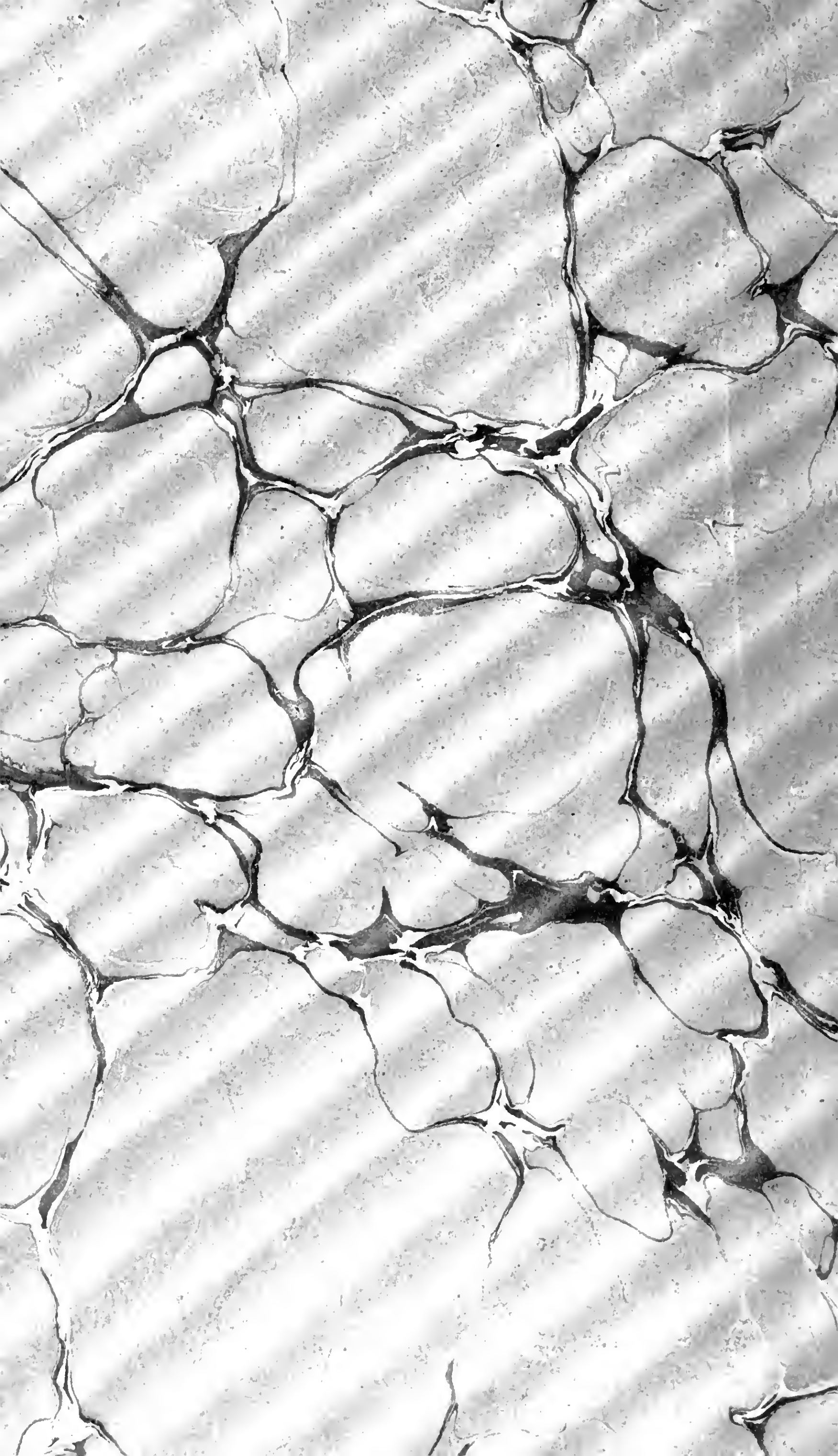
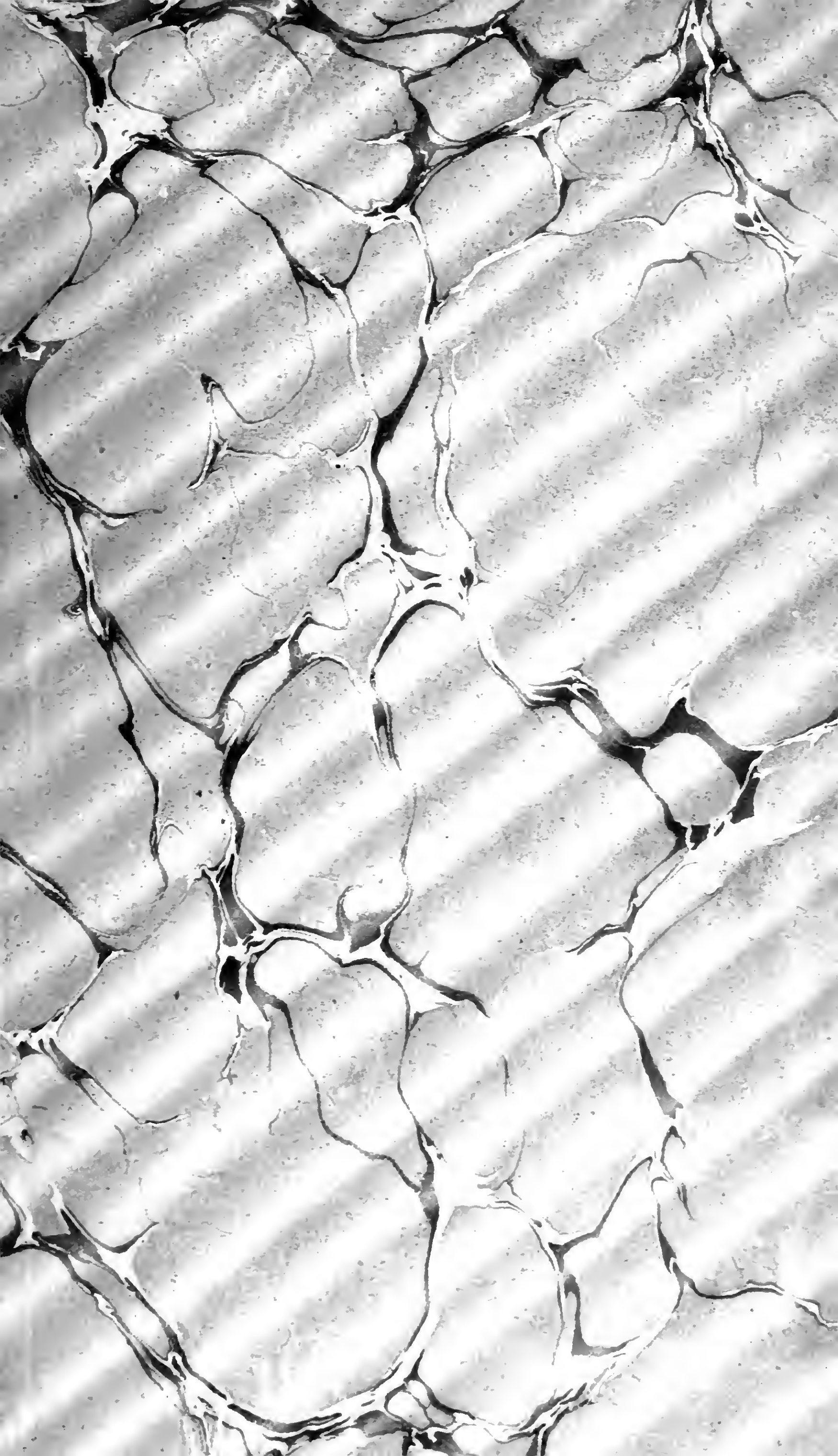




EXERCICES ÉLÉMENTAIRES

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A

DEUX ET A TROIS DIMENSIONS.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

EXERCICES ÉLÉMENTAIRES

DE

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A

DEUX ET A TROIS DIMENSIONS

AVEC UN

Exposé des méthodes de résolution,

SUIVIS DES

ÉNONCÉS DES PROBLÈMES DONNÉS POUR LES COMPOSITIONS D'ADMISSION AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE, NORMALE, CENTRALE, NAVALE, AU CONCOURS GÉNÉRAL, A L'AGRÉGATION.

PAR

A. RÉMOND,

Ancien élève de l'École Polytechnique, Licencié ès Sciences,
Professeur de Mathématiques spéciales à l'École préparatoire de Sainte-Barbe.

PREMIÈRE PARTIE.

GÉOMÉTRIE A DEUX DIMENSIONS.

—

DEUXIÈME ÉDITION.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Quai des Grands-Augustins, 55

—

1898

PRÉFACE.

Les *Traités* de Géométrie analytique sont consacrés surtout à l'exposé des *théories générales* et ne peuvent indiquer que d'une manière incidente quelques applications. Aussi les élèves éprouvent-ils de réelles difficultés à résoudre les problèmes, et vont-ils un peu au hasard à la recherche des solutions.

L'Auteur de cet Ouvrage s'est moins préoccupé de réunir des Exercices de Géométrie analytique que d'exposer les Méthodes générales à employer pour résoudre les problèmes. L'élève qui les possédera parfaitement n'éprouvera aucune difficulté à en faire l'application et pourra même se livrer à des recherches originales.

L'emploi de ces méthodes donne parfois, en raison même de leur généralité, une solution un peu lourde; mais cet inconvénient, qui ne se présente pour l'élève qu'au début de ses études, est largement compensé par le profit qu'il en tire en n'étant jamais arrêté par les questions qu'on lui propose. Le résultat atteint, l'élève reviendra facilement en arrière et acquerra rapidement l'habitude de simplifier son raisonnement et surtout de le plier, en quelque sorte, aux exigences particulières de chaque question.

Tout en voulant rester *élémentaire*, l'Auteur repousse absolument l'emploi de calculs algébriques ayant d'autres principes que ceux qui sont justifiés par la théorie de l'élimination; les procédés de calcul qu'on préconise souvent, pour être parfois un peu plus rapides, dénaturent complètement les équations primitives du problème et donnent un semblant de raison au rejet en bloc, sous le titre non justifié de *solutions étrangères*, de tous les facteurs du résultat final qu'il ne plaît pas à l'élève de conserver (1).

L'Ouvrage est divisé en deux Parties constituant chacune un volume.

La première Partie traite isolément chacune des propriétés de la Géométrie plane; dans chaque Chapitre, l'Auteur rappelle d'abord, en définissant sa notation, les résultats démontrés dans tous les Cours professés conformément aux programmes officiels. Il donne ensuite la forme sous laquelle ces propriétés se présentent ou s'emploient dans les applications; il énonce et démontre celles de ces propriétés qui forment la base de la méthode qu'il préconise, lorsqu'il y a

(1) On trouvera plus loin (Chap. II, p. 24), un exemple du fait que nous signalons et le développement de notre pensée à ce sujet.

lieu, et insiste surtout sur l'emploi de paramètres choisis parmi les éléments concrets de la figure étudiée. Cet emploi permet d'interpréter géométriquement les conditions algébriques qu'on rencontre et de reconnaître, à la seule inspection d'une équation, un certain nombre de propriétés géométriques; parmi ces propriétés, les unes peuvent être la base d'une solution fort simple du problème proposé, d'autres peuvent permettre de conclure à l'existence de propriétés dont il n'est pas question dans l'énoncé, mais dont l'obtention donne plus de valeur à la solution du problème.

Des exemples choisis avec soin montrent, en détail, la mise en œuvre des méthodes indiquées; et, au risque de paraître prolixe, l'Auteur expose tous les calculs et raisonnements intermédiaires; des solutions géométriques accompagnent la plupart des questions et mettent ainsi en parallèle les modes de raisonnement propres à l'Analyse et à la Géométrie pure.

La seconde Partie est consacrée à une étude analogue des principales propriétés de la Géométrie de l'espace.

L'Auteur a réuni les *applications générales*, en deux Chapitres où sont traités complètement un certain nombre de problèmes proposés aux divers examens ou concours, et relatifs tant à la Géométrie plane qu'à celle de l'espace. Enfin, cette Partie se termine par les énoncés de toutes les questions proposées pour l'admission à l'École Polytechnique et à l'École Normale depuis 1850, pour l'admission à l'École Centrale depuis 1866, pour l'admission à l'École Navale depuis

1889, pour le Concours général depuis 1850 et pour l'Agrégation depuis 1871. La plupart de ces énoncés ont été recueillis par nous dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

En résumé, cet Ouvrage est destiné aux élèves; puisse-t-il leur être utile! Notre but sera atteint.

A. Rémond.

Note de l'Auteur. — Nous croyons devoir signaler à nos lecteurs, comme étant le complément tout indiqué de l'Ouvrage que nous leur présentons, celui que notre savant collègue, M. Kœhler, a publié à la Librairie Gauthier-Villars.

M. Kœhler s'adresse aux élèves les plus forts de la classe de Mathématiques spéciales et aux candidats de l'Agrégation. Il expose d'une façon très claire et très complète les théories de la Géométrie moderne. (Voir *Nouvelles Annales*, 3e série, t. V, p. 33.)

A. R.

PREMIÈRE PARTIE.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A DEUX DIMENSIONS.

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE PREMIER.

PRÉLIMINAIRES.

I. — Lieux géométriques, généralités.

1. — Définitions.

(*a*) *Dans le plan, un lieu géométrique est un ensemble de points jouissant d'une propriété déterminée, à l'exclusion de tous les autres points de ce plan.*

Les points d'un lieu géométrique ont, en général, un certain nombre de propriétés communes parmi lesquelles on en choisit une comme définition.

C'est ainsi que le cercle, lieu des points également distants d'un point fixe, est en même temps le lieu du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle variable de forme, mais dont l'hypoténuse reste fixe.

On peut, en général, déduire d'une propriété donnée, d'un lieu géométrique, toutes les autres propriétés de ce lieu, par des considérations, soit géométriques, soit analytiques.

(*b*) *L'équation d'un lieu géométrique est la relation algébrique ou transcendante qui lie les coordonnées de l'un quelconque de ses points.*

Dès lors, chaque fois que nous arriverons à conclure qu'une relation

$$\varphi(x, y) = 0$$

ou

$$f(\rho, \omega) = 0,$$

entre les coordonnées variables d'un point du plan, est la condition nécessaire et suffisante pour que ce point jouisse de certaines propriétés géométriques imposées, nous dirons que cette équation

$$\varphi(x, y) = 0$$

ou

$$f(\rho, \omega) = 0$$

est l'équation du lieu cherché.

2. — Marche à suivre pour trouver l'équation d'un lieu géométrique.

Choix des axes. — En général, on donnera, dans ce qui va suivre, les axes de coordonnées; mais,si l'énoncé n'en fait pas mention,on devra commencer par faire le choix des axes à employer. Pour cela, on examine avec soin si certains points ou certaines droites jouissent de propriétés particulières (centre ou axe de symétrie, par exemple) qu'il est simple de mettre en évidence : on prendra ce point comme origine, ou cette droite comme axe de coordonnées.

Nous reviendrons plus tard sur cette question, souvent assez délicate.

Mise en équation. — Un lieu géométrique peut être défini de deux manières différentes : 1° par une propriété commune à tous les points du lieu; ou 2° par le mouvement d'un point, dont chaque position s'obtient par la construction d'une certaine figure dont les différentes parties dépendent d'un paramètre variable.

Dans le premier cas, il suffit, pour obtenir l'équation du lieu étudié, de *traduire* analytiquement la propriété géométrique donnée.

Dans le second cas, qui est le plus général, après avoir examiné si la construction indiquée est susceptible de simplification, on forme les équations de deux lignes qui, par leur intersection, donnent les points du lieu cherché.

On est ainsi conduit à écrire, en fonction d'un paramètre λ choisi parmi les éléments variables de la figure, les équations de deux lieux géométriques auxiliaires :

$$f(x, y, \lambda) = 0,$$
$$\varphi(x, y, \lambda) = 0.$$

On obtiendrait les coordonnées d'un point quelconque du lieu en résolvant ces équations par rapport à x et à y; on aurait ainsi des expressions de la forme

$$x = \mathrm{F}(\lambda),$$
$$y = \psi(\lambda),$$

qui permettraient de calculer les coordonnées d'autant de points du lieu qu'on voudrait, en donnant à λ des valeurs choisies à volonté.

Mais, outre qu'*on ne peut que rarement expliciter* les fonctions F et ψ, ce procédé serait long et ne donnerait pas la *relation de forme constante* qui existe entre les coordonnées d'un point quelconque du lieu étudié, relation qui est en quelque sorte la *forme synthétique* des conditions géométriques imposées à ces points et qu'il est toujours possible d'obtenir. De plus, sans cette relation on ne pourrait que difficilement reconnaître l'identité de lieux définis par des propriétés différentes dans la forme, mais qui, en réalité, sont corrélatives.

Les coordonnées des points de ces lieux s'exprimeraient, en effet, par des fonctions différant, à la fois, avec la définition donnée et avec le paramètre choisi.

Ces considérations montrent la nécessité de la recherche de cette relation caractéristique, entre les coordonnées d'un point quelconque du lieu, indépendante, à la fois, du paramètre choisi pour la mise en équation, et des propriétés prises comme définition.

Le théorème suivant a pour but d'indiquer comment on obtient cette relation, et de justifier le moyen employé.

3. — Élimination.

Définition. — On appelle *résultant* ou *éliminant* d'un système d'équations

$$\varphi(x) = 0,$$
$$\psi(x) = 0$$

la fonction R, des coefficients des polynômes premiers membres de ces équations, qui s'annule chaque fois que ces polynômes ont un facteur linéaire commun, c'est-à-dire chaque fois que les équations

$$\varphi(x) = 0,$$
$$\psi(x) = 0$$

ont une racine commune.

Soit le système d'équations

$$ax + b = 0,$$
$$a'x + b' = 0.$$

$R = ab' - ba'$ est l'éliminant du système, c'est-à-dire s'annule chaque fois que les polynômes $ax + b$, $a'x + b'$ ont un facteur linéaire commun.

$$R = ab' - ba' = 0$$

est donc la condition nécessaire et suffisante pour que les équations précitées aient une racine commune.

Les traités d'Algèbre donnent la formation de ces éliminants.

THÉORÈME. — Soient

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0, \\ \varphi(x, y, \lambda) = 0 \end{cases}$$

les équations des deux lieux géométriques auxiliaires, définissant par leur intersection les points du lieu dont on cherche l'équation; soit R (x, y) l'éliminant des polynômes premiers membres de ces équations.

Je dis que l'équation du lieu étudié s'obtient en égalant à o la fonction R (x, y).

Je vais, en effet, démontrer :

1° Que les coordonnées de tout point du lieu défini par les équations (1) vérifient l'équation

$$R(x, y) = 0;$$

2° Que, réciproquement, tout point du lieu dont l'équation est

$$R(x, y) = 0$$

fait partie du système des points communs aux lieux, variables avec λ, dont les équations sont

$$f(x, y, \lambda) = 0,$$
$$\varphi(x, y, \lambda) = 0.$$

1° *Les coordonnées de tout point commun aux lieux*

$$f(x, y, \lambda) = 0,$$
$$\varphi(x, y, \lambda) = 0$$

vérifient l'équation

$$R(x, y) = 0.$$

En effet, donnons à λ une valeur déterminée l, nous obtenons deux lieux particuliers

$$f(x, y, l) = 0,$$
$$\varphi(x, y, l) = 0,$$

et si (α, β) sont les coordonnées d'un point, M, commun à ces deux lieux, (α, β) vérifient

$$R(x, y) = 0$$

car les deux équations en λ

$$f(\alpha, \beta, \lambda) = 0,$$
$$\varphi(\alpha, \beta, \lambda) = 0$$

ont alors la racine commune $\lambda = l$;

2° *Tout point (α, β), appartenant au lieu dont l'équation est*

$$R(x, y) = 0,$$

fait partie du système des points communs aux lieux auxiliaires variables

$$f(x, y, \lambda) = 0,$$
$$\varphi(x, y, \lambda) = 0;$$

c'est-à-dire qu'il existe une valeur déterminée $\lambda = l$, donnant les lieux particuliers

$$f(x, y, l) = 0,$$
$$\varphi(x, y, l) = 0,$$

tels que le point (α, β) se trouve parmi leurs points communs.

En effet, les équations

$$f(x, y, \lambda) = 0,$$
$$\varphi(x, y, \lambda) = 0$$

n'ont pas, en général, de racine commune en λ; mais, si les quantités α, β sont choisies de telle sorte que l'équation

$$R(\alpha, \beta) = 0$$

soit satisfaite, les équations particulières

$$f(\alpha, \beta, \lambda) = 0,$$
$$\varphi(\alpha, \beta, \lambda) = 0$$

ont une racine commune; la valeur $\lambda = l$ de cette racine commune satisfait aux conditions énoncées plus haut.

En résumé, en égalant à o l'éliminant du paramètre variable, entre le système des équations auxiliaires (établies conformément à l'énoncé d'une question relative à la recherche d'un lieu géométrique), on établit la condition nécessaire et suffisante pour que les coordonnées (x, y), d'un point du plan, satisfassent aux équations algébriques traduisant les conditions géométriques imposées. *Cette condition nécessaire et suffisante*,

$$R(x, y) = 0,$$

est l'équation du lieu géométrique étudié.

Remarque I. — Les équations indiquées plus haut

$$x = F(\lambda),$$
$$y = \psi(\lambda),$$

qui expriment les coordonnées d'un point quelconque du lieu en fonction du paramètre variable λ, seront employées (chaque fois qu'on pourra expliciter les fonctions F et ψ) quand on voudra déterminer les points du lieu qui correspondent à des valeurs données de ce paramètre; ou encore lorsqu'on voudra distinguer les parties de ce même lieu qui correspondent aux valeurs du paramètre comprises entre des limites données, etc.

Nous citerons comme exemples :

1° La distinction des parties du lieu correspondant à des valeurs *réelles* du paramètre de celles qui correspondent à des valeurs *imaginaires;*

2° La distinction, dans l'étude du lieu des centres d'un système de coniques, des points provenant des centres d'ellipses, de ceux qui proviennent des centres d'hyperboles;

3° La même distinction dans l'étude des lieux de sommets; etc.

REMARQUE II. — Quand un des lieux auxiliaires

$$f(x, y, \lambda) = 0,$$
$$\varphi(x, y, \lambda) = 0$$

passe, quel que soit λ, par un certain nombre de points fixes, le lieu

$$R(x, y) = 0$$

passe par ces points fixes.

En effet, soit $M(\alpha, \beta)$ un point fixe du premier lieu; l'équation

$$f(\alpha, \beta, \lambda) = 0 \tag{1}$$

est une identité; elle est, en particulier, vérifiée par les racines de l'équation

$$\varphi(\alpha, \beta, \lambda) = 0. \tag{2}$$

Or, chaque valeur de λ, tirée de (2), fait que le lieu

$$\varphi(x, y, \lambda) = 0$$

passe en M : si donc il existe une seule racine $\lambda = \lambda_1$ de l'équation (2), le point M sera un point simple du lieu

$$R(x, y) = 0.$$

Si, au contraire, l'équation (2) est du degré p en λ, il y aura, en général, p lieux auxiliaires différents

$$\varphi(x, y, \lambda_1) = 0, \quad \varphi(x, y, \lambda_2) = 0, \quad \ldots, \quad \varphi(x, y, \lambda_p) = 0$$

passant en M; p branches du lieu, provenant des valeurs de λ infiniment voisines de λ_1, de λ_2, ..., de λ_p, se coupent alors en M; on dit que ce point est un point multiple d'ordre p; *réel* s'il existe des *points* réels du lieu infiniment voisins de M; *isolé* dans le cas contraire.

Exemple. — Considérons le lieu défini par les équations

$$(x-a)+\lambda^2(y-b)=0, \tag{1}$$

$$x^2+2\lambda xy-b^2=0. \tag{2}$$

(a) L'équation (1) est celle d'une droite qui passe, quel que soit λ, par le point

$$[\mathrm{M}]\begin{cases} x=a, \\ y=b. \end{cases}$$

Le lieu (2) passera par ce même point, si l'on a

$$a^2+2\lambda ab-b^2=0. \tag{3}$$

Cette équation détermine une seule valeur de λ; dans sa déformation continue, le lieu (2) passe une seule fois au point M; ce point est un *point simple* du lieu étudié.

(b) Le lieu (2) passe, quel que soit λ, par les points communs aux droites

$$x^2-b^2=0,$$

$$xy=0;$$

deux points d'intersection sont à distance finie :

$$[\mathrm{M}_1]\begin{cases} y=0, \\ x=b; \end{cases} \qquad [\mathrm{M}_2]\begin{cases} y=0, \\ x=-b. \end{cases}$$

Le lieu étudié passera en M_1 si le lieu auxiliaire (1) y passe, c'est-à-dire si l'équation

$$(b-a)-b\lambda^2=0$$

est satisfaite.

Il y a deux valeurs de λ qui rendent identiquement nul le premier membre de cette équation : le point M_1 est un point double du lieu étudié, *réel* s'il existe des points réels infiniment voisins de M_1; *isolé* dans le cas contraire.

De même pour le point M_2, etc.

II. — Principaux cas d'élimination.

1. — Éliminant du premier degré.

Le cas le plus simple qui se présente est celui où l'on a à éliminer un paramètre entre deux équations du premier degré par rapport à ce paramètre.

Si l'on appelle x et y les coordonnées d'un point du lieu cherché, les équations auxiliaires seront, dans ce cas, de la forme

$$\varphi(x,y)\lambda + \psi(x,y) = 0,$$
$$\varphi'(x,y)\lambda + \psi'(x,y) = 0$$

ou

$$A\lambda + B = 0,$$
$$A'\lambda + B' = 0;$$

l'éliminant de λ s'écrit

$$AB' - BA' = 0$$

ou

$$(1) \qquad \varphi(x,y)\psi'(x,y) - \psi(x,y)\varphi'(x,y) = 0.$$

Résultat général. — Tout lieu géométrique, représenté par une équation de cette forme, passe par les points d'intersection de

$$\varphi(x,y) = 0 \text{ avec } \begin{cases} \psi(x,y) = 0, \\ \varphi'(x,y) = 0; \end{cases}$$

et de

$$\psi'(x,y) = 0 \text{ avec } \begin{cases} \psi(x,y) = 0, \\ \varphi'(x,y) = 0, \end{cases}$$

ce qui s'accorde, d'ailleurs, avec ce que nous avons dit plus haut (Rem., p. 10).

On donne le nom de *lieux auxiliaires* aux lieux géométriques dont les équations sont

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0,$$
$$\varphi'(x, y) = 0, \quad \psi'(x, y) = 0.$$

On rencontrera souvent des lieux du second degré sous cette forme : les lieux auxiliaires

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \quad \varphi' = 0, \quad \psi' = 0$$

sont, dans ce cas, des droites ; l'équation

$$\varphi(x, y)\psi'(x, y) - \psi(x, y)\varphi'(x, y) = 0$$

met alors en évidence quatre points fixes du lieu.

Nous verrons quel parti on tire de cette propriété générale, pour la détermination géométrique des coniques.

Dans le cas où les lieux auxiliaires

$$\varphi'(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0$$

sont identiques, l'équation (1) prend la forme

$$\varphi(x, y)\psi'(x, y) - \psi^2(x, y) = 0.$$

Le lieu qu'elle représente est alors tangent aux lieux

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi'(x, y) = 0$$

à leurs rencontres avec le lieu auxiliaire

$$\psi(x, y) = 0.$$

En chacun des points communs, on a, en effet, deux points confondus, sur les lieux

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi'(x, y) = 0,$$

ce qui constitue le contact.

Enfin, dans le cas où l'équation (1) prend la forme

$$\varphi^2(x, y) - \psi^2(x, y) = 0,$$

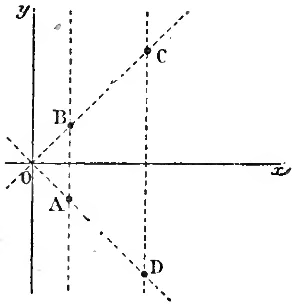
le lieu qu'elle représente se décompose en deux autres dont les équations sont

$$\varphi(x, y) + \psi(x, y) = 0,$$
$$\varphi(x, y) - \psi(x, y) = 0.$$

Exemple. — L'équation

$$x^2 - y^2 - \lambda^2(x - a)(x - b) = 0$$

Fig. 1.



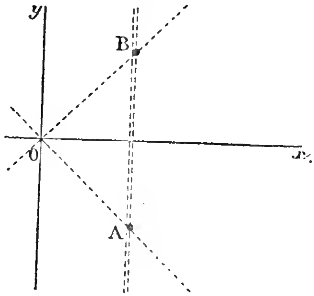
est celle d'une courbe du second ordre passant aux points communs aux quatre droites

$$x - y = 0, \quad x + y = 0, \quad x - a = 0, \quad x - b = 0,$$

c'est-à-dire en A, B, C, D (*fig.* 1).

Si la droite CD se rapproche de AB jusqu'à coïncider avec elle,

Fig. 2.



l'équation devient

$$x^2 - y^2 - \lambda^2(x - a)^2 = 0,$$

et la courbe est tangente aux droites

$$x + y = 0, \quad x - y = 0$$

aux points A, B (*fig.* 2) de rencontre avec la droite double

$$(x - a)^2 = 0.$$

2. — Élimination de deux paramètres entre trois équations dont deux sont linéaires.

On rencontrera certains cas dans lesquels on devra éliminer deux paramètres entre trois équations : deux de ces équations étant du premier degré par rapport aux paramètres, la troisième de degré quelconque.

Soient λ et μ les paramètres variables,

$$A\lambda + B\mu + C = 0,$$
$$A'\lambda + B'\mu + C' = 0,$$
$$\varphi(\lambda, \mu) = 0$$

les équations auxiliaires.

On tirera des deux premières

$$\frac{\lambda}{BC' - CB'} = \frac{\mu}{CA' - AC'} = \frac{1}{AB' - BA'}$$

et l'on portera ces valeurs dans l'équation

$$\varphi(\lambda, \mu) = 0.$$

Le résultat obtenu est l'équation du lieu.

Remarque. — Il sera souvent avantageux de rendre préalablement homogènes les équations auxiliaires, au moyen d'un troisième paramètre ν, et de remplacer, dans

$$\varphi(\lambda, \mu, \nu) = 0,$$

les paramètres λ, μ, ν par les quantités proportionnelles

$$BC' - CB', \quad CA' - AC', \quad AB' - BA';$$

l'équation obtenue ainsi est écrite sous forme entière.

3. — Élimination d'une fonction des paramètres variables.

Dans les équations de lieux auxiliaires figurent, quelquefois, des fonctions d'un ou de plusieurs des paramètres entrant dans la question : on éliminera alors, non les paramètres isolément, mais ces *fonctions* en les considérant comme des paramètres nouveaux.

Exemple. — Entre les équations

$$x(\lambda^2+\mu) - y(\lambda-1) + a = 0,$$
$$x(\lambda-1) + y(\lambda^2+\mu) + b = 0,$$
$$ax + by + (\lambda^2+\mu) = 0,$$

on éliminera $(\lambda^2+\mu)$ et $(\lambda-1)$ et non λ et μ.

4. — Élimination d'un angle.

Quand on emploie comme paramètre variable un angle φ, on est souvent amené à des équations de la forme

$$(1) \qquad a\cos\varphi + b\sin\varphi + c = 0,$$
$$(2) \qquad a'\cos\varphi + b'\sin\varphi + c' = 0,$$

a, b, c, a', b', c', étant des fonctions de x et de y, coordonnées courantes du lieu.

On doit joindre à ces équations la relation générale

$$(3) \qquad \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

L'élimination de l'angle φ se fera alors de la manière suivante.

On tire des équations linéaires (1) et (2) des quantités proportionnelles à $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ et z, variable d'homogénéité, et on les porte dans l'équation (3) également rendue homogène ; on obtient ainsi

$$(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 = (ab' - ba')^2.$$

5. — Éliminant du second degré.

Si les équations des lieux auxiliaires sont de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} A\lambda^2 + B\lambda + C = 0, \\ A'\lambda^2 + B'\lambda + C' = 0, \end{cases}$$

l'éliminant de λ entre les deux équations peut se mettre sous les deux formes suivantes :

$$(2) \qquad (AC' - CA')^2 - (AB' - BA')(BC' - CB') = 0,$$

$$(3) \quad (BB' - 2AC' - 2CA')^2 - (B^2 - 4AC)(B'^2 - 4A'C') = 0.$$

Dans ce cas, on devra toujours former les deux éliminants, car, sous chacune des formes, des propriétés différentes sont en évidence, et, de plus, quand l'un des éliminants est compliqué, le second est le plus souvent très simple. Quand les équations (1) ont une racine commune, c'est-à-dire quand les résultants (2) et (3) sont identiquement nuls, cette racine commune est fournie par l'équation

$$(BA' - AB')\lambda + CA' - AC' = 0.$$

Remarque. — Si, parmi les équations servant à la mise en équation d'un problème, l'une d'elles est indépendante du ou des paramètres variables, elle est *l'équation* du lieu. Nous rencontrerons plusieurs exemples de ce fait.

6. — Éliminants d'ordre supérieur au second.

Nous renvoyons aux Traités d'Algèbre pour la formation et le calcul des éliminants d'ordre supérieur au second.

7. — Quelques formules de Trigonométrie.

(*a*) Si l'on pose $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = \mu$, on exprime les lignes trigonométriques de l'angle φ, au moyen de fonctions rationnelles de μ, qu'il est utile de connaître :

$$\sin\varphi = \frac{2\mu}{1+\mu^2}; \qquad \cos\varphi = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}; \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{2\mu}{1-\mu^2}.$$

Voici, à ce sujet, quelques formules dont on fait un fréquent usage lorsque le paramètre variable est un angle :

$$1+\sin\varphi = \frac{(1+\mu)^2}{1+\mu^2}; \qquad 1-\sin\varphi = \frac{(1-\mu)^2}{1+\mu^2};$$

$$1+\cos\varphi = \frac{2}{1+\mu^2}; \qquad 1-\cos\varphi = \frac{2\mu^2}{1+\mu^2}.$$

(*b*) Si l'on pose, au contraire, $\cot\frac{\varphi}{2} = \nu$, les formules correspondantes deviennent

$$\sin\varphi = \frac{2\nu}{1+\nu^2}; \qquad \cos\varphi = \frac{\nu^2-1}{1+\nu^2}; \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{2\nu}{\nu^2-1};$$

$$1+\sin\varphi = \frac{(\nu+1)^2}{1+\nu^2}; \qquad 1-\sin\varphi = \frac{(\nu-1)^2}{1+\nu^2};$$

$$1+\cos\varphi = \frac{2\nu^2}{1+\nu^2}; \qquad 1-\cos\varphi = \frac{2}{1+\nu^2}.$$

Exemple. — Nous rencontrerons (Applications générales), les coordonnées d'un lieu géométrique sous la forme

$$x = \frac{2a\mu}{(1+\mu^2)^2}; \qquad y = \frac{a\mu^2(1-\mu^2)}{(1+\mu^2)^2};$$

en posant

$$\mu = \cot\frac{\varphi}{2},$$

on obtient, par la transformation indiquée,

$$x = \frac{a}{2}\sin\varphi\,(1-\cos\varphi),$$

$$y = -\frac{a}{2}\cos\varphi\,(1+\cos\varphi).$$

CHAPITRE II.

LIGNE DROITE.

Rappel de résultats.

(a) L'équation générale des droites passant à l'intersection de deux droites

$$D = 0, \quad D' = 0$$

est

$$D + \lambda D' = 0.$$

(b) L'équation du faisceau des droites qui joignent l'origine aux points de rencontre de deux courbes

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0$$

s'obtient en rendant les deux équations homogènes, au moyen d'une variable auxiliaire et en éliminant cette variable entre les équations obtenues.

En particulier, si l'une des courbes est la droite $ux + vy - 1 = 0$, il suffit de rendre homogène l'autre équation, au moyen de la fonction $(ux + vy)$.

Exemple. — Soit

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation d'une courbe,

$$ux + vy - 1 = 0$$

une transversale; l'équation du faisceau des droites qui joignent l'origine aux points de rencontre de la droite et de la courbe est

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(Dx + Ey)(ux + vy) + F(ux + vy)^2 = 0.$$

(*c*) La fonction $\frac{Ax + By + C}{+\sqrt{A^2 + B^2}}$ donne, avec son signe, la distance du point (x, y) à la droite représentée par l'équation

$$Ax + By + C = 0.$$

(*d*) L'angle des droites

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$$

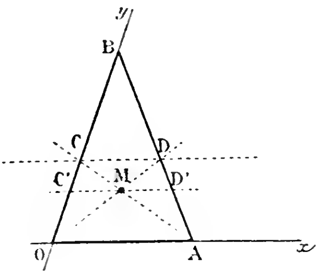
est donné par

$$\operatorname{tang}^2 V = \frac{4(B^2 - AC)}{(A + C)^2}.$$

I. — Lieux géométriques dont les points sont en ligne droite.

1. *On donne (fig. 3) un triangle* AOB, *on mène une*

Fig. 3.



parallèle quelconque CD *à* OA. *On demande le lieu du point* M, *rencontre des droites* AC, OD, *quand* CD *se déplace dans le plan du triangle.*

Prenons comme axes de coordonnées les côtés OA, OB du triangle, soit

$$OA = a, \quad OB = b;$$

(1) $$y - \lambda = 0$$

est l'équation de la droite CD.

D'après l'énoncé, le point M est déterminé par l'intersection des droites OD, AC, nous allons écrire les équations de ces droites :

(a) L'équation de la droite AC, dont les coordonnées à l'origine sont (a, λ), s'écrit

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda} - 1 = 0. \tag{2}$$

(b) L'équation de la droite OD peut être obtenue de deux façons : 1° on peut calculer les coordonnées du point D, intersection des droites AB et CD et former l'équation de la droite passant par les deux points O, D ; 2° on peut également former l'équation générale des droites passant en D, intersection des droites AB, CD, et déterminer le paramètre variable que renferme cette équation, de manière à ce que la droite qu'elle représente passe à l'origine ; nous allons employer ce dernier procédé.

L'équation générale des droites passant en D est

$$\mu\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) + y - \lambda = 0.$$

Cette droite passe en O si l'on a

$$\lambda + \mu = 0;$$

l'équation de la droite OD est donc

$$\lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) - y = 0. \tag{3}$$

Dès lors, le point M est défini par l'intersection des droites

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda} - 1 = 0, \tag{2}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{y}{\lambda} = 0. \tag{3}$$

Nous obtiendrons l'équation du lieu du point M en éliminant le paramètre λ, ou plutôt $\frac{1}{\lambda}$, entre ces deux équations; on peut écrire

$$(2) \qquad y\frac{1}{\lambda}+\frac{x}{a}-1=0,$$

$$(3) \qquad -y\frac{1}{\lambda}+\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0;$$

l'éliminant $(AB'-BA')$ donne

$$y\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)+y\left(\frac{x}{a}-1\right)=0,$$

c'est-à-dire

$$y\left(\frac{2x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)=0.$$

Le lieu se décompose donc en

$$y=0,$$

$$\frac{x}{\left(\frac{a}{2}\right)}+\frac{y}{b}-1=0;$$

la seconde de ces équations est celle de la médiane du triangle AOB passant au sommet B.

Quant à la première partie du lieu, qu'on rejette souvent à tort, sous le titre de solution étrangère, elle provient d'un état particulier de la figure, dans lequel le point M peut occuper une position quelconque sur Ox; lorsque la droite CD se rapproche de Ox, le quadrilatère OACD s'aplatit, et les diagonales AC, OD tendent à coïncider : le point M tend vers une position limite, milieu de CA; au moment où CD coïncide avec Ox, les diagonales sont confondues, le point M a une position quelconque sur Ox.

Solution géométrique. — Le point M est à chaque instant le conjugué harmonique, par rapport au segment CD', du point rejeté à l'infini sur cette droite; M est donc le milieu de C'D' : le lieu de ce point est la médiane issue de B. Quand CD coïncide avec Ox, on voit que tous les points de cette droite répondent à l'énoncé.

REMARQUE. — Nous ferons remarquer que si l'on avait opéré l'élimination de λ, comme on l'indique souvent, en *combinant* les équations, par addition, par exemple, on aurait obtenu, comme équation du lieu,

$$\frac{2x}{a}+\frac{y}{b}-1=0;$$

ce résultat, où manque la solution

$$y=0,$$

vient de ce que, en additionnant, on a éliminé non pas $\frac{1}{\lambda}$ mais en réalité $\frac{y}{\lambda}$.

On répond que les solutions ainsi disparues correspondent à des états particuliers et ne sont pas la **vraie** solution de la question.

Nous ferons observer que la **vraie** solution d'une question est la solution générale; et que cette solution complète obtenue, c'est au géomètre à distinguer les parties qui proviennent d'un état particulier de la figure où certains caractères dont l'énoncé suppose l'existence, sont modifiés ou n'existent plus, de celles qui proviennent du **déplacement continu** du point dont on cherche le lieu.

Puisqu'**on est forcé** d'admettre que l'élimination par les petits moyens (*qui a l'inconvénient d'exiger la recherche dans chaque cas particulier du petit moyen à employer*) entraîne la disparition de certains facteurs du produit, dont on ne peut pas, en général, déterminer la loi de formation, rien ne prouve que ces facteurs disparus ne constituent pas une partie ou la totalité de la **vraie** solution.

Dans les problèmes que l'on a à traiter dans cet Ouvrage, il serait souvent possible d'étudier géométriquement la question et de reconnaître *a priori* toutes les solutions; mais dans beaucoup de questions cette solution n'est pas possible ou exige des connaissances et une expérience que n'a pas celui qui est appelé à résoudre le problème posé.

En résumé, nous recommandons de ne jamais employer d'autres moyens d'élimination que les procédés généraux, et de ne jamais rejeter sans examen une solution sous la dénomination de solution étrangère. — La discussion des résultats obtenus constitue, dans la résolution d'un problème, une partie aussi importante que l'obtention de ces résultats; et, à notre avis, une question n'est traitée complètement qu'après la discussion de la solution obtenue.

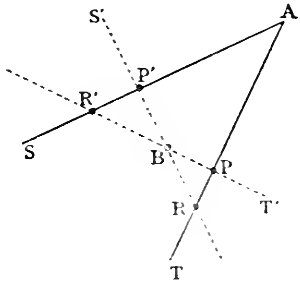
On citera bien des exemples où des facteurs du genre de celui qui nous occupe sont réellement *étrangers* à la question; mais ces facteurs proviendront de mauvais calculs algébriques, au courant desquels on les aura introduits, ou bien de la substitution, dans la traduction analytique de l'énoncé, d'une condition plus générale, à une condition donnée.

Par exemple, si dans le problème suivant :

« *Un angle variable suivant une loi donnée... tourne autour de son sommet fixe* A; *on demande le lieu des projections d'un point fixe* B *sur les côtés de l'angle* »

on traite la question en écrivant que les points dont on demande

Fig. 4.



le lieu sont à l'intersection du faisceau des droites AS, AT (*fig.* 4) représentées par leur équation quadratique, avec le faisceau des droites perpendiculaires BS', BT', également représentées par leur équation quadratique (ce qui semble naturel, au premier abord, puisque l'énoncé donne *ensemble* les droites AT, AS), on aura défini, non les deux points P, P', que vise l'énoncé, mais les quatre points P, P', R, R', communs aux deux faisceaux. — Le lieu qu'on obtiendra par l'élimination du paramètre variable contiendra donc bien un lieu étranger à la question (*le lieu cherché étant évidemment, et quelle que soit la loi de déplacement et de variation de l'angle, le cercle décrit sur* AB *comme diamètre*), mais non étranger à la mise en équation maladroite du problème.

Voir, à ce sujet, la question traitée sur les diamètres conjugués dans l'Ellipse (Problèmes généraux) *et la transformation homographique* (Chap. IV).

Si nous insistons sur ce point, quoique l'emploi des procédés que nous condamnons ne présente que des inconvénients minimes pour la résolution des questions très simples que nous traitons actuellement, c'est que le jeune géomètre qui s'en sert et arrive cahin-caha au résultat, se croit en possession de la véritable méthode et de l'esprit qu'il faut apporter dans ces études; puis, tout à coup, il se heurte à des difficultés qui lui paraissent insurmontables au moment où il aborde des questions plus générales; en employant les mêmes moyens, il perd une partie de la solution ou bien il introduit un lieu étranger; en présence de ces résultats contradictoires, il ne démêle que difficilement la vérité : rien, à notre avis, n'est plus défavorable aux progrès de l'élève, qui a toujours une tendance à croire à la nécessité de l'emploi d'artifices particuliers, pour la résolution des problèmes.

Les méthodes générales qui permettent toujours de traiter les problèmes posés donnent quelquefois des solutions plus lourdes; mais, malgré cet inconvénient apparent, nous les emploierons toujours.

Quand une question est ainsi traitée, on aperçoit souvent une simplification importante à opérer dans la mise en équation, ou un meilleur choix des axes à faire; ce qui permet d'obtenir une solution plus simple, plus élégante.

Nous donnerons des exemples de cette façon de procéder, en montrant comment, le résultat connu, on peut alléger notablement les calculs ou atteindre des résultats plus généraux.

2. *On mène des parallèles à l'un des côtés d'un triangle* (*fig.* 5); *par les points où cette droite rencontre les deux autres côtés, on mène à ces côtés des perpendiculaires qui se coupent en un point dont on demande le lieu.*

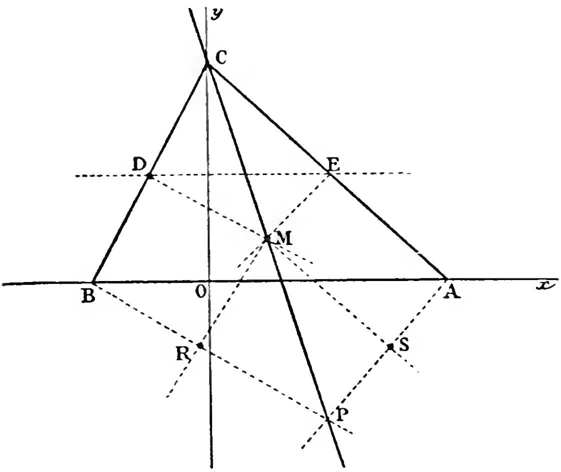
Prenons comme axes de coordonnées la base du triangle et la hauteur correspondante.

Soit $OA = a$; $OB = b$; $OC = c$.
Les équations des droites CA, CB sont

[CA] $$\frac{x}{a} + \frac{y}{c} - 1 = 0,$$

[CB] $$\frac{x}{-b} + \frac{y}{c} - 1 = 0.$$

Fig. 5.



L'équation de la parallèle variable DE est

$$y - \lambda = 0.$$

Les coordonnées des points D et E sont, dès lors ,

$$[D]\begin{cases} x_1 = b\left(\dfrac{\lambda}{c} - 1\right), \\ y_1 = \lambda. \end{cases} \quad [E]\begin{cases} x_2 = a\left(1 - \dfrac{\lambda}{c}\right), \\ y_2 = \lambda. \end{cases}$$

Le point M est défini comme intersection des deux droites

[DM] $$\frac{x-x_1}{c}+\frac{y-y_1}{b}=0,$$

[EM] $$\frac{x-x_2}{c}-\frac{y-y_2}{a}=0,$$

qu'on peut écrire

$$b\left[x-b\left(\frac{\lambda}{c}-1\right)\right]+c(y-\lambda)=0,$$

$$a\left[x-a\left(1-\frac{\lambda}{c}\right)\right]-c(y-\lambda)=0$$

ou, en ordonnant par rapport à λ,

$$\left(-\frac{b^2}{c}-c\right)\lambda+bx+cy+b^2=0,$$

$$\left(\frac{a^2}{c}+c\right)\lambda+ax-cy-a^2=0.$$

L'équation du lieu s'obtiendra en éliminant λ entre ces deux équations

$$(b^2+c^2)\lambda-c(bx+cy+b^2)=0,$$

$$(a^2+c^2)\lambda+c(ax-cy-a^2)=0.$$

L'éliminant donne

(1) $$c(b^2+c^2)(ax-cy-a^2)+c(a^2+c^2)(bx+cy+b^2)=0.$$

Le lieu du point M est une droite passant à l'intersection des droites

[AP] $$a(x-a)-cy=0,$$

[BP] $$b(x+b)+cy=0;$$

la première passe au point A et est perpendiculaire au côté AC du triangle; la seconde passe en B et est perpendiculaire au côté BC; — ce sont les positions que prennent les droites EM, DM, quand la parallèle variable DE coïncide avec AB.

On peut voir d'ailleurs que l'équation (1) devient une identité quand on y fait $x = 0$, $y = c$; la droite qu'elle représente passe donc en C. Elle est complètement déterminée.

Remarquons que l'équation (1) peut s'écrire

$$\frac{ax - cy - a^2}{a^2 + c^2} + \frac{bx + cy + b^2}{b^2 + c^2} = 0$$

ou

$$\frac{\dfrac{ax - cy - a^2}{+\sqrt{a^2 + c^2}}}{\dfrac{bx + cy + b^2}{-\sqrt{b^2 + c^2}}} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}},$$

ce qui signifie que les distances d'un point quelconque du lieu aux droites AP, BP sont entre elles dans le rapport constant des côtés, AC, BC, du triangle fixe. Cette propriété se voit facilement sur la figure.

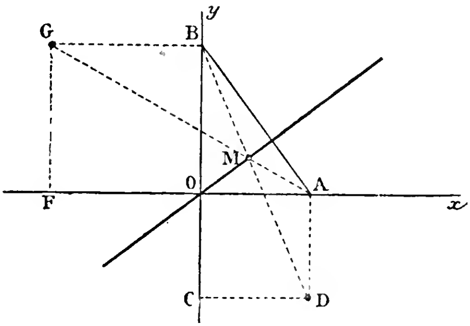
Solution géométrique. — Dans le mode de déplacement auquel est soumis le côté DE, le triangle DEM reste constamment semblable à lui-même et ses côtés restent parallèles à des directions fixes; de plus, deux sommets, D, E, glissent sur deux droites fixes, nous savons que le lieu du troisième sommet est une droite passant à la rencontre des deux premières, etc...

3. *Étant donné* (*fig.* 6) *un triangle rectangle* OAB, *on construit sur les côtés* OA, OB *de l'angle droit, les carrés* OACD *et* OBGF *et l'on mène les droites* AG, BD. *On demande le lieu géométrique du point* M *de rencontre de ces droites quand, l'angle droit* O *restant fixe, l'hypoténuse* AB *se déplace parallèlement à elle-même.*

Prenons comme axes de coordonnées les côtés fixes OA, OB et soit $a = AO$, $b = OB$, les longueurs de ces côtés quand le triangle occupe la position représentée sur la figure.

Le point M est défini par l'intersection des droites AG, BD; nous allons écrire les équations de ces droites : λ dési-

Fig. 6.



gnant un paramètre variable, les coordonnées de A sont

$$x = \lambda a, \quad y = 0;$$

celles de G sont

$$x = -\lambda b, \quad y = \lambda b.$$

L'équation de AG est donc

$$\frac{y}{x - \lambda a} = \frac{\lambda b}{-\lambda a - \lambda b} = \frac{-b}{a+b}.$$

Celle de BD est de même

$$\frac{y - \lambda b}{x} = -\frac{a+b}{a}.$$

On peut écrire ces équations

$$(a+b)y + bx - ab\lambda = 0,$$
$$ay + (a+b)x - ab\lambda = 0.$$

L'équation du lieu du point M s'obtient en éliminant λ; il vient

$$ab[(a+b)y+bx-ay-(a+b)x]=0,$$

c'est-à-dire

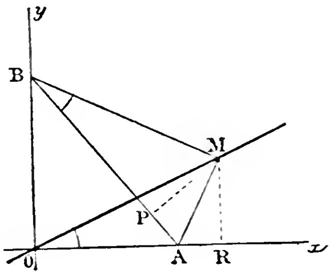
$$by-ax=0,$$

équation d'une droite passant à l'origine et perpendiculaire à la direction fixe AB.

EMPLOI D'UN ANGLE COMME PARAMÈTRE VARIABLE.

4. *Un triangle rectangle (fig. 7) de grandeur invariable se meut dans un plan, de façon que son hypoténuse s'appuie constamment sur deux axes rectangulaires. — On demande le lieu décrit par le sommet de l'angle droit.*

Fig. 7.



Prenons comme axes de coordonnées les droites fixes; désignons par h la hauteur MP du triangle, par ω l'angle variable xAB,

$$a=AP, \quad b=BP;$$

on a, en vertu de l'énoncé, $ab=h^2$.

Soient (x, y) les coordonnées de M.

On a, en projetant OBPM sur Ox,

$$x = -b\cos\omega + h\sin\omega.$$

De même, en projetant OAPM sur Oy,

$$y = a\sin\omega - h\cos\omega.$$

L'équation du lieu du point M s'obtiendra en éliminant l'angle ω entre ces deux équations ; pour cela, nous emploierons la méthode indiquée plus haut (Chap. I, § II, 4).

Il vient

$$-b\cos\omega + h\sin\omega - xz = 0,$$
$$-h\cos\omega + a\sin\omega - yz = 0.$$

Des valeurs proportionnelles à cos ω, sin ω, z, sont fournies par

$$\frac{\cos\omega}{-hy+ax} = \frac{\sin\omega}{hx-by} = \frac{z}{-ab+h^2};$$

l'équation cherchée est donc

$$(1)\qquad (ax-hy)^2 + (hx-by)^2 = (h^2-ab)^2.$$

Mais

$$ab - h^2 = 0$$

ou

$$\frac{b}{h} = \frac{h}{a} = k.$$

En tenant compte de ces relations dans l'équation (1), il vient

$$(1+k^2)(hy-ax)^2 = 0.$$

Le lieu du point M dont l'équation est

$$(hy-ax)^2 = 0$$

est donc une double droite issue de l'origine et dont l'angle avec Ox est égal à l'angle AMP ou ABM.

Il est à remarquer qu'il n'y a qu'une portion de la droite indéfinie

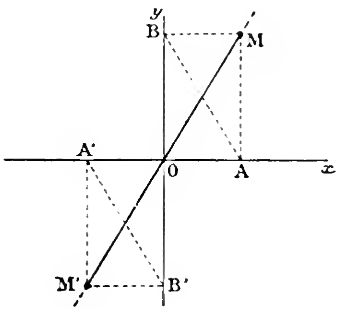
$$hy - ax = 0,$$

qui fasse partie du lieu; l'abscisse x, par exemple, ne peut prendre que les valeurs qui rendent réelles les solutions de l'équation

$$h \sin\omega - b \cos\omega - x = 0,$$

dans laquelle ω est un paramètre variable.

Fig. 8.



On peut écrire cette équation

$$b\left(\frac{h}{b}\sin\omega - \cos\omega\right) = x,$$

ou, en posant $\frac{h}{b} = \operatorname{tang}\varphi$,

$$\sin\omega \sin\varphi - \cos\omega \cos\varphi = \frac{x \cos\varphi}{b},$$

c'est-à-dire

$$\cos(\omega + \varphi) = -\frac{x}{\sqrt{h^2 + b^2}};$$

on doit donc avoir

$$\frac{x^2}{h^2 + b^2} - 1 < 0;$$

x ne peut varier que de $-\sqrt{h^2+b^2}$ à $+\sqrt{h^2+b^2}$; l'abscisse du point mobile prend ces valeurs limites quand le triangle a ses côtés de l'angle droit parallèles aux axes de coordonnées (*fig.* 8).

La portion MM′, en trait plein, de la droite $hy - ax = 0$ fait seule partie du lieu effectif.

Solution géométrique. — Le quadrilatère OAMB (*fig.* 7) étant inscriptible, on voit que, dans le déplacement de la figure, l'angle AOM reste constamment égal à l'angle ABM; le lieu du point M est donc la droite OM faisant avec Ox un angle égal à ABM.

D'ailleurs, l'abscisse du point M reste constamment inférieure à BM. Nous verrons plus tard que la double portion de droite MM′ est une ellipse infiniment aplatie.

II. — Étude de la loi de déplacement d'une droite.

1. Dans l'étude du mouvement d'une droite mobile nous distinguerons trois modes de déplacement :

1° La droite se déplace en passant par un point fixe;

2° La droite reste parallèle à une direction fixe;

3° La droite reste tangente à une courbe fixe; nous ne nous occuperons de ce dernier cas que lorsque la courbe fixe est une conique (Chap. V, Tangentes).

Nous établirons d'abord les propositions suivantes :

Théorème. — *Toute relation linéaire et homogène entre les coefficients variables de l'équation d'une droite indique que cette droite passe constamment par un point fixe.*

Soit

$$\lambda x + \mu y + \nu = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une droite ; supposons qu'entre les coefficients λ, μ, ν on établisse la relation homogène

$$(2) \qquad A\lambda + B\mu + C\nu = 0\,;$$

je dis que la droite (1) passe par un point fixe. Éliminons ν entre les équations (1) et (2), on obtient pour équation de la droite mobile

$$(3) \qquad \lambda\left(x - \frac{A}{C}\right) + \mu\left(y - \frac{B}{C}\right) = 0\,;$$

cette équation montre que la droite passe constamment par le point dont les coordonnées sont

$$x_1 = \frac{A}{C}, \quad y_1 = \frac{B}{C}.$$

Théorème. — *Toute relation linéaire et homogène entre les coefficients de x et de y, dans l'équation d'une droite, indique que la droite se déplace parallèlement à une direction fixe.*

Le point (x_1, y_1) est, en effet, rejeté à l'infini ($C = 0$), mais dans la direction fixe $\frac{y_1}{x_1} = \frac{B}{A}$.

Remarque. — On reconnaît encore qu'une droite passe par un point fixe quand son équation est de la forme

$$D + \lambda D' = 0,$$

$D = 0$, $D' = 0$ étant les équations de deux droites.

2. On considère (*fig.* 9) *un rectangle de périmètre constant* $2a$; A *et* B *étant deux sommets opposés, on abaisse du sommet* C *une perpendiculaire sur* AB; *trouver la loi de déplacement de cette droite.*

Prenons comme axes de coordonnées les côtés OA, OB, du rectangle; soit

$$OA = \lambda, \quad OB = \mu;$$

on doit avoir

$$(1) \qquad \lambda + \mu = a.$$

L'équation de la droite AB est

$$(2) \qquad \frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} - 1 = 0;$$

celle de la droite CD, qui lui est perpendiculaire et passe en C (λ, μ), est

$$\frac{1}{\mu}(x - \lambda) - \frac{1}{\lambda}(y - \mu) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(3) \qquad \lambda x - \mu y - \lambda^2 + \mu^2 = 0,$$

ou, en éliminant μ au moyen de l'équation (1),

$$\lambda x - (a - \lambda) y - \lambda^2 + (a - \lambda)^2 = 0,$$

qu'on peut écrire

$$\lambda(x + y - 2a) - a(y - a) = 0.$$

La droite CD passe donc par un point fixe, intersection des droites

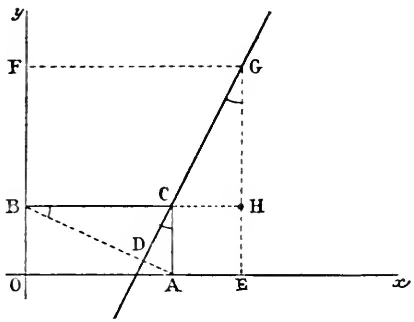
$$x + y - 2a = 0,$$
$$y - a = 0.$$

Solution géométrique. — Portons OE = OF = a (*fig.* 9). Ces droites sont les positions limites du rectangle, quand l'une des dimensions devient nulle. — Les perpendiculaires aux diagonales sont alors EG = FG, respectivement perpendiculaires aux axes.

