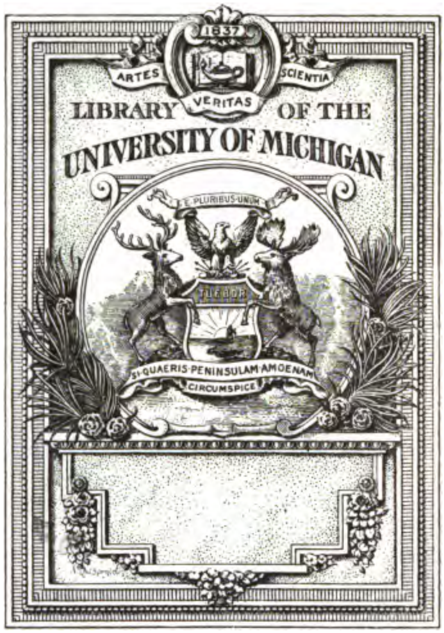
1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

Gesammelte

mathematische und astronomische Abhandlungen

von

Johann Franz

J. F. Encke.

Erster Band.

Allgemeines betreffend Rechnungsmethoden.

Berlin, 1888.

Ferd. Dümmlers Verlagsbuchhandlung.

Vorwort.

Die mathematischen und astronomischen Abhandlungen von J. F. Encke, welche zum gröſsten Theil in den Berliner Astronomischen Jahrbüchern enthalten sind, haben auch jetzt noch einen so hohen Werth für das Studium und die Anwendung exacter Rechnungsmethoden überhaupt, daſs es zweckmäſsig erschienen ist, einen neuen, zusammenfassenden Abdruck der wichtigsten derselben zu veranstalten, um so mehr als ein groſser Theil der bezüglichen Jahrgänge des Jahrbuchs vergriffen ist.

Der Unterzeichnete, welcher von den Encke'schen Erben mit der Herausgabe der Abhandlungen betraut worden ist, hat sich nur um eine möglichst correcte Wiedergabe derselben bemüht und sich nur ganz minimale und einleuchtende Aenderungen gestattet.

Bei der Auswahl der in diese neue Ausgabe aufzunehmenden Abhandlungen bin ich von Seiten der hiesigen Sternwarte und des astronomischen Recheninstitutes freundlichst berathen worden.

Der vorliegende I. Band umfasst laut Inhaltsverzeichniſs Encke's Untersuchungen über solche Rechnungsmethoden, welche in allen exacten Wissenschaften zur Anwendung gelangen können.

Der II. Band wird die ebenfalls allgemein wichtigen Untersuchungen über Fehlertheorie, Methode der kleinsten Quadrate und Anschlieſsendes, und erst der III. Band die specifisch astronomischen, aber auch die berühmte Abhandlung „De formulis dioptricis" bringen.

Berlin 1887, November.

Harry Gravelius.

Inhalt.*)

*) Die den Titeln der Abhandlungen hier beigesetzten Jahreszahlen beziehen sich auf die Jahrgänge des Berliner Astronomischen Jahrbuchs, in denen die betr. Aufsätze publicirt worden sind.

Ueber Interpolation.*)

Interpoliren heifst im Allgemeinen das Verfahren, wodurch man aus gegebenen numerischen Werthen irgend welcher Function einer Gröfse, oder nach dem astronomischen Sprachgebrauch, eines Argumentes, den Werth dieser Function für einen andern gegebenen Werth des Argumentes bestimmt, ohne die Form der Function selbst zu kennen, ja ohne sie kennen zu wollen. Als Hülfstheorem dient hiezu der Taylorsche Lehrsatz, insofern er allgemein die Entwickelung jeder Function umfasst. Nach ihm läfst sich jede Function einer zweitheiligen Gröfse in eine Reihe auflösen, die zum ersten Gliede die Function des ersten Theiles selbst hat, und in den folgenden nach Potenzen des zweiten Theiles fortschreitet, wobei die Coefficienten aus den Derivirten der Function in Bezug auf den ersten Theil gebildet werden. Um die Reihe schnell convergiren zu machen, nimmt man gewöhnlich diesen zweiten Theil sehr klein an. Man mufs daher auch bei der Anwendung auf das Interpoliren den Werth, von welchem man ausgehen will, so nahe als möglich dem gegebenen zu bringen suchen.

Die Fälle, in welchen der Taylorsche Satz eine Ausnahme erleidet, kommen bei der Interpolation nicht vor, wenn man sie nur so anwendet, wie sie allein angewandt werden sollte, das heifst,

*) Der folgende Aufsatz ist aus den Vorlesungen entlehnt, die ich im Jahre 1812 bei dem Herrn Hofrath Gaufs zu hören das Glück hatte. In dem ganzen Gange der Entwickelung bin ich, so viel die Erinnerung gestattete, dem Vortrage meines hochgeehrten Lehrers gefolgt, da er die gröfste Gründlichkeit mit der gröfsten Einfachheit und Eleganz verbindet.

wenn der gesuchte numerische Werth der Function von den gegebenen eingeschlossen ist, und sie innerhalb dieser Grenzen nicht unendlich oder unmöglich wird.

Der leichteren Uebersicht wegen soll angenommen werden, dafs vier Werthe gegeben sind. Das Verfahren wird sich ohne Mühe auf jede gröfsere Zahl ausdehnen lassen. Die vier Werthe des Argumentes sollen mit $p\ q\ r\ s$, die zugehörigen der Function mit $P\ Q\ R\ S$ bezeichnet werden. Für das Argument x sucht man den numerischen Werth der Function X.

Nach dem Taylorschen Lehrsatze ist

$$f(A+\omega)=c+c_1\omega+c_2\omega^2+c_3\omega^3\ldots$$

Nimmt man einen Werth a nahe an x, so dafs

$$\omega=x-a$$

so wird

$$f(x)=\alpha+\beta(x-a)+\gamma(x-a)^2+\delta(x-a)^3\ldots$$

wo $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ unbekannte Coefficienten sind. Zu ihrer Bestimmung dienen die vier Bedingungen, dafs für

$$\begin{array}{ll} x=p & f(x)=P \\ x=q & f(x)=Q \text{ u. s. w.} \end{array}$$

Man hat also die vier Gleichungen

$$\begin{aligned}
P&=\alpha+\beta(p-a)+\gamma(p-a)^2+\delta(p-a)^3\\
Q&=\alpha+\beta(q-a)+\gamma(q-a)^2+\delta(q-a)^3\\
R&=\alpha+\beta(r-a)+\gamma(r-a)^2+\delta(r-a)^3\\
S&=\alpha+\beta(s-a)+\gamma(s-a)^2+\delta(s-a)^3
\end{aligned}$$

aus welchen sich die vier Coefficienten $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$, aber auch nicht mehrere, durch Elimination bestimmen lassen. Folglich erhält man auch nur die Entwickelung von $f(x)$ bis zu $(x-a)^3$ inclusive, und mufs annehmen, dafs die folgenden Glieder der Reihe als verschwindend betrachtet werden können.

Die Elimination ist leicht zu übersehen, und bedarf nicht einer weiteren Ausführung. Statt indessen die Werthe $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ in jedem einzelnen Falle zu suchen, und dann in $f(x)$ zu substituiren, kommt man durch eine andere Betrachtung kürzer zum Ziele.

Aus der Uebersicht des Geschäftes der Elimination ergiebt sich sogleich, wie die Werthe von $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ in Bezug auf die Potenzen von $P\ Q\ R\ S$ beschaffen sein werden. Bei der linearen Form der Gleichungen, werden $P\ Q\ R\ S$ nur linear darin vorkommen, zugleich wird es aber auch in $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ kein Glied geben, welches nicht eine der Gröfsen $P\ Q\ R\ S$ als Faktor enthielte. Oder die Form von $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ wird im allgemeinen sein:

$$cP + c_1\ Q + c_2\ R + c_3\ S.$$

Substituirt man diese Werthe nun in $f(x)$, so wird auch in $f(x)$ kein Glied ohne eine der Gröfsen $P\ Q\ R\ S$ vorkommen, oder es wird

$$X = \pi\ P + \chi\ Q + \varrho\ R + \sigma\ S$$

wo $\pi\ \chi\ \varrho\ \sigma$ bis jetzt noch unbestimmte Coefficienten sind, welche indessen, wie sie auch beschaffen sein mögen, x nur auf die dritte Potenz inclusive enthalten dürfen, weil in der ursprünglichen Gleichung nur $(x-a)^3$ vorkommt.

Wendet man nun auf diese letzte Form die vier Bedingungen des Problems an, so hat man offenbar für

$$\begin{array}{lllll} x = p & \pi = 1 & \chi = 0 & \varrho = 0 & \sigma = 0 \\ x = q & \pi = 0 & \chi = 1 & \varrho = 0 & \sigma = 0 \\ x = r & \pi = 0 & \chi = 0 & \varrho = 1 & \sigma = 0 \\ x = s & \pi = 0 & \chi = 0 & \varrho = 0 & \sigma = 1 \end{array}$$

Soll aber $\pi = 0$ werden für $x = q$, $x = r$, $x = s$, so lehrt die Algebra, dafs π die Factoren $x - q$, $x - r$, $\overline{x - s}$ enthalten mufs, und zwar wenn, was hier stillschweigend vorausgesetzt wird, $q\ r\ s$ verschiedene Gröfsen sind, alle drei Factoren zugleich. In dem, was π sonst noch enthält, darf kein x mehr vorkommen, weil x sonst gegen die Voraussetzung die dritte Potenz überschreiten würde. Nennt man also C den Inbegriff der übrigen constanten Factoren von π, so ist

$$\pi = C\ \overline{x-q}\ \overline{x-r}\ \overline{x-s}.$$

Nach der ersten Bedingung ist aber $\pi = 1$ für $x = p$, folglich

$$1 = C\; p-q\;\; p-r\;\; p-s$$

oder

$$C = \frac{1}{p-q\; p-r\; p-s}$$

und also

$$\pi = \frac{x-q\; x-r\; x-s}{p-q\; p-r\; p-s}.$$

Dieselben Schlüsse auf $\chi\; \varrho\; \sigma$ angewendet geben den allgemeinen Ausdruck

$$\text{(I)} \qquad X = P\frac{x-q\; x-r\; x-s}{p-q\; p-r\; p-s} + Q\frac{x-p\; x-r\; x-s}{q-p\; q-r\; q-s} + R\frac{x-p\; x-q\; x-s}{r-p\; r-q\; r-s} + S\frac{x-p\; x-q\; x-r}{s-p\; s-q\; s-r}$$

welcher die gegebenen Bedingungen nicht nur erfüllt, sondern auch wenn x die dritte Potenz nicht überschreiten soll, der einzige ist, der sie vollständig erfüllt. Die Differenz eines jeden andern nicht damit identischen von (I), müfste nämlich, den Bedingungen der Aufgabe zufolge, Null werden für die vier Werthe:

$$x = p,\; x = q,\; x = r,\; x = s$$

folglich die vier Factoren $x-p\;\; x-q\;\; x-r\;\; x-s$ zugleich enthalten, oder x auf die vierte Potenz erhoben, gegen die Voraussetzung.

Man kann der Gleichung (I) noch eine elegantere Form geben, wenn man auf beiden Seiten mit

$$x-p\;\; x-q\;\; x-r\;\; x-s$$

dividirt. Sie wird dann

$$0 = \frac{X}{x-p\; x-q\; x-r\; x-s} + \frac{P}{p-x\; p-q\; p-r\; p-s} + \frac{Q}{q-x\; q-p\; q-r\; q-s} + \frac{R}{r-x\; r-p\; r-q\; r-s} + \frac{S}{s-x\; s-p\; s-q\; s-r}$$

Nimmt man hier, da die Form von $f(x)$ ganz willkürlich gelassen ist, für $X \ldots x^m$ an, wodurch also $P \ldots p^m$ $Q \ldots q^m$ u. s. w. wird, so lässt sich diese Gleichung auch so ausdrücken: Wenn n Gröfsen $a\,b\,c\,d$ gegeben sind (statt der vorigen $x\,p\,q\,r$), und die m^{te} Potenz einer jeden derselben dividirt wird durch das Product aller Differenzen der zur Potenz erhobenen Gröfse von jeder der übrigen, so ist die Summe aller n Quotienten jedesmal $=0$, so lange m zwischen 0 und $n-2$ beides inclusive liegt. Diese letztere Beschränkung wird durch die Bedingung herbeigeführt, dafs bei der Herleitung der Reihe die Potenzen höher als x^3 ausgeschlossen wurden.

Die Untersuchung über den Werth der Reihe

$$\frac{a^m}{\overline{a-b}\;\overline{a-c}\;\overline{a-d}\ldots}+\frac{b^m}{\overline{b-a}\;\overline{b-c}\;\overline{b-d}\ldots}+\frac{c^m}{\overline{c-a}\;\overline{c-b}\;\overline{c-d}\ldots}\text{ etc.} \qquad \text{(A)}$$

bei n Gröfsen für jeden beliebigen Werth von m, führt zu einer näheren Schätzung des Fehlers einer Interpolation. Zu diesem Ende entwickele man den Bruch

$$\frac{1}{Y}=\frac{1}{\overline{y-a}\;\overline{y-b}\;\overline{y-c}\;\overline{y-d}\ldots}$$

auf zweifache Weise. Zuerst, indem man ihn ansieht als das Product der einzelnen Brüche

$$\frac{1}{y-a},\ \frac{1}{y-b},\ \frac{1}{y-c},\ \text{etc.}$$

jeden von diesen für sich entwickelt, und dann alle multiplicirt. Da

$$\frac{1}{y-a}=y^{-1}+ay^{-2}+a^2y^{-3}\ldots$$
$$\frac{1}{y-b}=y^{-1}+by^{-2}+b^2y^{-3}\ldots$$

so wird

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{Y}=y^{-n}+Ay^{-(n+1)}+By^{-(n+2)}+\ldots$$

Für den gegenwärtigen Zweck braucht man die Coefficienten $AB\ldots$ nicht weiter zu kennen. Sie sind übrigens nach combinatorischen Lehren für die $-(n+r)^{te}$ Potenz von y, die r^{te} Classe der Combinationen mit Wiederholungen aus n Elementen, nach **Posselt's** Bezeichnung, welcher diese Reihen (A) näher untersucht hat*),

$${}^{r}(0)^{n}$$

Löst man **zweitens** $\frac{1}{Y}$ in die **Summe** der einzelnen Partialbrüche auf, deren Nenner respective $y-a$, $y-b$, $y-c$ sind, so lehrt das bekannte Verfahren, dafs die Zähler dieser Brüche erhalten werden, wenn man in die übrigen Factoren von $\frac{1}{Y}$, für y bei jedem Partialbruche den Werth substituirt, der entsteht, wenn man den Nenner des Partialbruches $=0$ setzt, insofern $a\,b\,c\,d$ alle von einander verschieden sind. Folglich wird

$$\frac{1}{Y} = \frac{1}{\overline{a-b}\;\overline{a-c}\;\overline{a-d}} \cdot \frac{1}{y-a} + \frac{1}{\overline{b-a}\;\overline{b-c}\;\overline{b-d}} \cdot \frac{1}{y-b} \text{ etc.}$$

Entwickelt man hier wieder die Brüche

$$\frac{1}{y-a},\ \frac{1}{y-b} \text{ etc.}$$

in Reihen, so wird

$$\begin{aligned}\frac{1}{Y} = {} & \frac{1}{\overline{a-b}\;\overline{a-c}\;\overline{a-d}\ldots}\{y^{-1}+ay^{-2}+a^2y^{-3}\ldots\\ &+\frac{1}{\overline{b-a}\;\overline{b-c}\;\overline{b-d}\ldots}\{y^{-1}+by^{-2}+b^2y^{-3}\ldots\\ &+\frac{1}{\overline{c-a}\;\overline{c-b}\;\overline{c-d}\ldots}\{y^{-1}+cy^{-2}+c^2y^{-3}\ldots\end{aligned}$$

Summirt man alle diese, so werden die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von y lauter Reihen von derselben Form wie (A). Bezeichnet man also die Summe einer solchen

*) In seiner vortrefflichen Dissertation: *De functionibus quibusdam symmetricis Auct.* Posselt. *Gottingae* 1818.

