EXPOSITION GÉOMÉTRIQUE

DES

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURBES

Du même auteur et chez les mêmes libraires :

Eléments de Calcul approximatif, quatrième édition, augmentée, 1887.

LAUSANNE. — IMP. GEORGES BRIDEL & Cie

EXPOSITION GÉOMÉTRIQUE

DES

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

DES COURBES

PAR

CHARLES RUCHONNET (de Lausanne).

Sixième édition, augmentée, et accompagnée de sept planches.

LAUSANNE
GEORGES BRIDEL & Cie ÉDITEURS
Place de la Louve.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, LIBRAIRE
Quai des Augustins, 55.

1901

AVANT-PROPOS

Les propriétés fondamentales des lignes sont établies dans cette Exposition à l'aide seulement des premiers éléments de la science mathématique en y comprenant la trigonométrie, et des trois ou quatre principes sur lesquels repose l'emploi des infiniment petits. Ainsi que l'indique le nom donné à ce travail, le calcul n'y joue qu'un très faible rôle, et le raisonnement est habituellement fait sur la figure.

Certains numéros ont été marqués en tête d'un astérisque*; ce sont des numéros dont l'étude n'est pas indispensable à l'intelligence de ceux qui viennent après, et que le lecteur pressé pourra omettre sans courir le risque d'être arrêté plus loin, car ils sont consacrés à des propositions que l'on peut laisser de côté sans que la suite de la lecture s'en ressente. Quand l'astérisque se voit dans le corps d'un numéro, à l'entrée d'un alinéa, il commande le reste du numéro. L'astérisque entre parenthèses renvoie à une note de bas de page.

On remarquera que dans cette Exposition le raisonnement se fait constamment sur la ligne elle-même, jamais sur un polygone qui se confond avec elle à la limite. De même pour les surfaces : on démontre sur la surface même, et non point sur un polyèdre qui finit par coïncider avec elle. Et s'il est quelquefois fait usage de ce polyèdre, ce n'est jamais que pour rendre plus sensibles des théorèmes déjà établis.

On trouvera dans cette édition, entre autres choses qui ne figuraient pas dans la précédente, une théorie nouvelle du cône rond osculateur à la surface lieu des tangentes d'une ligne non plane.

EXPOSITION GÉOMÉTRIQUE

DES

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

DES COURBES

PREMIÈRE PARTIE

LES LIGNES PLANES

De la tangente.

1. On admettra qu'une ligne convexe, c'est-à-dire une ligne qu'aucune droite ne coupe en plus de deux points, est plus courte que toute ligne qui l'enveloppe.

2. *Définition de la tangente.* Qu'on fasse passer une droite par deux points M et M′ d'une courbe; si l'on suppose M fixe et M′ infiniment voisin de M, c'est-à-dire se rapprochant de M et finissant par se confondre avec lui, la droite tournera autour de M et tendra vers une certaine position limite. *C'est cette position limite qu'on appelle la tangente à la courbe au point* M.

Ensuite de cette définition, l'angle que la corde d'un arc infiniment petit fait avec la tangente en l'une de ses extrémités est un angle infiniment petit.

3. *Lemme. — Un arc infiniment petit et sa corde sont deux infiniment petits égaux.*

Soient M, M′ (fig. 1) les extrémités de l'arc; la proposition sera établie si l'on fait voir que, M′ tendant vers M, on a

$$\lim \frac{\text{arc MM}'}{\text{corde MM}'} = 1.$$

Soit L l'intersection des tangentes en M et en M′; nous allons montrer que le rapport $\frac{\text{ML} + \text{M}'\text{L}}{\text{corde MM}'}$ tend vers l'unité. La proposition résultera de là, car d'un côté $\frac{\text{arc MM}'}{\text{corde MM}'}$ est toujours plus grand que l'unité, et de l'autre il finit nécessairement par être et rester inférieur à $\frac{\text{ML} + \text{M}'\text{L}}{\text{corde MM}'}$, puisque l'arc MM′ étant infiniment petit arrive toujours à être convexe s'il ne l'était pas dès l'abord, et par suite moindre que la ligne brisée MLM′ qui l'enveloppe (1).

Soit P le pied de la perpendiculaire abaissée de L sur MM′. Le rapport $\frac{\text{ML} + \text{M}'\text{L}}{\text{corde MM}'}$ étant égal à $\frac{\text{ML} + \text{M}'\text{L}}{\text{MP} + \text{M}'\text{P}}$, il est compris entre les deux rapport $\frac{\text{ML}}{\text{MP}}, \frac{\text{M}'\text{L}}{\text{M}'\text{P}}$; mais ceux-ci tendent vers l'unité, car ils sont respectivement égaux à $\frac{1}{\cos \text{LMP}}, \frac{1}{\cos \text{LM}'\text{P}}$, et les angles LMP, LM′P ont pour limite zéro (2). Ainsi $\frac{\text{ML} + \text{M}'\text{L}}{\text{corde MM}'}$ est compris entre deux nombres qui tendent vers l'unité, il tend dès lors lui-même vers l'unité.

Il est donc acquis que la différence entre un arc infiniment petit et sa corde est infiniment petite comparée à chacun d'eux. On fera connaître plus loin (17) l'ordre de grandeur et l'expression de cette différence.

Remarque I. Il suit encore de cette démonstration que la différence entre l'arc et la ligne brisée MLM′ est infiniment petite comparée à chacun d'eux. On fera connaître aussi l'ordre et l'expression de cette différence (17).

Remarque II. Nous aurons quelquefois, dans le cours de cet ouvrage, à considérer le sinus ou la tangente d'un angle infiniment petit. Si l'on prend pour mesure d'un angle le rapport, au rayon, de l'arc de cercle qu'interceptent ses côtés quand son sommet coïncide avec le centre du cercle, un angle infiniment petit, son sinus et sa tangente sont trois infiniment petits égaux. Supposons, en effet, que l'arc MM′ soit un arc de cercle, appelons O son centre, et D le point où il est coupé par LP. Un angle égal à la moitié de l'angle MOM′, son sinus et sa tangente, sont respectivement égaux aux rapports

$$\frac{\text{arc MD}}{\text{OM}}, \frac{\text{MP}}{\text{OM}}, \frac{\text{ML}}{\text{OM}};$$

or il résulte de ce qu'on vient de lire que les numérateurs de ces trois rapports, et par suite les rapports eux-mêmes, sont égaux en tant qu'infiniment petits.

Corollaire. Voici du présent lemme une conséquence qui sera utilisée plus loin.

Entre les deux extrémités A et B (fig. 2) d'un arc quelconque marquons une suite de points a, b, c, ... que nous supposerons augmenter en nombre indéfiniment, et qui diviseront l'arc AB en arcs iufiniment petits, Aa, ab, bc, ... Puisque chacun de ces arcs ne diffère de sa corde que d'une partie infiniment petite de lui-même, la somme des différences entre les arcs et leurs cordes respectives est infiniment petite comparée à la somme des arcs, c'est-à-dire comparée à l'arc AB, donc elle tend vers zéro. Ce qui fait que si l'on appelle polygone inscrit la longueur du contour polygonal Aabc...B formé par les cordes, on a

$$\lim\,(\text{arc AB} - \text{polygone inscrit}) = 0.$$

Menons les tangentes aux points de division ainsi qu'en A et en B. Soient m, n, o,.... les intersections des tangentes en A et en a, en a et en b, en b et en c,.... La différence entre chacune des lignes brisées Ama, anb, boc,.... et l'arc compris entre ses extrémités étant infiniment petite comparée à cet arc, la somme de ces différences est infiniment petite comparée à la somme des arcs, laquelle n'est autre que l'arc AB ; elle tend en conséquence vers zéro. Si donc on appelle polygone circonscrit la longueur du contour polygonal Amno...B formé par les tangentes, on a

$$\lim\,(\text{polygone circonscrit} - \text{arc AB}) = 0.$$

4. *L'angle que font entre elles les tangentes aux deux extrémités d'un arc qui tend vers zéro est, en général, du même ordre infinitésimal que l'arc.*

Traçons dans le plan de la courbe une droite quelconque A (fig. 3), et marquons sur la courbe elle-même un point B. L'angle que fait avec la droite A la tangente en un point M de la courbe, et la longueur de l'arc BM, sont deux grandeurs fonctions l'une de l'autre. Le rapport des accroissements que reçoivent ces deux grandeurs quand on passe du point M à un point M′ infiniment voisin tend donc en général vers une limite finie (*). Or l'angle que font entre elles les tangentes en M et en M′ est égal à l'accroissement que prend alors la première, et l'arc MM′ est l'accroissement que reçoit la seconde. De là résulte la proposition.

Voici, au surplus, la démonstration directe : Entre deux points H et K d'une courbe marquons une série de points $a, b, c, \ldots.$ que nous supposerons ensuite augmenter en nombre indéfiniment. Soient α_1, α_2, etc., les angles des tangentes en H et en a, en a et en b, etc., et soient s_1, s_2, etc., les longueurs des arcs Ha, ab, etc. Si les rapports $\frac{\alpha_1}{s_1}, \frac{\alpha_2}{s_2}, \frac{\alpha_3}{s_3}, \ldots.$ tendent tous vers zéro ou tous vers l'infini quand le nombre des points de division croît indéfiniment, le rapport

(*) On sait, et cela depuis un demi-siècle environ, qu'elle n'est pas d'une vérité absolue la proposition qui veut que le rapport des accroissements simultanés et infiniment petits de la fonction et de la variable ne puisse tendre vers zéro ou vers l'infini que pour des valeurs de la variable isolées, jamais pour toutes celles comprises dans un intervalle ; et sans aller plus loin on trouvera un exemple de fonction où cette proposition ne se vérifie point dans les *Archives des sciences physiques et naturelles* de la *Bibliothèque universelle et Revue suisse*, au cahier du 15 septembre 1873. Il est de M. Schwarz, aujourd'hui à l'université de Berlin, alors à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich, et il a été donné aussi dans les *Verhandlungen der schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft* de la même année 1873. Supposant à la variable une valeur positive, d'ailleurs quelconque, l'auteur montre d'abord que la fonction qu'il considère et qu'il a définie, est continue, c'est-à-dire qu'à un acccroissement infiniment petit de la variable correspond toujours un accroissement infiniment petit de la fonction, puis, que le rapport de ce dernier accroissemeut au premier tend toujours vers l'infini, jamais vers une limite finie.

$\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots.}{s_1 + s_2 + s_3 + \ldots.}$ tend aussi vers zéro ou vers l'infini. Mais la somme $s_1 + s_2 + s_3 + \ldots.$ est égale à l'arc HK, et la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots.$ à l'angle des tangentes en H et en K pourvu toutefois que l'arc HK soit convexe, condition qu'on peut toujours réaliser en le prenant assez petit. Le rapport en question est donc fini, c'est-à-dire différent de zéro et de l'infini, et il est même constant. Les fractions $\frac{\alpha_1}{s_1}, \frac{\alpha_2}{s_2}, \frac{\alpha_3}{s_3}, \ldots.$ ne sauraient donc tendre toutes vers zéro ou toutes vers l'infini. Comme cette conséquence a lieu quelque petit que soit l'arc HK, ce n'est qu'en des points isolés que le rapport de l'angle des tangentes en deux points infiniment voisins à l'arc compris entre ces points peut tendre vers zéro ou vers l'infini. En d'autres termes, cet angle est, en général, du même ordre que l'arc.

Toutes les fois que dans le cours de cet ouvrage il s'introduira la considération du rapport des accroissements simultanés et infiniment petits de deux grandeurs fonctions l'une de l'autre, un raisonnement semblable montrerait qu'en des points de la courbe isolés seulement ce rapport peut croître au-delà de tout nombre assignable, ou décroître sans autre limite que zéro.

L'angle des tangentes en deux points d'une courbe infiniment voisins porte le nom d'*angle de contingence;* nous le représenterons habituellement par le signe ε.

De la courbure.

5. *Définition de la courbure, du cercle, du rayon et du centre de courbure.* L'angle que font entre elles les tangentes aux deux extrémités d'un arc convexe exprime la quantité dont la courbe a dévié de la ligne droite dans l'étendue de cet arc; mais c'est bien moins cette quantité elle-même que son rapport à la longueur de l'arc qu'il peut être utile de connaître, car c'est ce rapport qui donne une idée du degré d'intensité de la courbure de l'arc.

Si la courbe est un cercle le rapport en question est constant, c'est-à-dire indépendant de la longueur de l'arc. Il est alors égal à la réciproque du rayon, et constitue ce qu'on nomme *la courbure du* *cercle*. Dans tout autre courbe plane il est variable, et pour un arc donné il constitue ce qu'on pourrait appeler *sa courbure moyenne*. Supposons l'arc infiniment petit : le rapport que nous considérons tendra vers une limite que nous savons être en général finie (4), et désignant par M celle des deux extrémités de l'arc qui est fixe, cette limite est ce qu'on nomme *la courbure au point* M.

Le cercle dont la courbure est égale à cette limite est appelé *le cercle de courbure au point* M ; son rayon est *le rayon de courbure*. Si l'on place ce cercle tangentiellement à la courbe en M de façon que les concavités de la courbe et du cercle soient tournées du même côté, son centre est *le centre de courbure au point* M.

Il suit de la définition du rayon de courbure qu'il est la réciproque de la courbure, et, conséquemment, qu'*il est égal à la limite du rapport d'un arc infiniment petit commençant au point* M, *à l'angle des tangentes en ses extrémités*. Comme cet angle est en général du même ordre que l'arc, le rayon de courbure est en général fini, ou, en d'autres termes, ne peut devenir nul ou infini qu'en des points isolés.

Qu'à partir dn point M de contact de la courbe et du cercle de courbure on prenne sur l'une et sur l'autre ligne des arcs infiniment petits égaux dont soit a la longueur commune. Soient ε, ε' les angles de contingence respectifs de ces deux arcs. Le rapport $\frac{a}{\varepsilon'}$ est égal au rayon du cercle, et, partant, on a $\frac{a}{\varepsilon'} = \lim \frac{a}{\varepsilon}$, d'où $\lim \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = 1$. Le cercle de courbure est donc celui qui a même angle de contingence que la courbe, au point de contact.

De tous les cercles tangents à une courbe en un point donné, le cercle de courbure est celui qui s'en rapproche le plus dans les environs de ce point. On peut dès à présent pressentir ce fait, dont nous aurons plus loin (19 et 25) la preuve.

6. *Le centre de courbure en un point* M *d'une courbe est la limite du point de rencontre des normales en* M *et en un point* M' *infiniment voisin*. On appelle *normale* la perpendiculaire élevée à la tangente au point où elle touche la courbe.

Soit O (fig. 4) l'intersection des normales en M et en M' ; la proposition sera démontrée si l'on établit que la limite de la longueur MO est le rayon de courbure au point M, c'est-à-dire, en désignant, comme nous en sommes convenus, par ε l'angle des tangentes en M et en M', qu'on a

$$\lim \mathrm{MO} = \lim \frac{\mathrm{arc\ MM'}}{\varepsilon}.$$

Les tangentes étant perpendiculaires aux normales, l'angle ε est égal à l'angle des normales, c'est-à-dire à l'angle O. La question est donc ramenée à montrer qu'on a

$$(a) \qquad \lim \mathrm{MO} = \lim \frac{\mathrm{arc\ MM'}}{\mathrm{angle\ O}}.$$

De O comme centre avec OM pour rayon décrivons un cercle ; il coupe la normale M'O en un point P et l'on a

$$\mathrm{MO} = \frac{\mathrm{arc\ MP}}{\mathrm{angle\,O}},$$

et, par conséquent,

$$\lim \mathrm{MO} = \lim \frac{\mathrm{arc\ MP}}{\mathrm{angle\,O}}.$$

Ensuite de cette égalité, pour que la relation (a) que nous avons en vue d'établir soit vraie, il faut et il suffit que les arcs MM' et MP soient des infiniment petits égaux ; tout revient donc à montrer qu'on a

$$\lim \frac{\mathrm{arc\ MM'}}{\mathrm{arc\ MP}} = 1,$$

ce qui, d'après le principe du n° 3, exige seulement qu'on ait

$$\lim \frac{\mathrm{corde\ MM'}}{\mathrm{corde\ MP}} = 1.$$

Or cette dernière relation est évidente, car les angles MM'P et MPM' sont droits à la limite.

Le lieu des centres de courbure en tous les points d'un arc donné est une ligne remarquable dont nous allons étudier les propriétés. Elle a reçu le nom de *développée,* et l'on aura tout à l'heure la raison de cette dénomination.

7. *Les rayons de courbure sont tangents à la développée.*

M et M′ (fig. 5) étant toujours deux points infiniment voisins pris sur la ligne donnée, soient C et C′ les centres de courbure qui leur correspondent : il sera acquis que le rayon de courbure MC est tangent en C à la développée si l'on prouve que l'angle qu'il fait avec CC′ a zéro pour limite. Soit O l'intersection de MC et de M′C′ ; la question est ramenée à faire voir que l'angle C du triangle OCC′ est infiniment petit.

L'arc CC′ de la développée est du même ordre infinitésimal que l'arc MM′, car la longueur de la développée et celle de la courbe primitive, comptées sur l'une et sur l'autre ligne à partir d'un de ses points, sont deux variables fonctions l'une de l'autre, ce qui fait que leurs accroissements simultanés et infiniment petits sont en général du même ordre. L'angle MOM′, égal à l'angle des tangentes en M et en M′, est aussi du même ordre que l'arc MM′. Il suit de là que le rapport $\frac{CC'}{\sin O}$ tend vers une limite finie, et aussi par conséquent son égal $\frac{OC'}{\sin C}$. Mais OC′ tend vers zéro, car le point O est infiniment voisin des points C et C′ (6). Donc l'angle C est infiniment petit.

8. *Lemme.* On a joint, par une droite, M′ avec un point Q pris sur la tangente en M (fig. 6). On ne suppose pas la direction M′Q invariable, on suppose seulement que l'angle qu'elle fait avec la tangente en M tende vers une limite différente de zéro. M′Q est alors infiniment petit comparé à l'arc MM′, et les longueurs arc MM′ et MQ sont des infiniment petits égaux. L'arc MM′ et sa corde étant égaux en tant qu'infiniment petits, on pourra dans le raisonnement substituer la corde à l'arc.

Le triangle MM′Q donne $\frac{M'Q}{MM'} = \frac{\sin M}{\sin Q}$; or l'angle M tendant vers zéro et l'angle Q vers une limite finie, $\frac{\sin M}{\sin Q}$ tend vers zéro, et par suite aussi $\frac{M'Q}{MM'}$. Donc M′Q est infiniment petit par rapport à l'arc MM′.

Il résulte de là que MM′ et MQ sont des infiniment petit égaux, puisque, formant deux côtés du triangle, leur différence est plus petite que M′Q, qui forme le troisième.

9. *L'accroissement que prend le rayon de courbure quand on passe de l'une à l'autre des deux extrémités d'un arc est égal en longueur à l'arc correspondant de la développée* (*).

Durant tout le cours de cette Exposition l'arc infiniment petit MM′ sera considéré comme étant du premier ordre infinitésimal. Ceci convenu, et les mêmes lettres (fig. 7) continuant à représenter les mêmes choses, nous montrerons d'abord que M′C′ — MC, quantité dont le rayon de courbure croît de M à M′, ne peut différer de l'arc CC′ que d'une grandeur d'ordre supérieur au premier.

Soient H et K les points en lesquels les perpendiculaires élevées à MC de M et de C coupent M′C′; on a

$$\text{arc}\,CC' - (M'C' - MC) = M'H - (KC' - \text{arc}\,CC') - (HK - MC).$$

D'après le précédent numéro, M′H et KC′ — arc CC′ sont infiniment petits, le premier par rapport à l'arc MM′, le second par rapport à l'arc CC′; il sont donc d'ordres supérieurs au premier. Et quant à la différence HK — MC, elle est du second ordre puisque l'angle des directions HK, MC, étant égal à celui des tangentes en M et en M′, est du premier. Les termes du second membre de l'égalité sont donc tous trois d'ordres supérieurs au premier; par suite M′C′ — MC ne peut différer de l'arc CC′ que d'une quantité d'ordre supérieur au premier.

Dès lors, si l'on prend un arc fini AB de la ligne primitive et qu'on le décompose en arcs infiniment petits tels que MM′, la somme des différences entre les arcs correspondants CC′ de la développée et les quantités M′C′ — MC sera infiniment petite comparée à la somme des arcs MM′, c'est-à-dire à l'arc AB, et conséquemment elle sera nulle. En d'autres termes la somme des arcs CC′, laquelle n'est autre que l'arc de développée qui correspond à l'arc AB de la ligne primitive, est précisément égale à la somme des différences M′C′ — MC. Mais cette dernière somme est l'accroissement que prend le rayon de courbure quand on passe de l'une à l'autre des deux extrémités de l'arc

(*) La démonstration qu'on va lire est empruntée aux *Eléments de calcul infinitésimal* de Duhamel.

AB. Cet accroissement est donc égal en longueur à l'arc correspondant de la développée.

Corollaire. Menons une tangente à la développée, en la prolongeant, du côté de la courbe primitive, seulement jusqu'à sa rencontre avec celle-ci ; puis faisons-la rouler, sans glisser, sur la développée. Au bout d'un temps quelconque sa longueur, comptée à partir du point de contact, a crû ou décrû exactement de la longueur de l'arc de développée sur lequel elle a roulé pendant ce temps. Par conséquent, en vertu de la proposition de tout à l'heure, *son extrémité n'a point quitté la ligne primitive*. Dès lors, quand la tangente roule sur le lieu du centre de courbure, l'un de ses points décrit la ligne primitive. Si donc on se représente que, par l'effet du contact, les points de ce lieu restent adhérents à la tangente, celle-ci les entraînera l'un après l'autre dans son mouvement, transformant par là en une droite le lieu en question, lequel se trouvera alors engendrer la courbe primitive par son développement en ligne droite. De là vient que le lieu du centre de courbure a reçu le nom de développée (*).

10. *Un arc* MN *est tout entier hors du cercle de courbure au point* M *lorsque le rayon de courbure va croissant toujours de* M *jusqu'à* N ; *il est dans l'intérieur de ce cercle si au contraire le rayon de courbure va décroissant.*

Il suffit évidemment, se plaçant dans la première hypothèse, de faire voir que le point N est situé hors du cercle de courbure en M, et que le point M se trouve dans l'intérieur du cercle de courbure en N.

Soit CD (fig. 8) l'arc de la développée qui correspond à l'arc MN, C étant le centre de courbure au point M, et D celui au point N ; on a

$$\mathrm{CN} + \text{arc } \mathrm{CD} > \mathrm{DN},$$

d'où, à cause de $\mathrm{DN} = \mathrm{CM} + \text{arc } \mathrm{CD}$,

$$\mathrm{CN} > \mathrm{CM}.$$

Le point N est donc extérieur au cercle de courbure en M. Puis on a

$$\mathrm{DM} < \mathrm{CM} + \text{arc } \mathrm{CD},$$

(*) Par rapport à la développée, la courbe primitive est une *développante*. Il sera parlé des développantes dans la seconde partie de l'ouvrage.

et par conséquent, ensuite de la même égalité,

$$DM < DN.$$

Le point M est donc situé dans l'intérieur du cercle de courbure en N.

Corollaire. Il résulte de ce qu'on vient de lire que le cercle de courbure en un point quelconque A de l'arc MN comprend dans son intérieur l'arc AM et laisse en dehors de lui l'arc AN. Partant, *le cercle de courbure traverse en général la courbe au point de contact.*

Pour que le cercle de courbure ne traverse pas la courbe au point de contact il faut qu'en ce point le rayon de courbure cesse de croître pour commencer à décroître, ou qu'il cesse de décroître pour commencer à croître. Dans le premier cas la courbe se voit dans l'intérieur du cercle de courbure de part et d'autre du point de contact; dans le second cas, au contraire, elle est, de part et d'autre du point de contact, extérieure à ce cercle. Les extrémités du petit axe de l'ellipse offrent un exemple de points où le rayon de courbure cesse de croître pour commencer à décroître, et passe donc par un maximum. En celles du grand axe, ce rayon passe par un minimum.

11. *Parmi les cercles tangents à une courbe en un point donné aucun ne la traverse en ce point, à part le cercle de courbure.*

Le rayon d'un cercle tangent à la courbe au point M peut être plus grand ou plus petit que le rayon de courbure CM. Nous montrerons que s'il est plus grand le cercle est situé, dans le voisinage de M et de part et d'autre de ce point, entre la courbe et la tangente, et que s'il est plus petit c'est au contraire la courbe qui est située, dans le voisinage de M et de part et d'autre de ce point, entre le cercle et la tangente. Le théorème énoncé résultera de là. A cause de la proposition précédente il suffira dans le premier cas de considérer le côté où le rayon de courbure va croissant à partir de M, et, dans le second, de considérer le côté où ce rayon va décroissant.

1^er^ cas. Soit V (fig. 9), situé sur la normale MC au-delà de C par rapport à M, le centre du cercle. On suppose que le rayon de courbure commence par aller croissant lorsque, partant de M, on marche dans le sens MX.

Par un point O pris sur la normale entre C et V menons une seconde tangente à la développée. Soient D le point de contact et N le point où elle coupe l'arc MX. Nous allons reconnaître qu'on a, en supposant O assez voisin de C pour que l'arc CD soit convexe, $VN < VM$, et, conséquemment, que le point N est situé dans l'intérieur du cercle de centre V. Il suivra de là que ce cercle passe entre la tangente et l'arc MN.

Puisque l'arc CD est convexe, on a

$$\text{arc } CD < DO + OC,$$

d'où

$$\text{arc } CD + CM < DO + OM,$$

ou

$$DN < DO + OM,$$

d'où

$$ON < OM,$$

d'où

$$VO + ON < VM,$$

donc, à fortiori,

$$VN < VM.$$

2[me] cas. V (fig. 10) est maintenant pris sur la normale MC entre M et C, et l'on suppose que le rayon de courbure commence par décroître. Les mêmes lettres désignant les mêmes choses que dans la figure précédente, nous montrerons qu'en supposant O assez voisin de C pour que l'arc CD soit convexe, on a $VN > VM$, et, par conséquent, que le point N se trouve en dehors du cercle de centre V. Il s'ensuivra que l'arc MN court entre le cercle et la tangente.

L'arc CD étant convexe, la ligne CDN, formée par l'arc CD et la partie DN de la tangente en D, l'est aussi ; donc

$$CV + VN > \text{arc } CD + DN,$$

ou

$$CV + VN > CM,$$

d'où

$$VN > VM.$$

Corollaire. — Il n'est pas possible de tracer un cercle qui passe, à partir du point de contact, entre la courbe et le cercle de courbure. Cela résulte clairement de ce qu'on vient de lire. On verra même plus loin que la courbe est, dans les environs du point de contact, infiniment plus voisine du cercle de courbure que de tout autre cercle tangent.

12. *Le cercle de courbure est la limite du cercle tangent à la courbe au point considéré et passant par un second point de la courbe infiniment voisin.*

Soit MX (fig. 11) un arc de la courbe. Supposons qu'à partir de M le rayon de courbure commence par croître quand on marche dans le sens MX. Soit MY un arc du cercle de courbure pris du même côté de la normale en M que l'arc MX : l'arc MX court, dans les environs de M, entre l'arc MY et la tangente (10).

Soit V un point situé sur MC au-delà de C par rapport à M : le cercle de centre V et de rayon VM passe, dans le voisinage du point M, entre l'arc MX et la tangente (11), et, par suite, dans les environs du point M, l'arc MX passe entre ce cercle et le cercle de courbure, et ceci a lieu quelque petite que soit la distance CV.

Si maintenant on rapproche le point V indéfiniment de C, le cercle dont V est le centre se rapprochera indéfiniment du cercle de courbure et se confondra avec lui à la limite. Puis donc que ces deux cercles sont, dans le voisinage du M et du côté MX, situés de part et d'autre de la courbe, il faut que celui dont le centre est V la coupe en un point qui aille se rapprochant indéfiniment de M lorsque V tend vers C. De là résulte la proposition.

Si l'on avait supposé que le rayon de courbure commençât par décroître à partir de M, on aurait pris le point V entre M et C, et la démonstration eût été la même.

Expressions de diverses grandeurs qui naissent de la considération d'un arc infinitésimal et des tangentes en ses extrémités.

13. *L'angle que fait avec la corde d'un arc infiniment petit la tangente en l'une de ses extrémités est égal à la moitié de l'angle de contingence.*

Soit MT (fig. 12) la tangente au point M : il s'agit de montrer que l'angle TMM′ a pour expression $\frac{1}{2}\varepsilon$, c'est-à-dire qu'il ne diffère de $\frac{1}{2}\varepsilon$ que d'une fraction infiniment petite de lui-même.

Considérons le cercle qui est tangent à la courbe donnée au point M et qui passe par M′ ; appelant S l'arc MM′ de ce cercle, son rayon est égal à $\frac{S}{2\text{TMM}'}$.

En vertu de la proposition établie au numéro précédent, la limite de ce rapport est égale au rayon de courbure en M; mais désignant, comme nous le ferons dorénavant, par Δs l'arc MM′ de la courbe donnée, ce dernier rayon est, par définition, la limite du rapport $\frac{\Delta s}{\varepsilon}$. Partant, les rapports $\frac{S}{2TMM'}$ et $\frac{\Delta s}{\varepsilon}$ tendent vers la même limite. Or leurs numérateurs, étant des arcs de même corde, sont des infiniment petits égaux; leurs dénominateurs sont dès lors aussi des infiniment petits égaux, ce qui démontre la proposition.

Ce raisonnement suppose que le rayon de courbure ne soit ni nul ni infini en M, c'est-à-dire que Δs et ε soient en ce point du même ordre. Il est en défaut si en M le rayon de courbure est nul ou infini.

Soit M′T′ la tangente au point M′ : l'angle T′M′M ayant de même pour expression $\frac{1}{2}\varepsilon$, les angles TMM′, T′M′M sont des infiniment petits égaux. Leur somme est exactement égale à ε, comme on le reconnaît immédiatement au moyen du triangle que forment la corde et les deux tangentes. Quant à leur différence, nous en donnerons plus loin (27) l'expression, et l'on verra qu'elle est du second ordre.

Corollaire. Soit L l'intersection des tangentes en M et en M′; le triangle LMM′ donne $\frac{ML}{M'L} = \frac{\sin M'}{\sin M}$, et comme, ensuite de ce qu'on vient de lire, le second membre tend vers l'unité, il en est de même du premier; ML et M′L sont donc des infiniment petits égaux. Mais d'un autre côté nous avons vu (3, Remarque I) que ML + M′L et arc MM′ sont égaux en tant qu'infiniment petits. Par conséquent ML et M′L sont, en tant qu'infiniment petits, égaux à la moitié de l'arc MM′. En d'autres termes, *la partie de la tangente comprise entre le point de contact et son intersection avec la tangente en un point infiniment voisin a pour expression* $\frac{1}{2}\Delta s$, Δs *représentant l'arc compris entre ces deux points.*

La différence des longueurs ML et M′L est du second ordre, ainsi qu'on le reconnaîtra plus loin (28), quand nous en formerons l'expression.

14. *Le supplément d'un angle inscrit dans un arc infiniment petit vaut la moitié de l'angle de contingence.*

Soit H (fig. 13) un point pris sur l'arc MM' : HI étant le prolongement de la corde MH, il s'agit de montrer que l'angle IHM' est, en tant qu'infiniment petit, égal à $\frac{1}{2}\varepsilon$.

Soit AB la tangente au point H, on a

$$\text{IHM}' = \text{IHB} + \text{BHM}',$$

ou

$$\text{IHM}' = \text{AHM} + \text{BHM}'.$$

Désignant par α, β les angles de contingence des arcs MH, M'H, on a, exactement, $\alpha + \beta = \varepsilon$. Or d'après le numéro précédent les angles AHM, BHM' sont égaux respectivement à $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}\beta$; on a par conséquent, en négligeant une fraction infiniment petite de IHM',

$$\text{IHM}' = \frac{1}{2}\varepsilon.$$

15. *Distance de l'extrémité d'un arc infiniment petit à la tangente en son origine.*

L (fig. 14) continuant à être l'intersection des tangentes en M et en M', soit P le pied de la perpendiculaire abaissée de M' sur la tangente en M ; on a

$$\text{M}'\text{P} = \text{M}'\text{L} \sin \text{M}'\text{LP} = \text{M}'\text{L} \sin \varepsilon.$$

On n'altère le second membre que d'une fraction infiniment petite de lui-même si l'on remplace M'L par $\frac{1}{2}\Delta s$ (13, Cor.) et $\sin\varepsilon$ par ε (3, Rem. II). Il devient alors $\frac{1}{2}\varepsilon\Delta s$, et l'on a cette proposition : *La distance de l'extrémité d'un arc infiniment petit à la tangente en son origine est de l'ordre du carré de l'arc, et vaut la moitié du produit de l'arc par l'angle de contingence.*

Remarque. La distance de M' à la tangente en M comptée suivant une direction quelconque faisant avec cette tangente un angle qui devienne droit à la limite a aussi pour expression $\frac{1}{2}\varepsilon\Delta s$. Car soit M'Q cette distance, on a

$$\frac{\text{M}'\text{Q}}{\text{M}'\text{P}} = \frac{1}{\sin \text{M}'\text{QP}}$$

et comme, ensuite de l'hypothèse, le second membre tend vers l'unité, M'Q et M'P sont des infiniment petits égaux.

***16**. *Flèche d'un arc infinitésimal.* Soient A (fig. 15) le milieu de la corde MM', et B le point où l'arc est coupé par la perpendiculaire élevée à la corde au point A. C'est de la longueur AB, qui est appelée la *flèche* de l'arc, que nous allons chercher l'expression.

On a $$AB = \text{corde } MB \sin AMB.$$

Les cordes MB et M'B étant égales, elles valent $\frac{1}{2}\Delta s$. Quant à l'angle AMB il est la moitié du supplément de celui que font entre elles ces cordes, et vaut par conséquent $\frac{1}{4}\varepsilon$ (14). Remplaçant corde MB et sin AMB par $\frac{1}{2}\Delta s$ et $\frac{1}{4}\varepsilon$ on obtient

$$AB = \frac{1}{8}\varepsilon\Delta s.$$

17. *Différences entre les longueurs des trois chemins suivants, qui conduisent de l'une à l'autre des deux extrémités d'un arc infiniment petit: 1° la ligne brisée formée par les tangentes aux extrémités; 2° l'arc lui-même; 3° sa corde.*

Soit P (fig. 1) le pied de la perpendiculaire abaissée de L, intersection des tangentes en M et en M', sur la corde MM'. Convenons de désigner la longueur d'une ligne brisée par le signe Lr. suivi des lettres que portent les sommets. On a

$$\begin{aligned} \text{Lr. } MLM' - \text{corde } MM' &= ML - MP + M'L - M'P \\ &= ML\,(1 - \cos M) + M'L\,(1 - \cos M') \\ &= 2\left(ML \sin^2\tfrac{1}{2}M + M'L \sin^2\tfrac{1}{2}M'\right). \end{aligned}$$

Substituant dans le dernier membre les angles aux sinus, puis remplaçant M et M' par $\frac{1}{2}\varepsilon$, ML et M'L par $\frac{1}{2}\Delta s$ (13), il vient

$$\text{(1)} \qquad \text{Lr. } MLM' - \text{corde } MM' = \frac{1}{8}\varepsilon^2\Delta s.$$

L'ordre infinitésimal de l'erreur dont cette égalité est affectée est le cinquième pour le moins. Un petit calcul des plus simples permet de le vérifier dès à présent si l'on tient compte du fait que la somme des angles M et M' du triangle LMM' est ε, et si nous ajoutons que la somme des longueurs ML, M'L ne surpasse Δs, comme on le verra tout à l'heure, que d'une quantité du troisième ordre, et que les deux différences

$$M - M' \qquad \text{et} \qquad M'L - ML,$$

de même signe parce qu'un plus grand angle d'un triangle est opposé à un plus grand côté, sont du second ordre, comme il résultera de leurs expressions qui seront formées un peu plus loin. C'est d'ailleurs comme exercice seulement que l'on propose ici cette vérification.

Nous allons maintenant montrer que la limite du rapport des deux différences Lr. MLM′ — arc MM′, arc MM′ — corde MM′ est 2. L'égalité qui vient d'être obtenue fournira alors immédiatement les expressions de ces différences.

Soit B (fig. 16) le milieu de l'arc MM′, et soient C, D les points en lesquels ML, M′L sont coupés par la tangente en B; la différence

$$\text{Lr. MLM}' - \text{Lr. MCDM}'$$

étant égale à Lr. CLD — CD, on a

$$\text{Lr. MLM}' - \text{Lr. MCDM}' = 2(\text{CL}\sin^2\tfrac{1}{2}\text{C} + \text{DL}\sin^2\tfrac{1}{2}\text{D}).$$

L'arc MB étant la moitié de l'arc MM′, l'angle aigu C, qui est l'angle de contingence de l'arc MB, est, en tant qu'infiniment petit, égal à $\frac{1}{2}\varepsilon$ par le principe qui veut que les accroissements infiniment petits de la fonction soient proportionnels à ceux de la variable, et il en est de même de l'angle aigu D, qui, ajouté à C, donne précisément ε. D'un autre côté, on a

$$\text{CL} = \text{ML} - \text{MC}, \qquad \text{DL} = \text{M}'\text{L} - \text{M}'\text{D};$$

or ML et M′L valant $\frac{1}{2}\Delta s$, et MC, M′D valant $\frac{1}{2}$arc MB, $\frac{1}{2}$arc M′B, c'est-à dire $\frac{1}{4}\Delta s$, CL et DL sont égaux à $\frac{1}{4}\Delta s$.

Si maintenant dans le second membre de l'égalité ci-dessus on remplace les sinus par les angles, puis qu'on écrive $\frac{1}{2}\varepsilon$ au lieu de C et de D, et $\frac{1}{4}\Delta s$ au lieu de CL et de DL, il vient

$$\text{Lr.MLM}' - \text{Lr.MCDM}' = \tfrac{1}{16}\varepsilon^2\Delta s. \tag{2}$$

Tirons les cordes MB, M′B, et cherchons l'expression de la différence Lr.MBM′ — corde MM′; on a

$$\text{Lr.MBM}' - \text{corde MM}' = 2(\text{MB}\sin^2\tfrac{1}{2}\text{BMM}' + \text{M}'\text{B}\sin^2\tfrac{1}{2}\text{BM}'\text{M}).$$

Les cordes MB, M′B valent $\frac{1}{2}\Delta s$. Les angles BMM′, BM′M étant, de même que MB et M′B qui leur sont opposés dans le triangle MBM′, des infiniment petits égaux, et leur somme valant $\frac{1}{2}\varepsilon$ par la proposition du N° 14, chacun d'eux a pour expression $\frac{1}{4}\varepsilon$. Si dans l'égalité précédente on remplace les sinus par les angles, puis qu'on écrive $\frac{1}{2}\Delta s$ au lieu de MB et de M′B, et $\frac{1}{4}\varepsilon$ au lieu de BMM′ et de BM′M, il vient

$$\text{Lr. MBM}' - \text{corde MM}' = \tfrac{1}{32}\varepsilon^2\Delta s. \tag{3}$$

Le rapport des seconds membres des égalités (2) et (3) étant 2, celui de leurs premiers membres a 2 pour limite ; si donc on pose

$$\frac{\text{Lr. MLM}' - \text{Lr.MCDM}'}{\text{Lr. MBM}' - \text{corde MM}'} = 2 + \omega, \tag{4}$$

ω tend vers zéro avec l'arc MM'.

Soient E et F les milieux des arcs MB et M'B, G et H les points d'intersection des tangentes en M et en B avec celle au point E, I et K les points d'intersection des tangentes en B et en M' avec celle au point F. Appliquant l'égalité (4) aux arcs MB, M'B, il vient

$$\frac{\text{Lr. MCB} - \text{Lr.MGHB}}{\text{Lr. MEB} - \text{corde MB}} = 2 + \omega', \tag{5}$$

$$\frac{\text{Lr. BDM}' - \text{Lr.BIKM}'}{\text{Lr. BFM}' - \text{corde BM}'} = 2 + \omega'', \tag{6}$$

ω' et ω'' désignant des infiniment petits.

La fraction qui a pour numérateur la somme des numérateurs des fractions qui forment les premiers membres des égalités (4), (5) et (6) et pour dénominateur la somme de leurs dénominateurs, est comprise entre la plus grande et la plus petite de ces fractions. Elle diffère donc infiniment peu de 2. Si l'on appelle polygone circonscrit la longueur MGHIKM', et polygone inscrit la longueur MEBFM', la somme des numérateurs est égale à

Lr. MLM' — polygone circonscrit,

et celle des dénominateurs à

Polygone inscrit — corde MM'.

On a donc, en écrivant le rapport et passant à la limite,

$$\lim \frac{\text{Lr. MLM}' - \text{polyg. circ.}}{\text{Polyg. insc.} - \text{corde MM}'} = 2. \tag{7}$$

Qu'on forme à présent deux nouveaux polygones, l'un circonscrit et l'autre inscrit, le premier en menant les tangentes aux milieux des arcs ME, EB, BF, FM', et le second en joignant ces milieux aux points M, E, B, F et M' : l'égalité (7) subsistera pour ces deux nouveaux polygones, ainsi que pour tous les couples de polygones qu'on obtiendra successivement en continuant indéfiniment à subdiviser l'arc MM'. Nous allons reconnaître qu'elle subsiste encore si l'on y remplace les deux polygones par cet arc.

A cet effet supposons pour un instant que le point M' soit fixe ; l'arc MM' et la différence

$$\text{Lr. MLM'} - \text{polyg. circ.}$$

seront des quantités finies. Les côtés des deux polygones croissant en nombre indéfiniment, la différence

$$\text{Polyg. circ.} - \text{arc MM'}$$

tendra vers zéro (3, Cor.), et, par suite, le rapport

$$\frac{\text{Lr. MLM'} - \text{polyg. circ.}}{\text{Lr. MLM'} - \text{arc MM'}}$$

aura pour limite l'unité. Cela est vrai quel que soit l'arc MM', et par conséquent aussi quand il est infiniment petit. Il est ainsi acquis que, l'arc tendant vers zéro et le nombre des côtés du polygone circonscrit croissant indéfiniment, les différences

$$\text{Lr. MLM'} - \text{polyg. circ.} \qquad \text{et} \qquad \text{Lr. MLM'} - \text{arc MM'}$$

sont des infiniment petits égaux. On verrait par un raisonnement semblable qu'il en est de même des deux différences

$$\text{Polyg. inscr.} - \text{corde MM'} \qquad \text{et} \qquad \text{arc MM'} - \text{corde MM'} ;$$

par conséquent, en vertu de l'égalité (7), on a

$$\lim \frac{\text{Lr. MLM'} - \text{arc MM'}}{\text{arc MM'} - \text{corde M'M}} = 2,$$

ce qui est la relation qu'il s'agissait d'établir.

Maintenant, la différence Lr. MLM' — corde MM', qui d'après l'égalité (1) a pour expression $\frac{1}{8}\varepsilon^2\Delta s$, est la somme des deux différences

$$\text{Lr. MLM'} - \text{arc MM'} \qquad \text{et} \qquad \text{arc MM'} - \text{corde MM'};$$

et comme le rapport de celles-ci a pour limite 2, la première est, en tant qu'infiniment petite, égale aux deux tiers, et la seconde au tiers de $\frac{1}{8}\varepsilon^2\Delta s$. On a donc

$$\text{Lr. MLM'} - \text{arc MM'} = \frac{1}{12}\varepsilon^2\Delta s,$$

$$\text{arc MM'} - \text{corde MM'} = \frac{1}{24}\varepsilon^2\Delta s.$$

Ainsi, *l'excès d'un arc infiniment petit sur sa corde est égal à la vingt-quatrième partie du produit de l'arc par le carré de son angle de contingence, et la différence entre l'arc et la ligne brisée formée par les tangentes en ses extrémités est égale à la douzième partie du même produit.*

*On peut encore, à partir de la formule (7), et après avoir fait observer qu'elle subsiste pour tous les couples de polygones qu'on obtient successivement en continuant indéfiniment à subdiviser l'arc MM′, achever la démonstration comme suit :

Faisons tendre l'arc vers zéro et croître le nombre des côtés du polygone inscrit suivant la loi que voici, qui fixera le discours : l'arc MM′ partant d'un état initial quelconque de grandeur sera réduit d'abord à sa moitié, et cette moitié sera divisée en deux parties égales, dont les cordes seront les côtés du premier polygone inscrit, ainsi composé de deux côtés. L'arc sera ensuite réduit au quart de ce qu'il était en commençant, et ce quart sera divisé en quatre parties égales dont les cordes seront les côtés du second polygone inscrit, ainsi formé de quatre côtés. On continuera de même, réduisant l'arc successivement au $\frac{1}{8}$, au $\frac{1}{16}$, au $\frac{1}{32}$, etc., de sa longueur première, et, en même temps, le polygone comptera successivement 8, 16, 32, etc., côtés. Le polygone circonscrit aura évidement sans cesse un côté de plus que le polygone inscrit. Nous allons chercher l'ordre infinitésimal de la différence des longueurs des deux polygones. Désignons ces longueurs respectivement par C et par I, initiales des mots circonscrit et inscrit. C'est donc de $C - I$ que nous nous proposons de déterminer l'ordre infinitésimal.

A cet effet remarquons d'abord que les subdivisions de l'arc MM′ sont des grandeurs de l'ordre du carré de cet arc, donc du second ordre. Représentons en effet par n le nombre de ces subdivisions à un instant quelconque, et appelons k la valeur initiale de l'arc. Lorsque l'arc est réduit à $\frac{k}{n}$ chaque subdivision vaut $\frac{k}{n^2}$; or le rapport de cette quantité au carré de $\frac{k}{n}$ est une grandeur finie, puisque ce rapport est $\frac{1}{k}$.

Soient à présent a et b les deux extrémités de l'un des côtés du polygone inscrit, et c le point d'intersection des tangentes à la courbe en a et en b : la différence C—I est la somme de n différences telles que Lr. acb — corde ab. Nous avons obtenu (voir l'égalité (1) ci-dessus) l'expression des différences de ce genre, et il résulte de cette expression que Lr. acb — corde ab est de l'ordre du cube de l'arc ab, donc du sixième ordre, puisque l'arc ab est du second, d'après la remarque qui a été faite tout à l'heure. Dès lors C—I est la somme de n grandeurs du sixième ordre. Or n fois l'arc MM', qui est du premier ordre, étant une quantité finie, puisqu'elle est constamment égale à la valeur initiale de l'arc MM', la somme de n grandeurs du sixième ordre est une grandeur du cinquième. Donc C—I est du cinquième ordre infinitésimal.

Cela posé, si l'on ajoute C—I à la somme des deux différences

$$\text{Lr. MLM}' - \text{C} \qquad \text{et} \qquad \text{I} - \text{corde MM}',$$

on obtient Lr. MLM' — corde MM', qui est égal à $\frac{1}{8}\varepsilon^2\Delta s$, d'après l'égalité (1). Cette expression étant du troisième ordre, et C — I étant d'un ordre supérieur au troisième, la somme des deux différences en question est aussi égale à $\frac{1}{8}\varepsilon^2\Delta s$. Comme d'un autre côté leur rapport a pour limite 2 d'après la relation (7), elles sont respectivement les deux tiers et le tiers de leur somme, ce qui fait qu'on a

$$\text{Lr. MLM}' - \text{C} = \frac{1}{12}\varepsilon^2\Delta s, \qquad \text{I} - \text{corde MM}' = \frac{1}{24}\varepsilon^2\Delta s.$$

D'après ces égalités, nos deux différences sont du troisième ordre. On ne les altère donc que de fractions infiniment petites d'elles-mêmes si on leur ajoute C—I, qui est du cinquième, ou bien si on leur ajoute respectivement les quantités C — arc MM' et arc MM'—I, qui sont inférieures l'une et l'autre à C — I, puisqu'on a C > arc MM' > I. Elles deviennent alors, la première, Lr. MLM'— arc MM', et, la seconde, arc MM'— corde MM'. Etc. (*)

(*) Si l'on multiplie et divise par Δs^2 l'expression de cette dernière différence, puis que l'on écrive $\frac{1}{\rho^2}$ au lieu de $\frac{\varepsilon^2}{\Delta s^2}$ elle devient $\frac{1}{24}\,\frac{\Delta s^3}{\rho^2}$. C'est là le premier terme, *le terme principal,* du développement de l'excès de l'arc sur la corde, les suivants étant, en Δs, des degrés plus élevés que le troisième. On aura les premiers d'entre eux en ouvrant les *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure* à la page 110 du tome III (1874) de la deuxième série, page qui fait partie d'un travail de M. Charles Brisse, de son *Exposition analytique de la théorie des surfaces.*

Du cercle osculateur.

18. Lorsque deux lignes ont un point commun et en ce point même tangente, on dit qu'elles se *touchent*, qu'il y a *contact*. Si au contraire leurs tangentes au point commun sont distinctes, alors les deux lignes ne se touchent pas, elles se *coupent;* il n'y a pas contact, mais *intersection*.

Considérons le cas de contact. Soient (fig. 17) M le point commun, MX, MY, MT les deux courbes et la tangente commune, et MQ une longueur du premier ordre prise sur la tangente MT. Une droite tirée de Q coupe MX et MY en des points K et H, et si seulement on l'assujettit à la condition que son inclinaison sur MT ne tende pas vers zéro lorsque Q s'approche indéfiniment de M, l'ordre infinitésimal de la distance HK reste le même quelle que soit cette inclinaison. Tirons en effet une seconde droite QK′H′ et menons KH″ parallèle à K′H′. Les angles Q et K′ du triangle QKK′ sont finis, c'est-à-dire différents de zéro, et alors KK′ est du même ordre que QK, donc infiniment petit comparé à MK, par quoi K′H′ et KH″ sont des infiniment petits égaux. Mais KH″ et KH sont du même ordre, car les angles H et H″ du triangle KHH″ sont finis. Donc KH et K′H′ sont aussi du même ordre.

On appelle *ordre de contact* de deux lignes l'ordre infinitésimal du rapport $\frac{\mathrm{HK}}{\mathrm{MQ}}$. D'après cela, l'ordre du contact est toujours inférieur d'une unité à l'ordre infinitésimal de HK. Il suit de cette définition et de la proposition du N° 15 que le contact de la courbe et de la tangente est, en général, un contact du premier ordre.

19. Le *cercle osculateur* en un point M d'une courbe est de tous les cercles qu'on peut mener par M celui qui a avec la courbe le contact de l'ordre le plus élevé, celui qui, aux environs de ce point, serre la courbe de plus près que tous les autres. Afin d'en déterminer le rayon, dans la figure du numéro précédent supposons que MY soit un arc de cercle. Prenons les cordes MH, MK d'égales longueurs; la droite HKQ sera alors, à la limite, perpendiculaire à MT. Désignons par a la longueur commune des deux cordes, et par ε, ε' les angles que forment avec MT les tangentes en K à la courbe et en H au cercle. La corde et l'arc étant des infiniments petits égaux, la remarque qui termine le N° 15 nous permet d'écrire

$$KQ = \tfrac{1}{2} a\varepsilon, \qquad HQ = \tfrac{1}{2} a\varepsilon',$$

et l'on tire de là, par soustraction,

$$HK = \frac{a}{2}(\varepsilon' - \varepsilon),$$

à une quantité près d'ordre supérieur au second.

On voit par ce résultat que HK est du second ordre seulement toutes les fois que ε et ε' ne sont pas des infiniment petits égaux, et qu'il est d'un ordre plus élevé si la limite de la fraction $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ est l'unité. Appelons Δs, $\Delta s'$ les arcs MK, MH. Puisque les cordes qui soutendent ces arcs sont égales on a $\lim \frac{\Delta s}{\Delta s'} = 1$. Alors, si $\lim \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = 1$, on a $\lim \frac{\Delta s}{\Delta s'} = \lim \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$, donc $\lim \frac{\Delta s}{\varepsilon} = \lim \frac{\Delta s'}{\varepsilon'}$. Or $\frac{\Delta s'}{\varepsilon'}$ est le rayon du cercle, $\lim \frac{\Delta s}{\varepsilon}$ est le rayon de courbure de la ligne MX au point M, et le cercle osculateur n'est autre que le cercle de courbure.

La longueur HK est du troisième ordre si MY est le cercle osculateur. On en aura la preuve au N° 25, où sera formée l'expression de la distance de la courbe à ce cercle dans le voisinage du point de contact.

20. En cherchant le cercle que déterminent trois points M, M′, M″ (fig. 18) d'une ligne infiniment voisins, on tombe encore sur le cercle de courbure. Soit en effet α l'angle extérieur des cordes MM′, M′M″ ; le rayon du cercle des trois points est égal au rapport

$$\frac{\text{arc de cercle } MM'M''}{2\alpha},$$

et par conséquent le rayon du cercle cherché est la limite vers laquelle tend ce rapport lorsque M′ et M″ s'approchent indéfiniment de M.

Désignons par Δs et ε l'arc MM′M″ de la ligne considérée et l'angle de ses tangentes extrêmes : l'arc Δs et l'arc de cercle MM'M'' ayant les mêmes extrémités sont des infiniment petits égaux, et il en est de même des angles ε et 2α (14). On peut donc, sans altérer la limite du rapport ci-dessus, en remplacer les termes respectivement par Δs et ε. Dès lors le rayon cherché est égal à $\lim \frac{\Delta s}{\varepsilon}$, c'est-à-dire au rayon de courbure en M.

Le centre du cercle des trois points M, M', M'' a d'ailleurs pour limite le centre de courbure, puisqu'il se trouve sur la perpendiculaire élevée à la corde MM' en son milieu et que cette perpendiculaire finit par se confondre avec la normale au point M.

21. *Autrement :* Ce théorème se déduit aussi de la proposition du N° 12. Remarquons à cet effet que cette proposition peut être énoncée comme suit : Le centre de courbure est l'intersection de la normale au point considéré et de la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde qui le joint à un point de la courbe infiniment voisin.

Cela posé, soit A (fig. 19) l'intersection des perpendiculaires aux cordes MM', M'M'' en leurs milieux : A est le centre du cercle des trois points M, M' et M''. La normale en M' coupe en des points F et G ces deux perpendiculaires. D'après la proposition du N° 12 énoncée comme tout à l'heure, F et G sont infiniment voisins du centre de courbure en M', ce qui fait que la longueur FG est infiniment petite. Mais dans le triangle AFG le côté FG est le plus grand côté, puisque l'angle A, tendant vers deux droits, est le plus grand angle. Dès lors les côtés AF, AG sont aussi infiniment petits, et par conséquent le point A est, de même que F et G, infiniment voisin du centre de courbure en M'. Or le centre de courbure en M' est infiniment voisin du centre de courbure en M ; donc A se confond à la limite avec le centre de courbure en M, ce qu'on voulait montrer.

Expressions de diverses grandeurs qui dépendent de la variation du rayon de courbure.

22. En commençant remarquons qu'il n'y a pas lieu de s'enquérir des intersections de deux cercles osculateurs infiniment voisins, car ils ne se coupent point. Soit en effet MN un arc où d'une extrémité à l'autre le rayon de courbure varie constamment dans le même sens, et soit CD l'arc correspondant de la développée : la différence des rayons des cercles osculateurs en M et en N est égale à l'arc CD, tandis que la distance de leurs centres est la longueur de la corde CD. La distance des centres étant moindre que la différence des rayons, l'un des deux cercles est intérieur à l'autre. La plus courte distance de ces cercles se compte sur la direction CD, et est égale à l'excès de l'arc CD sur sa corde.

23. *Lemme*. A, B, C sont les trois côtés d'un triangle rectangle variable, et a, b, c sont ceux d'un autre triangle rectangle, variable aussi ; A et a sont les hypoténuses. Supposons que le rapport $\frac{C}{c}$ ne surpasse jamais un nombre déterminé, qui peut d'ailleurs être pris aussi grand qu'on voudra : si alors a est infiniment petit comparé à A, la différence A—B est infiniment petite comparée à la différence a—b.

La propriété du carré de l'hypoténuse donne

$$A^2 - B^2 \text{ ou } (A+B)(A-B) = C^2,$$
$$a^2 - b^2 \text{ ou } (a+b)(a-b) = c^2.$$

Divisant ces deux égalités membre à membre on obtient une relation qui peut s'écrire

$$\frac{A-B}{a-b} = \frac{C^2}{c^2}\,\frac{a+b}{A+B}.$$

Maintenant, comme a est infiniment petit par rapport à A, il en est de même de b, puisqu'on a $b < a$; donc $\frac{a+b}{A}$ est infiniment petit, et à plus forte raison $\frac{a+b}{A+B}$. D'un autre côté, il résulte de l'hypothèse que $\frac{C^2}{c^2}$ ne croît point au-delà d'une limite déterminée. Par suite, le second membre de l'égalité précédente tend vers zéro. Le premier tend alors aussi vers zéro, c'est-à-dire que A — B est infiniment petit comparé à $a - b$, ce qui est la proposition qu'on voulait établir.

C'en est un cas particulier qui sera utilisé quelquefois ci-après, et on va le détacher dans un numéro à part pour la plus grande commodité des renvois.

24. Si AB (fig. 20) est infiniment petit, si AC ne l'est point, et si P est la projection de A sur BC, CA — CP est infiniment petit comparé à BA — BP.

25. *Distance de* M′ *au cercle osculateur en* M.

Soit MX (fig. 21) la courbe ; supposons que le rayon de courbure aille croissant dans le sens MX. Soient MY le cercle de courbure en M, et H le point où le coupe la droite CM′ tirée de son centre C : M′H est la distance de M′ à ce cercle ; c'est donc de M′H qu'il s'agit de rechercher l'expression.