Je dis que toutes les droites CD passent en G.

En effet, je joins CG et je vais prouver que les trois points D, C, G sont en ligne droite; les triangles rectangles CGH, ABC sont égaux comme ayant deux côtés égaux chacun à chacun, $BC = GH$, $CA = CH$; il s'ensuit que les angles en B et G sont égaux; or, les angles ACD, CBD sont égaux; dès lors les angles égaux ACD, HGC, ayant la position de

Fig. 9.



correspondants, sont tels que les côtés CG, CD sont en ligne droite. C. Q. F. D.

3. *On donne l'équation d'une courbe rapportée à des axes rectangulaires*

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Exy = 0;$$

démontrer que les cordes de cette courbe, vues de l'origine sous un angle droit, passent par un point fixe situé sur la courbe.

Soit

$$(1) \qquad ux + vy - 1 = 0$$

l'équation d'une sécante quelconque, l'équation du faisceau des droites qui joignent l'origine aux points de rencontre de cette sécante et de la courbe est

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Exy(ux + vy) = 0.$$

Formons l'équation aux coefficients angulaires de ces droites; on a, en posant $\frac{y}{x} = z$,

(2) $$Dz^3 + (C + Ev)z^2 + (B + Eu)z + A = 0.$$

Si deux des rayons du faisceau sont rectangulaires, le produit de leurs coefficients angulaires est -1; le coefficient angulaire du troisième rayon est donc $\frac{A}{D}$.

Si nous exprimons que $z = \frac{A}{D}$ est racine de l'équation (2), nous aurons la relation qui doit exister entre (u, v) pour que la droite

$$ux + vy - 1 = 0$$

remplisse les conditions de l'énoncé.

Or, l'équation de condition

$$DA^3 + (C + Ev)A^2D + (B + Eu)AD^2 + AD^3 = 0$$

ou

(3) $$A^2 + (C + Ev)A + (B + Eu)D + D^2 = 0$$

est du premier degré par rapport à (u, v). La sécante (1) passe donc par un point fixe.

On peut écrire (3) sous la forme

$$\frac{ED}{A^2 + AC + BD + D^2}u + \frac{EA}{A^2 + AC + BD + D^2}v + 1 = 0;$$

les coordonnées du point fixe sont donc

$$x_1 = -\frac{ED}{A^2 + AC + BD + D^2},$$

$$y_1 = -\frac{EA}{A^2 + AC + BD + D^2}.$$

Ce point est sur la courbe; car, si l'on substitue ses coordonnées dans le premier membre de l'équation donnée, on obtient

$$-\mathrm{A.E^3D^3}-\mathrm{B.E^2D^2.EA}-\mathrm{C.ED.E^2A^2}-\mathrm{D.E^3A^3}$$
$$+\mathrm{E.ED.EA(A^2+AC+BD+D^2)}$$

ou

$$\mathrm{AED[E^2(A^2+AC+BD+D^2)-E^2D^2-BE^2D-ACE^2-A^2E^2]};$$

la quantité entre crochets est identiquement nulle.

DÉPLACEMENT DE LA DROITE JOIGNANT DEUX POINTS HOMOLOGUES DANS UNE TRANSFORMATION DE FIGURE.

4. *On donne* (*fig.* 10) *deux axes rectangulaires*, Ox, Oy, *et une droite* Az *parallèle à* Oy, *on prend un point* M *quelconque du plan: on mène les droites* OM, MD (*perpendiculaire à* Az), OD, BM′ (*parallèle à* Ox); *on demande :* 1° *d'exprimer les coordonnées du point* M′ *en fonction de celles du point* M; 2° *de prouver que la droite* MM′ *passe par un point fixe quelle que soit la position du point* M.

1° Soit : OA $= a$; (x, y) les coordonnées du point M; (x', y') celles du point M′. On a simplement sur la figure

$$\frac{y'}{y}=\frac{a}{x},\quad \frac{x'}{a}=\frac{y'}{y}=\frac{a}{x};$$

dès lors, les coordonnées de M′ sont

$$x'=\frac{a^2}{x},\quad y'=a\frac{y}{x}.$$

2° Appelons (X, Y) les coordonnées courantes de la droite MM′; l'équation de cette droite est

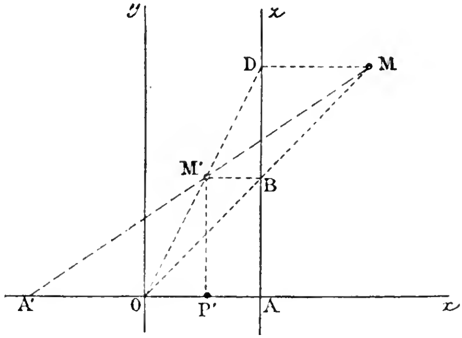
$$\frac{\mathrm{Y}-y}{\mathrm{X}-x}=\frac{y-y'}{x-x'},$$

ou, en exprimant x' et y' en fonction de x et de y,

$$\frac{Y - y}{X - x} = \frac{y\left(1 - \frac{a}{x}\right)}{x - \frac{a^2}{x}} = \frac{y}{x + a},$$

en divisant par le facteur $\left(1 - \frac{a}{x}\right)$. Quand cette opération n'est pas possible, c'est-à-dire quand $x = a$, les points M

Fig. 10.



et M' sont confondus et se trouvent sur Az. Cette droite est le lieu commun des points M et M' qui font que MM' est dirigée d'une manière quelconque dans le plan.

L'équation de MM' est donc

$$Y(x + a) - y(X + a) = 0.$$

Quels que soient x et y, cette doite passe par le point fixe A' dont les coordonnées sont

$$Y = 0, \quad X = -a,$$

sauf quand on a simultanément

$$y = 0, \quad x + a = 0;$$

dans ce cas, le point M coïncide avec A', symétrique du point A par rapport à l'origine.

Le coefficient angulaire de la droite MM', $\frac{y}{x+a}$, qui dépend de la loi de déplacement du point M dans le plan. peut prendre toutes les valeurs au moment précis où M coïncide avec A'.

Solution géométrique. — Les droites AD, OD, coupées par les parallèles, OA, BM', donnent

$$\frac{OA}{M'B} = \frac{DA}{DB}.$$

Les droites MO, MA', coupées par OA', M'B, donnent

$$\frac{OA'}{M'B} = \frac{MO}{MB} = \frac{DA}{DB}.$$

Donc

$$OA' = OA,$$

quelle que soit la position du point M; etc.

DÉPLACEMENT DE LA DROITE JOIGNANT LES POINTS DE RENCONTRE DES COTÉS CORRESPONDANTS DE DEUX TRIANGLES SE DÉPLAÇANT SUIVANT UNE LOI DONNÉE.

3. — *Un triangle* A'B'C' (*fig.* 11), *variable de forme. est placé de telle sorte que les droites joignant ses sommets,* A', B', C'. *aux sommets correspondants,* A, B, C. *d'un triangle donné concourent en un point fixe* O *et que le côté* A'B' *soit parallèle à* AB. *Soit* M *le point de rencontre des côtés* AC, A'C' : N *le point de rencontre des côtés* CB, C'B'. — *Déterminer la loi de déplacement de la droite* MN *quand le triangle* A'B'C' *se déforme en suivant les conditions de l'énoncé.*

Nous prendrons comme axes de coordonnées les droites OA, OB.

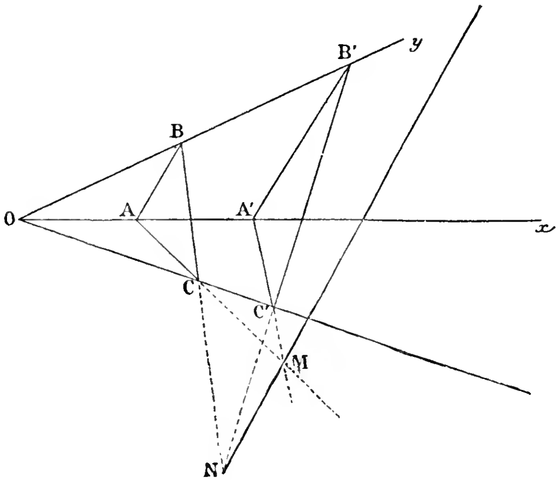
Soit

$$OA = a, \quad OB = b \quad \text{et} \quad (c, d)$$

les coordonnées du point C.

On conclut immédiatement, λ désignant un paramètre

Fig. 11.



variable,

$$OA' = \lambda a, \quad OB' = \lambda b;$$

les coordonnées de C' sont de même : μc, μd.

Le point M (α, β) est à l'intersection des droites dont les équations sont

$$(1) \quad \begin{cases} \text{AC]} & \dfrac{y}{x-a} = \dfrac{d}{c-a}, \\ \text{[A'C']} & \dfrac{y}{x-\lambda a} = \dfrac{\mu d}{\mu c - \lambda a}. \end{cases}$$

Le point N (α', β') est de même à l'intersection des droites

$$(2)\quad \begin{cases} [\mathrm{BC}] & \dfrac{y-b}{x} = \dfrac{d-b}{c}, \\ [\mathrm{B'C'}] & \dfrac{y-\lambda b}{x} = \dfrac{\mu d - \lambda b}{\mu c}. \end{cases}$$

Soient (X, Y) les coordonnées courantes de ladroite MN; son équation peut s'écrire

$$\frac{Y-\beta}{X-\alpha} = \frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}$$

ou

$$(\beta'-\beta)X - (\alpha'-\alpha)Y - \alpha\beta' + \beta\alpha' = 0,$$

(α, β), (α', β') étant déterminés par les systèmes (1) et (2).

On peut écrire

$$(1)\quad \begin{cases} dx - (c-a)y - da = 0, \\ \mu dx - (\mu c - \lambda a)y - ad\lambda\mu = 0; \end{cases}$$

on conclut

$$\frac{\alpha}{(c-a)ad\lambda\mu - da(\mu c - \lambda a)} = \frac{\beta}{-\mu a d^2 + a d^2\lambda\mu}$$
$$= \frac{1}{-d(\mu c - \lambda a) + (c-a)\mu d}$$

ou

$$\frac{\alpha}{ad[\mu c(\lambda-1) - a\lambda(\mu-1)]} = \frac{\beta}{ad^2\mu(\lambda-1)} = \frac{1}{ad(\lambda-\mu)},$$

enfin

$$\alpha = \frac{\mu c(\lambda-1) - a\lambda(\mu-1)}{\lambda-\mu},$$

$$\beta = \frac{d\mu(\lambda-1)}{\lambda-\mu}.$$

On obtient de même

$$\alpha' = \frac{\mu c(\lambda-1)}{\lambda-\mu},$$

$$\beta' = \frac{\mu d(\lambda-1) - \lambda b(\mu-1)}{\lambda-\mu}.$$

On a donc

$$(3) \qquad \beta' - \beta = \frac{b\lambda(1-\mu)}{\lambda-\mu},$$

$$(4) \qquad \alpha' - \alpha = \frac{a\lambda(\mu-1)}{\lambda-\mu}.$$

Si l'on multiplie (3) par a, (4) par b et qu'on ajoute, il vient

$$(5) \qquad a(\beta'-\beta) + b(\alpha'-\alpha) = 0;$$

les coefficients de X et de Y dans l'équation de la droite MN sont donc liés par une relation linéaire et homogène. — D'après ce que nous avons dit (§ II, 1), MN se déplace en restant parallèle à une direction fixe.

ÉTUDE DE LA LOI DE DÉPLACEMENT D'UNE DROITE DÉFINIE PAR DES ÉQUATIONS ANALYTIQUES.

6. Nous donnons ci-dessous un exemple de déplacement d'une droite définie analytiquement; on pourra revenir à cet exercice avec plus de fruit après qu'on aura étudié les propriétés mises en œuvre pour la formation des équations initiales.

Au Chapitre IX, page 208, nous étudions le lieu des points du plan par lesquels passent deux axes rectangulaires des paraboles d'un faisceau S dont l'équation est donnée (*Concours d'admission à l'École Normale*, 1894); nous montrons que, par chaque point du plan, il passe trois de ces axes, et que le cercle ayant pour équation

$$(1) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{2}a\beta = 0$$

est le lieu des points du plan pour lesquels deux d'entre eux sont rectangulaires.

Proposons-nous d'indiquer comment on devra conduire la solution de la question suivante :

Étudier la loi de déplacement de celui des trois axes de parabole qui n'est perpendiculaire à aucun des deux autres.

L'équation de cet axe est donnée par

$$(2) \qquad (\mu^2+1)(y-\mu x)+\mu^2 a=0,$$

dans laquelle on remplace μ par sa valeur $-\frac{\beta}{\alpha}$, troisième racine de l'équation aux coefficients angulaires des axes ; on a ainsi

$$(3) \qquad (\alpha^2+\beta^2)(\alpha y+\beta x)+a\alpha\beta^2=0.$$

De plus, le point par lequel passe à chaque instant cet axe est sur le cercle (1) ; on est donc ramené au problème suivant :

Quelle est la loi de déplacement de la droite définie par les équations (2) *et* (3).

En tenant compte de l'équation (1), l'équation (3) devient

$$(4) \qquad \frac{x}{2\alpha}+\frac{y}{2\beta}-1=0.$$

Dès lors, prenant un point quelconque sur le cercle, on peut construire facilement la droite correspondante par de simples considérations géométriques.

Étudions sa loi de déplacement.

Première solution. — Par application des propriétés de l'équation tangentielle, nous sommes amenés (Chap. V,

p. 136) à identifier l'équation (4) avec l'équation type

$$(5) \qquad ux + vy - 1 = 0;$$

puis à éliminer α et β entre

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u = \dfrac{1}{2\alpha}, \qquad v = \dfrac{1}{2\beta}, \\ \alpha^2 + \beta^2 + \dfrac{1}{2}\,a\beta = 0; \end{array} \right.$$

ce qui donne

$$u^2 + u^2 + v^2 = 0.$$

On peut en déduire l'équation cartésienne du lieu; ou encore étudier directement les propriétés en évidence sous cette forme.

Seconde solution. — On peut également avoir recours aux propriétés des *courbes enveloppes* (Chap. X, p. 221),

L'équation cartésienne de la courbe sur laquelle *roule* la droite étudiée s'obtiendra en différentiant les équations (1) et (4) et en éliminant les paramètres α, β, $\dfrac{d\beta}{d\alpha}$ entre les quatre équations

$$\left\{ \begin{array}{r} \alpha y + \beta x - 2\alpha\beta = 0, \\ \alpha^2 + \beta^2 + \dfrac{1}{2}\,a\beta = 0, \\ \left(\beta - \dfrac{a}{4}\right)\dfrac{d\beta}{d\alpha} + \alpha = 0, \\ (x - 2\alpha)\dfrac{d\beta}{d\alpha} + (y - 2\beta) = 0. \end{array} \right.$$

Les deux dernières équations permettent, par une construction simple, de déterminer géométriquement un point quelconque du lieu; ou de trouver, sur l'un des axes de parabole, le point correspondant de l'enveloppe.

Nous nous bornons à ces indications sommaires, exclusivement destinées à rattacher les propriétés qui seront étudiées plus tard aux divers modes de déplacement d'une droite.

Exercices proposés.

Former l'équation des lieux géométriques faisant l'objet des énoncés donnés :

1° Au Concours d'admission à l'École Centrale en 1863, 1re session (*Voir* t. II, p. 34*): — 1866, 2e session (t. II, p. 36*); — 1876, 2e session (t. II, p. 43*); — 1882, 2e session (t. II, p. 48*); — 1884, 2e session (t. II, p. 50*).

2° Au Concours d'admission à l'École Normale, en 1895, § 1° de l'énoncé (t. II, p. 85*).

3° A l'École Polytechnique, en 1842 (t. II, p. 3*).

4° Au Concours Général (Paris) 1894, § 1° de l'énoncé (t. II, p. 98*).

CHAPITRE III.

CERCLE.

Rappel de résultats.

(*a*) L'équation

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\mu y + \nu = 0$$

est l'équation générale des cercles du plan, si λ, μ, ν sont des paramètres variables.

(*b*) Les coordonnées du centre de ce cercle sont λ et μ, demi-coefficients de x et de y, changés de signe; le rayon est donné par

$$R^2 = \lambda^2 + \mu^2 - \nu.$$

(*c*) Le premier membre de l'équation d'un cercle, calculé pour les coordonnées (x', y') d'un point quelconque du plan, donne la *puissance* de ce point par rapport au cercle.

(*d*) L'axe radical des cercles

$$C = 0, \quad C' = 0$$

a pour équation

$$C - C' = 0.$$

(*e*) L'équation générale des cercles passant par l'intersection de deux cercles donnés

$$C = 0, \quad C' = 0$$

est

$$C + \lambda C' = 0.$$

(*f*) Le coefficient angulaire de la tangente au point (x, y) d'une courbe est donné par y'_x, dérivée de y par rapport à x.

$f(x, y) = 0$ étant l'équation de la courbe, l'équation

$$f'_x + f'_y y'_x = 0$$

donne en général y'_x.

I. — Formation des équations générales de cercles remplissant des conditions données. — Marche a suivre.

On peut employer deux méthodes pour former les équations générales de cercles remplissant des conditions données :

1° Déterminer un nombre suffisant de conditions géométriques pour obtenir le centre et le rayon en fonction d'un paramètre variable, choisi parmi les éléments de la figure, et écrire l'équation des cercles dont on connaît le centre et le rayon;

2° Prendre l'équation générale des cercles du plan

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\mu y + \nu = 0$$

et exprimer successivement qu'elle satisfait aux conditions données; on obtient ainsi des équations de condition qui permettent d'éliminer deux des paramètres.

1. — Équation générale des cercles tangents aux axes de coordonnées.

Ces cercles se divisent en deux séries : ceux qui ont leur centre sur la première bissectrice et ceux qui ont leur centre sur la seconde.

Pour les premiers, le rayon est égal à la valeur commune de l'abscisse et de l'ordonnée du centre. — Si donc on appelle λ cette quantité variable, les cercles ont pour équation

$$(x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 - \lambda^2 = 0$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2\lambda(x + y) + \lambda^2 = 0.$$

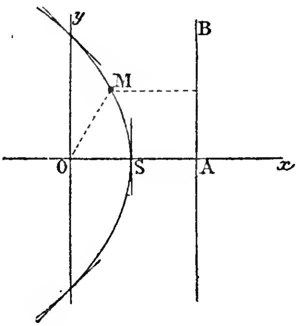
L'équation générale des cercles de la seconde série est, de même,

$$x^2 + y^2 - 2\lambda(x - y) + \lambda^2 = 0.$$

2. — Équation générale des cercles passant par un point donné et tangents à une droite donnée. Lieu des centres.

(a) Prenons comme origine le point donné (*fig.* 12) et

Fig. 12.



plaçons l'un des axes parallèlement à la droite donnée dont l'équation est, dès lors

$$x - a = 0.$$

Les cercles dont nous cherchons l'équation passent par l'origine et sont tangents à la droite AB.

L'équation générale des cercles passant à l'origine est

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\mu y = 0.$$

L'équation aux ordonnées des points de rencontre de ce cercle avec AB doit avoir une racine double pour qu'il y ait contact.

Cette équation aux ordonnées, obtenue en faisant $x = a$ dans l'équation (1), est

$$y^2 - 2\mu y + a^2 - 2\lambda a = 0.$$

Elle aura une racine double, si l'on a

$$B^2 - AC = 0.$$

$$\mu^2 - a^2 + 2\lambda a = 0;$$

celle-ci donne

$$\mu^2 = a(a - 2\lambda).$$

L'équation générale des cercles de l'énoncé est alors

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x \pm 2\sqrt{a(a - 2\lambda)}\, y = 0;$$

λ ne peut varier que de $-\infty$ à $\frac{a}{2}$.

(*b*) Proposons-nous de chercher le lieu des centres de ces cercles.

Les coordonnées du centre sont

$$x = \lambda, \quad y = \pm\sqrt{a(a - 2\lambda)}.$$

L'équation du lieu des centres s'obtiendra en éliminant λ entre ces deux équations :

$$y^2 = a(a - 2x).$$

Nous verrons plus tard que la courbe représentée par cette équation est une parabole placée comme l'indique la figure. Le point O est le foyer, la droite AB, la directrice.

Solution géométrique. — Il est facile de se rendre compte de ce résultat par des considérations géométriques.

Le centre d'un cercle quelconque remplissant les conditions de l'énoncé doit être également distant du point O et de la droite AB. — Cette propriété sert en Géométrie élémentaire à définir la parabole dont les éléments sont indiqués plus haut.

3. — Équation générale des cercles passant par deux points fixes.

Nous avons donné plus haut l'équation $C + \lambda C' = 0$ comme étant celle des cercles passant par deux points fixes.

(a) On peut donner à cette équation, en choisissant convenablement les axes de coordonnées, une forme simple utile à connaître.

Prenons comme axe des y l'axe radical fixe, et comme axe des x la ligne des centres de tous ces cercles.

L'équation générale sera

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x \pm p^2 = 0,$$

p^2 désignant la puissance fixe de l'origine par rapport à tous ces cercles.

On prendra le signe — devant p^2 si les points de rencontre de l'axe radical avec les cercles sont réels; le signe + si ces points sont imaginaires.

Application. — Considérons deux cercles de la série :

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - 2\lambda x \pm p^2 = 0,$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - 2\mu x \pm p^2 = 0.$$

Si d'un point A (*fig.* 13) de la première circonférence on mène une tangente à la seconde, le carré de la portion comprise entre le point de contact B et le point A est donné par

$$\overline{AB}^2 = x^2 + y^2 - 2\mu x \pm p^2,$$

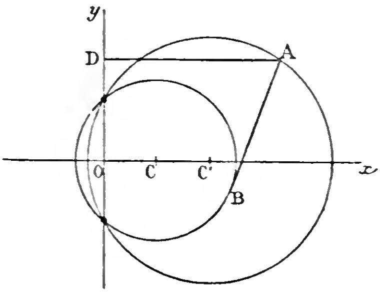
(x, y) étant les coordonnées du point A.

Mais (x, y) satisfont à l'équation (1); on a donc finalement

$$\overline{AB}^2 = (\lambda - \mu)2x.$$

Donc AB est moyenne proportionnelle entre la distance

Fig. 13.



des centres CC′ et le double de la perpendiculaire AD, abaissée du point A sur l'axe radical.

4. — Équation générale des cercles passant par un point donné et tangents à un cercle donné.

Nous placerons l'origine au point donné et nous orienterons les axes d'une manière quelconque.

Le cercle donné a pour équation

(1) $$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0.$$

L'équation générale des cercles passant par le point donné, c'est-à-dire par l'origine, est

(2) $$x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\mu y = 0.$$

Nous exprimerons que le cercle (2) est tangent au cercle (1) en écrivant que leur axe radical est à une distance R du centre (a, b) du cercle fixe.

L'équation de l'axe radical est

$$(\lambda - a)x + (\mu - b)y + \frac{a^2 + b^2 - R^2}{2} = 0.$$

On doit avoir

$$\frac{\left[(\lambda - a)a + (\mu - b)b + \frac{a^2 + b^2 - R^2}{2}\right]^2}{(\lambda - a)^2 + (\mu - b)^2} = R^2. \tag{3}$$

Cette équation de condition montre que le centre du cercle variable doit se déplacer sur une courbe du second ordre. (Voir la discussion au Chap. IV.)

Dans un problème où l'on aurait à considérer les cercles remplissant ces conditions, on écrirait l'équation (2) en l'accompagnant de la condition (3).

5. — Lieu des points de rencontre de ces cercles avec une droite de direction fixe passant par le centre du cercle mobile.

L'équation de cette droite est

$$y - \mu - m(x - \lambda) = 0, \tag{4}$$

m étant le coefficient angulaire fixe.

On doit donc éliminer λ et μ entre les équations

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\mu y = 0, \tag{2}$$

$$y - \mu - m(x - \lambda) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\left[a(\lambda - a) + b(\mu - b) + \frac{a^2 + b^2 - R^2}{2}\right]^2}{(\lambda - a)^2 + (\mu - b)^2} = R^2. \tag{4}$$

Le procédé indiqué (Chap. I) s'applique facilement ici.

Remarque. — Tous les moyens que nous indiquerons pour former les équations générales de courbes du second ordre s'appliquent au cercle. — On adjoindra aux équations de condition établies pour des coniques quelconques les deux conditions

$$A - C = 0,$$
$$B = 0,$$

qui expriment que cette conique est un cercle.

II. — Pole et polaire dans le cercle.

Définition. — Le lieu du conjugué harmonique d'un point fixe P, par rapport au segment déterminé par une circonférence fixe sur une sécante mobile autour du point P, est une droite, qui s'appelle la *polaire* du point fixe.

Soient α, β, γ les coordonnées homogènes du point fixe P,

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation homogène du cercle.

L'équation de la polaire du point P est

$$(1) \qquad \alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0.$$

Le point fixe s'appelle le *pôle* de la droite (1).

(*a*) La polaire d'un point passe aux points de contact des tangentes menées du point à la circonférence.

(*b*) Tout point a une polaire et toute droite du plan est la polaire d'un point de ce plan.

Soient

$$(2) \qquad ax + by + c = 0$$

l'équation d'une droite,

$$f(x, y) = 0$$

celle d'une circonférence fixe.

Le pôle de la droite (2) a ses coordonnées α, β, γ fournies par les équations

$$(3) \qquad \frac{f'_\alpha}{a} = \frac{f'_\beta}{b} = \frac{f'_\gamma}{c}.$$

(*c*) Quand une droite passe au centre du cercle, son pôle est rejeté à l'infini dans la direction perpendiculaire à celle de la droite.

Lieux de pôles.

Si l'équation de la circonférence ou celle de la droite renferme un paramètre variable, le point défini par les équations (3) sera mobile et l'équation du lieu sur lequel il se déplace s'obtiendra en éliminant le paramètre variable entre les équations (3).

1. *Lieu du pôle d'une droite de direction fixe par rapport à une série de cercles concentriques.*

Plaçons l'origine au centre fixe; l'équation des cercles de l'énoncé est alors

$$x^2 + y^2 - \lambda^2 = 0, \tag{1}$$

λ étant le rayon variable de ces cercles.

Soit

$$Ax + By + \mu = 0 \tag{2}$$

l'équation de la droite de direction fixe, μ étant un paramètre variable.

Si l'on désigne par α, β les coordonnées d'un point quelconque du plan, la polaire de ce point a pour équation

$$\alpha x + \beta y - \lambda^2 = 0. \tag{3}$$

Le point (α, β) sera le pôle de la droite (2), si l'on a

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = -\frac{\lambda^2}{\mu}.$$

On est donc conduit à éliminer les paramètres λ et μ entre ces deux équations, ce qui n'est pas possible.

Mais il est à remarquer (Chap. I) que l'une des équations de condition

$$B\alpha - A\beta = 0$$

est indépendante des paramètres variables, elle est l'*équation* du lieu. Ce lieu est la perpendiculaire abaissée du centre fixe sur l'une quelconque des droites (2), résultat qu'on aperçoit immédiatement par la Géométrie élémentaire.

2. *Former l'équation générale des cercles passant à l'origine et coupant l'axe des x sous un angle donné α. Lieu du pôle d'une droite fixe par rapport à ces cercles.*

(a) L'équation générale des cercles, passant à l'origine, est

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\mu y = 0. \tag{1}$$

Le coefficient angulaire de la tangente, à l'origine, est fourni par l'équation

$$f'_x + f'_y \cdot y'_x = 0$$

dans laquelle on fait simultanément

$$x = 0, \quad y = 0;$$

on obtient ainsi

$$y'_x = -\frac{\lambda}{\mu};$$

cette quantité est constante :

$$-\frac{\lambda}{\mu} = \operatorname{tang}\alpha = k.$$

L'équation des cercles de l'énoncé est donc

$$x^2 + y^2 + 2\mu(kx - y) = 0.$$

(b) Soit

$$ax + by + c = 0$$

l'équation de la droite fixe; son pôle est défini par

$$\frac{\alpha + k\mu}{a} = \frac{\beta - \mu}{b} = \frac{\mu(k\alpha - \beta)}{c}.$$

Nous éliminerons μ entre ces équations, de la manière suivante :

Appelons ν la valeur commune des trois rapports, on a

$$\begin{gathered} k\mu - a\nu + \alpha = 0, \\ \mu + b\nu - \beta = 0, \\ \mu(k\alpha - \beta) - c\nu = 0. \end{gathered}$$

Des deux premières on tire

$$\frac{\mu}{a\beta + b\alpha} = \frac{\nu}{-\alpha + k\beta},$$

valeurs proportionnelles de μ et ν qu'il suffit de porter dans la 3^e équation, celle-ci étant homogène par rapport à ces deux variables. On a donc finalement

$$(a\beta + b\alpha)(k\alpha - \beta) - c(k\beta - \alpha) = 0.$$

Le lieu représenté par cette équation est une courbe du second ordre.

3. *La polaire d'un point fixe par rapport à tous les cercles du plan ayant même axe radical passe par un point fixe.*

Soient $C = 0, \Gamma = 0$ les équations de deux cercles du système; l'équation générale des cercles de l'énoncé est

$$\Gamma + \lambda C = 0.$$

La polaire d'un point fixe (α, β, γ) par rapport à ce cercle a pour équation

$$\alpha(\Gamma'_x + \lambda C'_x) + \beta(\Gamma'_y + \lambda C'_y) + \gamma(\Gamma'_z + \lambda C'_z) = 0,$$

qu'on peut écrire

$$\alpha\Gamma'_x + \beta\Gamma'_y + \gamma\Gamma'_z + \lambda(\alpha C'_x + \beta C'_y + \gamma C'_z) = 0.$$

Cette droite, dont l'équation est de la forme

$$D + \lambda D' = 0,$$

passe à l'intersection des droites

$$\alpha\Gamma'_x + \beta\Gamma'_y + \gamma\Gamma'_z = 0,$$
$$\alpha C'_x + \beta C'_y + \gamma C'_z = 0,$$

polaires du point fixe par rapport aux cercles fixes

$$\Gamma = 0, \quad C = 0.$$

Remarque. — Ce résultat ne sera pas altéré si, au lieu d'un paramètre λ entrant au premier degré, l'équation générale renferme une fonction de ce paramètre de telle sorte qu'on puisse écrire cette équation sous la forme

$$\Gamma + \varphi(\lambda) C = 0.$$

Lieux de points de contact de tangentes.

On obtient l'équation du lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe à des cercles variables, en éliminant le paramètre variable entre l'équation des cercles et celle de la polaire du point fixe par rapport à ces cercles.

4. *Lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe aux cercles passant par deux points fixes situés en ligne droite avec le premier.*

Prenons (*fig.* 14) comme axe des x la ligne des trois points fixes et plaçons l'origine au milieu du segment déterminé par les points A, A', communs à tous les cercles.

Soit P le point d'où partent les tangentes;

$$OP = \alpha,$$
$$OA = OA' = a.$$

L'équation générale des cercles de l'énoncé est

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - 2\lambda y - a^2 = 0.$$

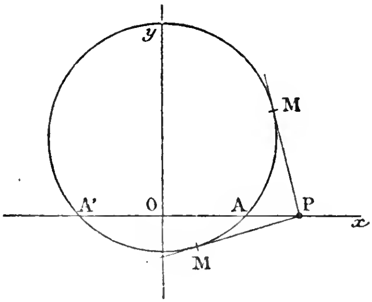
Les points dont on demande le lieu sont à l'intersection de ce cercle avec la polaire du point P.

L'équation de cette droite est

$$(2) \qquad \alpha x - \lambda y - a^2 = 0.$$

Nous obtiendrons l'équation du lieu cherché en éliminant

Fig. 14.



λ entre les deux équations

$$(1) \qquad (x^2 + y^2 - a^2) - 2y\lambda = 0,$$

$$(2) \qquad \alpha x - a^2 - y\lambda = 0.$$

On a donc

$$(3) \qquad (x^2 + y^2 - a^2)y - 2y(\alpha x - a^2) = 0.$$

Ce lieu se décompose en :

$$(a) \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x + a^2 = 0,$$

$$(b) \qquad y = 0.$$

(a) La première partie du lieu est un cercle ayant pour centre le point P et pour rayon $R = \sqrt{\alpha^2 - a^2}$, résultat facilement atteint par la Géométrie élémentaire : la distance PM d'un point du lieu au point P est en effet donnée par

$$\overline{PM}^2 = PA.PA' = \alpha^2 - a^2.$$

(*b*) Cette seconde partie du lieu provient du cercle de rayon infini, qui se confond avec Ox, la polaire de P devient la tangente au point P; tous les points de Ox font donc partie du lieu.

Remarque I. — Le lieu que nous venons de trouver n'est réel que si $\alpha^2 - a^2 > 0$, c'est-à-dire si le point P est extérieur au segment AA'.

Si les points A, A' avaient été imaginaires conjugués, il eût suffi, pour obtenir l'équation du lieu, de changer a^2 en $-a^2$. On a alors $R^2 = \alpha^2 + a^2$. — Dans ce cas, le lieu est toujours réel.

5. *Lieu du point de rencontre de la polaire d'un point fixe, par rapport aux cercles passant par deux points fixes, avec le diamètre de ce point.*

Prenons (*fig.* 15) comme axe des y la droite des points fixes A, B, et comme axe des x la perpendiculaire à cette droite en son milieu. $OA = OB = a$.

L'équation des cercles de l'énoncé est

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x - a^2 = 0; \tag{1}$$

celle de la polaire du point P (α, β) est

$$\alpha(x - \lambda) + \beta y - \lambda x - a^2 = 0; \tag{2}$$

celle du diamètre de ce point (α, β) est de même

$$(\alpha - \lambda) y - \beta(x - \lambda) = 0.$$

On obtiendra l'équation du lieu du point M en éliminant λ

entre les équations (2) et (3) :

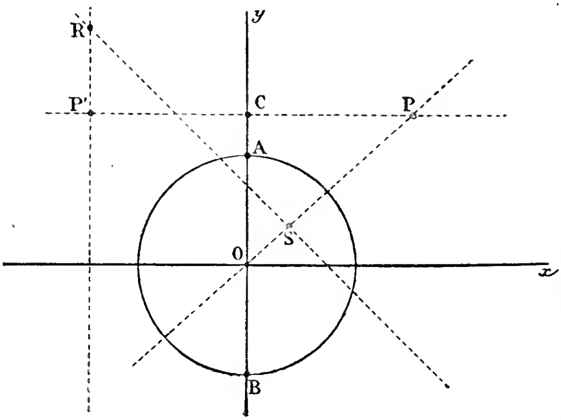
$$(2) \qquad \lambda(\alpha + x) - (\alpha x + \beta y - a^2) = 0,$$

$$(3) \qquad \lambda(\beta - y) + \alpha y - \beta x = 0.$$

On a ainsi

$$(4) \qquad (x + \alpha)(\alpha y - \beta x) + (\beta - y)(\alpha x + \beta y - a^2) = 0,$$

Fig. 15.



qu'on peut écrire successivement

$$x(\alpha y - \beta x) - y(\alpha x + \beta y) + \alpha(\alpha y - \beta x) \\ + \beta(\alpha x + \beta y) + a^2 y - a^2\beta = 0,$$

$$(5) \qquad -\beta(x^2 + y^2) + (\alpha^2 + \beta^2 + a^2)y - a^2\beta = 0.$$

On reconnaît sous cette forme l'équation d'un cercle.

L'équation (4) montre que ce cercle passe par les quatre points d'intersection de

$$x + \alpha = 0 \text{ avec } \begin{cases} y - \beta = 0, & [P'] \\ \alpha x + \beta y - a^2 = 0 & [R] \end{cases}$$

et de

$$\alpha y - \beta x = 0 \text{ avec } \begin{cases} y - \beta = 0, & [P] \\ \alpha x + \beta y - a^2 = 0, & [S] \end{cases}$$

ce qui le détermine complètement.

PR est son diamètre. — On voit que l'équation

$$\alpha x + \beta y - a^2 = 0$$

est celle de la polaire du point P par rapport au cercle $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ ayant AB comme diamètre.

Solution géométrique. — Nous avons prouvé (p. 58 — 3) que la polaire d'un point fixe par rapport aux cercles ayant même axe radical passe par un point fixe, intersection des polaires du point fixe par rapport à deux cercles de la série.

Donc, dans l'exemple actuel, la polaire du point P tourne autour d'un point fixe. — Le diamètre de ce point tourne également autour d'un point fixe. — Il reste perpendiculaire à la polaire mobile, le lieu de leur point commun M est donc le cercle décrit sur la droite joignant le point P au point fixe des polaires comme diamètre. Or, deux cercles de la série sont (*fig.* 15) :

1° Celui qui a pour diamètre AB; la polaire de P est la corde commune à ce cercle et à celui qui est décrit sur PO comme diamètre;

2° Celui dont le centre est à l'infini sur Ox; ce cercle dégénéré est l'axe des y. Le diamètre du point P est la parallèle à Ox menée par P. La polaire du point P par rapport à ce cercle est donc parallèle à Oy. — Nous déterminerons sa position en remarquant que le point C (rencontre du cercle yy' avec le diamètre de P) est conjugué harmonique d'un point rejeté à l'infini, par rapport au segment ayant pour extrémités le point P et le point de rencontre cherché de PC avec la polaire qui nous occupe : Soit P_1 ce point. C est le milieu de PP_1. Donc P_1 coïncide avec P', symétrique de P par rapport à Oy. — La seconde polaire est la parallèle à Oy menée par P′ : elle rencontre la première en R. PR est le diamètre du cercle-lieu.

REMARQUE. — Il est intéressant de rapprocher les deux solutions qui précèdent :

1° *Les polaires de* P *passent par un point fixe.*

L'équation (3)

$$\alpha x + \beta y - a^2 + \lambda(x + \alpha) = 0$$

met en évidence ce résultat, le point fixe est l'intersection des droites

$$x + \alpha = 0,$$
$$\alpha x + \beta y - a^2 = 0.$$

Voilà le fait; la solution géométrique nous montre la cause qui introduit cette droite $x + \alpha = 0$.

Elle est la polaire du point P par rapport au cercle dégénéré yy'.

2° *Le diamètre du cercle-lieu est* PR.

La solution analytique nous donne ce résultat indirectement, par l'indication des points S et P′ par lesquels passe le lieu. — S et P′ sont des sommets d'angles droits dont les côtés passent en P et R.

3° L'équation du lieu peut s'écrire

$$(\alpha^2 + \beta^2 + a^2)y - (x^2 + y^2 + a^2)\beta = 0,$$

elle ne change pas quand on change entre elles les lettres, x, y, α, β. On en conclut que les points homologues P et M sont réciproques, c'est à-dire que, si l'on prend une position du point M sur le lieu précédent comme fixe — qu'on fasse en sens inverse la construction indiquée — on déduira pour chaque cercle de l'énoncé une position du point P; le lieu de ces points P est le même que celui du point M dans la question que nous venons de traiter.

Ce cercle est donc le lieu des points du plan qu'il faut choisir, pour que, le lieu de leur conjugué harmonique par rapport au segment déterminé sur le diamètre de ce point par les cercles passant aux points fixes A et B, soit le même que le lieu de ces points.

III. — Équation quadratique du faisceau des tangentes menées par un point (α, β) a un cercle $f(x,y) = 0$. — Son emploi.

L'équation de ce faisceau est

$$f(x,y)\,f(\alpha,\beta) - (\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z)^2 = 0$$

f'_x, f'_y, f'_z étant les demi-dérivées de la fonction $f(x,y)$ rendue homogène.

Elle devra être employée chaque fois que l'on aura à chercher le lieu des points du plan par lesquels on peut mener à un cercle fixe des tangentes assujetties à *une* condition géométrique.

L'équation algébrique exprimant cette condition est l'équation du lieu des points (α, β) remplissant la condition de l'énoncé.

Si l'on impose deux conditions aux tangentes, chacune des équations algébriques obtenues donne le lieu des points du plan remplissant la condition géométrique que cette équation exprime : les points communs aux deux lieux obtenus satisfont à la fois aux deux conditions données; il n'existe donc qu'un nombre limité de ces points.

Si le cercle auquel on mène des tangentes n'est assujetti qu'à deux conditions, il existera un lieu de points par lesquels on pourra mener à tous ces cercles des tangentes assujetties à deux conditions.

1. *On donne le cercle dont l'équation est, en coordonnées rectangulaires,*

$$x^2 + y^2 - 2ax + 1 = 0.$$

On demande de trouver le lieu des points du plan par lesquels on peut mener à ce cercle des tangentes telles que le rectangle construit sur leurs abscisses à l'origine ait une surface constante égale au carré construit sur l'abscisse du centre.

L'équation du lieu cherché s'obtiendra en écrivant que le produit des abscisses à l'origine des tangentes issues d'un point (α, β) du plan, a la valeur donnée a^2.

Or, l'équation du faisceau des tangentes issues du point (α, β) au cercle donné est

$$(x^2 + y^2 - 2ax + 1)(\alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha + 1) \\ - [\alpha(x - a) + \beta y - ax + 1]^2 = 0.$$

L'équation aux abscisses à l'origine s'obtient en faisant $y = 0$:

$$(x^2 - 2ax + 1)(\alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha + 1) - [(\alpha - a)x - (a\alpha - 1)]^2 = 0;$$

ou, en ordonnant

$$(\beta^2 + 1 - a^2)x^2 + [\ldots]x + \alpha^2(1 - a^2) + \beta^2 = 0.$$

L'équation du lieu cherché est donc

$$\frac{\alpha^2(1 - a^2) + \beta^2}{\beta^2 - a^2 + 1} = a^2,$$

qui exprime que le produit des racines a la valeur constante a^2, c'est-à-dire

$$\alpha^2(1 - a^2) + \beta^2(1 - a^2) - a^2(1 - a^2) = 0;$$

dès lors, tant que $1 - a^2 \gtrless 0$ l'équation s'écrit

$$\alpha^2 + \beta^2 - a^2 = 0;$$

c'est celle d'un cercle dont le centre est à l'origine et le rayon égal à a, abscisse du centre du cercle fixe.

Si $a^2 - 1 = 0$, le rayon du cercle est nul, il n'y a plus de problème.

2. *Trouver le lieu des points d'où l'on peut mener à un cercle des tangentes faisant entre elles un angle donné.*

Plaçons l'origine au centre du cercle fixe; soit $M(\alpha, \beta)$ un point du lieu; l'équation quadratique du faisceau des tangentes menées de ce point au cercle ayant pour équation

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

est

$$(\alpha^2 + \beta^2 - R^2)(x^2 + y^2 - R^2) - (\alpha x + \beta y - R^2)^2 = 0,$$

obtenue en appliquant l'équation générale

$$f(\alpha, \beta) f(x, y) - (\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z)^2 = 0.$$

Les parallèles à ces tangentes, menées par l'origine, ont pour équation

$$(x^2 + y^2)(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) - (\alpha x + \beta y)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$x^2(\beta^2 - R^2) - 2\alpha\beta xy + y^2(\alpha^2 - R^2) = 0.$$

L'angle de ces droites est fourni par

$$\operatorname{tang}^2 V = \frac{4(B^2 - AC)}{(A + C)^2},$$

c'est-à-dire, en appelant 2φ l'angle donné,

$$\operatorname{tang}^2 2\varphi = \frac{4[\alpha^2\beta^2 - (\alpha^2 - R^2)(\beta^2 - R^2)]}{(\alpha^2 + \beta^2 - 2R^2)^2},$$

$$\operatorname{tang}^2 2\varphi = \frac{4R^2(\alpha^2 + \beta^2 - R^2)}{(\alpha^2 + \beta^2 - 2R^2)^2}.$$

L'équation du lieu est donc

$$4R^2(\alpha^2+\beta^2-R^2)-\operatorname{tang}^2 2\varphi(\alpha^2+\beta^2-2R^2)^2=0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}&4(\alpha^2+\beta^2-2R^2)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\\&-4R^2(\alpha^2+\beta^2-R^2)(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)^2=0;\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}4\sin^2\varphi\cos^2\varphi&=(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^2-(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)^2\\&=1-(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)^2.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}&(\alpha^2+\beta^2-2R^2)^2[1-(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)^2]\\&\qquad-4R^2(\alpha^2+\beta^2-R^2)(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)^2=0,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}&(\alpha^2+\beta^2-2R^2)^2\\&-(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)^2[(\alpha^2+\beta^2-2R^2)^2+4R^2(\alpha^2+\beta^2-R^2)]=0,\end{aligned}$$

ou enfin

$$(\alpha^2+\beta^2-2R^2)^2-(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)^2(\alpha^2+\beta^2)^2=0;$$

cette différence de carrés se décompose en facteurs :

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2-2R^2-(\alpha^2+\beta^2)(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)&=0,\\\alpha^2+\beta^2-2R^2+(\alpha^2+\beta^2)(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)&=0,\end{aligned}$$

qu'on peut écrire

$$\alpha^2+\beta^2-\frac{R^2}{\sin^2\varphi}=0,$$

$$\alpha^2+\beta^2-\frac{R^2}{\cos^2\varphi}=0.$$

Le lieu se décompose donc en deux cercles concentriques au cercle donné et ayant pour rayons respectifs $\frac{R}{\cos\varphi}$ et $\frac{R}{\sin\varphi}$; résultats qu'on atteint facilement par la Géométrie élémentaire.

Dans le cas particulier où les tangentes sont rectangulaires; les deux cercles précédents se confondent : le rayon a pour valeur $R\sqrt{2}$, résultat qu'on obtient d'ailleurs en écrivant que $\tang 2\varphi$ est infinie :

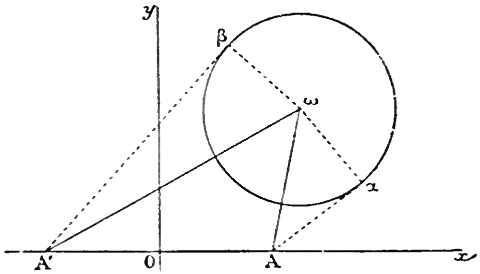
$$\alpha^2 + \beta^2 - 2R^2 = 0.$$

IV. — Problèmes généraux.

1. *Lieu des centres des cercles vus de deux points donnés sous des angles donnés.*

Prenons (*fig.* 16) comme axes de coordonnées la droite

Fig. 16.



qui joint les points fixes A et A' et la perpendiculaire au milieu de AA'; soit $OA = a$.

L'équation d'un cercle quelconque du plan est

$$(1) \qquad (x-\lambda)^2 + (y-\mu)^2 - \nu^2 = 0$$

λ, μ, ν étant des paramètres variables.

Soit K, K' les tangentes des moitiés des angles donnés; on a évidemment

$$K = \frac{\alpha\omega}{A\alpha} = \frac{\alpha\omega}{\sqrt{\overline{\omega A}^2 - \overline{\alpha\omega}^2}};$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad K = \frac{\nu}{\sqrt{(\lambda - a)^2 + \mu^2 - \nu^2}}$$

De même, pour l'autre point, on a

$$(3) \qquad K' = \frac{\nu}{\sqrt{(\lambda + a)^2 + \mu^2 - \nu^2}}.$$

L'élimination de ν entre les équations (2) et (3) nous donne la relation qui doit exister entre λ et μ, c'est-à-dire l'équation du lieu du centre du cercle ω.

On peut écrire

$$K^2[(\lambda - a)^2 + \mu^2] - \nu^2(1 + K^2) = 0$$
$$K'^2[(\lambda + a)^2 + \mu^2] - \nu^2(1 + K'^2) = 0.$$

L'équation du lieu est donc

$$K^2(1 + K'^2)[(\lambda - a)^2 + \mu^2] - K'^2(1 + K^2)[(\lambda + a)^2 + \mu^2] = 0,$$

c'est-à-dire

$$(K^2 - K'^2)(\lambda^2 + \mu^2)$$
$$- 2a(K^2 + K'^2 + 2K^2K'^2)\lambda + a^2(K^2 - K'^2) = 0;$$

ce lieu est un cercle dont le centre est sur Ox, d'un côté de l'origine variable avec le signe de $(K^2 - K'^2)$.

Solution géométrique. — Tous les triangles tels que $A\alpha\omega$ sont semblables comme étant rectangles et ayant un angle aigu égal; appelons m et n les distances du centre ω aux points fixes A, A'; m', n' les distances d'un autre centre ω' aux mêmes points; r, r', les rayons des cercles : on a

$$\frac{m}{m'} = \frac{r}{r'} = \frac{n}{n'},$$

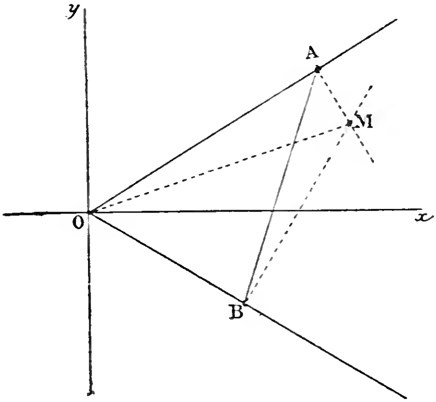
c'est-à-dire

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}.$$

Donc le lieu des points ω est tel que le rapport des distances de chacun de ses points aux deux points fixes A, A', conserve une valeur constante. Ce lieu est un cercle dont le centre se trouve sur la droite AA'.

2. *Les extrémités* A, B (*fig.* 17) *d'une droite de longueur fixe s'appuient constamment sur les côtés d'un*

Fig. 17.



angle donné, trouver le lieu des points de rencontre des perpendiculaires menées, par les points A *et* B, *aux côtés de l'angle fixe.*

Prenons comme axes de coordonnées les bissectrices de l'angle donné, nous poserons

$$AOx = \varphi, \quad \operatorname{tang}\varphi = a;$$

les équations des droites OA, OB sont

$$y - ax = 0, \quad y + ax = 0.$$

Celles des droites AM, BM sont, en appelant λ et μ les abscisses des points A et B,

$$[\mathrm{AM}] \qquad a(y - a\lambda) + (x - \lambda) = 0,$$
$$[\mathrm{BM}] \qquad a(y + a\mu) - (x - \mu) = 0;$$

et l'on a entre λ et μ la relation

$$(\lambda - \mu)^2 + a^2(\lambda + \mu)^2 = d^2$$

qui exprime que le segment AB conserve une longueur fixe d.

Nous obtiendrons l'équation du lieu du point M en éliminant λ et μ entre les équations

$$\lambda(a^2 + 1) - (ay + x) = 0,$$
$$\mu(a^2 + 1) + (ay - x) = 0,$$
$$(\lambda - \mu)^2 + a^2(\lambda + \mu)^2 = d^2.$$

Nous formerons les fonctions $(\lambda + \mu)$, $(\lambda - \mu)$, et nous en porterons la valeur dans la troisième.

$$\lambda + \mu = \frac{2x}{a^2 + 1},$$

$$\lambda - \mu = \frac{2ay}{a^2 + 1};$$

on a donc

$$x^2 + y^2 = \frac{d^2(a^2 + 1)^2}{a^2}.$$

Le lieu du point M est un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon

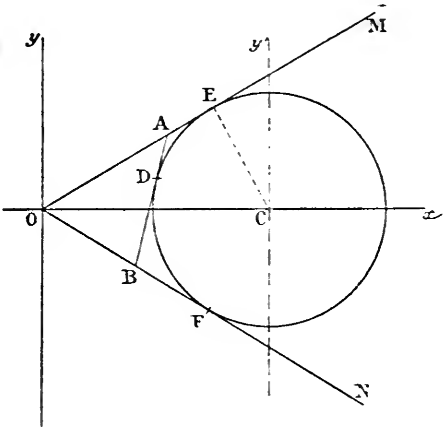
$$\frac{d}{2}\,\frac{1 + a^2}{a} = \frac{d}{\sin 2\varphi}.$$

Solution géométrique. — La circonférence circonscrite au triangle AOB conserve un diamètre constant égal à $\frac{d}{\sin 2\varphi}$ quand AB se déplace suivant la loi énoncée.

Or, le quadrilatère OAMB est inscriptible, le point M est diamétralement opposé à O sur cette circonférence qui est dès lors le lieu cherché.

3. *Une droite* AB (*fig.* 18) *se déplace en s'appuyant sur les droites fixes* OM, ON, *de façon que le triangle* AOB

Fig. 18.



conserve un périmètre constant. — Déterminer la loi de déplacement de cette droite.

Prenons comme axes de coordonnées les bissectrices des droites OM, ON.

Soit φ l'angle $\mathrm{MO}x$, et

$$x\cos\lambda + y\sin\lambda - \mu = 0$$

l'équation de la droite AB, λ et μ étant deux paramètres variables.

Les coordonnées du point A, intersection des droites

$$x\cos\lambda + y\sin\lambda - \mu = 0,$$
$$y - \operatorname{tang}\varphi . x = 0,$$

sont

$$x_1 = \frac{\mu}{\cos\lambda + \operatorname{tang}\varphi\sin\lambda}, \quad y_1 = \frac{\mu\operatorname{tang}\varphi}{\cos\lambda + \operatorname{tang}\varphi\sin\lambda}.$$

De même les coordonnées du point B, intersection des droites

$$x\cos\lambda + y\sin\lambda - \mu = 0,$$
$$y + \operatorname{tang}\varphi . x = 0,$$

sont

$$x_2 = \frac{\mu}{\cos\lambda - \operatorname{tang}\varphi . \sin\lambda}, \quad y_2 = \frac{-\mu \operatorname{tang}\varphi}{\cos\lambda - \operatorname{tang}\varphi \sin\lambda}.$$

Nous obtiendrons la relation qui existe entre λ et μ, en exprimant que le périmètre du triangle AOB est constant :

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 2p;$$

or

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \frac{\mu\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\varphi}}{\cos\lambda + \operatorname{tang}\varphi \sin\lambda} = \frac{\mu}{\cos\varphi(\cos\lambda + \operatorname{tang}\varphi\sin\lambda)},$$

$$\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \frac{\mu}{\cos\varphi(\cos\lambda - \operatorname{tang}\varphi\sin\lambda)},$$

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \frac{2\mu \operatorname{tang}\varphi}{\cos^2\lambda - \operatorname{tang}^2\varphi \sin^2\lambda};$$

on a donc

$$2p = \frac{\mu}{\cos\varphi}\left(\frac{1}{\cos\lambda + \operatorname{tang}\varphi \sin\lambda} + \frac{1}{\cos\lambda - \operatorname{tang}\varphi\sin\lambda} + \frac{2\sin\varphi}{\cos^2\lambda - \operatorname{tang}^2\varphi\sin^2\lambda}\right)$$

ou

$$p = \frac{\mu}{\cos\varphi}\,\frac{\cos\lambda + \sin\varphi}{\cos^2\lambda - \operatorname{tang}^2\varphi\sin^2\lambda},$$

qu'on peut écrire, en résolvant par rapport à μ,

$$\begin{aligned}
\mu &= p\cos\varphi\,\frac{\cos^2\lambda - \operatorname{tang}^2\varphi\sin^2\lambda}{\cos\lambda + \sin\varphi} \\
&= p\cos\varphi\,\frac{\cos^2\lambda - \operatorname{tang}^2\varphi(1 - \cos^2\lambda)}{\cos\lambda + \sin\varphi} \\
&= p\cos\varphi\,\frac{\cos^2\lambda(1 + \operatorname{tang}^2\varphi) - \operatorname{tang}^2\varphi}{\cos\lambda + \sin\varphi} \\
&= p\cos\varphi\,\frac{\cos^2\lambda - \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi(\cos\lambda + \sin\varphi)};
\end{aligned}$$

enfin

$$\mu = \frac{p}{\cos\varphi}(\cos\lambda - \sin\varphi).$$

Remplaçons μ par cette valeur dans l'équation de AB; il vient

$$x\cos\lambda + y\sin\lambda - \frac{p}{\cos\varphi}(\cos\lambda - \sin\varphi) = 0,$$

ou

$$\left(x - \frac{p}{\cos\varphi}\right)\cos\lambda + y\sin\lambda + p\,\mathrm{tang}\,\varphi = 0.$$

Portons $OE = p$ et élevons EC perpendiculaire à OM; on obtient

$$OC = \frac{p}{\cos\varphi}.$$

Si nous prenons comme nouvelle origine le point C, en appelant x', y', les coordonnées d'un point (x, y) de l'ancien système, on a

$$x' = x - \frac{p}{\cos\varphi}, \quad y' = y.$$

L'équation de la droite AB, rapportée aux nouveaux axes, est donc

$$x'\cos\lambda + y'\sin\lambda - p\,\mathrm{tang}\,\varphi = 0,$$

ce qui montre qu'elle reste à la distance $p\,\mathrm{tang}\,\varphi$ du point C.

Donc la droite AB roule sur un cercle de rayon $p\,\mathrm{tang}\,\varphi$, ayant son centre au point C dont l'abscisse est

$$x = \frac{p}{\cos\varphi}.$$

Solution géométrique. — Menons le cercle exinscrit au triangle AOB; on sait que $AE = AD$; $BD = BF$, donc $OE = p$, demi-périmètre fixe; dès lors, le cercle exinscrit est fixe; on a

$$OC = \frac{p}{\cos\varphi}, \quad CE = p\,\mathrm{tang}\,\varphi.$$

La droite AB roule sur ce cercle.

TRANSFORMATION D'UNE FIGURE PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES.

4. *On donne un point* O *et une droite* MN; *on mène une droite* OX *rencontrant* MN *en* A; *on mène une droite* OY *faisant avec* OX *un angle fixe* θ *et l'on prend un point* B *tel que*

$$OA.OB = K^2,$$

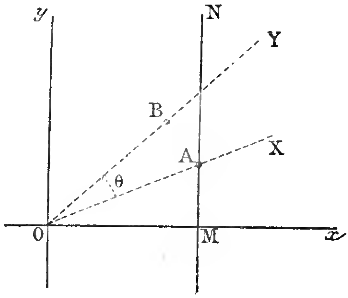
K^2 *étant une quantité fixe.*

On demande :

(*a*) *Quel est le lieu du point* B *quand* OX *tourne autour du point* O;

(*b*) *Quel est le lieu du point* B *quand la droite* MN *est*

Fig. 19.



remplacée par un cercle ayant son centre sur Ox *perpendiculaire à* MN.

(*a*) Prenons (*fig.* 19) comme axe des y la parallèle à MN menée par le point O.

Soit

$$(1) \qquad x - d = 0$$

l'équation de la droite MN;

l'équation de OX est

$$(2) \qquad y - \lambda x = 0.$$

Les coordonnées du point A sont

$$x_1 = d,$$
$$y_1 = \lambda d.$$

On a donc

$$\overline{OA}^2 = d^2(1+\lambda^2).$$

Soit

(3) $$y - \mu x = 0$$

l'équation de OY; on a, entre λ et μ, la relation

(4) $$\tang\theta = \frac{\mu - \lambda}{1 + \lambda\mu}.$$

Si l'on appelle x et y les coordonnées du point B, on a

$$OB^2 = x^2 + y^2 :$$

donc

(5) $$d^2(1+\lambda^2)(x^2+y^2) = K^4.$$

On obtiendra l'équation du lieu du point B, en éliminant λ, μ, entre les équations (3), (4), (5).