Reihe mit [0], [1], ... [m], je nach dem Grade der Potenz, zu welcher die Zähler der Brüche erhoben sind, so wird

$$(C)\quad \frac{1}{Y} = [0]y^{-1} + [1]y^{-2} + [2]y^{-3} \ldots$$
$$+ [n-2]y^{-(n-1)} + [n-1]y^{-n} \ldots + [n+r-1]y^{-(n+r)}$$

und die Vergleichung der Coefficienten derselben Potenz von y in (B) und (C) giebt sogleich übereinstimmend mit dem Obigen

$$[0] = 0\ [1] = 0 \ldots \text{bis } [n-2] = 0$$

dagegen aber

$$[n-1] = 1 \text{ und allgemein } [n+r-1] = {}^{r}(0)^{n}.$$

Aus dem ersten Resultate

$$[n-1] = 1$$

wird sich das für die Interpolation verlangte ergeben.

Gesetzt nämlich, es sei in dem vollständigen Ausdrucke von $f(x)$, das vierte oder merklichste Glied aufser den angewanden noch

$$+ \varepsilon \cdot (x-a)^4$$

so werden auch $P\,Q\,R\,S$, da sie aus dem vollständigen Ausdruck berechnet sind, noch die Glieder $\varepsilon\,(p-a)^4$, $\varepsilon\,(q-a)^4$, $\varepsilon\,(r-a)^4$, $\varepsilon\,(s-a)^4$ enthalten, und der Ausdruck (I) wird aufser den Werthen, die von den niederen Potenzen bis zur 3ten inclusive herrühren, noch das Increment haben:

$$-\varepsilon \cdot x-p\ x-q\ x-r\ x-s \left\{ \frac{(p-a)^4}{p-x\ p-q\ p-r\ p-s} + \frac{(q-a)^4}{q-x\ q-p\ q-r\ q-s} + \frac{(r-a)^4}{r-x\ r-p\ r-q\ r-s} + \frac{(s-a)^4}{s-x\ s-p\ s-q\ s-r} \right\}$$

Es werden aber die Nenner dieser Brüche nicht geändert, wenn man in ihnen die Werthe von $x\,p\,q\,r\,s$ sämmtlich um a

vermindert, folglich wird man nach dem eben bewiesenen Theorem den in {} eingeschlossenen Theil auch so schreiben können:

$$1-\frac{(x-a)^4}{x-p\; x-q\; x-r\; x-s}$$

und die Formel (I) giebt folglich den Werth

$$\begin{aligned}X=\alpha+\beta\,(x-a)+\gamma\,(x-a)^2-\delta\,(x-a)^3\\ +\varepsilon\,(x-a)^4-\varepsilon\; x-p\;\; x-q\;\; x-r\;\; x-s\end{aligned}$$

Oder in Bezug auf die vierten Potenzen allein, ist der Fehler der Interpolation, d. h. das, was man ihr noch hinzufügen müſste, um den wahren Werth zu erhalten:

$$+\varepsilon\,(x-p)\;\;(x-q)\;\;(x-r)\;\;(x-s).$$

Die Bedingungen der Aufgabe lehren zwar nichts über den Werth von ε, allein wenn man die Wahl hat, welche Argumente man zur Interpolation anwenden kann, so kann man sie wenigstens so wählen, daſs das Product

$$x-p\;\; x-q\;\; x-r\;\; x-s$$

ein Minimum wird. Offenbar aber wird das der Fall sein, wenn einer der Werthe $p\; q\; r\; s$ dem x so nahe als möglich liegt, und die andern zu beiden Seiten so gleichförmig, als die gegebenen Daten verstatten, vertheilt sind. Wollte man z. B. für $x=41\frac{1}{3}$ interpoliren, so würde, wenn man die Argumente 40 41 42 43 wählte, der Fehler der Kleinstmöglichste

$$=+\frac{40}{81}\,\varepsilon$$

für 41 42 43 44 würde er $=-\frac{80}{81}\,\varepsilon$, und für die Argumente 39 40 41 42 $=-\frac{56}{81}\,\varepsilon$; so daſs das Verhältniſs der Fehler, abgesehen von dem Zeichen, sein würde:

$$10:20:14.$$

Diese Regel, die anzuwendenden Werthe $p\ q\ r\ s$ stets so zu wählen, dafs x möglichst nahe ihrer Mitte fällt, sollte nie aufser Acht gelassen werden.

Die allgemeine Formel (I) kann bei einer einzelnen Interpolation manchmal mit Nutzen gebraucht werden. Sie hat den Vortheil, dafs, wenn vielleicht eine der Gröfsen $P\ Q\ R\ S$ fehlerhaft sein sollte, man bei ihr sogleich übersieht, wie grofs der Einflufs dieses Fehlers auf X sei. Sie hat aber den Nachtheil, dafs man gewöhnlich nicht weifs, wie viele Glieder $P\ Q\ R\ S$ zur genauen Interpolation hinreichen und nöthig sind, und darum auch bei ihrer einzelnen Anwendung nicht sicher ist, ob man die äufserste Genauigkeit erreicht hat.

Um diese Uebersicht zu erleichtern, entwickele man die Formel (I) in eine Reihe, die successive von dem Gebrauche zweier Gröfsen, zu dem von dreien u. s. w. aufsteigt. Nennt man den Werth von X aus n Gröfsen hergeleitet X_n, so hat man

$$\begin{aligned} X_4 - X_3 = {} & S\,\frac{x-p\;\, x-q\;\, x-r}{s-p\;\, s-q\;\, s-r} \\ & + R\left(\frac{x-p\;\, x-q\;\, x-s}{r-p\;\, r-q\;\, r-s} - \frac{x-p\;\, x-q}{r-p\;\, r-q}\right) \\ & + Q\left(\frac{x-p\;\, x-r\;\, x-s}{q-p\;\, q-r\;\, q-s} - \frac{x-p\;\, x-r}{q-p\;\, q-r}\right) \\ & + P\left(\frac{x-q\;\, x-r\;\, x-s}{p-q\;\, p-r\;\, p-s} - \frac{x-q\;\, x-r}{p-q\;\, p-r}\right) \end{aligned}$$

oder wenn man zusammenzieht

$$\begin{aligned} X_4 - X_3 = x-p\;\; x-q\;\; x-r & \left\{\frac{P}{p-q\;\, p-r\;\, p-s} + \frac{Q}{q-p\;\, q-r\;\, q-s}\right. \\ & \left. + \frac{R}{r-p\;\, r-q\;\, r-s} + \frac{S}{s-p\;\, s-q\;\, s-r}\right\} \end{aligned}$$

Eben so wird

$$X_3 - X_2 = x-p\;\; x-q\left\{\frac{P}{p-q\;\, p-r} + \frac{Q}{q-p\;\, q-r} + \frac{R}{r-p\;\, r-q}\right\}$$

$$X_2 - X_1 = x-p\left\{\frac{P}{p-q} + \frac{Q}{q-p}\right\}$$

$X_1 = P$ da bei einem gegebenen Werthe von Interpolation eigentlich nicht die Rede sein kann. Eben so ist $X_2 - X_1$ nichts anderes als der einfache Proportionaltheil.

Die in $\{\}$ eingeschlossenen Gröſsen sind ganz symmetrische Functionen von 2, 3, 4, und, wie man ohne vollständigen Beweis doch bald übersieht, von fünf und mehreren Gröſsen. Jeder Functionenwerth ist in ihnen dividirt durch das Product aller Differenzen des zugehörigen Argumentes von jedem der übrigen. Man nenne sie Differenzgröſsen, und bezeichne sie, je nach den Gröſsen, die zu ihrer Bildung beitragen, durch $[p\,q]$, $[p\,q\,r]$ u. s. w. Bei der Symmetrie der Formeln sind $[p\,q\,r]$ und $[q\,r\,p]$ identisch, oder die Buchstaben lassen sich willkürlich vertauschen.

Durch die Addition der verschiedenen Werthe erhält jetzt die Formel (I) die zum Gebrauch bequemere Gestalt

$$\begin{aligned} X_4 = P + x - p\,[p\cdot q] + x - p\; x - q\,[p\cdot q\cdot r] \\ + x - p\; x - q\; x - r\,[p\cdot q\cdot r\cdot s] \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

Am leichtesten wird die Bildung der Differenzgröſsen übersehen, wenn man zwei von denselben Dimensionen, in welchen alle Elemente bis auf eines dieselben sind, von einander abzieht. So z. B. ist

$$\begin{aligned} [q\cdot r\cdot s] - [p\cdot q\cdot r] &= \frac{S}{s-q\; s-r} + R\left\{\frac{1}{r-q\; r-s} - \frac{1}{r-p\; r-q}\right\} \\ &\quad + Q\left\{\frac{1}{q-r\; q-s} - \frac{1}{q-p\; q-r}\right\} - P\,\frac{1}{p-q\; p-r} \\ &= \frac{S}{s-q\; s-r} + \frac{R\; s-p}{r-p\; r-q\; r-s} \\ &\quad + \frac{Q\; s-p}{q-p\; q-r\; q-s} - \frac{P}{p-q\; p-r} \\ &= (s-p)\;[p\cdot q\cdot r\cdot s] \end{aligned}$$

und wie man bald übersieht, ganz allgemein

$$[q\cdot\cdot\cdot\cdot y\,z] - [p\cdot\cdot\cdot\cdot y] = (z-p)\;[p\cdot\cdot\cdot\cdot y\,z]$$

Denkt man sich also die Differenzgröfsen, wozu man der Symmetrie wegen $PQRS$ selbst rechnen kann, so untereinandergesetzt:

$$\begin{array}{c|cccccc}
p & P & & & & \\
 & & [p\cdot q] & & & \\
q & Q & & [p\cdot q\cdot r] & & \\
 & & [q\cdot r] & & [p\cdot q\cdot r\cdot s] & \\
r & R & & [q\cdot r\cdot s] & & [p\cdot q\cdot r\cdot s\cdot t] \\
 & & [r\cdot s] & & [q\cdot r\cdot s\cdot t] & \\
s & S & & [r\cdot s\cdot t] & & \\
 & & [s\cdot t] & & & \\
t & T & & & &
\end{array}$$

so entsteht jede folgende Verticalreihe, indem man ein Glied der vorhergehenden von dem darunterstehenden abzieht, und diese Differenz dividirt durch die Differenz der Argumente, auf welche die beiden durch die nächst höhere und nächst tiefere Differenzgröfse gezogenen Diagonalen hinweisen. Es ist nämlich:

$$[p\cdot q] = \frac{Q-P}{p-q}$$

$$[p\cdot q\cdot r] = \frac{[q\cdot r]-[p\cdot q]}{r-p}$$

$$[p\cdot q\cdot r\cdot s] = \frac{[q\cdot r\cdot s]-[p\cdot q\cdot r]}{s-p} \text{ u. s. w.}$$

Bei dieser Anwendung der Formel (II) wird man immer von oben herunter interpoliren, und auf die verschiedenen Zeichen Rücksicht nehmen müssen. Vortheilhafter und leichter zu übersehen ist es, wenn man aus der Mitte, oder aus der Gegend, wo x sich befindet, heraus interpolirte. Bei allen Formeln ist bisher auf eine bestimmte Anordnung gar keine Rücksicht genommen worden. Man wird also auch eine andere Gröfse als P zur ersten machen können. Wählt man die Anordnung $R\ Q\ S\ P\ T$, so wird die Formel (II):

$$X_4 = R + x-r\,[r\cdot q] + x-r\ x-q\ [r\cdot q\cdot s] \\ + x-r\ x-q\ x-s\ [r\cdot q\cdot s\cdot p]$$

oder mit erlaubter Vertauschung der Buchstaben:

$$\text{(III)} \qquad X_4 = R + x - r\ [q \cdot r] + x - r\ x - q\ [q \cdot r \cdot s]$$
$$+ x - r\ x - q\ x - s\ [p \cdot q \cdot r \cdot s]$$

und wenn man einen Blick auf das obige Schema wirft, so sieht man, dafs die hier gebrauchten Differenzgröfsen $[q \cdot r]$, $[q \cdot r \cdot s]$, $[p \cdot q \cdot r \cdot s]$ alle wechselsweise über und unter einer horizontalen Linie liegen, die man zwischen R und $[q \cdot r]$ mitten durchziehen kann. Eben so würde die Anordnung $R\ S\ Q\ T\ P$ die Formel geben:

$$\text{(IV)} \qquad X_4 = R + x - r\ [r \cdot s] + x - r\ x - s\ [q \cdot r \cdot s]$$
$$+ x - r\ x - s\ x - q\ [q \cdot r \cdot s \cdot t]$$

wo die horizontale Linie zwischen R und $[r \cdot s]$ durchgezogen werden mufs. Die Formel (III) gilt für den Fall, wo x zwischen q und r, die (IV), wo x zwischen r und s liegt.

Man kann beide in einen Ausdruck zusammenfassen, wenn man alle Gröfsen $p\ q\ r$ u. s. w., die auf der einen Seite von x liegen, mit $a_n\ a_{n-1} \cdots a_1\ a$ bezeichnet, wobei a dem x am nächsten, die auf der anderen Seite liegenden $s\ t \cdots$ mit $b\ b_1\ b_2 \cdots b_n$, wobei wiederum b dem x am nächsten. Setzt man nun überhaupt, dafs unter a immer die dem x nähere Gröfse, unter b die entferntere verstanden werden soll, so werden beide Formeln

$$\text{(V)} \qquad X = A + x - a\ [a \cdot b] + x - a\ x - b\ [a_1\ a\ b]$$
$$+ x - a\ x - b\ x - a_1\ [a_1\ a\ b\ b_1]$$
$$+ x - a\ x - b\ x - a_1\ x - b_1\ [a_2\ a_1\ a\ b\ b_1] \cdots\cdot$$

Zur Berechnung ist es am bequemsten, die Differenzgröfsen successive durch die folgenden zu verbessern, oder die Formel, mit Absonderung der gemeinschaftlichen Factoren, so zu schreiben:

$$\text{(VI)} \quad X = A + x - a \left\{[a\ b] + x - b \left\{[a_1\ a\ b] + x - a_1 \left\{[a_1\ a\ b\ b_1] \cdot\cdot\right\}\right\}\right\}$$

Man gebraucht dabei die Factoren in folgender Ordnung

$$x-b_n,\ x-a_n,\ x-b_{n-1},\ x-a_{n-1}\cdots\cdot\ x-a_1,\ x-b,\ x-a.$$

Wenn man also von x ausgeht, und zuerst das nächste Glied nimmt, um $x-a$ zu erhalten, dann auf der andern Seite $x-b$ bildet, jetzt wieder $x-a_1$ und so immer abwechselnd, so mufs man beim Gebrauch die Reihe der Factoren gänzlich umkehren.