Soit I le point où C′M′, rayon de courbure en M′, coupe le cercle MY : les longueurs M′H et M′I sont égales en tant qu'infiniment petites, parce que les angles H et I du triangle M′HI sont droits à la limite, donc égaux. Alors on peut écrire

$$\mathrm{M'H} = \mathrm{M'I} = \mathrm{C'M'} - \mathrm{C'I}.$$

Mais (9)

$$\mathrm{C'M'} = \mathrm{arc\ CC'} + \mathrm{CM} = \mathrm{arc\ CC'} + \mathrm{CI}\,;$$

donc

$$\mathrm{M'H} = \mathrm{arc\ CC'} + \mathrm{CI} - \mathrm{C'I},$$

ou, en nommant P le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur C′M′,

$$\mathrm{M'H} = (\mathrm{arc\ CC'} - \mathrm{C'P}) + (\mathrm{CI} - \mathrm{IP}).$$

Des deux termes qui forment le second membre de cette équation, le dernier est infiniment petit par rapport à corde CC′ — C′P ; il l'est à plus forte raison par rapport au premier terme, et dès lors il doit être négligé. Cela résulte, d'après le numéro précédent, de ce que CC′ est infiniment petit tandis que CI est fini, et de ce que P est la projection de C sur C′I. On a donc

$$\mathrm{M'H} = \mathrm{arc\ CC'} - \mathrm{C'P}.$$

Tout est ainsi ramené à trouver l'expression de l'excès de l'arc CC′ sur la longueur C′P. Cette expression se déduit avec une égale facilité de l'un ou de l'autre des deux théorèmes établis au N° 17. Faisons usage du premier, et remarquons à cet effet que arc CC′ — C′P est la somme des deux différences

$$\mathrm{arc\ CC'} - \mathrm{corde\ CC'} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{corde\ CC'} - \mathrm{C'P}.$$

La première étant la différence d'un arc infiniment petit à sa corde, elle a pour valeur la vingt-quatrième partie du produit de l'arc CC' par le carré de l'angle des tangentes en C et en C'. Or l'arc CC' est précisément égal à l'accroissement $\Delta\rho$ que prend le rayon de courbure quand on passe de M à M', et l'angle des tangentes en C et C' est égal à celui des tangentes en M et en M', c'est-à-dire à ε. On a donc

$$\text{arc CC'} - \text{corde CC'} = \frac{1}{24}\varepsilon^2\Delta\rho.$$

Quant à la seconde différence, par la propriété du carré de l'hypoténuse elle est égale à $\dfrac{\overline{\text{CP}}^2}{\text{corde CC'} + \text{C'P}}$. Or on peut dans ce rapport remplacer corde CC' ainsi que C'P par arc CC' ou $\Delta\rho$, puis CP par $\frac{1}{2}\varepsilon\Delta\rho$ (15). Il devient alors $\frac{1}{8}\varepsilon^2\Delta\rho$, et l'on a par conséquent

$$\text{corde CC'} - \text{C'P} = \frac{1}{8}\varepsilon^2\Delta\rho.$$

Les trois dernières égalités donnent, en les ajoutant,

$$\text{M'H} = \frac{1}{6}\varepsilon^2\Delta\rho.$$

Ainsi, *la distance de* M' *au cercle osculateur en* M *est la sixième partie du produit de l'accroissement du rayon de courbure par le carré de l'angle de contingence.*

On a supposé que le rayon de courbure allait croissant de M vers M', et la figure a été construite en conséquence. S'il allait décroissant on trouverait (fig. 22), les mêmes lettres continuant à désigner les mêmes choses,

$$\begin{aligned}\text{M'H} = \text{M'I} &= \text{C'I} - \text{C'M'} \\ &= \text{C'I} - \text{CM} + \text{arc CC'} \\ &= \text{C'I} - \text{CI} + \text{arc CC'} \\ &= \text{IP} - \text{C'P} - \text{CI} + \text{arc CC'} \\ &= (\text{arc CC'} - \text{C'P}) - (\text{CI} - \text{IP}).\end{aligned}$$

Le terme (CI — IP) est devenu soustractif, d'additif qu'il était; mais nous avons vu que ce terme doit être négligé comme infiniment petit comparé à l'autre. En le supprimant on retrouve la valeur de M'H déjà obtenue.

C'est un contact du deuxième ordre que celui de la courbe et du cercle osculateur, d'après la définition, donnée ci-dessus au nº 18, de l'ordre du contact de deux lignes qui se touchent.

Remarque. MM′ ou Δs étant du premier ordre infinitésimal ainsi que ε, si $\Delta\rho$ est d'un ordre supérieur, ce qui peut arriver, mais seulement en des points isolés, alors la distance de M′ au cercle osculateur en M est d'un ordre supérieur au troisième. Nous aurons plus loin à invoquer cette proposition. Si l'on éprouve, à la tenir pour une conséquence de la formule ci-dessus, quelque scrupule venant de ce que nous avons obtenu celle-ci en appliquant à la développée deux théorèmes (ceux des n^{os} 15 et 17) qui cessent d'avoir lieu au point C de cette courbe lorsque $\Delta\rho$ et ε ne sont pas du même ordre, on l'établira directement comme suit : Appelons n l'ordre infinitésimal de $\Delta\rho$; nous allons reconnaître que la distance en question est de l'ordre $n + 2$ au moins. Pour le démontrer on commencera par faire voir, en suivant la même marche que tout à l'heure, que cette distance est, en tant qu'infiniment petite, égale à

$$\text{arc } CC' - C'P.$$

Considérons maintenant l'intersection Q (fig. 21) des tangentes à la développée en C et en C′ ; à cause de

$$\text{arc } CC' < CQ + C'Q,$$

l'expression ci-dessus est plus petite que

$$CQ + C'Q - C'P,$$

c'est-à-dire que

$$CQ - PQ,$$

et la proposition sera acquise si nous faisons voir que cette dernière différence est de l'ordre $n + 2$ au moins. Or on rend la chose évidente en remarquant que, l'angle CQP étant égal à ε, on a

$$CQ - PQ = 2CQ \sin^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

et que dans le second membre de cette égalité le facteur CQ est plus petit que la somme $CQ + C'Q$, qui est de l'ordre n, puisqu'elle est (3 Rem. I), en tant qu'infiniment petite, égale à l'arc CC′, et par suite à $\Delta\rho$.

Le lecteur pressé de connaître les propriétés des lignes non planes peut dès à présent passer à la seconde partie de l'ouvrage, car jusqu'à la fin de la première tous les numéros auront l'astérisque.

***26.** *Lemmes.* Nous nous proposons, dans les deux numéros qui suivront celui-ci, d'effectuer les déterminations annoncées au n° 13. Les mêmes lettres (fig. 23) désignant les mêmes choses qu'au numero précédent (on n'a pas tracé les arcs MM′, MI qui auraient chargé la figure sans utilité) supposons pour fixer les idées que le rayon de courbure aille croissant de M vers M′. Soit MT la tangente au point M; menons les tangentes en M′ et en I à la courbe et au cercle, et soient L, K et R les points en lesquels MT est coupé par ces deux tangentes et par une parallèle menée de I à la première. Nous allons chercher la limite du rapport $\frac{RL}{LK}$.

On a $\quad RL = \frac{M'I}{\sin IRT}, \qquad RK = \frac{IK \sin RIK}{\sin IRT},$

d'où $\quad \frac{RL}{KR} = \frac{M'I}{IK \sin RIK} = \frac{M'I}{IK \sin CIP} = \frac{M'I.\,CI}{IK.CP}.$

On n'altère pas la limite de ce dernier rapport en y remplaçant M′I par $\frac{1}{6}\varepsilon^2\Delta\rho$, CI ou ρ par $\frac{\Delta s}{\varepsilon}$, IK par $\frac{1}{2}\Delta s$, et CP par $\frac{1}{2}\varepsilon\Delta\rho$. Ces substitutions faites, il vient $\frac{2}{3}$; on a donc lim $\frac{RL}{RK} = \frac{2}{3}$, et l'on tire de là

$$\lim \frac{RL}{LK} = 2.$$

Appelons S l'intersection des tangentes M′L, IK; de ce que $\frac{RL}{RK}$ est inférieur à l'unité il résulte que S tombe bien, comme le représente la figure, dans l'angle M′MT.

***27**. *Différence des angles que font avec la corde* MM′ *les tangentes en* M *et en* M′.

Dans la figure du numéro précédent tirons les cordes MM′, MI; appelons M et M′ les angles M′ML, MM′L qui sont ceux dont on veut connaître la différence. Dans la recherche de cette différence nous négligerons les quantités d'ordres plus élevés que le second.

On a $\quad M = IMT - IMM'.$

L'arc MI étant un arc de cercle, l'angle IMT vaut la moitié exactement de son angle de contingence, c'est-à-dire la moitié de IKT. Représentant ce dernier angle par e, on a donc

$$M = \frac{1}{2}e - IMM'.$$

L'angle IMM′ étant du second ordre puisque M′I est du troisième, on n'altère cette valeur de M que d'une quantité d'un ordre supérieur au second si l'on y remplace l'angle IMM' par le rapport $\frac{M'I}{\text{corde}\,MM'}$, qui lui est égal en tant qu'infiniment petit puisque M'I est à la limite perpendiculaire à la corde MM'. Ecrivant d'ailleurs $\frac{1}{6}\varepsilon^2\Delta\rho$ au lieu de M'I et Δs au lieu de corde MM', il vient

$$(1) \qquad M = \frac{1}{2}e - \frac{1}{6}\frac{\varepsilon^2\Delta\rho}{\Delta s},$$

et cette valeur de M n'est fautive que d'une grandeur d'ordre supérieur au second.

D'un autre côté, le triangle SLK donne M'LT = IKT — LSK, ou, à cause de M'LT = ε, de IKT = e, et de LSK = M'SI = CIP,

$$\varepsilon = e - \text{CIP}.$$

L'angle CIP est du second ordre, car son sinus est le quotient de CP, qui est du second ordre, par CI qui est fini. Dans la valeur ci-dessus de ε substituons à CIP son sinus $\frac{CP}{CI}$. Ecrivant $\frac{1}{2}\varepsilon\Delta\rho$ au lieu de CP et $\frac{\Delta s}{\varepsilon}$ au lieu de CI, il vient

$$(2) \qquad \varepsilon = e - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2\Delta\rho}{\Delta s},$$

et cette valeur de ε n'est fautive que d'une quantité d'ordre supérieur au second.

Or M' est égal à ε — M, d'où M — M' = 2M — ε. Remplaçant au second membre M et ε par leurs valeurs (1) et (2) il vient

$$M - M' = \frac{1}{6}\frac{\varepsilon^2\Delta\rho}{\Delta s}.$$

Remarque. En vue de l'un des numéros suivants nous ferons observer qu'en combinant ce résultat par addition avec M + M' = ε, ou encore en éliminant e entre (1) et (2), on obtient

$$M = \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{12}\frac{\varepsilon^2\Delta\rho}{\Delta s}.$$

***28.** *Différence des longueurs* ML *et* M'L.

Elle est du second ordre, et nous la calculerons en négligeant les quantités d'ordres plus élevés.

Reprenons la figure des deux derniers numéros. Les lignes brisées

MLM′, MKI diffèrent des cordes MM′, MI de quantités du troisième ordre (17). La différence de ces cordes est elle-même d'un ordre supérieur au second, en tant que plus petite que M′I, qui est du troisième. Partant, la différence entre MLM′ et MKI est aussi d'un ordre supérieur au second. Or on a

$$M'L - ML = MLM' - 2ML;$$

conséquemment, l'égalité

$$M'L - ML = MKI - 2ML$$

n'est fautive que d'une quantité d'ordre supérieur au second. Mais à cause de MK = IK, d'où l'on tire MKI = 2MK, son second membre est égal à 2(MK — ML), ou 2LK, ce qui fait qu'elle peut s'écrire

$$M'L - ML = 2LK.$$

Nous avons trouvé, dans l'avant-dernier numéro, $\lim \frac{RL}{LK} = 2$; dès lors on a, en négligeant une fraction infiniment petite du second membre de l'égalité précédente,

$$M'L - ML = RL.$$

Maintenant, M′I étant perpendiculaire à IR, et l'angle IRT n'étant autre que ε, nous avons $RL = \frac{M'I}{\sin\varepsilon}$. Remplaçant M′I par $\frac{1}{6}\varepsilon^2\Delta\rho$ et $\sin\varepsilon$ par ε, on obtient

$$M'L - ML = \tfrac{1}{6}\varepsilon\Delta\rho.$$

***29**. D'après les valeurs de M — M′, M′L — ML obtenues dans les deux numéros précédents, le rapport de ces différences est, à un infiniment petit près, égal à $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$. Formant directement ce rapport, nous aurons une confirmation de nos deux résultats et des théorèmes à l'aide desquels ils ont été obtenus.

Le triangle MM′L donne $\frac{\sin M}{M'L} = \frac{\sin M'}{ML}$, d'où

$$\frac{\sin M - \sin M'}{M'L - ML} = \frac{\sin M}{M'L},$$

ce qu'on peut écrire, eu égard à $M + M' = \varepsilon$,

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(M - M')\cos\frac{1}{2}\varepsilon}{M'L - ML} = \frac{\sin M}{M'L}.$$

Remplaçant $\sin\frac{1}{2}(M - M')$, par $\frac{1}{2}(M - M')$, $\cos\frac{1}{2}\varepsilon$ par l'unité, $\sin M$ par $\frac{1}{2}\varepsilon$, et, au second membre seulement, M'L par $\frac{1}{2}\Delta s$, il vient

$$\frac{M - M'}{M'L - ML} = \frac{\varepsilon}{\Delta s}.$$

***30.** *Lemme*. AB et AC (fig. 24) sont deux arcs infiniment petits du premier ordre qui se touchent au point A. On suppose que la direction BC fait avec la normale commune en A un angle du premier ordre. Nous voulons montrer que la différence des arcs AB, AC est du troisième ordre au moins.

Soit BE perpendiculaire à la tangente commune AT, et soit D l'intersection de cette tangente par BC prolongé. Nous avons obtenu au nº 25 l'expression de la différence entre un arc du premier ordre et sa projection sur la tangente en son origine, c'est-à-dire l'expression d'une différence telle que arc AB — AE, et cette expression est du troisième ordre. D'un autre côté ED est du troisième ordre aussi, car il est le produit de BE qui est du second (15) par la tangente de l'angle EBD, et cet angle est du premier ordre en tant qu'égal à celui que fait BD avec la normale AV, lequel est du premier ordre par hypothèse. Donc la différence

$$\pm (\text{arc AB} - \text{AD})$$

est du troisième ordre au moins, et l'on établirait de même que

$$\pm (\text{arc AC} - \text{AD})$$

est du troisième ordre ou d'un ordre supérieur. Il suit de là que la différence des arcs AB et AC ne saurait être d'un ordre inférieur au troisième.

***31.** *Lemme*. Dans la figure 21, où Q est l'intersection des normales en M et en M' et où C est le centre de courbure en M, concevons que de Q comme centre avec QM pour rayon on décrive un cercle. Ce cercle coupera la normale QM' en un point qui n'est pas marqué sur la figure et que nous nommerons B. Or à cause de

$$CM = \rho, \quad \text{angle } MQM' = \varepsilon,$$

on a, rigoureusement, $\dfrac{\text{arc de cercle MB}}{\varepsilon} = \rho + CQ.$

La différence entre l'arc de cercle MB et l'arc MM' ou Δs est du troisième ordre au moins, d'après le numéro précédent. En outre CQ diffère de $\frac{1}{2}$arc CC′ ou $\frac{1}{2}\Delta\rho$ d'une quantité qui est du second ordre puisque la différence des longueurs CQ, C′Q est du second ordre (28), et que leur somme n'excède l'arc CC′ ou $\Delta\rho$ que par le troisième (17). Remplaçant dans l'égalité ci dessus arc MB et CQ respectivement par Δs et $\frac{1}{2}\Delta\rho$, il vient

$$\frac{\Delta s}{\varepsilon} = \rho + \frac{1}{2}\Delta\rho,$$

et cette relation est exacte au second ordre près.

***32.** *Angle de contingence de l'arc* $\frac{\Delta s}{m}$.

De la relation qui vient d'être obtenue on déduit

$$\varepsilon = \frac{\Delta s}{\rho + \frac{1}{2}\Delta\rho},$$

valeur de ε qui n'est en défaut que d'une quantité d'ordre supérieur au second. La multipliant haut et bas par $\rho - \frac{1}{2}\Delta\rho$, puis négligeant au dénominateur le terme en $\Delta\rho^2$, par quoi l'on n'introduit qu'une erreur du troisième ordre, il vient

$$\varepsilon = \frac{\Delta s}{\rho} - \frac{1}{2}\frac{\Delta\rho\,\Delta s}{\rho^2}.$$

Ceci acquis, soit A un point de l'arc MM′. Soient γ l'angle de contingence de l'arc MA, et $\delta\rho$ l'accroissement du rayon de courbure de M à A. Supposant l'arc MA égal à $\frac{\Delta s}{m}$, la dernière relation donne

$$\gamma = \frac{\Delta s}{m\rho} - \frac{1}{2}\frac{\delta\rho\,\Delta s}{m\rho^2}.$$

Or elle donne aussi

$$\frac{\varepsilon}{m} = \frac{\Delta s}{m\rho} - \frac{1}{2}\frac{\Delta\rho\,\Delta s}{m\rho^2},$$

et de ces deux résultats on déduit

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{m} + \frac{\Delta s}{2m\rho^2}(\Delta\rho - \delta\rho).$$

Mais par le principe d'après lequel les accroissements infiniment petits de la fonction sont proportionnels à ceux de la variable, $\delta\rho$ vaut $\frac{\Delta\rho}{m}$, par quoi la dernière égalité devient

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{m} + \frac{(m-1)\Delta\rho\,\Delta s}{2m^2\rho^2}.$$

Remplaçant au dénominateur ρ par $\frac{\Delta s}{\varepsilon}$, puis faisant, en vue de ce qui va suivre, $m = 2$, et appelant l l'angle de contingence de l'arc $\frac{1}{2}\Delta s$, il vient

$$l = \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{8}\frac{\varepsilon^2\Delta\rho}{\Delta s}.$$

***33.** *Angle que fait la corde* MM′ *avec la tangente au milieu de l'arc.*

Soit n (fig. 25, où m est le milieu de l'arc), l'intersection de cette corde et de cette tangente ; il s'agit d'obtenir l'expression de l'angle n. La propriété de l'angle extérieur d'un triangle donne

$$n = l - \mathrm{M}.$$

Les valeurs des angles l et M ont été formées, l'une tout à l'heure, l'autre dans la remarque qui termine le n° 27. On en tire

$$n = \frac{1}{24}\frac{\varepsilon^2\Delta\rho}{\Delta s},$$

Le dessin de la figure est justifié par le fait de $l > \mathrm{M}$, d'où il résulte que c'est à droite que la tangente en m va couper la corde prolongée.

***34.** *Direction du diamètre, au point en lequel il rencontre la courbe.*

On appelle diamètre la ligne qui coupe en leurs milieux toutes les cordes parallèles à une même droite. La tangente à la courbe, au point où celle-ci est rencontrée par le diamètre, est parallèle à ces cordes. Dès lors la direction à déterminer est celle de la droite qui joint le milieu de la corde d'un arc infiniment petit au point de l'arc en lequel la tangente est parallèle à la corde.

Cette droite se confondant, dans le cercle, avec la normale au point où elle rencontre l'arc, on pourrait au premier abord penser que, dans toute autre courbe, l'angle qu'elle fait avec cette normale est infiniment petit. Mais ce n'est pas le cas, et indépendamment de la recherche qui va nous occuper, la connaissance d'une courbe quelconque, celle de l'ellipse par exemple, suffit pour le reconnaître. Soit en effet E le point de l'arc où la tangente est parallèle à la corde. Nous supposerons que les deux extrémités de l'arc aillent se rapprochant de telle manière que la corde reste parallèle à elle-même, et alors le point E sera fixe. La limite de la droite qui joint E au milieu de la corde étant tangente en E au diamètre qui passe par ce point, pour que cette droite fît avec la normale en E un angle infiniment petit il faudrait que tout diamètre fût, au point où il coupe la courbe, tangent à la normale. Dans l'ellipse, les diamètres étant des droites, ils devraient donc se confondre avec les normales. Or cela n'a pas lieu, puisque tous les diamètres de l'ellipse passent par le centre, et que les seules normales de cette courbe qui passent par le centre sont celles conduites par les sommets.

Il s'agit donc de déterminer la direction de la droite qui joint le milieu A (fig. 26) d'une corde infiniment petite au point E de l'arc où la tangente est parallèle à cette corde. Nous chercherons à cet effet la limite θ de l'angle qu'elle fait avec la normale en ce point de l'arc. Ce que nous appelons θ c'est donc l'angle que fait la normale en E avec la limite de la direction EA.

Soit m le milieu de l'arc, et soit B le point où l'arc est coupé par la perpendiculaire élevée en A à la corde. Les cordes BM, BM′ étant égales, la différence des arcs BM, BM′ est du troisième ordre au moins, et, par conséquent, l'ordre de grandeur de l'arc mB, moitié de cette différence, n'est pas inférieur au troisième. Il suit de là, et de ce que AB est du second ordre (16), que l'angle mAB est infiniment petit. Dès lors la droite mA est à la limite perpendiculaire à la corde MM′. Partant, elle fait un angle infiniment petit avec la normale en un point quelconque de l'arc MM′, donc avec la normale en E, et par conséquent on a

$$\theta = \lim \text{angle } m\text{AE}.$$

En outre, la direction mE se confondant à la limite avec celle de la tangente au point E, l'angle EmA diffère infiniment peu d'un angle droit; par suite on a

$$\operatorname{tang} \theta = \lim \frac{\text{arc } m\text{E}}{m\text{A}},$$

et puisque mB est d'un ordre supérieur à celui de AB, mA a, comme AB, pour expression $\frac{1}{8}\varepsilon\Delta s$ (16); on a donc

$$\text{tang}\,\theta = \lim \frac{\text{arc } mE}{\frac{1}{8}\varepsilon\Delta s},$$

et tout revient à trouver l'expression de l'arc mE.

L'angle que font entre elles les tangentes aux points m et E est précisément égal à celui que fait la première de ces deux tangentes avec la corde MM′, c'est-à-dire à l'angle n du numéro précédent, que nous avons trouvé valoir $\frac{1}{24}\frac{\varepsilon^2\Delta\rho}{\Delta s}$. On obtiendra l'arc mE à une fraction près de lui-même infiniment petite en multipliant l'angle de ses tangentes extrêmes par le rayon de courbure au point m, ou par toute autre grandeur qui en diffère infiniment peu, par conséquent par le rayon de courbure en M, qu'on peut ici remplacer par $\frac{\Delta s}{\varepsilon}$. Le produit de $\frac{1}{24}\frac{\varepsilon^2\Delta\rho}{\Delta s}$ par $\frac{\Delta s}{\varepsilon}$ est $\frac{1}{24}\varepsilon\Delta\rho$, et telle est l'expression de l'arc mE.

Substituant enfin dans l'égalité ci-dessus à arc mE cette valeur, il vient,

$$\text{tang}\,\theta = \frac{1}{3}\lim \frac{\Delta\rho}{\Delta s}\ (*).$$

Remarque. — La longueur mE étant du second ordre d'après l'expression que nous venons d'en écrire, et Bm étant d'un ordre plus élevé comme on l'a vu tout à l'heure, BE est du second, et de là

(*) Cette formule a été obtenue, mais d'une manière toute différente, par M. Abel Transon, dans un mémoire inséré au *Journal de Liouville*, volume de 1841, pages 191 et suivantes. L'auteur l'établit pour le cas des sections coniques, puis il fait voir que, de ce qu'elle a lieu dans les sections coniques, il résulte qu'elle a lieu dans toute courbe. Dans son livre intitulé *Des méthodes en géométrie* (1855), au n° 54, M. Paul Serret l'a établie à l'aide de la développante du cercle. Le même auteur en a donné plus tard une démonstration géométrique indépendante de la considération de toute ligne particulière, et d'ailleurs fort habile, qu'on trouvera dans le volume pour le premier semestre de 1876 des Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences de Paris, à partir de la page 67. Celle qu'on vient de lire a été composée pour la seconde édition du présent ouvrage (1866).

résulte une proposition qui nous sera utile plus loin. La corde BE, comme toute corde inscrite dans le segment MM′, est parallèle à la limite à la corde de ce segment, et il suit de là que, C étant le pied de la perpendiculaire abaissée de E sur cette dernière corde, la différence des longueurs BA et EC est d'un ordre plus élevé que celui de BE, donc d'un ordre supérieur au second. Or nous avons rappelé il y a un instant l'expression de BA, qui peut s'écrire $\frac{1}{8}\frac{\Delta s^2}{\rho}$, et comme cette expression est du second ordre, elle est aussi celle de EC, de la distance, à la corde d'un arc infinitésimal, du point culminant de cet arc, du point où la tangente est parallèle à la corde.

SECONDE PARTIE

LES LIGNES NON PLANES

Propriété fondamentale des surfaces, et premières notions sur les surfaces développables.

On ne saurait, sans ce préliminaire, aborder l'étude des propriétés des lignes non planes; mais nous aurons soin de le réduire au strict nécessaire. La définition de la tangente est, dans ces lignes, la même que dans les courbes planes, et il y aurait ici à répéter mot pour mot le contenu du n° 2.

35. P *désignant un point quelconque d'une surface, les tangentes en* P *à toutes les lignes tracées par ce point sur la surface sont, en général, contenues dans un même plan.*

Considérons la surface comme engendrée par une ligne *génératrice* qui se meuve en se déformant d'une manière continue. Soit PX (fig. 27) la génératrice à l'instant où elle passe par le point P, et soient PY, PZ deux lignes quelconques tracées sur la surface par ce point; la proposition sera démontrée si l'on fait voir que les tangentes en P aux trois courbes PX, PY, PZ sont dans un même plan.

Prenons la génératrice dans une position infiniment voisine de PX, et soient P′, P″ les points où elle coupe alors PZ et PY. Le plan PP′ P″ contient : 1° la corde PP′, qui, à la limite, devient la tangente en P à la ligne PY; 2° la corde PP″, qui, à la limite, devient la tangente en P à la ligne PZ; 3° la corde P′P″, qui diffère infiniment peu de la tangente en P′ à la génératrice, et par suite aussi de la tangente en P à PX. La limite du plan PP′P″ contient donc les tangentes en P aux trois lignes PX, PY, PZ (*).

Il arrive qu'une surface présente des points saillants : en de tels points la démonstration échappe, elle ne se fait plus, et le théorème n'a pas lieu. Il peut même se trouver en défaut en tous les points d'une ligne, lorsque la ligne se dessine sur la surface en forme d'arête. Mais le théorème ne saurait jamais n'avoir lieu en aucun des points d'une partie de surface, quelque petit que soit d'ailleurs le contour fermé qui la limite. C'est là ce qu'il faut entendre quand on dit que la proposition est vraie *en général*.

Le plan qui renferme les tangentes à toutes les courbes tracées sur une surface par un de ses points est appelé *le plan tangent à la surface en ce point*. La perpendiculaire menée au plan tangent par ce point porte le nom de *normale*, et le point lui-même est *le point de contact*.

Cor. I. Le plan tangent est déterminé par les tangentes à deux quelconques des courbes qu'on peut conduire sur la surface par le point de contact.

Cor. II. Dans une surface réglée (on appelle ainsi celles qui, comme par exemple les cônes et les cylindres, sont engendrées par le mouvement d'une droite), le plan tangent contient la génératrice qui passe par le point de contact.

Cor. III. P′ étant un point de la surface infiniment voisin de P, la distance de P′ au plan tangent en P est en général de l'ordre du carré de PP′. On le démontre à l'aide de la courbe suivant laquelle la surface est coupée par le plan que déterminent la normale en P et le point P′.

36. Concevons qu'on se déplace sur une surface réglée en se transportant le long d'une génératrice, et qu'en chacun des points de

(*) On trouvera une autre démonstration dans le *Traité de géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse, 1900, au n° 881.

celle-ci on considère le plan tangent. Il arrive de deux choses l'une : ou bien le plan tangent, qui ne cesse pas de contenir la génératrice, change de direction d'un point à l'autre, tournant autour de la génératrice, ou bien il ne change pas de direction et reste identique à lui-même. Dans ce dernier cas, le plan tangent en un point de la surface est tangent tout le long de la génératrice qui passe par ce point. Ce cas est celui des cylindres et des cônes, et d'autres surfaces encore que nous apprendrons plus loin à connaître.

Lorsque le plan tangent en chaque point d'une surface réglée est tangent dans toute l'étendue de la génératrice qui passe par ce point, on peut faire rouler un plan sur la surface, et dans chacune des positions successives qu'il prend en vertu de ce mouvement il *touche* la surface dans toute l'étendue d'une droite. La surface peut alors être développée sur un plan, car on peut concevoir que le plan roulant entraîne avec lui tout ce qu'il touche, comme s'il était recouvert d'une matière visqueuse, et alors, son mouvement terminé, il aura développé la surface sans déchirures et sans plicatures. C'est pour cela que les surfaces réglées en lesquelles le plan tangent est tangent tout le long d'une génératrice sont appelées *surfaces développables*. Les autres surfaces réglées, celles en lesquelles le plan tangent varie d'un point à un autre d'une même génératrice, sont appelées *surfaces gauches*.

37. Concevons une courbe tracée sur une surface développable : le plan que nous supposons rouler sur la surface en en entraînant les parties à mesure qu'il les touche entraînera aussi la courbe, qui finira par se trouver transformée en une ligne plane, droite ou courbe. On admettra qu'*à chaque instant du mouvement la partie déjà transformée de la courbe se raccorde avec celle qui ne l'est pas encore, c'est-à-dire qu'à leur point de rencontre ces deux parties ont même tangente*.

Au lieu de se représenter, comme nous venons de le faire, le plan déroulant sur lui-même la surface, on peut se le représenter s'enroulant sur elle de manière à l'envelopper graduellement. Alors une ligne préalablement tracée sur le plan se transformera en une courbe tracée sur la surface, et à chaque instant du mouvement la partie déjà enroulée se raccordera avec celle qui ne l'est pas encore, de sorte qu'à leur point de rencontre ces deux parties auront même tangente. Si au lieu d'une courbe on a tracé sur le plan une droite, elle se trouvera à chaque instant tangente à la courbe suivant laquelle elle s'enroule, au point où elle s'en sépare.

Concevons qu'on déroule une surface développable sur le plan tangent suivant l'une de ses génératrices. Considérons une courbe tracée sur la surface et coupant cette génératrice en un point P. De la proposition énoncée tout à l'heure il résulte que la tangente en P à cette courbe est tangente aussi en P à sa transformée dans le plan tangent.

On en déduit encore que si deux lignes tracées sur une surface développable se coupent sous un certain angle, — on appelle angle de deux lignes qui se croisent l'angle de leurs tangentes au point de croisement, — et qu'on développe la surface sur un plan, les transformées de ces deux lignes continuent à se couper sous le même angle.

38. On admettra encore que la longueur d'un arc tracé sur une surface développable n'est point altérée par le développement de la surface sur un plan. En d'autres termes, *un arc tracé sur une surface développable est égal en longueur à la transformée plane à laquelle il donne naissance quand on développe la surface*. La même égalité a lieu entre un arc tracé sur un plan et la transformée qu'il engendre quand on enroule le plan sur une surface développable.

Nous aurons plus tard à revenir aux surfaces réglées afin de compléter ces notions; nous les quittons maintenant pour l'étude des courbes non planes, appelées aussi *courbes gauches* et *courbes à double courbure*. On verra un peu plus loin le motif de cette dernière dénomination.

De la tangente.

39. *Lemme. — Dans une courbe non plane, comme dans une courbe plane, un arc infiniment petit et sa corde sont des infiniment petits égaux.*

Il s'agit de montrer que la limite du rapport $\frac{\text{arc MM}'}{\text{corde MM}'}$ est l'unité.

Par le point M (fig. 28) conduisons un plan qui ne contienne pas la tangente en ce point, puis faisons glisser le long de l'arc une droite assujettie à rester perpendiculaire à ce plan : cette droite engendre un cylindre et décrit sur le plan un arc dont nous nommerons m' la seconde extrémité. Soient MT, Mt les tangentes en M aux arcs MM', Mm' ; elles sont situées dans le plan tangent au cylindre suivant la génératrice qui passe par M (35).

Développons le cylindre sur ce plan tangent, et soient K, k les positions que viennent occuper M' et m' par l'effet du développement : k est situé sur Mt, et MT est tangent en M à la transformée de l'arc MM', c'est-à-dire à l'arc MK (37). En outre, on a (38)

$$\text{arc MK} = \text{arc MM}', \qquad M'm' = Kk.$$

L'angle KkM est droit, et si l'on tire la corde Mm' l'angle M'm'M est droit aussi ; en conséquence on a

$$Kk = \text{corde MK} \sin KMk,$$
$$M'm' = \text{corde MM}' \sin M'Mm',$$

et de ces deux égalités on tire par division

$$\frac{\text{corde MK}}{\text{corde MM}'}\frac{\sin KMK}{\sin M'Mm'} = 1.$$

Les angles KMk et M'Mm' tendant tous deux vers TMt, le rapport $\dfrac{\sin KMk}{\sin M'Mm'}$ a pour limite l'unité. On a donc

$$\lim \frac{\text{corde MK}}{\text{corde MM}'} = 1.$$

Mais l'arc MK étant plan, on peut le substituer à sa corde, ce qui donne

$$\lim \frac{\text{arc MK}}{\text{corde MM}'} = 1,$$

ou, à cause de l'égalité des arcs MK et MM',

$$\lim \frac{\text{arc MM}'}{\text{corde MM}'} = 1\ (*).$$

On verra plus loin que la différence entre l'arc MM' et sa corde est du troisième ordre, et que l'expression de cette différence est la même que dans les lignes planes.

(*) Voir *Nouv. ann. de math.*, 1853, p. 212 et 213.

40. *Dans une courbe non plane, comme dans une courbe plane, l'angle des tangentes aux deux extrémités d'un arc infiniment petit est, en général, du même ordre que l'arc.*

Concevons que tandis qu'un mobile se transporte le long de la courbe, une droite assujettie à passer par le centre d'une sphère de rayon unité se meuve de manière à être constamment parallèle à la tangente à la courbe au point où le mobile se trouve dans le même instant. Cette droite, par l'effet de son mouvement, coupe la surface de la sphère suivant une ligne qui a reçu le nom d'*indicatrice sphérique*. L'arc de cette indicatrice est celui de la courbe primitive, comptés à partir de points pris sur ces deux lignes, sont deux quantités fonctions l'une de l'autre, et dès lors les accroissements simultanés et infiniment petits de l'un et de l'autre sont du même ordre infinitésimal. Si donc on appelle m et m' les points de l'indicatrice sphérique qui correspondent aux points M et M' de la courbe primitive, les arcs MM', mm' sont du même ordre.

Cela posé, par m et par m' faisons passer un grand cercle de la sphère. L'angle des tangentes en M et en M' étant égal à l'arc mm' de ce grand cercle, la question est ramenée à montrer que cet arc est du même ordre que l'arc mm' de l'indicatrice. Or non seulement ces deux arcs sont du même ordre, mais ce sont des infiniment petits égaux, puisqu'ils ont la même corde (39).

Cor. — On a vu que dans une ligne plane la distance de M' à la tangente en M est de l'ordre du carré de l'arc MM'. On fait voir aisément qu'il en est de même dans une ligne non plane. Il suffit pour cela de projeter la figure sur un plan. Alors le raisonnement sera fondé sur ce que la projection de la tangente est tangente à la projection de la courbe (comme il résulte de la définition même de la tangente), et sur ce qu'une droite infiniment petite et sa projection sont du même ordre infinitésimal, pourvu seulement que l'angle que fait la droite projetée avec le plan de projection ne soit pas droit à la limite.

Nous verrons du reste plus loin (58) que la distance de M' à la tangente en M a pour expression, comme dans les lignes planes, la moitié du produit de l'arc par l'angle de contingence; aussi le présent corollaire n'a-t-il été donné que parce que nous allons en avoir besoin.

Du plan osculateur.

41. *Définition du plan osculateur.* Parmi les plans qu'on peut conduire par un point donné d'une ligne non plane, il y en a un particulièrement remarquable. On arrive à la notion de ce plan en cherchant l'ordre infinitésimal de la distance de M′ à un plan passant par M.

Soit P (fig. 29) la projection de M′ sur un plan mené à volonté par M; il s'agit de déterminer l'ordre de M′P. On a

$$\frac{M'P}{MM'} = \sin M'MP,$$

d'où, en nommant α l'angle que fait la tangente en M avec le plan,

$$\lim \frac{M'P}{MM'} = \sin \alpha.$$

Lors donc que le plan ne contient pas la tangente en M, la limite du rapport $\frac{M'P}{MM'}$ est finie, et par suite M′P est du premier ordre.

Supposons maintenant que le plan renferme la tangente en M; alors, l'angle α étant nul, M′P (fig. 30) n'est plus du premier ordre, et l'on va voir qu'il est généralement du même ordre que la distance de M′ à la tangente en M, par conséquent du second. De M′ abaissons M′T perpendiculaire à la tangente en M, et joignons PT, qui sera aussi perpendiculaire à cette tangente. Dans le triangle M′PT, rectangle en P, l'angle T est fini; pour qu'il fût infiniment petit il faudrait que le plan fût dirigé suivant la limite de la direction TM′, et pour le moment nous écarterons ce cas. L'angle T étant fini, et l'angle P l'étant aussi puisqu'il est droit, le rapport des longueurs M′P et M′T est fini, ce qui fait que ces longueurs sont du même ordre.

Il ne reste à considérer que le cas exceptionnel écarté tout à l'heure, celui où le plan est conduit par la tangente et par la limite de la direction TM′. Alors M′P, distance de M′ à ce plan, est d'un ordre supérieur à celui de M′T, distance de M′ à la tangente, puisqu'il est le produit de M′T par le sinus de l'angle M′TP, qui, d'après l'hypothèse, tend vers zéro. M′P est donc, dans le cas qui nous occupe, d'un ordre supérieur au second. Nous formerons plus loin son expression et l'on verra qu'il est du troisième ordre.

Il existe donc en chaque point M d'une ligne non plane un plan dont le contact avec elle est plus intime que celui de tout autre plan conduit également par M. La distance de M' à ce plan est d'un ordre supérieur à l'ordre de la distance de M' à la tangente, et, parmi tous les plans qui passent par M, il est le seul qui jouisse de cette propriété. Ce plan remarquable a reçu le nom de *plan osculateur*. D'après ce qui précède, il est la limite du plan mené par la tangente et par la perpendiculaire abaissée de M' sur la tangente. En d'autres termes, *le plan osculateur en un point d'une courbe non plane est la limite du plan déterminé par la tangente en ce point et par un second point de la courbe infiniment voisin* (*).

Le plan osculateur peut encore, nous le verrons dans les numéros suivants, être envisagé de deux autres manières : 1° comme limite du plan conduit par la tangente en M parallèlement à celle en M'; 2° comme limite du plan déterminé par trois points de la courbe infiniment voisins.

42. *Le plan osculateur en* M *est identique à la limite du plan déterminé par la tangente en* M *et par une parallèle menée de* M *à la tangente en* M', donc à la limite du plan mené par la première de ces deux tangentes parallèlement à la seconde.

Appelons A ce plan. On va reconnaître qu'il fait un angle infiniment petit avec le plan considéré tout à l'heure, celui que déterminent la tangente MT et le point M', et de là résultera la proposition. Nommons B ce dernier plan.

Projetons l'arc MM' sur un plan perpendiculaire à MT, par exemple sur le plan normal (on appelle ainsi le plan perpendiculaire à MT mené par M). Soit m' (fig. 31) la projection de M'; c'est suivant la droite Mm' que le plan B coupe le plan normal.

Soit MN l'intersection du plan normal par le plan A; MN est la projection, sur le plan normal, de la parallèle tiré de M à la tangente en M'. L'angle NMm' est l'angle des plans A et B, et l'on va voir que cet angle est infiniment petit.

Soit $m'n$ la projection de la tangente en M' sur le plan normal; $m'n$ est tangent en m' à la projection Mm' de l'arc MM', et alors

(*) J. Bertrand, *Calcul différentiel et calcul intégral*, tome I, n° 562.

l'angle $Mm'n$ tend vers zéro puisque l'arc Mm' est infiniment petit. Or l'angle NMm' est égal à l'angle $Mm'n$, car MN et $m'n$ sont parallèles puisque MN, ainsi qu'on vient de le remarquer, est la projection sur le plan normal de la parallèle tirée de M à la tangente en M'. L'angle NMm' est donc infiniment petit.

43. Concevons, comme on l'a déjà fait plus haut, que tandis qu'un mobile se déplace le long de la courbe, une droite assujettie à passer par un point fixe se meuve de manière à être toujours parallèle à la tangente au point où le mobile se trouve dans le même instant. Cette droite décrit une surface conique dont les génératrices sont parallèles aux tangentes de la courbe donnée. Appelons μ, μ' les génératrices parallèles aux tangentes en les points M, M' de cette courbe : le plan conduit par μ et μ' est parallèle au plan conduit par la tangente en M parallèlement à celle en M'; donc, à la limite, le plan (μ, μ') est parallèle au plan osculateur en M. Mais à la limite le plan (μ, μ') est tangent au cône suivant la génératrice μ; ainsi les plans osculateurs de la courbe sont parallèles aux plans tangents à cette surface.

44. *La courbe traverse en général le plan osculateur au point de contact.*

Coupons par un plan le cône du précédent numéro, et soit a le point de la ligne d'intersection situé sur la génératrice parallèle à la tangente en M. On va reconnaître que si la courbe donnée ne traverse pas au point M le plan osculateur, il y a, sur la courbe d'intersection, inflexion au point a. Comme les points d'inflexion sont nécessairement isolés, il résultera de là qu'en des points isolés seulement la courbe ne traverse pas le plan osculateur, et la proposition se trouvera démontrée.

Supposons donc que la courbe donnée ne traverse pas au point M le plan osculateur ; alors, dans le voisinage de M et de part et d'autre de ce point, la courbe est située d'un même côté du plan osculateur. Si donc on conduit un plan par la tangente en M et par le point M', comme ce plan fait un angle infiniment petit avec le plan osculateur, il coupera la courbe en un autre point M'' infiniment voisin de M et situé par rapport à M' de l'autre côté de M.

Cela posé, reprenons la figure du n° 42, dans laquelle m' est la projection de M′ sur le plan normal en M. Le plan conduit par MT, tangente en M, et par le point M′, contient la droite Mm', qui est une corde de la projection de la courbe sur ce plan normal.

Il existe sur l'arc Mm' de cette projection un point en lequel la tangente est parallèle à la corde Mm'; appelons-le n' et soit N′ le point de la courbe considérée dont il est la projection : N′ est situé entre M et M′, et la tangente en n' est la projection de celle en N′. Il résulte de là et de ce que le plan déterminé par la tangente MT et par le point M′ contient la corde Mm', que ce plan contient la parallèle menée par M à la tangente en N′. Puisque ce même plan passe par un point M″ situé relativement à M′ de l'autre côté de M, il contient encore la parallèle menée par M à la tangente en un point N″ infiniment voisin de M et situé relativement à N′ de l'autre côté de M.

Reprenons maintenant le cône du numéro précédent, et soient μ, ν', ν'' les génératrices parallèles aux tangentes en M, N′, N″ : ν'' est situé sur le cône de l'autre côté de μ par rapport à ν', et les trois génératrices μ, ν, ν'' se trouvent, en vertu de ce qui précède, contenues dans un même plan.

Que l'on coupe le cône par un plan quelconque; on obtiendra une courbe dont soient a, b' et b'' les points situés sur μ, ν', ν'' ; le point b'' est situé sur la courbe de l'autre côté de a par rapport à b'. Ces trois points étant contenus dans le plan des génératrices μ, ν', ν'', la corde ab' de la courbe d'intersection passe par b'' ; or puisque b' et b'' sont infiniment voisins de a, cela ne peut avoir lieu que si au point a il y a inflexion. La proposition est ainsi démontrée.

Si au point M la courbe ne traverse pas le plan osculateur, la surface conique, lieu des parallèles aux tangentes, s'infléchit suivant la parallèle à celle en M, ou, en d'autres termes, la surface conique est coupée, tout le long de cette parallèle, par son plan tangent. Cela résulte de la démonstration qu'on vient de lire ; mais indépendamment de cette démonstration on rend la chose sensible en prenant le point M lui-même pour sommet de la surface conique. Alors en effet on voit sans peine que si la courbe ne traverse pas le plan osculateur, la surface conique passe de l'autre côté de ce plan à partir de la tangente en M, et que cela n'a pas lieu lorsqu'au contraire le plan osculateur est traversé par la courbe.

45. *Le plan déterminé par* M *et par deux points* M′, M″ *de la courbe infiniment voisins de* M *se confond avec le plan osculateur.*

Soit M″T″ (fig. 32) la tangente en M″. Conduisons un plan par la tangente MT et par le point M″, est un autre par la tangente M″T″ et par le point M. Ces deux plans et celui que nous avons en vue, savoir le plan MM′M″, contiennent tous trois la corde MM″.

Le plan TMM″ fait un angle infiniment petit avec le plan osculateur en M, et le plan T″M″M fait un angle infiniment petit avec le plan osculateur en M″. L'angle de ces deux plans osculateurs étant infiniment petit puisque les deux points M et M″ sont infiniment voisins, il en est de même de celui des plans TMM″, T″M″M. Donc, des quatre angles dièdres que ces deux plans font entre eux, deux sont infiniment petits et les deux autres tendent vers deux droits. Il sera dès lors établi que le plan MM′M″ se confond à la limite avec le plan osculateur en M si l'on fait voir qu'il est compris dans les deux dièdres infiniment petits que font les plans TMM″ et T″M″M, et à cet effet il suffit de montrer que l'arc MM′M‴ est compris dans l'un des deux dièdres infiniment petits.

Ramenée à ces termes la proposition est évidente; car puisque l'arc est infiniment petit il serait impossible, s'il était situé dans l'un des deux grands dièdres, que chacune des deux faces de ce dièdre contînt la tangente et l'une de ses extrémités. Il est donc compris dans l'un des deux dièdres infiniment petits.

***46.** On peut encore établir la proposition comme suit :

Soit MK (fig. 33) l'intersection du plan osculateur et du plan normal en M, et soit toujours MT la tangente; il s'agit de montrer que le plan MM′M″ se confond à la limite avec le plan KMT. Tirons la corde MM′, et soit MX l'intersection du plan MM′M″ avec le plan normal en M : la droite MM′ tend à se confondre avec MT, et nous allons prouver que MX fait un angle infiniment petit avec MK. Il résultera de là que le plan XMM′ coïncide à la limite avec le plan

KMT. La proposition sera démontrée alors, puisque le plan XMM′ n'est autre que le plan MM′M″.

Par M″ menons un plan perpendiculaire à MT, et soit a le point où il coupe le prolongement de la corde MM′ : la droite M″a est située dans le plan MM′M″ ; nous allons montrer que l'angle qu'elle fait avec le plan KMT est infiniment petit. Comme cet angle est égal à l'angle des droites MK, MX, la proposition se trouvera alors démontrée.

D'un point quelconque A de la courbe abaissons AP perpendiculaire à MT, AQ perpendiculaire au plan osculateur, et joignons PQ qui est perpendiculaire à MT. Si l'on suppose que le point A se rapproche indéfiniment de M, AP est infiniment petit comparé à MP, donc aussi PQ, moindre que AP. De plus, comme ensuite de la définition du plan osculateur l'angle APQ tend vers zéro, AQ est infiniment petit comparé à PQ. On a par conséquent :

$$(1) \qquad \lim \frac{PQ}{MP} = 0, \qquad \lim \frac{AQ}{PQ} = 0.$$

Rapportons la courbe à trois axes rectangulaires. Prenons MT pour axe des x, MK pour axe des y, et pour axe des z la perpendiculaire élevée de M au plan TMK. Soient

$$y = F(x), \qquad z = f(x)$$

les équations des projections de la courbe sur le plan des xy et sur celui des xz ; les coordonnées du point A sont

$$x = MP, \qquad y = PQ, \qquad z = AQ,$$

et par suite, si l'on suppose que x tende vers zéro, on a, à cause des relations (1),

$$\lim \frac{F(x)}{x} = 0, \qquad \lim \frac{f(x)}{F(x)} = 0.$$

Désignons par x', x'' les x des points M′ et M″ ; les coordonnées du point a seront

$$x = x'', \qquad y = \frac{x''}{x'} F(x') \qquad z = \frac{x''}{x'} f(x').$$

Par suite, la tangente de l'angle que fait la droite $M''a$ avec le plan xy est égale à

$$\frac{f(x'') - \frac{x''}{x'}f(x)}{F(x'') - \frac{x''}{x'}F(x')}$$

et notre théorème sera démontré si nous faisons voir que cette expression tend vers zéro avec x' et x''. La divisant haut et bas par x'' et posant

$$\frac{F(x)}{x} = \varphi(x), \qquad \frac{f(x)}{x} = \psi(x),$$

elle devient
$$\frac{\psi(x'') - \psi(x')}{\varphi(x'') - \varphi(x')}$$

et l'on a, x tendant vers zéro,

$$\lim \varphi(x) = 0, \quad \lim \psi(x) = 0, \quad \lim \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

Pour montrer que le rapport $\frac{\psi(x'') - \psi(x')}{\varphi(x'') - \varphi(x')}$ tend vers zéro avec x' et x'' concevons que sur deux axes rectangulaires OX, OY on construise une courbe N en prenant pour abscisses les valeurs que revêt $\varphi(x)$ quand on fait varier x à partir de zéro, et pour ordonnées les valeurs correspondantes de $\psi(x)$. Cette courbe passe par l'origine des coordonnées puisqu'on a $\varphi(0) = 0$, $\psi(0) = 0$. De plus, elle est à l'origine tangente à l'axe OX, puisque la tangente de l'angle que fait avec OX une sécante de la courbe N passant par l'origine est égale à $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$, et que ce rapport tend vers zéro avec x. Maintenant $\frac{\psi(x'')-\psi(x')}{\varphi(x'')-\varphi(x')}$ est l'expression de la tangente de l'angle que fait avec l'axe OX la sécante conduite par les points de la courbe N obtenus en faisant successivement dans $\varphi(x)$ et dans $\psi(x)$, $x = x'$ et $x = x''$. Or cet angle est infiniment petit, puisque x' et x'' tendent vers zéro et que la courbe N est tangente à l'origine à l'axe OX. Donc le rapport $\frac{\psi(x'') - \psi(x')}{\varphi(x'') - \varphi(x')}$ tend vers zéro avec x' et x''.

47. *L'angle des plans osculateurs en* M *et en* M′ *est en général du premier ordre.*

Concevons que tandis qu'un mobile se transporte le long de la courbe, une droite assujettie à passer par le centre d'une sphère de rayon unité se meuve de façon à être continuellement une normale du plan osculateur au point où le mobile se trouve dans le même instant : cette droite décrit sur la sphère une courbe dont soient m et m' les points qui correspondent à M et à M′. L'arc mm' de cette courbe est en général du même ordre infinitésimal que l'arc MM′, et comme l'angle des plans osculateurs en M et en M′ et égal à l'angle mom', o désignant le centre de la sphère, tout revient à montrer que l'arc mm' et l'angle mom' sont du même ordre. Or ce sont des infiniment petits égaux, car si l'on mène par m et m' un grand cercle de la sphère, l'angle mom' est égal à l'arc mm' de ce grand cercle, et cet arc a la même corde que l'arc mm' de la courbe décrite par la normale au plan osculateur.

48. L'angle des plans osculateurs en deux points infiniment voisins se nomme *angle de torsion*; nous le représenterons habituellement par le signe η. L'angle de contingence, ou angle des tangentes, sera désigné comme précédemment par ε.

Nous continuerons de même à désigner par ρ le rayon de courbure au point M, c'est-à-dire la limite du rapport de l'arc MM′ à l'angle des tangentes en ses extrémités. Nous posons donc, comme dans les lignes planes,

$$\lim \frac{\Delta s}{\varepsilon} = \rho.$$

La limite du rapport de l'arc à l'angle de torsion est le *rayon de torsion*, qui dans la suite sera désigné habituellement par σ. Nous posons donc

$$\lim \frac{\Delta s}{\eta} = \sigma.$$

Les rapports inverses $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\sigma}$ sont appelés, le premier, la *courbure*, et le second la *torsion* ou encore la *seconde courbure*. De là le terme *courbes à double courbure* par lequel sont souvent désignées les courbes non planes.

49. *La tangente en* M *est la limite de l'intersection des plans osculateurs en* M *et en* M' *; de plus, le point* M *est la limite du point de rencontre de* MT, *tangente en* M, *et de l'intersection des deux plans osculateurs.*

Soit toujours MK (fig. 34) l'intersection du plan normal et du plan osculateur en M, et soit a le point où la tangente en un point A de la courbe, situé à une distance finie de M, perce le plan TMK, qui est osculateur en M : a est un point de l'intersection des plans osculateurs en M et en A.

Soient MB et MC les projections de la courbe sur le plan osculateur et sur le plan normal en M, les points B et C étant les projections de A : les courbes MB, MC sont respectivement tangentes en M aux droites MT, MK, et les projections de la tangente en A sont tangentes à ces courbes en B et en C.

Soit q le point où la tangente en C à la courbe MC coupe MK : q est la projection du point a sur le plan normal, ce qui fait que a est l'intersection de la tangente en B à la courbe MB et d'une parallèle menée par q à MT. Il résulte de là que a est situé, sur la tangente en B, entre le point B et le point où cette tangente coupe MT, si seulement A a été pris assez près de M pour que les arcs AB, AC n'aient aucun point d'inflexion. Dès lors, si une droite glisse de A à M le long de la courbe donnée en lui restant toujours tangente, la ligne qu'elle trace sur le plan osculateur en M passe entre MT et l'arc MB, et, par suite, est tangente en M à MT. Appelons cette ligne la courbe Ma.

Nous allons maintenant montrer que l'intersection des plans osculateurs en M et en A est précisément la tangente en a à cette nouvelle courbe, et par là se trouvera établie la double proposition qui fait l'objet de ce numéro.

Concevons que par le point A (fig. 35) on mène une parallèle à la tangente en un point A' infiniment voisin de A, et soit b le point où elle perce le plan osculateur en M : le plan osculateur en A est la limite du plan des deux droites Aa, Ab (42), et, par suite, l'intersection des plans osculateurs en M et en A est la limite de la direction ab. Tout revient donc à prouver que cette limite est tangente en a à la courbe Ma. Nous allons montrer que la longueur ba', a' désignant le point où la tangente en A' rencontre la courbe Ma, est de l'ordre du carré de l'arc AA', donc aussi de celui du carré de l'arc aa', car les deux arcs sont nécessairement du même ordre infinitésimal. Il suivra de là que la limite de la direction ab est identique à la limite de la direction aa'. Comme cette dernière limite n'est autre que la tangente en a à la courbe Ma, la proposition se trouvera démontrée.

On a $ba' = \frac{d}{\sin \alpha}$, d désignant la distance des droites Ab, $A'a'$, et α l'angle que ba' forme avec ces droites. Soit β l'angle que font Ab et $A'a'$ avec le plan osculateur en M; comme ba' est situé dans ce plan, l'angle α est compris entre β et un droit, et est un angle fini par conséquent, car β est fini. Partant, ba' est de l'ordre de d. Mais d n'est autre chose que la distance de A à la tangente en A', ce qui fait qu'il est de l'ordre du carré de l'arc AA' (40, Cor.), et par suite aussi ba'.

50. *L'intersection des plans osculateurs en trois points* M, M', M'' *d'une courbe infiniment voisins est infiniment voisine de ces trois points.*

Les plans osculateurs en M' et en M'' coupent celui en M suivant deux droites dont le point de croisement est l'intersection des trois plans osculateurs. Il s'agit donc de faire voir que ce point de croisement, qui sera désigné par c, est infiniment voisin de M. Les deux droites en question sont tangentes en des points d et e à la courbe Ma du numéro précédent. Or les points d et e sont infiniment voisins de M, et il en est de même par conséquent du point d'intersection des deux tangentes, c'est-à-dire du point c.

Digression sur l'emploi des courbes auxiliaires.

51. Avant d'aller plus loin il est nécessaire de présenter quelques considérations sur l'emploi des courbes auxiliaires dans les démonstrations qui ont pour but d'établir les propriétés que les lignes possèdent en chacun de leurs points. Nous avons surtout en vue d'indiquer une précaution sans laquelle l'introduction de ces courbes dans le raisonnement pourrait parfois conduire à des résultats faux.

Il convient de distinguer deux cas.

Tantôt la courbe auxiliaire est indépendante de la position du point que l'on considère sur la courbe donnée, ou, en d'autres termes, reste la même quel que soit ce point. Telles étaient les courbes auxiliaires dont on a fait usage aux nos 40 et 47 pour établir que l'angle des tangentes et celui des plans osculateurs en deux points d'une courbe infiniment voisins sont en général de l'ordre de l'arc que ces deux points comprennent entre eux; telle était encore celle dont on s'est servi au no 44 pour prouver que la courbe traverse en général le plan osculateur. Il n'y a aucune précaution spéciale à prendre quand c'est ce cas qui se présente.

D'autres fois, au contraire, la courbe auxiliaire varie d'un point à l'autre de la courbe donnée. Ce cas s'est déjà présenté plusieurs fois. Aux nos 42 et 49 nous avons fait usage de la projection de la courbe donnée sur le plan normal au point considéré; au no 49 nous avons fait usage de la courbe tracée sur le plan osculateur au point considéré par une droite qui se meut en restant tangente à la courbe donnée; et dans le no 46 encore nous avons construit une courbe auxiliaire variable. C'est dans ce second cas qu'il peut, comme on va le reconnaître, devenir indispensable d'user de précaution, si l'on ne veut pas s'exposer à être conduit par le raisonnement à des résultats erronés.

