstratur, perpendicularem hanc in ipsum
punctum Φ cadere, et huc spectat emendatio Theonis Φ ubique
pro Ω reponentis. sed tum demonstrandum ei erat, $K\Phi$ p-
pendicularem esse. Euclides hoc aut non intellexit aut, qu-
potius crediderim, non curauit, quia ad tenorem demonstrat-
nis nihil prorsus refert.

m. rec.; item lin. 9, 10, 12, 15. 9. $B\Omega$] P m. 1, $B\Phi BV$
P m. rec.; item lin. 10, 12, 14. 10. $\tau\omega\nu$] om. P. Ω
P m. 1, $\Phi B BVq$, P m. rec.; item lin. 13, 15. $\acute{\alpha}\nu\theta\acute{\iota}$] co
ex $\acute{\alpha}\nu\theta\acute{\iota}$ m. 2 B. 11. ΩA] P m. 1, $\Phi A BVq$, P m. re
dein add. V: $\Phi B \acute{\epsilon}\nu \acute{\epsilon}\tau\acute{\epsilon}\rho\omega$ (in textu m. 1). 12. $\acute{\epsilon}\nu$
 $\acute{\epsilon}\nu\theta\acute{\iota}$ $\tau\omega\nu$ Vq. $\acute{\upsilon}\nu\theta\acute{\iota}$ $\acute{\upsilon}\nu\theta\acute{\iota}$ $\tau\omega\nu$ V. 13. $\eta \delta\iota\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota\omega\nu$] $\delta\iota\pi\lambda$
 $\acute{\alpha}\sigma\iota\omega\nu$ P. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. 15. BK] KB q et in ras. V. $BK - \tau\eta\varsigma$] q.
16. $K\Omega$] (prius et alt.) P m. 1, $K\Phi BVq$, P m. rec. $\tau\iota$
(alt.) $\tau\omega\upsilon$ V. 19. $K\Omega$] P m. 1, $K\Phi BVq$, P m. rec.; ite
lin. 22, 24 bis. 20. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ $\kappa\alpha\iota$ $\tau\acute{\omicron}$ V. AK] in ras. V, $KA B$.
21. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. $\tau\acute{\omicron}$] corr. ex $\tau\acute{\omicron}$ V. 22. ΩA] P m. 1, Φ
 BVq , P m. rec.; item lin. 24, 26. 23. $\tau\acute{\alpha}$ $\acute{\alpha}\rho\alpha$ — 24. Ω
mg. m. 2 V. 25. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. 26. $A\Omega$] P m. 1, $A\Phi BV$
P m. rec.

ἄρα ἡ $A\Psi$ μείζων ἐστὶ τῆς AH . καὶ ἐστὶν ἡ μὲν $A\Psi$ ἐπὶ μίαν τοῦ πολυέδρου βάσιν, ἡ δὲ AH ἐπὶ τὴν τῆς ἐλάσσονος σφαίρας ἐπιφάνειαν· ὥστε τὸ πολυέδρον οὐ ψαύσει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν
 5 ἐπιφάνειαν.

Δύο ἄρα σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολυέδρον ἐγγέγραπται μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

10

Πόρισμα.

Ἐὰν δὲ καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῷ ἐν τῇ $B\Gamma\Delta E$ σφαίρα στερεῷ πολυέδρω ὅμοιον στερεὸν πολυέδρον ἐγγραφῆ, τὸ ἐν τῇ $B\Gamma\Delta E$ σφαίρα στερεὸν πολυέδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρα στερεὸν πολυέδρον τρι-
 15 πλασίονα λόγον ἔχει, ἢπερ ἡ τῆς $B\Gamma\Delta E$ σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. διαιρεθέντων γὰρ τῶν στερεῶν εἰς τὰς ὁμοιοπληθεῖς καὶ ὁμοιοταγεῖς πυραμίδας ἔσονται αἱ πυραμίδες ὅμοιαι. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τρι-
 20 πλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $KBO\Sigma$ τετράπλευρον, κορυφὴ δὲ τὸ A σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρα ὁμοιοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτ-
 25 ἐστὶν ἢπερ ἡ AB ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περὶ κέντρον τὸ A πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέ-

1. $A\Psi$] $O\Psi$ q. 4. ψαύει P. 5. Seq. demonstr. altera, u. app. 9. ποιῆσαι] δεῖξαι Theon (B V q). 10. πόρισμα] mg. m. 1 P; om. B V q. 14. πρὸς τὸ — πολυέδρον] mg. m. 2 B. 16. στερεῶς B, ἐλάσσονος q. σφαίρας] om.

$A\Psi > AH$. et $A\Psi$ ad unam basim polyedri, AH autem ad superficiem minoris sphaerae ducta est. quare polyedrum minorem sphaeram secundum superficiem non tanget.¹⁾

Ergo datis duabus sphaeris circum idem centrum positis in maiorem sphaeram solidum polyedrum ita inscriptum est, ut minorem sphaeram secundum superficiem non tangat; quod oportebat fieri.

Corollarium.

Sin etiam in aliam sphaeram solido polyedro in sphaera $B\Gamma\Delta E$ inscripto simile polyedrum solidum inscripserimus, solidum polyedrum in sphaera $B\Gamma\Delta E$ inscriptum ad solidum polyedrum in altera sphaera inscriptum triplicatam rationem habebit quam diameter sphaerae $B\Gamma\Delta E$ ad diametrum alterius sphaerae. solidis enim in pyramides numero aequales et simili loco positas diuisis pyramides similes erunt. similes autem pyramides triplicatam inter se rationem habent quam latera correspondentia [prop. VIII coroll.]. itaque pyramis, cuius basis est quadrilaterum $KBO\Sigma$, uertex autem A punctum ad pyramidem in altera sphaera simili loco positam triplicatam rationem habet quam latus correspondens ad latus correspondens, h. e. quam AB radius sphaerae, cuius centrum est A , ad radium

1) Idem enim similiter fere de ceteris basibus solidi demonstrari potest.

q. 17. ὁμοπληθεῖς V. 18. ὁμοταγεῖς BV. 20. εἰσὶν B.
 πυραμῖς ἄρα P. 21. $K\Theta\Sigma O$ V, sed corr. 23. ὁμο-
 ταγῆ V et B, sed corr. m. 1. 26. περὶ τό Bq.

ρας σφαίρας. ὁμοίως καὶ ἐκάστη πυραμὶς τῶν ἐν τῇ
 περὶ κέντρον τὸ A σφαίρα πρὸς ἐκάστην ὁμοταγῇ
 πυραμίδα τῶν ἐν τῇ ἐτέρᾳ σφαίρα τριπλασίονα λόγον
 ἔξει, ἥπερ ἢ AB πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐτέρας
 5 σφαίρας. καὶ ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπο-
 μένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ
 ἐπόμενα· ὥστε ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ κέντρον τὸ A σφαίρα
 στερεὸν πολύεδρον πρὸς ὅλον τὸ ἐν τῇ ἐτέρᾳ [σφαίρα]
 στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔξει, ἥπερ ἢ
 10 AB πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐτέρας σφαίρας,
 τουτέστιν ἥπερ ἢ $B\Delta$ διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἐτέρας
 σφαίρας διάμετρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη'.

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι
 15 λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

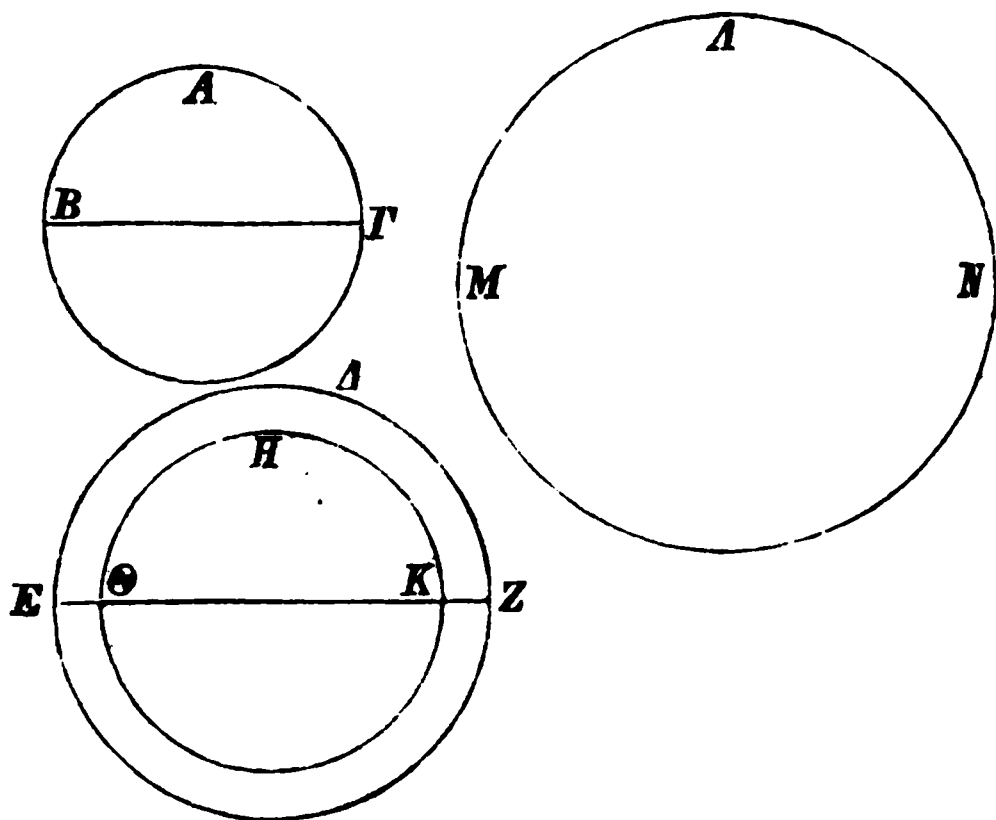
Νενοήσθωσαν σφαῖραι αἱ $AB\Gamma$, ΔEZ , διάμετροι
 δὲ αὐτῶν αἱ $B\Gamma$, EZ . λέγω, ὅτι ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς
 τὴν ΔEZ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἢ
 $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ .

2. περὶ τό Βq. 4. ἐτέρας] om. P. 7. ὥστε καί P.
 περὶ τό Β. κέντρῳ τῶ q. 8. σφαίρα] om. P.
 10. ἐτέρας] B supra scr. στερεᾶς m. 2. 15. εἰσὶν PB.
 16. ἐννοήσθωσαν P.

alterius sphaerae. similiter etiam singulae pyramides in sphaera positae, cuius centrum est A , ad singulas pyramides simili loco positas in altera sphaera triplicatam rationem habent quam AB ad radium alterius sphaerae. et ut unum praecedentium ad unum sequentium, ita omnia praecedentia ad omnia sequentia [V, 12]. quare totum solidum polyedrum in sphaera positum, cuius centrum est A , ad totum solidum polyedrum in altera sphaera positum triplicatam rationem habebit quam AB ad radium alterius sphaerae, h. e. quam diameter $B\Delta$ ad diametrum alterius sphaerae; quod erat demonstrandum.

XVIII.

Sphaerae triplicatam inter se rationem habent quam diametri.



Fingantur sphaerae $AB\Gamma$, ΔEZ , earum autem diametri $B\Gamma$, $E\text{Z}$. dico, esse $AB\Gamma : \Delta EZ = B\Gamma^3 : E\text{Z}^3$.

Εἰ γὰρ μὴ ἡ $ΑΒΓ$ σφαῖρα πρὸς τὴν $ΔΕΖ$ σφαῖραν
 τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$,
 ἔξει ἄρα ἡ $ΑΒΓ$ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς
 $ΔΕΖ$ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἢ πρὸς μείζονα ἢπερ
 5 ἡ $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$. ἐχέτω πρότερον πρὸς ἐλάσσονα
 τὴν $ΗΘΚ$, καὶ νενοήσθω ἡ $ΔΕΖ$ τῇ $ΗΘΚ$ περὶ τὸ
 αὐτὸ κέντρον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν
 τὴν $ΔΕΖ$ στερεὸν πολυέδρον μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσο-
 νος σφαίρας τῆς $ΗΘΚ$ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐγγε-
 10 γράφθω δὲ καὶ εἰς τὴν $ΑΒΓ$ σφαῖραν τῷ ἐν τῇ $ΔΕΖ$
 σφαίρα στερεῷ πολυέδρῳ ὁμοιον στερεὸν πολυέδρον·
 τὸ ἄρα ἐν τῇ $ΑΒΓ$ στερεὸν πολυέδρον πρὸς τὸ ἐν
 τῇ $ΔΕΖ$ στερεὸν πολυέδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει
 ἢπερ ἡ $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$. ἔχει δὲ καὶ ἡ $ΑΒΓ$ σφαῖρα
 15 πρὸς τὴν $ΗΘΚ$ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἢπερ ἡ
 $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $ΑΒΓ$ σφαῖρα πρὸς
 τὴν $ΗΘΚ$ σφαῖραν, οὕτως τὸ ἐν τῇ $ΑΒΓ$ σφαίρα
 στερεὸν πολυέδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ $ΔΕΖ$ σφαίρα στε-
 ρεὸν πολυέδρον· ἐναλλάξ [ἄρα] ὡς ἡ $ΑΒΓ$ σφαῖρα
 20 πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολυέδρον, οὕτως ἡ $ΗΘΚ$ σφαῖρα
 πρὸς τὸ ἐν τῇ $ΔΕΖ$ σφαίρα στερεὸν πολυέδρον. μείζων
 δὲ ἡ $ΑΒΓ$ σφαῖρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου· μείζων
 ἄρα καὶ ἡ $ΗΘΚ$ σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ $ΔΕΖ$ σφαίρα πο-
 λυέδρου. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ'
 25 αὐτοῦ. οὐκ ἄρα ἡ $ΑΒΓ$ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς
 $ΔΕΖ$ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $ΒΓ$
 διάμετρος πρὸς τὴν $ΕΖ$. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι

3. σφαῖρα] om. q. 6. $ΗΘ$ P. ἐννοήσθω P. Post
 $ΔΕΖ$ add. σφαῖρα Vq et B m. 2. 7. γεγράφθως q.
 8. $ΔΕΖ$] E supra scr. m. 1 V. 9. $ΗΘ$ P. 10. $ΔΕΖ$] E

nam si non est $AB\Gamma : \triangle EZ = B\Gamma^3 : EZ^3$, sphaera $AB\Gamma$ aut ad sphaeram minorem sphaera $\triangle EZ$ triplicatam rationem habebit quam $B\Gamma : EZ$, aut ad maiorem. prius habeat ad minorem $H\Theta K$, et fingantur $\triangle EZ$, $H\Theta K$ circum idem centrum positae, et in maiorem sphaeram $\triangle EZ$ solidum polyedrum ita inscribatur, ut minorem sphaeram $H\Theta K$ secundum superficiem non tangat [prop. XVII], et etiam in sphaeram $AB\Gamma$ solido polyedro in $\triangle EZ$ sphaera inscripto simile solidum polyedrum inscribatur. itaque polyedrum solidum in $AB\Gamma$ inscriptum ad solidum polyedrum in $\triangle EZ$ inscriptum triplicatam rationem habet quam $B\Gamma : EZ$ [prop. XVII coroll.]. uerum etiam $AB\Gamma : H\Theta K = B\Gamma^3 : EZ^3$. itaque ut $AB\Gamma : H\Theta K$, ita erit solidum polyedrum in $AB\Gamma$ sphaera inscriptum ad solidum polyedrum in $\triangle EZ$ sphaera inscriptum. permutando [V, 16] ut sphaera $AB\Gamma$ ad polyedrum in ea inscriptum, ita sphaera $H\Theta K$ ad solidum polyedrum in $\triangle EZ$ sphaera inscriptum. sed sphaera $AB\Gamma$ maior est polyedro in ea inscripto. itaque etiam sphaera $H\Theta K$ maior est polyedro in sphaera $\triangle EZ$ inscripto [V, 14]. uerum eadem minor est; nam ab eo comprehenditur. itaque sphaera $AB\Gamma$ ad minorem sphaera $\triangle EZ$ triplicatam rationem non habet quam $B\Gamma$ diametrus ad EZ . similiter demonstrabimus, ne $\triangle EZ$ quidem

supra scr. m. 1 V. 11. σφαίρα] om. V. στερεόν] om. V.
 12. πρὸς τό — 13. πολύεδρον] om. q. 14. ABΓ] AΓ P.
 15. λόγον] λόγον ἔχει P. 16. AB q. 17. σφαίρα] om. V.
 18. πρὸς τό — 19. πολύεδρον] om. q. 18. σφαίρα] om.
 V. 19. ἄρα] om. P. 20. σφαῖρα] om. V. 22. σφαῖρα]
 om. V. 25. ἐλάττονα P. 26. ΔZ V.

οὐδὲ ἡ ΔEZ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς $AB\Gamma$ σφαίρας
τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ EZ πρὸς τὴν $B\Gamma$.

Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς μείζονά
τινα τῆς ΔEZ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ
5 ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ .

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μείζονα τὴν AMN
ἀνάπαλιν ἄρα ἡ AMN σφαῖρα πρὸς τὴν $AB\Gamma$ σφαί-
ραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ EZ διάμετρος
πρὸς τὴν $B\Gamma$ διάμετρον. ὡς δὲ ἡ AMN σφαῖρα
10 πρὸς τὴν $AB\Gamma$ σφαῖραν, οὕτως ἡ ΔEZ σφαῖρα πρὸς
ἐλάσσονά τινα τῆς $AB\Gamma$ σφαίρας, ἐπειδήπερ μείζων
ἐστὶν ἡ AMN τῆς ΔEZ , ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη. καὶ
ἡ ΔEZ ἄρα σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς $AB\Gamma$
σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ EZ πρὸς τὴν
15 $B\Gamma$. ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα
πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔEZ σφαίρας τριπλασίονα λόγον
ἔχει ἢπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ . ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ
πρὸς ἐλάσσονα. ἡ ἄρα $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔEZ
σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν
20 EZ . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4. ἔξει V. 11. σφαίρας, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη, his
uerbis infra lin. 12 omissis, BV. 13. ἄρα] om. BV.
τινα] om. BV. 16. τινα] om. BV. 18. ἔλασσον q.
 $AB\Gamma$] $B\Gamma$ q. In fine: *Εὐκλείδου στοιχείων ιβ' Pq, Εὐκλείδου*
στερεῶν β, ἐστὶ δὲ τῶν στοιχείων τὸ ιβ' B. In q seq. τοῦτο τὸ
θεώρημα τὸ ε' ἐστὶ τοῦ ιγ' βιβλίου, deinde in textu XIII, 6
(in mg. θεώρημά ἐστὶ τοῦτο ε' τοῦ ιγ' βιβλίου); u. app.

sphaeram ad minorem sphaera $AB\Gamma$ triplicatam rationem habere quam EZ ad $B\Gamma$.

iam dico, sphaeram $AB\Gamma$ ne ad maiorem quidem sphaera $\triangle EZ$ triplicatam rationem habere quam $B\Gamma$ ad EZ . nam si fieri potest, habeat ad maiorem AMN . itaque e contrario [V, 7 coroll.] sphaera AMN ad sphaeram $AB\Gamma$ triplicatam rationem habet quam diametrus EZ ad diametrum $B\Gamma$. sed ut AMN sphaera ad $AB\Gamma$ sphaeram, ita $\triangle EZ$ sphaera ad minorem sphaera $AB\Gamma$, quoniam $AMN > \triangle EZ$, ut antea demonstratum est [prop. II lemma]. itaque etiam $\triangle EZ$ sphaera ad minorem sphaera $AB\Gamma$ triplicatam rationem habet quam $EZ : B\Gamma$; quod fieri non posse demonstraui. itaque $AB\Gamma$ sphaera ad maiorem sphaera $\triangle EZ$ triplicatam rationem non habet quam $B\Gamma : EZ$. demonstraui autem, eam ne ad minorem quidem hanc rationem habere. ergo

$$AB\Gamma : \triangle EZ = B\Gamma^3 : EZ^3;$$

quod erat demonstrandum.

ιγ'.

α'.

Ἐὰν εὐθεία γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον
τμηθῆ, τὸ μείζον τμήμα προσλαβὸν τὴν ἡμί-
σειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ
5 τῆς ἡμισείας τετραγώνου.

Εὐθεία γὰρ γραμμὴ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον
τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μείζον τμήμα
τὸ AG , καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῆ GA εὐθεία ἡ
 AD , καὶ κείσθω τῆς AB ἡμίσεια ἡ AD . λέγω, ὅτι
10 πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς GD τοῦ ἀπὸ τῆς DA .

Ἀναγεγράφθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν AB , AD τετρά-
γωνα τὰ AE , ADZ , καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ ADZ τὸ
σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ZG ἐπὶ τὸ H . καὶ ἐπεὶ ἡ AB
ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ , τὸ ἄρα
15 ὑπὸ τῶν ABG ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AG . καὶ ἐστὶ
τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ABG τὸ GE , τὸ δὲ ἀπὸ τῆς AG
τὸ $Z\Theta$. ἴσον ἄρα τὸ GE τῷ $Z\Theta$. καὶ ἐπεὶ διπλῆ
ἐστὶν ἡ BA τῆς AD , ἴση δὲ ἡ μὲν BA τῆ KA , ἡ
δὲ AD τῆ $A\Theta$, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ KA τῆς $A\Theta$. ὡς
20 δὲ ἡ KA πρὸς τὴν $A\Theta$, οὕτως τὸ GK πρὸς τὸ $G\Theta$.

Εὐκλείδου στοιχείων $\bar{\iota}\gamma$ P V b, Εὐκλείδου στερεῶν $\bar{\gamma}$ στοι-
χείων $\bar{\iota}\gamma$ B, Εὐκλείδου στοιχείων $\bar{\iota}\gamma$ στερεῶν γq . 5. τετραγώνου]
P, comp. supra m. 2 V; τῆς ὅλης Theon (B V b q). 8. τῆ] τῆς
P et B, sed corr. εὐθεία] εὐθείας B, corr. m. 1. 9. καί —

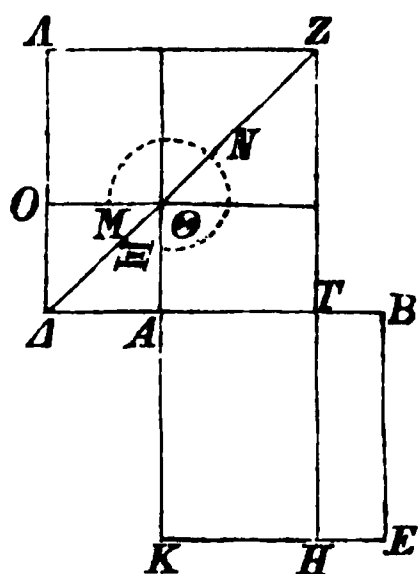
XIII.

I.

Si recta linea secundum rationem extremam ac mediam diuiditur, quadratum maioris partis adiuncta dimidia parte totius aequale est quadrato dimidiaie quinquies sumpto.

Nam recta linea AB secundum rationem extremam ac mediam diuidatur in puncto Γ , et pars maior sit $A\Gamma$, et ΓA in directum producat, ut fiat $A\Delta$, et ponatur $A\Delta = \frac{1}{2} AB$. dico, esse $\Gamma\Delta^2 = 5\Delta A^2$.

construantur enim in AB , $\Delta\Gamma$ quadrata AE , ΔZ ,



et in ΔZ figura describatur [I p. 137 not. 1], et $Z\Gamma$ ad H producat.

et quoniam AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, erit $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$ [VI def. 3. VI, 17]. et $AB \times B\Gamma = \Gamma E$, $A\Gamma^2 = Z\Theta$. itaque $\Gamma E = Z\Theta$. et quoniam

$BA = 2A\Delta$, et $BA = KA$, $A\Delta = A\Theta$, erit etiam $KA = 2A\Theta$. ue-

rum $KA : A\Theta = \Gamma K : \Gamma\Theta$ [VI, 1]. itaque $\Gamma K = 2\Gamma\Theta$.

$A\Delta$] mg. postea add. m. 1 P. 10. $A\Delta$ q et corr. ex ΔA V.

11. -σαν] eras. P. $\Delta\Gamma$] in ras. m. 1 F. τετραγώνων

V q. 12. ἐν] τὸ ἐν P. τό] om. P. 13. ἐπί] corr. ex

ἐπέμ m. 2 P. 15. AB , $B\Gamma$ q et m. 2 V. ἐστὶν ἴσον BV.

16. AB , $B\Gamma$ m. 2 V. ἀπό] ὑπό q. 20. ΓK] $K\Gamma$ P.

διπλάσιον ἄρα τὸ $\Gamma\text{Κ}$ τοῦ $\Gamma\Theta$. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ $\Lambda\Theta$,
 $\Theta\Gamma$ διπλάσια τοῦ $\Gamma\Theta$. ἴσον ἄρα τὸ $\text{Κ}\Gamma$ τοῖς $\Lambda\Theta$,
 $\Theta\Gamma$. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ $\Gamma\text{Ε}$ τῷ $\Theta\text{Ζ}$ ἴσον· ὅλον ἄρα
τὸ $\text{Α}\text{Ε}$ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ $\text{Μ}\text{Ν}\Xi$ γνώμονι. καὶ
5 ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ $\text{Β}\text{Α}$ τῆς $\text{Α}\Delta$, τετραπλάσιόν ἐστὶ
τὸ ἀπὸ τῆς $\text{Β}\text{Α}$ τοῦ ἀπὸ τῆς $\text{Α}\Delta$, τουτέστι τὸ $\text{Α}\text{Ε}$
τοῦ $\Delta\Theta$. ἴσον δὲ τὸ $\text{Α}\text{Ε}$ τῷ $\text{Μ}\text{Ν}\Xi$ γνώμονι· καὶ ὁ
 $\text{Μ}\text{Ν}\Xi$ ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστὶ τοῦ $\text{Α}\text{Ο}$. ὅλον
ἄρα τὸ $\Delta\text{Ζ}$ πενταπλάσιόν ἐστὶ τοῦ $\text{Α}\text{Ο}$. καὶ ἐστὶ τὸ
10 μὲν $\Delta\text{Ζ}$ τὸ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$, τὸ δὲ $\text{Α}\text{Ο}$ τὸ ἀπὸ τῆς $\Delta\text{Α}$.
τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ πενταπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς $\Delta\text{Α}$.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῆ,
τὸ μείζον τμήμα προσλαβὼν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης
πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετρα-
15 γώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πεν-
ταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρη-
μένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνο-
20 μένης τὸ μείζον τμήμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ
τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ $\text{Α}\text{Β}$ τμήματος ἑαυτῆς τοῦ
 $\text{Α}\Gamma$ πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ $\text{Α}\Gamma$ διπλῆ ἔστω
ἡ $\Gamma\Delta$. λέγω, ὅτι τῆς $\Gamma\Delta$ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμ-
25 νομένης τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ $\Gamma\text{Β}$.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀφ' ἑκατέρας τῶν $\text{Α}\text{Β}$, $\Gamma\Delta$
τετράγωνα τὰ $\text{Α}\text{Ζ}$, $\Gamma\text{Η}$, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ

1. $\text{Κ}\Gamma$ P. Hic in P litt. K saepius in H renouatum est
manu π. $\Lambda\Theta$] Λ e corr. m. 1 V. 2. τοῦ $\Gamma\Theta$ διπλάσια P.

uerum etiam $A\Theta + \Theta\Gamma = 2\Gamma\Theta$ [I, 43]. itaque $K\Gamma = A\Theta + \Theta\Gamma$. demonstrauius autem, esse etiam $\Gamma E = \Theta Z$. itaque $AE = MN\Xi$. et quoniam $BA = 2A\Delta$, erit $BA^2 = 4A\Delta^2$, h. e. $AE = 4A\Theta$. sed $AE = MN\Xi$. itaque etiam $MN\Xi = 4AO$. quare $\Delta Z = 5AO$. et $\Delta Z = \Delta\Gamma^2$, $AO = \Delta A^2$. itaque $\Gamma\Delta^2 = 5\Delta A^2$.

Ergo si recta secundum rationem extremam ac mediam diuiditur, quadratum maioris partis adiuncta dimidia parte totius aequale est quadrato dimidia quinques sumpto; quod erat demonstrandum.

II.

Si quadratum lineae rectae quadrato partis eius quinques sumpto aequale est, duplo partis illius secundum rationem extremam ac mediam diuiso maior pars reliquum est rectae ab initio sumptae.

nam sit $AB^2 = 5A\Gamma^2$ et $\Gamma\Delta = 2A\Gamma$. dico, recta $\Gamma\Delta$ secundum rationem extremam ac mediam diuisa maiorem partem esse ΓB .

construantur enim in utraque AB , $\Gamma\Delta$ quadrata AZ , ΓH , et in AZ figura describatur, et producat

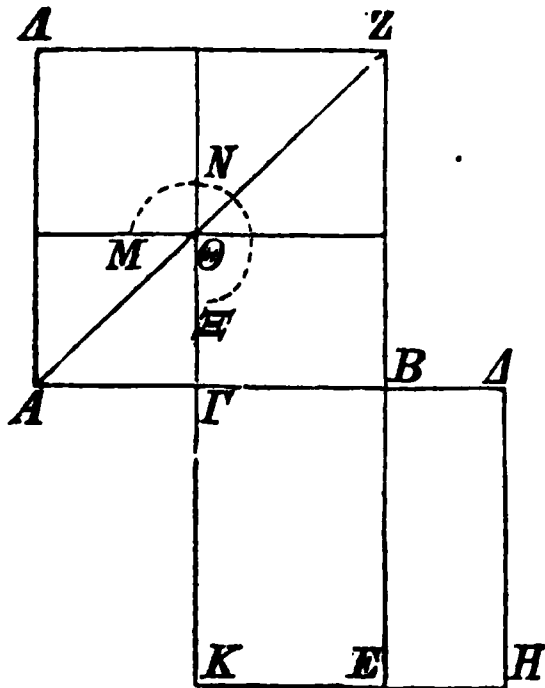
$\Gamma K BV$ q. 3. $Z\Theta BV$. $\delta\lambda\omicron\nu$] om. P. 4. Post $MN\Xi$ eras. $\tau\epsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu\omega$ (comp.) b. 5. AB q. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P.
 6. $\tau\omicron\upsilon\tau\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ B. 7. $\Delta\Theta$] e corr. V, $A\Theta$ P et B sed corr.
 8. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] om. P. $\gamma\nu\acute{\omega}\mu\omega\nu$ $\acute{\alpha}\rho\alpha$ b. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. AO] corr.
 ex $A\Theta$ B, $\Delta\Theta$ q et in ras. V; item lin. 9, 10. 9. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] (alt.) $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ PB. 10. $\Gamma\Delta$ B et V, sed corr. m. 2. 11. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. 13. $\tau\acute{\eta}\nu$] e corr. m. 1 q. 14. $\delta\upsilon\nu\acute{\eta}\sigma\epsilon\tau\alpha\iota$ BV b q.
 23. $\delta\upsilon\nu\epsilon\lambda\acute{\omicron}\theta\omega$ b. 27. $\tau\acute{\omicron}$ $\acute{\epsilon}\nu$ P.

AZ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ BE . καὶ ἐπεὶ πεντα-
 πλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BA τοῦ ἀπὸ τῆς AG , πεντα-
 πλάσιόν ἐστι τὸ AZ τοῦ $A\Theta$. τετραπλάσιος ἄρα ὁ
 $MNΞ$ γνώμων τοῦ $A\Theta$. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ $\Delta\Gamma$
 5 τῆς GA , τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ $\Delta\Gamma$ τοῦ ἀπὸ
 GA , τουτέστι τὸ ΓH τοῦ $A\Theta$. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ $MNΞ$
 γνώμων τετραπλάσιος τοῦ $A\Theta$. ἴσος ἄρα ὁ $MNΞ$ γνώ-
 μων τῷ ΓH . καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ $\Delta\Gamma$ τῆς GA ,
 ἴση δὲ ἡ μὲν $\Delta\Gamma$ τῇ ΓK , ἡ δὲ AG τῇ $\Gamma\Theta$ [διπλῆ
 10 ἄρα καὶ ἡ $K\Gamma$ τῆς $\Gamma\Theta$], διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ KB
 τοῦ $B\Theta$. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ $A\Theta$, ΘB τοῦ ΘB διπλάσια·
 ἴσον ἄρα τὸ KB τοῖς $A\Theta$, ΘB . ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλος
 ὁ $MNΞ$ γνώμων ὅλῳ τῷ ΓH ἴσος· καὶ λοιπὸν ἄρα
 τὸ ΘZ τῷ BH ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν BH τὸ
 15 ὑπὸ τῶν $\Gamma\Delta B$. ἴση γὰρ ἡ $\Gamma\Delta$ τῇ ΔH . τὸ δὲ ΘZ τὸ
 ἀπὸ τῆς ΓB . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $\Gamma\Delta B$ ἴσον ἐστὶ τῷ
 ἀπὸ τῆς ΓB . ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $\Delta\Gamma$ πρὸς τὴν ΓB ,
 οὕτως ἡ ΓB πρὸς τὴν $B\Delta$. μείζων δὲ ἡ $\Delta\Gamma$ τῆς ΓB .
 μείζων ἄρα καὶ ἡ ΓB τῆς $B\Delta$. τῆς $\Gamma\Delta$ ἄρα εὐθείας
 20 ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμήμα
 ἐστὶν ἡ ΓB .

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πεντα-
 πλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμή-
 ματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον
 25 τμήμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας·
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. τό] om. P b. 5. ἀπό] om. b, ἀπὸ τῆς BVq. ἀπό]
 ἀπὸ τῆς BVq. 6. τουτέστιν P. 7. τετραπλάσιος — γνώ-
 μων] supra m. 2 B. 8. ΓΑ] corr. ex ΔΑ m. 2 B. 9. δι-
 πλῆ — 10. ΓΘ] mg. postea add. P m. 1. 10. ΚΓ] ΓΚ P.
 11. εἰσίν P. εἰσί — ΘΒ (alt.)] et in textu m. 1 et mg.

BE . et quoniam $BA^2 = 5A\Gamma^2$, erit $AZ = 5A\Theta$.
 itaque $MN\Xi = 4A\Theta$. et quoniam $\Delta\Gamma = 2\Gamma A$, erit
 $\Delta\Gamma^2 = 4\Gamma A^2$, h. e. $\Gamma H = 4A\Theta$. demonstraui-
 mus autem, esse etiam $MN\Xi = 4A\Theta$. itaque $MN\Xi = \Gamma H$.
 et quoniam $\Delta\Gamma = 2\Gamma A$, et $\Delta\Gamma = \Gamma K$, $A\Gamma = \Gamma\Theta$, erit



etiam $KB = 2B\Theta$ [VI, 1]. uerum
 etiam $A\Theta + \Theta B = 2\Theta B$ [I,
 43]. itaque $KB = A\Theta + \Theta B$.
 demonstraui-
 mus autem, esse
 etiam $MN\Xi = \Gamma H$. quare ΘZ
 $= BH$. et $BH = \Gamma\Delta \times \Delta B$
 (nam $\Gamma\Delta = \Delta H$), $\Theta Z = \Gamma B^2$.
 itaque erit $\Gamma\Delta \times \Delta B = \Gamma B^2$.
 est igitur $\Delta\Gamma : \Gamma B = \Gamma B : B\Delta$
 [VI, 17]. est autem $\Delta\Gamma > \Gamma B$
 [u. lemma]. quare etiam ΓB
 $> B\Delta$ [V, 14]. itaque recta

$\Gamma\Delta$ secundum rationem extremam ac mediam diuisa
 maior pars est ΓB .

Ergo si quadratum lineae rectae quadrato partis
 eius quinquies sumpto aequale est, duplo partis illius
 secundum rationem extremam ac mediam diuiso maior
 pars reliquum est rectae ab initio sumptae; quod
 erat demonstrandum.

m. 2 B. διπλάσια τοῦ $B\Theta BV$. ΘB] (alt.) $B\Theta$ b.
 διπλάσιον q. 12. ἴσον — ΘB] mg. m. 2 B. τοῖς] τοῦ b.
 ὅλος] corr. ex ὅλον m. 1 P. 14. ἐστίν P. 15. $\Gamma\Delta$,
 ΔB q. ΔH] BH b. τό] (alt.) mutat. in τῶ m. 1 q.
 16. ἐστίν P. τῶ] corr. ex τό m. 1 P. 19. $\Gamma\Delta$] ante Γ
 del. Δ m. 1 b. 25. ἐστίν P. 26. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] o): -
 b, om. BV q.

Λήμμα.

Ὅτι δὲ ἡ διπλῆ τῆς $ΑΓ$ μείζων ἐστὶ τῆς $ΒΓ$, οὕτως δεικτέον.

Εἰ γὰρ μή, ἔστω, εἰ δυνατόν, ἡ $ΒΓ$ διπλῆ τῆς
 5 $ΓΑ$. τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ τοῦ ἀπὸ τῆς
 $ΓΑ$ · πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν $ΒΓ$, $ΓΑ$ τοῦ ἀπὸ
 τῆς $ΓΑ$. ὑπόκειται δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΑ$ πεντα-
 πλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓΑ$ · τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΒΑ$ ἴσον
 ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΒΓ$, $ΓΑ$ · ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα
 10 ἡ $ΓΒ$ διπλασία ἐστὶ τῆς $ΑΓ$. ὁμοίως δὲ δείξομεν,
 ὅτι οὐδὲ ἡ ἐλάττων τῆς $ΓΒ$ διπλασίον ἐστὶ τῆς $ΓΑ$ ·
 πολλῶ γὰρ [μείζον] τὸ ἄτοπον.

Ἡ ἄρα τῆς $ΑΓ$ διπλῆ μείζων ἐστὶ τῆς $ΓΒ$ · ὅπερ
 ἔδει δεῖξαι.

15

γ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον
 τμηθῆ, τὸ ἔλασσον τμήμα προσλαβὸν τὴν ἡμί-
 σειαν τοῦ μείζονος τμήματος πενταπλάσιον δύ-
 ναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμή-
 20 ματος τετραγώνου.

Εὐθεῖα γὰρ τις ἡ $ΑΒ$ ἄκρον καὶ μέσον λόγον
 τετμήσθω κατὰ τὸ $Γ$ σημεῖον, καὶ ἔστω μείζον τμήμα
 τὸ $ΑΓ$, καὶ τετμήσθω ἡ $ΑΓ$ δίχα κατὰ τὸ $Δ$ · λέγω,
 ὅτι πενταπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΔ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΔΓ$.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τετράγωνον τὸ
 25 $ΑΕ$, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα. ἐπεὶ διπλῆ
 ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῆς $ΔΓ$, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς

1. λήμμα] om. codd. 2. ἐστίν P. οὕτω B. 10. ΒΓ
 P. διπλασίον P. ἐστίν B. 11. ἡ] om. B, ins. m. 1 b,

Lemma.¹⁾

Esse autem $2AG > BG$, sic demonstrandum.

Nam si minus, sit, si fieri potest, $BG = 2GA$. ergo $BG^2 = 4GA^2$. itaque $BG^2 + GA^2 = 5GA^2$. uerum supposuimus, esse etiam $BA^2 = 5GA^2$. itaque $BA^2 = BG^2 + GA^2$; quod fieri non potest [II, 4]. itaque non est $GB = 2AG$. similiter demonstrabimus, ne minorem quidem recta GB duplo maiorem esse recta GA ; multo enim magis absurdum est. ergo $2AG > GB$; quod erat demonstrandum.

III.

Si linea recta secundum rationem extremam ac mediam diuiditur, quadratum minoris partis adiuncta dimidia maioris parte aequale est quadrato dimidia maioris partis quinquies sumpto.

Nam recta AB secundum rationem extremam ac mediam diuidatur in puncto Γ , et maior pars sit AG , et $A\Gamma$ in Δ in duas partes aequales diuidatur. dico, esse $B\Delta^2 = 5\Delta\Gamma^2$.

construatur enim in AB quadratum AE , et figura duplex describatur. iam quoniam $AG = 2\Delta\Gamma$, erit

1) Dubito, an hoc lemma genuinum non sit. neque enim opus est, et dicendi genus lin. 11 paullo insolentius est.

supra m. 2 V. ΓB] $B\Gamma BVq$. διπλασίων] in ras. V.
 Dein add. ἄρα B. ἐστίν PB. 12. μείζον] om. P. 13. ἐστίν
 B. 18. τμήματος] om. q. 21. τις ἢ] corr. ex τῆς m. 2 P.
 23. τό] (prius) ἢ Vq. 24. τοῦ] τοῖς q. 26. διπλοῦν] om. BVbq.
 σχῆμα διπλοῦν bq. καὶ ἐπεὶ BVbq. 27. τετραπλάσιον —
 p. 256, 1. $\Delta\Gamma$] om. b.

$ΑΓ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΔΓ$, τουτέστι τὸ $ΡΣ$ τοῦ $ΖΗ$. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΒΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$, καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΒΓ$ τὸ $ΓΕ$, τὸ ἄρα $ΓΕ$ ἴσον ἐστὶ τῷ $ΡΣ$. τετραπλάσιον δὲ τὸ $ΡΣ$ τοῦ $ΖΗ$. τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ $ΓΕ$ τοῦ $ΖΗ$. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΔ$ τῇ $ΔΓ$, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ $ΘΚ$ τῇ $ΚΖ$. ὥστε καὶ τὸ $ΗΖ$ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ $ΘΑ$ τετραγώνῳ. ἴση ἄρα ἡ $ΗΚ$ τῇ $ΚΛ$, τουτέστιν ἡ $ΜΝ$ τῇ $ΝΕ$. ὥστε καὶ τὸ $ΜΖ$ τῷ $ΖΕ$ ἐστὶν ἴσον. ἀλλὰ τὸ $ΜΖ$ τῷ $ΓΗ$

10 ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ $ΓΗ$ ἄρα τῷ $ΖΕ$ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ $ΓΝ$. ὁ ἄρα $ΞΟΠ$ γνῶμων ἴσος ἐστὶ τῷ $ΓΕ$. ἀλλὰ τὸ $ΓΕ$ τετραπλάσιον ἐδείχθη τοῦ $ΗΖ$. καὶ ὁ $ΞΟΠ$ ἄρα γνῶμων τετραπλάσιός ἐστὶ τοῦ $ΖΗ$ τετραγώνου. ὁ $ΞΟΠ$ ἄρα γνῶμων καὶ τὸ $ΖΗ$ τετρά-

15 γωνον πενταπλάσιός ἐστὶ τοῦ $ΖΗ$. ἀλλὰ ὁ $ΞΟΠ$ γνῶμων καὶ τὸ $ΖΗ$ τετράγωνόν ἐστὶ τὸ $ΔΝ$. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν $ΔΝ$ τὸ ἀπὸ τῆς $ΔΒ$, τὸ δὲ $ΗΖ$ τὸ ἀπὸ τῆς $ΔΓ$. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΔΒ$ πενταπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΔΓ$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20

δ'.

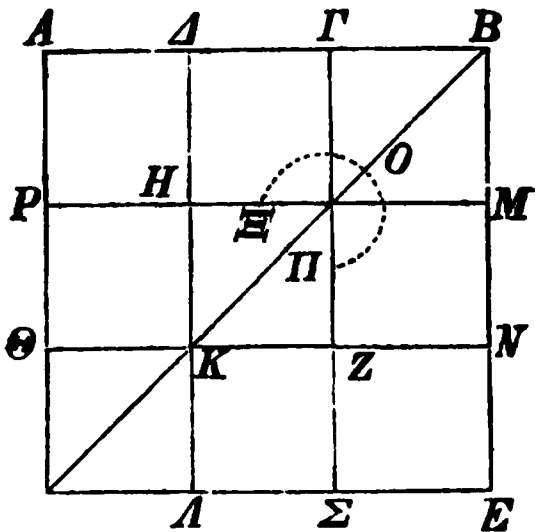
Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῆ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τὰ συναμφοτέρα τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετρα-

25 γώνου.

Ἐστω εὐθεῖα ἡ $ΑΒ$, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ $Γ$, καὶ ἔστω μείζον τμήμα τὸ $ΑΓ$.

1. $ΓΔ$ V. 3. τῶν] τῷ b. Post prius $ΓΕ$ add. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τὸ (τῷ V) $ΡΣ$ V b q, B m. 2. τὸ ἄρα — 4. $ΡΣ$]

$AG^2 = 4 \Delta \Gamma^2$, h. e. $P\Sigma = 4ZH$. et quoniam $AB \times B\Gamma = AG^2$ [VI def. 3. VI, 17] et $AB \times B\Gamma = \Gamma E$, erit $\Gamma E = P\Sigma$. sed $P\Sigma = 4ZH$. quare etiam $\Gamma E = 4ZH$. rursus quoniam $A\Delta = \Delta\Gamma$, erit etiam $\Theta K = KZ$.



quare etiam $HZ = \Theta A$. est igitur $HK = KA$, h. e. $MN = NE$. quare etiam $MZ = ZE$. sed $MZ = \Gamma H$. quare etiam $\Gamma H = ZE$. commune adiciatur ΓN . itaque $\Xi O \Pi = \Gamma E$. demonstrauius autem, esse $\Gamma E = 4HZ$. itaque etiam $\Xi O \Pi = 4ZH$. quare $\Xi O \Pi$

+ $ZH = 5ZH$. sed $\Xi O \Pi + ZH = \Delta N$. et $\Delta N = \Delta B^2$, $HZ = \Delta \Gamma^2$. ergo $\Delta B^2 = 5 \Delta \Gamma^2$; quod erat demonstrandum.

IV.

Si recta linea secundum rationem extremam ac mediam secatur, quadratum totius et quadratum partis minoris coniuncta triplo maiora sunt quadrato partis maioris.

Sit recta AB et secundum rationem extremam ac

(prius) om. V. 6. *ἐστίν* P. 8. *τῆ]* (alt.) *τῆι*, *ι* in ras. m. 1 P. 9. *ἀλλά* — 10. *ἴσον* (prius)] postea ins. m. 1 P. 11. ΓN] ΓH ? q. *ἔσται* b. 12. HZ] corr. ex ZH q. 13. *ἄρα*] om. P. *ἔστιν* B. HZ BVbq. 14. *τετραγώνου*] om. Bbq, supra m. 1. V. δ — ZH] τὸ ἄρα ΔN Theon (BVbq; N e corr. V, ΔH q). 15. *πενταπλάσιος*] -ς e corr. m. 1 P; -σιον BVbq. ZH τετραγώνου BVbq. *ἀλλά* — 16. ΔN] om. Theon (BVbq). 16. *ἔστιν* P. 17. *ἔστιν* B. ΔH q, corr. m. 1. 19. $\Gamma \Delta$ P. 22. *ἐλάττονος* P. 26. *ἔστω* — καί (prius)] *εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἢ* AB V.

λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓΑ$.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $ΑΔΕΒ$, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἡ
 5 AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ $Γ$, καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ $ΑΓ$, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΒΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν $ΑΒΓ$ τὸ $ΑΚ$, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τὸ $ΘΗ$. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΚ$ τῷ $ΘΗ$. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ $ΑΖ$ τῷ
 10 $ΖΕ$, κοινὸν προσκείσθω τὸ $ΓΚ$. ὅλον ἄρα τὸ $ΑΚ$ ὅλω τῷ $ΓΕ$ ἐστὶν ἴσον. τὰ ἄρα $ΑΚ$, $ΓΕ$ τοῦ $ΑΚ$ ἐστὶ διπλάσια. ἀλλὰ τὰ $ΑΚ$, $ΓΕ$ ὁ $ΑΜΝ$ γνώμων ἐστὶ καὶ τὸ $ΓΚ$ τετράγωνον. ὁ ἄρα $ΑΜΝ$ γνόμων καὶ τὸ $ΓΚ$ τετράγωνον διπλάσιά ἐστὶ τοῦ $ΑΚ$. ἀλλὰ
 15 μὴν καὶ τὸ $ΑΚ$ τῷ $ΘΗ$ ἐδείχθη ἴσον. ὁ ἄρα $ΑΜΝ$ γνόμων καὶ [τὸ $ΓΚ$ τετράγωνον διπλάσιά ἐστὶ τοῦ $ΘΗ$. ὥστε ὁ $ΑΜΝ$ γνόμων καὶ] τὰ $ΓΚ$, $ΘΗ$ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστὶ τοῦ $ΘΗ$ τετραγώνου. καὶ ἐστὶν ὁ [μὲν] $ΑΜΝ$ γνόμων καὶ τὰ $ΓΚ$, $ΘΗ$ τετράγωνα
 20 ὅλον τὸ $ΑΕ$ καὶ τὸ $ΓΚ$, ἅπερ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ τετράγωνα, τὸ δὲ $ΗΘ$ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τετράγωνον. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τετραγώνου. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

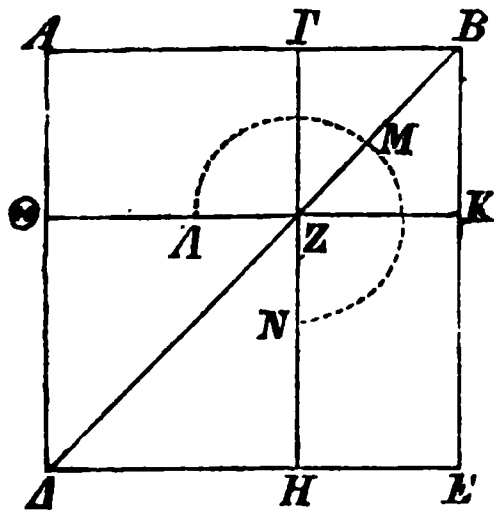
ε'.

25 Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῆ, καὶ προστεθῆ αὐτῇ ἴση τῷ μείζονι τμηματι, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέ-

1. τριπλασίονά q. 3. Ante ἀναγ. del. καί m. 1 b.
 5. Γ σημείον V. 7. ἐστὶ] (prius) ἐστίν P. 8. $ΑΚ$] $Κ$
 corr. m. 1 ex B P. $ΑΓ$] $ΑΚ$ b. 9. $ΘΗ$] $Θ$ e corr. m.

mediam secetur in Γ , et maior pars sit $A\Gamma$. dico, esse $AB^2 + B\Gamma^2 = 3\Gamma A^2$.

construatur enim in AB quadratum $A\Delta EB$, et describatur figura. iam quoniam AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secta est, et maior pars est $A\Gamma$, erit $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$ [VI def. 3. VI, 17]. et $AB \times B\Gamma = AK$, $A\Gamma^2 = \Theta H$. itaque $AK = \Theta H$. et quoniam $AZ = ZE$ [I, 43], com-



mune adiciatur ΓK . itaque $AK = \Gamma E$. ergo $AK + \Gamma E = 2AK$. sed $AK + \Gamma E = \Delta MN + \Gamma K$: itaque $\Delta MN + \Gamma K = 2AK$. demonstrauimus autem, esse etiam $AK = \Theta H$. itaque $\Delta MN + \Gamma K$

+ $\Theta H = 3\Theta H$. uerum $\Delta MN + \Gamma K + \Theta H = AE + \Gamma K = AB^2 + B\Gamma^2$, et $H\Theta = A\Gamma^2$. ergo $AB^2 + B\Gamma^2 = 3A\Gamma^2$; quod erat demonstrandum.

V.

Si recta linea secundum rationem extremam ac mediam secatur, et ei adicitur recta parti maiori aequalis, tota recta secundum rationem extremam ac

1 b. *ἐστίν* P. 10. *προσκεισθω κοινόν* BV. 11. ΓE] Γ
 b. *ἴσον ἐστὶ* V. 12. *γνώμων* — 13. ΔMN] bis b.
 14. *ἐστίν* P. 15. *μὴν καί*] om. q. 16. *τὸ* ΓK — 17. *καί*] om. P.
 16. *διπλάσιον* V. 17. ΘH — ΔMN] in ras. m.
 1 q. 18. *διπλάσια* b. *τριπλάσια* — 19. *τετράγωνα*] bis P, corr. m. 1.
 19. *μὲν*] om. P (etiam in repet.). 20. *ὅπερ* P. *ἐστίν* PB. *τά*] om. b. 22. *διπλάσια* b. *ἐστίν* P.
 26. *προτεθῆ* q. *τῶ* — 27. *εὐθεῖα*] mg. m. 1 b, in textu: *τῶ ὅλῳ τμήματι ἴση εὐθεῖα ὅλη.* 27. *ὅλη ἢ* BV.

τμηται, καὶ τὸ μείζον τμημά ἐστιν ἢ ἐξ ἀρχῆς εὐθεΐα.

Εὐθεΐα γὰρ γραμμὴ ἢ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημείον, καὶ ἔστω μείζον τμημα
 5 ἢ AG , καὶ τῇ AG ἴση [κείσθω] ἢ AD . λέγω, ὅτι ἢ DB εὐθεΐα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ A , καὶ τὸ μείζον τμημά ἐστιν ἢ ἐξ ἀρχῆς εὐθεΐα ἢ AB .

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ
 10 AE , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ ἢ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ , τὸ ἄρα ὑπὸ $AB\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ AG . καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ $AB\Gamma$ τὸ ΓE , τὸ δὲ ἀπὸ τῆς AG τὸ $\Gamma\Theta$. ἴσον ἄρα τὸ ΓE τῷ $\Theta\Gamma$. ἀλλὰ τῷ μὲν ΓE ἴσον ἐστὶ τὸ ΘE ,
 15 τῷ δὲ $\Theta\Gamma$ ἴσον τὸ $\Delta\Theta$. καὶ τὸ $\Delta\Theta$ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΘE [κοινὸν προσκείσθω τὸ ΘB]. ὅλον ἄρα τὸ ΔK ὅλω τῷ AE ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΔK τὸ ὑπὸ τῶν $B\Delta$, ΔA . ἴση γὰρ ἢ AD τῇ ΔA . τὸ δὲ AE τὸ ἀπὸ τῆς AB . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $B\Delta A$ ἴσον ἐστὶ τῷ
 20 ἀπὸ τῆς AB . ἐστὶν ἄρα ὡς ἢ DB πρὸς τὴν BA , οὕτως ἢ BA πρὸς τὴν AD . μείζων δὲ ἢ DB τῆς BA . μείζων ἄρα καὶ ἢ BA τῆς AD .

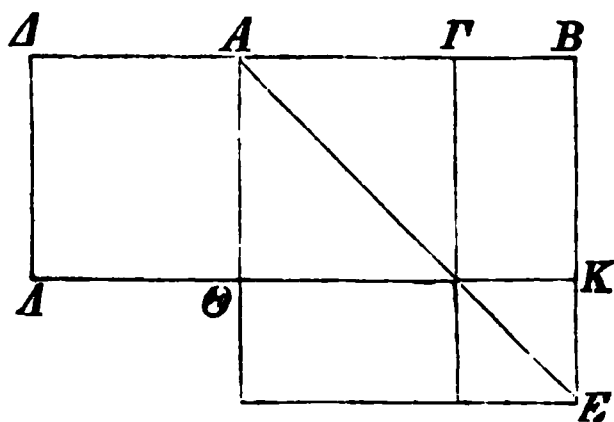
Ἡ ἄρα DB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ A , καὶ τὸ μείζον τμημά ἐστιν ἢ AB . ὅπερ ἔδει
 25 δεῖξαι.

3. ἢ] ἢ τό b. 5. κείσθω] om. P. 6. ΔB] $A\Delta$ b.
 7. ἢ] om. q. ἢ — εὐθεΐα] om. V. 8. AB] supra scr. Δ
 m. 1 b. 9. ἀναγεγεργ. P, corr. m. 1. 10. ἐπεὶ γάρ B V.
 12. τῶν $AB\Gamma$ V. ἀπό] corr. ex ὑπό m. 1 P. τῆς
 AG V. ἐστιν P. 13. τῶν $AB\Gamma$ V. $\Gamma\Theta$] $\Theta\Gamma$ P.
 14. $\Theta\Gamma$] corr. ex $\Gamma\Theta$ m. 2 V. 15. $\Theta\Gamma$] Θ e corr. V.
 16. κοινόν — ΘB] postea add. m. 1 P. ΘB] Θ e corr. b.

mediam secta est, et maior pars est recta ab initio sumpta.

Nam recta linea AB secundum rationem extremam ac mediam in puncto Γ secetur, et maior pars sit $A\Gamma$ et $A\Delta = A\Gamma$. dico, rectam ΔB secundum rationem extremam ac mediam in A sectam esse, et partem maiorem esse rectam ab initio sumptam AB .

construatur enim in AB quadratum AE , et describatur figura. quoniam AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secta est, erit $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$ [VI def. 3. VI, 17]. et $AB \times B\Gamma = \Gamma E$, $A\Gamma^2 = \Gamma\Theta$. itaque $\Gamma E = \Theta\Gamma$. uerum $\Theta E = \Gamma E$ [I, 43], $\Delta\Theta = \Theta\Gamma$. quare etiam $\Delta\Theta = \Theta E$. itaque



$\Delta K = AE$. et $\Delta K = B\Delta \times \Delta A$ (nam $A\Delta = \Delta A$), $AE = AB^2$. erit igitur $B\Delta \times \Delta A = AB^2$. itaque $\Delta B : BA = BA : A\Delta$ [VI, 17]. sed $\Delta B > BA$. itaque etiam $BA > A\Delta$ [V, 14].

Ergo ΔB in A secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars est AB ; quod erat demonstrandum.

18. ΔA] ΔA q. ΔA] corr. ex ΔA m. 1 b. 19. τὸ ἄρα
 — 20. AB] om. q. 20. ΔB] Δ corr. ex A m. 1 b.
 22. BA] (alt.) AB V, ΔB B, $B\Delta$ bq. 23. $B\Delta$ BV.
 25. Seq. alia demonstratio et analysis propp. I—V in bq; u. app.

5'.

Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῆ, ἐκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἀποτομή.