Diese letzteren Formeln haben den erheblichen Vorzug, dafs man bei ihnen die Zeichen nicht zu berücksichtigen braucht, wenn man sich nur zur Regel macht, die Differenzgröfsen immer so zu verbessern, dass sie dadurch dem früher erwähnten Striche, über und unter welchem sie wechselseitig liegen, stets näher gebracht werden, oder dafs die Correction sie der jenseits des Striches liegenden Differenzgröfse annähert. Den Grund hievon ersieht man, wenn man die beiden Fälle, wo der Correctionsfactor von der Form $x-a_n$, und wo er von der $x-b_n$ ist, unterscheidet. Im ersteren Falle ist die Correction stets

$$+\,x-a_n\ [a_n\,a_{n-1}\cdots a\,b\cdots b_{n-1}\ b_n]$$

Wählt man der Kürze wegen ein bestimmtes Beispiel, wo n etwa $=1$, und entwirft sich das gehörige Schema, so wird man finden, dafs die angegebene Regel verlangt, dafs

(C) $$[a_1 a b] + x - a_1\,[a_1\,a\,b\,b_1]$$

immer falle zwischen

$$[a b b_1] \text{ und } [a_1 a b]$$

Nun ist aber nach dem früher Bewiesenen

$$[a_1 a\,b\,b_1] = \frac{[a\,b\,b_1]-[a_1 a b]}{b_1-a_1}$$

folglich wird der Ausdruck (C)

$$=[a_1 a\,b] + \frac{x-a_1}{b_1-a_1}\{[a\,b\,b_1]-[a_1 a\,b]\}$$

und der Factor

$$\frac{x-a_1}{b_1-a_1}$$

ist in allen Fällen, vermöge der angenommenen Bezeichnung, positiv und kleiner als 1. Da man nun statt $[a b b_1]$ auch schreiben kann

$$[a_1 a b] + \{[a b b_1] - [a_1 a b]\}$$

so sieht man, dafs die Correction stets, der Regel gemäfs, nach $[a b b_1]$ zu, die Differenzgröfse $[a_1 a b]$ hin corrigirt, den einzigen Fall ausgenommen, dafs durch eine frühere Correction die Differenzgröfse $[a_1 a b b_1]$ in ihrem Zeichen geändert wäre. In diesem einzigen Ausnahmefall wird eine Entfernung stattfinden. Allein bei einiger Aufmerksamkeit wird man besonders bei mehreren Interpolationen sich hierin nicht irren können.

Dasselbe findet bei dem zweiten Falle, wo der Correctionsfactor von der Form $x - b_n$ ist, statt. Die Correction ist dann

$$(x - b_n)\,[a_{n+1}\, a_n \cdots a b \cdots b_n]$$

wird angebracht an $[a_n \cdots a b \cdots b_n]$, und soll dieses der Differenzgröfse

$$[a_{n+1} \cdots a b \cdots b_{n-1}]$$

näher bringen. Die beiden den obigen analogen Ausdrücke werden hier:

$$[a_n \cdot\cdot a b \cdot\cdot b_n] - \frac{x - b_n}{a_{n+1} - b_n}\Big([a_n \cdot\cdot a b \cdot\cdot b_n] - [a_{n+1} \cdot\cdot a b \cdot\cdot b_{n-1}]\Big)$$

$$[a_n \cdot\cdot a b \cdot\cdot b_n] - \qquad\qquad \Big([a_n \cdot\cdot a b \cdot\cdot b_n] - [a_{n+1} \cdot\cdot a b \cdot\cdot b_{n-1}]\Big)$$

wobei wiederum der Factor

$$\frac{x - b_n}{a_{n+1} - b_n}$$

stets positiv und kleiner als 1 ist. Dieselbe Ausnahme findet auch hier wie oben statt.

Wendet man nun diese allgemeinen Formeln auf den bei astronomischen Interpolationen häufigsten Fall an, wo $p\ q\ r\ s$ eine arithmetische Reihe bilden, so sieht man sogleich, dafs die Differenzgröfsen in die sogenannten ersten, zweiten, dritten und folgenden Differenzen übergehen, jede respective durch das Product aller ganzen Zahlen bis zu ihrem Zeiger inclusive dividirt. Oder es wird

$$[p\cdot q] \quad = \triangle P$$
$$[p\cdot q\cdot r] = \frac{\triangle^2 P}{1\ 2}$$
$$[p\cdot q\cdot r\cdot s] = \frac{\triangle^3 P}{1\,2\,3}$$

wobei die gleichen Intervalle $q-p$, $r-q$ etc. als Einheiten angesehen werden. Setzt man

$$x-p=t$$

in diesen Einheiten ausgedrückt, und schreibt überall

$$\text{statt } x-q \cdots\cdots x-p-(q-p)$$
$$x-r \cdots\cdots x-p-(r-p)$$

so wird die Formel (II):

$$\text{(II)*} \qquad X = P + t\cdot\triangle P + \frac{t\cdot t{-}1}{1\ 2}\triangle^2 P + \frac{t\cdot t{-}1\cdot t{-}2}{1\ 2\ 3}\triangle^3 P\ldots$$

die gewöhnliche Interpolationsformel.

Versteht man dagegen unter $\triangle\ \triangle^2\ \triangle^3$ die Differenzen, welche wechselsweise unter und über dem horizontalen Striche liegen, der von der Gegend des x aus gezogen wird, so wird bei aufsteigendem Argumente aus (III.), wenn $r-x=t$, oder x zwischen q und r liegt:

$$\text{(III)*} \qquad X = R - t\cdot\triangle Q + \frac{t\cdot t{-}1}{1\ 2}\triangle^2 R - \frac{t\cdot t{-}1\cdot t{+}1}{1\ 2\ 3}\triangle^3 Q\ldots\ldots$$

und aus (IV) wenn $x-r=t$, oder x zwischen r und s liegt:

$$\text{(IV)*} \qquad X = R + t\,\triangle R + \frac{t\cdot t{-}1}{1\ 2}\triangle^2 R + \frac{t\cdot t{-}1\cdot t{+}1}{1\ 2\ 3}\triangle^3 R\ldots\ldots$$

Wäre das Argument bei den letzten Formeln nicht aufsteigend, sondern niedersteigend, so würden die Zeichen der Glieder in beiden nur zu vertauschen sein, wenn man t immer als positiv ansehen will. Für die successive Verbesserung der Differenzen erhält man

$$X = R - t\left\{\Delta Q - \frac{t-1}{2}\left\{\Delta^2 R - \frac{t+1}{3}\left\{\Delta^3 Q - \frac{t-2}{4}\left\{\Delta^4 R \ldots\right\}\right\}\right\}\right\}$$

$$X = R + t\left\{\Delta R + \frac{t-1}{2}\left\{\Delta^2 R + \frac{t+1}{3}\left\{\Delta^3 R + \frac{t-2}{4}\left\{\Delta^4 R \ldots\right\}\right\}\right\}\right\}$$

Wenn t genau gleich $\frac{1}{2}$, oder wenn x genau in der Mitte zwischen q und r liegt, so ist es, in Hinsicht auf die Genauigkeit, einerlei, ob man von q aus vorwärts, oder von r aus rückwärts interpolirt. Die erste Form würde nach (IV)* heifsen:

$$X = Q + \frac{1}{2}\Delta Q + \frac{\frac{1}{2}\cdot - \frac{1}{2}}{1 \quad\; 2}\Delta^2 Q + \frac{\frac{1}{2}\cdot - \frac{1}{2}\cdot - \frac{3}{2}}{1 \quad\; 2 \quad\; 3}\Delta^3 Q$$

und die zweite nach (III)*

$$X = R - \frac{1}{2}\Delta Q + \frac{\frac{1}{2}\cdot - \frac{1}{2}}{1 \quad\; 2}\Delta^2 R - \frac{\frac{1}{2}\cdot - \frac{1}{2}\cdot - \frac{3}{2}}{1 \quad\; 2 \quad\; 3}\Delta^3 Q$$

Bei der Verbindung beider fallen alle ungeraden Differenzen heraus, und wenn man die jedesmaligen Summen der geraden Differenzen, die auf derselben horizontalen Linie mit Q und R stehen, durch k' k'' u. s. w. bezeichnet, oder setzt

$$\begin{aligned} Q + \quad R &= k \\ \Delta^2 Q + \Delta^2 R &= k' \\ \Delta^4 Q + \Delta^4 R &= k'' \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

so heifst die Formel

$$\text{(V)*} \qquad X = \frac{1}{2}k - \frac{1\;1}{2\;4}\frac{k'}{2} + \frac{1\;1\;3\;3}{2\;4\;6\;8}\frac{k''}{2} - \frac{1\;1\;3\;3\;5\;5}{2\;4\;6\;8\;10\;12}\frac{k'''}{2} \ldots$$

$$= \frac{1}{2}\left\{k - \frac{1}{8}\left\{k' - \frac{3}{16}\left\{k'' - \frac{5}{24}\left\{k''' \ldots\right\}\right\}\right\}\right\}$$

Bei dieser Formel kann man sich wieder die Rücksicht auf die Zeichen durch eine andere Betrachtung ersparen. Bezeichnet man nämlich die beiden Differenzen, die irgend welches k bilden, mit β und β', und die nächstvorhergehende und folgende mit $'\beta$ und β'', und bildet sich das Schema:

$$\begin{array}{llll} '\beta & & & \\ & \beta - '\beta & & \\ \beta & & \beta' - 2\beta + '\beta & \\ & \beta' - \beta & & \\ \beta' & & \beta'' - 2\beta' + \beta & \\ & \beta'' - \beta' & & \\ \beta'' & & & \end{array}$$

so wird, wenn

$$k^n = \beta + \beta' \qquad k^{n+1} = \beta'' - \beta' - \beta + '\beta$$
$$= \beta'' + '\beta - k^n$$

oder es ist immer

$$k^n + k^{n+1} = \beta'' + '\beta$$

Die Correction hat aber immer die Form

$$k^n - \alpha k^{n+1}$$

wo α positiv und kleiner als 1. Folglich wird die an k^n oder $\beta + \beta'$ angebrachte Correction stets so wirken, dafs sie die Summe $\beta + \beta'$ von der Summe der nächstfolgenden und nächstvorhergehenden Differenz entfernt, den Fall ausgenommen, wo k^{n+1} durch eine frühere Correction sein Zeichen geändert haben sollte, was bei mehreren aufeinanderfolgenden Interpolationen leicht zu übersehen ist, und nie zu Irrthümern führen wird. Diese letzte Formel (V)* ist so genau, und zugleich so bequem, dafs bei Berechnung einer Tafel man immer wohl thun wird, für Intervalle, die um eine ganze Potenz von 2 von einander entfernt sind, die strengen Werthe zu berechnen, und dann die zwischenliegenden nach dieser Formel zu suchen.

Zur Bildung von Beispielen wollen wir den umstehenden Theil der Ephemeride für die Mondslänge aus dem Jahrbuch für 1830 benutzen:

		λ	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
Apr. 4	0^h	152° 15′ 56″,6				
			+ 5 59 48,9			
	12	158 15 45,5		− 1 48,2		
			5 58 0,7		+ 23,1	
5	0	164 13 46,2		1 25,1		− 1,2
			5 56 35,6		21,9	
	12	170 10 21,8		1 3,2		2,5
			5 55 32,4		19,4	
6	0	176 5 54,2		0 43,8		
			5 54 48,6			
	12	182 0 42,8				

Wollte man hier die Länge für Apr. 5 7^h haben, so müfste man von Apr. 5 12^h ausgehen und die Formel (III)* anwenden. Die Factoren $x-a$ $x-b$ etc. nach V und VI, immer durch die Ordnungszahl der Differenz dividirt, sind dasselbe, was in III* durch t, $\frac{t-1}{2}$ etc. ausgedrückt wird; man hat also die Correctionsfactoren:

$$\frac{5}{12} \qquad \frac{7}{24} \qquad \frac{17}{36} \qquad \frac{19}{48}$$

und wenn man die Reihe umkehrt:

$$\frac{19}{48} \qquad \frac{17}{36} \qquad \frac{7}{24} \qquad \frac{5}{12}$$

Die Verbesserung der dritten Differenz durch die vierte wird

$$\frac{2{,}5 \cdot 19}{48} = 1{,}0$$

und ist, ohne weitere Rücksicht auf das Zeichen zu nehmen, so anzubringen, dafs 21,9 dem 19,4 genähert wird. Folglich wird die verbesserte dritte Differenz 20,9. Hiemit wird die zweite:

$$1\ \ 3{,}2 + \tfrac{17}{36}\, 20{,}9 = 1\ \ 13{,}07$$

weil die Verbesserung eine Annäherung an 1 25,1 bewirken soll. Die verbesserte erste wird jetzt:

$$5\ \ 56\ \ 35{,}6 - \tfrac{7}{24}\, 73{,}07 = 5\ \ 56\ \ 14{,}29$$

aus dem nämlichen Grunde. Nimmt man hievon $\frac{5}{12}$ und subtrahirt sie von 170 10 21,8, so hat man:

Apr. 5. 7^h ... 167° 41′ 55″,85

Wäre man von Apr. 5 0^h nach der Formel (IV)* ausgegangen, gegen die obige Regel, so würden die Factoren gewesen sein:

$$\frac{7}{12} \qquad \frac{5}{24} \qquad \frac{19}{36} \qquad \frac{17}{48}$$

und die verbesserten Differenzen nach der Ordnung:

22,3   1 13,3   5 56 50,87

wodurch ebenfalls dieselbe Länge erhalten wäre. Dafs die gegebene Regel vollkommen mit dem Wechsel der Zeichen in diesem Beispiel übereinstimmt, wird Jeder bei gehöriger Rücksichtnahme darauf finden.