Lorsque dans les déductions qui ont pour but d'établir une propriété que toute ligne possède en chacun de ses points on fait usage d'une courbe auxiliaire, il arrive souvent qu'on doive attribuer à cette courbe, en un point déterminé, la jouissance de propriétés antérieurement démontrées. Mais il ne faut pas oublier que la plupart de ces propriétés n'existent qu'*en général*, et peuvent cesser d'avoir lieu en certains points isolés. Lors donc que dans un raisonnement on attribue à une courbe auxiliaire *variable*, et en un point déterminé, la jouissance de telle propriété générale des courbes, il est indispensable de s'être préalablement assuré que ce point n'est pas un de ces points exceptionnels où la propriété en question cesse d'avoir lieu. Si cette précaution n'a pas été prise, la démonstration est insuffisante.

Pour montrer par un exemple le danger qu'il y aurait à la négliger, considérons la projection d'une courbe non plane sur le plan normal en son point M : l'intersection MK (fig. 31) du plan normal et du plan osculateur est tangente en M à la projection. Appelant m' la projection de M′ et p le pied de la perpendiculaire abaissée de m' sur MK, la longueur Mm' est du second ordre, puisqu'elle est égale à la distance de M′ à la tangente en M (48, Cor.). Si l'on néglige la précaution sur laquelle nous insistons, on déduira immédiatement de là que $m'p$ est du quatrième ordre comme étant de l'ordre du carré de l'arc Mm' (15); et puisque $m'p$ est égal à la distance de M′ au plan osculateur en M, on arriverait à cette conséquence que la distance de l'extrémité d'un arc infiniment petit au plan osculateur en son origine est du quatrième ordre, l'arc étant du premier. Or cette conséquence serait fausse, car nous formerons prochainement (63) l'expression de cette distance, qui se trouvera être du troisième ordre.

Nous avons plusieurs fois déjà, comme il a été rappelé tout à l'heure, fait usage d'une courbe auxiliaire variant d'un point à un autre de la ligne donnée. Mais jamais nous n'avons eu à lui attribuer, en un point déterminé, la jouissance de ces propriétés qui peuvent cesser d'avoir lieu en certains points isolés. Nos déductions n'étaient donc nullement invalidées par l'emploi d'une courbe auxiliaire variable. Il n'en serait plus de même dans quelques-unes de celles qui vont suivre, et il y aura lieu d'user de la précaution dont nous avons cherché à faire ressortir l'importance.

52. En vue de cette précaution nous ferons une remarque avant de rentrer en matière.

Dans la figure 14, L est l'intersection des tangentes en M et en M′, et P est le pied de la perpendiculaire abaissée de M′ sur ML. On a établi les propositions suivantes :

1° L'arc MM′ et l'angle M′LP sont du même ordre infinitésimal (4).

2° Les angles M et M′ formés par la corde avec les deux tangentes sont égaux entre eux et à la moitié de l'angle M′LP, et les longueurs ML et M′L sont égales entre elles et à la moitié de l'arc MM′ (13).

3° Le supplément d'un angle inscrit dans l'arc MM′ est la moitié de l'angle M′LP (14).

4° M′P vaut la moitié du produit de l'arc MM′ par l'angle M′LP (15).

5° La différence entre l'arc MM' et sa corde a pour expression la vingt-quatrième partie du produit de cet arc par le carré de l'angle M'LP (17).

Ces propositions sont de celles qui peuvent cesser d'avoir lieu en des points exceptionnels et isolés. Ce qu'on veut faire remarquer ici, c'est que si le point M n'est pas exceptionnel quant à la première, il ne l'est pas non plus quant aux quatre autres. En d'autres termes nous voulons montrer que, M étant un point déterminé d'une courbe plane, toutes les fois qu'on pourra prouver que l'arc MM' et l'angle M'LP sont du même ordre infinitésimal on sera certain : que les angles M et M' sont égaux à la moitié de M'LP, et les longueurs ML et M'L égales à la moitié de l'arc MM'; que le supplément d'un angle inscrit dans l'arc MM' est la moitié de l'angle M'LP; que M'P vaut la moitié du produit de l'arc MM' par l'angle M'LP; et que la différence entre l'arc MM' et sa corde a pour expression la vingt-quatrième partie du produit de cet arc par le carré de l'angle M'LP.

L'angle M'LP étant l'angle de contingence, s'il est du même ordre que l'arc MM' le rayon de courbure au point M est fini. Cela résulte de la définition même du rayon de courbure. Alors, pour se convaincre que les angles M et M' sont égaux à la moitié de M'LP et que les longueurs ML et M'L sont égales à la moitié de l'arc MM' il suffit de se reporter aux raisonnements par lesquels on a prouvé que ces relations existent en général (13), car on reconnaîtra qu'ils ne peuvent se trouver en défaut que si le rayon de courbure est nul ou infini en celle des deux extrémités de l'arc qui est supposée fixe.

En se reportant aux démonstrations des nos 14 et 15, qui font connaître la valeur du supplément de l'angle inscrit dans l'arc MM' et celle de la perpendiculaire M'P, on verra qu'elles sont entièrement fondées sur les théorèmes établis au n° 13, et que par conséquent la troisième et la quatrième des propositions rappelées tout à l'heure ont lieu aussi toutes les fois que l'arc MM' et l'angle M'LP sont du même ordre infinitésimal.

Enfin, il en est de même de la dernière de ces propositions, car, en fait de propriétés qui peuvent cesser d'avoir lieu en des points isolés, la démonstration par laquelle nous l'avons établie n'en suppose pas d'autres que celles rappelées ci-dessus sous les numéros 2 et 3.

Expressions de diverses grandeurs qui naissent de la considération des tangentes et des plans osculateurs aux deux extrémités d'un arc infinitésimal (*).

53. *Lemme I.* Un angle L a été projeté orthogonalement sur un plan qui est incliné sur celui de L d'une quantité α qu'on suppose tendre vers zéro. Désignons par l la projection de L, et cherchons l'ordre de grandeur de la différence des angles L et l.

Tirons GH (fig. 36) parallèle à l'intersection des deux plans, le plan de L et le plan de projection. Le plan mené par H perpendiculairement à GH coupe en des points P, Q, p, q les parallèles conduites par G aux côtés de L et de l. La droite GH est alors l'intersection des plans PGQ, pGq, et le dièdre GH vaut α.

Les angles PGQ, pGq sont respectivement égaux à L et à l; partant,

$$\sin L = \frac{PQ \sin Q}{GP}, \qquad \sin l = \frac{pq \sin q}{Gp},$$

d'où $\dfrac{\sin L}{\sin l} = \dfrac{PQ}{pq}\dfrac{Gp}{GP}\dfrac{\sin Q}{\sin q}$. Mais $\sin Q = \dfrac{GH}{GQ}$, $\sin q = \dfrac{GH}{Gq}$, partant,

$$\frac{\sin L}{\sin l} = \frac{PQ}{pq}\frac{Gp}{GP}\frac{Gq}{GQ}.$$

Il résulte de la construction qu'on a $\dfrac{PQ}{pq} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, et comme $\dfrac{1}{\cos\alpha} - 1$ vaut $\frac{1}{2}\alpha^2$ en tant qu'infiniment petit, le facteur $\dfrac{PQ}{pq}$ ne surpasse l'unité que d'une grandeur de l'ordre du carré de α. Les angles PGp, QGq, que nous nommerons respectivement β et δ, sont plus petits l'un et l'autre que α, d'où il suit que les facteurs $\dfrac{Gp}{GP}, \dfrac{Gq}{GQ}$, étant égaux à $\cos\beta$ et à $\cos\delta$, sont plus rapprochés encore de l'unité que ne l'est $\cos\alpha$, ce qui achève de prouver que la différence entre le rapport $\dfrac{\sin L}{\sin l}$ et l'unité est de l'ordre au moins du carré de α.

(*) Les énoncés de plusieurs des théorèmes qu'on trouvera dans cet article ont été donnés par M. Ossian Bonnet, en 1853, dans les *Nouvelles annales de mathématiques*. Les simples énoncés, sans démonstrations.

Ici deux cas sont à distinguer, selon que L tend vers zéro ou qu'il tend vers une limite finie. Si L tend vers zéro, cet angle et sa projection sont des infiniment petits égaux, et c'est là tout ce que nous aurons besoin de savoir sur ce cas. D'après ce qu'on vient de lire, la limite de $\frac{\sin L}{\sin l}$ est 1 quel que soit L. Or si L tend vers zéro cette limite est la même que celle de $\frac{L}{l}$, laquelle se trouve par conséquent être égale à l'unité, ce qui entraîne la proposition.

54. En voici une conséquence dont nous aurons quelquefois à faire usage.

Que l'on projette une courbe sur le plan osculateur en l'un M de ses points, et soit m' la projection de M'. Les tangentes en M à la courbe et à sa projection se confondent; la tangente en m' à la projection est la projection de celle en M' à la courbe; et un plan parallèle aux tangentes à la courbe en M et en M' est parallèle à la limite au plan osculateur. Partant, ensuite de la proposition qu'on vient d'obtenir, *l'angle des tangentes en* M *et en* M' *à la courbe et celui des tangentes en* M *et en* m' *à sa projection sont des infiniment petits égaux.*

55. Supposons maintenant que L ne tende point vers zéro, mais bien vers une quantité finie. Posons $\frac{\sin L}{\sin l} - 1 = K\alpha^2$: K tend, d'après l'avant-dernier numéro, vers une limite qui est finie ou nulle. Il suit de là que si l'on pose $\sin L - \sin l = H\alpha^2$, la limite de H est finie ou nulle aussi. La quantité dont varie le sinus, quand on passe de l'angle à sa projection, est donc de l'ordre au moins du carré de α. Il en est de même par conséquent de la quantité dont varie l'angle lui-même, car l'accroissement de l'angle et celui du sinus sont du même ordre infinitésimal, pourvu seulement que l'angle ne soit pas droit à la limite.

Il est donc acquis que la différence entre l'angle L et sa projection est de l'ordre au moins du carré de α. Par la nature du théorème il est évident que le cas où la limite de L serait l'angle droit ne peut faire exception. D'ailleurs il est bien facile, dans ce cas aussi, de conduire la démonstration à son terme; il suffit de partager L en deux parties : la proposition, vraie de chacune d'elles, sera vraie de leur somme.

* Dans son *Cours d'analyse infinitésimale* Ph. Gilbert fait, à la rédaction près, la démonstration comme suit.

Appelant C, c les angles QGH, qGH on a

$$tg\mathrm{C} = \frac{\mathrm{HQ}}{\mathrm{GH}}, \qquad tgc = \frac{\mathrm{H}q}{\mathrm{GH}},$$

par quoi, à cause de $\mathrm{H}q = \mathrm{HQ}\cos\alpha$, on a

$$tgc = tg\mathrm{C}\cos\alpha.$$

Retranchant cette égalité membre à membre de l'identité $tg\mathrm{C} = tg\mathrm{C}$, et tenant compte de la relation $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{1}{2}x$, il vient

$$tg\mathrm{C} - tgc = 2\, tg\mathrm{C}\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha,$$

ce qui, vu l'égalité $tgx - tgy = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$, peut s'écrire

$$\sin(\mathrm{C}-c) = 2\sin\mathrm{C}\cos c\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha.$$

D'après cette relation le sinus de l'angle $\mathrm{C}-c$ est égal à une fraction de α^2, et il en est ainsi par conséquent de l'angle $\mathrm{C}-c$, qui ne diffère de son sinus que d'une partie de lui même dont le rapport au tout est infiniment petit.

Appellons D et d respectivement les deux angles PGH et pGH : les différences $\mathrm{C}-c$ et $\mathrm{D}-d$ sont ainsi deux fractions de α^2. Nommons les $m\alpha^2$ et $n\alpha^2$. Si, comme dans notre figure, l'intersection du plan de l'angle PGQ ou L et du plan de projection est en dehors de cet angle, la différence $\mathrm{L}-l$ entre l'angle et sa projection est $(m-n)\alpha^2$. Elle est $(m+n)\alpha^2$ si cette intersection est, au contraire, à l'intérieur de l'angle. Dans l'un comme dans l'autre cas l'ordre infinitésimal de la différence $\mathrm{L}-l$ entre l'angle L et sa projection sur un plan faisant avec le sien un angle infiniment petit α est, au moins, celui du carré de α.

56. *Lemme II*. Soient AB, A′B′ (fig. 37) deux angles droits de sommet commun O qui tendent à se confondre. (Nous supprimerons ici la lettre du sommet dans la désignation des angles.) On veut montrer que si les deux angles AA′, BB′ sont du même ordre infinitésimal et si OB est perpendiculaire à la position limite du plan AOA′, OA est perpendiculaire à la position limite du plan BOB′.

Soit OC normal au plan AOB; OABC est un trièdre trirectangle. Le plan A′OB′ coupe les plans AOC, BOC suivant des droites Oa, Ob. Le dièdre A′OAC est infiniment petit puisque OB, qui est normal au plan AOC, donc à l'une des deux faces du dièdre, tend par hypothèse à le devenir au plan AOA′, qui en constitue l'autre. Il suit de là que l'angle $A'a$ est infiniment petit comparé à l'angle AA′, comme on s'en assure par la considération du trièdre infinitésimal $OAA'a$, où deux des trois dièdres, savoir ceux qui ont pour arrêtes Oa et OA′, sont droits à la limite, où le dièdre que nous venons de reconnaître infiniment petit forme le troisième dièdre, où l'angle $A'a$ constitue la face opposée à ce dièdre infiniment petit, et où l'angle AA′ forme la face opposée à l'un des deux dièdres qui deviennent droits à la limite.

Le plan A′OB′, qui contient les droites Oa, Ob, est incliné sur le plan AOB d'un angle qui n'est pas d'ordre inférieur à celui des angles AA′, BB′. Car soit OI l'intersection des deux plans : les angles AI, BI ne sauraient être infiniment petits tous deux, et si BI par exemple est fini, le dièdre BOIB′, qui est l'angle des deux plans, ne peut pas être d'un ordre inférieur à celui de l'angle BB′, vu que, pour que le rapport $\frac{BB'}{BOIB'}$ pût tendre vers zéro, il faudrait que, contrairement à la supposition, l'angle BI fût infiniment petit. Il suit de là et du numéro qni précède que, prenant pour premier ordre infinitésimal celui de AA′ et BB′, la différence entre l'angle ab et l'angle AB, projection de ab sur le plan AOB, est du second ordre au moins. Cette différence est la même que celle des angles ab et A′B′, puisque AB et A′B′ sont égaux, et elle est conséquemment soit la somme soit la différence des deux angles $A'a$ et $B'b$, les quatre droites OA′, OB′, Oa, Ob étant dans un même plan. Puis donc que $A'a$ est d'ordre supérieur au premier d'après ce que nous avons vu tout à l'heure, il en est de même de $B'b$. Ainsi $B'b$ est infiniment petit comparé à BB′, que nous avons supposé de même ordre que AA′, et il résulte de là que, OA étant perpendiculaire à OB et au plan BOb, l'est aussi à la situation finale du plan BOB′. En d'autres termes, ce plan tombe à la limite dans le plan BOC, d'où la proposition.

57. *Lemme III.* Le carré de l'angle des plans AOB, A'OB' est la somme des carrés des angles AA' et BB'.

On vient de voir que les angles A'a, B'b sont infiniment petits comparés aux angles AA', BB' respectivement. Il suit de là que les angles AA' et Aa d'un côté, BB' et Bb de l'autre, sont des infiniment petits égaux. Il suffira dès lors de montrer que le carré de l'angle des plans AOB, A'OB' est la somme des carrés des angles Aa et Bb. Soit OC' une normale au plan A'OB' ou aOb; l'angle CC' est égal à celui de nos deux plans, et il s'agit donc d'établir la relation

$$\overline{CC'}^2 = \overline{Aa}^2 + \overline{Bb}^2. \qquad (1)$$

Les six points A, B, C, C', a, b, nous les prendrons (fig. 38) sur une sphère de centre O. Le point a est situé sur le grand cercle AC, le point b sur le grand cercle BC. Le grand cercle dont a est un pôle passe par C' et coupe le grand cercle AC à angle droit en un point d voisin de C. De plus, les arcs AC et ad étant égaux puisqu'ils valent un quadrant l'un et l'autre, on a arc Cd = arc Aa. Pareillement, le grand cercle dont b est un pôle passe par C' et coupe le grand cercle BC à angle droit en un point e voisin aussi de C, et l'on a arc Ce = arc Bb. La relation (1) devient par là

$$\overline{CC'}^2 = \overline{Cd}^2 + \overline{Ce}^2, \qquad (2)$$

où CC' est une diagonale du quadrilatère sphérique infinitésimal CdC'e. Dans ce quadrilatère les angles C, d, e sont droits; en d'autres termes, les trois dièdres OC, Od, Oe de l'angle solide tétraèdre OCdC'e sont droits, et il suit de là que la section de cet angle par un plan perpendiculaire à OC est un rectangle. Les diagonales et les côtés de cette section sont égaux en tant qu'infiniment petits aux diagonales et aux côtés du quadrilatère sphérique si le plan sécant est mené par C. D'ailleurs, dans un rectangle, le carré d'une diagonale vaut la somme des carrés de deux côtés contigus, et par là se trouve établie la relation (2) (*).

58. Nous reprenons maintenant le cours de notre exposition. Il a été reconnu plus haut que dans une courbe plane l'angle de la tangente en M et de la corde MM' est égal à la moitié de l'angle de con-

(*) Voir Aoust, *Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace*, N° 50.

tingence, et que la distance de M′ à la tangente en M vaut la moitié du produit de l'arc par l'angle de contingence. Il faut établir d'abord que ces deux propriétés appartiennent aussi aux courbes non planes.

1° Projetons la courbe sur le plan osculateur en M (fig. 39), et soit m' la projection de M′. Menons la tangente en m' à la projection et soit q le point où elle coupe la tangente MT ; on a (13)

$$\text{angle } m'\text{MT} = \frac{1}{2}\text{angle } m'q\text{T}.$$

Mais des deux angles qui figurent dans cette égalité le premier peut (53) être remplacé par l'angle M′MT puisque le plan de celui-ci tend à se confondre avec le plan osculateur, tandis que le second peut (54) être remplacé par l'angle des tangentes en M et en M′ à la courbe considérée, c'est-à-dire par ε. On a donc

$$\text{angle } \text{M}'\text{MT} = \frac{1}{2}\varepsilon.$$

2° Abaissons M′P perpendiculaire sur MT, on a

$$\text{M}'\text{P} = \text{corde MM}' \times \sin \text{M}'\text{MT}.$$

Remplaçons la corde par l'arc, puis le sinus par l'angle, et celui-ci par $\frac{1}{2}\varepsilon$, auquel il est égal, comme nous venons de le reconnaître ; il vient, en désignant l'arc MM′ par Δs,

$$\text{M}'\text{P} = \frac{1}{2}\varepsilon\Delta s.$$

59. *Inclinaison de la tangente en* M′ *sur le plan osculateur en* M.

Cette inclinaison est égale à la moitié du produit de l'angle des tangentes en M et en M′ par celui des plans osculateurs ; en d'autres termes, *l'angle que fait avec le plan osculateur en l'origine d'un arc infiniment petit la tangente en son extrémité vaut la moitié du produit des angles de contingence et de torsion.*

Sur la surface conique lieu des parallèles aux tangentes de la courbe soient μ et μ' les génératrices parallèles aux tangentes en M et en M′. L'angle de μ et μ' est égal à l'angle de contingence ; l'angle des plans tangents au cône suivant μ et μ' est égal à l'angle de torsion puisque ces deux plans sont respectivement parallèles aux plans osculateurs en M et en M′ ; enfin l'angle que fait μ' avec le plan tangent au cône suivant μ est égal à l'angle de la tangente en M′ avec le plan osculateur en M. La question est dès lors ramenée à montrer que l'inclinaison de μ' sur le plan tangent au cône suivant μ est égale en tant qu'infiniment petite à la moitié du produit de l'angle des génératrices μ et μ' par l'angle des plans tangents suivant ces génératrices.

Soit o (fig. 40) le sommet du cône. Sur l'intersection des plans tangents suivant μ et μ' prenons ol égal à l'unité, et par le point l menons un plan perpendiculaire à cette intersection. Soient m et m' les points où ce plan coupe μ et μ' : ml et $m'l$ sont tangents en m et en m' à la section du cône par le plan (35). Abaissons $m'p$ perpendiculaire sur ml; $m'p$ est normal au plan tangent suivant la génératrice μ. Il suit de là que $m'op$ est l'inclinaison de μ' sur le plan tangent suivant μ; et comme $m'lp$ est l'angle des plans tangents suivant μ et μ' il s'agit de montrer qu'on a

$$\text{angle } m'op = \tfrac{1}{2}\text{angle } mom' \times \text{ angle } m'lp.$$

L'angle de contingence et l'angle de torsion de l'arc MM' étant du même ordre infinitésimal puisqu'ils sont l'un et l'autre de l'ordre de l'arc, les angles mom' et $m'lp$, qui leur sont respectivement égaux, sont du même ordre; et comme l'arc mm' est du même ordre que l'angle mom' (il lui est même égal en tant qu'infiniment petit), l'arc mm' et l'angle $m'lp$ sont aussi du même ordre. Mais cet angle est celui des tangentes aux extrémités de l'arc mm'; donc on a (52):

$$m'p = \tfrac{1}{2}\text{arc } mm' \times \text{ angle } m'lp.$$

Maintenant, $m'p$ étant perpendiculaire à op, les longueurs om, om' tendant vers l'unité et leurs directions étant à la limite perpendiculaires à la corde mm', à $m'p$ on peut substituer l'angle $m'op$, et à l'arc mm' l'angle mom'. Par ces substitutions on tombe sur la relation qu'il s'agissait d'établir.

60. *L'angle que fait l'intersection des plans osculateurs en* M *et en* M' *avec la tangente en l'un ou l'autre de ces points est égal à la moitié de l'angle de contingence.*

Reprenons la figure du numéro précédent; il s'agit de faire voir que l'angle lom vaut la moitié de l'angle mom'.

Puisque l'arc mm' et l'angle des tangentes en ses extrémités sont, ainsi qu'on l'a vu tout à l'heure, du même ordre infinitésimal, lm et

lm' sont des infiniment petits égaux (52) : et comme $lm + lm'$ et arc mm' sont aussi des infiniment petits égaux, on a la relation

$$\lim \frac{lm}{\frac{1}{2}\text{arc } mm'} = 1,$$

où l'on peut remplacer lm et arc mm' par les angles lom et mom', qui, d'après la construction de la figure, leur sont respectivement égaux en tant qu'infiniment petits. Par quoi l'on obtient

$$\lim \frac{\text{angle } lom}{\frac{1}{2}\text{angle } mom'} = 1,$$

d'où résulte la proposition.

61. *L'angle que fait avec le plan osculateur en* M *le plan mené par la tangente en* M *parallèlement à celle en* M' *est égal à la moitié de l'angle de torsion.*

Les mêmes lettres (fig. 41) désignant les mêmes choses que dans la figure des deux numéros précédents, le plan mom' est parallèle au plan mené par la tangente en M parallèlement à celle en M', et le plan oml est parallèle au plan osculateur en M. Dès lors, comme l'angle plm' est égal à l'angle des plans osculateurs en M et en M', il suffit de montrer que le dièdre $lmom'$ vaut la moitié de l'angle plm'.

Dans le plan oml tirons ma perpendiculaire à om, et dans le plan mom' tirons mb perpendiculaire aussi à om; tout revient à établir l'égalité

$$\text{angle } amb = \tfrac{1}{2}\text{angle } plm'.$$

Menons la corde mm': les côtés de l'angle amb sont les projections orthogonales, sur le plan amb, des côtés de l'angle lmm' ; or l'angle que font entre eux les plans de ces deux angles est infiniment petit, car il est précisément égal à l'angle lom, puisque les côtés de ce dernier angle sont respectivement perpendiculaires aux deux plans. Par conséquent on a (53)

$$\text{angle } amb = \text{angle } lmm'.$$

Mais on a aussi (52)

$$\text{angle } lmm' = \tfrac{1}{2}\text{angle } plm',$$

et de ces deux relations on déduit, en les ajoutant, celle qu'il s'agissait d'établir.

62. Nous nous proposons maintenant de chercher l'expression de la distance de M′ au plan osculateur en M, et celle de la plus courte distance des tangentes en ces deux mêmes points. Concevons qu'on ait mené les tangentes et les plans osculateurs en M et en M′, et soient N, N′ (fig. 42) les points où l'intersection de ces plans est coupée par les tangentes. Nous établirons d'abord que les trois longueurs MN, NN′, M′N′ sont, en tant qu'infiniment petites, égales chacune au tiers de l'arc MM′. Cela fait, la recherche que nous avons en vue s'accomplira avec la plus grande facilité.

A cet effet nous montrerons : 1° que la somme MN + NN′ + M′N′ est égale à l'arc MM′; 2° que les termes dont elle se compose sont des infiniment petits égaux. Il résultera immédiatement de là que chacun de ces termes vaut le tiers de l'arc.

Au sujet de la seconde partie de la démonstration, comme M′N′ est, par rapport au point M′, ce qu'est MN par rapport au point M, si MN et NN′ sont des infiniment petits égaux, il en est de même de M′N′ et NN′, et par suite les longeurs MN, NN′ et M′N′ sont trois infiniment petits égaux. Il suffira donc de faire voir que MN et NN′ sont égaux.

Projetons la courbe sur le plan osculateur en M, et soit toujours m' la projection de M′. Menons la tangente en m' à la projection : cette tangente passe par N′, puisqu'elle est la projection de la tangente en M′ à la courbe. Soit q le point où elle coupe la tangente MT. Des cordes MM′ et Mm' la seconde étant la projection de la première et leur angle étant infiniment petit, ces cordes, et par suite les arcs MM′ et Mm' sont des infiniment petits égaux.

1° La somme MN + NN′ + M′N′ est égale à l'arc MM′. En effet, les directions des longueurs MN et M′N′ tendent à se confondre avec celle de la corde MM′, et il en est de même de la direction NN′, car elle fait un angle infiniment petit avec MT (60). Il suit de là que la somme considérée est égale à cette corde, et par suite égale aussi à l'arc MM′ que la corde soutend.

2° Il reste à faire voir que MN et NN′ sont égaux. Considérons à cet effet la ligne tracée sur le plan osculateur en M par une droite qui glisse le long de la courbe donnée en lui restant toujours tangente : d'après ce qu'on a vu au N° 49 cette ligne est tangente en M à la droite MT et en N' à la droite NN'. Dès lors il sera prouvé que MN et NN' sont égaux si l'on démontre que l'arc MN' de cette ligne et l'angle des tangentes en ses extrémités, c'est-à-dire l'angle N'NT, sont du même ordre infinitésimal (52). Cet angle est du premier ordre puisqu'il est la moitié de l'angle des tangentes en M et en M' (60); il suffit donc de montrer que l'arc MN' est du premier ordre.

Cet arc étant, d'après la première partie du N° 49, situé entre la courbe Mm' et la tangente MT, et l'extrémité N' se trouvant entre les points m' et q sur la droite $m'q$, la longueur de sa corde est comprise entre celles de Mq et de corde Mm'. Comme l'arc Mm' est du premier ordre, la question est ramenée à faire voir que Mq est du premier ordre.

Le point q est celui où se coupent les tangentes aux extrémités de l'arc Mm'. Les longueurs Mq et $m'q$ sont alors égales entre elles, et par suite du même ordre que Mm', c'est-à-dire du premier, si l'angle $m'q$T est du premier ordre (52). Or cet angle est du premier ordre, puisqu'il est (54) égal à l'angle des tangentes en M et en M' à la courbe donnée.

Il est ainsi acquis que les trois longueurs MN, NN' et M'N' valent chacune le tiers de l'arc MM'.

Ce résultat est formulé dans les deux énoncés que voici :

La partie de la tangente en M, *comprise entre ce point et l'intersection des plans osculateurs en* M *et en* M', *est égale au tiers de l'arc.*

La partie de l'intersection des plans osculateurs en M *et en* M' *comprise entre les points où elle est coupée par les tangentes en* M *et en* M' *est égale au tiers de l'arc.*

Cor. En combinant le premier de ces deux théorèmes avec celui du N° 60 on trouve que *les distances de* M *et de* M' *à l'intersection des plans osculateurs en ces deux points sont égales au sixième du produit de l'arc par l'angle de contingence.*

63. *Distance de* M′ *au plan osculateur en* M.

Reprenons la figure du numéro précédent; il s'agit de trouver l'expression de la longueur $M'm'$; on a

$$M'm' = M'N' \sin M'N'm'.$$

Remplaçant M′N′ par $\frac{1}{3}\Delta s$ (62), puis le sinus par l'angle, et celui-ci par $\frac{1}{2}\varepsilon\eta$ (59), il vient :

$$M'm' = \frac{1}{6}\varepsilon\eta\Delta s.$$

Ainsi, *la distance de* M′ *au plan osculateur en* M *est égale à la sixième partie du produit de l'arc, par l'angle de contingence, par l'angle de torsion.*

Ce résultat sera utilisé dans la théorie de la sphère osculatrice, où il nous servira à fixer la position du centre de cette sphère.

64. *Plus courte distance des tangentes en* M *et en* M′ (*).

Reprenons encore la figure du N° 62, et par le point N′ menons N′V parallèle à MT : MT est parallèle au plan M′N′V, et, par suite, la distance considérée est égale à la distance d'un point quelconque de MT à ce plan. Si donc on nomme s le pied de la perpendiculaire abaissée de q sur le plan M′N′V, le problème est ramené à former l'expression de qs.

Soit t le point de la tangente en M′ dont q est la projection; l'angle qst étant droit, on a

$$qs = qt \cos sqt.$$

L'angle $N'qt$ est droit aussi; par suite $qt = N'q \operatorname{tang} qN't$, d'où

$$qs = N'q \operatorname{tang} qN't \cos sqt. \tag{a}$$

L'angle sqt est infiniment petit et le facteur $\cos sqt$ a pour limite l'unité. Cet angle en effet n'est autre que celui des normales au plan osculateur en M et au plan M′N′V, ce qui fait qu'il est égal à l'angle

(*) La démonstration qui va suivre n'est point, comme on le pourrait penser, empruntée au Mémoire intitulé *Détermination géométrique de quelques infiniment petits*, où elle se lit, aux termes près, dans les pages 422 et 423; car elle figurait déjà dans la seconde édition de cet ouvrage, antérieure de neuf ans au Mémoire, pages 83 et 84.

de ces deux plans, lequel est infiniment petit, puisque le plan M′N′V est parallèle au plan mené par la tangente en M parallèlement à celle en M′.

Les angles $qN't$ et $M'N'm'$ sont égaux comme opposés au sommet. Et comme on peut ici remplacer la tangente par l'angle (3, Rem. II), le facteur tang $qN't$ vaut $\frac{1}{2}\varepsilon\eta$ (59).

$N'q$ est égal à $m'q - m'N'$; or $m'q$ et $m'N'$ sont égaux, le premier à $\frac{1}{2}\Delta s$, et le second à $M'N'$, par suite à $\frac{1}{3}\Delta s$ (62); donc $N'q$ vaut $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\Delta s$, c'est-à-dire $\frac{1}{6}\Delta s$.

Remplaçant les trois facteurs du second membre de (a) respectivement par $\frac{1}{6}\Delta s$, $\frac{1}{2}\varepsilon\eta$, et 1, il vient

$$qs = \frac{1}{12}\varepsilon\eta\Delta s.$$

Ainsi, *la plus courte distance des tangentes en* M *et en* M′ *est égale à la douzième partie du produit de l'arc, par l'angle de contingence, par l'angle de torsion.*

Le lecteur pressé peut dès à présent passer à l'article suivant, qui commence au numéro 68.

***65.** L'étude des grandeurs qui sont introduites par la considération des tangentes et des plans osculateurs en deux points d'une ligne infiniment voisins conduit à d'autres théorèmes encore. Nous en donnons quelques-uns dans ce numéro et dans le suivant.

Les deux que voici se vérifient immédiatement sur la figure 42, la première par le théorème du N° 63, l'autre en combinant ce théorème avec la seconde des deux propositions du N° 58.

1° *L'inclinaison de la corde* MM′ *sur le plan osculateur en* M *est égale au sixième du produit de l'angle de contingence par l'angle de torsion.*

2° *L'angle que fait avec le plan osculateur en* M *le plan mené par la tangente en* M *et par le point* M′ *est égale au tiers de l'angle de torsion.*

***66.** 1° *L'angle que fait la commune perpendiculaire aux tangentes en* M *et en* M′ *avec la normale du plan osculateur en* M *est égal à la moitié de l'angle de torsion.* Il est, en effet, précisément égal à l'inclinaison du plan osculateur en M sur le plan mené par la tangente en M parallèlement à celle en M', inclinaison que nous avons reconnue au N° 61 valoir la moitié de la torsion.

2° *Les distances des deux extrémités d'un arc infinitésimal à la commune perpendiculaire aux tangentes en ces extrémités sont égales.*

Appelant a et b les points où la commune perpendiculaire des tangentes en M et M' coupe ces deux droites, la proposition s'exprime par l'égalité $Ma = M'b$. Or cette relation va de soi, le rapport des deux longueurs ne pouvant évidemment pas tendre vers une limite autre que l'unité, et alors, comme la distance ab est d'un ordre supérieur au premier (64), par quoi le chemin brisé $MabM'$ entre M et M' vaut Δs, chacune des deux longueurs Ma et $M'b$ vaut $\frac{1}{2}\Delta s$. L'égalité $Ma = \frac{1}{2}\Delta s$ s'établit directement comme suit.

Dans la figure 43 a et b désigneront les deux points que l'on vient de dire, et les lettres qui se voient déjà dans la figure 42 désigneront les mêmes choses que dans cette figure. Alors, comme Mq vaut $\frac{1}{2}\Delta s$, on aura $Ma = \frac{1}{2}\Delta s$ si qa est d'un ordre supérieur au premier, et l'on va reconnaître qu'il est du troisième.

De t tirons tv parallèle à MT, puis menons bc perpendiculaire à tv. La direction ac est normale au plan osculateur en M, ce qui fait que l'angle bac est précisément celui qui a été considéré dans la première partie de ce numéro. L'angle bac est donc du premier ordre. Quant à l'angle abc, il est droit, car ab est normal au plan $M'tv$. Or ab étant du troisième ordre (64), il résulte de tout ceci que bc est du quatrième. L'angle btc est du premier ordre, car il n'est autre que ε; alors, bc étant du quatrième ordre, tc est du troisième. Donc aussi qa, qui ne diffère point en longueur de tc.

*67. *Différence entre l'arc* MM' *et sa corde.*

Dans les lignes non planes, la différence entre un arc infiniment petit et sa corde est, comme dans les lignes planes, égale à la vingt-quatrième partie du produit de l'arc par le carré de l'angle de contingence.

Appelons c la corde de l'arc considéré; il s'agit de montrer que

$$\Delta s - c \quad \text{et} \quad \frac{1}{24}\varepsilon^2 \Delta s$$

sont des infiniment petits égaux.

Soit toujours m' la projection de M' sur le plan osculateur au point M. Désignant par $\Delta s'$ l'arc $\mathrm{M}m'$, par c' sa corde et par ε' l'angle des tangentes en ses extrémités, nous savons que

$$\Delta s' - c' \quad \text{et} \quad \frac{1}{24}\varepsilon'^2 \Delta s'$$

sont des infiniment petits égaux (52). Nous savons aussi que ε et ε' d'un côté, Δs et $\Delta s'$ de l'autre, sont égaux en tant qu'infiniment petits, et par conséquent que les quantités

$$\frac{1}{24}\varepsilon^2 \Delta s \quad \text{et} \quad \frac{1}{24}\varepsilon'^2 \Delta s'$$

sont encore des infiniment petits égaux. Dès lors, pour que notre proposition soit établie, il suffit de faire voir que les deux différences

$$\Delta s - c \quad \text{et} \quad \Delta s' - c'$$

sont égales en tant qu'infiniment petites.

A cet effet nous allons montrer que l'excès de c sur c' et celui de Δs sur $\Delta s'$ sont l'un et l'autre d'ordre supérieur au troisième. Il résultera de là que la différence entre les quantités $\Delta s - c$ et $\Delta s' - c'$ est d'un ordre supérieur au troisième, et comme $\Delta s' - c'$ est du troisième ordre, il sera prouvé que ces quantités sont des infiniment petits égaux.

Le triangle $\mathrm{MM}'m'$ donne :

$$c - c' = c\,(1 - \cos \mathrm{M}'\mathrm{M}m') = 2c \sin^2 \tfrac{1}{2}\mathrm{M}'\mathrm{M}m',$$

et comme c est du premier ordre et l'angle $\mathrm{M}'\mathrm{M}m'$ du second (65, 1°), on conclut de cette égalité que l'excès de c sur c' est du cinquième ordre.

Pour montrer que celui de Δs sur $\Delta s'$ est d'un ordre supérieur au troisième, concevons qu'une droite glisse sur la courbe donnée en restant toujours normale au plan osculateur en M, et développons le cylindre que cette droite engendre, en vertu de ce mouvement, sur le plan tangent au cylindre le long de la génératrice qui passe par ce même point M. Soient N, n (fig. 44) les positions que viennent occuper les points M′, m' par l'effet du développement. L'arc MM′ ou Δs se transforme en un arc MN qui lui est égal en longueur (38) et qui est tangent à MT au point M (37, avant-dernier alinéa); le point n est situé sur MT, et l'arc Mm' au $\Delta s'$ est égal à Mn. Tout est donc ramené à faire voir que la différence arc MN — Mn est d'un ordre supérieur au troisième.

Soit Nq la tangente en N à l'arc MN, q étant son intersection avec MT; nous allons montrer que $\mathrm{M}q + \mathrm{N}q - \mathrm{M}n$ est d'un ordre supérieur au troisième. Comme l'arc MN est plus petit que $\mathrm{M}q + \mathrm{N}q$, la différence arc MN — Mn sera, à fortiori, d'un ordre supérieur au troisième.

On a $\mathrm{M}q + \mathrm{N}q - \mathrm{M}n = \mathrm{N}q - qn$, et si de q comme centre avec qN pour rayon on décrit un cercle qui coupe MT en D, on a $\mathrm{N}q - qn = n\mathrm{D}$.

Tirons la corde ND. L'angle NnD étant droit, l'angle nND est égal à la moitié de l'angle NqD; donc il est infiniment petit, car l'angle NqD est celui des tangentes aux deux extrémités de l'arc MN. Dès lors nD est infiniment petit par rapport à Nn; mais Nn étant la distance de M′ au plan osculateur en M, il est du troisième ordre (63); donc nD est d'un ordre supérieur au troisième.

Du cercle de courbure et du cercle osculateur.

68. Le *cercle de courbure* en un point d'une courbe non plane est celui dont le rayon est la limite du rapport d'un arc infiniment petit compté à partir de ce point, à l'angle de contingence (48).

Ce cercle est identique au cercle de même définition de la projection de la courbe sur le plan osculateur. Si en effet nous reprenons la figure 42, les rayons de courbure en M à la courbe donnée et à la projection sont respectivement les limites des fractions $\frac{\Delta s}{\varepsilon}$ et $\frac{\text{arc } \mathrm{M}m'}{\text{angle } m'q\mathrm{T}}$, dont les numérateurs sont des infiniment petits égaux, et aussi les dénominateurs (54).

69. Le *cercle osculateur* est, de tous les cercles qu'on peut mener par le point M, celui dont le contact avec la courbe est le plus intime. Pour le déterminer de grandeur et de position concevons un cercle tangent à la courbe au point M. Prenons sur la tangente commune une longueur du premier ordre MA (fig. 45), et par l'extrémité A menons un plan perpendiculaire à la tangente; il coupe la courbe et le cercle en des points B et C. Pour résoudre la question il suffit de trouver les conditions sous lesquelles BC prend sa valeur minimum, et à cet effet nous allons passer en revue les divers cas imaginables.

Le plan du cercle contient la tangente commune; si ce plan est différent du plan osculateur à la courbe au point M l'angle BAC est fini, et BC est par conséquent du second ordre comme AB et AC.

Supposons donc que le cercle ait été tracé dans le plan osculateur au point M, et appelons b le point où la projection de la courbe sur ce plan est coupée par le plan mené tout à l'heure perpendiculairement à la tangente commune : b est la projection de B sur le plan osculateur, et la longueur Bb est du troisième ordre (63). Si notre cercle ne se confond pas avec le cercle de courbure en M à la projection, la distance Cb est du second ordre (19), donc d'un ordre inférieur à celui de Bb, d'où il suit que BC et Cb sont alors des infiniment petits égaux. Conséquemment, si le cercle choisi ne se confond pas avec le cercle de courbure en M à la projection, BC est du second ordre.

Il ne reste à examiner que le seul cas où le cercle considéré est identique au cercle de courbure en M à la projection. La distance Cb étant dans ce cas d'un ordre supérieur au second, il en est de même de BC, et ce cercle est, dès lors, le cercle osculateur cherché. Or on a vu au numéro précédent que le cercle de courbure de la projection a pour rayon la limite du quotient $\frac{\Delta s}{\varepsilon}$, Δs et ε se rapportant à la courbe non plane. Par suite, *le cercle osculateur est tracé dans le plan osculateur et son rayon est égal à* $\lim \frac{\Delta s}{\varepsilon}$. Le centre en est situé sur celle des normales en M qui est contenue dans le plan osculateur. Cette normale a reçu le nom de *normale principale*, laquelle, d'après la définition du plan osculateur (41), n'est donc autre chose que la situation limite de la droite M′P prolongée de part et d'autre, P étant le pied de la perpendiculaire abaissée de M′ sur la tangente en M.

70. *Dans les courbes non planes, comme dans les courbes planes, le cercle osculateur est déterminé par trois points de la courbe infiniment voisins.* Dans le cas des courbes planes cette proposition a été déduite (20) du fait que le supplément d'un angle inscrit dans un arc infiniment petit vaut la moitié de l'angle de contingence. Commençons par montrer que ceci est vrai aussi des lignes non planes.

Soit H (fig. 46) un point de l'arc MM'. Projetons la courbe sur le plan osculateur en M, et soient m', h les projections des points M' et H : désignant par ε' l'angle de contingence de l'arc Mm', l'angle des cordes Mh, hm' a pour expression $\frac{1}{2}\varepsilon'$ (14). Comme l'angle des tangentes en M et en M' est égal à ε' (54), tout revient à montrer que l'angle des cordes MH, HM' et celui des cordes Mh, hm' sont égaux. Or cela résulte immédiatement de la proposition établie au N° 53, puisque le second de ces angles est la projection du premier sur le plan osculateur en M, et que, d'après le théorème des N^os^ 45 et 46, l'angle de leurs plans est infiniment petit.

Il est ainsi établi que le supplément de tout angle inscrit dans un arc non plan infinitésimal a pour expression de sa valeur la moitié de l'angle de contingence.

Cela posé, pour prouver que le cercle conduit par trois points de la courbe infiniment voisins est identique au cercle osculateur, il suffira de répéter mot pour mot le raisonnement du N° 20, et de remarquer en outre que le cercle en question est situé dans le plan osculateur, puisque ce plan est lui-même déterminé par trois points de la courbe infiniment voisins.

71. *La limite du cercle qui est tangent en* M *à la courbe et qui passe par* M' *est identique aussi au cercle osculateur.* D'abord il est contenu dans le plan osculateur (41), en sorte qu'il y a seulement à montrer que son rayon est égal à celui du cercle de courbure. Le rayon du cercle que nous envisageons est égal au rapport

$$\frac{\text{arc de cercle MM}'}{2 \text{ angle TMM}'},$$

et comme l'arc de cercle MM′ et l'arc Δs sont égaux puisqu'ils ont la même corde, et que l'angle TMM′ a pour expression $\frac{1}{2}\varepsilon$ (58), ce rapport a la même limite que le rapport $\frac{\Delta s}{\varepsilon}$.

72. Chacun des cercles qui nous ont occupé dans les derniers numéros est identique au cercle de même définition de la projection de la courbe sur le plan osculateur. Cela résulte clairement de tout ce qui précède, comme le lecteur le vérifiera sans peine. Cette remarque sera utilisée.

73. Ici trouve naturellement sa place un lemme dont nous aurons besoin plus tard. Considérons une courbe et sa projection sur le plan osculateur en M, et soit toujours m' la projection de M′ sur ce plan. Nous nous proposons de montrer que les accroissements que prend le rayon de courbure quand on passe de M à M′ sur la courbe donnée et de M à m' sur sa projection sont égaux en tant qu'infiniment petits. A cet effet nous chercherons l'expression de la différence de ces accroissements; il viendra une quantité du second ordre, et comme l'accroissement que reçoit le rayon de courbure quand on passe de M à M′ est en général du même ordre que l'arc MM′, la proposition se trouvera démontrée.

Soient ρ et $\rho + \Delta\rho$ les rayons de courbure de la courbe donnée en M et en M′. Le rayon de courbure de la projection au point M est ρ (68), et nous appellerons $\rho + \omega$ celui au point m'. Il s'agit de former l'expression de la différence $\omega - \Delta\rho$. A cet effet nous chercherons d'abord celle du rapport $\frac{\rho + \omega}{\rho + \Delta\rho}$ en supposant le point M′ fixe.

Soient M″ un point de la courbe considérée infiniment voisin de M′ et m'' sa projection sur le plan osculateur en M. Désignons par E l'angle des tangentes en M′ et en M″, et par E′ celui des tangentes en m' et en m''; on a

$$\rho + \Delta\rho = \lim \frac{\text{arc M'M''}}{\text{E}}, \qquad \rho + \omega = \lim \frac{\text{arc } m'm''}{\text{E'}}.$$

La limite du rapport des arcs $m'm''$ et M′M″ est égale à celle du rapport de leurs cordes. Or cette dernière limite est le cosinus de l'inclinaison de la tangente en M′ sur le plan osculateur en M. Désignant cette inclinaison par i, on a donc

$$(1)\qquad \frac{\rho+\omega}{\rho+\Delta\rho}=\cos i \lim \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}'}.$$

Par un point O (fig. 47) menons OT, OT′, Ot, Ot' respectivement parallèles aux tangentes en M′, M″, m' et m''. Les angles TOT′, tOt' sont égaux, le premier à E, et le second à E′. De plus, le plan tOt' étant parallèle au plan osculateur en M et le plan TOT′ tendant à devenir parallèle à celui en M′, la limite de l'angle de ces plans est égale à η. Remarquons encore que Ot et Ot' sont les projections sur le plan tOt' de OT et de OT′, et que l'angle TOt n'est autre que l'angle i.

Menons un plan perpendiculaire à l'intersection OK des plans TOT′ tOt'. Soient A, B, D les points où il coupe OK, OT, OT′, et b, d ceux où il coupe Ot, Ot'. Ces deux derniers points sont les projections de B et de D sur le plan tOt'. On a :

$$\sin \mathrm{TOT}'=\frac{\mathrm{BD}\sin \mathrm{D}}{\mathrm{OB}},\qquad \sin t\mathrm{O}t'=\frac{bd\sin d}{\mathrm{O}b},$$

d'où
$$\lim \frac{\sin\mathrm{TOT}'}{\sin t\mathrm{O}t'}=\lim \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}'}=\frac{\mathrm{O}b}{\mathrm{OB}} \lim \frac{\sin \mathrm{D}}{\sin d} \lim \frac{\mathrm{BD}}{bd}.$$

Or
$$\frac{\mathrm{O}b}{\mathrm{OB}}=\cos \mathrm{TO}t=\cos i\,;$$

$$\lim \frac{\sin \mathrm{D}}{\sin d}=\lim \frac{\sin \mathrm{B}}{\sin b}=\frac{\mathrm{O}b}{\mathrm{OB}}=\cos i.$$

Enfin le rapport $\frac{\mathrm{BD}}{bd}$ est la réciproque du cosinus du dièdre TOKt. Ce dièdre ayant pour limite η, le rapport a pour limite $\frac{1}{\cos\eta}$. On a donc

$$\lim \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}'}=\frac{\cos^2 i}{\cos\eta},$$

ce qui, à cause de (1), entraîne

$$\frac{\rho + \omega}{\rho + \Delta\rho} = \frac{\cos^3 i}{\cos\eta}\ (*).$$

Cessons maintenant de considérer le point M′ comme fixe et supposons-le de nouveau infiniment voisin de M. La fraction $\frac{\cos^3 i}{\cos\eta}$ diffère infiniment peu de l'unité; posons $\frac{\cos^3 i}{\cos\eta} = 1 + \alpha$; on a

$$\frac{\rho + \omega}{\rho + \Delta\rho} = 1 + \alpha, \qquad \text{d'où} \qquad \omega - \Delta\rho = \alpha(\rho + \Delta\rho),$$

ou, ne conservant du second membre que la partie principale,

$$\omega - \Delta\rho = \rho\alpha.$$

Tout est donc ramené à trouver l'expression de α; on a

$$\alpha = \frac{\cos^3 i}{\cos\eta} - 1 = \frac{\cos^3 i - \cos\eta}{\cos\eta}.$$

Remplaçant au dernier membre le dénominateur par sa limite, qui est l'unité, on obtient $\cos^3 i - \cos\eta$ pour valeur de α. Or

$$\begin{aligned}\cos^3 i - \cos\eta &= 1 - \cos\eta - (1 - \cos^3 i)\\ &= 1 - \cos\eta - (1 + \cos i + \cos^2 i)(1 - \cos i)\\ &= 2\sin^2\tfrac{1}{2}\eta - 2(1 + \cos i + \cos^2 i)\sin^2\tfrac{1}{2}i.\end{aligned}$$

(*) On aurait pu arriver à ce résultat un peu plus promptement, mais en utilisant le théorème qui apprend que le rayon du cercle circonscrit à un triangle est le produit de ses trois côtés divisé par le quadruple de son aire. Soient en effet M″ et M‴ deux points de la courbe infiniment voisins de M′; m'' et m''' leurs projections sur le plan osculateur en M; a, b, c, les côtés du triangle M′M″M‴; a', b', c' leurs projections, qui sont les côtés du triangle $m'm''m'''$; s et s' les aires de ces deux triangles; R et R′ les rayons de leurs cercles circonscrits. On a $R = \frac{abc}{4s}$, $R' = \frac{a'b'c'}{4s'}$, d'où $\frac{R'}{R} = \frac{a'b'c'}{abc} : \frac{s'}{s}$. Les rayons R et R′ tendent respectivement vers $\rho + \Delta\rho$ et $\rho + \omega$ quand M″ et M‴ se rapprochent de M′, les rapports $\frac{a'}{a}, \frac{b'}{b}, \frac{c'}{c}$ tendent vers $\cos i$, et alors il reste seulement à obtenir $\lim \frac{s'}{s} = \cos\eta$. Appelant à cet effet a l'angle des plans des deux triangles on a $\frac{s'}{s} = \cos a$, car s' est la projection de s; or a a pour limite η puisque le plan de l'aire s est osculateur en M′ à la limite.

L'angle i étant du second ordre (59) et l'angle η du premier, le second terme de cette différence est infiniment petit comparé au premier. Ne conservant que celui-ci et y remplaçant le sinus par l'angle, il vient $\frac{1}{2}\eta^2$. On a donc $\alpha = \frac{1}{2}\eta^2$, et, par suite,

$$\omega - \Delta\rho = \frac{1}{2}\rho\eta^2,$$

grandeur du second ordre.

74. *Corollaire du numéro précédent.*

Soit C le centre du cercle osculateur en M commun à la courbe et à la projection; tirons la droite Cm', et soit h le point où elle coupe le cercle. Conservons les notations des derniers numéros. Par le théorème du N° 25 on a la relation

$$m'h = \frac{1}{6}\varepsilon'^2\omega.$$

Mais ε' est égal à ε (54), et l'on vient de voir que ω est égal à l'accroissement $\Delta\rho$ que prend le rayon de courbure de la courbe donnée quand on passe de M à M'; donc

$$m'h = \frac{1}{6}\varepsilon^2\Delta\rho.$$

D'après les considérations exposées au N° 51 ci-dessus on pourrait mettre en doute la légitimité de l'application que nous venons de faire du théorème du N° 25, car outre que ce théorème est de ceux qui peuvent cesser d'avoir lieu en des points isolés, l'application en a été faite à un point déterminé de la projection, et celle-ci est une ligne qui varie d'un point à un autre de la courbe donnée. Mais si l'on tient compte de ce qu'on a vu au N° 52 on reconnaîtra, en relisant la démonstration du N° 25, que pour qu'elle puisse se faire il suffit que l'angle des tangentes en M et en M' (fig. 21) et l'arc CC' de la développée soient tous deux du même ordre que l'arc MM', et, par conséquent, que la distance d'une courbe plane au cercle osculateur a pour expression, toutes les fois que cette condition est remplie, le sixième du produit du carré de l'angle de contingence par l'accroissement du rayon de courbure. Dès lors, pour légitimer entièrement l'emploi fait tout à l'heure de cette proposition, il suffit de montrer que arc Mm', ε' et ω sont tous trois du même ordre infinitésimal. Or ces grandeurs sont respectivement égales à arc MM', ε et $\Delta\rho$, et celles-ci sont en général du même ordre. Par suite arc Mm', ε' et ω sont, sauf peut-être en des points isolés, du même ordre infinitésimal. La relation $m'h = \frac{1}{6}\varepsilon^2\Delta\rho$ a donc lieu en général.

Expressions de diverses grandeurs qui naissent de la considération de certaines normales en deux points d'une ligne infiniment voisins, ainsi que de celle des centres de courbure.

Les angles que fait la normale principale en M′ avec le plan normal et avec le plan osculateur en M sont égaux, en tant qu'infiniment petits, le premier à ε, le second à η. La démonstration préalable de ces deux théorèmes simplifiera la recherche des relations auxquelles est consacré le présent article. Elle fera l'objet des deux numéros qui vont suivre.

75. *L'inclinaison de la normale principale en* M′ *sur le plan normal en* M *est égale à* ε.

Nous montrerons que cette inclinaison est égale à l'angle des plans normaux en M et en M′; ce qui suffira, puisque l'angle des plans normaux ne diffère point de celui des tangentes.

Soient (fig. 48)

CD l'intersection de ces deux plans normaux;

M′A la normale principale en M′, coupant CD en A;

M′B perpendiculaire à CD;

P la projection de M′ sur le plan normal en M : PA et PB sont les projections de M′A et de M′B sur ce même plan.

L'angle M′AP est l'inclinaison de la normale principale en M′ sur le plan normal en M; c'est donc l'angle que nous considérons ici. L'angle M′BP est celui des deux plans normaux, car les droites BP et BM′ sont respectivement contenues dans ces deux plans et elles sont perpendiculaires l'une et l'autre à l'intersection CD. Il y a donc seulement à faire voir que les angles M′AP et M′BP sont égaux.

Le second de ces deux angles est la projection, sur son plan, du premier; or nous allons montrer que l'angle de leurs plans est infiniment petit, et alors l'égalité de nos deux angles sera établie en suite du principe exposé au N° 53. Les plans M′AP, M′BP étant tous deux perpendiculaires au plan normal à la courbe au point M, leur angle est égal à APB. Tout est donc ramené à faire voir que l'angle APB est infiniment petit.

Les angles APB et AM′B sont égaux, puisque le premier est la projection, sur son plan, du second, et que l'angle de leurs plans, étant égal à ε, est infiniment petit. Il suffit donc de montrer que AM′B est infiniment petit; et comme M′B est à angle droit sur AB, tout revient à faire voir que AB est à la limite perpendiculaire à M′A. Or AB étant perpendiculaire à la tangente en M et à celle en M′, il est perpendiculaire à un plan mené parallèlement à ces deux tangentes, ce qui fait qu'il tend à devenir perpendiculaire au plan osculateur en M′, donc à M′A, qui par définition est contenu dans ce dernier plan.

76. L'*inclinaison de la normale principale en* M′ *sur le plan osculateur en* M *est égale à* η.

Soient (fig. 49)

NA l'intersection des plans osculateurs en M et en M′ (le point M n'est pas indiqué sur la figure);

M′N′ et M′K la tangente et la normale principale en M′ : l'angle KM′N′ est droit;

N′ et B les intersections de ces deux droites par NA;

Bk la projection de la droite BM′K sur le plan osculateur en M;

BC, BD des perpendiculaires menées à NA dans les plans osculateurs en M et en M′ : les angles KBD et M′N′A sont égaux, car ils sont situés dans un même plan et leurs côtés sont deux à deux perpendiculaires.

L'angle KBk est celui que nous considérons; l'angle DBC est celui des deux plans osculateurs, et il s'agit par conséquent de montrer que les angles KBk et DBC sont égaux. Or le second étant la projection, sur son plan, du premier, la proposition sera démontrée si l'on fait voir que l'angle des plans DBC et KBk est infiniment petit.

Cet angle n'est autre que l'angle kBC, et celui-ci est la projection, sur son plan, de l'angle KBD. Ces deux angles sont égaux, car l'angle de leurs plans est infiniment petit, puisque c'est précisément l'angle η. Or KBD est infiniment petit, car il est, comme nous l'avons fait observer, égal à l'angle M'N'A, lequel a pour expression $\frac{1}{2}\varepsilon$ (60). Donc kBC est infiniment petit.

77. *Angle des normales principales en* M *et en* M'. Appellons cet angle ζ.