5 Ἐστω εὐθεῖα ῥητὴ ἢ AB καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ , καὶ ἔστω μείζον τμήμα ἢ AG . λέγω, ὅτι ἐκατέρω τῶν AG , GB ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἢ BA , καὶ κείσθω τῆς BA ἡμί-
 10 σεια ἢ AD . ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἢ AB τέτμηται ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ , καὶ τῷ μείζονι τμήματι τῷ AG πρόσκειται ἢ AD ἡμίσεια οὕσα τῆς AB , τὸ ἄρα ἀπὸ ΓD τοῦ ἀπὸ DA πενταπλάσιόν ἐστιν. τὸ ἄρα ἀπὸ ΓD πρὸς τὸ ἀπὸ DA λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς
 15 πρὸς ἀριθμὸν· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ ΓD τῷ ἀπὸ DA . ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ DA . ῥητὴ γὰρ [ἐστιν] ἢ DA ἡμίσεια οὕσα τῆς AB ῥητῆς οὕσης· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΓD . ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἢ ΓD . καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΓD πρὸς τὸ ἀπὸ DA λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος
 20 ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀσύμμετρος ἄρα μήκει ἢ ΓD τῇ DA . αἱ ΓD , DA ἄρα ῥηταί εἰσι δύναμι μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἢ AG . πάλιν, ἐπεὶ ἢ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται,

Hanc prop. om. bq. 3. ἐστιν] mg. m. 1 V. 4. ἀπο-
 τομή] ῥητὴ B, corr. m. 2. 7. AG] Γ in ras. m. 1 P.
 AB , $B\Gamma$ B, corr. m. 2. 9. ἐκβεβλήσθω] κ corr. ex μ m.
 2 B. τῆς] τῇ B, corr. m. 2. 10. τέτμηται] om. V.
 11. λόγον τέτμηται V. 13. τῆς ΓD V. τῆς DA V.
 ἐστι B V. 14. τῆς ΓD V. πρὸς] supra m. 1 P. τό] in
 ras. plurium litt. m. 1 P. τῆς DA V. 16. AD bis P.
 ῥητὴ V. δέ] in ras. V. τό — γὰρ] om. V. ἐστιν] om.
 P. 18. ἐστίν B. 21. εἰσιν PB.

VI.¹⁾

Si recta rationalis secundum rationem extremam ac mediam diuiditur, utraque pars irrationalis est apotome quae uocatur.

Sit recta rationalis AB et secundum rationem extremam ac mediam in Γ diuidatur, et maior pars sit $A\Gamma$. dico, utramque $A\Gamma$, ΓB irrationalem esse apotomen quae uocatur.



producatur enim BA et ponatur $A\Delta = \frac{1}{2}BA$. iam quoniam recta AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et parti maiori $A\Gamma$ adiecta est $A\Delta$ dimidia rectae AB , erit $\Gamma\Delta^2 = 5\Delta A^2$ [prop. I]. itaque $\Gamma\Delta^2$ ad ΔA^2 rationem habet quam numerus ad numerum. itaque $\Gamma\Delta^2$ et ΔA^2 commensurabilia sunt [X, 6]. sed ΔA^2 rationale est; nam ΔA , quae dimidia est rectae rationalis AB , rationalis est. itaque etiam $\Gamma\Delta^2$ rationale est [X def. 9]. quare $\Gamma\Delta$ et ipsa rationalis est. et quoniam $\Gamma\Delta^2$ ad ΔA^2 rationem non habet quam numerus quadratus ad numerum quadratum, $\Gamma\Delta$ et ΔA longitudine incommensurabiles sunt [X, 9]. itaque $\Gamma\Delta$, ΔA rationales sunt potentia solum commensurabiles. itaque apotome est $A\Gamma$ [X, 73]. rursus quoniam AB secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars est

1) In P in mg. add. m. 1: τοῦτο τὸ θεώρημα ἐν τοῖς πλείστοις τῆς νέας ἐκδόσεως οὐ φέρεται, ἐν δὲ τοῖς τῆς παλαιᾶς εὐρίσκεται. de q u. app.

καὶ τὸ μείζον τμημά ἐστιν ἡ $ΑΓ$, τὸ ἄρα ὑπὸ $ΑΒ$,
 $ΒΓ$ τῷ ἀπὸ $ΑΓ$ ἴσον ἐστίν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΑΓ$
ἀποτομῆς παρὰ τὴν $ΑΒ$ ῥητὴν παραβληθὲν πλάτος
ποιεῖ τὴν $ΒΓ$. τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παρα-
5 βαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην· ἀποτομὴ
ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ $ΓΒ$. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ $ΓΑ$ ἀποτομή.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ,
ἐκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστὶν ἢ καλουμένη
ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

ξ'.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γω-
νίαι ἦτοι αἱ κατὰ τὸ ἐξῆς ἢ αἱ μὴ κατὰ τὸ ἐξῆς
ἴσαι ᾧσιν, ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ πεντάγωνον.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου τοῦ $ΑΒΓΔΕ$ αἱ τρεῖς
15 γωνίαι πρότερον αἱ κατὰ τὸ ἐξῆς αἱ πρὸς τοῖς $Α$, $Β$,
 $Γ$ ἴσαι ἀλλήλαις ἔστωσαν· λέγω, ὅτι ἰσογώνιον ἐστὶ
τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πεντάγωνον.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ $ΑΓ$, $ΒΕ$, $ΖΔ$. καὶ ἐπεὶ
δύο αἱ $ΓΒ$, $ΒΑ$ δυσι ταῖς $ΒΑ$, $ΑΕ$ ἴσαι εἰσὶν ἐκα-
20 τέρα ἐκατέρω, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΓΒΑ$ γωνία τῇ ὑπὸ
 $ΒΑΕ$ ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα ἡ $ΑΓ$ βάσει τῇ $ΒΕ$ ἐστὶν
ἴση, καὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΑΒΕ$ τριγώνῳ ἴσον,
καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται,
ὅφ' ἄς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἢ μὲν ὑπὸ
25 $ΒΓΑ$ τῇ ὑπὸ $ΒΕΑ$, ἢ δὲ ὑπὸ $ΑΒΕ$ τῇ ὑπὸ $ΓΑΒ$.
ᾧστε καὶ πλευρὰ ἡ $ΑΖ$ πλευρᾷ τῇ $ΒΖ$ ἐστὶν ἴση.
ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ $ΑΓ$ ὅλη τῇ $ΒΕ$ ἴση· καὶ λοιπὴ

1. Ante καὶ add. κατὰ τὸ $Γ Β$. $ΑΒΓ Β$. 2. ἐστὶ
 $ΒΒ$. 4. ἀποτομῆς] ἀπο- supra scr. m. 2 $Β$. 6. $ΓΑ$] $ΑΓ ΒΒ$.
7. ῥητὴ — 9. δεῖξαι]: ~ $ΒΒ$. 8. ἄλογον P . Seq. in

AG , erit $AB \times B\Gamma = AG^2$ [VI def. 3. VI, 17]. itaque quadratum apotomes AG ad AB rationalem adplicatum latitudinem efficit $B\Gamma$. quadratum autem apotomes ad rationalem adplicatum latitudinem efficit apotomen primam [X, 97]. itaque ΓB apotome est prima. demonstrauius autem, etiam ΓA apotomen esse.

Ergo si recta rationalis secundum rationem extremam ac mediam diuiditur, utraque pars irrationalis est apotome quae uocatur; quod erat demonstrandum.

VII.

Si pentagoni aequilateri tres anguli, siue deinceps positi sunt siue non deinceps, inter se aequales sunt, pentagonum aequiangulum erit.

Nam pentagoni aequilateri $AB\Gamma\Delta E$ prius, qui deinceps positi sunt, tres anguli A , B , Γ inter se aequales sint. dico, pentagonum $AB\Gamma\Delta E$ aequiangulum esse.

ducantur enim AG , BE , $Z\Delta$. et quoniam duo latera ΓB , BA duobus lateribus BA , AE singula singulis aequalia sunt, et $\angle \Gamma B A = B A E$, erit $AG = BE$ et $\triangle AB\Gamma = ABE$, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, sub quibus aequalia latera subtendunt [I, 4], $\angle B\Gamma A = B E A$, $\angle A B E = \Gamma A B$. quare etiam $AZ = BZ$ [I, 6]. demonstrauius autem, esse etiam $AG = BE$. itaque etiam $Z\Gamma = ZE$.

P altera demonstr. prop. V et analysis prop. I—V, in BV analysis prop. I—V; u. app. 10. ζ'] om. b, qui hinc numeros propp. om. 12. ἦτοι] ἦ V. ἦ αἰ — ἐξῆς] om. q. ἦ αἰ] in ras. m. 1 B. 16. ἐστιν P. 18. -χθωσαν — 19. AE] mg. m. 2 B, sed etiam m. 1 in textu, om. BE — ΓB. 19. δύο] αἰ δύο P. 22. ἴσον ἐστὶ q. 25. BΓA] ΓA in ras. V, BΑΓ B.

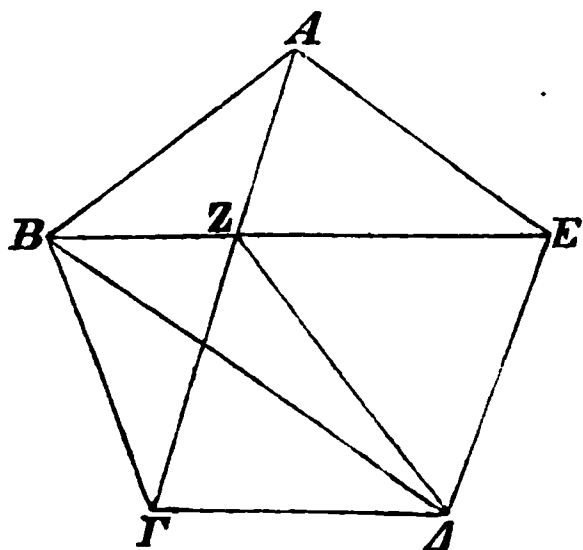
ἄρα ἡ $ZΓ$ λοιπῇ τῇ ZE ἐστὶν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ
 $ΓΔ$ τῇ $ΔE$ ἴση. δύο δὴ αἰ $ZΓ$, $ΓΔ$ δυσὶ ταῖς ZE ,
 $EΔ$ ἴσαι εἰσὶν· καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ $ZΔ$. γωνία
 ἄρα ἡ ὑπὸ $ZΓΔ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ZEΔ$ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη
 5 δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $BΓA$ τῇ ὑπὸ AEB ἴση· καὶ ὅλη ἄρα
 ἡ ὑπὸ $BΓΔ$ ὅλη τῇ ὑπὸ $AEΔ$ ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ
 $BΓΔ$ ἴση ὑπόκειται ταῖς πρὸς τοῖς A , B γωνίαις· καὶ
 ἡ ὑπὸ $AEΔ$ ἄρα ταῖς πρὸς τοῖς A , B γωνίαις ἴση
 ἐστίν. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ $ΓΔE$ γω-
 10 νία ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς A , B , $Γ$ γωνίαις· ἰσο-
 γώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓΔE$ πεντάγωνον.

Ἄλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν ἴσαι αἰ κατὰ τὸ ἐξῆς γωνίαι,
 ἀλλ' ἔστωσαν ἴσαι αἰ πρὸς τοῖς A , $Γ$, $Δ$ σημείοις·
 λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ $ABΓΔE$
 15 πεντάγωνον.

Ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ $BΔ$. καὶ ἐπεὶ δύο αἰ BA , AE
 δυσὶ ταῖς $BΓ$, $ΓΔ$ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περι-
 έχουσιν, βάσις ἄρα ἡ BE βάσει τῇ $BΔ$ ἴση ἐστίν, καὶ
 τὸ ABE τρίγωνον τῷ $BΓΔ$ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ
 20 αἰ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔδονται,
 ὅφ' ἄς αἰ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν
 ἡ ὑπὸ AEB γωνία τῇ ὑπὸ $ΓΔB$. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ
 ὑπὸ $BEΔ$ γωνία τῇ ὑπὸ $BΔE$ ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ
 ἡ BE πλευρᾶ τῇ $BΔ$ ἐστὶν ἴση. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ
 25 $AEΔ$ γωνία ὅλη τῇ ὑπὸ $ΓΔE$ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ ἡ
 ὑπὸ $ΓΔE$ ταῖς πρὸς τοῖς A , $Γ$ γωνίαις ὑπόκειται ἴση·

1. ἐστὶν ἴση — 3. $EΔ$] bis b. 1. ἐστὶν B. 3. εἰσί
 V b. 5. καὶ] om. BV. 6. ἐστὶν ἴση BV. ἀλλὰ BV q.
 7. $BΓΔ$] sic, sed mg. m. 1 $ΓΔE$ b. γωνίαις] om.
 BV b. 8. τοῖς] τοῦς q. Post B add. $Γ$ q et supra m.
 1 V. 10. $Γ$] om. B, supra m. 1 V. 11. ἐστίν B, om. V.

uerum etiam $\Gamma\Delta = \Delta E$. itaque duo latera $Z\Gamma$, $\Gamma\Delta$ duobus lateribus ZE , $E\Delta$ aequalia sunt; et basis eorum communis est $Z\Delta$. itaque $\angle Z\Gamma\Delta = \angle ZE\Delta$ [I, 8]. demonstrauius autem, esse etiam $\angle B\Gamma A = \angle AEB$. quare etiam $\angle B\Gamma\Delta = \angle AE\Delta$. supposuimus



autem, angulum $B\Gamma\Delta$ angulis ad A , B positis aequalem esse. itaque etiam $\angle AE\Delta$ angulis ad A , B positis aequalis est. iam similiter demonstrabimus, etiam angulum $\Gamma\Delta E$ angulis ad A , B , Γ positis aequalem esse. ergo pentagonum $AB\Gamma\Delta E$ aequiangulum est.

iam uero anguli deinceps positi aequales ne sint, sed aequales sint anguli ad puncta A , Γ , Δ positi. dico, sic quoque pentagonum aequiangulum esse.

ducatur enim $B\Delta$. et quoniam duo latera BA , AE duobus lateribus $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ aequalia sunt et aequales angulos comprehendunt, erit $BE = B\Delta$ et $\triangle ABE = B\Gamma\Delta$, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, sub quibus aequalia latera subtendunt [I, 4]. itaque $\angle AEB = \angle \Gamma\Delta B$. uerum etiam $\angle BE\Delta = \angle B\Delta E$, quoniam etiam $BE = B\Delta$ [I, 6]. itaque $\angle AE\Delta = \angle \Gamma\Delta E$. supposuimus autem, angulum $\Gamma\Delta E$ angulis ad A , Γ positis aequalem esse. ergo etiam $\angle AE\Delta$ angulis ad

14. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ B. 16. $\acute{\epsilon}\pi\epsilon\zeta\epsilon\upsilon\chi\theta\omega\sigma\alpha\nu$ B. $\eta]$ $\alpha\acute{\iota}$ B. 17. $\epsilon\lambda\acute{\iota}\sigma\iota\nu$ PB.
 $\pi\epsilon\rho\iota\acute{\alpha}\chi\omicron\nu\sigma\iota$ PVbq. 18. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$ Vq, comp. b. 19. ABE $\acute{\alpha}\rho\alpha$
 bq. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$ PVq, comp. b. 21. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$] om. V. 22. $AE\Delta$
 $-\Gamma\Delta B]$ $AB\Gamma P$. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ B. 24. $\kappa\alpha\acute{\iota}]$ om. BV.

καὶ ἡ ὑπὸ $AE\Delta$ ἄρα γωνία ταῖς πρὸς τοῖς A, Γ ἴση ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς A, Γ, Δ γωνίαις. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma\Delta E$ πεντάγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5

η'.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τὰς κατὰ τὸ ἐξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ
10 τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τοῦ $AB\Gamma\Delta E$ δύο γωνίας τὰς κατὰ τὸ ἐξῆς τὰς πρὸς τοῖς A, B ὑποτεινέτωσαν εὐθεῖαι αἱ AG, BE τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ Θ σημεῖον· λέγω, ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν
15 ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ σημεῖον, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

Περιγεγράφθω γὰρ περὶ τὸ $AB\Gamma\Delta E$ πεντάγωνον κύκλος ὁ $AB\Gamma\Delta E$. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ EA, AB
20 δυεὶ ταῖς $AB, B\Gamma$ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ BE βάσει τῇ AG ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ABE τρίγωνον τῷ $AB\Gamma$ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.
25 ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ BAG γωνία τῇ ὑπὸ ABE · διπλῇ

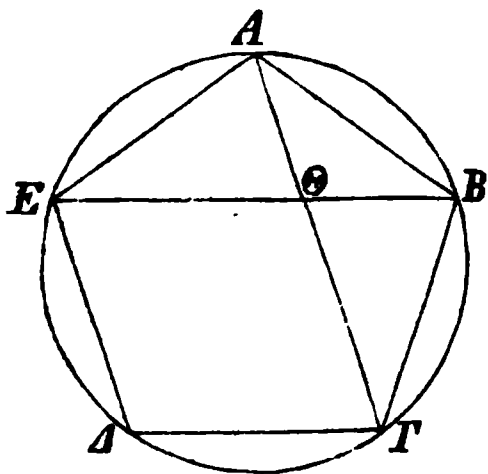
1. γωνία ἄρα bq. τοῖς] ταῖς b. 2. ἐστίν] ἐστὶ V bq. ἐστὶ] ἐστίν B. 3. τοῖς] τοι P. ἐστὶ] om. V. 4. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. B bq. 7. ὑποτείνουσιν Pq. 9. ἔσται q. 16. εἰσίν B, εἰσὶ V. 20. εἰσίν PB. περιέχουσι V bq. 21. ἐστὶ PVq, comp. b. 22. ἐστὶ PV bq. 23. ἔσονται] εἰσίν q. 25. ἴση — p. 270, 1 BAΘ] sic b, sed mg. m. 1:

A, Γ positis aequalis est. eadem de causa etiam $\angle AB\Gamma$ angulis ad A, Γ, Δ positis aequalis est. ergo pentagonum $AB\Gamma\Delta E$ aequiangulum est; quod erat demonstrandum.

VIII.

Si in pentagono aequilatero et aequiangulo sub duobus angulis deinceps positae rectae subtendunt, inter se secundum rationem extremam ac mediam secant, et partes earum maiores aequales sunt lateri pentagoni.

Nam in pentagono aequilatero et aequiangulo $AB\Gamma\Delta E$ sub duobus angulis ad A, B deinceps positae rectae $A\Gamma, BE$ subtendant inter se secantes in puncto Θ . dico, utramque secundum rationem extremam ac mediam sectam esse in puncto Θ , et partes earum maiores aequales esse lateri pentagoni.



circumscribatur enim circum $AB\Gamma\Delta E$ pentagonum circulus $AB\Gamma\Delta E$ [IV, 14]. et quoniam duo latera EA, AB duobus $AB, B\Gamma$ aequalia sunt et aequales angulos comprehendunt, erit $BE = A\Gamma$, et $\triangle ABE = AB\Gamma$, et reliqui anguli reliquis aequales erunt singuli singulis, sub quibus aequalia latera subtendunt [I, 4]. itaque $\angle BA\Gamma = ABE$. quare $\angle A\Theta E$

γρ. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ABE καὶ ἡ $A\Theta E$ ἄρα διπλῆ ἐστὶ τῆς $BA\Theta$ γωνίας ἐκτὸς γάρ ἐστὶ τοῦ $AB\Theta$ τριγώνου. 25. ἐστίν] om.
 Vq. γωνία] om. q. διπλῆ ἄρα] om. q.

ἄρα ἡ ὑπὸ $A\Theta E$ τῆς ὑπὸ $BA\Theta$. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ
 EAG τῆς ὑπὸ BAG διπλῆ, ἐπειδήπερ καὶ περιφέρεια
 ἡ EAG περιφερείας τῆς GB ἐστὶ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ
 ὑπὸ ΘAE γωνία τῇ ὑπὸ $A\Theta E$ · ὥστε καὶ ἡ ΘE εὐθεῖα
 5 τῇ EA , τουτέστι τῇ AB ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση
 ἐστὶν ἡ BA εὐθεῖα τῇ AE , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ
 ABE τῇ ὑπὸ AEB . ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ABE τῇ ὑπὸ $BA\Theta$
 ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ BEA ἄρα τῇ ὑπὸ $BA\Theta$ ἐστὶν
 ἴση. καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ABE καὶ
 10 τοῦ $AB\Theta$ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ABE · λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ BAE
 γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ $A\Theta B$ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ
 τὸ ABE τρίγωνον τῷ $AB\Theta$ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα
 ἐστὶν ὡς ἡ EB πρὸς τὴν BA , οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν
 $B\Theta$. ἴση δὲ ἡ BA τῇ $E\Theta$ · ὡς ἄρα ἡ BE πρὸς τὴν
 15 $E\Theta$, οὕτως ἡ $E\Theta$ πρὸς τὴν ΘB . μείζων δὲ ἡ BE
 τῆς $E\Theta$ · μείζων ἄρα καὶ ἡ $E\Theta$ τῆς ΘB . ἡ BE ἄρα
 ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ , καὶ τὸ
 μείζον τμήμα τὸ ΘE ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου
 πλευρᾷ. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἡ AG ἄκρον
 20 καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ , καὶ τὸ μείζον
 αὐτῆς τμήμα ἡ $G\Theta$ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου
 πλευρᾷ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ'.

Ἐὰν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ καὶ ἡ τοῦ
 25 δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγρα-
 φομένων συντεθῶσιν, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον

1. Post $A\Theta E$ add. ἄρα διπλῆ ἐστὶ q . Post $BA\Theta$ add.
 γωνίας· ἐκτὸς γάρ ἐστὶ τοῦ $AB\Theta$ τριγώνου Vq , B m. 2.
 ἐστὶν PB . 2. ἐπειδὴ BV . καί] supra m. 2 B. 3. EAG]
 EAG τῆς q . ἐστὶν B . 4. ΘAE] $A\Theta E$ q , ΘAE " b.

$= 2BA^\ominus$ [I, 32]. uerum etiam $\angle EAG = 2BAG$,
 quoniam arcus EAG duplo maior est arcu GB [III,
 28. VI, 33]. itaque $\angle \ominus AE = A^\ominus E$. quare etiam
 $\ominus E = EA = AB$ [I, 6]. et quoniam $BA = AE$,
 erit etiam $\angle ABE = AEB$ [I, 5]. demonstrauius
 autem, esse $\angle ABE = BA^\ominus$. quare etiam $\angle BEA$
 $= BA^\ominus$. et duorum triangulorum ABE , AB^\ominus com-
 munis est $\angle ABE$. itaque $\angle BAE = A^\ominus B$ [I, 32].
 quare trianguli ABE , AB^\ominus aequianguli sunt. erit
 igitur [VI, 4] $EB : BA = AB : B^\ominus$. sed $BA = E^\ominus$.
 itaque $BE : E^\ominus = E^\ominus : \ominus B$. uerum $BE > E^\ominus$. itaque
 etiam $E^\ominus > \ominus B$ [V, 14]. ergo BE in \ominus secundum
 rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior
 pars $\ominus E$ lateri pentagoni aequalis est. similiter de-
 monstrabimus, etiam AG in \ominus secundum rationem ex-
 tremam ac mediam diuisam esse, et maiorem eius
 partem G^\ominus lateri pentagoni aequalem esse; quod erat
 demonstrandum.

IX.

Lateribus hexagoni et decagoni in eundem circulum
 inscriptorum coniunctis tota recta secundum rationem

IX. Theon in Ptolem. p. 181.

$A^\ominus E$] EA^\ominus q, $A^\ominus E'$ b. 5. τουτέστιν B. 6. BA] AB bq.
 $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$] om. q, $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ B. 7. τῆ ὑπὸ AEB] mg. m. 2 B.
 $\acute{\alpha}\lambda\lambda'$ bq. BA^\ominus] AB^\ominus B, corr. m. 2. 8. ἄρα] om. P,
 $\acute{\alpha}\rho\alpha$ γωνία V. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$] om. V. 9. ἴση] in ras. m. 1 b.
 10. BAE] e corr. V. 11. AB^\ominus b. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$] om. V.
 12. AB^\ominus] B^\ominus in ras. V. 16. ἄρα] $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$ comp. V. E^\ominus] corr. in EB b et B m. 2. 18 $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ PB. 19. GA q.
 21. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ B. 25. τῶν] corr. ex τόν m. 2 P. τόν] corr. ex τῶν m. 2 P. αὐτόν] om. b.

καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς
 τμημὰ ἐστὶν ἢ τοῦ ἑξαγώνου πλευρά.

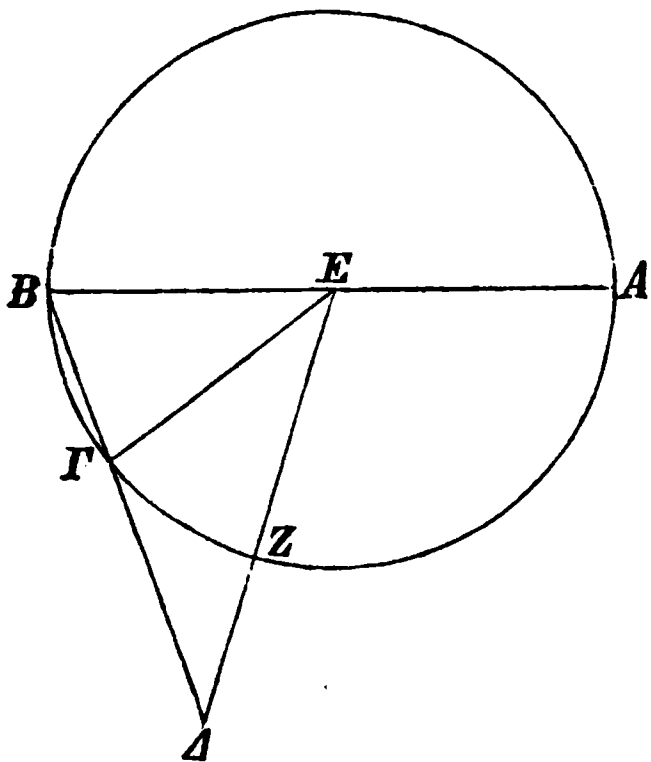
Ἔστω κύκλος ὁ $ΑΒΓ$, καὶ τῶν εἰς τὸν $ΑΒΓ$ κύ-
 κλον ἐγγραφομένων σχημάτων, δεκαγώνου μὲν ἔστω
 5 πλευρὰ ἢ $ΒΓ$, ἑξαγώνου δὲ ἢ $ΓΔ$, καὶ ἔστωσαν ἐπ'
 εὐθείας· λέγω, ὅτι ἢ ὅλη εὐθεῖα ἢ $ΒΔ$ ἄκρον καὶ
 μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημὰ
 ἐστὶν ἢ $ΓΔ$.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ $Ε$ σημεῖον,
 10 καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΕΒ$, $ΕΓ$, $ΕΔ$, καὶ διήχθω ἢ
 $ΒΕ$ ἐπὶ τὸ $Α$. ἐπεὶ δεκαγώνου ἰσοπλεύρου πλευρὰ
 ἐστὶν ἢ $ΒΓ$, πενταπλασίων ἄρα ἢ $ΑΓΒ$ περιφέρεια
 τῆς $ΒΓ$ περιφερείας· τετραπλασίων ἄρα ἢ $ΑΓ$ περι-
 φέρεια τῆς $ΓΒ$. ὡς δὲ ἢ $ΑΓ$ περιφέρεια πρὸς τὴν
 15 $ΓΒ$, οὕτως ἢ ὑπὸ $ΑΕΓ$ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ $ΓΕΒ$.
 τετραπλασίων ἄρα ἢ ὑπὸ $ΑΕΓ$ τῆς ὑπὸ $ΓΕΒ$. καὶ
 ἐπεὶ ἴση ἢ ὑπὸ $ΕΒΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΕΓΒ$, ἢ ἄρα
 ὑπὸ $ΑΕΓ$ γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ $ΕΓΒ$. καὶ
 ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ $ΕΓ$ εὐθεῖα τῇ $ΓΔ$. ἑκατέρα γὰρ
 20 αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν
 $ΑΒΓ$ κύκλου [ἐγγραφομένου]. ἴση ἐστὶ καὶ ἢ ὑπὸ
 $ΓΕΔ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΓΔΕ$ γωνία· διπλασία ἄρα ἢ
 ὑπὸ $ΕΓΒ$ γωνία τῆς ὑπὸ $ΕΔΓ$. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ $ΕΓΒ$
 διπλασία ἐδείχθη ἢ ὑπὸ $ΑΕΓ$. τετραπλασία ἄρα ἢ
 25 ὑπὸ $ΑΕΓ$ τῆς ὑπὸ $ΕΔΓ$. ἐδείχθη δὲ καὶ τῆς ὑπὸ
 $ΒΕΓ$ τετραπλασία ἢ ὑπὸ $ΑΕΓ$. ἴση ἄρα ἢ ὑπὸ $ΕΔΓ$

1. καί] (prius) corr. ex κατά m. rec. P. 7. Post τέτμηται
 add. κατά τὸ Γ V, B m. 2. 11. EB b. Ante ἐπεὶ add. καὶ
 BVq, P m. 2. τοῦ δεκαγ. q. 12. ΑΓΒ] in ras. m. 2 V,
 B add. m. rec. b. 13. ΒΓ — 14. τῆς] om. b. 15. ΑΕΓ]
 Γ corr. ex B m. rec. b. 16. ἄρα ἐστὶν P. 17. ἴση ἐστὶν
 P. 18. ΑΕΓ] ΕΑΓ B, corr. m. 2. διπλασίων V.

extremam ac mediam diuisa est, et maior eius pars
latus est hexagoni.

Sit circulus $AB\Gamma$, et figurarum in circulo $AB\Gamma$
inscriptarum decagoni latus sit $B\Gamma$, hexagoni autem
 $\Gamma\Delta$, et in eadem recta po-
sitae sint. dico, totam rec-
tam $B\Delta$ secundum ratio-
nem extremam ac mediam
diuisam esse, et maiorem
partem esse $\Gamma\Delta$.



sumatur enim centrum
circuli E punctum [III, 1],
et ducantur EB , $E\Gamma$, $E\Delta$,
et BE ad A producat. quoniam $B\Gamma$ latus est de-
cagoni aequilateri, arcus

$A\Gamma B$ quintuplo maior est arcu $B\Gamma$. itaque arcus
 $A\Gamma$ quadruplo maior est arcu ΓB . sed ut arcus $A\Gamma$
ad arcum ΓB , ita angulus AEG ad angulum ΓEB
[VI, 33]. itaque $\angle AEG = 4\Gamma EB$. et quoniam $\angle EBG$
 $= E\Gamma B$ [I, 5], erit $\angle AEG = 2E\Gamma B$ [I, 32]. et
quoniam $E\Gamma = \Gamma\Delta$ [IV, 15 coroll.] (nam utraque
lateri hexagoni in circulo $AB\Gamma$ inscripti aequalis est),
erit etiam $\angle \Gamma E\Delta = \Gamma\Delta E$ [I, 5]. itaque $\angle E\Gamma B = 2E\Delta\Gamma$
[I, 32]. demonstrauius autem, esse etiam $\angle AEG$
 $= 2E\Gamma B$. itaque $\angle AEG = 4E\Delta\Gamma$. demonstrauius

$\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ B. 19. $E\Gamma$] corr. ex $B\Gamma$ m. 2 B. $\tau\eta\grave{\iota}$] $\tau\eta\varsigma$ b.
20. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ B. 21. $\acute{\epsilon}\gamma\gamma\gamma\alpha\phi\omicron\mu\acute{\epsilon}\nu\omicron\nu$] om. P. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ B.
 η $\gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha$ η V. 22. $\gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha$] om. V. $\delta\iota\pi\lambda\eta$ b. 23. $E\Delta\Gamma$
 $\gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\varsigma$ b. $E\Gamma B$] B in ras. V; supra scr. $E\Delta\Gamma$ m. 2 B.
24. AEG] A corr. ex Δ b. 25. AEG] A corr. ex Δ m. 2 P.

τῆ ὑπὸ $ΒΕΓ$. κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε $ΒΕΓ$ καὶ τοῦ $ΒΕΔ$, ἢ ὑπὸ $ΕΒΔ$ γωνία· καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ $ΒΕΔ$ τῆ ὑπὸ $ΕΓΒ$ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΕΒΔ$ τρίγωνον τῷ $ΕΒΓ$ τριγώνῳ. ἀνά-
 5 λογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἢ $ΔΒ$ πρὸς τὴν $ΒΕ$, οὕτως ἢ $ΕΒ$ πρὸς τὴν $ΒΓ$. ἴση δὲ ἢ $ΕΒ$ τῆ $ΓΔ$. ἐστὶν ἄρα ὡς ἢ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΔΓ$, οὕτως ἢ $ΔΓ$ πρὸς τὴν $ΓΒ$. μείζων δὲ ἢ $ΒΔ$ τῆς $ΔΓ$ · μείζων ἄρα καὶ ἢ $ΔΓ$ τῆς $ΓΒ$. ἢ $ΒΔ$ ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέ-
 10 τμηται [κατὰ τὸ $Γ$], καὶ τὸ μείζον τμημα αὐτῆς ἐστὶν ἢ $ΔΓ$ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι'.

Ἐὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγ-
 γραφῆ, ἢ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τὴν
 15 τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν
 εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Ἐστω κύκλος ὁ $ΑΒΓΔΕ$, καὶ εἰς τὸν $ΑΒΓΔΕ$ κύ-
 κλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράψθω τὸ $ΑΒΓΔΕ$.
 λέγω, ὅτι ἢ τοῦ $ΑΒΓΔΕ$ πενταγώνου πλευρὰ δύναται
 20 τὴν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου πλευ-
 ρὰν τῶν εἰς τὸν $ΑΒΓΔΕ$ κύκλον ἐγγραφομένων.

Εἰλήψθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ $Ζ$ σημεῖον,
 καὶ ἐπιξευχθεῖσα ἢ $ΑΖ$ διήχθω ἐπὶ τὸ $Η$ σημεῖον, καὶ
 ἐπεξεύχθω ἢ $ΖΒ$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Ζ$ ἐπὶ τὴν $ΑΒ$ κά-
 25 θετος ἤχθω ἢ $ΖΘ$, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ $Κ$, καὶ ἐπε-
 ξεύχθωσαν αἱ $ΑΚ$, $ΚΒ$, καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ $Ζ$ ἐπὶ
 τὴν $ΑΚ$ κάθετος ἤχθω ἢ $ΖΔ$, καὶ διήχθω ἐπὶ το

2. $ΒΕΓ$] $ΒΕΔ$ P. $ΒΕΔ$] $ΒΕΓ$ P. 4. ἐστὶ] om. V.
 5. $ΔΒ$] $ΒΔ$ B. 6. $ΓΔ$] $Γ$ supra scr. m. 1 V, $ΔΓ$ P. 7. τὴν
 $ΓΒ$] $ΓΒ$ Bq. 8. $ΔΓ$] (prius) $ΑΓ$ b, $ΓΔ$ B. 9. ἄρα εὐθεῖα]

autem, esse etiam $AE\Gamma = BE\Gamma$. ergo $\angle E\Delta\Gamma = BE\Gamma$. duorum autem triangulorum $BE\Gamma$ et $BE\Delta$ communis est angulus $EB\Delta$. itaque etiam $\angle BE\Delta = E\Gamma B$ [I, 32]. itaque trianguli $EB\Delta$, $EB\Gamma$ aequianguli sunt. quare erit [VI, 4] $\Delta B : BE = EB : B\Gamma$. uerum $EB = \Gamma\Delta$. itaque $B\Delta : \Delta\Gamma = \Delta\Gamma : \Gamma B$. uerum $B\Delta > \Delta\Gamma$. itaque etiam $\Delta\Gamma > \Gamma B$ [V, 14]. ergo recta $B\Delta$ secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars eius est $\Delta\Gamma$; quod erat demonstrandum.

X.

Si in circulum pentagonum aequilaterum inscribitur, quadratum lateris pentagoni aequale est quadratis laterum hexagoni et decagoni in eodem circulo inscriptorum.

Sit circulus $AB\Gamma\Delta E$, et in circulum $AB\Gamma\Delta E$ pentagonum aequilaterum inscribatur $AB\Gamma\Delta E$. dico, quadratum lateris pentagoni $AB\Gamma\Delta E$ aequale esse quadratis laterum hexagoni et decagoni in circulo $AB\Gamma\Delta E$ inscriptorum.

sumatur enim centrum circuli Z punctum [III, 1], et ducta AZ ad H punctum producat, et ducatur ZB , et a Z ad AB perpendicularis ducatur $Z\Theta$, et ad K producat, et ducantur AK , KB , et rursus a Z ad AK perpendicularis ducatur $Z\Lambda$, et ad M pro-

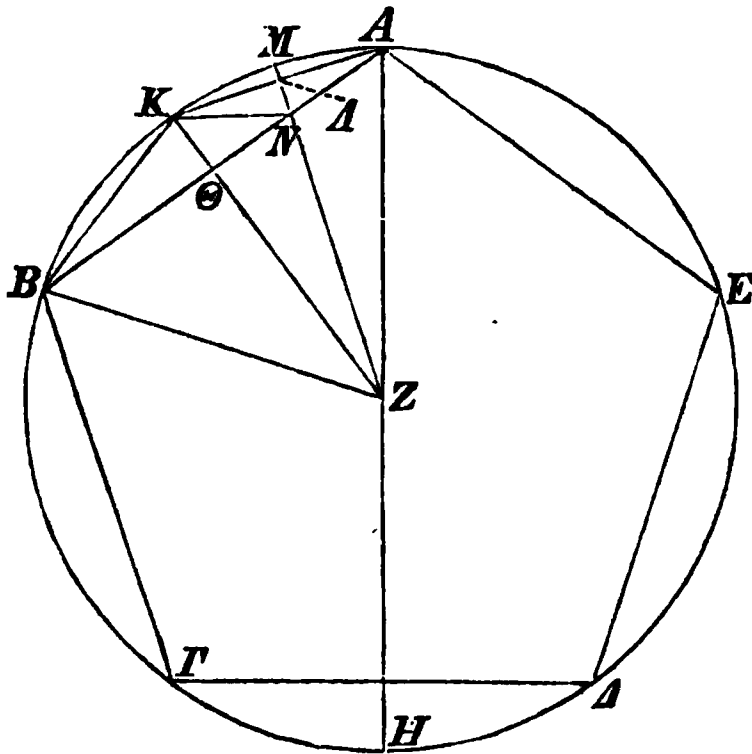
X. Pappus V p. 440, 13. Theon in Ptolem. p. 181.

mg. m. 1 V. 10. κατὰ τὸ Γ] om. P. αὐτῆς τμήμα P.
 αὐτῆ q. 11. $\Delta\Gamma$] Δ corr. ex Γ m. 1 b. ὅπερ ἔδει δεῖξαι]
 om. q, o) — b; ὅπερ ἔδει: ~ B. 15. τῶν] om. V.
 17. εἰς — κύκλον] om. q, εἰς αὐτόν V, κύκλον om. Bb.
 24. καί — Z] bis b.

M , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ KN . ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ABGH$
 περιφέρεια τῇ $AE\Delta H$ περιφερείᾳ, ὧν ἡ $AB\Gamma$ τῇ
 $AE\Delta$ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΓH περιφέρεια λοιπῇ
 τῇ $H\Delta$ ἐστὶν ἴση. πενταγώνου δὲ ἡ $\Gamma\Delta$ δεκαγώνου
 5 ἄρα ἡ ΓH . καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ZA τῇ ZB , καὶ
 κάθετος ἡ $Z\Theta$, ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ AZK γωνία τῇ
 ὑπὸ KZB . ὥστε καὶ περιφέρεια ἡ AK τῇ KB ἐστὶν
 ἴση· διπλῇ ἄρα ἡ AB περιφέρεια τῆς BK περιφερείας·
 δεκαγώνου ἄρα πλευρά ἐστὶν ἡ AK εὐθεῖα. διὰ τὰ
 10 αὐτὰ δὴ καὶ ἡ AK τῆς KM ἐστὶ διπλῇ. καὶ ἐπεὶ
 διπλῇ ἐστὶν ἡ AB περιφέρεια τῆς BK περιφερείας,
 ἴση δὲ ἡ $\Gamma\Delta$ περιφέρεια τῇ AB περιφερείᾳ, διπλῇ
 ἄρα καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ περιφέρεια τῆς BK περιφερείας. ἐστὶ
 δὲ ἡ $\Gamma\Delta$ περιφέρεια καὶ τῆς ΓH διπλῇ· ἴση ἄρα ἡ
 15 ΓH περιφέρεια τῇ BK περιφερείᾳ. ἀλλὰ ἡ BK τῆς
 KM ἐστὶ διπλῇ, ἐπεὶ καὶ ἡ KA καὶ ἡ ΓH ἄρα τῆς
 KM ἐστὶ διπλῇ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΓB περιφέρεια τῆς
 BK περιφερείας ἐστὶ διπλῇ· ἴση γὰρ ἡ ΓB περιφέρεια
 τῇ BA . καὶ ὅλη ἄρα ἡ HB περιφέρεια τῆς BM ἐστὶ
 20 διπλῇ· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ HZB γωνίας τῆς ὑπὸ
 BZM [ἐστὶ] διπλῇ. ἐστὶ δὲ ἡ ὑπὸ HZB καὶ τῆς ὑπὸ
 ZAB διπλῇ· ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ ZAB τῇ ὑπὸ ABZ . καὶ
 ἡ ὑπὸ BZN ἄρα τῇ ὑπὸ ZAB ἐστὶν ἴση. κοινὴ δὲ
 τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ABZ καὶ τοῦ BZN , ἡ

1. καὶ ἐπεὶ BV. 4. ΔH V. δε-] supra m. 1 b.
 5. ἄρα] ἔτι V. 6. AZK] K supra m. 1 V. 7. KZB γωνία
 q. 9. AK] A corr. ex B V, BK P. δεκαγώνου — 11. περι-
 φερείας] bis V (in rep. AK). 9. διὰ] τῆς BK. διὰ q. 11. KB B.
 12. $\Gamma\Delta$] corr. ex ΓB m. 2 B. 13. ἐστὶν B. 16. ἐστὶν B.
 ἄρα] om. b. 17. ἐστὶν B. 18. ἐστὶν B. 19. τῇ] corr.
 ex τῆς B. BA περιφερείᾳ V. 20. $H\Xi B$ q. 21. $B'Z'M$
 b. ἐστὶ] om. P; ἐστὶν B. ἐστὶν B. 22. ABZ]

ducatur, et ducatur KN . quoniam arcus $AB\Gamma H$ arcui $AE\Delta H$ aequalis est, quorum $AB\Gamma = AE\Delta$, erit $\Gamma H = H\Delta$. $\Gamma\Delta$ autem pentagoni est; itaque ΓH est decagoni. et quoniam $ZA = ZB$, et $Z\Theta$ perpendicularis est, erit etiam $\angle AZK = KZB$ [I, 5. I, 26]. quare etiam arcus AK arcui KB aequalis est [III, 26]. itaque



arcus AB duplo maior est arcu BK . quare recta AK latus decagoni est. eadem de causa etiam AK duplo maior est arcu KM . et quoniam arcus AB duplo maior est arcu BK , et arcus $\Gamma\Delta$ arcui AB aequalis, etiam arcus $\Gamma\Delta$ arcu BK duplo maior erit. ue-

rum arcus $\Gamma\Delta$ etiam arcu ΓH duplo maior est. itaque arcus ΓH arcui BK aequalis est. sed arcus BK arcu KM duplo maior est, quoniam arcus KA eo duplo est maior. itaque etiam ΓH arcu KM duplo maior est. uerum etiam arcus ΓB arcu BK duplo maior est; nam arcus ΓB arcui BA aequalis est. quare totus arcus HB arcu BM duplo maior est. itaque etiam $\angle HZB = 2BZM$ [VI, 33]. uerum etiam $\angle HZB = 2ZAB$; nam $ZAB = ABZ$. itaque $\angle BZN = ZAB$. duorum autem triangulorum ABZ , BZN communis

corr. ex AZB m. rec. b. 23. BZN] N corr. ex H m. 2 B;
 ZBN b, corr. m. rec. 24. BZN] N corr. ex H m. 2 B.

ὑπὸ ABZ γωνία· λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ AZB λοιπῇ τῇ
 ὑπὸ BNZ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABZ
 τρίγωνον τῷ BZN τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς
 ἢ AB εὐθεῖα πρὸς τὴν BZ , οὕτως ἢ ZB πρὸς τὴν
 5 BN · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ABN ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ BZ .
 πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ AL τῇ AK , κοινὴ δὲ καὶ πρὸς
 ὀρθὰς ἢ AN , βάσις ἄρα ἢ KN βάσει τῇ AN ἐστὶν
 ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἢ ὑπὸ AKN γωνία τῇ ὑπὸ LAN
 ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ ἢ ὑπὸ LAN τῇ ὑπὸ KBN ἐστὶν
 10 ἴση· καὶ ἢ ὑπὸ AKN ἄρα τῇ ὑπὸ KBN ἐστὶν ἴση.
 καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε AKB καὶ τοῦ
 AKN ἢ πρὸς τῷ A . λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ AKB λοιπῇ
 τῇ ὑπὸ KNA ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ KBA
 τρίγωνον τῷ KNA τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς
 15 ἢ BA εὐθεῖα πρὸς τὴν AK , οὕτως ἢ KA πρὸς τὴν
 AN · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BAN ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς
 AK . ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ABN ἴσον τῷ ἀπὸ
 τῆς BZ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ABN μετὰ τοῦ ὑπὸ BAN ,
 ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BA , ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς BZ
 20 μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AK . καὶ ἐστὶν ἢ μὲν BA πεντα-
 γώνου πλευρά, ἢ δὲ BZ ἑξαγώνου, ἢ δὲ AK δεκα-
 γώνου.

Ἡ ἄρα τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τὴν τε
 τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν
 25 αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια'.

Ἐὰν εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῆ, ἢ τοῦ

2. BZN P, et B, sed corr. m. rec.

5. AB , BN Vq, b e corr. m. rec.

4. ZB] BZ P.

ἐστίν P.

τῆς BZ

est $\angle ABZ$. itaque erit $\angle AZB = BNZ$ [I, 32]. itaque trianguli ABZ , BZN aequianguli sunt. erit igitur [VI, 4] $AB: BZ = ZB: BN$. quare $AB \times BN = BZ^2$ [VI, 17]. rursus quoniam $AA = AK$, et AN communis est et perpendicularis, erit $KN = AN$ et $\angle AKN = \angle ANA$ [I, 4]. sed $\angle ANA = KBN$ [III, 29. I, 5]. quare etiam $\angle AKN = KBN$. et duorum triangulorum AKB , AKN communis est angulus ad A positus. erit igitur $\angle AKB = KNA$ [I, 32]. quare trianguli KBA , KNA aequianguli sunt. erit igitur [VI, 4] $BA: AK = KA: AN$. itaque $BA \times AN = AK^2$ [VI, 17]. demonstrauius autem, esse etiam $AB \times BN = BZ^2$. ergo $AB \times BN + BA \times AN = BZ^2 + AK^2 = BA^2$ [II, 2]. et BA latus est pentagoni, BZ hexagoni [IV, 15 coroll.], AK decagoni.

Ergo quadratum lateris pentagoni aequale est quadratis laterum hexagoni et decagoni in eodem circulo inscriptorum; quod erat demonstrandum.

XI.

Si in circulum, cuius diametrus rationalis est, pentagonum aequilaterum inscribitur, latus pentagoni recta est irrationalis minor quae uocatur.

-
- Vq. 7. ἄρα καὶ P. AN] A corr. ex A m. 2 B.
 10. καὶ ἡ — ἐστὶν ἴση] bis P, corr. m. 1; supra m. 1 V.
 ἐστὶν ἴση] ἄρα ἴση ἐστὶ V. 11. τε] om. P. AKB] ABK
 P. 12. ἡ πρὸς τῷ A] om. V; ἡ ὑπὸ NAK Theon (Bbq).
 13. ἐστὶν B. KBA'' b. 14. KNA' b. 15. εὐθεία]
 om. q. 16. BA, AN q et e corr. m. rec. b. 17. AK]
 corr. ex ANK m. rec. b. AB, BN Vq et e corr. m. rec.
 b; item lin. 18. 18. BA; AN Vq et corr. ex ABN m. rec.
 b. 19. ὅπερ ἐστὶν P. BZ] corr. ex ZB V. 21. AK]
 supra scr. A m. 1 b. 25. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. bq.

πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἐλάσσων.

Εἰς γὰρ κύκλον τὸν $ΑΒΓΔΕ$ ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ $ΑΒΓΔΕ$: λέγω, ὅτι ἢ τοῦ $[ΑΒΓΔΕ]$ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἐλάσσων.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Z σημείου, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ AZ , ZB καὶ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ H , Θ σημεία, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $ΑΓ$, καὶ κείσθω τῆς AZ τέταρτον μέρος ἡ ZK . ῥητὴ δὲ ἡ AZ : ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ZK . ἔστι δὲ καὶ ἡ BZ ῥητὴ: ὅλη ἄρα ἡ BK ῥητὴ ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΓΗ$ περιφέρεια τῇ $ΑΔΗ$ περιφερείᾳ, ὧν ἡ $ΑΒΓ$ τῇ $ΑΕΔ$ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ $ΓΗ$ λοιπῇ τῇ $ΗΔ$ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν $ΑΔ$, συνάγονται ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ A γωνίαι, καὶ διπλῆ ἡ $ΓΔ$ τῆς $ΓΑ$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τῷ M ὀρθαὶ εἰσιν, καὶ διπλῆ ἡ $ΑΓ$ τῆς $ΓΜ$. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΑΔΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΑΜΖ$, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε $ΑΓΑ$ καὶ τοῦ $ΑΜΖ$ ἡ ὑπὸ $ΑΑΓ$, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΓΑ$ λοιπῇ τῇ ὑπὸ $ΜΖΑ$ ἐστὶν ἴση: ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΓΑ$ τρίγωνον τῷ $ΑΜΖ$ τριγώνῳ: ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΓ$ πρὸς $ΓΑ$, οὕτως ἡ $ΜΖ$ πρὸς $ΖΑ$: καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια: ὡς ἄρα ἡ τῆς $ΑΓ$ διπλῆ πρὸς τὴν $ΓΑ$, οὕτως ἡ τῆς $ΜΖ$ διπλῆ πρὸς τὴν

1. ἄλογος] corr. ex ἀνάλογον m. rec. P. 5. $ΑΒΓΔΕ$] (alt.) om. P. 6. Ante ἄλογος eras. ἀν- P. 7. τό] (alt.) corr. ex τοῦ P. 11. ἔστιν B. 12. ἐστὶ Vq, comp. b. $ΑΒΓΗ$ bq. 13. $ΑΔΗ$] $ΑΕΔΗ$ bq. $ΑΕΔ$] $ΕΔ$ in ras. m. 2 V. ἴση ἐστὶν P. 14. ἄρα] om. q. 15. τῷ] τό bq. 16. $ΔΓ$ P. 17. τῷ] τό q, τῷ supra scr. o m. 1 b. Post M add. γωνίαι m. rec. P. εἰσι V bq. διπλῆ ἄρα ἡ P.

Nam in circulum $AB\Gamma\Delta E$, cuius diameter rationalis sit, pentagonum aequilaterum inscribatur $AB\Gamma\Delta E$. dico, latus pentagoni rectam esse irrationalem minorem quae uocetur.

sumatur enim centrum circuli Z punctum [III, 1], et ducantur AZ , ZB et producantur ad puncta H , Θ , et ducatur $A\Gamma$, et ponatur $ZK = \frac{1}{4}AZ$. AZ autem rationalis est; itaque etiam ZK rationalis est. uerum etiam BZ rationalis est. itaque tota BK rationalis est. et quoniam arcus $A\Gamma H$ arcui $A\Delta H$ aequalis est, quorum $AB\Gamma = AE\Delta$, erit $\Gamma H = H\Delta$. et ducta $A\Delta$ concludimus, angulos ad A positos rectos esse, et $\Gamma\Delta = 2\Gamma A$ [I, 4]. eadem de causa etiam anguli

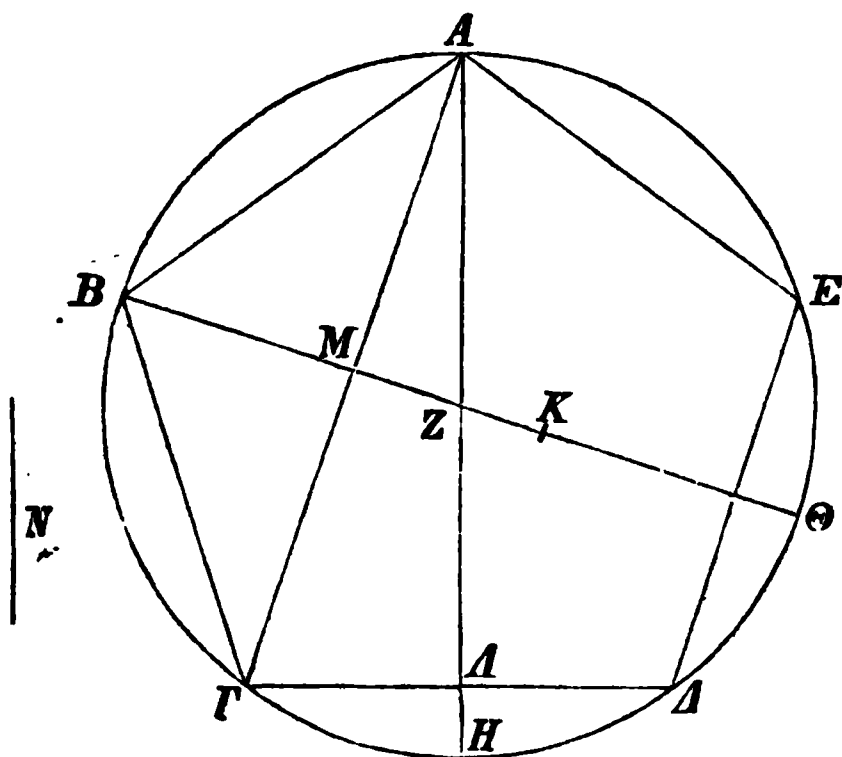
ad M positi recti sunt, et

$$A\Gamma = 2\Gamma M.$$

iam quoniam

$\angle A\Delta\Gamma = \angle AMZ$,
et duorum triangulorum $A\Gamma\Delta$, AMZ communis est $\angle A\Delta\Gamma$, erit $\angle A\Gamma\Delta = \angle MZA$ [I, 32]. itaque

trianguli $A\Gamma\Delta$, AMZ aequianguli sunt. erit igitur [VI, 4] $A\Gamma : \Gamma\Delta = MZ : ZA$. et sumpto duplo praecedentium erit $2A\Gamma : \Gamma\Delta = 2MZ : ZA$. sed $2MZ$



$A\Gamma$] supra scr. Δ m. 1 b. 19. $\tau\acute{\omega}\nu$] corr. ex η m. 1 b.
 $A\Gamma\Delta$] $A\Delta\Gamma$ BV. 20. $A\Delta\Gamma$] $A\Delta$ e corr. V. $A\Gamma\Delta$] corr. ex
 $A\Delta\Gamma$ m. rec. B. 23. $A\Gamma$] $\Gamma\Delta$ Vq. $\tau\eta\nu$ $\Gamma\Delta$ V. $\tau\eta\nu$ $Z\Delta$ V.

ZA . ὡς δὲ ἡ τῆς MZ διπλῆ πρὸς τὴν ZA , οὕτως
ἡ MZ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ZA · καὶ ὡς ἄρα ἡ τῆς
 $ΔΓ$ διπλῆ πρὸς τὴν $ΓΑ$, οὕτως ἡ MZ πρὸς τὴν
ἡμίσειαν τῆς ZA . καὶ τῶν ἐπομένων τὰ ἡμίσεια· ὡς
6 ἄρα ἡ τῆς $ΔΓ$ διπλῆ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς $ΓΑ$,
οὕτως ἡ MZ πρὸς τὸ τέταρτον τῆς ZA . καὶ ἐστὶ τῆς
μὲν $ΔΓ$ διπλῆ ἢ $ΔΓ$, τῆς δὲ $ΓΑ$ ἡμίσεια ἢ $ΓΜ$, τῆς
δὲ ZA τέταρτον μέρος ἢ ZK · ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $ΔΓ$
πρὸς τὴν $ΓΜ$, οὕτως ἡ MZ πρὸς τὴν ZK . συν-
10 θέντι καὶ ὡς συναμφοτέρος ἡ $ΔΓΜ$ πρὸς τὴν $ΓΜ$,
οὕτως ἡ MK πρὸς KZ · καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ συναμ-
φοτέρου τῆς $ΔΓΜ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΓΜ$, οὕτως τὸ ἀπὸ
 MK πρὸς τὸ ἀπὸ KZ . καὶ ἐπεὶ τῆς ὑπὸ δύο πλευρας
τοῦ πενταγώνου ὑποτεϊνούσης, οἷον τῆς $ΑΓ$, ἄκρον
15 καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμημα ἴσον
ἐστὶ τῆ τοῦ πενταγώνου πλευρᾶ, τουτέστι τῆ $ΔΓ$, τὸ
δὲ μείζον τμημα προσλαβὼν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης
πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης,
καὶ ἐστὶν ὅλης τῆς $ΑΓ$ ἡμίσεια ἢ $ΓΜ$, τὸ ἄρα ἀπὸ
20 τῆς $ΔΓΜ$ ὡς μιᾶς πενταπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς
 $ΓΜ$. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς $ΔΓΜ$ ὡς μιᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ
τῆς $ΓΜ$, οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς MK πρὸς τὸ
ἀπὸ τῆς KZ · πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς MK τοῦ
ἀπὸ τῆς KZ . φητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς KZ · φητὴ γὰρ ἡ
25 διάμετρος· φητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς MK · φητὴ ἄρα
ἐστὶν ἡ MK [δυνάμει μόνον]. καὶ ἐπεὶ τετραπλασία
ἐστὶν ἡ BZ τῆς ZK , πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ BK
τῆς KZ · εἰκοσιπενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BK τοῦ

1. ὡς δέ] ἀλλ' ὡς BVb. 2. τῆς $ΔΓ$] τοῦ $ΔΓ$ V; supra
scr. A m. 1 b. 4. ἡμίσεια P et b, corr. in ἡμίση m. 1; ἡμίση

: $Z A = M Z : \frac{1}{2} Z A$. est igitur $2 \Delta \Gamma : \Gamma A = M Z : \frac{1}{2} Z A$.
 et sumpto dimidio sequentium erit $2 \Delta \Gamma : \frac{1}{2} \Gamma A = M Z$
 : $\frac{1}{4} Z A$. et $2 \Delta \Gamma = \Delta \Gamma$, $\frac{1}{2} \Gamma A = \Gamma M$, $\frac{1}{4} Z A = Z K$.
 itaque $\Delta \Gamma : \Gamma M = M Z : Z K$. et componendo [V, 18]
 $\Delta \Gamma + \Gamma M : \Gamma M = M K : K Z$. quare erit $(\Delta \Gamma + \Gamma M)^2$
 : $\Gamma M^2 = M K^2 : K Z^2$. et quoniam recta sub duobus
 lateribus pentagoni subtendenti uelut $\Delta \Gamma$ secundum
 rationem extremam ac mediam diuisa maior pars
 lateri pentagoni aequalis est [prop. VIII], h. e. $\Delta \Gamma$,
 et quadratum maioris partis adiuncta dimidia parte
 totius aequale est quadrato dimidia totius quinquies
 sumpto [prop. I], et $\Gamma M = \frac{1}{2} \Delta \Gamma$, erit $(\Delta \Gamma + \Gamma M)^2$
 = $5 \Gamma M^2$. demonstrauius autem, esse $(\Delta \Gamma + \Gamma M)^2$
 : $\Gamma M^2 = M K^2 : K Z^2$. itaque $M K^2 = 5 K Z^2$. uerum
 $K Z^2$ rationale est; nam diameter rationalis est. itaque
 etiam $M K^2$ rationale est. $M K$ igitur rationalis¹⁾ est.
 et quoniam est $B Z = 4 Z K$, erit $B K = 5 K Z$. itaque
 $B K^2 = 25 K Z^2$. uerum $M K^2 = 5 K Z^2$. itaque $B K^2$

1) Uerba *δυνάμει μόνον* lin. 26, quae huc nihil pertinent, glossema sapiant.