Um die Leichtigkeit der Interpolation in die Mitte hinein nach der Formel (V)* zu bemerken, suche man die Längen für Apr. 5 6^h und 18^h. Da die vierten Differenzen unsicher sind, so braucht man sie eigentlich nicht einmal mitzunehmen, auch wird ihr Einflufs nur dann merklich sein, wenn sie beträchtlicher sind wie hier, da die Summe k'' multiplicirt wird mit $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{256}$. Man hat folglich für

$$6^h \ldots k' = -2\ 28,\dot{3} \ldots -\tfrac{1}{8} k' = +18,54$$
$$18^h \ldots k' = -1\ 47,0 \ldots -\tfrac{1}{8} k' = +13,38$$

Und dann:

Apr. 5.	0^h	164°	13′	46″,2		
					+2 58 27,1	
	6	167	12	13 ,3		−18,6
					58 8,5	
	12	170	10	21 ,8		15,6
					57 52,9	
	18	173	8	14 ,7		13,4
					57 39,5	
6.	0	176	5	54 ,2		

Interpolirt man wieder in die Mitte hinein, so hat man für

$$9^h \ldots k' = -34{,}2 \qquad -\tfrac{1}{8}k' = +4{,}3$$

$$\begin{array}{lrrrrcc}
\text{Apr. 5.} & 6^h & 167 & 12 & 13{,}3 & & \\
 & & & & & +1\;29\;6{,}4 & \\
 & 9 & 168 & 41 & 19{,}7 & & -4{,}3 \\
 & & & & & 1\;29\;2{,}1 & \\
 & 12 & 170 & 10 & 21{,}8 & &
\end{array}$$

woraus nach der gewöhnlichen Interpolationsformel (II)* für 7^h $t = \frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{rrrr}
 & 167 & 12 & 13{,}3 \\
 & + & 29 & 42{,}13 \\
 & + & & 0{,}48 \\
\hline
7^h \ldots & 167 & 41 & 55{,}9
\end{array}$$

wie oben. Die Rücksicht auf die Zeichen hätte man sich bei der Interpolation in die Mitte hinein wieder ersparen können, weil ein Blick zeigt, dafs die k vergröfsert werden müssen.

Hat man nicht für ganze Stunden zu interpoliren, sondern für eine Zeit, die einzelne Secunden enthält, so kann man sich erlauben, bei den Correctionsfactoren der höheren Differenzen einen genäherten ächten Bruch statt des wahren t zu substituiren. So wenn man die Länge für den Austritt von 82 LEONIS $7^h\,24'\,16''$ haben will, so wird, wenn man von Apr. 5 12^h ausgeht:

$$t = \frac{4^h\,35'\,44''}{12}$$

wofür man aus den Kettenbrüchen den genäherten Werth $\frac{5}{13}$ erhält. Die Factoren werden also:

$$\frac{8}{26} \qquad\qquad \frac{18}{39} \qquad\qquad \frac{21}{52}$$

die verbesserten Differenzen

$$20{,}9 \qquad\qquad 1\;12{,}8 \qquad\qquad 5^\circ\,56'\,13'',20$$

Wendet man bei dieser letzten den genauen Werth von t an, so erhält man:

$$7^h\,24'\,16'' \ldots 167^\circ\,53'\,56'',7$$

übereinstimmend mit der Interpolation aus den gefundenen Werthen für 6^h 9^h und 12^h.

Ueber mechanische Quadratur.*)

Die mechanische Quadratur gründet sich auf die Herleitung des allgemeinen Ausdrucks für irgend welche Function aus gegebenen numerischen Werthen derselben vermittelst der Interpolationsrechnung. Die gegebenen Werthe der Function werden immer bestimmten Werthen der Variabeln entsprechen, welche in der Function enthalten sind. Für den Fall der allein hier betrachtet werden wird, dafs nur eine unabhängige Variable vorkommt, können die bestimmten Werthe dieser Variabeln, für welche die Werthe der Function gegeben sind, entweder keiner festen Ordnung folgen, in welchem Falle die Interpolationsrechnung mit ungleichen Intervallen anzuwenden sein wird, und die so-

*) Bei meinem Aufenthalt in Göttingen im Jahre 1812 übertrug mir Herr Hofrath Gaufs die Berechnung der speciellen Störungen der Pallas, und leitete mir zu diesem Behufe seine Methoden und Formeln ab, deren er seit längerer Zeit sich bedient hatte. Er hatte damals die Absicht selbst etwas über diesen Gegenstand bekannt zu machen und behielt sich diese Erläuterung vor. Jetzt wo leider die Aussicht auf ein eigenes Werk von Gaufs, wegen seiner vielfachen andern wichtigen Untersuchungen, so gut wie verschwunden scheint, hat er es mir gestattet, das was ich aus seinen Vorträgen für die nachherige häufige Anwendung auf Cometen und kleine Planeten benutzt habe hier zu publiciren; wobei ich nur noch hinzuzufügen mir erlaube, dafs der Weg zum Beweise der Formeln nicht genau der ist, welchen Gaufs bei mir genommen, weil es mir nicht rathsam schien allzu viele verwandte Betrachtungen einzumischen. Diese Bemerkung soll, wie sich von selbst versteht, nur bevorworten, dafs wenn vielleicht in der Beweisführung Einiges nicht bestimmt genug erscheinen möchte, der Fehler ganz allein mir zur Last fällt.

genannten Cotesischen Formeln hervorgehen, oder sie können eine arithmetische Progression bilden, wobei die gewöhnliche Interpolation benutzt wird. Nur diese letzte regelmäfsige Reihefolge der Argumente wird bei dem Problem der speciellen Störungen mit Vortheil gewählt werden können, weswegen auch hier nur eine arithmetische Progression bei der Aufeinanderfolge der Argumente vorausgesetzt wird.

Zur leichten Uebersicht der verschiedenen Differenzreihen welche hier vorkommen werden, bezeichne man die Reihefolge der Werthe des Arguments, oder der bestimmten Werthe der Variabeln für welche die numerischen Werthe der Function gegeben sind, mit

$$a,\ a+1\omega,\ a+2\omega,\ a+3\omega, \ldots.$$

und die ihnen entsprechenden Werthe der Function mit

$$f(a),\ f(a+1),\ f(a+2),\ f(a+3), \ldots.$$

wobei unter dem Functionszeichen die gewählte Einheit des Intervalls ω weggelassen ist. Irgend welcher unbestimmte Werth der Variabeln wird dann durch $a+n\omega$, und der Function durch $f(a+n\omega)$ ausgedrückt werden können, wo n eine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl sein kann. Die ersten Differenzen von $f(a)$, $f(a+1)$, $f(a+2)$ etc. mögen durch das Functionszeichen f' angedeutet werden, und um den Ort der Differenz jedesmal anzugeben, füge man unter f' das arithmetische Mittel der Argumente hinzu, welche bei den beiden Functionen f zum Grunde liegen, aus deren Differenz f' entstanden ist. Es wird also

$$\begin{aligned} f(a+1)-f(a) &= f'(a+\tfrac{1}{2}) \\ f(a+2)-f(a+1) &= f'(a+\tfrac{3}{2}) \text{ etc.} \end{aligned}$$

Dasselbe Gesetz in Hinsicht auf die Bezeichnung finde auch bei allen folgenden Differenzen statt. Die zweiten Differenzen sollen durch f'', die dritten durch f''' etc. angedeutet werden, jedesmal mit Hinzufügung des arithmetischen Mittels aus den Argumenten, welche bei den beiden vorhergehenden Hauptfunctionen statt finden, deren Differenz die neue Function ist. So wird

$$f'(a+\tfrac{1}{2}) - f'(a-\tfrac{1}{2}) = f''(a)$$
$$f'(a+\tfrac{3}{2}) - f'(a+\tfrac{1}{2}) = f''(a+1) \text{ etc.}$$
$$f''(a+1) - f''(a) \quad = f'''(a+\tfrac{1}{2})$$
$$f''(a+2) - f''(a+1) = f'''(a+\tfrac{3}{2}) \text{ etc.}$$

Diese Bezeichnung erinnert zugleich daran, daſs die verschiedenen Differenzreihen, eben so wie die ursprüngliche Function, als Gröſsen angesehen werden müssen, welche einer arithmetischen Reihe von Argumenten entsprechen. Wenn man die Differenz $f'(a-\frac{1}{2})$, als eine Function von $(a-\frac{1}{2})$ wirklich betrachten wollte, so wird $f'(a+\frac{1}{2})$ dieselbe Function von $(a+\frac{1}{2})$ sein, weil jene in diese übergeht wenn man $(a+1)$ statt (a) substituirt. Die unter den Functionszeichen stehenden Argumente bei den ungeraden Differenzreihen, der ersten, dritten, fünften u. s. w. enthalten bei den wirklich vorkommenden Differenzen immer Brüche deren Nenner 2 ist, bei den geraden Differenzreihen sind alle Argumente der wirklich vorkommenden Differenzen aus ganzen Zahlen gebildet.

Das vollständige Schema wird hiernach folgendes:

Argument.	Haupt-function.	I. Diff.	II. Diff.	III. Diff.	IV. Diff.	etc.
$a-2\cdot\omega$	$f(a-2)$		$f''(a-2)$		$f^{IV}(a-2)$	etc.
		$f'(a-\frac{3}{2})$		$f'''(a-\frac{3}{2})$		
$a-1\cdot\omega$	$f(a-1)$		$f''(a-1)$		$f^{IV}(a-1)$	„
		$f'(a-\frac{1}{2})$		$f'''(a-\frac{1}{2})$		
a	$f(a)$		$f''(a)$		$f^{IV}(a)$	„
		$f'(a+\frac{1}{2})$		$f'''(a+\frac{1}{2})$		
$a+1\cdot\omega$	$f(a+1)$		$f''(a+1)$		$f^{IV}(a+1)$	„
		$f'(a+\frac{3}{2})$		$f'''(a+\frac{3}{2})$		
$a+2\cdot\omega$	$f(a+2)$		$f''(a+2)$		$f^{IV}(a+2)$	„
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	

In der Interpolationsrechnung wird bewiesen, daſs für irgend welchen Werth des Argumentes $\cdots a+n\omega\cdots$ die Gleichung gilt:

$$\begin{aligned} f(a+n\omega) &= f(a) + nf'(a+\tfrac{1}{2}) + \frac{n(n-1)}{1\quad 2} f''(a) \\ (1)\qquad &+ \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1\quad 2\quad 3} f'''(a+\tfrac{1}{2}) + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{1\quad 2\quad 3\quad 4} f^{IV}(a) \\ &+ \frac{(n+2)\,(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5} f^{V}(a+\tfrac{1}{2})\ldots\end{aligned}$$

und eben so weil

$$f'\ (a+\tfrac{1}{2}) = f'\ (a-\tfrac{1}{2}) + f''\ (a)$$
$$f'''(a+\tfrac{1}{2}) = f'''(a-\tfrac{1}{2}) + f^{\mathrm{IV}}(a) \text{ etc.}$$

auch sein wird:

$$\begin{aligned} f(a+n\omega) &= f(a) + nf'(a-\tfrac{1}{2}) + \frac{n\,(n+1)}{1 \quad 2} f''(a) \\ (2) \qquad &+ \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1 \quad 2 \quad 3} f'''(a-\tfrac{1}{2}) + \frac{(n+2)\,(n+1)\,n\,(n-1}{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4} f^{\mathrm{IV}}(a) \\ &+ \frac{(n+2)\,(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5} f^{\mathrm{V}}(a-\tfrac{1}{2}) \ldots . \end{aligned}$$

Die erste Formel wird am vortheilhaftesten gebraucht wenn n positiv ist, die zweite wenn n negativ ist. Für einen sehr kleinen Werth von n kann man jede der beiden Formeln mit nahe gleicher Genauigkeit anwenden, oder noch besser das arithmetische Mittel aus ihnen. Um dieses übersichtlich schreiben zu können, führe man die neue Bezeichnung ein, daſs das arithmetische Mittel zweier auf einander folgenden Functionen in jeder Differenzreihe durch dasselbe Functionszeichen, mit Hinzufügung des arithmetischen Mittels aus den Argumenten der beiden Functionen angedeutet werden soll. Es wird hiernach

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} f'\ (a+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2} f'\ (a-\tfrac{1}{2}) &= f'(a) \\ \tfrac{1}{2} f'\ (a+\tfrac{3}{2}) + \tfrac{1}{2} f'\ (a+\tfrac{1}{2}) &= f'\ (a+1) \text{ etc.} \\ \tfrac{1}{2} f''\ (a+1) + \tfrac{1}{2} f''\ (a) \qquad &= f''\ (a+\tfrac{1}{2}) \\ \tfrac{1}{2} f''\ (a+2) + \tfrac{1}{2} f''\ (a+1) &= f''\ (a+\tfrac{3}{2}) \text{ etc.} \\ \tfrac{1}{2} f'''(a+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2} f'''(a-\tfrac{1}{2}) &= f'''(a) \\ \tfrac{1}{2} f'''(a+\tfrac{3}{2}) + \tfrac{1}{2} f'''(a+\tfrac{1}{2}) &= f'''(a+1) \text{ etc.} \end{aligned}$$

Der fehlende Bruch mit dem Nenner 2 bei den ungeraden Differenzreihen, oder einem ungeraden Accente des Functionszeichens, deutet folglich ein arithmetisches Mittel an; ebenso ein vorkommender Bruch bei den geraden Differenzreihen und Accenten ein arithmetisches Mittel zwischen zwei gleichnamigen Functionen.

Wendet man dieses auf das arithmetische Mittel zwischen (1) und (2) an, so wird

$$
\begin{aligned}
f(a+n\omega) = f(a) &+ nf'(a) + \frac{n^2}{1\cdot 2}f''(a) + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(a) \\
(3) \qquad &+ \frac{(n+1)\,n\cdot n\,(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f^{\mathrm{IV}}(a) \\
&+ \frac{(n+2)\,(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}f^{\mathrm{V}}(a)\ldots
\end{aligned}
$$

Ordnet man diese Reihe nach Potenzen von n so wird:

$$
\begin{aligned}
f(a+n\omega) = f(a) &+ n\,\{f'(a) - \tfrac{1}{6}f'''(a) + \tfrac{1}{30}f^{\mathrm{V}}(a) - \tfrac{1}{140}f^{\mathrm{VII}}(a)\ldots\} \\
&+ \tfrac{1}{2}n^2\{f''(a) - \tfrac{1}{12}f^{\mathrm{IV}}(a) + \tfrac{1}{90}f^{\mathrm{VI}}(a)\ldots.\} \\
&+ \tfrac{1}{6}n^3\{f'''(a) - \tfrac{1}{4}f^{\mathrm{V}}(a) + \tfrac{7}{120}f^{\mathrm{VII}}(a)\ldots.\} \\
(4) \qquad &+ \tfrac{1}{24}n^4\{f^{\mathrm{IV}}(a) - \tfrac{1}{6}f^{\mathrm{VI}}(a)\ldots.\} \\
&+ \tfrac{1}{120}n^5\{f^{\mathrm{V}}(a) - \tfrac{1}{3}f^{\mathrm{VII}}(a)\ldots.\} \\
&+ \tfrac{1}{720}n^6\{f^{\mathrm{VI}}(a)\ldots.\} \\
&+ \tfrac{1}{5040}n^7\{f^{\mathrm{VII}}(a)\ldots.\}
\end{aligned}
$$

wo nur $f''(a)$, $f^{\mathrm{IV}}(a)$, $f^{\mathrm{VI}}(a)$ wirklich in den Differenzreihen vorkommen, $f'(a)$, $f'''(a)$, $f^{\mathrm{V}}(a)$, $f^{\mathrm{VII}}(a)$ die arithmetischen Mittel sind, welche in dem allgemeinen Schema auf einer Horizontallinie stehend gedacht werden können, die durch $f(a)$, $f''(a)$, $f^{\mathrm{IV}}(a)$, $f^{\mathrm{VI}}(a)\ldots$ gezogen worden ist.