Par un point O menons OR et OR' (fig. 50) respectivement parallèles à ces deux normales, puis OS et OT parallèles respectivement aux projections de la normale principale en M' sur le plan normal et sur le plan osculateur en M : les plans ROS, ROT sont parallèles, le premier, au plan normal, et le second, au plan osculateur en M ; les plans R'OS, R'OT sont respectivement perpendiculaires à ces deux plans, et les angles R'OS, R'OT sont présisément ceux qui ont été considérés dans les deux numéros précédents et reconnus égaux, le premier à ε, le second à η.

Par le point a pris sur OR à l'unité de distance de O menons un plan perpendiculaire à cette droite, et soient b, c et d les points où il coupe OT, OR' OS : $abcd$ est un rectangle infinitésimal dont chaque côté est égal à l'angle de celles des droites issues de O qu'il réunit, et il en est de même des diagonales. En particulier, les angles ROR', R'OS, R'OT sont respectivement égaux à ac, cd et bc. Mais ROR' est justement l'angle ζ des deux normales en M et en M', et nous venons de rappeler que R'OS, R'OT sont égaux, l'un à ε, l'autre à η. On peut donc écrire

$$ac = \zeta, \qquad cd = \varepsilon, \qquad bc = \eta.$$

Or le triangle bcd, rectangle en c, donne, en tenant compte de $bd = ac$,

$$\overline{ac}^2 = \overline{cd}^2 + \overline{bc}^2,$$

et dans cette relation remplaçant les termes par les valeurs qu'en fournissent les égalités précédentes puis prenant les racines carrées des deux membres, il vient

$$\zeta = \sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2}.$$

Cette formule est due à Lancret, qui l'a donnée dans les premières années du siècle passé (*).

(*) *Mémoires présentés à l'Institut. Sciences math. et phys.* Vol. I, 1805, p. 430.

* On sera peut-être désireux de savoir comment ce géomètre y est parvenu. Il faut à cet effet concevoir la courbe comme un polygone ABCD.... à côtés infiniment petits, en prenant AB, BC,... prolongés pour tangentes en les sommets A, B,..., puis les plans ABC, BCD,... pour plans osculateurs en ces sommets, et pour normales principales les perpendiculaires élevées dans ces plans aux tangentes, de telle sorte, par exemple, que la perpendiculaire élevée de A à AB dans le plan ABC sera la normale principale en A. Cela posé voici, aux termes et à la rédaction près, la démonstration de Lancret.

Que par le centre d'une sphère de rayon unité on conduise des parallèles aux trois tangentes, AB, BC, CD; elles traversent la surface en des points a, b, c (fig. 51) qu'on reliera par deux arcs de grands cercles ab et bc, dont les plans sont parallèles respectivement aux plans osculateurs ABC, BCD. Par a menons un grand cercle perpendiculaire à l'arc ab, et par b menons en un autre perpendiculaire à l'arc bc : les plans de ces deux cercles sont perpendiculaires, le premier à la normale principale en A, le second à celle en B, ce qui fait que leur angle est égal à celui de ces deux normales. Ces mêmes cercles se coupent en deux points dont l'un, d, est situé du côté de ab prolongé où se trouve le point c, et le triangle abd, rectangle en a, donne, par une formule de la trigonométrie sphérique,

$$\cos adb = \cos ab \sin abd.$$

L'arc bc et le prolongement bl de l'arc ab forment un angle cbl qui est le complément de abd; on a donc la relation

$$\cos adb = \cos ab \cos cbl,$$

où l'arc ab et les angles cbl et adb sont égaux respectivement aux angles des tangentes, des plans osculateurs et des normales principales en A et en B. Or si trois angles α, β, δ sont infiniment petits et en même temps tels qu'on ait $\cos\delta = \cos\alpha \cos\beta$, remplaçant les cosinus par leurs développements en séries et rejetant les termes de dégrés supérieurs au second, il vient une égalité qui peut s'écrire

$$\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

par quoi la relation que l'on vient d'obtenir fournit le théorème de Lancret.

78. *Direction de la commune perpendiculaire aux deux normales.* Dans la figure 50 l'angle bac est celui que fait avec le plan osculateur en M un plan mené parallèlement aux normales principales en M et en M'. L'angle abc étant droit, on a

$$\operatorname{tang} bac = \frac{bc}{ab}.$$

Mais ab est égal à cd puisque $abcd$ est un rectangle, et l'on a vu tout à l'heure que bc et cd sont respectivement égaux à η et ε; donc

$$\lim \operatorname{tang} bac = \lim \frac{\eta}{\varepsilon}.$$

Maintenant, la commune perpendiculaire aux deux normales est perpendiculaire au plan ROR'; l'angle qu'elle fait avec le plan osculateur en M est par conséquent le complément de l'angle bac; si donc on appelle γ sa limite, on a

$$\operatorname{tang} \gamma = \lim \frac{\varepsilon}{\eta},$$

ou, multipliant haut et bas par Δs, remplaçant $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$ par sa limite $\frac{1}{\rho}$ et désignant, comme nous en sommes convenus (48), par σ le rayon de torsion, c'est-à-dire la limite du rapport $\frac{\Delta s}{\eta}$,

$$\operatorname{tang} \gamma = \frac{\sigma}{\rho}.$$

79. *Plus courte distance des deux normales.*

Soit P (fig. 52) le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur le plan mené par la normale principale en M' parallèlement à celle en M, et soit h la plus courte distance de ces deux normales : h est égal à MP, et comme l'angle MPM' est droit, on a

$$h = \Delta s \cos \mathrm{M'MP},$$

c'est-à-dire que h vaut la projection de l'arc sur la direction de la plus courte distance, ce qui va d'ailleurs de soi.

L'angle M'MP est, à la limite, l'angle que fait MP avec la tangente au point M, lequel est précisément celui dont on a au numéro précédent appelé γ la valeur dernière. Son cosinus diffère donc infiniment peu du cosinus de l'angle qui a pour tangente $\frac{\varepsilon}{\eta}$, c'est-à-dire de $\frac{\eta}{\zeta}$.

Remplaçant cos M'MP par cette expression, il vient $h = \frac{\eta \Delta s}{\zeta}$, ou, remplaçant η par $\frac{\Delta s}{\sigma}$ et représentant par τ la limite du rapport $\frac{\Delta s}{\zeta}$,

$$h = \frac{\tau}{\sigma} \Delta s.$$

80. *Distance de la courbe à la commune perpendiculaire aux deux normales.*

Soient A et B (fig. 53) les pieds de cette commune perpendiculaire : il s'agit de déterminer la limite de la longueur MA.

P désignant le même point qu'au numéro précédent, MABP est un rectangle ; on a donc PB = MA, et par suite le triangle PM'B donne

$$\text{MA} = \frac{\text{PM}' \ \sin \text{PM}'\text{B}}{\sin \text{PBM}'}.$$

L'angle PBM' étant l'angle des droites MA et M'B, qui sont les normales principales en M et en M', son sinus est égal à ζ. Quant à l'angle PM'B, il est droit à la limite. En effet, des deux droites MP et MM' la première est perpendiculaire à MA et la seconde le devient à la limite ; comme d'ailleurs leur angle est fini puisqu'il diffère infiniment peu de l'angle γ du N° 78, le plan qu'elles déterminent tend à devenir perpendiculaire à MA, et par suite aussi à M'B, qui fait avec MA un angle infiniment petit. Dès lors, puisque PM' est contenu dans ce plan, l'angle PM'B est droit à la limite, et son sinus tend vers l'unité. Enfin le triangle PMM', rectangle en P, donne

$$\text{PM}' = \text{corde MM}' \ \sin \text{M}'\text{MP},$$

et comme corde MM' peut être remplacé par Δs et sin M'MP par $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ en tant que sinus d'un angle dont la tangente est $\frac{\varepsilon}{\eta}$, PM' est égal à $\frac{\varepsilon \Delta s}{\zeta}$.

Substituant ces valeurs dans l'expression de MA et désignant par D la limite du point A, il vient $\text{MD} = \lim \frac{\varepsilon \Delta s}{\zeta^2}$, ou

$$\text{MD} = \frac{\tau^2}{\rho}.$$

La grandeur et la position de la commune perpendiculaire se trouvent ainsi complètement déterminées. Si dans la formule précédente on remplace τ par sa valeur en ρ et σ qui est $\frac{\rho\sigma}{\sqrt{\rho^2+\sigma^2}}$, on reconnaîtra que MD est plus petit que ρ, et que le point D est par conséquent toujours situé, sur la normale principale, entre la courbe et le centre du cercle osculateur. Soit C ce centre; il existe une relation simple entre les distances de D à M et à C; on déduit en effet de la dernière formule

$$\frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{CD}} = \frac{\sigma^2}{\rho^2}.$$

81. La surface lieu des normales principales est une surface gauche, ainsi que nous le reconnaîtrons plus loin (96). On nomme *gorge* ou *ligne de striction* la ligne qui sur une surface gauche réunit les positions limites des pieds des perpendiculaires communes à deux génératrices infiniment voisines. La courbe lieu des points D est donc la gorge ou ligne de striction de la surface des normales principales. Cette courbe court sur la surface entre la courbe primitive et le lieu des centres des cercles osculateurs (80, dernier alinéa). On voit que son arc élémentaire est égal à $\sqrt{h^2 + \overline{\Delta \mathrm{MD}}^2}$, et que l'inclinaison de sa tangente sur la normale principale a pour tangente trigonométrique le rapport $\frac{h}{\Delta \mathrm{MD}}$, d'où il suit que la ligne de striction de la surface des normales principales ne court perpendiculairement à ces normales que dans les courbes où MD, c'est-à-dire $\frac{\rho\sigma^2}{\rho^2+\sigma^2}$, est constant. On aura un plan dans lequel cette tangente est située en cherchant le plan tangent à la surface au point D. Ce plan contient la normale principale MD en tant que génératrice de la surface (35, Cor. II). Il contient aussi la commune perpendiculaire à deux normales principales infiniment voisines, car c'est là une tangente à la surface comme position limite d'une droite passant par deux points de la surface infiniment voisins. Il contient dès lors la parallèle menée de M à la commune perpendiculaire, parallèle qui a été nommée la *droite rectifiante*, dénomination dont on aura plus loin la justification. Ainsi la tangente à la ligne de striction de la surface des normales principales est située dans le plan que déterminent la normale principale et la droite rectifiante. Nous avons donné tout à l'heure sa direction dans ce plan.

82. Parmi les normales au point M considérons celle qui est perpendiculaire au plan osculateur. Elle a été nommée par de Saint-Venant la *binormale* (*), c'est-à-dire la doublement normale, parce que non seulement elle est perpendiculaire à la tangente en M, mais l'angle qu'elle fait avec la tangente en M′ ne diffère de l'angle droit que d'une quantité infiniment petite comparée à Δs. Cette quantité a en effet pour expression $\frac{1}{2}\varepsilon\eta$, puisque telle est (59) l'expression de l'inclinaison de cette tangente sur le plan osculateur. Or la différence entre un droit et l'angle que fait la binormale en M avec la tangente en M′ est précisément égale à l'inclinaison de cette binormale sur le plan normal en M′. L'inclinaison de la binormale en l'une des extrémités de l'arc Δs sur le plan normal en l'autre extrémité vaut donc $\frac{1}{2}\varepsilon\eta$, et elle est ainsi du second ordre. De là, et de ce que les binormales en les deux extrémités de l'arc font entre elles un angle du premier ordre (l'angle η), il résulte que la tangente est perpendiculaire à un plan parallèle à deux binormales infiniment voisines, et qu'un tel plan, par suite, est parallèle à la limite au plan normal.

Que la tangente soit perpendiculaire à un plan parallèle à deux binormales infiniment voisines est, d'ailleurs, une conséquence immédiate de ce que l'intersection des plans osculateurs en M et M′ tend à se réunir à la tangente (49), puisque cette intersection est perpendiculaire à chacune des deux binormales. Et c'est une conséquence immédiate encore de la proposition qui a fait l'objet du N° 56, si l'on y suppose OA, OA′ parallèles à deux tangentes infiniment voisines, OB, OB′ parallèles aux binormales correspondantes, et si l'on remarque que OB est alors perpendiculaire à la limite du plan AOA′ puisque cette limite est parallèle au plan osculateur.

Si les OA et les OB du N° 56 sont parallèles aux tangentes et aux binormales, — par quoi les angles AA′ et BB′ valent ε et η, — les OC

(*) *Journal de l'Ecole polytechnique*, trentième cahier, p. 17.

du paragraphe 57 sont parallèles aux normales principales, et la proposition établie dans ce paragraphe nous donne à nouveau l'expression de ζ obtenue ci-dessus au N° 77.

83. *L'inclinaison sur le plan normal au point* M *du plan mené par la binormale en ce point parallèlement à celle au point* M′ *vaut la moitié de l'angle de contingence.*

Cette proposition, qui sera utilisée, s'établit comme celle du N° 61, et sur la même figure, savoir la figure 41.

Concevons que par un point o on ait mené des parallèles à toutes les binormales : ces parallèles constituent un cône dont les plans tangents sont, d'après le précédent numéro, parallèles aux plans normaux de la ligne primitive. Appelons μ, μ' les génératrices du cône parallèles aux binormales en M et M′, et soit ol l'intersection des plans tangents au cône le long de ces deux génératrices. Prenons, sur cette intersection, ol égal à l'unité. Par l menons un plan perpendiculaire à ol. Ce plan coupe le cône suivant une courbe dont soit mm' l'arc qui joint les points m, m' où le plan coupe les génératrices μ, μ', que nous nommerons désormais om et om'. De m' abaissons $m'p$ perpendiculaire à ml : $m'p$ est perpendiculaire au plan mol, tangent au cône le long de om. L'angle plm' est l'angle des deux plans tangents ; il vaut donc ε puisque l'angle de deux plans normaux est égal à celui des deux tangentes correspondantes. Dès lors, les plans mol, mom' étant respectivement parallèles au plan normal en M et au plan mené par la binormale en M parallèlement à celle en M′, tout est ramené à montrer que le dièdre $lmom'$, formé par les plans mol et mom', est la moitié de l'angle plm'. Or à la preuve de ce fait ont été consacrés les deux derniers alinéas du N° 61.

84. *Remarque préliminaire.* Soient AB, CD deux droites, et AC leur commune perpendiculaire. On suppose leur angle un infiniment petit d'ordre α. Soit EF une parallèle à AC qui passe à une distance finie de cette droite. Si la distance de EF à l'une des deux droites données AB, CD est d'un ordre supérieur à α, sa distance à l'autre est, on le voit, de l'ordre α. Pour que cette seconde distance pût être, elle aussi, d'un ordre plus élevé que α, il faudrait que EF, contrairement à l'hypothèse, fût infiniment voisin de la commune perpendiculaire AC. Si donc une parallèle à AC passe à des distances de AB et de CD l'une et l'autre d'ordre supérieur à l'ordre de l'angle de ces deux droites, elle est infiniment voisine de leur commune perpendiculaire AC.

On verra au N° 96 que le lieu des binormales est une surface gauche. La ligne de striction de ce lieu n'est autre que la courbe elle-même. En effet, les binormales en M et en M′ étant perpendiculaires aux plans osculateurs en ces mêmes points, leur commune perpendiculaire est parallèle à l'intersection de ces deux plans. Or les distances de cette intersection aux points M et M′, et par suite aussi aux deux binormales, sont du second ordre (62, cor.). De plus, l'angle des binormales est du premier ordre, puisqu'il est égal à celui des plans osculateurs. Donc les distances des binormales en M et en M′ à l'intersection des plans osculateurs en ces mêmes points sont toutes deux d'ordre supérieur à l'angle des binormales. Il résulte de là, d'après notre remarque préliminaire, que cette intersection ne saurait être parallèle à la commune perpendiculaire aux deux binormales sans en être en même temps infiniment voisine. Or nous avons fait remarquer tout à l'heure que ces deux droites sont parallèles; par conséquent la commune perpendiculaire aux deux binormales tend à se confondre avec l'intersection des plans osculateurs, et, par suite, avec la corde MM′. De là résulte que la ligne de striction de la surface lieu des binormales coïncide avec la courbe considérée.

On voit en outre que la plus courte distance des binormales en M et en M′ a pour expression Δs. On voit aussi que dans la surface lieu des binormales la ligne de striction coupe les génératrices à angle droit.

85. *Remarque préliminaire.* Soit ABDC (fig. 54) un quadrilatère dont les côtés opposés AB, CD sont finis, dont les côtés AC, BD sont infiniment petits et du même ordre, — disons les du premier, — et dont les angles sont tous droits à la limite. Soit EF une transversale qui fait avec AB et CD des angles intérieurs d'un même côté égaux : dans chacun des deux quadrilatères AEFC, EBDF les quatre angles sont droits à la limite.

Sur EA prenons EG égal à FC : les angles A et G du triangle ACG sont droits à la limite, d'où il suit que GA est infiniment petit comparé à AC. Ainsi, dans le quadrilatère AEFC, la différence des deux côtés finis est d'ordre supérieur au premier; et comme il en est de même dans le quadrilatère EBDF, la différence des côtés finis AB, CD du quadrilatère donné ABDC est d'ordre supérieur à l'ordre des côtés infiniments petits.

Concevons actuellement que deux courbes soient constamment coupées l'une et l'autre à angles droits par une droite qui se déplace sans jamais cesser de s'appuyer sur elles, et supposons que AB, CD soient, dans deux positions de la droite infiniment voisines, les parties comprises entre les deux courbes : AC et BD sont les cordes de deux arcs infiniment petits des deux courbes, et les quatre angles du quadrilatère ABDC tendent dès lors à devenir droits. La différence de ces parties AB, CD, si elle existe, est, par suite, infiniment petite comparée aux arcs AC, BD.

Soit maintenant MN, non tracé sur la figure, une position de la droite mobile prise à une distance finie de AB, M et N étant les points d'intersection de la droite et des deux courbes. Concevons que l'on ait marqué sur l'arc AM des points dont on fera croître le nombre indéfiniment, et, sur l'arc BN, les points correspondants, deux points correspondants étant ceux qui appartiennent à une même position de la droite mobile. On aura une suite de quadrilatères où la différence des deux côtés finis est d'ordre supérieur à celui des arcs qu'ils comprennent entre eux, et la somme de ces différences est infiniment petite comparée aux sommes des arcs, c'est-à-dire aux arcs AM, BN. Elle est donc nulle, et MN est égal à AB.

On vient de voir que dans la surface lieu des binormales la ligne de striction coupe les génératrices à angles droits. Il n'en est pas de même dans la surface lieu des normales principales, car si dans cette surface la ligne de striction coupait les génératrices à angles droits, comme celles-ci sont déjà coupées à angles droits par la courbe primitive, l'ensemble des normales principales pourrait être considéré comme la suite des positions d'une droite mobile qui reste constamment perpendiculaire à deux courbes fixes, et alors, appellant D le point de la ligne de striction qui correspond au point M de la courbe primitive, d'après notre remarque préliminaire la longueur MD serait constante. Mais nous avons trouvé $MD = \frac{\tau^2}{\rho}$, et $\frac{\tau^2}{\rho}$ est égal à $\frac{\rho\sigma^2}{\rho^2 + \sigma^2}$. Il faudrait donc que cette dernière expression conservât la même valeur en tous les points de la courbe; or c'est ce qui en général n'a pas lieu, car il n'existe pas de relation nécessaire entre le rayon de courbure et le rayon de torsion, et la constance du rapport que l'on vient d'écrire ne peut être le propre que de certaines lignes.

86. *La tangente au lieu des centres de courbure est située dans le plan normal,* appelant, pour abréger, centre de courbure le centre du cercle osculateur.

Ici et dans toute la suite C et C′ seront les centres de courbure en M et en M′, en sorte que MC et M′C′ seront les rayons de courbure et les normales principales en ces deux derniers points.

Soient L (fig. 55) le point où M′C′ traverse le plan normal en M, et PLQ la projection de M′C′ sur ce plan, P et Q étant les projections de C′ et de M′.

L'angle C′CP étant celui que fait CC′ avec le plan normal, il suffit de montrer que cet angle est infiniment petit. L'arc CC′ est du même ordre que MM′, donc du premier, et comme $\sin C'CP = \frac{C'P}{CC'}$, tout revient à montrer que la longueur C′P est d'un ordre supérieur au premier.

L'angle M′LQ est l'inclinaison de la normale principale en M′ sur le plan normal en M, et cette inclinaison est égale à ε (75). D'un autre côté la longueur QM étant du second ordre puisqu'elle est égale à la distance de M′ à la tangente en M, on a $M'Q = MM' = \Delta s$, d'où il résulte, comme l'angle Q est droit, que la longueur M′L diffère infiniment peu de $\frac{\Delta s}{\varepsilon}$, et par conséquent de ρ ou MC. Dès lors elle diffère infiniment peu aussi de M′C′, ce qui fait que C′L est infiniment petit. Or on a $C'P = C'L \sin C'LP$, et comme l'angle C′LP est égal à M′LQ, donc à ε, C′P est d'un ordre supérieur au premier.

La figure suppose $M'C' > MC$, et si l'on y a mis les points M′ et C′ l'un à droite et l'autre à gauche de MC prolongé, c'est que, comme on le prouvera plus loin (115), quand M′C′ surpasse MC, le plan normal en M passe entre ces deux points. La démonstration qu'on vient de lire se serait d'ailleurs faite tout aussi bien avec les deux points du même côté de MC, mais alors la figure eût été incorrecte. Dans une ligne plane M′ et C′ sont situés de part et d'autre du plan normal en M, ou du même côté, suivant que le rayon de courbure est plus grand en M′ qu'en M, ou qu'il y est au contraire plus petit (9, cor.). Or en cela il n'y a pas de différence entre les lignes non planes et les lignes planes, ainsi que nous le ferons voir ci-après au N° 115, ce qui justifiera le dessin de notre figure.

87. *Expression de l'arc* CC′.

Par C′ menons un plan perpendiculaire à MC; il coupe cette droite en un point B, et l'on a (fig. 56)

$$\text{(1)} \qquad \text{corde } CC' = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{BC'}^2}.$$

BC est, en tant qu'infiniment petit, égal à la différence des rayons MC, M′C′; on a donc

$$\text{(2)} \qquad BC = \Delta\rho.$$

Pour évaluer BC′ appelons D le point où le rayon M′C′ traverse le plan osculateur en M, et E le pied de la perpendiculaire abaissée de C′ sur ce même plan. On a

$$EC' = DC' \sin EDC'.$$

L'angle EDC′ est égal à η (76). DM′ est infiniment petit (*), ce qui fait qu'on peut remplacer DC′ par le rayon M′C′ et conséquemment par ρ. Nous pouvons donc écrire

$$EC' = \rho\eta.$$

Enfin EB est égal à la distance de C′ au plan normal en M, et celle-ci est d'un ordre supérieur au premier puisque la tangente en C à l'arc CC′ est située dans ce même plan (86). EB est donc infiniment petit comparé à EC′, et il suit de là que EC′ et BC′ sont égaux en tant qu'infiniment petits. On a donc

$$\text{(3)} \qquad BC' = \rho\eta.$$

(*) Il est égal à $\frac{1}{6}\varepsilon\Delta s$, comme on le vérifie au moyen des N°s 63 et 76.

Mettant dans (1) les valeurs (2) et (3) et substituant l'arc CC′ à sa corde, il vient

$$\text{arc } CC' = \sqrt{\Delta\rho^2 + \rho^2\eta^2}. \ (*)$$

Nous étudierons dans un autre chapitre la sphère osculatrice, qui, de toutes les sphères passant par le point M, est la plus voisine de la courbe près de ce point, et l'on verra, à l'expression de son rayon R, que d'après la relation qui vient d'être obtenue, l'arc CC′ est égal à $R\eta$, ce qui en outre sera établi directement.

88. *Direction de la tangente en C au lieu des centres de courbure.*

On sait déjà (86) que cette tangente est située dans le plan normal; sa direction sera donc déterminée entièrement si nous trouvons l'angle $\varkappa$ qu'elle fait avec le rayon MC.

Dans la figure du numéro précédent la tangente de l'angle que fait la corde CC′ avec MC est égale au rapport $\frac{BC'}{BC}$. Dès lors la tangente de l'angle $\varkappa$ est la limite de ce rapport. Les valeurs de BC et de BC′ ont été données tout à l'heure, et l'on en déduit

$$\operatorname{tang} \varkappa = \lim \frac{\rho\eta}{\Delta\rho}.$$

D'après ce résultat, MC est constamment perpendiculaire au lieu des centres de courbure dans les lignes où, comme par exemple dans l'hélice tracée sur un cylindre rond, le rayon ρ est invariable.

89. *Remarque*. Les valeurs de arc CC′ et de tang $\varkappa$ obtenues dans les deux derniers numéros montrent que dans les courbes non planes le lieu des centres des cercles osculateurs n'est pas, comme dans les courbes planes, une développée de la courbe primitive; car, d'après la définition de la développée, pour que ce lieu en fût une on devrait avoir arc $CC' = \Delta\rho$, et $\varkappa = 0$. Cette proposition est d'ailleurs une conséquence de ce que l'angle de deux normales principales infiniment voisines et leur plus courte distance sont du même ordre, ainsi qu'il résulte des expressions, données dans les N[os] 77 et 79, de ces deux

(*) Valeur obtenue, par voie analytique, par Molins. Voir le *Journal de Liouville*, tome VIII de la 1[re] série, p. 382.

7

grandeurs. Car si le lieu des centres de courbure était une développée de la courbe primitive, les normales principales étant alors tangentes à une même ligne, la plus courte distance de deux d'entre elles infiniment voisines serait, d'après le N° 64, d'ordre supérieur à celui de leur angle.

Dans les lignes planes il n'y a pas de torsion, et l'on voit par les égalités qui terminent les deux derniers numéros que c'est à cet élément qu'est due, dans les lignes non planes, la différence entre l'arc CC′ et $\Delta\rho$, ainsi que l'existence de l'angle $\varkappa$.

On aurait encore à rechercher les angles de contingence et de torsion du lieu des centres de courbure, et aussi la position de son plan osculateur. Il y a quelque avantage à différer un peu cette étude; elle trouvera sa place plus loin.

Notions sur les surfaces réglées.

Nous avons maintenant à nous occuper d'une nouvelle série de propriétés des courbes non planes, de la théorie de leurs développées, de celle de leurs développantes, de la sphère et de l'hélice osculatrices; mais il est indispensable d'établir préalablement quelques théorèmes sur les surfaces réglées.

On a souvent à considérer une surface comme engendrée par une ligne mobile dont le mouvement est dirigé par une ou plusieurs lignes fixes. La ligne mobile a reçu le nom de *génératrice*, et les lignes fixes sont appelées *directrices*.

90. *La surface engendrée par une droite qui se meut sur une courbe non plane en lui restant toujours tangente, ou, en d'autres termes, le lieu des tangentes d'une courbe non plane, est une surface développable. Cette surface a pour plans tangents les plans osculateurs de la courbe directrice* (*).

Soit P (fig. 57) un point de cette courbe, et soit A un point quelconque de la tangente en P. Concevons une ligne tracée à volonté sur la surface par le point A : nous allons montrer que la tangente

(*) Si le lecteur possède des connaissances plus étendues que celles qui sont exigées dans la préface, il reconnaîtra que cette proposition est contenue dans un théorème général de la théorie des surfaces enveloppes.

en A à cette ligne est contenue dans le plan osculateur de la directrice au point P. Il sera établi par là que le plan osculateur en un point quelconque de la directrice est tangent à la surface tout le long de la génératrice qui passe par ce point. On en conclura que la surface lieu des tangentes est (36) une surface développable, et qu'elle a pour plans tangents les plans osculateurs de la directrice.

Soit P′ un point de la directrice infiniment voisin de P, et soit A′ le point où la ligne tracée sur la surface coupe la tangente en P′. Considérons l'arc PP′ comme du premier ordre : l'arc AA′ est aussi du premier ordre, car les longueurs des deux courbes, comptées sur chacune d'elles à partir de l'un de ses points, sont deux quantités fonctions l'une de l'autre. D'un autre côté, l'angle que fait la tangente en P′ avec le plan osculateur en P étant du second ordre (59), la distance du point A′ à ce plan est une longueur du second ordre. Il suit de là que la direction AA′ fait un angle infiniment petit avec le plan osculateur en P, lequel, par conséquent, contient la limite de cette direction, c'est-à-dire la tangente en A à la courbe tracée sur la surface. La proposition est ainsi démontrée et le lieu des tangentes en a reçu le nom de *surface osculatrice*. Il est (49) le lieu des intersections successives des plans osculateurs. Un plan tangent à cette surface est osculateur à la directrice en l'un de ses points, et il contient la tangente à la directrice en ce point.

91. *Cette surface se compose de deux nappes qui se rencontrent le long de la directrice, et celle-ci joue dans la surface le rôle d'arête de rebroussement.*

Pour s'en convaincre il suffit de couper la surface par le plan normal à la directrice au point P, car nous allons montrer sans peine que la ligne d'intersection est formée de deux branches PA, PB tangentes toutes deux en P à la normale principale PK, et disposées par rapport à cette normale comme on le voit dans la figure 58, où CPD représente la courbe directrice.

Dans cette figure les branches PA, PB sont situées d'un même côté de la binormale en P à la directrice CD. Pour montrer qu'il en est bien ainsi en général, remarquons que la ligne d'intersection est précisément celle que la tangente trace sur le plan normal en P quand on la fait rouler sur CD, et que cette droite en décrit l'une des deux branches pendant son mouvement de C en P et l'autre pendant son mouvement de P en D. Soit PA la branche que la tangente trace sur le plan normal quand elle roule sur CP, et soit PB celle qu'elle trace en roulant sur PD; par rapport au plan mené par P perpendiculairement à la normale principale PK, les branches PC, PA se trouvent l'une d'un côté, et l'autre de l'autre; et il en est de même des branches PD, PB. Il suit de là que les deux branches PA, PB de la ligne d'intersection sont en général situées d'un même côté du plan mené par P perpendiculairement à la normale principale PK, et, par conséquent, d'un même côté de la binormale; car pour que le contraire eût lieu, il faudrait nécessairement, d'après ce que nous venons de faire observer, que la courbe CD traversât au point P le plan en question; en d'autres termes il faudrait que la directrice présentât une inflexion en P, et les inflexions ne peuvent se rencontrer sur une ligne qu'en des points isolés.

Par rapport au plan osculateur en P à la directrice, les branches PC, PA sont évidemment situées l'une d'un côté, l'autre de l'autre, et l'on en dirait autant des branches PB, PD. Il suit de là et de la proposition du N° 44 (*) que les branches PA, PB se trouvent en général l'une d'un côté de ce plan et l'autre de l'autre, et, par conséquent, qu'elles sont situées de part et d'autre de la normale principale PK.

Nous allons maintenant faire voir que les branches PA, PB sont l'une et l'autre tangentes en P à PK. De là et de ce qui précède on conclura que le point P est, sur la courbe APB, un point de rebroussement. Et comme la courbe APB n'est autre que l'intersection de la surface lieu des tangentes de la directrice par un plan, le plan normal, il en résultera que la directrice joue sur cette surface le rôle d'arête de rebroussement, ce qui est la proposition énoncée. Or PK est tangent en P à PA et à PB, puisque ces trois lignes sont les intersections, par un même plan, du plan osculateur en P et de la surface, et que ce plan osculateur est, on l'a vu au numéro précédent, tangent à la surface tout le long de la tangente PT à la directrice.

(*) D'après laquelle la courbe traverse en général le plan osculateur au point de contact, par quoi PC, PD sont de part et d'autre du plan osculateur en P à la directrice.

Mais il est à remarquer que dans l'une et dans l'autre des branches PA et PB, la distance de la courbe à PK, dans le voisinage du point P, n'est pas de l'ordre du carré de l'arc, ainsi qu'il semblerait devoir être d'après la proposition du N° 15. On doit s'attendre à chose pareille quand l'origine de l'arc est un point de rebroussement. La distance en question est bien sans doute d'un ordre supérieur à celui de l'arc, car c'est là la condition nécessaire et suffisante pour que PK soit la tangente au point P; mais au lieu d'être du second ordre par rapport à l'arc, elle est de l'ordre $\frac{3}{2}$. C'est ce que nous allons montrer sur la branche PA.

Les mêmes lettres (fig. 59) continuant à désigner les mêmes choses, soient

PT la tangente à la directrice au point P;

Q′ le point en lequel la tangente en P′ traverse le plan osculateur en P à la directrice;

e celui où cette tangente traverse le plan normal en P à la directrice, et la courbe PA;

h le pied de la perpendiculaire abaissée de *e* sur PK, et par conséquent aussi sur le plan osculateur en P.

La direction P′*e* différant infiniment peu de celle de la tangente PT, elle tend à devenir perpendiculaire au plan normal en P, dans lequel est située la droite P*e*. Dès lors l'angle P*e*P′ est droit à la limite, et par conséquent P*e* est, en tant qu'infiniment petit, égal à la distance de P à la tangente en P′, d'où il suit qu'il est du second ordre. D'un autre côté, P′Q′ ayant pour expression $\frac{1}{3}$PP′ (62), et P′*e* étant, en tant qu'infiniment petit, égal à PP′, on a $Q'e = 2P'Q'$; et comme *h* est le pied de la perpendiculaire abaissée de *e* sur le plan osculateur en P, il résulte de là que *eh* est le double de la distance de P′ à ce même plan, et par suite qu'il est, ainsi que cette distance, du troisième ordre (63).

On voit maintenant que l'ordre de *eh*, distance de *e* à la tangente en P, n'est pas de l'ordre de la seconde puissance de l'arc dont P et *e* sont les extrémités, mais de sa puissance $\frac{3}{2}$.

Dans cette courbe PA, le cercle osculateur au point P est nul. Le cercle osculateur, par définition, est le cercle qui, à partir du point considéré, passe plus près de la courbe que tout autre. Prenons dans le plan de la courbe PA, sur la normale en P (laquelle se confond avec la binormale en P à la directrice) et du côté de la tangente PK où se trouve PA, un point quelconque I : le cercle de centre I et de rayon IP est tangent en P à la courbe PA et il passe, à partir de P, entre la courbe et la tangente, puisque, dans le voisinage de P, la distance de la courbe à la tangente est, on vient de le voir, d'un ordre inférieur à celui du carré de l'arc, tandis que pour le cercle cette distance est de l'ordre même du carré de l'arc. Il suit de là que le cercle I est d'autant plus voisin de la courbe aux environs immédiats de P qu'il s'écarte plus rapidement de la tangente PK. Or il s'en écarte d'autant plus rapidement qu'il est de plus faible rayon. Ceci démontre la proposition.

Toute surface développable qui n'est ni conique ni cylindrique est le lieu des tangentes à une ligne. Ce théorème, qui est en quelque sorte la réciproque de celui établi au N° 90, résultera de certaines des propositions qui vont faire l'objet des numéros suivants à partir du N° 93.

***92.** Le lieu des tangentes d'une courbe, développé sur un plan, en recouvre une partie et laisse l'autre à découvert. Et telle région sera recouverte par chacune des deux nappes du lieu, le sera donc doublement, tandis que telle autre pourra ne recevoir qu'une seule nappe. Comme exemple envisageons le cas où la transformée de l'arête de rebroussement dans le plan est une ligne fermée et convexe : l'espace entouré par cette ligne restera libre, mais à part cela tout le plan sera couvert par chacune des deux nappes séparément. Car prenons l'une de celles-ci; elle est formée par les tangentes à l'arête tirées dans un sens seulement à partir du point de contact, le même sens pour toutes les tangentes, et il résulte clairement de ce qui précède que, dans l'exemple actuel, son développement recouvrira tout le plan, à la seule exception de l'espace enfermé dans la transformée de l'arête.

Supposons en second lieu que cette transformée soit une courbe convexe se prolongeant indéfiniment d'un côté et de l'autre et ayant deux asymptotes AOB, COD (fig. 60) à la manière d'une branche d'hyperbole : sur l'espace compris entre la courbe et l'une des asymptotes s'étalera l'une des deux nappes, et sur l'espace compris entre la courbe et l'autre asymptote s'étalera la seconde nappe. Il suit de là que la région du plan qui est dans la concavité de la courbe et celle qui est dans l'angle BOD opposé à l'angle AOC dans lequel se trouve la courbe resteront à découvert toutes deux; que la région comprise dans ce dernier angle et limitée à la courbe sera recouverte doublement, et enfin que les deux régions comprises dans les angles opposés AOD, BOC le seront simplement.

93. *L'angle des génératrices qui passent par les deux extrémités d'un arc infiniment petit tracé sur une surface réglée est, en général, du même ordre que cet arc.*

Considérons le cône lieu des parallèles menées par un point O aux génératrices de la surface. Soient D, E les extrémités de l'arc considéré, et d, e les points correspondants d'une ligne tracée à volonté sur le cône, c'est-à-dire les points de cette ligne situés sur les parallèles aux génératrices qui passent par D et E. Les arcs DE, de sont de même ordre infinitésimal, et c'est aussi le cas de l'arc de et de l'angle dOe. Par suite, l'arc DE et l'angle dOe sont de même ordre, et comme cet angle est précisément celui des génératrices de la surface considérée qui passent par D et par E, la proposition est démontrée.

Ce raisonnement se trouve en défaut si la surface est cylindrique, et il devait en être ainsi, car, dans ce cas, le théorème cesse d'avoir lieu.

Cor. L'angle des plans tangents en deux points d'une surface infiniment voisins est en général du même ordre que la distance de ces points. On le fera voir sans difficulté à l'aide du cône qui a pour génératrices les normales menées d'un même point aux plans tangents à la surface en tous les points d'une ligne tracée à volonté sur elle par les deux points considérés. On déduit de là et de la proposition tout à l'heure établie, que, *dans une surface réglée, l'angle des plans tangents et celui des génératrices en deux points infiniment voisins sont du même ordre infinitésimal.*

94. Considérons sur une surface réglée deux génératrices infiniment voisines, et cencevons que l'on compare leur plus courte distance à leur angle. Ecartant les surfaces cylindriques, où cet angle est nul, et les surfaces coniques, où la plus courte distance est nulle, deux cas seulement peuvent se présenter : ou bien les deux grandeurs sont constamment du même ordre infinitésimal, ou bien la première est constamment d'un ordre supérieur à l'ordre de la seconde. La surface lieu des normales principales d'une ligne non plane, et la surface lieu des binormales, sont dans le premier cas; cela résulte, pour l'une, des formules obtenues aux Nos 77 et 79, et, pour l'autre, de ce que la plus courte distance de deux binormales infiniment voisines a pour expression Δs (84), tandis que leur angle est égal à η. Le second cas se présente dans la surface lieu des tangentes d'une ligne non plane, car d'après l'expression, formée au No 64, de la plus courte distance de deux tangentes d'une telle ligne infiniment voisines, cette distance est de l'ordre du cube de l'arc qui joint les points de contact des deux tangentes, donc de l'ordre du cube de l'angle de celles-ci.

On pourrait concevoir encore un troisième cas, celui d'une surface réglée où l'angle de deux génératrices infiniment voisines serait constamment d'un ordre supérieur à l'ordre de leur plus courte distance; mais une telle surface ne peut pas exister, car cet angle serait à fortiori d'un ordre supérieur à celui d'un arc tracé à volonté sur la surface de l'une à l'autre des deux génératrices; or, d'après le théorème qui fait l'objet du numéro précédent, l'arc qui s'appuie par ses extrémités sur deux génératrices d'une surface réglée infiniment voisines est en général du même ordre que leur angle.

Indépendamment de ce théorème on rend évident comme suit qu'il n'y a pas de surface réglée où l'angle de deux génératrices infiniment voisines soit constamment d'un ordre snpérieur à celui de leur plus courte distance.

Appelons α la première de ces deux grandeurs, et δ la seconde. Considérons sur une surface réglée deux génératrices quelconques, que nous appellerons les génératrices extrêmes, puis entre elles des génératrices dont nous ferons croître le nombre indéfiniment, et cela de telle façon qu'une ligne tracée sur la surface de l'une à l'autre des génératrices extrêmes soit coupée par ces nouvelles génératrices en parties tendant toutes vers zéro. Chacune de ces génératrices forme avec la suivante un angle : nous désignerons la somme de tous ces angles par $\Sigma\alpha$, et par $\Sigma\delta$ la somme des plus courtes distances de la première génératrice à la seconde, de celle-ci à la troisième, et ainsi de suite jusqu'à la dernière. Si α est constamment d'un ordre supérieur à l'ordre de δ, le rapport $\frac{\Sigma\alpha}{\Sigma\delta}$ tend vers zéro, ce qui exige que $\Sigma\alpha$ ait zéro pour limite, ou que $\Sigma\delta$ tende vers l'infini. Or la somme $\Sigma\alpha$ ne tend pas à s'annuler, car elle est plus grande que l'angle des deux génératrices extrêmes, et sa limite est égale à la longueur de l'arc suivant lequel la surface d'une sphère de rayon unité est coupée par les droites menées de son centre parallèlement à toutes les génératrices comprises entre les deux génératrices extrêmes. D'un autre côté, la limite de $\Sigma\delta$ n'est pas infinie, car cette somme reste constamment plus petite qu'un arc quelconque tracé sur la surface considérée de l'une à l'autre des deux génératrices extrêmes et coupant toutes les génératrices intermédiaires. Donc, etc.

95. *Lorsque l'angle de deux génératrices d'une surface réglée infiniment voisines est du même ordre que leur plus courte distance, la surface est une surface gauche; elle est une surface développable lorsque la seconde de ces deux grandeurs est d'un ordre infinitésimal supérieur à celui de la première.*

Soient(*) en effet pA, $p'A'$ (fig. 61) deux génératrices infiniment voisines, pp' leur commune perpendiculaire, et $p'B$ une parallèle menée par p' à la génératrice pA; le plan $A'p'B$ est parallèle aussi à cette génératrice. Soient E un point de la surface pris sur la droite pA, et $EK = pp'$ la perpendiculaire abaissée de E sur $p'B$. De K élevons dans le plan $A'p'B$ une perpendiculaire à la même droite $p'B$: elle rencontre la génératrice $p'A'$ en un point E', et le plan tangent à la surface au point E est la limite du plan AEE'. Désignons par a l'angle que fait ce plan tangent avec la position limite du plan $App'B$; comme les angles E'EA et KEA sont droits, on a $a = \lim KEE'$, donc

(*) Je tire la démonstration qu'on va lire d'un cours de J. Bertrand, à l'Ecole polytechniqne de Paris.

$$\text{tg}\, a = \lim \frac{\text{E}'\text{K}}{\text{EK}}.$$

Appelons α l'angle des génératrices A, A′ : il est égal à l'angle A′p′B, et l'on a $\text{E}'\text{K} = p'\text{K}\,\text{tg}\,\alpha = p\text{E}\,\text{tg}\,\alpha$. Remplaçant tg α par α et désignant par δ la plus courte distance des deux génératrices, l'égalité précédente devient, à cause de $\text{EK} = pp' = \delta$,

$$\text{tg}\, a = \lim p\text{E} \times \lim \frac{\alpha}{\delta}.$$

Remarquons maintenant que le point p ne saurait s'éloigner indéfiniment de E, car alors l'angle A′p′B, qui est celui des deux génératrices, serait infiniment petit comparé à KE′, et à plus forte raison comparé à un arc EE′ ; or nous savons (93) que cet angle et cet arc sont du même ordre infinitésimal. Le point p tend donc vers une certaine position limite que nous appellerons O, et l'on a

$$\text{tg}\, a = \text{OE} \times \lim \frac{\alpha}{\delta}.$$

Ce point O a reçu le nom de *point central*. Chaque génératrice a son point central. Dans une surface gauche la ligne de striction est le lieu des points centraux.

De la dernière égalité résultent les conséquences suivantes :

1° Si α et δ sont du même ordre infinitésimal, le rapport $\frac{\alpha}{\delta}$ a une limite finie, et tg a est proportionnel à la distance de E au point central O. Le plan tangent varie donc d'un point à un autre de la génératrice, et la surface est par conséquent gauche.

2° Si δ est d'un ordre supérieur à celui de α, tg a est infini et l'angle a est droit, quelle que soit la position du point E sur la génératrice A. Le plan tangent reste donc le même tout le long de cette droite, et la surface est par conséquent développable.

96. Dans la surface lieu des normales principales d'une ligne non plane, et dans la surface lieu des binormales, les quantités désignées ici par α et δ sont du même ordre infinitésimal, ainsi que nous l'avons fait remarquer au commencement du N° 94. Il en résulte que ces deux surfaces sont des surfaces gauches.

97. *Lorsque, dans une surface réglée, la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines est d'un ordre infinitésimal supérieur à celui de leur angle, la surface est le lieu des tangentes à la courbe des points centraux.*

Soient A, A′ (fig. 62) deux génératrices de la surface donnée infiniment voisines, et p, p' les extrémités de leur commune perpendiculaire. Soient O, O′ les points centraux situés sur les génératrices A, A′, et t le pied de la perpendiculaire abaissée de O′ sur la génératrice A. Nous allons faire voir que $O't$ est infiniment petit comparé à OO′. Il en résultera que la génératrice A est la limite de la direction OO′. Comme OO′ est une corde infiniment petite de la courbe des points centraux, il suivra de là que la génératrice A est tangente en O à cette courbe, et la proposition se trouvera demontrée.

Remarquons d'abord que la longueur pp' est infiniment petite comparée à l'arc OO′ (que l'on n'a pas tracé sur la figure, qu'il aurait chargée sans utilité); cela résulte de ce que cet arc est du même ordre que l'angle des génératrices A, A′ (93), et de ce que, ensuite de l'hypothèse, pp' est infiniment petit comparé à cet angle. Remarquons encore que p et p' étant infiniment voisins de O et de O′, les longueurs Op, $O'p'$ sont infiniment petites.

Soit V la projection de O′ sur le plan mené par A parallèlement à A′ : on a $O'V = pp'$, et $Vp = O'p'$. $O't$ est plus grand que Vt, car l'angle $O'Vt$ est droit; mais la différence est inférieure à O′V ou pp', d'où il suit que si Vt est infiniment petit comparé à OO′, il en est de même de $O't$. Il suffit donc de montrer que Vt est infiniment petit comparé à OO′. On a

$$Vt = Vp \sin Vpt,$$

d'où il résulte, puisque Vp, égal à $O'p'$, tend vers zéro, que Vt est infiniment petit comparé à l'angle Vpt; mais cet angle n'est autre que celui des génératrices A et A′, et comme ce dernier est du même ordre que l'arc OO′, Vt est infiniment petit comparé à cet arc.

98. Il résulte des deux derniers théorèmes (95 et 97) que toute surface développable qui n'est ni un cône ni un cylindre est le lieu des tangentes à une ligne. D'après le n° 91 cette ligne joue sur la surface le rôle d'arête de rebroussement. Ainsi, *toute surface déve-*

loppable qui n'est ni conique ni cylindrique a une arête de rebroussement à laquelle sont tangentes les génératrices, et la surface est engendrée par une droite qui roulerait sur l'arête en lui restant toujours tangente. De là et du N° 90 (dernière phrase) il suit qu'*un plan tangent à une surface développable est osculateur à l'arête de rebroussement en un de ses points, et* qu'*il contient celle des génératrices qui passe par ce point.*

* Nous avons appris au N° 96 que le lieu des normales principales d'une ligne non plane est une surface gauche, et c'est une conséquence presque immédiate des propositions auxquelles nous venons de parvenir qu'il n'est pas développable. Si, en effet, le lieu des normales principales d'une ligne non plane était une surface développable V, ses génératrices seraient toutes tangentes à une même ligne (K), et si nous appelons K le point de cette ligne qui correspond à un point P de la ligne primitive, le plan tangent à la surface au point K lui serait tangent tout le long de la génératrice PK, qni est une normale principale de la ligne primitive, et ce plan serait, en ce point, osculateur à la ligne (K). Comme plan tangent à la surface V il contiendrait la tangente PQ à la ligne primitive au point P puisque cette ligne est située sur la surface et qu'il serait tangent en P à la surface comme en tout autre point de PK. Contenant la tangente PQ et la normale principale PK, ce plan ne serait autre que le plan osculateur de la ligne primitive en son point P. Cette ligne et la ligne (K) auraient ainsi même plan osculateur aux points correspondants. Elles auraient dès lors en ces points même tangente puisque (49) la tangente est l'intersection de deux plans osculateurs infiniment voisins. Le lieu des normales principales d'une ligne non plane n'est donc pas une surface développable, les tangentes en P et en K aux deux lignes étant distinctes, même à angles droits l'une sur l'autre.

***99.** Un plan tangent à une surface développable est osculateur à son arête en un point M et contient celle des génératrices qui passe par ce point. Il coupe en outre la surface suivant une certaine courbe A qui est tangente en M à l'arête. Le rayon de courbure en M à cette courbe est égal à $\frac{4}{3}\rho$, ρ désignant le rayon de courbure de l'arête en son point M. Supposons, en effet, que dans la figure 42 l'arc MM' soit un arc de l'arête en question; en se reportant au N° 62, qui est celui de cette figure, on verra que l'arc MN′ est un arc de notre courbe A. Or le rayon de courbure de cet arc en son point M est la limite du rapport $\frac{\text{arc MN}'}{\text{angle N}'\text{NT}}$. Maintenant, l'arc MN′ vaut les deux tiers de l'arc MM′, ou $\frac{2}{3}\Delta s$, et comme la droite NN′ est l'intersection des plans osculateurs en M et M′, l'angle N′NT vaut $\frac{1}{2}\varepsilon$ par la proposition du N° 60. Le rayon considéré est donc la limite du quotient $\frac{2}{3}\Delta s : \frac{1}{2}\varepsilon$, et cette limite est $\frac{4}{3}\rho$ (*).

100. Que par un point on mène des parallèles à toutes les génératrices d'une surface développable, l'ensemble de ces parallèles est un cône. Les plans tangents à ce cône et à la surface donnée, suivant deux génératrices parallèles, sont-ils parallèles?

Soient G et G′ deux génératrices de la surface donnée infiniment voisines; elles sont tangentes à l'arête de rebroussement en deux points A et A′. Chaque point de G′ est distant de G d'une longueur du premier ordre, l'arc AA′ de l'arête et l'angle des droites G et G′ étant considérés comme du premier; il est distant du plan tangent à la surface le long de G d'une longueur du second ordre. Le plan normal en A à l'arête coupe G′ en un point B, et AB est du second ordre, car il est, en tant qu'infiniment petit, égal à la distance de A à la génératrice G′, c'est-à-dire à la distance de A à la tangente en A′ à l'arête. Dès lors si l'on transporte la génératrice G′ parallèlement à elle-même de façon que son point B vienne coïncider avec A, chaque point de G′ se déplace d'une quantité qui est du second ordre, en tant qu'égale à AB. Il suit de là qu'après ce mouvement les distances d'un point quelconque de G′ à G et au plan tangent le long de G continuent à être, la première du premier ordre et la seconde d'un ordre supérieur. Conséquemment, si l'on transporte toutes les géné-

(*) Ce théorème est donné en deux endroits du volume de 1865 des *Nouvelles Annales de mathématiques,* savoir dans deux articles qui commencent respectivement aux pages 258 et 267. On en trouve aussi une démonstration dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris,* volume du premier semestre de 1885, pages 1332 et suivantes.

ratrices de la surface parallèlement à elles-mêmes pour les faire passer par A, le plan tangent à la surface le long de G est tangent aussi le long de G au cône ainsi obtenu. Si donc par un même point quelconque on mène des parallèles à toutes les génératrices d'une surface développable, les plans tangents au cône ainsi formé et à la surface donnée, le long de deux génératrices correspondantes, sont parallèles.

101. AB et CD (fig. 63) sont deux droites situées ou non dans un même plan et dont l'angle est du premier ordre. Soient C′ et D′ les projections de C et de D sur la direction AB. La différence CD—C′D′ est de l'ordre du carré de l'angle des deux droites AB, CD, par conséquent du second. Si donc nous négligeons les grandeurs d'ordres supérieurs au premier, la différence CD—AB est égale à C′D′—AB, et ne dépend dès lors que des longueurs AC′ et BD′.

Ceci posé, concevons que sur une ligne non plane, que nous appellerons la courbe P, on fasse rouler la tangente sans la laisser glisser aucunement : par l'effet du mouvement un point de la tangente choisi à volonté décrit une certaine ligne Q. Soient (fig. 64) A, A′ deux points de la courbe P infiniment voisins, et B, B′ les points correspondants de la courbe Q ; les droites AB et A′B′ sont tangentes à P en A et en A′. L'angle de ces tangentes et les arcs AA′, BB′ sont trois grandeurs du même ordre infinitésimal ; considérons-les comme du premier.

Puisque la tangente est supposée rouler sur la ligne P sans glisser on a, exactement,

$$AB - A'B' = \text{arc } AA'.$$

D'un autre côté, d'après la remarque faite au commencement de ce numéro, on a, en négligeant une quantité d'ordre supérieur au premier,

$$AB - A'B' = AA'' + BB'',$$

A″ et B″ étant les projections de A′ et de B′ sur la direction AB. Donc, au même degré d'approximation, on a

$$\text{arc } AA' = AA'' + BB''.$$

Or AA″ est égal à l'arc AA′ à une quantité près du troisième ordre; par conséquent BB″ est d'un ordre supérieur au premier; il est dès lors infiniment petit comparé à l'arc BB′. Il suit de là que la corde

BB′ fait avec AB un angle qui est droit à la limite, ou, en d'autres termes, que la tangente en B à la ligne Q est perpendiculaire à AB.

Ainsi, *la tangente qui roule sur une ligne sans glisser reste constamment normale à la courbe que décrit l'un quelconque de ses points.*

La ligne Q étant contenue dans la surface lieu des tangentes de la ligne P, sa tangente en B est située dans le plan tangent suivant AB à cette surface, donc (90) dans le plan osculateur en A à la ligne P. Alors, puisque la tangente de Q est perpendiculaire à AB, elle est parallèle à la normale principale de P.

102. Dans la seconde des deux figures du numéro précédent soit DD′ la commune perpendiculaire aux tangentes AB, A′B′ : cette perpendiculaire étant d'un ordre supérieur à celui de l'arc AA′ (64), donc infiniment petite comparée à l'arc BB′, et AD étant infiniment petit tandis que AB est fini, l'angle des tangentes AB, A′B′ est égal à $\frac{\text{arc}\,\mathrm{BB}'}{\mathrm{AB}}$. Ceci posé, concevons qu'on développe sur un plan la surface développable lieu des tangentes de la courbe considérée, et soient a, a', b, b' les positions que les points A, A′, B, B′ viennent prendre sur le plan par l'effet du développement : les droites ab et $a'b'$ sont tangentes en a et en a' à l'arc aa', transformée de l'arc AA′, et normales en b et b' à l'arc bb', transformée de l'arc BB′ (37). Il suit de là que l'angle des droites ab et $a'b'$ est égal au rapport $\frac{\text{arc}\,bb'}{ab}$. Or comme les arcs BB′ et bb' sont égaux (38), et qu'il en est de même des distances AB et ab, ce rapport ne diffère point de celui que nous avons obtenu tout à l'heure pour expression de l'angle des génératrices AB et A′B′. L'angle des génératrices AB, A′B′ est donc égal, en tant qu'infiniment petit, à celui des droites ab, $a'b'$. Mais ce dernier angle est précisément ce que devient le premier par l'effet du développement de la surface. Par conséquent, *l'angle de deux génératrices d'une surface développable est égal à sa transformée plane, si les deux génératrices sont infiniment voisines.*

103. Parmi les lignes qu'on peut tracer sur une surface, on appelle *lignes géodésiques* celles qui jouissent de la propriété d'être, sur la surface, le plus court chemin entre deux quelconques de leurs points. Tels sont sur une sphère les grands cercles.

Pour qu'une ligne située sur une surface développable soit géodésique il faut et il suffit que le développement de la surface la transforme en une droite. Ceci résulte clairement de ce que le développement n'altère point la longueur d'une ligne préalablement tracée sur la surface (38).

***104.** Soient P, Q, R (fig. 65) trois lignes géodésiques d'une surface développable dont la dernière coupe les deux autres sous des angles que nous appellerons α et β, le premier étant pris à l'extérieur et le second à l'intérieur. Par le développement de la surface les trois courbes sont transformées en trois droites (103), dans le triangle desquelles soit λ l'angle opposé au côté R. Comme le développement n'a pas altéré les angles α et β (37), on a

$$\alpha - \beta = \lambda,$$

par où l'on voit que la différence $\alpha - \beta$ est indépendante du choix de la géodésique R.

Les génératrices de la surface étant évidemment des lignes géodésiques, nous pouvons supposer que P et Q sont deux génératrices. Dès lors, comme la surface lieu des tangentes d'une courbe non plane est toujours développable, l'égalité qu'on vient d'écrire montre que les tangentes en deux points donnés d'une courbe quelconque sont coupées par une ligne géodésique du lieu des tangentes sous deux angles dont la différence est indépendante du choix de cette ligne.

Cette différence constante, qui sera désignée par D, a une expression géométrique que nous allons faire connaître.

Soient A et B les points de contact de la courbe avec les deux tangentes considérées. Le cône lieu des parallèles menées d'un point O à toutes les tangentes de la courbe est coupé par la sphère de centre O et le rayon unité suivant une ligne dont nous appellerons a et b les points situés sur les parallèles aux tangentes en A et en B. Si la courbe donnée était plane, l'arc ab, — qui serait alors un arc de grand cercle, — se trouverait évidemment être égal à l'angle de ces deux tangentes, et comme celui-ci est égal à D dans le cas d'une courbe plane, on aurait

$$D = \text{arc}\ ab. \tag{1}$$

Or cette égalité, on va le reconnaître, est vraie aussi des lignes non planes.