BV. 5. Supra $\Delta \Gamma$ scr. A m. 1 b. 7. $\Delta \Gamma$ P. ἡμισείας
 B, corr. m. 2. 10. $\Delta \Gamma M$] M supra scr. m. 2 B. 11. τὴν
 $K Z$ bq, $Z K$ B, τὴν $Z K$ V. 12. $\Delta \Gamma M$] M supra scr. m.
 2 B. τῆς ΓM V. 13. τῆς $K Z$ V. 15. τετμημένης
 Theon (BV bq). 16. τουτέστιν P B. 17. προσ- in ras. m.
 1 b. 19. ἐστίν] ἐστὶ τῆς q. 20. τῆς] om. q.
 $\Delta \Gamma$ supra scr. M m. 2 B; item lin. 21. ὡς ἀπό q. ἐστίν
 P. 25. ἄρα ἐστὶ P. ῥητή — 26. μόνον] πρὸς τὸ ἀπὸ $K Z$
 q. 26. ἐστίν] ἐστὶ καὶ V. δυνάμει μόνον] λόγον γὰρ ἔχει
 ὄν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸ ἀπὸ τῆς $M K$ πρὸς τὸ ἀπὸ (τῆς
 add. V) $K Z$ Theon (BV q). 27. ἐστίν] (alt.) om. V. 28. Post
 $K Z$ in P del. m. 1: εἰκοσιπενταπλά (-σιον postea add.) ἄρα
 ἐστίν ἢ $B K$ τῆς $B Z$.

ἀπὸ τῆς KZ . πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς MK τοῦ
 ἀπὸ τῆς KZ · πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BK τοῦ
 ἀπὸ τῆς KM · τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς BK πρὸς τὸ ἀπὸ KM
 λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-
 5 γωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ BK τῇ KM
 μήκει. καὶ ἐστὶ φητὴ ἑκατέρω ἀυτῶν. αἱ BK , KM
 ἄρα φηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ ἀπὸ
 φητῆς φητὴ ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα
 τῇ ὄλη, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστὶν ἀποτομή· ἀποτομή ἄρα
 10 ἐστὶν ἡ MB , προσαρμοζούσα δὲ αὐτῇ ἡ MK . λέγω
 δὴ, ὅτι καὶ τετάρτη. ᾧ δὴ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς
 BK τοῦ ἀπο τῆς KM , ἐκείνω ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς
 N · ἡ BK ἄρα τῆς KM μείζον δύναται τῇ N . καὶ
 ἐπεὶ σύμμετρός ἐστὶν ἡ KZ τῇ ZB , καὶ συνθέντι σύμ-
 15 μετρός ἐστὶν ἡ KB τῇ ZB . ἀλλὰ ἡ BZ τῇ $B\Theta$ σύμ-
 μετρός ἐστὶν· καὶ ἡ BK ἄρα τῇ $B\Theta$ σύμμετρός ἐστὶν.
 καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BK τοῦ ἀπο
 τῆς KM , τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς BK πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς KM
 λόγον ἔχει, ὃν $\bar{\epsilon}$ πρὸς $\bar{\epsilon}\nu$. ἀναστρέψαντι ἄρα το ἀπὸ
 20 τῆς BK πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς N λόγον ἔχει, ὃν $\bar{\epsilon}$ πρὸς
 $\bar{\delta}$, οὐχ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον· ἀσύμμετρος
 ἄρα ἐστὶν ἡ BK τῇ N · ἡ BK ἄρα τῆς KM μείζον
 δύναται τῷ ἀπο ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ὄλη ἡ
 BK τῆς προσαρμοζούσης τῆς KM μείζον δύναται τῷ
 25 ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ὄλη ἡ BK σύμμετρός ἐστὶ
 τῇ ἐκκειμένῃ φητῇ τῇ $B\Theta$, ἀποτομή ἄρα τετάρτη ἐστὶν
 ἡ MB . τὸ δὲ ὑπὸ φητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης
 περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστὶν, καὶ ἡ δυνα-

2. BK] B corr. ex Γ m. 1 b. 3. KM] (alt.) MK b; τῆς
 MK Bq , τῆς KM V . 5. ἐστίν] om. V . KB P . 6. ἐστὶν PB .

$= 5KM^2$. itaque BK^2 ad KM^2 rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque BK , KM longitudine incommensurabiles sunt. et utraque earum rationalis est. itaque BK , KM rationales sunt potentia solum commensurabiles. sin a recta rationali rationalis aufertur toti potentia solum commensurabilis, quae relinquitur, irrationalis est, scilicet apotome. itaque MB apotome est et ei congruens MK [X, 73]. iam dico, eandem quartam esse. sit enim $N^2 = BK^2 \div KM^2$. itaque $BK^2 = KM^2 + N^2$. et quoniam KZ , ZB commensurabiles sunt, etiam componendo KB , ZB commensurabiles sunt. uerum BZ , $B\Theta$ commensurabiles sunt. itaque etiam BK , $B\Theta$ commensurabiles. et quoniam $BK^2 = 5KM^2$, erit $BK^2 : KM^2 = 5 : 1$. conuertendo igitur [V, 19 coroll.] $BK^2 : N^2 = 5 : 4$, quae non est ratio quadrati ad quadratum. itaque BK , N incommensurabiles sunt [X, 9]. quadratum igitur rectae BK quadratum rectae KM excedit quadrato rectae ei incommensurabilis. iam quoniam quadratum totius BK quadratum rectae congruentis KM excedit quadrato rectae ei incommensurabilis, et tota BK et $B\Theta$ commensurabiles sunt, MB quarta apotome erit [X deff. tert. 4].

KM] K corr. ex M m. 1 V. 7. εἰσιν B. 9. ἐστὶ καλεῖται δέ bq. ἀποτομή] om. BV. 10. ἐστὶν] om. V.
 11. δὴ] δέ B. δὴ] γάρ BV. ἐστὶν P. τῆς] om. q.
 14. ZB] Z in ras. m. 1 P. 15. ZB] BZ Bq et supra scr. Δ b. 16. ἐστὶ PBVq, comp. b. Dein add. μήκει BV.
 καί — ἐστὶν] mg. m. 2 ins. ante μήκει B. ἐστὶ Vq, comp. Bb. 18. τό] (alt.) τόν V. 19. εἰ] πέντε q. ἔν] ᾧ BV, τὸν ᾧ b. 20. τό] τόν V. 21. ὄν] ὁ b. 23. συμμετρῶν q et P, sed corr. m. rec. 25. Ante BK eras. K P. ἀσύμμετρος B. 27. BM P. 28. ἐστὶ Vq, comp. b.

μένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ ἐλάττων. δύ-
 νεται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν $\Theta B M$ ἢ AB διὰ τὸ ἐπιζευγνυ-
 μένης τῆς $A\Theta$ ἰσογώνιον γίνεσθαι τὸ $AB\Theta$ τρίγωνον
 τῷ ABM τριγώνῳ καὶ εἶναι ὡς τὴν ΘB πρὸς τὴν
 5 BA , οὕτως τὴν AB πρὸς τὴν BM .

Ἡ ἄρα AB τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν
 ἢ καλουμένη ἐλάττων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβ'.

Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγ-
 10 γραφῆ, ἢ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τρι-
 πλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Ἐστω κύκλος ὁ $AB\Gamma$, καὶ εἰς αὐτὸν τρίγωνον
 ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ $AB\Gamma$. λέγω, ὅτι τοῦ $AB\Gamma$
 τριγώνου μία πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ
 15 τοῦ κέντρου τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου τὸ
 Δ , καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἢ $A\Delta$ διήχθω ἐπὶ τὸ E , καὶ
 ἐπεζεύχθω ἢ BE . καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ $AB\Gamma$
 τρίγωνον, ἢ $BE\Gamma$ ἄρα περιφέρεια τρίτον μέρος ἐστὶ
 20 τῆς τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου περιφερείας. ἢ ἄρα BE περι-
 φέρεια ἕκτον ἐστὶ μέρος τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας·
 ἐξαγώνου ἄρα ἐστὶν ἢ BE εὐθεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶ τῇ
 ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΔE . καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἢ AE
 τῆς ΔE , τετραπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AE τοῦ ἀπὸ

1. ἐστὶ BV q, comp. b. 2. τό] om. B, add. mg. m. 2.
 ΘB , BM V q. 3. γίνεσθαι V. $A\Theta B$ q. 4. τρι-
 γώνῳ] om. b. $B\Theta$ q. 5. τήν] (prius) corr. ex ἢ m. 1 P.
 6. ἐστὶν] om. P. 7. πλευρὰ ἐλάττων b. 11. ἐστὶν P.
 13. ἐγγεγράφθω (sic) ἰσόπλευρον b, supra scr. β — α. ἢ τοῦ BV .
 15. $AB\Gamma$] om. V. 16. $AB\Gamma$] om. BV . 20. κύκλου] om. q.
 22. ἐξάγωνος B. Post prius ἄρα add. πλευρὰ V. ἐστὶν P B.

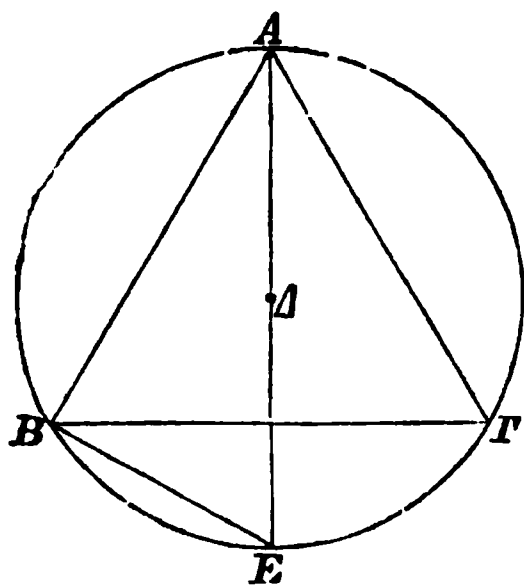
rectangulum autem rationali et quarta apotome comprehensum irrationale est, et recta, cuius quadratum ei aequale est, irrationalis est uocaturque minor [X, 94]. uerum $AB^2 = \Theta B \times BM$, quia ducta $A\Theta$ trianguli $AB\Theta$, ABM aequianguli fiunt [VI, 8], et est $\Theta B : BA = AB : BM$ [VI, 4].

Ergo AB latus pentagoni irrationalis est minor quae uocatur; quod erat demonstrandum.

XII.

Si in circulum triangulus aequiangulus inscribitur, latus trianguli potentia triplo maius est radio circuli.

Sit circulus $AB\Gamma$, et in eum triangulus aequiangulus $AB\Gamma$ inscribatur [IV, 2]. dico, latus quoduis trianguli $AB\Gamma$ potentia triplo maius esse radio circuli $AB\Gamma$.



sumatur enim Δ centrum circuli $AB\Gamma$ [III, 1], et ducta $A\Delta$ ad E producat, et ducatur BE . et quoniam triangulus $AB\Gamma$ aequiangulus est,

arcus $BE\Gamma$ tertia pars est ambitus circuli $AB\Gamma$. itaque arcus BE sexta pars est ambitus circuli.¹⁾ itaque hexagoni est recta BE . quare $BE = \Delta E$ [IV, 15 coroll.]. et quoniam $AE = 2\Delta E$, erit $AE^2 = 4\Delta E^2 = 4BE^2$.

XII. Theon. in Ptolem. p. 183.

1) Nam $A\Gamma E = ABE$ et arc. $A\Gamma = AB$.

τῆς $E\Delta$, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς BE . ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AE τοῖς ἀπὸ τῶν AB, BE . τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB, BE τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς BE . διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ BE .
 5 ἴση δὲ ἡ BE τῇ ΔE . τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AB τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔE .

Ἡ ἄρα τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου [τοῦ κύκλου]. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ'.

10 Πυραμίδα συστήσασθαι καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολλία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ
 15 AB , καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν $A\Gamma$ τῆς ΓB . καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ $A\Delta B$, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ $\Gamma\Delta$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΔA . καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ EZH ἴσην ἔχων τὴν
 20 ἐκ τοῦ κέντρου τῇ $\Delta\Gamma$, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν EZH κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ EZH . καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $E\Theta, \Theta Z, \Theta H$. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Θ σημείου τῶ τοῦ EZH κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ
 25 ΘK , καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς ΘK τῇ $A\Gamma$ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΘK , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ KE, KZ, KH . καὶ ἐπεὶ

4. διπλάσιόν b. ἐστὶν P. ἀπὸ τῆς V. 5. διπλάσιόν b. 7. διπλασία b, τριπλασίων V. 8. ἐστὶν P. τοῦ κύκλου] om. P. 10. Ante καὶ ins. ἐκ τεσσάρων τριγώνων ἰσοπλευρῶν mg. m. 1 pro scholio P. σφαῖραν b. 12. ἐστὶν P. 14. ἐκκείσθω] prius κ supra scr. m. rec. P. 15. Ante

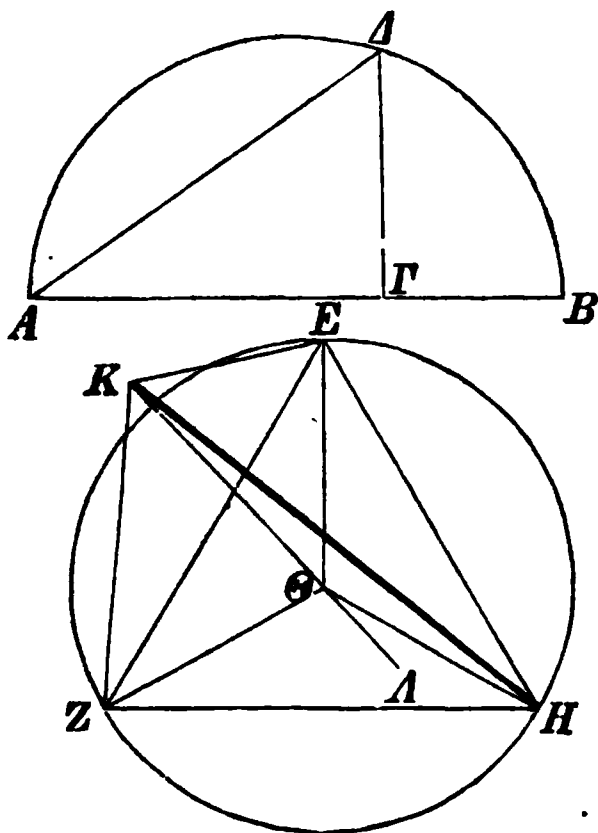
uerum $AE^2 = AB^2 + BE^2$ [III, 31. I, 47]. itaque $AB^2 + BE^2 = 4BE^2$. subtrahendo igitur $AB^2 = 3BE^2$. sed $BE = \Delta E$. itaque $AB^2 = 3\Delta E^2$.

Ergo latus trianguli potentia triplo maius est radio; quod erat demonstrandum.

XIII.

Pyramidem construere et data sphaera comprehendere et demonstrare, diametrum sphaerae potentia sesquialteram esse lateris pyramidis.

Ponatur AB diametrus datae sphaerae et in Γ puncto ita secetur, ut sit $A\Gamma = 2\Gamma B$ [VI, 10]. et in



AB semicirculus describatur $A\Delta B$, et a Γ puncto perpendicularis ducatur $\Gamma\Delta$, et ducatur ΔA . et ponatur circulus EZH radium aequalem habens rectae $\Delta\Gamma$, et in circulum EZH triangulus aequilaterus inscribatur EZH [IV, 2]. et sumatur centrum circuli punctum Θ [III, 1], et ducantur $E\Theta$, ΘZ , ΘH . et in Θ puncto ad planum circuli EZH perpendicularis

erigatur ΘK , et a ΘK rectae $A\Gamma$ aequalis abscindatur ΘK et ducantur KE , KZ , KH . et quoniam $K\Theta$ ad

XIII—XVII. Hero def. 101, 2.

κατά del. δίχα m. 1 (et m. rec.) P. 16. τῆς ΓB] mg. postea
 add. m. 1 P, τῆς $B\Gamma$ V. καταγεγράφω P. 17. ση-]
 supra m. 1 b. 19. EZH V. ἔχον q. 20. ἐκ] supra m.
 1 P. 22. κέντρον b. 25. ἀφαιρήσθω P.

ἡ $K\Theta$ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ EZH κύκλου ἐπίπεδον,
 καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας
 καὶ οὖσας ἐν τῷ τοῦ EZH κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς
 ποιήσει γωνίας. ἄπτεται δὲ αὐτῆς ἐκάστη τῶν ΘE ,
 5 ΘZ , ΘH . ἡ ΘK ἄρα πρὸς ἐκάστην τῶν ΘE , ΘZ ,
 ΘH ὀρθή ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AG τῇ
 ΘK , ἡ δὲ GA τῇ ΘE , καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσιν,
 βάσις ἄρα ἡ GA βάσει τῇ KE ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ
 αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρω τῶν KZ , KH τῇ GA ἐστὶν ἴση·
 10 αἱ τρεῖς ἄρα αἱ KE , KZ , KH ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.
 καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ AG τῆς GB , τριπλῆ ἄρα ἡ
 AB τῆς BG . ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν BG , οὕτως τὸ
 ἀπὸ τῆς GA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς GA , ὡς ἐξῆς δειχθή-
 σεται. τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς GA τοῦ ἀπὸ τῆς
 15 GA . ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZE τοῦ ἀπὸ τῆς $E\Theta$
 τριπλάσιον, καὶ ἐστὶν ἴση ἡ GA τῇ $E\Theta$. ἴση ἄρα καὶ
 ἡ GA τῇ EZ . ἀλλὰ ἡ GA ἐκάστη τῶν KE , KZ ,
 KH ἐδείχθη ἴση· καὶ ἐκάστη ἄρα τῶν EZ , ZH , HE
 ἐκάστη τῶν KE , KZ , KH ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρα ἄρα
 20 ἐστὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα τὰ EZH , KEZ , KZH ,
 KEH . πυραμὶς ἄρα συνέσταται ἐκ τεσσάρων τρι-
 γώνων ἰσοπλεύρων, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ EZH τρί-
 γωνον, κορυφή δὲ τὸ K σημεῖον.

Δεῖ δὴ αὐτὴν καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ
 25 καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ
 δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

1. ἐστὶν P. 2. ἄρα] ἔτι V. αὐτῆς] corr. ex αὐτῆι m.
 2 B. 3. $EZH\Theta$ Bb. 5. ἡ ΘK — 6. ΘH] mg. m. 2 B.
 5. ΘK] Θ e corr. m. 1 b. 6. ἐστὶ Vq, comp. b.
 7. περιέχουσι Vbq. 8. GA] A e corr. m. 2 P. 9. ἴση· καὶ αἱ
 q. 10. ἀλλήλοις V. εἰσί q, comp. b. 11. τριπλῆ] διπλῆ
 b. 13. Post GA add. P: ἐπεὶ γάρ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς AG

planum circuli EZH perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano circuli EZH positas rectos angulos efficiet [XI def. 3]. tangunt autem $\odot E$, $\odot Z$, $\odot H$. $\odot K$ igitur ad singulas $\odot E$, $\odot Z$, $\odot H$ perpendicularis est. et quoniam $A\Gamma = \odot K$, $\Gamma\Delta = \odot E$, et rectos angulos comprehendunt, erit $\Delta A = KE$ [I, 4]. eadem de causa etiam $KZ = \Delta A$ et $KH = \Delta A$. itaque $KE = KZ = KH$. et quoniam $A\Gamma = 2\Gamma B$, erit $AB = 3B\Gamma$. sed $AB : B\Gamma = A\Delta^2 : \Delta\Gamma^2$, ut postea demonstrabitur [u. lemma]. itaque $A\Delta^2 = 3\Delta\Gamma^2$. uerum etiam $ZE^2 = 3E\odot^2$ [prop. XII]. et $\Delta\Gamma = E\odot$. itaque etiam $\Delta A = EZ$. demonstrauius autem, esse $\Delta A = KE = KZ = KH$. itaque singulae EZ , ZH , HE singulis KE , KZ , KH aequales sunt. quare quattuor trianguli EZH , KEZ , KZH , KEH aequilateri sunt. ergo ex quattuor triangulis aequilateris pyramis constructa est, cuius basis est triangulus EZH , uertex autem K punctum.

oportet igitur eam etiam data sphaera comprehendere et demonstrare, diametrum sphaerae potentia sesquialteram esse lateris pyramidis.

οὕτως (corr. ex οὗτος m. 2) τὸ ἀπὸ ΔA πρὸς τὸ ἀπὸ $A\Gamma$, ἀναστρέψαντι ὡς ἡ AB πρὸς $B\Gamma$, οὕτως τὸ ἀπὸ $A\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ $\Delta\Gamma$; idem mg. m. 2 B (BA pro priore AB , $A\Gamma$ pro $\Delta\Gamma$), add. in fine ὡς ἐξῆς δειχθήσεται, sed ins. post δειχθήσεται lin. 13; eodem loco haec uerba ἐπεὶ γάρ — δειχθήσεται in textu hab. V (BA , τὴν $A\Gamma$, τῆς ΔA , τῆς $A\Gamma$), sed περιττόν add. m. 2. 15. ἐστὶν P B. 17. ΔA] $A\Delta$ P. τῆ] τῆς P. 18. HE] corr. ex $H\odot$ m. 2 V, $H\odot$ q. 19. KE] EK q. ἴση ἴσα καὶ q. 20. ἐστὶν B. τέσσαρα B. KZH] KEH q et V (E e corr.). 21. KEH] KZH q et V (ZH e corr.), $KH\odot$ B. συνίσταται B V b. Post τριγώνων add. ἴσων καὶ V q, m. rec. B. 22. ἡ q. 25. δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ V. ἐστὶν P.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ $K\Theta$ εὐθεία ἡ ΘA , καὶ κείσθω τῇ ΓB ἴση ἡ ΘA . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $A\Gamma$ πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ $\Gamma\Delta$ πρὸς τὴν ΓB , ἴση δὲ ἡ μὲν $A\Gamma$ τῇ $K\Theta$, ἡ δὲ $\Gamma\Delta$ τῇ ΘE , ἡ δὲ
 5 ΓB τῇ ΘA , ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $K\Theta$ πρὸς τὴν ΘE , οὕτως ἡ $E\Theta$ πρὸς τὴν ΘA . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $K\Theta$, ΘA ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $E\Theta$. καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἑκατέρω τῶν ὑπὸ $K\Theta E$, $E\Theta A$ γωνιῶν· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς $K\Lambda$ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἦξει καὶ διὰ τοῦ E [ἐπει-
 10 δῆπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν $E\Lambda$, ὀρθὴ γίνεται ἡ ὑπὸ $\Lambda E K$ γωνία διὰ τὸ ἰσογώνιον γίνεσθαι τὸ $E\Lambda K$ τρίγωνον ἑκατέρω τῶν $E\Lambda\Theta$, $E\Theta K$ τριγώνων]. ἐὰν δὲ μενούσης τῆς $K\Lambda$ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῆ, ὅθεν ἦρξατο φέρεσθαι,
 15 ἦξει καὶ διὰ τῶν Z , H σημείων ἐπιζευγνυμένων τῶν $Z\Lambda$, ΛH καὶ ὀρθῶν ὁμοίως γινομένων τῶν πρὸς τοῖς Z , H γωνιῶν· καὶ ἔσται ἡ πυραμὶς σφαῖρα περιελημμένη τῇ δοθείσῃ. ἡ γὰρ $K\Lambda$ τῆς σφαίρας διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ
 20 τῇ AB , ἐπειδὴπερ τῇ μὲν $A\Gamma$ ἴση κείται ἡ $K\Theta$, τῇ δὲ ΓB ἡ ΘA .

Λέγω δὴ, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστὶν ἡ $A\Gamma$ τῆς ΓB , τριπλῆ ἄρα
 25 ἐστὶν ἡ AB τῆς $B\Gamma$. ἀναστρέψαντι ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ BA τῆς $A\Gamma$. ὡς δὲ ἡ BA πρὸς τὴν $A\Gamma$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $A\Delta$ [ἐπειδὴπερ ἐπιζευγνυμένης τῆς ΔB ἐστὶν ὡς ἡ BA πρὸς τὴν $A\Delta$, οὕτως ἡ ΔA πρὸς τὴν $A\Gamma$ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν

1. τῇ] scripsi; τῆς PBVbq. 2. ΘA] supra scr. A m.
 1 b. ἐκκείσθω q. 5. ἄρα] e corr. V. 6. Ante $E\Theta$ del.

producatur enim recta $K\Theta$ in directum et fiat ΘA , et ponatur $\Theta A = \Gamma B$. et quoniam est $A\Gamma : \Gamma\Delta = \Gamma\Delta : \Gamma B$ [VI, 8 coroll.], et $A\Gamma = K\Theta$, $\Gamma\Delta = \Theta E$, $\Gamma B = \Theta A$, erit $K\Theta : \Theta E = E\Theta : \Theta A$. itaque $K\Theta \times \Theta A = E\Theta^2$ [VI, 17]. et uterque angulus $K\Theta E$, $E\Theta A$ rectus est. itaque semicirculus in $K\Delta$ descriptus etiam per E ueniet.¹⁾ itaque si manente recta $K\Delta$ semicirculus circumuolutus rursus ad idem punctum refertur, unde circumuolui coeptus est, etiam per puncta Z , H ueniet ductis rectis $Z\Delta$, ΔH , quo facto anguli ad Z , H positi et ipsi recti fiunt. et pyramis data sphaera erit comprehensa; nam $K\Delta$ diametro sphaerae AB aequalis est, quoniam posuimus

$$K\Theta = A\Gamma, \Theta A = \Gamma B.$$

iam dico, diametrum sphaerae potentia sesquialteram esse lateris pyramidis.

nam quoniam $A\Gamma = 2\Gamma B$, erit $AB = 3\Gamma B$. itaque conuertendo $BA = \frac{3}{2}A\Gamma$. uerum $BA : A\Gamma = BA^2$

1) Hoc ex VI, 8 concluderat Euclides; nam quae sequuntur lin. 9—12 male cohaerent et subditia uidentur, sicut etiam lin. 27 — pag. 294, 3. ibi Euclides tacite usus erat VI, 4 et V def. 9. quae leguntur, et re (cfr. lemma) et uerbis (*είναι* pag. 294 lin. 1) offendunt.

Θ m. 1 P. 7. *ἐστί]* *ἐστίν* P. 8. $K\Theta E]$ $K\Theta B$; corr. ex $K\Theta$, ΘE m. 1 P. $E\Theta A]$ corr. ex $E\Theta$, ΘA m. 1 P.
 10. *γίγνεται* P. 11. $\Delta EK]$ $EAK B$, corr. m. 2. *γίγνε-*
σθαι V b. 12. $EK\Theta$ P. 16. $Z\Delta]$ Z corr. ex Δ m. 1 V.
γιννομένων P b. 17. *ἐστιν* P. 19. *ἐστίν* P.
 23. *ἐστίν* P B. 24. $\tau\eta\varsigma]$ $\tau\eta$ b. *διπλῆ* b. *ἄρα ἐστίν]*
ἄρα V, *ἐστιν ἄρα* B. 26. $BA]$ (prius) AB V. *πρὸς τὴν]*
 bis P. 28. $\Delta B]$ in ras. V, AB b et B, sed corr. $BA]$
 corr. in $B\Delta$ B b.

$\triangle AB$, $\triangle A\Gamma$ τριγώνων, καὶ εἶναι ὡς τὴν πρώτην πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας]. ἡμιόλιον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς BA τοῦ ἀπὸ τῆς $A\Delta$. καὶ ἐστὶν ἡ μὲν BA ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ $A\Delta$ ἴση τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.

Ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λήμμα.

10 Δεικτέον, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $A\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\triangle A\Gamma$.

Ἐκκείσθω γὰρ ἡ τοῦ ἡμικυκλίου καταγραφὴ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $\triangle B$, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ τετράγωνον τὸ $E\Gamma$, καὶ συμπληρώσθω τὸ ZB παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ $\triangle AB$ τρίγωνον τῷ $\triangle A\Gamma$ τριγώνῳ ἐστὶν ὡς ἡ BA πρὸς τὴν $A\Delta$, οὕτως ἡ $\triangle A$ πρὸς τὴν $A\Gamma$, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BA , $A\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $A\Delta$. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ EB πρὸς τὸ BZ , καὶ ἐστὶ τὸ μὲν EB τὸ ὑπὸ τῶν BA , $A\Gamma$ ἴση γὰρ ἡ EA τῇ $A\Gamma$. τὸ δὲ BZ τὸ ὑπὸ τῶν $A\Gamma$, ΓB , ὡς ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν BA , $A\Gamma$ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $A\Gamma$, ΓB . καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν BA , $A\Gamma$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς $A\Delta$, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν $A\Gamma B$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς $\triangle A\Gamma$. ἡ γὰρ $\triangle A\Gamma$ κάθετος τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν $A\Gamma$, ΓB μέση ἀνάλογόν ἐστὶ διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ $A\Delta B$. ὡς

4. ἡ] (alt.) om. q. 5. $A\Delta$] om. b. 7. δυνάμει ἡμιολία Gregorius. 9. λήμμα] om. codd. 13. $\triangle B$] supra scr. A

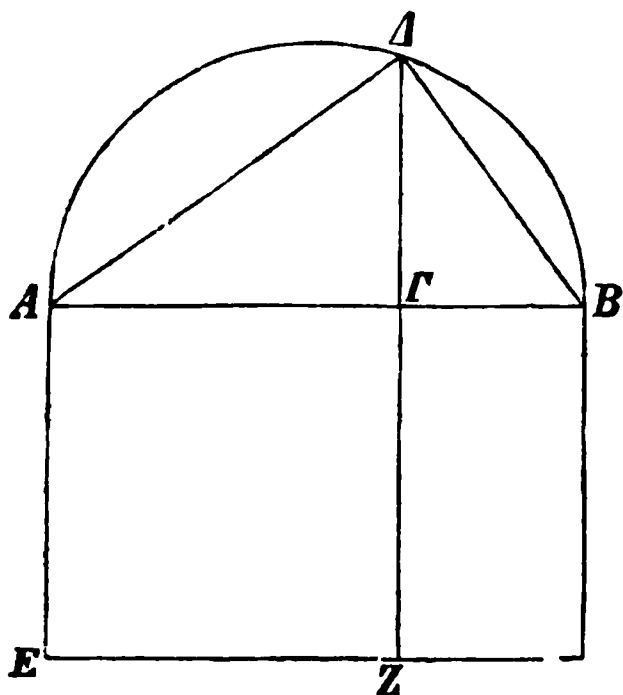
: $A\Delta^2$. itaque $BA^2 = \frac{3}{2}A\Delta^2$. et BA datae sphaerae
diametrus est, $A\Delta$ autem lateri pyramidis aequalis.

Ergo diametrus sphaerae potentia¹⁾ sesquialtera est
lateris pyramidis; quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Demonstrandum, esse $AB : B\Gamma = A\Delta^2 : \Delta\Gamma^2$.

exponatur enim figura semicirculi, et ducatur ΔB ,
et in $A\Gamma$ quadratum $E\Gamma$ describatur, et expleatur
parallelogrammum ZB .



iam quoniam est $BA : A\Delta = \Delta A : A\Gamma$, quia $\Delta AB \sim \Delta A\Gamma$ [VI, 8. VI, 4], erit
 $BA \times A\Gamma = A\Delta^2$ [VI, 17].
et quoniam est $AB : B\Gamma = EB : BZ$ [VI, 1], et $EB = BA \times A\Gamma$ (nam $EA = A\Gamma$), $BZ = A\Gamma \times \Gamma B$,
erit $AB : B\Gamma = BA \times A\Gamma : A\Gamma \times \Gamma B$. et $BA \times A\Gamma = A\Delta^2$, $A\Gamma \times \Gamma B = \Delta\Gamma^2$.

nam perpendicularis $\Delta\Gamma$ media est proportionalis partium basis $A\Gamma$, ΓB [VI, 8 coroll.], quia rectus est

1) Uocabulo *δυνάμει* aegre quidem caremus, sed fortasse tamen audiri potest.

m. 1 b. 14. $E\Gamma$] corr. ex $B\Gamma$ m. 1 B. 20. *ἐστίν* B.
21. *γάρ ἐστίν* V. 23. *ἐστίν* B. 24. *τό*] *τῷ* V. *τῷ*] *τό*
V. $A\Delta$] sic, sed mg. m. 1 ΔB b. 25. $A\Gamma$, ΓB BV.

ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν $BΓ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $AΔ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΔΓ$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'.

Ὀκτάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν, ἧ καὶ τὰ πρότερα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ AB , καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ $Γ$, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ $AΔB$, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ $Γ$ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΓΔ$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $ΔB$, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ $EZHΘ$ ἴσην ἔχον ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῇ $ΔB$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΘZ$, $EΗ$, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ K σημείου τῷ τοῦ $EZHΘ$ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἡ $ΚΑ$ καὶ διήχθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ ἐπιπέδου ὡς ἡ $ΚΜ$, καὶ ἀφηρήσθω ἀφ' ἑκατέρας τῶν $ΚΑ$, $ΚΜ$ μιᾶ τῶν $EΚ$, $ZΚ$, $ΗΚ$, $ΘΚ$ ἴση ἑκατέρα τῶν $ΚΑ$, $ΚΜ$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΛE$, $ΛZ$, $ΛΗ$, $ΛΘ$, ME , MZ , $MΗ$, $MΘ$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΚE$ τῇ $ΚΘ$, καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $EΚΘ$ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΘE$ διπλασίον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς $EΚ$. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΛΚ$ τῇ $ΚE$, καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $ΛΚE$ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $EΛ$ διπλασίον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ $EΚ$. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΘE$ διπλασίον τοῦ ἀπὸ

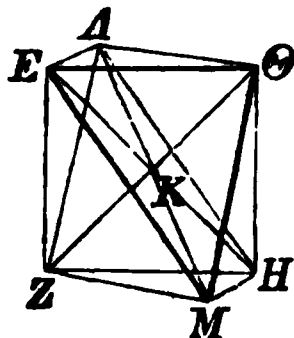
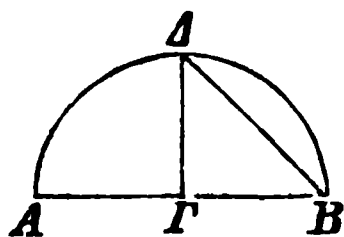
2. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. V. Figura lemmatis fuit in L.
 3. ιδ'] ιδ L. 4. συστήσασθαι P, corr. m. 2.
 5. τὰ πρότερα] τὴν πυραμίδα Theon (LBV bq), γρ. ἡ καὶ τὴν πυραμίδα mg. m. 1 pro schol. P. 6. τῆς] om. b. ἐστίν PLB.
 8. δοθείσης] om. q. σφαίρας] σφαίρας ἡ AB L.

$\angle A\Delta B$ [III, 31]. ergo $AB : B\Gamma = A\Delta^2 : \Delta\Gamma^2$; quod erat demonstrandum.

XIV.

Octaedrum construere et sphaera comprehendere sicut priora et demonstrare, diametrum sphaerae potentia duplo maiorem esse latere octaedri.

ponatur datae sphaerae diametrus AB , et in Γ in duas partes aequales diuidatur, et in AB semi-



circulus describatur $A\Delta B$, et a Γ ad AB perpendicularis ducatur $\Gamma\Delta$, et ducatur ΔB , et exponatur quadratum $EZH\Theta$ singula latera rectae ΔB

aequalia habens, et ducantur ΘZ , EH , et in K puncto ad planum quadrati $EZH\Theta$ perpendicularis ducatur

recta $K\Delta$, et ad alteram partem plani producat ut KM , et ab utraque $K\Delta$,

KM uni rectarum EK , ZK , HK ,

ΘK aequales abscindantur $K\Delta$, KM , et ducantur ΔE ,

ΔZ , ΔH , $\Delta\Theta$, ME , MZ , MH , $M\Theta$. et quoniam $KE = K\Theta$, et $\angle EK\Theta$ rectus est, erit [I, 47] $\Theta E^2 = 2EK^2$.

rursus quoniam $\Delta K = KE$, et $\angle \Delta KE$ rectus est, erit $E\Delta^2 = 2EK^2$ [id.]. demonstrauius

XIV. Pappus V p. 414, 7.

11. $\Gamma\Delta$] Δ e corr. V. $\acute{\epsilon}\pi\epsilon\zeta\epsilon\nu$ q. 12. $\acute{\epsilon}\kappa\epsilon\lambda\theta\omega$ supra
scr. κ m. 1 P. 13. ΔB] in ras. V, $B\Delta B$. ΘZ] $Z\Theta$ LBb.
16. $\mu\acute{\epsilon}\rho\eta$] om. V. 17. $\kappa\alpha\iota$] om. L? $\mu\acute{\iota}\alpha$ — 18. KM] om. L. 18. EK] KE supra m. 2 B, KE V. ZK] KZ BV q. KH , $K\Theta$ BV. 22. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ L. 23. $K\Delta E$ b.
24. Post $E\Delta$ ras. 1 litt. P. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ L. $\tau\eta\varsigma$ EK LBV.

τῆς $EΚ$. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΛΕ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $EΘ$. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ $ΛΕ$ τῇ $EΘ$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $ΛΘ$ τῇ $ΘΕ$ ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΛΕΘ$ τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον
 5 τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μὲν εἰσιν αἱ τοῦ $EZHΘ$ τετραγώνου πλευραί, κορυφαὶ δὲ τὰ $Λ, Μ$ σημεῖα, ἰσόπλευρόν ἐστιν· ὀκτάεδρον ἄρα συνέσταται ὑπὸ ὀκτῶ τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ
 10 καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίον ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ τρεῖς αἱ $ΛΚ, ΚΜ, ΚΕ$ ἴσαι ἀλλή-
 λαις εἰσίν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς $ΛΜ$ γραφόμενον ἡμικύ-
 κλιον ἤξει καὶ διὰ τοῦ E . καὶ διὰ τὰ αὐτά, ἐὰν
 15 μενούσης τῆς $ΛΜ$ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῆ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἤξει καὶ διὰ τῶν $Z, Η, Θ$ σημείων, καὶ ἔσται σφαῖρα περιειλημμένον τὸ ὀκτάεδρον. λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ $ΛΚ$ τῇ $ΚΜ$, κοινὴ δὲ ἡ $ΚΕ$,
 20 καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, βάσεις ἄρα ἡ $ΛΕ$ βάσει τῇ $ΕΜ$ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΛΕΜ$ γωνία· ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΛΜ$ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $ΛΕ$. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΓΒ$, διπλασία ἐστὶν ἡ $ΑΒ$ τῆς $ΒΓ$. ὡς δὲ ἡ
 25 $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΒΓ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΔ$ διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΒΔ$. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΛΜ$ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς $ΛΕ$. καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς

1. ἐστίν L. 2. ἐστίν] om. V. 3. ἐστίν L. 5. Post ὧν add. αἱ b. βάσεις L et B, sed corr. m. 2. ἐστίν L.

autem, esse etiam $\Theta E^2 = 2EK^2$. itaque $AE^2 = E\Theta^2$.
 quare $AE = E\Theta$. eadem de causa igitur etiam $A\Theta$
 $= \Theta E$. quare triangulus $AE\Theta$ aequilaterus est. simi-
 liter demonstrabimus, etiam reliquos triangulos, quo-
 rum bases sint latera quadrati $EZH\Theta$, uertices autem
 puncta A, M , singulos aequilateros esse. ergo octa-
 edrum constructum est octo triangulis aequilateris com-
 prehensum.

Oportet igitur data sphaera idem comprehendere
 et demonstrare, diametrum sphaerae potentia duplo
 maiorem esse latere octaedri.

nam quoniam tres rectae AK, KM, KE inter se
 aequales sunt, semicirculus in AM descriptus etiam
 per E ueniet. et eadem de causa si manente AM
 semicirculus circumuolutus ad idem punctum refertur,
 unde circumuolui coeptus est, etiam per puncta $Z, H,$
 Θ ueniet, et octaedrum sphaera comprehensum erit.
 iam dico, etiam data id sphaera comprehensum esse.
 nam quoniam $AK = KM$, et KE communis est, et
 rectos angulos comprehendunt, erit $AE = EM$ [I, 4].
 et quoniam $\angle AEM$ rectus est (nam in semicirculo est)
 [III, 31], erit $AM^2 = 2AE^2$ [I, 47]. rursus quo-
 niam $A\Gamma = \Gamma B$, erit $AB = 2B\Gamma$. uerum $AB : B\Gamma$
 $= AB^2 : B\Delta^2$ [VI, 8. V def. 9]. itaque $AB^2 = 2B\Delta^2$.
 demonstrauius autem, esse etiam $AM^2 = 2AE^2$. et

6. κορυφή Pq. 7. ἰσόπλευρά bq. 8. περιεχομένων P,
 corr. m. 1. 11. ἐστίν L. 12. Post γάρ del. ἐστίν m. 1 P.
 αἰ] (alt.) α (ᾱ?) L. AK] KA b. 13. εἰσὶ Vq, comp.
 b. 17. Z] E, Z P. 20. περιέχουσι V bq. 21. ἡ] om.
 q. 23. ἐστι] om. V, ἐστίν L. 24. τῆς] ε in ras. 2 litt. m.
 1 P, τῆ q. 26. BΔ] Δ in ras. V. διπλάσιον — 27. BΔ]
 om. L, mg. m. 2 B.

ΔB τῷ ἀπὸ τῆς AE . ἴση γὰρ κεῖται ἢ $E\Theta$ τῇ ΔB . ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ἀπὸ τῆς AM . ἴση ἄρα ἢ AB τῇ AM . καὶ ἐστὶν ἢ AB ἢ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἢ AM ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δο-
5 θείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

Περιείληπται ἄρα τὸ ὀκτάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ. καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἢ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκτάεδρου πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

ιε'.

Κύβον συστήσασθαι καὶ σφαίρα περιλαβεῖν, ἢ καὶ τὴν πυραμίδα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἢ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς.

15 Ἐκκείσθω ἢ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἢ AB καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε διπλῆν εἶναι τὴν $A\Gamma$ τῆς ΓB , καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ $A\Delta B$, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἢ $\Gamma\Delta$, καὶ ἐπεξεύχθω ἢ ΔB , καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον
20 τὸ $EZH\Theta$ ἴσην ἔχον τὴν πλευρὰν τῇ ΔB , καὶ ἀπὸ τῶν E, Z, H, Θ τῷ τοῦ $EZH\Theta$ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ $EK, Z\Lambda, HM, \Theta N$, καὶ

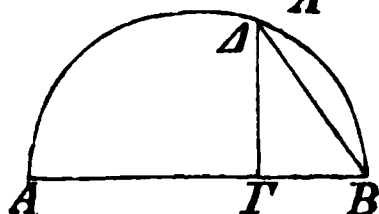
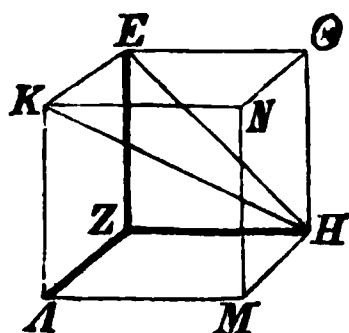
1. AE] supra scr. Δ m. 1 b. ΔB] supra scr. A m. 1 b. 2. ἐστὶν ἄρα P. 3. ἢ] (tert.) om. b. 4. ἐστὶν P. 7. ὅτι ἢ] corr. ex ὅτι b m: 1. 8. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. V, ὅπερ ἐστὶ B. 11. κύκλον q. συστήσασθαι P. 12. ἢ] om. b. τὴν πυραμίδα] τὰ πρότερον Theon (BVbq). 13. τριπλῆ Bq b, comp. V. ἐστὶν PB. 15. ἢ] (prius) postea add. m. 1 P. 19. ΔB] AB b. 20. ἔχων P, corr. m. 2. τὴν] ἐκάστην Vq. 21. τῷ τοῦ $EZH\Theta$] supra m. 2 P. ἐπιπέδων B, corr. m. 2. 22. καὶ] seq. ras. 8 litt. V.

$\Delta B^2 = \Delta E^2$; supposuimus enim esse $E\Theta = \Delta B$. itaque etiam $AB^2 = \Delta M^2$. quare $AB = \Delta M$. et AB diametrus est datae sphaerae. ergo ΔM diametro datae sphaerae aequalis est.

Ergo octaedrum data sphaera comprehensum est; et simul demonstrauius, diametrum sphaerae potentia duplo maiorem esse latere octaedri; quod erat demonstrandum.

XV.¹⁾

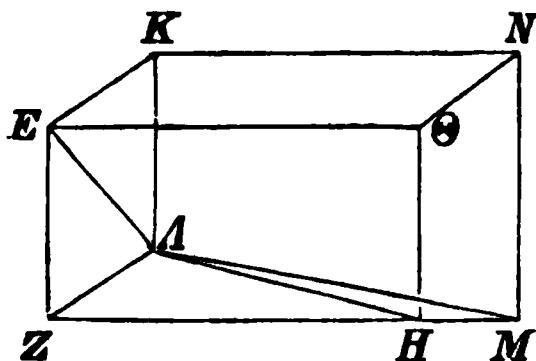
Cubum construere et sphaera comprehendere, sicut pyramidem, et demonstrare, diametrum sphaerae potentia triplo maiorem esse latere cubi.



Exponatur diametrus datae sphaerae AB et in Γ ita diuidatur, ut sit $A\Gamma = 2\Gamma B$ [VI, 10], et in AB semicirculus describatur $A\Delta B$, et a Γ ad AB perpendicularis ducatur $\Gamma\Delta$, et ducatur ΔB , et exponatur

quadratum $EZH\Theta$ latus rectae ΔB aequale habens, et in E, Z, H, Θ ad planum quadrati $EZH\Theta$ perpendiculares erigantur $EK, ZA, HM, \Theta N$, et a singulis

1) In B figura textus eadem est ac nostra, sed in mg. m. 1 haec figura descripta est additis uerbis: *ἐν ἄλλῳ ὁ κύβος οὕτως.*



ἀφηγήσθω ἀπὸ ἐκάστης τῶν EK , $Z\Lambda$, HM , ΘN μιᾶ
 τῶν EZ , ZH , $H\Theta$, ΘE ἴση ἐκάστη τῶν EK , $Z\Lambda$,
 HM , ΘN , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $K\Lambda$, ΛM , MN , NK .
 κύβος ἄρα συνέσταται ὁ ZN ὑπὸ ἕξ τετραγώνων ἴσων
 5 περιεχόμενος. δεῖ δὴ αὐτὸν καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν
 τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος
 δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ KH , EH . καὶ ἐπεὶ ὀρθή
 ἐστὶν ἡ ὑπὸ KEH γωνία διὰ τὸ καὶ τὴν KE ὀρθὴν
 10 εἶναι πρὸς τὸ EH ἐπίπεδον δηλαδὴ καὶ πρὸς τὴν EH
 εὐθεῖαν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς KH γραφόμενον ἡμικύκλιον
 ἦξει καὶ διὰ τοῦ E σημείου. πάλιν, ἐπεὶ ἡ HZ ὀρθή
 ἐστὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν $Z\Lambda$, ZE , καὶ πρὸς τὸ ZK
 ἄρα ἐπίπεδον ὀρθή ἐστὶν ἡ HZ . ὥστε καὶ ἐὰν ἐπι-
 15 ζεύξωμεν τὴν ZK , ἡ HZ ὀρθὴ ἔσται καὶ πρὸς
 τὴν ZK . καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τὸ ἐπὶ τῆς HK γρα-
 φόμενον ἡμικύκλιον ἦξει καὶ διὰ τοῦ Z . ὁμοίως καὶ
 διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ κύβου σημείων ἦξει. ἐὰν δὴ
 μενούσης τῆς KH περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ
 20 αὐτὸ ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἔσται
 σφαῖρα περιειλημμένος ὁ κύβος. λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῇ
 δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ HZ τῇ ZE , καὶ ἐστὶν
 ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ Z γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EH δι-
 πλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς EZ . ἴση δὲ ἡ EZ τῇ EK .
 25 τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EH διπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς EK .
 ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν HE , EK , τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς HK ,
 τριπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς EK . καὶ ἐπεὶ τριπλα-
 σίων ἐστὶν ἡ AB τῆς $B\Gamma$, ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν

1. ἀφηγήσθωσαν $BVbq$. 4. συνίσταται $V?$ ZN] N
 in ras. m. 1 P. 7. τριπλασίων P. 8. KH] corr. ex KN
 m. 1 B, KN q. 9. τὴν] corr. ex τό m. 1 q. 12. HZ] in

$EK, ZA, HM, \odot N$ uni rectarum $EZ, ZH, H\odot, \odot E$ aequales abscindantur singulae $EK, ZA, HM, \odot N$, et ducantur KA, AM, MN, NK . itaque cubus constructus est sex quadratis aequalibus comprehensus. oportet igitur eundem data sphaera comprehendere et demonstrare, diametrum sphaerae potentia triplo maiorem esse latere cubi.

ducantur enim KH, EH . et quoniam $\angle KEH$ rectus est, quia KE ad planum EH perpendicularis est et manifesto etiam ad rectam EH [XI def. 3], semicirculus in KH descriptus etiam per E punctum ueniet. rursus quoniam HZ ad utramque ZA, ZE perpendicularis est, HZ etiam ad planum ZK perpendicularis est [XI, 4]. quare ducta ZK recta HZ etiam ad ZK perpendicularis erit. qua de causa rursus semicirculus in HK descriptus etiam per Z ueniet. similiter etiam per reliqua puncta cubi ueniet. iam si manente KH semicirculus circumuolutus ad idem punctum refertur, unde circumuolui coeptus est, cubus sphaera comprehensus erit. iam dico, etiam data sphaera eum comprehensum esse. nam quoniam $HZ = ZE$, et angulus ad Z positus rectus est, erit $EH^2 = 2EZ^2$ [I, 47]. uerum $EZ = EK$. erit igitur $EH^2 = 2EK^2$. quare $HE^2 + EK^2 = 3EK^2 = HK^2$. et quoniam $AB = 3B\Gamma$, et $AB : B\Gamma = AB^2 : B\Delta^2$ [VI, 8. V def. 9],

ras. V. 13. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. $Z\Lambda''$, ZE' b, ZE , ZA q et V (E et Λ in ras.) $\kappa\alpha\iota$] supra m. 1 b. KZ q et in ras. V.
 14. HZ] in ras. V. $\kappa\alpha\iota \acute{\alpha}\nu$ q, $\acute{\alpha}\nu$ B V b. 15. HZ] in ras. V.
 16. $\kappa\alpha\iota$] om. q. 17. $\acute{\omicron}\mu\acute{\omicron}\iota\omega\varsigma \delta\grave{\epsilon} \kappa\alpha\iota$ V. 20. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\alpha\iota \acute{\alpha}\rho\alpha$
 bq. 23. $\tau\tilde{\omega}$] $\tau\acute{o}$ V q. 26. $\tau\acute{\alpha}$] $\kappa\alpha\iota \tau\acute{\alpha}$ V, $\tau\acute{\alpha}$ postea add. P.
 HE] EH q. EK] supra scr. N m. 1 b. $\tau\tilde{\eta}\varsigma$] $\tau\omicron\upsilon$ q.
 HK] H corr. ex E m. rec. B. 28. $B\Gamma$] corr. ex BK m. 1 B.

$B\Gamma$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$,
 τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς $B\Delta$.
 ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HK τοῦ ἀπὸ τῆς KE τρι-
 πλάσιον. καὶ κείται ἴση ἢ KE τῇ ΔB . ἴση ἄρα καὶ
 5 ἢ KH τῇ AB . καὶ ἐστὶν ἢ AB τῆς δοθείσης σφαίρας
 διάμετρος· καὶ ἢ KH ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης
 σφαίρας διαμέτρῳ.

Τῇ δοθείσῃ ἄρα σφαίρᾳ περιέλληπται ὁ κύβος· καὶ
 συναποδέδεικται, ὅτι ἢ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει
 10 τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'.

Εἰκοσάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περι-
 λαβεῖν, ἢ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ δεῖ-
 ξαι, ὅτι ἢ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστὶν
 15 ἢ καλουμένη ἐλάττων.

Ἐκκείσθω ἢ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἢ
 AB καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε τετραπλῆν εἶναι
 τὴν $A\Gamma$ τῆς ΓB , καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμι-
 κύκλιον τὸ $A\Delta B$, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ AB πρὸς
 20 ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἢ $\Gamma\Delta$, καὶ ἐπεξεύχθω ἢ
 ΔB , καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ $EZH\Theta K$, οὗ ἢ ἐκ τοῦ
 κέντρου ἴση ἔστω τῇ ΔB , καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν
 $EZH\Theta K$ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσο-
 γώνιον τὸ $EZH\Theta K$, καὶ τετμήσθωσαν αἱ EZ , ZH ,
 25 $H\Theta$, ΘK , KE περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Λ , M , N ,
 Ξ , O σημεία, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΛM , MN , $N\Xi$,
 ΞO , $O\Lambda$, EO . ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $\Lambda MN\Xi O$

1. $B\Gamma$] corr. ex BK m. 1 B. 2. τριπλασίων P, corr.
 m. 1. 4. ΔB] AB corr. in $B\Delta B$, AB supra scr. Δ m. 1 b,

erit $AB^2 = 3B\Delta^2$. demonstrauius autem, esse etiam $HK^2 = 3KE^2$. et posuimus $KE = \Delta B$. itaque etiam $KH = AB$. et AB diametrus est datae sphaerae. itaque etiam KH diametro datae sphaerae aequalis est.

Ergo cubus data sphaera comprehensus est; et simul demonstrauius, diametrum sphaerae potentia triplo maiorem esse latere cubi; quod erat demonstrandum.

XVI.

Icosaedrum construere et sphaera comprehendere, sicut figuras supra nominatas, et demonstrare, latus icosaedri irrationalem esse minorem quae uocatur.

Exponatur diametrus datae sphaerae AB et in Γ ita secetur, ut sit $A\Gamma = 4\Gamma B$ [VI, 10], et in AB semicirculus describatur $A\Delta B$, et a Γ ad AB perpendicularis ducatur recta $\Gamma\Delta$, et ducatur ΔB , et exponatur circulus $EZH\Theta K$, cuius radius aequalis sit rectae ΔB , et in circulum $EZH\Theta K$ pentagonum aequilaterum et aequiangulum inscribatur $EZH\Theta K$ [IV, 11], et arcus EZ , ZH , $H\Theta$, ΘK , KE in punctis A , M , N , Ξ , O in binas partes aequales diuidantur, et ducantur AM , MN , $N\Xi$, ΞO , OA , EO . itaque pentagonum $AMN\Xi O$

XVI. Pappus V p. 440, 19.

$B\Delta$ V q. 5. τῆς] ἡ τῆς q. 6. καί] om. q. ἐστίν B.
 τῆ] supra scr. m. 1 P. 8. δοθείση] om. P. 10. ἐστίν P.
 12. συνστήσασθαι P, corr. m. rec. 16. σφαίρας] bis P,
 corr. m. 1. 17. ὡστε] ὡς b. 19. $AB\Delta$ b. τῆ AB] om.
 b. 21. $B\Delta$ e corr. b. ἐκκείσθω] alt. κ postea add. m. 1 P.
 ἡ ἐκ τοῦ] bis P, corr. m. 1. 25. KE αἰ q. 26. O] postea
 ins. B. 27. EO] om. q, supra scr. B uel Θ b.