Diese Reihe giebt unmittelbar die Werthe der Differentialquotienten $\frac{df(a)}{da}$, $\frac{d^2f(a)}{da^2}$, $\frac{d^3f(a)}{da^3}$ etc. Denn da $\frac{df(a)}{da}$ nichts anderes ist als die Grenze von $\frac{f(a+n\omega)-f(a)}{n\omega}$ bei unendlich kleinem n (falls ω als constant beibehalten werden soll) und eben so $\frac{d^2f(a)}{da^2}$, $\frac{d^3f(a)}{da^3}$ etc. so wird

$$
\begin{aligned}
&\frac{df(a)}{da} = \frac{1}{\omega}\{f'(a) - \tfrac{1}{6}f'''(a) + \tfrac{1}{30}f^{\mathrm{V}}(a) - \tfrac{1}{140}f^{\mathrm{VII}}(a)\ldots.\} \\
(5) \qquad &\frac{d^2f(a)}{da^2} = \frac{1}{\omega^2}\{f''(a) - \tfrac{1}{12}f^{\mathrm{IV}}(a) + \tfrac{1}{90}f^{\mathrm{VI}}(a)\ldots.\} \\
&\frac{d^3f(a)}{da^3} = \frac{1}{\omega^3}\{f'''(a) - \tfrac{1}{4}f^{\mathrm{V}}(a) + \tfrac{7}{120}f^{\mathrm{VII}}(a)\ldots.\}
\end{aligned}
$$

und überhaupt $\frac{d^m f(a)}{da^m}$ = dem Coefficienten von $\frac{n^m}{1\;2\;3\ldots m}$ in der obigen Reihe multiplicirt mit $\frac{1}{\omega^m}$. Der Differentialquotient irgend welcher Function $f(a+n\omega)$ wird daraus

$$\frac{df(a+n\omega)}{da}=\frac{df(a+n\omega)}{dn}\cdot\frac{1}{\omega}=\frac{df(a)}{da}+n\omega\frac{d^2f(a)}{da^2}+\tfrac{1}{2}n^2\omega^2\frac{d^3f(a)}{da^3}+\ldots.$$

wenn man die eben gegebenen Werthe substituirt, oder wenn man nicht nach Potenzen von n ordnen will:

$$\frac{df(a+n\omega)}{da}=\frac{1}{\omega}\Big\{f'(a)+nf''(a)+\frac{3n^2-1}{1\;2\;3}f'''(a)+\frac{4n^3-2n}{1\;2\;3\;4}f^{\mathrm{IV}}(a)$$
$$(6)\qquad +\frac{5n^4-15n^2+4}{1\;2\;3\;4\;5}f^{\mathrm{V}}(a)\cdots\Big\}$$

So wie in (4) die Argumentwerthe a durchgängig eingeführt sind, wobei das arithmetische Mittel der ungeraden Differenzen angewandt werden mufste, so kann man auch die Argumentenwerthe $(a-\frac{1}{2})$ durchgängig einführen, in welchem Falle das arithmetische Mittel bei den geraden Differenzen eintreten wird. Schreibt man für $a+n\omega\ldots a-1\,\omega+(n+1)\,\omega$ so wird aus (1)

$$f(a+n\omega)=f(a-1)+(n+1)\,f'(a-\tfrac{1}{2})+\frac{(n+1)\,n}{1\quad 2}f''(a-1)$$
$$+\frac{(n+2)\,(n+1)\,n}{1\quad 2\quad 3}f'''(a-\tfrac{1}{2})+\frac{(n+2)\,(n+1)\,n\,(n-1)}{1\quad 2\quad 3\quad 4}f^{\mathrm{IV}}(a-1)$$
$$+\frac{(n+3)\,(n+2)\,(n+1)\,n(n-1)}{1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5}f^{\mathrm{V}}(a-\tfrac{1}{2})\ldots$$

und wenn man das arithmetische Mittel zwischen dieser Formel und (2) nimmt, so erhält man

$$f(a+n\omega)=f(a-\tfrac{1}{2})+(n+\tfrac{1}{2})\,f'(a-\tfrac{1}{2})+\frac{(n+1)\,n}{1\quad 2}f''(a-\tfrac{1}{2})$$
$$+\frac{(n+1)\,n(n+\frac{1}{2})}{1\quad 2\quad 3}f'''(a-\tfrac{1}{2})+\frac{(n+2)\,(n+1)\,n(n-1)}{1\quad 2\quad 3\quad 4}f^{\mathrm{IV}}(a-\tfrac{1}{2})$$
$$(7)\qquad +\frac{(n+2)\,(n+1)\,n\,(n-1)\,(n+\frac{1}{2})}{1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5}f^{\mathrm{V}}(a-\tfrac{1}{2})\ldots$$

Die Entwickelung dieser Formel nach Potenzen von n macht sich nicht ganz so einfach wie (4) weil hier in jedem Factoren einer Potenz von n alle Differenzen sowohl der geraden als der ungeraden Reihen vorkommen, während dort entweder lauter gerade oder lauter ungerade zusammen verbunden waren. Man erhält, weil $f(a-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}f'(a-\frac{1}{2})=f(a)$

$$f(a+n\omega)=$$
$$\begin{aligned} f(a) + \quad & n\,\{f'\,(a-\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{2}f''\,(a-\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{12}f'''\,(a-\tfrac{1}{2})-\tfrac{1}{12}f^{IV}(a-\tfrac{1}{2})\ldots\} \\ + & \tfrac{1}{2}\,n^2\{f''\,(a-\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{2}f'''(a-\tfrac{1}{2})-\tfrac{1}{12}f^{IV}\,(a-\tfrac{1}{2})\ldots\} \\ + & \tfrac{1}{6}\,n^3\{f'''(a-\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{2}f^{IV}(a-\tfrac{1}{2})\ldots\} \\ + & \tfrac{1}{24}\,n^4\{f^{IV}(a-\tfrac{1}{2})\ldots\} \end{aligned}$$

wie auch die unmittelbare Substitution von

$$\begin{aligned} f'\,(a) &= f'\,(a-\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{2}f''\,(a-\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{4}f'''(a-\tfrac{1}{2}) \\ f''(a) &= f''(a-\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{2}f'''(a-\tfrac{1}{2}) \end{aligned}$$

und die damit verwandten für $f'''a$, $f^{IV}a$, in (4) ergeben würden. Für den Differentialquotienten erhält man:

$$\frac{df(a+n\omega)}{da}=\frac{df(a+n\omega)}{\omega dn}=\frac{1}{\omega}\Big\{f'(a-\tfrac{1}{2})+(n+\tfrac{1}{2})\,f''(a-\tfrac{1}{2})$$
$$+\frac{3n^2+3n+\frac{1}{2}}{1\quad 2\quad 3}\,f'''(a-\tfrac{1}{2})+\frac{4n^3+6n^2-2n-2}{1\quad 2\quad 3\quad 4}\,f^{IV}\,(a-\tfrac{1}{2}\ldots\Big\}$$

Für einen Werth $n=-\frac{1}{2}$ oder einen wenig davon verschiedenen wird man nach dieser Formel den Differentialquotienten am directesten finden; für $n=0$, oder wenig davon verschieden, ist die in (6) gegebene Form vorzuziehen.*)

So wie die ersten und folgenden Differenzreihen den ersten und höheren Differentialquotienten um so näher entsprechen, je schneller die Differenzen überhaupt abnehmen oder je kleiner das Intervall genommen worden, eben so werden auch umgekehrt die erste und die übrigen noch weiter vorgehenden summirten Reihen,

*) Die beiden Formeln für den Differentialquotienten sind identisch mit den von Bessel und Hansen gegebenen in Schumacher Astronom. Nachr. II. 137. ff.

den ersten und höhern Integralen zwischen bestimmten Grenzen um so näher kommen, je enger die berechneten Werthe der zu integrirenden Function stehen. Sei also das Integral

$$\int_{x'}^{x''} f(x) \cdot dx$$

numerisch zu bestimmen. Man nehme unter den Werthen welche x wirklich haben kann irgend einen beliebigen ... a, und verbinde damit einen Zuwachs von a, der mit ω bezeichnet werden möge, von beliebiger Gröſse, berechne eine Anzahl Functionen $f(a)$, $f(a+1\omega)$, $f(a+2\omega)$ etc., setze ferner

$$\frac{x-a}{\omega} = n$$

woraus

$$dx = \omega \cdot dn$$

$$\frac{x'-a}{\omega} = n' \qquad\qquad \frac{x''-a}{\omega} = n''$$

so wird

$$\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx = \omega \int_{n'}^{n''} f(a+n\omega)\,dn$$

und das allgemeine Integral für die letzte Form findet sich sogleich aus (4)

$$\begin{aligned}
\int f(a+n\omega)\,dn = M + n f(a) & \\
+ & \tfrac{1}{2} n^2 \left\{f' \ (a) - \tfrac{1}{6} f''' (a) + \tfrac{1}{30} f^{\mathrm{V}} \ (a) - \tfrac{1}{140} f^{\mathrm{VII}}(a) \ldots\right\} \\
+ & \tfrac{1}{6} n^3 \left\{f'' \ (a) - \tfrac{1}{12} f^{\mathrm{IV}} (a) + \tfrac{1}{90} f^{\mathrm{VI}} (a) \ldots\right\} \\
+ & \tfrac{1}{24} n^4 \left\{f''' (a) - \tfrac{1}{4} f^{\mathrm{V}} \ (a) + \tfrac{1}{120} f^{\mathrm{VII}}(a) \ldots\right\} \\
+ & \tfrac{1}{120} n^5 \left\{f^{\mathrm{IV}} (a) - \tfrac{1}{6} f^{\mathrm{VI}} (a) \ldots\right\} \\
+ & \tfrac{1}{720} n^6 \left\{f^{\mathrm{V}} \ (a) - \tfrac{1}{3} f^{\mathrm{VII}}(a) \ldots\right\} \\
+ & \tfrac{1}{5040} n^7 \left\{f^{\mathrm{VI}} (a) \ldots\right\} \\
+ & \tfrac{1}{40320} n^8 \left\{f^{\mathrm{VII}}(a) \ldots\right\}
\end{aligned}$$

wo M die Constante ist. Substituirt man hier für n einmal n' und nachher n'', zieht das Resultat der ersten Substitution von der zweiten ab, so hat man das bestimmte Integral zwischen den Grenzen n' und n''. Offenbar wird das Resultat am einfachsten wenn die Gröfse a so gewählt ist, dafs $n'' = -n'$, oder wenn $a = \frac{1}{2}(x' + x'')$, weil in diesem Falle die geraden Potenzen von n bei der Subtraction verschwinden. Wäre zwar die Anfangsgrenze n' gegeben, aber die Grenze des Endes n'' unbestimmt gelassen, so würde man die Constante M so bestimmen dafs das Integral für $n = n'$ Null würde, also setzen

$$\begin{aligned} M = -n' f(a) &- \tfrac{1}{2} n'^2 \{f'(a) - \tfrac{1}{6} f'''(a) + \tfrac{1}{30} f^{\mathrm{V}}(a) - \tfrac{1}{140} f^{\mathrm{VII}}(a) \ldots\} \\ &- \tfrac{1}{6} n'^3 \{f''(a) - \tfrac{1}{12} f^{\mathrm{IV}}(a) + \tfrac{1}{90} f^{\mathrm{VI}}(a) \ldots\} \text{ etc.} \end{aligned}$$

und damit das Integral bis zu jeder beliebigen spätern Grenze n erhalten. Um die hier vorkommenden Werthe $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$ etc. zu bekommen, wird man so viele Gröfsen $f(a-2)$, $f(a-1)$, $f(a)$, $f(a+1)$ als nöthig sein mögen zu bestimmen haben.

Gewöhnlich sind die Grenzen x'' und x' so entfernt von einander, dafs man eine beträchtliche Anzahl von Functionen f zu berechnen gezwungen ist. Denn entweder wird in diesem Falle bei mäfsigem ω, die Zahl $n'' - n'$ sehr grofs, oder bei grofsem ω werden die höheren Differenzen $f^{\mathrm{VI}}(a)$, $f^{\mathrm{VII}}(a)$ noch sehr beträchtlich sein. Ist man aber doch gezwungen eine gröfsere Anzahl von Werthen zu berechnen, so kann man sich die Substitution der Grenzen wesentlich erleichtern, wenn man das ganze Integral in so viele einzelne kleinere zerfällt als $n'' - n'$ Einheiten enthält. Die bequemste Form wird nach der obigen Bemerkung dabei die folgende sein:

Man wähle a so, dafs

$$\frac{x' - a}{\omega} = n' = -\tfrac{1}{2}$$

oder dafs

$$a = x' + \tfrac{1}{2}\omega$$

und berechne sowohl $f(a), f(a+1), f(a+2) \ldots$ so weit es nöthig sein sollte, als auch noch einige Werthe vor $f(a), f(a-1), f(a-2)$ etc. Dann wird

$$\int_{n=-\frac{1}{2}}^{n=+\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,dn = f(a) + \tfrac{1}{24}\{f''(a) - \tfrac{1}{12} f^{IV}(a) + \tfrac{1}{30} f^{VI}(a) \ldots\} + \tfrac{1}{1920}\{f^{IV}(a) - \tfrac{1}{6} f^{VI}(a) \ldots\} + \tfrac{1}{322560}\{f^{VI}(a) \ldots\}$$

oder wenn man zusammenzieht

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,dn = f(a) + \tfrac{1}{24} f''(a) - \tfrac{17}{5760} f^{IV}(a) + \tfrac{367}{967680} f^{VI}(a) \ldots$$

168

Ganz auf die nämliche Weise wird

$$\int_{+\frac{1}{2}}^{+\frac{3}{2}} f(a+n\omega)\,dn = \int_{n-1=-\frac{1}{2}}^{n-1=+\frac{1}{2}} f(a+1\,\omega+(n-1)\,\omega)\,d(n-1)$$

$$= f(a+1) + \tfrac{1}{24} f''(a+1) - \tfrac{17}{5760} f^{IV}(a+1) + \tfrac{367}{967680} f^{VI}(a+1) \ldots$$

$$\int_{+\frac{3}{2}}^{+\frac{5}{2}} f(a+n\omega)\,dn = f(a+2) + \tfrac{1}{24} f''(a+2) - \tfrac{17}{5760} f^{IV}(a+2) + \tfrac{367}{967680} f^{IV}(a+2) \ldots$$

und sofort für jede ganze Zahl i:

$$\int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,dn = f(a+i) + \tfrac{1}{24} f''(a+i) - \tfrac{17}{5760} f^{IV}(a+i) + \tfrac{367}{967680} f^{VI}(a+i) \ldots$$

folglich, wenn man alle einzelnen Integrale in eine Summe vereinigt, so wird:

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,dn = {} & \{f(a) + f(a+1) + f(a+2) \ldots + f(a+i)\} \\ & + \tfrac{1}{24}\{f''(a) + f''(a+1) + f''(a+2) \ldots + f''(a+i)\} \\ & - \tfrac{17}{5760}\{f^{IV}(a) + f^{IV}(a+1) + f^{IV}(a+2) \ldots + f^{IV}(a+i)\} \\ & + \tfrac{367}{967680}\{f^{VI}(a) + f^{VI}(a+1) + f^{VI}(a+2) \ldots + f^{VI}(a+i)\} \ldots\end{aligned}$$

Nun aber ist nach dem obigen Schema

$$\begin{aligned}
f''(a)+f''(a+1)\ldots+f''(a+i) &= f'(a+i+\tfrac{1}{2})-f'(a-\tfrac{1}{2})\\
f^{IV}(a)+f^{IV}(a+1)\ldots+f^{IV}(a+i) &= f'''(a+i+\tfrac{1}{2})-f'''(a-\tfrac{1}{2})\\
f^{VI}(a)+f^{VI}(a+1)\ldots+f^{VI}(a+i) &= f^{V}(a+i+\tfrac{1}{2})-f^{V}(a-\tfrac{1}{2})
\end{aligned}$$

nd eben so würde wenn man vor $f(a)$ noch eine summirte Reihe ätte deren Differenz $f(a)$, $f(a+1)\ldots.$ $f(a+i)$ wäre, und welche der nalogie nach mit $'f(a-\frac{1}{2})$, $'f(a+\frac{1}{2})\ldots.$ $'f(a+i+\frac{1}{2})$ bezeichnet erden kann:

$$f(a)+f(a+1)\ldots.+f(a+i)={}'f(a+i+\tfrac{1}{2})-{}'f(a-\tfrac{1}{2}),$$

o dafs das Integral sich einfach so schreiben lässt:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,dn = {} & {}'f(a+i+\tfrac{1}{2}) - {}'f(a-\tfrac{1}{2})\\
(10) \qquad & + \tfrac{1}{24} f'(a+i+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{24} f'(a-\tfrac{1}{2})\\
& - \tfrac{17}{5760} f'''(a+i+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{17}{5760} f'''(a-\tfrac{1}{2})\\
& + \tfrac{367}{967680} f^{V}(a+i+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{367}{967680} f^{V}(a-\tfrac{1}{2})\ldots
\end{aligned}$$

Es ist hier offenbar ganz gleichgültig welchen Werth man in der Reihe der summirten Function $'f$ für $'f(a-\frac{1}{2})$ angenommen hat, da er erst zu jedem Gliede einmal hinzugefügt ist, und bei dem Integral nachher wieder abgezogen wird. Man kann ihn entweder $=0$ annehmen, oder gleich dem Werth des Integrals bis zu der Grenze $n=-\frac{1}{2}$, wenn vielleicht das neue Integral sich an ein früheres anschliefsen sollte. Nimmt man immer die Glieder zusammen welche sich auf die Anfangsgrenze beziehen und setzt sie $=C$, so dafs

$$C=-{}'f(a-\tfrac{1}{2})-\tfrac{1}{24}f'(a-\tfrac{1}{2})+\tfrac{17}{5760}f'''(a-\tfrac{1}{2})-\tfrac{367}{967680}f^{V}(a-\tfrac{1}{2})$$

so vertritt C für jede spätere Endgrenze die Stelle der Constante, und die vollständige Anordnung wird:

Argument.	Haupt-function.	Summirte Function.
		C
a	$f(a)$	$'f(a+\frac{1}{2}) = C + f(a)$
$a + 1\omega$	$f(a+1)$	$'f(a+\frac{3}{2}) = C + f(a) + f(a+1)$
$a + 2\omega$	$f(a+2)$	$'f(a+\frac{5}{2}) = C + f(a) + f(a+1) + f(a+2)$
$a + 3\omega$	$f(a+3)$	etc.

Eine solche Tabelle vertritt völlig die Stelle des allgemeinen Integrals von $n = -\frac{1}{2}$, bis zu jeder beliebigen späteren Grenze von der Form $n = i + \frac{1}{2}$, oder $x'' = a + (i + \frac{1}{2})\,\omega$. Es wird für sie

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,dn = {}'f(a+i+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{24} f'(a+i+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{17}{5760} f'''(a+i+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{367}{967680} f^{\mathrm{v}}(a+i+\tfrac{1}{2}) \ldots.$$

Um endlich das $\int f(x)\,dx$ unmittelbar zu haben, führe man den Factor ω, der dabei noch hinzukommt, sogleich dadurch ein, dafs man statt $f(a)$, $f(a+1)$ etc. $\omega f(a)$, $\omega f(a+1)$ etc. ansetzt und damit auch die Differenz- und summirte Reihe bildet.

Bei der starken Convergenz der Coefficienten von f', f''', f^{v}, in dieser Integralformel, wird es selten nöthig und nicht einmal rathsam sein, auch nur die hier gegebenen Glieder alle zu benutzen. Denn theils wird man, wenn die Veränderung der Function f bei dem gewählten Intervall ω so grofs ist, dafs die fünfte und folgenden Differenzreihen noch merklichen Einflufs äufsern, jedenfalls sich genöthigt sehen, vor $f(a)$ und nach $f(a+i)$ noch eine beträchtliche Anzahl von Gliedern zu berechnen, um die f', f''', f^{v}, des Anfangs und Endes bilden zu können, theils wird die Natur der häufig sehr verwickelten Function f (da man, wenn die Integration direct sich ausführen liefse, die mechanische Quadratur schwerlich anwenden würde) in der Regel es unmöglich machen, den Grad der Convergenz der höhern Differenzreihen so scharf zu bestimmen, dafs wenn die fünften und höhern noch beträchtliche Glieder darbieten, es nicht zu fürchten wäre, es möchten auch noch die weit höhern Differenzreihen einen nachtheiligen Einflufs ausüben. Im Allgemeinen hängt die Sicherheit der Integration davon ab, ob die gewählte Einheit des Intervalls ω klein genug ist, um aus den wirklich berechneten Werthen von f alle zwischenliegende, sowohl am Anfang als in der Mitte und am Ende, mit aller der Schärfe interpoliren zu können, die man zu erreichen beabsichtigt. Es wird vorzuziehen sein, hierin lieber etwas zu viel zu thun, und ω etwas zu klein anzunehmen, als sich der Gefahr auszusetzen, die ganze Rechnung durch mangelnde Genauigkeit des Endresultats unnütz zu machen. Auch wird man bei der Verkleinerung von ω schnell genug dahin kommen, die höheren Differenzreihen unmerklich zu machen, da sich ihre Werthe bei der m^{ten} Differenzreihe, nach der m^{ten} Potenz der Verringerung von ω richten, so dafs für $\frac{1}{2}\,\omega$ die fünften Differenzen nur noch der 32ste Theil der füuften Differenzen für ω sind. Der anscheinende Vortheil, dafs bei den Gliedern, die nicht am Anfange und Ende vorkommen, die zu ihnen gehörigen Differenzwerthe gar nicht in Rechnung genommen werden, weil der Anfang jedes folgenden Integrals das Ende des vorhergehenden ist, verschwindet, wenn man bedenkt, dafs Unregelmäfsigkeiten in den Differenzwerthen der Mitte, doch nothwendig sich auch in den zum Anfang und Ende gehörigen Werthen werden äufsern müssen, wenn die Differenzen nur weit genug fortgesetzt würden. Unter dem geometrischen Bilde der Quadratur betrachtet, mufs man so viele Ordinaten ... $f(a)$ ... der Curve kennen, dafs wenn man durch die Endpunkte derselben eine parabolische Curve legt, diese überall mit der wahren Curve übereinkommt. Sollte hier aufserhalb des Anfanges und Endes in irgend einer Ordinate die wahre Curve von der parabolischen abweichen, so wird man den Flächeninhalt zwischen der Curve und der Abscissenaxe immer fehlerhaft finden, selbst dann wenn sie auch am Anfang und am Ende völlig mit der wahren zusammentrifft. Es müssen in diesem Falle in der wahren Gleichung der Curve Glieder enthalten sein, die durch den zufälligen numerischen Werth bei einigen oder den meisten

Ordinaten vernichtet oder unmerklich werden, die aber an sich eben so wesentlich zur Erkenntnifs ihres Ganges nothwendig sind, und die man übersehen hat, weil man gerade solche Ordinaten, in denen sie besonders hervortreten, nicht berücksichtigte.

Bei festbestimmten Grenzen wird es immer möglich sein, dem Intervall ω eine solche Gröfse zu geben, dafs die Form $n' = -\frac{1}{2}$ und $n'' = i + \frac{1}{2}$ erfüllt werde. Es bedarf dazu nur dafs

$$\omega = \frac{x'' - x'}{i+1}.$$

Indessen können doch Fälle eintreten wo man selbst dann, aus den schon berechneten Werthen f, für andere Grenzen den Werth des Integrals zu haben wünschte. Am häufigsten vielleicht für $n' = 0$, $n'' = i$. Die Vorschriften dazu sind eben so einfach. Für das Integral

$$\int_0^i f(a + n\omega)\, dn$$

theilt man das ganze Integral in die einzelnen Theile

$$\int_0^1 f(a + n\omega)\, dn \qquad \int_1^2 f(a + n\omega)\, dn \text{ etc.}$$

Nach (4) ist aber

$$\int_0^1 f(a+n\omega)\,dn = f(a) + \tfrac{1}{2}f'(a) + \tfrac{1}{6}f''(a) - \tfrac{1}{24}f'''(a) - \tfrac{1}{180}f^{\text{IV}}(a) + \tfrac{11}{1440}f^{\text{V}}(a) + \tfrac{1}{1512}f^{\text{VI}}(a) - \tfrac{191}{120960}f^{\text{VII}}(a) \ldots$$

Schafft man hier zuerst die $f'(a)$, $f'''(a)$, $f^{\text{V}}(a)$, $f^{\text{VII}}(a)$ fort, um lauter wirklich vorkommende Differenzgrössen zu haben, vermöge der Gleichungen:

$$f'(a) = f'(a + \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}f''(a) = f(a+1) - f(a) - \tfrac{1}{2}f''(a)$$
$$f'''(a) = f''(a+1) - f''(a) - \tfrac{1}{2}f^{\text{IV}}(a) \text{ etc.}$$

so wird der Ausdruck

$$\int_0^1 f(a + n\omega)\, dn = \tfrac{1}{2}(f(a+1) + f(a)) - \tfrac{1}{24}(f''(a+1) + f''(a)) + \tfrac{11}{1440}(f^{\text{IV}}(a+1) + f^{\text{IV}}(a)) - \tfrac{191}{120960}(f^{\text{VI}}(a+1) + f^{\text{VI}}(a)) \ldots$$

und eben so

$$\int_1^2 f(a+n\omega)\,dn = \tfrac{1}{2}(f(a+2)+f(a+1)) - \tfrac{1}{24}(f'(a+2)+f'(a+1))$$
$$+\tfrac{11}{1440}(f^{\mathrm{IV}}(a+2)+f^{\mathrm{IV}}(a+1)) - \tfrac{191}{120960}(f^{\mathrm{VI}}(a+2)+f^{\mathrm{VI}}(a+1)\ldots$$

bis zu

$$\int_{i-1}^{i} f(a+n\omega)\,dn = \tfrac{1}{2}(f(a+i)+f(a+i-1)) - \tfrac{1}{24}f'(a+i)+f'(a+i-1))$$
$$+\tfrac{11}{1440}(f^{\mathrm{IV}}(a+i)+f^{\mathrm{IV}}(a+i-1))$$
$$-\tfrac{191}{120960}(f^{\mathrm{VI}}(a+i)+f^{\mathrm{VI}}(a+i-1))\ldots$$

folglich wird die ganze Summe

$$\int_0^i f(a+n\omega)\,dn =$$
$$\tfrac{1}{2}\ {}'f(a+i+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}{}'f(a+i-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}{}'f(a+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}{}'f(a-\tfrac{1}{2})$$
$$-\ \tfrac{1}{24}\{f'(a+i+\tfrac{1}{2}) + f'(a+i-\tfrac{1}{2}) - f'(a+\tfrac{1}{2}) - f'(a-\tfrac{1}{2})\}$$
$$+\ \tfrac{11}{1440}\{f'''(a+i+\tfrac{1}{2}) + f'''(a+i-\tfrac{1}{2}) - f'''(a+\tfrac{1}{2}) - f'''(a-\tfrac{1}{2})\}$$
$$-\ \tfrac{191}{120960}\{f^{\mathrm{V}}(a+i+\tfrac{1}{2}) + f^{\mathrm{V}}(a+i-\tfrac{1}{2}) - f^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{1}{2}) - f^{\mathrm{V}}(a-\tfrac{1}{2})\}\ldots$$

Wenn man also das arithmetische Mittel zweier auf einander folgenden Differenzgröſsen wie oben bezeichnet, und nur bei ${}'f(a-\frac{1}{2})$, um die willkürliche Annahme desselben deutlicher auszusprechen, die Ausnahme macht, dass man es nicht mit ${}'f(a+\frac{1}{2})$ verbindet, sondern für das letztere die Gleichung anwendet

$${}'f(a+\tfrac{1}{2}) = {}'f(a-\tfrac{1}{2}) + f(a),$$

so wird

$$(11)\quad \int_0^i f(a+n\omega)\,dn = {}'f(a+i) - \tfrac{1}{12}f'(a+i) + \tfrac{11}{720}f'''(a+i) - \tfrac{191}{60480}f^{\mathrm{V}}(a+i)$$
$$-{}'f(a-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}f(a) + \tfrac{1}{12}f'(a) \quad - \tfrac{11}{720}f'''(a) \quad + \tfrac{191}{60480}f^{\mathrm{V}}(a)\ldots$$

Die letzten Glieder entsprechen wieder der Constante für die Anfangsgrenze $n=0$. Der Unterschied zwischen dieser Formel und der Integration bei Grenzen die in der Mitte eines Intervalls liegen, daſs nämlich hier die numerischen Coefficienten bedeutend grösser sind als bei (10), dürfte von keiner grossen Erheblichkeit sein, wenn nur ω an sich klein genug angenommen ist.