Il vient

$$\tang\theta = \frac{y - \lambda x}{x + \lambda y},$$

puis

$$\lambda = \frac{y - x\tang\theta}{x + y\tang\theta}.$$

On a donc

(6) $$d^2(x^2+y^2)\left[\frac{(y - x\tang\theta)^2}{(x + y\tang\theta)^2} + 1\right] = K^4$$

ou

$$d^2(x^2+y^2)^2(1+\tang^2\theta) - K^4(x + y\tang\theta)^2 = 0;$$

c'est-à-dire

$$\left[d(x^2+y^2)\sqrt{1+\tang^2\theta} - K^2(x+y\tang\theta)\right]$$
$$\times\left[d(x^2+y^2)\sqrt{1+\tang^2\theta} + K^2(x+y\tang\theta)\right] = 0.$$

Le lieu se décompose donc en deux cercles :

$$\frac{d}{\cos\theta}(x^2+y^2) - K^2(x+y\tan\theta) = 0 \tag{7}$$

$$\frac{d}{\cos\theta}(x^2+y^2) + K^2(x+y\tan\theta) = 0. \tag{8}$$

Ils ont même rayon et leurs centres sont symétriquement placés par rapport à l'origine ; il suffit de considérer le premier; toutes les conclusions seront vraies pour le second, obtenu en portant la longueur OB en sens contraire de celui que nous avons adopté.

Solution géométrique. — Le lieu que nous étudions n'est autre que le transformé par rayons vecteurs réciproques de la droite MN (O étant le pôle, K^2 la puissance) que l'on a fait tourner de l'angle θ autour du point O.

(*b*) La seconde question, traitée de la même façon que la première, conduit à une circonférence : c'est encore le lieu transformé par rayons vecteurs réciproques du cercle fixe, auquel on a imprimé un déplacement angulaire de l'angle θ autour du point O.

La transformée d'une circonférence est une circonférence homothétique de la première, ayant le point O comme centre d'homothétie et $\frac{K^2}{d^2-r^2}$ pour rapport d'homothétie ; (d^2-r^2) est la puissance du point O par rapport au cercle fixe.

Exercices proposés.

Résoudre les questions proposées aux Concours d'admission :

1° A l'École Navale, en 1889 (t. II, p. 102*); — 1892, § 1° (t. II, p. 103*).

2° A l'École Centrale, en 1865, 2e session (t. II, p. 135*); — 1891, 2e session, §§ 1° et 3° (t. II, p. 88*).

3° A l'École Normale, en 1845 (t. II, p. 20*); — 1862 (t. II, p. 24*); — 1883, § 2° (t. II, p. 30*); — 1890, § 2° (t. II, p. 34*); — 1891, § 2° (t. II, p. 83*).

4° A l'École Polytechnique, en 1863 (t. II, p. 7*); — 1864 (t. II, p. 8*); — 1870 (t. II, p. 10*); — 1884 (t. II, p. 16*); — 1892, § 1° (t. II, p. 79*).

CHAPITRE IV.

DISCUSSION DE CONIQUES.

Rappel de résultats.

Soit

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

l'équation générale des courbes du second ordre, on peut écrire cette équation sous la forme

$$(2) \quad (Ax + By + D)^2 + (AC - B^2)y^2 + 2(AE - BD)y + AF - D^2 = 0,$$

posons :

$$\delta = AC - B^2,$$
$$e = AE - BD,$$
$$f = AF - D^2;$$

l'équation (2) devient

$$(Ax + By + D)^2 + \delta y^2 + 2ey + f = 0.$$

Si $\delta \gtrless 0$, on a, comme plus haut, en posant

$$X = Ax + By + D,$$

$$(3) \qquad \delta X^2 + (\delta y + e)^2 + \delta f - e^2 = 0;$$

dès lors, en posant $\delta y + e = Y$, et en remarquant que

$$\delta f - e^2 = A(ACF + 2BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2) = A\Delta,$$

Δ étant le discriminant de la fonction, premier membre de (1), on peut écrire

$$(4) \qquad X^2 + \frac{1}{\delta}Y^2 + \frac{A\Delta}{\delta} = 0,$$

ce qui conduit aux formes

$$
\begin{array}{lll}
(5) & X^2 + Y^2 - K^2 = 0, & \multirow{2}{*}{\Big\} \textit{Ellipses.}} \\
(6) & X^2 + Y^2 + K^2 = 0; &
\end{array}
$$

$$(7) \qquad X^2 - Y^2 \pm K^2 = 0; \quad \textit{Hyperbole.}$$

$$
\left.\begin{array}{ll}
(8) & X^2 + Y^2 = 0, \\
(9) & X^2 - Y^2 = 0.
\end{array}\right\} \textit{Droites.}
$$

Si $\delta = 0$, l'équation (2) conduit à la forme

$$(10) \qquad X^2 + Y = 0, \quad \textit{Parabole;}$$

en appelant ici Y la fonction $(2ey + f)$.

Si, en même temps que $\delta = 0$, on a $e = 0$, on conclut

$$(11) \qquad X^2 + (AF - D^2) = 0;$$

c'est-à-dire

$$
\begin{array}{llll}
(12) & X^2 - K^2 = 0 & \text{si} & AF - D^2 < 0, \\
(13) & X^2 + K^2 = 0 & \text{si} & AF - D^2 > 0, \\
(14) & X^2 = 0 & \text{si} & AF - D^2 = 0.
\end{array}
$$

Ces trois dernières équations représentent des droites parallèles, (12) réelles, (13) imaginaires, (14) confondues.

Nous appellerons $\delta = AC - B^2$ la *fonction caractéristique*, ou simplement la *caractéristique*.

Le tableau suivant résume les résultats de la discussion des formes que nous venons d'obtenir :

$$
\delta > 0 \quad \text{Ellipses} \left\{\begin{array}{ll}
\text{réelles,} & \text{si } A\Delta < 0 \\
\text{évanouissantes,} & \text{si } \Delta = 0 \\
\text{imaginaires,} & \text{si } A\Delta > 0
\end{array}\right\} \text{si} \left\{\begin{array}{c} B = 0 \\ A - C = 0 \end{array}\right\} \text{Cercle.}
$$

$$\delta = 0 \quad \text{Parabole effective, si} \qquad \Delta \gtrless 0.$$

$$\delta < 0 \quad \text{Hyperbole effective, si} \qquad \Delta \gtrless 0 \left\{\begin{array}{c} \text{si } A + C = 0, \\ \text{Hyperbole équilatère.} \end{array}\right.$$

$$
\begin{array}{c} \Delta = 0 \\ \text{Droites} \end{array}
\left\{\begin{array}{lll}
\text{Imaginaires (Ellipse évanouissante), si} & & \delta > 0 \\
\text{Réelles se coupant,} & \text{si} & \delta < 0 \\
\text{Parallèles } \delta = 0 \left\{\begin{array}{l} \text{réelles distinctes,} \\ \text{confondues,} \\ \text{imaginaires,} \end{array}\right. & \begin{array}{l} \text{si} \\ \text{si} \\ \text{si} \end{array} & \begin{array}{l} AF - D^2 < 0 \\ AF - D^2 = 0 \\ AF - D^2 > 0. \end{array}
\end{array}\right.
$$

REMARQUE IMPORTANTE. — Il est essentiel dans le calcul des fonctions δ, Δ, $AF - D^2$, qui donnent parfois naissance à des transformations, de ne *jamais* changer le signe de ces fonctions. Ce changement de signe renverserait les résultats obtenus et donnerait des conclusions fausses.

I. — MARCHE A SUIVRE POUR LA DISCUSSION D'UNE ÉQUATION A COEFFICIENTS VARIABLES.

1. — Marche générale.

Si les coefficients d'une équation du second degré sont variables, la conique qu'elle représente sera variable, en général, de nature, de forme et de position.

Pour discuter le lieu géométrique que peut représenter une équation de ce genre, on formera la *caractéristique*

$$\delta = AC - B^2$$

dont le signe donnera la nature de la conique.

On reconnaîtra s'il existe des cercles dans ce système de coniques en discutant les équations

$$A - C = o,$$
$$B = o.$$

Toutes les solutions de ce couple donnent des cercles réels ou imaginaires suivant le signe de la fonction

$$R^2 = (a^2 + b^2 - c)$$

où (a, b) sont les coordonnées du centre du cercle, c le terme constant de l'équation.

Les solutions de l'équation

$$A + C = o$$

donnent les hyperboles équilatères du système.

On formera ensuite Δ et l'on discutera l'équation $\Delta = o$. Elle fournit les valeurs *du* paramètre pour lesquelles la conique représentée par l'équation donnée devient un système de droites, ou la relation qui doit exister entre *les* paramètres pour que la conique se réduise à deux droites.

Ces droites sont :

1° *Réelles et se coupant*, si les paramètres qui les donnent satisfont à $\delta < 0$,

2° *Imaginaires* (*se coupant en un point réel*) si ces valeurs satisfont à $\delta > 0$,

3° *Parallèles*, si l'équation $\delta = 0$ est satisfaite. Dans ce cas les droites sont :

réelles et distinctes,	si $AF - D^2 < 0$,
confondues,	si $AF - D^2 = 0$,
imaginaires,	si $AF - D^2 > 0$.

Remarque. — On peut écrire

$$\Delta = (BE - CD)^2 - (AC - B^2)(CF - E^2) = 0.$$

Dans le cas où les coefficients A, B, . . . sont fonction de deux paramètres, les lieux auxiliaires dont les équations sont

$$AC - B^2 = 0, \quad CF - E^2 = 0,$$

sont tangents au lieu $\Delta = 0$, à leurs rencontres avec le lieu

$$BE - CD = 0;$$

nous retrouverons cette propriété générale dans les exemples qui suivent.

2. — Discussion d'une équation de coniques ne renfermant qu'un seul paramètre.

Lieu des points du plan dont le rapport des distances à un point et à une droite fixes a une valeur donnée.

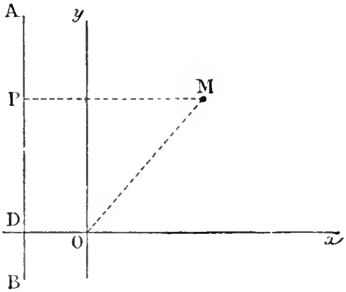
Prenons (*fig.* 20) comme axes de coordonnées : 1° la perpendiculaire Ox menée par le point donné O à la droite fixe AB; 2° la droite Oy perpendiculaire à la première menée par le point O.

Soient a la longueur OD, M (x, y) un point du plan appartenant au lieu, et ε la valeur donnée du rapport; ε s'appelle *l'excentricité*.

On doit avoir

$$\frac{\text{MO}}{\text{MP}} = \varepsilon,$$

Fig. 20.



c'est-à-dire

$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2(x + a)^2.$$

Ce lieu est du second degré et d'une nature variable avec la valeur du paramètre ε.

Ordonnons l'équation :

$$(1) \qquad x^2(1 - \varepsilon^2) + y^2 - 2a\varepsilon x - a^2\varepsilon^2 = 0.$$

Formons la caractéristique :

$$\delta = 1 - \varepsilon^2 = (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon).$$

ε ne peut être que positif; donc, pour toutes les valeurs de ε comprises entre 0 et 1, on a $\delta > 0$, et les coniques (1) sont des *ellipses*, toujours réelles.

Toutes les valeurs de ε comprises entre 1 et $+\infty$ donnent des *hyperboles*.

Enfin, la valeur $\varepsilon = 1$ donne une *parabole*.

Si $\varepsilon = 0$, quel que soit a, non infini, la conique se réduit à

$$x^2 + y^2 = 0$$

cercle de rayon nul, ayant son centre à l'origine. C'est le seul cercle du système. Cette équation est aussi celle de deux droites imaginaires

$$x + iy = 0,$$
$$x - iy = 0,$$

auxquelles on donne le nom de droites *isotropes*.

Il y a une seule hyperbole équilatère et la valeur de l'excentricité qui la donne satisfait à l'équation

$$\varepsilon^2 - 2 = 0;$$

elle est donc

$$\varepsilon = +\sqrt{2}.$$

Formons Δ :

$$\Delta = -a^2\varepsilon^2(1 - \varepsilon^2) - a^2\varepsilon^4 = -a^2\varepsilon^2.$$

Donc le lieu se réduit à des droites :

1° Si $a = 0$, quel que soit ε; la droite AB passe par le point O; l'équation de la conique est alors

$$x^2(1 - \varepsilon^2) + y^2 = 0.$$

Les droites qu'elle représente sont réelles ou imaginaires suivant le signe de $(1 - \varepsilon^2)$; elles sont confondues avec Ox dans le cas où la caractéristique est nulle.

2° Si $\varepsilon = 0$, nous avons vu que, quel que soit a, le lieu est le cercle de rayon nul

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Remarque. — Dans la question que nous venons de traiter, le point O est un des foyers de la conique; AB est la directrice correspondante. La définition donnée plus haut est une propriété fondamentale des sections coniques. Plus généralement, le point F, (a, b) étant un foyer et $x \cos \alpha + y \sin \alpha - d = 0$ la directrice correspondante,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - \lambda^2 (x \cos \alpha + y \sin \alpha - d)^2 = 0$$

est l'équation générale des coniques ayant un foyer donné et une directrice donnée.

3. — Discussion d'une équation renfermant deux paramètres variant séparément.

Nous avons trouvé au Chap. II (p. 39) les relations suivantes entre les coordonnées des points $M(x, y)$, $M'(x', y')$:

$$x' = \frac{a^2}{x},$$

$$y' = \frac{ay}{x}.$$

Cherchons le lieu décrit par le point M quand le point M' se meut sur un cercle de rayon R ayant son centre sur Ox.

L'équation de ce cercle est, en appelant c l'abscisse du centre,

$$(x' - c)^2 + y'^2 - R^2 = 0.$$

Nous obtiendrons l'équation du lieu du point M en remplaçant x' et y' par leurs valeurs en fonction de x et de y: on a ainsi

$$\left(\frac{a^2}{x} - c\right)^2 + a^2 \frac{y^2}{x^2} - R^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(c^2 - R^2) x^2 + a^2 y^2 - 2 a^2 c x + a^4 = 0.$$

(a) Proposons-nous de discuter la nature de cette conique; formons la caractéristique

$$\delta = AC - B^2,$$

$$\delta = a^2 (c^2 - R^2).$$

Si $\delta > 0$, c'est-à-dire $c^2 - R^2 > 0$, la conique est une ellipse toujours réelle; l'origine est extérieure au cercle décrit par le point M'.

Si $\delta < 0$, c'est-à-dire $c^2 - R^2 < 0$, le lieu est une hyperbole; l'origine est à l'intérieur du cercle.

Dans ces deux cas les axes de la conique sont parallèles aux axes de coordonnées, puisque le terme en xy manque dans l'équation.

Si $\delta = 0$, la conique est une parabole. Cette condition est remplie, soit par $a = 0$, quels que soient c et R, soit par $c^2 - R^2 = 0$, quel que soit a.

1° Supposons $a = 0$, la conique se réduit au double axe des y

$$(c^2 - R^2)x^2 = 0.$$

Ce résultat est facile à expliquer géométriquement. Si le point M a une position quelconque sur le cercle, la droite Az coïncide avec Oy, le point B avec le point O; BM' avec Ox, la rencontre de OD avec BM' a donc lieu constamment en O. Mais quand le point M est sur Oy, B est quelconque sur cette droite; le point de rencontre de OD, ici Oy, avec la parallèle à Ox menée par B est quelconque sur Oy; cette droite fait partie du lieu.

2° Supposons $c^2 - R^2 = 0$; la conique se réduit à

$$a^2y^2 - 2a^2cx + a^4 = 0,$$

c'est-à-dire

$$y^2 - 2cx + a^2 = 0,$$

équation d'une parabole ayant Ox pour axe et son sommet au point

$$x = \frac{a^2}{2c}.$$

3° Si l'on a simultanément

$$a = 0, \quad c^2 - R^2 = 0,$$

le problème n'existe plus.

(*b*) Nous aurons comme lieu une hyperbole équilatère, si

$$c^2 - R^2 + a^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$c^2 + a^2 = R^2;$$

les longueurs a, c, R doivent être les côtés d'un triangle rectangle dont R est l'hypoténuse.

(*c*) Le lieu sera un cercle si

$$c^2 - R^2 = a^2,$$
$$c^2 = a^2 + R^2,$$

a, c, R forment un triangle rectangle dont c est l'hypoténuse.

(*d*) *Systèmes de droites.* — Formons

$$\Delta = ACF + 2BDE - AE^2 - FB^2 - CD^2;$$

cette quantité se réduit ici à

$$\Delta = -a^6 R^2.$$

La conique se décompose donc en un système de droites pour

$$a = 0,$$

quels que soient c et R, et pour

$$R = 0,$$

quels que soient a et c.

La première hypothèse, $a = 0$, donne $\delta = 0$; les droites sont du genre parabolique, résultat déjà obtenu.

La seconde hypothèse, $R = 0$, donne $\delta > 0$; les droites sont imaginaires, elles sont la limite des ellipses

$$(c^2 - R^2)x^2 + a^2 y^2 - 2a^2 cx + a^4 = 0,$$

qui deviennent évanouissantes pour $R = 0$; l'équation devient, en effet,

$$c^2 x^2 - 2a^2 cx + a^4 + a^2 y^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(cx - a^2)^2 + a^2 y^2 = 0.$$

Le seul point réel est le centre dont les coordonnées sont

$$\Omega \begin{cases} x = \dfrac{a^2}{c}, \\ y = 0. \end{cases}$$

4. — Discussion d'équations du second degré dont les coefficients sont des fonctions de deux paramètres variables.

Nous avons trouvé au Chap. III (§ I, 4) la condition

$$\frac{\left[(\lambda - a)a + (\mu - b)b + \dfrac{a^2 + b^2 - R^2}{2}\right]^2}{(\lambda - a)^2 + (\mu - b)^2} = R^2,$$

qui exprime qu'un cercle dont le centre a pour coordonnées (λ, μ) et qui passe à l'origine, est tangent au cercle de rayon R et dont le centre a pour coordonnées (a, b).

Cette équation en λ, μ, est celle d'une conique, lieu des centres des cercles mobiles remplissant les conditions de l'énoncé. Nous allons nous proposer de discuter la nature de cette conique quand le rayon R du cercle donné reste constant et que son centre (a, b) est mobile dans le plan.

Nous remplacerons, pour faciliter la notation, λ par x, μ par y; l'équation devient

$$\left(ax + by - \frac{a^2 + b^2 - R^2}{2}\right)^2 = R^2[(x - a)^2 + (y - b)^2].$$

L'ensemble des termes du second degré égalé à o s'écrit

$$(ax + by)^2 - R^2(x^2 + y^2) = 0;$$

c'est-à-dire

$$(a^2 - R^2)x^2 + 2abxy + (b^2 - R^2)y^2 = 0.$$

Formons la fonction $\delta = AC - B^2$.

On a

$$\delta = (a^2 - R^2)(b^2 - R^2) - a^2b^2,$$
$$\delta = R^2(R^2 - a^2 - b^2);$$

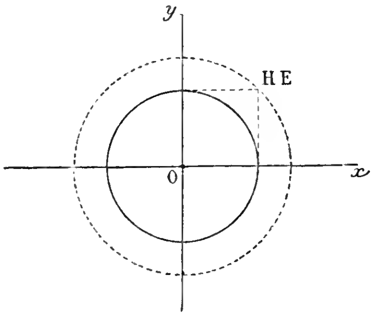
R étant constant, on aura des paraboles si le point (a, b) se meut sur la courbe dont l'équation est

(1) $$R^2 - a^2 - b^2 = 0.$$

C'est un cercle ayant son centre à l'origine et R pour rayon (*fig.* 21).

La fonction $\delta = R^2 - a^2 - b^2$ est positive pour la région

Fig. 21.



intérieure au cercle; donc, quand le point (a, b) est mobile à l'intérieur de la circonférence (1), le lieu du centre du cercle mobile passant à l'origine est une ellipse.

Quand le point (a, b) se meut dans la région extérieure au cercle, le lieu de ce même centre est une hyperbole.

Cherchons la position que doit occuper (a, b) pour que le lieu du centre du cercle passant à l'origine soit :

1° Une *hyperbole équilatère;* on doit avoir

$$a^2 - R^2 + b^2 - R^2 = 0$$

ou

$$a^2 + b^2 - 2R^2 = 0.$$

Le point (a, b) doit se mouvoir sur un cercle ayant son centre à l'origine et pour rayon $R\sqrt{2}$ (*fig.* 21).

2° Un *cercle;* on doit avoir

$$ab = 0,$$
$$a^2 - R^2 = b^2 - R^2,$$

c'est-à-dire

$$ab = 0,$$
$$a^2 - b^2 = 0.$$

La seule position du point (a, b) donnant un cercle est l'origine des coordonnées.

5. — Application.

On donne deux axes rectangulaires, Ox, Oy*; un point* C *sur* Ox*, à la distance* d*, et un point* A *de coordonnées* (α, β)*; le point* C *est le centre d'un cercle de rayon* R*. Par le point* A*, on mène une sécante variable qui rencontre* Oy *en un point* B*; de ce point on mène des tangentes au cercle fixe, on demande : 1° quel est le lieu du point* M *de rencontre de la sécante mobile avec la corde des contacts des tangentes issues de* B*; 2° quelle est la nature de ce lieu suivant la position du point* A *dans le plan?*

Le point M (*fig.* 22), dont on cherche le lieu géométrique, est à l'intersection d'une sécante quelconque issue de A

$$(1) \qquad y - \beta - \lambda(x - \alpha) = 0$$

et de la polaire du point B par rapport au cercle dont l'équation est

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - 2dx + d^2 - R^2 = 0.$$

Les coordonnées du point B étant

$$x = 0, \quad y = \beta - \lambda\alpha,$$

l'équation de la droite DE est

$$(3) \qquad (\beta - \lambda\alpha)y + d(d - x) - R^2 = 0.$$

On obtiendra l'équation du lieu cherché en éliminant λ entre les équations

$$(x-\alpha).\lambda-(y-\beta)=0,$$
$$-\alpha y.\lambda+[\beta y+d(d-x)-R^2]=0.$$

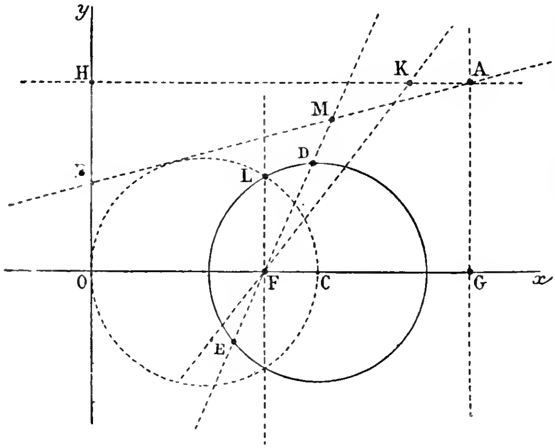
On obtient ainsi

$$(x-\alpha)(\beta y-dx+d^2-R^2)-\alpha y(y-\beta)=0. \tag{4}$$

Ce lieu est une conique Γ.

L'équation met en évidence quatre points par lesquels elle

Fig. 22.



passe. Ces points sont aux intersections de

$$x-\alpha=0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} y=0, \\ y-\beta=0, \end{cases}$$

et de

$$\beta y-dx+d^2-R^2=0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} y=0, \\ y-\beta=0. \end{cases}$$

La droite

$$\beta y-dx+d^2-R^2=0$$

est la polaire du point H par rapport au cercle; les quatre points sont donc A, K, F, G.

L'équation (4) peut s'écrire

$$(5)\quad dx^2 - \beta xy + \alpha y^2 - [d(d+\alpha) - R^2]x + \alpha(d^2 - R^2) = 0.$$

Nous allons discuter la nature de cette conique Γ quand le point A est mobile dans le plan.

(a) La caractéristique $\delta = AC - B^2$ est

$$\delta = d\alpha - \frac{\beta^2}{4};$$

Γ est donc une parabole quand le point A est mobile sur la parabole Γ' dont l'équation est

$$d\alpha - \frac{\beta^2}{4} = 0.$$

Γ' est tangente à l'origine à l'axe des y; son foyer est au point dont les coordonnées sont

$$\beta = 0, \quad \alpha = d:$$

c'est le point C. La directrice correspondante a pour équation

$$\alpha + d = 0.$$

La conique Γ est une ellipse chaque fois que le point A est dans la même région de Γ' que le point C. C'est une hyperbole pour toutes les positions occupées par le point A dans la région opposée.

Γ est une hyperbole équilatère quand le point A se meut sur la droite $\alpha + d = 0$, c'est-à-dire sur la directrice de la parabole.

Enfin Γ est un cercle quand le point A coïncide avec le point C

$$\beta = 0, \quad \alpha = d.$$

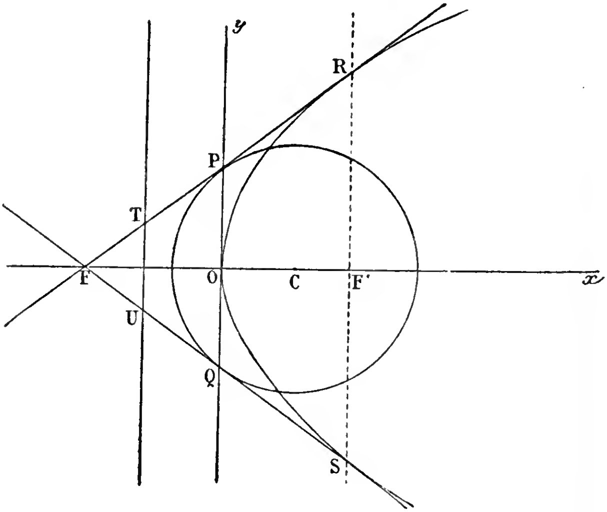
Nota. — Ces résultats seront expliqués facilement après lecture du § III du présent Chapitre.

(b) Cherchons quel est le lieu des positions du point A pour lesquelles Γ devient un système de droites.

Le discriminant Δ de la fonction premier membre s'écrit

$$\Delta = -\alpha[(d\alpha - d^2 + R^2)^2 + \beta^2(d^2 - R^2)].$$

Fig. 23.



Γ sera un système de droites lorsque le point A se déplacera sur l'un des lieux

(1) $$\alpha = 0,$$

(2) $$d\alpha + \beta\sqrt{R^2 - d^2} + R^2 - d^2 = 0,$$

(3) $$d\alpha - \beta\sqrt{R^2 - d^2} + R^2 - d^2 = 0.$$

Ces dernières droites ne seront réelles que si l'on a

$$R^2 - d^2 > 0.$$

Le cercle coupe alors Oy aux points P et Q (*fig.* 23).

On construit facilement les droites (2) et (3) en joignant le point F aux points P et Q.

On reconnaît également que ces droites sont tangentes à la parabole

$$d\alpha - \frac{\beta^2}{4} = 0$$

aux points

$$[\mathrm{R}] \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\mathrm{R}^2 - d^2}{d}, \\ y = +\,2\sqrt{\mathrm{R}^2 - d^2}, \end{cases}$$

$$[\mathrm{S}] \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\mathrm{R}^2 - d^2}{d}, \\ y = -\,2\sqrt{\mathrm{R}^2 - d^2}; \end{cases}$$

résultat général déjà indiqué (p. 83 — Rem.)

Dès lors, quand le point A coïncide avec l'un des points O, R, S, la conique Γ est un système de droites parallèles réelles et distinctes, car la fonction $(\mathrm{AF} - \mathrm{D}^2)$, qui est ici

$$4d\alpha(d^2 - \mathrm{R}^2) - [d\alpha + (d^2 - \mathrm{R}^2)]^2,$$

c'est-à-dire

$$-[d\alpha - (d^2 - \mathrm{R}^2)]^2,$$

est toujours négative.

Tous les autres points des droites FP, FQ, PQ, pris comme position du point A, font que la conique Γ est un système de droites réelles se coupant; en T, U, ces droites sont rectangulaires.

Revenons à la distinction des points donnant des ellipses réelles de ceux qui donnent des ellipses imaginaires. α, d sont positifs : tous les points à l'intérieur de la parabole donnent le signe — à la fonction

$$\Delta = -\alpha[(d\alpha - d^2 + \mathrm{R}^2)^2 - \beta^2(\mathrm{R}^2 - d^2)].$$

Γ ne peut donc être qu'une ellipse réelle.

Remarque. — On commet facilement une faute de signe dans la discussion précédente : mais quelques points de repère permettent de reconnaître l'existence de cette faute :

1° Les cercles du système, s'ils sont réels, doivent correspondre à une position du point mobile située dans la région des points donnant pour Γ des ellipses réelles;

2° Les hyperboles équilatères doivent correspondre à des points situés dans la région de ceux qui donnent des hyperboles; etc.

§ II. — DE L'HOMOGRAPHIE.

Avant de donner une solution géométrique des principaux résultats de la discussion précédente, nous allons énoncer et démontrer un théorème général, extrait d'une des plus belles théories de la Géométrie moderne, l'*Homographie;* il nous suffira pour étudier la plupart des propriétés des coniques.

Ne pouvant aborder dans le cadre que nous nous sommes imposé l'étude générale de l'Homographie, nous démontrerons isolément les quelques propriétés que nous emploierons par la suite.

Définition. — Une relation entre deux paramètres λ, μ, est dite *homographique* quand elle est de la forme

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0.$$

Si cette relation est symétrique par rapport à λ et μ, elle est dite *involutive* ou d'*involution* (1).

La relation homographique est la relation la plus générale qui puisse exister entre deux paramètres en restant linéaire par rapport à chacun d'eux.

Elle est caractérisée par ce fait qu'à toute valeur de l'un des paramètres correspond une, et une seule, valeur de l'autre.

Si donc on peut démontrer par des considérations géométriques qu'à toute détermination d'un élément d'une figure

---

(1) Notre Maître regretté, M. Vazeille, a publié une *Théorie de l'Involution du second degré* à laquelle nous renvoyons nos lecteurs. Ils retrouveront dans cette étude la clarté et l'élégance qui caractérisaient son enseignement.

correspond une détermination unique pour un autre élément, et que réciproquement à une détermination unique du second élément correspond une détermination unique du premier, on dira qu'il existe entre ces deux éléments une relation homographique; on pourra alors conclure à l'existence de toutes les propriétés qui se déduisent de cette relation.

1. — Théorème.

Si deux droites tournent autour de deux points fixes et s'il existe entre les paramètres qui en déterminent la position une relation homographique, le point commun à ces droites décrit une conique passant par les deux points fixes.

Soit $Z = 0$ l'équation de la droite des points fixes;

$$X = 0, \quad Y = 0$$

celles de deux droites qui, par leur intersection avec $Z = 0$, déterminent les points fixes A, B.

$$X + \lambda Z = 0 \tag{1}$$

est l'équation générale des droites passant en A;

$$Y + \mu Z = 0 \tag{2}$$

est l'équation générale des droites passant en B.

Soit

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0 \tag{3}$$

la relation homographique existant entre les paramètres λ, μ qui déterminent ces droites.

On obtiendra l'équation du lieu de leur point commun en éliminant λ, μ, entre les équations (1), (2), (3).

Pour cela, on rend homogènes les trois équations

$$\nu X + \lambda Z = 0,$$
$$\nu Y + \mu Z = 0,$$
$$A\lambda\mu + (B\mu + C\lambda)\nu + D\nu^2 = 0,$$

et l'on porte dans la troisième les valeurs proportionnelles de λ, μ, ν, tirées des deux premières

$$\frac{\lambda}{X} = \frac{\mu}{Y} = \frac{\nu}{-Z},$$

ce qui donne

$$AXY - (BY + CX)Z + DZ^2 = 0, \tag{4}$$

équation d'une courbe du second ordre, Γ.

L'équation (4) est vérifiée quand on y fait simultanément

$$\left\{\begin{array}{l} Z = 0, \\ X = 0, \end{array}\right. \tag{A}$$

ou

$$\left\{\begin{array}{l} Z = 0, \\ Y = 0; \end{array}\right. \tag{B}$$

la conique passe donc en A et B.

Elle ne passe pas en général par le troisième sommet du triangle $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$; mais ce sommet devient un point de la conique quand $D = 0$, c'est-à-dire quand la relation homographique admet, comme solutions, des valeurs simultanément nulles de λ et de μ.

2. — Cas de décomposition.

Si l'on applique au polynôme

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D$$

la condition obtenue en Algèbre pour que ce polynôme se décompose en un produit de facteurs, on trouve

$$A(BC - AD) = 0.$$

Donc la conique Γ se décomposera en un système de droites :

1° Lorsque $A = 0$, l'une des droites est alors $Z = 0$, la ligne des points fixes, l'autre est

$$BY + CX - DZ = 0;$$

elle peut occuper une position quelconque dans le plan, suivant les valeurs de B, C, D;

2° Lorsque $BC - AD = 0$, la relation (3) devient, en multipliant par A et en tenant compte de la condition $BC - AD = 0$,

$$A^2\lambda\mu + A(B\lambda + C\mu) + BC = 0; \tag{5}$$

elle se décompose en

$$A\lambda + C = 0,$$
$$A\mu + B = 0.$$

Les droites en lesquelles Γ se décompose sont donc

$$AX - CZ = 0 \quad \text{droite passant en A},$$
$$AY - BZ = 0 \quad \text{droite passant en B}.$$

Remarque. — Les propriétés d'un lieu géométrique se classent en deux catégories :

1° les propriétés indépendantes du choix des coordonnées, qui sont les propriétés *absolues* du lieu;

2° les propriétés qui dépendent des éléments pris pour la définition : axes, système de coordonnées, etc.

Comme chaque propriété se traduit par une relation entre les coefficients de l'équation, il est intéressant de pouvoir distinguer les relations *absolues* de celles qui changent avec les éléments de la définition.

La théorie algébrique des *invariants* apprend à connaître celles de ces fonctions qui correspondent aux propriétés *absolues*. Au point de vue algébrique nous n'emploierons dans ce qui va suivre que le théorème suivant :

Si dans une fonction algébrique homogène du second degré on fait une substitution linéaire et homogène, le discriminant de la nouvelle fonction est égal à celui de l'ancienne multiplié par le carré du module *de la substitution.*

Le module de la substitution est le déterminant des coefficients de la substitution.

Ce théorème a une importance capitale dans la comparaison des résultats obtenus, en discutant un lieu du second degré au moyen d'une relation homographique qui le définit ou au moyen de l'équation cartésienne de ce lieu : les discriminants des deux fonctions diffèrent par une puissance du module de la substitution à faire, pour passer de l'une des équations à l'autre. Ce facteur doit être séparé dans la discussion.

3. — Autre solution du problème 5 (§ I).

Si nous revenons au problème précédent, nous pouvons atteindre un certain nombre des résultats obtenus par l'analyse au moyen du théorème que nous venons de démontrer.

(a) Quand la sécante AB (*fig.* 22) tourne autour de A, le point B, pôle de DE, se meut en ligne droite, sa polaire DE passe donc par un point fixe, intersection de deux polaires du système. — Ces deux polaires sont, par exemple : 1° celle du point à l'infini sur Oy, c'est-à-dire Ox; 2° celle du point O; on l'obtient en décrivant un cercle sur OC et en prenant la corde commune FL : F est le point fixe; on a, sur la figure,

$$OL^2 = OC \times OF,$$

c'est-à-dire

$$OF = \frac{d^2 - R^2}{d}.$$

Ce résultat est en évidence dans l'équation de la polaire de B

$$(\beta - \lambda\alpha)y + d(d - x) - R^2 = 0, \tag{3}$$

qui peut s'écrire

$$\beta y - dx + d^2 - R^2 - \lambda\alpha y = 0;$$

c'est donc une droite tournant autour du point fixe

$$y = 0,$$
$$\beta y - dx + d^2 - R^2 = 0.$$

(b) La sécante mobile autour du point A donne, pour chacune de ses positions, un point unique B; ce point B a une polaire unique DE; réciproquement, si l'on prend une position quelconque de DE, on obtient un point unique B en prenant la rencontre de l'axe des y avec la perpendiculaire à DE menée par le point C. Donc les droites AB, DE, tournant autour de deux points fixes, se correspondent homographiquement. Leur point commun M décrit une conique passant en A et F.

(c) Explicitons cette relation homographique. Le coefficient angulaire m de la droite AB est

$$m = \lambda. \tag{1}$$

Celui de DE est

$$m' = \frac{d}{\beta - \lambda\alpha}. \tag{2}$$

En éliminant λ entre ces deux équations on obtient

$$m'(\beta - m\alpha) - d = 0,$$
$$\alpha m m' - \beta m' + d = 0. \tag{3}$$

La connaissance de cette relation va nous permettre de discuter la nature de la conique Γ que nous étudions sans écrire l'équation de cette conique. Γ aura des points à l'infini si les droites AB, DE peuvent devenir parallèles, c'est-à-dire si l'équation (3) peut être vérifiée quand $m = m'$.

On a alors, pour équation aux coefficients angulaires des directions asymptotiques,

$$\alpha m^2 - \beta m + d = 0. \tag{4}$$

Le faisceau asymptotique sera double, c'est-à-dire que Γ

sera une parabole, si

$$d\alpha - \frac{\beta^2}{4} = 0.$$

C'est le lieu des positions que doit prendre le point A pour que la conique-lieu Γ soit une parabole.

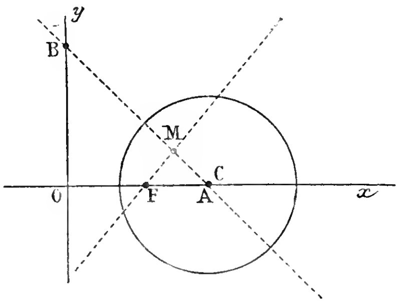
Le point A doit se mouvoir dans la région définie par

$$d\alpha - \frac{\beta^2}{4} < 0$$

pour que Γ soit une hyperbole. S'il se meut dans la région opposée, Γ est une ellipse.

Dans le premier cas, l'hyperbole sera équilatère si ses

Fig. 24.



directions asymptotiques sont rectangulaires, c'est-à-dire si le produit des racines de l'équation (3) est égal à -1; cette condition est réalisée par les points de la droite

$$\alpha + d = 0.$$

Dans le second cas, l'ellipse Γ deviendra un cercle, si l'équation (4) se réduit à

$$m^2 + 1 = 0,$$

c'est-à-dire si l'on a

$$\beta = 0,$$
$$\alpha - d = 0.$$

Tous ces résultats ont été obtenus.

(d) On peut montrer facilement (*fig.* 24) que, si le point A vient en C, le lieu du point M est un cercle décrit sur FC comme diamètre, résultat qu'on vérifie analytiquement.

En effectuant la construction générale, on voit, en effet, que la polaire DE reste perpendiculaire à $\left\{\begin{matrix} A \\ C \end{matrix}\right. B$; DE tourne, d'ailleurs, autour du point fixe F.

(e) *Cas de décomposition en systèmes de droites.* — Pour appliquer ce que nous avons dit relativement à la décomposition de la conique-lieu en systèmes de droites, nous allons transformer nos équations pour mettre en évidence la droite AF des points fixes autour desquels tournent les droites génératrices.

La droite AF a pour équation

$$y - \frac{\beta}{\alpha - \dfrac{d^2 - R^2}{d}}\left(x - \frac{d^2 - R^2}{d}\right) = 0$$

ou

$$Z = y(d\alpha - d^2 + R^2) - \beta(dx - d^2 + R^2) = 0.$$

Si l'on pose

$$X = x - \alpha,$$

A peut être défini comme intersection de $Z = 0$ avec $X = 0$.

De même, en posant $Y = y$, le point F est à l'intersection de $Z = 0$ avec $Y = 0$. Une droite quelconque menée par A a pour équation

$$X + \theta Z = 0.$$

Cette droite sera confondue avec AB si les coefficients angulaires de ces droites sont égaux. On aura alors

$$\lambda = \frac{\beta d\theta - 1}{(d\alpha - d^2 + R^2)\theta}.$$

De même, une droite issue de F,

$$Y + \pi Z = 0,$$

sera confondue avec DE si l'on a

$$\frac{d}{\beta - \lambda\alpha} = \frac{\beta d\pi}{(d\alpha - d^2 + R^2)\pi + 1}.$$

On obtiendra la relation à établir entre θ et π, en éliminant λ entre ces deux équations

$$\theta(d\alpha - d^2 + R^2)\lambda - (\beta d\theta - 1) = 0,$$
$$\alpha\beta\pi\lambda + [(d\alpha - d^2 + R^2 - \beta^2)\pi + 1] = 0,$$

ce qui donne

$$\theta(d\alpha - d^2 + R^2)[(d\alpha - d^2 + R^2 - \beta^2)\pi + 1] + \alpha\beta\pi(\beta d\theta - 1) = 0$$

ou

$$[(d\alpha - d^2 + R^2)(d\alpha - d^2 + R^2 - \beta^2) + \alpha\beta^2 d]\theta\pi$$
$$+ (d\alpha - d^2 + R^2)\theta - \alpha\beta\pi = 0,$$

c'est-à-dire

$$[(d\alpha - d^2 + R^2)^2 - \beta^2(R^2 - d^2)]\theta\pi + (d\alpha - d^2 + R^2)\theta - \alpha\beta\pi = 0.$$

Cette relation homographique ne renferme pas de terme constant ; la conique-lieu passe donc par le troisième sommet

$$\begin{cases} X = 0, \\ Y = 0, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x - \alpha = 0, \\ y = 0 \end{cases}$$

du triangle de référence. — Ce sommet est le point G.

La conique-lieu devient un système de droites quand on a

$$[(d\alpha - d^2 + R^2)^2 - \beta^2(R^2 - d^2)](d\alpha - d^2 + R^2)\alpha\beta = 0;$$

on retrouve les conditions déjà obtenues

$$\alpha = 0,$$
$$(d\alpha - d^2 + R^2)^2 - \beta^2(R^2 - d^2) = 0$$

et, de plus, le facteur

$$\beta(d\alpha - d^2 + R^2).$$

Voici son origine :

On passe de la relation homographique

$$(1)\qquad [(d\alpha - d^2 + R^2)^2 - \beta^2(R^2 - d^2)]\theta\pi \\ + (d\alpha - d^2 + R^2)\theta - \alpha\beta\pi = 0$$

à l'équation cartésienne de la conique, en opérant la substitution

$$\frac{\theta}{X} = \frac{\pi}{Y} = \frac{1}{-Z},$$

et l'on obtient ainsi

$$(2)\qquad \beta(d\alpha - d^2 + R^2)\left[dx^2 - \beta xy + \alpha y^2 \right. \\ \left. - (d\alpha + d^2 - R^2)x + \alpha(d^2 - R^2)\right] = 0$$

qui diffère de l'équation trouvée précédemment par le facteur

$$\beta(d\alpha - d^2 + R^2).$$

Le discriminant Δ' de l'équation (2) est donc

$$\Delta' = \Delta\beta^3(d\alpha - d^2 + R^2)^3,$$

en appelant Δ le discriminant de l'autre équation cartésienne qui se trouve ici entre crochets.

Le discriminant Δ_1 de l'équation (1) se déduit de celui de (2) en multipliant ce discriminant par le carré du module de la substitution permettant de passer de l'équation (2) à l'équation (1); substitution inverse de celle qu'on a faite plus haut. Or, ce module est

$$M = \frac{1}{\beta(d\alpha - d^2 + R^2)}.$$

On a donc

$$\Delta_1 = M^2\Delta' = \Delta\beta(d\alpha - d^2 + R^2).$$

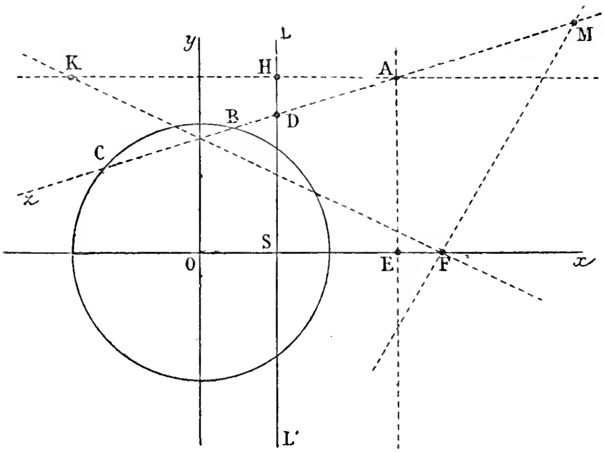
Le facteur $\beta\,(d\alpha - d^2 + R^2)$ a été introduit par le changement de variables; il dépend des éléments de la définition.

4. *On donne un cercle fixe, une droite fixe* LL′ *et un point quelconque* A. *Par* A *on mène une droite* AZ *qui rencontre le cercle en* B, C *et la droite* LL′ *en* D; *on demande le lieu du conjugué harmonique de* D *par rapport au segment* BC, *lorsque la droite* AZ *tourne autour de* A.

Discuter le lieu obtenu suivant la position du point A *dans le plan.*

Solution analytique. — Prenons (*fig.* 25) comme axes

Fig 25



de coordonnées deux droites rectangulaires se coupant au centre du cercle, l'une d'elles étant parallèle à la droite LL′.

Soit

$$(1) \qquad x - d = 0$$

l'équation de cette droite,

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0 \tag{2}$$

celle du cercle, α, β les coordonnées du point A.

Un point M du lieu étudié est à l'intersection de la sécante $A z$ et de la polaire du point D par rapport au cercle.

L'équation de $A z$ est

$$y - \beta - \lambda(x - \alpha) = 0. \tag{3}$$

Les coordonnées du point D étant

$$x_1 = d, \qquad y_1 = \beta + \lambda(d - \alpha),$$

l'équation de sa polaire est

$$dx + [\beta + \lambda(d - \alpha)]y - R^2 = 0. \tag{4}$$

On obtiendra donc l'équation du lieu du point M en éliminant λ entre les équations (3) et (4).

Or, l'équation (3) est celle d'une droite passant constamment en A, quel que soit λ; l'équation (4) est celle d'une droite passant, quel que soit λ, au point F intersection de la droite

$$dx + \beta y - R^2 = 0, \quad \text{polaire de H} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = d, \\ y_1 = \beta, \end{array} \right.$$

avec la droite

$$y = 0;$$

ce point est situé sur Ox, à la distance $OF = \dfrac{R^2}{d}$.

Les droites se correspondent homographiquement : le lieu du point M est une conique qui passe aux points A et F.

On peut écrire

$$y - \beta - \lambda(x - \alpha) = 0, \tag{3}$$
$$dx + \beta y - R^2 + (d - \alpha)\lambda y = 0. \tag{4}$$

On a finalement

$$(5) \qquad (y-\beta)(d-\alpha)y+(x-\alpha)(dx+\beta y-\mathrm{R}^2)=0$$

comme équation du lieu cherché.

On y voit en évidence quatre points :

$$y=0\left\{\begin{array}{ll} x-\alpha=0, & \mathrm{E}, \\ dx+\beta y-\mathrm{R}^2=0, & \mathrm{F}\ \text{déjà obtenu}; \end{array}\right.$$

$$y-\beta=0\left\{\begin{array}{ll} x-\alpha=0, & \mathrm{A}\ \text{déjà obtenu}, \\ dx+\beta y-\mathrm{R}^2=0, & \mathrm{K}. \end{array}\right.$$

Quels que soient α et β la conique passe au point fixe F.

Discussion. — L'équation (5) peut s'écrire

$$(6) \quad (d-\alpha)y^2+x(dx+\beta y) \\ -\beta(d-\alpha)y-\alpha(dx+\beta y)-\mathrm{R}^2x+\alpha\mathrm{R}^2=0$$

ou

$$(7) \quad dx^2+\beta xy+(d-\alpha)y^2-(d\alpha+\mathrm{R}^2)x-\beta dy+\alpha\mathrm{R}^2=0.$$

Cette conique sera une parabole si le point A est mobile sur le lieu dont l'équation est

$$\delta=d(d-\alpha)-\frac{\beta^2}{4}=0.$$

C'est une parabole ayant $\mathrm{O}x$ comme axe; son sommet est au point S, rencontre de LL' avec $\mathrm{O}x$; son paramètre est $2d$; sans foyer est en O, etc.

Toutes les positions du point A, à l'intérieur de cette parabole, donnent pour la conique (7) une ellipse, etc.

(*Voir la discussion de la question précédente.*)

Solution géométrique. — Les droites $\mathrm{A}z$, FM, dont l'intersection engendre le lieu, tournent autour de deux points fixes et se correspondent homographiquement; leur point commun engendre une conique passant en A et F, etc.

Tout ce que nous avons dit plus haut peut être appliqué à cette question qui n'est qu'une transformation de la précédente.

Notre but est d'obtenir l'équation (7) que nous emploierons au Chapitre des lieux de centres.

III. — Discussion générale d'un système de coniques dont l'équation a ses coefficients fonctions linéaires de deux paramètres.

Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, de discuter la nature et la position d'une conique Γ dont l'équation a tous ses coefficients fonctions linéaires de deux paramètres variables.

Salmon a montré (*Sections coniques*, 388) que l'étude de certaines propriétés d'un système de coniques dont l'équation est

$$\alpha U + \beta V + W = 0, \tag{1}$$

α, β étant deux paramètres variables,

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0,$$

les équations de trois coniques du plan, est intimement liée à celle des courbes du troisième ordre. Certains résultats lui sont fournis avec beaucoup d'élégance (*Courbes planes*) par les propriétés des formes algébriques.

On peut, en modifiant la forme de l'équation (1), faire l'étude de ce système de coniques sans sortir du programme de la classe de mathématiques spéciales.

Posons (*axes rectangulaires*) :

$$\begin{aligned}
U &= Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F,\\
V &= A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F',\\
W &= A''x^2 + 2B''xy + C''y^2 + 2D''x + 2E''y + F''.
\end{aligned}$$

On conclut

$$\alpha U + \beta V + W = (A\alpha + A'\beta + A'')x^2$$
$$+ 2(B\alpha + B'\beta + B'')xy + \ldots = 0,$$

qu'on peut écrire, X, Y, ... désignant des fonctions linéaires de deux variables, α, β, prises comme coordonnées d'un point mobile,

$$(1) \qquad Xx^2 + 2Zxy + Yy^2 + 2X'x + 2Y'y + Z' = 0.$$

Nous désignerons par M le point dont les coordonnées sont α, β, et nous supposerons construit le triangle de référence dont les côtés sont (*fig.* 26)

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

1. — Nature des coniques représentées par une équation de la forme indiquée.

Nous voyons, en formant la fonction caractéristique

$$\delta = XY - Z^2,$$

que la conique Γ est une parabole si le point M se meut sur la conique Γ' ayant pour équation

$$XY - Z^2 = 0,$$

Γ' est tangente aux droites $X = 0$, $Y = 0$, à leur rencontre avec la droite $Z = 0$; elle est dans la région du plan où les fonctions X, Y donnent un produit positif.

Deux cas peuvent se présenter, suivant que les points situés à l'intérieur du triangle de référence ABC sont dans une région où le produit des fonctions X, Y est positif ou négatif.

(*a*) La conique Γ' est alors tangente intérieurement aux droites $X = 0$, $Y = 0$; c'est une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

(*b*) Dans la seconde hypothèse, la conique Γ', tangente extérieurement aux droites $X = 0$, $Y = 0$, est une hyperbole.

La conique Γ' est effective tant que les droites $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ forment un triangle de référence. — Si l'une des droites $X = 0$, $Y = 0$ s'éloigne indéfiniment, Γ' devient une parabole. — Si $Z = 0$ s'éloigne à l'infini, Γ' devient une hyperbole asymptote aux côtés restant à distance finie.

Remarque. — Les droites

$$X + Y = 0,$$
$$X - Y = 0,$$

conjuguées harmoniques de $X = 0$, $Y = 0$, forment avec $Z = 0$ un triangle AED (*fig.* 26), dont le sommet

$$D \left\{ \begin{array}{l} X - Y = 0, \\ \quad Z = 0 \end{array} \right.$$

est toujours intérieur à la conique Γ' et $X + Y = 0$ est le côté de ce triangle opposé au sommet D.

En revenant au signe de

$$\delta = XY - Z^2,$$

nous voyons que le point

$$A \left\{ \begin{array}{l} X = 0, \\ Y = 0 \end{array} \right.$$

est toujours dans la région négative déterminée par la conique Γ'; dès lors, la région dans laquelle se trouve le point A est en même temps celle dans laquelle doit se mouvoir le point M (α, β) pour que la conique Γ soit une hyperbole; la région opposée est celle dans laquelle doit se mouvoir le point M pour que Γ soit une ellipse.

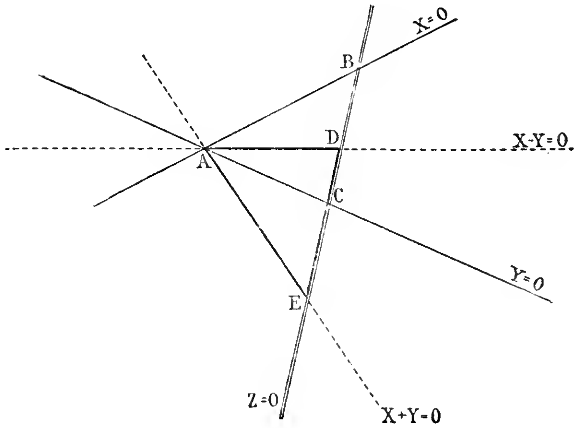
Les positions du point M pour lesquelles Γ est une hyperbole équilatère sont situées sur la droite $X + Y = 0$.

Il existe une seule position de M qui donne à l'hyperbole des directions asymptotiques déterminées.

Quand le point M vient en A, l'hyperbole équilatère Γ a ses asymptotes parallèles aux axes de coordonnées. Quand il vient en E, les asymptotes de cette hyperbole sont parallèles aux bissectrices de ces axes.

Il existe, en général, une position unique du point M pour

Fig. 26.



laquelle la conique Γ devient un cercle ; il faut, en effet, que l'on ait simultanément

$$Z = 0,$$
$$X - Y = 0.$$

Cette position unique est celle du point D.

Quant le point D est à distance finie, il est intéressant de considérer le cas où ce point devient un foyer de Γ'.

Nous verrons plus tard que, dans le cas particulier où les tangentes issues d'un point F à la conique sont les droites isotropes, le point F est un foyer de la conique, et la corde des contacts de ces tangentes, la directrice correspondante.

Or l'équation

$$XY - Z^2 = 0$$

peut s'écrire

$$\left(\frac{X+Y}{2}\right)^2 - \left(\frac{X-Y}{2}\right)^2 - Z^2 = 0;$$

et sous la forme

$$\left(\frac{X-Y}{2}\right)^2 + Z^2 = \left(\frac{X+Y}{2}\right)^2$$

ou

$$\left(\frac{X-Y}{2} + iZ\right)\left(\frac{X-Y}{2} - iZ\right) = \left(\frac{X+Y}{2}\right)^2,$$

on voit que la conique caractéristique Γ' est tangente aux droites

$$\frac{X-Y}{2} + iZ = 0,$$

$$\frac{X-Y}{2} - iZ = 0,$$

à leurs rencontres avec la droite double $(X+Y)^2 = 0$.

Dès lors, si les droites

$$\frac{X-Y}{2} + iZ = 0,$$

$$\frac{X-Y}{2} - iZ = 0$$

sont parallèles aux droites isotropes, le point C est un foyer et la droite $X + Y = 0$ la directrice correspondante.

Chaque fois que cette circonstance se produira, le point M (α, β) devra se mouvoir sur la directrice $X + Y = 0$ de la conique caractéristique Γ' pour que Γ, celle du faisceau, soit une hyperbole équilatère; et il devra coïncider avec le foyer correspondant à cette directrice, pour que la conique du système devienne un cercle [1].

---

[1] Ce résultat, rencontré par nous dans un grand nombre de problèmes différents, nous a donné l'idée de rechercher les conditions générales dans lesquelles on doit se placer pour qu'il se produise.

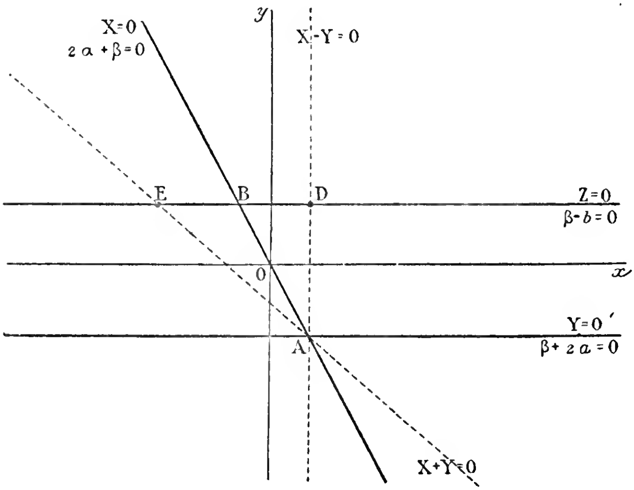
2. — Application à un exemple.

Discuter la nature des coniques représentées par l'équation

$$(2\alpha+\beta)x^2+2(\beta-b)xy+(\beta+2a)y^2+\ldots=0.$$

a, b sont des longueurs données; α, β, sont les coordonnées d'un point mobile dans le plan.

Fig. 27.



L'équation de la conique caractéristique Γ' est

$$(2\alpha+\beta)(\beta+2a)-(\beta-b)^2=0.$$

Traçons les côtés du triangle $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, et les droites (*fig.* 27)

$$X+Y=2(\alpha+\beta+a),$$
$$X-Y=2(\alpha-a).$$

Si nous formons les équations

$$\frac{X-Y}{2}+iZ=\alpha-a+i(\beta-b)=0,$$

$$\frac{X-Y}{2}-iZ=\alpha-a-i(\beta-b)=0,$$

nous voyons que ce sont celles des parallèles aux droites isotropes menées par le point D de coordonnées (a, b). Le point D est donc un foyer de Γ'; AE est la directrice correspondante.

L'équation de la conique caractéristique peut, d'ailleurs, s'écrire

$$2\alpha\beta+4a\alpha+2(a+b)\beta-b^2=0,$$

forme qui met en évidence une hyperbole ayant ses asymptotes parallèles aux axes de coordonnées, etc. La région intérieure est celle qui donne des ellipses, etc.

3. — Cas où la conique devient un système de droites.

Dans ce qui va suivre, nous supposerons qu'au lieu de six fonctions linéaires différentes, il n'entre dans l'équation étudiée que trois coefficients, X', Y', Z', et nous poserons

$$X=aX',$$
$$Y=bY'.$$
$$Z=cZ'.$$

a, b, c, étant des coefficients numériques ainsi que d, e, f, des équations suivantes.

Les termes du premier degré et le terme indépendant, qu'on écrit généralement

$$2Dx+2Ey+F=0,$$

s'obtiendront en remplaçant les coefficients D, E, F par les fonctions X′, Y′, Z′ permutées entre elles; six équations sont à discuter:

$$aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dXx + 2eYy + fZ = 0,$$
$$aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dYx + 2eXy + fZ = 0,$$
$$aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dXx + 2eZy + fY = 0,$$
$$aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dZx + 2eXy + fY = 0,$$
$$aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dZx + 2eYy + fX = 0,$$
$$aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dYx + 2eZy + fX = 0.$$

Un cas intéressant est celui où les coefficients numériques a, b, ..., f sont égaux entre eux. Nous indiquerons le résultat relatif à ce cas chaque fois qu'il sera utile à connaître.