πεντάγωνον, καὶ δεκαγώνου ἢ EO εὐθεῖα. καὶ ἀν-
 εστάτως ἀπὸ τῶν E, Z, H, Θ, K σημείων τῷ τοῦ
 κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαι αἱ $EP,$
 $ZP, HS, \Theta T, KT$ ἴσαι οὖσαι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου
 5 τοῦ $EZH\Theta K$ κύκλου, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $PP, P\Sigma,$
 $\Sigma T, TT, TP, PL, LP, PM, M\Sigma, \Sigma N, NT, T\Xi,$
 $\Xi T, TO, OP$. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρω τῶν EP, KT τῷ
 αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν
 ἢ EP τῇ KT . ἔστι δὲ αὐτῇ καὶ ἴση· αἱ δὲ τὰς ἴσας
 10 τε καὶ παραλλήλους ἐπιζευγνύουσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη
 εὐθεῖαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἢ PT ἄρα τῇ
 EK ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστίν. πενταγώνου δὲ
 ἰσοπλεύρου ἢ EK · πενταγώνου ἄρα ἰσοπλεύρου καὶ ἢ
 PT τοῦ εἰς τὸν $EZH\Theta K$ κύκλον ἐγγραφομένου. διὰ
 15 τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν $PP, P\Sigma, \Sigma T, TT$
 πενταγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν $EZH\Theta K$
 κύκλον ἐγγραφομένου· ἰσόπλευρον ἄρα τὸ $PP\Sigma TT$
 πεντάγωνον. καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μὲν ἐστίν ἢ $PE,$
 δεκαγώνου δὲ ἢ EO , καὶ ἐστίν ὀρθὴ ἢ ὑπὲρ $PEO,$
 20 πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἢ PO · ἢ γὰρ τοῦ πενταγώνου
 πλευρὰ δύναται τὴν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ
 δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.
 διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἢ OT πενταγώνου ἐστὶ πλευρὰ.
 ἔστι δὲ καὶ ἢ PT πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ
 25 τὸ $PO T$ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκαστον τῶν
 $PLP, PM\Sigma, \Sigma NT, T\Xi T$ ἰσόπλευρόν ἐστίν. καὶ
 ἐπεὶ πενταγώνου ἐδείχθη ἑκατέρω τῶν PL, PO , ἔστι

1. δεκαγώνον, mut. in δεκάγωνον q. $OE P$. ἀν-
 εστάτω q. 4. οὖσαι] om. b. 7. EP] ΘP ? B, sed corr.
 8. ἐστὶ BVq, comp. b. 9. ἐστίν PB. 10. ἐπὶ τὰ αὐτὰ
 μέρη ἐπιζευγνύουσαι V. 11. τε] om. q. 12. τέ ἐστὶ V.

aequilaterum est, et decagoni latus est recta EO . et in punctis E, Z, H, Θ, K ad planum circuli perpendiculares erigantur rectae $E\Pi, ZP, H\Sigma, \Theta T, K\Upsilon$ radio circuli $EZH\Theta K$ aequales, et ducantur $\Pi P, P\Sigma, \Sigma T, T\Upsilon, \Upsilon\Pi, \Pi\Lambda, \Lambda P, P M, M\Sigma, \Sigma N, N T, T\Xi, \Xi T, T O, O\Pi$. et quoniam utraque $E\Pi, K\Upsilon$ ad idem planum perpendicularis est, $E\Pi$ rectae $K\Upsilon$ parallela erit [XI, 6]. uerum etiam $E\Pi = K\Upsilon$. quae autem rectas aequales et parallelas ad easdem partes coniungunt rectae, inter se aequales et parallelae sunt [I, 33]. itaque ΠT rectae $E K$ aequalis et parallela est. uerum $E K$ latus pentagoni aequilateri est. quare etiam ΠT latus est pentagoni aequilateri in $EZH\Theta K$ circulo inscripti. eadem de causa etiam singulae $\Pi P, P\Sigma, \Sigma T, T\Upsilon$ latera sunt pentagoni aequilateri in $EZH\Theta K$ circulo inscripti. itaque pentagonum $\Pi P\Sigma T\Upsilon$ aequilaterum est. et quoniam hexagoni latus est ΠE , decagoni autem EO , et $\angle \Pi E O$ rectus est, ΠO latus est pentagoni; nam quadratum lateris pentagoni quadratis laterum hexagoni et decagoni in eodem circulo inscriptorum aequale est [prop. X]. eadem de causa etiam $O T$ latus est pentagoni. uerum etiam ΠT pentagoni est. triangulus igitur $\Pi O T$ aequilaterus est. eadem de causa etiam singuli trianguli $\Pi\Lambda P, P M\Sigma, \Sigma N T, T\Xi T$ aequilateri sunt. et quoniam demonstrauius, utramque $\Pi\Lambda, \Pi O$ latus pentagoni

$\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] om. V, $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ q, comp. b. 13. -πλεύρον — ἴσο-] mg. m. 2 B. 15. $\delta\eta$] om. q. 16. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$, supra add. πλευρα, V. $EZH\Theta$ V. 17. $\acute{\alpha}\rho\alpha \acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. 19. EO] $E\Theta$ b, OE q. 21. $\tau\epsilon$] om. q. 22. $\tau\acute{\omega}\nu$] om. q. 23. TO q. 24. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ B. 26. PME b. $T\Xi T$ τριγώνων V. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ PV q, comp. b. 27. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ B.

δὲ καὶ ἡ ΛO πενταγώνου, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ
 $\Pi \Lambda O$ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν
 $\Lambda P M$, $M \Sigma N$, $N T \Xi$, $\Xi T O$ τριγώνων ἰσόπλευρόν
 ἐστίν. εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ $E Z H \Theta K$ κύκλου τὸ
 5 Φ σημεῖον· καὶ ἀπὸ τοῦ Φ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ
 πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἡ $\Phi \Omega$, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ
 ἕτερα μέρη ὡς ἡ $\Phi \Psi$, καὶ ἀφηρήσθω ἑξαγώνου μὲν
 ἡ ΦX , δεκαγώνου δὲ ἑκατέρω τῶν $\Phi \Psi$, $X \Omega$, καὶ
 ἐπεξεύχθωσαν αἱ $\Pi \Omega$, ΠX , $T \Omega$, $E \Phi$, $\Lambda \Phi$, $\Lambda \Psi$,
 10 ΨM . καὶ ἐπεὶ ἑκατέρω τῶν ΦX , ΠE τῷ τοῦ κύκλου
 ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ
 ΦX τῇ ΠE . εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι· καὶ αἱ $E \Phi$, ΠX ἄρα
 ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. ἑξαγώνου δὲ ἡ $E \Phi$
 ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΠX . καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μὲν
 15 ἐστὶν ἡ ΠX , δεκαγώνου δὲ ἡ $X \Omega$, καὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ
 ὑπὸ $\Pi X \Omega$ γωνία, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ $\Pi \Omega$. διὰ
 τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $T \Omega$ πενταγώνου ἐστίν, ἐπειδήπερ,
 εἰ ἐπιζεύξωμεν τὰς ΦK , $X T$, ἴσαι καὶ ἀπεναντίον
 ἔσονται, καὶ ἐστὶν ἡ ΦK ἐκ τοῦ κέντρου οὕσα ἑξα-
 20 γώνου· ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ $X T$. δεκαγώνου δὲ ἡ
 $X \Omega$, καὶ ὀρθὴ ἰ ὑπὸ $T X \Omega$ · πενταγώνου ἄρα ἡ $T \Omega$.
 ἔστι δὲ καὶ ἡ ΠT πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ
 τὸ $\Pi T \Omega$ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν
 λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μὲν εἰσιν αἱ ΠP , $P \Sigma$,
 25 ΣT , $T T$ εὐθεῖαι, κορυφὴ δὲ τὸ Ω σημεῖον, ἰσόπλευρόν
 ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ ἑξαγώνου μὲν ἡ $\Phi \Lambda$, δεκαγώνου

2. $\Pi \Lambda \Theta$ q. 3. τρίγωνον comp. b. 4. τοῦ κύκλου τοῦ
 $E Z H \Theta K$ V. 6. ἐκβεβλη q. 7. $\Psi \Phi$ b. 8. $\Phi \Psi$] Ψ in
 ras. m. 1 P. 9. $\Lambda \Phi$] $\Lambda \Psi$ P, $\Phi \Lambda$ q. $\Lambda \Psi$] $\Lambda \Phi$ P.
 10. ΨM] in ras., dein add. $M \Phi$ V; $M \Psi$, del. m. 1 et m. rec.
 P. 11. ἐστίν] comp. b, ἐστὶ P B V q. 12. Ante ΦX del.

esse, et AO et ipsa pentagoni est, triangulus $ΠAO$ aequilaterus est. eadem de causa etiam singuli trianguli APM , $MΣN$, $NTΞ$, $ΞTO$ aequilateri sunt. iam sumatur centrum circuli $EZHΘK$ [III, 1] et sit punctum $Φ$. et in puncto $Φ$ ad planum circuli perpendicularis erigatur $ΦΩ$ et ad alteram partem producatur ut $ΦΨ$, et abscindatur latus hexagoni $ΦX$, decagoni autem utraque $ΦΨ$, $XΩ$, et ducantur $ΠΩ$, $ΠX$, $ΤΩ$, $EΦ$, $ΑΦ$, $ΑΨ$, $ΨM$. et quoniam utraque $ΦX$, $ΠE$ ad planum circuli perpendicularis est, $ΦX$ rectae $ΠE$ parallela est [XI, 6]. uerum etiam aequales sunt. quare etiam $EΦ$, $ΠX$ aequales et parallelae sunt [I, 33]. sed $EΦ$ latus est hexagoni. quare etiam $ΠX$ hexagoni est. et quoniam $ΠX$ latus est hexagoni, $XΩ$ autem decagoni, et $\angle ΠXΩ$ rectus est [XI def. 3. I, 29], $ΠΩ$ latus est pentagoni [prop. X]. eadem de causa etiam $ΤΩ$ pentagoni est, quoniam, si duxerimus $ΦK$, $XΤ$, aequales erunt et inter se oppositae, et $ΦK$ radius aequalis est lateri hexagoni; quare etiam $XΤ$ hexagoni est. decagoni autem $XΩ$, et $\angle ΤXΩ$ rectus est; quare $ΤΩ$ pentagoni est. uerum etiam $ΠΤ$ pentagoni est. itaque triangulus $ΠΤΩ$ aequilaterus est. eadem de causa igitur etiam reliqui trianguli, quorum bases sunt rectae $ΠP$, $PΣ$, $ΣT$, $ΤΤ$, uertex autem punctum $Ω$, singuli aequilateri sunt. rursus quoniam hexagoni est $ΦA$, decagoni

1 litt. P. $είσιν$ PB. $XΠ$ P. 15. $έστιν$] (prius) $έστι$ P, $είσιν$ q. 19. $ΦX$ B. 21. $ΤΩ$] $ΩΤ$ P. 22. $έστιν$ B. $έστι$] om. V, $έσιν$ P. 23. $καί$] om. bq, supra m. 2 B. 24. $ών$] supra m. 2 B. 26. $έστι$ Pq, comp. b. $μέν$] $έσιν$ q, $μέν$ $έστιν$ b. $ΑΦ$ q.

δὲ ἡ $\Phi\Psi$, καὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\Lambda\Phi\Psi$ γωνία, πεντα-
 γώνου ἄρα ἐστὶν ἡ $\Lambda\Psi$. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ εἰς ἐπι-
 ζεύξωμεν τὴν $M\Phi$ οὖσαν ἑξαγώνου, συνάγεται καὶ ἡ
 $M\Psi$ πενταγώνου. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΛM πενταγώνου·
 5 ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Lambda M\Psi$ τρίγωνον. ὁμοίως δὲ
 δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων,
 ὧν βάσεις μὲν εἰσὶν αἱ MN , $NΞ$, $ΞO$, $O\Lambda$, κορυφὴ
 δὲ τὸ Ψ σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστὶν. συνέσταται ἄρα
 εἰκοσάεδρον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἰσοπλεύρων περι-
 10 εχόμενον.

Δεῖ δὲ αὐτὸ καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ
 καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστὶν
 ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ ἑξαγώνου ἐστὶν ἡ ΦX , δεκαγώνου δὲ ἡ
 15 $X\Omega$, ἡ $\Phi\Omega$ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται
 κατὰ τὸ X , καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημὰ ἐστὶν ἡ ΦX .
 ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $\Omega\Phi$ πρὸς τὴν ΦX , οὕτως ἡ ΦX
 πρὸς τὴν $X\Omega$. ἴση δὲ ἡ μὲν ΦX τῇ ΦE , ἡ δὲ $X\Omega$
 τῇ $\Phi\Psi$. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $\Omega\Phi$ πρὸς τὴν ΦE , οὕτως
 20 ἡ $E\Phi$ πρὸς τὴν $\Phi\Psi$. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ $\Omega\Phi E$,
 $E\Phi\Psi$ γωνίαι· εἰς ἄρα ἐπιζεύξωμεν τὴν $E\Omega$ εὐθεῖαν,
 ὀρθὴ ἔσται ἡ ὑπὸ $\Psi E\Omega$ γωνία διὰ τὴν ὁμοιότητα
 τῶν $\Psi E\Omega$, $\Phi E\Omega$ τριγώνων. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἐπεὶ
 ἐστὶν ὡς ἡ $\Omega\Phi$ πρὸς τὴν ΦX , οὕτως ἡ ΦX πρὸς
 25 τὴν $X\Omega$, ἴση δὲ ἡ μὲν $\Omega\Phi$ τῇ ΨX , ἡ δὲ ΦX τῇ
 $X\Pi$, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΨX πρὸς τὴν $X\Pi$, οὕτως ἡ
 ΠX πρὸς τὴν $X\Omega$. καὶ διὰ τοῦτο πάλιν εἰς ἐπι-
 ζεύξωμεν τὴν $\Pi\Psi$, ὀρθὴ ἔσται ἡ πρὸς τῷ Π γωνία·

3. $\Phi M P$. 4. $\Psi M P$. ἐστὶν $P B$. ἡ] supra scr. m.
 1 b. 5. ἐστὶ] om. V, ἐστὶν P . $\Psi \Lambda M P$. δὴ] om. V.

autem $\Phi\Psi$, et $\angle \Lambda\Phi\Psi$ rectus est, $\Lambda\Psi$ pentagoni est [prop. X]. eadem de causa ducta $M\Phi$, quae latus est hexagoni, concludimus, etiam $M\Psi$ pentagoni esse. uerum etiam ΛM pentagoni est. itaque triangulus $\Lambda M\Psi$ aequilaterus est. similiter demonstrabimus, etiam reliquos triangulos, quorum bases sint MN , $NΞ$, $ΞO$, $O\Lambda$, uertex autem punctum Ψ , singulos aequilateros esse. ergo icosaedrum constructum est uiginti triangulis aequilateris comprehensum.

oportet igitur etiam data id sphaera comprehendere et demonstrare, latus icosaedri irrationalem esse minorem quae uocatur.

nam quoniam hexagoni est ΦX , decagoni autem $X\Omega$, recta $\Phi\Omega$ in X secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars eius est ΦX [prop. IX]. itaque $\Omega\Phi : \Phi X = \Phi X : X\Omega$. uerum $\Phi X = \Phi E$, $X\Omega = \Phi\Psi$. quare $\Omega\Phi : \Phi E = E\Phi : \Phi\Psi$. et anguli $\Omega\Phi E$, $E\Phi\Psi$ recti sunt. ergo ducta $E\Omega$ $\angle \Psi E\Omega$ rectus erit, quia $\Delta \Psi E\Omega \sim \Phi E\Omega$ [VI, 8]. eadem de causa quoniam est $\Omega\Phi : \Phi X = \Phi X : X\Omega$, et $\Omega\Phi = \Psi X$, $\Phi X = X\Pi$, erit $\Psi X : X\Pi = \Pi X : X\Omega$. quare rursus ducta $\Pi\Psi$ angulus ad Π positus rectus

6. λοιπῶν] ι supra scr. m. 1 P. 7. ὄν] mg. m. 2 B.
 μέν] om. B. 8. ἐστὶ Pq, comp. b. 14. ἐστὶν] μέν V.
 18. ΦE] $\Phi\Lambda$ Theon (BVbq), item lin. 19. 20. $E\Phi$] $\Lambda\Phi$
 BVbq (Λ e corr. m. 2 B). $\Omega\Phi\Lambda$ Vbq, Λ e corr. m. 2 B.
 21. $\Lambda\Phi\Psi$ BVbq. $\Lambda\Omega$ BVbq. 22. $\Psi\Lambda\Omega$ BVbq.
 23. $\Psi\Lambda\Omega$ BVbq. $\Phi\Lambda\Omega$ BVbq. Post τριγώνων add. τὸ
 ἄρα ἐπὶ τῆς $\Psi\Omega$ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἤξει καὶ διὰ τοῦ Λ
 Vbq, mg. m. 2 B (καὶ om. q). 24. ἦ] (prius) in ras. m. 1 P.
 25. ΨX] $X\Psi$ q. 27. τοῦτο] τὰ αὐτά q; γρ. διὰ τὰ
 αὐτά mg. m. 1 b. εἰ ἐπιζεύξομεν q. 28. τῶ] τό q.

τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς $\Psi\Omega$ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἦξει καὶ
 διὰ τοῦ Π . καὶ ἐὰν μενούσης τῆς $\Psi\Omega$ περιενεχθὲν
 τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῆ, ὅθεν
 ἦρξατο φέρεσθαι, ἦξει καὶ διὰ τοῦ Π καὶ τῶν λοιπῶν
 5 σημείων τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἔσται σφαῖρα περιειλημ-
 μένον τὸ εἰκοσάεδρον. λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ.
 τετμήσθω γὰρ ἡ ΦX δίχα κατὰ τὸ A' . καὶ ἐπεὶ
 εὐθεῖα γραμμὴ ἡ $\Phi\Omega$ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται
 κατὰ τὸ X , καὶ τὸ ἔλασσον αὐτῆς τμήμα ἐστὶν ἡ ΩX ,
 10 ἡ ἄρα ΩX προσλαβοῦσα τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος
 τμήματος τὴν $X A'$ πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς
 ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος· πενταπλάσιον ἄρα
 ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\Omega A'$ τοῦ ἀπὸ τῆς $A' X$. καὶ ἐστὶ τῆς
 μὲν $\Omega A'$ διπλῆ ἡ $\Omega\Psi$, τῆς δὲ $A' X$ διπλῆ ἡ ΦX .
 15 πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\Omega\Psi$ τοῦ ἀπὸ τῆς
 $X\Phi$. καὶ ἐπεὶ τετραπλῆ ἐστὶν ἡ $A\Gamma$ τῆς ΓB , πενταπλῆ
 ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῆς $B\Gamma$. ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν
 $B\Gamma$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$.
 πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς
 20 $B\Delta$. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\Omega\Psi$ πενταπλάσιον
 τοῦ ἀπὸ τῆς ΦX . καὶ ἐστὶν ἴση ἡ ΔB τῇ ΦX . ἑκα-
 τέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ
 $EZH\Theta K$ κύκλου· ἴση ἄρα καὶ ἡ AB τῇ $\Psi\Omega$. καὶ
 ἐστὶν ἡ AB ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ
 25 ἡ $\Psi\Omega$ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.
 τῇ ἄρα δοθείσῃ σφαῖρα περιείληπται τὸ εἰκοσάεδρον.
 Λέγω δὴ, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός
 ἐστὶν ἡ καλουμένη ἐλάττων. ἐπεὶ γὰρ ρητὴ ἐστὶν ἡ

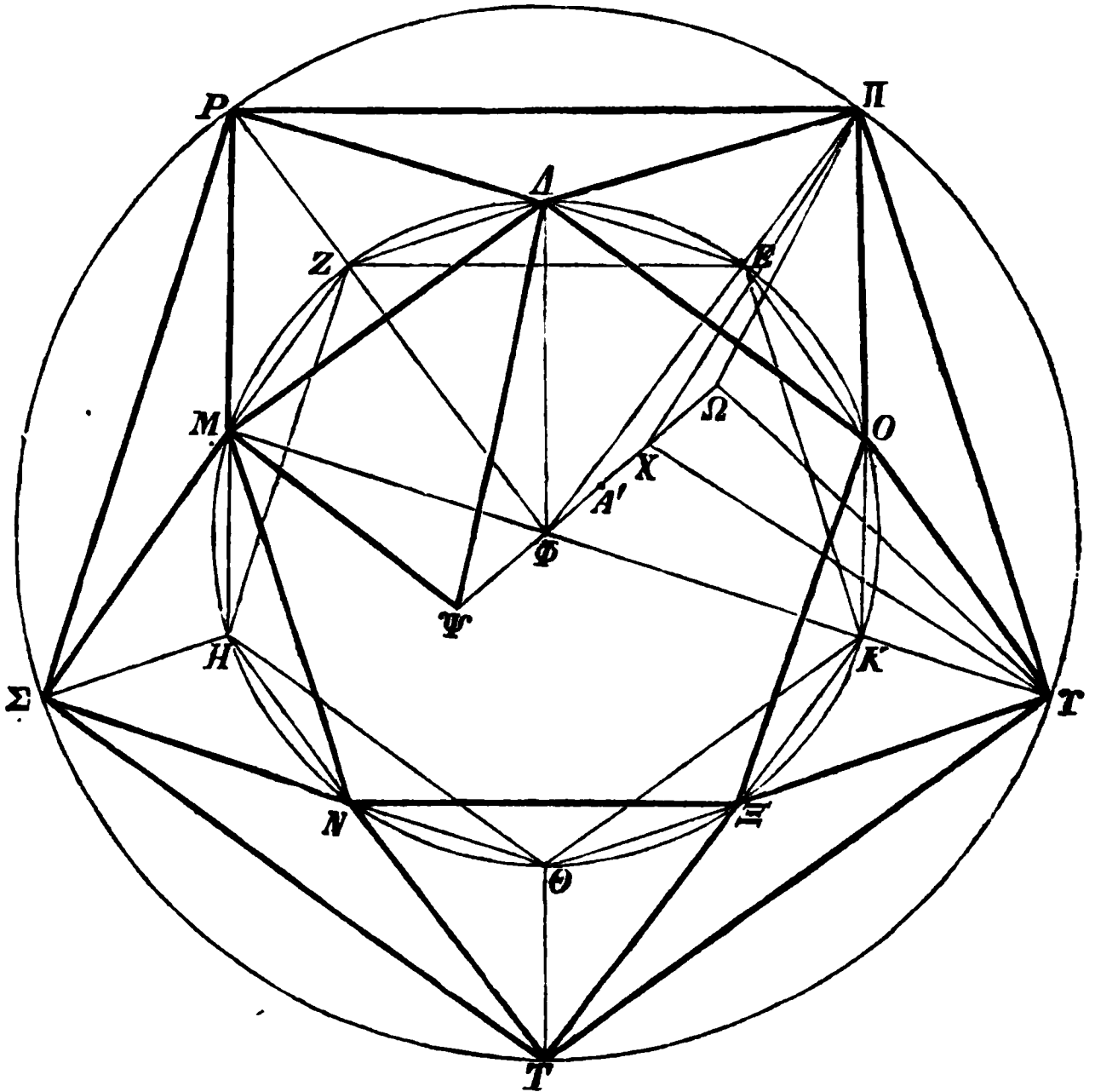
2. Π] supra scr. Ψ b. 3. ὅθεν καὶ q. 7. A'] $\bar{\alpha}$ P,
 $\bar{\alpha}\chi$ q, α mut. in α V, α Bb (in fig. α s B). 9. ἐλάττων V.
 αὐτῆς] ἐστὶ b, αὐτῆς ἐστὶ Bq. ἐστὶν] om. Bbq.

erit [VI, 8]. itaque semicirculus in $\Psi\Omega$ descriptus etiam per Π ueniet [I, 31]. et si manente $\Psi\Omega$ semicirculus circumuolutus rursus ad idem punctum refertur, unde circumuolui coeptus est, et per Π et per reliqua puncta icosaedri ueniet, et icosaedrum sphaera comprehensum erit. iam dico, data id sphaera comprehensum esse. nam ΦX in A' in duas partes aequales diuidatur. et quoniam recta $\Phi\Omega$ secundum rationem extremam ac mediam in X diuisa est, et minor eius pars est ΩX , erit $A' \Omega^2 = 5 A' X^2$ [prop. III]. est autem $\Omega \Psi = 2 \Omega A'$, $\Phi X = 2 A' X$. itaque $\Omega \Psi^2 = 5 X \Phi^2$. et quoniam $A\Gamma = 4 \Gamma B$, erit $AB = 5 B\Gamma$. uerum $AB : B\Gamma = AB^2 : B\Delta^2$ [VI, 8. V def. 9]. itaque $AB^2 = 5 B\Delta^2$. demonstrauius autem, esse etiam $\Omega \Psi^2 = 5 \Phi X^2$. et $\Delta B = \Phi X$; nam utraque earum radio circuli $EZH\Theta K$ aequalis est. itaque etiam $AB = \Psi\Omega$. et AB diametrus est datae sphaerae. quare etiam $\Psi\Omega$ diametro datae sphaerae aequalis est. ergo icosaedrum data sphaera comprehensum est.

iam dico, latus icosaedri irrationalem esse minorem quae uocatur. nam quoniam diametrus sphaerae

ή] τό b q. 10. ή άρα ΩX] om. V, ή ΩX άρα q. „ A' et A non discernunt B b q, in V α in α corr. 13. ωά b, ωας (s eras.) B. A' X] σαχ (s eras.) B, χα V, χα q, άχ b. και — 14. ΩA'] om. q. 13. έστιν PB. 14. ΩA'] in ras. V, αως (s eras.) B. διπλή δέ τής ΩA ή ΩΨ q et b mg. m. 1 (γρ.). XΦ V. 16. XΦ] e corr. V. τετραπλασίον BV b q. έστιν] om. q. πενταπλασίον V et, supra scr. η m. 1, b. 17. έστίν] om. V. BΓ] in ras., dein add. έστιν V, ΓB B. AB — 18. τής (prius)] bis P, corr. m. 1. 19. έστίν B. 20. δέ] om. b. 21. ίση] om. V. ΔB ίση V. 22. έστιν PB. του κύκλου του EZHΘK V. 23. EZHΘ q. και] om. q. τής ΩΨ b. 25. έστίν PB. 28. έλάσσων BV q.

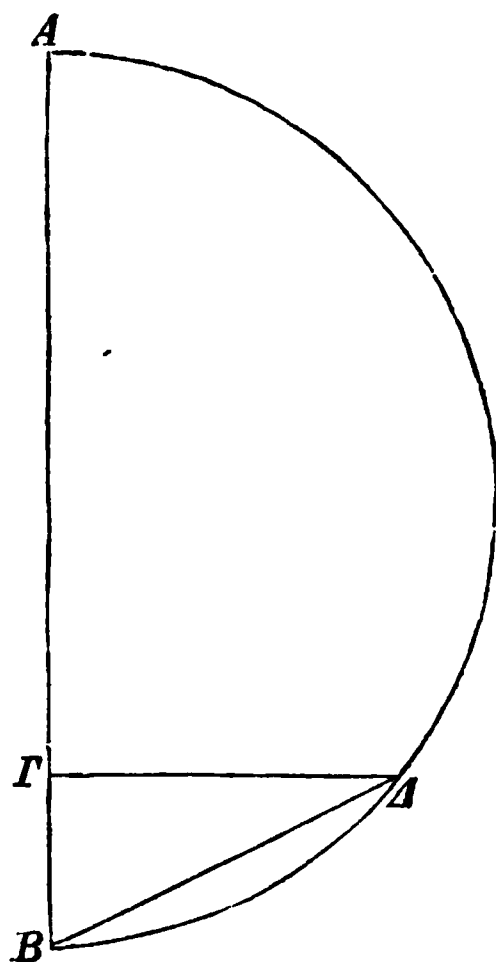
τῆς σφαίρας διάμετρος, καὶ ἐστὶ δυνάμει πενταπλασίων
 τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ $EZH\Theta K$ κύκλου, ῥητὴ ἄρα
 ἐστὶ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ $EZH\Theta K$ κύκλου· ὥστε
 καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ῥητὴ ἐστίν. ἐὰν δὲ εἰς κύκλον
 5 ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον



ἔγγραφῃ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστίν ἡ
 καλουμένη ἐλάττων. ἡ δὲ τοῦ $EZH\Theta K$ πενταγώνου
 πλευρὰ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐστίν. ἡ ἄρα τοῦ εἰκοσαέδρου
 πλευρὰ ἄλογός ἐστίν ἡ καλουμένη ἐλάττων.

1. ἐστὶν Β. τετραπλασίων β. 2. $EZH\Theta$ γ. 3. ἐστὶν ΡΒ.
 7. ἐλάττων V. ἡ δὲ ἡ β. 8. ἡ ἄρα ἡ β. 9. ἐλάττων Ρ.

rationalis est et potentia quintuplo maior est radio circuli $EZH\Theta K$, etiam radius circuli $EZH\Theta K$ rationalis est. quare etiam diameter eius rationalis est. sin in circulum rationalem diametrum habentem pentagonum aequilaterum inscribitur, latus pentagoni irra-



tionalis est minor quae uocatur [prop. XI]. uerum latus pentagoni $EZH\Theta K$ latus est icsaedri. ergo latus icsaedri irrationalis est minor quae uocatur.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διά-
 μετρος δυνάμει πενταπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου
 τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται, καὶ
 5 ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἐκ τε τῆς τοῦ
 ἑξαγώνου καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν
 αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ'.

Δωδεκάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρα περι-
 10 λαβεῖν, ἣ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ
 δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός
 ἐστὶν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκκείσθωσαν τοῦ προειρημένου κύβου δύο ἐπίπεδα
 πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τὰ $ΑΒΓΔ$, $ΓΒΕΖ$, καὶ τετμή-
 15 σθω ἐκάστη τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΑ$, $ΕΖ$, $ΕΒ$, $ΖΓ$
 πλευρῶν δίχα κατὰ τὰ $Η$, $Θ$, $Κ$, $Λ$, $Μ$, $Ν$, $Ξ$, καὶ
 ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΗΚ$, $ΘΛ$, $ΜΘ$, $ΝΞ$, καὶ τετμήσθω
 ἐκάστη τῶν $ΝΟ$, $ΟΞ$, $ΘΠ$ ἄκρον καὶ μέσον λόγον
 κατὰ τὰ $Ρ$, $Σ$, $Τ$ σημεῖα, καὶ ἔστω αὐτῶν μείζονα
 20 τμήματα τὰ $ΡΟ$, $ΟΣ$, $ΤΠ$, καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν
 $Ρ$, $Σ$, $Τ$ σημείων τοῖς τοῦ κύβου ἐπιπέδοις πρὸς ὀρθὰς
 ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου αἱ $ΡΥ$, $ΣΦ$, $ΤΧ$, καὶ
 κείσθωσαν ἴσαι ταῖς $ΡΟ$, $ΟΣ$, $ΤΠ$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν
 αἱ $ΥΒ$, $ΒΧ$, $ΧΓ$, $ΓΦ$, $ΦΥ$. λέγω, ὅτι τὸ $ΥΒΧΓΦ$
 25 πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ καὶ ἔτι

1. πόρισμα] om. bq. 3. ἐστίν B. 5. τοῦ] om. BV.
 6. τῶν δύο V. 7. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BV.
 8. ιζ'] om. q. 9. συστήσασθαι P, corr. m. rec.
 10. προειρημένα] πρότερον q; mg. m. 1: γρ. τὰ πρότερον b.
 13. κύβου] κύκλου comp. b. 16. Ξ σημεῖα V. 17. τετμή-

Corollarium.

Hinc manifestum est, diametrum sphaerae potentia quintuplam esse radii circuli, in quo icosaedrum descriptum est, et diametrum sphaerae ex latere hexagoni et duobus lateribus decagoni in eodem circulo inscriptorum compositam esse. — quod erat demonstrandum.

XVII.

Dodecaedrum construere et sphaera comprehendere, sicut figuras, quas supra nominauimus, et demonstrare, latus dodecagoni irrationalem esse apotomen quae uocatur.

exponantur duo plana cubi, quem nominauimus [prop. XV] inter se perpendicularia $AB\Gamma\Delta$, ΓBEZ , et singula latera AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA , EZ , EB , $Z\Gamma$ in binas partes aequales diuidantur in punctis H , Θ , K , Λ , M , N , Ξ , et ducantur HK , $\Theta\Lambda$, $M\Theta$, $N\Xi$, et singulae NO , $O\Xi$, $\Theta\Pi$ secundum rationem extremam ac mediam in punctis P , Σ , T secantur, et maiores earum partes sint PO , $O\Sigma$, $T\Pi$, et in punctis P , Σ , T ad plana cubi perpendiculares in partes exteriores cubi erigantur $P\Upsilon$, $\Sigma\Phi$, $T\chi$, et ponatur $P\Upsilon = PO$, $\Sigma\Phi = O\Sigma$, $T\chi = T\Pi$, et ducantur ΥB , $B\chi$, $\chi\Gamma$, $\Gamma\Phi$, $\Phi\Upsilon$. dico, pentagonum $\Upsilon B\chi\Gamma\Phi$ et aequilaterum esse et in uno plano positum et praeterea aequiangulum.

$\sigma\theta\omega\sigma\alpha\nu$ αλ NO V. 18. $\Theta\Pi$] Π e corr. m. rec. P; $\Theta\Pi$
 $\epsilon\upsilon\theta\epsilon\iota\alpha\iota$ V. 21. $\kappa\upsilon\beta\omicron\nu$] $\kappa\upsilon\kappa\lambda\omicron\nu$ comp. b. 22. $\kappa\upsilon\beta\omicron\nu$] in
 ras. V. $P\Upsilon$] P eras. V. 23. $\epsilon\kappa\kappa\epsilon\iota\sigma\theta\omega\sigma\alpha\nu$ P. 24. $B\chi$,
 $\chi\Gamma$] χ , $\chi\Gamma$ in ras. m. 2 V. $\Gamma\Phi$] mg. m. 2 V, $\Gamma\chi$ B.
 $\Upsilon B\chi\Gamma\Phi$] pro $\chi\Gamma$ in q χ corr. ex Γ m. 1. 25. $\epsilon\pi\iota\pi\acute{\epsilon}\delta\omega$] in
 ras. m. 2 V.

ἰσογώνιον ἔστιν. ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ PB , ΣB , ΦB .
 καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ NO ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται
 κατὰ τὸ P , καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἔστιν ἡ PO , τὰ ἄρα
 ἀπὸ τῶν ON , NP τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς PO .
 5 ἴση δὲ ἡ μὲν ON τῇ NB , ἡ δὲ OP τῇ PT . τὰ ἄρα
 ἀπὸ τῶν BN , NP τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς PT .
 τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν BN , NP τὸ ἀπὸ τῆς BP ἔστιν ἴσον·
 τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς BP τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς PT .
 ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν BP , PT τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ
 10 τῆς PT . τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν BP , PT ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ
 τῆς BT . τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς BT τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ
 ἀπὸ τῆς TP . διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ BT τῆς PT . ἔστι
 δὲ καὶ ἡ ΦT τῆς TP διπλῆ, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ΣP τῆς
 OP , τουτέστι τῆς PT , ἐστι διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ BT τῇ
 15 $T\Phi$. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν BX ,
 XG , $G\Phi$ ἑκατέρω τῶν BT , $T\Phi$ ἔστιν ἴση. ἰσόπλευρον
 ἄρα ἐστὶ τὸ $BT\Phi GX$ πεντάγωνον. λέγω δὴ, ὅτι καὶ
 ἐν ἐνὶ ἔστιν ἐπιπέδω. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ O ἑκατέρω
 τῶν PT , $\Sigma\Phi$ παράλληλος ἐπὶ τὰ ἐκτὸς τοῦ κύβου
 20 μέρη ἡ $O\Psi$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $\Psi\Theta$, ΘX . λέγω,
 ὅτι ἡ $\Psi\Theta X$ εὐθεῖά ἐστιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ $\Theta\Pi$ ἄκρον καὶ
 μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ T , καὶ τὸ μείζον αὐτῆς
 τμημὰ ἔστιν ἡ ΠT , ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $\Theta\Pi$ πρὸς τὴν
 ΠT , οὕτως ἡ ΠT πρὸς τὴν $T\Theta$. ἴση δὲ ἡ μὲν $\Theta\Pi$
 25 τῇ ΘO , ἡ δὲ ΠT ἑκατέρω τῶν TX , $O\Psi$. ἔστιν ἄρα
 ὡς ἡ ΘO πρὸς τὴν $O\Psi$, οὕτως ἡ $X T$ πρὸς τὴν $T\Theta$.
 καὶ ἐστι παράλληλος ἡ μὲν ΘO τῇ TX . ἑκατέρω γὰρ
 αὐτῶν τῶ $B\Delta$ ἐπιπέδω πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἡ δὲ $T\Theta$
 τῇ $O\Psi$. ἑκατέρω γὰρ αὐτῶν τῶ BZ ἐπιπέδω πρὸς

3. μείζον αὐτῆς V. PO] in ras. V. τὰ] τό q.

4. NP] HP B. τριπλάσια] mut. in τριπλάσιον m. 1 q.

ducantur enim PB , ΣB , ΦB . et quoniam recta NO secundum rationem extremam ac mediam diuisa est in P , et maior pars eius est PO , erunt $ON^2 + NP^2 = 3PO^2$ [prop. IV]. uerum $ON = NB$, $OP = PT$. itaque $BN^2 + NP^2 = 3PT^2$. est autem $BP^2 = BN^2 + NP^2$ [I, 47]. itaque $BP^2 = 3PT^2$. quare $BP^2 + PT^2 = 4PT^2$. uerum $BT^2 = BP^2 + PT^2$ [I, 47]. itaque $BT^2 = 4PT^2$. quare $BT = 2PT$. est autem etiam $\Phi T = 2TP$, quoniam etiam $\Sigma P = 2OP = 2PT$. itaque $BT = T\Phi$. similiter demonstrabimus, esse etiam singulas BX , $X\Gamma$, $\Gamma\Phi$ utrique BT , $T\Phi$ aequales. ergo pentagonum $BT\Phi\Gamma X$ aequilaterum est. iam dico, idem in uno plano positum esse. ab O enim utrique PT , $\Sigma\Phi$ parallela in partes exteriores cubi ducatur $O\Psi$, et ducantur $\Psi\Theta$, ΘX . dico, $\Psi\Theta X$ rectam esse. nam quoniam $\Theta\Pi$ in T secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars eius est ΠT , erit $\Theta\Pi : \Pi T = \Pi T : T\Theta$. uerum $\Theta\Pi = \Theta O$, $\Pi T = TX = O\Psi$. itaque $\Theta O : O\Psi = XT : T\Theta$. et ΘO rectae TX parallela est (nam utraque earum ad planum $B\Delta$ perpendicularis est) [XI, 6] et $T\Theta$ rectae $O\Psi$ (nam utraque earum ad planum BZ perpendicu-

-
8. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ P. 5. PT] PT q. 6. NP] P e corr. V.
 9. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ P. 10. PT] (alt.) PT q. 11. $\alpha\rho\alpha$] bis P, postea
 corr. m. 1. 12. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$] om. V. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ B. 18. TP $\delta\iota\pi\lambda\eta$]
 in ras. V. ΣP] supra ras. m. 2 q. 14. PT] corr. ex
 PT m. 1 q. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ B. 15. $\kappa\alpha\iota$] om. q. BX] ΦX q.
 18. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$] ϵ ins. m. 1 q. $\eta\chi\theta\omega$] η e corr. m. 1 b.
 20. $\mu\acute{\epsilon}\rho\eta$ $\tau\omicron\upsilon$ $\kappa\upsilon\beta\omicron\nu$ V. $\Psi\Theta$] Θ e corr. m. 1 b. 22. $\lambda\acute{o}$ -
 $\gamma\omicron\nu$] om. b. 23. $\tau\eta\nu$ ΠT] ΠT in ras. V, ΠT Bb.
 24. $\Theta\Pi$] $\Pi\Theta$ P.

ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο τρίγωνα συντεθῆ κατὰ μίαν
γωνίαν, ὡς τὰ $\Psi\Theta$, $\Theta\Gamma\chi$, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς
δυσὶν ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν
πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι ἐπ'
5 εὐθείας ἔσονται· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ $\Psi\Theta$ τῇ $\Theta\chi$.
πᾶσα δὲ εὐθεῖα ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· ἐν ἐνὶ ἄρα ἐπι-
πέδῳ ἐστὶ τὸ $\Gamma\beta\chi\Gamma\Phi$ πεντάγωνον.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἰσογώνιον ἐστὶν.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ NO ἄκρον καὶ μέσον
10 λόγον τέτμηται κατὰ τὸ P , καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν
ἡ OP [ἐστὶν ἄρα ὡς συναμφοτέρως ἡ NO , OP πρὸς
τὴν ON , οὕτως ἡ NO πρὸς τὴν OP], ἴση δὲ ἡ OP
τῇ OS [ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΣN πρὸς τὴν NO , οὕτως
ἡ NO πρὸς τὴν OS], ἡ $N\Sigma$ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον
15 λόγον τέτμηται κατὰ τὸ O , καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν
ἡ NO . τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $N\Sigma$, ΣO τριπλάσιά ἐστι τοῦ
ἀπὸ τῆς NO . ἴση δὲ ἡ μὲν NO τῇ NB , ἡ δὲ OS
τῇ $\Sigma\Phi$. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $N\Sigma$, $\Sigma\Phi$ τετράγωνα τρι-
πλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς NB . ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν $\Phi\Sigma$,
20 ΣN , NB τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς NB . τοῖς
δὲ ἀπὸ τῶν ΣN , NB ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΣB . τὰ
ἄρα ἀπὸ τῶν $B\Sigma$, $\Sigma\Phi$, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς $B\Phi$
(ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ $\Phi\Sigma B$ γωνία), τετραπλάσιόν ἐστι
τοῦ ἀπὸ τῆς NB . διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΦB τῆς BN .
25 ἐστὶ δὲ καὶ ἡ $B\Gamma$ τῆς BN διπλῆ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ
 $B\Phi$ τῇ $B\Gamma$. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ $B\Gamma$, $\Gamma\Phi$ δυσὶ ταῖς $B\chi$,
 $\chi\Gamma$ ἴσαι εἰσὶν, καὶ βάσις ἡ $B\Phi$ βάσει τῇ $B\Gamma$ ἴση,

2. $\Theta\Gamma\chi$] OTX B, et b supra scr. Θ m. 1. 3. δυσὶ
(δύο q) πλευραῖς Theon ($BVbq$). πλευρὰς αὐτῶν q. 4. πλευ-
ράς] om. V. καί] om. P. 5. OX b. 6. ἄρα] γὰρ ἐστὶν
q. ἐπιπέδῳ ἄρα B. 7. ἐστὶ] om. q; ἐστὶν P. $\Gamma\beta\chi\Gamma\Phi$]

laris est). sin duo trianguli in uno angulo coniunguntur ut $\Psi O\Theta$, ΘTX duo latera duobus lateribus proportionalia habentes, ita ut latera correspondentia etiam parallela sint, reliqua latera in eadem recta erunt posita [VI, 32]. itaque $\Psi\Theta$, ΘX in eadem recta positae erunt. omnis autem recta in uno plano posita est [XI, 1]. ergo pentagonum $TBX\Gamma\Phi$ in uno plano positum est.

iam dico, idem aequiangulum esse.

nam quoniam recta NO in P secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars eius est OP , et $OP = O\Sigma$, recta $N\Sigma$ in O secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars est NO [prop. V].¹⁾ itaque $N\Sigma^2 + \Sigma O^2 = 3NO^2$ [prop. IV]. uerum $NO = NB$, $O\Sigma = \Sigma\Phi$. itaque $N\Sigma^2 + \Sigma\Phi^2 = 3NB^2$. quare $\Phi\Sigma^2 + \Sigma N^2 + NB^2 = 4NB^2$. sed $\Sigma B^2 = \Sigma N^2 + NB^2$ [I, 47]. itaque $B\Sigma^2 + \Sigma\Phi^2 = 4NB^2 = B\Phi^2$ (nam $\angle \Phi\Sigma B$ rectus est) [XI def. 3]. itaque $\Phi B = 2BN$. uerum etiam $B\Gamma = 2BN$. quare $B\Phi = B\Gamma$. et quoniam duae rectae $B\Gamma$, $\Gamma\Phi$ duabus BX , $X\Gamma$ aequales sunt, et

1) Forma prop. V, ad quam apertissime hic respicit Euclides, docet, uerba $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu \acute{\alpha}\rho\alpha$ — OP lin. 11—12 et $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu \acute{\alpha}\rho\alpha$ — $O\Sigma$ lin. 13—14 superuacua et subditiua esse. nec satis est cum ed. Basil. et Gregorio pro OP lin. 12 $O\Sigma$ scribere.

T eras. V, post Φ ras.; $BX\Gamma\Phi T$ τὸ $B\Gamma X\Phi T$ q. 9. εὐθεῖ, postea add. α m. 1 P. 13. τῆ] τῆς b. 17. ON bis V. 18. τῆ] corr. ex τῆς m. 1 P. 19. ὥστε] corr. ex ὡσα m. 1 b; ὥστε καὶ V. τὰ] om. q. 20. ἐστὶν P. 21. ΣN] N in ras. m. 1 b. ΣB] BΣ in ras. m. 1 P, BΣB V. 22. BΣ] ΣB b. τουτέστιν P. ΦB V. 24. ἐστὶν] om. V. 25. ἐστὶν PB. ἐστὶν] om. Vq. 26. BΦ] corr. ex ΦB V. 27. εἰσὶ Vbq. ΦB Vq.

γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΤΦ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΧΓ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΤΦΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΧΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΧΓ, ΒΤΦ, ΤΦΓ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. ἐὰν δὲ πενταγώνου
 5 ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾧσιν, ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ πεντάγωνον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΤΦΓΧ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τὸ ἄρα ΒΤΦΓΧ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν ἐστι καὶ ἰσογώνιον, καὶ ἐστὶν ἐπὶ μιᾶς τοῦ κύβου πλευρᾶς τῆς
 10 ΒΓ. ἐὰν ἄρα ἐφ' ἐκάστης τῶν τοῦ κύβου δώδεκα πλευρῶν τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, συσταθήσεται τι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον, ὃ καλεῖται δωδεκάεδρον.

Δεῖ δὲ αὐτὸ καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ
 15 καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἀποτομή.

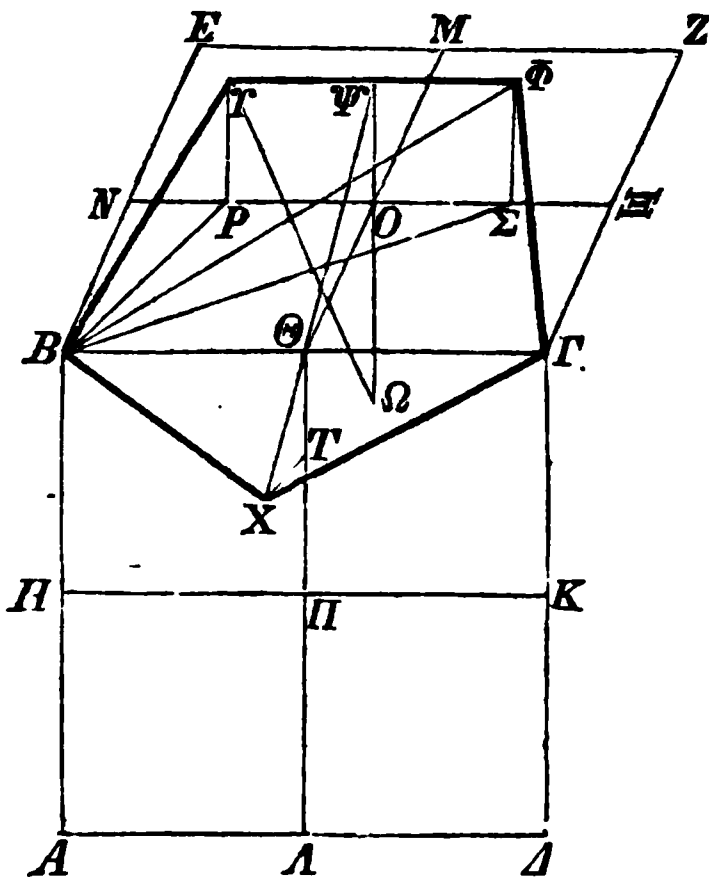
Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΨΟ, καὶ ἔστω ἡ ΨΩ· συμβάλλει ἄρα ἡ ΟΩ τῇ τοῦ κύβου διαμέτρῳ, καὶ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας· τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ παρα-
 20 τελεύτῳ θεωρήματι τοῦ ἐνδεκάτου βιβλίου. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ Ω· τὸ Ω ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἡ ΩΟ ἡμίσεια τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. ἐπεξεύχθω δὲ ἡ ΓΩ. καὶ ἐπεὶ

2. δειχθηξομεν, sed χθη del., b. 3. ἐστίν PB. ΒΧΓ] (prius) Χ in ras. m. 1 P. 5. ἰσόπλευρον q. ᾧσιν] corr. ex εἰσίν m. 1 P. 6. ἐστὶ] ἐστι BV. - 7. ΒΤΦΧΓ q. δέ] om. q. 8. τέ ἐστὶν P. 9. κύβου] κύκλου b. 13. τε] om. P. ὃ καλεῖται δωδεκάεδρον] om. Theon (BVbq). 17. ΨΩ] ΨΟ q. συμβαλεῖ P. 18. ΟΩ] ΘΩ B, ΨΩ Vb, ΨΟ q. κύβου] κύκλου comp. b, corr. in E. 19. τεμνουσιν, corr. m. 1, P. παρατελευταίῳ q. 21. τό] (alt.) καὶ τό q. 22. ΟΩ V, ΩΘ B. Ante τῆς del. ἐστὶ m. 1 P. 23. ΓΩ q.

basis $B\Phi$ basi $B\Gamma$ aequalis, erit [I, 8] $\angle B\Gamma\Phi = BX\Gamma$.
 similiter demonstrabimus, esse etiam

$$\angle \Gamma\Phi\Gamma = BX\Gamma.$$

itaque tres anguli $BX\Gamma, B\Gamma\Phi, \Gamma\Phi\Gamma$ inter se aequales sunt. sin pentagoni aequilateri tres anguli inter se



aequales sunt, pentagonum aequiangulum erit [prop. VII]. ergo pentagonum $B\Gamma\Phi\Gamma X$ aequiangulum est. demonstrauius autem, idem aequilaterum esse. ergo pentagonum

$$B\Gamma\Phi\Gamma X$$

aequilaterum est et aequiangulum, et in uno latere cubi $B\Gamma$ constructum est. itaque si in singulis duodecim late-

ribus cubi eadem comparauerimus, figura quaedam solida conuertetur duodecim pentagonis aequilateris et aequiangulis comprehensa, quae uocatur dodecaedrum.

oportet igitur idem data sphaera comprehendere et demonstrare, latus dodecaedri irrationalem esse apotomen quae uocatur.

producatur enim ΨO , et fiat $\Psi\Omega$. itaque $O\Omega$ cum diametro cubi concurrat, et inter se in binas partes aequales secant; hoc enim in paenultimo theoremate undecimi libri demonstratum est [XI, 38]. secant in Ω . Ω igitur centrum est sphaerae cubum comprehendentis, et ΩO dimidia lateris cubi. ducatur $\Gamma\Omega$. et

εὐθεία γραμμὴ ἢ $NΣ$ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται
 κατὰ τὸ O , καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμήμα ἐστὶν ἢ NO ,
 τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $NΣ$, $ΣO$ τριπλάσιά ἐστὶ τοῦ ἀπὸ
 τῆς NO . ἴση δὲ ἢ μὲν $NΣ$ τῇ $ΨΩ$, ἐπειδήπερ καὶ
 5 ἢ μὲν NO τῇ $OΩ$ ἐστὶν ἴση, ἢ δὲ $ΨO$ τῇ $OΣ$. ἀλλὰ
 μὴν καὶ ἢ $OΣ$ τῇ $ΨΥ$, ἐπεὶ καὶ τῇ PO . τὰ ἄρα ἀπὸ
 τῶν $ΩΨ$, $ΨΥ$ τριπλάσιά ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς NO . τοῖς
 δὲ ἀπὸ τῶν $ΩΨ$, $ΨΥ$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΥΩ$. τὸ
 ἄρα ἀπὸ τῆς $ΥΩ$ τριπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς NO .
 10 ἐστὶ δὲ καὶ ἢ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περι-
 λαμβανούσης τὸν κύβον δυνάμει τριπλασίων τῆς ἡμι-
 σείας τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· προδέδεικται γὰρ κύβον
 συστήσασθαι καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν καὶ δεῖξαι, ὅτι ἢ
 τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς
 15 πλευρᾶς τοῦ κύβου. εἰ δὲ ὅλη τῆς ὅλης, καὶ [ἢ]
 ἡμίσεια τῆς ἡμισείας· καὶ ἐστὶν ἢ NO ἡμίσεια τῆς
 τοῦ κύβου πλευρᾶς· ἢ ἄρα $ΥΩ$ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ
 κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον.
 καὶ ἐστὶ τὸ $Ω$ κέντρον τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβα-
 20 νούσης τὸν κύβον· τὸ $Υ$ ἄρα σημεῖον πρὸς τῇ ἐπι-
 φανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ
 ἐκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τῇ
 ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας· περιείληπται ἄρα τὸ δω-
 δεκάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρα.

1. NE B, corr. m. 1. 3. ἐστὶν P. 4. NO] NE B.
 9. ἄρα] om. q. τοῦ] τό q. 10. ἐστὶν P B. τῆς] (alt.)
 bis b. 12. τῆς] ins. m. 1 V. δέδεικται q. 14. δυ-
 νάμει] om. P. διπλασίων B, corr. m. rec. ἐστὶν P B.
 15. εἰ] ἢ V. ἢ ὅλη Bq. ἢ] postea ins. m. 1 P,
 εἰ q. 16. ἡμίσεια — NO] bis P, postea corr. m. 1.
 17. ἐστὶν P. 19. ἐστὶν B. 20. σημείον ἄρα q.
 22. τὴν ἐπιφάνειαν q, v bis supra scr. m. 1 b. 23. ἐστὶν P.

quoniam recta $N\Sigma$ in O secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars eius est NO , erunt

$$N\Sigma^2 + \Sigma O^2 = 3NO^2 \text{ [prop. IV].}$$

sed $N\Sigma = \Psi\Omega$, quoniam

$$NO = O\Omega, \Psi O = O\Sigma.$$

et praeterea

$$O\Sigma = \Psi T,$$

quoniam $O\Sigma = PO$. itaque

$$\Omega\Psi^2 + \Psi T^2 = 3NO^2.$$

uerum

$$T\Omega^2 = \Omega\Psi^2 + \Psi T^2 \text{ [I, 47].}$$

itaque

$$T\Omega^2 = 3NO^2.$$

sed radius sphaerae cubum comprehendens et ipse potentia triplo maior est dimidio latere cubi; nam antea explicauimus, quomodo cubus construendus sit et sphaera comprehendendus, et quo modo demonstrandum sit, diametrum sphaerae potentia triplo maiorem esse latere cubi [prop. XV]. sin tota triplo maior est tota, etiam dimidia triplo maior est dimidia; et NO dimidia est lateris cubi. itaque $T\Omega$ radio sphaerae cubum comprehendens aequalis est. et Ω centrum est sphaerae cubum comprehendens. quare punctum T ad superficiem sphaerae positum est. iam similiter demonstrabimus, etiam reliquos angulos dodecaedri singulos ad superficiem sphaerae positos esse. ergo dodecaedrum data sphaera comprehensum est.

Λέγω δὴ, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐπεὶ γὰρ τῆς NO ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἢ PO , τῆς δὲ $OΞ$ ἄκρον
 5 καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἢ OS , ὅλης ἄρα τῆς $NΞ$ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἢ $PΣ$. οἷον ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ NO πρὸς τὴν OP , ἢ OP πρὸς τὴν PN , καὶ τὰ διπλάσια· τὰ γὰρ μέρη τοῖς ἰσάκεις πολλαπλασίοις
 10 τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ὡς ἄρα ἢ $NΞ$ πρὸς τὴν $PΣ$, οὕτως ἢ $PΣ$ πρὸς συναμφοτέρου τὴν NP , $ΣΞ$. μείζων δὲ ἢ $NΞ$ τῆς $PΣ$ · μείζων ἄρα καὶ ἢ $PΣ$ συναμφοτέρου τῆς NP , $ΣΞ$ · ἢ $NΞ$ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημὰ ἐστὶν ἢ
 15 $PΣ$. ἴση δὲ ἢ $PΣ$ τῇ $ΓΦ$ · τῆς ἄρα $NΞ$ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἢ $ΓΦ$. καὶ ἐπεὶ ῥητὴ ἐστὶν ἢ τῆς σφαίρας διάμετρος καὶ ἐστὶ δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, ῥητη ἄρα ἐστὶν ἢ $NΞ$ πλευρὰ οὕσα τοῦ κύβου. ἐὰν δὲ ῥητὴ
 20 γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἐκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἀποτομή.

Ἡ $ΓΦ$ ἄρα πλευρὰ οὕσα τοῦ δωδεκαέδρου ἄλογός ἐστιν ἀποτομή.

1. ἢ] om. q. 3. Post τῆς ins. μέν m. rec. P. τεμνομένης P; item lin. 5. 6. τετμημένης bq. 8. NO] ON B. OP] (prius) e corr. V; deīn del. καὶ τὰ διπλάσια.
 9. ἰσάκεις] ὡσαύτως B. 10. ὡς] καὶ ὡς b. 15. $NΞ$ ἄρα q.
 16. τετμημένης bq. $ΦΓΡ$. 17. ἐστὶν Pβ. De scholio quodam in P hic adscripto u. app. 20. γραμμὴ] ῥ μή b, corr. m. 1; εὐθεῖα γραμμὴ q. τέτμηται q. ἐκάτερα q.
 21. ἐστὶν ἢ καλουμένη V bq, e corr. m. 2 B. 23. ἐστὶν ἢ καλουμένη V bq.

iam dico, latus dodecaedri irrationalem esse apotomen quae uocatur. nam quoniam PO maior pars est rectae NO secundum rationem extremam ac mediam diuisae, et $O\Sigma$ maior pars est rectae $OΞ$ secundum rationem extremam ac mediam diuisae, $P\Sigma$ maior pars est totius rectae $NΞ$ secundum rationem extremam ac mediam diuisae. quoniam enim¹⁾ $NO : OP = OP : PN$, etiam dupla eandem rationem habebunt; nam partes eandem rationem habent quam aequae multiplicia [V, 15]. itaque $NΞ : P\Sigma = P\Sigma : NP + \SigmaΞ$. sed $NΞ > P\Sigma$. itaque etiam $P\Sigma > NP + \SigmaΞ$ [V, 14]. ergo $NΞ$ secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars eius est $P\Sigma$. sed $P\Sigma = \Gamma\Phi$. itaque $\Gamma\Phi$ maior pars est rectae $NΞ$ secundum rationem extremam ac mediam diuisae. et quoniam diameter sphaerae rationalis est et latere cubi triplo maior est potentia, etiam $NΞ$, quae latus est cubi, rationalis est. si recta rationalis secundum rationem extremam ac mediam diuiditur, utraque pars irrationalis est apotome [prop. VI]. ergo $\Gamma\Phi$, quae latus est dodecaedri, irrationalis est apotome.