Concevons qu'on divise l'arc AB en parties infiniment petites dont le nombre n aille croissant indéfiniment, et dont les angles de contingence seront appelés respectivement $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots\ldots, \varepsilon^{(n)}$; on a évidemment

$$\lim\,(\varepsilon' + \varepsilon'' + \ldots\ldots + \varepsilon^{(n)}) = \text{arc}\ ab.$$

Transformons maintenant la courbe donnée en une courbe plane en développant la surface lieu des tangentes. Après le développement D est resté le même, puisque les deux angles dont il représente la différence n'ont pas changé (37); et comme le développement n'altère chacun des angles $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots\ldots, \varepsilon^{(n)}$ que d'une fraction infiniment petite de lui-même (102), la limite de leur somme est restée la même aussi. Les deux membres de l'égalité (1) conservent donc après le développement les valeurs qu'ils avaient avant. Or le développement ayant pour effet de transformer la courbe considérée en une courbe plane et l'égalité (1) étant vraie des courbes planes, il est démontré qu'elle a lieu aussi dans les autres courbes (*).

Les notions dont nous avions besoin sur les surfaces réglées sont maintenant établies, et nous retournons aux lignes. Nous allons nous occuper de la polaire, dont la considération est la base de la théorie des développées.

De la polaire et de la surface polaire.

105. Dans les lignes planes nous avons considéré l'intersection des normales en M et en M′ et reconnu qu'elle coïncide avec le centre de courbure. Pour continuer l'étude des lignes non planes il faut maintenant considérer l'intersection des plans normaux en M et en M′. La situation limite de cette droite a reçu le nom de *polaire*, et l'on va voir qu'elle est le lieu des pôles du cercle osculateur. La proposition suivante, que nous allons établir, comprend comme cas particulier celle qui vient d'être rappelée.

(*) Voir *Wilhelm Schell, Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung*, 1859, cap. II, § 2.

La polaire se confond avec la normale au plan osculateur menée par le centre de courbure, donc avec l'axe du cercle osculateur.

Conduisons par M un plan A perpendiculaire à l'intersection des plans normaux en M et en M'. Etant perpendiculaire aux deux plans normaux et passant par M, le plan A contient la tangente au point M et la parallèle menée de M à la tangente en M'; il se confond donc à la limite avec le plan osculateur en M. Puis donc que l'intersection des deux plans normaux est perpendiculaire au plan A, il est déjà prouvé que la polaire est perpendiculaire au plan osculateur, et si l'on désigne par O (*fig.* 66) le point où le plan A coupe l'intersection des plans normaux, il reste seulement, pour que la proposition soit entièrement démontrée, à faire voir que la limite de la longueur MO est égale au rayon du cercle osculateur.

Soit m' la projection de M' sur le plan A : la droite $M'm'$ étant perpendiculaire au plan A, elle est contenue dans le plan normal en M'. Par conséquent m' est un point de l'intersection de ce plan et du plan A, d'où il suit que cette intersection n'est autre que la droite $m'O$. L'angle MOm' est donc l'angle des deux plans normaux; il vaut en conséquence ε. Partant, le triangle OMm' donne

$$MO = \frac{Mm' \sin Mm'O}{\sin \varepsilon}.$$

Nous allons faire voir que l'angle $Mm'O$ est droit à la limite, et que Mm' et Δs sont des infiniment petits égaux. De là et de l'égalité précédente on conclura

$$\lim MO = \lim \frac{\Delta s}{\varepsilon} = \rho.$$

Mm' est la projection de la corde MM' sur le plan A; comme ce plan contient la tangente en M, l'angle $m'MM'$, qui est celui que la corde MM' fait avec lui et avec Mm', tend vers zéro; et de tout cela il résulte que Mm' et Δs sont des infiniment petits égaux.

Les côtés de l'angle $Mm'O$ finissent par se confondre respectivement avec MO et avec la tangente en M, deux directions rectangulaires; $m'O$ en effet tend à coïncider avec MO parce que l'angle MOm' est infiniment petit en tant qu'égal à ε, et Mm' fait un angle infiniment petit avec la tangente en M puisque l'angle $m'MM'$ qu'il forme avec la corde MM′ tend vers zéro ainsi qu'on l'a reconnu tout à l'heure. L'angle $Mm'O$ est donc droit à la limite (*).

106. Le lieu des polaires d'une ligne en est la *surface polaire*. Dans cette surface, comme aussi dans la surface lieu des tangentes, les génératrices sont les intersections limites d'une suite de plans, savoir des plans osculateurs pour le lieu des tangentes (puisque deux plans osculateurs infiniment voisins se coupent suivant une tangente), et des plans normaux pour le lieu des polaires. Une surface est développable quand elle a pour génératrices les intersections limites d'une suite de plans, et ces plans sont ses plants tangents. Et ce n'est même là qu'un cas particulier du théorème des surfaces enveloppes. N'ayant pas ici le droit d'invoquer ce théorème, on va, ce qui est d'ailleurs très facile, établir directement la proposition pour le cas de la surface polaire.

107. *La surface polaire est développable, et les plans normaux de la courbe sont ses plans tangents.*

Coupons la surface polaire par un plan quelconque et appelons A la courbe d'intersection. Soit N (fig. 67) le point de cette courbe qui correspond au point M de la courbe donnée, c'est-à-dire le point où le plan sécant est percé par la polaire relative à M. Soit NU l'intersection du plan normal en M par le plan sécant; nous allons voir que NU est tangent en N à la courbe A. La proposition sera acquise alors, car le plan sécant étant arbitraire, et N étant par suite un point quelconque de la polaire au point M, il sera établi par là que le plan normal en M est tangent à la surface tout le long de cette polaire. Soit N′ le point de la courbe A qui correspond à M′ : conformément à la définition de la tangente il s'agit de montrer que l'angle que fait NU avec la corde NN′ est infiniment petit. Soient N′U′ l'intersection du plan normal en M′ par le plan sécant, et V le point de rencontre des droites NU et N′U′.

Remarquons d'abord que le point V est infiniment voisin de N. En effet, V appartenant à l'intersection des plans normaux en M et en M′, et N étant situé sur la polaire relative à M, laquelle n'est autre chose que la limite de cette intersection, V et N sont les points en lesquels

(*) Voir Moigno, *Leçons de calcul différentiel*, etc., vol. I, N° 164.

le plan sécant est traversé par deux droites qui tendent à se confondre. Par une raison analogue, V est infiniment voisin de N'. Les longueurs VN, VN' sont donc infiniment petites. Remarquons en second lieu que l'arc NN' est du même ordre infinitésimal que l'arc MM', donc du premier.

En troisième lieu, l'angle UVU' est aussi du premier ordre. Pour le faire voir nous allons montrer qu'il est du même ordre que l'angle des plans normaux en M et en M', ce qui suffira. A cet effet considérons le trièdre dont le sommet est V et dont les trois arêtes sont VU, VU', et l'intersection VX des deux plans normaux. Dans ce trièdre, la face UVU' et le dièdre VX sont infiniment petits, tandis que les faces UVX, U'VX et les dièdres VU, VU' sont des grandeurs finies. Or puisque dans un trièdre les sinus des faces sont proportionnels à ceux des dièdres opposés, il suit de là, et de ce que la face UVU' est opposée au dièdre VX, que le rapport de l'angle UVU' à ce dièdre, c'est-à-dire à l'angle des deux plans normaux, a une limite finie, d'où résulte le point qu'on voulait établir.

D'après tout ce que l'on vient de voir l'angle UVU' et la longueur NN' sont du même ordre infinitésimal, ce qui fait que le rapport $\frac{\sin \mathrm{UVU'}}{\mathrm{NN'}}$ a une limite finie, et par suite aussi le rapport $\frac{\sin \mathrm{NVN'}}{\mathrm{NN'}}$, puisque les sinus des angles UVU', NVN' sont égaux. Or le triangle NVN' donne

$$\frac{\sin \mathrm{UNN'}}{\mathrm{VN'}} = \frac{\sin \mathrm{NVN'}}{\mathrm{NN'}},$$

d'où l'on conclut que le rapport $\frac{\sin \mathrm{UNN'}}{\mathrm{VN'}}$ tend vers une limite finie. Puis donc que VN' est infiniment petit, il en est de même de l'angle que fait NU avec la corde NN' (*).

Cor. Le lieu des centres de courbure étant situé sur la surface polaire, sa tangente est contenue dans le plan normal. C'est la proposition du N° 86.

(*) Cette démonstration a une portée plus générale que l'énoncé ; elle montre que toute surface lieu des intersections limites d'une suite de plans est développable et a ces plans pour plans tangents. C'est la proposition énoncée dans le N° 106.

108. Le plan tangent à la surface polaire lui étant tangent tout le long d'une même polaire, il résulte de nos théorèmes sur les surfaces réglées (Nos 90 à 98) que les polaires sont les tangentes d'une ligne qui constitue sur la surface polaire une arête de rebroussement. Une surface qui a une arête présente deux nappes qui se rencontrent suivant cette arête, et quand la surface est le lieu des tangentes à son arête il est évident que les deux nappes sont symétriques. Nous allons indiquer une construction qui, indépendamment des théorèmes en question, rendra sensible le fait que la surface polaire est composée de deux nappes symétriques se rencontrant suivant une ligne qui forme arête.

Soient P, P′, P″ trois points infiniment voisins pris sur une ligne non plane. Appelons H et H′ les plans menés perpendiculairement aux cordes PP′, P′P″ par leurs milieux. La limite de leur intersection n'est autre chose que la polaire relative au point P, car cette intersection est l'axe du cercle des trois points P, P′, P″, lequel se confond à la limite avec le cercle osculateur au point P.

Cela posé concevons qu'on inscrive un polygone dans une courbe non plane, et que par le milieu de chacun de ses côtés on mène un plan auquel ce côté soit perpendiculaire. Soient P, P′, P″, etc., les sommets consécutifs du polygone; H, H′, H″, etc., les plans menés par les milieux des côtés PP′, P′P″, P″P‴, etc.; K, K′ K″, etc., les intersections des plans H et H′, H′ et H″, H″ et H‴, etc. Chacune des droites de la série K, K′, K″,.... est coupée par celle qui la suit, car deux droites consécutives de cette série sont situées dans un même plan. Soient L, L′, L″, etc. (fig. 68), les intersections des droites K et K′, K′ et K″, K″ et K‴, etc. La longueur LL′ fait partie de la droite K′, la longueur L′L″ fait partie de la droite K″, et ainsi de suite.

Considérons maintenant les espaces plans compris dans l'angle des droites K et K′, dans celui des droites K′ et K″, dans celui des droites K″ et K‴, etc. : l'ensemble de ces espaces forme une surface polyédrale dont les arêtes sont les droites K, K′, K″, etc. Si l'on suppose que les côtés du polygone inscrit dans la courbe donnée décroissent tous sans limite en même temps que leur nombre augmente indéfiniment, comme, d'après ce qu'on a vu tout à l'heure, les arêtes tendent alors à coïncider avec les polaires de la courbe, la surface polyédrale tendra à se confondre avec la surface polaire.

Les parties des droites K, K′, K″, etc. qui relient les points L, L′, L″, etc. constituent une ligne polygonale non plane dont ces points sont les sommets. Notre surface polyédrale peut donc être considérée comme obtenue en prolongeant les côtés du polygone LL′L″.... Or si l'on cherche à se faire l'image d'une surface polyédrale obtenue en prolongeant les côtés d'une ligne polygonale non plane, on verra qu'une telle surface est formée de deux nappes symétriques qui se rencontrent suivant cette ligne comme suivant une arête. Puis donc que la surface polyédrale que nous considérons tend à se confondre avec la surface polaire, la construction qui vient d'être décrite rend sensible le fait que la surface polaire offre une arête à partir de laquelle commencent deux nappes symétriques.

109. Les plans tangents de la surface polaire coïncidant avec les plans osculateurs de son arête de rebroussement (90), il suit du N° 107 que cette arête a pour plans osculateurs les plans normaux de la courbe proposée. On conclut de là, ensuite de la proposition qui fait l'objet du N° 50 (*), que chaque point de l'arête de rebroussement de la surface polaire est la limite de l'intersection des plans normaux à la proposée en trois points infiniment voisins.

On rendrait ce fait sensible en remplaçant, dans la construction du dernier numéro, les plans menés perpendiculairement aux cordes PP′, P′P″, etc. en leurs milieux par les plans normaux en les points P, P′, P″, etc. Car l'intersection des plans normaux en deux consécutifs de ces points tendant par définition à se confondre avec une polaire, la surface polyédrale qu'on obtient alors a pour limite la surface polaire, et par conséquent l'arête polygonale suivant laquelle se rencontrent les deux nappes de cette surface polyédrale tend à se confondre avec l'arête de rebroussement de la surface polaire. Or chaque sommet de l'arête polygonale est le point de rencontre de trois plans, et ces plans sont les plans normaux de la proposée en trois sommets consécutifs.

(*) D'après laquelle tout point A d'une ligne non plane est l'intersection des plans osculateurs en trois points A, B, C de la ligne infiniment voisins.

110. *Corollaire du numéro précédent*. L'arête de rebroussement de la surface polaire a pour plans osculateurs les plans normaux de la proposée, et pour tangentes elle a les polaires, lesquelles sont normales aux plans osculateurs de la proposée. Dès lors si l'on considère ces deux lignes, la proposée et l'arête de rebroussement de la surface polaire, on voit que la tangente de l'une est perpendiculaire au plan osculateur de l'autre. On déduit de là les deux propositions suivantes :

1° *Les normales principales de la proposée et de l'arête de rebroussement de la surface polaire sont parallèles.*

2° *Les angles de contingence et de torsion de la proposée sont respectivement égaux aux angles de torsion et de contingence de l'arête de rebroussement de la surface polaire* (*). Par suite, *le rapport des rayons de courbure et de torsion en un point de l'une des deux lignes est égal au rapport inverse en le point correspondant de l'autre.*

111. Notons encore cet autre corollaire, afin de pouvoir l'invoquer au besoin. Les plans normaux étant osculateurs à une ligne à laquelle les polaires sont tangentes, il suit du N° 59 que l'inclinaison de la polaire en l'extrémité d'un arc infiniment petit sur le plan normal en son origine est de l'ordre du carré de l'arc. Ceci, on l'a vu au N° 82, est vrai aussi de la binormale, et c'est le même théorème, puisque ces deux droites, la polaire et la binormale, sont parallèles.

Cette proposition devient d'ailleurs évidente à la simple inspection de la figure sphérique que l'on forme en menant du centre O de la sphère de rayon unité des parallèles aux polaires. Car si A, A' (fig. 69) sont les points où cette sphère est traversée par les parallèles tirées de O aux polaires en M et en M', et si A'B est un arc de grand cercle coupant en B à angle droit le grand cercle mené parallèlement au plan normal en M et passant dès lors par A, l'arc A'B mesure l'angle que nous considérons, et cet arc est du second ordre en tant que produit de l'arc AA' par l'angle A'AB qui sont du premier ordre l'un et l'autre. L'arc AA' en effet est égal à la torsion, et l'angle A'AB, d'après le N° 60, vaut la moitié de l'angle de contingence, car il ne diffère pas de celui de la tangente en M et de l'intersection des plans

(*) *Mémoires présentés à l'Institut, Sc. math. et phys.*, vol. I, 1805, p. 419.

osculateurs en M et en M′, puisque le plan AOB, parallèle au plan normal en M, est perpendiculaire à cette tangente, et que le plan AOA′, étant perpendiculaire à chacun des deux plans osculateurs, l'est à leur intersection.

112. *Longueur de la partie de la polaire comprise entre le point où cette droite touche l'arête de rebroussement de la surface polaire et celui où elle traverse le plan osculateur de la ligne primitive.*

Soient S, S′ les points de contact des polaires relatives à M et à M′ avec l'arête en question. Ces polaires sont respectivement normales aux plans osculateurs en M et en M′, et elles traversent ces plans en les centres de courbure C et C′. C'est de la longueur CS qu'il s'agit d'obtenir l'expression. Les arcs CC′, SS′ sont du même ordre infinitésimal que MM′, savoir du premier.

Le plan mené par C′ normalement à MC coupe cette droite en un point B (fig. 70) et BC est, en tant qu'infiniment petit, évidemment égal à la différence des rayons MC, M′C′, c'est-à-dire à $\Delta\rho$.

Soient A et D les pieds des perpendiculaires abaissées de C′ sur la droite CS et sur le plan MCS, qui est le plan normal en M à la courbe : AD et BC sont égaux comme côtés opposés d'un rectangle, et l'on a par suite $AD = \Delta\rho$. Or C′D, distance de C′ au plan normal, est du second ordre puisque C′ est sur la surface polaire et que celle-ci a le plan normal pour plan tangent le long de CS. On peut donc écrire $AC' = \Delta\rho$.

Ceci posé, comme l'angle SAC′ est droit et que l'angle des polaires CS, C′S′ est égal à η (110), si ces deux polaires se rencontraient la distance de A à leur point d'intersection serait précisément égale à $\frac{AC'}{\tang \eta}$. Les deux polaires ne se rencontrent pas, mais comme elles sont tangentes à l'arc SS′ en ses extrémités, leur plus courte distance est d'un ordre supérieur au premier (64), dès lors infiniment petite comparée à AC′. Il suit de là que la distance de A au point où CS est coupé par la perpendiculaire commune aux deux polaires diffère infiniment peu de $\frac{AC'}{\tang \eta}$. Or ce point tend à se confondre avec celui où la polaire touche l'arête, c'est-à-dire avec le point S; par conséquent AS est égal à $\lim \frac{AC'}{\tang \eta}$, donc à $\lim \frac{\Delta\rho}{\eta}$. Mais CA étant infiniment petit puisqu'il est moindre que CC', AS et CS ont la même limite; donc

$$CS = \lim \frac{\Delta\rho}{\eta} \; (*).$$

Il suit de cette relation que l'arête de rebroussement de la surface polaire se confond avec le lieu du centre de courbure dans les lignes où ρ est constant. Dans ces lignes ce lieu a dès lors pour tangentes les polaires, ce que nous savions déjà par la remarque qui termine le N° 88.

Dans cette hypothèse de ρ constant on voit de plus que, appelant (M) la ligne primitive, lieu du point M, et (C) le lieu du centre de courbure ou du point C, on voit, disons nous, que le plan normal de (C) coïncide avec le plan osculateur de (M), en sorte que la polaire de (C) n'est autre que la tangente de (M) puisque deux plans osculateurs infiniment voisins se coupent suivant la tangente, et la surface polaire de (C) se confond dès lors avec le lieu des tangentes de (M). Les deux lignes sont donc telles que le lieu des tangentes de chacune d'elles est en même temps la surface polaire de l'autre. Le centre du cercle osculateur étant sur la polaire on voit encore que M est le centre de courbure de la ligne (C) au point C, et qu'ainsi les rayons de courbure des deux lignes sont égaux et se recouvrent exactement. Enfin le produit des rayons de torsion des deux lignes est constant, car, par la dernière des propositions du N° 110 il est égal au carré du rayon de courbure commun.

113. Retournant au cas général où $\Delta\rho$ n'est pas nul et où C et S sont distincts, de quel côté du plan osculateur se trouve le point S?

Pour faciliter le discours supposons la courbe tournée de telle sorte que MC (fig. 71) soit dirigé suivant le fil à plomb, et que le plan osculateur TMC (MT est la tangente) se présente à nous de face, aissant voir la partie de la courbe qui renferme M', et cachant l'autre.

(*) Le théorème qu'exprime cette formule a été, je crois, donné pour la première fois par Jacobi en 1835, dans un article inséré au *Journal de Crelle*, tome XIV.

Ce plan partage l'espace en deux régions, l'une antérieure et l'autre postérieure, la première étant celle où se voit M′. Soient CK, C′K′ les parties antérieures des polaires en M et M′, c'est-à-dire celles qui, partant de C et de C′, s'enfoncent dans la région antérieure de l'espace. Supposons M′ non pas infiniment voisin, mais très voisin de M, et fixe. Le plan osculateur en M′ est incliné sur celui en M de façon à disparaître derrière lui au-dessus de l'intersection des deux plans, et à se montrer au contraire en avant de lui au-dessous de cette intersection. Alors, comme la direction C′K′ est normale au plan osculateur en M′, on verra C′K′ s'élever à partir de C′ et aller se rapprochant de plus en plus du plan horizontal que déterminent la tangente et la binormale en M; il finira par rencontrer ce plan, le traverser, et disparaître au delà. Il résulte de ceci que si C′ est plus bas que C, C′K′ va d'abord se rapprochant de la droite horizontale CK, ce qui fait que la commune perpendiculaire EF aux deux droites est située dans la région antérieure. Si au contraire C′ est plus haut que C, dès l'abord C′K′ va s'éloignant de CK, et EF par suite est situé de l'autre côté du plan TMC, dans la région postérieure. Or EF est très voisin de S, et C′ est plus bas ou plus haut que C suivant que M′C′ est plus grand ou plus petit que MC. Par conséquent, comme la courbure et le rayon de courbure varient en sens inverses, l'un décroissant lorsque l'autre croît, le point S se trouve situé, par rapport au plan TMC, du même côté que M′ et C′ ou du côté opposé, selon qu'en M′ la courbure est plus faible qu'en M ou qu'elle y est au contraire plus forte.

De part et d'autre de M prenons sur la courbe deux points U et V suffisamment rapprochés pour que la courbure, quand on va de l'un à l'autre, varie constamment dans le même sens : ces deux points se trouveront l'un d'un côté du plan osculateur en M, l'autre de l'autre. Dès lors la proposition obtenue tout à l'heure peut s'énoncer en disant que le point S est situé, par rapport à ce plan, du côté où se voit celui des deux points U et V en lequel la courbure est plus faible qu'en M.

114. *Valeur de l'arc* SS′ *de l'arête*. Soit C′P (fig. 72) perpendiculaire au plan osculateur en M. SC étant perpendiculaire aussi à ce plan, et, de plus, tangent ainsi que S'C' à l'arc SS', les deux sommes

$$\mathrm{CS} + \text{arc SS}' \qquad \text{et} \qquad \mathrm{PC}' + \mathrm{C'S'}$$

ne peuvent différer que d'une quantité d'ordre supérieur au premier. Si donc on désigne par ΔCS la variation que subit CS quand on passe de M à M', on a

$$\text{arc SS}' = \Delta\mathrm{CS} + \mathrm{PC}'.$$

L'expression de la longueur CS nous étant déjà connue (112), il reste seulement à trouver celle de PC'. Que de C' on abaisse C'K perpendiculaire à l'intersection des plans osculateurs en M et en M': l'angle C'KP est précisément égal à η; dès lors, comme les points C' et K se confondent à la limite avec les points C et M, ce qui fait que $\mathrm{KC}' = \mathrm{MC} = \rho$, on a $\mathrm{PC}' = \rho\eta$. Donc

$$\text{arc SS}' = \Delta\mathrm{CS} + \rho\eta.$$

***115.** Nous avons promis de justifier la figure du N° 86 en montrant que les points M' et C' sont séparés l'un de l'autre par le plan normal en M ou qu'ils se trouvent d'un même côté de ce plan selon que le rayon de courbure est plus grand ou plus petit en M' qu'en M. Conservons la disposition décrite au N° 113. Le plan osculateur en M' coupe MC en un point F (fig. 73) situé plus haut que M, le plan normal en M suivant une droite dont la partie descendante FG est en avant du plan osculateur en M et fait avec FC un angle infiniment petit, et enfin le plan TMC suivant une droite FH qui se confond à la limite avec MT et fait avec FC un angle *aigu* HFC (49, 62).

Supposons $\mathrm{M'C'} > \mathrm{MC}$; alors S et S' se trouveront en avant du plan osculateur en M d'après ce qu'on a vu au N° 113. Puisque le plan normal en M est osculateur en S à l'arête de rebroussement de la surface polaire et que S'C' est tangent en S' à cette arête, le point I où S'C' traverse ce plan est infiniment voisin de S', car S'I vaut le tiers de SS' (62). Le point I est donc en avant du plan TMC. La droite IC' est perpendiculaire au plan GFH, osculateur en M', son point I est dans le plan GFC, normal en M, son point C' dans le plan GFH, et cela fait que C' se trouve à gauche du plan GFC, ou à droite, suivant que le dièdre HFGC, dont l'arête est FG et dont les faces sont GFH, GFC, est aigu ou obtus. Si donc on fait voir que cet angle est aigu il sera démontré que, dans notre hypothèse de $M'C' > MC$, le plan normal en M passe entre M′ et C′.

L'angle en question n'est autre que le dièdre FG du trièdre FCGH, de sommet F. Dans ce trièdre l'angle plan HFC est aigu, ainsi qu'on l'a vu tout à l'heure, et le dièdre FC est droit. Dès lors le fait que le dièdre FG, opposé à la face HFC, est aigu, résulte de ce que, dans les triangles sphériques rectangles, à un côté moindre qu'un quadrant est opposé un angle aigu, comme on le voit par une formule propre à ces triangles, la formule $\operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg} B$, où b, c sont les côtés de l'angle droit tandis que B représente l'angle opposé au côté b; et comme il est d'ailleurs évident, car soit ABC (fig. 74) un triangle sphérique rectangle en A dont le côté AC, prolongé au besoin, est coupé en D par le grand cercle perpendiculaire en B à AB : AD vaut un quadrant, ce qui fait que si AC est moindre qu'un quadrant l'angle ABC est plus petit que l'angle ABD, donc aigu.

Si contrairement à notre hypothèse le rayon de courbure était plus petit en M′ qu'en M, alors les points S, S′, et par suite le point I, seraient cachés derrière le plan osculateur en M, et l'on voit que le pied C′ de la perpendiculaire IC′ au plan GFH tomberait à droite du plan normal en M, donc du côté de ce plan où se trouve le point M′.

Le lecteur doit passer maintenant au chapitre de la sphère osculatrice s'il omet les numéros marqués de l'astérisque, car tous ceux du chapitre qui vient le seront.

Du lieu des centres de courbure.

On a déjà obtenu (Nos 86 à 88) la direction de la tangente en C à ce lieu, et aussi la valeur de l'arc CC′. Il reste à trouver l'angle de contingence, la position du plan osculateur, et l'angle de torsion.

***116.** *Angle de contingence.* Par un point O (fig. 75) tirons OD, OD′ parallèles aux tangentes en C et C′ du lieu en question, donc parallèles aussi (86) aux plans normaux en M et M′ à la ligne primitive : l'angle DOD′ est la grandeur que l'on veut connaître. Tirons aussi OP, OP′ parallèles aux polaires de la ligne primitive en les points M et M′: les plans POD, P′OD′ sont parallèles aux plans normaux à cette ligne en ces deux points; leur angle est donc ε. Ces plans sont tangents suivant OP et OP′ au cône lieu des parallèles menées par O à toutes les polaires (100), ce qui fait que leur intersection OF est infiniment voisine de OP et de OP′.

Soit OE la projection de OD′ sur le plan POD : le trièdre ODED′ est rectangle suivant l'arête OE, et comme les faces en sont infiniment petites, on a

$$(1) \qquad \mathrm{DOD'^2} = \mathrm{D'OE^2} + \mathrm{DOE^2}.$$

Dans le trièdre OFED′ le dièdre OE est droit. Partant, la face D′OE est, en tant qu'infiniment petite, le produit du dièdre OF par le sinus de EOF. Ce dièdre vaut ε, puisqu'il est formé par les plans POD, P′OD′. Quant à l'angle EOF, il finit par se confondre avec DOP, parce que EOD et POF sont nuls à la limite. Représentant DOP par λ, on a donc

$$(2) \qquad \mathrm{D'OE} = \varepsilon \sin\lambda;$$

or l'angle λ est connu, car il est le complément de l'angle $\varkappa$ du N° 88.

Soit OG la projection de OP′ sur le plan POD, on a

$$(3) \qquad \mathrm{DOE} = \mathrm{DOG} - \mathrm{EOG}.$$

L'angle EOG est la projection de l'angle D′OP′ sur le plan POD. Ces deux angles ne diffèrent dès lors que d'un infiniment petit d'ordre supérieur au premier, puisque l'angle de leurs plans, valant ε, est du premier ordre (55). Or on a D′OP′ $= \lambda + \Delta\lambda$, $\Delta\lambda$ désignant l'accroissement que prend λ quand on passe de M à M′. Donc

$$(4) \qquad \mathrm{EOG} = \lambda + \Delta\lambda.$$

L'angle P′OG, inclinaison de OP′ sur le plan POD, est du second ordre (111), et comme POP′ $= \eta$, on peut prendre η pour valeur de POG; donc

$$(5) \qquad \mathrm{DOG} = \lambda + \eta.$$

De (1) éliminant au moyen des équations (2) à (5) les deux termes du second membre, il vient

$$\mathrm{DOD'^2} = \varepsilon^2 \sin^2\lambda + (\eta - \Delta\lambda)^2 \ (*).$$

Quand le rayon ρ est constant l'angle λ est nul en tant que complément de l'angle $\varkappa$ du N° 88, qui est alors droit, et l'expression que

(*) Voir Wilhelm Schell, Cap. VII, § 4, dans l'ouvrage cité au N° 104 ci-dessus.

l'on vient d'écrire de l'angle de contingence du lieu du point C se réduit à η. Celle de l'arc infinitésimal de ce lieu, donnée au N° 87, se réduit dans le même cas à $\rho\eta$, et de cette double remarque il résulte que le rayon de courbure du lieu du point C est égal à celui de la ligne primitive quand ce dernier est constant. En outre, par le N° 86 et par le dernier alinéa du N° 88, la tangente de ce même lieu est alors parallèle à la binormale de la ligne primitive.

117. *Position du plan osculateur.* Le plan osculateur en C au lieu des centres de courbure est parallèle à la position limite du plan DOD'; partant, son inclinaison μ sur le plan normal à la ligne primitive est égal à l'angle dièdre D'ODE. Or la tangente de cet angle est, à la limite, égale au rapport des angles D'OE, DOE, dont le premier est connu par l'équation (2) du précédent numéro, tandis que l'expression de l'autre se forme en retranchant l'équation (4) du résultat qu'on obtient en ajoutant les équations (3) et (5).

Appelant α le complément de cet angle μ, α est l'inclinaison de la tangente à la ligne primitive sur le plan osculateur du lieu du centre de courbure. Sa tangente est dès lors la réciproque de celle de l'angle μ, et l'on a

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\mathrm{DOE}}{\mathrm{D'OE}},$$

d'où, vu les relations (1) et (2) du numéro précédent,

$$\cos \alpha = \frac{\varepsilon \sin \lambda}{\mathrm{DOD'}}.$$

Or λ étant, on l'a fait remarquer tout à l'heure, le complément de l'angle $\varkappa$ du N° 88 ci-dessus, cette égalité donne

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \varkappa} = \frac{\varepsilon}{\mathrm{DOD'}},$$

et comme DOD' est l'angle de contingence du lieu du centre de courbure, et que $\varkappa$ est l'inclinaison de la tangente de ce lieu sur le plan osculateur de la courbe primitive, on a ce théorème de Mollins : *La courbe primitive et le lieu du centre de courbure sont deux lignes telles que le rapport des cosinus des inclinaisons de la tangente de chacune d'elles sur le plan osculateur de l'autre est égal au rapport de leurs angles de contingence.*

Par un point O (fig. 85) menons OA, OB, OC respectivement parallèles à la normale principale de la ligne primitive, à la tangente au lieu du centre de courbure, et à l'intersection des plans osculateurs de ce lieu et de la ligne primitive. Si, dans l'angle trièdre que forment ces trois droites, le dièdre OA (c'est-à-dire le dièdre dont l'arête est OA) est droit, une formule des triangles sphériques rectangles donne

$$(1) \qquad \cos \text{dièdre OC} = \cos \text{angle AOB} \sin \text{dièdre OB};$$

or il est droit, car les faces AOB, AOC sont parallèles respectivement au plan normal et au plan osculateur de la ligne primitive. Puis, la face BOC est parallèle au plan osculateur du lieu du centre de courbure, par quoi le dièdre OC est l'inclinaison de ce plan sur le plan osculateur de la ligne primitive. Enfin l'angle AOB est l'angle $\varkappa$, et le dièdre OB est l'inclinaison du plan osculateur du lieu du centre de courbure sur le plan normal de la ligne primitive, donc l'angle dont nous venons de nommer α le complément. La relation (1) donne alors

$$\cos \text{dièdre OC} = \cos \varkappa \cos \alpha,$$

d'où cet autre théorème, aussi de Mollins : *Le cosinus de l'angle que font entre eux les plans osculateurs de la ligne primitive et du lieu du centre de courbure est le produit des cosinus des inclinaisons des tangentes de chacune de ces deux lignes sur le plan osculateur de l'autre.*

***118.** *Angle de torsion.* Soient (fig. 76) OD, OB, OB′ parallèles respectivement à la tangente en C et aux binormales en C et en C′ au lieu considéré, c'est-à-dire au lieu des centres de courbure de la ligne donnée ou ligne primitive : l'angle de torsion de ce lieu est égal à BOB′. Soient OT, OT′ des parallèles aux tangentes en M et en M′ à la ligne primitive, et OI, OJ les projections de OB′, OT′ sur le plan BOT.

OB est perpendiculaire à OD, et il en est de même de OT, parce que OD est parallèle au plan normal en M à la ligne donnée (86). Le plan BOT est par suite perpendiculaire à OD, dès lors parallèle au plan normal en C au lieu considéré. L'angle B′OI est en conséquence du second ordre (82). Partant, on a, à un infiniment petit près d'ordre supérieur au premier,

$$(1) \qquad \mathrm{IOB} = \mathrm{BOB'}.$$

Au même degré d'approximation on peut écrire

$$(2) \qquad \mathrm{B'OT'} = \mathrm{IOJ},$$

parce que de ces deux angles le second est la projection du premier sur le plan BOT, et que l'angle de leurs plans est du premier ordre (*). Or on a

$$\mathrm{IOB} = \mathrm{IOJ} - \mathrm{BOT} - \mathrm{TOJ},$$

donc, par (1) et (2),

$$\mathrm{BOB'} = (\mathrm{B'OT'} - \mathrm{BOT}) - \mathrm{TOJ}.$$

La différence mise entre parenthèses au second membre sera représentée par ΔBOT, le signe Δ conservant le sens qu'il a eu jusqu'ici. Quant à l'angle TOJ, on peut en son lieu écrire le produit de TOT′ par le cosinus de l'angle dièdre OT du trièdre OTT′J; c'est que les faces de ce trièdre tendent toutes à s'évanouir et que le dièdre OJ est droit. Mais TOT′ n'est autre que ε, et quant au dièdre OT, à la limite il se réduit à l'angle λ du N° 116, puisque le plan TOT′ tend à devenir parallèle au plan osculateur de la ligne primitive, et que le plan TOJ, ou BOT, est parallèle au plan normal en C du lieu des centres de courbure. La précédente équation peut donc s'écrire

$$\mathrm{BOB'} = \Delta\mathrm{BOT} - \varepsilon\cos\lambda.$$

Or BOT est égal à l'angle μ du numéro précédent, savoir à l'angle que fait le plan osculateur au lieu des centres de courbure avec le plan normal à la ligne primitive, car ses côtés OB, OT sont respectivement perpendiculaires à ces deux plans (**).

Les dispositions adoptées dans les deux figures qu'on a dessinées pour cet article ne sont évidemment pas les seules possibles, et les éléments de ces figures peuvent prendre, relativement les uns aux autres, différentes situations. Or des changements dans les tracés ne seraient pas toujours sans influence sur les formules, qui continueraient bien à offrir les mêmes termes, mais certains d'entre eux pour-

(*) L'angle de ces deux plans ne diffère pas de l'angle DOD′ du N° 116, puisque le plan BOT est perpendiculaire à OD, ainsi qu'on vient de le voir, et que, pareillement, le plan B′OT′ est perpendiculaire à OD′.

(**) Voir Aoust, § 95 de l'ouvrage cité au N° 57 ci-dessus.

raient se présenter avec le signe contraire. Afin d'obtenir pour chacun des problèmes qu'on vient de traiter une formule qui convienne à tous les cas il faudrait d'abord poser des conventions précisant pour chaque droite celui des deux sens dans lequel on la tirera, et il serait en outre nécessaire de rendre susceptible de signe telle ou telle des grandeurs qui entrent dans ces formules, admettant qu'elle sera positive ou négative suivant qu'on aura à la compter dans un sens préalablement défini ou dans le sens opposé. Nous nous en tiendrons cependant à ce qu'on a vu dans les trois derniers numéros, qui suffit pour montrer comment peuvent être abordés les problèmes indiqués en tête de l'article, et pour faire connaître la nature de leurs solutions.

De la sphère osculatrice.

119. *Sa définition.*

Cherchons l'ordre de grandeur de la distance de M′ à une sphère de centre O menée par M, c'est-à-dire dont la surface comprend le point M. On sait que la distance d'un point à une sphère se mesure sur le rayon conduit par ce point. La droite OM′ traverse la sphère en deux points dont soit P celui qui est infiniment près de M : P est de tous les points de la sphère le plus voisin de M′, et c'est de la longueur PM′ que nous voulons connaître l'ordre infinitésimal.

A l'aide du triangle PMM′ on montre sans difficulté qu'elle est du premier ordre toutes les fois que O n'est pas contenu dans le plan normal en M à la courbe; toutes les fois, en d'autres termes, que la tangente en M à la courbe n'est pas tangente à la sphère.

Supposons donc O contenu dans le plan normal, et prenons-le d'abord sur la binormale; alors le plan osculateur en M est tangent à la sphère. OM′ traverse ce plan, auquel il devient perpendiculaire à la limite, en un point A. Comme l'arc de grand cercle MP est du premier ordre puisqu'il est, en tant qu'infiniment petit, égal à MM′, PA est du second ordre. Or M′A est du troisième (63). Par suite comme on a

$$PM' = PA \pm M'A,$$

PM′ est du second ordre.

Supposons maintenant que O se trouve dans le plan normal sans être situé sur la binormale; alors le plan osculateur au point M coupe la sphère suivant un cercle qui est tangent en M à la courbe. PM′ est du second ordre toutes les fois que ce cercle n'est pas le cercle osculateur. En d'autres termes, O étant situé dans le plan normal, la distance de M′ à la sphère est du second ordre si cette surface ne contient pas le cercle osculateur.

Pour le vérifier soit m' (fig. 77) la projection de M′ sur le plan osculateur. Le plan OM′m' est perpendiculaire à ce plan et se confond à la limite avec le plan normal. Il coupe la section de la sphère par le plan osculateur en deux points dont soit I celui qui est infiniment voisin de M : M′I est précisement la distance de M′ à cette section. Or la distance de M′ à tout cercle tangent à la courbe au point M autre que le cercle osculateur est du deuxième ordre (69). Donc M′I est du deuxième ordre.

PI étant une corde infiniment petite de la sphère, l'angle IPM′ est droit à la limite. Dès lors, pour que PM′ soit du même ordre que M′I, par conséquent du deuxième, il faut seulement que l'angle IM′P ne tende pas à devenir droit. Or la direction IM′ se confondant à la limite avec la direction Im' puisque M′m' est du troisième ordre tandis que M′I n'est que du deuxième, pour que l'angle IM′P devînt droit il faudrait que la direction OM′ tendît à être normale au plan osculateur; mais ceci n'a pas lieu, puisque le centre O a été pris en dehors de la binormale. L'angle IM′P n'est donc pas droit à la limite, et il est ainsi vérifié que, dans le cas qui nous occupe, la distance de M′ à la sphère est du deuxième ordre.

Supposons enfin que la sphère contienne le cercle osculateur, ce qui exige seulement que le centre en ait été pris sur la polaire relative au point M. Alors m'I n'est autre chose que la distance de m' au cercle osculateur en M; il est donc du troisième ordre (74); or M′m' est du troisième ordre, et par suite aussi M′I. On déduit de là que PM′ est du troisième ordre toutes les fois que l'angle PIM′ ne tend pas vers zéro, et qu'il ne peut être d'un ordre supérieur au troisième que si cet angle est infiniment petit, ce qui suppose que les directions PI et M′I aient la même limite. Or M′I est la plus courte distance de M′ au cercle osculateur en M; et comme PI est une corde infiniment petite de la sphère, infiniment voisine de M, et située dans un plan qui tend à se confondre avec le plan normal à la courbe au point M, la direction PI a pour limite la direction de celle des tangentes en M à la sphère qui est contenue dans ce plan normal. Donc, parmi toutes les sphères qui passent par le point M il en est une, et une seule, dont la distance à M′ est d'un ordre supérieur au troisième : c'est la sphère qui contient le cercle osculateur, et dont celle des tangentes en M qui est contenue dans le plan normal à la courbe en ce point a pour direction la limite de la direction suivant laquelle se mesure la distance de M′ au cercle osculateur en M.

Cette sphère, qui parmi toutes celles qui passent par M a avec la courbe le contact le plus intime, est la sphère osculatrice (*).

120. Considérons la sphère variable déterminée par la condition de renfermer le cercle osculateur en M et de passer par le point M′, et cherchons quelle est sa limite. M′I étant une corde infiniment petite de cette sphère, et la direction de cette corde faisant avec le plan normal à la courbe au point M un angle infiniment petit, celle des tangentes en M à la sphère limite qui est contenue dans ce plan normal a pour direction la limite de la direction M′I. Par conséquent cette sphère limite n'est autre que la sphère osculatrice. Donc, *la sphère osculatrice est la limite de la sphère déterminée par la condition de renfermer le cercle osculateur au point considéré, et de passer par un second point de la courbe infiniment voisin.*

121. *Centre et rayon de la sphère osculatrice.*

La polaire en M, qui passe par le centre C du cercle osculateur, coïncide avec l'axe de ce cercle. C'est donc sur elle qu'il faut chercher le centre de la sphère osculatrice. Appelons-la CX (fig. 78.)

Soit MY la limite de la direction M′I considérée dans les deux numéros précédents : c'est la limite de la direction de la droite qui joint M′ au point I en lequel le plan déterminé par M′ et par la droite CX coupe le cercle osculateur en M. Cette direction limite est située dans le plan normal à la courbe au point M, et elle est tangente en ce point à la sphère osculatrice. Si donc de M on élève dans le plan

(*) Sa distance à la courbe est du quatrième ordre, comme on le verra à l'expression que j'en donnerai dans l'article final du volume.

normal une perpendiculaire à MY, le point où elle va couper CX est le centre de la sphère osculatrice. Désignons ce point provisoirement par E, et proposons-nous d'obtenir l'expression de CE.

On a, puisque MC est le rayon ρ du cercle osculateur,

$$(a) \qquad CE = \rho \operatorname{tang} EMC = \rho \operatorname{cotg} CMY,$$

ce qui fait que tout est ramené à connaître la cotangente de l'angle CMY, c'est-à-dire de l'angle que fait la direction MY avec le plan osculateur en M.

Cet angle est la limite de l'inclinaison de M'I sur le même plan, et si l'on continue à appeler m' (fig. 79) la projection de M' sur le plan osculateur en M, la cotangente de l'angle que fait avec ce plan la direction M'I est égale à $\frac{m'I}{M'm'}$; on a donc

$$\operatorname{cotg} CMY = \lim \frac{m'I}{M'm'}.$$

Or les longueurs $m'I$ et $M'm'$ ont pour expressions, la première, $\frac{1}{6}\varepsilon^2\Delta\rho$ (74), et la seconde, $\frac{1}{6}\varepsilon\eta\Delta s$ (63); donc

$$\operatorname{cotg} CMY = \lim \frac{\varepsilon\Delta\rho}{\eta\Delta s} = \frac{1}{\rho} \lim \frac{\Delta\rho}{\eta},$$

d'où, à cause de (a),

$$CE = \lim \frac{\Delta\rho}{\eta}.$$

On a vu au N° 112 que la distance de C au point S où CX touche l'arête de rebroussement de la surface polaire a pour expression $\lim \frac{\Delta\rho}{\eta}$, et nous venons de déduire de la définition de la sphère osculatrice que la distance de son centre E au point C a aussi pour expression $\lim \frac{\Delta\rho}{\eta}$. Partant, E et S coïncident s'ils tombent d'un même côté du plan osculateur, et alors la dite arête se trouve être le lieu du centre de la sphère osculatrice. Voyons ce qu'il en est. D'abord, puisque ME est perpendiculaire à la direction limite de M'I, E est situé du même côté du plan osculateur que le point M', ou du côté opposé, selon que m' se trouve entre I et la tangente MT au point M, ou qu'au contraire I tombe entre m' et cette tangente. Supposons que l'on soit dans le premier cas (fig. 80). Comme la projection de la courbe sur le plan osculateur en M a pour cercle de courbure en ce point le cercle MI de centre C (72), le rayon de courbure de la projection, dans le cas considéré, va croissant de M à m' (10), et, par suite, le rayon de courbure de la courbe elle-même va croissant de M à M′, puisque les rayons en M′ et en m' de la courbe et de la projection ne diffèrent que par le deuxième ordre (73). On reconnaîtrait pareillement que dans le second cas, où I est situé entre m' et MT, le rayon de courbure décroît de M à M′. Ainsi le point E se trouve, par rapport au plan osculateur en M, du même côté que M′ ou du côté opposé, selon que le rayon de courbure est en M′ plus grand qu'en M ou plus petit. Or il en est de même du point S (113). Les points E et S sont donc situés d'un même côté du plan osculateur, et *l'arête de rebroussement de la surface polaire est le lieu du centre de la sphère osculatrice*.

Ce centre, coïncidant avec S, sera dans la suite habituellement désigné par S.

Le rayon de la sphère osculatrice n'est autre que la longueur ME de la figure 78. Appelons-la R La propriété du carré de l'hypoténuse donne

$$R^2 = \rho^2 + \lim \left(\frac{\Delta\rho}{\eta}\right)^2.$$

Ce résultat peut être mis sous une autre forme. Multiplions et divisons le rapport $\frac{\Delta\rho}{\eta}$ par Δs; il vient

$$R^2 = \rho^2 + \sigma^2 \lim \left(\frac{\Delta\rho}{\Delta s}\right)^2.$$

Le centre et le rayon de la sphère osculatrice sont souvent appelés *centre et rayon de courbure sphérique*. Ils coïncident avec le centre et avec le rayon du cercle osculateur dans les lignes où ce dernier rayon ne varie pas.

122. On a

$$R^2 = \rho^2 + \overline{CS}^2, \tag{1}$$

et cette relation permet de retrouver, par un calcul très simple, la valeur de l'arc SS' obtenue au N° 114. La différentiation donnerait immédiatement

$$(2) \qquad R\Delta R = \rho\Delta\rho + CS.\Delta CS,$$

où ΔR représente $M'S' - MS$. Mais comme on ne suppose pas le calcul différentiel connu du lecteur, remarquons qu'en passant au point M' l'égalité (1) devient

$$(R + \Delta R)^2 = (\rho + \Delta\rho)^2 + (CS + \Delta CS)^2.$$

Développant les carrés, retranchant l'équation (1), ôtant les termes du second ordre, et divisant par 2, il vient la relation (2), qui nous est ainsi acquise.

Par M' et par S' menons des plans perpendiculaires à MS; ils sont traversés par cette droite en des points A et B (fig. 81), et l'on a

$$(3) \qquad \Delta R = BS,$$

en négligeant 1° la différence $M'S' - AB$ qui est du second ordre puisque l'angle des directions AB et M'S' est du premier et que les angles BAM' et ABS' sont droits; et, 2° la longueur MA qui, le plan qu'on a mené par M' étant parallèle à la tangente à la courbe au point M, est moindre que la distance de M' à cette tangente, distance que nous savons être du second ordre.

Comme CS est tangent en S à l'arc SS', l'angle BSS' a pour limite l'angle CSM dont le cosinus est $\frac{CS}{R}$, d'où, puisque l'angle SBS' est droit, $\frac{BS}{SS'} = \frac{CS}{R}$, d'où, par la relation (3),

$$(4) \qquad R\Delta R = CS.SS'.$$

Mettant dans (2) cette valeur de $R\Delta R$ et divisant par CS il vient

$$SS' = \frac{\rho\Delta\rho}{CS} + \Delta CS,$$

d'où enfin l'on déduit, en remplaçant le dénominateur CS par sa valeur $\frac{\Delta\rho}{\eta}$ (112),

$$SS' = \rho\eta + \Delta CS,$$

ce qui est bien l'expression trouvée au N° 114.

Mettant pour CS, dans la relation (4), cette valeur $\frac{\Delta\rho}{\eta}$, il vient un résultat qui peut s'écrire

$$SS' = \frac{R \Delta R}{\Delta \rho} \eta.$$

Le lieu du centre de la sphère osculatrice étant l'arête de rebroussement de la surface polaire, ses angles de contingence et de torsion sont donnés par le N° 110, et sont égaux, le premier à η, le second à ε.

Remarque. — R étant plus grand que CS d'après la formule (1), il suit de la relation (4) que la distance SS' des centres des sphères osculatrices en M et en M' est plus grande que la différence ΔR de leurs rayons, et qu'en conséquence ces deux sphères ne sont point intérieures l'une à l'autre, mais se coupent. On verra au N° 128 que c'est le cercle osculateur qui est la limite de leur intersection.

123. *La sphère osculatrice est la limite de la sphère déterminée par* M *et par trois autres points de la courbe infiniment voisins de* M.

Considérons le cercle qui est tangent en M à la courbe (fig. 82) et qui la rencontre en un second point A ; ce cercle est coupé par le plan normal en M suivant un diamètre dont M est l'une des extrémités et dont soit B l'autre.

Concevons que le point A se meuve sur la courbe donnée ; le point B se déplacera dans le plan normal en M et y décrira une certaine courbe S. Si A se rapproche de M et tend à se confondre avec lui, B tendra vers une limite N située dans le plan osculateur au point M (41), et MN est un diamètre du cercle osculateur en ce point (71).

Considérons la sphère déterminée par le cercle osculateur en M et par le point M' infiniment voisin de M ; nous savons qu'elle a pour limite la sphère osculatrice. Le cercle qui est tangent en M à la courbe donnée et qui passe par M' coupe la courbe S en un point N' infiniment voisin de N, et N' est situé ainsi que N sur la sphère que nous considérons. Le centre de cette sphère est donc l'intersection du plan normal à la courbe donnée au point M et des plans menés perpendiculairement aux droites MN et NN' par leurs milieux. Le dernier de ces trois plans a pour limite le plan normal à la courbe S au point N. Le centre de la sphère osculatrice est donc l'intersection des plans normaux en M à la courbe donnée et en N à la courbe S, et du plan mené perpendiculairement à la droite MN par son milieu. Maintenant, nous allons faire voir que le centre de la sphère qui contient le point M et trois autres points de la courbe infiniment voisins de M est déterminé par trois plans dont chacun se confond à la limite avec l'un des trois plans qui déterminent le centre de la sphère osculatrice, et la proposition que nous avons en vue se trouvera démontrée.

Soient M et M′ (fig. 83) (*) deux points de la courbe donnée, et K le plan mené perpendiculairement à la corde MM′ par son milieu. Considérons le cercle déterminé par les points M, M′ et par un troisième point A pris sur la courbe : ce cercle est coupé par le plan K suivant un diamètre dont l'une des extrémités tendrait à se confondre avec M si l'on faisait décroître indéfiniment l'arc MM′, et dont l'autre resterait à une distance finie de M. Nous désignerons celle-ci par C et la première par D.

Le point A se mouvant sur la courbe donnée, les points C et D se déplacent dans le plan K et y décrivent des courbes que nous appellerons T et U. Si l'on fait décroître indéfiniment l'arc MM′ la courbe U tendra à se réduire au seul point M. Quant à la courbe T, elle tendra à se confondre avec la courbe S considérée tout à l'heure. En effet, prenons deux points B et C, situés l'un sur la courbe S, l'autre sur la courbe T, et correspondant à un même point fixe A de la courbe donnée : les points B et C sont ceux en lesquels le plan normal à la courbe donnée au point M et le plan K sont traversés, le premier par le cercle assujetti à être tangent à la courbe au point M et à passer par A, le second par le cercle qui contient les points M, M′ et A; or comme les deux plans coïncident à la limite et qu'il en est de même des deux cercles, les points B et C tendent à se confondre. Il suit de là que chaque point de la courbe T tend à se confondre avec un point de la courbe S, et, par conséquent, que ces deux courbes tombent l'une dans l'autre à la limite.

Considérons maintenant la sphère déterminée par quatre points M, M′, M″, M‴ (fig. 84) pris sur la courbe donnée et infiniment voisins.

(*) L'arc des points M ne devrait jamais, dans nos figures, présenter d'inflexions, et si on l'a ondulé dans celle-ci et dans la suivante, c'est qu'on y a été contraint pour pouvoir ramener les tracés à de petites dimensions sans leur ôter la clarté.

Soient P, P′ les points qui correspondent à M″, M‴ sur la courbe T, et Q, Q′ ceux qui leur correspondent sur la courbe U. Ces points sont ceux en lesquels le plan K est traversé par les cercles MM′M″ et MM′M‴. Le centre de la sphère considérée est l'intersection du plan K et des plans menés perpendiculairement aux droites PQ et PP′ par leurs milieux, et il reste seulement à montrer que ces trois plans coïncident à la limite avec ceux qui déterminent le centre de la sphère osculatrice.

D'abord le plan K se confond à la limite avec le plan normal à la courbe au point M. En second lieu, P étant situé dans le plan MM′M″ qui coïncide à la limite avec le plan osculateur au point M, le point de la courbe S avec lequel il tend à se réunir ne saurait être que celui qui est situé dans ce dernier plan, c'est-à-dire le point N; et comme d'ailleurs le point Q tend à se confondre avec M, le plan mené perpendiculairement à PQ par son milieu coïncide à la limite avec celui mené perpendiculairement à MN par son milieu. Enfin, le point P′ a aussi N pour limite, et puisque les courbes S et T finissent par se confondre, la corde infiniment petite PP′ a pour limite de sa direction la direction de la tangente en N à la courbe S; donc le plan mené perpendiculairement à la corde PP′ par son milieu tend à coïncider avec celui mené par N perpendiculairement à cette tangente, c'est-à-dire avec le plan normal en N à la courbe S. Les plans qui déterminent le centre de la sphère MM′M″M‴ ont donc pour limites ceux qui déterminent le centre de la sphère osculatrice, et notre proposition se trouve ainsi démontrée.

124. Grâce à cette proposition, la construction décrite au N° 108 rend sensible le fait que le centre de la sphère osculatrice est situé sur l'arête de rebroussement de la surface polaire. Qu'on reprenne, en effet, la figure 68 qui est celle de ce numéro; le point L y représente l'intersection des plans menés perpendiculairement à trois cordes consécutives du polygone inscrit dans la courbe donnée par leurs milieux, et, conséquemment, le centre de la sphère qui contient les quatre points de la courbe que ces cordes joignent deux à deux. Si donc on suppose ces points infiniment voisins, le point L est, à la limite, le centre d'une sphère osculatrice. Or il est situé sur l'arête polygonale suivant laquelle se rencontrent les deux nappes de la surface polyédrale, et cette arrête diffère infiniment peu de l'arête de rebroussement de la surface polaire.

***125**. *Angle des deux rayons* MS *et* M'S'. Appelons cet angle θ, et par un point O (fig. 85) menons OT, OT', OV respectivement parallèles, aux deux rayons et à la projection du dernier, M'S', sur le plan normal en M : l'angle TOT' n'est autre que θ; l'angle VOT' est celui que le second rayon fait avec le plan normal en M, et TOV est celui que fait le premier rayon avec la projection du second sur ce plan. Appelons ces deux derniers angles a et b : puisque le trièdre dont les arêtes sont OT, OT', OV est rectangle suivant l'arête OV et que ses faces θ, a, b sont infiniment petites, on a

$$\theta = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Tout revient donc à trouver les expressions de a et de b.

Soient A et B (fig. 86) les projections de M' et de S' sur le plan normal en M : les angles a et b sont ceux que la droite AB forme avec M'S' et avec MS. Or les distances AM et BS' sont d'ordres supérieurs au premier; en effet, AM est du second ordre en tant qu'égal à la distance de M' à la tangente en M, et BS' est du troisième parce que le plan normal en M est osculateur au point S à l'arc SS'. Dès lors les angles a et b ne sont altérés que de quantités d'ordres supérieurs au premier si l'on remplace AB par la droite MS'. Nous pouvons donc écrire

$$a = \mathrm{MS'M'}, \qquad b = \mathrm{SMS'}.$$

Considérons d'abord l'angle a : l'angle M'MS' étant droit à la limite, on a $a = \frac{\mathrm{MM'}}{\mathrm{M'S'}}$, ou, remplaçant M'S' par MS ou R,

$$a = \frac{\Delta s}{\mathrm{R}}.$$

Passons à l'angle b. Représentant par ΔS l'arc SS', dont l'expression, on s'en souvient, a été formée aux Nos 114 et 122, le triangle SMS' donne

$$b = \frac{\Delta \mathrm{S} \sin \mathrm{MS'S}}{\mathrm{R}}.$$

Mais MS′ coïncide à la limite avec MS, et la direction S′S tend à se confondre avec la direction SC puisque cette dernière est tangente en S à l'arc SS′; par conséquent

$$\lim \sin \mathrm{MS'S} = \sin \mathrm{MSC} = \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MS}} = \frac{\rho}{\mathrm{R}}.$$

Par suite $$b = \frac{\rho \Delta \mathrm{S}}{\mathrm{R}^2}.$$

On a donc $$\theta = \frac{\rho}{\mathrm{R}} \sqrt{\frac{\Delta s^2}{\rho^2} + \frac{\Delta \mathrm{S}^2}{\mathrm{R}^2}}.$$

***126.** *Commune perpendiculaire aux deux rayons* MS, M′S′.

Proposons-nous de trouver l'angle φ que la commune perpendiculaire à ces deux rayons fait avec la tangente MT au point M et avec le plan TMS, par quoi sera déterminée la direction du plan mené par le premier rayon parallèlement au second. Proposons-nous aussi de trouver la longueur k de la commune perpendiculaire, ainsi que la distance ME de M au point E où elle coupe MS.