(a) Soit

$$aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dXx + 2eYy + fZ = 0$$

l'équation de la conique Γ.

On peut écrire le discriminant de la fonction premier membre

$$\Delta = (acf + 2bde)XYZ - ae^2XY^2 - cd^2YX^2 - fb^2Z^3$$

ou

$$\Delta = XY(\lambda Z + \mu X + \nu Y) - fb^2Z^3;$$

Γ sera donc un système de droites quand le point M sera mobile sur la cubique C

$$XY(\lambda Z + \mu X + \nu Y) - \pi Z^3 = 0.$$

Cette équation met en évidence la droite des 3 points d'inflexion $Z = 0$ et les tangentes en ces points :

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad \lambda Z + \mu X + \nu Y = 0; \text{ etc.}$$

(b) Soit

$$aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dYx + 2eXy + fZ = 0$$

l'équation de la conique Γ.

Ce sera un système de deux droites si le point M se meut sur la courbe C dont l'équation est

$$\lambda XYZ + \mu X^3 + \nu Y^3 + \pi Z^3 = 0,$$

cubique non singulière (*forme canonique de Salmon. — Courbes planes*).

Dans le cas particulier où les coefficients numériques $a, b, \ldots, f$ sont égaux, le discriminant devient

$$3XYZ - X^3 - Y^3 - Z^3,$$

et la cubique précédente se décompose en une droite

$$X + Y + Z = 0$$

et une conique

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - ZX - ZY - XY = 0.$$

(c) Soit

$$aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dXx + 2eZy + fY = 0$$

l'équation de la conique Γ.

La cubique C, sur laquelle doit se mouvoir le point M pour que Γ soit un système de droites, a pour équation

$$Z^2(\lambda X + \mu Y) - XY(\lambda' X + \mu' Y) = 0,$$

et l'on a en évidence trois tangentes

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad \lambda' X + \mu' Y = 0$$

issues d'un même point, la droite $Z = 0$ des points de contact de ces tangentes, etc...

Dans le cas où les coefficients $a, b, \ldots, f$ sont égaux, la cubique précédente se décompose en une droite

$$X - Y = 0$$

et la conique Γ',

$$XY - Z^2 = 0;$$

Γ ne peut donc pas être une parabole effective, etc.

(*d*) Soit

$$aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dZx + 2eXy + fY = 0$$

l'équation de la conique Γ.

Celle de la cubique C peut s'écrire

$$Z^2(\lambda X + \mu Y) - X(\lambda'^2 X^2 \pm \mu'^2 Y^2) = 0,$$

même forme que la précédente; deux tangentes étant tantôt réelles, tantôt imaginaires, etc...

Dans le cas où les coefficients $a, b, \ldots, f$ sont égaux, cette équation devient

$$(X - Y)[2Z^2 - X(X + Y)] = 0.$$

(*e*) L'équation de la conique Γ étant

$$aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dZx + 2eYy + fX = 0,$$

l'équation de la cubique C peut s'écrire

$$Z^2(\lambda Y + \mu X) - XY(\lambda' Y + \mu' X) = 0.$$

Voir le troisième cas (*c*).

(*f*) L'équation de Γ étant

$$aXx^2 + 2bZxy + cYy^2 + 2dYx + 2eZy + fX = 0,$$

la cubique C a pour équation

$$Y^2(\lambda X + \mu Y) - Z^2(\lambda' X + \mu' Y) = 0.$$

Dans le cas où les coefficients $a, b, \ldots, f$ sont égaux, cette cubique se décompose en

$$X - Y = 0,$$
$$Y(X + Y) - Z^2 = 0.$$

Dans l'indication des résultats généraux qui précèdent, nous n'avons pas parlé des systèmes de droites réelles ou imaginaires, distinctes ou confondues, parallèles ou se coupant; nous n'avons pas non plus distingué les positions du point M qui donnent des ellipses réelles de celles qui donnent des ellipses imaginaires.

Les courbes, lieux de M, qui séparent les régions du plan correspondant à ces diverses propriétés, sont des coniques dont on détermine facilement la position par rapport au triangle de référence

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Nous ferons seulement remarquer que la connaissance des résultats de la discussion de l'équation générale, dans le cas où les coefficients $a, b, \ldots, f$ sont égaux, permet de former très rapidement des équations générales de coniques renfermant deux paramètres et dont l'étude complète n'exige pas la connaissance de propriétés autres que celles des courbes du second ordre.

4. — Application à un exemple.

Discuter la nature des coniques dont l'équation est

$$(1) \quad (\alpha + \beta - 1)x^2 - 2\beta xy + (\alpha - \beta + 1)y^2 - 2\alpha y + \alpha = 0,$$

le point M, *dont les coordonnées sont* α, β, *étant mobile dans le plan.*

(a) La conique représentée par cette équation sera une parabole si le point M se meut lui-même sur la conique dont l'équation est

$$(\alpha + \beta - 1)(\alpha - \beta + 1) - \beta^2 = 0;$$

cette courbe est tangente aux droites

$$\alpha + \beta - 1 = 0,$$
$$\alpha - \beta + 1 = 0,$$

à leur intersection avec la droite $\beta = 0$.

L'équation de la conique caractéristique peut s'écrire

$$\alpha^2 - 2\beta^2 + 2\beta - 1 = 0;$$

c'est l'équation d'une hyperbole symétrique par rapport à l'axe Oy, dont le centre a pour ordonnée

$$\beta = \frac{1}{2}$$

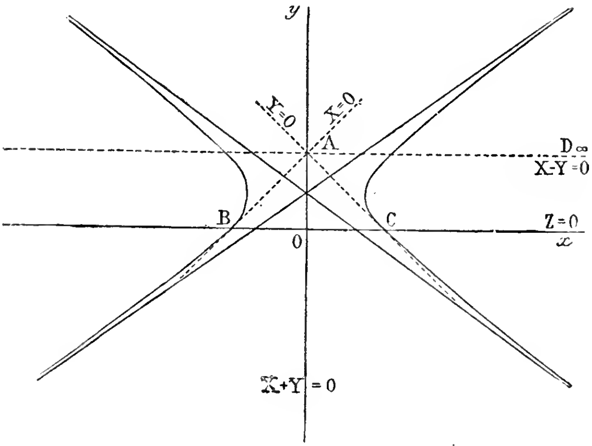
et dont les directions asymptotiques sont

$$\left(\beta - \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha\right)\left(\beta + \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha\right) = 0.$$

Ces éléments permettent de construire la courbe représentée ci-dessous (*fig.* 28).

(*b*) La conique (1) sera une ellipse pour toutes les posi-

Fig. 28.



tions du point M qui rendent positive la fonction

$$\delta = (\alpha + \beta - 1)(\alpha - \beta + 1) - \beta^2.$$

M doit donc se mouvoir dans la région du plan où ne se trouve pas l'origine.

Dans la région de l'origine, au contraire, la conique est une hyperbole.

La conique étudiée sera une hyperbole équilatère, si le point M est mobile sur la droite

$$(\alpha + \beta - 1) + (\alpha - \beta + 1) = 0,$$

ou

$$\alpha = 0;$$

c'est-à-dire sur l'axe des y.

Enfin, elle sera un cercle quand le point M coïncidera avec le point commun aux droites

$$\alpha + \beta - 1 - (\alpha - \beta + 1) = 0,$$
$$\beta = 0,$$

ou

$$\beta - 1 = 0,$$
$$\beta = 0.$$

Ce point est rejeté à l'infini dans la direction Ox.

Systèmes de droites. — La conique étudiée devient un système de droites quand le point (α, β) se déplace sur le lieu géométrique dont l'équation est

$$\Delta = (\alpha + \beta - 1)(\alpha - \beta + 1)\alpha - (\alpha + \beta - 1)\alpha^2 - \alpha\beta^2 = 0;$$

c'est-à-dire

$$\alpha = 0,$$
$$(\alpha + \beta - 1)(1 - \beta) - \beta^2 = 0.$$

La seconde partie du lieu est une hyperbole asymptote à la droite

$$\beta - 1 = 0,$$

et tangente à la droite

$$\alpha + \beta - 1 = 0,$$

à sa rencontre avec

$$\beta = 0;$$

elle est donc tangente à l'hyperbole $\delta = 0$ (résultat prévu plus haut, p. 83. — Rem.).

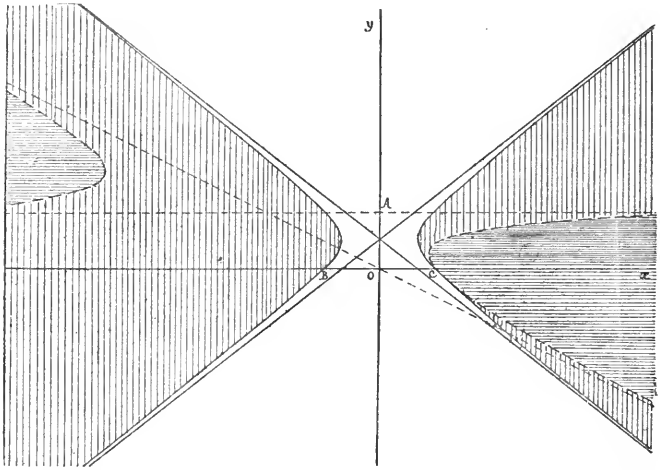
Désignons par H l'hyperbole $\delta = 0$ et par H' celle qui fait partie de

$$\Delta = 0;$$

quand le point (α, β) (*fig.* 29) se meut à l'intérieur de l'hyperbole H, la conique étudiée est une ellipse :

Réelle pour les régions extérieures à H'; elles sont hachurées verticalement;

Fig. 29.



Imaginaire pour les régions intérieures à H'; elles sont hachurées horizontalement.

Quand (α, β) vient en C, la conique se compose de deux droites parallèles imaginaires.

Quand (α, β) est extérieur à l'hyperbole H (région non hachurée), la conique étudiée est une hyperbole qui se réduit à deux droites rectangulaires, si le point M (α, β) est sur Oy.

Exercices proposés.

Discuter la nature des coniques définies dans les énoncés suivants, proposés aux Concours d'admission :

1° A l'École Navale en 1892, § 2 (t. II, p. 102*).

2° A l'École Centrale en 1868, 1re session (t. II, p. 37*) : — 1869, 1re session (t. II, p. 37*) ; — 1874, 1re session, §§ 2 et 3 (t. II, p. 41*) ; — 1876, 2e session, § 2 (t. II, p. 42*) ; — 1878, 1re session (t. II, p. 44*) ; — 1886, 2e session, § 1 (t. II, p. 52*) ; — 1887, 1re session, §§ 3 et 4 (t. II, p. 53*) ; — 1888, 1re et 2e sessions (t. II, p. 54*) ; — 1891, 1re session, § 2 (t. II, p. 88*) ; — 1892, 1re session, § 2 (t. II, p. 89*) ; — 1892, 2e session, § 2 (t. II, p. 90*).

3° A l'École Normale en 1877, § 2 (t. II, p. 28*) ; — 1894, § 3 (t. II, p. 84*) ; — 1895, § 3 (t. II, p. 85*).

4° A l'École Polytechnique en 1872, § 2 (t. II, p. 10*) ; — 1888 (t. II, p. 18*).

CHAPITRE V.

TANGENTES.

Rappel de résultats.

(a) L'équation de la tangente à une courbe algébrique dont l'équation est

$$f(x,y)=0,$$

est

$$Xf'_x+Yf'_y+Zf'_z=0,$$

Z étant une variable introduite pour permettre l'application du théorème d'Euler et devant être finalement fait égal à 1 ainsi que z.

(b) Les points de contact des tangentes menées à cette courbe par un point (α, β) sont sur la courbe auxiliaire

$$\alpha f'_x+\beta f'_y+\gamma f'_z=0,$$

qui porte le nom de *polaire principale*.

Elle est de degré $(m-1)$; c'est donc une droite dans le cas où la courbe $f(x,y)=0$ est une conique.

(c) On obtiendra le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point fixe M (α, β) à une courbe mobile, en éliminant le paramètre variable entre l'équation de la courbe et celle de la polaire principale du point fixe par rapport à cette courbe.

(d) L'équation du faisceau des tangentes menées du point (α, β) à la courbe

$$f(x,y)=0$$

s'obtient en exprimant que l'équation

$$f(\alpha+\lambda X,\ \beta+\lambda Y,\ \gamma+\lambda Z)=0$$

a une racine double en λ.

Dans le cas des courbes du second ordre, l'équation du faisceau des tangentes issues du point (α, β) est

$$f(\alpha, \beta).f(x,y) - (\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z)^2 = 0,$$

f'_x, f'_y, f'_z désignant les demi-dérivées de la fonction rendue homogène $f(x, y, z) = 0$.

(*e*) L'ensemble des termes du plus haut degré de l'équation du faisceau des tangentes, menées d'un point à une courbe, égalé à zéro, donne l'équation du faisceau des parallèles à ces droites menées par l'origine. On en déduit l'équation aux coefficients angulaires de ces tangentes; toute condition de direction imposée aux tangentes se traduira par une *équation* entre les coefficients.

Cette *équation*, où entrent α, β, coordonnées du point M, est l'*équation* du lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe des tangentes remplissant la condition imposée : angle constant, bissectrice passant par un point fixe, etc.

Ellipse. — (*a*) Les coordonnées du point de contact étant

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi,$$

l'équation de la tangente en ce point est

$$\frac{x\cos\varphi}{a} + \frac{y\sin\varphi}{b} - 1 = 0.$$

(*b*) L'équation de la tangente en fonction du coefficient angulaire est

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

(*c*) L'équation aux coefficients angulaires des tangentes à l'ellipse issues du point (α, β) est

$$(\beta - m\alpha)^2 - (a^2m^2 + b^2) = 0.$$

Hyperbole. — (*a*) L'équation de la tangente à l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

est

$$\frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} - 1 = 0,$$

X, Y étant les coordonnées courantes; x, y celles du point de contact.

(b) L'équation de la tangente en fonction du coefficient angulaire est

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}.$$

(c) L'équation aux coefficients angulaires des tangentes à l'hyperbole issues de (α, β) est

$$(\beta - m\alpha)^2 - (a^2 m^2 - b^2) = 0.$$

(d) Les coordonnées d'un point quelconque de l'hyperbole sont données par

$$x = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad y = b \tang\varphi.$$

Parabole.

(a) $$y^2 - 2px = 0$$

étant l'équation de la courbe, celle de la tangente au point (x, y) est

$$pX - yY + px = 0.$$

(b) En fonction du coefficient angulaire, l'équation de la tangente est

$$y = mx + \frac{p}{2m}.$$

(c) L'équation aux coefficients angulaires des tangentes issues du point (α, β) à la parabole est

$$2m^2\alpha - 2m\beta + p = 0.$$

§ I. — Lieux géométriques.

1. *Lieu des points de contact des tangentes menées aux coniques représentées par l'équation*

$$x^2 + 2\lambda xy + y^2 - a^2 = 0,$$

parallèlement à la première bissectrice.

Les points dont on demande le lieu sont à l'intersection des coniques représentées par l'équation donnée avec la polaire du point à l'infini dans la direction dont le coefficient angulaire est 1.

On obtiendra donc l'équation de ce lieu en éliminant λ entre

$$(1) \qquad x^2 + 2\lambda xy + y^2 - a^2 = 0,$$

$$(2) \qquad x + \lambda y + \lambda x + y = 0.$$

On peut écrire la seconde équation

$$(2) \qquad (x + y)(1 + \lambda) = 0.$$

Le système d'équations se décompose donc en deux

$$(3) \qquad \begin{cases} x^2 + 2\lambda xy + y^2 - a^2 = 0, \\ x + y = 0; \end{cases}$$

$$(4) \qquad \begin{cases} x^2 + 2\lambda xy + y^2 - a^2 = 0, \\ 1 + \lambda = 0. \end{cases}$$

Dans le système (3), l'une des équations est indépendante du paramètre λ; elle représente la partie du lieu total correspondant à ce système.

Le système (4) donne comme seconde partie du lieu cherché

$$(x - y)^2 - a^2 = 0;$$

c'est-à-dire deux droites parallèles à la première bissectrice et ayant pour ordonnées à l'origine $+a$ et $-a$.

Le lieu se compose donc de trois droites

$$x + y = 0,$$
$$x - y - a = 0,$$
$$x - y + a = 0.$$

On peut se rendre facilement compte de ce résultat.

L'équation donnée est l'équation générale des coniques passant aux quatre points A, B, C, D d'intersection des axes avec le cercle $x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

L'équation aux coefficients angulaires des diamètres conjugués de ces coniques est

$$mm' + \lambda(m + m') + 1 = 0.$$

Si $m = 1$, on a

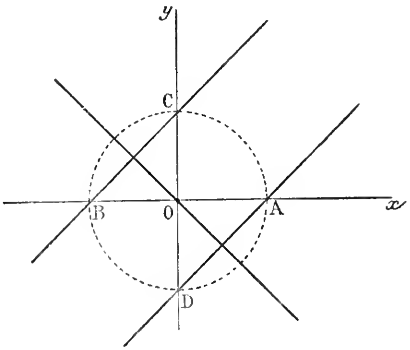
$$m' + \lambda(1 + m') + 1 = 0;$$

c'est-à-dire

$$(m' + 1)(1 + \lambda) = 0.$$

En général, le coefficient angulaire de la direction con-

Fig. 30.



juguée de celle de la première bissectrice est -1; la polaire du point à l'infini par lequel on mène les tangentes est donc fixe; elle est le lieu des points de contact.

Mais si $\lambda + 1 = 0$, m' a une valeur quelconque.

La conique devient à ce moment

$$(x - y)^2 - a^2 = 0;$$

elle se compose des droites AD, CB.

Les seules droites parallèles à la première bissectrice ayant plus d'un point commun avec la conique sont ces droites elles-mêmes; les points de contact sont quelconques sur chacune d'elles; elles font donc partie du lieu.

2. *Lieu des points de contact des tangentes menées, parallèlement à une direction donnée, aux coniques représentées par l'équation*

$$(1)\qquad \frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2+c^2}-1=0.$$

Soit m le coefficient angulaire de la direction donnée ; les points dont on cherche le lieu sont à l'intersection des coniques (1) et de la polaire de la direction m.

L'équation de cette polaire est

$$(2)\qquad \frac{x}{\lambda^2}+m\frac{y}{\lambda^2+c^2}=0.$$

On est donc conduit à éliminer le paramètre λ entre les équations

$$(1)\qquad \frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2+c^2}-1=0,$$

$$(2)\qquad \frac{x}{\lambda^2}+m\frac{y}{\lambda^2+c^2}=0;$$

la seconde donne

$$\lambda^2(x+my)+c^2x=0,$$

et, en substituant dans la première

$$x^2\left(c^2-\frac{c^2x}{x+my}\right)-y^2\frac{c^2x}{x+my}+\frac{c^2x}{x+my}\left(c^2-\frac{c^2x}{x+my}\right)=0,$$

ou en mettant sous forme entière

$$c^2xy(mx-y)(x+my)+c^2xy.c^2m=0.$$

Ce lieu se décompose donc en

$$(4)\qquad xy=0$$

$$(5)\qquad (mx-y)(x+my)+c^2m=0.$$

L'équation (5) est celle d'une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les droites

$$mx - y = 0, \quad x + my = 0,$$

et pour puissance $c^2 m$; on la construit facilement.

Quant à l'équation (4), elle représente les deux axes de coordonnées.

Nous verrons plus tard que l'équation (1) est celle d'un système de coniques homofocales rapportées à leur centre et à leurs axes communs.

Deux coniques du système sont :

1° Une double droite coïncidant avec Ox; toute transversale rencontre cette conique en deux points confondus, elle est tangente analytiquement : l'axe des x, comme partie du lieu, provient de cette conique spéciale.

2° Une double droite coïncidant avec l'axe des y, qui est, pour la même cause, une partie du lieu étudié.

3. *Lieu des points de contact des tangentes menées par un point fixe à toutes les coniques ayant un foyer donné et une directrice donnée.*

Prenons la directrice donnée comme axe des y, le foyer sera situé sur Ox à une distance a.

Nous avons vu, Chap. IV (§§ 1, 2), que l'équation générale des coniques de l'énoncé est

$$(x - a)^2 + y^2 - \lambda^2 x^2 = 0. \tag{1}$$

Les points de contact des tangentes menées d'un point (α, β) à ces coniques se trouvent sur la polaire de ce point; l'équation de cette droite est

$$\alpha(x - a - \lambda^2 x) + \beta y - a(x - a) = 0. \tag{2}$$

On est donc amené à éliminer λ^2 entre les équations (1) et (2).

On obtient

$$(3)\qquad \alpha x[(x-a)^2+y^2]-x^2[(\alpha-a)(x-a)+\beta y]=0;$$

lieu du 3e degré, qui se décompose en

$$(4)\qquad x=0,$$

provenant de la parabole singulière

$$x^2=0$$

donnée par des valeurs infinies de λ; et la conique Γ

$$(5)\qquad \alpha[(x-a)^2+y^2]-x[(\alpha-a)(x-a)+\beta y)=0,$$

dont on peut écrire l'équation

$$(6)\qquad ax^2-\beta xy+\alpha y^2+\ldots=0.$$

Les coefficients de x^2, xy et y^2 sont des fonctions linéaires de α et β; les côtés du triangle de référence, $Y=0$, $Z=0$ (Chap. IV, § 3), sont ici

$$Z=\beta=0,\quad Y=\alpha=0.$$

Quant au côté $X=0$, il est transporté à l'infini; la caractéristique du système est une parabole. — On reconnaît de plus que le triangle polaire conjugué par rapport à cette conique a pour sommet intérieur le foyer de la parabole, etc.

On pourrait donc facilement discuter la nature du lieu (6) d'après la position que le point A occupe dans le plan, en appliquant la méthode rappelée plus haut.

4. *Lieu des points d'où l'on peut mener à une conique des tangentes interceptant sur une droite donnée un segment de longueur donnée.*

Supposons la conique placée d'une manière quelconque dans le plan, et soit

$$(1)\qquad f(x,y)=0$$

son équation.

Nous définirons la droite fixe par un de ses points $A(a,b)$ et son point directeur (p,q); son équation est alors

$$(2) \qquad \frac{x-a}{p} = \frac{y-b}{q} = r,$$

r étant la distance du point (x,y) au point fixe (a,b).

L'équation quadratique du faisceau des tangentes issues d'un point (α, β) à la conique (1) est

$$(3) \qquad f(x,y).f(\alpha,\beta) - (\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z)^2 = 0.$$

Soit

$$(4) \qquad \varphi(x,y) = 0$$

cette équation.

Ses coefficients sont fonctions de α et de β.

L'équation aux rayons vecteurs des points de rencontre de la droite (2) et des tangentes (4) est

$$(5) \qquad r^2\psi(p,q) + 2r(p\varphi'_a + q\varphi'_b) + \varphi(a,b) = 0,$$

$\psi(x,y)$ étant l'ensemble homogène des termes du second degré de la fonction $\varphi(x,y)$.

En appelant r_1, r_2 les racines de cette équation, on doit avoir

$$(6) \qquad r_1 - r_2 = l;$$

l étant la longueur donnée, on en conclut

$$(r_1 + r_2)^2 - 4r_1r_2 = l^2.$$

Or

$$r_1 + r_2 = \frac{2(p\varphi'_a + q\varphi'_b)}{\psi(p,q)}$$

$$r_1 r_2 = \frac{\varphi(a,b)}{\psi(p,q)}.$$

L'équation du lieu étudié est donc

$$(7) \qquad 4[(p\varphi'_a + q\varphi'_b)^2 - \varphi(a,b).\psi(p,q)] - l^2\psi^2(p,q) = 0.$$

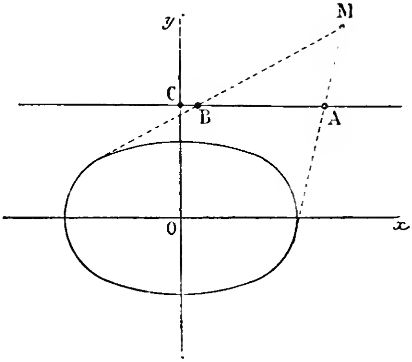
Les coefficients de $\varphi(x, y)$ étant fonctions du second degré de α et de β, l'équation (7) est du quatrième degré.

Nous allons donner un cas particulier du problème dont on vient de lire la solution générale.

5. *Lieu des points d'où l'on peut mener à une ellipse des tangentes interceptant sur une parallèle à l'un des axes de cette ellipse un segment de longueur donnée.*

Prenons (*fig.* 31) pour axes de coordonnées les axes de

Fig. 31.



l'ellipse : l'équation de cette courbe est

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Celle de la droite AB est, par exemple,

$$(2) \qquad y - \lambda = 0.$$

Nous allons exprimer que la différence (CA — CB) des abscisses des points de rencontre des tangentes menées d'un point M (α, β) à l'ellipse, avec la droite (2), a une valeur donnée d.

Or, l'équation du faisceau des tangentes issues de M (α, β)

est

$$(3)\quad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1\right)-\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1\right)^2=0.$$

L'équation aux abscisses CB, CA est donc

$$(4)\quad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{\lambda^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1\right)-\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta\lambda}{b^2}-1\right)^2=0;$$

mais, d'après l'énoncé, on doit avoir

$$CA - CB = \delta,$$

δ étant la longueur donnée, on peut écrire

$$\delta^2 = (CA + CB)^2 - 4CA.CB.$$

On obtiendra donc l'équation du lieu du point M en exprimant que la somme et le produit des racines de l'équation (4) satisfont à cette relation; il vient

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha^2(\lambda\beta-b^2)^2\\ &-(\beta^2-b^2)\left[(b^2\alpha^2+a^2\beta^2-a^2b^2)\frac{\lambda^2-b^2}{b^2}-\frac{a^2}{b^2}(\lambda\beta-b^2)^2\right]\\ &-\frac{\delta^2}{4}(\beta^2-b^2)^2=0.\end{aligned}\right.$$

Ce lieu est du quatrième degré, en général; mais si $\lambda = b$, c'est-à-dire si la droite fixe devient tangente à l'ellipse, au sommet situé sur l'axe des y, on obtient en remplaçant (α, β) par (x, y)

$$(6)\quad b^2x^2(y-b)^2+a^2(y^2-b^2)(y-b)^2-\frac{\delta^2}{4}(y^2-b^2)^2=0,$$

qui se décompose en

$$(7)\qquad (y-b)^2=0,$$

$$(8)\qquad b^2x^2+a^2(y^2-b^2)-\frac{\delta^2}{4}(y+b)^2=0.$$

La première partie du lieu est la droite AB; il existe, en effet, sur cette droite une infinité de points satisfaisant aux conditions imposées.

L'équation (8) est celle d'une conique ayant son centre sur Oy :

$$\begin{array}{ll} \textit{parabole} & \text{si } \delta = 2a, \\ \textit{ellipse} & \text{si } \delta < 2a, \\ \textit{hyperbole} & \text{si } \delta > 2a. \end{array}$$

6. *Lieu du sommet d'un angle de grandeur constante roulant sur une parabole.*

Rapportons la parabole à son axe et à la tangente au sommet; son équation est alors

$$(1) \qquad y^2 - 2px = 0.$$

L'équation quadratique du faisceau des tangentes issues d'un point (α, β) à cette courbe est

$$(2) \qquad (y^2 - 2px)(\beta^2 - 2p\alpha) - (-p\alpha + \beta y - px)^2 = 0.$$

Les parallèles à ces droites menées par l'origine ont pour équation

$$(3) \qquad y^2(\beta^2 - 2p\alpha) - (\beta y - px)^2 = 0;$$

c'est-à-dire

$$(4) \qquad px^2 - 2\beta xy + 2\alpha y^2 = 0.$$

L'angle de ces droites est donné par

$$\text{tang}^2 V = \frac{4(\beta^2 - 2p\alpha)}{(2\alpha + p)^2}.$$

Si donc on appelle φ l'angle constant des tangentes à la parabole, on a comme équation du lieu

$$(5) \qquad (2\alpha + p)^2 \text{tang}^2\varphi - 4(\beta^2 - 2p\alpha) = 0;$$

c'est-a-dire

$$4(\alpha^2 \text{tang}^2\varphi - \beta^2) + 4p\alpha(\text{tang}^2\varphi + 2) + p^2 \text{tang}^2\varphi = 0$$

Cette conique est une hyperbole; l'angle des asymptotes est l'angle 2φ.

II. — Équation tangentielle.

Définition. — Soit

$$f(x, y) = 0$$

l'équation cartésienne d'une courbe donnée; on appelle *équation tangentielle* de cette courbe la relation

$$\varphi(u, v, w) = 0,$$

qui exprime que la droite

$$ux + vy + w = 0$$

est *tangente* à cette courbe.

1. — Formation de l'équation tangentielle.

On obtient l'équation tangentielle d'une courbe donnée de la manière suivante :

On forme l'équation du faisceau des droites qui joignent l'origine aux points de rencontre de la courbe et de la sécante

$$ux + vy + w = 0,$$

et l'on exprime que ce faisceau a un rayon double.

La condition trouvée

$$\varphi(u, v, w) = 0,$$

est l'équation tangentielle.

Application aux courbes du second degré. — Soit

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation générale des courbes du second degré,

$$(2) \qquad ux + vy + 1 = 0$$

celle d'une droite que nous allons assujettir à rester tangente à cette courbe.

L'équation du faisceau des droites joignant l'origine aux points de rencontre des lieux géométriques (1) et (2) est

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 2(Dx + Ey)(ux + vy) + F(ux + vy)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(3)\quad (A - 2Du + Fu^2)x^2 + 2(B - Eu - Dv + Fuv)xy + (C - 2Ev + Fv^2)y^2 = 0.$$

Ce faisceau se composera d'un rayon double, si l'on a

$$(A - 2Du + Fu^2)(C - 2Ev + Fv^2) - (B - Eu - Dv + Fuv)^2 = 0,$$

ou

$$F^2u^2v^2 - 2DFuv^2 - 2EFu^2v + AFv^2 + 4DEuv + CFu^2 - 2AEv - 2CDu + AC$$
$$- [F^2u^2v^2 - 2DFuv^2 - 2EFu^2v + D^2v^2 + 2(DE + BF)uv + E^2u^2 - 2BDv - 2BEu + B^2] = 0,$$

c'est-à-dire

$$(CF - E^2)u^2 + 2(DE - BF)uv + (AF - D^2)v^2 + 2(BE - CD)u + 2(BD - AE)v + AC - B^2 = 0,$$

que nous écrirons

$$(4)\qquad au^2 + 2buv + cv^2 + 2du + 2ev + f = 0.$$

L'équation tangentielle des coniques est donc de même forme que celle de la courbe en coordonnées cartésiennes.

Remarque. — On peut former rapidement les coefficients de l'équation tangentielle de la manière suivante :

Considérons le discriminant

$$\Delta = ACF + 2BDE - AE^2 - FB^2 - CD^2;$$

on a, Δ' désignant une dérivée,

$$a = \Delta'_A = CF - E^2, \qquad 2d = \Delta'_D = 2(BE - CD);$$
$$2b = \Delta'_B = 2(DE - BF), \qquad 2e = \Delta'_E = 2(BD - AE),$$
$$c = \Delta'_C = AF - D^2, \qquad f = \Delta'_F = AC - B^2.$$

Réciproquement, quand les coefficients u, v de l'équation d'une droite

$$(1) \qquad ux + vy + 1 = 0$$

sont liés par une équation du second degré

$$\varphi(u, v) = 0,$$

cette droite roule sur une conique.

Soit

$$(2) \qquad \varphi(u, v) = au^2 + 2buv + cv^2 + 2du + 2ev + f = 0$$

la relation entre u, v; prenons un point du plan (x, y): pour déterminer les droites du système qui passent par ce point, il suffit de résoudre, par rapport à u et v, les équations

$$ux + vy + 1 = 0,$$
$$\varphi(u, v) = 0.$$

Mais il est plus simple de remarquer qu'une combinaison, homogène par rapport à u et v, des équations (1) et (2) fournira immédiatement les valeurs des coefficients angulaires $-\frac{u}{v}$ des droites cherchées.

Cette équation homogène s'écrit

$$au^2 + 2buv + cv^2 - 2(du + ev)(ux + vy) + f(ux + vy)^2 = 0,$$

ou

$$(3) \qquad (a - 2dx + fx^2)u^2 + 2(b - ex - dy + fxy)uv + (c - 2ey + fy^2)v^2 = 0.$$

Or, une courbe quelconque peut être considérée comme le lieu des points du plan par lesquels on peut mener à cette courbe deux tangentes confondues.

Si donc le point (x, y) est tel que les droites du système qui en partent soient confondues, ce point appartient à la courbe à laquelle la droite

$$(1) \qquad ux + vy + 1 = 0$$

reste tangente.

Mais l'équation aux coefficients angulaires aura une racine double, si l'on a

$$(a - 2dx + fx^2)(c - 2ey + fy^2) - (b - ex - dy + fxy)^2 = 0,$$

équation analogue à celle que nous avons trouvée plus haut (p. 137); des calculs identiques à ceux effectués donnent

$$\begin{aligned}(cf - e^2)x^2 + 2(de - bf)xy + (af - d^2)y^2 \\ + 2(be - cd)x + 2(bd - ae)y + ac - b^2 = 0.\end{aligned}$$

Cette équation est celle d'une conique.

Signification des coefficients de l'équation tangentielle. — Quand une équation tangentielle a été formée comme nous l'avons indiqué, ses coefficients ont une signification précise qui permet de reconnaître sur l'équation tangentielle certains caractères dont nous indiquerons les principaux.

(a) Si l'on résout par rapport à A, B, ..., F les équations

$$a = \Delta'_A = CF - E^2, \quad \ldots,$$

on trouve

$$A = \frac{cf - e^2}{\Delta}, \qquad B = \frac{de - bf}{\Delta}, \qquad C = \frac{af - d^2}{\Delta}$$

Si on forme la fonction δ, on trouve

$$\delta = AC - B^2 = \frac{(cf - e^2)(af - d^2) - (de - bf)^2}{\Delta^2} = \frac{Df}{\Delta^2};$$

en appelant D la fonction

$$acf + 2bde - ae^2 - fb^2 - cd^2;$$

on conclut

$$D = \Delta^2,$$

résultat qu'on peut obtenir d'ailleurs en considérant les équations tangentielle et cartésienne comme une transformation homographique l'une de l'autre.

Dès lors, si $f > 0$, la conique est une ellipse;

Si $f < 0$, c'est une hyperbole;

Enfin, si $f = 0$, c'est une parabole.

(b) Les coordonnées du centre de la conique dont l'équation tangentielle est

$$au^2 + 2buv + cv^2 + 2du + 2ev + f = 0$$

sont proportionnelles aux coefficients d, e.

On a, en effet,

$$d = BE - CD,$$
$$e = BD - AE.$$

Le centre est donc à l'origine, si l'équation tangentielle est réduite à

$$au^2 + 2buv + cv^2 + f = 0.$$

(c) Dans la parabole, $f = 0$; l'équation

$$au^2 + 2buv + cv^2 + 2du + 2ev = 0$$

est alors satisfaite par les valeurs simultanées

$$u = 0, \qquad v = 0$$

qui rejettent à l'infini dans une direction arbitraire la tangente mobile

$$ux + vy + 1 = 0.$$

On dit que la parabole est tangente à la *droite de l'infini*.

Cette propriété est caractéristique de la parabole; toutes les tangentes à l'ellipse et à l'hyperbole restent à distance finie; parmi les tangentes à l'hyperbole, celles dont le point de contact s'éloigne indéfiniment se rapprochent des asymptotes, qui sont les tangentes ayant leurs points de contact à l'infini.

2. — Déplacement d'une droite roulant sur une conique.

Si nous revenons à l'étude faite (Chap. II, § II) du déplacement d'une droite, nous voyons que l'existence d'une relation du second degré entre les coefficients λ, μ, ν de l'équation

$$\lambda x + \mu y + \nu = 0$$

signifie que la droite représentée par cette équation se déplace en restant constamment tangente à une courbe du second ordre.

Nous allons résoudre un certain nombre de questions générales au moyen de l'équation tangentielle; les résultats obtenus nous permettront, à l'inspection d'une équation tangentielle de conique, de reconnaître les caractères particuliers de cette conique.

Équation aux coefficients angulaires des tangentes issues d'un point (x, y). — Soit

$$au^2 + 2buv + cv^2 + 2du + 2ev + f = 0 \tag{1}$$

l'équation tangentielle générale des coniques, l'équation d'une tangente étant

$$ux + vy + 1 = 0. \tag{2}$$

L'équation aux coefficients angulaires des tangentes, issues d'un point (x, y), à cette conique s'obtient en prenant la transformée en $-\dfrac{u}{v}$ d'une combinaison homogène en u et v des équations (1) et (2)

$$au^2 + 2buv + cv^2 - 2(du + ev)(ux + vy) + f(ux + vy)^2 = 0, \tag{3}$$

c'est-à-dire

$$(a - 2dx + fx^2)u^2 + 2(b - cx - dy + fxy)uv \\ + (c - 2ey + fy^2)v^2 = 0;$$

en posant

$$Z = -\frac{u}{v};$$

l'équation aux coefficients angulaires est finalement

$$(4)\qquad (a - 2dx + fx^2)Z^2 - 2(b - ex - dy + fxy)Z + (c - 2ey + fy^2) = 0.$$

Elle va nous servir dans les questions qui suivent.

3. — Lieu des points d'où l'on peut mener à une conique deux tangentes rectangulaires.

L'équation de ce lieu s'obtient en écrivant que le produit des racines de l'équation précédente est égal à -1 : il vient

$$f(x^2 + y^2) - 2dx - 2ey + a + c = 0.$$

C'est donc un cercle, en général; les coordonnées de son centre sont

$$x_1 = \frac{d}{f} = \frac{BE - CD}{AC - B^2},$$

$$y_1 = \frac{e}{f} = \frac{BD - AE}{AC - B^2}.$$

Le centre du cercle coïncide avec celui de la conique.

Quand la conique donnée est une parabole, $f = 0$, le lieu est une droite

$$2dx + 2ey - a - c = 0.$$

4. — Points d'où l'on peut mener à une conique des tangentes parallèles aux droites isotropes.

Ces points sont les foyers (définition de Plücker).

Les tangentes seront parallèles aux droites isotropes, si l'équation aux coefficients angulaires (4) se réduit à

$$Z^2 + 1 = 0,$$

c'est-à-dire si l'on a simultanément

$$[H_1] \qquad f(x^2 - y^2) - 2dx + 2ey + a - c = 0,$$
$$[H_2] \qquad fxy - ex - dy + b = 0.$$

Les foyers sont donc les points communs de deux hyperboles équilatères ayant leurs asymptotes à 45° l'une de l'autre.

Ces hyperboles sont concentriques, car leurs équations du centre sont respectivement

$$[H_1] \begin{cases} fx - d = 0, \\ fy - e = 0; \end{cases} \qquad [H_2] \begin{cases} fy - e = 0, \\ fx - d = 0. \end{cases}$$

Il n'y a donc que deux foyers réels.

Remarque. — L'un de ces foyers sera à l'origine, si les hyperboles H_1, H_2 se coupent en ce point; on a dans ce cas

$$b = 0,$$
$$a - c = 0;$$

l'ensemble des termes du plus haut degré de l'équation tangentielle présente les caractères analytiques de l'équation du cercle.

5. — Podaires.

On appelle *podaire* d'un point par rapport à une courbe le lieu des projections de ce point sur les tangentes à la courbe.

L'équation tangentielle donne la solution générale du problème des podaires.

Soit

$$(1) \qquad \varphi(u, v) = 0$$

l'équation tangentielle d'une courbe,

$$ux + vy + 1 = 0 \tag{2}$$

étant l'équation d'une tangente quelconque.

Soit (α, β) le point dont on cherche la podaire.

L'équation de la projetante de ce point sur la droite (2) est

$$v(x - \alpha) - u(y - \beta) = 0; \tag{3}$$

la podaire est alors définie par les trois équations

$$v(x - \alpha) - u(y - \beta) = 0,$$
$$ux + vy + 1 = 0,$$
$$\varphi(u, v) = 0,$$

entre lesquelles on doit éliminer u et v (Chap. I, p. 15).

En posant

$$x(x - \alpha) + y(y - \beta) = p,$$

l'équation de la podaire peut s'écrire

$$\varphi\left(\frac{\alpha - x}{p}, \frac{\beta - y}{p}\right) = 0.$$

6. — Podaire du foyer par rapport à une conique.

Plaçons l'origine au foyer qu'on projette; l'équation tangentielle de la conique est, d'après une remarque faite précédemment (p. 143),

$$u^2 + v^2 + 2du + 2ev + f = 0;$$

une tangente quelconque ayant pour équation

$$ux + vy + 1 = 0;$$

la projetante de l'origine est

$$vx - uy = 0.$$

L'équation de la podaire est dès lors

$$(x^2+y^2)[f(x^2+y^2)-2dx-2ey+1]=0.$$

Elle se décompose ainsi

$$x^2+y^2=0,$$
$$f(x^2+y^2)-2dx-2ey+1=0.$$

La première partie se compose des droites isotropes. Nous savons, en effet, que du foyer partent à la conique deux tangentes isotropes; chacune de ces droites est perpendiculaire sur elle-même, au point de vue analytique; elle est donc à elle-même sa projetante issue du foyer; dès lors, elle fait partie du lieu.

La seconde partie est le cercle

$$f(x^2+y^2)-2dx-2ey+1=0,$$

concentrique à la conique donnée et qui devient la droite

$$dx+ey-\frac{1}{2}=0,$$

quand la conique est une parabole.

Remarque. — Si l'on place l'origine à l'autre foyer en conservant la même direction d'axes, on obtient une nouvelle équation se déduisant de celle qui précède en changeant les signes de d et de e, f conservant le sien. Le rayon du cercle podaire du second foyer est donc le même que celui du premier. Ces deux cercles, étant d'ailleurs concentriques à la conique, sont identiques.

7. *On donne un point A, à l'intérieur d'un cercle fixe : trouver le lieu des milieux des cordes vues de ce point sous un angle droit.*

Plaçons l'origine en A et prenons comme axe des x le diamètre du point A.

L'équation du cercle est

$$(1) \qquad (x-a)^2+y^2-R^2=0,$$

a étant l'abscisse du centre.

Cherchons d'abord la relation qui doit exister entre les coefficients de l'équation d'une corde

$$(2) \qquad ux+vy+1=0,$$

pour qu'elle soit vue du point A sous un angle droit.

Pour cela, nous formons l'équation du faisceau des droites joignant l'origine aux points de rencontre de la droite (2) et du cercle (1) :

$$x^2+y^2+2ax(ux+vy)+(a^2-R^2)(ux+vy)^2=0,$$

ou

$$(3) \quad [1+2au+(a^2-R^2)u^2]x^2+2[av+(a^2-R^2)uv]xy + [1+v^2(a^2-R^2)]y^2=0.$$

Ces droites seront rectangulaires si l'on a $A+C=0$,

$$(4) \qquad (a^2-R^2)(u^2+v^2)+2au+2=0.$$

On voit que la sécante (2) doit se déplacer en restant tangente à une conique de nature variable, mais dont un foyer reste à l'origine.

Nous devons donc chercher le lieu du milieu des portions de tangentes à une conique, limitées au cercle donné; or le milieu de la portion de corde interceptée par la circonférence est déterminé par l'intersection de cette corde avec la perpendiculaire abaissée sur elle du centre du cercle.

L'équation de cette perpendiculaire est

$$v(x-a)-uy=0.$$

On obtiendra donc l'équation du lieu cherché en éliminant u et v entre les équations

$$ux + vy + 1 = 0,$$
$$v(x - a) - uy = 0,$$
$$(a^2 - R^2)(u^2 + v^2) + 2au + 2 = 0.$$

On tire u, v, w des deux premières, rendues homogènes,

$$\frac{u}{x-a} = \frac{v}{y} = \frac{-w}{x(x-a)+y^2},$$

et l'on substitue dans la dernière, également rendue homogène,

$$\frac{a^2 - R^2}{2}(u^2 + v^2) + auw + w^2 = 0;$$

on obtient ainsi

$$\frac{a^2 - R^2}{2}[(x-a)^2 + y^2] - a(x-a)[x(x-a)+y^2]$$
$$+ [x(x-a)+y^2]^2 = 0,$$

qu'on peut écrire

$$\frac{a^2 - R^2}{2}[(x-a)^2 + y^2]$$
$$+ [x(x-a)+y^2][x(x-a)+y^2 - a(x-a)] = 0;$$

c'est-à-dire

$$[(x-a)^2 + y^2]\left[x(x-a) + y^2 + \frac{a^2 - R^2}{2}\right] = 0,$$

ou enfin

$$(x-a)^2 + y^2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - ax + \frac{a^2 - R^2}{2} = 0.$$

Le lieu se compose donc de deux parties :

1° Les droites isotropes partant de C;

2° Le cercle représenté par la seconde équation.

Son centre a pour abscisse $\frac{a}{2}$, et le carré de son rayon a pour valeur

$$\frac{a^2}{4} - \frac{a^2 - R^2}{2} = \frac{2R^2 - a^2}{4}.$$

Or nous savons que le lieu de la projection du foyer d'une conique sur les tangentes à cette courbe se compose d'un cercle et des droites isotropes issues du foyer : nous devons conclure que le point C est le second foyer de la conique sur laquelle roule la sécante vue de A sous un angle droit.

On peut, d'ailleurs, vérifier facilement ce résultat en substituant, dans l'équation aux coefficients angulaires des tangentes, issues d'un point (x, y), à la conique dont l'équation tangentielle est

$$(a^2 - R^2)(u^2 + v^2) + 2au + 2 = 0,$$

les coordonnées $(a, 0)$ du point C.

L'équation aux coefficients angulaires

$$(a^2 - R^2)(u^2 + v^2) - 2au(ux + vy) + 2(ux + vy)^2 = 0$$

devient

$$(a^2 - R^2)(u^2 + v^2) = 0.$$

Le point C est donc le second foyer.

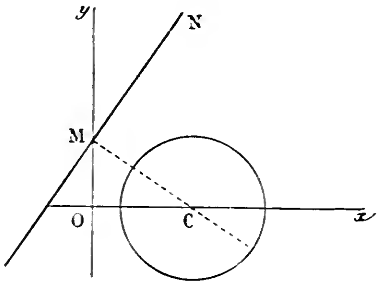
Remarque. — Il résulte de ce que nous avons dit précédemment que le lieu obtenu est également le lieu de la projection du point A sur les sécantes mobiles suivant la loi indiquée.

8. *On donne dans un plan un cercle fixe et une droite fixe; par chaque point de la droite on mène la corde du cercle ayant son milieu en ce point : trouver la loi de déplacement de la droite ainsi menée.*

Prenons (*fig.* 32) pour axe des y la droite fixe, et pour axe des x la perpendiculaire à cette droite menée par le centre du cercle.

Soient M un point quelconque de Oy, β son ordonnée; la droite de l'énoncé est la perpendiculaire à la droite MC menée par le point M. Soit d l'abscisse du centre du cercle.

Fig. 32.



Le coefficient angulaire de MC est $\frac{-\beta}{d}$; l'équation de MN est donc

$$(y-\beta)\beta - dx = 0, \tag{1}$$

c'est-à-dire

$$dx - \beta y + \beta^2 = 0,$$

ou

$$\frac{d}{\beta^2}x - \frac{1}{\beta}y + 1 = 0.$$

Posons

$$u = \frac{d}{\beta^2}, \tag{2}$$

$$v = -\frac{1}{\beta}. \tag{3}$$

Nous obtiendrons la relation qui existe entre u et v en éliminant $\frac{1}{\beta}$ entre les équations (2) et (3); il vient

$$u - dv^2 = 0. \tag{4}$$

D'après ce que nous avons dit plus haut [p. 140 — (c)], cette équation montre que la droite MN enveloppe une parabole, résultat qu'on atteint immédiatement par la géométrie élémentaire.

Le lieu de la projection du foyer d'une parabole sur les tangentes à la courbe est la tangente au sommet. Si donc on joint un point fixe C aux différents points d'une droite fixe Oy, qu'aux points M on mène une perpendiculaire à CM, on refait en sens inverse la construction que nous venons de rappeler; MN est tangente à une parabole dont le foyer est en C et la tangente au sommet Oy.

9. *On donne une conique et une droite fixes; par chaque point de la droite on mène des tangentes à la conique fixe; on fait passer un cercle par les points de contact et le centre de la conique : quelle est la loi de déplacement de la seconde corde commune au cercle et à la conique?*

Prenons comme axes de coordonnées ceux de la conique fixe; son équation est alors

$$(1)\qquad Ax^2 + Cy^2 - 1 = 0.$$

Soit

$$(2)\qquad ax + by - 1 = 0$$

l'équation de la droite fixe.

La polaire d'un point (α, β) de cette droite a pour équation

$$(3)\qquad \alpha A x + \beta C y - 1 = 0$$

Si l'on écrit

$$(4)\qquad \lambda x + \mu y + \nu = 0$$

l'équation d'une droite quelconque du plan, l'équation

$$(5)\qquad Ax^2 + Cy^2 - 1 + (\alpha A x + \beta C y - 1)(\lambda x + \mu y + \nu) = 0$$

est l'équation générale des coniques passant aux quatre points communs à la conique (1) et aux droites (3) et (4).

Nous obtiendrons la loi de déplacement de la droite

$$\lambda x + \mu y + \nu = 0,$$

déterminée conformément à l'énoncé, en exprimant que la conique (5) est un cercle passant à l'origine, et en éliminant les paramètres α, β entre les équations de condition et l'équation

$$a\alpha + b\beta - 1 = 0, \tag{6}$$

relation à établir entre α et β pour que le point correspondant appartienne à la droite (2).

On doit avoir

$$1 + \nu = 0, \tag{7}$$

$$A(1 + \alpha\lambda) - C(1 + \beta\mu) = 0, \tag{8}$$

$$\alpha A\mu + \beta C\lambda = 0. \tag{9}$$

Il vient, de (6) et (9),

$$\frac{\alpha}{C\lambda} = \frac{\beta}{-A\mu} = \frac{1}{aC\lambda - bA\mu},$$

ou, en portant dans (8),

$$AC(\lambda^2 + \mu^2) + (A - C)(aC\lambda - bA\mu) = 0. \tag{10}$$

Telle est la relation à établir entre λ et μ pour que la droite

$$\lambda x + \mu y - 1 = 0$$

soit la seconde corde de l'énoncé.

Cette droite enveloppe donc une parabole dont le foyer est à l'origine.

Exercices proposés.

I. — Étudier les lieux des points de contact des tangentes menées à diverses courbes dans les conditions indiquées aux sujets de Concours suivants :

1° Admission à l'École Navale en 1892, § 3 (t. II, p. 103*).

2° Admission à l'École Centrale en 1867, 1re session, § 2 (t. II, p. 36*); — 1869, 2e session (t. II, p. 38*); — 1893, 2e session, § 2 (t. II, p. 91*).

3° Admission à l'École Normale en 1863 (t. II, p. 24*); — 1864 (t. II, p. 24*); — 1874 (t. II, p. 27*); — 1895, § 4 (t. II, p. 85*).

4° Admission à l'École Polytechnique en 1867, § 2 (t. II, p. 9*); — 1873 (t. II, p. 11*); — 1888 (t. II, p. 18*).

II. — Former et étudier les *équations tangentielles* faisant l'objet des énoncés suivants :

1° Admission à l'École Normale en 1881 (t. II, p. 29*).

2° Admission à l'École Polytechnique en 1849 (t. II, p. 3*); — 1885 (t. II, p. 16*).

III. — Résoudre les *questions diverses* concernant les tangentes et proposées :

1° A l'École Normale en 1844 (t. II, p. 20*); — 1883 (t. II, p. 30*); — 1886 (t. II, p. 32*).

2° Au Concours général, Paris, 1868 (t. II, p. 61*).

CHAPITRE VI.

NORMALES.

Rappel de résultats

(a) L'équation de la normale à la courbe $f(x, y) = 0$ au point (x, y) est

$$\frac{Y - y}{f'_y} = \frac{X - x}{f'_x}.$$

(b) Les pieds des normales menées du point (α, β) à la courbe $f(x, y) = 0$ sont à la rencontre de cette courbe avec la courbe auxiliaire

$$\frac{\alpha - x}{f'_x} = \frac{\beta - y}{f'_y}.$$

(c) Cette courbe est le lieu des pieds des normales menées du point (α, β) à toutes les courbes obtenues en faisant varier arbitrairement le terme indépendant des coordonnées dans l'équation

$$f(x, y) = 0.$$

(d) Dans le cas où la courbe $f(x, y) = 0$ est une conique, le lieu auxiliaire

$$(\alpha - x) f'_y - (\beta - y) f'_x = 0$$

est une hyperbole équilatère qui a ses asymptotes parallèles aux axes de la conique donnée, qui passe au centre de la conique et au point (α, β); ces deux points se trouvent sur une même branche de l'hyperbole si la conique est une ellipse, sur deux branches distinctes si la conique est une hyperbole.

(e) Le lieu des pieds des normales menées du point (α, β) à un faisceau de coniques

$$f(x, y, \lambda) = 0$$

s'obtient en éliminant le paramètre variable entre les équations

$$f(x, y, \lambda) = 0,$$
$$(\alpha - x)f'_y - (\beta - y)f'_x = 0.$$

Ellipse. — (*a*) L'équation de la normale dont le pied a pour coordonnées

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi$$

est

$$\frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} - c^2 = 0,$$

en posant

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

(*b*) La droite $ux + vy + 1 = 0$ est normale à l'ellipse dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

si l'on établit entre u et v la relation

$$c^4 u^2 v^2 - a^2 v^2 - b^2 u^2 = 0.$$

(*c*) L'équation aux coefficients angulaires des normales à l'ellipse, issues du point (α, β), est

$$c^4 m^2 - (a^2 + b^2 m^2)(m\alpha - \beta)^2 = 0.$$

(*d*) On peut écrire l'équation d'une normale en fonction du coefficient angulaire

$$y = mx \pm \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}}.$$

Hyperbole. — (*a*) L'équation d'une normale à l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

est

$$\frac{a^2 X}{x} + \frac{b^2 Y}{y} - c^2 = 0;$$

en posant

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

X, Y sont les coordonnées courantes; x, y celles du pied de la normale.

(*b*) La droite $ux + vy + 1 = 0$ est normale à l'hyperbole, si l'on établit entre u et v la relation

$$c^4 u^2 v^2 - a^2 v^2 + b^2 u^2 = 0.$$

(c) L'équation aux coefficients angulaires des normales, issues du point (α, β), à l'hyperbole est

$$c^4 m^2 - (a^2 - b^2 m^2)(m\alpha - \beta)^2 = 0.$$

(d) L'équation d'une normale peut s'écrire

$$y = mx \pm \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 - b^2 m^2}}.$$

Parabole. — (a) L'équation de la parabole étant

$$y^2 - 2px = 0,$$

celle de la normale au point (x, y) est

$$\mathrm{X}y + \mathrm{Y}p - (p + x)y = 0.$$

(b) En fonction du coefficient angulaire, on l'écrit

$$y = mx - p\left(m + \frac{1}{2}m^3\right).$$

(c) L'équation aux coefficients angulaires des normales, issues du point (α, β), à la parabole est

$$\frac{1}{2}pm^3 + (p - \alpha)m + \beta = 0.$$

I. — Lieux des pieds de normales.

1. *Lieu des pieds des normales menées d'un point fixe aux coniques dont l'équation est*

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = 0. \tag{1}$$

Les points dont on cherche le lieu sont à l'intersection des coniques du système et de l'hyperbole des pieds des normales relative au point fixe.

Soient α, β ses coordonnées.

On obtiendra l'équation du lieu étudié en éliminant le paramètre λ^2 entre les équations

$$(1)\qquad \frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-c^2}-1=0,$$

$$(2)\qquad \frac{(y-\beta)(\lambda^2-c^2)}{y}-\frac{\lambda^2(x-\alpha)}{x}=0.$$

On a

$$(3)\qquad \frac{\lambda^2}{c^2x(y-\beta)}=\frac{1}{\alpha y-\beta x},$$

ce qui donne

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &c^2xy(\alpha y-\beta x)[x(x-\alpha)+y(y-\beta)]\\ &\qquad -c^2xy.c^2(x-\alpha)(y-\beta)=0\end{aligned}\right.$$

ou

$$(5)\qquad xy=0,$$

$$(6)\ (\alpha y-\beta x)[x(x-\alpha)+y(y-\beta)]-c^2(x-\alpha)(y-\beta)=0.$$

La première partie du lieu provient des coniques singulières $x^2=0$, $y^2=0$ du système (1), fournies par $\lambda^2=0$ et $\lambda^2-c^2=0$.

La seconde partie du lieu a un point double au point (α, β), les tangentes y sont rectangulaires ; on pouvait prévoir l'existence de ce point à l'examen de l'équation (1) : celle-ci renferme le paramètre λ^2 au second degré et (2) représente un lieu passant au point (α, β) quel que soit λ, etc.

2. *Lieu des pieds des normales menées d'un point* P *à une série d'ellipses ayant un sommet commun* B, *la même tangente en ce point, et telles que, pour chacune d'elles, le rapport de la longueur de l'axe parallèle à la tangente commune à celle de l'autre axe ait une valeur donnée* K; *construire le lieu dans les cas particuliers suivants :*

1° *Prendre* P *sur la bissectrice de l'un des angles formés par la normale et la tangente communes à toutes les ellipses en* B.

2° *Donner à* K *les valeurs* $\sqrt{3}$ *et* 2.

(École Normale, 1875.)

Prenons comme axes de coordonnées la tangente et la normale au sommet fixe; l'équation générale des coniques définies par ces éléments est

$$(1) \qquad y^2 - 2px - qx^2 = 0.$$

L'abscisse du centre est $x_1 = -\frac{p}{q}$.

L'ordonnée correspondante est

$$y_1^2 = -\frac{p^2}{q}.$$

On doit donc avoir

$$K^2 = -q.$$

L'équation des ellipses de l'énoncé est dès lors

$$(2) \qquad y^2 + K^2x^2 - 2px = 0,$$

p étant le paramètre variable.

Soit P (α, β) le point par lequel on mène les normales : les pieds de ces droites sont à l'intersection des ellipses (2) et des hyperboles équilatères

$$(3) \qquad (y - \beta)(K^2x - p) - y(x - \alpha) = 0.$$

On obtiendra l'équation du lieu cherché en éliminant p entre les équations (2) et (3).

On peut écrire

$$(2) \qquad y^2 + K^2x^2 - 2xp = 0,$$

$$(3) \qquad [K^2x(y - \beta) - y(x - \alpha)] - (y - \beta)p = 0.$$

On a donc

$$(4) \quad (y^2 + K^2x^2)(y - \beta) - 2x[K^2x(y - \beta) - y(x - \alpha)] = 0.$$

c'est-à-dire

$$(5) \qquad (y - \beta)(y^2 - K^2x^2) + 2xy(x - \alpha) = 0,$$

lieu du troisième degré ayant pour directions asymptotiques

$$y = 0, \qquad y^2 + (2 - K^2)x^2 = 0$$

et un point double à l'origine; les tangentes sont

$$\beta(y^2 - K^2 x^2) + 2\alpha xy = 0,$$

c'est-à-dire

(6) $$K^2 \beta x^2 - 2\alpha xy - \beta y^2 = 0.$$

Le point double est toujours réel, etc.