1) Uocabulo *ολον* lin. 7 uidetur significari, rectam $NΞ$ non proprie secundum rationem extremam ac mediam diuisam esse, quia pars minor ex NP , $\SigmaΞ$ diunctis composita est. quod hic parum refert, quia maiore parte sola utimur. sed fortasse totus locus *ολον* lin. 7 — *ἐστιν ἡ* $P\Sigma$ lin. 14 subditius est.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμημά ἐστιν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρά. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5

ιη'.

Τὰς πλευρὰς τῶν πέντε σχημάτων ἐκθέσθαι καὶ συγκρίναι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ AB , καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε ἴσην εἶναι τὴν
 10 $A\Gamma$ τῇ ΓB , κατὰ δὲ τὸ Δ ὥστε διπλασίονα εἶναι τὴν $A\Delta$ τῆς ΔB , καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AEB , καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ $\Gamma E, \Delta Z$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AZ, ZB, EB . καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ $A\Delta$ τῆς ΔB ,
 15 τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῆς $B\Delta$. ἀναστρέψαντι ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ BA τῆς $A\Delta$. ὡς δὲ ἡ BA πρὸς τὴν $A\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ ἰσογώνιον γάρ ἐστι τὸ AZB τρίγωνον τῷ $AZ\Delta$ τριγώνῳ ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BA τοῦ ἀπὸ
 20 τῆς AZ . ἐστὶ δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. καὶ ἐστὶν ἡ AB ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡ AZ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.

Πάλιν, ἐπεὶ διπλασίον ἐστὶν ἡ $A\Delta$ τῆς ΔB , τριπλῆ
 25 ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῆς $B\Delta$. ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν $B\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ τριπλά-

1. πόρισμα] comp. mg. m 1 PBVq, om. b. 3. τετμη-
 μένης bq. 4. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. Vq, o) — b. 5. ιη']
 om. Bbq. 9. κατὰ μέν BV. 10. τῇ] corr. ex τῆς B.

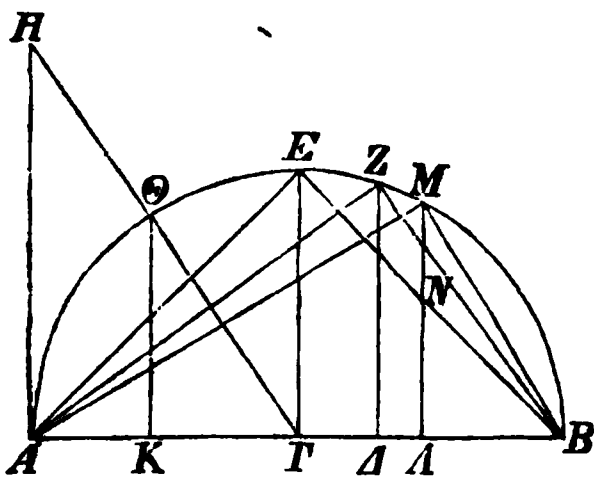
Corollarium.

Hinc manifestum est, latus dodecaedri maiorem esse partem lateris cubi secundum rationem extremam ac mediam diuisi. — quod erat demonstrandum.

XVIII.

Latera quinque figurarum exponere et inter se comparare.

Exponatur diameter datae sphaerae AB et in Γ ita secetur, ut sit $A\Gamma = \Gamma B$, in Δ autem ita, ut sit $A\Delta = 2\Delta B$, et in AB semicirculus describatur AEB ,



et in Γ, Δ ad AB perpendicularares ducantur $\Gamma E, \Delta Z$, et ducantur AZ, ZB, EB . et quoniam est $A\Delta = 2\Delta B$, erit $AB = 3\Delta B$. itaque conuertendo $BA = \frac{3}{2}A\Delta$. sed $BA:A\Delta = BA^2:AZ^2$ [V def. 9]; nam $AZB \sim AZ\Delta$ [VI, 8].

itaque $BA^2 = \frac{3}{2}AZ^2$. uerum etiam diameter sphaerae potentia lateris pyramidis sesquialtera est [prop. XIII]. et AB diameter sphaerae est. ergo AZ lateri pyramidis aequalis est.

rursus quoniam $A\Delta = 2\Delta B$, erit $AB = 3\Delta B$. sed $AB:\Delta B = AB^2:BZ^2$ [VI, 8. V def. 9]. itaque

ΓB] Γ corr. ex Δ V. διπλασιον P, α supra scr. m. 1.
 12. Δ] e corr. m. 1 b. 14. Ante AZ del. $\Gamma E, \Delta Z$ m. 1 P.
 AZ, ZE, EB B; ZB, EB, AZ q. 15. τριπλασία q, mg.
 m. 1 τριπλασία γρ. b. $B\Delta$] ΔB B. 18. ABZ b.
 20. ἔστιν PB. 22. ἐστίν P. 23. τῆς] om. V q. 24. τρι-
 πλῆ] τριπλασιών P. 26. ZB Bb q.

σιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς BZ . ἐστὶ δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίον τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. καὶ ἐστὶν ἡ AB ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ BZ ἄρα τοῦ κύβου ἐστὶ πλευρά.

5 Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AG τῇ GB , διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῆς $BΓ$. ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν $BΓ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BE · διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς BE . ἐστὶ δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίον τῆς τοῦ
10 ὀκταέδρου πλευρᾶς. καὶ ἐστὶν ἡ AB ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ BE ἄρα τοῦ ὀκταέδρου ἐστὶ πλευρά.

Ἦχθω δὲ ἀπὸ τοῦ A σημείου τῇ AB εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ AH , καὶ κείσθω ἡ AH ἴση τῇ AB , καὶ
15 ἐπέξεύχθω ἡ $HΓ$, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν AB κάθετος ἤχθω ἡ ΘK . καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ HA τῆς AG · ἴση γὰρ ἡ HA τῇ AB · ὡς δὲ ἡ HA πρὸς τὴν AG , οὕτως ἡ ΘK πρὸς τὴν $KΓ$, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΘK τῆς $KΓ$. τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘK τοῦ ἀπὸ
20 τῆς $KΓ$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΘK , $KΓ$, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\Theta Γ$, πενταπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς $KΓ$. ἴση δὲ ἡ $\Theta Γ$ τῇ $ΓB$ · πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $BΓ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓK$. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ AB τῆς $ΓB$, ὡν ἡ $AΔ$ τῆς $ΔB$ ἐστὶ διπλῆ, λοιπὴ ἄρα ἡ $BΔ$
25 λοιπῆς τῆς $ΔΓ$ ἐστὶ διπλῆ. τριπλῆ ἄρα ἡ $BΓ$ τῆς $ΓΔ$ · ἐνναπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $BΓ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓΔ$. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς $BΓ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓK$ · μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΓK$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓΔ$.

1. ἐστίν P. ZB B. ἐστὶν PB. 3. κύκλου P, corr. m. rec. 8. ἐστὶ] ἐστίν P, om. V. τοῦ] πρὸς τό q.

$AB^2 = 3BZ^2$. uerum etiam diameter sphaerae latere cubi potentia triplo maior est [prop. XV]. et AB diameter sphaerae est. ergo BZ latus cubi est.

et quoniam $AG = GB$, erit $AB = 2BG$. sed $AB : BG = AB^2 : BE^2$ [VI, 8. V def. 9]. itaque $AB^2 = 2BE^2$. uerum etiam diameter sphaerae latere octaedri potentia duplo maior est [prop. XIV]. et AB diameter est datae sphaerae. ergo BE latus octaedri est.

iam ab A puncto ad rectam AB perpendicularis ducatur AH , et ponatur $AH = AB$, et ducatur HG , et a Θ ad AB perpendicularis ducatur ΘK . et quoniam $HA = 2AG$ (nam $HA = AB$), et $HA : AG = \Theta K : KG$ [VI, 4], erit etiam $\Theta K = 2KG$. itaque $\Theta K^2 = 4KG^2$. quare $\Theta K^2 + KG^2 = 5KG^2 = \Theta G^2$ [I, 47]. uerum $\Theta G = GB$. itaque $BG^2 = 5GK^2$. et quoniam $AB = 2GB$, quarum $A\Delta = 2\Delta B$, erit $B\Delta = 2\Delta G$. itaque $BG = 3\Delta G$. quare $BG^2 = 9\Delta G^2$. sed $BG^2 = 5GK^2$. itaque $GK^2 > \Delta G^2$. quare etiam

ἔστιν PB. 9. τριπλασίον b. 11. BE] E corr. ex Θ m.
 rec. P. πλευρά ἐστι q. 14. τῆ AB ἴση ἢ AH V.
 16. AH V. 17. HA] AH q. τῆ] τῆς P. 18. καί] om.
 q. 19. ἐστίν P. 20. ἐστίν P. 21. ἐστίν PB. 24. GB]
 BG V. ἐστίν PB. BΔ] supra scr. A b. 25. ΔΓ] ΓΔ
 P. 26. ΓΔ] in hoc uocab. des. b, λείπει φύλλα ἰς mg.

μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓK τῆς $\Gamma\Delta$. κείσθω τῇ ΓK ἴση ἡ $\Gamma\Lambda$, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΛM , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ MB . καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓK , καὶ ἐστι τῆς
 5 μὲν $B\Gamma$ διπλῆ ἡ AB , τῆς δὲ ΓK διπλῆ ἡ $\text{K}\Lambda$, πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς $\text{K}\Lambda$. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλάσιον τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ ἐστὶν ἡ AB ἡ τῆς
 10 σφαίρας διάμετρος· ἡ $\text{K}\Lambda$ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται· ἡ $\text{K}\Lambda$ ἄρα ἑξαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰρημένου κύκλου. καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἐκ τε τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς
 15 τὸν εἰρημένον κύκλον ἐγγραφομένων, καὶ ἐστὶν ἡ μὲν AB ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ $\text{K}\Lambda$ ἑξαγώνου πλευρὰ, καὶ ἴση ἡ AK τῇ AB , ἑκατέρω ἄρα τῶν AK , AB δεκαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ
 20 ἐπεὶ δεκαγώνου μὲν ἡ AB , ἑξαγώνου δὲ ἡ MA · ἴση γὰρ ἐστὶ τῇ $\text{K}\Lambda$, ἐπεὶ καὶ τῇ ΘK · ἴσον γὰρ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου· καὶ ἐστὶν ἑκατέρω τῶν ΘK , $\text{K}\Lambda$ διπλασίων τῆς $\text{K}\Gamma$ · πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ MB . ἡ δὲ τοῦ πενταγώνου ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· εἰκο-
 25 σαέδρου ἄρα ἐστὶν ἡ MB .

Καὶ ἐπεὶ ἡ ZB κύβου ἐστὶ πλευρὰ, τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ N , καὶ ἔστω μείζον τμήμα τὸ NB · ἡ NB ἄρα δωδεκαέδρου ἐστὶ πλευρὰ.

1. μείζων V. ἐστὶν ἄρα q. ΓK] $\text{K}\Gamma$ V. ΓK] corr. ex $\text{K}\Gamma$ V. 4. ἐστὶν P. $\text{K}\Gamma$ V. ἐστὶν P. 7. ἐστὶν

$\Gamma K > \Gamma \Delta$. ponatur $\Gamma \Delta = \Gamma K$, et ab Δ ad AB perpendicularis ducatur ΔM , et ducatur MB . et quoniam $B\Gamma^2 = 5\Gamma K^2$, et $AB = 2B\Gamma$, $K\Delta = 2\Gamma K$, erit $AB^2 = 5K\Delta^2$. uerum etiam diameter sphaerae potentia quintuplo maior est radio circuli, in quo icosaedrum constructum est [prop. XVI coroll.]. et AB diameter sphaerae est. ergo $K\Delta$ radius est circuli, in quo icosaedrum constructum est. $K\Delta$ igitur latus est hexagoni in circulo illo inscripti [IV, 15 coroll.]. et quoniam diameter sphaerae ex latere hexagoni et duobus lateribus decagoni in circulo illo inscriptorum composita est [prop. XVI coroll.], et AB diameter est sphaerae, $K\Delta$ autem latus hexagoni, et $AK = AB$, utraque AK , AB latus est decagoni in circulo inscripti, in quo icosaedrum constructum est. et quoniam AB latus est decagoni, hexagoni autem $M\Delta$ (nam $M\Delta = K\Delta$, quia $M\Delta = \Theta K$; aequali enim spatio a centro distant; et $\Theta K = K\Delta = 2K\Gamma$), pentagoni est MB [prop. X. I, 47]. uerum latus pentagoni est icosaedri [prop. XVI]. ergo MB latus est icosaedri.

et quoniam ZB latus cubi est, secundum rationem extremam ac mediam diuidatur in N , et maior pars sit NB . ergo NB latus est dodecaedri [prop. XVII coroll.].

PB. 9. AB ἢ] AB P. 10. $\acute{\epsilon}\kappa$] ἢ $\acute{\epsilon}\kappa$ q. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ P.
 12. $\epsilon\lambda\theta\eta\mu\acute{\epsilon}\nu\omicron\upsilon$ $\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda\omicron\upsilon$] $\acute{\epsilon}\nu$ $\tau\omega$ $\epsilon\lambda\theta\eta\mu\acute{\epsilon}\nu\omicron\upsilon$ $\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda\omicron\upsilon$ m. 2 V.
 13. $\tau\eta\varsigma$ $\sigma\phi\alpha\iota\rho\alpha\varsigma$ ἢ V. 15. $\acute{\alpha}\nu\alpha\gamma\gamma\alpha\phi\omicron\mu\acute{\epsilon}\nu\omicron\upsilon\omicron\upsilon$ q. 21. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$
 P. ΘK] $K\Theta$ q. 23. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$] om. V. 24. ἢ $\tau\omicron\upsilon$ $\epsilon\lambda\theta\omicron$ -
 $\sigma\alpha\acute{\epsilon}\delta\rho\omicron\upsilon$] mg. m. 2 B, in text. del. ἢ $\tau\omicron\upsilon$. 26. BZ q.
 $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ P.

Καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἐδείχθη τῆς μὲν
AZ πλευρᾶς τῆς πυραμίδος δυνάμει ἡμιολία, τῆς δὲ
 τοῦ ὀκταέδρου τῆς *BE* δυνάμει διπλασίων, τῆς δὲ τοῦ
 κύβου τῆς *ZB* δυνάμει τριπλασίων, οἷων ἄρα ἡ τῆς
 5 σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἕξ, τοιούτων ἡ μὲν τῆς
 πυραμίδος τεσσάρων, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τριῶν, ἡ δὲ
 τοῦ κύβου δύο. ἡ μὲν ἄρα τῆς πυραμίδος πλευρὰ
 τῆς μὲν τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς δυνάμει ἐστὶν ἐπί-
 τριτος, τῆς δὲ τοῦ κύβου δυνάμει διπλῆ, ἡ δὲ τοῦ
 10 ὀκταέδρου τῆς τοῦ κύβου δυνάμει ἡμιολία. αἱ μὲν οὖν
 εἰρημέναι τῶν τριῶν σχημάτων πλευραί, λέγω δὴ πυρα-
 μίδος καὶ ὀκταέδρου καὶ κύβου, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν
 ἐν λόγοις ῥητοῖς. αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, λέγω δὴ ἢ τε
 τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ ἡ τοῦ δωδεκαέδρου, οὔτε πρὸς
 15 ἀλλήλας οὔτε πρὸς τὰς προειρημένας εἰσὶν ἐν λόγοις
 ῥητοῖς· ἄλογοι γάρ εἰσιν, ἡ μὲν ἐλάττων, ἡ δὲ ἀποτομή.

Ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ *MB*
 τῆς τοῦ δωδεκαέδρου τῆς *NB*, δείξομεν οὕτως.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ *ZΔB* τρίγωνον τῷ
 20 *ZAB* τριγώνῳ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ *ΔB* πρὸς τὴν
BZ, οὕτως ἡ *BZ* πρὸς τὴν *BA*. καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι
 ἀνάλογόν εἰσιν, ἐστὶν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην,
 οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας·
 ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ *ΔB* πρὸς τὴν *BA*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς
 25 *ΔB* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *BZ*· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ *AB*
 πρὸς τὴν *BΔ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ZB* πρὸς τὸ ἀπὸ

1. Ante ἐδείχθη del. ε P. 4. ἡ] om. P. 6. τεσσάρων
 τῶν q. 7. μὲν] corr. ex με m. 1 P. 9. τῆς] τῆ q.
 10. τῆς] om. q. 11. πλευραί] om. q. 13. τε] om. P.
 14. ἡ] om. q. 15. τὰς προ-] om. q. 16. ἄλογοι γάρ εἰσιν]
 om. V. 17. ὅτι δέ BV. MB] M e corr. V. 18. NB]

et quoniam demonstrauius, diametrum sphaerae AZ lateris pyramidis potentia sesquialteram esse, BE autem latere octaedri potentia duplo maiorem, ZB autem latere cubi potentia triplo maiorem, quarum magnitudinum sex aequalis est potentia diametris sphaerae, earum quattuor aequale est latus pyramidis, tribus octaedri, duabus cubi. itaque latus pyramidis potentia supersesquitercium est lateris octaedri, latere autem cubi potentia duplo maius, latus autem octaedri lateris cubi potentia sesquialterum est. ergo latera, quae nominauius, trium illarum figurarum, scilicet pyramidis, octaedri, cubi, inter se rationes habent rationales. reliqua uero duo, scilicet icosaedri et dodecaedri, neque inter se neque ad ea, quae supra nominauius, rationes rationales habent; nam irrationales sunt, alterum minor [prop. XVI], alterum apotome [prop. XVII].

Latus icosaedri MB maius esse latere dodecaedri NB , sic demonstrauius.

quoniam enim trianguli ZAB et ZAB aequianguli sunt [VI, 8], erit $\Delta B : BZ = BZ : BA$ [VI, 4]. et quoniam tres rectae proportionales sunt, erit ut prima ad tertiam, ita quadratum primae ad quadratum tertiae [V def. 9].¹⁾ itaque $\Delta B : BA = \Delta B^2 : BZ^2$. e con-

1) Miramur, cur haec definitio hoc loco omnibus uerbis citetur, praesertim forma parum Euclidea, cum tamen antea in hac ipsa propositione toties tacite sit usurpata. itaque puto, uerba $\kappa\alpha\iota \acute{\epsilon}\pi\epsilon\iota$ lin. 21 — $\delta\epsilon\upsilon\tau\acute{\epsilon}\rho\alpha\varsigma$ lin. 23 subditia esse.

N e corr. V. 19. $\acute{\epsilon}\pi\epsilon\iota$] in ras. m. 1 P. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P.
 ΔZB B, $ZB\Delta$ q. 21. BZ] (prius) supra scr. BA m. 1 B.
 BZ] ZB P. 26. ZB] BZ q.

τῆς $B\Delta$. τριπλῆ δὲ ἢ AB τῆς $B\Delta$ · τριπλάσιον ἄρα
 τὸ ἀπὸ τῆς ZB τοῦ ἀπὸ τῆς $B\Delta$. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ
 τῆς $A\Delta$ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔB τετραπλάσιον· διπλῆ γὰρ ἢ
 $A\Delta$ τῆς ΔB · μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $A\Delta$ τοῦ ἀπὸ τῆς
 5 ZB · μείζων ἄρα ἢ $A\Delta$ τῆς ZB · πολλῶν ἄρα ἢ $A\Delta$
 τῆς ZB μείζων ἐστίν. καὶ τῆς μὲν $A\Delta$ ἄκρον καὶ
 μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμημὰ ἐστίν ἢ KA ,
 ἐπειδήπερ ἢ μὲν AK ἑξαγώνου ἐστίν, ἢ δὲ KA δεκα-
 γώνου· τῆς δὲ ZB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης
 10 τὸ μείζον τμημὰ ἐστίν ἢ NB · μείζων ἄρα ἢ KA τῆς
 NB . ἴση δὲ ἢ KA τῇ AM · μείζων ἄρα ἢ AM τῆς
 NB [τῆς δὲ AM μείζων ἐστίν ἢ MB]. πολλῶν ἄρα
 ἢ MB πλευρὰ οὔσα τοῦ εἰκοσαέδρου μείζων ἐστὶ τῆς
 NB πλευρᾶς οὔσης τοῦ δωδεκαέδρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15 Λ έγω δὲ, ὅτι παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχή-
 ματα οὐ συσταθήσεται ἕτερον σχῆμα περιεχό-
 μενον ὑπὸ ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων ἴσων
 ἀλλήλοις.

Ὑπὸ μὲν γὰρ δύο τριγώνων ἢ ὅλως ἐπιπέδων
 20 στερεὰ γωνία οὐ συνίσταται. ὑπὸ δὲ τριῶν τριγώνων
 ἢ τῆς πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἢ τοῦ ὀκταέδρου,
 ὑπὸ δὲ πέντε ἢ τοῦ εἰκοσαέδρου· ὑπὸ δὲ ἑξ τριγώνων
 ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων πρὸς ἐνὶ σημείῳ συν-
 ισταμένων οὐκ ἔσται στερεὰ γωνία· οὔσης γὰρ τῆς
 25 τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου γωνίας διμοίρου ὀρθῆς
 ἔσονται αἱ ἑξ τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι· ὅπερ ἀδύνατον·

2. ἔστιν PB. 5. καὶ μείζων B. ἄρα καὶ V. τῆς
 ZB] (alt.) om. P. 6. ἐστὶ Vq. 7. τετμημένης V.
 11. AM τῆς NB] in ras. m. 1 P. 12. τῆς δὲ — MB] post-
 ea add. in mg. m. 1 P. 13. μείζω, ν add. m. 2 V. 14. Se-

trario igitur $AB : B\Delta = ZB^2 : B\Delta^2$. uerum $AB = 3B\Delta$. itaque etiam $ZB^2 = 3B\Delta^2$. uerum etiam $A\Delta^2 = 4\Delta B^2$; nam $A\Delta = 2\Delta B$. itaque $A\Delta^2 > ZB^2$. quare $A\Delta > ZB$. itaque multo magis $A\Delta > ZB$. et rectae $A\Delta$ secundum rationem extremam ac mediam diuisae maior pars est $K\Delta$, quoniam ΔK hexagoni est, $K\Delta$ autem decagoni [prop. IX]; rectae autem ZB secundum rationem extremam ac mediam diuisae maior pars est NB . itaque $K\Delta > NB$. est autem $K\Delta = \Delta M$. quare $\Delta M > NB$. ergo multo magis MB latus icosaedri NB latere dodecaedri maius est; quod erat demonstrandum.

Iam dico, praeter quinque figuras, quas nominauimus, nullam aliam construi posse polygonis et aequilateris et aequiangulis inter se aequalibus comprehensam.

Nam ex duobus triangulis aut omnino figuris planis angulus solidus construi nequit [XI def. 11]. ex tribus uero triangulis angulus pyramidis construitur, ex quattuor octaedri, ex quinque icosaedri. ex sex autem triangulis aequilateris et aequiangulis ad idem punctum coniunctis angulus solidus non orietur; nam cum angulus trianguli aequilateri duae partes sint recti, sex anguli quattuor rectis aequales erunt; quod fieri non

Cum epimetro lin. 15 sq. cfr. Psellus p. 51 sq.

quitur alia demonstratio extremae partis, u. app. 16. *συνσταθήσεται* P. 19. *ἢ ὅλως*] scripsi; ras. 2 uel 3 litt. P, supra scr. *ἀλλ' οὐδὲ ὑπὸ δύο* m. rec.; *ἀλλ' οὐδὲ ἄλλων δύο* Theon (BVq). 20. *οὐ*] om. Pq. 26. *αἰ*] om. q.

ἅπαντα γὰρ στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν περιέχεται. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ ὑπὸ πλειόνων ἢ ἕξ γωνιῶν ἐπιπέδων στερεὰ γωνία συνίσταται. ὑπὸ δὲ τετραγώνων τριῶν ἢ τοῦ κύβου γωνία περιέχεται·
 5 ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον· ἔσονται γὰρ πάλιν τέσσαρες ὀρθαί. ὑπὸ δὲ πενταγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων, ὑπὸ μὲν τριῶν ἢ τοῦ δωδεκαέδρου· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον· οὕσης γὰρ τῆς τοῦ πενταγώνου ἰσοπλεύρου γωνίας ὀρθῆς καὶ πέμπτου, ἔσονται αἱ
 10 τέσσαρες γωνίαι τεσσάρων ὀρθῶν μείζους· ὅπερ ἀδύνατον. οὐδὲ μὴν ὑπὸ πολυγώνων ἐτέρων σχημάτων περισχεθήσεται στερεὰ γωνία διὰ τὸ αὐτὸ ἄτοπον.

Οὐκ ἄρα παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα ἕτερον σχῆμα στερεὸν συσταθήσεται ὑπὸ ἰσοπλεύρων τε καὶ
 15 ἰσογωνίων περιεχόμενον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λήμμα.

Ὅτι δὲ ἢ τοῦ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου γωνία ὀρθή ἐστι καὶ πέμπτου, οὕτω δεικτέον.

20 Ἐστω γὰρ πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον τὸ $ΑΒΓΔΕ$, καὶ περιγεγράφθω περὶ αὐτὸ κύκλος ὁ $ΑΒΓΔΕ$, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον τὸ Z , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ZΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ$. δίχα ἄρα τέμνουσι τὰς πρὸς τοῖς $A, B, Γ, Δ, E$ τοῦ πεντα-

2. ὀρθῶν γωνιῶν q. οὐδέ] om. q, οὐδ' P. 3. ἢ] om. P, supra scr. m. 1 B. γωνιῶν] τριγώνων q. 5. τέσσαρες] P. 8. δέ] om. q. ἰσοπλεύρου πενταγώνου V. 9. αἱ] supra m. rec. P. 10. τέσσαρες] -ες in ras. m. 1 P. In mg. m. 1 pro scholio: ὡς δείξει ὑποκάτω P. 11. πολυγωνίων π (non P). ἐτέρων] στερεῶν q. 12. αὐτό] om. BV.

potest; nam omnis angulus solidus minus quattuor rectis comprehenditur [XI, 21]. eadem de causa ne ex pluribus quidem quam sex angulis planis solidus angulus construitur. tribus autem quadratis angulus cubi comprehenditur. quattuor autem nullus; nam rursus quattuor recti erunt. pentagonis autem aequilateris et aequiangulis tribus angulus dodecaedri comprehenditur, quattuor autem nullus; nam cum angulus pentagoni aequilateri aequalis sit recto angulo cum quinta parte recti, quattuor anguli quattuor rectis maiores erunt; quod fieri non potest. eadem de causa ne aliis quidem figuris polygonis angulus solidus comprehendetur.

ergo praeter quinque figuras, quas nominauimus, nulla alia figura solida conuertetur figuris aequilateris et aequiangulis comprehensa; quod erat demonstrandum.

Lemma.

Angulum autem pentagoni aequilateri et aequianguli aequalem esse angulo recto et quintae parti recti, sic demonstrandum.

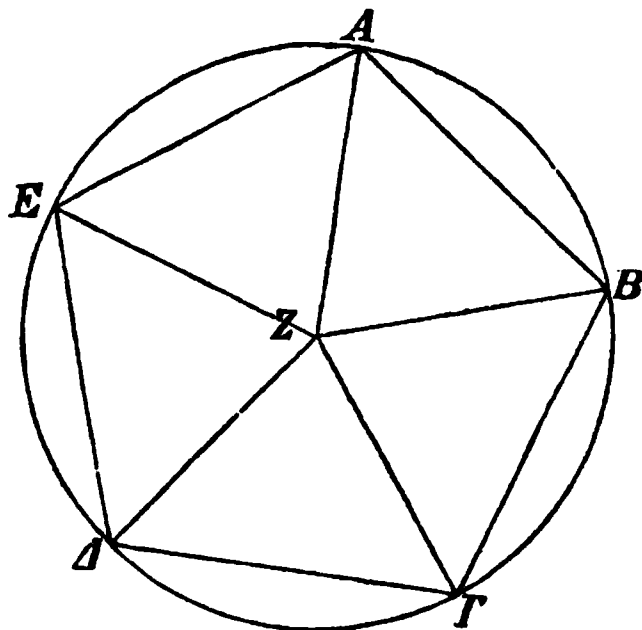
sit enim pentagonum aequilaterum et aequiangulum $ABΓΔE$, et circum id circulus circumscribatur $ABΓΔE$ [IV, 14], et sumatur centrum eius Z [III, 1], et ducantur $ZA, ZB, ZΓ, ZΔ, ZE$. itaque angulos pentagoni ad $A, B, Γ, Δ, E$ positos in binas partes aequales secant [I, 4]. et quoniam quinque anguli ad

14. συνασταθήσεται P, corr. m. rec. 16. λήμμα] om. codd.
 17. ὅτε q. τε καί V. Post ἰσογωνίου add. καί q.
 18. ἐστίν PB. πέμπτον q. 20. τε καί V. 22. τό] (prius)
 om. q. 24. τέμνουσιν PB.

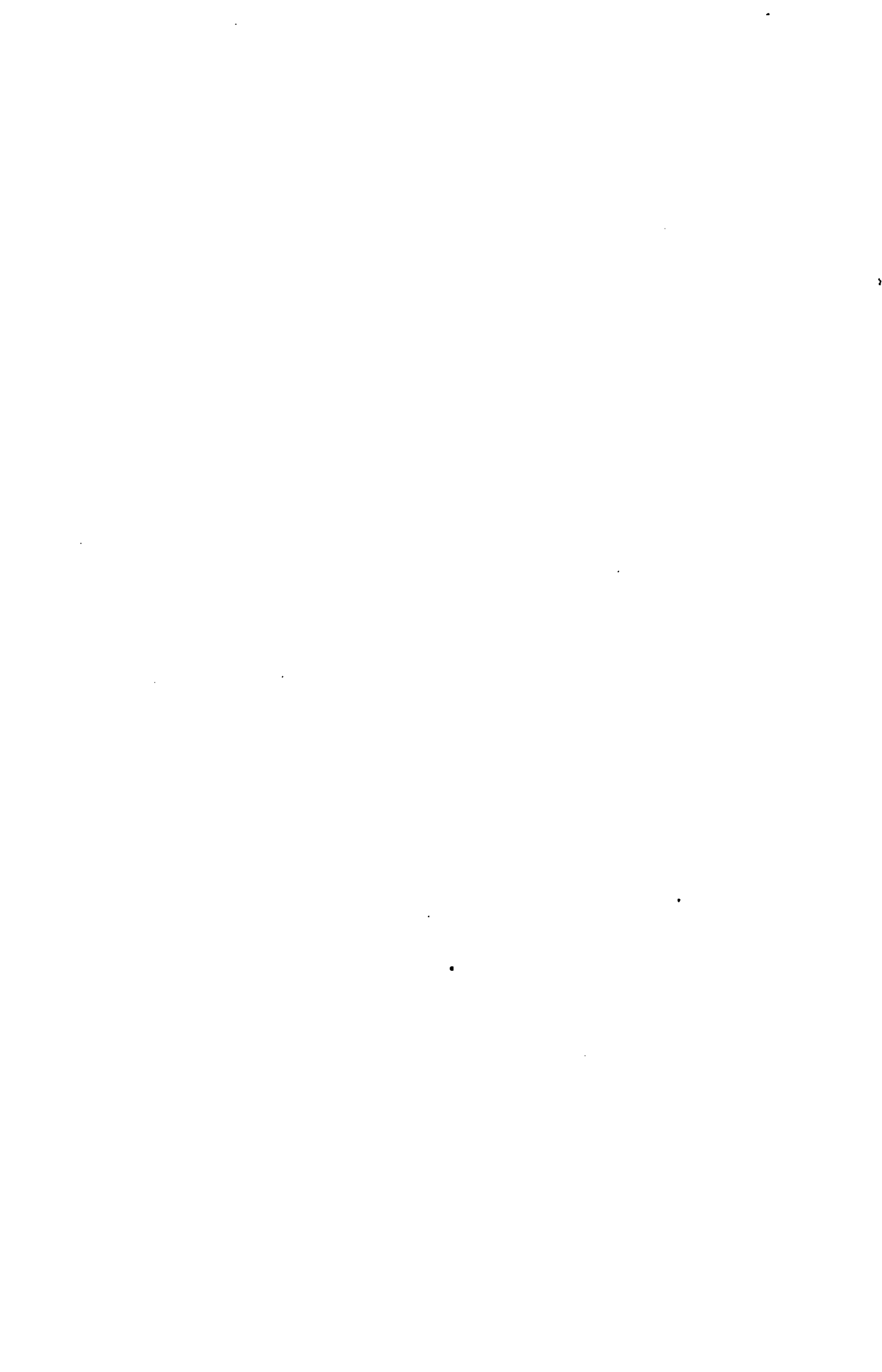
γωνίου γωνίας. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τῷ Z πέντε γωνίαι
 τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ καὶ εἰσιν ἴσαι, μία ἄρα
 αὐτῶν, ὡς ἡ ὑπὸ AZB , μιᾶς ὀρθῆς ἐστὶ παρὰ
 πέμπτου· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ZAB , ABZ μιᾶς εἰσιν
 5 ὀρθῆς καὶ πέμπτου. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ZAB τῇ ὑπὸ $ZBΓ$
 καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $ABΓ$ τοῦ πενταγώνου γωνία μιᾶς
 ἐστὶν ὀρθῆς καὶ πέμπτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2. εἰσὶ] εἰσίν P B V. 5. ZBA q. 7. ὀρθῆς ἐστὶ V.
 πέμπτου q. In fine: Εὐκλείδου στοιχείων ιγ' P, Εὐκλείδου
 στοιχείων τῆς Θεωνος ἐκδόσεως ιγ' B q.

Z positi quattuor rectis aequales sunt et inter se aequales, unus eorum, uelut AZB , recto angulo aequalis est deficienti quinta parte. itaque $ZAB + ABZ$



recto et quintae parti recti aequales sunt [I, 32]. et $ZAB = ZB\Gamma$. quare $AB\Gamma$ totus angulus pentagoni recto et quintae parti recti aequalis est; quod erat demonstrandum.



APPENDIX I.



Demonstrationes alterae.

1.

Ad libr. XI prop. 22.

"Ἄλλως.

"Ἐστῶσαν αἰ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἰ ὑπὸ $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$, ὧν αἰ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστῶσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιεχέτωσαν
5 δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι αἰ AB , $B\Gamma$, ΔE , EZ , $H\Theta$, ΘK , καὶ ἐπεξεύχθῶσαν αἰ $A\Gamma$, ΔZ , HK . λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστίν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς $A\Gamma$, ΔZ , HK τρίγωνον συστήσασθαι, τουτέστι πάλιν ὅτι αἰ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

10 εἰ μὲν οὖν πάλιν αἰ πρὸς τοῖς B , E , Θ σημείοις γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἴσαι ἔσονται καὶ αἰ $A\Gamma$, ΔZ , HK , καὶ ἔσονται αἰ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες. εἰ δὲ οὐ, ἔστῶσαν ἄνισοι αἰ πρὸς τοῖς B , E , Θ σημείοις γωνίαι, καὶ μείζων ἢ πρὸς τῷ B ἑκατέρας τῶν πρὸς τοῖς E ,
15 Θ μείζων ἄρα ἔσται καὶ ἡ $A\Gamma$ εὐθεῖα ἑκατέρας τῶν ΔZ , HK . καὶ φανερόν, ὅτι ἡ $A\Gamma$ μετὰ ἑκατέρας

XI, 22. post δεῖξαι p. 60, 18 add. PBFVb.

3. ὑπό] om. F, supra m. 2 B. 5. $B\Gamma$] $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ b.
6. ΔZ] Δ corr. ex Γ m. 1 F. 8. τουτέστιν B. 11. ἴσαι
εἰσὶν] εἰσιν ἴσαι BV. ἴσαι] om. BV. HK] HK ἴσαι BV.

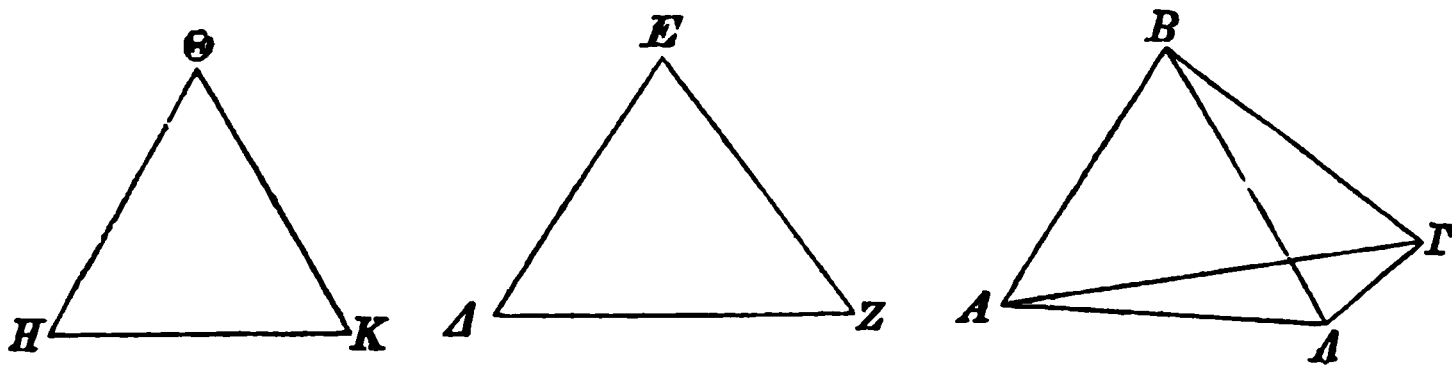
1.

Ad libr. XI prop. 22.

Aliter.

Sint dati tres anguli plani $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$, quorum duo reliquo maiores sint quolibet modo coniuncti, et eos comprehendant rectae aequales AB , $B\Gamma$, ΔE , EZ , $H\Theta$, ΘK , et ducantur $A\Gamma$, ΔZ , HK . dico, fieri posse, ut ex rectis aequalibus rectis $A\Gamma$, ΔZ , HK triangulus construatur, hoc est rursus duas reliqua maiores esse quolibet modo coniunctas.

iam si rursus anguli ad puncta B , E , Θ positi aequales sunt, etiam $A\Gamma$, ΔZ , HK aequales erunt,



et duae reliqua maiores. sin minus, anguli ad puncta B , E , Θ positi inaequales sint, et angulus ad B positus utroque angulorum ad E , Θ positorum maior sit. itaque etiam $A\Gamma > \Delta Z$, $A\Gamma > HK$ [I, 24]. et

13. ἄνιστοι] corr. ex ἴσοι m. rec. P. 14. Ante καὶ ras.
 1 litt. F. 15. ἐστὶ BF b. ἢ $A\Gamma$] in ras. V. εὐθεία]
 om. V.

τῶν ΔZ , HK τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι. λέγω, ὅτι
 καὶ αἱ ΔZ , HK τῆς AG μείζονές εἰσι. συνεστάτω
 πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ B
 τῇ ὑπὸ $H\Theta K$ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ $AB\Lambda$, καὶ κείσθω
 5 μιᾶ τῶν AB , $B\Gamma$, ΔE , EZ , $H\Theta$, ΘK ἴση ἢ $B\Lambda$,
 καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $A\Lambda$, $\Lambda\Gamma$. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ AB ,
 $B\Lambda$ δυοὶ ταῖς $H\Theta$, ΘK ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρωθεν ἑκατέρωθεν,
 καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἢ $A\Lambda$ βάσει
 τῇ HK ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς E , Θ ση-
 10 μείοις γωνίαι τῆς ὑπὸ $AB\Gamma$ μείζονές εἰσιν, ὧν ἢ ὑπὸ
 $H\Theta K$ τῇ ὑπὸ $AB\Lambda$ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἢ πρὸς τῷ
 E γωνία τῆς ὑπὸ $AB\Gamma$ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο
 αἱ AB , $B\Gamma$ δυοὶ ταῖς ΔE , EZ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρωθεν
 ἑκατέρωθεν, καὶ γωνία ἢ ὑπὸ ΔEZ γωνίας τῆς ὑπὸ $AB\Gamma$
 15 μείζων, βάσις ἄρα ἢ ΔZ βάσεως τῆς $\Lambda\Gamma$ μείζων
 ἐστίν. ἴση δὲ ἐδείχθη ἢ HK τῇ $A\Lambda$. αἱ ἄρα ΔZ ,
 HK τῶν $A\Lambda$, $\Lambda\Gamma$ μείζονές εἰσιν· ἀλλὰ αἱ $A\Lambda$, $\Lambda\Gamma$
 τῆς AG μείζονές εἰσι· πολλῶν ἄρα αἱ ΔZ , HK τῆς
 AG μείζονές εἰσιν. τῶν AG , ΔZ , HK ἄρα εὐθειῶν
 20 αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανό-
 μεναι· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς AG , ΔZ ,
 HK τρίγωνον συστήσασθαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. μείζονές εἰσι] P b, γρ. μείζων ἐστὶ mg. b; μείζων ἐστὶ BF V.
 2. ΔZ] corr. ex AZ m. 2 P. 3. B] e corr. F. 4. $AB\Lambda$] $BH\Lambda$ b, corr. mg. m. 1. 5. $B\Lambda$] corr. ex $\Delta\Lambda$ m. 1 F. 8. περι-
 έχουσι PB Vb. $A\Lambda$] A in ras. V. βάσει] supra m. 2 B.
 9. ἐστὶν ἴση V. ἐστὶ B, comp. F b. 10. τῆς] τοῖς F.
 εἰσι V. 12. $AB\Gamma$ bφ (non F). ἐστὶ PV, comp. b.
 δύο αἱ] αἱ δύο F. 13. AB] F, AB bφ. 14. -τέρωθεν καὶ γων-
 in mg. trans. m. 1 F. ἢ ὑπὸ] om. b. 15. $\Lambda\Gamma$ b.
 16. ἐστὶν] om. P. $A\Lambda$] corr. ex $A\Delta$ B. 17. ἀλλ' F b.
 18. πολλῶν — 19. εἰσιν] postea add. m. 1 P. 19. εἰσι BV b,
 comp. F. 21. ἐστὶν] om. V. ΔZ] AZ F. 22. συστή-
 σασθαι P, corr. m. 2.

adparet, esse $A\Gamma + \Delta Z > HK$, $A\Gamma + HK > \Delta Z$. dico, esse etiam $\Delta Z + HK > A\Gamma$. nam ad rectam AB et punctum eius B construatur $\angle ABA = H\odot K$ [I, 23], et ponatur $BA = AB = B\Gamma = \Delta E = EZ = H\odot = \odot K$, et ducantur AA , $A\Gamma$. et quoniam duae AB , BA duabus $H\odot$, $\odot K$ singulae singulis aequales sunt et angulos aequales comprehendunt, erit $AA = HK$ [I, 4]. et quoniam anguli ad puncta E , \odot positi angulo $AB\Gamma$ maiores sunt, quorum $\angle H\odot K = ABA$, angulus ad E positus angulo $AB\Gamma$ maior erit. et quoniam duae AB , $B\Gamma$ duabus ΔE , EZ aequales sunt, et $\angle \Delta EZ > AB\Gamma$, erit etiam $\Delta Z > A\Gamma$ [I, 24]. demonstrauius autem, esse $HK = AA$. itaque erit

$$\Delta Z + HK > AA + A\Gamma.$$

uerum $AA + A\Gamma > A\Gamma$. multo igitur magis erit

$$\Delta Z + HK > A\Gamma.$$

ergo rectarum $A\Gamma$, ΔZ , HK duae reliqua maiores sunt quolibet modo coniunctae. fieri igitur potest, ut ex rectis aequalibus rectis $A\Gamma$, ΔZ , HK triangulus construatur; quod erat demonstrandum.

2.

Ad libr. XI prop. 23.

Ἄλλα δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τῆς MN , καὶ ἔστω τὸ Ξ , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΞA . λέγω πάλιν, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ AB τῆς $A\Xi$. εἰ γὰρ μή, ἦτοι ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ $A\Xi$ ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση. δύο δὴ αἰ AB , $B\Gamma$, τουτέστιν αἰ ΔE , EZ , δύο ταῖς $M\Xi$, ΞA , τουτέστι τῇ MN , ἴσαι εἰσὶν. ἀλλὰ ἡ MN τῇ ΔZ κεῖται ἴση. καὶ αἰ ΔE , EZ ἄρα τῇ ΔZ ἴσαι εἰσὶν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ AB ἴση ἐστὶ τῇ $A\Xi$. ὁμοίως δὴ οὐδὲ ἐλάττων· πολλῶ γὰρ τὸ ἀδύνατον μείζων. ἡ ἄρα AB μείζων ἐστὶ τῆς $A\Xi$. καὶ ἐὰν ὁμοίως, ᾧ μείζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς $A\Xi$, ἐκείνω ἴσον πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἀναστήσωμεν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΞP , συσταθήσεται τὸ πρόβλημα.

ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ ΔMN τριγώνου καὶ ἔστω τὸ Ξ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἰ $\Delta \Xi$, $M\Xi$. λέγω δὴ καὶ οὕτως, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ AB τῆς $A\Xi$. εἰ γὰρ μή, ἦτοι ἴση ἐστὶν ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση. δύο οὖν αἰ AB , $B\Gamma$ δύο ταῖς

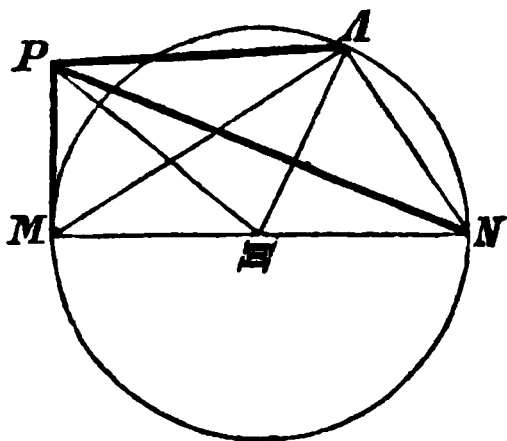
XI, 23 in textu post ποιῆσαι p. 68, 17 add. PBFVb.

1. τό] om. P. 2. τῆς MN] ras. 3 litt. V, γωνίας τῆς MN φ. ἔστω τὸ Ξ] in ras. m. 1 b. 3. ὅτι πάλιν b. μείζων φ. 4. ἡ] corr. ex αἰ V. εἰ γὰρ — 11. τῆς $A\Xi$] mg. m. 1, add. γφ. b, in textu: ἐπεὶ γὰρ αἰ ΔE , EZ τῆς ΔZ , τουτέστι τῆς MN , μείζους εἰσὶ, καὶ ἡμίσειαι· ἡ $E\Delta$ ἄρα τουτέστιν τῆς $M\Xi$ ἢ AB τῆς $A\Xi$ μείζων ἐστὶν. 6. αἰ] in ras. m. 2 P. ΔE , EZ δυοί in spatuo uacuo tertiae partis lineae m. 2 P. δυοί b. τουτέστιν B. 7. ἀλλὰ ἡ MN]

2.

Ad libr. XI prop. 23.¹⁾

Uerum centrum circuli in aliquo latere trianguli sit, uelut MN , et sit Ξ , et ducatur ΞA . dico rursus, esse $AB > A\Xi$. nam si minus, erit aut $AB = A\Xi$ aut $AB < A\Xi$. prius sit $AB = A\Xi$. itaque duae rectae $AB, B\Gamma$, hoc est $\Delta E, EZ$, duabus rectis $M\Xi, \Xi A$, hoc est MN , aequales sunt. supposuimus autem, esse $MN = \Delta Z$. quare $\Delta E + EZ = \Delta Z$. quod fieri non potest. itaque non est $AB = A\Xi$. iam similiter demonstrabimus, ne minorem quidem esse AB



recta $A\Xi$; nam hoc multo minus fieri potest. ergo $AB > A\Xi$. et si similiter ΞP ad planum circuli perpendicularem erexerimus, ita ut sit $\Xi P^2 = AB^2 \div A\Xi^2$ problema componetur.

Uerum centrum circuli extra triangulum AMN positum sit et sit Ξ , et ducantur $A\Xi, M\Xi$. dico sic quoque, esse $AB > A\Xi$. nam si minus, erit aut $AB = A\Xi$ aut $AB < A\Xi$. prius sit

1) De figuris cfr. p. 62.

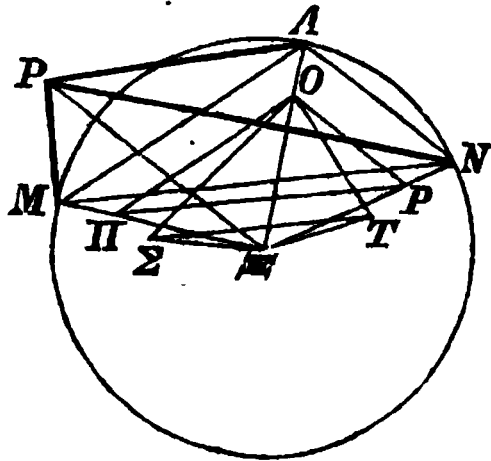
m. 2 P. κείται] ἐστίν supra scr. κείται m. 2 B. 8. καί
— ἄρα] om. F; uidentur fuisse in mg. a m. 2. ἴσαι εἰσίν]
m. 2 P. 9. ἐστίν] om. B V, supra m. 1 F. ἐστὶ] om. V,
ἄρα φ (non F). τῇ] bis φ. 13. ἐκείνω — 14. ΞP] mg.
m. 1 b, add. γρ., in textu: ἐκείνω ἴσην πρὸς τῷ τοῦ κύκλου
ἐπιπέδῳ ἀναστήσομεν τὴν ΞP (in ras.). 13. ἐκεῖνο b.
14. ἀναστήσομεν b. 16. ἐντός V, sed corr. 18. $A\Xi, M\Xi$]
αὶ $A\Xi$ φ, $\Xi A, ZM, \Xi N$ b, $A\Xi, M\Xi, N\Xi$ V et B ($N\Xi$ m. 2).
καί] om. V, ὅτι καὶ b. ὅτι] om. b. 20. οὖν] δὴ V,
δεῖ φ. δύο] δυοὶ b.

$MΞ$, $ΞΑ$ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρωθεν ἑκατέρωθεν, καὶ βάσις ἡ
 $ΑΓ$ βάσει τῆ $ΜΑ$ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$ γωνία
 τῆ ὑπὸ $ΜΞΑ$ ἴση ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ
 $ΗΘΚ$ τῆ ὑπὸ $ΛΞΝ$ ἐστίν ἴση. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $ΜΞΝ$
 5 δύο ταῖς $ΑΒΓ$, $ΗΘΚ$ ἐστίν ἴση. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ $ΑΒΓ$,
 $ΗΘΚ$ τῆς ὑπὸ $ΔΕΖ$ μείζονές εἰσιν. καὶ ἡ ὑπὸ $ΜΞΝ$
 ἄρα τῆς ὑπὸ $ΔΕΖ$ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ
 $ΔΕ$, $ΕΖ$ δύο ταῖς $ΜΞ$, $ΞΝ$ ἴσαι εἰσὶν, καὶ βάσις ἡ
 $ΔΖ$ βάσει τῆ $ΜΝ$ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $ΜΞΝ$ γω-
 10 νία τῆ ὑπὸ $ΔΕΖ$ ἐστίν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ μείζων·
 ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἴση ἐστίν ἡ $ΑΒ$ τῆ $ΛΞ$. ἐξῆς
 δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων. μείζων ἄρα. καὶ ἐὰν
 πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πάλιν ἀναστήσωμεν
 τὴν $ΞΡ$ καὶ ἴσην αὐτὴν ἀποθώμεθα, ᾧ μείζων δύναται
 15 τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΛΞ$, συσταθήσεται τὸ
 πρόβλημα.

λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστίν ἡ $ΑΒ$ τῆς $ΛΞ$.
 εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. καὶ κείσθω τῆ μὲν $ΑΒ$ ἴση ἡ
 $ΞΟ$, τῆ δὲ $ΒΓ$ ἴση ἡ $ΞΠ$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $ΟΠ$. καὶ
 20 ἐπεὶ ἴση ἐστίν ἡ $ΑΒ$ τῆ $ΒΓ$, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ $ΞΟ$ τῆ
 $ΞΠ$. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ $ΟΑ$ λοιπὴ τῆ $ΠΜ$ ἐστίν ἴση.
 παράλληλος ἄρα ἐστίν ἡ $ΑΜ$ τῆ $ΠΟ$, καὶ ἰσογώνιον
 τὸ $ΑΜΞ$ τρίγωνον τῷ $ΠΞΟ$ τριγώνῳ. ἐστίν ἄρα ὡς
 ἡ $ΞΑ$ πρὸς τὴν $ΑΜ$, ἡ $ΞΟ$ πρὸς τὴν $ΟΠ$, καὶ ἐναλ-

1. ἑκατέρωθεν] ἑκατέρας P, s del. m. 1. 2. $ΜΑ$] M in ras.
 V. ἐστίν ἴση F. 3. ἴση ἐστίν] ἐστίν ἴση b, ἴση ἐστὶ V.
 4. καὶ ὅλη b. 5. δύο] PBV, F m. 1, δυσὶ b, F m. 2.
 ταῖς] ταῖς ὑπὸ Fb; ὑπὸ supra scr. m. 2 BV. ἀλλ' P.
 αἱ] ἡ b. 6. εἰσι BV, comp. Fb $ΜΞΝ$] corr. ex $ΞΜΝ$
 m. 2 P, $ΜΞ$ in ras. m. 2 B. 7. ἐστὶ PBV, comp. Fb.
 8. δύο] δυσὶ b et m. 2 F. εἰσί PBV, comp. Fb. 9. γω-
 νία] om. b. 10. ἴση ἐστίν b. 11. ἐστίν] om. V. ἐξῆς
 δέ] ὁμοίως δὴ τοῖς ἔμπροσθεν Fb, mg. m. 1: γρ. ἐξῆς δέ b.

$AB = A\Xi$. ergo duae rectae $AB, B\Gamma$ duabus $M\Xi, \Xi A$ singulae singulis aequales sunt, et $A\Gamma = MA$; itaque erit $\angle AB\Gamma = M\Xi A$ [I, 8]. eadem de causa



etiam $\angle H\Theta K = A\Xi N$. itaque $\angle M\Xi N = AB\Gamma + H\Theta K$. sed $AB\Gamma + H\Theta K > \Delta EZ$. quare etiam $\angle M\Xi N > \Delta EZ$. et quoniam duae rectae $\Delta E, EZ$ duabus $M\Xi, \Xi N$ aequales sunt, et $\Delta Z = MN$, erit $\angle M\Xi N = \Delta EZ$ [I, 8]. demonstraui enim, esse

etiam $\angle M\Xi N > \Delta EZ$. quod absurdum est. itaque non est $AB = A\Xi$. deinceps autem demonstrabimus, ne minorem quidem eam esse. ergo maior est. et si rursus ad planum circuli perpendicularem erexerimus ΞP et sumpserimus $\Xi P^2 = AB^2 \div A\Xi^2$, problema componetur.

iam dico, ne minorem quidem esse AB recta $A\Xi$. nam si fieri potest, sit $AB < A\Xi$. et ponatur $\Xi O = AB$, $\Xi \Pi = B\Gamma$, et ducatur $O\Pi$. et quoniam $AB = B\Gamma$, erit $\Xi O = \Xi \Pi$. quare etiam $O A = \Pi M$. itaque AM rectae ΠO parallela est [VI, 2], et triangulus $AM\Xi$ triangulo $\Pi\Xi O$ aequiangulus [I, 29]. itaque $\Xi A : AM = \Xi O : O\Pi$ [VI, 4], et permutando [V, 16]

13. ἀναστήσομεν P, sed corr. 14. τήν] τό F. ΞP] P
 eras. V, ΞO b. ὑποθάμεθα FV. ω] corr. ex δ P m. 2.
 15. τὸ ἀπὸ — τῆς] in spatio uacuo et mg. m. rec. P.
 τὸ ἀπὸ τῆς] ἡ b. τοῦ ἀπὸ] om. b. $A\Xi$] $A\Xi$ οὐ b;
 mg. m. 1: γρ. τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς $A\Xi$. γρ. καὶ οὕτως.
 λέγω — p. 352, 29: ἀδύνατον] mg. m. 1 b, adiecta figura,
 cui adscribitur: τοῦτο τὸ σχῆμα οὐκ ἔστι τοῦ κειμένου.
 20. ἐστίν P. καὶ] om. F, supra m. 2: καὶ ἡ; καὶ ἡ b.
 21. $O A$] O in ras. F. $M\Pi$ F. 23. $AM\Xi$] $A\Xi M$ Fb,
 $M\Xi A$ in ras. V. 24. ἡ ΞO] οὕτως ἡ ΞO Fb.