Die Uebereinstimmung beider Formeln wird sich sogleich ergeben, wenn man die beiderseitigen Grenzen anders combinirt, und also etwa das Integral sucht

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i} f(a+n\omega)\,dn$$

Es wird hierzu nur nöthig sein zu (11), und zwar zu den Gliedern der Anfangsgrenze, den Betrag des Integrals

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f(a+n\omega)\,dn$$

hinzuzulegen. Dieser aber findet sich nach (9)

$$= \tfrac{1}{2} f(a) - \tfrac{1}{8} f'(a) + \tfrac{1}{48} f''(a) + \tfrac{7}{384} f'''(a) - \tfrac{17}{11520} f^{\mathrm{IV}}(a) - \tfrac{163}{46080} f^{\mathrm{V}}(a) \\ + \tfrac{367}{1935360} f^{\mathrm{VI}}(a) \ldots$$

und wenn man ihn zu den Gliedern der Anfangsgrenze von (11) hinzulegt, so findet man die Summe

$$-{}'f(a-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{24} f'(a) + \tfrac{1}{48} f''(a) + \tfrac{17}{5760} f'''(a) - \tfrac{17}{11520} f^{\mathrm{IV}}(a) - \tfrac{367}{967680} f^{\mathrm{V}}(a) \\ + \tfrac{367}{1935360} f^{\mathrm{VI}}(a) \ldots$$

Nun aber ist:

$$f'(a) - \tfrac{1}{2} f''(a) = f'(a-\tfrac{1}{2})$$
$$f'''(a) - \tfrac{1}{2} f^{\mathrm{IV}}(a) = f'''(a-\tfrac{1}{2})$$
$$f^{\mathrm{V}}(a) - \tfrac{1}{2} f^{\mathrm{VI}}(a) = f^{\mathrm{V}}(a-\tfrac{1}{2})$$

folglich wird der obige Ausdruck:

$$-{}'f(a-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{24} f'(a-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{17}{5760} f'''(a-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{367}{967680} f^{\mathrm{V}}(a-\tfrac{1}{2}) \ldots$$

übereinstimmend mit (10) und das Integral wird:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{i} f(a+n\omega)\,dn = {}'f(a+i) - \tfrac{1}{12} f'(a+i) + \tfrac{11}{720} f'''(a+i) - \tfrac{191}{60480} f^{\mathrm{V}}(a+i) \ldots \\ - {}'f(a-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{24} f'(a-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{17}{5760} f'''(a-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{367}{967680} f^{\mathrm{V}}(a-\tfrac{1}{2}) \ldots$$

Ganz auf dieselbe Weise wird:

$$\int_{0}^{i+\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,dn = \\ {}'f(a+i+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{24} f'(a+i+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{17}{5760} f'''(a+i+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{367}{967680} f^{\mathrm{V}}(a+i+\tfrac{1}{2}) \\ - {}'f(a-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2} f(a) + \tfrac{1}{12} f'(a) - \tfrac{11}{720} f'''(a) + \tfrac{191}{60480} f^{\mathrm{V}}(a) \ldots$$

wo überall die Function ${}'f(a-\tfrac{1}{2})$ ganz willkürlich ist.

Ueberhaupt aber liegt es in der Bedeutung der angewandten Ausdrücke, dafs man keineswegs blofs an die Grenzen 0, $\frac{1}{2}$, i, $i+\frac{1}{2}$, gebunden ist, sondern fast mit derselben Leichtigkeit das Integral bis zu jeder beliebigen Grenze finden kann, wenn man irgend welche Reihe von Werthen seines Differentials berechnet hat. Direct wird sich diese Erweiterung ergeben, wenn man von irgend einer Grenze von der Form $i+\frac{1}{2}$ an, bis zu einem beliebigen Werthe $i+\frac{1}{2}+n'$ das Integral sucht. Um dabei leichter ein dem Früheren analoges Endresultat zu erhalten, verbinde man die Gleichungen (3) und (7). Die erste giebt

$$f(a+n'\omega) = Af(a) + A' f'(a) + A'' f''(a) + A''' f'''(a) + A^{\mathrm{IV}} f^{\mathrm{IV}}(a) \ldots$$

wenn

$$A = 1 \qquad {}_{\prime}A = n'$$

$$A'' = \frac{n'^2}{1\;2} \qquad A''' = \frac{(n'+1)\,n'\,(n'-1)}{1\;\;2\;\;3}$$

$$A^{\mathrm{IV}} = \frac{(n'+1)n'.n'(n'-1)}{1\;\;2\;\;3\;\;4} \qquad A^{\mathrm{V}} = \frac{(n'+2)(n'+1)n'(n'-1)(n'-2)}{1\;\;2\;\;3\;\;4\;\;5} \text{ etc.}$$

Die zweite

$$f(a+n\omega) = Bf(a-\tfrac{1}{2}) + B' f'(a-\tfrac{1}{2}) + B'' f''(a-\tfrac{1}{2}) + B''' f'''(a-\tfrac{1}{2})$$
$$+ B^{\mathrm{IV}} f^{\mathrm{IV}}(a-\tfrac{1}{2}) \cdots$$

wenn

$$B = 1 \qquad B' = n+\tfrac{1}{2}$$

$$B'' = \frac{(n+1)\,n}{1\;\;2} \qquad B''' = \frac{(n+1)\,n\,(n+\frac{1}{2})}{1\;\;2\;\;3}$$

$$B^{\mathrm{IV}} = \frac{(n+2)\,n+1)\,n\,(n-1)}{1\;\;2\;\;3\;\;4} \qquad B^{\mathrm{V}} = \frac{(n+2)\,(n+1)\,n\,(n-1)\,(n+\frac{1}{2})}{1\;\;2\;\;3\;\;4\;\;5} \text{ etc.}$$

Sucht man jetzt das Integral

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}+n} f(a+n\omega))\,dn$$

nach der letzten Formel, so wird es

$$= f(a-\tfrac{1}{2})\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}+n} B\,dn + f'(a-\tfrac{1}{2})\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}+n'} B'\,dn + f''(a-\tfrac{1}{2})\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}+n'} B''\,dn \cdots$$

und die wirkliche Integrirung jedes Factors giebt bei diesen Grenzen:

$$\int B\,dn = n'$$

$$\int B'\,dn = \frac{n'^2}{12}$$

$$\int B''\,dn = \frac{n'^3}{6} - \frac{n'}{8}$$

$$\int B'''\,dn = \frac{n'^4}{24} - \frac{n'^2}{48}$$

$$\int B^{IV}\,dn = \frac{n'^5}{120} - \frac{5n'^3}{144} + \frac{3n'}{128}$$

$$\int B^{V}\,dn = \frac{n'^6}{720} - \frac{n'^4}{192} + \frac{3n'^2}{1280}$$

$$\int B^{VI}\,dn = \frac{n'^7}{5040} - \frac{n'^5}{2880} + \frac{259n'^3}{34560} - \frac{5n'}{1024}\,.$$

etc. etc.

Diese Werthe lassen sich aber auch so schreiben:

$$\int B\,dn = A'$$

$$\int B'\,dn = A''$$

$$\int B''\,dn = A''' + \tfrac{1}{24} A'$$

$$\int B'''\,dn = A^{IV} + \tfrac{1}{24} A''$$

$$\int B^{IV}\,dn = A^{V} + \tfrac{1}{24} A''' - \tfrac{17}{5760} A'$$

$$\int B^{V}\,dn = A^{VI} + \tfrac{1}{24} A^{IV} - \tfrac{17}{5760} A''$$

$$\int B^{VI}\,dn = A^{VII} + \tfrac{1}{24} A^{V} - \tfrac{17}{5760} A''' + \tfrac{367}{967680} A'$$

etc. etc.

so dass die Gleichung wird:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}+n'} f(a + n\omega)\,dn =$$

$$\begin{array}{l}
A' f\,(a-\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{24}A' f''(a-\tfrac{1}{2})-\tfrac{17}{5760}A' f^{\mathrm{IV}}(a-\tfrac{1}{2})+\tfrac{367}{967680}A'f^{\mathrm{VI}}(a-\tfrac{1}{2})\\
+A'' f'\,(a-\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{24}A'' f'''(a-\tfrac{1}{2})-\tfrac{17}{5760}A'' f^{\mathrm{V}}(a-\tfrac{1}{2}) \quad \vdots\\
+A''' f''(a-\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{24}A''' f^{\mathrm{IV}}(a-\tfrac{1}{2})-\tfrac{17}{5760}A''' f^{\mathrm{VI}}(a-\tfrac{1}{2})\\
+A^{\mathrm{IV}} f'''(a-\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{24}A^{\mathrm{IV}} f^{\mathrm{V}}(a-\tfrac{1}{2}) \quad \vdots\\
+A^{\mathrm{V}} f^{\mathrm{IV}}(a-\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{24}A^{\mathrm{V}} f^{\mathrm{VI}}(a-\tfrac{1}{2})\\
+A^{\mathrm{VI}} f^{\mathrm{V}}(a-\tfrac{1}{2}) \quad \vdots\\
+A^{\mathrm{VII}} f^{\mathrm{VI}}(a-\tfrac{1}{2})\\
\quad \vdots
\end{array}$$

Betrachtet man die in der Reihe der ungeraden Differenzen stehenden, und durch $f'(a-\frac{1}{2})$, $f'''(a-\frac{1}{2})$, $f^{\mathrm{V}}(a-\frac{1}{2})$, $f^{\mathrm{VII}}(a-\frac{1}{2})$ etc. bezeichneten Grössen, als wirkliche Functionen von $(a-\frac{1}{2}\omega)$, wodurch die Grössen $f''(a)$, $f^{\mathrm{IV}}(a)$, $f^{\mathrm{VI}}(a)\ldots$ die ersten Differenzen dieser Grössen werden, so giebt die erste der beiden eben hingeschriebenen Formeln:

$$\begin{aligned}
f'\,(a-\tfrac{1}{2}\omega+n'\omega) &= f'\,(a-\tfrac{1}{2})+A'\,f''\,(a-\tfrac{1}{2})+A''\,f'''\,(a-\tfrac{1}{2})\\
&\qquad +A'''\,f^{\mathrm{IV}}(a-\tfrac{1}{2})\ldots\\
f'''\,(a-\tfrac{1}{2}\omega+n'\omega) &= f'''\,(a-\tfrac{1}{2})+A'\,f^{\mathrm{IV}}(a-\tfrac{1}{2})+A''\,f^{\mathrm{V}}\,(a-\tfrac{1}{2})\\
&\qquad +A'''\,f^{\mathrm{VI}}(a-\tfrac{1}{2})\ldots\\
f^{\mathrm{V}}\,(a-\tfrac{1}{2}\omega+n'\omega) &= f^{\mathrm{V}}\,(a-\tfrac{1}{2})+A'\,f^{\mathrm{VI}}(a-\tfrac{1}{2})\ldots
\end{aligned}$$

und wenn man dasselbe auf die Functionen $'f$ ausdehnt, auch

$$\begin{aligned}
{}'f\,(a-\tfrac{1}{2}\omega+n'\omega) &= {}'f\,(a-\tfrac{1}{2})+A'\,f\,(a-\tfrac{1}{2})+A''\,f'\,(a-\tfrac{1}{2})\\
&\qquad +A'''\,f''\,(a-\tfrac{1}{2})\ldots
\end{aligned}$$

wodurch der Ausdruck für das obige Integral wird:

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}+n'} f(a+n\omega)\,dn = &\qquad\qquad {}'f\,(a-\tfrac{1}{2}+n')-{}'f\,(a-\tfrac{1}{2})\\
&+\tfrac{1}{24}\left\{f'\,(a-\tfrac{1}{2}+n')-f'\,(a-\tfrac{1}{2})\right\}\\
&-\tfrac{17}{5760}\left\{f'''\,(a-\tfrac{1}{2}+n')-f'''\,(a-\tfrac{1}{2})\right\}\\
&+\tfrac{367}{967680}\left\{f^{\mathrm{V}}\,(a-\tfrac{1}{2}+n')-f^{\mathrm{V}}\,(a-\tfrac{1}{2})\right\}\ldots
\end{aligned}$$

oder ganz allgemein wird:

$$
(12)\qquad \begin{aligned}
\int_{n'}^{n''} f(a+n\omega)\,d\omega = {} & \quad {}'f\ (a+n'') - {}'f\ (a+n') \\
& + \tfrac{1}{24}\left\{f'\ (a+n'') - f'\ (a+n')\right\} \\
& - \tfrac{17}{5760}\left\{f'''(a+n'') - f'''(a+n')\right\} \\
& + \tfrac{367}{967680}\left\{f^{\mathrm{v}}\ (a+n'') - f^{\mathrm{v}}\ (a+n')\right\}
\end{aligned}
$$

wenn man die in den ungeraden Differenz- und summirten Reihen vorkommenden Gröfsen betrachtet als wirkliche Functionen des Argumentes welches unter dem Functionszeichen steht, und demgemäfs für jedes vorkommende Argument der Grenze, die Werthe streng mit Rücksicht auf die höheren Differenzen interpolirt. Ein Satz, der auch an sich schon in dem regelmäfsigen Fortschritte aller vorkommenden Functionen nach der Einheit des Intervalls liegt. Am bequemsten sind jedenfalls Grenzen von der Form $i+\frac{1}{2}$ bei welchen alle Interpolation erspart wird. Für Grenzen von der Form i entstehen die numerischen Coefficienten aus der Verbindung der Coefficienten für die Interpolation in die Mitte hinein.

$$\tfrac{1}{2} \quad - \tfrac{1}{16} \quad + \tfrac{3}{256} \quad - \tfrac{5}{2048}$$

mit den Integrations-Coefficienten

$$1 \quad + \tfrac{1}{24} \quad - \tfrac{17}{5760} \quad + \tfrac{367}{967680}$$

wonach

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} &= \tfrac{1}{2}; \\
-\tfrac{1}{24} &= -\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{24}; \\
+\tfrac{11}{1440} &= +\tfrac{3}{256} - \tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{17}{5760}; \\
-\tfrac{191}{120960} &= -\tfrac{5}{2048} + \tfrac{1}{24}\cdot\tfrac{3}{256} + \tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{17}{5760} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{367}{967680}.
\end{aligned}
$$