(*a*) Dans le premier cas particulier indiqué

$$\alpha - \beta = 0, \qquad K^2 = 3,$$

l'équation du lieu devient

$$(y - \beta)(y^2 - 3x^2) + 2xy(x - \beta) = 0,$$

c'est-à-dire

(7) $$y(y^2 - x^2) - \beta(y - x)(3x + y) = 0.$$

Le lieu se décompose donc en une droite

$$y - x = 0$$

et une hyperbole

$$y(y + x) - \beta(3x + y) = 0.$$

(*b*) Dans le second cas indiqué

$$\alpha - \beta = 0, \qquad K^2 = 4,$$

l'équation du lieu devient

$$y(2x^2 - y^2) - \beta(4x^2 - y^2) + 2\beta xy = 0.$$

Suivant la règle que nous nous sommes imposée, nous laissons à nos lecteurs le soin de construire cette courbe par l'application des méthodes qui leur sont familières.

II. — Problèmes relatifs aux normales.

1. *Déplacement d'une droite qui reste normale à une conique.*

Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy, *on mène d'un point fixe* F *pris sur* Ox *une droite quelconque* FM ; *par sa rencontre* M *avec* Oy *on mène une perpendiculaire* MT *à* FM, *et par* F *une droite* FS *faisant avec* Ox *un angle double de celui que fait* FM *avec cette droite : soit* P *le point de rencontre des droites* MT, FS. *On demande la loi de déplacement de la perpendiculaire à* MT *menée par le point* P.

Cherchons d'abord les coordonnées du point P ; pour cela, formons les équations des droites MT, FS.

Soit

$$OF = d.$$

L'équation de FM est

$$y - \lambda(x - d) = 0; \tag{1}$$

les coordonnées de M sont alors

$$\text{[M]} \qquad \begin{cases} x = 0, \\ y = -\lambda d. \end{cases}$$

L'équation de MT est donc

$$(y + \lambda d)\lambda + x = 0. \tag{2}$$

Celle de FS est

$$y - \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2}(x - d) = 0. \tag{3}$$

Les coordonnées de P sont données par

$$\frac{x}{-\lambda^2 d} = \frac{y}{2\lambda d} = -1. \tag{4}$$

L'équation de la droite PZ est donc

$$(y + 2\lambda d) - \lambda(x - \lambda^2 d) = 0, \tag{5}$$

c'est-à-dire

$$y - \lambda x + 2d\left(\lambda + \frac{1}{2}\lambda^3\right) = 0. \tag{6}$$

On reconnaît, sous cette forme, l'équation de la normale à une parabole dont l'équation est

$$y^2 - 4dx = 0.$$

C'est la parabole lieu du point P. Son sommet est en O, son foyer en F.

(*Voir* Chap. V, § II, n° 8.)

2. *On donne une parabole et un point situé sur l'axe; par ce point on mène une droite mobile qui rencontre la parabole en deux points; on mène les normales en ces points et l'on demande le lieu de leur point de rencontre quand la droite mobile tourne autour du point fixe.*

Rapportons la parabole à son axe et à la tangente au sommet; son équation est alors

$$(1) \qquad y^2 - 2px = 0.$$

Soit (α, β) un point du plan; les pieds des normales menées de ce point à la parabole sont sur l'hyperbole

$$(2) \qquad xy - (\alpha - p)y - p\beta = 0.$$

Ce point (α, β) appartiendra au lieu étudié si parmi les cordes communes aux lieux (1) et (2) se trouve la droite mobile autour du point fixe donné.

Or l'équation générale des coniques passant à l'intersection des coniques (1) et (2) est

$$(3) \qquad y^2 - 2px + \lambda[xy - (\alpha - p)y - p\beta] = 0.$$

Une droite quelconque passant au point donné A $(x = a, y = 0)$ a pour équation

$$(4) \qquad y - \mu(x - a) = 0.$$

Le polynôme premier membre de cette équation doit être en facteur dans l'équation (3); autrement dit, le reste de la division du polynôme

$$y^2 - 2px + \lambda[xy - (\alpha - p)y - p\beta]$$

par

$$y - \mu(x - a)$$

doit être identiquement nul pour que le point (α, β) appartienne au lieu.

Le dividende ordonné est

$$y^2 + \lambda(x - \alpha + p)y - 2px - \lambda p\beta.$$

Le reste de la division est

$$-2px - \lambda p\beta + \mu(x - a)[\lambda(x - \alpha + p) + \mu(x - a)].$$

On doit donc avoir

$$\mu(\lambda + \mu) = 0, \tag{5}$$

$$-2p + \mu[(p - \alpha)\lambda - \mu a] - \mu a(\lambda + \mu) = 0, \tag{6}$$

$$\lambda p\beta + \mu a[\lambda(p - \alpha) - \mu a] = 0. \tag{7}$$

Écartons l'hypothèse $\mu = 0$ de (5); il reste

$$\lambda - \mu = 0.$$

L'équation (6) devient alors

$$2p + \mu^2(p - \alpha + a) = 0 \tag{8}$$

et (7) devient, de même,

$$p\beta + a\mu(p - \alpha + a) = 0. \tag{9}$$

L'équation du lieu s'obtient donc finalement en éliminant μ entre les équations (8) et (9).

On a ainsi

$$\beta^2 - 2\frac{a^2}{p}(\alpha - p - a) = 0.$$

équation d'une parabole ayant pour paramètre $\dfrac{a^2}{p}$ et même axe que la première; son sommet a pour abscisse

$$p + a.$$

En écartant l'hypothèse $\mu = 0$, on n'a supprimé aucune solution; le premier membre de l'équation (6) se réduirait alors à $(-2p)$.

$\mu = 0$ n'est donc pas une solution du système.

3. *Par un point A extérieur à une parabole, on mène deux tangentes à la courbe et aux points de contact, les normales se coupant en D. Quel doit être le lieu des points A pour que celui des points D soit*

1° *Une droite;*

2° *Un cercle ayant pour centre le sommet de la parabole;*

3° *Une hyperbole équilatère ayant pour axe transverse l'axe de la parabole et pour axe non transverse la tangente au sommet?*

Rapportons la parabole à son axe et à la tangente au sommet

$$y^2 - 2px = 0. \tag{1}$$

(a) Pour résoudre le problème, nous allons d'abord chercher à exprimer les coordonnées ξ, η du point D en fonction des coordonnées α, β du point A.

Pour cela prenons un point quelconque (ξ, η) du plan et menons les normales à la parabole; leurs pieds sont sur l'hyperbole

$$xy + (p - \xi)y - p\eta = 0 \tag{2}$$

Le point (ξ, η) sera un des points définis par l'énoncé, si parmi les coniques passant aux rencontres de (1) et (2) se trouve une conique singulière formée de la polaire du point A (α, β) et d'une autre droite.

Or l'équation générale des coniques passant à l'intersection des coniques (1) et (2) est

$$y^2 - 2px + \lambda[xy + (p - \xi)y - p\eta] = 0; \tag{3}$$

celle de la polaire du point A est

$$\beta y - p(x + \alpha) = 0. \tag{4}$$

On obtiendra donc les relations qui doivent exister entre α, β, ξ, η, λ, pour que les points A et D se correspondent conformément à l'énoncé, en exprimant que le reste de la division du polynôme (3) par le polynôme (4) est identiquement nul.

Ces calculs simples effectués, on a

$$\xi = \frac{2\beta^2}{p} + p - \alpha, \tag{5}$$

$$\eta = -\frac{2\alpha\beta}{p}. \tag{6}$$

(b) Soit maintenant

$$A\xi + B\eta + C = 0 \tag{7}$$

l'équation de la droite que doit parcourir le point D : on obtiendra l'équation du lieu correspondant du point A en éliminant ξ et η entre les équations (5), (6) et (7) : on a ainsi

$$2\beta(A\beta - B\alpha) + Ap(p - \alpha) + Cp = 0, \tag{8}$$

hyperbole dont les directions asymptotiques sont celle de l'axe de la parabole et celle de la perpendiculaire à la droite lieu du point D ; etc.

(c) On applique sans difficulté la marche que nous venons d'employer aux deux autres questions de l'énoncé.

4. *Formules de M. Desboves.* — Dans un opuscule ayant pour titre *Théorèmes et problèmes sur les normales aux coniques,* M. Desboves a employé, pour la résolution d'un grand nombre de questions, des formules analogues à celles que nous venons d'obtenir pour la parabole.

Ces formules permettent d'exprimer les coordonnées ξ, η du point N de rencontre de deux normales à une conique à centre, en fonction des coordonnées α, β du point T de rencontre des tangentes à cette conique, menées par les pieds des normales.

Nous renvoyons nos lecteurs à cet opuscule pour de plus amples détails; nous nous bornerons à donner les formules de M. Desboves, formules qu'on peut obtenir en employant diverses méthodes.

Ellipse. — $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ étant l'équation de l'ellipse; ξ, η les coordonnées du point N; α, β celles du point T, on a, en posant $c^2 = a^2 - b^2$,

$$\xi = -\frac{c^2\alpha(\beta^2 - b^2)}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2},$$

$$\eta = \frac{c^2\beta(\alpha^2 - a^2)}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}.$$

Hyperbole. — $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ étant l'équation de l'hyperbole, on a, en posant $c^2 = a^2 + b^2$,

$$\xi = -\frac{c^2\alpha(\beta^2 + b^2)}{a^2\beta^2 - b^2\alpha^2},$$

$$\eta = \frac{c^2\beta(\alpha^2 - a^2)}{a^2\beta^2 - b^2\alpha^2}.$$

Parabole. — Nous avons obtenu plus haut les formules

$$\xi = \frac{2\beta^2}{p} + p - \alpha,$$

$$\eta = -\frac{2\alpha\beta}{p}.$$

5. *Lieu des points de rencontre des normales à l'ellipse menées aux extrémités de deux diamètres conjugués.*

Rapportons l'ellipse à son centre et à ses axes; les coordonnées des extrémités A, B de deux diamètres conjugués sont

$$[A] \left\{ \begin{array}{l} x = a\cos\varphi, \\ y = b\sin\varphi; \end{array} \right. \qquad [B] \left\{ \begin{array}{l} x = -a\sin\varphi, \\ y = b\cos\varphi. \end{array} \right.$$

La normale au point A a pour équation

$$\frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} - c^2 = 0; \tag{1}$$

celle du point B

$$\frac{ax}{\sin\varphi} + \frac{by}{\cos\varphi} + c^2 = 0. \tag{2}$$

On est conduit à éliminer l'angle φ entre ces deux équations et la relation

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 1 = 0. \tag{3}$$

Des deux premières on tire la valeur de $\frac{1}{\cos\varphi}$, $\frac{1}{\sin\varphi}$,

$$\frac{\frac{1}{\cos\varphi}}{c^2(ax - by)} = \frac{\frac{1}{\sin\varphi}}{-c^2(ax + by)} = \frac{1}{a^2x^2 + b^2y^2};$$

on conclut

$$\cos\varphi = \frac{a^2x^2 + b^2y^2}{c^2(ax - by)},$$

$$\sin\varphi = \frac{-(a^2x^2 + b^2y^2)}{c^2(ax + by)}.$$

L'équation du lieu étudié est donc

$$(a^2x^2 + b^2y^2)^2[(ax - by)^2 + (ax + by)^2] - c^4(a^2x^2 - b^2y^2)^2 = 0, \tag{4}$$

c'est-à-dire

$$2(a^2x^2 + b^2y^2)^3 - c^4(a^2x^2 - b^2y^2)^2 = 0, \tag{5}$$

lieu du sixième degré symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées. Cette courbe est fermée; elle présente un point quadruple à l'origine, dont les tangentes de rebroussement sont les droites

$$\frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 0, \qquad \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 0, \qquad \ldots.$$

6. *Lieux des points d'où partent à une ellipse une tangente et une normale rectangulaires.*

Prenons comme axes de coordonnées ceux de l'ellipse. Soient M (α, β) un point du lieu, λ le coefficient angulaire d'une normale issue de ce point; λ est racine de l'équation aux coefficients angulaires des normales issues de M à l'ellipse; on a donc

$$(1) \qquad (a^2 + b^2\lambda^2)(\alpha\lambda - \beta)^2 - c^4\lambda^2 = 0.$$

S'il part du même point une tangente perpendiculaire à cette normale, $\frac{-1}{\lambda}$ doit être racine de l'équation aux coefficients angulaires des tangentes à l'ellipse issues de M; on a donc

$$(2) \qquad (a^2 + b^2\lambda^2) - (\alpha + \beta\lambda)^2 = 0.$$

L'équation du lieu du point M s'obtiendra en éliminant λ entre les deux équations précédentes.

Cette élimination se partage en deux :

$$(a) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(\beta\lambda + \alpha)(\alpha\lambda - \beta) - c^2\lambda = 0, \\ &a^2 + b^2\lambda^2 - (\alpha + \beta\lambda)^2 = 0; \end{aligned} \right.$$

$$(b) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(\beta\lambda + \alpha)(\alpha\lambda - \beta) + c^2\lambda = 0, \\ &a^2 + b^2\lambda^2 - (\alpha + \beta\lambda)^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

On peut écrire, en ordonnant,

$$(a)\qquad \begin{cases} \alpha\beta\lambda^2 + (\alpha^2 - \beta^2 - c^2)\lambda - \alpha\beta = 0, \\ (\beta^2 - b^2)\lambda^2 + 2\alpha\beta\lambda + \alpha^2 - a^2 = 0; \end{cases}$$

$$(b)\qquad \begin{cases} \alpha\beta\lambda^2 + (\alpha^2 - \beta^2 + c^2)\lambda - \alpha\beta = 0, \\ (\beta^2 - b^2)\lambda^2 + 2\alpha\beta\lambda + \alpha^2 - a^2 = 0. \end{cases}$$

L'éliminant du second degré est susceptible de deux formes que nous avons indiquées (Chap. I, § II, 5).

Si l'on forme l'éliminant

$$(BB' - 2AC' - 2CA')^2 - (B^2 - 4AC)(B'^2 - 4A'C') = 0,$$

on constate que, pour le système (a), le premier facteur est identiquement nul; le lieu se décompose donc en deux

$$(3)\qquad B^2 - 4AC = 0,$$
$$(4)\qquad B'^2 - 4A'C' = 0;$$

c'est-à-dire

$$(3)\qquad (\alpha^2 - \beta^2 - c^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2 = 0,$$
$$(4)\qquad \alpha^2\beta^2 - (\beta^2 - b^2)(\alpha^2 - a^2) = 0.$$

Le lieu (4) est l'ellipse elle-même; elle fait évidemment partie du lieu des points cherchés.

Quant au lieu (3), il n'a que deux points réels

$$\beta = 0, \qquad \alpha = \pm c;$$

ce sont les foyers réels de l'ellipse; les tangentes qui partent de ces points étant les droites isotropes, les normales qui leur sont perpendiculaires sont également les droites isotropes.

Ce résultat est facile à vérifier sur l'équation (1).

L'un des éliminants appliqué au système (b) donne l'équation du lieu effectif, symétrique par rapport aux axes, etc.

Nous laissons à nos lecteurs le soin de le construire.

7. *Lieu des milieux des cordes normales à la parabole.*

Rapportons la parabole à son axe et à sa tangente au sommet.

Les points dont on demande le lieu sont à l'intersection d'une normale à la courbe et du diamètre conjugué de cette droite.

Or

$$y^2 - 2px = 0 \tag{1}$$

étant l'équation de la parabole,

$$y - \lambda x + p\left(\lambda + \frac{1}{2}\lambda^3\right) = 0 \tag{2}$$

est celle d'une normale quelconque; son diamètre est

$$-p + \lambda y = 0. \tag{3}$$

On est conduit à éliminer λ entre les équations

$$y - \lambda x + p\left(\lambda + \frac{1}{2}\lambda^3\right) = 0, \tag{2}$$

$$\lambda y - p = 0, \tag{3}$$

ce qui donne

$$y^4 - pxy^2 + p^2\left(y^2 + \frac{1}{2}p^2\right) = 0, \tag{4}$$

lieu du quatrième degré qu'on peut facilement construire en résolvant l'équation par rapport à x.

Exercices proposés.

I. — Étudier les lieux des pieds des normales à des courbes variables dans les conditions indiquées aux sujets de Concours donnés :

1° A l'admission à l'École Centrale en 1872, 1re session (t. II, p. 39*); — 1886, 2e session, §§ 2 et 3 (t. II, p. 52*); — 1891, 1re session, § 4 (t. II, p. 88*).

2° A l'admission à l'École Normale en 1866 (t. II, p. 25*); — 1873 (t. II, p. 27*); — 1875 (t. II, p. 27*); — 1877 (t. II, p. 28*).

3° A l'admission à l'École Polytechnique en 1872 (t. II, p. 10*); — 1890 (t. II, p. 19*).

II. — Résoudre les questions concernant les normales données :

1° A l'admission à l'École Centrale en 1881, 1re session (t. II, p. 45*); — 1881, 2e session (t. II, p. 46*).

2° A l'admission à l'École Normale en 1866 (t. II, p. 25*); — 1877, (t. II, p. 28*); — 1882 (t. II, p. 30*).

3° A l'admission à l'École Polytechnique en 1860 (t. II, p. 7*); — 1876 (t. II, p. 12*).

CHAPITRE VII.

CENTRE.

Rappel de résultats.

(*a*) Soit

$$F(x, y) = Ax^2 + \ldots + F = 0$$

l'équation générale des courbes du second ordre; le centre de cette courbe a pour coordonnées la solution du système

$$F'_x = 0,$$
$$F'_y = 0.$$

(*b*) Si l'équation donnée renferme un paramètre variable, l'équation du lieu des centres de toutes les coniques du système s'obtient en éliminant ce paramètre entre les équations

$$F'_x = 0,$$
$$F'_y = 0.$$

(*c*) On pourra distinguer, sur le lieu obtenu, les points provenant de centres d'ellipses ou d'hyperboles, de la manière suivante :

Les équations

$$Ax + By + D = 0,$$
$$Bx + Cy + E = 0$$

permettent d'exprimer x et y, coordonnées des centres des coniques, en fonction du paramètre variable :

$$\frac{x}{BE - CD} = \frac{y}{BD - AE} = \frac{1}{AC - B^2}$$

Toutes les valeurs de ce paramètre qui donnent

$$\delta = AC - B^2 < 0$$

fournissent des centres d'hyperboles:

$\delta > 0$ donne des centres d'ellipse;
$\delta = 0$ donne des centres de parabole.

Il y a lieu de remarquer que, lorsque ces derniers sont à distance finie, il y en a une infinité pour la même parabole et que, dès lors, celle-ci se compose de deux droites parallèles, distinctes ou confondues.

I. — Lieux de centres.

1. — Lieu des centres des coniques passant par quatre points fixes.

Soient

$$U = 0, \qquad V = 0$$

les équations de deux coniques passant respectivement par les quatre points donnés; l'équation générale des coniques de l'énoncé est

$$U + \lambda V = 0. \tag{1}$$

Le centre d'une de ces coniques est à l'intersection des droites

$$U'_x + \lambda V'_x = 0, \tag{2}$$

$$U'_y + \lambda V'_y = 0. \tag{3}$$

L'équation du lieu de ces points est donc

$$U'_x V'_y - V'_x U'_y = 0. \tag{4}$$

Le lieu représenté par cette équation est une conique passant aux centres des deux coniques données.

2. — Application. — Discussion du lieu obtenu.

Soient les quatre points A, A′, B, B′ (*fig.* 33). Prenons comme axes de coordonnées les droites AA′, BB′; l'équation générale des coniques passant par ces points est, d'après ce qui précède,

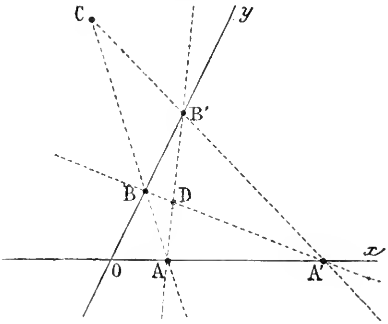
$$(1)\qquad \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)\left(\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}-1\right)+\lambda xy=0.$$

Le centre de cette conique est défini par l'intersection des droites

$$(2)\qquad \frac{2}{aa'}\,x+\left(\lambda+\frac{1}{ab'}+\frac{1}{ba'}\right)y-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)=0,$$

$$(3)\qquad \left(\lambda+\frac{1}{ab'}+\frac{1}{ba'}\right)x+\frac{2}{bb'}\,y-\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)=0$$

Fig. 33



L'équation du lieu cherché, obtenue en éliminant λ entre ces équations est

$$\frac{x^2}{aa'}-\frac{y^2}{bb'}-\frac{a+a'}{2aa'}\,x+\frac{b+b'}{2bb'}\,y=0.$$

Cette conique passe aux points C, D, O, centres des coniques singulières formées de droites et passant aux quatre points donnés.

Si l'on fait $y=0$, on trouve

$$x=0,\qquad x=\frac{a+a'}{2}.$$

Donc le lieu passe au milieu du segment AA′; il passe également par les cinq autres points qui sont les milieux des droites passant par les quatre points donnés.

La nature du lieu des centres dépend du signe du produit

$$aa'bb'.$$

Si $aa'bb' > 0$, c'est une hyperbole.

Cette hyperbole est équilatère, si $aa' - bb' = 0$; alors le quadrilatère ABA′B′ est inscriptible.

Si $aa'bb' < 0$, c'est une ellipse.

On ne peut avoir une parabole comme lieu des centres, si la figure AA′BB′ est un véritable quadrilatère.

3. — Distinction des centres d'ellipses et des centres d'hyperboles.

Dans le cas où la conique, lieu des centres, est une ellipse, l'équation générale ne représente que des hyperboles, puisque la condition

$$\frac{1}{aa'bb'} - \left(\frac{1}{ab'} + \frac{1}{ba'} + \lambda\right)^2 < 0$$

est toujours remplie.

Quand le lieu des centres est une hyperbole, on distingue les points provenant des centres d'ellipses de ceux qui proviennent de centres d'hyperboles de la manière suivante :

Les coordonnées d'un centre quelconque sont fournies par

$$\frac{x}{-\lambda\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)+\frac{2}{bb'}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)-\left(\frac{1}{ba'}+\frac{1}{ab'}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)}$$

$$=\frac{y}{-\lambda\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)+\frac{2}{aa'}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}\right)-\left(\frac{1}{ba'}+\frac{1}{ab'}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)}$$

$$=\frac{1}{\frac{4}{aa'bb'}-\left(\lambda+\frac{1}{ab'}+\frac{1}{ba'}\right)}.$$

Or :

(a) λ variant de

$$-\infty \quad \text{à} \quad -\left(\frac{1}{ab'}+\frac{1}{ba'}\right)-\frac{2}{\sqrt{aa'bb'}},$$

$\delta < 0$; la conique du faisceau est une *hyperbole.*

(b) λ variant de

$$-\left(\frac{1}{ab'}+\frac{1}{ba'}\right)-\frac{2}{\sqrt{aa'bb'}} \quad \text{à} \quad -\left(\frac{1}{ab'}+\frac{1}{ba'}\right)+\frac{2}{\sqrt{aa'bb'}},$$

$\delta > 0$; la conique du faisceau est une *ellipse.*

(c) λ variant de

$$-\left(\frac{1}{ab'}+\frac{1}{ba'}\right)+\frac{2}{\sqrt{aa'bb'}} \quad \text{à} \quad +\infty,$$

$\delta < 0$; la conique du faisceau est une *hyperbole.*

(a) L'abscisse et l'ordonnée du centre partent de o et deviennent infinies; ce point décrit une partie de la branche d'hyperbole qui passe à l'origine.

(b) Les coordonnées du centre ont des valeurs infinies au commencement et à la fin de cette série de valeurs de λ; elles restent finies dans l'intervalle et ne s'annulent pas simultanément; le centre se déplace sur l'autre branche d'hyperbole.

(c) Enfin les coordonnées du centre, infinies au début, deviennent simultanément nulles à la fin; le centre se meut sur la seconde partie de la branche d'hyperbole qui passe à l'origine.

En résumé :

Les *centres d'ellipses* se trouvent sur la branche d'hyperbole-lieu qui ne passe pas à l'origine.

Les *centres d'hyperboles* se trouvent sur la branche qui passe à l'origine.

Les points à l'infini du lieu sont les centres des paraboles du système de coniques considéré ; ces paraboles ont leurs axes parallèles aux asymptotes de l'hyperbole-lieu.

4. — Lieu des centres des coniques représentées par l'équation

$$(1) \qquad x^2 + 2\lambda xy + \lambda y^2 - 2\lambda x - 2y + \lambda = 0,$$

λ étant une variable.

On distinguera sur le lieu les points provenant des centres d'ellipses de ceux qui proviennent des centres d'hyperboles ou de paraboles.

L'équation donnée peut s'écrire

$$x^2 - 2y + \lambda(2xy + y^2 - 2x + 1) = 0,$$

forme sous laquelle on reconnaît l'équation générale des coniques passant à l'intersection de la parabole

$$x^2 - 2y = 0$$

et de l'hyperbole

$$y(2x + y) - 2x + 1 = 0.$$

(a) Le centre d'une conique quelconque du système est défini par les deux équations

$$(2) \qquad \begin{cases} F'_x = x \quad - \lambda y - \lambda = 0. \\ F'_y = \lambda x + \lambda y - 1 = 0. \end{cases}$$

On obtiendra le lieu des centres en éliminant λ entre ces équations :

$$\lambda(y - 1) + x = 0,$$

$$\lambda(x + y) - 1 = 0.$$

L'éliminant est

$$(y-1)+x(x+y)=0.$$

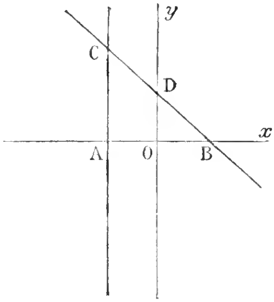
Le lieu des centres est donc une hyperbole

$$x(x+y)+y-1=0,$$

dont les directions asymptotiques sont

$$x(x+y)=0.$$

Fig. 34.



Nous construirons cette courbe en cherchant son centre (*fig.* 34) :

$$2f'_x = 2x+y=0,$$
$$2f'_y = x+1=0;$$

c'est-à-dire

$$x=-1$$
$$y=2.$$

Si nous cherchons les points de la courbe qui sont sur les axes, on trouve, en faisant $y=0$,

$$x^2-1=0.$$

Ces points sont donc les points A, B, rencontre des asymptotes avec Ox; l'hyperbole se réduit à ses asymptotes; on voit d'ailleurs facilement que l'équation de cette conique peut s'écrire

$$(x+1)(x+y-1)=0.$$

(b) Les coordonnées du centre de l'une des coniques du faisceau sont définies par les équations (2); on peut exprimer ces coordonnées en fonction du paramètre λ :

$$\frac{x}{-\lambda+\lambda^2}=\frac{y}{-\lambda^2+1}=\frac{1}{\lambda-\lambda^2};$$

c'est-à-dire

$$\lambda(\lambda-1)x+\lambda(\lambda-1)=0,$$

$$\lambda(\lambda-1)y-(1+\lambda)(\lambda-1)=0.$$

Nous voyons que, tant que

$$\lambda(\lambda-1)\gtrless 0,$$

x a la valeur constante -1.

Si, au contraire,

$$\lambda(\lambda-1)=0,$$

x a une infinité de valeurs; l'équation qui donne x devient une identité.

De même, si

$$\lambda-1=0,$$

y a une infinité de valeurs.

Nous avons donc, au point de vue algébrique, les résultats suivants :

1° λ variant de $-\infty$ à 0.
- x conserve la valeur -1; quand $\lambda=0$, x a une infinité de valeurs.
- y varie de -1 à $-\infty$ en s'annulant pour $\lambda=-1$.

2° λ variant de 0 à 1.
- x conserve la valeur -1; quand $\lambda = 1$, x a une infinité de valeurs.
- y varie de $+\infty$ à 2; quand $\lambda = 1$, y a une infinité de valeurs, mais les valeurs simultanées de x et de y doivent être associées de telle sorte que $x + y = 1$.

3° λ variant de 1 à $+\infty$.
- x conserve la valeur -1.
- y varie de 2 à $+1$.

Or, si nous formons

$$\delta = AC - B^2$$

dans l'équation donnée, nous obtenons

$$\delta = \lambda - \lambda^2 = \lambda(1 - \lambda).$$

Donc :

1° λ variant de $-\infty$ à 0, on a des *hyperboles*. La valeur $\lambda = 0$ donne une parabole

$$x^2 - 2y = 0,$$

dont le centre est à l'infini sur Oy.

2° λ variant de 0 à 1, on a des *ellipses*. La valeur $\lambda = 1$ donne une parabole

$$(x + y)^2 - 2(x + y) + 1 = 0,$$

qui se réduit à un système de deux droites confondues

$$(x + y - 1)^2 = 0;$$

le centre est un point quelconque de la droite

$$x + y - 1 = 0.$$

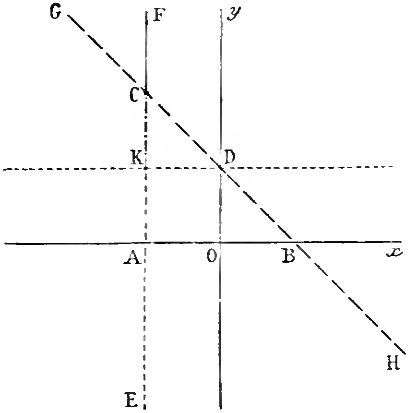
3° λ variant de $+1$ à $+\infty$, on a des *hyperboles*.

Pour représenter sur la figure les résultats de cette discussion, nous dirons (*fig.* 35) :

1° Que la droite GH, dont l'équation est $x+y-1=0$, est le lieu des centres de la parabole particulière correspondant à $\lambda=1$.

2° Que la partie KE $\left\{\begin{array}{l} x=-1, \\ y \text{ variant de } +1 \text{ à } -\infty, \end{array}\right.$ provient des centres d'hyperboles.

Fig. 35.



3° Que la partie CF $\left\{\begin{array}{l} x=-1, \\ y \text{ variant de } +\infty \text{ à } +2, \end{array}\right.$ provient des centres d'ellipses.

4° Que la partie CK $\left\{\begin{array}{l} x=-1, \\ y \text{ variant de } +2 \text{ à } +1, \end{array}\right.$ provient des centres d'hyperboles.

Remarque. — On peut encore, pour se rendre compte de la loi de déplacement du centre de ces coniques, opérer de la manière suivante :

Les équations du centre peuvent s'écrire

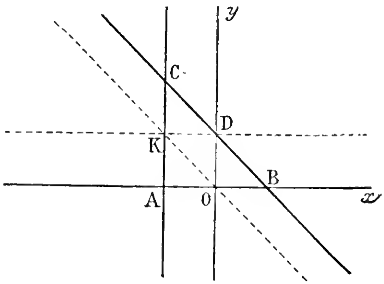
$$x + \lambda(y - 1) = 0,$$
$$\lambda(x + y) - 1 = 0;$$

la première est l'équation générale des droites passant au point

$$D \begin{cases} x = 0, \\ y = 1; \end{cases}$$

la seconde est l'équation générale des parallèles à la seconde bissectrice (*fig.* 36).

Fig. 36.



1° λ variant de $-\infty$ à 0, la droite tournant autour de D prend toutes les positions intermédiaires entre DK et DO; la parallèle à la seconde bissectrice se déplace depuis la position KO jusqu'à l'infini du côté de E; leur point de rencontre se déplace sur KE, etc.

II. — Problèmes.

1. *On donne deux axes rectangulaires* Ox, Oy; *un cercle dont le centre est sur* Ox: *on demande le lieu des centres des hyperboles équilatères passant aux points*

communs au cercle et à l'axe des y et tangentes au cercle.

Soient α l'abscisse du centre C du cercle, $\pm a$ les ordonnées des points A, B de rencontre du cercle avec Oy.

L'équation du cercle est

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - a^2 = 0.$$

L'équation générale des hyperboles équilatères du plan étant

$$(2) \qquad x^2 + 2\lambda xy - y^2 + 2\mu x + 2\nu y + \pi = 0,$$

on doit avoir

$$x = 0,$$
$$y^2 - a^2 = 0;$$

ce qui donne

$$\nu = 0, \qquad \pi = + a^2.$$

L'équation (2) devient

$$(3) \qquad x^2 + 2\lambda xy - y^2 + 2\mu x + a^2 = 0.$$

L'hyperbole sera tangente au cercle, si une des cordes communes à ces courbes est elle-même tangente au cercle; or les points communs à l'hyperbole et au cercle sont sur la courbe auxiliaire

$$x(x + \lambda y + \mu - \alpha) = 0;$$

$x = 0$ donne les points A, B sur Oy.

La droite

$$(4) \qquad x + \lambda y + \mu - \alpha = 0$$

doit être tangente au cercle (1); on a donc

$$\alpha^2 + a^2 = \frac{\mu^2}{1 + \lambda^2},$$

$$\mu^2 = (\alpha^2 + a^2)(1 + \lambda^2).$$

L'équation des hyperboles de l'énoncé est finalement

$$x^2 + 2\lambda xy - y^2 + 2\mu x + a^2 = 0,$$

λ et μ étant liés par la relation

$$\mu^2 = (a^2 + \alpha^2)(1 + \lambda^2).$$

On obtiendra le lieu des centres de ces coniques en éliminant λ et μ entre les équations

$$f'_x = x + \lambda y + \mu = 0,$$
$$f'_y = \lambda x - y = 0,$$
$$\mu^2 = (a^2 + \alpha^2)(1 + \lambda^2).$$

On conclut des deux premières

$$\lambda = \frac{y}{x}, \qquad \mu = -\frac{x^2 + y^2}{x}.$$

On a donc comme lieu

$$(x^2 + y^2)[x^2 + y^2 - (a^2 + \alpha^2)] = 0,$$

c'est-à-dire les droites isotropes

$$x^2 + y^2 = 0$$

et le cercle

$$x^2 + y^2 - (a^2 + \alpha^2) = 0,$$

dont le centre est à l'origine et qui a pour rayon AC.

2. *Lieu des centres des coniques dont l'équation est*

$$\lambda x^2 + \beta xy + (\lambda - \alpha) y^2 - (\lambda\alpha + R^2)x - \beta\lambda y + \alpha R^2 = 0;$$

distinguer les centres d'ellipses, d'hyperboles, etc.

(a) L'équation que nous donnons ici a été obtenue Chap. IV (§ II, 4); nous supposons que la droite LL', au lieu d'être fixe, soit mobile en restant parallèle à Oy; $d = \lambda$ devient donc un paramètre variable (*fig.* 37).

Les équations du centre sont

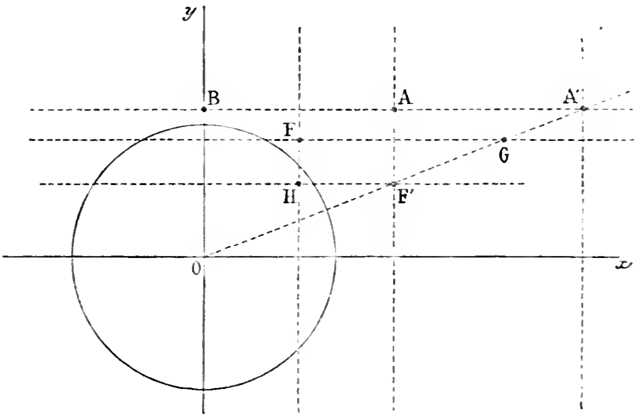
$$(1) \qquad 2\lambda x + \beta y - (\lambda\alpha + R^2) = 0,$$

$$(2) \qquad \beta x + 2(\lambda - \alpha)y - \beta\lambda = 0.$$

La première peut s'écrire

$$(3) \qquad \beta y - R^2 + \lambda(2x - \alpha) = 0;$$

Fig. 37.



elle montre que la droite qu'elle représente passe au point fixe

$$[F] \quad \begin{cases} \beta y - R^2 = 0, & \text{polaire de B}, \\ 2x - \alpha = 0. \end{cases}$$

La seconde s'écrit de même

$$(4) \qquad \beta x - 2\alpha y + \lambda(2y - \beta) = 0;$$

cette droite passe au point fixe

$$[F'] \quad \begin{cases} \beta x - 2\alpha y = 0, & [OA'] \quad AA' = \alpha, \\ 2y - \beta = 0. \end{cases}$$

Le coefficient angulaire de (1) est d'ailleurs

$$m = \frac{-2\lambda}{\beta},$$

celui de (2)

$$m' = \frac{-\beta}{2(\lambda - \alpha)};$$

on a donc entre m et m' la relation homographique

$$\beta mm' + 2\alpha m' - \beta = 0.$$

Le lieu des centres sera donc toujours une hyperbole équilatère passant en F et F'.

L'équation cartésienne de cette hyperbole, obtenue en éliminant λ entre les équations (3) et (4), est

$$(5) \qquad (\beta y - R^2)(2y - \beta) - (2x - \alpha)(\beta x - 2\alpha y) = 0;$$

elle passe aux points

$$\beta y - R^2 = 0 \begin{cases} 2x - \alpha = 0 & [F], \\ \beta x - 2\alpha y = 0 & [G]; \end{cases}$$

$$2y - \beta = 0 \begin{cases} 2x - \alpha = 0 & [H], \\ \beta x - 2\alpha y = 0 & [F']. \end{cases}$$

Nous verrons plus tard que la conique est ainsi complètement déterminée et qu'on peut la construire géométriquement.

(*b*) Pour faire la distinction des centres provenant de coniques de nature différente, nous allons employer une méthode indiquée au § I et qui consiste à se servir du mode même de génération du lieu des centres.

Soient F, F' les points fixes précédemment définis; les coefficients angulaires des droites FX, F'Y dont l'intersection décrit le lieu des centres sont

$$[F'X] \qquad m = \frac{-2\lambda}{\beta},$$

$$[FY] \qquad m' = \frac{-\beta}{2(\lambda - \alpha)}.$$

Or la caractéristique de l'équation donnée,

$$\lambda x^2 + \beta xy + (\lambda - \alpha)y^2 + \ldots = 0,$$

est

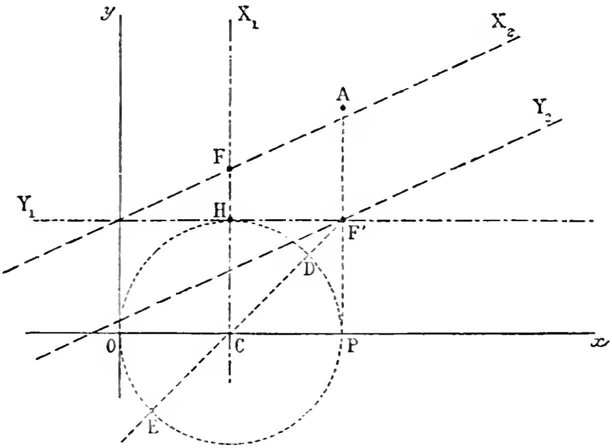
$$\delta = \lambda(\lambda - \alpha) - \frac{\beta^2}{4},$$

ou

$$4\delta = 4\lambda^2 - 4\alpha\lambda - \beta^2;$$

les longueurs λ', λ'' des racines de cette équation, construites

Fig. 38.



à l'échelle de la figure, s'obtiennent facilement; on décrit une circonférence sur α comme diamètre; on joint

$$F'C; \qquad \lambda' = F'D; \qquad \lambda'' = F'E,$$

λ' est négative, λ'' positive (*fig.* 38).

Donc :

λ variant de $-\infty$ à λ', la conique donnée est une ellipse, FX se meut depuis la position FX_1 jusqu'à la position FX_2

ayant pour coefficient angulaire

$$m^2 = \frac{-2\lambda'}{\beta} = \frac{+2F'D}{AP}.$$

$F'Y$ part de la position $F'Y_1$, rencontrant FX_1 en H et arrive à la position $F'Y_2$, dont le coefficient angulaire est

$$m'_2 = m_2,$$

par suite même de son origine; la branche d'hyperbole équilatère allant du point H à l'infini, dans la direction FX_2, provient des centres d'ellipses.

On continue sans difficulté la même discussion; la seconde partie de la branche passant en H provient des autres ellipses du système.

L'autre branche tout entière provient des centres d'hyperboles.

3. *On donne l'équation*

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0$$

d'une hyperbole, et celle d'une droite

$$y - kx = 0$$

passant au centre de l'hyperbole.

1° *Former l'équation générale des coniques qui passent par les points réels ou imaginaires communs à l'hyperbole et à la droite donnée et qui de plus sont tangentes à l'hyperbole en celui de ses sommets situé sur la région positive de* Ox;

2° *Trouver le lieu des centres de ces coniques. — Discussion.*

[*École Centrale, juillet* 1884. (*Énoncé partiel.*)]

Pour écrire l'équation demandée, il suffit de remarquer que la conique particulière formée par la droite

$$y - kx = 0$$

et la tangente au sommet désigné répond à l'énoncé; or, la conique ainsi formée rencontre l'hyperbole donnée en quatre points, l'équation générale demandée est donc

$$(1) \qquad a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 + \lambda(y - kx)(x - a) = 0;$$

on peut écrire

$$(2) \quad (b^2 + k\lambda)x^2 - \lambda xy - a^2y^2 - ak\lambda x + a\lambda y - a^2b^2 = 0.$$

La caractéristique est

$$\delta = \lambda^2 + 4a^2k\lambda + 4a^2b^2,$$

et l'on voit facilement que la discussion de cette fonction comporte trois cas :

$$(a) \qquad k^2 - \frac{b^2}{a^2} > 0,$$

la droite $y - kx = 0$ ne rencontre pas la courbe en des points réels, les racines en λ sont réelles; la conique (2) est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant la valeur de λ.

$$(b) \qquad k^2 - \frac{b^2}{a^2} = 0,$$

la droite donnée coïncide avec une des asymptotes de l'hyperbole; sauf deux paraboles singulières,

$$(ay - bx + ab)^2 = 0,$$
$$(ay + bx - ab)^2 = 0,$$

le système (2) ne renferme que des hyperboles.

$$(c) \qquad k^2 - \frac{b^2}{a^2} < 0,$$

la droite $y - kx = 0$ coupe la courbe en des points réels, la conique (2) est toujours une hyperbole.

L'équation du lieu des centres s'obtiendra en éliminant λ

entre les équations

$$(3) \qquad 2(b^2+k\lambda)x-\lambda y-ak\lambda=0,$$
$$(4) \qquad \lambda x+2a^2y-a\lambda=0.$$

C'est une conique dont l'équation est

$$(5) \qquad b^2x^2-2a^2kxy+a^2y^2-ab^2x+a^3ky=0.$$

Nous n'avons à distinguer les centres des diverses espèces de coniques que dans le cas (a) de la discussion précédente.

$$(a) \qquad a^2k^2-b^2>0;$$

le lieu des centres est une hyperbole, qui, sans nous arrêter aux autres points, passe au point

$$x=a, \qquad y=ka,$$

rencontre de la tangente au sommet de l'hyperbole donnée et de la droite $y-kx=0$.

Les équations (3) et (4), résolues par rapport aux coordonnées du centre mobile, donnent

$$x=\frac{a\lambda(\lambda+2a^2k)}{\lambda^2+4a^2k\lambda+4a^2b^2},$$
$$y=\frac{a\lambda(2b^2+k\lambda)}{\lambda^2+4a^2k\lambda+4a^2b^2}.$$

Appelons λ', λ'' les racines du dénominateur.

(b) λ variant de $-\infty$ à λ'; la conique (2) est une *hyperbole*.

x varie de a à l'infini
y varie de ka à l'infini.

(c) λ variant de λ' à λ'', la conique est une *ellipse* déformée en parabole au commencement et à la fin de l'intervalle.

x et y varient de $\pm\infty$ à $\mp\infty$.

(d) λ variant de λ'' à $+\infty$ la conique (2) est une *hyperbole*.

x varie de $\pm\infty$ à a.

y varie de $\pm\infty$ à ka.

Les centres des hyperboles du système (2) sont donc sur la branche de l'hyperbole (5), qui passe au point $x = a$, $y = ka$ précédemment défini.

Exercices proposés.

Trouver le lieu des centres des coniques variables définies dans les questions données :

1° A l'admission à l'École Centrale en 1867, 1re session (t. II, p. 36*); — 1886, 2e session (t. II, p. 52*); — 1888, 2e session (t. II, p. 54*); — 1891, 2e session, § 1 (t. II, p. 88*); — 1892, 2e session, § 3 (t. II, p. 90*); — 1894, 2e session, §§ 1 et 2 (t. II, p. 92*).

2° A l'admission à l'École Normale en 1877 (t. II, p. 28*).

3° A l'admission à l'École Polytechnique en 1873 (t. II, p. 11*); — 1892, § 3 (t. II, p. 80*).

CHAPITRE VIII.

DIAMÈTRES CONJUGUÉS.

Rappel de résultats.

(*a*) On appelle diamètre dans une courbe du second ordre le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée.

Ce lieu est une droite; et, $F(x, y) = 0$ étant l'équation de la conique, le diamètre des cordes de direction m a pour équation

$$F'_x + mF'_y = 0.$$

(*b*) Ce diamètre est la polaire du point rejeté à l'infini, dans la direction ayant pour coefficient angulaire m.

(*c*) On appelle diamètres conjugués, dans les coniques, deux diamètres tels que chacun d'eux est le lieu géométrique des milieux des cordes parallèles à l'autre.

(*d*) L'équation générale des courbes du second ordre étant

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \ldots = 0,$$

la relation entre les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués est

$$Cmm' + B(m + m') + A = 0.$$

(*e*) Le lieu géométrique du milieu de la partie d'une sécante mobile, limitée à une conique, s'obtiendra en éliminant le paramètre variable entre l'équation de la sécante et celle de son diamètre conjugué par rapport à la conique.

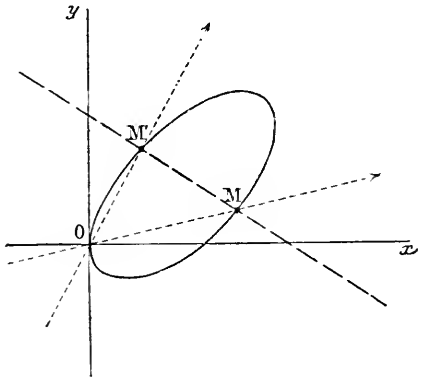
Définition. — Les droites joignant un point d'une conique aux extrémités d'un même diamètre, portent le nom de *cordes supplémentaires* et sont parallèles à un système de diamètres conjugués.

I. — Déplacement d'une droite liée aux diamètres conjugués d'une conique.

1. *Par un point d'une conique on mène des parallèles à un système de diamètres conjugués d'une autre conique : démontrer que la corde déterminée par ces droites passe par un point fixe.*

Prenons comme axes de coordonnées la normale et la

Fig. 39.



tangente à la conique au point donné; l'équation de cette courbe est alors

(1) $$ax^2 + 2\,bxy + cy^2 + 2\,dx = 0.$$

Soient

(2) $$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + \ldots = 0$$

l'équation de la seconde conique, et

$$ux + vy - 1 = 0$$

l'équation d'une sécante quelconque.

Cette sécante sera une des cordes de l'énoncé, si les droites OM, OM′ joignant l'origine à ses points de rencontre avec la conique (1) sont parallèles à un système de diamètres conjugués de la conique (2).

Or les droites OM, OM′ ont pour équation

$$ax^2 + 2\,bxy + cy^2 + 2\,dx\,(ux + vy) = 0,$$

ou

$$(a + 2\,du)\,x^2 + 2\,(b + dv)\,xy + cy^2 = 0.$$

On doit avoir entre leurs coefficients angulaires m, m' la relation

$$(3)\qquad \mathrm{C}mm' + \mathrm{B}\,(m + m') + \mathrm{A} = 0.$$

Or

$$mm' = \frac{a + 2\,du}{c},$$

$$m + m' = -2\,\frac{b + dv}{c};$$

dès lors u et v sont liés par la relation

$$(4)\qquad \mathrm{C}\,\frac{a + 2\,du}{c} - 2\,\mathrm{B}\,\frac{b + dv}{c} + \mathrm{A} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(5)\qquad 2\,\mathrm{C}d\,u - 2\,\mathrm{B}d\,v + \mathrm{A}c - 2\,\mathrm{B}b + \mathrm{C}a = 0.$$

Cette relation du premier degré montre que MM′ passe par le point fixe dont les coordonnées sont

$$x_1 = \frac{-2\,\mathrm{C}d}{\mathrm{A}c - 2\,\mathrm{B}b + \mathrm{C}a},$$

$$y_1 = \frac{2\,\mathrm{B}d}{\mathrm{A}c - 2\,\mathrm{B}b + \mathrm{C}a}.$$

(*Voir* Chap. II, § II.)

2. *Un point* P *se meut sur une droite* D, *située dans le plan d'une conique* C; *par chaque point* P *on mène la*

sécante à la conique C ayant son milieu en ce point : trouver la loi de déplacement de cette droite.

Plaçons l'origine à l'un des sommets de la conique fixe et prenons comme axes de coordonnées la normale et la tangente en ce point.

L'équation de la conique est

(1) $$y^2 - 2px - qx^2 = 0.$$

Soit

(2) $$Ax + By + C = 0$$

l'équation de la droite fixe D.

Soit M (α, β) un point quelconque de la droite D; la droite de l'énoncé qui passe par ce point est la parallèle au diamètre conjugué de la droite joignant le point M au centre de la conique C.

Ce centre Ω a pour coordonnées

$$y = 0,$$

$$x = \frac{-p}{q}.$$

Le coefficient angulaire de $M\Omega$ est donc

(3) $$m = \frac{\beta}{\alpha + \frac{p}{q}} = \frac{q\beta}{q\alpha + p}.$$

Les coefficients angulaires des diamètres conjugués de la conique (1) sont liés par la relation

(4) $$mm' - q = 0.$$

On a donc

(5) $$m' = \frac{q\alpha + p}{\beta}.$$

L'équation de la droite de l'énoncé est

(6) $$(y - \beta)\beta - (q\alpha + p)(x - \alpha) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(q\alpha + p)x - \beta y + \beta^2 - \alpha(q\alpha + p) = 0,$$

ou enfin

$$\frac{q\alpha + p}{\beta^2 - \alpha(q\alpha + p)}x - \frac{\beta}{\beta^2 - \alpha(q\alpha + p)}y + 1 = 0. \tag{7}$$

Posons

$$u = \frac{q\alpha + p}{\beta^2 - \alpha(q\alpha + p)}, \tag{8}$$

$$v = -\frac{\beta}{\beta^2 - \alpha(q\alpha + p)}. \tag{9}$$

On obtiendra la relation à établir entre u et v en éliminant α, β entre les équations (2), (8) et (9) qui deviennent

$$A\alpha + B\beta + C = 0, \tag{2}$$

$$u\beta^2 - qu\alpha^2 - (pu + q)\alpha - p = 0, \tag{10}$$

$$v\beta^2 - qv\alpha^2 - pv\alpha + \beta = 0. \tag{11}$$

L'élimination donne finalement

$$\begin{aligned} v^3(Cq - Ap)^2 - qv(Bpv - Cu)^2 \\ - pv(Bpv - Cu)(Au - Bqv) \\ + v(Cq - Ap)(Au - Bqv) = 0. \end{aligned}$$

La droite mobile est donc soumise à une double loi de déplacement :

1° $v = 0$, translation parallèle à Oy;

2° enveloppe d'une conique.

II. — Lieu du milieu de la portion d'une sécante mobile limitée a une conique.

1. *Une droite roule sur une circonférence, on demande le lieu du milieu* M *de la partie interceptée sur cette droite par une conique du plan.*

Je prends comme axes de coordonnées deux droites rectangulaires passant au centre du cercle; soit alors

$$(1)\quad f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation de la conique donnée.

Le point M dont on demande le lieu est à l'intersection de la tangente mobile

$$(2)\qquad x\cos\varphi + y\sin\varphi - R = 0,$$

(φ étant le paramètre variable) avec le diamètre conjugué de la direction de cette droite par rapport à la conique (1).

L'équation de ce diamètre s'écrit

$$(3)\qquad \sin\varphi\, f'_x - \cos\varphi\, f'_y = 0.$$

On obtiendra l'équation du lieu du point M en éliminant φ entre les équations (2), (3) et la relation

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

On obtient

$$\frac{\cos\varphi}{f'_x} = \frac{\sin\varphi}{f'_y} = \frac{R}{xf'_x + yf'_y}.$$

L'équation cherchée est donc

$$R^2(f'^2_x + f'^2_y) - (xf'_x + yf'_y)^2 = 0.$$

Ce lieu du quatrième degré, qui a toujours comme directions asymptotiques doubles celles de la conique (1), devient un limaçon de Pascal dans le cas particulier où la conique (1) est une circonférence.

2. *Application. — Lieu des milieux des portions de tangentes à un cercle comprises entre deux diamètres rectangulaires de ce cercle.*

Prenons comme axes de coordonnées les diamètres donnés. L'équation du cercle est

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0. \tag{1}$$

Les points dont on cherche le lieu géométrique sont à l'intersection d'une tangente quelconque avec le diamètre conjugué de sa direction par rapport à la conique évanouissante formée par les axes de coordonnées et dont l'équation est

$$xy = 0. \tag{2}$$

L'équation d'une tangente quelconque au cercle est

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - R = 0. \tag{3}$$

Celle de son diamètre conjugué par rapport à la conique (2) est

$$y \sin\varphi - x \cos\varphi = 0. \tag{4}$$

L'équation du lieu s'obtiendra en éliminant le paramètre φ entre les équations (3), (4) et l'équation

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 1 = 0.$$

Il vient

$$\frac{\cos\varphi}{y} = \frac{\sin\varphi}{x} = \frac{R}{2xy}, \tag{5}$$

et enfin

$$R^2(x^2 + y^2) - 4x^2y^2 = 0. \tag{6}$$

Ce lieu est du quatrième degré; il est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées, son équation ne renfermant que des termes de degré pair; il a un point isolé à l'origine où les tangentes sont les droites isotropes.

On peut construire cette courbe en remarquant que l'équation (6), résolue par rapport à y, donne

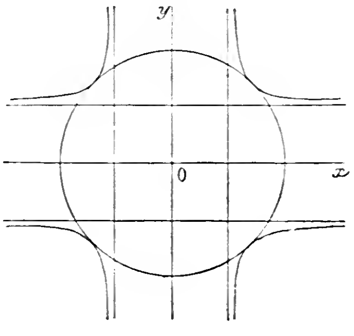
$$y^2 = \frac{R^2 x^2}{4x^2 - R^2};$$

x ne peut varier que de

$$-\infty \quad \text{à} \quad -\frac{R}{2} \qquad \text{et de} \qquad +\frac{R}{2} \quad \text{à} \quad +\infty.$$

Les droites limites parallèles à Oy sont des asymptotes;

Fig. 40.



quand x est infini, $y^2 = \frac{R^2}{4}$, ce qui donne les asymptotes parallèles à Ox.

Les points communs au lieu et au cercle

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

sont sur les hyperboles

$$2xy - R^2 = 0, \quad 2xy + R^2 = 0,$$

qui sont tangentes au cercle à ses rencontres avec les bissectrices des axes.

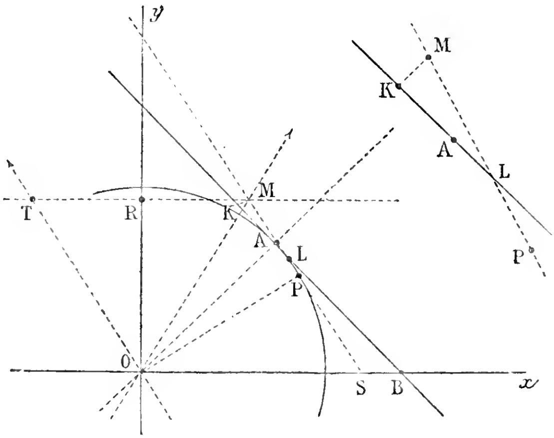
Le lieu est tangent au cercle en ces points. Il présente donc la forme de la *fig.* 40.

Solution géométrique. — On peut établir par des considérations géométriques les résultats qui précèdent.

(*a*) Le lieu est évidemment symétrique par rapport aux diamètres pris comme axes.

(*b*) Les droites isotropes issues du centre du cercle sont

Fig. 41.



les asymptotes de ce cercle, c'est-à-dire des tangentes : le milieu de la partie interceptée par les axes qui ne les rencontrent qu'à l'origine est ce point lui-même. — C'est d'ailleurs un point *isolé*, car les asymptotes du cercle ne font pas partie de la série continue des tangentes.

(*c*) Soient P un point quelconque du cercle, PS la tangente en ce point, M le point du lieu étudié; menons OT parallèle à PS : les quatre droites Ox, Oy, OM, OT forment un faisceau harmonique

$$TR = RM = \frac{OS}{2},$$

Donc, quand OT s'approche de Oy, OM s'en approche également, le point M s'éloigne indéfiniment sur la tangente mobile; mais sa distance à Oy tend vers $\frac{R}{2}$, abscisse de l'asymptote.

Quand OT s'approche de la seconde bissectrice, OM s'approche de la première; le point A fait partie du lieu.

Soit P un point infiniment voisin de A; prenons l'angle $POA = \varepsilon$ comme infiniment petit principal, l'angle des tangentes au cercle en P et A est ε; ML est un infiniment petit du premier ordre; de plus,

$$MK = ML \sin \varepsilon,$$

donc MK est un infiniment petit du second ordre et AB est la tangente au lieu étudié au point A.

3. *On donne une conique ayant pour équation*

$$y^2 = 2px + qx^2$$

et une droite fixe de son plan.

De chaque point de cette droite on mène les tangentes à la conique : on demande le lieu du milieu de la portion de la corde des contacts limitée à cette conique.

Le point dont on demande le lieu est à l'intersection de la polaire du point mobile avec le diamètre conjugué de la direction de cette polaire.

Soit

$$(1) \qquad Ax + By + C = 0$$

l'équation de la droite donnée.

Un point α, β de cette droite satisfait à l'équation

$$(2) \qquad A\alpha + B\beta + C = 0$$

et à pour polaire

$$(3)\qquad (\alpha q+p)x-\beta y+p\alpha=0.$$

Le coefficient angulaire de cette droite est

$$(4)\qquad m=\frac{\alpha q+p}{\beta}.$$

Le diamètre conjugué de la polaire est donc

$$(5)\qquad \beta(-qx-p)+(\alpha q+p)y=0.$$

L'équation du lieu cherché s'obtiendra en éliminant les paramètres α, β entre les équations

$$(2)\qquad A\alpha+B\beta+C=0,$$

$$(3)\qquad (qx+p)\alpha-y\beta+px=0,$$

$$(5)\qquad qy\alpha-(qx+p)\beta+py=0.$$

On obtient ainsi

$$(6)\quad Ap(qx^2-y^2+px)-Bp^2y+C[qy^2-(qx+p)^2]=0,$$

équation d'une conique.