λὰξ ὡς ἡ $\Lambda\Xi$ πρὸς τὴν $\Xi\Theta$, οὕτως ἡ ΛM πρὸς τὴν
 $O\Pi$. μείζων δὲ ἡ $\Lambda\Xi$ τῆς $\Xi\Theta$. μείζων ἄρα καὶ ἡ
 ΛM τῆς $O\Pi$. ἀλλὰ ἡ ΛM τῇ $A\Gamma$ ἴση· καὶ ἡ
 $A\Gamma$ ἄρα τῆς $O\Pi$ ἐστὶ μείζων. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ AB ,
 5 $B\Gamma$ δύο ταῖς $O\Xi$, $\Xi\Pi$ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρωθεν ἑκατέρωθεν,
 καὶ βάσις ἡ $A\Gamma$ βάσεως τῆς $O\Pi$ μείζων ἐστίν, γωνία
 ἄρα ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνίας τῆς ὑπὸ $O\Xi\Pi$ μείζων ἐστίν.
 ὁμοίως δὲ καὶ τὴν ΞP ἴσην ἑκατέρωθεν τῶν $\Xi\Theta$, $\Xi\Pi$
 ἀπολάβωμεν καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν OP , δείξομεν, ὅτι
 10 καὶ ἡ ὑπὸ $H\Theta K$ γωνία τῆς ὑπὸ $O\Xi P$ μείζων ἐστίν.
 συνεστάτω δὲ πρὸς τῇ $\Lambda\Xi$ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ
 σημείῳ τῷ Ξ τῇ μὲν ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ
 $\Lambda\Xi\Sigma$, τῇ δὲ ὑπὸ $H\Theta K$ ἴση ἡ ὑπὸ $\Lambda\Xi T$, καὶ κείσθω
 ἑκατέρωθεν τῶν $\Xi\Sigma$, ΞT τῇ $O\Xi$ ἴση, καὶ ἐπεξεύχθωσαν
 15 αἱ $O\Sigma$, OT , ΣT . καὶ ἐπεὶ δύο αἱ AB , $B\Gamma$ δύο
 ταῖς $O\Xi$, $\Xi\Sigma$ ἴσαι εἰσὶν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γω-
 νία τῇ ὑπὸ $O\Xi\Sigma$ ἴση, βάσις ἄρα ἡ $A\Gamma$, τουτέστιν ἡ
 ΛM , βάσει τῇ $O\Sigma$ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ
 ἡ ΛN τῇ OT ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ MA , AN
 20 δύο ταῖς ΣO , OT ἴσαι εἰσὶν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ MAN
 γωνίας τῆς ὑπὸ ΣOT μείζων ἐστίν, βάσις ἄρα ἡ MN
 βάσεως τῆς ΣT μείζων ἐστίν. ἀλλὰ ἡ MN τῇ ΔZ
 ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΔZ ἄρα τῆς ΣT μείζων ἐστίν. ἐπεὶ
 οὖν δύο αἱ ΔE , EZ δύο ταῖς $\Sigma\Xi$, ΞT ἴσαι εἰσὶν,
 25 καὶ βάσις ἡ ΔZ βάσεως τῆς ΣT μείζων, γωνία ἄρα
 ἡ ὑπὸ ΔEZ γωνίας τῆς ὑπὸ $\Sigma\Xi T$ μείζων ἐστίν. ἴση
 δὲ ἡ ὑπὸ $\Sigma\Xi T$ ταῖς ὑπὸ $AB\Gamma$, $H\Theta K$. ἡ ἄρα ὑπὸ
 ΔEZ τῶν ὑπὸ $AB\Gamma$, $H\Theta K$ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ καὶ
 ἐλάττων· ὅπερ ἀδύνατον.

1. τὴν $\Xi\Theta$] $\Xi\Theta$ V. 3. τῇ $A\Gamma$] om. φ. 4. $A\Gamma$] ΓA P.
 μείζων ἐστίν, sed ἐστίν supra scr., F. 6. μείζων]

erit $\Lambda\Xi : \Xi O = \Lambda M : O\Pi$. uerum $\Lambda\Xi > \Xi O$. itaque etiam $\Lambda M > O\Pi$ [V, 14]. sed $\Lambda M = \Lambda\Gamma$. itaque etiam $\Lambda\Gamma > O\Pi$. iam quoniam duae rectae $AB, B\Gamma$ duabus rectis $O\Xi, \Xi\Pi$ singulae singulis aequales sunt, et $\Lambda\Gamma > O\Pi$, erit $\angle AB\Gamma > O\Xi\Pi$ [I, 25]. similiter si posuerimus $\Xi P = \Xi O = \Xi\Pi$ et duxerimus OP , demonstrabimus, esse etiam $\angle H\Theta K > O\Xi P$. iam ad rectam $\Lambda\Xi$ et punctum eius Ξ angulo $AB\Gamma$ aequalis construat \angle $\Lambda\Xi\Sigma$ [I, 23], et ponatur $\Xi\Sigma = \Xi T = O\Xi$, et ducantur $O\Sigma, OT, \Sigma T$. et quoniam duae rectae $AB, B\Gamma$ duabus $O\Xi, \Xi\Sigma$ aequales sunt, et $\angle AB\Gamma = O\Xi\Sigma$, erit $\Lambda\Gamma = O\Sigma$ [I, 4], h. e. $\Lambda M = O\Sigma$. eadem de causa etiam $\Lambda N = OT$. et quoniam duae rectae MA, AN duabus $\Sigma O, OT$ aequales sunt, et $\angle MAN > \Sigma OT$, erit $MN > \Sigma T$ [I, 24]. sed $MN = \Delta Z$. itaque etiam $\Delta Z > \Sigma T$. iam quoniam duae rectae $\Delta E, EZ$ duabus $\Sigma\Xi, \Xi T$ aequales sunt, et $\Delta Z > \Sigma T$, erit $\angle \Delta EZ > \Sigma\Xi T$ [I, 25]. est autem $\angle \Sigma\Xi T = AB\Gamma + H\Theta K$. ergo $\angle \Delta EZ > AB\Gamma + H\Theta K$. uerum idem minor est. quod fieri non potest.

comp. F, ἄρα comp. φ. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 7. ἄρα]
 comp. supra scr. m. 2 F. 8. καὶ π. 10. OΞP
 γωνίας F. ἐστὶ P, comp. b. 11. τὴν ΛΞ εὐθείαν π,
 et B, sed corr. Post ΛΞ ras. 1 litt. V. 12. ἴσην P,
 sed corr. ἦ] postea ins. m. 1 P. 13. ΘHK B.
 ΛΞT] T e corr. m. 2 P. 14. ἐπεξεύχθω V, σαν add. m.
 rec. 15. αὐτὰ AB, BΓ δύο] mg. V. 16. εἰσὶ PV,
 comp. Fb. 17. τῆ] ἦ F, corr. m. 2. 18. βάσει] εἰ
 eras. V. 19. ἐστὶν ἴση Vb. ΛN] Λ ins. m. 1 V.
 20. ΣO] corr. ex OΣ V, OΣ B. εἰσὶ PV, comp. Fb.
 21. ΣT F. ἐστὶ PV, comp. Fb. 22. ἀλλ' Fb.
 23. ἐστὶ V. 24. οὐν] om. B. ΣΞ] corr. ex EZ m. 2 P.
 εἰσὶ PV, comp. Fb. 25. μείζων ἐστὶ FV; seq. ras. tertiae
 partis lineae F. 27. ἦ] (prius) καὶ ἦ b. 29. ἀδύνατον] ἄτο-
 πον F, corr. mg. m. 2.

3.

Uulgo XI prop. 38.

Ἐὰν ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾗ, καὶ ἀπὸ
 τινος σημείου τῶν ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον
 ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῆ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς πεσεῖται
 τῶν ἐπιπέδων ἢ ἀγομένη κάθετος.

- 5 ἐπίπεδον γὰρ τὸ $\Gamma\Delta$ ἐπιπέδῳ τῷ AB πρὸς ὀρθὰς
 ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΔA , καὶ εἰλήφθω
 ἐπὶ τοῦ $\Gamma\Delta$ ἐπιπέδου τυχὸν σημεῖον τὸ E . λέγω, ὅτι
 ἢ ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὸ AB ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη
 ἐπὶ τῆς ΔA πεσεῖται.
- 10 μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ EZ ,
 καὶ συμβαλλέτω τῷ AB ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Z σημεῖον,
 καὶ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὴν ΔA ἐν τῷ AB ἐπιπέδῳ κά-
 θετος ἔστω ἡ ZH , ἥτις καὶ τῷ $\Gamma\Delta$ ἐπιπέδῳ πρὸς
 ὀρθὰς ἐστίν, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ EH . ἐπεὶ οὖν ἡ ZH
 15 τῷ $\Gamma\Delta$ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν, ἄπτεται δὲ αὐτῆς
 ἡ EH οὔσα ἐν τῷ $\Gamma\Delta$ ἐπιπέδῳ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ
 ὑπὸ ZHE γωνία. ἀλλὰ καὶ ἡ EZ τῷ AB ἐπιπέδῳ
 πρὸς ὀρθὰς ἐστίν· ἢ ἄρα ὑπὸ EZH ὀρθὴ ἐστίν. τρι-
 γώνου δὲ τοῦ EZH αἱ δύο γωνίαι ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν·
 20 ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἢ ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὸ AB
 ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῆς ΔA .
 ἐπὶ τὴν ΔA ἄρα πεσεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI, 38 post XI, 37 habent PBFV, om. b; ἐν τισι τῶν
 ἀντιγράφων οὐ φέρεται τὸ $\lambda\eta$ P mg. m. 1.

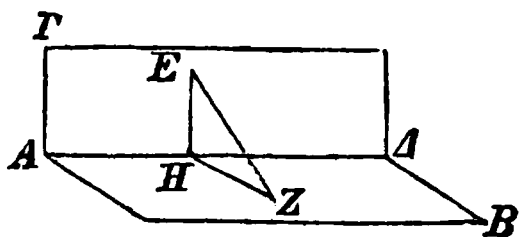
$\lambda\eta'$ PBV, in ras. m. 2 F. 2. τῶν] (alt.) m. 2 F. ἕτερον]
 post ρ del. ε P. 3. ἀχθεῖ P, corr. m. 2. 5. $\Gamma\Delta$] Γ eras.
 V. 6. ΔA] corr. ex $A\Delta$ V, $A\Delta$ F. 9. ΔA] $A\Delta$ FV.
 11. συμβαλέτω PV. 13. ἔστω] ἤχθω B F V. 14. ἐστι BV,

3.

Uulgo XI prop. 38.

Si planum ad planum perpendiculare est, et a puncto aliquo alterius plani ad alterum planum perpendicularis ducitur, perpendicularis ducta in communem planorum sectionem cadet.

Nam planum $\Gamma\Delta$ ad planum AB perpendiculare sit, et communis eorum sectio sit ΔA , et in $\Gamma\Delta$ plano punctum aliquod sumatur E . dico, perpendicularem ab E ad planum AB ductam in ΔA cadere.



ne cadat enim, sed si fieri potest, extra cadat ut EZ et cum plano AB concurrat in puncto Z , et a Z ad ΔA in plano AB perpendicularis sit ZH , quae eadem ad planum $\Gamma\Delta$ perpendicularis est [XI def. 4], et ducatur EH . iam quoniam ZH ad planum $\Gamma\Delta$ perpendicularis est, et eam tangit EH in plano $\Gamma\Delta$ posita, $\angle ZHE$ rectus erit [XI def. 3]. uerum etiam EZ ad planum AB perpendicularis est. itaque $\angle EZH$ rectus est. ergo trianguli EZH duo anguli rectis aequales sunt; quod fieri non potest [I, 17]. itaque perpendicularis ab E ad planum AB ducta extra ΔA non cadet. ergo cadet in ΔA ; quod erat demonstrandum.

comp. F. EH] H eras. V. 18. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] (alt.) $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ BV,
 comp. F. 19. $\acute{o}\rho\theta\alpha\iota\varsigma$] $\delta\acute{\upsilon}\acute{o}$ $\acute{o}\rho\theta\alpha\iota\varsigma$ FV, $\delta\acute{\upsilon}\acute{o}$ add. m. 2 B.
 $\acute{\epsilon}\lambda\iota\sigma\iota\nu$] om. FV. 22. $\tau\acute{\eta}\nu$] corr. ex $\tau\acute{\eta}\varsigma$ m. 2 V. $A\Delta$ FV.
 $\acute{o}\pi\epsilon\rho$ $\acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\iota\acute{\xi}\alpha\iota$] om. FV.

4.

Ad libr. XII prop. 4.

Καὶ ἐπεὶ τὰ ἐν τῇ $ABGH$ πυραμίδι δύο πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, ἀλλὰ μὴν καὶ τὰ ἐν τῇ $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι δύο πρίσματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις τὸ $BK\Lambda\Xi$ παραλληλό-
 5 γραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ MO εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ $\Lambda\Xi\Gamma$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ OMN , οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις τὸ $ΠΕΡ\Phi$, ἀπεναντίον δὲ ἡ $\Sigma\Gamma$, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ $P\Phi Z$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $\Sigma\Gamma\Theta$. συνθέντι
 10 ἐστὶν ἄρα ὡς τὰ $KB\Xi\Lambda MO$, $\Lambda\Xi\Gamma MN O$ πρίσματα πρὸς τὸ $\Lambda\Xi\Gamma MN O$ πρίσμα, οὕτως τὰ $ΠΕ\Phi P\Sigma\Gamma$, $P\Phi Z\Sigma\Gamma\Theta$ πρίσματα πρὸς τὸ $P\Phi Z\Sigma\Gamma\Theta$ πρίσμα. ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὰ $KB\Xi\Lambda MO$, $\Lambda\Xi\Gamma MN O$ πρὸς τὰ $ΠΕ\Phi P\Sigma\Gamma$, $P\Phi Z\Sigma\Gamma\Theta$ πρίσματα, οὕτως τὸ
 15 $\Lambda\Xi\Gamma MN O$ πρίσμα πρὸς τὸ $P\Phi Z\Sigma\Gamma\Theta$ πρίσμα. ὡς δὲ τὸ $\Lambda\Xi\Gamma MN O$ πρίσμα πρὸς τὸ $P\Phi Z\Sigma\Gamma\Theta$ πρίσμα, οὕτως ἐδείχθη ἡ $\Lambda\Xi\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν $P\Phi Z$, καὶ ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν. καὶ ὡς ἄρα τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔEZ τρίγωνον, οὕτως τὰ ἐν
 20 τῇ $ABGH$ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι δύο πρίσματα. ὁμοίως δὲ καὶ τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας διέλωμεν τὸν αὐτὸν τρόπον οἷον ὡς τὰς $MNOH$, $\Sigma\Gamma\Theta$, ἔσται ὡς ἡ MNO

XII, 4. Pro uerbis ὡς δέ p. 160, 13 — δεῖξαι p. 162, 14 Theon (BVq). de figura u. p. 159.

2. ἐστὶν ἴσα B. 4. $BK\Lambda\Xi$] in ras. V. 5. MO] $M e$ corr. V. 6. μὲν] om. V. 7. οὕτω B. 9. καὶ συνθέντι

4.

Ad libr. XII prop. 4.

Et quoniam duo prismata pyramidis $ABGH$ inter se aequalia sunt, uerum etiam duo prismata pyramidis $\Delta EZ\Theta$ inter se aequalia sunt, erit ut prisma, cuius basis est parallelogrammum $BK\Lambda\Xi$, ei autem opposita recta MO , ad prisma, cuius basis est triangulus $\Lambda\Xi\Gamma$, ei autem oppositus OMN , ita prisma, cuius basis est $\Pi\epsilon\rho\Phi$, ei autem opposita $\Sigma\tau$, ad prisma, cuius basis est triangulus $P\Phi Z$, ei autem oppositus $\Sigma\tau\tau$. componendo igitur est $KB\Xi\Lambda MO + \Lambda\Xi\Gamma MN O : \Lambda\Xi\Gamma MN O = \Pi\epsilon\Phi\rho\Sigma\tau + P\Phi Z\Sigma\tau\tau : P\Phi Z\Sigma\tau\tau$. itaque permutando erit

$$KB\Xi\Lambda MO + \Lambda\Xi\Gamma MN O : \Pi\epsilon\Phi\rho\Sigma\tau + P\Phi Z\Sigma\tau\tau = \Lambda\Xi\Gamma MN O : P\Phi Z\Sigma\tau\tau.$$

demonstrauimus autem, esse $\Lambda\Xi\Gamma MN O : P\Phi Z\Sigma\tau\tau = \Lambda\Xi\Gamma : P\Phi Z = AB\Gamma : \Delta EZ$. itaque etiam ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita duo prismata pyramidis $ABGH$ ad duo prismata pyramidis $\Delta EZ\Theta$. similiter si reliquas pyramides, uelut $MNOH$, $\Sigma\tau\tau\Theta$, eadem ratione diui-

q. 10. ἄρα ἐστίν V. 11. οὕτω B. $\Pi\rho\epsilon\Phi\Sigma\tau$, post Φ ras., V. 12. $P\Phi Z\Sigma\tau\tau$] P inter duas ras. V. $E\Phi Z\Sigma\tau\tau$ V. $\pi\rho\acute{\iota}\sigma\mu\alpha\tau\alpha$ q. 13. $KB\Lambda\Xi MO$ B. $\Xi\Lambda\Gamma MN O$ B, $\Lambda\Xi\Gamma MN O$ q et ON in ras. V; seq. $\pi\rho\acute{\iota}\sigma\mu\alpha\tau\alpha$ V. 14. $\Pi\epsilon\Phi\rho\Sigma\tau$] $\Phi\rho$ in ras. V. οὕτω B. 15. ὡς δέ — 16. $P\Phi Z\Sigma\tau\tau$ $\pi\rho\acute{\iota}\sigma\mu\alpha$] om. q. 18. $\beta\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma$] om. V. 19. οὕτω q. 22. ὑπολειπομένης] mg. m. 2 B, in textu γενομένης. 23. ὡς] (prius) bis V.

βάσις πρὸς τὴν $\Sigma\Gamma\Upsilon$ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $MNOH$ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $\Sigma\Gamma\Upsilon\Theta$ πυραμίδι δύο πρίσματα. ἀλλ' ὡς ἡ MNO βάσις πρὸς τὴν $\Sigma\Gamma\Upsilon$ βάσιν, οὕτως ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ 5 βάσιν. καὶ ὡς ἄρα ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως καὶ τὰ ἐν τῇ $AB\Gamma H$ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τὰ ἐν τῇ $MNOH$ δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $\Sigma\Gamma\Upsilon\Theta$ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τὰ τέσσαρα πρὸς 10 τὰ τέσσαρα. τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν γενομένων πρισμαμάτων ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν $AK\Lambda O$ καὶ $\Delta\Pi\rho\Sigma$ πυραμίδων καὶ πάντων ἀπλῶς τῶν ἰσοπληθῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Ad libr. XII prop. 17.

Δεικτέον δὴ καὶ ἐτέρως προχειρότερον, ὅτι μείζων 15 ἐστὶν ἡ $A\Psi$ τῆς AH . ἤχθω ἀπὸ τοῦ H τῇ AH πρὸς ὀρθὰς ἡ HA' , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ AA' . τέμνοντες δὴ τὴν EB περιφέρειαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομεν τινα περιφέρειαν, ἣ ἐστὶν ἐλάσσων τῆς ὑποτεينوμένης τοῦ 20 $B\Gamma\Delta E$ κύκλου περιφερείας ὑπὸ τῆς ἴσης τῇ HA' . λελείφθω καὶ ἔστω ἡ KB περιφέρεια. ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ KB εὐθεῖα τῆς HA' . καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ ἐστὶ

XII, 17 inter ἐπιφάνειαν et δύο p. 240, 5—6 PBVq. De figura u. p. 231. pro A' in P scribitur α ; litteram hanc in fig. om. B.

6. οὕτω Bq. δύο] om. V. 7. πρὸς τὰ — πρίσματα] om. q. πυραμίδι δύο πρίσματα] om. V. 8. καὶ] καὶ ἔτι

serimus, erunt ut $MNO : \Sigma TT$, ita duo prismata pyramidis $MNOH$ ad duo prismata pyramidis $\Sigma TT\Theta$. uerum $MNO : \Sigma TT = AB\Gamma : \Delta EZ$. quare etiam ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita duo prismata pyramidis $AB\Gamma H$ ad duo prismata pyramidis $\Delta EZ\Theta$ et duo prismata pyramidis $MNOH$ ad duo prismata pyramidis $\Sigma TT\Theta$, et quattuor ad quattuor. eadem autem etiam in prismatis ex diuisione pyramidum $AK\Lambda O$, $\Delta\Pi P\Sigma$ ortis demonstrabuntur, et omnino in omnibus prismatis numero aequalibus; quod erat demonstrandum.

5.

Ad libr. XII prop. 17.

Iam aliter quoque promptius demonstrandum est, esse $A\Psi > AH$. ducatur ab H ad AH perpendicularis HA' , et ducatur AA' . iam arcum EB in duas partes aequales secantes et dimidiam partem eius in duas partes aequales et hoc semper facientes arcum quendam relinquemus minorem arcu circuli $B\Gamma\Delta E$, sub quo recta aequalis rectae HA' subtendit. relinquatur et sit arcus KB . itaque erit $KB < HA'$. et

V. δύο] e corr. V. 9. τά] om. B. τέσσερα B, corr. m. 2. 10. τά] om. q. τέσσερα B, corr. m. 2. γινόμενων q. 11. τῶν] corr. ex τῶ m. 2 B. ΑΛΚΟ V. 12. ἰσοπληθῶν] εἰς τὸ πλῆθος q. 13. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BVφ; in V del. τι δέ ἐστιν ὡς τὸ Α. 15. AH] (prius) H e corr. V, AK q. 16. HA'] HA Vq, HB. AA'] AA Vq, AB; mg. ἡ HA καὶ ἐπεξεύχθω ἡ AA m. 2 B. 18. τοῦτο] τὸ αὐτό q. 19. ἐστιν] ἔσται q. 20. τῆ] τῆς B. HA'] HA V (A e corr.) et B (supra scr. A m. 2), HA q. 21. εἰλήφθω q. 22. HA'] HA V, HA q, HB (supra scr. HA m. 2). ἔστιν P.

τὸ $BKΣO$ τετράπλευρον, καὶ εἰσιν ἴσαι αἱ OB , BK ,
 $KΣ$, καὶ ἐλάττων ἢ $OΣ$, ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἢ ὑπὸ
 $BΨK$ γωνία. μείζων ἄρα ἢ KB τῆς $BΨ$. ἀλλὰ τῆς
 KB μείζων ἐστὶν ἢ HA' . πολλῶν ἄρα ἢ HA' μείζων
5 ἐστὶ τῆς $BΨ$. μείζων ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HA' τοῦ
ἀπὸ τῆς $BΨ$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ AA' τῇ AB , ἴσον
καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AA' τῶ ἀπὸ τῆς AB . ἀλλὰ τῶ μὲν
ἀπὸ τῆς AA' ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν AH , HA' , τῶ δὲ ἀπὸ
τῆς AB ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν $BΨ$, $ΨA$. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν
10 AH , HA' ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν $BΨ$, $ΨA$, ὧν τὸ ἀπὸ
τῆς $BΨ$ ἐλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς HA' ; λοιπὸν ἄρα
τὸ ἀπὸ $ΨA$ μείζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ AH . μείζων ἄρα ἢ
 $AΨ$ τῆς AH .

6.

Ad libr. XIII prop. 6.

Ἐὰν ρητὴ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῆ,
15 ἐκάτερον τῶν τμημάτων ἀποτομή ἐστὶ. ρητὴ γὰρ ἢ
 AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ση-
μεῖον. σύμμετρον τμημᾶ ἐστὶ τὸ $A\Gamma$. λέγω, ὅτι ἐκα-
τέρα τῶν $A\Gamma$, ΓB ἀποτομή ἐστὶ. κείσθω τῆς AB
ἡμίσεια ἢ $A\Delta$. ρητὴ δὲ ἢ AB . ρητὴ ἄρα καὶ ἢ $A\Delta$.
20 καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τοῦ ἀπὸ
τῆς ΔA , ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῶν ΔA , ρητὸν ἄρα καὶ

6. Haec propositio inter libb. XII et XIII legitur in solo q (cfr. p. 246 adn. crit.). in re parum differt a XIII, 6, qualem recepimus; sed uerba magis abhorrent, quam ut scriptura codicis q inter discrepantias meras recipi possit. est detruncatio prop. 6 genuinae. cum praeterea scriptura erroribus scribarum plurimis laboret, interpretationem Latinam non dedi.

1. αἱ] om. q. 2. ὑπό] ὑπὸ τό B. 3. ἀλλά] ἀλλὰ καὶ q.
4. HA'] HA V, AH q, HB (supra scr. HA m. 2).

quoniam in circulo est $BK\Sigma O$ quadrilaterum, et $OB = BK = K\Sigma$, minor autem $O\Sigma$, obtusus est $\angle B\Psi K$. itaque $KB > B\Psi$. uerum $HA' > KB$. itaque multo magis $HA' > B\Psi$. quare etiam $A'H^2 > B\Psi^2$. et quoniam $AA' = AB$, erit etiam $A'A^2 = AB^2$. uerum $AH^2 + A'H^2 = A'A^2$, $B\Psi^2 + \Psi A^2 = AB^2$. ergo $AH^2 + A'H^2 = B\Psi^2 + \Psi A^2$, quorum $B\Psi^2 < A'H^2$. itaque $\Psi A^2 > AH^2$. ergo $A\Psi > AH$.

HA'] HA V (Λ in ras.) et q, HA e corr. B. 5. $\mu\epsilon\acute{\iota}\zeta\omicron\nu$] $\mu\epsilon\acute{\iota}\zeta\omicron\nu$ P. HA'] HA V (Λ in ras.), HA q et B (A postea ins.).
 6. $\tau\eta\varsigma$] om. P. AA'] AA V q, A B (supra scr. m. 2 $A\Delta$).
 $\tau\eta$] corr. ex $\tau\eta\varsigma$ P. 7. AA'] AA V q, $A\Delta$ postea ins.
 B. $\tau\omega$] corr. ex $\tau\omega\upsilon$ m. rec. P. $\tau\omega$] corr. ex $\tau\acute{o}$ m. 1 q.
 8. AA'] AA V q; AH B, AA m. 2. AH] $\bar{\alpha}\eta$ B.
 HA'] HA V q, HA B. 10. AH] ins. m. 2 in spatio uacuo
 B. HA'] HA V q; HA B, corr. in HA . $\acute{\iota}\sigma\alpha\ \acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$ V.
 11. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] om V; $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. $\tau\eta\varsigma$] om. P. HA'] ras. V, HA
 q (H e corr. m. 1), $\eta\acute{\alpha}\varsigma$ B; seq. $\kappa\alpha\acute{\iota}$ comp. V. 12. $\tau\eta\varsigma$ ΨA
 V q. $\tau\eta\varsigma$ AH V q; A mutat. in Λ B.

τὸ ἀπὸ τῶν $\Delta\Gamma$. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ
 τῆς $\Delta\Gamma$ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔA , τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν $\Delta\Gamma$ πρὸς
 τὸ ἀπὸ τῶν ΔA λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς
 πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀλλ' ὃν μὲν ἀριθμὸς πρὸς
 5 ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $\Delta\Gamma$ τῇ ΔA μήκει.
 καὶ ἐστὶ ρητὴ ἑκατέρα· αἱ $\Gamma\Delta$, ΔA ἄρα ρηταί εἰσι δυ-
 νάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $A\Gamma$.
 ρητὴ δὲ ἡ AB , καὶ τῷ ἀπὸ τῶν $A\Gamma$ ἴσον παρὰ τὴν
 AB παραβέβληται τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$. τὸ δὲ \bar{a}
 10 ἀποτομὴν παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ
 ἀποτομὴν πρώτην. ἀποτομὴ ἄρα καὶ ἡ ΓB . ἑκατέρα
 ὁ ἄρα τὸν $A\Gamma$, ΓB ἀποτομὴ ἐστίν. ἐὰν ἄρα ρητὴ
 εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν
 τμημάτων ἀποτομὴ ἐστίν.

7.

Ad libr. XIII prop. 5.

15

Ἄλλως.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ,
 ἔσται ὡς συναμφοτέρως ἢ ὅλη καὶ τὸ μείζον τμήμα
 πρὸς τὴν ὅλην, οὕτως ἢ ὅλη πρὸς τὸ μείζον τμήμα.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τε-
 20 τμήσθω κατὰ τὸ Γ , καὶ ἔστω μείζον τμήμα τὸ $A\Gamma$.
 λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς συναμφοτέρως ἢ $BA\Gamma$ πρὸς AB ,
 οὕτως ἢ BA πρὸς $A\Gamma$.

Κείσθω γὰρ τῇ $A\Gamma$ ἴση ἡ $A\Delta$. λέγω, ὅτι ἐστὶν

7. Hoc ἄλλως habet P post XIII, 6, q in textu pro XIII, 6, b mg. m. 1 post XIII, 5.

15. ἄλλως] om. q, in quo numerus prop. erasus est.
 16. μέσο q. 20. ἔστω] ἔσται b. 21. AB] BA P.

7.

Ad libr. XIII prop. 5.

Aliter.

Si recta linea secundum rationem extremam ac mediam secatur, erit ut tota, cum parte maiore ad totam, ita tota ad partem maiorem.

nam recta AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secta sit, et maior pars sit $A\Gamma$. dico, esse $BA + A\Gamma : AB = BA : A\Gamma$. ponatur enim $A\Delta = A\Gamma$. dico, esse $B\Delta : BA = BA : A\Gamma$. nam quo-

ὡς ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΒΑ$, οὕτως ἡ $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$.
 ἐπεὶ γὰρ ἡ $ΑΒ$ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ
 τὸ $Γ$, καὶ μείζον τμημὰ ἐστὶ τὸ $ΑΓ$, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ
 $ΒΑ$ πρὸς τὴν $ΑΓ$, οὕτως ἡ $ΑΓ$ πρὸς τὴν $ΓΒ$. ἴση
 5 δὲ ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΔΑ$. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $ΒΑ$ πρὸς $ΑΔ$,
 οὕτως ἡ $ΑΓ$ πρὸς $ΓΒ$. ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ
 $ΔΑ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$, οὕτως ἡ $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΓΑ$. συν-
 θέντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ΔΒ$ πρὸς τὴν $ΒΑ$, οὕτως ἡ
 $ΒΑ$ πρὸς $ΑΓ$. ἴση δὲ ἐστὶν ἡ $ΔΑ$ τῇ $ΑΓ$. ἔστιν ἄρα
 10 ὡς συναμφοτέρως ἡ $ΒΑΓ$ πρὸς τὴν $ΑΒ$, οὕτως ἡ
 $ΒΑ$ πρὸς $ΑΓ$. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ὡς ἡ $ΔΒ$ πρὸς $ΒΑ$,
 οὕτως ἡ $ΒΑ$ πρὸς $ΑΓ$, ἴση δὲ ἡ $ΓΑ$ τῇ $ΔΑ$, ἔστιν
 ἄρα ὡς ἡ $ΔΒ$ πρὸς τὴν $ΒΑ$, οὕτως ἡ $ΒΑ$ πρὸς τὴν
 $ΑΔ$. καὶ ἡ $ΔΒ$ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται
 15 κατὰ τὸ $Α$, καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ ἐξ ἀρχῆς
 εὐθεῖα ἡ $ΑΒ$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ad libr. XIII prop. 1—5.

Τί ἐστὶν ἀνάλυσις καὶ τί ἐστὶ σύνθεσις.

Ἀνάλυσις μὲν οὖν ἐστὶ λήψις τοῦ ζητουμένου ὡς
 ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολουθῶν ἐπὶ τι ἀληθὲς ὁμο-
 20 λογούμενον.

8. Hae analyses in meis codicibus coniunctae sunt. legun-
 tur in P (in quo demonstr. alt. prop. 5 sextam sequitur) post
 demonstrationem alteram prop. 5 (supra nr. 7 signatam), in B
 post prop. 6, in b post prop. 5 (prop. 6 deest), in q post pro-
 positionem in eo sextam, quam supra nr. 7 signavimus; in V
 analyses prop. 1—3 in textu sunt post prop. 6, prop. 4—5
 eodem loco mg. inf. m. 2.

2. $ΑΒ$] $ΒΑ$ P. 4. $ΒΑ$] $ΑΒ$ q. 5. δέ] δ' P. $ΔΑ$] $ΑΔ$ P. τὴν $ΑΔ$ P. 7. $ΔΑ$] $ΔΒ$ b. τὴν] (prius) om. b.

niam AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secta est, et maior pars est $A\Gamma$, erit $BA : A\Gamma = A\Gamma : \Gamma B$. uerum $A\Gamma = \Delta A$. itaque $BA : \Delta A = A\Gamma : \Gamma B$. e contrario igitur $\Delta A : AB = B\Gamma : \Gamma A$. componendo igitur $\Delta B : BA = BA : A\Gamma$. uerum $\Delta A = A\Gamma$. itaque $BA + A\Gamma : AB = BA : A\Gamma$.¹⁾ et quoniam demonstrauius, esse $\Delta B : BA = BA : A\Gamma$, et $\Gamma A = \Delta A$, erit $\Delta B : BA = BA : \Delta A$. ergo etiam ΔB in A secundum rationem extremam ac mediam secta est, et maior pars est recta ab initio sumpta AB ; quod erat demonstrandum.



8.

Ad libr. XIII prop. 1—5.

Quid sit analysis, quid synthesis.

Analysis est adsertio eius, quod quaeritur, ut concessi, qua per consequentias ad aliquid peruenitur, quod uerum esse conceditur.

1) Hic perfecta est demonstratio propositionis, qualis in nostro *ἄλλως* exposita est. reliqua addita sunt, ut intellegeretur, sub hac forma idem demonstrari ac in ipsa propositione 5, qualis in textu exposita est.

9. *πρός*] *πρὸς τήν* P. *δέ*] *δ'* P. ΔA] $A\Delta$ P. 10. AB] BA P. 11. *τήν* $A\Gamma$ P. 12. ΓA] $A\Gamma$ P. ΔA] $A\Delta$ P.
14. *καί*] (prius) om. P. 15. *καί*] om. b. 17. *τί* — *σύνθεσις*] om. V. 18. *μὲν οὖν*] om. BVbq. *ἔστιν* P.

Σύνθεσις δὲ λήψις τοῦ ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολουθῶν ἐπὶ τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον.

Τοῦ \bar{a} θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις ἄνευ καταγραφῆς.

5 *Εὐθεία γάρ τις ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τε-
τμήσθω κατὰ τὸ Γ , καὶ ἔστω μείζον τμήμα ἡ AG , καὶ
τῆ ἡμισεία τῆς AB ἴση κείσθω ἡ AD . λέγω, ὅτι
πενταπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓA τοῦ ἀπὸ τῆς AD .
Ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓA τοῦ
10 ἀπὸ τῆς DA , τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓA ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν
 ΓA , AD μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΓA , AD , τὰ ἄρα
ἀπὸ τῶν ΓA , AD μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΓA , AD
πενταπλάσιά ἐστὶ τοῦ ἀπὸ AD . διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ
τῆς ΓA μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΓA , AD τετραπλάσιά
15 ἐστὶ τοῦ ἀπὸ AD . ἀλλὰ τῷ μὲν δις ὑπὸ τῶν ΓA ,
 AD ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν BA , AG . διπλῆ γὰρ ἡ
 BA τῆς AD . τῷ δὲ ἀπὸ τῆς AG ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ
τῶν AB , BG . ἡ γὰρ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέ-
τμηται. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BA , AG μετὰ τοῦ ὑπὸ AB ,
20 BG τετραπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς AD . ἀλλὰ τὸ
ὑπὸ τῶν BA , AG μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν AB , BG τὸ
ἀπὸ τῆς AB ἐστίν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AB τετραπλά-
σιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ AD . ἐστὶ δέ· διπλῆ γὰρ ἐστὶν ἡ
 AB τῆς AD .*

2. τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον] P, τὴν τοῦ ζητουμένου κατά-
ληξιν ἤτοι κατάληψιν B V b q. 10. τό] τοῦ b. ἐστὶν B.

12. AD] (alt.) corr. ex AG m. 1 b. 13. ἐστὶν P.
τῆς AD V. 14. τετραπλάσιόν V q. 15. τῶν] om. b q.

16. τό] τοῦ b. τῶν] om. q. γὰρ ἐστὶν b q. 17. τῷ]
corr. ex τῶν m. 2 P. AG] ΓA q. 19. AB] τῶν AB P.

20. τῆς] om. V. τό] τῷ q. 22. ἀπό] bis q. τῆς]

synthesis est adsertio concessi, qua per consequentias ad aliquid peruenitur, quod uerum esse conceditur.

Analysis et synthesis prop. I sine figura.

recta enim AB secundum rationem extremam ac mediam secetur in Γ , et maior pars eius sit $A\Gamma$, et ponatur $A\Delta = \frac{1}{2} AB$. dico, esse $\Gamma\Delta^2 = 5A\Delta^2$.

nam quoniam $\Gamma\Delta^2 = 5A\Delta^2$, et

$$\Gamma\Delta^2 = \Gamma A^2 + A\Delta^2 + 2\Gamma A \times A\Delta \text{ [II, 4]},$$

erit $\Gamma A^2 + A\Delta^2 + 2\Gamma A \times A\Delta = 5A\Delta^2$. itaque subtrahendo $\Gamma A^2 + 2\Gamma A \times A\Delta = 4A\Delta^2$. uerum



$BA \times A\Gamma = 2\Gamma A \times A\Delta$ (nam $BA = 2A\Delta$), et $A\Gamma^2 = AB \times B\Gamma$ (nam AB secundum rationem extremam ac mediam secta est). itaque $BA \times A\Gamma + AB \times B\Gamma = 4A\Delta^2$. uerum $BA \times A\Gamma + AB \times B\Gamma = AB^2$ [II, 2]. ergo $AB^2 = 4A\Delta^2$. et est; nam $AB = 2A\Delta$.

om. P. ἔστι V, ἴσον ἔστί bq. ἀπό] ὑπό b. 23. ἀπὸ] ἀπὸ τῆς V, ὑπό b.

Σύνθεσις.

Ἐπεὶ οὖν τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ
 ἀπὸ τῆς AD , ἀλλὰ τὸ ἀπὸ BA τὸ ὑπὸ BA , AG ἐστι
 μετὰ τοῦ ὑπὸ AB , BG , τὸ ἄρα ὑπὸ BA , AG μετὰ
 5 τοῦ ὑπὸ AB , BG τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ AD .
 ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν BA , AG ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ
 τῶν DA , AG , τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB , BG ἴσον ἐστὶ τῷ
 ἀπὸ τῆς AG . τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AG μετὰ τοῦ δις ὑπὸ
 τῶν DA , AG τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς DA .
 10 ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν DA , AG μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν
 DA , AG πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς DA . τὰ δὲ
 ἀπὸ τῶν DA , AG μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν DA , AG
 τὸ ἀπὸ τῆς GD ἐστίν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς GD πεντα-
 πλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς DA . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15 Τοῦ β θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις
 ἄνευ καταγραφῆς.

Εὐθεία γάρ τις ἡ GD τμήματος ἑαυτῆς τοῦ DA
 πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ DA διπλῆ κείσθω ἡ
 AB . λέγω, ὅτι ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται
 20 κατὰ τὸ G σημεῖον, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ AG ,
 ἥτις ἐστὶ τὸ λοιπὸν μέρος τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Ἐπεὶ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ
 τὸ G , καὶ τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ AG , τὸ ἄρα ὑπὸ
 τῶν ABG ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AG . ἐστὶ δὲ καὶ τὸ
 25 ὑπὸ τῶν BAG τῷ δις ὑπὸ τῶν DA , AG ἴσον· διπλῆ
 γάρ ἐστὶν ἡ BA τῆς AD . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB , BG
 μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν BA , AG , ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς

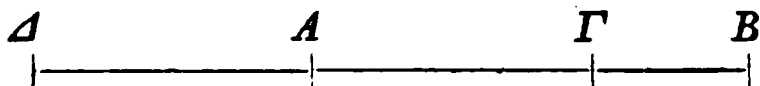
2. $BA BV$, $B''A'$ b. 3. ἐστὶν B. 11. πενταπλάσιόν
 Vq. 13. ἐστὶν] ἐστὶ Vq, comp. b. 14. ὅπερ ἔδει δεῖξαι]

synthesis.

Iam quoniam $AB^2 = 4A\Delta^2$, et $BA^2 = BA \times A\Gamma + AB \times B\Gamma$ [II, 2], erunt $BA \times A\Gamma + AB \times B\Gamma = 4A\Delta^2$. uerum $BA \times A\Gamma = 2\Delta A \times A\Gamma$, $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$. itaque $A\Gamma^2 + 2\Delta A \times A\Gamma = 4\Delta A^2$. quare $\Delta A^2 + A\Gamma^2 + 2\Delta A \times A\Gamma = 5\Delta A^2$. uerum $\Delta A^2 + A\Gamma^2 + 2\Delta A \times A\Gamma = \Gamma\Delta^2$ [II, 4]. ergo $\Gamma\Delta^2 = 5\Delta A^2$; quod erat demonstrandum.

Analysis et synthesis prop. II sine figura.

quadratum enim rectae $\Gamma\Delta$ quintuplum sit quadrati partis eius ΔA , et ponatur $AB = 2\Delta A$. dico,



rectam AB secundum rationem extremam ac mediam in puncto Γ sectam esse, et maiorem partem esse $A\Gamma$, quae reliqua pars est rectae ab initio sumptae.

quoniam AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secta est, et maior pars est $A\Gamma$, erit $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$. uerum etiam $BA \times A\Gamma = 2\Delta A \times A\Gamma$; nam $BA = 2\Delta A$. itaque erit $AB \times B\Gamma + BA \times A\Gamma$

om. q, o) — b. 15. ἦ] (alt.) om. P. 19. λόγον] om. b.
 20. σημειῶν] om. V. τό] om. bq. 21. ἐστίν P.
 22. ἐπεὶ γὰρ BV. 25. BA, AΓ b. 26. BA] AB q.
 27. τοῦ] om. q. τῶν] om. Bb q. ἐστίν P.

AB , ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $\triangle A$, AG μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AG . τετραπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς $\triangle A$. τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $\triangle A$, AG μετὰ τοῦ ἀπὸ AG τοῦ ἀπὸ $A\Delta$. ὥστε τὰ
 5 ἀπὸ τῶν $\triangle A$, AG μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $\triangle A$, AG , ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$, πενταπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς $\triangle A$. ἔστι δέ.

Σύνθεσις.

Ἐπεὶ οὖν πενταπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τοῦ
 10 ἀπὸ τῆς $\triangle A$, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τὰ ἀπὸ τῶν $\triangle A$, AG ἐστὶ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $\triangle A$, AG , τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $\triangle A$, AG μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $\triangle A$, AG πενταπλάσιά ἐστὶ τοῦ ἀπὸ $\triangle A$. διελόντι τὸ δις ὑπὸ τῶν $\triangle A$, AG μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AG τετραπλάσιόν ἐστὶ
 15 τοῦ ἀπὸ τῆς $A\Delta$. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ $A\Delta$. τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν $\triangle A$, AG , ὅπερ ἐστὶ τὸ ἄπαξ ὑπὸ τῶν BA , AG , μετὰ τοῦ ἀπὸ AG , ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB . ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς AB τὸ ὑπὸ AB , $B\Gamma$ ἐστὶ μετὰ τοῦ ὑπὸ BA , AG .
 20 τὸ ἄρα ὑπὸ BA , AG μετὰ τοῦ ὑπὸ AB , $B\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ BA , AG μετὰ τοῦ ἀπὸ AG . καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ὑπὸ BA , AG , λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ AB , $B\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ AG . ἔστιν ἄρα ὡς ἡ BA πρὸς τὴν AG , οὕτως ἡ AG πρὸς τὴν ΓB . μείζων δὲ
 25 ἡ BA τῆς AG . μείζων ἄρα καὶ ἡ AG τῆς ΓB . ἡ AB ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ , καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ AG . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4. ἀπὸ τῆς AG V.
 — AG] supra m. 2 B.

τῆς $A\Delta$ V.
 ὑπό] ἀπό q.

τά] τό q. 5. μετὰ
 6. ἐστίν PB.

$= 2 \Delta A \times A\Gamma + A\Gamma^2 = AB^2$ [II, 2]. sed $AB^2 = 4 \Delta A^2$.
itaque etiam $2 \Delta A \times A\Gamma + A\Gamma^2 = 4 \Delta A^2$. quare
 $\Delta A^2 + A\Gamma^2 + 2 \Delta A \times A\Gamma = 5 \Delta A^2 = \Gamma \Delta^2$ [II, 4].
et est.

synthesis.

iam quoniam $\Gamma \Delta^2 = 5 \Delta A^2$, et $\Gamma \Delta^2 = \Delta A^2 + A\Gamma^2 + 2 \Delta A \times A\Gamma$ [II, 4], erit $\Delta A^2 + A\Gamma^2 + 2 \Delta A \times A\Gamma = 5 \Delta A^2$. subtrahendo erit $2 \Delta A \times A\Gamma + A\Gamma^2 = 4 \Delta A^2$. uerum etiam $AB^2 = 4 \Delta A^2$. itaque $2 \Delta A \times A\Gamma + A\Gamma^2 = AB^2 = BA \times A\Gamma + A\Gamma^2$. uerum $AB^2 = AB \times B\Gamma + BA \times A\Gamma$ [II, 2]. itaque $BA \times A\Gamma + AB \times B\Gamma = BA \times A\Gamma + A\Gamma^2$. et ablato, quod commune est, $BA \times A\Gamma$ erit $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$. itaque $BA : A\Gamma = A\Gamma : \Gamma B$. et $BA > A\Gamma$. itaque etiam $A\Gamma > \Gamma B$. ergo AB secundum rationem extremam ac mediam in Γ secta est, et maior pars est $A\Gamma$; quod erat demonstrandum.

τό] om. B. πενταπλάσια B, comp. V. 7. τῆς] om. P.
ἔστιν Bb, om. q. δέ] om. q, ΔΕ b; dein add. διὰ τὴν ὑπό-
θεσιν BVq, mg. m. 1 b. 10. τὰ] τό BV. 11. ἔστιν B.
ἀπό] corr. ex ὑπό V. 13. ἔστι] om. V. ΔΔ q, τῆς
ΔΑ V. 15. τῆς] om. P. ἔστιν B. ἀπό] corr. ex ἄ m.
1 P. 16. τῆς ΔΔ V. τῶν] om. P. 17. ἔστιν B.
18. ἀλλά — τῆς AB] postea add. m. 1 mg. P. 19. ὑπὸ τῶν
V. ἔστιν B. 20. ὑπό] (alt.) ἀπό q. ἴσον — 21. ΒΑ,
ΑΓ] postea add. m. 1 mg. P. 21. τῶ] corr. ex τό m. 2 P.
23. ΑΒ, ΒΓ] corr. ex ΑΒΓ V; ΑΒ b, ΑΒΓ Β.
25. ΑΓ] (prius) ΓΑ q. ἄρα ΑΒ V. 27. ὅπερ ἔδει
δειξαί] om. Vq, o) — b.

Τοῦ $\bar{\gamma}$ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ
σύνθεσις.

Εὐθεία γὰρ γραμμὴ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον
τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημείου, καὶ ἔστω μείζον τμήμα
5 ἡ AG , καὶ τῆς AG ἡμίσεια ἡ $\Gamma\Delta$. λέγω, ὅτι πεντα-
πλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τοῦ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$.

Ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τοῦ
ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΔB τὸ ὑπὸ τῶν AB ,
 $B\Gamma$ ἐστὶ μετὰ τοῦ ἀπὸ $\Delta\Gamma$, τὸ ἄρα ὑπὸ AB , $B\Gamma$
10 μετὰ τοῦ ἀπὸ $\Delta\Gamma$ πενταπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ $\Delta\Gamma$.
διελόντι τὸ ἄρα ὑπὸ AB , $B\Gamma$ τετραπλάσιόν ἐστὶ τοῦ
ἀπὸ $\Delta\Gamma$. τῷ δὲ ὑπὸ AB , $B\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς
 AG . ἡ γὰρ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ
τὸ Γ . τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AG τετραπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ
15 $\Delta\Gamma$. ἔστι δέ· διπλῆ γὰρ ἡ AG τῆς $\Delta\Gamma$.

Ἡ σύνθεσις.

Ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ AG τῆς $\Delta\Gamma$, τετραπλάσιόν
ἐστὶ τὸ ἀπὸ AG τοῦ ἀπὸ $\Delta\Gamma$. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ AG
ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ AB , $B\Gamma$. τὸ ἄρα ὑπὸ AB , $B\Gamma$
20 τετραπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ $\Delta\Gamma$. συνθέντι τὸ ἄρα ὑπὸ
 AB , $B\Gamma$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $\Delta\Gamma$, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΔB ,
πενταπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ $\Delta\Gamma$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ $\bar{\delta}$ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ
σύνθεσις.

25 Εὐθεία γὰρ γραμμὴ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον
τετμήσθω κατὰ τὸ Γ , καὶ ἔστω μείζον τμήμα τὸ AG .

1. ἡ] (alt.) om. q. 3. γὰρ] om. bq. λόγον] om. P.
8. ΔB] e corr. V, $B\Delta$ q. 9. $B\Gamma$] corr. ex AG m. 2 B.

Analysis et synthesis prop. III.

recta enim AB in Γ puncto secundum rationem extremam ac mediam secetur, et maior pars sit $A\Gamma$ et $\Gamma\Delta = \frac{1}{2}A\Gamma$. dico, esse $B\Delta^2 = 5\Gamma\Delta^2$.

nam quoniam $B\Delta^2 = 5\Gamma\Delta^2$, et $\Delta B^2 = AB \times B\Gamma + \Delta\Gamma^2$ [II, 6], erit $AB \times B\Gamma + \Delta\Gamma^2 = 5\Delta\Gamma^2$. subtrahendo erit $AB \times B\Gamma = 4\Delta\Gamma^2$. uerum $A\Gamma^2 = AB$



$\times B\Gamma$; nam AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secta est. ergo $A\Gamma^2 = 4\Delta\Gamma^2$. et est; nam $A\Gamma = 2\Delta\Gamma$.

synthesis.

quoniam $A\Gamma = 2\Delta\Gamma$, erit $A\Gamma^2 = 4\Delta\Gamma^2$. uerum $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$. itaque $AB \times B\Gamma = 4\Delta\Gamma^2$. addendo erit $AB \times B\Gamma + \Delta\Gamma^2 = 5\Delta\Gamma^2 = \Delta B^2$ [II, 6]; quod erat demonstrandum.

Analysis et synthesis prop. IV.

recta enim AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secetur, et maior pars sit $A\Gamma$. dico, esse $AB^2 + B\Gamma^2 = 3A\Gamma^2$.

- | | | | |
|--|---|----------------------------------|-------------------------|
| $\Delta\Gamma$ V. | $\tau\eta\varsigma$ $\Delta\Gamma$ V, $\Gamma\Delta$ P. | 11. ἄρα τό BV. | 15. $\tau\eta\varsigma$ |
| 18. $\tau\tilde{\omega}$] corr. ex τό m. 1 b. | ἐστίν B. | 16. ἦ] om. Bq. | 17. $\Gamma\Delta$ P. |
| om. P. | 22. ἐστίν P. | ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. q, o) — b. | 20. ἀπό] (prius) |
| | 23. ἦ] (alt.) om. q. | 25. γάρ] om. bq. | |

λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ $ΑΓ$.

Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ $ΑΓ$, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ τὸ δις ὑπὸ τῶν
 5 AB , $BΓ$ ἐστὶ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΑΓ$, τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΑΓ$ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ $ΑΓ$. διελόντι τὸ ἄρα δις ὑπὸ AB , $BΓ$ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ $ΑΓ$. ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$. ἐστὶ δέ· ἢ γὰρ AB ἄκρον καὶ μέσον
 10 λόγον τέτμηται κατὰ τὸ $Γ$.

Ἡ σύνθεσις.

Ἐπεὶ ἢ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ $Γ$, καὶ ἐστὶ μείζον τμήμα ἢ $ΑΓ$, τὸ ἄρα ὑπὸ AB , $BΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ $ΑΓ$. τὸ ἄρα δις ὑπὸ AB , $BΓ$
 15 διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ $ΑΓ$. συνθέντι τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΑΓ$ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ $ΑΓ$. ἀλλὰ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ ἐστὶ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ $ΑΓ$.
 20 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ $\bar{\epsilon}$ θεωρήματος ἢ ἀνάλυσις καὶ ἢ σύνθεσις.

Εὐθεῖα γὰρ τις ἢ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τε-
 τμήσθω κατὰ τὸ $Γ$, καὶ ἔστω μείζον τμήμα ἢ $ΑΓ$,
 25 καὶ τῇ $ΑΓ$ ἴση κείσθω ἢ $ΑΔ$. λέγω, ὅτι ἢ $ΔB$ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ A , καὶ τὸ μείζον τμήμά ἐστὶν ἢ AB .

5. τοῦ] om. V. 6. ἐστὶν P. 7. τῶν AB V.
 διπλάσιον — 8. $BΓ$] om. q. 8. τό] om. b. ὑπό] ἀπό V,

nam quoniam $AB^2 + B\Gamma^2 = 3A\Gamma^2$, sed $AB^2 + B\Gamma^2 = 2AB \times B\Gamma + A\Gamma^2$ [II, 7], erit $2AB \times B\Gamma + A\Gamma^2 = 3A\Gamma^2$. subtrahendo erit $2AB \times B\Gamma = 2A\Gamma^2$.



quare $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$. et est; nam AB secundum rationem extremam ac mediam in Γ secta est.

synthesis.

quoniam AB secundum rationem extremam ac mediam in Γ secta est, et maior pars est $A\Gamma$, erit $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$. itaque $2AB \times B\Gamma = 2A\Gamma^2$. addendo erit $2AB \times B\Gamma + A\Gamma^2 = 3A\Gamma^2$. uerum $2AB \times B\Gamma + A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$ [II, 7]. ergo $AB^2 + B\Gamma^2 = 3A\Gamma^2$; quod erat demonstrandum.

Analysis et synthesis prop. V.

recta enim AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secetur, et maior pars sit $A\Gamma$, et ponatur $A\Delta = A\Gamma$. dico, ΔB in A secundum rationem extremam ac mediam sectam esse, et partem maiorem esse AB .

$\acute{\alpha}\nu\alpha\xi$ $\acute{\upsilon}\pi\acute{o}$ Bb. 9. $\tau\acute{\omega}$] supra scr. o m. 1 b. $\tau\eta\varsigma$] om. B.
 $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ B. 10. Γ $\acute{\omicron}\pi\epsilon\rho$ $\acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$ B. 11. $\acute{\eta}$] om. Bb.
 13. $\kappa\alpha\iota$ — $A\Gamma$] postea add. m. 1 P, mg. m. 1 V ($A\Gamma$ e corr.)
 14. $\acute{\iota}\sigma\omicron\nu$ — $B\Gamma$] mg. m. 2 B. $\tau\acute{\omega}$] $\tau\acute{o}$ q. $\acute{\alpha}\pi\acute{o}$] om. B.
 $\acute{\upsilon}\pi\acute{o}$ $\tau\acute{\omega}\nu$ B. 15. $\delta\iota\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota\omicron\nu$ — $A\Gamma$] etiam in mg. a m. 2 B ($\tau\eta\varsigma$ $A\Gamma$). 18. $\tau\eta\varsigma$] om. q. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. 19. $B\Gamma$ $\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\nu\alpha$ Bbq. 20. $\acute{\omicron}\pi\epsilon\rho$ $\acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] om. q, o) — b.
 21. $\acute{\eta}$] (alt.) om. V.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται
κατὰ τὸ A , καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ AB , ἔστιν
ἄρα ὡς ἡ ΔB πρὸς τὴν BA , οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν
 $A\Delta$. ἴση δὲ ἡ $A\Delta$ τῇ AG . ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔB πρὸς
5 τὴν BA , οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν AG . ἀναστρέψαντι
ἄρα ὡς ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν ΔA , οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν
 $B\Gamma$. διελόντι ἄρα ὡς ἡ BA πρὸς τὴν $A\Delta$, οὕτως ἡ
 AG πρὸς τὴν ΓB . ἴση δὲ ἡ $A\Delta$ τῇ AG . ἔστιν ἄρα
ὡς ἡ BA πρὸς τὴν AG οὕτως ἡ AG πρὸς τὴν ΓB .
10 ἔστι δέ· ἡ γὰρ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται
κατὰ τὸ Γ .


Ἡ σύνθεσις.

Ἐπεὶ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ
τὸ Γ , ἔστιν ἄρα ὡς ἡ BA πρὸς τὴν AG , οὕτως ἡ
15 AG πρὸς τὴν ΓB . ἴση δὲ ἡ AG τῇ $A\Delta$. ἔστιν ἄρα
ὡς ἡ BA πρὸς τὴν $A\Delta$, οὕτως ἡ AG πρὸς τὴν ΓB .
συνθέντι ὡς ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν ΔA , οὕτως ἡ AB πρὸς
τὴν $B\Gamma$. ἀναστρέψαντι ὡς ἡ ΔB πρὸς τὴν BA , οὕτως
ἡ BA πρὸς τὴν AG . ἴση δὲ ἡ AG τῇ $A\Delta$. ἔστιν ἄρα
20 ὡς ἡ ΔB πρὸς BA , οὕτως ἡ BA πρὸς $A\Delta$. ἡ ἄρα
 ΔB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ A , καὶ
τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ AB . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Ad libr. XIII prop. 17.

Ῥητὴ γὰρ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω
κατὰ τὸ Γ , καὶ ἔστω μείζον τὸ AG . προσκείσθω δὲ

9. Ad vocabulum κύβου p. 326, 19 signo  relatam in mg. inf. hab. P m. 1 (pro scholio).

1. ἐπεὶ — 2. AB] mg. V. 1. γὰρ] οὖν V. 2. κατὰ
τὸ A] om. V. 6. $B\Delta$] corr. ex BA m. 2B. 8. ἴση — 9.

nam quoniam ΔB in A secundum rationem extremam ac mediam secta est, et maior pars est AB , erit $\Delta B : BA = BA : A\Delta$. sed $A\Delta = A\Gamma$. itaque $\Delta B : BA = BA : A\Gamma$. itaque conuertendo erit $B\Delta$



: $\Delta A = AB : B\Gamma$ [V, 19 coroll.]. dirimendo igitur $BA : A\Delta = A\Gamma : \Gamma B$ [V, 17]. sed $A\Delta = A\Gamma$. itaque $BA : A\Gamma = A\Gamma : \Gamma B$. et est; nam AB secundum rationem extremam ac mediam in Γ secta est.

synthesis.

quoniam AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secta est, erit $BA : A\Gamma = A\Gamma : \Gamma B$. sed $A\Gamma = A\Delta$. itaque $BA : A\Delta = A\Gamma : \Gamma B$. componendo igitur $B\Delta : \Delta A = AB : B\Gamma$ [V, 18]. itaque conuertendo $\Delta B : BA = BA : A\Gamma$ [V, 19 coroll.]. sed $A\Gamma = A\Delta$. erit igitur $\Delta B : BA = BA : A\Delta$. ergo ΔB in A secundum rationem extremam ac mediam secta est, et maior pars est AB ; quod erat demonstrandum.

9.