De même que les angles ε, η, ζ sont égaux respectivement à ceux que la normale principale en M′ fait avec le plan normal, le plan osculateur, et la normale principale en M, de même les angles a, b, θ du numéro précédent sont respectivement égaux aux angles que le rayon M′S′ fait avec le plan normal en M, le plan TMS, et le rayon MS. Partant de là on reconnaît sans peine que si dans les valeurs de tang γ, h et MD données aux N^os 78, 79 et 80 on remplace ε, η, ζ respectivement par a, b, θ, on obtient en fonctions de ces trois dernières quantités les expressions de tang φ, k et ME. Il restera seulement à remplacer les angles a, b, θ par leurs valeurs trouvées au numéro précédent.

Le lieu des rayons MS est une surface gauche, car l'angle de deux rayons infiniment voisins et leur plus courte distance sont du même ordre. Il est facile d'écrire les formules qui donnent l'arc infiniment petit et la direction de la tangente pour la ligne de striction de cette surface. Soit, en effet, sur M′S′, E′ l'analogue de E sur MS : l'arc en question est égal à EE′, et si nous appelons P le point où la perpendiculaire k coupe M′S′, comme l'angle EPE′ est droit, on a

$$\overline{EE'}^2 = \overline{EP}^2 + \overline{PE'}^2.$$

Or EP n'est autre que k. Et PE' est, en tant qu'infiniment petit, égal à ΔME, c'est-à-dire à l'accroissement que reçoit ME quand on passe de M à M', et l'on a donné tout à l'heure le moyen d'écrire l'expression de ME. Voilà pour l'arc EE'. Quant à la tangente en E à cet arc, elle est située dans le plan tangent en E à la surface des rayons MS, c'est-à-dire dans le plan MEP, dont la position est fixée par les déterminations précédentes, puisque ME, pour la direction, ne diffère pas de MS, et que EP, perpendiculaire à ME, fait avec MT l'angle connu φ. Il suffit donc pour connaître entièrement la tangente en question de savoir l'angle qu'elle fait avec MS ; or la tangente de cet angle est évidemment égale au rapport $\frac{EP}{PE'}$, dont les deux termes sont précisément les deux longueurs qui ont figuré dans l'expression de l'arc EE'.

127. *Lemme.* Dans la figure 87 supposons AB infiniment petit et les longueurs BC et BD finies et égales : AD est plus grand que AC puisque l'angle ABD surpasse l'angle ABC, et la différence AD — AC, que nous nommerons β, sera supposée d'ordre supérieur à l'ordre de AB. L'angle ABC enfin sera supposé ne tendre ni vers zéro ni vers deux droits. Posons

$$AB = \alpha, \quad BC = BD = a, \quad AC = b, \quad \text{d'où } AD = b + \beta,$$
$$\text{angle } ABC = \omega, \quad \text{angle } CBD = \delta.$$

On a en vue de montrer que la distance CD est infiniment petite et de l'ordre de la fraction $\frac{\beta}{\alpha}$. Puisque a est fini, il suffira de montrer que l'ordre de l'angle δ est le même que celui de cette fraction.

Par la formule qui exprime un côté d'un triangle au moyen des deux autres et de l'angle que ceux-ci comprennent, le triangle ABC donne

$$b^2 = a^2 + \alpha^2 - 2a\alpha \cos\omega,$$

et le triangle ABD,

$$(b + \beta)^2 = a^2 + \alpha^2 - 2a\alpha \cos(\omega + \delta).$$

De cette dernière égalité retranchant la précédente, le premier membre de la relation résultante est composé de deux termes, et l'on ôtera le second, savoir β^2, comme infiniment petit comparé à l'autre. Dans celui-ci on écrira a au lieu de b, par quoi il ne sera altéré que d'une fraction infiniment petite de lui-même, parce que b est égal à a à la limite. Divisant ensuite par $2a\alpha$ il vient

$$\frac{\beta}{\alpha} = \cos\omega - \cos(\omega + \delta),$$

équation qui montre que δ est infiniment petit puisque d'après les hypothèses $\frac{\beta}{\alpha}$ tend vers zéro. Elle peut s'écrire

$$\frac{\beta}{2\alpha} = \sin(\omega + \tfrac{1}{2}\delta)\sin\tfrac{1}{2}\delta.$$

Or comme ω est supposé ne tendre ni vers zéro ni vers deux droits, le premier facteur du second membre ne saurait être infiniment petit; partant, δ est de l'ordre de $\frac{\beta}{\alpha}$.

Remarque. — Remettant AB et AD — AC pour α et β, il suit de la dernière égalité que si AB est du premier ordre, l'ordre de la distance CD, étant le même que l'ordre de δ, est inférieur d'une unité exactement à celui de la différence AD — AC.

128. *Le cercle osculateur est l'intersection limite de deux sphères osculatrices infiniment voisines.*

L'intersection des deux sphères osculatrices dont les centres sont S et S' est un cercle dont la droite SS' est l'axe. Or cette même droite devient à la limite l'axe du cercle osculateur en M. Pour démontrer la proposition il suffit par conséquent de faire voir que le point M est infiniment voisin de l'intersection des deux sphères.

Des deux points où la droite S'M traverse la sphère osculatrice en M' soit A (fig. 88) celui qui est infiniment voisin de M; S'A est égal à S'M', et MA est d'un ordre supérieur au troisième car il est précisément égal à la distance de M à la sphère osculatrice en M'. Dans le plan SMS' décrivons de S et de S' comme centres deux cercles avec SM et S'A pour rayons, respectivement : ces deux cercles se coupent, car, S'A étant égal à S'M', la distance de leurs centres est plus grande que la différence de leurs rayons (122, remarque terminale), et comme ils sont situés l'un sur l'une des deux sphères et l'autre sur l'autre, leurs deux points communs appartiennent au cercle d'intersection des deux sphères. Soit K celui de ces points qui se trouve d'un même côté de la droite SS′ avec M : nous allons reconnaître que KM est infiniment petit (nous le trouverons même d'ordre supérieur au second), et de là découlera la proposition.

SM et SK sont égaux, M et K étant sur un même cercle de centre S. D'autre part, K étant sur la sphère osculatrice en M′, la différence entre S′M et S′K est égale à MA; elle est donc d'ordre plus élevé que SS′. Dès lors on se trouve ici dans le cas considéré au précédent numéro, en sorte que l'ordre infinitésimal de KM est fixé par la remarque qui termine ce numéro. Il est inférieur d'une unité à l'ordre de la différence S′M — S′K, donc à l'ordre de MA, ce qui fait que KM est d'un ordre supérieur au deuxième.

*Pour montrer que le cercle osculateur est la limite de l'intersection de deux sphères osculatrices infiniment voisines on pourrait aussi se servir de la formule connue qui exprime la surface d'un triangle au moyen de ses trois côtés, formule dont on déduit

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \tag{1}$$

où p, a, b, c, h représentent le demi-périmètre du triangle, ses trois côtés, et la hauteur correspondant au côté a. Soit A (fig. 89) un point quelconque de l'intersection des deux sphères dont les centres sont S et S′, et soit AP la perpendiculaire abaissée de A sur la corde SS′ prolongée; les deux sphères se coupent suivant un cercle de centre P et de rayon PA. Désignons les côtés SS′, AS, AS′ du triangle ASS′ respectivement par a, b, c; alors le h de la relation (1) sera la longueur PA. Les côtés b et c valent R et $\mathrm{R} + \Delta\mathrm{R}$, et $\Delta\mathrm{R}$ est égal à $a\cos\alpha$, α désignant l'angle ASP. Dans l'évaluation des facteurs p et $p - a$ il convient de négliger la partie infiniment petite devant la partie finie, en sorte que l'un et l'autre seront remplacés simplement par R; puis on a

$$p - b = \tfrac{1}{2}(a - b + c), \qquad p - c = \tfrac{1}{2}(a + b - c),$$

d'où, à cause de $c = b + a\cos\alpha$,

$$p - b = \frac{a}{2}(1 + \cos\alpha), \qquad p - c = \frac{a}{2}(1 - \cos\alpha),$$

par quoi la formule (1) devient, toutes réductions faites

$$PA = R \sin\alpha.$$

Or on a $\cos\alpha = \frac{\Delta R}{SS'} = \frac{CS.\Delta R}{CS.SS'}$, ou, par les résultats des Nos 112 et 114,

$$\cos\alpha = \frac{CS.\Delta R}{CS.\Delta CS + \rho\Delta\rho},$$

et comme $CS.\Delta CS$ vaut $R\Delta R - \rho\Delta\rho$ par l'égalité (2) du No 122, on a

$$\cos\alpha = \frac{CS}{R}, \text{ d'où } \sin\alpha = \frac{\rho}{S}, \text{ d'où}$$

$$PA = \rho.$$

Le rayon du cercle d'intersection des deux sphères est conséquemment ρ à la limite. Comme ce cercle a pour axe la droite SS′ qui tend à se confondre avec la polaire, on a le choix seulement entre le cercle osculateur et le cercle situé symétriquement au cercle osculateur par rapport au centre S. Or ce dernier cercle doit être écarté, parce que si, par exemple, c'est la sphère de centre S qui est la plus petite des deux, S est, on va le reconnaître, plus près que S′ du plan osculateur, et comme il est plus près aussi que S′ du plan d'intersection des deux sphères, ce dernier plan ne peut être que le plan osculateur.

En vue de la vérification qu'il nous reste à faire, et pour laquelle le lecteur se construira sans peine en pensée la figure, considérons la polaire et le cercle osculateur relatifs au point M. Le plan mené par la polaire et par M′ coupe le cercle en deux points diamétralement opposés dont soit E le plus voisin de M′ : la distance M′E est d'un ordre supérieur au premier, et c'est là également le cas de la distance S′F, F désignant le pied de la perpendiculaire abaissée de S′ sur la polaire. Il suit de tout ceci que la différence des longueurs S′M′ et FE est d'ordre supérieur au premier, donc infiniment petite comparée à celle des rayons SM et S′M′ qui est du premier ordre, par quoi FE est plus grand que SM, qui a été supposé le plus petit des deux rayons. Puis dès lors que F et S sont l'un et l'autre sur la polaire, E et M l'un et l'autre sur le cercle, et que la polaire passe par le centre du cercle et est perpendiculaire à son plan, le centre S est plus près que le point F de ce plan, donc plus près aussi de lui que le centre S′, qui en est à la même distance que F. La proposition est par là vérifiée, ce plan n'étant autre que le plan osculateur au point M.

***129.** *Angle des deux sphères* S *et* S′. Cet angle est celui que font entre eux les plans tangents aux deux sphères en un point quelconque de l'intersection de celles-ci, ou encore l'angle des deux rayons qui passent par ce point.

Le plan MSS′ coupe le cercle d'intersection des sphères en deux points dont l'un, le point K de la première partie du numéro précédent (fig. 88), est infiniment près de M. L'angle SKS′ est celui des deux sphères.

Faisons passer un cercle par les trois points S, S′ et K; les angles SKS′ SMS′ interceptent l'un et l'autre sur ce cercle un arc SS′. L'angle SMS′ intercepte en outre sur le cercle un second arc; mais celui-ci est infiniment petit en comparaison du premier, puisque M, qui est infiniment voisin de K comme on l'a vu au précédent numéro, l'est aussi de la circonférence. Il suit de là que les angles SKS′, SMS′ sont égaux en tant qu'infiniment petits. Or au N° 125 on a eu à s'occuper du second de ces deux angles, et on lui a trouvé pour expression $\frac{\rho\Delta S}{R^2}$.

Le lecteur qui omet les paragraphes marqués de l'astérisque doit passer dès à présent au chapitre des développées.

***130.** En comparant entre elles les relations établies jusqu'ici, on obtiendrait de nouveaux théorèmes exprimant chacun une propriété des lignes. Par exemple, si l'on rapproche les résultats des N^os^ 87 et 88 de ceux du N° 121, on obtient les deux théorèmes que voici :

1° *Le rayon de la sphère osculatrice est la limite du rapport de l'arc élémentaire du lieu des centres de courbure à l'angle de torsion.*

2° *Les angles que le rayon de la sphère osculatrice et la tangente au lieu des centres de courbure font avec le rayon du cercle* *osculateur sont complémentaires*, les deux rayons, bien entendu, étant ceux qui passent par M (*).

Si l'on désire vérifier ces deux propositions immédiatement sur la figure même, on considérera en premier lieu la seconde en la tenant d'abord pour vraie. Soit CX (fig. 90) le prolongement de MC, et soit CY tangent au cercle circonscrit au triangle MCS, qui est rectangle en C. Les deux angles YCX et SMC sont complémentaires, parce que le second est égal à SCY par les éléments; partant, puisque la tangente en C à l'arc CC′ est contenue dans le plan MCS (86), cette tangente se confond avec CY en vertu de la proposition admise. L'arc CC′ est en conséquence tangent à la sphère dont MS est un diamètre, ce qui fait que la distance de C′ à cette sphère est du second ordre. Le plan MC′S coupe la sphère suivant un grand cercle sur lequel l'angle MC′S intercepte, outre la demi-circonférence MS, un petit arc *ab* (fig. 91) qui est de l'ordre de la distance de C′ à la sphère, donc du second, d'où il résulte que l'angle MC′S ne diffère d'un droit que d'une quantité du second ordre. Il suit de là, et de ce que l'angle M′C′S′ est droit, que la proposition jusqu'ici admise se trouvera vérifiée si seulement on montre que les angles M′C′S′, MC′S sont égaux à une quantité près du second ordre.

Soient SA, C′D (fig. 90) perpendiculaires respectivement à la droite C′S′ et au plan MCS : ces longueurs sont l'une et l'autre du second ordre; par suite on a, au second ordre près,

$$\text{angle } M'C'S' = \text{angle } M'DS.$$

Soit M′P normal au plan MCS : l'angle PDS est une projection orthogonale de l'angle M′DS, et comme les plans des deux angles font entre eux un angle du premier ordre (**) on a (55), au second ordre près,

$$\text{angle } M'DS = \text{angle } PDS.$$

Enfin, les distances PM, C′D étant du second ordre, on a, toujours au même degré d'approximation,

(*) Molins, Mémoire cité au N° 87 ci-dessus, p. 383.

(**) Cet angle est en effet, en tant qu'infiniment petit, égal à ε ; car le plan PDS est normal à la courbe au point M, et le plan M′DS se change en le plan M′C′S′, qui lui est normal en M′, si on le fait tourner de deux quantités du second ordre, d'abord autour de M′S de telle sorte qu'il aille passer par C′, puis autour de M′C′ de manière à le faire passer par A.

$$\text{angle PDS} = \text{angle MC'S},$$

et de ces trois égalités il résulte, en les ajoutant, que les angles MC'S et M'C'S' ne diffèrent que d'une quantité du second ordre.

La seconde des deux propositions énoncées en tête de ce numéro étant ainsi vérifiée sur la figure, nous passons à l'autre. L'angle C du triangle MCS (fig. 92, où les mêmes lettres désignent les mêmes choses que dans la fig. 90) étant droit, MS est un diamètre du cercle circonscrit à ce triangle. Si donc on nomme E le point où la droite MD coupe ce cercle, par quoi CE en est l'arc intercepté entre les côtés de l'angle CMD, on a

$$\text{MS} = \frac{\text{arc CE}}{\text{angle CMD}},$$

car le rapport de l'arc intercepté entre les côtés d'un angle inscrit dans un cercle à l'angle lui-même est égal au diamètre. Or la distance de C' à la sphère dont MS est un diamètre étant, on l'a vu tout à l'heure, d'un ordre supérieur au premier, il en est de même de la distance de D au cercle, distance plus petite que celle de C' à la sphère, donc aussi de la longueur DE. Mais on a en outre vu tout à l'heure que la longueur C'D est d'ordre supérieur au premier; il en est dès lors également ainsi de C'E, qui est un côté d'un triangle dont ces deux longueurs forment les deux autres. C'E étant par là infiniment petit comparé à l'arc CC' du lieu des centres de courbure, on peut écrire

$$\text{arc CE} = \text{arc CC'},$$

et alors, ensuite de l'égalité précédente, il reste seulement, pour avoir effectué la vérification, à montrer que l'angle CMD est égal à η en tant qu'infiniment petit.

Soit à cet effet N le point où la droite C'M', qui est la normale principale au point M', rencontre le plan osculateur en M, savoir le plan mené par MC perpendiculairement au plan MCS, et soit NK la projection de cette normale sur ce plan osculateur. L'angle C'NK est égal à η (76). D'autre part, la longueur M'N est du second ordre, vu que la distance de M' au plan osculateur est du troisième (63), et que l'angle C'NK est du premier, car pour qu'il fût d'ordre supérieur à l'arc CC', qui est du premier ordre, cet arc devrait être tangent en

C à la droite MC, ce qui n'a lieu (88) que dans les lignes où η est nul, c'est-à-dire que dans les lignes planes. Dès lors si P est le pied de la perpendiculaire abaissée de N sur MC, MP est d'ordre supérieur au premier, et l'angle CMD peut être remplacé par l'angle CPD. Celui-ci étant la projection, sur son plan, de l'angle C'NK, il est égal comme infiniment petit à ce dernier angle, donc à η, car la différence des deux angles est (53) de l'ordre au moins du carré de l'angle des plans des deux angles, donc du second ordre au moins, vu que l'angle des deux plans, dont l'intersection est perpendiculaire à MC, valant ε, puisque telle est (75) l'expression de l'inclinaison de M'C' sur le plan MCS, il est du premier ordre.

Voici une autre forme du théorème énoncé sous 2° : La droite qui joint C avec le milieu de MS est perpendiculaire au lieu des centres de courbure. Le lecteur vérifiera.

***131.** Considérons, sous le rapport de leurs distances au point M', les cônes ronds qui passent par le cercle de courbure au point M et dont le sommet, dès lors, est situé sur la polaire relative à ce point (*). Nous allons montrer que l'un d'eux passe infiniment plus près du point M' que tous les autres et que la distance de chacun de ceux-ci à ce point est du troisième ordre.

Soit A, pris sur la polaire, le sommet d'un cône mené par le cercle de courbure, et dont AM, par suite, est une génératrice. La perpendiculaire élevée de M à la droite AM coupe la polaire en un point B (fig. 93), et le cône est tangent le long du cercle de courbure à la sphère de centre B menée par ce cercle. Nous allons reconnaître que les distances de M' au cône et à la sphère sont égales comme infiniment petites, et de là se déduira sans peine la proposition tout à l'heure énoncée.

Concevons que le plan du papier soit le plan déterminé par la polaire et par le point M'. Ce plan, qui coïncidera à la limite avec le plan normal en M, coupe la sphère suivant un grand cercle pq, et le cercle de courbure en un point K de la perpendiculaire élevée du centre de courbure C à AB; l'angle AKB est droit, et AK est une

(*) Cf. W. Schell, ouvrage cité, 2e édit., p. 67 et 68.

génératrice du cône, tangente au cercle pq. CK est un rayon du cercle de courbure. M′K est la distance de M′ à ce cercle; c'est donc une grandeur du troisième ordre. Tirons la droite BM′ : elle coupe en un point e le cercle pq et en un point l la génératrice AK. La longueur eK est du troisième ordre comme M′K, par quoi el est du sixième, étant de l'ordre du carré de eK. Or d'après les résultats obtenus au N° 119, M′e, distance de M′ à la sphère, est d'un ordre supérieur au troisième si B se trouve être le centre de la sphère osculatrice, et dans l'article qui terminera le volume on verra que cet ordre est le quatrième. Dans toutes les autres positions de B sur la polaire M′e est du troisième ordre d'après le même N° 119. Puis donc que el est d'un ordre supérieur au quatrième, les deux longueurs M′e et M′l sont, dans tous les cas, égales en tant qu'infiniment petites. Par suite aussi les distances de M′ à la sphère et au cône, puisque M′e est la première de ces deux distances et que, l'angle M′lK tendant à devenir droit, le rapport de M′l à la distance de M′ au cône a pour limite l'unité.

Par là se trouve établie la proposition énoncée et, en plus, la suivante :

S étant le centre de la sphère osculatrice, donc le point où la polaire touche l'arête de rebroussement de la surface polaire, le point où la perpendiculaire élevée de M à SM dans le plan normal coupe la polaire est le sommet d'un cône rond qui, aux environs de M, serre la courbe d'infiniment plus près que tout autre cône rond ayant aussi son sommet sur la polaire.

Le sommet de ce cône étant sur la polaire et du côté du plan osculateur opposé à celui où se trouve le centre S de la sphère osculatrice, on aura entièrement déterminé sa position quand on aura formé l'expression de sa distance à ce plan. Supposons à cet effet que dans notre figure actuelle, la fig. 93, A soit ce sommet; AC sera la distance en question, et le point B coïncidera avec le centre S. L'angle AKB étant droit, AC s'obtiendra, d'après les éléments, en divisant le carré de KC, c'est-à-dire du rayon de courbure, par CB, dont l'expression est donnée au N° 112, CB étant égal à CS. On obtient ainsi

$$AC = \frac{\rho^2 \eta}{\Delta \rho}.$$

***132.** Ce cône exceptionnel est la limite du cône rond assujetti à contenir le cercle de courbure et à passer par le point M′. La première en effet de ces deux conditions place le sommet du cône sur la polaire, et l'autre, on le reconnaît sans peine, achève de déterminer la position de ce sommet, donc aussi de déterminer le cône, que l'on ne saurait dès lors astreindre à passer par un second point de la courbe infiniment voisin de M, d'où il suit que la limite du cône rond conduit par le cercle de courbure et par M′ est, de tous les cônes ronds dont le sommet est sur la polaire, celui qui passe le plus près de la courbe dans le voisinage du point M de contact de celle-ci avec le cercle de courbure, et de là, comme conséquence immédiate, résulte la proposition.

Appelons, ainsi que déjà précédemment, m' (fig. 94) la projection du point M′ sur le plan osculateur, et h l'intersection de Cm', prolongé au besoin, avec le cercle de courbure. La droite M′h va couper la polaire en un point P qui est le sommet du cône rond passant par le cercle de courbure et par M′. On doit donc trouver, pour CP, la même valeur que pour la longueur CA du numéro précédent. On a $\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{C}h} = \frac{\mathrm{M}'m'}{m'h}$. Or C$h$ vaut CM ou ρ, et M′m', $m'h$ valent respectivement $\frac{1}{6}\varepsilon\eta\Delta s$, $\frac{1}{6}\varepsilon^2\Delta\rho$ (N^os 63 et 74). Substituant ces valeurs dans la dernière égalité et écrivant ρ au lieu de $\frac{\Delta s}{\varepsilon}$, il vient bien $\mathrm{CP} = \frac{\rho^2\eta}{\Delta\rho}$.

Des développées.

133. La théorie des développées sera basée sur la proposition suivante :

Si l'on fait rouler le plan tangent sur la surface polaire, ce plan, qui dans son mouvement reste toujours normal à la ligne considérée, est traversé par elle constamment au même point.

Pour le démontrer nous ferons voir premièrement que si le plan tangent à la surface polaire, d'abord normal en M, roule jusqu'à devenir normal en M′, le point M, envisagé comme appartenant au plan normal et comme entraîné dans son mouvement, se trouve alors à une distance de M′ infiniment petite comparée à l'arc MM′.

Appelons A et A′ (fig. 95) les plans normaux en M et en M′, C leur intersection, et B, B′ les droites de contact de ces plans avec la surface polaire, c'est-à-dire les polaires relatives aux points M et M′. Traçons dans le plan A deux droites quelconques, et soient p, q les points où elles coupent la polaire B. Le plan A roulant sur la surface polaire, ces droites s'enrouleront sur cette surface suivant des courbes dont nous désignerons par p' et q' les points situés sur la polaire B′. Soit p'' et q'' les points des deux droites qui vont s'appliquer sur p' et q'. Les arcs pp', qq', sont du même ordre que MM′, donc du premier, et respectivement égaux en longueur à pp'', qq''. De là, et de ce que les droites tracées dans le plan A sont tangentes en p et en q aux courbes suivant lesquelles elles s'enroulent (37), il résulte que les distances $p'p''$, $q'q''$ sont du second ordre.

Ceci posé, nous allons faire exécuter au plan A trois mouvements consécutifs dont l'ensemble équivaudra au roulement de ce plan sur la partie de la surface polaire qui est comprise entre les polaires B et B′. Nous voulons dire par là que, ces trois mouvements accomplis, chaque point du plan A occupera dans l'espace exactement le même lieu que si ce plan était venu coïncider avec le plan A′ en roulant sur la surface polaire. Le premier de ces mouvements sera un mouvement de rotation autour de la droite C, intersection des plans A et A′, qui amènera le premier de ces plans à coïncider avec le second. Le suivant sera un mouvement de translation qui amènera le point p'', situé après le premier mouvement dans le plan A′, à coïncider avec p', et par lequel tous les points du plan A décriront des droites parallèles et égales à $p''p'$. Ces deux mouvements effectués, on aura $p'q'' = p'q'$, car à l'origine on avait $p'q' = p''q''$. Le troisième et dernier sera un mouvement de rotation autour d'un axe passant par p' et perpendiculaire au plan A′, mouvement qui amènera q'' à coïncider avec q', et par l'effet duquel chaque point du plan A décrira un arc de cercle ayant p' pour centre. Les points p'' et q'' étant ainsi venus se confondre avec p' et q', l'ensemble de ces trois mouvements équivaut au roulement sur la surface polaire qui amènerait le plan A à coïncider avec le plan A′.

Examinons l'action de chacun d'eux sur le point M considéré comme appartenant au plan A et entraîné par lui.

Le plan A étant normal à la courbe considérée, le premier mouvement fait décrire au point M un arc de cercle tangent à cette courbe au point de départ, d'où il suit que le point M vient occuper un lieu qui est distant de M′ d'une longueur infiniment petite du second ordre au moins.

Avant de rechercher l'influence qu'a sur la situation du point M le second mouvement, qui est destiné à conduire le point p'' sur p', il faut examiner celle que le premier mouvement a eue sur la situation de ce point p''.

Appelant r le pied de la perpendiculaire abaissée de p'' sur l'intersection C, le déplacement de p'' qui résulte de ce premier mouvement est la corde d'un arc de cercle qui a pour rayon rp'', et pour angle au centre l'angle des plans A, A′. Cet angle est du premier ordre puisqu'il est égal à ε, et rp'' est du même ordre que pp', c'est-à-dire du premier. Le déplacement en question est donc du second ordre. Donc la distance $p''p'$, qui était du second ordre avant le premier mouvement ainsi que nous l'avons fait remarquer tout à l'heure, est du second ordre ou d'un ordre supérieur une fois ce mouvement exécuté. Et il en est de même de la distance $q''q'$.

Maintenant, le deuxième mouvement ayant pour effet de déplacer tous les points du plan A d'une longueur égale à $p''p'$, le point M se trouve encore, après ce mouvement, à une distance de M′ infiniment petite comparée à l'arc MM′.

Le point q'' s'étant aussi déplacé d'une longueur égale à $p''p'$, la distance $q''q'$ est, après le deuxième mouvement, du second ordre ou d'un ordre supérieur.

Le troisième mouvement est un mouvement de rotation autour de p' qui a pour but de faire coïncider q'' avec q'. L'angle dont le plan A doit tourner à cet effet est du même ordre que la distance $q''q'$; donc la quantité dont se déplace le point M ensuite du troisième mouvement est du même ordre que $q''q'$, et, par conséquent, infiniment petite comparée à l'arc MM′.

Il suit de là que, le troisième mouvement accompli, la distance à laquelle le point M se trouve de M′ est infiniment petite comparée à l'arc MM′; et comme les trois mouvements sont équivalents par leur ensemble au roulement sur la surface polaire qui amènerait le plan A à coïncider avec le plan A′, la proposition préliminaire que nous avions en vue se trouve établie.

Ce point acquis, la démonstration s'achève de la manière dont on a déjà eu un exemple au N° 9. Considérons un arc fini commençant au point M, et décomposons-le en n parties terminées en des points que nous appellons M′, M″, M‴,......, $M^{(n)}$, ce dernier étant l'extrémité de l'arc. On suppose ces parties infiniment petites et croissant en nombre indéfiniment. Concevons maintenant que le plan normal roule sur la surface polaire à partir de la position où il coupe la courbe au point M jusqu'à celle où il la coupe au point $M^{(n)}$, et qu'il emporte successivement les points M, M′ M″,....... $M^{(n-1)}$. Quand il est arrivé en M′, le point M se trouve à une distance de M′ infiniment petite comparée à l'arc MM′; quand il est arrivé en M″, le point M′ se trouve à une distance de M″ infiniment petite comparée à l'arc M′M″.......; quand il est arrivé en $M^{(n)}$, le point $M^{(n-1)}$ se trouve à une distance de $M^{(n)}$ infiniment petite comparée à l'arc $M^{(n-1)}M^{(n)}$. Or la distance à laquelle M est situé de $M^{(n)}$ lorsque le plan normal coupe la courbe en ce dernier point est inférieure à la somme de toutes ces distances infiniment petites en comparaison des arcs qui leur correspondent sur la courbe; donc cette distance est infiniment petite comparée à la somme de ces arcs, c'est-à-dire à l'arc fini $MM^{(n)}$, donc elle est nulle.

Il est ainsi démontré que, si l'on fait rouler le plan normal sur la surface polaire, il est traversé par la courbe constamment au même point.

La génération des développées et leurs propriétés se déduisent de ce théorème comme simples conséquences.

Cor. Les divers points d'un plan qui roule sur une surface développable V donnent, par leur mouvement, naissance à autant de lignes qui toutes ont V pour surface polaire. Les lignes engendrées sont planes si la surface est un cylindre, et si elle est un cône ces lignes sont sphériques, car chaque point du plan roulant conserve constamment la même distance au sommet du cône.

134. Concevons qu'on ait tracé dans le plan tangent à la surface polaire une droite indéfinie qui rencontre la courbe, et qu'on fasse après cela rouler le plan sur la surface. Ensuite du théorème qui vient d'être établi la droite ne cesse pas de rencontrer la courbe, et est coupée par elle constamment au même point. Considérons maintenant la ligne suivant laquelle cette droite s'enroule sur la surface. A chaque instant du mouvement la partie non enroulée se raccorde avec celle qui l'est déjà, en sorte qu'au point de séparation celle-ci a pour tangente la première (37). Si donc on suppose un fil enroulé sur cette ligne jusqu'à un point quelconque à partir duquel il s'en détache tangentiellement, la partie rectiligne du fil ira rencontrer la courbe primitive; et si l'on coupe le fil au point d'intersection, de sorte que ce point en devienne une extrémité, puis qu'ensuite on développe la partie enroulée du fil en le maintenant toujours tendu et tangent à la partie non encore développée, cette extrémité décrira la courbe primitive.

La ligne suivant laquelle s'enroule sur la surface polaire une droite tracée dans un plan tangent à cette surface et dirigée de manière à rencontrer la courbe primitive jouit donc de la propriété d'engendrer cette dernière par son développement en ligne droite. Cette propriété lui a fait donner le nom de *développée*. Par chaque point de la surface polaire il passe une développée, car par tout point de cette surface on peut, dans le plan tangent en ce point, tirer une droite qui aille couper la courbe primitive.

Il n'existe pas de développées hors de la surface polaire. Nous établirons cette proposition en montrant qu'une développée est nécessairement située sur cette surface. Remarquons d'abord que la tangente à une développée est forcément normale à la courbe primitive, car une droite qui roule sur une courbe sans glisser est constamment normale à la ligne que décrit l'un quelconque de ses points (101). Ainsi la tangente à une développée quelconque est contenue dans le plan normal à la courbe primitive.

Ceci posé, soit NN′ l'arc qui, sur une développée, correspond à l'arc MM′ : la droite MN est tangente en N à la développée et la droite M′N′ lui est tangente en N′. Nous allons faire voir que le point N est infiniment voisin de l'intersection des plans normaux en M et en M′ à la courbe primitive. Comme la limite de cette intersection est une génératrice de la surface polaire il sera prouvé par là que le point N est situé sur cette surface, et la proposition que nous avons en vue se trouvera démontrée.

La distance du point N à la droite M′N′ est du second ordre puisque l'arc NN′ est du premier ordre et que M′N′ est tangente à cet arc en N′. Mais cette droite M′N′ est située dans le plan normal en M′ à la courbe primitive. Donc la distance de N à ce dernier plan ne saurait être d'un ordre inférieur au second. Or le point N étant contenu dans le plan normal en M, s'il n'était pas infiniment voisin de l'intersection des plans normaux en M et en M′ sa distance à celui en M′ serait de l'ordre de l'angle de ces plans, c'est-à-dire du premier. Le point N est donc infiniment voisin de cette intersection.

135. *Les développées d'une courbe sont les lignes géodésiques de la surface polaire.* En vertu même de leur génération les développées se transforment en lignes droites lorsqu'on étale cette surface sur un plan (voir le N° 103), en sorte qu'il reste seulement à établir que, réciproquement, toute géodésique de la surface polaire est une développée de la courbe primitive.

Soit A la surface polaire ou telle surface développable que l'on voudra, et soit B une ligne géodésique de A : le développement de la surface transforme la courbe B en une droite (103). Sur un des plans tangents de A traçons la tangente T à la courbe B; si l'on enroulait le plan sur la surface, la droite T viendrait recouvrir exactement la ligne B. Que maintenant on fasse rouler le plan : par l'effet du mouvement chaque point de T se met à décrire une ligne dont A est la surface polaire et dont B est une développée. Ainsi toute géodésique d'une surface développable est une développée d'une infinité de courbes qui toutes ont cette surface pour surface polaire.

136. *Si l'on développe la surface polaire sur un plan, les transformées des développées iront toutes concourir en un même point.*

Concevons que le plan tangent roule sur la surface polaire en en entraînant les parties à mesure qu'il les touche : le mouvement une fois terminé, cette surface se trouvera développée sur un plan. Puisque pendant tout le cours du mouvement toutes les développées se rencontrent en un même point, qui est celui où le plan est constamment traversé par la courbe, la même chose a lieu une fois le mouvement achevé.

137. Tout ce que nous avons dit sur les développées s'applique aux courbes planes aussi bien qu'aux courbes non planes. Seulement, dans le cas d'une courbe plane, la surface polaire est un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au plan de la courbe, et qui dans ce plan a pour section le lieu des centres de courbure.

Les développées d'une ligne non plane sont elles-mêmes des lignes non planes, et, à part le lieu des centres des cercles osculateurs, aucune développée d'une ligne plane ne saurait elle-même être plane. La raison de ces faits est qu'une courbe plane ne peut, par son développement, donner naissance qu'à des courbes planes situées dans son propre plan.

Les développées sont engendrées par des droites tracées sur un plan qui s'enroule sur une surface développable. Dans le cas d'une ligne plane, cette surface étant cylindrique, chaque développée en coupe toutes les génératrices sous un même angle. Les développées d'une ligne plane sont donc toutes des hélices, à part le lieu des centres de courbure. Car on nomme hélice toute ligne tracée sur une surface cylindrique de façon à en couper toutes les génératrices sous un même angle autre que l'angle droit.

La réciproque est vraie, et nous verrons ailleurs qu'une hélice, par son développement, n'engendre que des lignes planes.

138. *La surface polaire ayant été développée sur un plan, la transformée du lieu des centres des cercles osculateurs est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées sur les tangentes de la transformée du lieu des centres des sphères osculatrices depuis le point du plan où vont concourir les transformées des développées* (*). *En outre, les longueurs de ces perpendiculaires sont égales aux rayons de courbure.*

Cette proposition est encore une conséquence immédiate de celle du N° 133. Dans le triangle MCS, qui est situé dans le plan normal au point M, MC et MS sont les rayons du cercle osculateur et de la

(*) Un lieu de pieds de perpendiculaires est appelé une *podaire*, du mot grec qui signifie pied.

sphère osculatrice, CS est une génératrice de la surface polaire, et MC est perpendiculaire à CS. Concevons maintenant qu'en chaque point de la courbe on ait construit ce triangle, puis qu'on fasse rouler le plan tangent sur la surface polaire; ce plan viendra coïncider successivement avec celui de chacun des triangles et emportera le triangle sans l'altérer, d'où il résulte que, le mouvement terminé, les droites MC seront encore perpendiculaires aux droites CS. Le plan roulant étant pendant tout le cours du mouvement traversé par la courbe au même point, une fois le mouvement achevé tous les sommets M coïncideront, de sorte que toutes les perpendiculaires MC seront issues d'un même point, qui est celui où vont concourir les développées quand on étale la surface sur un plan. L'ensemble des points C constituera la transformée du lieu des centres des cercles osculateurs, et les droites CS, qui avant le mouvement étaient tangentes au lieu des centres des sphères osculatrices (108 et 121), sont, après le mouvement, tangentes à la transformée de cette ligne (37).

139. *Le plan osculateur d'une développée est le plan* NMT *déterminé par la tangente* NM *de la développée et la tangente* MT *de la courbe primitive.*

Cette proposition résulte du dernier alinéa du N° 101 ci-dessus, d'après lequel, en effet, la normale principale en N à la développée est parallèle à la tangente MT.

Directement, elle se démontre comme suit :

Par N menons NH (fig. 96) parallèle à la tangente N′M′ au point N′: le plan osculateur en N à la développée est la limite du plan MNH (42), et il suffit par conséquent de montrer que ce plan fait un angle infiniment petit avec le plan NMT.

La distance du point M′ à la tangente MT et celle du point N′ à la tangente MN sont du second ordre; par suite, les distances de M′ et de N′ au plan NMT sont d'ordres supérieurs au premier, car elles sont respectivement plus petites que les distances de ces points aux droites MT, MN. Or la longueur M′N′ est finie, et quand les distances des deux extrémités d'une droite de longueur finie à un plan sont d'ordres supérieurs au premier il en est de même de l'inclinaison de la droite sur le plan. Donc l'angle que fait M′N′ avec le plan NMT, et par suite aussi l'angle que fait NH avec le même plan, est d'un ordre supérieur au premier. D'autre part l'angle MNH est du premier ordre puisqu'il ne diffère pas de celui des tangentes aux extrémités de l'arc NN′. Si donc d'un point quelconque a pris sur NH on abaisse des perpendiculaires au plan NMT et à la droite NM et qu'on en désigne les pieds par b et c, le rapport $\frac{ab}{ac}$ est infiniment petit. Mais ce rapport est le sinus de l'angle des plans NMT, MNH. Cet angle est donc infiniment petit, comme on voulait le montrer.

Cor. Faisons rouler le plan normal sur la surface polaire : les droites MN et MT, si on les suppose invariablement liées à ce plan, restent tangentes pendant tout le cours du mouvement, l'une à la développée et l'autre à la courbe primitive. Il suit de là et du présent théorème que le plan NMT, supposé invariablement lié au plan normal, reste pendant tout le cours du mouvement osculateur à la développée. On en déduit que les plans osculateurs à deux développées, aux points de ces lignes qui correspondent à un même point de la courbe primitive et qui sont situés par conséquent sur une même polaire, forment entre eux un angle constant. Nous entendons par là que la grandeur de cet angle ne varie pas lorsque les deux points se déplacent sur leurs développées respectives de façon à se trouver toujours sur une même polaire.

140. La tangente MT étant perpendiculaire au plan normal en M à la ligne primitive, et ce plan étant tangent à la surface polaire au point N, cette tangente est parallèle à la normale à la surface en ce point, par quoi le plan osculateur de la développée contient la normale de la surface polaire.

Il suit de là, et de ce que toute ligne géodésique d'une surface développable est une développée (135, second alinéa), que le plan osculateur en un point d'une géodésique d'une surface développable contient la normale à la surface en ce point (*).

(*) La proposition est d'ailleurs vraie de toutes les surfaces, non pas uniquement de celles qui sont développables ; et si l'on a fait ici ressortir ce cas particulier de ce théorème de la théorie des surfaces, c'est en vue de l'un des numéros qui vont suivre.

141. Considérons l'angle que fait MN, c'est-à-dire la tangente en N à une développée arbitrairement choisie, avec la polaire NC de la courbe primitive : la variation que subit cet angle quand on passe de M à M′ est égale à l'angle η des plans osculateurs ou des polaires en ces deux points. Pour le montrer rappelons que, le plan normal à la primitive roulant de M à M′, la tangente en N à la développée vient (134) coïncider avec la tangente en N′, savoir avec M′N′, et que NC, qui est dans le plan normal en M, vient se placer dans le plan N′M′C′ puisque c'est là le plan normal en M′, puis remarquons qu'il suit de ce double fait que la variation considérée est égale à l'angle que fait la polaire N′C′ du point M′ avec la position qu'est venu prendre la polaire NC par l'effet du roulement. Tout est donc ramené à faire voir que cet angle est égal en tant qu'infiniment petit à celui des polaires NC, N′C′. Or il est ce que devient l'angle de ces deux polaires par l'effet du développement de la surface polaire sur un plan. Comme les polaires sont les génératrices de cette surface, et que l'angle de deux génératrices d'une surface développable infiniment voisines n'est altéré par le développement de la surface que d'une fraction infiniment petite de lui-même (102), la proposition que nous avions en vue est acquise.

* Elle est d'ailleurs une conséquence du théorème du N° 104 appliqué à l'arête de rebroussement de la surface polaire. Car les polaires étant les tangentes de cette arête, une ligne géodésique de la surface polaire coupe deux polaires déterminées sous des angles dont la différence, d'après le dit numéro, est indépendante du choix de cette ligne et s'obtient à l'aide de la courbe sphérique intersection d'une sphère de rayon unité par le cône des parallèles menées du centre de la sphère à toutes les polaires. Les parallèles aux deux polaires considérées traversent la sphère en des points a et b, et l'arc ab de la courbe sphérique fournit précisément (104) la différence en question. Si les deux polaires sont infiniment voisines, l'arc ab, alors infiniment petit, est, comme tel, égal à l'angle des deux polaires, et de là résulte la proposition, puisque rien n'empêche (135) de choisir la ligne géodésique qui coupe les deux polaires parmi les développées de la courbe primitive.

142. La variation de l'angle MNC, qui vient d'être étudiée, est égale à celle de l'angle NMC que fait MN avec la normale principale MC de la ligne primitive. C'est parce que l'angle MCN étant droit est constant. Ces deux variations sont égales et de sens contraires. Or les plans osculateurs en M à la ligne primitive et en N à la développée se coupant suivant MT (139) qui est perpendiculaire à la fois à MC et à MN, l'angle de ces deux plans n'est autre que NMC, par où l'on voit que la variation que subit l'angle des plans osculateurs à la ligne primitive et à une développée quelconque quand on passe de M à M′ est égale à l'angle de torsion de la ligne primitive. Cette proposition se démontre encore comme suit :

Par un point O (fig. 97) menons Om, Om', On, On' respectivement parallèles aux binormales, donc aussi aux polaires de la courbe primitive en M et en M′ et à celles de la développée en N et en N′: l'angle mOn est celui des plans osculateurs en M à la courbe primitive et en N à la développée; l'angle $m'On'$ est celui des plans osculateurs à ces deux lignes en M′ et en N′; et comme l'angle mOm' est égal à η tout est ramené à obtenir la relation

$$mOn - m'On' = mOm',$$

dont le premier membre doit être pris en valeur absolue.

Soit Ol une parallèle quelconque menée par O au plan normal en N à la développée : le plan nOl est lui-même parallèle à ce plan normal; de plus le plan mOn est parallèle au plan normal en M à la ligne primitive, et les deux plans mOn, nOl se coupent suivant On à angle droit. Maintenant On', parallèle à la binormale en N′ à la développée, fait avec le plan nOl, qui est parallèle au plan normal en N à la même ligne, un angle du second ordre (82), et il suit de là que les deux angles $m'On'$, $m'On$ ne diffèrent l'un de l'autre que d'une quantité d'un ordre supérieur au premier. On peut dès lors, dans la relation précédente, remplacer le premier de ces deux angles par l'autre, par quoi elle devient

$$mOn - m'On = mOm'.$$

Or cette égalité a lieu parce que Om', qui est parallèle à la binormale en M′ à la ligne primitive, n'est incliné que d'un angle du second ordre sur le plan mOn, qui est parallèle au plan normal en M à la même ligne.

La variation de l'angle MNC que la polaire de la ligne primitive fait avec la tangente de la développée étant égale à η, dans les lignes planes cet angle est constant pour une même développée puisque dans ces lignes η est nul. Nous avions déjà trouvé au N° 137 que si la ligne considérée est plane, une développée quelconque coupe toutes les polaires sous un même angle, ce qui est, exprimée en d'autres termes, la même proposition.

***143.** *Expression de l'arc* NN' *et valeurs de ses angles de torsion et de contingence.*

Les droites SN, S'N' sont tangentes, en ses extrémités, à l'arc SS' de l'arête de rebroussement de la surface polaire, et SN est perpendiculaire à MC. D'autre part la plus courte distance de ces deux droites est d'un ordre plus élevé que le premier (64), et leur commune perpendiculaire est infiniment voisine de l'arc SS'. D'après tout ceci on a

$$\eta.\mathrm{SN} = \mathrm{arc\ NN'}.\cos\upsilon,$$

appelant υ l'inclinaison NMC de la tangente de la développée sur la normale principale de la ligne primitive, et cette relation donne

$$\mathrm{arc\ NN'} = \frac{\eta.\mathrm{SN}}{\cos\upsilon}.$$

La longueur SN qui figure au second membre est égale à NC — CS, ou à CS — NC, ou à CS + NC, selon que des trois points S, N, C c'est le premier, ou le deuxième, ou le dernier, qui se trouve entre les deux autres. Or l'expression de CS a été donnée au N° 112, et quant à NC il est égal à $\rho \operatorname{tang} \upsilon$.

Désignons par E l'angle des tangentes et par H l'angle des plans osculateurs à la développée aux extrémités de l'arc NN': se fondant sur ce que ε est égal à l'angle des plans normaux en M et en M' à la courbe primitive, le lecteur trouvera

$$\mathrm{E} = \varepsilon\cos\upsilon.$$

La normale principale de la développée étant parallèle à la tangente de la courbe primitive, on a (77),

$$\mathrm{E}^2 + \mathrm{H}^2 = \varepsilon^2,$$

et cette formule, combinée avec la précédente, donne

$$\mathrm{H} = \varepsilon\sin\upsilon.$$

De la surface rectifiante et des développantes.

144. *Définitions.* Parmi les diverses surfaces développables que l'on peut faire passer par une courbe donnée il y en a une qui est telle que si on la développe la courbe se trouve transformée en ligne droite. Cette propriété lui a fait donner par Lancret, dans le travail dont il a été parlé au N° 77 ci-dessus, le nom de *surface rectifiante*.

Nous savons que par le développement de la surface polaire les développées d'une courbe sont transformées en lignes droites. Par rapport aux développées la courbe primitive s'appelle *développante*. Si nous pouvons trouver une développante de la courbe primitive, c'est-à-dire une ligne dont celle-ci soit une développée, la surface polaire de cette développante jouira de la propriété de transformer par son développement la primitive en une droite, et sera en conséquence pour elle une surface rectifiante.

Concevons que la tangente roule sur la courbe primitive sans glisser, et considérons la ligne que décrit alors un point de la tangente choisi à volonté : la ligne engendrée est une développante de la primitive, et celle-ci, comme on voit, a autant de développantes qu'il y a de points sur une de ses tangentes. Ces développantes sont toutes situées sur la surface lieu des tangentes, laquelle est par conséquent le lieu des développantes de la courbe primitive.

Soit A le point d'une développante qui correspond au point M de la courbe primitive : la droite MA est tangente en M à la seconde de ces deux lignes, elle est normale en A à la première (101), et la tangente en A à la développante est parallèle à la normale principale en M à la primitive (101, dernier alinéa). Il suit de là que le plan normal de la développante se confond avec le plan que déterminent la tangente et la binormale à la ligne primitive. Ce plan a reçu le nom de *plan rectifiant*; il est tangent à la surface polaire de la développante (107). On voit que le plan normal à une développante est normal à toutes les autres. Il résulte de là qu'une même surface est polaire à toutes les développantes. C'est cette surface polaire des développantes qui est la surface rectifiante de la ligne primitive.

La position limite de l'intersection des plans rectifiants en M et en M' s'appelle la *droite rectifiante*. Cette droite est donc, pour une développante donnée quelconque, la polaire relative au point où cette développante est rencontrée par la tangente à la primitive en son point M. Elle passe dès lors par ce point puisque, en sa qualité de polaire de la développante considérée, elle en coupe toutes les développées, donc aussi la primitive, qui est l'une de ces développées. La droite rectifiante est la polaire commune des développantes, aux points de ces lignes qui sont situés sur la tangente en M à la primitive. La surface rectifiante est le lieu des droites rectifiantes. Le plan rectifiant est tangent à cette surface tout le long de la droite rectifiante. Cette droite est tangente, et le plan rectifiant est osculateur, à l'arête de rebroussement de la surface rectifiante.

145. *Il n'y a, pour une courbe donnée, qu'une seule surface rectifiante.*

Concevons en effet deux surfaces développables dont chacune, par son développement, transforme en une droite la courbe donnée. Cette courbe étant, de ce fait, une géodésique de chacune des deux surfaces développables, sa normale principale en un de ses points choisi à volonté, et que nous nommerons I, se confond avec les normales en ce point de chacune des deux surfaces (140), dont les normales en I sont dès lors dans une même droite. Les deux surfaces ont donc aussi en I le même plan tangent. Ayant ainsi le même plan tangent en chacun des points de la courbe donnée, les deux surfaces se confondent, puisqu'une surface développable est le lieu des limites des intersections de ses plans tangents consécutifs en tous les points d'une ligne quelconque tracée sur elle.

146. Une développée étant transformée en ligne droite par le développement de la surface polaire, elle a cette surface pour surface rectifiante. Il suit de là que le plan normal de la ligne primitive es le plan rectifiant de la développée. Ce plan répond, en effet, à la définition du plan rectifiant telle qu'elle a été donnée dans l'avant-dernier numéro, car il contient la tangente de la développée, et il en contient aussi la binormale, vu qu'il est à angle droit sur le plan osculateur de la développée, puisque celui-ci, on l'a vu au N° 139, contient la tangente de la ligne primitive.

147. *Inclinaison de la droite rectifiante sur la tangente et sur le plan osculateur de la ligne primitive.*

Le plan rectifiant étant perpendiculaire à la normale principale puisqu'il contient la tangente et la binormale, la droite rectifiante, intersection limite des plans rectifiants en deux points de la ligne primitive infiniment voisins, est parallèle à la commune perpendiculaire aux normales principales en ces points. Or l'angle que fait cette commune perpendiculaire avec la tangente et avec le plan osculateur est celui qui a été considérée au N° 78 et appelé γ. On a trouvé que sa tangente trigonométrique est égale à $\lim \frac{\varepsilon}{\eta}$ ou $\frac{\sigma}{\rho}$. Telle est donc l'expression de l'inclinaison de la droite rectifiante sur la tangente et sur le plan osculateur.

***148.** Formons, au moyen des résultats obtenus jusqu'ici, l'angle ω que fait la tangente du lieu des centres de courbure avec la droite rectifiante.

Cette droite étant d'après le précédent numéro parallèle à la direction de la plus courte distance de deux normales principales infiniment voisines, si l'on nomme h, comme au N° 79, cette plus courte distance, et CC′ l'arc (qui s'appuie par ses deux extrémités sur les deux normales principales), du lieu des centres de courbure, on a

$$\cos\omega = \frac{h}{CC'}, \tag{1}$$

car la projection de cet arc sur la commune perpendiculaire aux deux normales est précisément la longueur h. Maintenant, par les N^os^ 77 et 79 on a $h = \frac{\rho \Delta s}{\sqrt{\rho^2 + \sigma^2}}$, ce qui, par le numéro précédent, peut s'écrire $h = \Delta s . \cos\gamma$, où γ est l'inclinaison de la rectifiante sur le plan osculateur. D'autre part une proposition du N° 130 donne $CC' = R\eta$, ou $CC' = \frac{R\Delta s}{\sigma}$, R désignant le rayon de la sphère osculatrice. Mettant ces deux valeurs dans (1), il vient

$$\cos\omega = \frac{\sigma\cos\gamma}{R}. \text{ (*)} \tag{2}$$

(*) De Saint-Venant, p. 51 du Mémoire cité au N° 82 ci-dessus.

Autrement. D'un point O menons On, Ob, Or (fig. 98) respectivement parallèles à la normale principale, à la binormale, à la rectifiante de la ligne primitive, et Ot parallèle à la tangente du lieu du centre de courbure (les lettres minuscules rappelleront les directions). Ot est (86) dans le plan bOn, qui est parallèle au plan normal, et le plan bOr est parallèle au plan rectifiant. L'angle trièdre Obtr est dès lors rectangle suivant l'arête Ob, et la formule

$$\cos a = \cos b \cos c$$

des triangles sphériques rectangles, où a, b, c sont les trois côtés, a désignant celui qui est opposé à l'angle droit, donne en conséquence, comme l'angle tOr est celui que nous avons nommé ω,

$$(3) \qquad \cos \omega = \cos t\mathrm{O}b \cos b\mathrm{O}r.$$

Maintenant on a (88) $\operatorname{tang} t\mathrm{O}n = \frac{\rho\eta}{\Delta\rho}$, d'où $\operatorname{tang} t\mathrm{O}b = \frac{\Delta\rho}{\rho\eta}$, d'où $\cos t\mathrm{O}b = \frac{\rho\eta}{\sqrt{\Delta\rho^2 + \rho^2\eta^2}}$, d'où, par le N° 121,

$$(4) \qquad \cos t\mathrm{O}b = \frac{\mathrm{R}}{\rho}.$$

D'autre part bOr vaut $\frac{\pi}{2} - \gamma$, ce qui donne

$$\cos b\mathrm{O}r = \sin \gamma.$$

Mettant cette valeur dans (3) conjointement avec la valeur (4) il vient

$$\cos \omega = \frac{\rho \sin \gamma}{\mathrm{R}},$$

ce qui est en accord avec la relation (2), l'égalité $\operatorname{tang} \gamma = \frac{\sigma}{\rho}$ du numéro précédent donnant $\sigma \cos \gamma = \rho \sin \gamma$.

149. *Direction du plan osculateur de la développante.*

Le plan osculateur contient la tangente, et alors, d'après la situation, donnée dans le N° 144, de la tangente à la développante, le plan osculateur de cette courbe coupe celui de la ligne primitive selon une parallèle à la normale principale de cette ligne. Comme il est perpendiculaire à la droite rectifiante puisque cette droite est polaire de la développante, l'angle qu'il forme avec le plan osculateur de la primitive est le complément de l'angle γ; sa tangente a donc pour expression lim $\frac{\eta}{\varepsilon}$, ou $\frac{\rho}{\sigma}$. On arriverait à la même conclusion en partant du fait que le plan osculateur de la développante est parallèle à deux rayons de courbure de la primitive infiniment voisins, puisque les tangentes de la développante sont parallèles à ces rayons.

Remarque. A continuant à désigner le point d'une développante qui correspond au point M de la ligne primitive, la projection de M sur le plan osculateur de la développante est le centre du cercle osculateur de cette courbe au point A. Ce théorème va de soi, puisque par rapport à le développante la ligne primitive est une développée. Le centre du cercle osculateur de la développante est le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur la rectifiante, puisque la rectifiante est la polaire de la développante.

150. *Rayon de courbure et rayon de torsion des développantes.*

Désignons par $\Delta\varsigma$, e et h, l'arc infiniment petit d'une développante, son angle de contingence et son angle de torsion : les rayons de courbure et de torsion sont respectivement égaux aux limites des rapports $\frac{\Delta\varsigma}{e}$, $\frac{\Delta\varsigma}{h}$; cherchons donc les expressions des termes de ces rapports.

Soient A, A′ les points d'une développante correspondants aux points M, M′ de la ligne primitive : on a $\Delta\varsigma =$ arc AA′, et cet arc est égal au produit de l'angle des tangentes en M et en M′ par la longueur MA. Nous avons donc

$$\Delta\varsigma = \mathrm{MA}.\varepsilon.$$

La tangente à la développante est parallèle à la normale principale de la ligne primitive. L'angle des tangentes en A et en A′ est donc égal à celui qui au N° 77 a été appelé ζ, et l'on a

$$e = \zeta = \sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2}.$$

Relativement aux développantes la ligne primitive étant une développée, l'angle des plans osculateurs en A et A′ à la développante considérée est égal, par la proposition établie au N° 142, à la variation que subit l'angle des plans osculateurs de la développante et de la ligne primitive quand on passe du point M de cette dernière au point M′. Or nous avons vu au numéro précédent que l'angle des plans osculateurs de la développante et de la ligne primitive est le complément de l'angle γ. On a donc

$$h = \Delta\gamma.$$

Soient maintenant R le rayon de courbure et S le rayon de torsion au point A ; les trois formules précédentes donnent

$$R = \text{MA} \lim \frac{\varepsilon}{\zeta}, \qquad S = \text{MA} \lim \frac{\varepsilon}{\Delta\gamma}.$$

On voit par ces égalités que les rayons de courbure et de torsion sont proportionnels à la distance MA.

L'expression trouvée pour R se déduirait aussi de la remarque qui termine le précédent numéro, car de cette remarque il résulte $R = \text{MA} \sin\gamma$, et la relation $\operatorname{tang}\gamma = \lim \frac{\varepsilon}{\eta}$ (147) donne $\sin\gamma = \lim \frac{\varepsilon}{\zeta}$.

***151.** *Arête de rebroussement de la surface rectifiante.* Les droites rectifiantes étant les tangentes de cet arête, son angle de contingence est l'angle des rectifiantes en M et M′. Ces droites font avec la courbe primitive, en ces deux points, des angles γ et $\gamma + \Delta\gamma$. Le développement de la surface rectifiante ne change point ces angles, et comme il transforme l'arc MM′ et toute la courbe en une droite, l'angle des deux rectifiantes devient $\Delta\gamma$ ensuite de la propriété de tout angle extérieur d'un triangle rectiligne de valoir la somme des deux intérieurs non adjacents. L'angle de contingence cherché est donc $\Delta\gamma$, puisque le développement n'a altéré l'angle des deux rectifiantes que d'une fraction de lui-même infiniment petite (102).