En désignant par U, V, W les coefficients de A, B, C, on voit que l'équation (6) est de la forme

$$\lambda U+\mu V+W=0,$$

λ, μ désignant les deux paramètres variables dont dépend la position de la droite donnée (1).

Cette équation se ramène facilement à la forme étudiée au Chapitre IV

$$Xx^2+2Zxy+\ldots=0,$$

et peut être discutée complètement par la méthode indiquée.

En écrivant l'équation de la droite (1)

$$\lambda x + \mu y - 1 = 0,$$

$\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu}$ deviennent les coordonnées du point mobile M de la discussion générale.

On peut déduire de la loi de déplacement de ce point celle de la droite (1); celle-ci s'obtient par une construction géométrique simple.

Quant le point M se meut sur la caractéristique Γ de la discussion générale, la droite (1) enveloppe une conique.

Dans le cas particulier où la conique donnée est une parabole,

$$q = 0,$$

l'équation (6) devient

$$A(px - y^2) - Bpy - Cp = 0. \tag{7}$$

Le lieu est donc aussi une parabole, quelle que soit la position de la droite donnée.

Solution géométrique. — Les points du lieu étudié sont définis par l'intersection de deux droites tournant autour de deux points fixes :

1° La polaire du point mobile qui tourne autour du pôle de la droite donnée;

2° Le diamètre conjugué de la direction de cette polaire qui tourne autour du centre fixe de la conique donnée; ces droites se correspondent homographiquement.

En effet :

1° A une position du point mobile correspond une polaire unique de ce point; cette polaire a un diamètre conjugué unique;

2° A une droite arbitraire menée par le centre de la conique correspond une direction unique du diamètre conjugué de sa direction ; la parallèle à cette droite menee par le pôle de la droite fixe a une position unique.

Le déplacement de ces droites est donc homographique : le lieu de leur point de rencontre est une conique passant au pôle de la droite fixe et au centre de la conique donnée, etc.

Toute la discussion exposée au Chapitre IV peut être refaite ici.

4. *Par les points communs à l'ellipse*

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$$

et à l'hyperbole passant aux pieds des normales menées d'un point P (α, β) *à cette ellipse*

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0,$$

dans laquelle $c^2 = a^2 - b^2$, *on fait passer une infinité de coniques. Dans chacune d'elles on mène le diamètre conjugué de la direction* OP *et l'on projette l'origine sur ce diamètre : trouver le lieu de cette projection.*

[*École Centrale, août* 1881. (*Énoncé partiel.*)]

L'équation générale des coniques passant à l'intersection des lieux

$$(1) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,$$

$$(2) \qquad c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0$$

est

$$(3) \quad a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 + 2\lambda(c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y) = 0.$$

La droite OP a pour coefficient angulaire

$$(4) \qquad m = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Le diamètre conjugué de cette direction, dont l'équation symbolique est

$$f'_x + mf'_y = 0,$$

a pour équation

$$(5)\quad \alpha(b^2x + \lambda c^2y + \lambda b^2\beta) + \beta(a^2y + \lambda c^2x - \lambda a^2\alpha) = 0.$$

Cette droite passe par un point fixe F, intersection des droites

$$(6)\quad \begin{cases} \alpha b^2x + \beta a^2y = 0, \\ \beta x + \alpha y - \alpha\beta = 0. \end{cases}$$

La projetante de l'origine, qui reste perpendiculaire à la droite (5) et tourne autour d'un point fixe, donne comme lieu géométrique de ses rencontres avec cette droite (5), la circonférence décrite sur la droite OF des points fixes comme diamètre.

On peut opérer de deux façons :

(*a*) Construire graphiquement les droites (6), ce qui ne présente aucune difficulté ; on a ainsi les extrémités du diamètre : O, F.

(*b*) Tirer des équations (6) les coordonnées du point F, par lequel passent tous les diamètres ; on aura ainsi le centre et le rayon du cercle.

On vérifierait ces résultats en éliminant λ entre les équations (5) et (7), projetante de l'origine sur (5).

$$(7)\quad (\alpha b^2 + \beta\lambda c^2)y - (\alpha\lambda c^2 + \beta a^2)x = 0.$$

Le lieu obtenu est un cercle qui passe par les trois points O, F, R : l'angle en R est droit ; OF est donc diamètre.

Exercices proposés.

Résoudre les questions suivantes relatives aux diamètres conjugués :

1° Admission à l'École Centrale en 1865, 1re session (t. II, p. 35*); — 1893, 2e session, § 3 (t. II, p. 91*).

2° Admission à l'École Normale en 1866 (t. II, p. 25*); — 1876, § 1 (t. II, p. 27*); — 1881, § 3 (t. II, p. 29*).

3° Admission à l'École Polytechnique en 1842, § 2 (t. II, p. 3*).

4° Concours général, Paris, en 1857 (t. II, p. 59*); — 1866 (t. II, p. 61*).

CHAPITRE IX.

AXES. — SOMMETS.

I. — Axes

RAPPEL DE RÉSULTATS.

(a) Les axes d'une conique sont les diamètres conjugués rectangulaires.

Il existe un seul système d'axes.

Soit

$$F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \ldots = 0$$

l'équation d'une conique; l'équation du système de ses axes est

$$B(F'^2_x - F'^2_y) - (C - A)F'_x F'_y = 0,$$

F'_x, F'_y désignant les demi-dérivées de la fonction $F(x, y)$.

(b) L'équation aux coefficients angulaires des axes d'une conique représentée par l'équation générale est

$$z^2 - \frac{C - A}{B} z - 1 = 0.$$

(c) Deux coniques ont même direction d'axes quand

$$\frac{C - A}{B} = \frac{C' - A'}{B}.$$

(d) Dans le cas où la conique est une parabole, l'équation de son axe est

$$AF'_x + BF'_y = 0.$$

(e) Si l'équation de la parabole est de la forme

$$(y - ax)^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

on obtient l'équation de l'axe en écrivant

$$(y - ax + \lambda)^2 + 2(d + a\lambda)x + 2(e - \lambda)y + f - \lambda^2 = 0$$

et en déterminant λ, de façon à ce que la droite

$$(d + a\lambda)x + (e - \lambda)y + \frac{f - \lambda^2}{2} = 0$$

soit perpendiculaire à

$$y - ax = 0.$$

Ce procédé a l'avantage de donner, en même temps que l'équation de l'axe, celle de la tangente au sommet et, par conséquent, le paramètre de la parabole.

1. — Décomposition de l'équation des axes.

Soit

(1) $$F(x, y) = 0$$

l'équation d'une conique; désignons par X, Y les demi-dérivées F'_x, F'_y de la fonction premier membre.

L'équation des axes de cette conique est

(2) $$B(X^2 - Y^2) + (C - A)XY = 0;$$

on peut l'écrire

(3) $$BX^2 + (C - A)Y.X - BY^2 = 0.$$

Si $B \gtrless 0$, on multiplie par B et on complète le carré commencé par les deux premiers termes. Il vient

(4) $$\left(BX + \frac{C - A}{2}Y\right)^2 - \left[B^2 + \frac{(C - A)^2}{4}\right]Y^2 = 0.$$

Le premier membre de cette équation se décomposera en un produit de deux facteurs linéaires dont les coefficients seront fonctions rationnelles de ceux de l'équation de la conique, si

(5) $$B^2 + \frac{(C - A)^2}{4}$$

est carré parfait.

Dans ce cas, on pourra séparer les axes de la conique sans introduire d'irrationnelles; nous verrons quel parti on tire de ce résultat dans la recherche des lieux de sommets.

2. — Application.

Considérons les coniques représentées par l'équation générale étudiée au Chapitre IV,

$$(1) \qquad Xx^2 + 2Zxy + Yy^2 + \ldots = 0,$$

et proposons-nous de chercher dans quelles conditions les axes de ces coniques pourront être séparés.

La fonction des coefficients

$$4B^2 + (C - A)^2,$$

qui est ici

$$F(\alpha, \beta) = 4Z^2 + (X - Y)^2,$$

doit être un carré parfait.

Or $F(\alpha, \beta)$ est un polynôme du second degré qu'on peut rendre homogène par l'adjonction d'une variable γ.

Ce polynôme $F(\alpha, \beta, \gamma)$ sera carré parfait, si les trois dérivées sont proportionnelles.

Nous distinguerons deux cas :

(a) Soit

$$A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + 2B\beta\gamma + 2B'\alpha\gamma + 2B''\alpha\beta$$

le polynôme $F(\alpha, \beta)$ explicité.

Si $A \gtrless 0$, on doit avoir

$$B'^2 - AA'' = 0, \qquad B''^2 - AA' = 0, \qquad B'B'' - AB = 0.$$

(b) Si $A = 0$, ces conditions deviennent

$$B' = 0, \qquad B'' = 0, \qquad A'A'' - B^2 = 0.$$

Donc, si l'on s'est donné à volonté un côté $X = 0$ du triangle de référence, et la direction de l'un des deux autres, on pourra déterminer la position de ce second côté ainsi que le troisième, de telle sorte que les axes de la conique représentés par l'équation (1) puissent être séparés.

Exemple numérique. — Les axes de toutes les coniques représentés par l'équation

$$(1)\qquad \lambda x^2 + 6xy + (\lambda + 8)y^2 + 2\mu x + 2\nu y + \pi = 0$$

peuvent être séparés.

On a

$$(2)\qquad \begin{cases} F'_x = \lambda x + 3y + \mu = X, \\ F'_y = 3x + (\lambda + 8)y + \nu = Y. \end{cases}$$

L'équation quadratique des axes peut s'écrire

$$(3)\qquad (3X + 4Y)^2 - 25Y^2 = 0.$$

Les axes sont donc

$$(5)\qquad 3X + 9Y = 0,$$

$$(6)\qquad 3X - Y = 0.$$

Parmi les coniques S, *ayant pour équation*

$$2(a - b)(y + b)ux + v[bx^2 - 2(a - b)y(y - b)] + w[x^2 + 2(a - b)(y - b)] = 0,$$

dans laquelle a et b sont des constantes, u, v, w des paramètres variables, on considère les paraboles. Former l'équation de l'axe de l'une quelconque de ces paraboles.

[*École Normale*, 1894. (*Énoncé partiel.*)]

Ordonnons l'équation donnée, il vient

$$(1)\qquad (bv + w)x^2 + 2(a - b)uxy - 2(a - b)vy^2 + 2(a - b)bux + 2(a - b)(bv + w)y + \ldots = 0.$$

La caractéristique δ égalée à o donne, après avoir divisé par $(a-b)$, c'est-à-dire supposé $a \gtrless b$,

$$(2) \qquad 2v(bv+w)+(a-b)u^2=0;$$

L'équation de l'axe

$$(3) \qquad AF'_x+BF'_y=0$$

s'obtient donc en prenant les dérivées partielles du premier membre de l'équation, en formant (3) que l'on accompagnera de la condition (2).

On a successivement :

$$\frac{1}{2}F'_x=(bv+w)x+(a-b)uy-(a-b)bu,$$

$$\frac{1}{2}F'_y=(a-b)ux-2(a-b)vy+(a-b)(bv+w);$$

puis

$$(4) \quad (bv+w)[(bv+w)x-(a-b)u(y+b)] \\ +(a-b)^2u[ux-2vy+(bv+w)]=0.$$

La condition (2) résolue par rapport à $(bv+w)$ donne

$$bv+w=-\frac{(a-b)u^2}{2v},$$

qui, substituée dans (4), nous amène à

$$(5) \quad (a-b)^2u\left[\frac{u^3}{2v}\left(-\frac{ux}{2v}+y+b\right)-ux+2vy+\frac{(a-b)u^2}{2v}\right]=0;$$

c'est-à-dire

$$(6) \quad u^2[ux-2vy-2bv]+4v^2(ux+2vy)-2(a-b)u^2v=0.$$

L'équation de l'axe des paraboles (1) s'écrit

$$(7) \qquad (ux-2vy)(u^2+4v^2)-2au^2v=0.$$

Elle est indépendante de w, et ne contient en réalité qu'un seul paramètre variable, son coefficient angulaire $\frac{u}{2v}$; si donc on désigne celui-ci par μ, on pourra écrire l'équation de l'axe des paraboles sous la forme définitive

$$(8)\qquad (\mu^2+1)(y-\mu x)+\mu^2 a=0.$$

Nous avons étudié ces droites Chapitre II, page 44; mais en nous limitant à celui des axes qui n'est perpendiculaire à aucun des deux autres.

Il est intéressant de rechercher *quel est l'angle* de ces deux derniers : on a là une bonne application des propriétés de l'équation du troisième degré; on pourra également déterminer les systèmes de paraboles telles que les segments déterminés sur *certaines droites* soient égaux. L'équation de ces dernières droites met en évidence des propriétés curieuses s'interprétant toutes par les relations entre les coefficients et les racines d'équations algébriques simples.

II. — Sommets.

RAPPEL DE RÉSULTATS.

(*a*) Les sommets d'une conique sont les points de rencontre de la courbe et de ses axes de symétrie.

(*b*) En ces points, la tangente à la courbe est perpendiculaire à l'axe.

(*c*) On obtiendra le lieu des sommets d'une série de coniques dont l'équation renferme un paramètre variable, en éliminant ce paramètre entre l'équation des coniques et celle de leurs axes.

(*d*) Quand cette dernière équation sera décomposable en un produit de facteurs linéaires, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles du paramètre, on pourra séparer en deux parties le lieu des sommets.

(*e*) Ce fait se produit en particulier quand, dans l'équation des coniques, on a $B=0$ ou $A-C=0$.

(f) Si le faisceau de coniques renferme des cercles, ceux-ci font partie du lieu; on devra les chercher directement dans l'équation générale.

1. *Lieu des sommets des coniques représentées par l'équation*

$$x^2 - 2\lambda xy + y^2 - 2\lambda x = 0.$$

Le lieu des sommets de ces coniques s'obtiendra en éliminant le paramètre λ entre les équations

$$x^2 - 2\lambda xy + y^2 - 2\lambda x = 0,$$
$$\lambda[(x - \lambda y - \lambda)^2 - (y - \lambda x)^2] = 0.$$

La seconde se décompose en trois facteurs; nous aurons donc trois parties distinctes du lieu

$$(a) \qquad \begin{cases} x^2 - 2\lambda xy + y^2 - 2\lambda x = 0, \\ \lambda = 0; \end{cases}$$

$$(b) \qquad \begin{cases} x^2 - 2\lambda xy + y^2 - 2\lambda x = 0, \\ x + y - \lambda(x + y + 1) \ = 0; \end{cases}$$

$$(c) \qquad \begin{cases} x^2 - 2\lambda xy + y^2 - 2\lambda x = 0, \\ x - y + \lambda(x - y - 1) \ = 0. \end{cases}$$

Le système (a) donne

$$x^2 + y^2 = 0;$$

c'est le cercle de rayon nul, qui fait partie du faisceau.

Le système (b) peut s'écrire

$$x^2 + y^2 - 2(xy + x)\lambda = 0,$$
$$(x + y) - (x + y + 1)\lambda = 0;$$

l'éliminant est

$$(x^2 + y^2)(x + y + 1) - 2x(y + 1)(x + y) = 0,$$

ou

$$(x + y)(x - y)^2 - x^2 - 2xy + y^2 = 0.$$

Lieu du troisième degré ayant un point double à l'origine, où les tangentes sont

$$x^2 + 2xy - y^2 = 0,$$

droites rectangulaires dont les coefficients angulaires sont

$$m_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad m_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

La courbe a une branche parabolique dans la direction de la première bissectrice et une branche hyperbolique parallèle à la seconde bissectrice.

Elle peut être construite facilement en coupant par une droite passant au point double

$$y - \lambda x = 0;$$

on conclut

$$x = \frac{1 + 2\lambda - \lambda^2}{(1+\lambda)(1-\lambda)^2},$$

$$y = \frac{\lambda(1 + 2\lambda - \lambda^2)}{(1+\lambda)(1-\lambda)^2}.$$

La discussion de ces fonctions ne présente pas de difficultés.

On opérerait de même pour le lieu (c).

2. *Lieu des sommets des coniques dont l'équation est*

$$(1) \qquad x^2 + \lambda y^2 - 2\lambda x - 2y = 0.$$

L'équation du système des axes est

$$(2) \qquad (1-\lambda)(x-\lambda)(\lambda y - 1) = 0.$$

Le lieu des sommets se compose donc de trois parties :

$$(a) \qquad \begin{cases} x^2 + \lambda y^2 - 2\lambda x - 2y = 0, \\ 1 - \lambda = 0; \end{cases}$$

$$(b) \qquad \begin{cases} x^2 + \lambda y^2 - 2\lambda x - 2y = 0, \\ x - \lambda = 0; \end{cases}$$

$$(c) \qquad \begin{cases} x^2 + \lambda y^2 - 2\lambda x - 2y = 0, \\ \lambda y - 1 = 0. \end{cases}$$

(a) Si $\lambda = 1$, la conique, devient un cercle

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$$

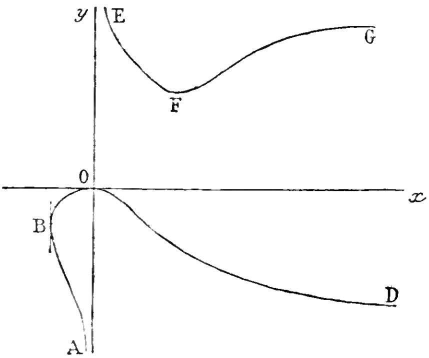
dont tous les points font partie du lieu des sommets.

(b) Cette partie du lieu a pour équation

$$xy^2 - x^2 - 2y = 0.$$

Cette courbe est asymptote à la droite $x = 0$; elle a une

Fig. 42.



branche parabolique dans la direction de l'axe des x et elle est tangente à l'origine à l'axe des x. Sa construction peut s'effectuer en résolvant par rapport à l'une des variables. D'ailleurs x ne peut varier que de -1 à $+\infty$; y ne peut varier que de $-\infty$ à 0 et de $+2$ à $+\infty$. On a la courbe représentée *fig.* 42.

3. *Lieu des sommets des hyperboles équilatères ayant même centre et un point commun.*

Prenons comme origine le centre fixe et, pour axe des x, la droite qui joint le centre au point commun à toutes les hyperboles, soit a l'abscisse de ce point.

L'équation générale des hyperboles équilatères ayant leur centre à l'origine est

$$(1)\qquad \lambda(x^2 - y^2) + 2\mu xy + \nu = 0.$$

Ces coniques devant passer au point A, on a

$$\lambda a^2 + \nu = 0;$$

l'équation générale devient

$$\lambda(x^2 - y^2) + 2\mu xy - \lambda a^2 = 0.$$

Nous pouvons diviser par λ, non nul, et écrire

$$(2)\qquad x^2 - y^2 + 2\theta xy - a^2 = 0.$$

L'hypothèse $\lambda = 0$ donnerait la conique particulière

$$xy = 0$$

qui satisfait analytiquement aux conditions imposées; son sommet est à l'origine : ce point fait donc partie du lieu.

Le lieu des sommets des coniques représentées par cette équation s'obtiendra en éliminant le paramètre θ entre cette équation et celle des bissectrices des asymptotes, qui sont les axes de la conique

$$(3)\qquad \begin{cases} x^2 - y^2 - a^2 + 2xy\,\theta = 0, \\ -2xy + (x^2 - y^2)\,\theta = 0. \end{cases}$$

Le lieu a pour équation

$$(x^2 - y^2 - a^2)(x^2 - y^2) + 4x^2y^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$$

ou

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

C'est une *lemniscate*.

4. *Par les points communs aux courbes*

$$(1) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,$$

$$(2) \qquad c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0,$$

on peut faire passer deux paraboles; trouver le lieu du sommet de ces paraboles quand le point P (α,β) *se meut sur une droite de coefficient angulaire* m *issue de l'origine.*

Examiner les cas suivants:

$$m = \frac{a^3}{b^3}, \qquad m = -\frac{a^3}{b^3}.$$

[*École Centrale, août* 1881. (*Énoncé partiel.*)]

L'équation générale des coniques passant aux points communs aux coniques (1) et (2) est

$$(3) \quad b^2x^2 + 2\lambda c^2xy + a^2y^2 + 2\lambda(b^2\beta x - a^2\alpha y) - a^2b^2 = 0.$$

Ce sera une parabole si l'on a

$$\lambda^2c^4 - a^2b^2 = 0.$$

Il y a donc deux valeurs de λ fournissant les paraboles

$$(4) \qquad (ay + bx)^2 + \frac{2ab}{c^2}(b^2\beta x - a^2\alpha y) - a^2b^2 = 0,$$

$$(5) \qquad (ay - bx)^2 - \frac{2ab}{c^2}(b^2\beta x - a^2\alpha y) - a^2b^2 = 0.$$

(a) Pour définir le sommet des paraboles (4) nous allons chercher l'équation de l'axe de ces courbes.

On peut mettre un diamètre quelconque en évidence en écrivant, dans la première,

$$(ay + bx + \mu)^2 + 2\left(\frac{ab^3\beta}{c^2} - b\mu\right)x$$
$$- 2\left(\frac{a^3b\alpha}{c^2} + a\mu\right)y - a^2b^2 - \mu^2 = 0.$$

Ce diamètre sera l'axe, s'il est perpendiculaire à la tangente correspondante, c'est-à-dire si l'on a

$$b^2\left(\frac{ab^2\beta}{c^2}-\mu\right)-a^2\left(\frac{a^2b\alpha}{c^2}+\mu\right)=0.$$

L'équation de l'axe des paraboles (4) est donc

$$(6)\qquad ay+bx+\frac{ab(b^3\beta-a^3\alpha)}{c^2(a^2+b^2)}=0.$$

Les équations (4) et (6) déterminent le sommet de la parabole.

Quand le point P se meut sur la droite donnée, ses coordonnées α, β satisfont à l'équation

$$(7)\qquad \beta-m\alpha=0.$$

On obtiendra donc le lieu des sommets des paraboles représentées par l'équation (4) en éliminant α et β entre les équations

$$(7)\qquad \beta-m\alpha=0,$$

$$(6)\qquad ay+bx+ab\,\frac{b^3\beta-a^3\alpha}{c^2(a^2+b^2)}=0,$$

$$(4)\quad (ay+bx)^2+\frac{2ab}{c^2}(b^2\beta x-a^2\alpha y)-a^2b^2=0.$$

On remplace β par $m\alpha$ dans les équations (6) et (4) et l'éliminant du premier degré donne

$$(8)\quad [(ay+bx)^2-a^2b^2](a^3-b^3m)$$
$$-2(a^2+b^2)(ay+bx)(a^2y-b^2mx)=0,$$

équation d'une conique ayant son centre à l'origine; le faisceau des directions asymptotiques s'écrit

$$(ay+bx)[(ay+bx)(a^3-b^3m)-2(a^2+b^2)(a^2y-b^2mx)]=0.$$

La conique est donc une hyperbole en général; c'est une hyperbole équilatère si l'on a

$$m = \frac{a^3}{b^3}.$$

L'équation (8) donne alors

$$(9) \qquad (ay + bx)(by - ax) = 0;$$

l'hyperbole se réduit à ses asymptotes.

La conique représentée par l'équation (8) est une parabole quand le faisceau asymptotique se compose d'une droite double; il faut pour cela

$$m = -\frac{a}{b};$$

la parabole correspondante est

$$(10) \qquad (ay + bx)^2 + a^2b^2 = 0,$$

deux droites parallèles imaginaires.

(*b*) L'équation de l'axe des paraboles (5) obtenue par la méthode que nous venons d'employer est

$$(11) \qquad ay - bx + ab\,\frac{b^3\beta + a^3\alpha}{c^2(a^2 + b^2)} = 0;$$

en opérant comme nous venons de le faire on arriverait à

$$(12) \quad [(ay - bx)^2 - a^2b^2](a^3 + b^3m) - 2(a^2 + b^2)(ay - bx)(a^2y - b^2mx) = 0,$$

équation du lieu des sommets des paraboles (5).

On a encore une hyperbole ayant son centre à l'origine.

Cette hyperbole est équilatère lorsque

$$m = \frac{-a^3}{b^3}$$

et la conique se réduit à ses asymptotes

$$ay - bx = 0, \qquad by + ax = 0.$$

La conique (12) devient une parabole lorsque

$$m = \frac{a}{b};$$

son équation est alors

$$(ay - bx)^2 + a^2b^2 = 0;$$

on a encore deux droites parallèles imaginaires.

III. — Distinction des sommets d'ellipses, d'hyperboles, de paraboles.

1. — Méthode à employer.

Dans l'équation d'un lieu de sommets, les équations qu'on emploie,

$$F(x, y) = 0,$$
$$B(X^2 - Y^2) + (C - A)XY = 0,$$

sont du second degré par rapport aux coordonnées x, y des points considérés.

Ces équations permettent d'exprimer les coordonnées des sommets en fonction des coefficients de $F(x, y)$ et, par conséquent, du paramètre variable qu'ils renferment.

Toutes les valeurs de ce paramètre qui donnent des ellipses donnent les coordonnées des sommets de ces courbes; il en est de même pour les hyperboles et les paraboles; il est à remarquer que ces derniers points sont en nombre fini.

Ceux d'entre eux qui sont à distance finie séparent les sommets d'ellipses des sommets d'hyperboles.

Une discussion analogue à celle que nous avons faite pour la distinction des centres devra donc être faite pour résoudre les questions de ce genre.

En général, les expressions des coordonnées, en fonction du paramètre variable sont compliquées d'irrationnelles; la solution de ces questions est donc laborieuse.

Mais ce problème devient simple chaque fois que les axes peuvent être séparés. Nous avons donné plus haut la marche à suivre pour former des équations de coniques remplissant ces conditions.

2. — Application.

Reprenons les équations du système (*b*) (p. 213, *fig.* 42)

$$x^2 + \lambda y^2 - 2\lambda x - 2y = 0,$$
$$x - \lambda = 0.$$

On conclut :

$$x = \lambda, \quad y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \lambda^3}}{\lambda}.$$

(*a*) Or, λ variant de -1 à 0, la conique est une *hyperbole*.

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ varie de } -1 \text{ à } 0, \\ y \text{ a deux valeurs négatives :} \\ \text{l'une devient nulle, l'autre infinie} \end{array}\right\} \text{branche ABO.}$$

(*b*) $\lambda = 0$ donne la parabole

$$x^2 - 2y = 0;$$

un sommet est en O, l'autre à l'infini, sur Oy.

(*c*) λ variant de 0 à $+\infty$, la conique est une ellipse; les sommets d'ellipse décrivent les branches DO, GFE.

(*d*) λ infini donne la parabole

$$y^2 - 2x = 0;$$

son sommet est en O, à distance finie, l'autre est à l'infini sur Ox.

Exercices proposés.

I. — Résoudre les questions suivantes concernant les axes dans les coniques :

1° Admission à l'École Centrale en 1886, 1re session (t. II, p. 52*) — 1893, 1re session, § 2 (t. II, p. 90*).

2° Admission à l'École Centrale en 1876, § 3 (t. II, p. 42*); — 1894, §§ 4 et 5 (t. II, p. 91*).

3° Admission à l'École Polytechnique en 1864, § 2 (t. II, p. 8*); — 1869, § 2 (t. II, p. 10*); — 1874 (t. II, p. 11*); — 1887, § 1 (t. II, p. 18*); — 1891, § 2 (t. II, p. 79*).

II. — Trouver les lieux des sommets des coniques variables définies dans les énoncés suivants :

1° Admission à l'École Centrale en 1866, 1re session (t. II, p. 36*); — 1869, 2e session, § 3 (t. II, p. 38*); — 1871, 2e session (t. II, p. 39*); — 1872, 1re session, § 1 (t. II, p. 39*); — 1885, 2e session (t. II, p. 51*); — 1889, 1re session (t. II, p. 55*).

2° Admission à l'École Polytechnique en 1849, Douai (t. II, p. 3*); — 1891, § 3 (t. II, p. 79*).

3° Concours général, Paris, en 1864 (t. II, p. 61*).

CHAPITRE X.

ENVELOPPES.

Rappel de résultats.

(a) Toute équation $f(x, y, \lambda) = 0$ qui renferme un paramètre variable représente un système de courbes; deux courbes du système correspondant à des valeurs infiniment voisines du paramètre variable sont dites elles-mêmes *infiniment voisines*.

(b) Les points communs à deux courbes du système, infiniment voisines, sont définis par l'intersection des courbes dont les équations sont

$$f(x, y, \lambda) = 0,$$
$$f'_\lambda(x, y, \lambda) = 0.$$

(c) On appelle *enveloppe* d'un système de courbes le lieu des points communs à chaque courbe du système avec la courbe infiniment voisine.

(d) L'équation de l'*enveloppe* d'un système donné $f(x, y, \lambda) = 0$ s'obtient en éliminant le paramètre λ entre les équations

$$f(x, y, \lambda) = 0,$$
$$f'_\lambda(x, y, \lambda) = 0.$$

(e) En chaque point commun à l'enveloppe et à une enveloppée, ces courbes sont tangentes.

(f) L'égalité à zéro de l'éliminant de λ entre les équations

$$f(x, y, \lambda) = 0,$$
$$f'_\lambda(x, y, \lambda) = 0$$

étant la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$f(x, y, \lambda) = 0$$

dans laquelle on considère λ comme variable, ait une racine double, on pourra écrire immédiatement l'équation de l'enveloppe du système chaque fois qu'on connaîtra cette condition.

EXEMPLE : Soit une équation de courbes

$$f(x, y, \lambda) = X\lambda^2 + Z\lambda + Y = 0,$$

X, Y, Z étant fonctions de x et de y.

$$4XY - Z^2 = 0$$

est l'équation de l'enveloppe; c'est une conique, si les fonctions X, Y, Z sont linéaires.

EXEMPLE : Soit une autre équation de courbes

$$f(x, y, \lambda) = \lambda^3 + X\lambda + Y = 0.$$

L'équation de l'enveloppe est

$$4X^3 + 27Y^2 = 0.$$

(g) Si l'équation d'un système de courbes renferme deux paramètres λ, μ, liés par une relation

$$\varphi(\lambda, \mu) = 0,$$

on obtiendra l'équation de l'enveloppe en éliminant λ, μ entre les trois équations

$$f(x, y, \lambda, \mu) = 0,$$
$$\varphi(\lambda, \mu) = 0,$$
$$\frac{f'_\lambda}{\varphi'_\lambda} = \frac{f'_\mu}{\varphi'_\mu}.$$

REMARQUE. — Chaque fois qu'une droite se déplace en roulant sur une conique, il existe une relation du second degré entre les coefficients de son équation, ainsi que nous l'avons démontré au Chap. V (§ II).

Cette relation ou *équation tangentielle* nous renseignera donc, à sa seule inspection, sur certains caractères de la conique enveloppée. A la rigueur, nous pourrions nous contenter de cette indication qui abrège le problème de moitié et permet de démontrer toutes les propriétés du lieu sans avoir recours à l'équation cartésienne.

Mais, dans ce qui va suivre, nous compléterons dans chaque exemple de ce genre les indications fournies par l'équation tangentielle, pour la recherche de l'équation cartésienne, basée sur la théorie des enveloppes.

1. *Enveloppe des droites telles que le produit de leurs distances à deux points fixes ait une valeur constante.*

Prenons comme axes de coordonnées la droite FF′ des points fixes et la perpendiculaire à cette droite en son milieu.

Soit

$$\mathrm{OF} = \mathrm{OF}' = c,$$

$$ux + vy + 1 = 0 \tag{1}$$

l'équation de la droite mobile.

La distance du point F à cette droite est

$$\frac{cu + 1}{(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}} = d. \tag{2}$$

Celle du point F′ à la même droite est

$$\frac{-cu + 1}{(u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}} = d'. \tag{3}$$

On a, par hypothèse,

$$dd' = p^2; \tag{4}$$

donc u, v doivent satisfaire à l'équation

$$\frac{1 - c^2 u^2}{u^2 + v^2} = p^2, \tag{5}$$

ou

$$p^2 (u^2 + v^2) + c^2 u^2 - 1 = 0;$$

c'est-à-dire

$$(p^2 + c^2)\, u^2 + p^2 v^2 - 1 = 0, \tag{6}$$

équation tangentielle d'une conique ayant son centre à l'origine.

Nous obtiendrons l'équation de l'enveloppe de la droite (1) en éliminant u, v, u'_v entre les équations

$$ux + vy + 1 = 0, \tag{1}$$

$$(p^2 + c^2)\,u^2 + p^2 v^2 - 1 = 0, \tag{6}$$

$$u'_v . x + y = 0, \tag{7}$$

$$(p^2 + c^2)\,u . u'_v + p^2 v = 0. \tag{8}$$

On obtient ainsi

$$p^2 x^2 + (p^2 + c^2)\,y^2 = 0, \tag{9}$$

droites imaginaires issues de O, et

$$\frac{x^2}{p^2 + c^2} + \frac{y^2}{p^2} - 1 = 0, \tag{10}$$

ellipse ayant F et F' comme foyers.

Les droites (9) sont les asymptotes de l'ellipse; ces droites ont un seul point réel : le centre de l'ellipse. L'origine est donc un point du lieu *isolé,* parce que les asymptotes de l'ellipse ne font pas partie de la série continue des tangentes.

2. *Enveloppe de la corde d'une conique vue du foyer de cette conique sous un angle droit.*

Rapportons la conique à son foyer et à l'axe correspondant; si

$$x - a = 0 \tag{1}$$

est l'équation de la directrice, celle de la conique est

$$x^2 + y^2 - \varepsilon^2 (x - a)^2 = 0, \tag{2}$$

c'est-à-dire

$$x^2 (1 - \varepsilon^2) + y^2 + 2\varepsilon^2 a x - \varepsilon^2 a^2 = 0. \tag{3}$$

Soit

$$ux + vy + 1 = 0 \tag{4}$$

l'équation d'une corde quelconque; celle du faisceau des droites joignant l'origine aux points de rencontre de la conique et de cette droite est

$$(5)\quad x^2(1-\varepsilon^2)+y^2-2\varepsilon^2 ax(ux+vy)-\varepsilon^2a^2(ux+vy)^2=0,$$

ou

$$(6)\quad (1-\varepsilon^2-2\varepsilon^2 au-\varepsilon^2a^2u^2)x^2+\ldots+y^2(1-\varepsilon^2a^2v^2)=0.$$

Ces droites seront rectangulaires, si l'on a entre les coefficients de leur équation la relation

$$[1-\varepsilon^2(1+au)^2]+1-\varepsilon^2a^2v^2=0,$$

c'est-à-dire si la droite $ux+vy+1=0$ est mobile suivant la loi

$$(7)\quad \varepsilon^2a^2(u^2+v^2)+2\varepsilon^2 au-2+\varepsilon^2=0,$$

équation tangentielle d'une conique ayant un foyer à l'origine, son centre sur Ox, etc.

L'équation cartésienne s'obtiendra en éliminant u, v, u' entre les équations

$$(4)\quad ux+vy+1=0,$$

$$(7)\quad \varepsilon^2a^2(u^2+v^2)+2\varepsilon^2 au+\varepsilon^2-2=0,$$

$$(8)\quad u'_v.x+y=0,$$

$$(9)\quad a(u.u'_v+v)+u'_v=0.$$

On conclut

$$ay.u-ax.v+y=0,$$

$$x.u+y.v+1=0,$$

$$\frac{u}{-ax-y^2}=\frac{v}{xy-ay}=\frac{1}{ay^2+ax^2}.$$

On a donc, en portant dans (7),

$$\varepsilon^2a^2[(ax+y^2)^2+y^2(x-a)^2]-2\varepsilon^2a^2(ax+y^2)(x^2+y^2)$$
$$-(2-\varepsilon^2)a^2(x^2+y^2)^2=0,$$

c'est-à-dire

$$x^2 + y^2 = 0,$$

$$\varepsilon^2 a^2 (y^2 + a^2) - 2\varepsilon^2 a^2 (ax + y^2) - (2 - \varepsilon^2)\, a^2 (x^2 + y^2) = 0.$$

La seconde équation peut s'écrire

$$-2y^2 - (2 - \varepsilon^2)\, x^2 - 2\varepsilon^2 . ax + \varepsilon^2 a^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$-2(x^2 + y^2) + \varepsilon^2 (x - a)^2 = 0$$

ou enfin

$$x^2 + y^2 - \frac{\varepsilon^2}{2}(x - a)^2 = 0.$$

La *conique-enveloppe* a donc, outre les propriétés reconnues sur l'équation tangentielle, même directrice que la conique donnée.

Quant aux droites isotropes, elles sont des cordes à la conique, perpendiculaires sur elles-mêmes au point de vue analytique; l'origine, leur seul point réel, fait partie de l'enveloppe.

Il est d'ailleurs à remarquer que, si l'on assujettit l'angle sous lequel on voit la corde à conserver une valeur constante, cette corde roule sur une courbe du quatrième ordre; cette courbe se décompose en deux : les droites isotropes et une conique réelle quand l'angle constant devient droit.

3. *Une conique et une droite fixes étant données, on projette chaque point de la droite sur la polaire de ce point : enveloppe de la projetante.*

Rapportons la conique à la normale et la tangente à l'un de ses sommets, on a pour équation

$$(1) \qquad y^2 - 2px - qx^2 = 0.$$

La polaire du point α, β étant

$$(2) \qquad \alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f''_z = 0,$$

la projetante du pôle sur cette droite est

$$(3)\qquad (y-\beta)f'_\alpha-(x-\alpha)f'_\beta=0.$$

On a de plus entre α, β la relation

$$(4)\qquad A\alpha+B\beta+C=0,$$

qui exprime que ce point se trouve sur la droite donnée.

On obtiendra l'enveloppe de la droite (3) en éliminant α, β, β'_α entre les équations

$$(3)\qquad (y-\beta)f'_\alpha-(x-\alpha)f'_\beta=0,$$

$$(4)\qquad A\alpha+B\beta+C=0,$$

et leurs dérivées par rapport à α

$$(5)\qquad [(y-\beta)f'_\alpha-(x-\alpha)f'_\beta]'_\alpha=0,$$

$$(6)\qquad A+B\beta'_\alpha=0.$$

Ces équations développées s'écrivent successivement, après simplification,

$$(3)\qquad \alpha\beta(q+1)-qy\alpha+(p-x)\beta-py=0,$$

$$(4)\qquad A\alpha+B\beta+C=0,$$

$$(5)\qquad \alpha\beta'_\alpha(q+1)+(q+1)\beta-qy+(p-x)\beta'_\alpha=0,$$

$$(6)\qquad A+B\beta'_\alpha=0.$$

Éliminant β'_α entre les deux dernières, il vient

$$(7)\qquad A[x-p-(q+1)\alpha]-B[qy-\beta(q+1)]=0,$$

c'est-à-dire

$$(8)\qquad A(q+1)\alpha-B(q+1)\beta-[A(x-p)-Bqy]=0.$$

Des équations (4) et (8) rendues homogènes, on tire les valeurs proportionnelles de α, β et de γ variable d'homogénéité;

on les substitue dans l'équation (3), également rendue homogène,

$$\frac{\alpha}{-\mathrm{B}\{[\mathrm{A}(x-p)-\mathrm{B}qy]-\mathrm{C}(q+1)\}}$$
$$=\frac{\beta}{\mathrm{A}\{[\mathrm{A}(x-p)-\mathrm{B}qy]+\mathrm{C}(q+1)\}}=\frac{\gamma}{-2\mathrm{AB}(q+1)}.$$

On a donc

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{r} \mathrm{AB}(q+1)\{[\mathrm{A}(x-p)-\mathrm{B}qy]^2-\mathrm{C}^2(q+1)^2\} \\ +2\mathrm{AB}^2(q+1)qy\{[\mathrm{A}(x-p)-\mathrm{B}qy]-\mathrm{C}(q+1)\} \\ -2\mathrm{A}^2\mathrm{B}(q+1)(x-p)\{[\mathrm{A}(x-p)-\mathrm{B}qy]+\mathrm{C}(q+1)\} \\ +4\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2(q+1)^2py \end{array}\right\}=0;$$

c'est-à-dire, en supprimant le facteur $\mathrm{AB}(q+1)$,

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{r} [\mathrm{A}(x-p)-\mathrm{B}qy]^2-\mathrm{C}^2(q+1)^2 \\ +2\mathrm{B}qy\{[\mathrm{A}(x-p)-\mathrm{B}qy]-\mathrm{C}(q+1)\} \\ -2\mathrm{A}(x-p)\{[\mathrm{A}(x-p)-\mathrm{B}qy]+\mathrm{C}(q+1)\} \\ +4\mathrm{AB}p(q+1)y \end{array}\right\}=0,$$

ou

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{r} [\mathrm{A}(x-p)-\mathrm{B}qy]^2+2[\mathrm{A}(x-p)-\mathrm{B}qy][\mathrm{B}qy-\mathrm{A}(x-p)] \\ -2\mathrm{C}(q+1)[\mathrm{B}qy+\mathrm{A}(x-p)]+4\mathrm{AB}p(q+1)y \\ -\mathrm{C}^2(q+1)^2 \end{array}\right\}=0;$$

enfin

$$(12)\quad \begin{array}{r}[\mathrm{A}(x-p)-\mathrm{B}qy-\mathrm{C}(q+1)]^2 \\ -4\mathrm{A}(q+1)[\mathrm{B}py-\mathrm{C}(x-p)]=0.\end{array}$$

L'enveloppe de la projetante du point mobile est donc une parabole.

4. *Enveloppe d'un segment de longueur fixe mobile dans un angle droit.*

Prenons comme axes de coordonnées les côtés de l'angle droit; soit $2d$ la longueur du segment.

L'équation de la droite mobile peut s'écrire

$$(1)\qquad \frac{x}{2d\cos\varphi}+\frac{y}{2d\sin\varphi}-1=0,$$

ou

$$(2)\qquad x\sin\varphi+y\cos\varphi-2d\sin\varphi\cos\varphi=0.$$

On obtiendra l'équation de l'enveloppe en éliminant le paramètre φ entre les équations

$$(2)\qquad x\sin\varphi+y\cos\varphi-2d\sin\varphi\cos\varphi=0,$$

$$(3)\qquad x\cos\varphi-y\sin\varphi-2d(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)=0,$$

$$(4)\qquad \cos^2\varphi+\sin^2\varphi-1=0.$$

On a

$$\frac{x}{\cos\varphi}+\frac{y}{\sin\varphi}-2d=0,$$

$$\frac{x\sin\varphi}{\cos^2\varphi}-\frac{y\cos\varphi}{\sin^2\varphi}=0;$$

on conclut

$$\frac{\cos^3\varphi}{x}=\frac{\sin^3\varphi}{y};$$

donc

$$\frac{\cos^2\varphi}{x^{\frac{2}{3}}}=\frac{\sin^2\varphi}{y^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}},$$

$$x\,\frac{\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}+y\,\frac{\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{3}}}=2d;$$

enfin

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=(2d)^{\frac{2}{3}},$$

équation de l'épicycloïde engendré par un point d'un cercle roulant dans un cercle de rayon quadruple.

REMARQUE. — L'équation (3) peut s'écrire

$$\cos\varphi(x - 2d\cos\varphi) - \sin\varphi(y - 2d\sin\varphi) = 0;$$

elle montre que le point du segment appartenant à l'enveloppe est situé sur la perpendiculaire au segment menée par le sommet opposé à l'origine du rectangle dont le segment est la diagonale.

Cette propriété est une conséquence de la théorie du centre instantané de rotation.

5. *L'équation de la trajectoire d'un mobile pesant lancé avec la vitesse initiale v_0 sous l'angle α est*

$$(1) \qquad y = x \operatorname{tang}\alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha};$$

trouver l'enveloppe de ces paraboles lorsque l'angle α varie, la vitesse initiale restant fixe.

L'équation donnée peut s'écrire

$$(2) \qquad \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2} \operatorname{tang}^2\alpha - x \operatorname{tang}\alpha + y + \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2} = 0;$$

le paramètre variable est $\operatorname{tang}\alpha$; l'équation de l'enveloppe s'écrit immédiatement

$$(3) \qquad y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2}.$$

C'est une parabole; on lui donne le nom de *courbe de sûreté;* les points situés en dehors de cette courbe ne peuvent être atteints par les projectiles, lancés du point O avec la vitesse initiale v_0, quel que soit l'angle α.

Le lieu des sommets des paraboles (1) obtenu en éliminant le paramètre α entre les équations

$$x = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha,$$

$$y = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\alpha,$$

est

$$x^2 + 4y^2 - \frac{2v_0^2}{g}y = 0.$$

C'est une ellipse ayant pour petit axe l'ordonnée du sommet de la parabole de sûreté. Le grand axe est double du petit.

Cette ellipse sépare les points situés dans la parabole de sûreté en deux catégories :

1° Les points à l'intérieur de l'ellipse peuvent être atteints pendant l'ascension du projectile lancé sous deux angles différents ;

2° Les points à l'extérieur de l'ellipse, mais à l'intérieur de la parabole, ne peuvent être atteints que pendant la chute.

Exercices proposés.

Résoudre les questions suivantes relatives aux enveloppes :

1° Admission à l'École Normale en 1892, § 5 (t. II, p. 83*).

2° Concours général, Paris, en 1893, §§ 3 et 4 (t. II, p. 97*) : — 1894 (t. II, p. 98*).

CHAPITRE XI.

POLE. POLAIRE.

Rappel de résultats.

(*a*) On appelle *polaire* d'un point P par rapport à une conique le lieu du conjugué harmonique de ce point par rapport au segment déterminé par la conique sur une sécante quelconque passant en P. P s'appelle le *pôle*.

(*b*) Soient α, β, γ les coordonnées homogènes du pôle P, $F(x,y) = 0$ l'équation d'une conique; la polaire du point P a pour équation

$$\alpha F'_x + \beta F'_y + \gamma F'_z = 0.$$

F'_x, F'_y, F'_z désignant les demi-dérivées de la fonction F, rendue homogène.

(*c*) Dans le cas seulement où F est une fonction du second degré on peut écrire identiquement

$$\alpha F'_x + \beta F'_y + \gamma F'_z = x F'_\alpha + y F'_\beta + z F'_\gamma.$$

Cette propriété algébrique est la base de toutes les propriétés réciproques du pôle et de la polaire.

(*d*) La polaire d'un point ne passe pas en général au centre de la conique; elle y passe dans deux cas particuliers :

1° Lorsque la conique est un système de droites;

2° Lorsque le pôle est rejeté à l'infini : la polaire devient alors le diamètre conjugué de la direction dans laquelle le point est transporté à l'infini.

(*e*) Quand le pôle vient sur la courbe, la polaire devient la tangente en ce point.

(*f*) Toute droite du plan

$$Ax + By + C = 0$$

a, par rapport à la conique dont l'équation est $F(x,y) = 0$, un pôle dont les coordonnées homogènes sont fournies par

$$\frac{F'_x}{A} = \frac{F'_y}{B} = \frac{F'_z}{C}.$$

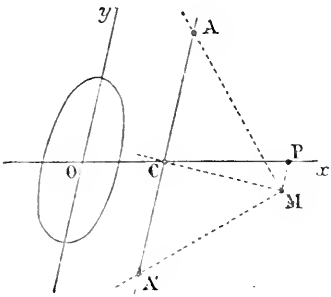
(g) Si la droite est mobile, ou la conique variable, on obtient l'équation du lieu du pôle mobile en éliminant le paramètre variable entre les deux équations précédentes.

I. — Polaires.

1. *Étant données une ellipse et une droite fixes situées dans le même plan, la droite ne rencontrant pas l'ellipse, on suppose qu'on prenne sur cette droite divers systèmes de points conjugués* A, A', *tels que la polaire du point* A *passe en* A' : 1° *démontrer qu'il existe dans le plan de la courbe deux points fixes tels que, de chacun d'eux, on voie le segment sous un angle droit;* 2° *déterminer le lieu géométrique de ces points quand la droite se déplace parallèlement à elle-même.*

(a) Prenons (*fig.* 43) comme axes de coordonnées le

Fig. 43.



système de diamètres conjugués de l'ellipse, dont l'un est parallèle à la droite donnée.

L'équation de cette droite est alors

$$(1) \qquad x - \lambda = 0,$$

celle de l'ellipse

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Soit A (λ, β) l'extrémité d'un des segments; la polaire de ce point a pour équation

$$(3) \qquad \frac{\lambda x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1 = 0.$$

Le point A', autre extrémité du segment, a pour coordonnées

$$x = \lambda,$$

$$\beta' = \frac{b^2}{\beta}\left(1 - \frac{\lambda^2}{a^2}\right).$$

On a donc entre les longueurs $CA = \beta$, $CA' = \beta'$ la relation

$$\beta\beta' = b^2\left(1 - \frac{\lambda^2}{a^2}\right);$$

le segment AA' se déplace en involution sur la droite fixe; il existe deux points M, M' situés sur la perpendiculaire à cette droite en C, de part et d'autre de cette droite et à une distance

$$\overline{CM}^2 = b^2\left(1 - \frac{\lambda^2}{a^2}\right),$$

qui sont les sommets d'angles droits dont les côtés passent par les extrémités telles que A et A' en tournant autour de M et M'.

(b) Posons

$$d = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \lambda^2};$$

cette quantité est toujours réelle d'après l'énoncé. Soit θ l'angle des axes.

Les coordonnées du point M sont

$$(4)\quad \begin{cases} x = \lambda + \dfrac{d}{\sin\theta} = \dfrac{\lambda\sin\theta + \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-\lambda^2}}{\sin\theta}, \\ y = \dfrac{-d}{\tang\theta} = \dfrac{-b\sqrt{a^2-\lambda^2}}{a\tang\theta}. \end{cases}$$

L'équation du lieu du point M s'obtiendra en éliminant λ entre les équations (4); en les rendant rationnelles, on fait disparaître les signes mis en évidence; le lieu obtenu est le lieu commun des points M et M'

$$(5)\qquad y^2a^2\tang^2\theta - b^2(a^2-\lambda^2) = 0,$$

$$(6)\qquad a^2(x-\lambda)^2\sin^2\theta - b^2(a^2-\lambda^2) = 0.$$

On a ainsi

$$(5)\qquad b^2\lambda^2 + a^2(y^2\tang^2\theta - b^2) = 0,$$

$$(6)\quad (a^2\sin^2\theta + b^2)\lambda^2 - 2a^2x\sin^2\theta.\lambda + a^2(x^2\sin^2\theta - b^2) = 0.$$

En employant l'éliminant

$$(AC' - CA')^2 - (AB' - BA')(BC' - CB') = 0,$$

qui devient ici

$$(AC' - CA')^2 + ACB'^2 = 0,$$

on obtient l'équation cherchée

$$(7)\quad [b^2(x^2\sin^2\theta - b^2) - (y^2\tang^2\theta - b^2)(a^2\sin^2\theta + b^2)]^2 \\ + 4a^2b^2(y^2\tang^2\theta - b^2)x^2\sin^2\theta = 0,$$

lieu du quatrième degré symétrique obliquement par rapport aux deux axes de coordonnées, etc.

Solution géométrique. — A chaque point A de la droite fixe correspond une position unique de la polaire de ce point qui donne dès lors un point A' unique; réciproquement, si l'on prend A' arbitrairement, il existe par le point A une position unique; les points A et A' se correspondent *homographiquement,* le déplacement du segment AA' est *homographique.*

De plus, la polaire de A définit un point A' dont la polaire passe en A; la relation homographique est symétrique, elle est *involutive.*

Dès lors, le déplacement du segment peut être obtenu par celui des intersections de la droite fixe avec les côtés d'un angle droit tournant autour d'un point fixe de deux manières différentes.

Le problème sera entièrement résolu, si l'on détermine géométriquement le *centre* et la *puissance* de l'involution.

Le point conjugué du centre est rejeté à l'infini; or la polaire du point à l'infini sur la droite est le diamètre conjugué de sa direction; le point C, rencontre de la droite fixe avec le diamètre conjugué de sa direction par rapport à l'ellipse fixe, est donc le centre de l'involution.

La puissance est le carré de la portion de droite perpendiculaire à CZ menée par C et limitée à la circonférence décrite sur un segment AA' comme diamètre.

2. *On donne une conique fixe* C *et une droite* D; *on projette chaque point* M *de* D *sur la polaire de ce point par rapport à la conique* C : *on demande le lieu de cette projection.*

Rapportons la conique C à un axe et à la tangente à un sommet; on a pour équation

$$y^2 - 2px - qx^2 = 0. \tag{1}$$

La polaire d'un point M (α, β) de la droite D,

$$Ax + By + C = 0, \tag{2}$$

a pour équation

$$\alpha(p + qx) - \beta y + px = 0,$$

qu'on peut écrire

$$(3) \qquad (\alpha q + p)x - \beta y + \alpha p = 0.$$

L'équation de la projetante du point M sur la droite (3) est

$$(4) \qquad \beta(x - \alpha) + (\alpha q + p)(y - \beta) = 0.$$

On obtiendra donc l'équation du lieu étudié en éliminant les paramètres α, β entre les équations

$$(3) \qquad \alpha(p + qx) - \beta y + px = 0,$$

$$(4) \qquad \beta(x - \alpha) + (\alpha q + p)(y - \beta) = 0,$$

$$(5) \qquad A\alpha + B\beta + C = 0.$$

De la première et de la troisième on tire les valeurs proportionnelles de α, β, γ, variables d'homogénéité, et l'on substitue dans la deuxième rendue homogène.

Il vient

$$\frac{\alpha}{Bpx + Cy} = \frac{\beta}{C(p + qx) - Apx} = \frac{\gamma}{-Ay - B(p + qx)},$$

$$(4) \qquad \alpha\beta(1 + q) - \alpha qy - \beta(x - p) - py = 0;$$

c'est-à-dire

$$\alpha\beta(q + 1) - [\alpha qy + \beta(x - p)]\gamma - py\gamma^2 = 0.$$

En rendant le premier membre homogène, on a donc

$$\left\{\begin{array}{l} (q + 1)(Bpx + Cy)[C(p + qx) - Apx] \\ \quad + [Ay + B(p + qx)]\{qy(Bpx + Cy) + (x - p)[(Cq - Ap)x + Cp]\} \\ \qquad\qquad - py[Ay + B(p + qx)]^2 \end{array}\right\} = 0,$$

lieu du troisième degré; on peut écrire le faisceau asymptotique

$$-py[Ay+Bqx]^2$$
$$+[Ay+Bqx][qy(Bpx+Cy)+x^2(Cq-Ap)];$$

c'est-à-dire

$$Ay+Bqx=0,$$
$$-(Ay+Bqx)py+qy(Bpx+Cy)+x^2(Cq-Ap)=0,$$

ou

$$(Cq-Ap)(x^2+y^2)=0.$$

La direction asymptotique réelle est donnée par

$$Ay+Bqx=0;$$

les deux autres sont celles des droites isotropes; le lieu est une strophoïde.

Ces résultats doivent être rapprochés de ceux que nous avons trouvés précédemment. Dans le Chapitre des Enveloppes, nous avons reconnu que la projetante du point M enveloppe une parabole; le lieu que nous étudions actuellement est donc la polaire du pôle de la droite fixe, par rapport à la *parabole-enveloppe* : c'est une strophoïde.

3. *Lieu du point de rencontre de la tangente à un cercle fixe, avec la polaire du point de contact par rapport à un autre cercle fixe.*

Prenons (*fig.* 44) comme axe des x la ligne des centres des cercles fixes et plaçons l'origine au centre du second cercle.

Soient R le rayon de ce cercle, a l'abscisse du centre du second cercle, r son rayon.

Les équations des cercles de l'énoncé sont

$$(1)\qquad x^2+y^2-R^2=0,$$
$$(2)\qquad x^2+y^2-2ax+a^2-r^2=0.$$

L'équation d'une tangente quelconque au cercle (2) est

$$(3) \qquad (x-a)\cos\varphi + y\sin\varphi - r = 0.$$

Les coordonnées du point de contact de cette tangente sont

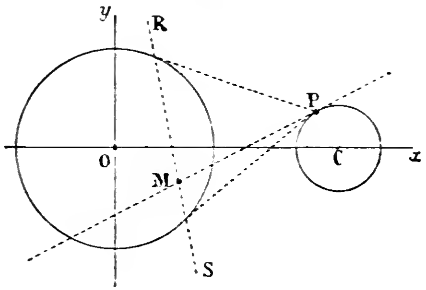
$$\alpha = a + r\cos\varphi,$$
$$\beta = r\sin\varphi.$$

L'équation de la polaire de ce point par rapport au cercle (1) est

$$(4) \qquad (a + r\cos\varphi)\,x + r\sin\varphi.y - R^2 = 0.$$

L'équation du lieu du point M s'obtiendra en éliminant

Fig. 44.



l'angle φ entre les équations

$$(3) \qquad (x-a)\cos\varphi + y\sin\varphi - r = 0,$$
$$(4) \qquad r\,x\cos\varphi + ry\sin\varphi + ax - R^2 = 0.$$

On a

$$\frac{\cos\varphi}{y(ax-R^2)+r^2y} = \frac{\sin\varphi}{-r^2x-(x-a)(ax-R^2)}$$
$$= \frac{1}{ry(x-a)-rxy},$$

$$y^2(ax+r^2-R^2)^2 + [r^2x+(x-a)(ax-R^2)]^2 - a^2r^2y^2 = 0,$$

équation qu'on peut résoudre par rapport à y et écrire

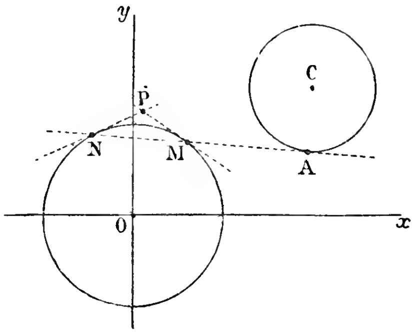
$$y^2 = \frac{[r^2x + (x-a)(ax-R^2)]^2}{a^2r^2 - (ax + r^2 - R^2)^2}.$$

II. — Lieux de poles.

1. *Lieu du pôle d'une droite roulant sur un cercle fixe par rapport à une autre circonférence fixe.*

Soit C (a, b) le centre du cercle sur lequel roule la droite

Fig. 45.



mobile (*fig.* 45); l'équation de cette droite est

(1) $$(x-a)\cos\varphi + (y-b)\sin\varphi - R = 0.$$

Son pôle par rapport au cercle

(2) $$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

est déterminé par ses coordonnées α, β satisfaisant aux conditions

(3) $$\frac{\cos\varphi}{\alpha} = \frac{\sin\varphi}{\beta} = \frac{a\cos\varphi + b\sin\varphi + R}{r^2}.$$

On obtiendra l'équation du lieu de ce point en éliminant l'angle φ entre les trois équations

$$(r^2 - a\alpha)\cos\varphi - b\alpha\sin\varphi - R\alpha = 0,$$
$$-a\beta.\cos\varphi + (r^2 - b\beta)\sin\varphi - R\beta = 0,$$
$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 1 = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{\cos\varphi}{R\alpha} = \frac{\sin\varphi}{R\beta} = \frac{1}{(r^2 - a\alpha - b\beta)}.$$

On a donc

$$R^2(\alpha^2 + \beta^2) - (a\alpha + b\beta - r^2)^2 = 0,$$

équation d'une conique ayant un foyer à l'origine et pour directrice correspondante la droite

$$a\alpha + b\beta - r^2 = 0,$$

polaire du point C par rapport au cercle

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

L'excentricité ε de cette conique est donnée par

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 + b^2}{R^2};$$

sa nature est donc variable suivant la position du point O par rapport au cercle C.