Ad libr. XIII prop. 17.¹⁾

recta enim rationalis AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secetur, et maior sit $A\Gamma$. ad-

1) Hoc scholio idem demonstratur, quod in prop. VI, quam omittunt codices nonnulli; inter eos tamen P non est.

ΓB] mg. m. 2 B. 12. ἦ] om. Bq. 17. τήν] om. q.
19. τῆ AΔ] in ras. m. 1 P. 20. πρὸς τὴν BA V. τὴν AΔ
Vb. 21. κατὰ τὸ A] postea add. m. 1 P. 22. ὅπερ εἶδει
δειξαί] om. q, o) — b. δεῖξαι] :~ V.

ἡ AD ἡμίσεια τῆς AB . φητὴ ἄρα καὶ ἡ AD . καὶ ἐπεὶ
 πενταπλάσιον τὸ ἀπὸ $ΓΔ$ τοῦ ἀπὸ $ΔA$, αἱ $ΓΔ$, $ΔA$
 ἄρα φηταί εἰσιν δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ
 ἄρα ἡ AG . φητὴ δὲ ἡ AB . τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς
 5 παρὰ φητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν·
 ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $BΓ$. ἐκάτερον ἄρα τῶν AG ,
 $ΓB$ ἀποτομὴ ἐστὶν ὁ· προσαρμόζουσα δὲ τῆς μὲν AG
 ἡ AD , τῆς δὲ $ΓB$ ἡ $ΓΔ$.

10.

Ad libr. XIII prop. 18.

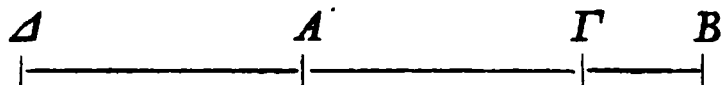
"Ἄλλως ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ MB τῆς NB .

10 Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστὶν ἡ AD τῆς $ΔB$, τριπλῆ ἄρα
 ἡ AB τῆς $BΔ$. ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν $BΔ$, οὕτως
 τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ διὰ τὸ ἰσογώ-
 νιον εἶναι τὸ ZAB τρίγωνον τῷ $ZΔB$ τριγώνῳ. τρι-
 πλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς BZ . ἐδείχθη
 15 δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς KA πενταπλάσιον.
 πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς KA τρισὶ τοῖς ἀπὸ τῆς ZB ἴσα
 ἐστίν. ἀλλὰ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ZB ἕξ τῶν ἀπὸ τῆς
 NB μείζονά ἐστιν. καὶ πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς KA
 ἕξ τῶν ἀπὸ τῆς NB μείζονά ἐστιν. ὥστε καὶ ἐν τὸ
 20 ἀπὸ τῆς KA ἐνὸς τοῦ ἀπὸ τῆς NB μείζον ἐστίν.
 μείζων ἄρα ἡ KA τῆς NB . ἴση δὲ ἡ KA τῇ AM .
 μείζων ἄρα ἡ AM τῆς NB . πολλῶ ἄρα ἡ MB τῆς
 BN μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ὅτι δὲ τρία τὰ
 ἀπὸ τῆς ZB ἕξ τῶν ἀπὸ τῆς BN μείζονά ἐστιν, δει-

10. Post δεῖξαι p. 336, 14 hab. PBVq.

7. ὁ] h. e. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. 9. Post NB add. V: ἄλ-
 λως δεικτέον, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ τῆς

iiciatur autem $A\Delta = \frac{1}{2} AB$. itaque etiam $A\Delta$ rationalis est. et quoniam est $\Gamma\Delta^2 = 5\Delta A^2$ [XIII, 1], rectae $\Gamma\Delta$, ΔA rationales sunt potentia solum commensurabiles. itaque $A\Gamma$ apotome est. sed AB ra-



tionalis est. quadratum autem apotomes ad rationalem adplicatum latitudinem efficit apotomen [X, 97]. itaque $B\Gamma$ apotome est; ergo utraque $A\Gamma$, ΓB apotome est; quod erat demonstrandum. congruens autem est $A\Gamma$ rectae $A\Delta$, et $\Gamma\Delta$ rectae ΓB .

10.

Ad libr. XIII prop. 18.

Aliter demonstratur, esse $MB > NB$.

Quoniam enim $A\Delta = 2\Delta B$, erit $AB = 3B\Delta$. sed $AB : B\Delta = AB^2 : BZ^2$, quia $ZAB \sim Z\Delta B$. itaque $AB^2 = 3BZ^2$. demonstrauius autem, esse $AB^2 = 5KA^2$. itaque $5KA^2 = 3ZB^2$. uerum $3ZB^2 > 6NB^2$. itaque etiam $5KA^2 > 6NB^2$. quare etiam $KA^2 > NB^2$. itaque $KA > NB$. uerum $KA = AM$. itaque $AM > NB$. ergo multo magis $MB > BN$; quod erat demonstrandum. — esse autem $3ZB^2 > 6BN^2$, ita demonstrabimus. quoniam enim $BN > NZ$, erit

τοῦ δωδεκαέδρου. 11. $B\Delta] \Delta B BV$. $B\Delta] \Delta B V$.
 13. εἶναι] om. V. 14. $BZ] ZB V$. 18. ἐστὶ q. 20. ἐστὶ
 BV q. 23. $BN] NB B, \dot{N}BN V$. μείζων ἐστίν] om. BV.
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. q. 24. τῆς] (prius) τῶν V q.
 ἐστὶ BV q.

ξομεν οὕτως· ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ BN τῆς NZ ,
 τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ZBN μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ BZN .
 τὸ ἄρα ὑπὸ ZBN μετὰ τοῦ ὑπὸ BZN μείζον ἐστὶν
 ἢ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ BZN . ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ZBN
 5 μετὰ τοῦ ὑπὸ BZN τὸ ἀπὸ τῆς ZB ἐστὶν, τὸ δὲ ὑπὸ
 BZN τὸ ἀπὸ τῆς NB ἐστὶν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ZB
 τοῦ ἀπὸ τῆς BN μείζον ἐστὶν ἢ διπλάσιον. ἔν ἄρα
 τὸ ἀπὸ τῆς ZB δύο τῶν ἀπὸ BN μείζον ἐστὶν. ὥστε
 καὶ τρία τὰ ἀπὸ τῆς ZB ἔξ τῶν ἀπὸ BN μείζονά
 10 ἐστὶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. ἐστίν] om. q. BN] NB q, $\ddot{B}NB$ V. 2. τοῦ ὑπό]
 τοῦ ὑπὸ τῆς V, τοῦ ὑπὸ τῶν q, τοῦ ἀπὸ τῆς B. 3. τό] corr.
 ex τὰ m. 2 V, mut. in τὰ B. τῶν ZBN q. Post τοῦ
 del. α P. 4. BZN] corr. ex ZBN m. 2 B. 5. ZB] BZ

$ZB \times BN > BZ \times ZN$. itaque $ZB \times BN + BZ \times ZN > 2BZ \times ZN$. uerum $ZB \times BN + BZ \times ZN = ZB^2$ [II, 2], et $BZ \times ZN = NB^2$. itaque $ZB^2 > 2BN^2$. ergo etiam $3ZB^2 > 6BN^2$; quod erat demonstrandum.

B. ἐστι q, comp. V. ὑπὸ τῶν V. 6. BZN] e corr. V.
 τό] τό, supra scr. ἴσον m. 2 B, ἴσον τῶ P. NB] ḂNB
 V. ἐστίν] om. P. Dein add. ἄκρον γὰρ (supra V) καὶ
 μέσον λόγον τέτυκται ἢ BZ κατὰ τὸ N, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων
 ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς μέσης V, et mg. m. 2 B. 7. ἐν] corr.
 ex ἐάν m. 1 q. 8. τῶν] τῆς P. ἀπὸ τῶν V. 10. ἐστίν]
 om. q. ὅπερ εἶδει δεῖξαι] om. V.

APPENDIX II.





XI.

λς'.

36

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσι, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν στερεὸν ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ A, B, Γ , ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ . λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν A, B, Γ περιεχόμενον στερεὸν ἴσον ἔστί τῷ ἀπὸ τῆς B στερεῷ ἰσοπλεύρῳ τε καὶ ἰσογωνίῳ. κείσθω τῇ A ἴση ἡ AE , καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ EA εὐθείᾳ καὶ τῷ σημείῳ τῷ Δ τυχούσῃ στερεᾷ γωνία εὐθύγραμμῳ ἴση στερεὰ γωνία εὐθύγραμμος ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν $Z\Delta, \Delta H, H\Delta, \Delta E, Z\Delta, \Delta\Theta$, καὶ κείσθω τῇ μὲν B ἴση ἡ $H\Delta$, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ $\Theta\Delta$, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΔK στερεόν, καὶ κείσθω τῇ B ἴση ἡ AM , καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ MA εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Λ τῇ στερεᾷ γωνία εὐθύγραμμῳ τῇ περιεχομένη ὑπὸ τῶν $\Theta\Delta, \Delta E, E\Delta, \Delta H, H\Delta, \Delta\Theta$ ἴση στερεὰ γωνία εὐθύγραμμος ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν $MA, \Lambda N, N\Lambda, \Lambda\Xi, \Xi\Lambda, \Lambda M$, ὥστε

Hic appendix scripturam cod. b inde a XI, 36 ad finem libri XII continet nulla littera mutata. quamquam sine dubio plurimi insunt meri errores scribendi, tamen dubitari nequit, quin cod. b quasi recensioem quandam propriam praebeat. cfr. Zeitschr. f. Math. u. Phys., hist.-litt. Abth. XXIX p. 1—22.

ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ τῶν $\Theta\Delta$, ΔE τῇ ὑπὸ τῶν $N\Delta$, ΔM , τὴν δὲ ὑπὸ τῶν $\Theta\Delta$, ΔH τῇ ὑπὸ τῶν $N\Delta$, $\Delta \Xi$, τὴν δὲ ὑπὸ τῶν $H\Delta$, ΔE τῇ ὑπὸ τῶν $\Xi\Delta$, ΔM , καὶ κείσθω τῇ B ἴση ἑκατέρα τῶν $\Xi\Delta$, ΔO , καὶ συμπεπληρώσθω τὸ $\Delta\Pi$ στερεόν. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ , ἴση δὲ ἡ μὲν A τῇ ΔE , ἡ δὲ B ἑκατέρα τῶν $\Xi\Delta$, ΔO , ἡ δὲ Γ τῇ $\Delta\Theta$, ὡς ἄρα ἡ ΔE πρὸς $M\Delta$, οὕτως ἡ $O\Delta$ πρὸς τὴν $\Delta\Theta$. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν $\Theta\Delta$, ΔE , $O\Delta$, ΔM αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνυθασιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Delta\Theta$, ΘP παραλληλόγραμμον τῷ $O\Delta M\Sigma$. καὶ ἐπεὶ ἴσαι γωνίαι ἐπίπεδοί εἰσιν αἱ ὑπὸ τῶν $\Theta\Delta$, ΔE , $O\Delta$, ΔM , ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι γραμμαὶ ἐφραστᾶσιν αἱ $H\Delta$, $\Xi\Delta$, ἴσας γωνίας περιέχουσι τὴν μὲν ὑπὸ τῶν $\Theta\Delta$, ΔH τῇ ὑπὸ τῶν $O\Delta$, $\Delta \Xi$, τὴν δὲ ὑπὸ τῶν $H\Delta$, ΔE τῇ ὑπὸ τῶν $\Xi\Delta$, ΔM , καὶ ἀφηρημέναι εἰσὶν ἴσαι εὐθεῖαι αἱ $H\Delta$, $\Xi\Delta$, αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν H , Ξ ἐπὶ τὰ διὰ τῶν $\Theta\Delta$, ΔE , $O\Delta$, ΔM ἐπίπεδα κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ἔσονται. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, ὧν τὰ ὕψη ἴσα ἐστί, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔK τῷ $\Delta\Pi$. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΔK τὸ ὑπὸ τῶν A , B , Γ , τὸ δὲ $\Delta\Pi$ τὸ ἀπὸ τῆς B . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A , B , Γ περιεχόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐὰν ὧσιν ὁσαιοηποτοῦν εὐθεῖαι ἀνάλογον, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ὁμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀνάλογον ἔσται. καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν

ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀνάλογον ἤ, καὶ αὐταὶ ἀνάλογον ἔσονται.

ἔστωσαν ὁσαίδηποτοῦν εὐθεῖαι ἀνάλογον ἢ AB , $ΓΔ$, EZ , $HΘ$, ὡς ἢ AB πρὸς $ΓΔ$, οὕτως ἢ EZ πρὸς $HΘ$, καὶ ἀναγεγράφθω ἀφ' ἐκάστης τῶν AB , $ΓΔ$, EZ , $HΘ$ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ AK , $ΓΛ$, EM , HN . λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ AK στερεὸν πρὸς τὸ $ΓΛ$ στερεόν, οὕτως τὸ EM στερεὸν πρὸς τὸ HN στερεόν. πεποιήσθω γὰρ ὡς ἢ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$, οὕτως ἢ τε $ΓΔ$ πρὸς τὴν $Ξ$ καὶ ἢ $Ξ$ πρὸς τὴν O . ὡς ἄρα ἢ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, τουτέστιν ἢ AB πρὸς τὴν O , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης, τουτέστι τὸ AK , πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τουτέστι τὸ $ΓΛ$. ὡς δὲ ἢ EZ πρὸς τὴν $HΘ$, οὕτως ἢ τε $HΘ$ πρὸς τὴν $Π$ καὶ ἢ $Π$ πρὸς τὴν P . ἔστιν ἄρα ὡς ἢ EZ πρὸς τὴν P , οὕτως τὸ EM πρὸς τὴν HN . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$, οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν $HΘ$, ἀλλ' ὡς μὲν ἢ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$, οὕτως ἢ τε $ΓΔ$ πρὸς τὴν $Ξ$ καὶ ἢ $Ξ$ πρὸς τὴν O , ὡς δὲ ἢ EZ πρὸς τὴν $HΘ$, οὕτως ἢ τε $HΘ$ πρὸς τὴν $Π$ καὶ ἢ $Π$ πρὸς τὴν P , δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἢ AB πρὸς τὴν O , οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν P . ἀλλ' ὡς μὲν ἢ AB πρὸς τὴν O , οὕτως τὸ AK στερεὸν πρὸς τὸ $ΓΛ$ στερεόν, ὡς δὲ ἢ EZ πρὸς τὴν P , οὕτως τὸ EM στερεὸν πρὸς τὸ HN στερεόν. ὡς ἄρα τὸ AK στερεὸν πρὸς τὸ $ΓΛ$ στερεόν, οὕτως τὸ EM στερεὸν πρὸς τὸ HN στερεόν.

ἔστω δὴ πάλιν ὡς τὸ AK στερεὸν πρὸς τὸ $ΓΛ$ στερεόν, οὕτως τὸ EM στερεὸν πρὸς τὸ HN στερεόν. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἢ AB πρὸς τὴν $ΓΔ$, οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν $HΘ$. πεποιήσθω γὰρ ὡς ἢ AB πρὸς

τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν ΣT , καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΣT τῷ HN ὁμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παρακλληλεπίπεδον τὸ ΣT . ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν ΣT , καὶ ὡς ἄρα τὸ AK στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Delta$ στερεόν, οὕτως τὸ EM στερεὸν πρὸς τὸ ΣT στερεόν. τὸ EM ἄρα πρὸς ἐκάτερον τῶν HN , ΣT τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ HN τῷ ΣT , καὶ ὁμόλογός ἐστὶν ἢ $H\Theta$ τῇ ΣT . ἴση ἄρα ἐστὶν ἢ $H\Theta$ τῇ ΣT . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν ΣT , ἴση δὲ ἢ ΣT τῇ $H\Theta$, ὡς ἄρα ἢ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

38

λη'.

Ἐὰν κύβου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῆ, ἢ τῶν ἐπιπέδων κοινὴ τομὴ δίχα τεμεῖ τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον, καὶ αὕτη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου.

κύβου γὰρ τοῦ AB τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν $\Gamma\Delta$, AE , BZ , $H\Theta$ αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν αἱ $\Gamma\Delta$, ΔA , AE , $E\Gamma$, BZ , ZH , $H\Theta$, ΘB κατὰ τὰ K , Λ , M , N , Ξ , O , Π , P , διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω τὰ KM , $\Pi\Xi$, $N\Lambda$, OP , καὶ ἔστω τῶν ἐπιπέδων κοινὴ τομὴ ἢ ΣT , διάμετρος δὲ τοῦ κύβου ἔστω ἢ BA . λέγω, ὅτι ἢ ΣT δίχα τέμνει τὴν τοῦ κύβου διάμετρον, καὶ αὕτη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῶν¹⁾ τοῦ κύβου διαμέτρων¹⁾.

ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ $\Gamma\Sigma$, ΣA , BT , TH . ἐπεὶ

1) corr. in τῆς — διαμέτρου m. 1.

ἴση ἐστὶν ἡ $ΓΕ$ τῇ $ΔΑ$, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν $ΓΕ$ ἡμίσεια ἡ $ΓΝ$, τῆς δὲ $ΔΑ$ ἡμίσεια ἡ $ΛΑ$, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓΝ$ τῇ $ΛΑ$. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ $ΣΝ$ τῇ $ΣΑ$ ἴση. δύο δὴ αἱ $ΓΝ$, $ΝΣ$ δυσὶ ταῖς $ΛΑ$, $ΛΣ$ ἴσαι εἰσὶ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΓΝΣ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΣΛΑ$ ἴση· βάσις ἄρα ἡ $ΓΣ$ βάσει τῇ $ΣΑ$ ἴση, καὶ τὸ $ΓΝΣ$ τρίγωνον τῷ $ΑΛΣ$ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν $ΓΣ$, $ΣΝ$ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν $ΛΣ$, $ΣΑ$. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ τῶν $ΝΣ$, $ΣΑ$. αἱ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΓΣ$, $ΣΝ$, $ΝΣ$, $ΣΑ$ ταῖς ὑπὸ τῶν $ΛΣ$, $ΣΑ$, $ΑΣ$, $ΣΝ$ ἴσαι εἰσὶν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ τῶν $ΛΣ$, $ΣΑ$, $ΑΣ$, $ΣΝ$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ· πρὸς δὴ τινὶ εὐθείᾳ τῇ $ΝΣ$ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ $Σ$ δύο εὐθεῖαι αἱ $ΣΓ$, $ΣΑ$ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσι τὰς ὑπὸ τῶν $ΓΣΝ$, $ΝΣΑ$. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓΣ$ τῇ $ΣΑ$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $ΒΤ$ τῇ $ΤΗ$ ἐπ' εὐθείας ἐστὶ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν $ΓΒ$, $ΑΗ$ τῇ $ΕΘ$, ἀλλὰ καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι παράλληλοι εἰσὶν, αἱ $ΓΒ$, $ΑΗ$ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι. καὶ ἐπεξευγμέναι εἰσὶν αἱ $ΓΑ$, $ΒΗ$, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν $ΓΑ$ ἡμίσεια ἡ $ΣΑ$, τῆς δὲ $ΒΗ$ ἡμίσεια ἡ $ΒΤ$. αἱ $ΣΑ$, $ΒΤ$ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι· καὶ ἐπεξευγμέναι εἰσὶν αἱ $ΣΤ$, $ΑΒ$. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν $ΣΤ$ τῇ $ΤΤ$, ἡ δὲ $ΑΤ$ τῇ $ΤΒ$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ'.

39

Ἐὰν ἦ δύο πρίσματα ἰσουψηῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχει βάσιν τρίγωνον, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον, διπλάσιον δὲ ἦ

τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα.

Ἔστω δύο πρίσματα ἰσουψῆ, τὰ $ABΓΔEZ$, $HΘKΛMN$, καὶ τὸ μὲν ἐχέτω τρίγωνον βάσιν τὸ $KΛN$, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον τὸ $BΓΔE$, καὶ ἔστω τὸ $BΓΔE$ τοῦ $NKΛ$ τριγώνου διπλάσιον. λέγω, ὅτι ἴσα ἔστί τὰ πρίσματα. πεπληρώσθω γὰρ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα τὰ $AΔ$, $HΛ$. ἐπεὶ οὖν τὸ $BΔ$ παραλληλόγραμμον τοῦ $NKΛ$ τριγώνου ἔστι διπλάσιον, ἔστι δὲ τοῦ $NKΛ$ τριγώνου διπλάσιον τὸ $NΛ$ παραλληλόγραμμον, ἴσον ἄρα ἔστι τὸ $BΔ$ τῷ $NΛ$. ἐπὶ ἴσων οὖν βάσεων τῶν $BΔ$, $NΛ$ ἰσουψῆ ἔστι στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ $AΔ$, $HΛ$. ἴσα ἔστιν ἀλλήλοις. ἀλλὰ τοῦ μὲν $AΔ$ ἡμισὺ ἔστι τὸ $ABΓΔEZ$ πρίσμα, τοῦ δὲ $HΛ$ ἡμισὺ τὸ $HΘKΛM$ πρίσμα. καὶ τὸ $ABΓΔEZ$ ἄρα πρίσμα τῷ $HΘKΛMN$ πρίσματι ἴσον ἔστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Εὐκλείδου στοιχείων στερεῶν ια.

XII

Εὐκλείδου στοιχείων ιβ.

1 Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἀλληλά ἔστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

ἔστωσαν κύκλοι οἱ $ABΓΔ$, $HΘKΛ$, καὶ ἐν τοῖς $ABΓΔ$, $HΘKΛ$ ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ $ABΓΔE$, $HΘKΛM$, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ BZ , $ΘN$. λέγω, ὅτι ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς BZ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΘN$ τετράγωνον, οὕτως τὸ $ABΓΔE$ πολύγωνον πρὸς τὸ $HΘKΛM$ πολύγωνον. ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ BE , AZ , $ΘM$, HN . καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἢ BA πρὸς AE , οὕτως ἢ $ΘH$ πρὸς τὴν HM , καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν BAE , $ΘHM$ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἔστι τὸ ABE τρίγωνον

τῷ $H\Theta M$ τριγώνῳ ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν AEB
 γωνία τῇ ὑπὸ τῶν $H\Theta M$. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ AEB τῇ
 ὑπὸ AZB ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ $HM\Theta$ τῇ ὑπὸ $HN\Theta$
 ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ ὀρθὴ ὑπὸ τῶν BAZ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ
 ΘHN ἴση. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AZB λοιπῇ τῇ ὑπὸ
 $H\Theta N$ ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABZ τρίγω-
 νον τῷ $H\Theta N$ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ
 BZ πρὸς τὴν BA , οὕτως ἡ ΘN πρὸς ΘH . ἐναλλάξ
 ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ BZ πρὸς τὴν ΘN , οὕτως ἡ BA πρὸς
 τὴν ΘH . καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς BZ τετράγωνον πρὸς
 τὸ ἀπὸ τῆς ΘN τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει
 ἥπερ ἡ ZB πρὸς τὴν ΘN , ἔχει δὲ καὶ τὸ $AB\Gamma\Delta E$
 πολύγωνον πρὸς τὸ $H\Theta K\Lambda M$ πολύγωνον διπλασίονα
 λόγον ἥπερ ἡ AB πρὸς τὴν $H\Theta$, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ BZ
 πρὸς τὴν ΘN , οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν $H\Theta$, καὶ ὡς
 ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BZ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘN
 τετράγωνον, οὕτως τὸ $AB\Gamma\Delta E$ πολύγωνον πρὸς τὸ
 $H\Theta K\Lambda M$ πολύγωνον. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν 2
 διαμέτρων τετράγωνα.

ἔστωσαν κύκλοι οἱ $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$, διάμετροι δὲ
 αὐτῶν αἱ $B\Delta$, $Z\Theta$. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς
 $B\Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ $Z\Theta$ τετράγωνον, οὕτως
 ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον. εἰ γὰρ
 μή ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ
 τῆς $Z\Theta$ τετράγωνον, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς
 τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, ἦτοι πρὸς ἕλασσόν τι τοῦ $EZH\Theta$
 κύκλου χωρίου ἢ πρὸς τὸ μείζον. ἔστω πρότερον πρὸς
 ἕλασσον τὸ Φ , καὶ τῷ $EZH\Theta$ κύκλῳ ἴσα ἔστω τὰ
 ΦX , καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον τετρά-

γωνον τὸ $EZH\Theta$. τὸ $EZH\Theta$ ἄρα τετράγωνον μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου. τετμήσθωσαν αἱ EZ , ZH , $H\Theta$, ΘE περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ K , L , M , N σημεῖα, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ EK , KZ , ZL , LH , HM , $M\Theta$, ΘN , NE . ἕκαστον ἄρα τῶν EK , KZ , ZL , LH , HM , $M\Theta$, ΘN , NE τριγώνων μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. ἕκαστον ἄρα τῶν EKZ , ZLH , $HM\Theta$, ΘNE τῶν τριγώνων μείζον ἐστὶν ἢ τοὶ ἥμισυ τοῦ καθ' αὐτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. τοιαύτης δὴ γινομένης τῆς διαιρέσεως ληφθήσεται τοιαῦτα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ X χωρίου. λελήφθω καὶ ἔστω τὰ EK , KZ , ZL , LH , HM , $M\Theta$, ΘN , NE . δύο οὖν μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων τοῦ τε $EZ\Theta$ κύκλου καὶ τοῦ X χωρίου ἀφήρηται ἀπὸ τοῦ μείζονος μείζον ἢ τὸ ἥμισυ μέρος καὶ τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ τὸ ἥμισυ μέρος, καὶ τοῦτο αἰ γεγένηται, καὶ καταλέλειπται χωρίον, ὃ ἔλασσον ἔσται τοῦ X . λοιπὸν ἄρα τὸ $EKZLHM\Theta N$ πολύγωνον μείζον ἐστὶ τοῦ Φ χωρίου. ἐγγεγράψθω δὴ εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον τῷ $EKZLHM\Theta N$ πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ $A\Xi B O \Gamma \Pi \Delta P$. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸ Φ χωρίον, ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$, οὕτως τὸ $A\Xi B O \Gamma \Pi \Delta P$ πολύγωνον πρὸς τὸ $EKZLHM\Theta N$, ὡς ἄρα ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸ Φ χωρίον, οὕτως τὸ $A\Xi B O \Gamma \Pi \Delta P$ πολύγωνον πρὸς τὸ $EKZLHM\Theta N$ πολύγωνον. ἐναλλάξ ἄρα ἐστίν, ὡς ὁ $AB\Gamma\Delta$ πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτως τὸ X χωρίον πρὸς τὸ $EKZLHM\Theta N$ πολύγωνον. μείζων δὲ ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος

τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου· μείζον ἄρα καὶ τὸ Φ χωρίου τοῦ $EKZ\Lambda HM\Theta N$ πολυγώνου. ἀλλὰ μὴν καὶ ἔλασσον τὸ Φ · ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ τετράγωνον, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου χωρίου.

λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μείζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς τὸ Φ . ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔB τετράγωνον, οὕτως τὸ Φ χωρίου πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον. ὡς δὲ τὸ Φ χωρίου πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, οὕτως ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ $AB\Gamma\Delta$ κύκλου χωρίου· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔB τετράγωνον, οὕτως ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ $AB\Gamma\Delta$ κύκλου χωρίου· ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ τετράγωνον, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς μείζον τι τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου χωρίου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον. ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ τετράγωνον, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον.

Πᾶσα πυραμὶς τριγώνου ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα τῆς ὅλης πυραμίδος μείζονά ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ.

ἔστω πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἔστω τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον. λέγω, ὅτι ἡ $AB\Gamma\Delta$ πυραμὶς διαιρεῖται εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα.

τετμήσθωσαν αἱ πλευραὶ τῆς πυραμίδος δίχα κατὰ τὰ $E, Z, H, \Theta, K, \Lambda$ σημεῖα, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $EZ, ZH, EH, H\Lambda, Z\Theta, \Theta K, K\Lambda, \Lambda\Theta$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AZ τῇ $Z\Delta$, ἡ δὲ $B\Theta$ τῇ $\Theta\Delta$, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ $Z\Theta$. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AE τῇ EB , ἡ δὲ AZ τῇ $Z\Delta$, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $B\Delta$ τῇ EZ . παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $EBZ\Theta$. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν EB τῇ $Z\Theta$, ἡ δὲ EZ τῇ $B\Theta$. ἀλλ' ἡ μὲν BE τῇ EA ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ $B\Theta$ τῇ $\Theta\Lambda$. καὶ ἡ μὲν AE ἄρα τῇ $Z\Theta$ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ EZ τῇ $\Theta\Delta$. ἔστι δὲ καὶ ἡ AZ τῇ $Z\Delta$ ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ AEZ τρίγωνον τῷ $Z\Theta\Delta$ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $AZ\Theta$ τρίγωνον τῷ $Z\Delta K$ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὁμοίον ἐστὶν. τὸ δὲ AEH τρίγωνον τῷ $Z\Theta K$ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὁμοίον ἐστὶν. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων αἱ EZ, ZH παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένης ἀλλήλων τὰς $\Theta\Delta, \Delta K$ κείνται μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι, ἴσας γωνίας περιέξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ EZH γωνία τῇ ὑπὸ $\Theta\Delta K$ γωνίᾳ. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ EZ, ZH δυσὶ ταῖς $\Theta\Delta, \Delta K$ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρωθεν ἑκατέρωθεν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ EZH γωνία τῇ ὑπὸ $\Theta\Delta K$ ἴση ἐστὶν, βάσις ἄρα ἡ EH βάσει τῇ ΘK ἐστὶν ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ EZH τρίγωνον τῷ $\Theta\Delta K$ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς μὲν ἐστὶ τὸ AEH τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Z σημεῖον, ἴση τε καὶ ὁμοία ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Δ σημεῖον. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ AEH τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Z σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Δ σημεῖον. διή-

ρηται ἄρα ἡ $ΑΒΓΔ$ πυραμὶς εἰς δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ.

λέγω δὴ, ὅτι καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΔ$ τῇ $ΔΓ$, διπλάσιόν ἐστι τὸ $ΕΗΔΒ$ παραλληλόγραμμον τοῦ $ΗΔΓ$ τριγώνου. καὶ ἐπεὶ δέδεικται, ὅτι, ἐὰν δύο πρίσματα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ τὸ μὲν ἔχει βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, ἢ δὲ διπλάσιον τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα, τὸ ἄρα πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν $ΘΒΔ$, $ΕΖΗ$, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τοῦ $ΕΒΖΘ$ καὶ τοῦ $ΕΒΔΗ$ καὶ ἔτι τοῦ $ΖΘΔΗ$ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν $ΗΓΔ$, $ΖΘΚ$, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν $ΚΖΗΓ$, $ΔΓΘΚ$, $ΖΗΔΘ$. διήρηται ἄρα ἡ $ΑΒΓΔ$ πυραμὶς εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ φανερόν, ὅτι τὰ δύο πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἢ τὸ ἡμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος :—

Ἐὰν ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὔσαι ⁴ καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, διαιρεθῆ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, ἔσται ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βᾶσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βᾶσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρῃ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὔσαι καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς $ΑΒΓ$, $ΜΝΞ$, κορυφᾶς δὲ τὰ $Δ$, $Ο$ σημεία, καὶ διηρήσθω ἑκατέρα αὐτῶν εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας

APPENDIX II.





XI.

λς'.

36

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσι, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν στερεὸν ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ. ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ A, B, Γ , ὡς ἢ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἢ B πρὸς τὴν Γ . λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν A, B, Γ περιεχόμενον στερεὸν ἴσον ἔστί τῷ ἀπὸ τῆς B στερεῷ ἰσοπλεύρῳ τε καὶ ἰσογωνίῳ. κείσθω τῇ A ἴση ἢ AE , καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ED εὐθείᾳ καὶ τῷ σημείῳ τῷ Δ τυχούσῃ στερεᾷ γωνία εὐθύγραμμῳ ἴση στερεὰ γωνία εὐθύγραμμος ἢ περιεχομένη ὑπὸ τῶν $Z\Delta, \Delta H, H\Delta, \Delta E, Z\Delta, \Delta\Theta$, καὶ κείσθω τῇ μὲν B ἴση ἢ $H\Delta$, τῇ δὲ Γ ἴση ἢ $\Theta\Delta$, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΔK στερεόν, καὶ κείσθω τῇ B ἴση ἢ AM , καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ MA εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Λ τῇ στερεᾷ γωνία εὐθύγραμμῳ τῇ περιεχομένη ὑπὸ τῶν $\Theta\Delta, \Delta E, E\Delta, \Delta H, H\Delta, \Delta\Theta$ ἴση στερεὰ γωνία εὐθύγραμμος ἢ περιεχομένη ὑπὸ τῶν $MA, \Lambda N, N\Lambda, \Lambda\Xi, \Xi\Lambda, \Lambda M$, ὥστε

Hic appendix scripturam cod. b inde a XI, 36 ad finem libri XII continet nulla littera mutata. quamquam sine dubio plurimi insunt meri errores scribendi, tamen dubitari nequit, quin cod. b quasi recensioem quandam propriam praebeat. cfr. Zeitschr. f. Math. u. Phys., hist.-litt. Abth. XXIX p. 1—22.

ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ τῶν $\Theta\Delta$, ΔE τῆ ὑπὸ τῶν $N\Lambda$, ΛM , τὴν δὲ ὑπὸ τῶν $\Theta\Delta$, ΔH τῆ ὑπὸ τῶν $N\Lambda$, $\Lambda \Xi$, τὴν δὲ ὑπὸ τῶν $H\Delta$, ΔE τῆ ὑπὸ τῶν $\Xi\Lambda$, ΛM , καὶ κείσθω τῆ B ἴση ἑκατέρα τῶν $\Xi\Lambda$, ΛO , καὶ συμπεπληρώσθω τὸ $\Lambda\Pi$ στερεόν. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ , ἴση δὲ ἡ μὲν A τῆ ΔE , ἡ δὲ B ἑκατέρα τῶν $\Xi\Lambda$, ΛO , ἡ δὲ Γ τῆ $\Delta\Theta$, ὡς ἄρα ἡ ΔE πρὸς $M\Lambda$, οὕτως ἡ $O\Lambda$ πρὸς τὴν $\Delta\Theta$. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν $\Theta\Delta$, ΔE , $O\Lambda$, ΛM αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Delta\Theta$, ΘP παραλληλόγραμμον τῷ $O\Lambda M\Sigma$. καὶ ἐπεὶ ἴσαι γωνίαι ἐπίπεδοί εἰσιν αἱ ὑπὸ τῶν $\Theta\Delta$, ΔE , $O\Lambda$, ΛM , ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι γραμμαὶ ἐφραστᾶσιν αἱ $H\Delta$, $\Xi\Lambda$, ἴσας γωνίας περιέχουσι τὴν μὲν ὑπὸ τῶν $\Theta\Delta$, ΔH τῆ ὑπὸ τῶν $O\Lambda$, $\Lambda \Xi$, τὴν δὲ ὑπὸ τῶν $H\Delta$, ΔE τῆ ὑπὸ τῶν $\Xi\Lambda$, ΛM , καὶ ἀφηρημέναι εἰσὶν ἴσαι εὐθεῖαι αἱ $H\Delta$, $\Xi\Lambda$, αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν H , Ξ ἐπὶ τὰ διὰ τῶν $\Theta\Delta$, ΔE , $O\Lambda$, ΛM ἐπίπεδα κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ἔσονται. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, ὧν τὰ ὕψη ἴσα ἐστί, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔK τῷ $\Lambda\Pi$. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΔK τὸ ὑπὸ τῶν A , B , Γ , τὸ δὲ $\Lambda\Pi$ τὸ ἀπὸ τῆς B . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A , B , Γ περιεχόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐὰν ὧσιν ὅσαιοδηποτοῦν εὐθεῖαι ἀνάλογον, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀνάλογον ἔσται. καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν

ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀνάλογον ἤ, καὶ αὐταὶ ἀνάλογον ἔσονται.

ἔστωσαν ὁσαῖδηποτοῦν εὐθεῖαι ἀνάλογον ἢ AB , $\Gamma\Delta$, EZ , $H\Theta$, ὡς ἢ AB πρὸς $\Gamma\Delta$, οὕτως ἢ EZ πρὸς $H\Theta$, καὶ ἀναγεγράφθω ἀφ' ἐκάστης τῶν AB , $\Gamma\Delta$, EZ , $H\Theta$ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ AK , $\Gamma\Lambda$, EM , HN . λέγω, ὅτι ἔστιν ὡς τὸ AK στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Lambda$ στερεόν, οὕτως τὸ EM στερεὸν πρὸς τὸ HN στερεόν. πεποιήσθω γὰρ ὡς ἢ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἢ τε $\Gamma\Delta$ πρὸς τὴν Ξ καὶ ἢ Ξ πρὸς τὴν O . ὡς ἄρα ἢ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, τουτέστιν ἢ AB πρὸς τὴν O , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης, τουτέστι τὸ AK , πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τουτέστι τὸ $\Gamma\Lambda$. ὡς δὲ ἢ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$, οὕτως ἢ τε $H\Theta$ πρὸς τὴν Π καὶ ἢ Π πρὸς τὴν P . ἔστιν ἄρα ὡς ἢ EZ πρὸς τὴν P , οὕτως τὸ EM πρὸς τὴν HN . καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἢ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$, ἀλλ' ὡς μὲν ἢ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἢ τε $\Gamma\Delta$ πρὸς τὴν Ξ καὶ ἢ Ξ πρὸς τὴν O , ὡς δὲ ἢ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$, οὕτως ἢ τε $H\Theta$ πρὸς τὴν Π καὶ ἢ Π πρὸς τὴν P , δι' ἴσου ἄρα ἔστιν ὡς ἢ AB πρὸς τὴν O , οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν P . ἀλλ' ὡς μὲν ἢ AB πρὸς τὴν O , οὕτως τὸ AK στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Lambda$ στερεόν, ὡς δὲ ἢ EZ πρὸς τὴν P , οὕτως τὸ EM στερεὸν πρὸς τὸ HN στερεόν. ὡς ἄρα τὸ AK στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Lambda$ στερεόν, οὕτως τὸ EM στερεὸν πρὸς τὸ HN στερεόν.

ἔστω δὴ πάλιν ὡς τὸ AK στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Lambda$ στερεόν, οὕτως τὸ EM στερεὸν πρὸς τὸ HN στερεόν. λέγω, ὅτι ἔστιν ὡς ἢ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$. πεποιήσθω γὰρ ὡς ἢ AB πρὸς

τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν ΣT , καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΣT τῷ HN ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παρακλληλεπίπεδον τὸ ΣT . ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν ΣT , καὶ ὡς ἄρα τὸ AK στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Delta$ στερεόν, οὕτως τὸ EM στερεὸν πρὸς τὸ ΣT στερεόν. τὸ EM ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν HN , ΣT τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ HN τῷ ΣT , καὶ ὁμόλογός ἐστὶν ἢ $H\Theta$ τῇ ΣT . ἴση ἄρα ἐστὶν ἢ $H\Theta$ τῇ ΣT . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν ΣT , ἴση δὲ ἢ ΣT τῇ $H\Theta$, ὡς ἄρα ἢ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἢ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

38

λη'.

Ἐὰν κύβου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῆ, ἢ τῶν ἐπιπέδων κοινὴ τομὴ δίχα τεμεῖ τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον, καὶ αὕτη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου.

κύβου γὰρ τοῦ AB τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν $\Gamma\Delta$, AE , BZ , $H\Theta$ αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν αἱ $\Gamma\Delta$, ΔA , AE , $E\Gamma$, BZ , ZH , $H\Theta$, ΘB κατὰ τὰ K , Λ , M , N , Ξ , O , Π , P , διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω τὰ KM , $\Pi\Xi$, $N\Lambda$, OP , καὶ ἔστω τῶν ἐπιπέδων κοινὴ τομὴ ἢ ΣT , διάμετρος δὲ τοῦ κύβου ἔστω ἢ BA . λέγω, ὅτι ἢ ΣT δίχα τέμνει τὴν τοῦ κύβου διάμετρον, καὶ αὕτη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῶν¹⁾ τοῦ κύβου διαμέτρων¹⁾.

ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ $\Gamma\Sigma$, ΣA , BT , TH . ἐπεὶ

1) corr. in τῆς — διαμέτρου m. 1.

ἴση ἐστὶν ἢ $ΓΕ$ τῇ $ΔΑ$, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν $ΓΕ$ ἡμίσεια ἢ $ΓΝ$, τῆς δὲ $ΔΑ$ ἡμίσεια ἢ $ΛΑ$, ἴση ἄρα ἐστὶν ἢ $ΓΝ$ τῇ $ΛΑ$. ἐστὶ δὲ καὶ ἢ $ΣΝ$ τῇ $ΣΑ$ ἴση. δύο δὴ αἱ $ΓΝ$, $ΝΣ$ δυσὶ ταῖς $ΛΑ$, $ΛΣ$ ἴσαι εἰσί· καὶ γωνία ἢ ὑπὸ $ΓΝΣ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΣΛΑ$ ἴση· βάσις ἄρα ἢ $ΓΣ$ βάσει τῇ $ΣΑ$ ἴση, καὶ τὸ $ΓΝΣ$ τρίγωνον τῷ $ΑΛΣ$ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἐσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἢ ὑπὸ τῶν $ΓΣ$, $ΣΝ$ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν $ΛΣ$, $ΣΑ$. κοινὴ προσκείσθω ἢ ὑπὸ τῶν $ΝΣ$, $ΣΑ$. αἱ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΓΣ$, $ΣΝ$, $ΝΣ$, $ΣΑ$ ταῖς ὑπὸ τῶν $ΛΣ$, $ΣΑ$, $ΑΣ$, $ΣΝ$ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ τῶν $ΛΣ$, $ΣΑ$, $ΑΣ$, $ΣΝ$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· πρὸς δὴ τινὶ εὐθείᾳ τῇ $ΝΣ$ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ $Σ$ δύο εὐθεῖαι αἱ $ΣΓ$, $ΣΑ$ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιούσι τὰς ὑπὸ τῶν $ΓΣΝ$, $ΝΣΑ$. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἢ $ΓΣ$ τῇ $ΣΑ$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἢ $ΒΤ$ τῇ $ΤΗ$ ἐπ' εὐθείας ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἑκατέρω τῶν $ΓΒ$, $ΑΗ$ τῇ $ΕΘ$, ἀλλὰ καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι παράλληλοι εἰσίν, αἱ $ΓΒ$, $ΑΗ$ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι. καὶ ἐπεξευγμέναι εἰσὶν αἱ $ΓΑ$, $ΒΗ$, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν $ΓΑ$ ἡμίσεια ἢ $ΣΑ$, τῆς δὲ $ΒΗ$ ἡμίσεια ἢ $ΒΤ$. αἱ $ΣΑ$, $ΒΤ$ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι· καὶ ἐπεξευγμέναι εἰσὶν αἱ $ΣΤ$, $ΑΒ$. ἴση ἄρα ἐστὶν ἢ μὲν $ΣΤ$ τῇ $ΤΤ$, ἢ δὲ $ΑΤ$ τῇ $ΤΒ$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ'.

39

Ἐὰν ἢ δύο πρίσματα ἰσουψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχει βάσιν τρίγωνον, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον, διπλάσιον δὲ ἢ

τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα.

Ἔστω δύο πρίσματα ἰσουψῆ, τὰ $ABΓΔΕΖ, ΗΘΚΛΜΝ$, καὶ τὸ μὲν ἔχέτω τρίγωνον βάσιν τὸ $ΚΛΝ$, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον τὸ $ΒΓΔΕ$, καὶ ἔστω τὸ $ΒΓΔΕ$ τοῦ $ΝΚΛ$ τριγώνου διπλάσιον. λέγω, ὅτι ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα. πεπληρώσθω γὰρ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα τὰ $ΑΔ, ΗΛ$. ἐπεὶ οὖν τὸ $ΒΔ$ παραλληλόγραμμον τοῦ $ΝΚΛ$ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον, ἔστι δὲ τοῦ $ΝΚΛ$ τριγώνου διπλάσιον τὸ $ΝΛ$ παραλληλόγραμμον, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΒΔ$ τῷ $ΝΛ$. ἐπὶ ἴσων οὖν βάσεων τῶν $ΒΔ, ΝΛ$ ἰσουψῆ ἐστὶ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ $ΑΔ, ΗΛ$. ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. ἀλλὰ τοῦ μὲν $ΑΔ$ ἡμισὺ ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔΕΖ$ πρίσμα, τοῦ δὲ $ΗΛ$ ἡμισὺ τὸ $ΗΘΚΛΜ$ πρίσμα. καὶ τὸ $ΑΒΓΔΕΖ$ ἄρα πρίσμα τῷ $ΗΘΚΛΜΝ$ πρίσματι ἴσον ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Εὐκλείδου στοιχείων στερεῶν ιᾱ.

XII Εὐκλείδου στοιχείων ιβ̄.

1 Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἀλλήλα ἐστὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

ἔστωσαν κύκλοι οἱ $ΑΒΓΔ, ΗΘΚΛ$, καὶ ἐν τοῖς $ΑΒΓΔ, ΗΘΚΛ$ ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ $ΑΒΓΔΕ, ΗΘΚΛΜ$, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ $ΒΖ, ΘΝ$. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΖ$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΘΝ$ τετράγωνον, οὕτως τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πολύγωνον πρὸς τὸ $ΗΘΚΛΜ$ πολύγωνον. ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ $ΒΕ, ΑΖ, ΘΜ, ΗΝ$. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ $ΒΑ$ πρὸς $ΑΕ$, οὕτως ἢ $ΘΗ$ πρὸς τὴν $ΗΜ$, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν $ΒΑΕ, ΘΗΜ$ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΕ$ τρίγωνον

τῷ $H\Theta M$ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν AEB
 γωνία τῇ ὑπὸ τῶν $H\Theta M$. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ AEB τῇ
 ὑπὸ AZB ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ $HM\Theta$ τῇ ὑπὸ $HN\Theta$
 ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ ὀρθὴ ὑπὸ τῶν BAZ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ
 ΘHN ἴση. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AZB λοιπῇ τῇ ὑπὸ
 $H\Theta N$ ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABZ τρίγω-
 νον τῷ $H\Theta N$ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ
 BZ πρὸς τὴν BA , οὕτως ἡ ΘN πρὸς ΘH . ἐναλλάξ
 ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ BZ πρὸς τὴν ΘN , οὕτως ἡ BA πρὸς
 τὴν ΘH . καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς BZ τετραγώνου πρὸς
 τὸ ἀπὸ τῆς ΘN τετραγώνου διπλασίονα λόγον ἔχει
 ἢπερ ἡ ZB πρὸς τὴν ΘN , ἔχει δὲ καὶ τὸ $AB\Gamma\Delta E$
 πολύγωνον πρὸς τὸ $H\Theta K\Lambda M$ πολύγωνον διπλασίονα
 λόγον ἢπερ ἡ AB πρὸς τὴν $H\Theta$, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ BZ
 πρὸς τὴν ΘN , οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν $H\Theta$, καὶ ὡς
 ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BZ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘN
 τετραγώνου, οὕτως τὸ $AB\Gamma\Delta E$ πολύγωνον πρὸς τὸ
 $H\Theta K\Lambda M$ πολύγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν 2
 διαμέτρων τετραγωνα.

ἔστωσαν κύκλοι οἱ $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$, διάμετροι δὲ
 αὐτῶν αἱ $B\Delta$, $Z\Theta$. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς
 $B\Delta$ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ $Z\Theta$ τετραγώνου, οὕτως
 ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον. εἰ γὰρ
 μή ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ
 τῆς $Z\Theta$ τετραγώνου, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς
 τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, ἦτοι πρὸς ἕλασσόν τι τοῦ $EZH\Theta$
 κύκλου χωρίου ἢ πρὸς τὸ μείζον. ἔστω πρότερον πρὸς
 ἕλασσον τὸ Φ , καὶ τῷ $EZH\Theta$ κύκλῳ ἴσα ἔστω τὰ
 ΦX , καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον τετρα-

γωνον τὸ $EZH\Theta$. τὸ $EZH\Theta$ ἄρα τετράγωνον μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου. τετμήσθωσαν αἱ $EZ, ZH, H\Theta, \Theta E$ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ K, Λ, M, N σημεῖα, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $EK, KZ, Z\Lambda, \Lambda H, HM, M\Theta, \Theta N, NE$. ἕκαστον ἄρα τῶν $EK, KZ, Z\Lambda, \Lambda H, HM, M\Theta, \Theta N, NE$ τριγώνων μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. ἕκαστον ἄρα τῶν $EKZ, Z\Lambda H, HM\Theta, \Theta NE$ τῶν τριγώνων μείζον ἐστὶν ἢ τοὶ ἥμισυ τοῦ καθ' αὐτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. τοιαύτης δὴ γινομένης τῆς διαιρέσεως ληφθήσεται τοιαῦτα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ X χωρίου. λελήφθω καὶ ἔστω τὰ $EK, KZ, Z\Lambda, \Lambda H, HM, M\Theta, \Theta N, NE$. δύο οὖν μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων τοῦ τε $EZH\Theta$ κύκλου καὶ τοῦ X χωρίου ἀφήρηται ἀπὸ τοῦ μείζονος μείζον ἢ τὸ ἥμισυ μέρος καὶ τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ τὸ ἥμισυ μέρος, καὶ τοῦτο αἰ γεγένηται, καὶ καταλέλειπται χωρίον, ὃ ἔλασσον ἔσται τοῦ X . λοιπὸν ἄρα τὸ $EKZ\Lambda HM\Theta N$ πολύγωνον μείζον ἐστὶ τοῦ Φ χωρίου. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον τῷ $EKZ\Lambda HM\Theta N$ πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ $A\Xi B O \Gamma \Pi \Delta P$. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸ Φ χωρίον, ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$, οὕτως τὸ $A\Xi B O \Gamma \Pi \Delta P$ πολύγωνον πρὸς τὸ $EKZ\Lambda HM\Theta N$, ὡς ἄρα ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸ Φ χωρίον, οὕτως τὸ $A\Xi B O \Gamma \Pi \Delta P$ πολύγωνον πρὸς τὸ $EKZ\Lambda HM\Theta N$ πολύγωνον. ἐναλλάξ ἄρα ἐστίν, ὡς ὁ $AB\Gamma\Delta$ πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτως τὸ X χωρίον πρὸς τὸ $EKZ\Lambda HM\Theta N$ πολύγωνον. μείζων δὲ ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος

τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου· μείζον ἄρα καὶ τὸ Φ χωρίου τοῦ $EKZΛΗΜΘΝ$ πολυγώνου. ἀλλὰ μὴν καὶ ἔλασσον τὸ Φ · ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $BΔ$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ZΘ$ τετράγωνον, οὕτως ὁ $ABΓΔ$ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ $EZHΘ$ κύκλου χωρίου.

λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μείζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς τὸ Φ . ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $ZΘ$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΔB$ τετράγωνον, οὕτως τὸ Φ χωρίου πρὸς τὸν $ABΓΔ$ κύκλον. ὡς δὲ τὸ Φ χωρίου πρὸς τὸν $ABΓΔ$ κύκλον, οὕτως ὁ $EZHΘ$ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ $ABΓΔ$ κύκλου χωρίου· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ZΘ$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΔB$ τετράγωνον, οὕτως ὁ $EZHΘ$ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ $ABΓΔ$ κύκλου χωρίου· ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $BΔ$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ZΘ$ τετράγωνον, οὕτως ὁ $ABΓΔ$ κύκλος πρὸς μείζόν τι τοῦ $EZHΘ$ κύκλου χωρίου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $BΔ$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ZΘ$ τετράγωνον, οὕτως ὁ $ABΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $EZHΘ$ κύκλον.

Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα τῆς ὅλης πυραμίδος μείζονά ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ.

ἔστω πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἔστω τὸ $ABΓ$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ $Δ$ σημεῖον. λέγω, ὅτι ἡ $ABΓΔ$ πυραμὶς διαιρεῖται εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα.

τετμήσθωσαν αἱ πλευραὶ τῆς πυραμίδος δίχα κατὰ τὰ $E, Z, H, \Theta, K, \Lambda$ σημεία, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $EZ, ZH, EH, H\Lambda, Z\Theta, \Theta K, K\Lambda, \Lambda\Theta$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AZ τῇ $Z\Delta$, ἡ δὲ $B\Theta$ τῇ $\Theta\Delta$, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ $Z\Theta$. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AE τῇ EB , ἡ δὲ AZ τῇ $Z\Delta$, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $B\Delta$ τῇ EZ . παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $EBZ\Theta$. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν EB τῇ $Z\Theta$, ἡ δὲ EZ τῇ $B\Theta$. ἀλλ' ἡ μὲν BE τῇ EA ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ $B\Theta$ τῇ $\Theta\Lambda$. καὶ ἡ μὲν AE ἄρα τῇ $Z\Theta$ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ EZ τῇ $\Theta\Delta$. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ AZ τῇ $Z\Delta$ ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ AEZ τρίγωνον τῷ $Z\Theta\Delta$ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $AZ\Theta$ τρίγωνον τῷ $Z\Delta K$ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὁμοίον ἐστὶν. τὸ δὲ AEH τρίγωνον τῷ $Z\Theta K$ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὁμοίον ἐστὶν. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων αἱ EZ, ZH παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων τὰς $\Theta\Delta, \Delta K$ κείνται μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι, ἴσας γωνίας περιέξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ EZH γωνία τῇ ὑπὸ $\Theta\Delta K$ γωνία. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ EZ, ZH δυσὶ ταῖς $\Theta\Delta, \Delta K$ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρωθεν ἑκατέρωθεν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ EZH γωνία τῇ ὑπὸ $\Theta\Delta K$ ἴση ἐστὶν, βάσις ἄρα ἡ EH βάσει τῇ ΘK ἐστὶν ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ EZH τρίγωνον τῷ $\Theta\Delta K$ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς μὲν ἐστὶ τὸ AEH τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Z σημεῖον, ἴση τε καὶ ὁμοία ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Δ σημεῖον. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ AEH τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Z σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Δ σημεῖον. διή-

ρηται ἄρα ἡ $ΑΒΓΔ$ πυραμὶς εἰς δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ.

λέγω δὴ, ὅτι καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΑ$ τῇ $ΑΓ$, διπλάσιόν ἐστὶ τὸ $ΕΗΔΒ$ παραλληλόγραμμον τοῦ $ΗΔΓ$ τριγώνου. καὶ ἐπεὶ δέ-δεικται, ὅτι, ἐὰν δύο πρίσματα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ τὸ μὲν ἔχει βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, ἢ δὲ διπλάσιον τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα, τὸ ἄρα πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν $ΘΒΑ$, $ΕΖΗ$, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τοῦ $ΕΒΖΘ$ καὶ τοῦ $ΕΒΔΗ$ καὶ ἔτι τοῦ $ΖΘΔΗ$ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν $ΗΓΑ$, $ΖΘΚ$, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν $ΚΖΗΓ$, $ΔΓΘΚ$, $ΖΗΔΘ$. διήρηται ἄρα ἡ $ΑΒΓΔ$ πυραμὶς εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ φανερόν, ὅτι τὰ δύο πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἢ τὸ ἡμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος :—

Ἐὰν ὡς δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὔσαι ⁴ καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκάτερα αὐτῶν εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, ἔσται ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βᾶσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βᾶσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὔσαι καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς $ΑΒΓ$, $ΜΝΞ$, κορυφᾶς δὲ τὰ $Δ$, $Ο$ σημεία, καὶ διηρηθῶ ἑκάτερα αὐτῶν εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας

τῆ ὅλη καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν $MN\Xi$ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $AB\Gamma\Delta$ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστὶν ἡ AB τῇ ΛH , ὁμοίον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Lambda H\Gamma$ τριγώνῳ. τὸ $AB\Gamma$ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ $\Lambda H\Gamma$ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ $N\Xi$ πρὸς τὴν $\Xi\Phi$. καὶ ἐστὶν ὡς ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν $\Gamma\Lambda$, οὕτως ἡ $N\Xi$ πρὸς τὴν $\Xi\Phi$. καὶ ὡς ἄρα τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον πρὸς τὸ $\Lambda H\Gamma$ τρίγωνον, οὕτως τὸ $MN\Xi$ τρίγωνον πρὸς τὸ $\Sigma\Phi\Xi$ τρίγωνον. ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον πρὸς τὸ $MN\Xi$, οὕτως τὸ $H\Lambda\Gamma$ τρίγωνον πρὸς τὸ $\Sigma\Phi\Xi$ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ $\Lambda H\Gamma$, $Z\Theta K$ ἐπίπεδα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ $\Sigma\Phi\Xi$, $P\Gamma N$ ἐπίπεδα. ὡς ἄρα ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν $MN\Xi$ βάσιν, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ $\Lambda H\Gamma$, $Z\Theta K$ ἐπίπεδα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ $\Sigma\Phi\Xi$, $P\Gamma T$ ἐπίπεδα. ἀλλὰ τὰ μὲν ἐν τῇ $AB\Gamma\Delta$ πυραμίδι πρίσματα διπλάσιά ἐστὶ τοῦ πρίσματος, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ $\Lambda H\Gamma$, $Z\Theta K$ ἐπίπεδα. τὰ δ' ἐν τῇ $MN\Xi\Theta$ πυραμίδι πρίσματα διπλάσιά ἐστὶ τοῦ πρίσματος, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ $\Sigma\Phi\Xi$, $P\Gamma T$ ἐπίπεδα. ὡς ἄρα ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν $MN\Xi$ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $AB\Gamma\Delta$ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $MN\Xi\Theta$ πυραμίδι πρίσματα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ AEH βάσις πρὸς τὴν $M\Pi\Sigma$ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $AEHZ$ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $M\Pi\Sigma P$ πυραμίδι πρίσματα. ὡς δὲ ἡ $Z\Theta K$ βάσις πρὸς τὴν TPT βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $Z\Theta K\Delta$ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $P\Gamma T\Theta$

πυραμίδι πρίσματα. ἔσται ἄρα ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν $MN\Xi$ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $AB\Gamma\Delta$ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $MN\Xi O$ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὔσαι πυραμίδες καὶ τρι- δ
γώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς $AB\Gamma$, $MN\Xi$ αἱ $AB\Gamma\Delta$, $MN\Xi O$, κορυφὰς δὲ τὰ Δ , O σημεία. λέγω, ὅτι ἔστιν ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν $MN\Xi$ βάσιν, οὕτως ἡ $AB\Gamma\Delta$ πυραμὶς πρὸς τὴν $MN\Xi O$ πυραμίδα.

εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν $MN\Xi$ βάσιν, οὕτως ἡ $AB\Gamma\Delta$ πυραμὶς πρὸς τὴν $MN\Xi O$ πυραμίδα, ἔσται ἄρα ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν $MN\Xi$ βάσιν, οὕτως ἡ $AB\Gamma\Delta$ πυραμὶς ἢτοι πρὸς ἔλαττόν τι τῆς $MN\Xi O$ πυραμίδος στερεὸν ἢ πρὸς μείζον. ἔστω πρὸς ἔλαττον τὸ Ω , καὶ τῇ $MN\Xi O$ πυραμίδι ἴσα ἔστω τὰ Ω , X χωρία, καὶ διηρήσθω ἡ $MN\Xi O$ πυραμὶς εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα. μείζονα ἄρα ἐστὶ τὰ πρίσματα τῆς ὅλης πυραμίδος ἢ τὸ ἥμισυ. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα λήψομέν τινας πυραμίδας ἀπὸ τῆς ὅλης πυραμίδος, αἱ ἔσονται ἐλάσσονες τοῦ X στερεοῦ. λελήφθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ $MP\Sigma P$, TTO . ἐπεὶ οὖν ἡ πυραμὶς ἴση ἐστὶ τοῖς στερεοῖς εἰς τὰ καταλελημμένα ἀποτμήματα ἐλάσσονά εἰσι τοῦ X . λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν

τῇ $MNΞO$ πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ Ω στερεοῦ. διηγήσθω ἡ $ABΓΔ$ πυραμὶς ὁμοίως τῇ $MNΞO$ πυραμίδι. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $ABΓ$ βάσις πρὸς τὴν $MNΞ$ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ πυραμίδι τῇ $ABΓΔ$ πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ $MNΞO$ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ, ὡς ἄρα ἡ $ABΓΔ$ πυραμὶς πρὸς τὸ Ω στερεόν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $ABΓΔ$ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ $MNΞO$ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ABΓΔ$ πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα πάντα, οὕτως τὸ Ω στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ $MNΞO$ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. μείζων δὲ ἡ $ABΓΔ$ πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ πρισμάτων πάντων. μείζον ἄρα καὶ τὸ Ω στερεὸν τῶν ἐν τῇ $MNΞO$ πυραμίδι πρισμάτων πάντων. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ABΓ$ βάσις πρὸς τὴν $MNΞ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ABΓΔ$ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς $MNΞO$ πυραμίδος στερεόν.

λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μείζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς τὸ Ω . ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $MNΞ$ βάσις πρὸς τὴν $ABΓ$ βάσιν, οὕτως τὸ Ω στερεὸν πρὸς τὴν $ABΓΔ$ πυραμίδα. ὡς δὲ τὸ Ω στερεὸν πρὸς τὴν $ABΓΔ$ πυραμίδα, οὕτως ἡ $MNΞO$ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς $ABΓΔ$ πυραμίδος στερεόν. ὡς ἄρα ἡ $MNΞ$ βάσις πρὸς τὴν $ABΓ$ βάσιν, οὕτως ἡ $MNΞO$ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς $ABΓΔ$ πυραμίδος στερεόν· ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ABΓ$ βάσις πρὸς τὴν $MNΞ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ABΓΔ$ πυραμὶς πρὸς μείζον τι τῆς $MNΞO$ πυραμίδος στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $ABΓ$ βάσις πρὸς τὴν $MNΞ$ βάσιν, οὕτως ἡ

$AB\Gamma\Delta$ πυραμῖς πρὸς τὴν $MN\Xi O$ πυραμίδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς 6
πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

ἔστω πρίσμα τὸ $AB\Gamma\Delta EZ$ τρίγωνον ἔχον βάσιν τὴν $\Gamma Z\Delta$. λέγω, ὅτι τὸ $AB\Gamma\Delta EZ$ πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας. ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ $B\Delta$, BZ , ZE . ἡ ἄρα πυραμῖς, ἣς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $\Gamma B\Delta$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Z σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ $B\Delta E$ τρίγωνον, κορυφήν δὲ τὸ Z σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ AEZ τρίγωνον, κορυφήν δὲ τὸ Z σημεῖον. καὶ ἡ πυραμῖς ἄρα, ἣς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $B\Gamma\Delta$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Z σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ AEZ τρίγωνον, κορυφήν δὲ τὸ B σημεῖον. διήρηται ἄρα τὸ $AB\Gamma\Delta EZ$ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, ὧν βάσεις μὲν εἰσὶν $AB\Gamma\Delta$, $EA EZ$, κορυφή δὲ τὰ B , Z σημεία.

Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἔχου- 7
σῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι.

ἔστωσαν ἴσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς $AB\Gamma$, EZH αἱ $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$, κορυφὰς δὲ τὰ Δ , Θ σημεία. λέγω, ὅτι τῶν $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ πυραμίδων τριγώνων βάσιν ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. συμπληρώσθω γὰρ τὰ $B\Delta M\Lambda$, $Z\Theta P\Theta$ στερεά. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $AB\Gamma\Delta$ πυραμῖς

τῆς $EZH\Theta$ πυραμίδι, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν $AB\Gamma\Delta$ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ $B\Delta M\Lambda$ στερεόν, τῆς δὲ $EZH\Theta$ ἑξαπλάσιον τὸ $Z\Theta P\Theta$ στερεόν, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $B\Delta M\Lambda$ στερεὸν τῷ $Z\Theta P\Theta$ στερεῷ. τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ BM βάσις πρὸς τὴν ZP βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ $OP\Theta Z$ στερεοῦ ὕψος. ὡς δὲ ἡ BM βάσις πρὸς τὴν ZP βάσιν, οὕτως ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν EZH βάσιν. ὡς ἄρα ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν EZH βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ $OP\Theta Z$ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ $\Delta M\Delta B$ στερεοῦ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν τε $B\Delta M\Lambda$, $Z\Theta P\Theta$ στερεῶν καὶ τῶν $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ πυραμίδων. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $AB\Gamma$ πρὸς τὴν EZH βάσιν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $EZH\Theta$ πυραμίδος ὕψος τῶν $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ πρὸς τὸ τῆς $AB\Gamma\Delta$ πυραμίδος ὕψος. τῶν $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ ἄρα πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. Γ

ἀντιπεπονθέτωσαν δὴ πάλιν τῶν $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ πυραμίδων αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν EZH βάσιν, οὕτως τὸ τῆς $EZH\Theta$ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς $AB\Gamma\Delta$ πυραμίδος ὕψος. λέγω, ὅτι ἐστὶν ἴση ἡ $AB\Gamma\Delta$ πυραμὶς τῆς $EZH\Theta$ πυραμίδι. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν EZH βάσιν, οὕτως τὸ τῆς $EZH\Theta$ ὕψος πρὸς τὸ τῆς $AB\Gamma\Delta$ πυραμίδος ὕψος, ὡς δὲ ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν EZH βάσιν, οὕτως ἡ BM βάσις πρὸς τὴν ZP βάσιν, οὕτως τὸ τῆς $EZH\Theta$ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς $AB\Gamma\Delta$ πυραμίδος ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν τε $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ πυραμίδων καὶ τῶν $B\Delta M\Lambda$, $Z\Theta P\Theta$ στερεῶν. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ BM βάσις πρὸς τὴν ZP βάσιν, οὕτως

τὸ τοῦ $Z\Theta\rho\sigma$ στερεοῦ ὕψος. ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $B\Delta M\Lambda$ στερεὸν τῷ $Z\Theta\rho\sigma$ στερεῷ. καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν $B\Delta M\Lambda$ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ $EZH\Theta$, $AB\Gamma\Delta$ πυραμῖς, τοῦ δὲ $Z\Theta\rho\sigma$ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ $EZH\Theta$ πυραμῖς. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ $AB\Gamma\Delta$ πυραμῖς τῇ $EZH\Theta$ πυραμίδι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις 8 πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

ἔστωσαν ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς $AB\Gamma$, EZH αἱ $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$, κορυφὰς δὲ τὰ Δ , Θ σημεία, καὶ ἔστω ἴση ἡ μὲν ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν EZ , ZH γωνία, ἡ δὲ ὑπὸ τῶν AB , $B\Delta$ τῇ ὑπὸ τῶν EZ , $Z\Theta$. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τῇ ὑπὸ τῶν ΘZ , ZH , ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ $B\Gamma$ τῇ ZH . λέγω, ὅτι ἡ $AB\Gamma\Delta$ πυραμῖς πρὸς τὴν $EZH\Theta$ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν ZH .

συμπεπληρώσθωσαν γὰρ τὰ $B\Delta M\Lambda$, $Z\Theta\rho\sigma$ στερεά. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν $B\Delta$, οὕτως ἡ ZH πρὸς τὴν ZE , καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$, EZ , ZH αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ BM παραλληλόγραμμον τῷ ZP παραλληλογράμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν $A\Delta$ τῷ $E\Theta$ ὁμοίον ἐστὶ, τὸ δὲ NB τῷ $Z\Pi$. ἀλλὰ τὰ μὲν BN , $A\Delta$, BM τὰ τρία τοῖς ἀπεναντίον αὐτῶν τοῖς $A\Delta$, MN , $A\Lambda$ ἴσα ἐστὶ, τὰ δὲ ZP , $E\Theta$, ΠZ τὰ τρία τοῖς ἀπεναντίον αὐτῶν τοῖς ΘO , EO , $P\Pi$ ἴσα ἐστὶν. ὅλον ἄρα το

$B\Delta M\Lambda$ στερεὸν ὅλω τῷ $Z\Theta PO$ στερεῷ ὁμοίον ἐστὶ. τὰ δὲ ὁμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. τὸ $B\Delta M\Lambda$ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ $Z\Theta PO$ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν ZH . καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν $B\Delta M\Lambda$ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ $AB\Gamma$ πυραμὶς τοῦ $Z\Theta PO$ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ $EZH\Theta$ πυραμὶς· καὶ ἡ $AB\Gamma\Delta$ ἄρα πυραμὶς πρὸς τὴν $EZH\Theta$ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν ZH .

9 Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος καὶ ὕψος ἴσον.

ἔχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρου βάσιν τὴν αὐτὴν τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον καὶ ὕψος ἴσον. λέγω, ὅτι τριπλάσιός ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου.

εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλάσιος, ἔσται ἄρα ἥτοι μείζων ἢ τριπλάσιος ἢ ἐλάσσων ἢ τριπλάσιος. ἔστω πρότερον ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἢ τριπλάσιος τῷ $P\Sigma$ στερεῷ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $ABI\Delta$ κύκλον τετράγωνον τὸ $AB\Gamma\Delta$, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ $AB\Gamma\Delta$ τετραγώνου πρίσμα ἰσουψὲς τῷ κυλίνδρῳ. τὸ ἄρα ἀνεσταμένον πρίσμα μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου. τετμήσθωσαν αἱ AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ E , Z , H , Θ σημεία, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EA , EB , BZ , $Z\Gamma$, ΓH , $H\Delta$, $\Delta\Theta$, ΘA , καὶ ἀνεστάτω ἀφ' ἐκάστου τῶν ΔEB , $BZ\Gamma$, $\Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$ τριγώνων πρίσματα ἰσουψὲς τῷ κυλίνδρῳ. ἕκαστον ἀνασταμένων πρισμάτων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' αὐτὸ τμήματος καὶ κυλίνδρου. τοιαύτης δὴ γινομένης αἰεὶ ἐπισκέψεως ληφθήσεται τινα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κυλίνδρου, ἃ ἔσται

ἐλάττονα τοῦ P στερεοῦ. λελήφθω καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν $ΑΕΒ$, $ΒΖΓ$, $ΓΗΔ$, $ΔΘΑ$. λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζον ἐστὶν ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. ἀλλὰ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τριπλάσιόν ἐστὶ τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζον ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. ἀλλὰ καὶ ἐμπεριέχεται ἐν αὐτῷ ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος.

λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἢ τριπλάσιος.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κώνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τῷ P στερεῷ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον τετράγωνον τὸ $ΑΒΓΔ$, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ $ΑΒΓΔ$ τετραγώνου πυραμὶς ἰσουψῆς τῷ κώνῳ. ἡ ἄρα ἀνεσταμένη πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΑ$ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὸ $ΕΖΗΘ$ σημεῖα, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΑΕ$, $ΕΒ$, $ΒΖ$, $ΖΓ$, $ΓΗ$, $ΗΔ$, $ΔΘ$, $ΘΑ$, καὶ ἀνεστάτω ἀφ' ἐκάστου τῶν $ΑΕΒ$, $ΒΖΓ$, $ΓΗΔ$, $ΔΘΑ$ τριγώνων πυραμὶς ἰσουψῆς τῷ κώνῳ. ἐκάστη ἄρα τῶν ἀνεσταμένων πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' αὐτὸ τμήματος τοῦ κώνου. τοιαύτης δὴ γινομένης αἰ ἐπισκέψεως ληφθήσεται τινὰ τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, ἃ ἔσται

ἔλαττον αὐτοῦ στερεοῦ. λελήφθω καὶ ἀνεστᾶτω ἐπὶ τῶν $ΑΕΒ$, $ΒΖΓ$, $ΓΗΔ$, $ΔΘΑ$. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μείζον ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου τοῦ βᾶσιν μὲν ἔχοντος τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶν ἡ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, τοῦ βᾶσιν μὲν ἔχοντος τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. καὶ τὸ πρίσμα ἄρα, οὗ βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μείζον ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ βᾶσιν μὲν ἔχοντος τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μείζον ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ βᾶσιν μὲν ἔχοντος τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. ἀλλὰ καὶ ἐμπεριέχεται ἐν αὐτῷ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων ἢ τριπλάσιος. τριπλάσιος ἄρα ἐστίν.

10 Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βᾶσεις μὲν ἔστωσαν οἱ $ΑΒΓΔ$, $ΕΖΗΘ$ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ $ΚΑ$, $ΜΝ$, διάμετροι δὲ ἔστωσαν αἱ $ΒΓ$, $ΖΘ$. λέγω, ὅτι ὁ $ΑΒΓΔΚΑ$ κῶνος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘΜΝ$ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $ΒΔ$ πρὸς $ΖΘ$.

εἰ γὰρ μὴ ὁ $ΑΒΓΔΚΑ$ κῶνος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘΜΝ$ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΖΘ$, ἔξει ἄρα ὁ $ΑΒΓΔΚΑ$ κῶνος ἢτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ $ΕΖΗΘΜΝ$ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἢπερ ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΖΘ$ ἢ πρὸς τὸ μείζον. ἐχέτω πρό-

τερον πρὸς ἔλασσον τὸ A , καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον τετράγωνον τὸ $EZH\Theta$, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ $EZH\Theta$ τετραγώνου πυραμὶς ἰσουψῆς τῷ κώνῳ. ἢ ἄρα ἀνεσταμένη πυραμὶς μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ $EZ, ZH, H\Theta, \Theta E$ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ξ, O, Π, P σημεία, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $E\Xi, \Xi Z, ZO, OH, H\Pi, \Pi\Theta, \Theta P, PE$, καὶ ἀνεστάτω ἀφ' ἐκάστου τῶν $E\Xi, \Xi Z, ZO, OH, H\Pi, \Pi\Theta, \Theta P, PE$ τριγώνων πυραμὶς ἰσουψῆς τῷ κώνῳ. ἐκάστη ἄρα τῶν ἀνεσταμένων πυραμίδων μεῖζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' αὐτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τοιαύτης δὲ γινομένης ἀεὶ ἐπισκέψεως ληφθήσεται τινὰ τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ A στερεοῦ. λελήφθω καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν $E\Xi Z, ZO H, H\Pi\Theta, \Theta P E$. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἣς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $E\Xi Z Z O H H \Pi \Theta P E$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ N σημεῖον, μεῖζόν ἐστὶ τοῦ A στερεοῦ. ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον τῷ $E\Xi Z O H \Pi \Theta P E$ πολυγώνῳ ὁμοιόν τε πολύγωνον τὸ $AEB\Gamma\Gamma\Delta\Phi A$, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ $AEB\Gamma\Gamma\Delta\Phi$ πολυγώνου πρίσμα ἰσουψὲς τῷ κώνῳ, καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἣς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $AEB\Gamma\Gamma\Delta\Phi$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ A σημεῖον, τριγώνον ἐφεστάτω τὸ $A\Sigma B$, τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἣς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $E\Xi O H \Pi \Theta P$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ N σημεῖον ἐφεστάτω τὸ $NZ\Xi$ τρίγωνον, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $\Sigma K, M\Xi$. ἐπεὶ ὁμοιοὶ κῶνοι καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν ἀνάλογόν εἰσιν οἱ τε ἄξονες καὶ οἱ διάμετροι τῶν βᾶσεων, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ KA πρὸς τὴν MN , οὕτως ὁ $B\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$. ὡς δὲ ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$, οὕτως ἡ BK πρὸς τὴν MZ . ὡς ἄρα ἡ KA πρὸς τὴν KB ,

οὕτως ἡ MN πρὸς τὴν MZ · καὶ περὶ ὀρθᾶς γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν $\triangle K, KB, MN, MZ$ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $KB\Lambda$ τρίγωνον τῷ MNZ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $K\Lambda$ πρὸς τὴν ΛB , οὕτως ἡ MN πρὸς τὴν ZN . ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $K\Lambda$ πρὸς τὴν MN , οὕτως ἡ ΛZ πρὸς τὴν NZ . πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΣK πρὸς τὴν $K\Lambda$, οὕτως ἡ $M\Xi$ πρὸς τὴν MN , καὶ περὶ ὀρθᾶς γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν $\Sigma K\Lambda, \Xi MN$ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Sigma K\Lambda$ τρίγωνον τῷ ΞMN τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ $K\Lambda$ πρὸς τὴν MN , οὕτως ἡ $\Lambda \Sigma$ πρὸς τὴν $N\Xi$, ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΛK πρὸς τὴν MN , οὕτως ἡ ΛB πρὸς τὴν NZ · ὡς ἄρα ἡ ΛB πρὸς τὴν NZ , οὕτως ἡ $\Lambda \Sigma$ πρὸς τὴν $N\Xi$. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ BK πρὸς τὴν $K\Gamma$, οὕτως ἡ ZM πρὸς τὴν $M\Xi$, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν $BK\Sigma, ZM\Xi$ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $BK\Sigma$ τρίγωνον τῷ $ZM\Xi$ τριγώνῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΣK πρὸς ΣB , οὕτως ἡ ΞM πρὸς ΞZ . ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ἡ ΣK πρὸς τὴν $\Sigma \Lambda$, οὕτως ἡ $M\Xi$ πρὸς τὴν ΞN . δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ἡ $\Lambda \Sigma$ πρὸς ΣB , οὕτως ἡ $N\Xi$ πρὸς τὴν ΞZ . ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ $\Lambda \Sigma$ πρὸς τὴν $N\Xi$, οὕτως ἡ ΣB πρὸς τὴν ΞZ . ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ $\Lambda \Sigma$ πρὸς τὴν $N\Xi$, οὕτως ἡ ΛB πρὸς τὴν NZ . ὡς ἄρα ἡ ΛB πρὸς τὴν NZ , οὕτως ἡ $\Lambda \Sigma$ πρὸς τὴν $N\Xi$ · ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Lambda \Sigma B$ τρίγωνον τῷ $N\Xi Z$ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $KB\Sigma$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βᾶσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ $M\Xi Z$ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ N σημεῖον. αἱ δὲ ὁμοιαὶ πυραμίδες καὶ τριγώνους βᾶσεις ἔχουσαι πρὸς ἀλλήλας ἐν τρι-

πλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $BK\Sigma$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βᾶσιν μὲν ἔχουσαν τὸ $MZ\Xi$ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ N σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ BK πρὸς τὴν $ZM\Theta$. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $KB\Sigma$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βᾶσιν μὲν ἔχουσαν τὸ $M\Xi Z$ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ N σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν ΘZ . ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν λοιπῶν πυραμίδων, ὧν βᾶσεις μὲν εἰσὶ τὰ ΣK , MK , $\Phi K A$, $K\Delta\Upsilon$, $\Upsilon K\Gamma$, $K\Gamma T$, KTB τὰ τρίγωνα, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς ἐκάστην τῶν πυραμίδων, ὧν βᾶσεις μὲν εἰσὶ τὰ ΞME , EMP , $M\Theta P$, $M\Theta\Pi$, $M\Pi N$, $HM\Theta$, MOZ τὰ τρίγωνα, κορυφὴ δὲ τὸ N σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $A\Sigma B\Upsilon\Gamma M O\Phi A$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βᾶσιν μὲν ἔχουσαν τὸ $E\Xi\Xi O H\Pi\Theta P$ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ N σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$. καὶ ἐπεὶ ὁ $AB\Gamma\Delta K\Lambda$ κῶνος πρὸς τὸ A στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$, ἔχει δὲ καὶ ἡ πυραμὶς, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $A\Gamma B\Pi\Upsilon\Phi\Delta$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βᾶσιν μὲν ἔχουσαν τὸ $E\Xi\Xi\Theta H\Pi\Theta P$ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ N σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$, ἐστὶν ἄρα, ὡς ὁ $AB\Gamma\Delta K\Lambda$ κῶνος πρὸς τὸ A στερεόν, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $A\Sigma B\Upsilon\Gamma\Upsilon\Delta\Phi$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βᾶσιν

μὲν ἔχουσιν τὸ $EΞΖΟΗΠΘΡ$ πολύγωνον, κορυφήν δὲ τὸ N σημεῖον. ἐναλλάξ ἄρα ἐστίν, ὡς ὁ $ΑΒΓΔΚΛ$ κῶνος πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσιν τὸ $ΑΣΒΓΠΥΔΦ$ πολύγωνον, κορυφή δὲ τὸ $Α$ σημεῖον, οὕτως τὸ $Α$ στερεὸν πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσιν τὸ $EΞΖΟΗΠΘΡ$ πολύγωνον, κορυφήν δὲ τὸ N σημεῖον. μείζων δὲ ὁ $ΑΒΓΔΚΛ$ κῶνος τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ $ΑΣΒΠΥΦΔ$ πολύγωνον, κορυφήν δὲ τὸ $Α$ σημεῖον. μείζον ἄρα καὶ τὸ $Α$ στερεὸν τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ $EΞΖΟΗΠΘΡ$ πολύγωνον, κορυφήν δὲ τὸ N σημεῖον. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ $ΑΒΓΔΚΛ$ κῶνος πρὸς ἐλαττόν τι τοῦ $EΖΗΘΜΝ$ κῶνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $BΔ$ πρὸς τὴν $ZΘ$. λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μείζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς τὸ $Α$. ἀνάπαλιν ἄρα τὸ $Α$ στερεὸν πρὸς τὸν $ΑΒΓΔΚΛ$ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $ZΘ$ πρὸς τὴν $ΔB$. ὡς δὲ τὸ $Α$ στερεὸν πρὸς τὸν $ΑΒΓΔΚΛ$ κῶνον, οὕτως ὁ $EΖΗΜΜΝ$ κῶνος πρὸς ἐλαττόν τι τοῦ $ΑΒΓΔΚΛ$ κῶνου στερεόν. ὁ $EΖΗΘΜΝ$ ἄρα κῶνος πρὸς ἐλαττόν τι τοῦ $ΑΒΓΔΚΛ$ κῶνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $ZΘ$ πρὸς τὴν $BΔ$. ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ὁ $ΑΒΓΔΚΛ$ κῶνος πρὸς μείζον τι τοῦ $EΖΗΘΜΝ$ κῶνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $BΔ$ πρὸς τὴν $ZΘ$. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλαττόν τι. ὁ $ΑΒΓΔΚΛ$ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν $EΖΗΘΜΝ$ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $BΔ$ πρὸς τὴν $ZΘ$.

11 Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὧν αἱ βάσεις.

ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν αἱ βάσεις ἔστωσαν οἱ $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ KL , MN , διάμετροι δὲ τῶν βάσεων ἔστωσαν αἱ $Z\Delta$, $Z\Theta$. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta\Lambda^1$) κῶνος πρὸς τὸν $EZH\Theta N$ κῶνον. εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κῶνος πρὸς τὸν $EZH\Theta$, ἔσται ὁ $AB\Gamma\Delta KL$ κῶνος ἢτοι πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ $EZH\Theta$ κῶνου στερεὸν ἢ πρὸς μείζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἑλαττον τὸ A στερεόν, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον τετράγωνον τὸ $EZH\Theta$, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ $EZH\Theta$ τετραγώνου πυραμὶς ἰσουψῆς τῷ κῶνῳ. ἢ ἄρα ἀνεσταμένη πυραμὶς μείζων ἐστίν ἢ τὸ ἡμισυ τοῦ κῶνου. τετμήσθωσαν αἱ EZ , ZH , $H\Theta$ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ξ , O , Π , P σημεία, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $E\Xi$, ΞZ , $Z\Theta$, ΘH , $H\Pi$, $\Pi\Theta$, ΘP , $P\Sigma$, καὶ ἀνεστάτω ἀφ' ἐκάστου τῶν $E\Xi$, ΞZ , $Z\Theta$, ΘH , $H\Pi$, $\Pi\Theta$, ΘP , $P\Sigma$ τριγώνων πυραμὶς ἰσουψῆς τῷ κῶνῳ. ἐκάστη ἄρα τῶν ἀνεσταμένων πυραμίδων μείζον ἐστίν ἢ τὸ ἡμισυ τοῦ καθ' αὐτὴν τμήματος τοῦ κῶνου. τοιαύτης δὲ γινομένης ἀεὶ ἐπισκέψεως ληφθήσεται τινα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κῶνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ἧς ὑπερέχει ὁ $Z\Theta MN$ κύκλος τοῦ A στερεοῦ. λελήφθω καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν $E\Xi Z$, $\Theta H\Pi$, ΘPE . λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βᾶσις μὲν τὸ $E\Xi Z O H \Pi \Theta P$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ N σημεῖον, μείζον ἐστὶ τοῦ A στερεοῦ. ἐγγεγράφθω δὲ εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον τῷ $E\Xi Z O H \Pi \Theta P$ πολυγώνῳ ὁμοιον

1) Λ supra scr. m. 1.

πολύγωνον τὸ $ΑΒΤΓΤΔΦ$ πυραμὶς ἰσουψῆς τῷ
 κῶνῳ. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΔ$ τετράγωνον πρὸς
 τὸ ἀπὸ τῆς $ZΘ$ τετράγωνον, οὕτως ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος
 πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον, ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς τὸ ἀπὸ
 τῆς $ΒΔ$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ZΘ$ τετράγωνον,
 οὕτως τὸ $ΑΣΒΠΤΔΦ$ πολύγωνον πρὸς τὸ $ΕΞΖΟΗΠΘΡ$
 πολύγωνον, ὡς ἄρα ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$
 κύκλον, οὕτως τὸ $ΑΣΒΤΓΤΔΦ$ πολύγωνον πρὸς τὸ
 $ΕΞΖΟΗΠΘΡ$ πολύγωνον. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ $ΑΒΓΔ$
 κύκλος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον, οὕτως ὁ $ΑΒΓΔΚΑ$
 κῶνος πρὸς τὸ $Α$ στερεόν, ὡς δὲ τὸ $ΑΣΒΤΓΤΔΦ$
 πολύγωνον πρὸς τὸ $ΕΞΖΟΗΠΘΡ$ πολύγωνον, οὕτως
 ἡ πυραμὶς, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΑΣΒΤΓΤΔΦ$ πο-
 λύγωνον, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ
 $ΑΣΒΤΓΤΔΦ$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Α$ σημεῖον,
 πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βᾶσιν μὲν ἔχουσαν τὸ
 $ΕΞΖΟΗΠΘΡ$ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ N σημεῖον.
 ὡς ἄρα ὁ $ΑΒΓΔΚΑ$ κῶνος πρὸς τὸ $Α$ στερεόν, οὕτως
 ἡ πυραμὶς, ἧς βᾶσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΑΣΒΤΓΤΔΦ$ πολύ-
 γωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Α$ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα
 τὴν βᾶσιν μὲν ἔχουσαν τὸ $ΕΞΖΟΗΠΘΡ$ πολύγωνον,
 κορυφὴν δὲ τὸ N σημεῖον. ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ
 $ΑΒΓΔΚΑ$ κῶνος πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βᾶσιν μὲν
 ἔχουσαν τὸ $ΑΣΒΤΓΤΔΦ$ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ
 τὸ $Α$ σημεῖον, οὕτως τὸ $Α$ στερεόν πρὸς τὴν πυραμίδα
 τὴν βᾶσιν μὲν ἔχουσαν τὸ $ΕΞΖΟΗΠΘΡ$ πολύγωνον,
 κορυφὴν δὲ τὸ N σημεῖον. μείζων δὲ ὁ $ΑΒΓΔΚΑ$
 κῶνος τῆς πυραμίδος τῆς βᾶσιν μὲν ἐχούσης τὸ
 $ΑΣΒΤΓΤΔΦ$ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ $Α$ σημεῖον.
 μείζον ἄρα καὶ τὸ $Α$ στερεόν τῆς πυραμίδος τῆς βᾶσιν
 μὲν ἐχούσης τὸ $ΕΞΖΟΗΠΘΡ$ πολύγωνον, κορυφὴν

δὲ τὸ N σημεῖον. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta K\Lambda$ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ $EZ\Theta N$ κώνου στερεόν.

λέγω δὴ οὐδὲ πρὸς μείζον. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω πρὸς μείζον τὸ A . ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, οὕτως τὸ A στερεὸν πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta\Lambda$ κῶνον. ὡς δὲ τὸ A στερεὸν πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta\Lambda$ κῶνον, οὕτως ὁ $EZH\Theta N$ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ $AB\Gamma\Delta\Lambda$ κώνου στερεόν. ὡς ἄρα ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, οὕτως ὁ $EZH\Theta N$ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ κώνου τοῦ $AB\Gamma\Delta\Lambda$ ¹⁾ στερεοῦ· ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta\Lambda$ κῶνος πρὸς μείζον τι τοῦ $EZH\Theta N$ κώνου στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta\Lambda$ κῶνος πρὸς τὸν $EZH\Theta N$ κῶνον. καὶ ἐστὶ μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, τριπλάσιος τοῦ $AB\Gamma\Delta\Lambda$ κώνου, τοῦ δὲ $EZH\Theta N$ κώνου τριπλάσιος ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta\Lambda$ κύλινδρος πρὸς τὸν $EZH\Theta N$ κύλινδρον.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῆ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς 12
ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν
κύλινδρον, οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

1) Λ supra scr. m. 1.

κύλινδρος γὰρ ὁ $A\Delta$ ἐπιπέδῳ τῷ $H\Theta$ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς AB , $\Gamma\Delta$, καὶ συμβαλλέτω τῷ τοῦ κυλίνδρου ἄξονι τὸ $H\Theta$ ἐπίπεδον κατὰ τὸ K σημεῖον. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ $H\Theta$ κύλινδρος πρὸς τὸν $H\Delta$ κύλινδρον, οὕτως ὁ EK ἄξων. ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ A , M σημεία, καὶ κείσθωσαν τῷ μὲν EK ἄξονι ἴσοι ὅσοιδήποτε ὁ $Z\Xi$, ZM , καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῶν A , N , Ξ , M ¹⁾ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς AB , $\Gamma\Delta$, καὶ νενοήσθωσαν ἐν τοῖς διὰ τῶν A , N , Ξ , M σημείων ἐπιπέδοις περὶ κέντρα τὰ A , N , Ξ , M κύκλοι οἱ $OPR\Sigma$, $TY\Phi X$ ἴσοι ὄντες τοῖς $AB\Gamma\Delta$, καὶ νενοήσθωσαν κύλινδροι οἱ PP , PB , ΔT , TX . καὶ ἐπεὶ οἱ AN , NE , EK ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, οἱ ἄρα PP , HP , BH κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δὲ ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ βάσεις. ἴσοι ἄρα εἰσὶ καὶ οἱ PP , PB , BH κύλινδροι ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ οἱ AN , NE , EK ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ PP , PB , BH κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ πλῆθος τῷ πλῆθει, ὅσαπλασίῳ ἄρα ἐστὶν ὁ AK ἄξων τοῦ EK ἄξονος, τοσαυταπλασίῳ ἐστὶ καὶ ὁ PH κύλινδρος τοῦ BH κυλίνδρου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσαπλασίῳ ἐστὶν ὁ MK ἄξων τοῦ KZ ἄξονος, τοσαυταπλασίῳ ἐστὶ καὶ ὁ XH κύλινδρος τοῦ $H\Delta$ κυλίνδρου. εἰ μὲν οὖν ἴσος ἐστὶν ὁ AK ἄξων τῷ KM ἄξονι, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ PH κύλινδρος τῷ HX κυλίνδρῳ, εἰ δὲ μείζων ἐστὶν ὁ KA ἄξων τοῦ KM ἄξονος, μείζων ἐστὶ καὶ ὁ PH κύλινδρος τοῦ HX κυλίνδρου, εἰ δὲ ἐλάσσων ἐστὶν ὁ AK ἄξων τοῦ

1) A in ras.; supra N scr. M m. 1.

KM ἄξονος, ἐλάσσων ἐστὶ καὶ ὁ ΠH κύλινδρος τοῦ HX κυλίνδρου. τεσσάρων δὴ μεγεθῶν ὄντων, ἀξόνων μὲν τῶν EK , KZ , κυλίνδρων τῶν BH , $H\Delta$, εἴληπται ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ μὲν EK ἄξονος καὶ BH κυλίνδρου ὅ τε KA ἄξων καὶ ὁ ΠH κύλινδρος, τοῦ δὲ KZ ἄξονος καὶ τοῦ $H\Delta$ κυλίνδρου ὅ τε KM ἄξων καὶ ὁ H κύλινδρος, καὶ δέδεικται, ὅτι, εἰ ὑπερέχει ὁ ΔK ἄξων τοῦ KM ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ ΠH κύλινδρος τοῦ HX κυλίνδρου, καὶ εἰ ἴσος ἐστὶν ὁ KA ἄξων τῷ KM ἄξωνι, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΠH κύλινδρος τῷ HX κυλίνδρῳ, καὶ εἰ ἐλάσσων ἐστὶν ὁ ΔK ἄξων τοῦ KM ἄξονος, ἐλάσσων ἐστὶ καὶ ὁ ΠH κύλινδρος τοῦ HX κυλίνδρου, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ EK ἄξων πρὸς τὸν KZ ἄξονα, οὕτως ὁ BH κύλινδρος πρὸς τὸν $H\Delta$ κύλινδρον.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι ¹³ πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη.

ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν AB , $\Gamma\Delta$ κύλινδροι οἱ EB , $Z\Delta$. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ HB ἄξων πρὸς τὸν KA ἄξονα, οὕτως ὁ EB κύλινδρος πρὸς τὸν $Z\Delta$ κύλινδρον.

ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ KA ἄξων ἐπὶ τὸ N σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ $H\Theta$ ἄξωνι ἴσος ὁ ΔN , καὶ περὶ ἄξονα τὸν ΔN κύλινδρος νοείσθω ὁ ΓM . ἐπεὶ οὖν οἱ EB , ΓM κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτὸ εἰσὶν ὕψος, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δὲ εἰσὶν αἱ βάσεις. ἴσος ἄρα καὶ ὁ BE κύλινδρος τῷ ΓM κυλίνδρῳ. καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ZM ἐπιπέδῳ τῷ $\Gamma\Delta$ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓM κύλινδρος πρὸς τὸν $Z\Delta$ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΔN πρὸς

τὸν $ΚΛ$ ἄξονα. ἴσος δὲ ἐστὶν ὁ μὲν $ΓΜ$ κύλινδρος τῷ $ΕΒ$ κυλίνδρῳ, ὁ δὲ $ΛΜ$ ἄξων τῷ $ΗΘ$ ἄξονί ἐστιν. ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ $ΕΒ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΖΔ$ κύλινδρον, οὕτως ὁ $ΗΘ$ ἄξων πρὸς τὸν $ΚΛ$ ἄξονα. ὡς δὲ ὁ $ΒΕ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΖΔ$ κύλινδρον, οὕτως ὁ $ΑΒΗ$ κῶνος πρὸς τὸν $ΓΔΚ$ κῶνον. καὶ ὡς ἄρα ὁ $ΗΘ$ ἄξων πρὸς τὸν $ΚΛ$ ἄξονα, οὕτως ὁ τε $ΑΒΗ$ κῶνος πρὸς τὸν $ΓΔΚ$ κῶνον καὶ ὁ $ΕΒ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΖΔ$ κύλινδρον.

- 14 Τῶν ἴσων κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἐκεῖνοι ἴσοι εἰσὶν.

ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ $ΑΒΓΔ$ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ $ΕΖ$, $ΗΘ$. λέγω, ὅτι τῶν $ΑΒΖ$, $ΓΔΘ$ κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, τουτέστιν ὡς ἡ $ΑΒ$ βάσις πρὸς τὴν $ΓΔ$ βάσιν, οὕτως τὸ $ΗΘ$ ὕψος πρὸς τὸ $ΕΖ$ ὕψος.

τὸ γὰρ $ΕΖ$ ὕψος τῷ $ΗΘ$ ὕψει ἦτοι ἴσον ἐστὶν ἢ οὐ. ἔστω πρότερον ἴσον. οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ $ΑΒΖ$ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΓΔΘ$ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως ἡ $ΑΒ$ βάσις πρὸς τὴν $ΓΔ$ βάσιν. ἴσος δὲ ἐστὶν ὁ $ΑΒΖ$ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ $ΚΔΘ$ κῶνῳ ἢ κυλίνδρῳ. ἴση ἄρα καὶ ἡ $ΑΒ$ βάσις τῇ $ΓΔ$ βάσει. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ $ΕΖ$ ὕψος τῷ $ΗΘ$ ὕψει ἴσον. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $ΑΕ$ βάσις πρὸς τὴν $ΓΔ$ βάσιν, οὕτως τὸ $ΗΘ$ ὕψος πρὸς τὸ $ΕΖ$ ὕψος. μὴ ἔστω δὲ ἴσον τὸ $ΗΘ$ ὕψος τῷ $ΕΖ$ ὕψει, ἀλλ' ἔστω μείζον τὸ $ΗΘ$, καὶ κείσθω τὸ $ΕΖ$

ἴσον τῷ HK , καὶ ἀπὸ βάσεως τῆς $\Gamma\Delta$, ὕψους δὲ τοῦ HK νενοήσθω κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ $\Gamma\Delta K$. ἐπεὶ οὖν ὁ ABZ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ $\Gamma\Delta$ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ AB βάσις πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ βάσιν, οὕτως ὁ ABZ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς $\Gamma\Delta K$ κῶνον ἢ κύλινδρον. ἴσος δὲ ὁ ABZ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ $\Gamma\Delta\Theta$ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ AB βάσις πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ βάσιν, οὕτως ὁ $\Gamma\Delta\Theta$ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν $\Gamma\Delta K$ κῶνον ἢ κύλινδρον. ὡς δὲ ὁ $\Gamma\Delta\Theta$ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν $\Gamma\Delta K$ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως τὸ $H\Theta$ ὕψος πρὸς τὸ HK ὕψος. καὶ ὡς ἄρα ἡ AB βάσις πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ βάσιν, οὕτως τὸ $H\Theta$ ὕψος πρὸς τὸ HK ὕψος. ἴσον δὲ τὸ HK ὕψος τῷ EZ ὕψει. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ AB βάσις πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ βάσιν, οὕτως τὸ $H\Theta$ ὕψος πρὸς τὸ EZ ὕψος. τῶν ABZ , $\Gamma\Delta\Theta$ ἄρα κώνων ἢ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ AB βάσις πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ βάσιν, οὕτως τὸ $H\Theta$ ὕψος πρὸς τὸ EZ ὕψος. λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ $AB\Xi$ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ $\Gamma\Theta\Delta$ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ. πάλιν γὰρ τὸ EZ ὕψος τῷ $H\Theta$ ὕψει ἤτοι ἴσον ἐστὶν ἢ οὐ. ἐστὶν πρότερον ἴσον. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ AB βάσις πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ βάσιν, οὕτως ὁ ABZ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν $\Gamma\Delta\Theta$ κῶνον ἢ κύλινδρον. ὡς δὲ ἡ AB βάσις πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ βάσιν, οὕτως τὸ $H\Theta$ ὕψος πρὸς τὸ EZ ὕψος. καὶ ὡς ἄρα ὁ ABZ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν $\Gamma\Delta\Theta$ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως τὸ $H\Theta$ ὕψος πρὸς τὸ EZ ὕψος. ἴσον δὲ τὸ $H\Theta$ ὕψος τῷ EZ ὕψει. ἴσος ἄρα καὶ ὁ ABZ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ $\Gamma\Delta\Theta$ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ. μὴ ἔστω δὴ ἴσον

τὸ EZ ὕψος τῷ $H\Theta$ ὕψει, καὶ ἔστω μείζον τὸ $H\Theta$ τῷ EZ , καὶ κείσθω τὸ EZ ἴσον τῷ HK . ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB βάσις πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ βάσιν, οὕτως ὁ ABZ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν $\Gamma\Delta K$ κῶνον ἢ κύλινδρον. ὡς δὲ ὁ AB βάσις πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ βάσιν, οὕτως τὸ $H\Theta$ ὕψος πρὸς τὸ EZ ὕψος, τουτέστι πρὸς τὸ HK . καὶ ὡς ἄρα ὁ AZB κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν $\Gamma\Delta K$ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως τὸ $H\Theta$ ὕψος πρὸς τὸ HK ὕψος, ὡς δὲ τὸ $H\Theta$ ὕψος πρὸς τὸ HK ὕψος, οὕτως ὁ $\Gamma\Delta\Theta\Delta BZ$ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$ κῶνον ἢ κύλινδρον. καὶ ὡς ἄρα ὁ ABZ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν $\Gamma\Delta K$ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως ὁ $\Gamma\Delta\Theta$ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν $\Gamma\Delta K$ κῶνον ἢ κύλινδρον. τὰ δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ἴσα ἐστίν. ἴσος ἄρα ὁ ABZ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ $\Gamma\Delta\Theta$ κῶνῳ ἢ κυλίνδρῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

- 15 Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων εἰς τὸν μείζονα κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου.

ἔστωσαν δύο κύκλοι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οἱ $AB\Gamma$, ΔEZ . δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν $AB\Gamma\Delta$ πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάττονος κύκλου τοῦ EZ .

ἤχθωσαν τῶν $AB\Gamma$, ΔEZ κύκλων δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ $A\Gamma$, ΔB , καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Z τῇ $A\Gamma$ πρὸς ὀρθὰς ἡ ZH καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ $Z\Theta$. ἐφάπτεται ἄρα τοῦ EZ κύκλου. τέμνουτες δὴ τὴν $\Gamma\Delta$ περιφέρειαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς $\Gamma\Delta$ δίχα καὶ τοῦτο αἰεὶ ποιοῦντες καταλήψομεν τινα περιφέρειαν, ἣτις ἔσται ἐλάσσων τῆς $H\Gamma$. λελήφθω καὶ

ἔστω ἡ $KΓ$, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ K σημείου ἐπὶ τὴν $AΓ$ κάθετος ἡ $KΛ$ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ M , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $KΓ$, $ΓΜ$. ἑκατέρα ἄρα τῶν $KΓ$, $ΓΜ$ πολυγώνου ἰσοπλεύρου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν $ABΓΔ$ ἐγγραφομένου. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ $HΘ$ τῇ $KΜ$, ἡ δὲ $HΘ$ ἐφάπτεται τοῦ EZ κύκλου, ἡ $KΜ$ ἄρα οὐκ ἐφάπτεται τοῦ EZ κύκλου. πολλῶ ἄρα οὐδετέρα τῶν $KΓ$, $ΓΜ$ ἐφάπτεται τοῦ EZ κύκλου. ἂν ἄρα τῇ $KΓ$ περιφερείᾳ ἴσας περιφερείας ἀφαιρῶμεν κατὰ τὸ ἐξῆς καὶ ἐπιζευγνύομεν εὐθείας, ἔσται εἰς τὸν $ABΓΔ$ κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγραμμένον μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ EZ , καὶ φανερόν, ὅτι τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον ἀρτιόπλευρόν ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν 16
μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἢ καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

ἐννοεῖσθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὔσαι τὸ A . δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ κέντρον. ποιήσει δὴ τομὰς μεγίστους κύκλους. ποιείτω τοὺς $ABΓΔ$, EZH , καὶ ἔστω ὁ μὲν $BΓΔ$ κύκλος ἐν τῇ μείζονι σφαίρα, ὁ δὲ EZH ἐν τῇ ἐλάσσονι. καὶ ἤχθωσαν τοῦ $BΓΔ$ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ BE , $ΓΔ$. καὶ δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων $BΓΔ$, EZH εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν $BΓΔ$ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράψθω μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος

κύκλου τοῦ EZH , καὶ ἔστωσαν πλευραὶ τοῦ πολυ-
γώνου αἱ BK, KA, AM, MG , καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ
 MA ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ , καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ A
σημεῖου τῷ τοῦ $B\Gamma\Delta$ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ
 AN καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς μείζονος σφαι-
ρας κατὰ τὸ N σημεῖον, καὶ δι' ἑκατέρας τῶν $\Gamma\Delta,$
 $M\Xi$ καὶ τῆς AN ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω. ποιήσει δὴ
τομὰς κύκλους. ποιεῖτω, ὧν ἡμικύκλια ἔστω τὰ $\Gamma N\Delta,$
 $MN\Xi$. καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ $B\Gamma\Delta, \Gamma N\Delta, MN\Xi$
κύκλοι ἀλλήλοις, ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ $B\Gamma$ τεταρτη-
μορίῳ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν
ἑκατέρῳ τῷ $\Gamma N, MN$ τῇ MG ἴσαι. ἐνηρμόσθωσαν
καὶ ἔστωσαν αἱ $\Gamma O, O\Pi, \Pi P, PN, N\Sigma, \Sigma T, T\Gamma,$
 ΓM , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\Gamma O, T\Pi, EP$, καὶ ἀπὸ
μὲν τοῦ O ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$ κάθετος ἤχθω ἡ $O\Phi$, ἀπὸ
δὲ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν $M\Xi$ ἡ ΓX , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΦX .
ἐπεὶ οὖν ἡ NA ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ $B\Gamma$ ἐπίπεδον, καὶ
πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς NA ἐπίπεδα ὀρθὰ ἐστὶ πρὸς
τὸ $B\Gamma$ ἐπίπεδον. ἐν δέ τι τῶν διὰ τῆς NA ἐπιπέδων
ἐστὶν ἡ $\Gamma N\Delta$ κύκλος. ὁ $\Gamma N\Delta$ ἄρα κύκλος ὀρθός
ἐστὶ πρὸς τὸν $B\Gamma\Delta$ κύκλον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ
 $MN\Xi$ κύκλος ὀρθός ἐστὶ πρὸς τὸν $B\Gamma\Delta$ κύκλον. καὶ
ἐπεὶ τὸ $\Gamma N\Delta$ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστὶ πρὸς τὸ $B\Gamma\Delta$,
καὶ τῇ κοινῇ τομῇ αὐτῶν τῇ $\Gamma\Delta$ πρὸς ὀρθὰς ἤκται
ἐν τῷ $\Gamma N\Delta$ ἐπιπέδῳ ἡ $O\Phi$, ἡ $O\Phi$ ἄρα καὶ τῷ $B\Gamma\Delta$
ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓX
τῷ $B\Gamma\Delta$ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. παράλληλος ἄρα
ἐστὶν ἡ $O\Phi$ τῇ ΓX . καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓM τῇ
 $O\Gamma$, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓM τετράγωνον τῷ ἀπὸ
τῆς $O\Gamma$ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς $O\Gamma$ ἴσον
ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $\Delta\Gamma\Phi$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΓM ἴσον ἐστὶ

τὸ ἀπὸ τῆς¹⁾ $\Xi M X$. καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $\Delta Γ Φ$ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $\Xi M X$ καὶ $\Delta Γ Φ$ ²⁾ τῷ ὑπὸ τῶν $\Xi M X$. καὶ ἐστὶν ἴση ἡ $\Delta Γ$ τῇ ΞM . ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $Γ Φ$ τῇ $M X$. ἐστὶ δὲ καὶ ὅλη ἡ $Γ Α$ ὅλη τῇ $A M$ ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $Φ X$ τῇ $M Γ$. πάλιν ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς $E Γ Θ$ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $M Γ$ τετραγώνῳ, ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς $Γ Ο$ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $Γ Φ$, $Φ Ο$. ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ $Γ Φ Ο$ γωνία. τῷ δ' ἀπὸ τῆς $M Γ$ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $M X$, $X Γ$. ὀρθὴ γὰρ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $M X Ο$ γωνία. καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $Γ Φ$, $Φ Ο$ ἄρα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $M X$, $X Γ$, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς $Γ Φ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $M X$. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $Φ Ο$ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς $X Γ$ ἐστὶν ἴσον. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ $Φ Ο$ τῇ $Γ X$. ἐστὶ δὲ αὕτη καὶ παράλληλος. καὶ αἱ $Φ X$, $Ο Γ$ ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι. ἡ ἄρα $Φ X$ τῇ $Γ M$ ἐστὶ παράλληλος. καὶ ἡ $Γ M$ ἄρα τῇ $Ο Γ$ ἐστὶ παράλληλος. καὶ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν εἴληπται τυχόντα σημεῖα τὰ N , M , O , $Γ$, καὶ ἐπεζευγμέναι εἰσὶν αἱ $M Γ$, $Γ Ο$. αἱ ἄρα $Γ M$, $M Γ$, $Γ Ο$, $Ο Γ$ ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ τὸ $Γ M Γ Ο$ τετράπλευρον. τὸ ἄρα $Γ M Γ Ο$ τετράπλευρον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάτερον τῶν $Γ Ο Π Τ$, $Ρ Σ$ τετραπλεύρων ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ $Σ Ρ Ν$ τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $M Γ$ τῇ $Γ Ο$, καὶ παράλληλός ἐστὶν ἡ $M Γ$ τῇ $Γ Ο$, ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶ τὰ M , $Γ$, $Γ$, O σημεῖα. ἤχθῳ ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ $M Γ Γ Ο$ τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ $A Ψ$ καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ $Ψ$. τὸ $Ψ$ ἄρα σημεῖον κέν-

1) ἀπὸ τῆς corr. in ὑπὸ τῶν m. 1.

2) Φ corr. ex X m. 1.

τρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὰ $M, Γ, Ο, Υ$ σημεῖα κύκλου. ἐπεξεύχθω ἡ $ΨΓ$. καὶ ἐπεὶ τετράπλευρον ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ $ΜΓΟΥ$, καὶ τρεῖς αἱ $ΥΜ, ΜΓ, ΓΟ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, καὶ μείζων ἐστὶν ἡ $ΜΓ$ τῆς $ΥΟ$, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΜΓ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓΦ$ μείζον ἐστὶν ἢ διπλάσιον. ἤχθω ἀπὸ τοῦ $ΜΕ$ ἐπὶ τὴν $ΓΦ$ κάθετος ἡ $ΜΩ$. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ $ΓΩ$ τῆς $ΩΔ$, ὡς δὲ ἡ $ΓΩ$ πρὸς τὴν $ΩΔ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΩ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΩΜ$, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΓΩ, ΩΜ$ ἐλάσσονά ἐστι τοῦ δις ἀπὸ τῶν $ΜΩ$. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῶν $ΓΩ, ΩΜ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΜΓ$. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΜΓ$ ἔλασσόν ἐστι τοῦ δις ἀπὸ τῶν $ΜΩ$. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς $ΜΓ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓΨ$ μείζον ἐστὶν ἢ διπλάσιον. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΜΩ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓΨ$ μείζον ἐστὶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΓΑ$ τῆ $ΑΜ$, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΘ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΜ$. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς $ΓΑ$ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΓΨ, ΨΑ$. ὀρθὴ γάρ ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ $Ψ$ γωνία. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς $ΜΑ$ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΜΩ, ΩΑ$. ὀρθὴ γάρ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΜΩΑ$ γωνία. τὰ ἀπὸ τῶν $ΓΨ, ΨΑ$ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΜΩ, ΩΑ$, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς $ΜΩ$ μείζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓΨ$. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΨΑ$ μείζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΩ$. μείζων ἀρα ἡ $ΨΑ$ τῆς $ΑΩ$. ἡ δὲ $ΑΩ$ μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. πολλῷ ἄρα ἡ $ΨΑ$ μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. καὶ ἡ $ΑΨ$ κάθετος ἐπὶ τὸ $ΜΓΟΥ$ ἐπίπεδόν ἐστὶν. τὸ ἄρα $ΜΓΟΥ$ ἐπίπεδον οὐ ψαύει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐκάτερον τῶν $ΥΟΠΥ, ΥΠΡΣ$ τετραπλεύρων οὐ ψαύει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, οὐδὲ τὸ $ΝΣΡ$ τρίγωνον ψαύει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἐὰν δὴ ἐν ἐκάστη τῶν λοιπῶν

τεταρτημορίων τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, ἔξομεν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολυέδρον καὶ ἄρτιόπλευρον ἔγγεγραμμένον μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας.

Ἐὰν δὴ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῷ ἐν τῇ $BΓΔ$ σφαίρα στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολυέδρον ἔγγράψωμεν, ἔσται ἑκάστη τῶν πυραμίδων τῶν βάσιν μὲν ἔχουσῶν τὰ $MΓΟΥ$, $ΥΟΠΤ$, $ΤΠΡΣ$ καὶ τὸ $ΝΟΡ$ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ A σημεῖον, ὁμοία τῇ ὁμοταγεῖ πυραμίδι. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας τριπλασίονα λόγον ἔχουσιν ἢπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. ἑκάστη ἄρα τῶν πυραμίδων τῶν βάσιν τῶν βάσιν μὲν ἔχουσῶν τὰ $MΓΟΥ$, $ΥΟΠΤ$, $ΤΠΡΣ$ τετράπλευρα καὶ τὸ $ΝΣΡ$ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ A σημεῖον, πρὸς ἑκάστην τῶν ὁμοταγῶν πυραμίδων τριπλασίονα¹⁾ λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. καὶ ὅλον ἄρα τὸ πολυέδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. ὡς δὲ ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, οὕτως ἡ $ΓΔ$ πρὸς τὴν διάμετρον τῆς ἑτέρας σφαίρας. καὶ ὅλον ἄρα τὸ πολυέδρον πρὸς ὅλον τὸ πολυέδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $ΓΔ$ πρὸς τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας: ~

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ 17 εἰσὶ τῶν διαμέτρων.

ἔστωσαν σφαῖραι αἱ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, διάμετροι δὲ τῶν $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$ σφαιρῶν ἔστωσαν αἱ $ΒΓ$, $ΕΖ$. λέγω, ὅτι ἡ $ΑΒΓ$ σφαῖρα πρὸς τὴν $ΔΕΖ$ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$.

1) Corr. ex τριπλάσια m. 1.

εἰ γὰρ μὴ ἔχει ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔEZ τριπλασίονα λόγον ἢπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ , ἔξει ἄρα ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα ἢτοι πρὸς ἐλάσσονά τινα σφαῖραν τῆς ΔEZ ἢ πρὸς μείζονα τριπλασίονα λόγον ἢπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ . ἐχέτω πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τὴν $H\Theta K$, καὶ νενοήσθω ἡ ΔEZ τῇ $H\Theta K$ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν τῶν ΔEZ , $H\Theta K$ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν ΔEZ στερεὸν πολυέδρον ἐγγεγράφθω μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας τῆς $H\Theta K$ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν $AB\Gamma$ σφαῖραν τῷ ἐν τῷ ΔEZ στερεῷ πολυέδρῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν πολυέδρον. τὸ ἄρα ἐν τῇ $AB\Gamma$ σφαίρᾳ στερεὸν πολυέδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔEZ σφαίρᾳ στερεὸν πολυέδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ . ἔχει δὲ καὶ ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς τὴν $H\Theta K$ τριπλασίονα λόγον ἢπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ . ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς τὴν $H\Theta K$ σφαῖραν, οὕτως τὸ ἐν τῇ $AB\Gamma$ στερεὸν πολυέδρον. ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολυέδρον, οὕτως ἡ $H\Theta K$ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔEZ σφαίρᾳ στερεὸν πολυέδρον. μείζων δὲ ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου. μείζων ἄρα καὶ ἡ $H\Theta K$ σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ ΔEZ σφαίρᾳ στερεοῦ πολυέδρου. ἀλλὰ καὶ ἐλάσσων· ἐμπεριέχεται γάρ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ $B\Gamma$ σφαῖρα πρὸς ἐλασσόν τινα τῆς ΔEZ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ . ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ ΔEZ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς $AB\Gamma$ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ EZ πρὸς τὴν $B\Gamma$.

λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς μείζον

τινα τῆς ΔEZ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ .

εἰ γὰρ δυνατόν, ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς μείζονα λόγον ἔχέτω τῆς ΔEZ σφαίρας πρὸς τὴν A ἢπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ . ἀνάπαλιν ἄρα ἡ A σφαῖρα πρὸς τὴν $AB\Gamma$ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ EZ πρὸς τὴν $B\Gamma$. ὡς δὲ ἡ A σφαῖρα πρὸς τὴν $AB\Gamma$ σφαῖραν, οὕτως ἡ ΔEZ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς $AB\Gamma$ σφαίρας. καὶ ἡ ΔEZ ἄρα σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς $AB\Gamma$ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ EZ πρὸς τὴν $B\Gamma$. ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔEZ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ . ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα. ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔEZ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ .

Εὐκλείδου στοιχείων¹⁾ ιβ.

1) Infra add. στερεῶν.