Non seulement les droites rectifiantes sont tangentes à l'arête qui nous occupe, mais les plans rectifiants lui sont osculateurs. Le plan osculateur de l'arête se confond par suite (144) avec le plan normal des développantes. Et le plan osculateur d'une développante, étant perpendiculaire à la droite rectifiante (149), est parallèle au plan normal de l'arête. Les angles de contingence et de torsion de cette ligne sont dès lors égaux respectivement aux angles de torsion et de contingence des développantes, ce qui fait que les valeurs en sont écrites au précédent numéro.

Et comme la surface rectifiante est la surface polaire des développantes, il aurait suffi, pour montrer que les angles de contingence et de torsion de l'arête de la surface rectifiante sont réciproquement égaux à ceux des développantes, d'invoquer la seconde des deux propositions du N° 110.

Appelons p la distance MP du point M de la ligne primitive au point correspondant P de l'arête de rebroussement de la surface rectifiante; P′ étant le point de cette arête qui correspond au point M′, nous poserons $M'P' = p + \Delta p$. En se fondant sur ce que MP et M′P′ qui sont tangents en P et en P′ à l'arête considérée font entre eux un angle égal à $\Delta\gamma$ d'après ce qu'on a vu tout à l'heure, et se souvenant que la plus courte distance de deux tangentes infiniment voisines est d'un ordre supérieur à celui de l'arc qui sépare leurs points de contact, le lecteur trouvera sans aucune peine

$$p = \frac{\Delta s.\sin\gamma}{\Delta\gamma}.$$

Pour l'arc PP′ de l'arête il obtiendra

$$\text{arc } PP' = \Delta p + \Delta s \cos\gamma$$

ou quelque autre expression équivalente; mais celle-ci se démontre sur la figure avec une grande facilité.

***152.** De quel côté du plan osculateur se trouve le point P? Ceci dépend entièrement de l'angle γ, de l'angle *aigu* que fait la tangente avec la droite rectifiante, selon qu'il est croissant ou qu'il est décroissant. Que l'on détache un petit arc IK comprenant le point M; ses extrémités I et K sont situées de part et d'autre du plan osculateur en M, et nous allons reconnaître que, par rapport à ce plan, le point P se voit du même côté que I si γ est en I plus grand qu'en K, et du même côté que K par conséquent si le contraire a lieu, l'arc étant pris assez petit pour que, de l'une à l'autre de ses extrémités, γ varie constamment dans le même sens.

Lemme. Soient les plans AO, AQ (fig. 99) respectivement parallèles aux plans osculateur et rectifiant en M, donc à angle droit l'un sur l'autre, et AT leur intersection, parallèle à la tangente. Soient AT′ et AR′ parallèles, le premier à la tangente et l'autre à la droite rectifiante en M′ : le plan R′AT′ est parallèle au plan rectifiant en ce même point. Soient enfin AB l'intersection des plans AO, R′AT′, dont l'angle est droit à la limite, et Ar' la projection de AR′ sur le plan AQ. L'angle R′AT′ est la valeur de γ au point M′ ; appelons cette valeur $\gamma + \Delta\gamma$, $\Delta\gamma$ étant ici susceptible de signe. L'inclinaison de AT′ sur le plan AO est, comme on sait, du second ordre ; il en est alors de même de l'angle T′AB, qui, en tant qu'infiniment petit, est égal à cette inclinaison. Partant, l'angle R′AB, au second ordre près, vaut $\gamma + \Delta\gamma$.

Les plans AQ et R′AB sont parallèles aux plans rectifiants en M et M′; leur angle est donc du premier ordre. La différence des angles R′AB et r'AT, dont le second est la projection du premier sur le plan AQ, est en conséquence du second ordre (55), et cela fait qu'au second ordre près on a $r'\text{AT} = \gamma + \Delta\gamma$.

Si donc dans le plan AQ on tire AC de façon à avoir CAT$=$R′AT′ $= \gamma + \Delta\gamma$, l'angle CAr' est du second ordre. Or R′Ar' est du second ordre aussi parce que le plan AQ est parallèle au plan osculateur en P à l'arête de rebroussement de la surface rectifiante, et que AR′ est parallèle à la tangente en P′ à cette arête. Il suit de là que l'angle R′AC est d'un ordre supérieur au premier.

Remarque préliminaire. Dans le triangle ABC (fig. 100) on suppose les angles A et B finis de même que les côtés qui leur sont opposés, et l'angle C avec le côté AB sont supposés infiniment petits du premier ordre. Supposons en outre qu'une droite UV fasse avec BC un angle du second ordre, et que la distance du sommet B à cette droite soit du second ordre pareillement. Si H et G sont les pieds des perpendiculaires abaissées sur UV de A et de C, CG est plus petit que AH comme étant du second ordre tandis que AH est du premier. Il suit de là que celle située sur AC des deux extrémités de la commune perpendiculaire aux deux droites AC et UV se trouve, par rapport à A, du même côté que le point C.

Tout ceci posé prenons la courbe et plaçons-la de telle sorte que le rayon de courbure en M soit dans le fil-à-plomb et que le plan osculateur soit en face de nous; cette disposition facilitera le discours. A partir de M le plan osculateur nous cache la courbe d'un côté, nous la laisse voir de l'autre, et l'on prendra le point M′ du côté où elle se montre, que, pour fixer les idées, nous supposerons être à droite de M. Alors on verra la partie *antérieure* de la rectifiante obliquer vers la droite (*), ce qui fait que si sur cette partie on marque un point F (fig. 101), et un point T sur la tangente à droite de M, l'angle TMF est aigu et conséquemment n'est autre que γ. Sur la partie antérieure de la rectifiante en M′ marquons un point F′, abaissons M′D perpendiculaire sur MT, et dans le plan TMF, qui est le plan rectifiant en M, tirons DE de telle façon que l'angle TDE soit égal à T′M′F′, donc à $\gamma + \Delta\gamma$; les droites MF et DE se coupent quelque part, étant tracées dans un même plan.

La distance M′D est du second ordre, et d'après le lemme ci-dessus l'angle des directions M′F′ et DE est du second ordre aussi, car il est l'analogue de l'angle R′AC de la figure 99. On amène donc M′F′ sur DE par une translation et une rotation du second ordre toutes deux. Dès lors, ensuite de notre remarque préliminaire, l'extrémité située sur MF de la commune perpendiculaire à MF et à M′F′ est du même côté de M que l'intersection de MF avec DE. Comme cette extrémité est infiniment voisine du point P, le point P se trouve sur MF du côté de M où MF est coupé par DE. Tout est donc ramené à savoir de quel côté de M la rectifiante est rencontrée par la droite DE.

Réduite à ces termes, la proposition énoncée en commençant est évidente, car DE coupe MF dans la région antérieure, donc du côté du plan osculateur où se trouve M′, si l'angle TDE surpasse l'angle TMF, c'est-à-dire si l'angle γ a crû de M à M′; et la rencontre a lieu dans la région postérieure si au contraire le premier de ces deux

(*) C et C′ étant les centres des cercles osculateurs en M et en M′, soit MI parallèle à M′C′ et de même direction : MI est au-dessous du plan rectifiant en M, en avant du plan osculateur, et à gauche du plan normal, d'où il suit que le plan CMI, à partir de son intersection MC avec le plan osculateur, tire vers la gauche dans sa partie antérieure : et voilà pourquoi la rectifiante, qui est normal en M à la limite du plan CMI, oblique, elle, vers la droite.

angles est moindre que le second, donc si l'angle γ est plus petit en M' qu'en M.

Propriété caractéristique de la droite rectifiante.

153. *De toutes les droites qu'on peut conduire par* M, *la rectifiante est la plus également inclinée sur les tangentes en* M *et en* M'; *et la différence des angles que cette droite fait avec les deux tangentes est infiniment petite en comparaison de la même différence relative à toute autre droite menée par* M.

MT et MT' étant la tangente en M et la parallèle à la tangente en M' tirée de M, soit MI une droite dirigée à volonté. Posons

$$\text{angle TMI} = a, \qquad \text{angle T'MI} = a + \alpha;$$

il s'agit de montrer que la valeur que revêt α lorsque MI coïncide avec la droite rectifiante et infiniment petite comparée à la valeur qu'il prend dans tout autre cas.

Les trois droites MT, MT', MI peuvent être envisagées, à partir de M, dans deux directions différentes, et il sera bon d'avoir précisé, pour chacune de ces droites, la direction que nous choisissons. Nous appellerons comme jusqu'ici MT celle des deux directions de la tangente en M qui fait un angle aigu avec la corde MM' considérée comme tirée de M vers M'; et nous appellerons MT', MI celles des parties des deux autres droites qui sont situées, par rapport au plan osculateur en M, du même côté que le point M'. Alors l'angle TMT' sera égal à ε.

Désignons par A le dièdre dont l'arête est MT et qui est formé par les deux plans TMI, TMT': ce dièdre étant, dans le trièdre MITT', opposé à l'angle plan IMT' ou $a + \alpha$, une formule de la trigonométrie donne

$$\cos(a + \alpha) = \cos a \cos \varepsilon + \sin a \sin \varepsilon \cos A,$$

d'où, à cause de $\cos \varepsilon = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon$,

$$\text{(1)} \qquad \cos a - \cos(a + \alpha) = 2 \cos a \sin^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon - \sin a \sin \varepsilon \cos A.$$

Or une autre formule donne

(2) $$\cos a - \cos(a + \alpha) = 2\sin\left(a + \tfrac{1}{2}\alpha\right)\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Au premier membre de (1) substituons sa valeur (2). Dans l'égalité ainsi obtenue on n'altère le premier membre que d'une quantité d'ordre supérieur au sien si l'on y remplace $\sin\left(a + \frac{1}{2}\alpha\right)$ par $\sin a$ et $\sin\frac{1}{2}\alpha$ par $\frac{1}{2}\alpha$. Divisant en outre par $\sin a$, il vient

(3) $$\alpha = 2\cot a \sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon - \sin\varepsilon\cos A,$$

et il s'agit de déterminer l'ordre infinitésimal du second membre de cette équation.

A cet effet supposons d'abord que MI ne soit pas situé dans le plan rectifiant; alors, comme le plan TMT′ tombe à la limite dans le plan osculateur, l'angle A est différent d'un droit, son cosinus ne tend pas vers zéro, et par conséquent $\sin\varepsilon\cos A$ est du premier ordre. Mais 'autre terme du second membre de l'équation (3) est du deuxième ordre. Donc α est du premier. Ainsi α est du premier ordre toutes les fois que la droite MI n'est pas contenue dans le plan rectifiant.

Supposons maintenant la droite MI contenue dans ce plan.

L'inclinaison du plan TMT′ sur le plan osculateur étant égale à $\frac{1}{2}\eta$ (61) et ce dernier plan passant par MT, l'angle A, dans le cas qui nous occupe, est égal à $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\eta$; alors on a

$$\cos A = \sin\tfrac{1}{2}\eta \qquad \text{ou} \qquad \cos A = \tfrac{1}{2}\eta.$$

Remplaçant en outre $\sin\varepsilon$ et $\sin\frac{1}{2}\varepsilon$ par ε et $\frac{1}{2}\varepsilon$, l'équation (3) devient

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\cot a - \tfrac{1}{2}\varepsilon\eta,$$

et chacun des deux termes du second membre n'est fautif que d'une quantité d'ordre supérieur au deuxième. Cette valeur de α est du second ordre si les deux termes ne sont pas des infiniment petits égaux, par conséquent toutes les fois que l'on n'a pas $\tan a = \lim\frac{\varepsilon}{\eta}$. Or $\lim\frac{\varepsilon}{\eta}$ est la valeur de $\tan a$ relative à la droite rectifiante (147). Si donc MI est situé dans le plan rectifiant sans être la droite rectifiante, α est du deuxième ordre.

Mais si MI se confond avec cette droite, les deux termes du second membre de la dernière équation étant des infiniment petits égaux, α est d'un ordre supérieur au deuxième, ce qui achève de démontrer la proposition énoncée (*). Sur elle sera basée l'étude du cône rond osculateur de la surface lieu des tangentes.

Au moyen de la proposition qui fait l'objet du N° 83, et en remarquant que la cotangente de l'inclinaison de la rectifiante sur la binormale vaut $\frac{\varepsilon}{\eta}$, on reconnaîtra, par la même marche exactement, que la rectifiante jouit aussi de cette propriété relativement à la binormale, que de toutes les droites elle est la plus également inclinée sur deux binormales infiniment voisines.

Le cône rond osculateur le long d'une génératrice à la surface lieu des tangentes.

154. Sur la tangente M'T' au point M' soit A (fig. 102) un point pris à une distance finie de M'. Il suit de la proposition établie au numéro précédent, ainsi qu'on va le reconnaître, que le cône rond qui a pour axe la rectifiante au point M et dont la tangente MT est une génératrice passe infiniment plus près de A, donc de la tangente M'T' dont A est un point quelconque, que ne le fait tout autre cône rond de sommet M. C'est-à-dire que le cône qui a pour axe la rectifiante est osculateur à la surface lieu des tangentes le long de sa génératrice MT (**).

Le plan osculateur en M à la ligne primitive est tangent à un cône de sommet M passant par MT, ou ne lui est pas tangent, selon que l'axe du cône a été pris dans le plan rectifiant ou en dehors de ce plan. Dès lors comme la distance du point A au plan osculateur est

(*) Au sujet de cette proposition, que je venais de donner dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1873), Eugène Catalan, titulaire alors de la chaire d'Analyse à l'université de Liège, m'a fait observer qu'elle exprime une propriété caractéristique des lignes géodésiques dans les surfaces développables ; car les lignes géodésiques d'une surface développable étant toutes transformées en droites par le développement de la surface, les génératrices d'une surface développable sont les droites rectifiantes des lignes géodésiques qu'on peut tracer sur elle.

(**) Cf. *de Saint-Venant,* Mémoire cité, N° 25.

du second ordre, le cône passe infiniment plus près de lui dans le premier cas que dans l'autre. Nous supposerons donc l'axe du cône dans le plan rectifiant. MK étant une droite située dans ce plan, nous considérons le cône rond dont cette droite est l'axe et dont la tangente MT est une génératrice.

Soient :

MB la parallèle à la tangente M′T′ menée de M;

MC, des deux génératrices suivant lesquelles le plan KMB coupe le cône, celle qui fait avec MB un angle infiniment petit;

MD, des deux génératrices selon lesquelles le plan KMA coupe le cône, celle qui fait avec la droite MA un angle infiniment petit. MD est, des génératrices du cône, celle qui passe le plus près du point A de la surface lieu des tangentes.

L'angle KMC étant égal à l'angle KMT puisque MC et MT sont deux génératrices, et la droite MB, parallèle à la tangente en M′, étant dans le plan du premier de ces deux angles, l'angle BMC est la différence des inclinaisons de MK sur les tangentes en M et en M′. Cet angle est donc, d'après le numéro précédent, d'un ordre supérieur au second ou du second ordre seulement selon que MK coïncide ou non avec la rectifiante. Or on va montrer que les angles BMC et AMD sont tous deux du second ordre ou tous deux d'ordre supérieur au second. Il en résultera que l'angle AMD est, comme l'angle BMC, d'un ordre supérieur au second ou du second ordre seulement selon que MK est ou n'est pas la rectifiante, par quoi la proposition se trouvera démontrée.

Le plan BMA contient la tangente M′T′ puisque BM est parallèle à cette tangente, dont A, qui est situé dans ce plan, est un point. Contenant la tangente en M′ à la courbe primitive et le point M, il se confond à la limite avec le plan osculateur en M′ par la définition même du plan osculateur (41), donc avec celui au point M.

Le plan CMD aussi se confond à la limite avec le plan osculateur puisque MC et MD sont deux génératrices du cône infiniment voisines de la génératrice MT, par quoi le plan CMD est, à la limite, tangent au cône suivant cette dernière génératrice, et puisque l'axe du cône est dans le plan rectifiant, par quoi le plan tangent au cône suivant MT est le plan osculateur.

Les plans BMA (*) et CMD se confondant par conséquent à la limite, les angles BMA, CMD, qui sont les intersections du dièdre BMKA par ces deux plans, ont l'unité pour limite de leur rapport. Or la distance du point A à la droite MB, qui est parallèle à la tangente M'A, étant précisément égale à la distance de M à cette tangente, et cette dernière distance étant du second ordre (15), l'angle BMA est du second ordre. Ainsi les angles BMA, CMD sont deux infiniment petits égaux du second ordre.

Les deux faces de ce dièdre BMKA tendent à se joindre au plan rectifiant puisque MK, par hypothèse, est une droite de ce plan, et que MA et MB finissent par se réunir à MT, qui en est une autre. Les angles BMC, AMD, respectivement situés sur ces deux faces, tendent donc à tomber dans le plan rectifiant.

En résumé donc, d'une part les angles BMA et CMD sont des angles du second ordre, égaux comme infiniment petits, situés à la limite dans le plan osculateur, et d'autre part les angles BMC, AMD tendent à tomber dans le plan rectifiant. De ces deux derniers angles le premier est d'un ordre supérieur au second ou du second ordre seulement selon que MK est ou n'est pas la rectifiante, et nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour montrer que le second est, avec lui, du second ordre ou d'un ordre supérieur, ce qui est le but que nous avons en vue.

Les droites MA, MB, MC, MD tendant toutes quatre à se réunir à MT, un plan perpendiculaire à cette tangente les coupe respectivement en des points a, b, c, d tels, que les longueurs ba, cd, bc, ad sont proportionnelles aux angles BMA, CMD, BMC, AMD, par quoi ba, cd sont des grandeurs du second ordre, bc une grandeur du second ordre ou d'un ordre plus élevé, et tout est ramené à montrer que bc et ad sont ensemble du second ordre, ou ensemble d'un ordre plus élevé. Or il suit de la construction et de notre résumé de tout à l'heure que ba et cd sont parallèles entre eux à la limite, et au plan osculateur; que bc et ad sont parallèles entre eux et au plan rectifiant, et alors le quadrilatère $bcda$ (même figure 102) tend à devenir un rectangle. Tirons la diagonale ca. Si bc est du second ordre, les

(*) Dans la figure tirer en pensée la droite MA, qui y a été omise.

angles c et a du triangle abc sont finis puisque ba et bc sont alors de même ordre, par quoi leur rapport est fini. Le rapport des angles a et c du triangle adc, respectivement égaux aux deux angles que l'on vient de considérer, est dès lors fini, donc aussi celui des côtés ad et cd de ce triangle, par quoi ad est du second ordre comme cd. Mais si bc est d'un ordre supérieur au second, donc à l'ordre de ba, l'angle bac tend vers zéro, donc aussi l'angle acd à cause du parallélisme final de ba et cd, et alors le même rapport, celui des longueurs ad et cd, tend vers zéro. Par là ad est infiniment petit comparé à cd, donc d'ordre supérieur au second.

155. Nous supposons maintenant que MK est la droite rectifiante. Par un point E (fig. 103) de MT menons un plan perpendiculaire à cette droite. Ce plan contient la normale en E à la surface lieu des tangentes puisque la droite MT, dans toute son étendue, donc aussi au point E, est tangente à la surface. La section qu'il détermine sur la surface est donc une section normale au point E. Appelant S le point où elle est traversée par la rectifiante, la droite ES est la normale en question en tant que perpendiculaire à MT et située dans le plan rectifiant en M à la ligne primitive, par quoi elle est perpendiculaire en E au plan osculateur, lequel est tangent en ce point à la surface, comme il l'est dans toute l'étendue de MT. Menons encore par le point E un plan perpendiculaire à la rectifiante; il est traversé par cette droite en un point que nous nommerons V, il coupe le plan osculateur en M à la ligne primitive selon une perpendiculaire à MT, et la section qu'il détermine sur la surface lieu des tangentes est une section oblique au point E, le plan sécant ne contenant pas la normale ES. Enfin ce plan coupe le cône rond osculateur le long de la tangente MT selon un cercle de centre V et de rayon VE. Or les centres de courbure des deux sections au point E sont, on va le reconnaître, les points S et V.

Considérons en premier lieu la section oblique. Le plan de cette section coupe la tangente M′T′ en un point que rien n'empêche d'être le point A du numéro précédent, puisque A était un point quelconque de cette tangente. Il coupe en un point F (fig. 103) la génératrice MD du cône située dans le plan KMA, et de toutes les génératrices du cône celle qui passe le plus près de A. La longueur AF est d'ordre supérieur au second parce que c'est là le cas de l'angle AMD quand MK est la rectifiante (voir le numéro précédent), et parce que le point F est sur la droite MD. Or AF est la distance du point A de la section oblique au cercle selon lequel le cône est coupé par le plan de cette section. Dès lors, comme AE est du premier ordre puisque l'angle des tangentes MT, M′T′, sur lesquelles sont les points E et A, est du premier ordre, ce cercle est le cercle osculateur de la section oblique en son point E. V et VE sont le centre et le rayon de courbure de la section en ce point.

Venons en maintenant à la section normale.

Remarque préliminaire. — Concevons une section faite par un plan quelconque dans la surface lieu des tangentes. Les plans osculateurs de la ligne primitive, en leur qualité de plans tangents à la surface tout le long d'une géneratrice, sont tangents à la section, dont les tangentes sont, par suite, les intersections du plan sécant par ces plans osculateurs. Dès lors, si O est un point de la section et que, par O, on mène une parallèle à la binormale qui correspond au point O, c'est-à-dire qui correspond à celle des tangentes de la ligne primitive sur laquelle est le point O, la projection de cette parallèle sur le plan sécant sera la normale en O à la section, puisque les binormales sont perpendiculaires aux plans osculateurs, ce qui fait que la projection sera perpendiculaire à l'intersection des deux plans, le plan sécant et le plan osculateur, c'est-à-dire à la tangente à la section.

Ceci acquis, supposons le plan sécant perpendiculaire à MT, donc parallèle au plan normal en M. Soit E′ (fig. 104) le point où M′T′ est coupé par le plan sécant, qui coupe MT au point E. Par E et E′ menons EH et E′H′ parallèles respectivement aux binormales en M et M′: ces parallèles font entre elles l'angle η, c'est-à-dire l'angle des plans osculateurs en M et M′. EH est situé dans le plan sécant et est la normale à la section en son point E. La projection E′I de E′H′ sur le plan sécant est, d'après notre remarque préliminaire, la normale en E′ à la section, et la limite de l'intersection J des deux normales est le centre de courbure de la section en son point E. Or l'angle que fait E′H′ avec sa projection E′I sur le plan sécant est du second ordre en tant qu'égal à l'inclinaison de la binormale en M′ sur le plan normal en M, laquelle est du second ordre (82), et il suit de là que l'angle EJE′ est égal, en tant qu'infiniment petit, à l'angle de EH et E′H′, donc à η. Conséquemment si l'on nomme r le rayon de courbure de la section en son point E, c'est-à-dire la limite de la longueur EJ, on a $EE' = r\eta$ puisque EJ est normal au plan osculateur et que l'arc EE′ est tangent à ce plan. Mais cet arc étant perpendiculaire à MT, il est égal encore au produit de l'angle ε des tangentes MT, M′T′ par la longueur ME. La valeur de r que fournit la relation que l'on obtient en égalant ces deux expressions de EE′ est $r = ME\frac{\varepsilon}{\eta}$. Le rapport $\frac{\varepsilon}{\eta}$ étant la tangente de l'angle que fait MT avec la rectifiante (147), cette valeur de r est égale à la partie, comprise entre la tangente et la rectifiante, de la perpendiculaire élevée en E à la tangente. La limite de J est donc sur la rectifiante, et le point S de la figure 103 est le centre de courbure, au point E, de la section faite dans la surface lieu des tangentes par le plan perpendiculaire en E à la tangente MT.

Le rayon r tend vers zéro quand on fait tendre le point E vers M. Il est dès lors nul au point M, ce que nous savions déjà par le N° 91.

156. Les deux résultats obtenus dans le numéro que l'on vient de lire se déduisent l'un de l'autre à l'aide du théorème de Meusnier (*) qui consiste en ce que si par une tangente à une surface on mène deux plans, l'un normal à la surface et l'autre oblique, le rayon de courbure de la section oblique au point de contact de la tangente avec la surface est la projection, sur son plan, du rayon de courbure de la section normale au même point.

D'après cette proposition le rayon de courbure de la section normale est le rayon de courbure de la section oblique divisé par le cosinus de l'angle des deux plans sécants, ou, ce qui revient au même, de l'angle des deux rayons. Ayant obtenu EV, fig. 103, pour rayon de courbure, en son point E, de la section perpendiculaire à MK, celui de la section normale s'obtient donc en divisant EV par le cosinus de l'angle VES, ce qui donne bien ES, puisque l'angle EVS est droit.

(*) *Mémoires de math. et de phys. présentés à l'Acad. des sc. (de Paris),* t. X, p. 489.

* Voici, du théorème de Meusnier, une démonstration dont j'emprunte le principe aux *Eléments de calcul infinitésimal* de Duhamel.

BAC et DAE (fig. 105) étant deux sections, la première normale et l'autre oblique, faites par deux plans menés suivant une même tangente en un point A d'une surface, soient B, C, D, E les points où elles sont coupées par un plan parallèle au plan tangent en A à la surface. Soient AP, AQ les normales en A aux deux sections, P et Q étant les points où elles rencontrent les cordes BC, DE; elles coupent ces cordes à angles droits, l'angle APQ est droit, et l'angle PAQ est celui des plans des deux sections. Concevons que le plan BCED se rapproche indéfiniment du plan tangent en A en lui restant constamment parallèle. Considérant l'arc BAC comme du premier ordre, AP est du second, donc aussi PQ puisque l'angle PAQ est fini, et alors les cordes de nos deux arcs, donc les arcs eux-mêmes, sont des infiniment petits égaux.

Appelant ρ et ρ' les rayons de courbure, au point A, des arcs BAC, DAE respectivement, on a (N° 34, *Remarque*), ces arcs étant égaux, $\frac{AP}{AQ} = \frac{\rho'}{\rho}$. Appelant ω l'angle des plans des deux sections, le premier membre de cette relation vaut $\cos\omega$ puisque l'angle APQ est droit. On a ainsi $\frac{\rho'}{\rho} = \cos\omega$, d'où le théorème.

L'angle trièdre de la tangente, de la binormale, et de la normale principale.

157. Pour introduire la notion de l'*axe instantané de rotation*, l'intelligence de cet article exigeant que le lecteur la possède, représentons-nous une surface polyédrale dont les arêtes soient les côtés, indéfiniment prolongés de part et d'autre, d'une ligne polygonale, que nous supposerons inscrite dans une courbe non plane (telle est la surface que montre la figure 68, tracée pour la lecture du N° 108), et concevons qu'un plan roule sur elle sans glisser. Couché d'abord sur l'une des faces de la surface polyédrale et prenant pour axe de rotation l'une des deux arêtes par lesquelles cette face est bornée, le plan tourne autour de cette arête et vient se poser sur la seconde des deux faces qu'elle limite, ayant tourné de l'angle des plans de ces deux faces. Prenant maintenant pour axe de rotation l'arête suivante, le plan vient de même se poser sur une troisième face, ayant tourné de l'inclinaison de cette nouvelle face sur celle qu'il vient de quitter. Et ainsi de suite. Faisons croître indéfiniment le nombre des sommets de la ligne polygonale, et cela de telle sorte que la distance de deux d'entre eux consécutifs quelconques tende vers zéro : l'angle de deux arêtes est celui de deux faces consécutives de la surface décroîtront sans autre limite que zéro. Il en sera de même des angles dont le plan roulant tournera autour de chaque arête pour passer d'une face à la suivante, et, par conséquent, des durées des rotations correspondantes. A la limite les arêtes, devenues les tangentes d'une courbe non plane, seront des *axes instantanés de rotation* pour le plan roulant sur la surface lieu de ces tangentes.

Si deux surfaces cylindriques ou si deux snrfaces coniques roulent l'une sur l'autre de façon à se toucher constamment le long d'une génératrice, cette génératrice de contact sera à tout instant, pour l'une et pour l'autre surface, un axe instantané de rotation.

158. Quand on étale sur un plan la surface rectifiante la courbe se transforme en droite; ses tangentes viennent toutes se ranger dans une droite unique et ses plans osculateurs dans un plan unique; ses binormales se disposent toutes dans un même plan en droites parallèles entre elles, et ses normales principales pareillement. Tel est l'effet du développement de la surface rectifiante. Or ce développement consiste en une série de rotations instantanées autour des génératrices de la surface, savoir autour des diverses droites rectifiantes. Ainsi, par une rotation instantanée autour de la droite rectifiante en M, la tangente et le plan osculateur en ce point viennent s'appliquer sur la tangente et sur le plan osculateur en le point infiniment voisin M′, par quoi la normale principale et la binormale en M viennent se ranger parallèlement à la normale principale et à la binormale en M′. Cette observation conduit à un théorème remarquable qui actuellement va nous occuper.

159. Soient *oabc*, *oa′b′c′* deux positions d'un angle trièdre de sommet *o*, mobile autour de ce sommet, que l'on supposera fixe. Les plans bissecteurs des angles *aoa′*, *bob′*, *coc′*, perpendiculaires respectivement aux plans de ces angles, se coupent suivant une même droite passant par *o*, et une simple rotation autour de cette intersection commune des trois plans porte, on le voit, l'angle trièdre de l'une à l'autre des deux positions.

Considérons maintenant un arc quelconque d'une courbe non plane. Par un point O menons des parallèles à toutes ses tangentes, à toutes ses binormales, à toutes ses normales principales, à toutes ses droites rectifiantes; nous formerons par là quatre cônes ayant tous le point O pour sommet. Ils seront appelés T, B, P, et R, respectivement. Soit M l'origine de l'arc considéré, et soient OT, OB, OP, OR, les parallèles menées par O à la tangente, à la binormale, à la normale principale, à la droite rectifiante, du point M : le plan TOB est parallèle au plan rectifiant en M, et il est tangent au cône R suivant OR (100). Concevons que l'on fasse rouler le plan TOB sur le cône R, après lui avoir invariablement lié les trois droites OT, OB, OP : ces droites seront entraînés dans son mouvement, et elles parcourront, respectivement, les cônes T, B et P. Nous allons établir cette propriété du cône R.

Il est évident d'abord que la droite OP parcourra le cône P, car soit N un point quelconque de l'arc considéré : lorsque le plan roulant TOB sera devenu tangent au cône R suivant la parallèle menée par O à la droite rectifiante en N, il sera parallèle au plan rectifiant en N, et dès lors la droite OP sera devenue parallèle à la normale principale en N, et coïncidera conséquemment avec celle des droites menées par O qui a été tirée parallèlement à cette normale.

Puisque OP décrit le cône P, OT ne saurait évidemment décrire le cône T sans que OB décrive le cône B, et réciproquement.

Soient OT′, OB′, OP′ les parallèles menées par O à la tangente, à la binormale, à la normale principale, en M′. Les deux angles trièdres OTBP, OT′B′P′ sont identiques, on les peut donc faire coïncider. Comme d'ailleurs ils sont de même sommet la coïncidence s'obtiendra au moyen d'une rotation autour d'un axe passant par le sommet commun, et cet axe est un axe instantané de rotatien si l'angle trièdre

OTBP doit passer successivement par une série de positions de sommet O infiniment voisines dont OT'B'P' serait la première. Nous allons chercher quel est cet axe instantané, et nous trouverons qu'il n'est autre que la droite OR (*).

D'abord, pour amener la droite OT à coïncider avec la droite OT' il faut nécessairement prendre l'axe de rotation dans le plan bissecteur de l'angle de ces deux droites. Appelons A ce plan. Il est perpendiculaire à celui de l'angle, donc, à la limite, au plan osculateur en M, auquel le plan de l'angle tend à devenir parallèle. Et puisque le plan A renferme la bissectrice de l'angle des deux droites et que celles-ci tendent à se confondre, il contient OT à la limite. Il finit dès lors par se confondre lui-même avec le plan TOB, qui est perpendiculaire au plan osculateur et qui contient OT. Ainsi, déjà, l'axe instantané dont nous cherchons à déterminer la position est situé dans le plan TOB.

La condition que OB doit venir se placer sur OB' nous aurait conduit sans plus de peine à ce résultat. Le raisonnement eût été fondé sur ce que le plan de ces deux droites, d'après ce qu'on a vu au N° 82, est parallèle à la limite au plan normal en M, qui l'est, lui, au plan BOP.

Considérant les deux droites OP, OP', soit OU une normale à leur plan et soit OV la bissectrice de leur angle. Pour amener OP' à coïncider avec OP on est obligé de prendre l'axe de rotation dans le plan UOV, qui est le plan bissecteur de l'angle des deux droites. Or OV finit par se confondre avec OP puisque l'angle POP' est nul à la limite, et quant à OU il fait un angle infiniment petit avec OR (147). L'axe instantané de rotation est en conséquence situé dans le plan POR. Ce plan coupe le plan TOB, dans lequel aussi on a vu que se trouve l'axe, suivant la droite OR. L'axe instantané de rotation cherché se confond par conséquent avec OR.

Ce point acquis, marquons sur l'arc considéré une suite M, M', M'', etc., de points tels que chacun d'eux soit très voisin du suivant. Soient OT, OT', OT'', etc., OB, OB', etc., OP, OP', etc., les parallèles

(*) Voir dans le recueil *Archiv der Mathematik und Physik*, Theil 56, 1874, le travail du Dr Hoppe intitulé *Prinzipien der analytischen Curventheorie.*

menées par O aux tangentes, aux binormales, aux normales principales, en M, M′, M″, etc. Proposons-nous de faire coïncider l'angle trièdre Otbp successivement avec les angles trièdres Ot′b′p′, Ot″b″p″, etc. : ces coïncidences pourront être réalisées au moyen de simples rotations autour d'axes successifs Oq, Oq′, etc. ; or Oq fait un angle très petit avec le plan tOb, puisque, d'après ce qu'on a vu tout à l'heure, il se confondrait à la limite avec Or si l'arc MM′ était infiniment petit, et que Or est situé dans le plan tOb. De même, Oq′ fait un angle très petit avec le plan t′Ob′, et ainsi de suite. Il résulte de là que le plan tOb, lorsqu'il vient coïncider successivement avec les plans t′Ob′, t″Ob″, etc., tourne chaque fois autour d'un axe qui fait avec lui un angle très petit. Concevons que chacun de ces axes de rotation soit double, c'est-à-dire formé de deux droites coïncidentes, l'une desquelles sera fixe, tandis que l'autre deviendra liée au plan tOb aussitôt qu'il aura tourné autour d'elle, et par conséquent sera entraînée dans son mouvement lorsqu'il tournera autour des axes suivants : les droites fixes sont les arêtes d'une surface pyramidale H, et, lorsque le mouvement sera achevé, les droites mobiles seront les arêtes d'une surface pyramidale K dont les faces sont respectivement égales à celles de la surface H, et dont les arêtes font toutes des angles très petits avec le plan tOb dans sa dernière position. Effectuons maintenant le mouvement contraire, amenant l'angle trièdre Otbp, qui est venu coïncider avec le dernier des angles trièdres, à coïncider avec l'avant-dernier, puis avec le précédent, et ainsi de suite, et enfin à reprendre sa position première, entraînant avec lui, pendant tout le cours de ce mouvement, la surface K : les diverses faces de K viendront s'appliquer l'une après l'autre sur les faces correspondantes de H, en sorte que le mouvement sera effectué par le roulement de la première de ces deux surfaces sur la seconde. Une fois ce mouvement achevé, les arêtes de K feront toutes de très petits angles avec le plan tOb dans sa position primitive. Si maintenant nous voulons de nouveau faire coïncider l'angle trièdre Otbp successivement avec Ot′b′p′, Ot″b″p″, etc., il suffira de faire rouler la surface K sur la surface fixe H. Ceci posé, augmentons indéfiniment le nombre des points de division M, M′, M″, etc., de l'arc de courbe considéré : le nombre des arêtes de la surface pyramidale H ira croissant indéfiniment, et à la limite cette surface se confondra avec le cône R, puisque l'axe instantané de rotation est toujours une des génératrices de ce cône. D'un autre côté, la surface pyramidale K tendra à se confondre avec le plan tOB, puisque chacune de ses arêtes fait avec ce plan un angle aussi petit que l'on veut. Il est démontré par là que si l'on fait rouler le plan tOB sur le cône R, les droites OT, OB, OP décrivent respectivement les cônes, T, B et P.

160. Proposons-nous de trouver l'expression de la rotation instantanée autour de OR qui porte l'angle trièdre OTBP sur OT'B'P' infiniment voisin. Cette rotation a pour effet d'amener l'une sur l'autre les droites OP, OP', parallèles à deux normales principales infiniment voisines, et la droite OR, autour de quoi elle s'effectue, est perpendiculaire au plan limite de ces parallèles. La rotation considérée est par suite égale à l'angle de ces deux normales, angle dont l'expression a été obtenue au No 77.

De l'hélice osculatrice.

§ 1. *Notions préliminaires sur l'hélice.*

161. Si sur une surface cylindrique on enroule un plan, une droite préalablement tracée sur ce plan se transforme en une ligne non plane qu'on appelle *hélice*. De cette définition et du No 37, 2e alinéa, il résulte que les tangentes de l'hélice sont toutes également inclinées sur la section droite du cylindre. En d'autres termes, si par un point O l'on mène des parallèles à toutes les tangentes de l'hélice, le cône dont ces parallèles sont les génératrices sera un cône de révolution ou cône rond dont l'axe est parallèle aux génératrices du cylindre. Nous appellerons C ce cône.

Réciproquement, une courbe est une hélice si ses tangentes sont toutes également inclinées sur un même plan A. Que de chacun de ses points en effet, on mène une normale à ce plan; l'ensemble de ces normales constituera une surface cylindrique sur laquelle est tracée la courbe donnée. Que l'on développe le cylindre sur l'un de ses plans tangents : le développement n'altérant point les angles que les tangentes font avec le plan A, il transformera en une droite la courbe donnée, laquelle dès lors peut être tenue pour la trace déposée sur un cylindre par un plan sur lequel on aurait tiré une droite et que l'on aurait enroulé sur le cylindre avant que l'encre de la droite fût sèche, c'est-à-dire qu'elle est une hélice.

162. Les plans osculateurs de l'hélice sont (43) parallèles aux plans tangents du cône que nous venons de nommer le cône C. Ils font par conséquent avec la section droite du cylindre le même angle que les tangentes. On peut encore énoncer cette proposition en disant que si l'on a rendu horizontal le plan de la section droite du cylindre, la tangente en un point de l'hélice est, sur le plan osculateur au même point, une ligne de plus grande pente.

163. La normale principale est perpendiculaire à la tangente et elle est contenue dans le plan osculateur. La normale principale en un point A de l'hélice est donc perpendiculaire à la direction de celle des génératrices du cône C qui correspond au point A, et elle est parallèle au plan tangent au cône suivant cette génératrice. Dès lors elle est perpendiculaire à l'axe du cône, et par suite aux génératrices du cylindre. La normale principale étant perpendiculaire à la tangente et à la génératrice au point A, elle est normale au plan que déterminent ces deux droites, c'est-à-dire au plan tangent en A au cylindre (*).

164. Les normales principales d'une hélice sont ainsi parallèles à un même plan, au plan d'une section droite du cylindre. La réciproque est vraie ; quand les normales principales d'une courbe sont parallèles à un même plan la courbe est une hélice. Car en chacun de ses points la droite rectifiante est perpendiculaire à ce plan, puisque cette droite est parallèle à la commune perpendiculaire à deux normales principales infiniment voisines, laquelle est perpendiculaire à un plan parallèle à ces deux normales. Les droites rectifiantes formant ainsi une surface cylindrique, la courbe est une hélice, puisque le développement de cette surface la transforme en une droite en sa qualité de surface rectifiante.

(*) Cette proposition est d'ailleurs une conséquence immédiate de la propriété des lignes géodésiques que nous avons appris à connaître au N° 140 ; car l'hélice est, sur le cylindre, une ligne géodésique, comme il résulte clairement de son mode de génération.

165. Le plan rectifiant est perpendiculaire à la normale principale. Celle-ci dans l'hélice étant perpendiculaire au plan tangent à la surface cylindrique, ce plan est identique au plan rectifiant. Dès lors la droite rectifiante qui, par définition, est l'intersection des plans rectifiants en deux points de la courbe infiniment voisins, se confond dans l'hélice avec la génératrice du cylindre, puisque cette génératrice est la limite de l'intersection des plans tangents au cylindre en deux points qui tendent à se réunir. Il suit de là que la surface rectifiante de l'hélice n'est autre que la surface cylindrique elle-même, ce qui est d'ailleurs une conséquence immédiate de la définition de l'hélice donnée dans le premier numéro de ce paragraphe.

166. Soient R, S les rayons de courbure et de torsion en un point A de l'hélice, et r le rayon de courbure d'une section droite du cylindre, au point a situé sur la génératrice qui passe par A. Nous aurons besoin de connaître les rapports $\frac{R}{r}$ et $\frac{R}{S}$. Ils sont, comme on va voir, invariables sur une hélice donnée, et égaux à $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ et à $\operatorname{tang}\alpha$, α désignant l'inclinaison constante des tangentes et des plans osculateurs de l'hélice sur le plan de la section droite.

Soient A′ sur l'hélice et a' sur la section droite les points situés sur une génératrice infiniment voisine de celle qui contient A et a; on a évidemment

$$\frac{\text{arc}\,AA'}{\text{arc}\,aa'}=\frac{1}{\cos\alpha}.$$

Appelons P, P′ les génératrices du cône C parallèles aux tangentes à l'hélice en A et en A′, et p, p' les parallèles menées par le point O, sommet du cône, aux tangentes en a et en a' à la section droite : p et p' sont les projections de P et de P′ sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône, et l'on obtient sans peine, au moyen de la sphère de rayon unité qui a pour centre le point O, la relation

$$\lim\frac{\text{angle}\,POP'}{\text{angle}\,pOp'}=\cos\alpha.$$

Divisant la précédente égalité par celle-ci, le quotient des premiers membres est $\frac{R}{r}$. La division des seconds membres donnant $\frac{1}{\cos^2\alpha}$, on a

$$\frac{R}{r} = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \tag{1}$$

Pour obtenir l'expression du rapport $\frac{R}{S}$, par O menons des droites normales aux plans tangents du cône C; ces droites sont normales en même temps aux plans osculateurs de l'hélice, et leur ensemble constitue un cône rond qui a même axe que le cône C. Soient Q et Q′ les génératrices de ce nouveau cône perpendiculaires aux plans tangents du cône C suivant les droites P et P′ : l'angle QOQ′ est l'angle de torsion de l'arc AA′. Les génératrices P et Q sont à angle droit, et leur plan contient l'axe commun des deux cônes; il en est de même des génératrices P′ et Q′. Alors on trouve aisément, à l'aide de la sphère utilisée tout à l'heure,

$$\lim \frac{\text{angle QOQ}'}{\text{angle POP}'} = \operatorname{tang}\alpha.$$

Ce résultat pouvait être prévu. Nous avons trouvé au N° 147 que l'angle de la tangente et de la droite rectifiante a pour tangente la limite du rapport $\frac{\varepsilon}{\eta}$. Or dans l'hélice la droite rectifiante étant la génératrice du cylindre, cet angle est précisément le complément de l'angle α, ce qui fait que $\operatorname{tang}\alpha$ est égal à la limite du rapport inverse, donc à la limite du rapport de l'angle de torsion à celui de contingence, ainsi que nous venons de l'obtenir directement.

Le premier membre de la dernière relation étant égal à $\frac{R}{S}$, on a

$$\frac{R}{S} = \operatorname{tang}\alpha, \tag{2}$$

d'où l'on tire $\cos^2\alpha = \frac{S^2}{{}^2R + S^2}$, valeur qui, mise dans (1), donne

$$r = \frac{RS^2}{R^2 + S^2}. \tag{3}$$

Cette formule peut se déduire, comme cas particulier, ainsi que la formule (2), des résultats obtenus aux N^os 78 et 80 ci-dessus. Les normales principales de l'hélice étant perpendiculaires aux plans tangents du cylindre (163), donc parallèles au plan de la section droite, la commune perpendiculaire des normales en A et en A′ est perpendiculaire à ce dernier plan, donc parallèle aux génératrices du cylindre, en sorte que l'angle γ du N° 78 est, dans l'hélice, celui que forme la tangente avec la direction de ces génératrices, d'où il suit que α est le complément de cet angle γ, ce qui fait que l'équation finale du N° 78, en y mettant $\frac{\pi}{2}-\alpha$, R, S, au lieu de γ, ρ, σ, doit reproduire la formule (2), et c'est bien ce qui arrive. Maintenant, appelons U, V les points où les normales principales à l'hélice en A et en A′ sont coupées par leur commune perpendiculaire, et h l'intersection des normales en a et en a' à la section droite. Ces deux dernières normales étant les projections des normales principales en A et en A′ à l'hélice et celles-ci étant parallèles à leurs projections, la droite UV prolongée au besoin va passer par h, d'où il suit qu'on a $AU = ah$. Or la limite de ah est r, et celle de AU est la longueur appelée MD au N° 80. Si donc dans ce numéro on remplace MD, ρ et σ par r, R et S, on doit retrouver la formule (3) ci-dessus, et c'est en effet ce qui a lieu.

Des relations (1) et (2) on déduit

$$S = \frac{r}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2r}{\sin 2\alpha};$$

ainsi dans l'hélice la courbure $\frac{1}{R}$ et la torsion $\frac{1}{S}$ sont données par les formules

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{r}, \qquad \frac{1}{S} = \frac{\sin 2\alpha}{2r},$$

lesquelles nous apprennent :

1° Que la courbure et la torsion sont inversement proportionnelles au rayon r.

2° Que ces deux grandeurs sont égales entre elles et à $\frac{1}{2r}$ lorsque α est un demi angle droit. La formule (2), pouvant s'écrire $\frac{1}{S}:\frac{1}{R} = \operatorname{tang}\alpha$, montre d'ailleurs que la courbure est plus grande ou plus petite que la torsion suivant que α est plus petit ou plus grand qu'un demi angle droit.

3° Que la courbure va diminuant sans autre limite que zéro lorsqu'on fait croître α, par quoi l'hélice s'allonge de plus en plus sur le cylindre.

4° Que la torsion atteint sa valeur maximum lorsque α est la moitié d'un angle droit. Elle va croissant avec α lorsque cet angle varie de zéro à un demi droit, et elle décroît lorsqu'il varie d'un demi droit à un droit. Elle est la même pour deux valeurs de α qui diffèrent également d'un demi droit, l'une en plus, l'autre en moins. Elle s'annule aux deux limites, c'est-à-dire pour $\alpha = 0$ et $\alpha =$ un droit; c'est que dans ces deux cas on a une ligne plane et non plus une hélice.

167. Le rapport des rayons de courbure et de torsion est constant dans une hélice d'après la relation (2). Réciproquement une courbe est une hélice quand ce rapport y est constant. En effet, l'angle des droites rectifiantes en deux points d'une courbe infiniment voisins est $\Delta\gamma$ (151), où γ désigne (78) l'angle dont la tangente est égale à $\frac{\sigma}{\rho}$, donc à l'inverse du rapport en question. Ce rapport étant supposé constant son inverse l'est de même, $\Delta\gamma$ est nul, les droites rectifiantes sont parallèles entre elles par la proposition du N° 151 qui vient d'être rappelée, la surface rectifiante est un cylindre, et la courbe est une hélice.

168. Remarquons encore que toute développante d'une hélice est une ligne plane tracée dans un plan perpendiculaire aux génératrices du cylindre, ou, en d'autres termes, dans le plan d'une section droite. En effet, les normales principales d'une hélice étant perpendiculaires à ces génératrices (163), elles sont parallèles au plan d'une section droite, d'où il suit (141) que les tangentes d'une développante sont parallèles à ce plan. Et de là résulte la double proposition, car les tangentes d'une courbe ne sauraient être parallèles à un plan A sans êtres contenues toutes dans un même plan parallèle à ce plan A.

Elle est d'ailleurs une conséquence de la définition de l'hélice. Cette courbe, en effet, est la transformée d'une droite préalablement tirée dans un plan que l'on enroulera sur une surface cylindrique. Or ses développantes sont les courbes que décrivent pendant l'enroulement les divers points de cette droite, et chacun d'eux, on le voit, se maintient constamment dans un même plan perpendiculaire aux génératrices du cylindre, ce qui donne le théorème.

§ 2. *De l'hélice tracée sur un cylindre de révolution.*

L'hélice tracée sur un cylindre de révolution ou cylindre rond est une ligne éminemment simple entre les lignes non planes, car elle reste la même en tous ses points. A ce titre il y a intérêt à la mettre en contact aussi intime que possible avec les autres lignes non planes, de même que nous avons mis le plan et la sphère en contact aussi intime que possible avec une ligne non plane quelconque. Ce sera l'objet des deux paragraphes suivants, et dans celui-ci nous présenterons sur cette hélice quelques observations préliminaires.

169. La normale principale dans toute hélice est perpendiculaire au plan tangent au cylindre (163). Il suit de là que dans l'hélice tracée sur un cylindre à section droite circulaire l'axe du cylindre rencontre toutes les normales principales, et il les coupe à angle droit. On voit que la ligne de striction de la surface lieu de ces normales coïncide avec cet axe.

170. Dans l'hélice qui nous occupe les rayons R et S sont constants, et tous les résultats du précédent paragraphe lui sont applicables pourvu que r représente le rayon du cylindre sur lequel elle est tracée. La formule (1) du N° 166 montre que pour que l'on puisse tracer sur un cylindre rond d'un rayon donné r une hélice d'un rayon de courbure donné R, il est nécessaire et suffisant d'avoir $r < \mathrm{R}$. Supposons cette condition remplie; alors on aura $\cos^2\alpha = \frac{r}{\mathrm{R}}$, relation qui ne fournit qu'une seule valeur de α, car cet angle est compris entre zéro et l'angle droit, et par conséquent qu'une seule hélice.

Toutefois il existe deux hélices qui satisfont à la question; elles sont enroulées sur le cylindre l'une dans un sens, l'autre dans l'autre. On ne peut pas les faire coïncider, elles sont symétriques relativement à un certain plan qui passe par l'axe du cylindre, et se coupent en deux séries de points situés sur les deux génératrices que renferme ce plan.

171. Si R et S sont donnés, les formules (2) et (3) du N° 166 fournissent un système de valeurs de r et de α, et ce système est unique. Il est donc toujours possible de construire une hélice de rayons de courbure et de torsion donnés, et le problème n'a qu'une solution, sauf la remarque qui termine le dernier numéro.

172. Une courbe ne saurait avoir ses rayons de courbure et de torsion constants l'un et l'autre sans être une hélice d'un cylindre rond. D'abord une telle courbe est une hélice puisque le rapport de ses deux courbures est constant (167). Puis, étant une hélice, c'est à un cylindre rond qu'elle appartient, car le rayon de courbure de l'hélice, on l'a vu au paragraphe précédent, est proportionnel à celui de la section droite du cylindre, lequel dès lors est constant puisque celui de l'hélice est supposé constant, par quoi cette section est un cercle, et le cylindre est un cylindre rond.

§ 3. *L'hélice mise en contact avec une autre courbe non plane quelconque.*

Il s'agit, bien entendu, de l'hélice tracée sur un cylindre rond, la seule qui nous doive occuper désormais.

173. Lorsque deux courbes ont un point commun, leur distance dans le voisinage de ce point est réduite à son minimum si elles y ont même tangente et même plan osculateur. Il faut de plus disposer les deux courbes de manière qu'elles soient situées, dans les environs du point commun, du même côté du plan rectifiant; mais avec cela la distance est encore du deuxième ordre, à moins que les centres de courbure des deux courbes ne se trouvent coïncider, auquel cas elle tombe au troisième ordre. Nous supposerons donc que l'hélice mise en contact avec une courbe ait avec elle au point commun même tangente, même plan osculateur, même centre de courbure, et, par conséquent, même rayon de courbure ρ. Il y a une infinité d'hélices qui satisfont à cette dernière condition, ce sont celles où r et α sont liés par la relation que l'on déduit de l'égalité (1) du N° 166 en y substituant ρ à R. Le contact étant en M, soit N' le point où l'hélice est coupée par le plan que déterminent le point M′ et la polaire relative au point M : nous compterons la distance de M′ à l'hélice suivant M′N′. Le plan rectifiant et le plan osculateur, qui sont communs aux deux courbes, forment par leur intersection quatre dièdres droits, et pour rendre M′N′ aussi petit qu'il peut l'être avec des valeurs données des éléments r et α, il faut, entre les deux hélices symétriques correspondantes à ces valeurs, choisir celle qui satisfait à cette condition que le point N′ soit situé dans celui des quatre dièdres où se trouve le point M′. Supposons que cette précaution ait été prise, et cherchons l'ordre infinitésimal de M′N′.

Le plan mené tout à l'heure par M′ et par la polaire du point M coupe les projections de la courbe donnée et de l'hélice sur le plan osculateur commun en des points m' et n' (fig. 106) qui sont les projections de M′ et de N′. Il coupe la tangente et le cercle osculateur communs en des points qui seront appelés t et k. Soit enfin c le pied de la perpendiculaire abaissée de N′ sur M′m'. Le triangle M′N′c étant rectangle en c, il donne

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{M'N'} = \sqrt{\overline{\mathrm{N'}c}^2 + \overline{\mathrm{M'}c}^2}.$$

A cause de $\mathrm{N'}c = m'n'$ on a

$$\mathrm{N'}c = m'k - n'k;$$

or $m'k$ et $n'k$ sont précisément les distances des points m', n' au cercle osculateur en M commun à la courbe donnée, à l'hélice, et à leurs projections. Il résulte de là que $m'k$ a pour expression $\frac{1}{6}\varepsilon^2\Delta\rho$ (74), quantité du troisième ordre. Nous allons faire voir que $n'k$ est d'un ordre supérieur au troisième, et qu'il doit par conséquent être négligé.

D'après la proposition du N° 73 la différence entre les rayons de courbure en N′ à l'hélice et en n' à sa projection sur le plan osculateur est une quantité du deuxième ordre qui a pour expression $\frac{1}{2}\rho\eta^2$, η se rapportant ici à l'hélice. Or le rayon de courbure ne variant pas d'un point de l'hélice à un autre, il est en N′ égal à ρ. Mais le rayon de courbure de la projection de l'hélice est égal à ρ au point M; donc sur cette projection le rayon de courbure ne varie du point M au point n' que d'une quantité du deuxième ordre. Il suit de là, et de la remarque qui termine le N° 25, que la distance $n'k$ est du quatrième ordre au moins, donc d'un ordre supérieur au troisième. C'est là ce qu'il s'agissait de faire voir, et l'on a par conséquent

$$N'c = \frac{1}{6}\varepsilon^2\Delta\rho.$$

Telle est la valeur de la première des deux quantités qui figurent au second membre de la relation (1) ci-dessus. L'autre ne saurait être d'un ordre inférieur au troisième, car elle est égale à la différence des deux grandeurs $M'm'$ et $N'n'$ qui sont du troisième ordre toutes deux (63).

La distance de M' à l'hélice est donc du troisième ordre dans toutes les hélices qui ont avec la courbe le cercle osculateur commun.

§ 4. *Définition de l'hélice osculatrice ; expression de sa distance à la courbe dans le voisinage du point de contact ; situation de l'axe de son cylindre.*

174. Il existe ainsi une infinité d'hélices dont la distance à M' est du troisième ordre, et il n'en est aucune où cette distance soit d'un ordre supérieur. Toutefois l'une de ces hélices est, sinon infiniment plus voisine, du moins plus voisine de M' que toutes les autres. On la nomme par extension *hélice osculatrice,* et nous l'obtiendrons tout à l'heure en réduisant à son minimum la valeur de M'N' donnée par la relation (1) du numéro précédent.

L'ordre de la distance de la courbe à l'hélice osculatrice étant ainsi le troisième, le contact des deux lignes est un contact du deuxième ordre (*) (N° 18, le dernier alinéa).

Des deux quantités qui figurent au dernier membre de la relation (1) du précédent numéro, la première, nous venons de le voir, a une valeur constante, en sorte qu'il n'y a lieu de considérer que la seconde, $M'c$. On a

$$M'c = M'm' - N'n',$$

(*) Et non pas d'un ordre entre le deuxième et le troisième, comme on le lit dans un ouvrage, fort savant d'ailleurs, sur les courbes à double courbure, paru il y a trois ans en seconde édition augmentée. J'avais cependant donné les propositions ci-dessus déjà en 1871, dans un périodique fort répandu (*Nouv. Ann. de Math.*, p. 444 et suivantes de cette année-là).

et en outre (63), en désignant par e et h les angles de contingence et de torsion de l'arc MN' de l'hélice,

$$M'm' = \frac{1}{6}\varepsilon\eta \text{ arc } MM', \qquad N'n' = \frac{1}{6}eh \text{ arc } MN'.$$

Multiplions et divisons les seconds membres de ces deux égalités par le cube de Mt : les arcs MM', MN' et la longueur Mt étant des infiniments petits égaux il vient, en ne négligeant que des quantités d'ordres supérieurs au troisième,

$$M'm' = \frac{1}{6}\frac{\overline{Mt}^3}{\rho\sigma}, \qquad N'n' = \frac{1}{6}\frac{\overline{Mt}^3}{RS}.$$

Mais on a par hypothèse $R = \rho$, par conséquent la valeur ci-dessus de M'c devient

$$M'c = \frac{1}{6}\frac{\overline{Mt}^3}{\rho}\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{S}\right).$$

On voit par cette égalité que si l'hélice satisfait à la condition $S = \sigma$, M'c s'annule, ou, plus exactement, est d'un ordre supérieur au troisième, et que ceci n'a lieu pour aucune autre valeur de S. Il existe toujours une hélice dont les rayons de courbure et de torsion sont respectivement égaux à ρ et à σ (171), elle est unique, et c'est donc là l'hélice osculatrice. D'après ce qu'on a vu au numéro précédent sa distance à M' est égale à $\frac{1}{6}\varepsilon^2\Delta\rho$, ce qui est précisément l'expression de la distance de M' au cercle osculateur dans une ligne plane. Le cercle osculateur des lignes planes est un cas particulier de l'hélice osculatrice; c'est le cas limite qui se présente quand la torsion est nulle. Les valeurs de tangα et de r relatives à cette hélice sont, d'après les équations (2) et (3) du N° 166,

$$(a) \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{\rho}{\sigma}, \qquad r = \frac{\rho\sigma^2}{\rho^2 + \sigma^2},$$

et si l'on suppose que la torsion diminue indéfiniment, tendant vers zéro, alors σ va croissant indéfiniment, et à la limite il vient

$$\alpha = 0, \qquad r = \rho,$$

c'est-à-dire que l'hélice osculatrice se réduit au cercle de rayon ρ, qui est le cercle osculateur.