Si le point O est à l'intérieur du cercle

$$a^2 + b^2 < R^2,$$

la conique est une ellipse.

Si le point O est sur le cercle,

$$a^2 + b^2 = R^2, \qquad \varepsilon^2 = 1,$$

la conique est une parabole.

Enfin, si le point O est extérieur au cercle C, la conique est une hyperbole. Ces résultats s'obtiennent facilement par des considérations purement géométriques.

2. *On donne une droite* D *dont l'équation par rapport à deux axes rectangulaires* Ox, Oy *est*

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1=0,$$

et l'on considère les différentes coniques qui, ayant pour axes Ox, Oy, *sont normales à la droite* D.

Chacune d'elles rencontre cette droite en deux points. En ces points, on mène les tangentes à la conique. Trouver l'équation du lieu du point de rencontre de ces tangentes.

[*École Polytechnique,* 1878. (*Énoncé partiel.*)]

(a) L'équation générale des coniques ayant Ox, Oy comme axes est

$$Ax^2+Cy^2-1=0. \tag{1}$$

Nous allons d'abord établir entre A, C, p, q la relation nécessaire et suffisante pour que la conique (1) soit normale à la droite

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}-1=0. \tag{2}$$

Il faut pour cela que A et C soient tels qu'une normale à la conique (1), dont le pied a pour coordonnées λ, μ,

$$\frac{y-\mu}{C\mu}-\frac{x-\lambda}{A\lambda}=0, \tag{3}$$

coïncide avec la droite (2); on doit donc avoir

$$A\lambda^2+C\mu^2-1=0, \tag{4}$$

$$pC\mu+qA\lambda=0, \tag{5}$$

$$(A-C)\mu-Aq=0. \tag{6}$$

Si l'on élimine λ et μ entre ces équations, on obtient

$$AC(Cp^2 + Aq^2) - (A - C)^2 = 0. \tag{7}$$

Les coniques de l'énoncé sont donc représentées par l'équation (1) accompagnée de la condition (7).

(*b*) Un point (α, β) du lieu cherché est le pôle de la droite fixe D par rapport aux coniques variables de l'énoncé.

On a donc

$$\frac{f'_\alpha}{\frac{1}{p}} = \frac{f'_\beta}{\frac{1}{q}} = \frac{f'_\gamma}{-1}, \tag{8}$$

c'est-à-dire

$$\frac{A\alpha}{\frac{1}{p}} = \frac{C\beta}{\frac{1}{q}} = 1. \tag{9, 10}$$

On obtiendra donc l'équation du lieu du point (α, β) en éliminant A, C entre les équations (7), (9), (10). Cette élimination très simple donne

$$(q\beta - p\alpha)^2 - (p^3\alpha + q^3\beta) = 0, \tag{11}$$

équation d'une parabole ayant pour diamètre la droite

$$q\beta - p\alpha = 0,$$

perpendiculaire à D, et pour tangente correspondante la droite

$$p^3\alpha + q^3\beta = 0.$$

On reconnaît facilement que la parabole (11) passe aux points

$$\alpha = 0, \quad \beta = q; \qquad \beta = 0, \quad \alpha = p,$$

rencontres de la droite D avec les axes de coordonnées.

3. *On donne une ellipse et un point* P *sur son grand axe. Par le point* P *on mène une droite* PZ *quelconque*

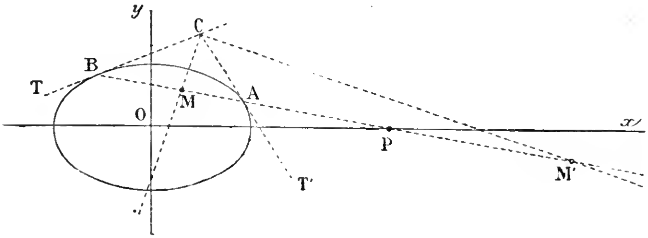
rencontrant l'ellipse aux points A, B; *on mène les tangentes en* A *et* B *à l'ellipse et l'on demande le lieu des points de rencontre de la sécante* PZ *avec les bissectrices* CM, CM′ *des tangentes* CA, CB.

Soient (*fig.* 46)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \tag{1}$$

l'équation de l'ellipse;

Fig. 46.



γ l'abscisse du point P;
α, β les coordonnées du point C;
λ, μ les coefficients angulaires des tangentes issues de ce point.

Les bissectrices de ces tangentes ont pour équation

$$\frac{[y-\beta-\lambda(x-\alpha)]^2}{1+\lambda^2}-\frac{[y-\beta-\mu(x-\alpha)]^2}{1+\mu^2}=0. \tag{2}$$

λ, μ satisfont à l'équation

$$(\beta-m\alpha)^2-a^2m^2-b^2=0, \tag{3}$$

équation aux coefficients angulaires des tangentes à l'ellipse, issues du point (α, β); c'est-à-dire

$$(\alpha^2-a^2)m^2-2\alpha\beta m+\beta^2-b^2=0. \tag{3 bis}$$

Or l'équation (2) peut s'écrire

$$(\lambda+\mu)[(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2]-2(1-\lambda\mu)(x-\alpha)(y-\beta)=0; \tag{4}$$

on a donc pour équation des bissectrices

$$(5)\quad \alpha\beta[(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2]-(\alpha^2-\beta^2-c^2)(x-\alpha)(y-\beta)=0.$$

Les points M, M′ dont on cherche le lieu sont à l'intersection des bissectrices (5) et de la droite

$$(6)\qquad \frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1=0,$$

polaire du point C; α satisfait d'ailleurs à l'équation

$$(7)\qquad \alpha\gamma-a^2=0,$$

exprimant que la droite (6) passe au point P.

On est conduit à éliminer α, β entre les équations

$$(5)\quad \alpha\beta[(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2]-(\alpha^2-\beta^2-c^2)(x-\alpha)(y-\beta)=0,$$

$$(6)\qquad \frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1=0,$$

$$(7)\qquad \alpha\gamma-a^2=0.$$

On conclut l'équation du lieu

$$(8)\quad a^2b^2(\gamma-x)y\left\{y^2(\gamma x-a^2)^2-[\gamma y^2-b^2(\gamma-x)]^2\right\}$$
$$-[(a^4-c^2\gamma^2)y^2-b^4(\gamma-x)^2]\times y(\gamma x-a^2)[\gamma y^2-b^2(\gamma-x)]=0.$$

Ce lieu se décompose en deux :

1° L'axe des x, solution provenant du cas où la sécante variable passe à l'origine : C est rejeté à l'infini; un point quelconque de Ox fait partie du lieu;

2° Un lieu du cinquième degré, symétrique par rapport à l'axe des x : l'axe des y est direction asymptotique simple; l'axe des x, direction asymptotique double, etc.; ce lieu passe aux points de contact des tangentes à l'ellipse menées par P; il est tangent à la parallèle à Oy menée par P, etc.

Exercices proposés.

I. — Résoudre les questions suivantes :

1° Admission à l'École Normale en 1858 (t. II, p. 22*); — 1861 (t. II, p. 24*); — 1889, § 2 (t. II, p. 33*); — 1894, § 1 (t. II, p. 84*).

2° Admission à l'École Polytechnique en 1886 (t. II, p. 17*).

II. — Trouver les lieux de pôles définis dans les sujets de Concours d'admission donnés :

1° A l'École Centrale en 1870, 2e session (t. II, p. 39*); — 1884, 1re session, § 3 (t. II, p. 49*).

2° A l'École Normale en 1877, § 3 (t. II, p. 28*).

3° A l'École Polytechnique en 1863 (t. II, p. 7*); — 1867 (t. II, p. 9*); — 1878 (t. II, p. 13*).

CHAPITRE XII.

FOYERS.

Rappel de résultats.

Définition. — Les foyers, dans les courbes du second ordre, sont des points tels que la distance d'un point quelconque de la courbe à l'un d'eux est une fonction rationnelle et linéaire des coordonnées du point.

La droite dont on obtient l'équation en égalant à zéro cette fonction linéaire et rationnelle s'appelle la *directrice* correspondant au foyer considéré. Elle est la polaire de ce point par rapport à la conique.

En étudiant la forme de l'équation focale des coniques, on reconnaît que cette équation est analogue à celle des coniques bitangentes à un cercle à ses rencontres avec une droite de son plan.

Le cercle a son centre au foyer et un rayon nul; la droite des contacts est la directrice. On voit ainsi que du foyer partent à la conique deux tangentes imaginaires dont les coefficients angulaires sont $+i$ et $-i$.

En partant de cette remarque, Plücker a donné dans le *Journal de Crelle* la définition suivante des foyers : ce sont les points par lesquels on peut mener à la conique des tangentes isotropes. Cette forme de la définition est souvent employée avec avantage dans les applications. On l'étend aux courbes de degré quelconque.

(*a*) Un foyer ayant pour coordonnées α, β, on peut mettre l'équation de la conique sous la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\varepsilon^2(x\cos\varphi+y\sin\varphi-p)^2=0;$$

$x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0$ est l'équation de la directrice correspondant au foyer mis en évidence.

ε s'appelle l'*excentricité;*

Si $\varepsilon>1$, la conique est une *hyperbole;*

Si $\varepsilon < 1$, la conique est une *ellipse;*

Si $\varepsilon = 1$, la conique est une *parabole.*

(*b*) Soit $f(u, v) = 0$ l'équation tangentielle d'une conique; ses foyers sont à l'intersection des hyperboles équilatères, concentriques à la conique

$$f\alpha\beta - d\beta - e\alpha + b = 0,$$

$$f(\alpha^2 + \beta^2) - 2d\alpha + 2e\beta + a - c = 0,$$

résultat obtenu au Chap. V (§ II).

(*c*) Si $\varphi(x, y) = 0$ est l'équation cartésienne d'une conique, ses foyers sont à l'intersection des coniques

$$4B\varphi(\alpha, \beta) - \varphi'_\alpha \varphi'_\beta = 0,$$
$$4(A - C)\varphi(\alpha, \beta) - \varphi'^2_\alpha + \varphi'^2_\beta = 0;$$

φ'_α, φ'_β sont les dérivées partielles de la fonction φ. La seconde équation peut s'écrire, en tenant compte de la première,

$$B(\varphi'^2_\alpha - \varphi'^2_\beta) + (C - A)\varphi'_\alpha \varphi'_\beta = 0,$$

ce qui montre que les foyers sont sur les axes.

(*d*) On obtient l'équation du lieu des foyers de coniques dont l'équation renferme un paramètre variable, en éliminant ce paramètre entre l'équation du système des axes

$$B(\varphi'^2_\alpha - \varphi'^2_\beta) + (C - A)\varphi'_\alpha . \varphi'_\beta = 0,$$

et celle de la conique

$$4B\varphi(\alpha, \beta) - \varphi'_\alpha \varphi'_\beta = 0.$$

(*e*) Si l'équation des axes peut se décomposer en un produit de facteurs linéaires dont les coefficients soient des fonctions rationnelles du paramètre variable, on pourra décomposer d'une manière correspondante le lieu des foyers.

(*f*) Si l'on a formé l'équation tangentielle des coniques que l'on étudie, on pourra trouver l'équation du lieu des foyers en éliminant le paramètre variable entre les équations (*b*).

(*g*) On peut encore opérer ainsi dans la recherche des lieux de foyers :

On écrit l'équation générale des coniques du plan en mettant un foyer en évidence,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - (\lambda x + \mu y + \nu)^2 = 0,$$

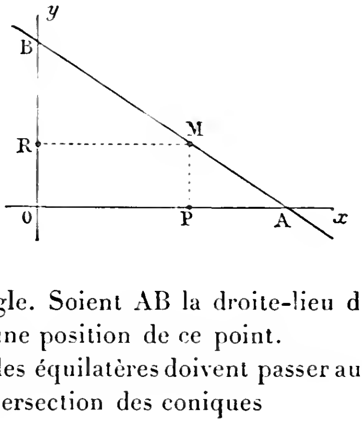
et l'on exprime que les coefficients λ, μ, ν satisfont aux conditions imposées. En éliminant ces paramètres entre les quatre équations ainsi formées, on obtient la relation qui doit exister entre α, β, pour que ce point soit foyer d'une des coniques du système; c'est l'équation du lieu des foyers.

(*Voir* Ex. 8.)

1. *Lieu des foyers des hyperboles équilatères circonscrites à un rectangle variable dont un sommet se meut en ligne droite et dont les côtés opposés à ce sommet conservent une position fixe.*

Prenons (*fig.* 47) comme axes de coordonnées les côtés

Fig. 47.



fixes du rectangle. Soient AB la droite-lieu du sommet mobile, M (α, β) une position de ce point.

Les hyperboles équilatères doivent passer aux quatre points O, P, M, R, intersection des coniques

(1) $$y(y-\beta)=0, \qquad [\text{OP, RM}]$$

(2) $$x(x-\alpha)=0; \qquad [\text{OR, MP}]$$

leur équation est de la forme

(3) $$x(x-\alpha)+\lambda y(y-\beta)=0,$$

avec la condition

$$1+\lambda=0.$$

Elle est donc finalement

$$(4)\qquad x^2 - y^2 - \alpha x + \beta y = 0,$$

α, β étant liés par l'équation de condition

$$(5)\qquad \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} - 1 = 0.$$

Les axes de ces coniques peuvent être séparés; ils ont pour équations

$$(6)\qquad 2x - \alpha = 0,$$

$$(7)\qquad 2y - \beta = 0.$$

On obtiendra le lieu des foyers situés sur la première de ces droites en éliminant α, β entre les équations

$$(5)\qquad \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} - 1 = 0,$$

$$(6)\qquad 2x - \alpha = 0,$$

$$(8)\qquad 8(x^2 - y^2 - \alpha x + \beta y) - (2x - \alpha)^2 + (2y - \beta)^2 = 0.$$

On a ainsi

$$\alpha = 2x,$$

$$\beta = b\left(1 - \frac{2x}{a}\right),$$

$$(9)\qquad 8\left[x^2 - y^2 - 2x^2 + b\left(1 - \frac{2x}{a}\right)y\right] + \left[2y - b\left(1 - \frac{2x}{a}\right)\right]^2 = 0;$$

c'est-à-dire

$$2\left(x^2 + 2\frac{b}{a}xy + y^2 - by\right) - \left(y + \frac{b}{a}x - \frac{b}{2}\right)^2 = 0,$$

ou

$$(10)\qquad \left(2 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2 + 2\frac{b}{a}xy + y^2 + \frac{b^2}{a}x - by - \frac{b^2}{4} = 0.$$

La nature de la conique représentée par cette équation est variable avec la position de la droite AB; c'est une parabole si

$$\delta = (a + b)(a - b) = 0,$$

c'est-à-dire si AB est parallèle à l'une des bissectrices, etc.

Le lieu des seconds foyers s'obtient de la même façon.

2. *Lieu des rencontres des axes des paraboles ayant un sommet donné et passant par un point donné avec le cercle passant au foyer et ayant son centre au sommet de la parabole.*

Plaçons l'origine au sommet donné et prenons comme axe des x la droite joignant ce sommet au point fixe donné.

L'équation générale des paraboles ayant un sommet à l'origine est

$$(y - \lambda x)^2 + \mu(x + \lambda y) = 0. \tag{1}$$

Ces coniques passent au point donné $y = 0$, $x = a$ si l'on a

$$\lambda^2 a^2 + \mu a = 0; \tag{2}$$

on conclut

$$\mu = -\lambda^2 a,$$

et l'équation des paraboles de l'énoncé est

$$(y - \lambda x)^2 - \lambda^2 a(x + \lambda y) = 0. \tag{3}$$

L'axe de l'une de ces coniques a pour équation

$$y - \lambda x = 0. \tag{4}$$

Le cercle de l'énoncé a pour rayon le demi-paramètre de la courbe, et son centre est au point O. Pour obtenir le paramètre, il suffit d'écrire l'équation de la parabole en mettant les distances en évidence

$$\frac{(y - \lambda x)^2}{1 + \lambda^2} - \frac{\lambda^2 a}{(1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{(x + \lambda y)}{(1 + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}} = 0. \tag{5}$$

On a

$$(6)\qquad 2p = \frac{\lambda^2 a}{(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Le cercle a donc pour équation

$$(7)\qquad x^2 + y^2 - \frac{\lambda^4 a^2}{16(1+\lambda^2)} = 0.$$

L'équation du lieu obtenu en éliminant λ entre les équations (4) et (7) est finalement

$$(8)\qquad 16(x^2+y^2)^2 x^2 - a^2 y^4 = 0;$$

elle se décompose en deux

$$(9)\qquad 4x(x^2+y^2) - ay^2 = 0,$$

$$(10)\qquad 4x(x^2+y^2) + ay^2 = 0.$$

3. *Lieu des foyers des coniques inscrites dans un parallélogramme.*

Prenons comme axes de coordonnées les diagonales du parallélogramme; soient a, b leurs demi-longueurs.

Ces diagonales forment avec la droite de l'infini un triangle polaire conjugué par rapport à toutes les coniques du système.

L'équation de celles-ci est donc de la forme

$$(1)\qquad \frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\mu} - 1 = 0;$$

la conique représentée par cette équation sera tangente au côté

$$(2)\qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$

du parallélogramme, si le faisceau des droites, joignant l'origine aux points communs de (1) et de (2), a un rayon double.

L'équation de ce faisceau est

$$(3)\qquad \frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\mu}-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=0;$$

on doit donc avoir

$$(4)\qquad \frac{\lambda}{a^2}+\frac{\mu}{b^2}-1=0.$$

Cette équation de condition est indépendante des signes de a et b dans l'équation (2); il suffit donc d'exprimer le contact avec l'un des côtés du parallélogramme, pour que cette condition réalisée entraîne le contact des trois autres côtés.

L'équation des coniques du système est donc

$$(3\ bis)\qquad \frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\mu}-1=0,$$

avec la condition

$$(4\ bis)\qquad \frac{\lambda}{a^2}+\frac{\mu}{b^2}-1=0.$$

L'équation tangentielle des coniques (3 *bis*) est

$$(5)\qquad \lambda u^2+\mu v^2-1=0.$$

Si nous formons l'équation homogène entre u, v qui donne les coefficients angulaires des tangentes de la forme

$$(6)\qquad ux+vy+1=0,$$

menées par le point (α, β), nous trouvons

$$(7)\qquad \lambda u^2+\mu v^2-(u\alpha+v\beta)^2=0,$$

ou

$$(7\ bis)\qquad (\lambda-\alpha^2)u^2-2\alpha\beta uv+(\mu-\beta^2)v^2=0;$$

cette équation se réduira à

$$(8)\qquad u^2-2uv\cos\theta+v^2=0,$$

si le point (α, β) est foyer de la conique (5); donc on doit avoir

$$(9) \qquad \frac{\lambda - \alpha^2}{1} = \frac{\alpha\beta}{\cos\theta} = \frac{\mu - \beta^2}{1}.$$

On obtiendra l'équation du lieu cherché en éliminant λ, μ entre les équations (9) et l'équation (4). Il vient

$$\lambda = \frac{\alpha(\alpha\cos\theta + \beta)}{\cos\theta},$$

$$\mu = \frac{\beta(\beta\cos\theta + \alpha)}{\cos\theta};$$

donc

$$(10) \qquad \frac{\alpha(\alpha\cos\theta + \beta)}{a^2} + \frac{\beta(\beta\cos\theta + \alpha)}{b^2} - \cos\theta = 0.$$

Ce lieu est une conique.

4. *Lieu des projections du foyer de la parabole sur ses normales.*

Soit

$$(1) \qquad y^2 - 2px = 0$$

l'équation de la parabole; (α, β) étant un point de la courbe, on a

$$(2) \qquad \beta^2 - 2p\alpha = 0,$$

et la normale en ce point a pour équation

$$(3) \qquad \beta x + py - \beta(p + \alpha) = 0.$$

La projetante du foyer $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ est

$$(4) \qquad px - \beta y - \frac{p^2}{2} = 0.$$

L'équation du lieu étudié s'obtiendra en éliminant α, β entre les équations (2), (3) et (4).

On obtient facilement

$$\beta = \frac{p\left(x - \frac{p}{2}\right)}{y},$$

$$\alpha = \frac{2(x^2 + y^2) - 3px + p^2}{2x - p}.$$

Une substitution donne dans (2)

$$(5)\qquad p\left(x - \frac{p}{2}\right)^3 - y^2[2(x^2 + y^2) - 3px + p^2] = 0.$$

Transportons les axes parallèlement à eux-mêmes et plaçons l'origine au foyer; il vient comme nouvelle équation

$$(6)\qquad (x^2 + y^2)\left(y^2 - \frac{p}{2}x\right) = 0.$$

Le lieu se décompose donc en deux parties : les droites isotropes et une parabole.

Il est facile de se rendre compte de la présence des droites isotropes dans ce lieu géométrique : du foyer partent à la parabole deux normales isotropes (résultat déjà obtenu pour l'ellipse et qu'on vérifie facilement au moyen de l'équation aux coefficients angulaires des normales issues du foyer); les projetantes du foyer sont ces droites elles-mêmes; tous leurs points font partie du lieu.

5. *Lieu des foyers des paraboles tangentes à une droite donnée en un point fixe* A *et à une seconde droite donnée en un point variable* B.

Soient OA, OB les droites données; prenons OA comme axe des x, et comme axe des y la perpendiculaire à cette droite menée par le point O.

L'équation générale des paraboles du plan est

$$(1)\qquad (y - \lambda x)^2 + 2\mu x + 2\nu y + \theta = 0.$$

Elles sont tangentes à Ox au point A, si l'équation aux abscisses des points de rencontre de cette droite avec Ox a ses racines égales à a.

Cette équation est

$$\lambda^2 x^2 + 2\mu x + \theta = 0; \tag{2}$$

on a donc

$$\frac{-\mu}{\lambda^2} = a, \tag{3}$$

$$\frac{\theta}{\lambda^2} = a^2.$$

L'équation (1) devient

$$(y - \lambda x)^2 - 2\lambda^2 ax + 2\nu y + \lambda^2 a^2 = 0 \tag{4}$$

Soit

$$y - mx = 0 \tag{5}$$

l'équation de la droite OB, elle doit être tangente à la parabole; l'équation

$$x^2(m - \lambda)^2 - 2(\lambda^2 a - \nu m)x + \lambda^2 a^2 = 0 \tag{6}$$

doit donc avoir ses racines égales; c'est-à-dire qu'on a

$$(\lambda^2 a - \nu m)^2 - \lambda^2 a^2 (m - \lambda)^2 = 0. \tag{7}$$

Cette condition se décompose en

$$\lambda^2 a - \nu m + \lambda a(m - \lambda) = 0, \tag{8}$$

$$\lambda^2 a - \nu m - \lambda a(m - \lambda) = 0; \tag{9}$$

c'est-à-dire

$$m(\lambda a - \nu) = 0, \tag{8 bis}$$

$$2\lambda^2 a - m(\lambda a + \nu) = 0. \tag{9 bis}$$

(a) La condition (8) donne $\nu = \lambda a$ ou, en portant dans l'équation (4),

$$(y - \lambda x)^2 - 2\lambda^2 ax + 2\lambda a y + \lambda^2 a^2 = 0; \tag{10}$$

c'est-à-dire

(10 *bis*) $$(y-\lambda x)^2+2(y-\lambda x)\lambda a+\lambda^2 a^2=0,$$

ou enfin

(11) $$[y-\lambda(x-a)]^2=0,$$

parabole singulière formée d'une double droite passant en A.

(*b*) La condition (9) donne

$$\nu=\frac{2\lambda^2 a}{m}-\lambda a=\lambda a\left(\frac{2\lambda}{m}-1\right).$$

L'équation des paraboles devient donc

(12) $$(y-\lambda x)^2-2\lambda^2 ax+2\lambda a\left(\frac{2\lambda}{m}-1\right)y+\lambda^2 a^2=0.$$

On peut l'écrire, en divisant par λ^2 et appelant μ le nouveau paramètre,

(13) $$(\mu y-x)^2-2ax+2a\left(\frac{2}{m}-\mu\right)y+a^2=0.$$

L'application de la méthode déjà employée donne pour équation du lieu des foyers

(14) $$x^2+y^2-ax+\frac{a}{m}y=0.$$

Ce lieu est donc une circonférence passant en A et tangente en O à la droite OB.

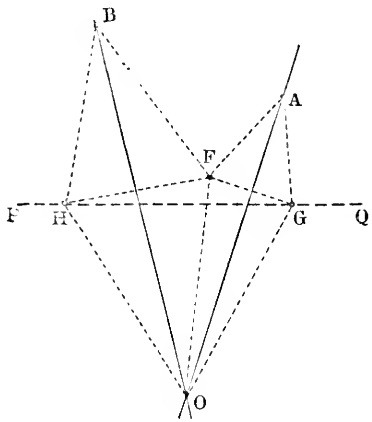
Solution géométrique. — Soit (*fig.* 48) F le foyer d'une des paraboles considérées; je dis que l'angle OFA est le supplément de l'angle BOA, et que dès lors le lieu des foyers des paraboles est le cercle décrit sur OA comme corde et capable de l'angle constant OFA.

En effet, prenons les symétriques de F par rapport aux tangentes OA, OB; les points G, H ainsi obtenus appartiennent à la directrice PQ correspondant au foyer F.

Les angles OGA, OFA sont égaux, ainsi que les angles

OFB, OHB. Or le triangle GOH est isoscèle par construction ; donc les angles OGA et OHB, formés chacun d'un angle droit augmenté des angles égaux HGO, GHO, sont égaux; il

Fig. 48.



en est de même des angles OFA, OFB et de leur demi-somme GFH, supplément de BOA.

6. *On donne deux droites rectangulaires* AB, CD *et l'on considère les hyperboles ayant la droite* AB *pour asymptote et tangentes à la droite* CD *au point fixe* P. *On demande le lieu des foyers de ces hyperboles.*

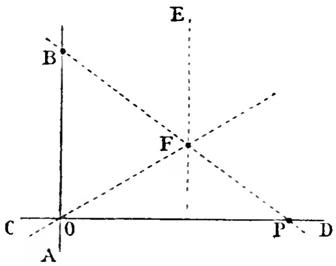
[*École Normale,* 1867. (*Énoncé partiel.*)]

La solution analytique de cette question se ferait en appliquant la méthode employée dans les exemples qui précèdent. Nous donnerons la solution géométrique suivante :

Soient (*fig.* 49) F le foyer d'une des coniques remplissant les conditions de l'énoncé; O le point de rencontre des droites AB, CD. Si l'on joint OF, PF et qu'on mène la parallèle FE à l'asymptote AB, les angles EFO, OFP sont égaux.

Je dis que les segments OB, BF sont égaux; en effet : l'angle en F du triangle BFO a pour valeur EFO — EFB; l'angle en O du même triangle a pour valeur OFP — OBF :

Fig. 49.



les termes de ces différences sont égaux chacun à chacun; le triangle OBF est isoscèle : la proposition est démontrée.

Le lieu du point F est donc une strophoïde droite ayant le point P et la droite AB comme éléments de définition.

7. *Coniques ayant un foyer commun.*

En prenant ce foyer comme origine, leur équation peut s'écrire

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - \varepsilon^2(x\cos\varphi + y\sin\varphi - d)^2 = 0,$$

et, si l'on pose

$$D = x\cos\varphi + y\sin\varphi - d,$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 - \varepsilon^2 D^2 = 0.$$

$D = 0$ est l'équation de la directrice correspondant au foyer fixe; φ, d, ε sont les paramètres variables.

Quand l'équation d'une conique est écrite sous la forme (2) il est souvent utile d'employer une forme particulière, que nous allons donner, pour l'équation de la tangente.

Les coordonnées d'un point M quelconque de la conique (2) peuvent s'écrire

$$x = \varepsilon D \cos\alpha, \tag{3}$$

$$y = \varepsilon D \sin\alpha, \tag{4}$$

α étant l'angle du rayon vecteur focal OM avec l'axe des x.

En substituant ces valeurs dans l'équation

$$X f'_x + Y f'_y + Z f'_z = 0$$

de la tangente au point (x, y, z), il vient

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - \varepsilon D = 0. \tag{5}$$

Nous citerons, comme exemple de l'application immédiate de cette forme d'équation, la question suivante :

Lieu des points d'où l'on peut mener à une conique des tangentes telles que la corde des contacts soit vue du foyer sous un angle donné 2θ.

Les équations du problème sont les suivantes :

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - \varepsilon D = 0, \tag{6}$$

$$x \cos\beta + y \sin\beta - \varepsilon D = 0, \tag{7}$$

$$\beta - \alpha = 2\theta. \tag{8}$$

On conclut

$$x = \frac{\varepsilon D}{\cos\theta} \cos\frac{\alpha + \beta}{2}, \tag{9}$$

$$y = \frac{\varepsilon D}{\cos\theta} \sin\frac{\alpha + \beta}{2}, \tag{10}$$

puis

$$(11)\qquad x^2+y^2-\frac{\varepsilon^2}{\cos^2\theta}D^2=0.$$

Le lieu est donc une conique ayant même foyer et même directrice que la conique (1); son excentricité est $e=\frac{\varepsilon}{\cos\theta}$.

Autre application. — *On donne deux coniques ayant un foyer commun; un angle de grandeur constante, ayant son sommet au foyer, pivote autour de ce point. Lieu des rencontres des tangentes aux coniques menées par les points où elles sont rencontrées par les côtés de l'angle mobile.*

8. *Le lieu des foyers des paraboles normales à une droite et qui la coupent en deux points fixes est une cissoïde.*

(Mention.)

Prenons comme axe des x la droite donnée et pour axe des y la perpendiculaire à cette droite menée par celui des deux points fixes où la parabole est normale à cette droite.

Soit (α, β) un point quelconque du plan; l'équation générale des coniques ayant ce point comme foyer est

$$(1)\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(\lambda x+\mu y+\nu)^2=0.$$

Les coniques représentées par cette équation satisferont à l'énoncé si l'on a, entre les coefficients λ, μ, ν, les relations suivantes :

(a) La conique est une parabole: $\delta=0$:

$$(2)\qquad \lambda^2+\mu^2-1=0.$$

(b) Elle passe à l'origine :

$$(3)\qquad \alpha^2+\beta^2-\nu^2=0.$$

(*c*) Elle est normale à l'axe des x :

$$\beta + \mu\nu = 0. \tag{4}$$

(*d*) Elle passe au deuxième point donné sur Ox.

Soient a, o ses coordonnées, on doit avoir

$$(a - \alpha)^2 + \beta^2 - (\lambda a + \nu)^2 = 0, \tag{5}$$

c'est-à-dire, en tenant compte de la condition (3),

$$\alpha^2(1 - \lambda^2) - 2a(\alpha + \lambda\nu) = 0. \tag{6}$$

Nous obtiendrons l'équation du lieu des foyers en éliminant les paramètres λ, μ, ν entre les équations (2), (3), (4) et (6); on obtient facilement des trois premières

$$\nu^2 = \alpha^2 + \beta^2, \tag{7}$$

$$\mu^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \tag{8}$$

$$\lambda^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{9}$$

Portant ces valeurs dans l'équation (6), il vient comme équation du lieu,

$$\alpha(\alpha^2 + \beta^2) - \frac{a}{4}\beta^2 = 0, \tag{10}$$

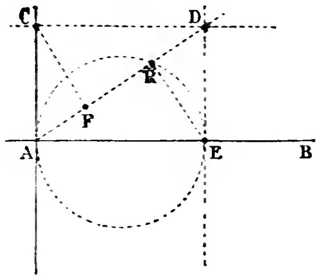
forme sous laquelle on reconnaît une cissoïde; le diamètre du cercle générateur est $\frac{a}{4}$; l'asymptote a pour équation $x = \frac{a}{4}$.

Solution géométrique. — Soit AB (*fig.* 50) la normale aux paraboles en A, AC sa perpendiculaire est la tangente; soit C le point de rencontre de cette dernière droite avec la directrice d'une des paraboles du faisceau.

Si par ce point C on mène une parallèle CD à AB, on obtient une seconde tangente à la parabole, et si D est son point de contact, le foyer de la parabole particulière correspondante est sur la droite AD (polaire de C).

D'un autre côté, ce foyer est sur la perpendiculaire à AD issue du point C (la portion AC de tangente à la parabole

Fig. 50.



est vue du foyer sous un angle droit). Le point F est donc le foyer de la parabole considérée.

Traçons le cercle décrit sur AE comme diamètre; si R est le point de rencontre de ce cercle avec AD, on a évidemment

$$AR = FD.$$

Donc le lieu du point F est la cissoïde dont les éléments sont ceux que nous venons de définir.

Nota. — La solution que nous venons de donner permet de construire une parabole, connaissant un angle droit circonscrit à la courbe.

9. *Coniques homofocales.* — Des coniques ayant mêmes foyers sont dites *homofocales :* leur équation générale peut s'écrire

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} - 1 = 0.$$

λ^2 variant de o à c^2, les coniques sont des hyperboles; ce sont des ellipses dans les autres cas, etc.

Nous rappellerons que :

1° Par un point quelconque du plan passent deux coniques du système : une ellipse et une hyperbole;

2° En chaque point commun ces coniques sont orthogonales; c'est-à-dire se coupent à angle droit.

Parabole. — Pour que des paraboles soient homofocales, il faut et il suffit qu'elles aient même foyer et même direction d'axe.

Nous avons étudié (Chap. V) le lieu des points de contact des tangentes menées à des coniques homofocales par un point fixe.

10. *On donne une ellipse et une hyperbole homofocales dont* O *est le centre commun. Par un point quelconque* P *de l'hyperbole, on mène des droites parallèles aux normales à l'ellipse aux points où elle est coupée par l'hyperbole. Soient* H *et* K *les points où ces droites coupent l'hyperbole et* I *le milieu du segment* HK : *démontrer que les deux droites* OP *et* OI *sont également inclinées sur le grand axe et que le rapport de* OP *à* OI *est constant.*

(LAGUERRE.)

Soient les deux coniques homofocales

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \quad \text{(Ellipse)},$$

$$\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}-1=0 \quad \text{(Hyperbole)};$$

$$a_1^2=a^2-\lambda, \qquad b_1^2=\lambda-b^2.$$

Les coordonnées des points M et N sont

$$[\mathrm{M}]\ \begin{cases} x_1 = \dfrac{aa_1}{c}, \\ y_1 = \dfrac{bb_1}{c}; \end{cases} \qquad [\mathrm{N}]\ \begin{cases} x_2 = \dfrac{aa_1}{c}, \\ y_2 = -\dfrac{bb_1}{c}. \end{cases}$$

Deux coniques homofocales sont orthogonales, donc la normale en M à l'ellipse est tangente à l'hyperbole; il en est de même au point N.

Soient x_0, y_0 les coordonnées du point P,

$$\frac{x_0^2}{a_1^2} - \frac{y_0^2}{b_1^2} - 1 = 0.$$

Le coefficient angulaire de la tangente en M à l'hyperbole est $\dfrac{ab_1}{a_1 b}$.

Le coefficient angulaire de la tangente en N à l'hyperbole est $-\dfrac{ab_1}{a_1 b}$.

Les deux parallèles menées par le point P ont pour équations :

$$[\mathrm{PH}] \qquad y - y_0 = \frac{ab_1}{a_1 b}(x - x_0).$$

$$[\mathrm{PK}] \qquad y - y_0 = -\frac{ab_1}{a_1 b}(x - x_0).$$

Les coordonnées du point H sont

$$x' = \frac{(a^2 + b^2)x_0 - \dfrac{2aa_1 b}{b_1} y_0}{c^2},$$

$$y' = \frac{-(a^2 + b^2)y_0 + \dfrac{2abb_1}{a_1} x_0}{c^2};$$

celles du point K sont

$$x'' = \frac{(a^2+b^2)x_0 + \dfrac{2aa_1b}{b_1}y_0}{c^2},$$

$$y'' = -\frac{(a^2+b^2)y_0 + \dfrac{2abb_1}{a_1}x_0}{c^2}.$$

Les coordonnées du point I, milieu de KH, sont

$$2x = x' + x'' = 2\frac{a^2+b^2}{c^2}x_0,$$

$$2y = y' + y'' = -2\frac{a^2+b^2}{c^2}y_0.$$

Le coefficient angulaire de la droite OP est $\frac{y_0}{x_0}$. Le coefficient angulaire de la droite OI est $-\frac{y_0}{x_0}$. Ces deux droites sont donc également inclinées sur Ox.

Calculons le rapport $\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OI}}$:

$$\frac{\overline{\mathrm{OP}}^2}{\overline{\mathrm{OI}}^2} = \frac{x_0^2+y_0^2}{\dfrac{(a^2+b^2)^2}{c^4}(x_0^2+y_0^2)} = \frac{c^4}{(a^2+b^2)^2};$$

donc

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OI}} = \text{const.}, \qquad \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OI}} = \frac{c^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2};$$

d'où

$$\frac{\mathrm{OI}+\mathrm{OP}}{\mathrm{OI}-\mathrm{OP}} = \frac{a^2}{b^2}.$$

(*Nouvelles Annales.* — 2e série, T. VIII, p. 421.)

Exercices proposés.

Trouver les lieux des foyers des coniques variables définies dans les questions suivantes :

1° Admission à l'École Centrale en 1872, 1re session, § 2 (t. II, p. 39*): — 1877, 1re session (t. II, p. 43*): — 1878, 1re session (t. II, p. 44*): — 1888, 1re session (t. II, p. 54*): — 1889, 1re session (t. II, p. 55*); — 1894, 1re session, § 4 (t. II, p. 91*).

2° Admission à l'École Normale en 1852 (t. II, p. 22*); — 1863, § 2 (t. II, p. 24*): — 1864 (t. II, p. 24*); — 1867 (t. II, p. 25*);

3° Admission à l'École Polytechnique en 1875 (t. II, p. 11*); — 1881 (t. II, p. 15*): — 1891, § 1 (t. II, p. 79*).

4° Concours général, Paris, en 1869 (t. II, p. 62*).

APPENDICE

AUX CHAPITRES V A XII.

Dans les Chapitres précédents, nous avons cherché et obtenu des lieux de points liés à un système de coniques variables : lieux de points de contact de tangentes, de pieds de normales, de centres, foyers, etc. Nous ne nous sommes préoccupé que de la nature et de la forme géométrique du *lieu,* sans nous inquiéter de savoir si tel point déterminé de ce lieu provenait d'une ellipse, d'une hyperbole ou d'une parabole. Nous nous proposons ici de reprendre l'étude des lieux précédents à ce dernier point de vue, et de donner les méthodes générales qui permettent de distinguer sur un lieu géométrique quelconque les points qui proviennent de différentes natures de coniques du faisceau générateur.

Déjà, aux Chapitres VII et X, nous avons indiqué deux méthodes pour faire cette distinction sur les lieux de centres et de sommets.

Voici une troisième méthode qu'on pourra employer pour traiter les questions de ce genre, quelle que soit la nature des points dont on cherche le lieu.

Soient

$$f(x, y, \lambda) = 0 \tag{1}$$

l'équation d'un système de coniques;

$$\varphi(x, y, \lambda) = 0, \tag{2}$$

$$\psi(x, y, \lambda) = 0 \tag{3}$$

les équations de deux lieux géométriques auxiliaires, se déduisant de l'équation (1) et définissant par leur intersection les points du lieu

$$(4) \qquad F(x, y) = 0,$$

qu'on étudie.

On propose de distinguer sur le lieu dont l'équation est $F(x, y) = 0$ les points provenant des ellipses du système (1) de ceux qui proviennent des hyperboles ou des paraboles.

Pour cela, on commence par discuter la *caractéristique*, $\delta = AC - B^2 = f_1(\lambda)$, du système (1). On forme ainsi un tableau des valeurs de λ rangées dans l'ordre de grandeur de $-\infty$ à $+\infty$ qui donnent des paraboles dans l'équation (1); ces valeurs sont les racines de l'équation $\delta = 0$.

Soit ce tableau

$$\begin{array}{cccccc} -\infty & \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_p & +\infty \\ & P_1 & P_2 & \ldots & P_p & \end{array}$$

Toutes les valeurs de λ comprises entre $-\infty$ et λ_1 donnent des *ellipses* ou des *hyperboles* suivant le signe de δ; en général, celles qui sont comprises entre λ_1 et λ_2 donnent des *hyperboles* ou des *ellipses*, etc.

Si l'une des méthodes rappelées plus haut n'est pas applicable ou conduit à des calculs trop compliqués, on pourra remarquer que les points définis par les lieux

$$(2) \qquad \varphi(x, y, \lambda) = 0,$$

$$(3) \qquad \psi(x, y, \lambda) = 0,$$

variables tous les deux, peuvent être définis comme étant l'intersection du lieu fixe

$$(4) \qquad F(x, y) = 0$$

avec le plus simple des lieux (2) et (3). Soit (2) le plus simple de ces lieux; il est variable avec λ; on étudiera sa déformation quand λ, partant de $-\infty$, varie d'une manière continue jusqu'à $+\infty$, en traversant les valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Alors, tous les points du lieu (4), compris entre les positions $\varphi(x, y, \lambda_1) = 0$ et $\varphi(x, y, \lambda_2) = 0$, du lieu auxiliaire, proviendront des *ellipses*, si, dans l'intervalle (λ_1, λ_2), l'équation (1) représente des *ellipses*. Les points particuliers définis par les équations

$$F(x, y) = 0,$$

$$\varphi(x, y, \lambda_1) = 0$$

sont ceux qui proviennent de la parabole P_1, correspondant à la valeur λ_1 du paramètre variable, etc.

Dans les applications, le lieu auxiliaire le plus simple, que nous venons d'employer, sera généralement une droite ou un cercle; son mode de déformation avec la variation de λ s'étudiera facilement; on représentera cette déformation sur une figure en traçant les lieux correspondant aux valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ du paramètre variable; on couvrira de hachures les régions qui correspondent aux positions occupées successivement par les points du lieu $\varphi(x, y, \lambda) = 0$, quand on donne à λ des valeurs fournissant des ellipses dans l'équation $f(x, y, \lambda) = 0$, et l'on tracera sur la même figure le lieu dont l'équation est $F(x, y) = 0$. Quelle que soit la complication de ce lieu, les portions qui se trouvent dans les régions hachurées sont celles des points provenant des ellipses; celles qui se trouvent dans les régions non hachurées proviennent des hyperboles; enfin les points communs au lieu $F(x, y) = 0$ et aux lieux auxiliaires, provenant des valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ du paramètre, proviennent des paraboles séparatrices

$$P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_p.$$

La même méthode permet d'obtenir les points provenant des *systèmes de droites* réelles ou imaginaires, distinctes ou confondues, qui font partie du faisceau de coniques étudié.

Il suffit d'associer aux équations des lieux auxiliaires (2) et (3), non plus la *caractéristique* δ, mais le discriminant Δ; les racines de $\Delta = 0$ donnent les droites du faisceau et le signe correspondant de δ fait connaître leur genre.

Les points provenant des hyperboles équilatères sont définies par $A + C = 0$; ceux venant des droites isotropes par $\left\{\begin{array}{r} A - C = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$ en coordonnées rectangulaires.

* * *

Parfois, les équations initiales des lieux auxiliaires peuvent se mettre sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} x = f(\lambda), \\ y = \varphi(\lambda); \end{array}\right.$$

ou bien, quand l'équation du lieu est obtenue, on peut exprimer rationnellement ses coordonnées au moyen du paramètre auxiliaire λ; enfin, dans d'autres cas, on pourra les exprimer en fonction d'un nouveau paramètre μ, ne paraissant pas dans les calculs précédents.

Premier cas. — La discussion préalable des éléments δ, Δ, etc., du système de coniques dont il s'agit aura permis de classer les valeurs de λ de $-\infty$ à $+\infty$ et de reconnaître celles qui donnent des ellipses, des hyperboles, etc.

On choisira alors le plus simple des systèmes de droites, parallèles aux axes de coordonnées $x = f(\lambda)$ ou $y = \varphi(\lambda)$, on séparera le plan en régions correspondant aux ellipses, aux hyperboles, etc., et l'on achèvera la discussion comme plus haut.

Second cas. — La marche précédente n'est applicable qu'après avoir exprimé μ en fonction de λ ou réciproquement, ce qui permettra, par une simple transformation algébrique, d'écrire toutes les équations de condition en fonction du même paramètre, λ ou μ, suivant la forme de la relation

$$f(\lambda, \mu) = 0,$$

existant entre eux.

Tout revient donc à trouver cette relation ou, ce qui est équivalent, à trouver les relations auxiliaires dont celle-ci est la résultante.

Soient

$$f_1(x, y, \lambda) = 0,$$
$$f_2(x, y, \lambda) = 0$$

les équations des deux lieux géométriques auxiliaires du début; ayant obtenu l'équation résultante, lieu cherché,

$$F(x, y) = 0,$$

on parvient à exprimer rationnellement les coordonnées x et y de ce lieu en fonction d'un autre paramètre μ,

$$x = \varphi_1(\mu),$$
$$y = \varphi_2(\mu);$$

il faut trouver la relation qui existe entre λ et μ, ou encore former les fonctions δ, Δ, etc., dépendant du faisceau initial, en fonction de μ.

Pour cela, il suffit de remarquer que les deux dernières équations ayant été obtenues en partant de $F(x, y) = 0$, éliminant de λ entre

$f_1 = 0, f_2 = 0$, les valeurs d'x et d'y qu'elles définissent satisfont simultanément les équations

$$f_1(x, y, \lambda) = 0,$$
$$f_2(x, y, \lambda) = 0.$$

Dès lors, la relation entre λ et μ est susceptible des deux formes équivalentes, si elles ne sont identiques,

$$f_1[\varphi_1(\mu), \varphi_2(\mu), \lambda] = 0,$$
$$f_2[\varphi_1(\mu), \varphi_2(\mu), \lambda] = 0.$$

Les questions posées aux examens de ces dernières années présentent des exemples d'application des méthodes qui précèdent; le lecteur les trouvera facilement aux *Exercices proposés* qui terminent chaque Chapitre de cet Ouvrage.

CHAPITRE XIII.

DÉTERMINATION DES CONIQUES.

Rappel de résultats.

(a) Une courbe du second ordre est déterminée par cinq conditions, cinq points par exemple; dans ce cas, il existe *une seule* conique passant par les cinq points donnés.

Il n'en est pas de même quand l'une au moins des conditions imposées s'exprime par une relation, entre les coefficients de l'équation générale, de degré supérieur au premier.

Les conditions imposées à des coniques s'expriment par des équations présentant certaines particularités que nous devons signaler.

(b) Ces équations de condition seront telles que :

1° Elles seront satisfaites par des valeurs toujours réelles de paramètres variables : toutes les coniques du système auront une équation à coefficients réels.

2° Elles seront satisfaites par des valeurs tantôt réelles, tantôt imaginaires des paramètres; il y aura alors lieu de distinguer le cas dans lequel l'équation du système aura ses coefficients réels, de celui dans lequel ceux-ci seraient imaginaires.

(c) L'étude particulière des propriétés des coniques nous a fourni les caractères spéciaux des équations, mettant en évidence telle ou telle de ces propriétés.

Il suffit de rappeler les équations suivantes :

(d) *Équation générale des coniques ayant leur centre à l'origine :*

$$\lambda x^2 + 2\mu xy + \nu y^2 + \theta = 0.$$

(e) *Équation générale des coniques rapportées à leur centre* *et à leurs axes :*

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu = 0.$$

(*f*) *Équation générale des hyperboles équilatères du plan :*

$$\lambda x^2 + 2\mu xy - \lambda y^2 + 2\lambda' x + 2\mu' y + \nu = 0.$$

(*g*) *Équation générale des paraboles du plan :*

$$(y - \lambda x)^2 + 2\lambda' x + 2\mu' y + \nu = 0.$$

(*h*) *Équation générale des coniques ayant un foyer donné* (α, β) :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - (\lambda x + \mu y + \nu)^2 = 0.$$

(*k*) *Équation générale des coniques ayant un foyer donné* (α, β) *et une directrice donnée* $lx + my + p = 0$:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \lambda^2 (lx + my + p)^2 = 0.$$

(*l*) *Équation générale des coniques ayant un sommet donné et un axe donné :*

(Le sommet est pris comme origine et l'axe donné comme axe des x.)

$$y^2 = 2\lambda x + \mu x^2.$$

(*m*) *Équation générale des coniques circonscrites à un quadrilatère :*

($A = 0$, $B = 0$; $C = 0$, $D = 0$ sont les équations des côtés du quadrilatère; A, B côtés opposés).

$$AB + \lambda CD = 0.$$

(*n*) *Équation générale des coniques passant par les points communs à deux coniques* $U = 0$, $V = 0$:

$$U + \lambda V = 0.$$

(*o*) *Équation générale des coniques circonscrites à un triangle* $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$:

$$\lambda BC + \mu AC + \nu AB = 0;$$

on écrit parfois cette équation

$$\frac{\lambda}{A}+\frac{\mu}{B}+\frac{\nu}{C}=0.$$

(*p*) *Équation générale des coniques inscrites au même triangle :*

$$\lambda^2 A^2+\mu^2 B^2+\nu^2 C^2 \pm 2\mu\nu BC \pm 2\lambda\nu AC \pm 2\lambda\mu AB=0,$$

qu'on peut écrire

$$\sqrt{\lambda A}+\sqrt{\mu B}+\sqrt{\nu C}=0.$$

(*q*) *Équation générale des coniques bitangentes à deux droites données :* $A=0, \quad B=0.$

Si les points de contact sont donnés, $C=0$ étant la corde des contacts,

$$AB+\lambda C^2=0.$$

Si les points de contact sont arbitraires, soit Z la corde des contacts, $Z=\lambda x+\mu y+\nu$,

$$AB+Z^2=0.$$

(*r*) *Équation générale des coniques inscrites dans un quadrilatère* ($A=0$, $B=0$, $C=0$ sont les trois diagonales):

$$A^2=\frac{l^2 B^2}{\lambda}+\frac{m^2 C^2}{1-\lambda}.$$

Parallélogramme (les diagonales étant prises comme axes de coordonnées) :

$$\frac{x^2}{a^2(1-\lambda)}+\frac{y^2}{b^2\lambda}-1=0.$$

Rectangle :

$$\frac{x^2}{1-\lambda}+\frac{y^2}{\lambda}-a^2=0.$$

I. — Marche a suivre pour former l'équation générale de coniques remplissant des conditions données.

1. On peut prendre l'équation la plus générale des courbes du second ordre

$$\lambda x^2 + 2\mu xy + \nu y^2 + 2\lambda' x + 2\mu' y + \theta = 0,$$

et exprimer successivement les conditions imposées.

Dans certains cas, on pourra éliminer quatre des paramètres entre les équations de condition; l'équation restante avec un seul paramètre est l'équation générale des coniques remplissant les conditions données.

Dans d'autres cas, on ne pourra pas, ou l'on ne voudra pas, pour des raisons de symétrie ou autres, résoudre les équations par rapport à certains paramètres; on devra alors joindre à l'équation générale, dont tous les paramètres sont variables, les équations de condition.

2. On peut également choisir les axes de telle sorte que la condition la plus compliquée de l'énoncé s'exprime immédiatement en tenant compte des résultats précédemment trouvés.

Il suffira d'établir ensuite entre les paramètres qui restent les relations caractéristiques des conditions imposées par l'énoncé.

Remarque essentielle. — Quelle que soit celle des deux méthodes qu'on emploie, on devra avoir soin, au moment où l'on rompra l'homogénéité par rapport aux coefficients en divisant par l'un d'eux, de remarquer que cette opération exclut l'hypothèse d'une valeur nulle de ce coefficient.

On écarte donc certaines coniques par ce fait même; alors, on devra examiner les résultats produits par l'hypothèse supprimée dans l'équation générale.

Deux cas peuvent se présenter :

1° La valeur nulle du paramètre par lequel on a divisé, portée dans l'équation générale, donne à celle-ci une forme incompatible avec les autres conditions imposées; dans ce cas, on n'a en réalité rien supprimé en rompant l'homogénéité, et l'équation non homogène obtenue est l'équation générale cherchée.

2° La valeur nulle du coefficient diviseur portée dans l'équation générale donne des coniques qui peuvent être astreintes aux autres conditions données ; dès lors, nous devons faire encore une distinction entre :

(*a*) Le cas où l'équation réduite n'est celle que d'un nombre limité de coniques ;

(*b*) Celui où l'équation réduite est celle de toute une famille de coniques.

(*a*) Les coniques particulières représentées par l'équation réduite seront le plus souvent des solutions singulières :

(Droites se coupant au lieu d'hyperboles, droites parallèles au lieu de paraboles, droites isotropes, etc.)

On devra les examiner avec soin; car elles nous donneront l'explication de certaines solutions rencontrées dans les questions traitées ultérieurement et qu'on rejette souvent à tort sous la dénomination non justifiée de *solutions étrangères.*

(*b*) La famille spéciale des coniques de l'équation réduite devra être l'objet d'un examen particulier pour toutes les questions posées. Le problème général sera alors décomposé en deux :

1° Étude générale de l'équation réduite;

2° Étude générale de l'équation obtenue en rompant l'homogénéité.

Il y a lieu d'observer que la discussion précédente n'est pas nécessaire quand il s'agit uniquement de la recherche des lieux géométriques; car les équations de ceux-ci s'obtiennent par l'élimination des paramètres, et leur équation est la relation qui existe entre les coordonnées d'un point de ce lieu, indépendamment des valeurs nulles ou infinies, réelles ou imaginaires des paramètres auxiliaires.

Cependant nous conseillons toujours de faire cette discussion en établissant une équation générale; car on y rencontrera les coniques singulières permettant d'expliquer facilement la présence de certains facteurs du lieu géométrique étudié.

Au contraire, si l'on traite une question dans laquelle on exprime certains éléments de la figure en fonction des paramètres restant dans l'équation écrite comme *équation générale,* il y a lieu d'examiner avec grand soin si l'on n'a pas supprimé, en formant cette *équation générale*, certaines coniques ou certaine famille de coniques.

Dans cette hypothèse, l'expression trouvée ne serait, bien entendu, pas générale. La discussion indiquée plus haut s'impose dans ce cas.

Conditions diverses. — Une condition est dite *simple,* quand elle s'exprime par une *seule* équation; *double*, quand elle s'exprime par *deux* équations; etc.

Toute propriété se traduisant par une inégalité constitue une *restriction* et non une condition.

Parmi les éléments des courbes du second ordre, nous distinguerons les éléments *simples* ou *ordinaires* et les éléments *doubles* ou *principaux;* ces derniers portent aussi le nom d'*éléments remarquables*.

Éléments simples. — On appelle éléments simples ceux qui ne sont pas déterminés quand la conique est donnée : un point, une tangente, une normale, un diamètre.

Un *élément simple* donné correspond à *une* équation de condition.

Éléments principaux. — Ils sont déterminés quand la conique est donnée : un centre, une asymptote, une directrice, un foyer, un sommet, un axe, une tangente au sommet.

Un *élément principal* donné correspond à *deux* équations de condition.

En général, la connaissance simultanée d'un élément simple et d'un élément principal constitue trois conditions ; de même, la connaissance de deux éléments principaux constitue quatre conditions.

Mais il n'en est plus ainsi lorsque les éléments donnés ont une relation entre eux.

Ainsi un centre et une tangente constituent trois conditions; ces éléments sont indépendants l'un de l'autre ; — un centre et un diamètre ne constituent que deux conditions, le diamètre devant passer par le centre.

De même, une asymptote et un foyer, un foyer et la directrice correspondante, un axe et une asymptote, un foyer et l'axe non focal constituent quatre conditions; mais deux directrices, un centre et un axe, deux diamètres en position, une directrice et un axe, un foyer et l'axe focal ne constituent que trois conditions : les deux directrices sont, en effet, parallèles, l'axe donné passe au centre, l'axe est parallèle ou perpendiculaire à la directrice donnée, etc.

Deux tangentes, leurs points de contact et le centre, constituent cinq conditions : en effet, les deux tangentes et leurs points de contact étant arbitraires, le centre doit se trouver sur la droite qui joint le point de rencontre des tangentes au point milieu de la corde des contacts, etc.

II. — Formation d'équations générales de coniques.

1. *Équation générale des paraboles passant par deux points donnés et dont les diamètres ont une direction donnée.*

(*École Centrale,* 1880. — 2e session.)

Prenons comme axe des x la droite joignant les points donnés, et comme axe des y la perpendiculaire en son milieu; soient $2a$ la distance des points donnés, m le coefficient angulaire de la direction donnée.

L'équation générale des paraboles dont la direction des diamètres a pour coefficient angulaire m est

$$(1)\qquad (y - mx)^2 + 2\lambda x + 2\mu y + \theta = 0;$$

ces paraboles passeront par les points donnés si l'équation aux abscisses des points de rencontre avec Ox a ses racines respectivement égales à $+a$ et $-a$.

Cette équation aux abscisses est

$$(2)\qquad m^2 x^2 + 2\lambda x + \theta = 0;$$

on doit donc avoir

$$(3)\qquad \lambda = 0,$$

$$(4)\qquad \frac{\theta}{m^2} = -a^2.$$

L'équation demandée s'écrit donc

$$(5)\qquad (y - mx)^2 + 2\mu y - a^2 m^2 = 0.$$

2. *Équation générale des hyperboles équilatères passant par un point donné sur* Ox *et tangentes à* Oy *en un point donné.*

(*École Centrale,* 1879. — 1re session.)

Soient A $(a, 0)$ le point donné sur Ox; B$(0, b)$ le point donné sur Oy.

L'équation générale des hyperboles équilatères du plan est

$$(1) \qquad \lambda(x^2 - y^2) + 2\mu xy + 2\nu x + 2\pi y + \theta = 0,$$

Ces coniques passent au point A si l'on a

$$(2) \qquad \lambda a^2 + 2\nu a + \theta = 0.$$

Elles sont tangentes à Oy au point B si l'équation aux ordonnées de leurs points de rencontre avec Oy a ses racines égales entre elles et à b.

Cette équation aux ordonnées est

$$(3) \qquad -\lambda y^2 + 2\pi y + \theta = 0;$$

on doit donc avoir

$$(4) \qquad \frac{\pi}{\lambda} = b,$$

$$(5) \qquad \frac{\theta}{\lambda} = -b^2;$$

on conclut

$$\pi = \lambda b, \qquad \theta = -\lambda b^2, \qquad 2\nu = \lambda \frac{(b^2 - a^2)}{a}.$$

L'équation générale demandée est donc

$$(6) \quad \lambda(x^2 - y^2) + 2\mu xy + \lambda \frac{b^2 - a^2}{a} x + 2\lambda by - \lambda b^2 = 0,$$

ou, en divisant par λ et conservant la lettre μ pour désigner le nouveau paramètre,

$$(7) \qquad x^2 + 2\mu xy - y^2 + \frac{b^2 - a^2}{a} x + 2by - b^2 = 0.$$

L'hypothèse écartée, $\lambda = 0$, donnerait l'hyperbole singulière

$xy = 0$ formée par les deux axes de coordonnées qui remplissent analytiquement les conditions de l'énoncé.

3. *On donne deux axes rectangulaires* Ox, Oy; *un point* A *sur* Ox, *un point* B *sur* Oy; *par le point* A *on mène une droite* AR *de coefficient angulaire* m; *former l'équation de l'hyperbole tangente à* Ox *au point* O, *qui passe en* B *et a pour asymptote la droite* AR.

(*École Centrale*, 1880. — 1re session.)

L'équation générale des coniques tangentes à l'origine à l'axe des x est

$$(1) \qquad \lambda x^2 + 2\mu xy + \nu y^2 + 2\theta y = 0.$$

Ces coniques passeront en B si cette équation est vérifiée par $x = 0$, $y = b$; il vient

$$(2) \qquad \nu b^2 + 2\theta b = 0.$$

L'équation (1) devient

$$(3) \qquad \lambda x^2 + 2\mu xy + \nu y^2 - \nu by = 0.$$

La droite AR, dont l'équation est

$$(4) \qquad y - m(x - a) = 0,$$

sera asymptote si l'équation aux abscisses des points communs à cette droite et à la conique a ses racines infinies.

Cette équation est

$$(5) \quad \lambda x^2 + 2\mu mx(x - a) + \nu m^2(x - a)^2 - \nu bm(x - a) = 0.$$

On doit donc avoir

$$(6) \qquad \lambda + 2\mu m + \nu m^2 = 0,$$

$$(7) \qquad -2a\mu m - 2a\nu m^2 - b\nu m = 0.$$

On conclut

(8) $$\nu = -\frac{2a\mu}{2am+b},$$

(9) $$\lambda = \mu\frac{am^2 - 2(am+b)m}{am+b} = -2\mu m\frac{am+b}{2am+b}.$$

L'équation (3) devient

(10) $$m(am+b)x^2 - (2am+b)xy + ay^2 - aby = 0$$

C'est l'équation demandée.

4. *Équation générale des coniques ayant un foyer donné et une asymptote donnée.*

(*École Centrale*, 1878. — 2e session.)

Prenons le foyer donné comme origine: comme axe des x, la perpendiculaire à l'asymptote donnée: soit

(1) $$x - a = 0$$

son équation.

L'équation générale des coniques ayant un foyer à l'origine est

(2) $$x^2 + y^2 - (\lambda x + \mu y + \nu)^2 = 0.$$

La droite (1) sera asymptote si l'équation aux ordonnées des points communs à cette droite et à la conique (2) a deux racines infinies.

Cette équation aux ordonnées est

(3) $$(1-\mu^2)y^2 - 2(\lambda a + \nu)\mu y + a^2 - (\lambda a + \nu)^2 = 0;$$

on doit donc avoir

(4) $$1 - \mu^2 = 0,$$

(5) $$\mu(\lambda a + \nu) = 0.$$

La solution $\mu = 0$ de l'équation (5) n'est pas solution de (4); les équations de condition se réduisent donc à

$$(4\ bis) \qquad 1 - \mu^2 = 0,$$

$$(5\ bis) \qquad \lambda a + \nu = 0.$$

Les coniques remplissant les conditions de l'énoncé se divisent donc en deux séries :

$$(6) \qquad x^2 + y^2 - [y + \lambda(x - a)]^2 = 0,$$

$$(7) \qquad x^2 + y^2 - [y - \lambda(x - a)]^2 = 0.$$

Dans chacune d'elles, la directrice correspondant au foyer fixe passe par le point fixe rencontre de l'axe des x avec l'asymptote fixe.

5. *Équation générale des hyperboles équilatères passant aux points communs d'un cercle et du système formé par un diamètre donné et une parallèle quelconque à ce diamètre.*

Prenons comme axes de coordonnées le diamètre donné et la perpendiculaire à ce diamètre menée par le centre.

L'équation du cercle est

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Le système des droites Ox, AB a pour équation

$$(2) \qquad y(y - \mu) = 0.$$

L'équation générale des coniques passant à l'intersection de ces coniques est

$$(3) \qquad y(y - \mu) + \lambda(x^2 + y^2 - R^2) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(4) \qquad \lambda x^2 + y^2(\lambda + 1) - \mu y - \lambda R^2 = 0.$$

Cette conique sera une hyperbole équilatère si l'on a

$$2\lambda + 1 = 0,$$

ou

$$\lambda = -\frac{1}{2}.$$

L'équation des hyperboles équilatères de l'énoncé est donc

$$(5) \qquad x^2 - y^2 + 2\mu y - R^2 = 0.$$

6. *On donne deux axes rectangulaires* Ox, Oy; *un point* A *sur* Ox, *un point* B *sur* Oy : *former l'équation générale des paraboles telles que, pour chacune d'elles,* Oy *soit la corde des contacts des tangentes issues de* A *et* Ox *la corde des contacts des tangentes issues de* B.

(*École Centrale,* 1883. — 1re session.)

Soient OA $= a$, OB $= b$; l'équation générale des paraboles du plan est

$$(1) \qquad (y - \lambda x)^2 + 2\mu x + 2\nu y + \theta = 0.$$

La polaire du point A$(a, 0)$ doit être l'axe des y; l'équation de cette polaire est

$$(2) \qquad a[-(y - \lambda x)\lambda + \mu] + \mu x + \nu y + \theta = 0.$$

On doit avoir

$$(3) \qquad \nu - a\lambda = 0,$$

$$(4) \qquad a\mu + \theta = 0.$$

En tenant compte de ces conditions, (1) devient

$$(5) \qquad (y - \lambda x)^2 - 2\frac{\theta}{a}x + 2a\lambda y + \theta = 0.$$

La polaire du point B$(0, b)$ doit être l'axe des x; l'équation de cette polaire est

$$(6) \qquad b(y-\lambda x+a\lambda)-\frac{\theta}{a}x+a\lambda y+\theta=0;$$

on doit donc avoir

$$(7) \qquad b\lambda+\frac{\theta}{a}=0,$$

$$(8) \qquad ab\lambda+\theta=0.$$

Ces équations sont identiques; on conclut

$$\theta=-ab\lambda.$$

L'équation générale demandée est donc

$$(9) \qquad (y-\lambda x)^2+2b\lambda x+2a\lambda y-ab\lambda=0.$$

Remarque. — Donner un point et sa polaire, c'est donner deux conditions : deux points et leurs polaires respectives constituent donc quatre conditions. Ici les coniques sont de plus astreintes à être des paraboles; on donne donc en apparence cinq conditions. Il y a un nombre limité de coniques remplissant ces conditions.

Mais il est à remarquer que les points et les polaires correspondants, tels que l'énoncé les donne, ne sont pas indépendants les uns des autres.

En effet, Oy est la polaire du point A : les polaires de tous les points de Oy passent donc en A.

Quand on a choisi le point B sur Oy, il ne reste à donner, de sa polaire, que la direction, c'est-à-dire un seul élément, donc, en tout, trois conditions. Ce fait s'est traduit analytiquement par l'identité des équations de condition (7) et (8).

7. *Équation générale des coniques ayant un centre donné et normales à deux droites rectangulaires données.*

(*École Polytechnique,* 1872.)

Plaçons l'origine au centre fixe et prenons comme axes de coordonnées des parallèles aux droites données; soient

$$(1) \qquad x - a = 0$$

$$(2) \qquad y - b = 0$$

les équations de ces droites.

L'équation générale des coniques ayant leur centre à l'origine est

$$(3) \qquad \lambda x^2 + 2\mu xy + \nu y^2 + \theta = 0.$$

Parmi les normales issues du point A, rencontre des droites (1) et (2), à la conique (3), doivent se trouver les droites (1) et (2); or, les pieds des normales issues du point A à la conique (1) sont sur l'hyperbole

$$(4) \qquad \frac{x - a}{\lambda x + \mu y} - \frac{y - b}{\mu x + \nu y} = 0.$$

Les coordonnées de ces pieds sont

$$(5) \begin{cases} x = a, \\ y = -\dfrac{\lambda a}{\mu}; \end{cases} \qquad (6) \begin{cases} x = -\dfrac{\nu b}{\mu}, \\ y = b. \end{cases}$$

Ils doivent être situés sur la conique (3): donc on a les équations de condition

$$(7) \qquad \lambda a^2 - 2\lambda a^2 + \frac{\nu\lambda^2 a^2}{\mu^2} + \theta = 0,$$

$$(8) \qquad \lambda \frac{\nu^2 b^2}{\mu^2} - 2\nu b^2 + \nu b^2 + \theta = 0;$$

c'est-à-dire

$$(9) \qquad \nu\lambda^2 a^2 - \lambda\mu^2 a^2 + \theta\mu^2 = 0,$$

$$(10) \qquad \lambda\nu^2 b^2 - \nu\mu^2 b^2 + \theta\mu^2 = 0.$$

On conclut

$$\lambda(\nu\lambda - \mu^2)a^2 = -\theta\mu^2,$$

$$\nu(\nu\lambda - \mu^2)b^2 = -\theta\mu^2;$$

c'est-à-dire

$$(11)\qquad a^2\lambda - b^2\nu = 0.$$

L'équation (10) peut s'écrire

$$(12)\qquad \left(\frac{\mu^2}{\nu^2} - \frac{\lambda}{\nu}\right)b^2 - \frac{\mu^2}{\nu^2}\,\frac{\theta}{\nu} = 0,$$

ou, en posant $-\frac{\theta}{\nu} = \lambda'$,

$$\frac{\mu^2}{\nu^2}(b^2 + \lambda') - \frac{b^4}{a^2} = 0;$$

on en tire

$$\frac{\mu}{\nu} = \pm\frac{b^2}{a\sqrt{b^2+\lambda'}}.$$

L'équation (3) devient alors

$$(13)\qquad \frac{b^2}{a^2}x^2 \pm 2\frac{b^2}{a\sqrt{b^2+\lambda'}}xy + y^2 - \lambda' = 0.$$

C'est l'équation générale demandée.

8. *Dans un angle droit xOy, on place un point fixe autour duquel on fait tourner une droite : former l'équation générale des paraboles normales à Ox et à Oy, à leurs rencontres avec la droite mobile.*

Soit $P(a, b)$ le point fixe donné; l'équation générale des droites menées par ce point est

$$(1)\qquad y - b - \lambda(x - a) = 0;$$

ses coordonnées à l'origine sont

$$(2) \qquad x = a - \frac{b}{\lambda},$$

$$(3) \qquad y = b - \lambda a.$$

Nous allons d'abord former l'équation générale des paraboles qui passent par les points

$$[\mathrm{A}] \begin{cases} x = 0, \\ y = b - \lambda a; \end{cases} \qquad [\mathrm{B}] \begin{cases} x = a - \dfrac{b}{\lambda}, \\ y = 0. \end{cases}$$

L'équation générale des paraboles du plan est

$$(4) \qquad (y - \mu x)^2 + 2\nu x + 2\pi y + \theta = 0.$$

On doit avoir les relations suivantes :

1° Pour $x = 0$, $\quad y = b - \lambda a$,

$$(5) \qquad (b - \lambda a)^2 + 2\pi(b - \lambda a) + \theta = 0;$$

2° Pour $y = 0$, $\quad x = a - \dfrac{b}{\lambda}$,

$$(6) \qquad \mu^2\left(a - \frac{b}{\lambda}\right)^2 + 2\nu\left(a - \frac{b}{\lambda}\right) + \theta = 0.$$

Nous exprimerons que les paraboles sont normales aux axes de coordonnées, aux points A, B, en exprimant que le coefficient angulaire de la normale $\dfrac{f'_y}{f'_x}$ est nul en A, infini en B; on a donc

$$(7) \qquad f'_x(0,\ b - \lambda a) = 0,$$

$$(8) \qquad f'_y\left(a - \frac{b}{\lambda},\ 0\right) = 0.$$

Or

$$f'_x = -\mu(y - \mu x) + \nu,$$

$$f'_y = y - \mu x + \pi.$$

Les équations (7) et (8) explicitées deviennent

(7 *bis*) $$-\mu(b-\lambda a)+\nu=0,$$

(8 *bis*) $$-\mu\left(a-\frac{b}{\lambda}\right)+\pi=0.$$

On conclut

$$\nu=\mu(b-\lambda a),$$

$$\pi=-\mu\frac{b-\lambda a}{\lambda}.$$

Les équations (5) et (6) deviennent

(9) $$(b-\lambda a)^2-2\mu\frac{(b-\lambda a)^2}{\lambda}+\theta=0,$$

(10) $$\frac{\mu^2}{\lambda^2}(\lambda a-b)^2-2\frac{\mu(\lambda a-b)^2}{\lambda}+\theta=0,$$

qu'on peut écrire

(9 *bis*) $$(b-\lambda a)^2\left(1-\frac{2\mu}{\lambda}\right)+\theta=0,$$

(10 *bis*) $$(b-\lambda a)^2\frac{\mu^2-2\mu\lambda}{\lambda^2}+\theta=0;$$

on conclut

$$\mu^2-\lambda^2=0.$$

On a donc deux systèmes de valeurs :

$$(11)\ \begin{cases}\mu-\lambda=0,\\ \theta=(b-\lambda a)^2;\end{cases}\qquad (12)\ \begin{cases}\mu+\lambda=0,\\ \theta=-3(b-\lambda a)^2.\end{cases}$$

Il existe donc deux équations générales distinctes

(13) $$(y-\lambda x)^2+2\lambda(b-\lambda a)x+2(\lambda a-b)y+(b-\lambda a)^2=0,$$

(14) $$(y+\lambda x)^2-2\lambda(b-\lambda a)x-2(\lambda a-b)y-3(b-\lambda a)^2=0.$$

9. *Équation générale des coniques ayant un sommet donné et une asymptote donnée. Combien passe-t-il de ces coniques par un point donné du plan?*

(a) Prenons comme origine le sommet donné et comme axes une parallèle à l'asymptote donnée et une perpendiculaire à cette asymptote.

Soit $OA = a$ l'ordonnée de l'asymptote.

L'équation générale des coniques passant à l'origine et ayant l'axe des x comme direction asymptotique est

$$(1) \qquad 2\lambda xy + \mu y^2 + 2\nu x + 2\theta y = 0.$$

La droite $y - a = 0$ sera asymptote si, quand on fait $y = a$ dans l'équation (1), celle-ci a une seconde racine infinie; donc

$$(2) \qquad \lambda a + \nu = 0.$$

L'équation devient

$$(3) \qquad 2\lambda xy + \mu y^2 - 2\lambda ax + 2\theta y = 0.$$

Nous exprimerons que le point O est sommet en écrivant que la tangente à la courbe en ce point est perpendiculaire au diamètre correspondant; or l'équation de la tangente à l'origine est

$$\lambda ax - \theta y = 0.$$

Son coefficient angulaire est

$$m = \frac{\lambda a}{\theta}.$$

L'équation du diamètre correspondant est

$$F'_x + \frac{\lambda a}{\theta} F'_y = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda y - \lambda a + \frac{\lambda a}{\theta}(\lambda x + \mu y + \theta) = 0,$$

ou

$$\lambda y + \frac{\lambda a}{\theta}(\lambda x + \mu y) = 0.$$

Son coefficient angulaire est

$$m' = \frac{-\lambda a}{\theta + \mu a}.$$

On doit avoir entre m et m' la relation

$$mm' + 1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\lambda a}{\theta}\,\frac{\lambda a}{\theta + \mu a} - 1 = 0$$

ou

$$\mu = \frac{\lambda^2 a^2 - \theta^2}{a\theta}.$$

L'équation (3) devient alors

$$(4) \qquad 2\lambda xy + \left(\frac{\lambda^2 a^2 - \theta^2}{a\theta}\right) y^2 - 2a\lambda x + 2\theta y = 0.$$

Nous pouvons diviser par θ et remplacer le paramètre $\frac{\lambda}{\theta}$ par la seule lettre λ

$$(5) \qquad 2\lambda xy + \frac{\lambda^2 a^2 - 1}{a} y^2 - 2a\lambda x + 2y = 0.$$

En divisant par le paramètre θ, nous avons supposé $\theta \gtrless 0$; si l'on avait $\theta = 0$, l'équation (1) deviendrait

$$(6) \qquad 2\lambda xy + \mu y^2 - 2a\lambda x = 0;$$

la tangente à l'origine serait l'axe des y, un axe de la conique coïnciderait avec Ox, le centre de la courbe serait rejeté à l'infini, la conique ne serait donc pas une hyperbole effective.

(b) Cherchons le nombre des hyperboles représentées par l'équation (5) qui passent par un point donné du plan (α, β).

L'équation de condition

$$(7)\qquad 2\lambda\alpha\beta + \frac{\lambda^2 a^2 - 1}{a}\beta^2 - 2a\lambda\alpha + 2\beta = 0$$

nous donne les valeurs de λ qui fournissent les hyperboles demandées.

On voit donc qu'il y a en général deux hyperboles passant par un point du plan.

Ordonnons l'équation (7) par rapport à λ

$$(8)\qquad a\beta^2\lambda^2 + 2\alpha(\beta - a)\lambda + 2\beta - \frac{\beta^2}{a} = 0;$$

les valeurs de λ ne seront réelles que si l'on a

$$\alpha^2(\beta - a)^2 - \beta^2(2a\beta - \beta^2) > 0.$$

Cette inégalité détermine les régions du plan par chaque point desquelles passent deux hyperboles réelles.

Le lieu géométrique dont l'équation est

$$\alpha^2(\beta - a)^2 - \beta^3(2a - \beta) = 0,$$

est celui des points du plan par lequel passent deux hyperboles confondues : c'est l'enveloppe des coniques du système.

Exercices proposés.

Former les équations générales des coniques définies dans les sujets de composition suivants :

1° Admission à l'École Centrale en 1867, 1^re session (t. II, p. 36*), — 1868, 1^re session (t. II, p. 37*); — 1870, 1^re session (t. II, p. 39*); — 1872, 1^re session (t. II, p. 39*); — 1874, 1^re session (t. II, p. 41*); — 1879, 1^re session (t. II, p. 44*); — 1882, 1^re session (t. II, p. 47*); — 1887, 2^e session (t. II, p. 53*); — 1888, 2^e session (t. II, p. 54*); — 1891, 1^re session (t. II, p. 88*); — 1892, 1^re et 2^e sessions (t. II, p. 89*); — 1893, 1^re et 2^e sessions (t. II, p. 90*); — 1894, 1^re et 2^e sessions (t. II, p. 91*).

2° Admission à l'École Normale en 1865 (t. II, p. 25*); — 1867 (t. II, p. 25*); — 1875 (t. II, p. 27*); — 1877 (t. II, p. 28*); — 1882 (t. II, p. 30*); — 1892, § 1 (t. II, p. 83*); — 1895, § 2 (t. II, p. 85*).

3° Admission à l'École Polytechnique en 1867 (t. II, p. 9*); — 1869 (t. II, p. 10*); — 1872 (t. II, p. 10*); — 1874 (t. II, p. 11*); — 1888 (t. II, p. 18*); — 1889 (t. II, p. 19*).

4° Concours général Paris en 1893, § 1 (t. II, p. 97*); — 1895, § 2 (t. II, p. 98*).

CHAPITRE XIV.

CONSTRUCTION DES CONIQUES.

Rappel de résultats.

Nous nous proposons, dans ce Chapitre, de montrer comment on peut déduire géométriquement de la connaissance de certains éléments d'une conique tous ceux qui sont nécessaires à sa détermination complète.

Pour lire utilement ce Chapitre, il faut connaître toutes les propriétés que nous avons étudiées successivement, tous les résultats acquis pouvant être employés.

La détermination géométrique des coniques comporte deux cas distincts :

1° Les éléments donnés sont tels qu'une seule conique peut les admettre : le problème est du premier degré; on le résout par la règle seule.

2° Deux coniques peuvent admettre les éléments donnés : le problème ne peut se résoudre qu'au moyen du compas.

Nous ne parlons pas du cas où un nombre de coniques supérieur à deux répond aux éléments donnés.

Dans les questions que nous allons traiter, nous emploierons, en dehors des propriétés étudiées précédemment, les théorèmes suivants :

I. — Théorème de Pascal. — *Si un hexagone est inscrit dans une conique, qu'on numérote les côtés consécutifs* 1, 2, 3, 4, 5, 6, *les points de rencontre des droites associées* (1 *et* 4), (2 *et* 5), (3 *et* 6) *sont des points en ligne droite.*

Ce théorème s'applique aussi quand un certain nombre de côtés sont remplacés par des tangentes à la conique ; le point de contact compte alors pour deux sommets.

II. — Théorème de Brianchon. — *Si un hexagone est circonscrit à une conique, qu'on numérote les sommets consécutifs* 1, 2, 3, 4, 5, 6, *les droites* 1,4 — 2,5 — 3,6 *concourent en un même point.*

III. — Théorème de Désargues. — *Les coniques passant par quatre points fixes déterminent sur une sécante quelconque un segment qui se déplace en involution.*

IV. — *Corollaire du théorème de Pascal.* — Si un triangle est inscrit dans une conique, les tangentes aux sommets rencontrent les côtés opposés en trois points situés en ligne droite.

V. — *Corollaire du théorème de Brianchon.* — Si un triangle est circonscrit à une conique, les droites qui joignent les points de contact aux sommets opposés passent par un même point.

VI. — La droite joignant le point de rencontre de deux tangentes à une conique, au milieu de la corde des contacts de ces tangentes, passe au centre de la conique.

VII. — Deux diamètres conjugués d'une conique déterminent sur une tangente fixe à cette conique deux segments comptés à partir du point de contact, dont le produit est constant et égal au carré du demi-diamètre conjugué de celui du point de contact. Si les deux segments sont du même côté du point de contact, la conique est une hyperbole ; c'est une ellipse dans le cas contraire.

I. — Description monographique des coniques.

1. *Ellipse.*

(*a*) L'ellipse est le lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante.

Nous rappelons seulement cette définition pour mémoire, renvoyant à un Traité quelconque de Géométrie pour les conséquences de cette définition.

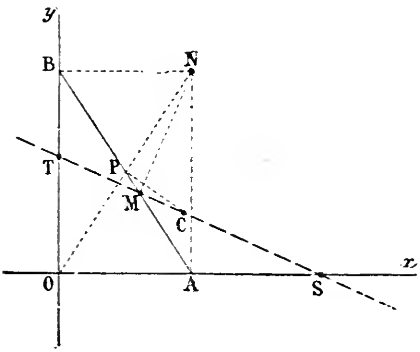
(b) L'ellipse peut être considérée comme la projection d'un cercle sur un plan faisant avec celui du cercle un angle défini par $\cos\theta = \frac{b}{a}$, b étant le demi petit axe de l'ellipse, a le demi grand axe.

2. *Génération de l'ellipse par points et par tangentes.*

On peut engendrer une ellipse au moyen du déplacement d'un point marqué sur un segment de grandeur constante qui glisse dans un angle droit.

Soient AB (*fig.* 51) le segment; M le point marqué. Les

Fig. 51.



axes de l'ellipse engendrée sont dirigés suivant Ox, Oy et ont pour longueurs : sur Ox, $a = MB$; sur Oy, $b = MA$.

Si l'on achève le rectangle OABN, on sait que :

1° NM est la normale à l'ellipse en M;

2° NM est la longueur du demi-diamètre conjugué de OM dans l'ellipse-lieu du point M.

3° La tangente en M est donc perpendiculaire à la droite NM;

4° On a entre les segments MT, MS de la tangente la relation

$$\mathrm{MT.MS} = \overline{\mathrm{MN}}^2.$$

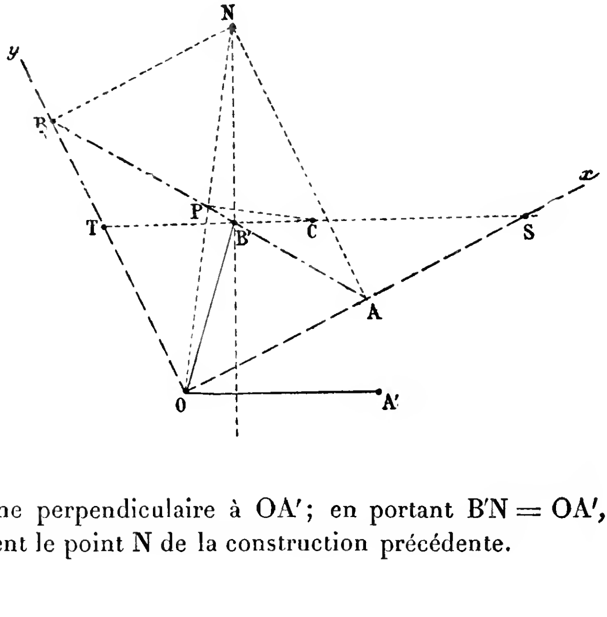
Le quadrilatère TNSO est inscriptible, TS est un diamètre du cercle circonscrit; le milieu C de TS est donc sur la perpendiculaire à la droite ON élevée en son milieu.

Ces résultats permettent de résoudre le problème suivant :

3. *Construire les axes d'une ellipse, connaissant un système de diamètres conjugués.*

Soit OA', OB' (*fig.* 52) le système donné; on mène par

Fig. 52.



B' une perpendiculaire à OA'; en portant B'N = OA', on obtient le point N de la construction précédente.

On joint ON et l'on élève sur ON en son milieu une perpendiculaire à cette droite, qui coupe en C la tangente en B′ à l'ellipse ; on décrit un cercle avec CN comme rayon, C comme centre ; on restitue ainsi les points T et S de rencontre de la tangente avec les axes ; OS, OT sont ces droites. En abaissant du point N des perpendiculaires sur les axes, on restitue les points A, B du segment générateur qui doit passer en B′.

$B'A = b$ est le demi-axe suivant OT :

$B'B = a$ est le demi-axe suivant OS.

4. *Hyperbole.*

(*a*) L'hyperbole est le lieu des points dont la différence des distances à deux points fixes est constante.

(*b*) Les asymptotes de l'hyperbole sont les diagonales des parallélogrammes construits sur les systèmes de diamètres conjugués de la conique.

(*c*) Les diamètres conjugués de l'hyperbole sont les mêmes pour la courbe et pour ses asymptotes.

Il en résulte :

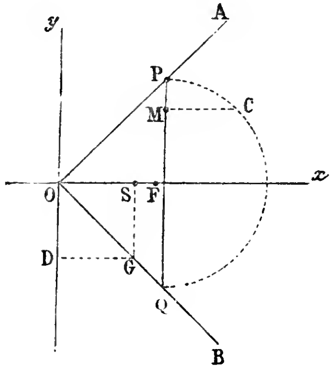
1° Que pour une sécante quelconque les segments compris entre la courbe et ses asymptotes sont égaux ;

2° Que les portions de tangentes comprises entre le point de contact et les asymptotes sont égales.

5. *Construire une hyperbole, connaissant les asymptotes et un point.*

Soient (*fig.* 53) OA, OB les asymptotes données : leurs bissectrices Ox, Oy sont les axes de la courbe. On sait que $MP.MQ = b^2$, b étant le demi-axe non transverse. On peut donc obtenir la longueur b et en conclure a et les autres éléments; on décrit un cercle sur PQ comme diamètre $MC = b$; on porte $OD = b$; on mène une parallèle à Ox jusqu'à sa rencontre avec OB; du point de rencontre on mène une

Fig 53.



parallèle à Oy, S est le sommet de la courbe; en portant sur Ox $OF = OG$, on obtient le foyer F, etc.

6. *Construire une hyperbole, connaissant un système de diamètres conjugués.*

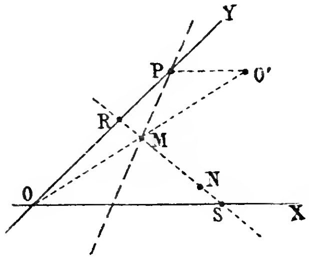
On achève le parallélogramme défini par les diamètres conjugués donnés et l'on obtient, en menant les diagonales, les asymptotes de la courbe; on est alors ramené au problème précédent.

7. *Construire par points et tangentes une hyperbole, connaissant les asymptotes et un point.*

Soient (*fig.* 54) OX, OY, M les données. Construisons d'abord la tangente en M; cette droite doit passer en M et être menée de telle sorte que le milieu de sa portion comprise entre les droites OX, OY soit en M; pour réaliser ces conditions, il suffit de prendre MO′ = MO, de mener O′P parallèle à OX et de joindre PM : c'est la tangente cherchée.

Un point quelconque de la courbe s'obtiendra en menant

Fig. 54



une sécante arbitraire par le point M; soient R, S ses rencontres avec les asymptotes; en prenant SN = RM, on a en N un point de la courbe (*propriété segmentaire*); on construira la tangente comme plus haut.

Les points de la seconde branche s'obtiendront, soit en prenant les symétriques des points déjà construits par rapport au centre, soit en appliquant les propriétés segmentaires; dans ce cas, on aura soin de porter les longueurs à partir de la seconde asymptote en sens inverse de celui dans lequel est compté le segment connu à partir de la première.

8. *Construire une hyperbole, connaissant trois points et les directions des asymptotes.*

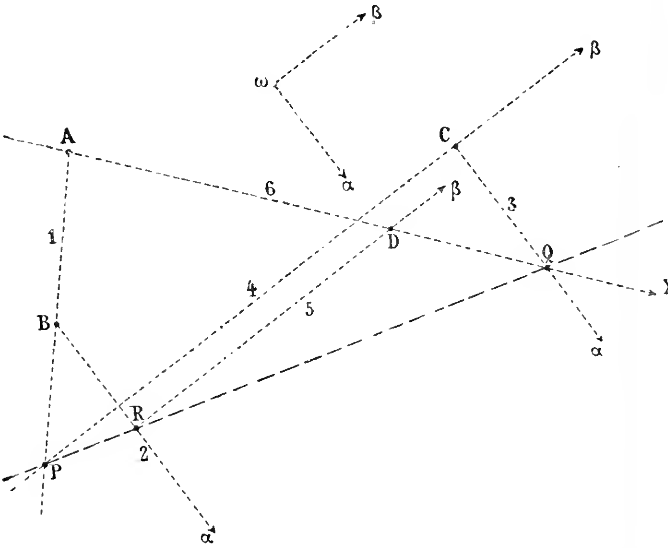
(*a*) Nous connaissons en tout cinq points; deux sont rejetés à l'infini dans les directions données : le théorème de Pascal est immédiatement applicable. Soient $\omega\alpha$, $\omega\beta$ les directions asymptotiques (*fig.* 55).

Numérotons les côtés :

$$AB - 1, \quad B\alpha - 2, \quad \alpha C - 3, \quad C\beta - 4;$$

cherchons le point de la conique situé sur une sécante

Fig. 55.



arbitraire AX menée par le point A; c'est le côté 6; le côté 5 passe par le point β et le point inconnu.

Soient P le point de rencontre des côtés (1) et (4) : Q celui des côtés (3) et (6).

Menons PQ : cette droite rencontre le côté (2) au point R; ce point appartient au côté (5); en menant Rβ parallèle à ωβ, on obtient le point cherché en D.

On construit de même une tangente, etc.

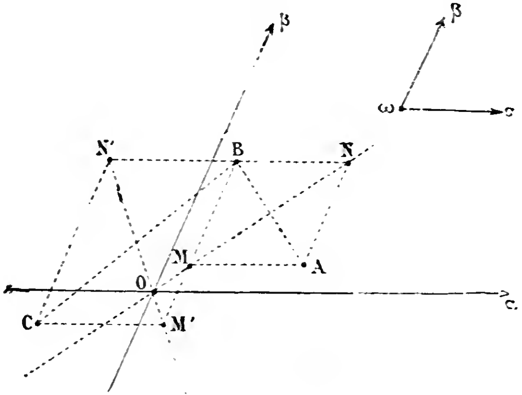
(*b*) On peut opérer autrement en se basant sur la propriété suivante, conséquence immédiate des propriétés segmentaires de l'hyperbole.

Si l'on construit sur une corde quelconque à l'hyperbole comme diagonale un parallélogramme dont les côtés sont parallèles aux asymptotes de la courbe, la seconde diagonale passe par le centre.

Soient (*fig.* 56) A, B, C les trois points donnés; ωx, $\omega\beta$ les directions asymptotiques.

Sur AB comme diagonale je construis le parallélogramme

Fig. 56.



dont les côtés sont parallèles aux asymptotes : la seconde diagonale MN est un premier lieu du centre. La même construction effectuée sur la diagonale BC donne, en M'N', un second lieu de ce point; la rencontre B des droites MN, M'N' est le centre de l'hyperbole : on est ramené à un problème déjà traité.

9. *Hyperbole équilatère.*

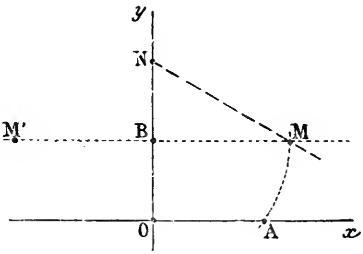
L'équation de cette courbe, rapportée à ses axes, est

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} - 1 = 0.$$

On peut obtenir autant de points que l'on veut en menant une parallèle quelconque à l'axe transverse.

Soient (*fig.* 57) B sa rencontre avec l'axe non transverse, A un sommet; du point B, avec BA comme rayon, on décrit un cercle qui coupe la droite arbitraire en deux points M et

Fig. 57.



M' de la courbe; en prenant BN = OB, on obtient MN, normale en M.

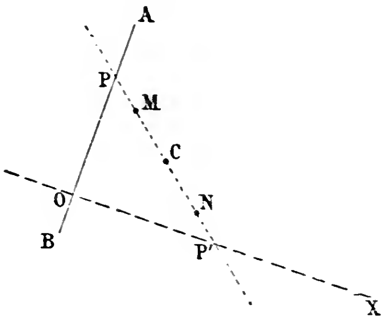
Remarque. — On reconnaît qu'une hyperbole donnée par un système de diamètres conjugués est équilatère, à ce fait que ces diamètres sont égaux; ils sont également inclinés sur les asymptotes.

10. *Construire une hyperbole équilatère, connaissant une asymptote et deux points.*

Soient (*fig.* 58) AB l'asymptote donnée; M, N les points donnés, menons MN; elle rencontre l'asymptote en P; le point P', construit de telle sorte que NP' = MP, est un point de la seconde asymptote. (Propriétés segmentaires de l'hyperbole : le milieu C de la corde MN est le même que celui du segment PP' limité aux asymptotes.)

P'X perpendiculaire à AB est la seconde asymptote, O est le centre de la courbe.

Fig. 58.



Nous sommes ramenés au problème :

Construire une hyperbole, connaissant les asymptotes et un point.

11. *Parabole.*

(*a*) La parabole est le lieu des points équidistants d'un point fixe et d'une droite fixe.

Définition. — On appelle *paramètre* de la courbe le rapport constant du carré de l'ordonnée à l'abscisse du point correspondant.

(*b*) La sous-tangente est double de l'abscisse du point de contact.

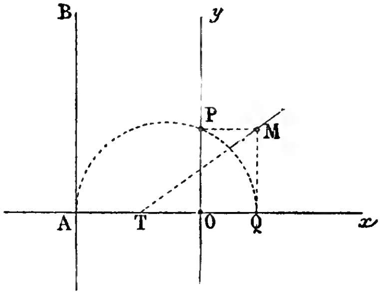
(*c*) La sous-normale est constante et égale au demi-paramètre.

(*d*) On peut construire par points et tangentes une parabole de la manière suivante :

Soit donné $2p$ le paramètre (*fig.* 59).

On porte à partir du sommet $OA = 2p$ et l'on considère la série des cercles tangents en A à AB parallèle à Oy; par les points P et Q on mène des parallèles aux axes : on obtient

Fig. 59.



en M un point de la parabole; en prenant $OT = OQ$, l'on obtient en MT la tangente au point M.

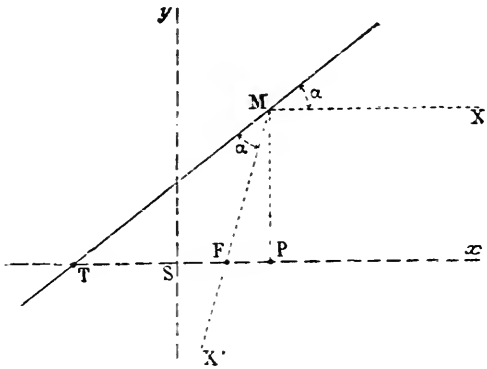
(*e*) La distance d'un point de la parabole à son foyer est égale à $\frac{p'}{2}$, en appelant $2p'$ le paramètre relatif à ce point.

12. *Construire une parabole, connaissant un point, sa tangente, la direction de l'axe et le paramètre relatif à ce point* (on indique, de plus, la région dans laquelle se trouve la courbe).

Soient (*fig.* 60) MT la tangente donnée; MX la direction de l'axe, menée dans la région où se trouve la courbe; M le point de contact.

On mène MX′ faisant avec MT′ un angle égal à l'angle TMX et l'on prend $MF = \frac{p'}{2}$, en appelant $2p'$ le paramètre

Fig. 60



donné; F est le foyer de la courbe; Fx, son axe; le milieu S de T′P, son sommet, etc.

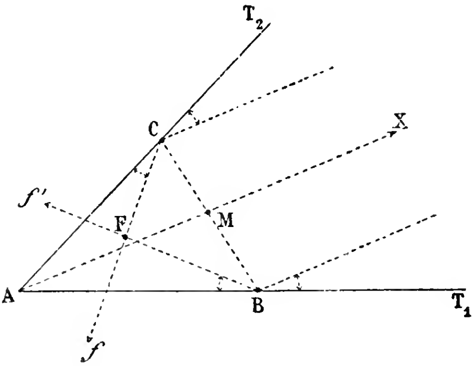
13. *Construire le foyer et la directrice d'une parabole, connaissant deux tangentes et leurs points de contact.*

Soient (*fig.* 61) T_1, T_2 les tangentes données; B, C leurs points de contact. En joignant le point A au milieu de la corde BC, on obtient la direction AX de l'axe de la parabole.

Si l'on mène par les points de contact B, C les droites symétriques des parallèles à l'axe menées par ces mêmes points, on obtient, par leur point de rencontre F, le foyer de la parabole et, par conséquent, l'axe de la courbe.

La droite qui joint les symétriques du point F par rapport aux tangentes T_1, T_2 est la directrice.

Fig. 61.

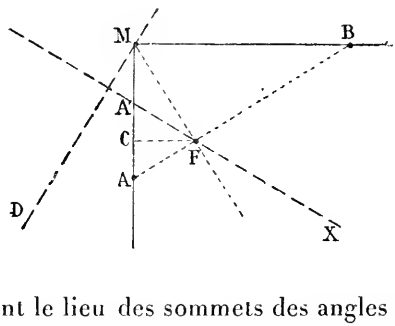


Voici une autre forme de la même question :

14. *Construire une parabole, connaissant un angle droit qui lui est circonscrit et les points de contact.*

La foyer de la courbe est sur la droite AB (*fig.* 62), la

Fig 62.



directrice étant le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la parabole et la polaire d'un point de la directrice passant au foyer; il est également sur la perpendiculaire abaissée de M sur AB (la portion de tangente MB est vue du foyer sous un angle droit), il est donc en F; l'axe s'obtient en joignant le point F au symétrique A′ de A par rapport à la droite FC perpendiculaire à MA; MD est la directrice, etc.

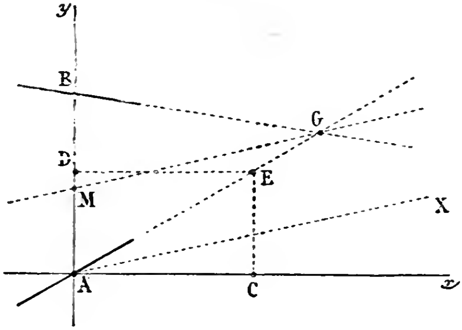
Remarque. — Il passe en général par quatre points donnés deux paraboles; mais quand ces points sont confondus deux à deux, la double droite joignant ces points confondus constitue une parabole singulière; le problème est alors du premier degré.

15. *Équation générale des paraboles passant par deux points donnés* A *et* B *et dont les diamètres ont une direction donnée.*

Détermination géométrique d'une de ces coniques.

En plaçant l'origine (*fig.* 63) au point A, en prenant AB

Fig. 63.



comme axe des y et posant $AB = 2a$, l'équation des paraboles de l'énoncé est

(1) $$(y - mx)^2 + 2\lambda x - 2ay = 0.$$

La tangente à l'origine a pour équation

$$\lambda x - ay = 0, \tag{2}$$

ou

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{\lambda} = 0.$$

On construit cette droite en prenant $AC = \frac{AB}{2} = a$ et $AD = \lambda$ valeur particulière du paramètre; AE est la tangente à l'origine.

Soit AX la direction de l'axe fixe des paraboles; la parallèle à cette droite menée par M, milieu de AC, rencontre en G la droite AE; G est un point de la tangente en B; GB est cette tangente.

Nous connaissons alors deux points, leurs tangentes et la direction de l'axe. (*Voir* Problème précédent.)

II. — Constructions diverses.

1. *Construire une conique, connaissant le centre et deux tangentes avec leurs points de contact.*

D'après l'énoncé on donne

1° Un élément principal (centre): deux conditions;

2° Deux tangentes et leurs points de contact: soit quatre conditions.

En tout six conditions; en apparence, le problème est impossible. Mais la droite qui joint le point de rencontre des deux tangentes au milieu de la corde des contacts passe au centre.

Le choix des éléments donnés n'est donc pas arbitraire; il existe une relation entre eux; par conséquent ils ne constituent que cinq conditions.

Soient (*fig.* 64)

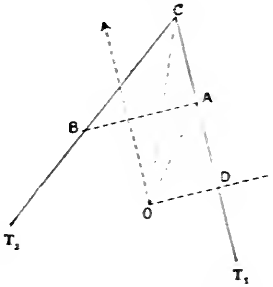
T_1, T_2 les tangentes données;

A, B leurs points de contact;

O le centre donné.

Le diamètre conjugué de OA s'obtient en position en menant par O une parallèle à T_1. Quant à sa longueur, on sait

Fig. 64.



(Chap. XIV, p. 296) que, en appelant A' son extrémité, R et S les points de rencontre de la tangente en A avec un système quelconque de diamètres conjugués de la conique étudiée,

$$\overline{OA'}^2 = AR \times AS.$$

Or, un système facile à construire est celui que forment OC et la parallèle à AB menée par le point O et qui rencontre T_1 en D. On a donc

$$\overline{OA'}^2 = AC \times AD.$$

Nous sommes ramenés au problème connu :

Construire une conique, connaissant un système de diamètres conjugués.

La conique est une ellipse si le point A est intérieur au segment CD ; c'est une hyperbole dans le cas contraire.

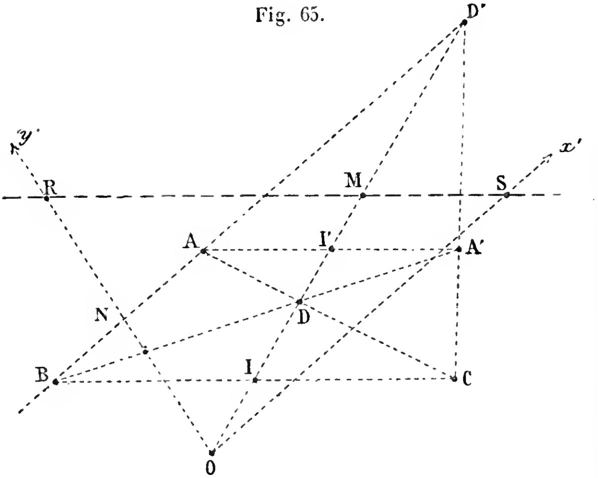
2. *Construire une conique, connaissant le centre et trois points.*

Soient (*fig.* 65) O le centre ; A, B, C les trois points ; nous allons déterminer un système de diamètres conjugués en grandeur et en direction.

Joignons le point O au milieu de la corde BC ; en prenant sur une parallèle à la droite BC menée par le point A, une longueur $I'A' = AI'$, on obtient en A' un quatrième point de la conique.

D'après le théorème de Désargues, le segment déterminé sur

Fig. 65.



la droite OI par les coniques passant aux quatre points $AA'BC$ se déplace en involution.

Deux coniques de ce faisceau sont :

1° Les droites AC, $A'B$ qui rencontrent la sécante en D;

2° Les droites AB, $A'C$ qui donnent le point D'.

Si l'on prend un point M, tel que

$$\overline{OM}^2 = OD.OD',$$

on obtient un point de rencontre de la transversale OI avec la conique ayant son centre au point O.

Soit $OM = a'$: c'est un diamètre de la conique étudiée; son conjugué est en position Ox, parallèle à BC; pour obtenir sa longueur, nous mènerons par le point O le système de diamètres conjugués défini par la corde AB; ce système se compose de la droite ON joignant le centre O, au milieu N de AB et de la parallèle à AB menée par le point O.

Ces droites Ox', Oy' déterminent sur la tangente en M à la conique étudiée deux segments MR, MS, tels que

$$\text{MR}.\text{MS} = b'^2.$$

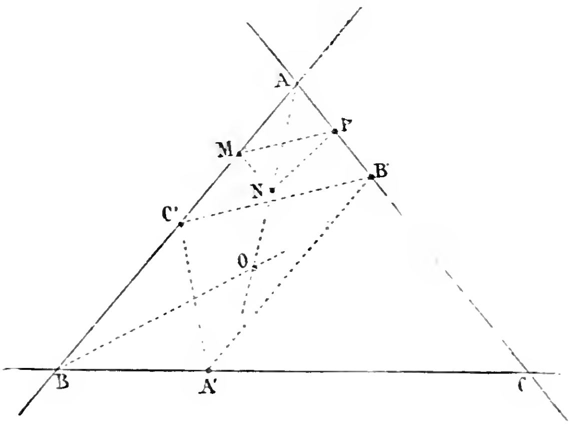
En portant sur Ox $\text{OM}' = b'$, on a un système de diamètres conjugués en grandeur et position OM, OM'.

La courbe est une ellipse ou une hyperbole, suivant que le point de contact M de la tangente est intérieur ou extérieur au segment RS.

3. *Construire une conique, connaissant le centre et trois tangentes.*

Cherchons les points de contact de ces tangentes : soient

Fig. 66.



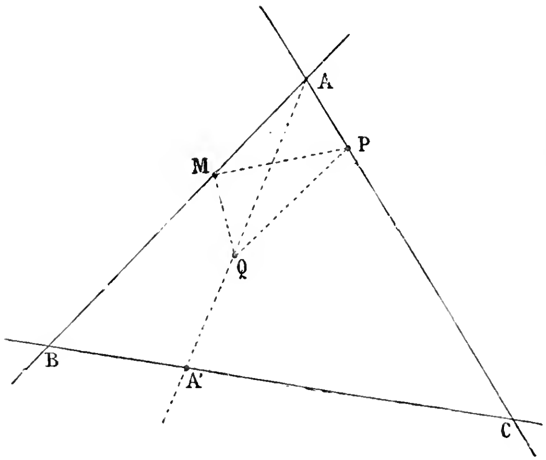
(*fig.* 66) A', B', C' ces points. Si l'on joint le point A au milieu de la corde B'C', cette droite passe au centre de la conique; le triangle A'B'C' est donc tel que les milieux de ses côtés sont situés sur les droites AO, BO, CO, et les sommets sur les droites AB, AC, BC.

Déterminons d'abord les directions de ses côtés; pour cela prenons un point M quelconque sur AB et menons une parallèle au côté AC jusqu'à sa rencontre N avec la droite AO; menons par le point N une parallèle à la droite AB; la diagonale MP du parallélogramme ainsi défini est parallèle au côté B'C'.

On obtiendrait de même les directions des deux autres côtés.

Construisons (*fig.* 67) sur MP comme côté, un trian-

Fig. 67.



gle MPQ semblable au triangle A'B'C'; la ligne AQ prolongée vient couper le côté BC en un point A' qui est un sommet du triangle cherché : c'est un point de contact.

On en déduit les deux autres et l'on est ramené au problème précédent.

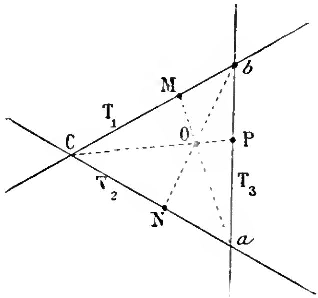
4. *Construire une conique, connaissant trois tangentes et les points de contact de deux d'entre elles.*

Soient (*fig.* 68) T_1, T_2, T_3 les tangentes données ; M, N les points de contact.

Le théorème V permet d'obtenir immédiatement le point P de contact de la tangente T_3.

Les droites obtenues en joignant le point b au milieu de MP

Fig. 68.



et c au milieu de MN se coupent au centre de la conique (V).

Si donc ce point est à distance finie, la conique est une ellipse ou une hyperbole ; dans le cas contraire, c'est une parabole.

Nous sommes ramenés au problème précédent.

5. *Construire une conique, connaissant trois points et sachant qu'une droite donnée a pour pôle un point donné.*

Soient (*fig.* 69)

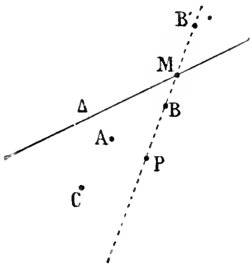
A, B, C les trois points donnés ;

Δ la droite donnée ;

P son pôle.

Je joins PB qui rencontre la droite Δ en M et je prends le conjugué harmonique du point B par rapport au segment PM, j'obtiens en B' un autre point de la conique; en répétant cette construction pour le point A, on obtien-

Fig. 69.



drait un nouveau point : on a cinq points, la conique est déterminée.

6. *Construire une conique, connaissant deux points, un foyer et l'excentricité.*

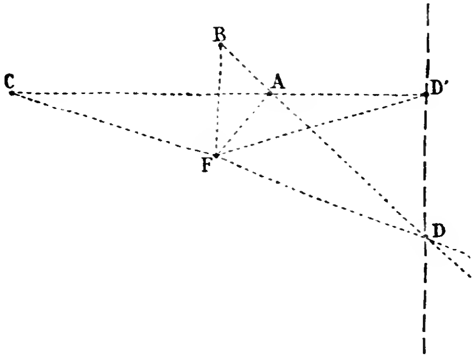
Cherchons la directrice correspondant au foyer donné; elle est tangente aux circonférences décrites des points donnés avec des rayons déterminés par cette condition qu'ils soient à la distance du point pris comme centre au foyer dans le rapport donné, valeur de l'excentricité : le problème compte donc quatre, deux ou pas de solutions, suivant les positions relatives des points donnés et du foyer et suivant la valeur de l'excentricité.

Soient F le foyer donné, D le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la directrice; les points qui partagent la distance FD dans le rapport donné comme valeur de l'excentricité sont les sommets : on en déduit le centre et les autres éléments.

7. *Construire une conique, connaissant le foyer et trois points.*

(*a*) Soient (*fig.* 70) F le foyer; A, B, C les trois points donnés que nous supposerons d'abord sur une même branche de courbe; la bissectrice *extérieure* de l'angle AFB ren-

Fig. 70.



contre la droite AB en un point D appartenant à la directrice correspondant au foyer F.

On obtient de même le point D' rencontre de la droite CA avec la bissectrice extérieure de l'angle CFA.

On connaît alors le foyer F, sa directrice et un point; la nature de la conique dépend de la valeur de l'excentricité.

(*b*) Supposons actuellement [1] que le point A appartienne à une branche de courbe et les points B et C à l'autre branche : la bissectrice *intérieure* de l'angle AFB rencontre en D la droite AB; D est un point de la directrice; on obtient de même D' rencontre de la bissectrice intérieure de l'angle ACF avec AC. DD' est la directrice.

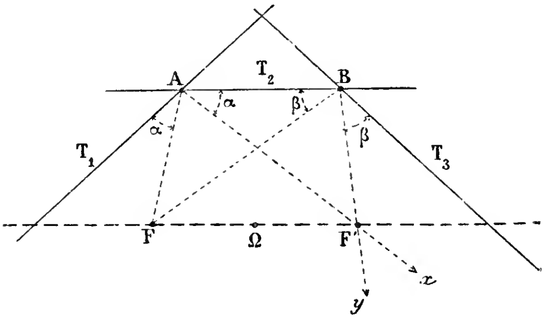
---

[1] Prière de faire la figure.

8. *Construire une conique, connaissant un foyer et trois tangentes.*

Soient (*fig.* 71) T_1, T_2, T_3 les trois tangentes données; F le foyer.

Fig. 71.



Menons AF; le second foyer se trouve sur la droite Ax faisant avec la tangente T_2 un angle $\alpha = \text{FAT}_1$.

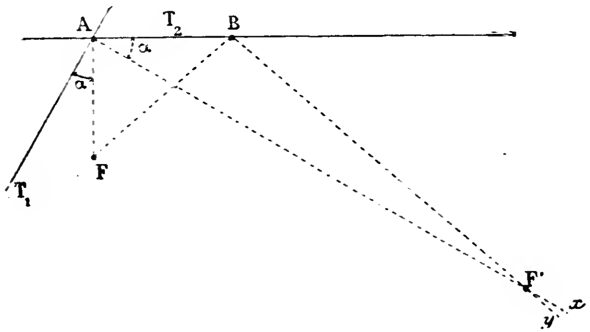
La même construction répétée en B donne, par l'intersection des droites Ax, By, le second foyer F'; on en déduit le centre Ω et l'on est ramené au problème :

Construire une conique, connaissant le centre et trois tangentes.

9. *Construire une conique, connaissant un foyer, deux tangentes et le point de contact de l'une d'elles.*

Soient (*fig.* 72) T_1, T_2 les tangentes données; B le point de contact de T_2, on obtiendra le second foyer F' par l'intersection de la droite Ax, menée comme dans la construction précédente, et de la droite By faisant avec T_2 et en sens contraire un angle égal à l'angle FBA. On connaît alors les deux foyers et un point : la conique est une ellipse si les deux foyers sont du même côté de la tangente; c'est une hyperbole dans le cas contraire.

Fig. 72.



10. *Construire une conique à centre, connaissant une directrice, une tangente avec son point de contact et la direction du diamètre qui passe par ce point.*

Soient (*fig.* 73)

D la directrice donnée;
MT la tangente;
M son point de contact;
MΔ le diamètre de ce point.

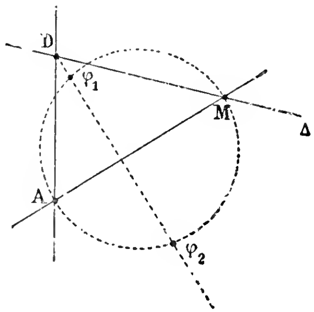
Proposons-nous de chercher le foyer correspondant à la directrice donnée; connaissant ce point, nous aurons le centre de la courbe et tous les éléments qu'on voudra.

1° Soit A le point de rencontre de MT avec la directrice D; on sait que la portion MA de la tangente est vue du foyer sous un angle droit : un premier lieu géométrique du foyer cherché est donc la circonférence décrite sur MA comme diamètre.

2° On sait que la polaire de tout point de la directrice passe au foyer et est perpendiculaire à la droite joignant le point de la directrice au foyer; de plus, la polaire d'un point est parallèle au diamètre conjugué de celui qui passe par le point. Si donc D est le point commun à la directrice donnée et au diamètre M Δ, la polaire du point D est parallèle à MT et la droite FD est perpendiculaire à cette droite.

Un second lieu géométrique du foyer est la perpendiculaire

Fig. 73.



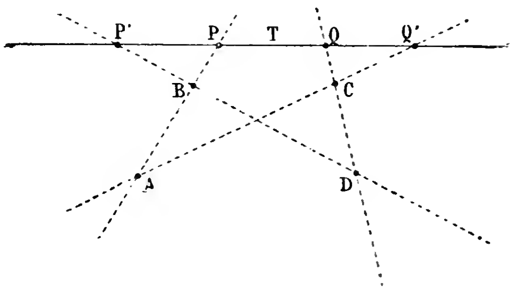
à MT menée par le point D; le foyer est dès lors déterminé par l'intersection d'une droite et d'un cercle : deux coniques répondent à la question; elles sont réelles et distinctes, ou imaginaires, ou confondues.

11. *Construire une conique, connaissant quatre points et une tangente.*

Soient (*fig.* 74) A, B, C, D les quatre points donnés; T la tangente donnée.

Cherchons le point de contact. Toutes les coniques passant par les quatre points A, B, C, D déterminent sur T un segment qui se déplace en involution (*Th. de Désargues*). On obtient facilement deux positions de ce segment au moyen des coniques AB-CD, AC-BD; par les points P, Q on fait passer un cercle quelconque; par les points P′, Q′ on en fait passer un autre : l'intersection de leur axe radical avec la droite T détermine le centre de l'involution; en menant de ce

Fig. 74.



point des tangentes aux circonférences, on obtient la *puissance* de l'involution; les points doubles de l'involution sont les points de contact. Il y a donc deux solutions au problème, si les points doubles sont réels, et aucune solution réelle si ces points doubles sont imaginaires.

Exercices proposés.

Construire les coniques dont les éléments sont définis dans les énoncés suivants :

Admission à l'École Centrale en 1867, 1^{re} session, § 3 (t. II, p. 36*); — 1869, 2^e session, § 2 (t. II, p. 38*); — 1871, 1^{re} session, § 2 (t. II, p. 39*); — 1875, 2^e session, § 4 (t. II, p. 42*); — 1877, 2^e session, § 2 (t. II, p. 43*); — 1878, 2^e session, § 2 (t. II, p. 44*); — 1879, 1^{re} session, § 3 (t. II, p. 44*); — 1883, 1^{re} session, § 2 (t. II, p. 48*); — 1884, 1^{re} et 2^e sessions, § 2 (t. II, p. 49*); — 1885, 2^e session, §§ 3, 4 et 5 (t. II, p. 51*); — 1887, 2^e session, § 3 (t. II, p. 53*); — 1892, 1^{re} session, § 3 (t. II, p. 89*); — 1894, 1^{re} et 2^e sessions, §§ 2 et 1 t. II, p. 91*).

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

PRÉLIMINAIRES.

I. — Lieux géométriques. Généralités.

II. — Principaux cas d'élimination.

CHAPITRE II.

LIGNE DROITE.

I. — Lieux géométriques dont les points sont en ligne droite.

Exercices :

CHAPITRE III.

CERCLE.

I. — Formation des équations générales de cercles remplissant des conditions données. — Marche à suivre.

II. — Pôle et polaire dans le cercle.

Lieux de pôles.

II. — Équation tangentielle.

CHAPITRE VI.

NORMALES.

I. — Lieux des pieds de normales.

CHAPITRE VII.

CENTRE.

CHAPITRE VIII.

DIAMÈTRES CONJUGUÉS.

I. — Déplacement d'une droite liée aux diamètres conjugués d'une conique.

Exercices :

II. — Lieu du milieu de la portion d'une sécante mobile limitée à une conique.

Exercices :

CHAPITRE IX.

AXES. — SOMMETS.

I. — Axes.

CHAPITRE X.

ENVELOPPES.

CHAPITRE XI.

POLE, POLAIRE.

CHAPITRE XIII.

DÉTERMINATION DES CONIQUES.

CHAPITRE XIV.

CONSTRUCTION DES CONIQUES.

I. — Description monographique des coniques.

II. — Constructions diverses.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA PREMIÈRE PARTIE.

5612 B. — Paris, Imp. Gauthier-Villars et fils, 55, quai des Grands-Augustins.