175. L'hélice osculatrice est donc celle qui a même rayon de courbure et même rayon de torsion que la courbe, au point considéré. De cette définition il est aisé de déduire la situation de l'axe du cylindre sur lequel elle est tracée. Nous savons déjà que cet axe rencontre la normale principale de la courbe donnée et qu'il la coupe à angle droit, car en vertu du N° 169 cela résulte, indépendamment de toutes valeurs attribuées à R et à S, de ce que la courbe donnée et l'hélice ayant au point commun même tangente et même plan osculateur, leurs normales principales en ce point sont de même direction. Pour le déterminer complètement concevons deux courbes quelconques disposées l'une par rapport à l'autre comme le sont la courbe considérée et l'hélice osculatrice, et supposons qu'elles aient au point de contact M mêmes rayons de courbure et de torsion. La position limite, sur la normale principale en M, du pied de la perpendiculaire commune aux normales principales en M et en un second point infiniment voisin, est la même pour les deux courbes, car la distance de M à cette position limite ne dépend que des rayons de courbure et de torsion (80). La direction de la commune perpendiculaire aussi est la même dans les deux courbes, car l'angle que cette direction fait avec la tangente et avec le plan osculateur ne dépend non plus que des rayons de courbure et de torsion (78). Supposons maintenant que l'une des deux courbes soit l'hélice osculatrice : dans toute hélice tracée sur un cylindre rond la commune perpendiculaire à deux normales principales se confond avec l'axe du cylindre (169). Dès lors, *l'axe du cylindre de l'hélice osculatrice n'est autre que la commune perpendiculaire à deux normales principales de la courbe donnée infiniment voisines, prolongée de part et d'autre* (*). Proposition qu'on pouvait, en s'appuyant sur les N°s 78 et 80, déduire aussi des relations (*a*) du précédent numéro. La situation de cet axe est ainsi complètement déterminée. On voit qu'il est parallèle à la droite rectifiante (147), et que cette droite est, comme telle, commune à la courbe et à l'hélice osculatrice.

(*) Ce théorème ayant été donné dans les *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure* (2e série, t. I, p. 228), je courrais le risque de paraître avoir emprunté sans citer en ne disant pas que je l'avais antérieurement fait connaître et établi dans un Mémoire inséré au tome X de la 2e série des *Nouvelles Annales de mathématiques*, où l'on en peut lire l'énoncé à la page 450.

§ 5. *Surface lieu des axes des hélices osculatrices.*

Pour abréger nous appellerons *rayon* et *axe de l'hélice osculatrice* le rayon et l'axe du cylindre sur lequel cette hélice est tracée. Désignons par r et par $r + \Delta r$ les rayons des hélices osculatrices aux points M et M'; Δr est du premier ordre.

176. *La commune perpendiculaire aux axes des hélices osculatrices en* M *et en* M' *est dans la normale principale du point* M, *et elle est en longueur égale à* Δr. *Le lieu des axes des hélices osculatrices est une surface gauche, et la ligne de striction de cette surface coïncide avec la ligne de striction de la surface des normales principales. En tout point de cette ligne le plan tangent à l'une des deux surfaces est tangent aussi à l'autre.*

L'angle des axes des hélices osculatrices en M et M' est égal à $\Delta\gamma$, car ces axes sont parallèles aux droites rectifiantes correspondantes (175), et l'angle de celles-ci vaut $\Delta\gamma$ (151).

Les plans rectifiants étant osculateurs à une ligne — l'arête de rebroussement de la surface rectifiante — à laquelle les droites rectifiantes sont tangentes, la droite rectifiante en M' fait avec le plan rectifiant en M un angle du second ordre (59). Dès lors l'angle que l'axe de l'hélice osculatrice en M' forme avec le même plan est du second ordre, donc infiniment petit comparé à l'angle des axes des hélices osculatrices en M et M' (*). On déduit de là qu'un plan paral-

(*) Ce fait peut d'ailleurs s'établir indépendamment de la considération du plan rectifiant et de la droite rectifiante, et sans faire intervenir la courbe en aucune façon ; en effet :

Les normales principales étant les génératrices d'une surface gauche, soient A et B (fig. 107) deux génératrices d'une surface gauche quelconque. L'axe de l'hélice osculatrice étant la commune perpendiculaire à deux normales principales infiniment voisines, appelons C la position limite de la commune perpendiculaire à A et à une seconde génératrice infiniment voisine de A ; et appelons D la position limite de la commune perpendiculaire à B et à une seconde génératrice infiniment voisine de B. Supposons maintenant que A et B se rapprochent indéfiniment l'un de l'autre et tendent à se confondre : l'angle que ces deux droites font entre elles, et l'angle des droites C et D, seront des infiniment petits de même ordre, et si nous considérons ces angles comme du premier ordre, il s'agit de montrer que l'angle que fait D avec un plan perpendiculaire à A est du second ordre. Soit à cette fin pq la commune perpendiculaire à A et à B : si, A restant fixe, B vient se confondre avec lui, pq va lèle à ces deux axes est, à la limite, parallèle au plan rectifiant en M. La commune perpendiculaire aux deux axes tend donc à devenir parallèle à la normale principale au point M. On va reconnaître qu'elle en est, de plus, infiniment voisine.

Remarque préliminaire. Soient (fig. 109) IK et I′K′ les axes des hélices osculatrices en M et en M′, I et I′ étant les points où ces deux droites rencontrent les deux normales principales. L'angle des axes IK, I′K′ ne saurait être infiniment petit en comparaison de leur plus courte distance, car ces droites sont deux génératrices de la surface lieu des axes des hélices osculatrices, et dans aucune surface réglée l'angle de deux génératrices infiniment voisines n'est infiniment petit comparé à leur plus courte distance (94). Or représentons-nous deux droites dont l'une au moins soit mobile, et qui tendent à se confondre. Soient D et E les points où elles sont coupées par leur commune perpendiculaire, F et G ceux où elles le sont par une autre ligne. Le lecteur reconnaîtra sans peine que si l'angle des deux droites n'est pas infiniment petit en comparaison de leur plus courte distance, et que cependant la direction FG tende à devenir parallèle à la direction DE, les points F et G sont infiniment voisins des points D et E.

coïncider avec C; et il finit par coïncider au contraire avec D si c'est B qui reste fixe et A qui va se confondre avec lui. Dès lors les angles que fait pq avec C et avec D sont du même ordre que l'angle des droites C et D, donc du premier. Or pq est l'intersection des deux plans qu'on mènerait l'un par p perpendiculairement à A, l'autre par q perpendiculairement à B. Ce dernier plan est parallèle à D, puisque D est perpendiculaire à B; il contient donc la droite qr menée par q parallèlement à D, et il suffit de montrer que qr fait avec le premier plan un angle du second ordre. Remarquons dans ce but que l'angle des deux plans est égal à celui des droites A et B; il est donc du premier ordre. Tout revient par conséquent à faire voir que lorsque deux plans X et Y font entre eux un angle α du premier ordre, une droite ac (fig. 108) située dans le plan Y et faisant avec l'intersection ab des deux plans un angle β du premier ordre, fait avec le plan X un angle δ du second ordre. Soient à cet effet cb et cd les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque c de ac sur ab et sur le plan X; on a

$$\sin\alpha = \frac{cd}{bc}, \qquad \sin\beta = \frac{bc}{ac}, \qquad \sin\delta = \frac{cd}{ac},$$

d'où l'on tire $\sin\delta = \sin\alpha \sin\beta$. De cette égalité, qui est l'une de celles que l'on donne dans la trigonométrie sphérique, résulte la proposition.

Ceci posé, dans la figure 109, où les droites IK, I′K′ et les points I, I′ sont ce que l'on a dit tout à l'heure, soient :

A et B les pieds de la perpendiculaire commune aux normales MI et M′I′;

BP une droite égale et parallèle à AI;

Q et R les pieds des perpendiculaires abaissées de P sur IK et sur M′I′.

La longueur BP, qui est égale à AI, et l'angle PIK, qui est égal à celui des directions AB, IK, sont infiniment petits, parce que IK est la position limite de la droite AB prolongée (175). D'un autre côté, la longueur IP, qui est égale à AB, et l'angle PBM′, qui est celui des normales MI, M′I′, sont des grandeurs du premier ordre (77 et 79). Il suit de là que PQ et PR, et par conséquent aussi QR, sont d'ordres supérieurs au premier. Or RI′ est, en tant qu'infiniment petit, égal à la différence Δr des rayons MI, M′I′, qui est du premier ordre. QR étant d'après cela infiniment petit comparé à RI′, I′Q fait un angle infiniment petit avec M′I′, donc aussi avec MI, donc aussi avec la direction de la perpendiculaire commune aux droites IK, I′K′, puisque cette perpendiculaire est à la limite parallèle à MI, ainsi qu'on l'a vu au commencement de ce numéro. Dès lors, en vertu de notre remarque préliminaire, les pieds de cette perpendiculaire sont infiniment voisins de I′ et de Q, donc aussi du point I. Il est ainsi démontré que, sur la surface des axes des hélices osculatrices, I est le point central de la génératrice IK. (Voir, pour la définition du point central, le N° 95). Or il est, sur la surface des normales principales, le point central de la génératrice MI.

La commune perpendiculaire aux axes IK, I′K′ est, en tant qu'infiniment petite, égale à I′Q, car I′Q s'appuie par ses extrémités sur les deux axes, et fait avec la commune perpendiculaire, comme on vient de voir, un angle qui est nul à la limite. Or QR étant, ainsi que nous l'avons reconnu, d'un ordre supérieur au premier, I′Q est égal à RI′, donc à Δr.

Nous avons vu dans ce numéro que l'angle des deux axes vaut $\Delta \gamma$. Les grandeurs Δr et $\Delta \gamma$ étant du même ordre, la surface des axes des hélices osculatrices est une surface gauche (95).

Ces deux surfaces, le lieu des normales principales et le lieu des axes des hélices osculatrices, ont une gorge ou ligne de striction commune, qui est la courbe des points I. En d'autres termes, la ligne d'intersection des deux surfaces joue, sur l'une et sur l'autre, le rôle de ligne de striction.

Soit IT la tangente en I à cette ligne : la surface des normales principales serait développable si IT se confondait avec la normale MI (90); et la surface des axes des hélices osculatrices serait développable si IT et IK n'étaient pas deux droites distinctes. Puis donc que ces surfaces sont l'une et l'autre gauches, IT est différent de MI et de IK. Par suite IT et MI déterminent un plan, ainsi que IT et IK. Or ces plans sont les plans tangents en I, le premier, à la surface des normales principales, et, le second, à la surface des axes des hélices osculatrices. On va voir qu'ils se confondent en un seul plan.

De I′ abaissons une perpendiculaire sur MI et désignons-en le pied par U. Dans le quadrilatère gauche ABI′U les angles en A et en U sont droits, et les côtés AU, BI′, étant parties des normales principales MI, M′I′, sont parallèles à la limite. Il suit de là que les côtés AB et UI′ aussi sont parallèles à la limite, car pour qu'il pût en être autrement il faudrait que ces côtés fussent infiniment petits en comparaison des deux autres, ce qui n'est pas le cas, vu que les quatre côtés sont du premier ordre. La droite UI′ fait donc un angle infiniment petit avec AB, donc aussi avec IK; or l'angle des droites UI′, IK ne diffère point de l'inclinaison de UI′ sur le plan MIK, laquelle est infiniment petite par conséquent. L'angle de II′ avec le même plan tend vers zéro à plus forte raison, car il est inférieur à cette inclinaison, puisque II′ est plus grand que UI′. La corde II′ du lieu des points I faisant avec le plan MIK un angle infiniment petit, la tangente IT est située dans ce plan. Il est par là démontré que les plans tangents en I à la surface des normales principales et à la surface des axes des hélices osculatrices se confondent, en d'autres termes que le plan MIK est tangent en I à la fois aux deux surfaces, lesquelles par conséquent se *touchent* tout le long de la courbe des points I. Nous retrouverons cette proposition d'une autre manière au numéro suivant (*).

(*) Une surface gauche A étant donnée, que l'on considère la surface B lieu des communes perpendiculaires à deux génératrices de A infiniment voisines : B ren-

*177. La tangente IT étant donc située dans le plan MIK qui fait avec le plan osculateur l'angle γ, sa direction sera déterminée si l'on connaît son inclinaison sur une droite de ce plan, par exemple sur la normale principale MI, ce pour quoi il suffit d'avoir les deux longueurs UI et UI′, car la tangente de l'angle que forme IT avec la normale principale est la limite du rapport $\frac{\mathrm{UI}'}{\mathrm{UI}}$, et du même coup l'on connaîtra la valeur de l'arc II′, puisque son carré est la somme des carrés des deux termes de ce rapport. Or UI est évidemment égal

contre A suivant la gorge de cette dernière surface. Ce que nous voulons faire remarquer ici, c'est que le numéro qu'on vient de lire renferme, pourvu que l'on tienne compte de la dernière note marginale qui d'ailleurs en fait partie, la démonstration du théorème que voici : la surface B est aussi une surface gauche ; de plus, A est par rapport à B ce que B est par rapport à A, c'est-à-dire que A est le lieu des communes perpendiculaires à deux génératrices de B infiniment voisines ; et dès lors une même ligne est gorge des deux surfaces. En outre, les deux surfaces se *touchent* suivant leur gorge commune, ce qui, rappelons-le, signifie qu'en chacun des points de cette ligne un même plan est tangent aux deux surfaces.

Si toutefois A était à gorge orthogonale, c'est-à-dire si la ligne de striction de cette surface en coupait les génératrices à angle droit, alors la surface B ne serait pas gauche, mais bien développable, parce que ses génératrices seraient, on le voit, tangentes à la ligne de striction de la surface A. Cette surface A dans ce cas ne serait autre que le lieu des binormales de sa ligne de striction. Etablissons ce dernier point ; il suffit de montrer que des normales N, N′ à une courbe aux points M et M′ ne peuvent, si leur angle est du premier ordre, avoir leur commune perpendiculaire parallèle à la tangente en M, à moins d'être des binormales. Soit t' (fig. 110) le point où une sphère de centre O et de rayon unité est traversée par la parallèle tirée de O à la tangente en M′ : les plans menés par O perpendiculairement à N et à N′ coupent la sphère suivant deux cercles C et C′ dont le second passe par t' et qui se rencontrent suivant un diamètre ab parallèle à la perpendiculaire commune aux deux normales. Le plan conduit par Ot' perpendiculairement au plan du cercle C coupe ce cercle en deux points dont soit p celui qui est infiniment voisin de t' : l'arc pt' est égal à l'inclinaison de la tangente en M′ sur le plan mené par M perpendiculairement à la normale N, et comme ce plan n'est pas le plan osculateur puisque N par hypothèse est différent de la binormale, pt' est du premier ordre. L'angle pat' est du premier ordre aussi en tant qu'égal à celui des cercles C, C′, lequel n'est autre que l'angle des normales N, N′, que l'on a supposé être du premier ordre. Ainsi dans le triangle sphérique apt', rectangle en p, l'angle a et le côté opposé pt' sont du même ordre. Il s'ensuit que l'arc at' est fini, et de là résulte la proposition, puisque les rayons qui aboutissent aux extrémités de cet arc sont parallèles à la tangente en M′ et à la commune perpendiculaire des deux normales.

à Δr, et l'expression de r est écrite dans les équations (a) du N° 174. Quant à UI′, il est égal à AB, qui n'est autre chose que la grandeur h dont la formule a été obtenue au N° 79.

Appelons V la projection (non indiquée sur la figure) de I′ sur le plan osculateur en M : I′V est égal au produit de M′I′, rayon de l'hélice osculatrice en M′, par l'inclinaison de ce rayon sur le plan osculateur en M. Comme cette inclinaison est égale à η (76), et que M′I′ peut ici être remplacé par r, on a $\mathrm{I'V} = r\eta$. Dès lors le sinus de l'angle que fait UI′ avec le plan osculateur en M est égal à $\dfrac{r\eta}{h}$. Remplaçant h et r par leurs valeurs, et tenant compte de celle de tang γ donnée au N° 78, on trouve que la limite de l'angle en question est γ. Mais γ est l'angle du plan MIK et du plan osculateur; donc UI′ fait avec le plan MIK un angle qui est nul à la limite. Il en est conséquemment de même de II′, et nous retrouvons ainsi que la tangente IT est située dans le plan MIK.

***178.** L'angle des plans tangents MIK, M′I′K′ s'obtient immédiatement, on va le reconnaître, au moyen de la proposition qui a fait l'objet du N° 57, et son expression est $\sqrt{\zeta^2 + \Delta\gamma^2}$. Le carré de cet angle est ainsi la somme des carrés de l'angle des normales principales et de celui des droites rectifiantes (N^os^ 77 et 151). Soient, comme au N° 159, Op, Op′ les parallèles menées d'un point O aux normales principales en M et M′, et Or, Or′ les parallèles aux droites rectifiantes, par quoi les angles pp′ et rr′ valent ζ et $\Delta\gamma$. Nos deux plans tangents sont parallèles respectivement aux plans pOr, p′Or′. Or le carré de l'angle de ces deux derniers plans, par la proposition mentionnée tout à l'heure, est la somme des carrés des angles pp′ et rr′, car Or, comme on sait, est normal à la situation finale du plan pOp′, Op l'est à la situation finale du plan rOr′ laquelle est parallèle au plan rectifiant en M, et les angles pr et p′r′ sont droits.

Distance de la courbe à la sphère osculatrice dans le voisinage du point de contact.

Je dois prévenir le lecteur que quelques notions, d'ailleurs très élémentaires, d'analyse sont nécessaires à l'intelligence de ce qui va suivre.

179. Il s'agit de former l'expression de la distance de M′ à la sphère osculatrice au point M. Soit toujours S (fig. 111) le centre de cette sphère. La droite SM′ prolongée au besoin en rencontre la surface en un point P infiniment voisin de M′. Représentant par δ la distance de M′ à la sphère, on a

$$\delta = PM',$$

et PM′ est donc la grandeur que nous désirons connaître.

Considérons à cet effet celle des développées qui passe par le point S; soit T le point de cette développée qui correspond à M′; SM et TM′ sont tangents à la développée, le premier en S, le second en T. Soit Q le point où TM′ traverse la sphère : les angles M′PQ et M′QP sont droits à la limite, et de là résulte $PM' = QM'$; donc

$$\delta = QM' = TM' - TQ.$$

Or on a, exactement,

$$TM' = \text{arc } ST + SM = \text{arc } ST + SQ,$$

d'où
$$\delta = \text{arc } ST + SQ - TQ,$$

ou, appelant D le pied de la perpendiculaire abaissée de S sur TQ,

$$\delta = (\text{arc } ST - TD) + (SQ - DQ).$$

La seconde des deux différences qui figurent dans cette égalité est infiniment petite comparée à corde ST — TD. Ceci est une conséquence de ce que ST est infiniment petit tandis que SQ est fini, et de ce que les angles en D sont droits (24). La seconde différence étant infiniment petite comparée à corde ST — TD, elle l'est à plus forte raison en regard de la première différence, et dès lors elle doit être négligée. On a donc

$$\delta = \text{arc } ST - TD. \tag{1}$$

Le point T est situé sur la polaire du point M′; soit, comme jusqu'ici, S′ le centre de la sphère osculatrice en M′: cette polaire est tangente en S′ à l'arête de rebroussement de la surface polaire; de plus, l'angle des tangentes en S et en S′ à cette arête est égal à η (110, 2°). Dès lors la perpendiculaire SE abaissée de S sur S′T a pour expression $\frac{1}{2}\eta dS$ (58, 2°), dS désignant l'arc SS′, dont la formule est écrite au

N° 114. Par suite on obtiendra la valeur de l'arc ST en divisant cette expression par le cosinus de l'angle TSE. La limite de la direction ST n'est autre que celle du rayon MS ou R. Quant à SE, la limite de sa direction est celle de la normale principale en S à l'arête, et nous savons que cette normale est parallèle à la normale principale en M à la courbe primitive, c'est-à-dire au rayon ρ (110, 1°). Il résulte de là que l'angle en question n'est autre que celui des rayons R et ρ, et que son cosinus par conséquent est égal à $\frac{\rho}{R}$. On a donc

$$(2) \qquad \text{arc ST} = \frac{1}{2}\frac{R\eta dS}{\rho},$$

grandeur du second ordre.

L'angle des droites SM et TM', tangentes à l'arc ST en ses extrémités, est évidemment égal à $\frac{MM'}{MS}$ ou $\frac{ds}{R}$; on a donc

$$(3) \qquad \text{angle de contingence de l'arc ST} = \frac{ds}{R},$$

grandeur du premier ordre.

Cela posé, pour évaluer le second membre de l'égalité (1), rapportons l'arc ST à trois axes rectangulaires issus du point S. Prenons pour plan de xy le plan osculateur à l'arc en ce point, et pour axe des x la tangente SM. Les directions suivant lesquelles on comptera les x, les y et les z positifs seront choisies de telle sorte que les coordonnées du point T soient positives toutes trois.

Un arc infiniment petit est égal à sa projection sur la tangente en son origine; conséquemment, dans le système d'axes que nous venons d'adopter, l'arc ST est égal à l'x du point T. L'angle des tangentes extrêmes d'un arc infiniment petit est égal à l'angle des tangentes extrêmes de sa projection sur le plan osculateur en son origine (54); donc, dans notre système d'axes, l'angle des tangentes en S et en T est égal au $\frac{dy}{dx}$ du point T. Dès lors, puisque d'après les relations (2) et (3) l'ordre infinitésimal de l'arc ST est double de celui de l'angle de ses tangentes extrêmes, l'équation de la projection de cet arc sur le plan des xy sera, A désignant une constante,

$$y = Ax^{\frac{3}{2}} + \text{des termes en } x \text{ de degrés supérieurs à } \tfrac{3}{2};$$

en effet, l'axe des x est tangent à l'origine des coordonnées à la ligne que représente cette équation, et comme elle donne

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{3}{2}Ax^{\frac{1}{2}} + \text{des termes en } x \text{ de degrés supérieurs à } \tfrac{1}{2},$$

on voit que l'ordre de x, supposé infiniment petit, est double de celui de $\frac{dy}{dx}$.

Quant à l'équation de la projection de l'arc sur le plan des xz, si, désignant par B une constante, on la met sous la forme

$$z = Bx^p + \text{des termes en } x \text{ de degrés supérieurs à } p,$$

p sera plus grand que $\frac{3}{2}$, car le plan des xy étant osculateur à l'arc en son origine, le z du point T est infiniment petit comparé à son y.

On a, appelant a l'x du point T,

$$\text{arc ST} = \int_0^a dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Nous négligerons les quantités d'ordres supérieurs à celui de a^2. On trouve alors, en développant le radical par la formule du binôme et effectuant l'intégration,

$$\text{arc ST} = a + \tfrac{9}{16}A^2a^2. \tag{4}$$

Passons au calcul de TD ; on a

$$\text{TD} = \text{corde ST} \times \cos \text{STD}.$$

Représentons la corde ST par H, et désignons par α, β, γ, λ, μ, ν, les cosinus des angles que cette corde et la tangente au point T font avec les axes; on aura, par la dernière égalité,

$$\text{TD} = \text{H}\ (\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu).$$

On a, appelant b et c l'y et le z du point T,

$$\alpha = \frac{a}{\text{H}}, \qquad \beta = \frac{b}{\text{H}}, \qquad \gamma = \frac{c}{\text{H}},$$

et, représentant par K le radical $\sqrt{1+\left(\frac{db}{da}\right)^2+\left(\frac{dc}{da}\right)^2}$, où $\frac{db}{da}$ et $\frac{dc}{da}$ désignent les valeurs que $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ prennent au point T,

$$\lambda=\frac{1}{K},\qquad \mu=\frac{1}{K}\frac{db}{da},\qquad \nu=\frac{1}{K}\frac{dc}{da},$$

donc

$$\text{(5)}\qquad TD=\frac{a}{K}+\frac{b}{K}\frac{db}{da}+\frac{c}{K}\frac{dc}{da}.$$

Comme nous négligeons les quantités d'ordres supérieurs à celui de a^2, il faut, dans l'évaluation du facteur $\frac{1}{K}$, négliger celles d'ordres supérieurs à l'ordre de a. On trouve

$$K=1+\tfrac{9}{8}A^2a,\qquad \text{d'où}\qquad \frac{1}{K}=1-\tfrac{9}{8}A^2a,$$

d'où

$$\frac{a}{K}=a-\tfrac{9}{8}A^2a^2,\qquad \frac{b}{K}\frac{db}{da}=\tfrac{3}{2}A^2a^2,\qquad \frac{c}{K}\frac{dc}{da}=0.$$

Substituant ces valeurs dans (5) il vient

$$TD=a+\tfrac{3}{8}A^2a^2,$$

et retranchant de (4) ce résultat on trouve

$$\text{arc } ST - TD=\tfrac{3}{16}A^2a^2.$$

A cause de $\frac{db}{da}=\frac{3}{2}Aa^{\frac{1}{2}}$, le second membre de cette équation peut être mis sous la forme $\frac{a}{12}\left(\frac{db}{da}\right)^2$. Or a et $\frac{db}{da}$ sont respectivement égaux à l'arc ST et à son angle de contingence, dont les valeurs sont données aux égalités (2) et (3). Substituant ces valeurs on arrive à

$$\text{arc } ST - TD=\frac{\eta\, ds^2 dS}{24\rho R},$$

quantité du quatrième ordre infinitésimal. Telle est donc, ensuite de la relation (1), l'expression de δ. En y remplaçant ρ par le rapport $\frac{ds}{\varepsilon}$, dont il est la limite, il vient

$$\delta = \frac{\varepsilon\eta\, ds\, dS}{24R}.$$

Cette expression, que j'ai donnée dans les *Nouvelles Annales de mathématiques* pour octobre 1870, a depuis été confirmée par divers géomètres qui ont obtenu des formules équivalentes : M. Bellavitis, *Undecima Rivista*, 1871, pages 53 à 60 ; M. Catalan, *Théorie analytique des lignes à double courbure*, 1875, N° 117 ; M. de Saint-Germain, *Nouv. Ann. de math.*, 1873, pages 211 et 212 ; le comte Magnus de Sparre, *Sur la détermination géométrique de quelques infiniment petits*, 1875, pages 419-420 et 425-426 ; M. Lecornu, dans le volume pour le premier semestre de 1885 des *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences de Paris*, à partir de la page 1207. Le travail de M. Catalan a paru dans le tome VI de la 2e série des *Mémoires de la Société royale des sciences de Liège*, et il a de plus été tiré à part. Celui du comte Magnus de Sparre se lit dans le *Bulletin de la Société de statistique de l'Isère*, et il a été pareillement tir à part.

Errata du texte et des figures.

Page 12, ligne 1, *au lieu de* tout, *lire* toute.
» 48, alinéa « L'angle K*k*M, » dernière ligne, *au lieu de* sin KMK, *lire* sin KM*k*.
» 49, al. « Concevons, » l. 7, *au lieu de* est celui *lire* et celui.
» 51, al. « Soit MN, » l. 2, *au lieu de* tiré *lire* tirée.
» 53, al. « Reprenons, » l. 4, *au lieu de* ν *lire* ν'.
» 54, l. 15 en remontant, *au lieu de* M''' *lire* M''.
» 56, l. 3, *au lieu de* f(x) *lire* f(x').
» 61, l. 5, *au lieu de* 48 *lire* 40.
» 85, al. « BC, BD, » l. 1, *au lieu de* N *lire* N'.
» 87, l. 4 en rem., *au lieu de* dégrés *lire* degrés.
» 101, les mots « l'ordre de, » de la première ligne de l'alinéa « on voit, » doivent être transportés deux lignes plus bas, à la suite de « mais de. »
» 112, l. 4 rem., *au lieu de* le rayon unité *lire* de rayon unité.
» 126, au dernier alinéa du nº 116 ajouter : Ce sont là des résultats déjà obtenus autrement au nº 112.
» » En tête du nº 117 mettre un astérisque.
» 138, l. 3 du nº 125, ôter la première des virgules de cette ligne.
» 152, l. 6. *au lieu de* nous appellons *lire* nous appellerons.
» 166, l. 2 du nº 151, *au lieu de* cet *lire* cette.
» 169, l. 2 rem., *au lieu de* normal *lire* normale.
» 181, l. 2 et 3 de l'al. « Considérant, » transposer Op et Op'.

Dans la figure 94, planche VI, au lieu de *b* lire *h*.

TABLE ET SOMMAIRE

Expressions de diverses grandeurs qui naissent de la considération d'un arc infinitésimal et des tangentes en ses extrémités.

Du cercle osculateur.

Expressions de diverses grandeurs qui dépendent de la variation du rayon de courbure.

Du cercle de courbure et du cercle osculateur.

Expressions de diverses grandeurs qui naissent de la considération de certaines normales en deux points d'une ligne infiniment voisins, ainsi que de celle des centres de courbure.

De la sphère osculatrice.

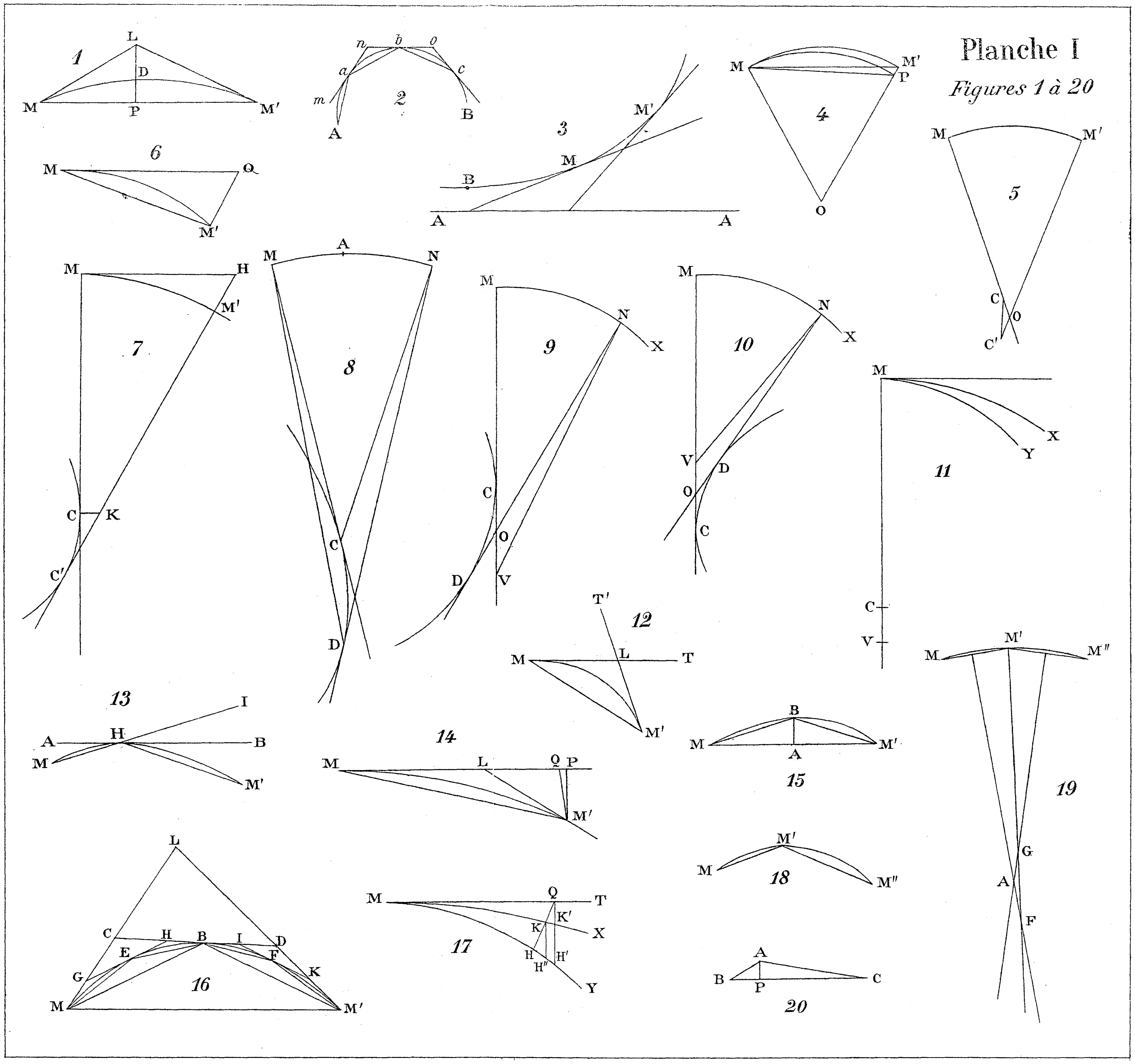
Des développées.

Distance de la courbe à la sphère osculatrice dans le voisinage du point de contact.

LAUSANNE. — IMP. GEORGES BRIDEL & C^IE

Planche I

Figures 1 à 20

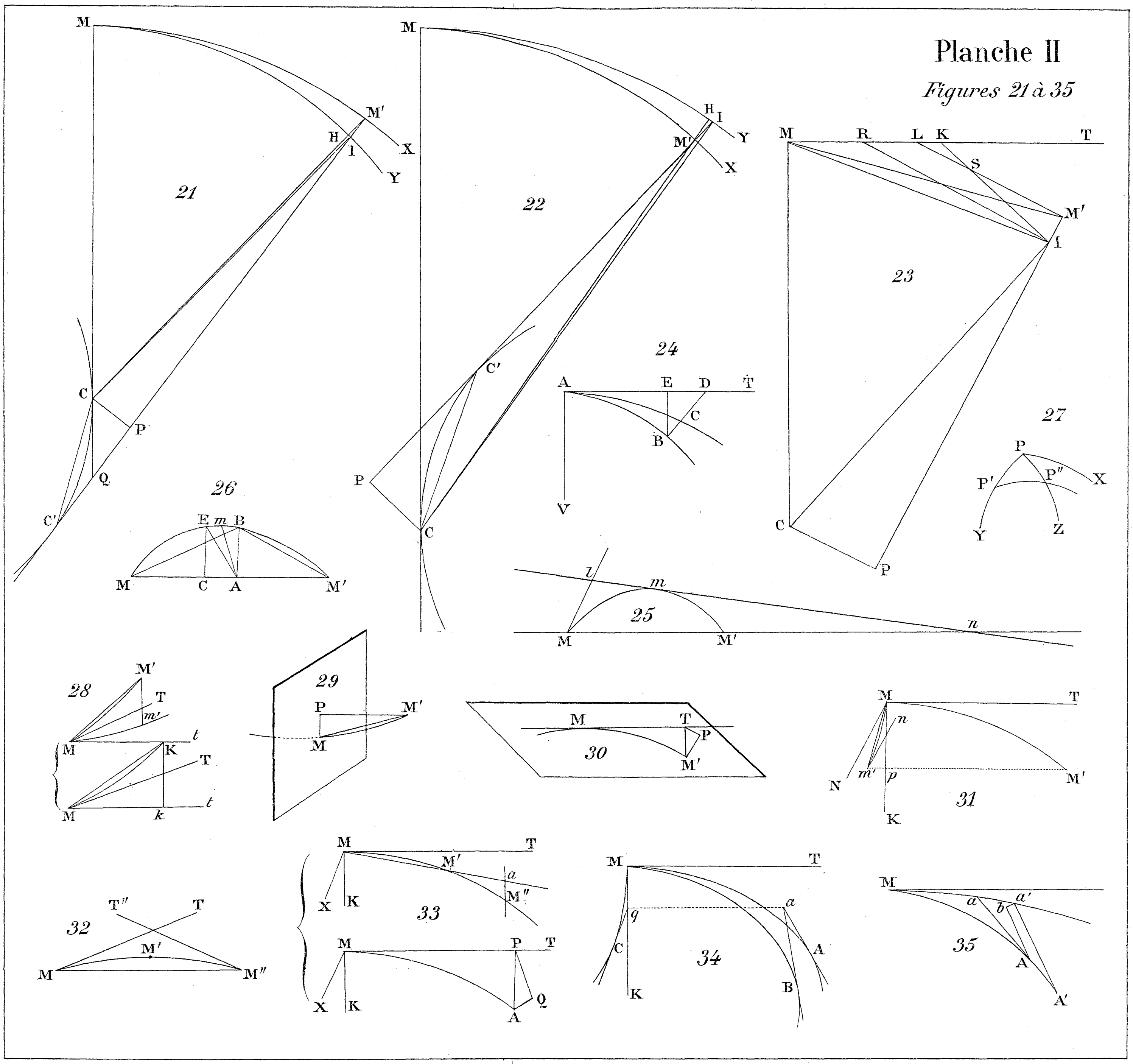


Expos^ion^ géom^ique^ des propr. gén^ales^ des courbes, 6^ème^ éd.

Lith. J. Chappuis, Lausanne.

Planche II

Figures 21 à 35

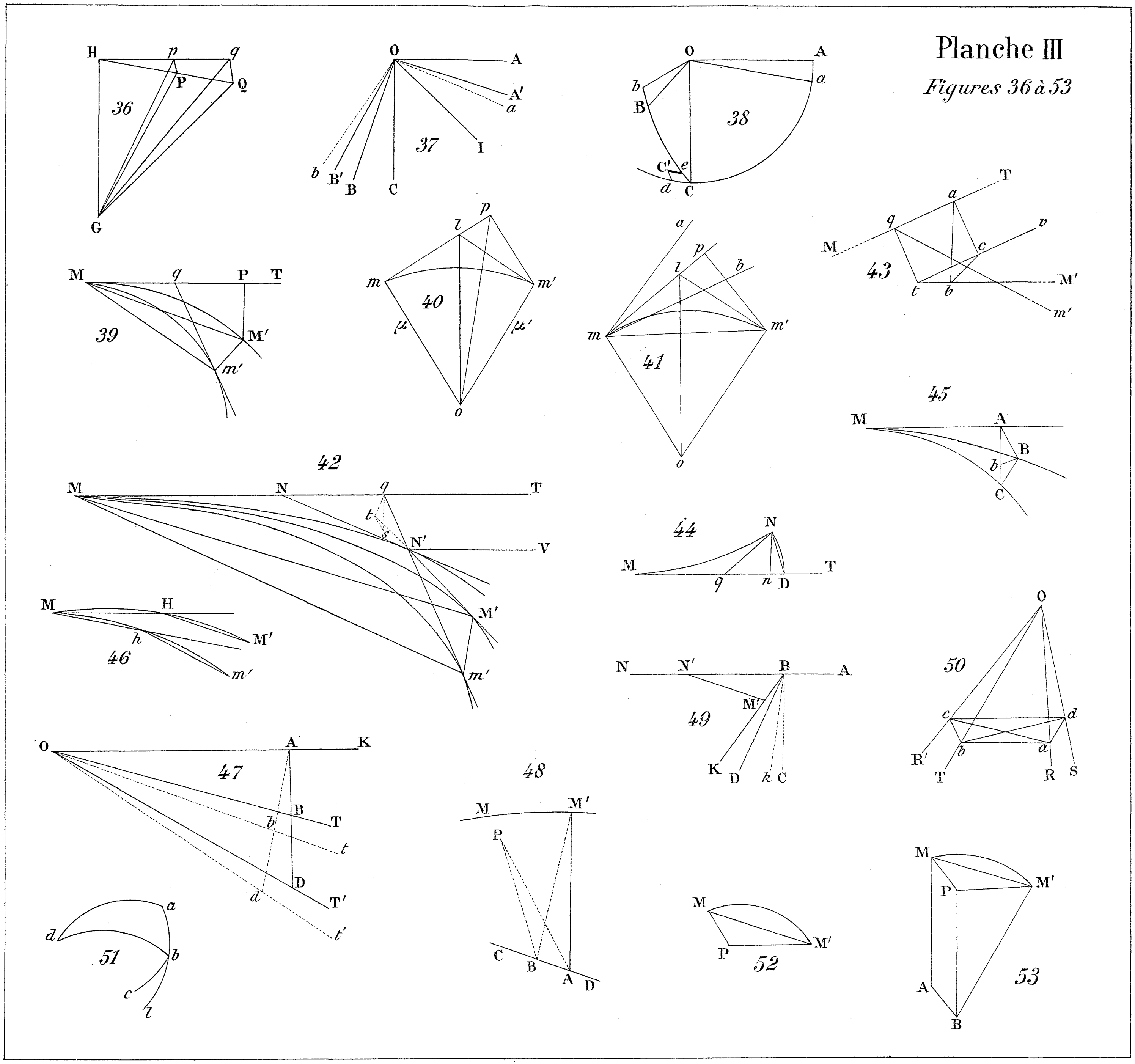


Expos^ion^ *géom*^ique^ *des propr. gén*^ales^ *des courbes, 6*^ème^ *éd.*

LITH. J. CHAPPUIS, LAUSANNE.

Planche III

Figures 36 à 53

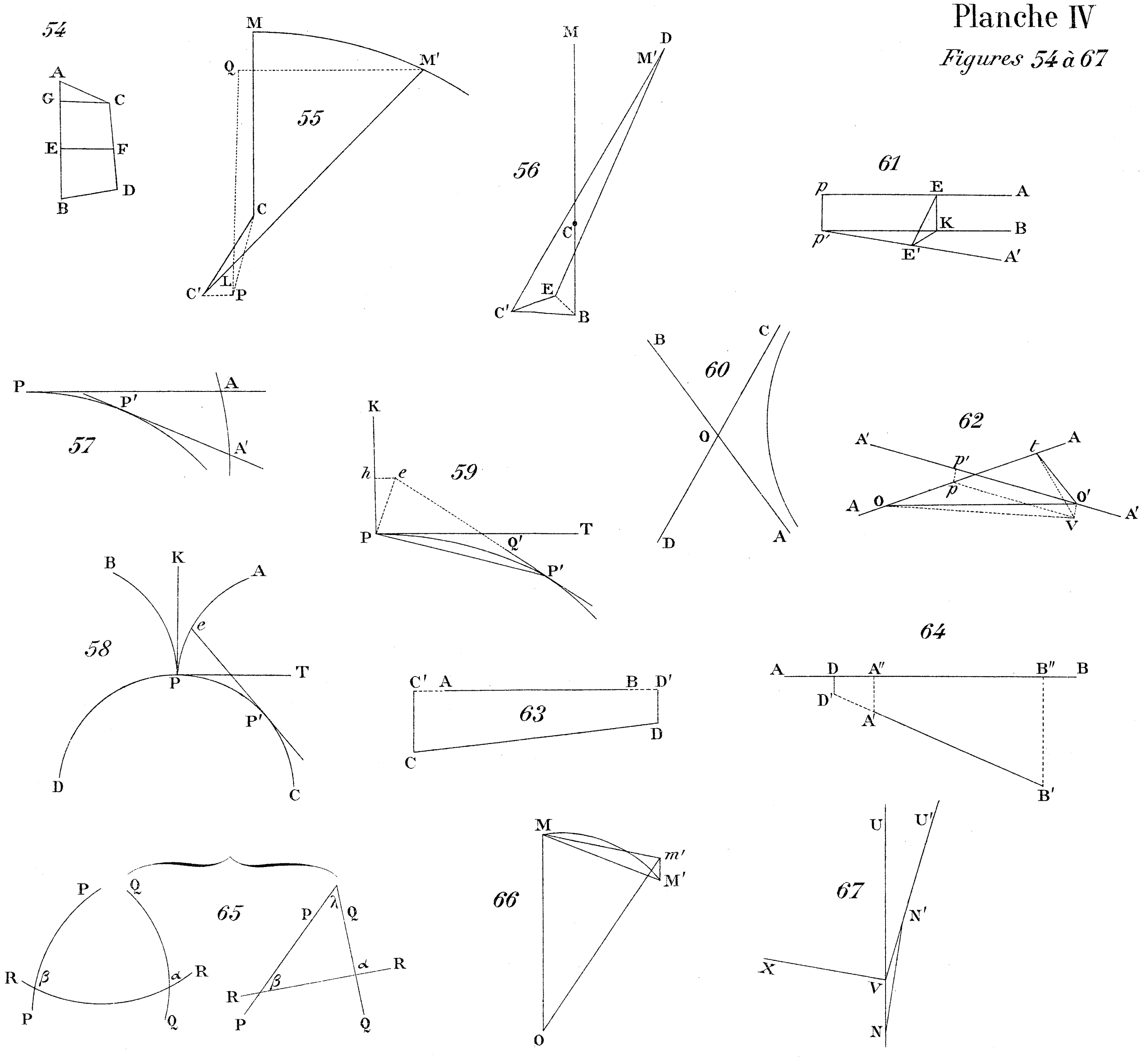


Expos^{ion} géom^{ique} des propr. gén^{ales} des courbes, 6ème éd.

Lith. J. Chappuis, Lausanne.

Planche IV

Figures 54 à 67

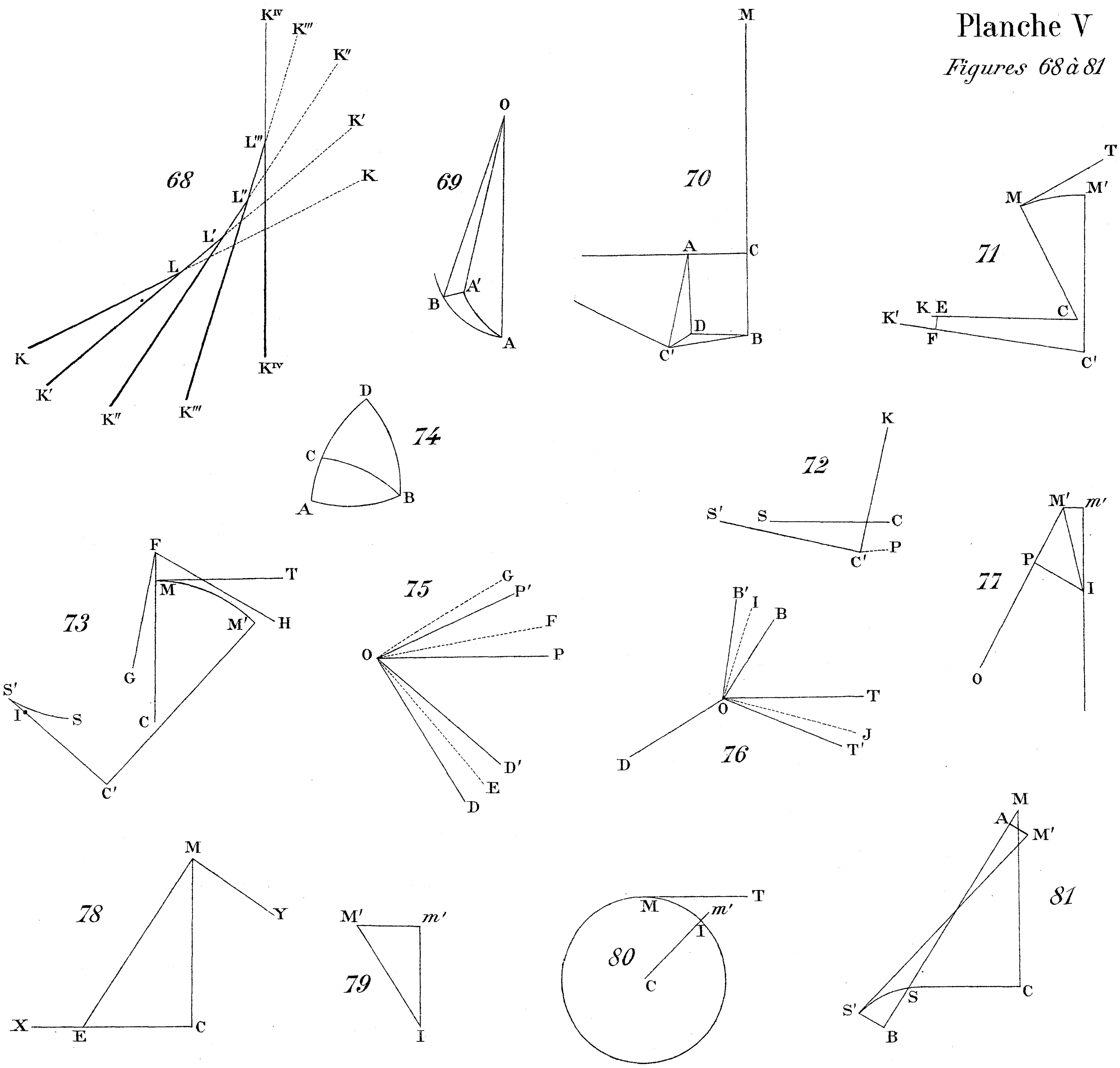


Expos^ion^ géom^ique^ des propr. gén^ales^ des courbes, 6^ème^ éd.

Lith. J. Chappuis, Lausanne.

Planche V

Figures 68 à 81

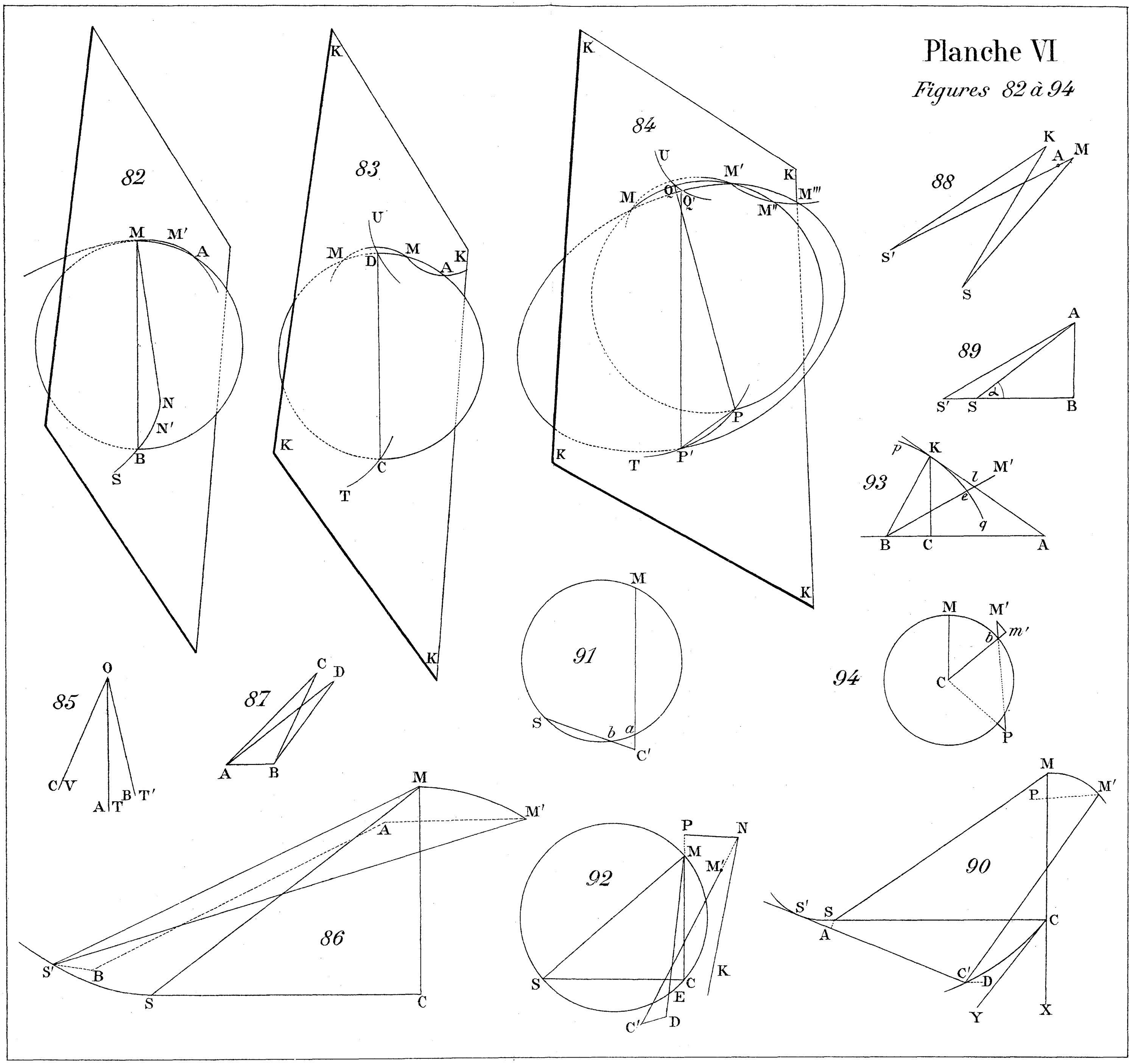


Exposition géométrique des propriétés générales des courbes, 6ème éd.

LITH. J. CHAPPUIS, LAUSANNE.

Planche VI

Figures 82 à 94

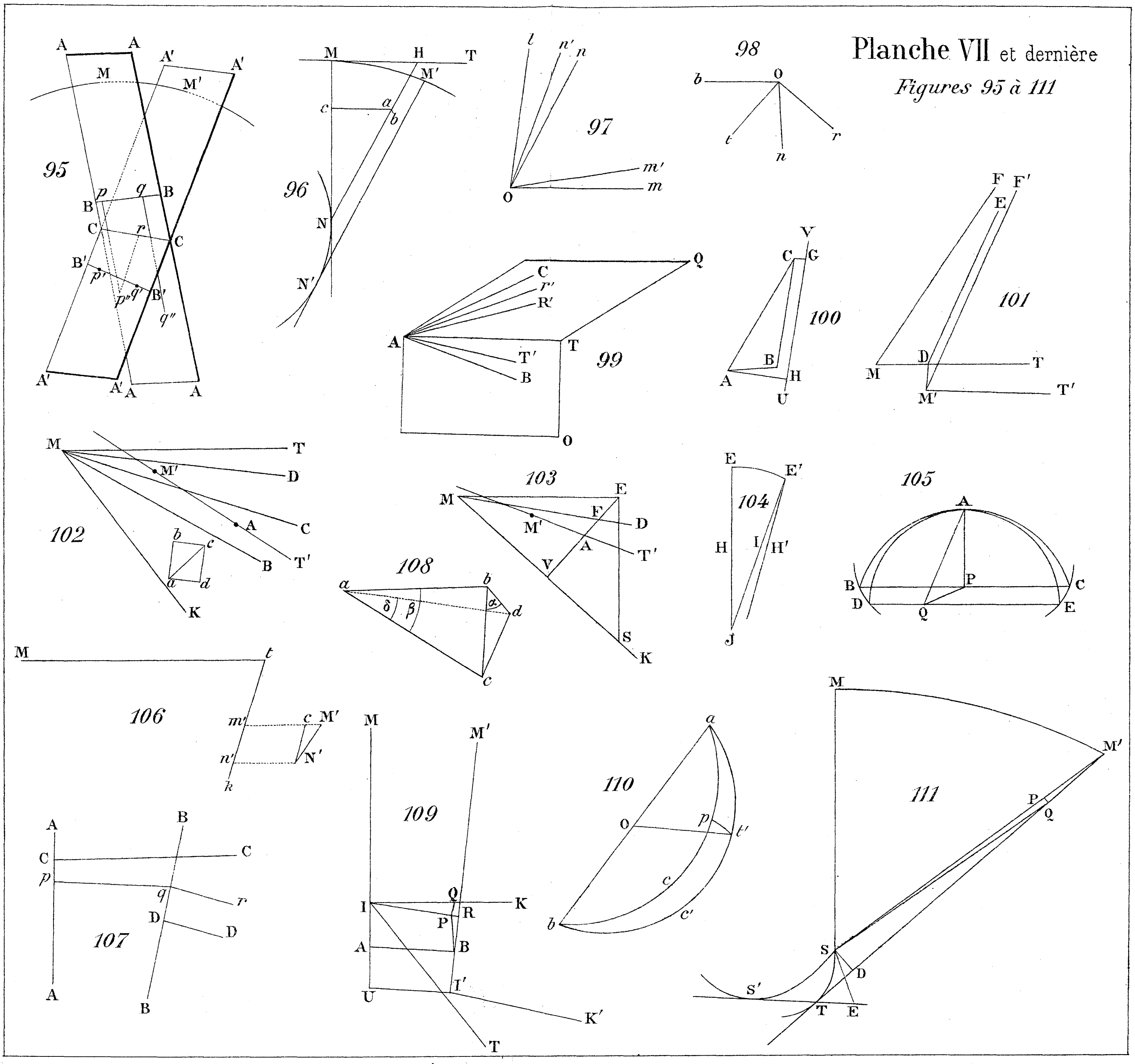


Expos^ion^ géom^ique^ des propr. gén^ales^ des courbes, 6^ème^ éd.

LITH. J. CHAPPUIS, LAUSANNE.

Planche VII et dernière

Figures 95 à 111



Exposition géométrique des propr. générales des courbes, 6ème éd.

Lith. J. Chappuis, Lausanne.