Als ein Beispiel dieser Integration möge

$$\int_{t'}^{t''} \frac{d\pi}{dt}\cdot dt$$

dienen wo $\frac{d\pi}{dt}$ der Differentialquotient in Bezug auf die Zeit von der Störung ist, welche die Länge des Perihels der Vesta durch die directe Anziehung des Jupiters erleidet. Die in $\frac{d\pi}{dt}$ zum Grunde liegende Zeiteinheit ist der mittlere Tag. Es fand sich, dass die Function $\frac{d\pi}{dt}$ so beschaffen ist, dafs man mit hinlänglicher Schärfe, aus Werthen welche von 42 zu 42 Tagen berechnet waren, auf alle zwischenliegende schliessen kann. Es ward deshalb $\omega =$ 42 Tage angenommen, und da der Anfang des Integrals auf 1810. Jan. 0. $= t'$ angesetzt war, so wurden um die bequemste Form der Integration für ihn zu haben, eine Reihe von Werthen des $\frac{d\pi}{dt}$ berechnet für

$$t' - \tfrac{5}{2}\omega,\ t' - \tfrac{3}{2}\omega,\ t' - \tfrac{1}{2}\omega,\ t' + \tfrac{1}{2}\omega,\ t' + \tfrac{3}{2}\omega,\ t' + \tfrac{5}{2}\omega \cdots$$

und dabei, um sogleich das Integral selbst zu erhalten, nicht $\frac{d\pi}{dt}$ sondern $42\,\frac{d\pi}{dt}$ angesetzt. Die der Anfangsgrenze entsprechende Constante ist dann, wenn $42\,\frac{d\pi}{dt} = f(a + n\omega)$ genommen wird:

$$C = -\tfrac{1}{24} f'(a - \tfrac{1}{2}) + \tfrac{17}{5760} f'''(a - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{367}{967680} f^{\mathrm{V}}(a - \tfrac{1}{2}) \cdots$$

wo das letzte Glied (und selbst das vorletzte fast) ganz unmerklich war. Diese Grösse C wird an die Stelle von $'f(a - \frac{1}{2})$ gesetzt, und dann die summirte Function $'f$ gebildet, welche, verbunden mit ihrer Correction durch f', f''' etc., das Integral für jede beliebige Zahl von 1810. Jan. 0. an giebt, wenn man nöthigenfalls interpolirt. Die zuletzt noch hinzuzulegende Constante wird der Werth sein, den π am Jan. 0. 1810. wirklich hatte. Die vollständige Tabelle ist die folgende:

0^h Par. Zt.	Argument.	$42.\frac{d\pi}{dt}$	$'f(a+i+\frac{1}{2})$
1809. Sept. 17.	$a - 3\omega$	$+ 30'',550$	
Oct. 29.	$a - 2\omega$	$+ 56,829$	
Dec. 10.	$a - \omega$	$+ 76,602$	$- 0'',571$
1810. Jan. 21.	a	$+ 90,348$	$+ 89,777$
Mrz. 4.	$a + \omega$	$+ 98,589$	$+ 188,366$
Apr. 15.	$a + 2\omega$	$+ 102,308$	$+ 290,674$
Mai 27.	$a + 3\omega$	$+ 102,193$	$+ 392,867$
Jul. 8.	$a + 4\omega$	$+ 98,947$	$+ 491,814$
Aug. 19.	$a + 5\omega$	$+ 93,259$	$+ 585,073$
Sept. 30.	$a + 6\omega$	$+ 85,839$	$+ 670,912$
Nov. 11.	$a + 7\omega$	$+ 77,461$	$+ 748,373$
Dec. 23.	$a + 8\omega$	$+ 68,876$	$+ 817,249$
1811. Febr. 3.	$a + 9\omega$	$+ 60,822$	$+ 878,071$
Mrz. 17.	$a + 10\omega$	$+ 54,004$	$+ 932,075$
Apr. 28.	$a + 11\omega$	$+ 48,982$	

Für den Betrag des Integrals von 1810. Jan. 0. bis 1811. Jan. 13. findet sich die zweite Grenze $= a + (8 + \frac{1}{2})\,\omega$ und damit der Werth:

$$+ 817{,}249 - 0{,}335.\ 6 - 0{,}002.\ 1 = + 816{,}911.$$

Für 1811. Febr. 3. wird nach der Formel

$$'f(a+i) - \tfrac{1}{12} f'(a+i) + \tfrac{11}{720} f'''(a+i)$$

hier wo $i = 9$ ist, gefunden:

$$+ 847{,}660 + 0{,}619.\ 7 + 0{,}009.\ 7 = + 848'',289$$

für Febr. 24. wird der Werth ..... $= + 877'',785.$

Für irgend welchen andern Zeitpunkt etwa 1811. Febr. 10, wird das Argument $a + (9 + \frac{1}{6})\,\omega = a + (9 + \frac{1}{2})\,\omega - \frac{1}{3}\,\omega$. Man erhält durch Interpolation:

$$'f\ (a + 9 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) = + 858'',627$$
$$f'\ (a + 9 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) = - \quad 7'',292$$
$$f'''(a + 9 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) = + \quad 0'',608.$$

folglich das Integral bis 1811. Febr. 10:

$$= +858{,}627 + \tfrac{1}{24}\{-7{,}992\} - \tfrac{11}{5760}\{+0{,}608\} = +858'',321.$$

Derselbe Werth mufs auch aus der Interpolation der Störungswerthe für andere Epochen folgen. Es ist der Betrag

bis 1811.	Jan.	13.	= + 816,″911
	Febr.	3.	= + 848,″289
	Febr.	24.	= + 877,″785
	Mrz.	17.	= + 905,″573,

woraus mit Rücksicht auf die zweiten und dritten Differenzen für 1811. Febr. 10. folgt ... 858,″322 übereinstimmend mit oben.

Durch die Ausdehnung dieser Integralformel auf alle beliebigen Grenzen, wodurch sie das allgemeine Integral völlig vertritt, wird es keine Schwierigkeiten haben, doppelte, dreifache und überhaupt mehrfache Integrale zu berechnen. Wäre zu finden

$$X = \iint_{x'}^{x''} f(x)\, d x^2$$

wo die nach dem ersten Integrale hinzuzufügende Constante sich ebenfalls jedesmal durch die Anfangsgrenze bestimmen lassen soll, so hat man für

$$x = a + n\omega \qquad dx = \omega dn.$$

$$X = \omega^2 \iint_{n'}^{n''} f(a + n\omega)\, dn^2$$

Das erste Integral wird hier

$$\int f(a+n\omega)\, dn = M + {}'f(a+n\omega) + \tfrac{1}{24} f'(a+n\omega) - \tfrac{11}{5760} f'''(a+n\omega) \cdots$$

wo $$M = -{}'f(a+n') - \tfrac{1}{24} f'(a+n') + \tfrac{11}{5760} f'''(a+n') \cdots$$

Denkt man sich diese Constante wie oben gleich von Anfang zur Bildung der summirten Reihe benutzt, so wird:

$$\int f(a+n\omega) dn = {}'f(a+n\omega) + \alpha f'(a+n\omega) + \beta f'''(a+n\omega) + \gamma f^{\text{V}}(a+n\omega) \cdots$$

wenn $\alpha\ \beta\ \gamma$ statt der Coefficienten $+\frac{1}{24}$, $-\frac{17}{5760}$, $+\frac{367}{967680}$, gesetzt werden. Hieraus folgt sogleich

$$\int\!\!\int f(a+n\omega)\,dn^2 = \int {}'f(a+n\omega)\,dn + \alpha\int f'(a+n\omega)\,dn + \beta\int f'''(a+n\omega)\,dn + \gamma\int f^{\mathrm{V}}(a+n\omega)\,dn + M'$$

Nun aber ist nach der obigen Formel angewandt auf jede Differenzreihe:

$$\int {}'f\,(a+n\omega)\,dn = {}''f(a+n\omega) + \alpha f(a+n\omega) + \beta f''(a+n\omega) + \gamma f^{\mathrm{IV}}(a+n\omega)\cdots$$

$$\alpha\int f'\,(a+n\omega)\,dn = \alpha\,\{ f(a+n\omega) + \alpha f''(a+n\omega) + \beta f^{\mathrm{IV}}(a+n\omega)\cdots\}$$

$$\beta\int f'''(a+n\omega)\,dn = \beta\,\{ f''(a+n\omega) + \alpha f^{\mathrm{IV}}(a+n\omega)\cdots\}$$

$$\gamma\int f^{\mathrm{V}}(a+n\omega)\,dn = \gamma\,\{ f^{\mathrm{IV}}(a+n\omega)\cdots\}$$

folglich zusammen das doppelte Integral

$$= {}''f(a+n\omega) + 2\,\alpha\,f(a+n\omega) + (\alpha^2+2\beta)\,f''(a+n\omega) + (2\,\alpha\beta+2\gamma)\,f^{\mathrm{IV}}(a+n\omega)$$

mit hinzugefügter Constante, oder wenn man die numerischen Werthe wieder substituirt:

$$\int\!\!\int_{n'}^{n''} f(a+n\omega)\,dn^2 = {}''f(a+n'') + \tfrac{1}{12}f(a+n'') - \tfrac{1}{240}f''(a+n'') + \tfrac{31}{60480}f^{\mathrm{IV}}(a+n'')\ldots$$
$$- {}''f(a+n') - \tfrac{1}{12}f(a+n') + \tfrac{1}{240}f''(a+n') - \tfrac{31}{60480}f^{\mathrm{IV}}(a+n') \qquad (13)$$

Hätte man die Constante bei der ersten Integration nicht angesetzt, so würde hiezu noch gefügt werden müssen:

$$\mathrm{M}\,.\,(n''-n').$$

Die wirklichen vorkommenden Differenzen entsprechen hier den Argumenten $a+i\omega$, in ganzen Zahlen. Für Grenzen von anderer Form wird man interpoliren müssen, indem man die Functionen ${}''f\ f\ f''\ f^{\mathrm{IV}}$ als wirkliche Functionen dieses Arguments ansieht. Die Grösse ${}''f(a+n')$ ist wieder ganz willkürlich, da sie zuerst zur Bildung der zweiten summirten Reihe benutzt, nachher im Integral abgezogen wird. Will man das doppelte Integral in Bezug auf x unmittelbar haben, so wird man den Factor ω^2 hinzufügen, oder statt $f(a+n\omega)$ ansetzen müssen: $\omega^2 f(a+n\omega)$ und damit die Differenz und summirten Reihen bilden. Das erste Integral in Bezug auf n das man unter dieser Annahme erhält, ist dann gleich $\omega \int f(x)\,dx$, und mufs mit ω dividirt werden, wenn man auch $\int f(x)\,dx$ kennen will.

Ganz auf dieselbe Weise findet sich das dreifache Integral aus der Summe von:

$$\int {}''f\,(a+n\omega)\,dn = {}'''f\,(a+n\omega) + \alpha\,{}'f\,(a+n\omega) + \beta f'\,(a+n\omega) + \gamma f'''\,(a+n\omega)\ldots$$

$$2\alpha\int f\,(a+n\omega)\,dn = 2\,\alpha\,{}'f\,(a+n\omega) + 2\alpha^2 f'\,(a+n\omega) + 2\,\alpha\beta f'''\,(a+\omega)$$

$$(\alpha^2+2\beta)\int f''\,(a+n\omega)\,dn = (\alpha^2+2\,\beta)\,f'\,(a+n\omega) + (\alpha^2+2\beta)\,\alpha f'''\,(a+n\omega)$$

$$2\,(\alpha\beta+\gamma)\int f^{\mathrm{IV}}(a+n\omega)\,dn = 2\,(\alpha\beta+\gamma)\,f'''\,(a+n\omega)$$

oder wenn man addirt und substituirt

$$\frac{1}{\omega^3}\int\!\!\int\!\!\int f(x)\,.\,dx^3 = {}'''f\,(a+n\omega) + 3\,\alpha\,{}'f\,(a+n\omega) + 3\,(\alpha^2+\beta)\,f'\,a+n\omega) + (\alpha^3+6\,\alpha\beta+3\,\gamma)\,f'''\,(a+n\omega)\ldots$$

$$= {}'''f\,(a+n\omega) + \tfrac{1}{8}\,{}'f\,(a+n\omega) - \tfrac{7}{1920}\,f'\,(a+n\omega) + \tfrac{457}{967680}\,f'''\,(a+n\omega)\ldots$$

wobei, wenn man nicht gleich die verschiedenen Constanten in den summirten Reihen berücksichtigt hat, noch hinzuzufügen sein wird:

$$M'' + M'n + \tfrac{1}{2}\,Mn^2.$$

Die ungeraden summirten und Differenzreihen welche hier vorkommen, und von denen man bei den etwa nöthigen Interpolationen ausgehen mufs, beziehen sich wieder auf Argumente von der Form $a+(i+\frac{1}{2})\,\omega$.

Gewöhnlich werden bei diesen Integrationen, besonders für die Anfangsgrenzen, die Formen $a+i\omega$ und $a+(i+\frac{1}{2})\,\omega$ gewählt werden. In Bezug auf diese beiden mögen hier noch die speciellen Vorschriften für ein doppeltes Integral folgen.

Werde zuerst gesucht

$$\iint_0^i f(a+n\omega)dn^2$$

so wird man die erste Integration so ausführen, dafs man nach (11) in die erste Stelle der summirten Reihe $'f$ für $'f(a-\frac{1}{2})$ annimmt:

$$C_0 = -\tfrac{1}{2} f(a) + \tfrac{1}{12} f'(a) - \tfrac{11}{720} f'''(a) + \tfrac{191}{60480} f^{\mathrm{V}}(a) \ldots$$

Mit diesem Werthe bildet man die erste summirte Reihe

$$\begin{aligned} 'f(a+\tfrac{1}{2}) &= C_0 + f(a) \\ 'f(a+\tfrac{3}{2}) &= 'f(a+\tfrac{1}{2}) + f(a+1) \\ 'f(a+\tfrac{5}{2}) &= 'f(a+\tfrac{3}{2}) + f(a+2) \text{ etc.} \end{aligned}$$

Hieran schliefst sich die zweite summirte Reihe $''f(a)$ so, dafs als erstes Glied derselben an die Stelle der willkürlichen Gröfse $''f(a)$ gesetzt wird:

$$C_0' = -\tfrac{1}{12} f(a) + \tfrac{1}{240} f''(a) - \tfrac{31}{60480} f^{\mathrm{IV}}(a) \ldots$$

als der negative Werth des Integrals für $\omega = 0$. Bildet man dann die zweite summirte Reihe

$$\begin{aligned} ''f(a+1) &= \quad C_0' + 'f(a+\tfrac{1}{2}) \\ ''f(a+2) &= ''f(a+1) + 'f(a+\tfrac{3}{2}) \\ ''f(a+3) &= ''f(a+2) + 'f(a+\tfrac{5}{2}) \text{ etc.} \end{aligned}$$

so hat man für jede spätere Grenze $a+i\omega$ den Werth von:

$$\iint_0^i f(a+n\omega)\,dn^2 = ''f(a+i) + \tfrac{1}{12} f(a+i) - \tfrac{1}{240} f''(a+i) + \tfrac{31}{60480} f^{\mathrm{IV}}(a+i) \text{ etc.}$$

und für jede beliebige Grenze $a+(i+n'')\,\omega$ den richtigen Werth, wenn man für das Argument $a+(i+n'')\,\omega$, die Functionen $''f(a+i)$, $f(a+i)$, $f''(a+i)$ etc. so interpolirt, als ob sie Functionen des Arguments $a+i\omega$ wirklich wären und dann berechnet:

$$''f(a+i+n'') + \tfrac{1}{12} f(a+i+n'') - \tfrac{1}{240} f''(a+i+n'') + \tfrac{31}{60480} f^{\mathrm{IV}}(a+i+n'') \ldots$$

Das Schema ist also in diesem Falle für Anfangsgrenze $n=0$:

Argument.	Haupt-function.	I. summ. Reihe.	II. summ. Reihe.
$a-1.\omega$	$f(a-1)$		
		C_0	
a	$f(a)$		C_0'
		$'f(a+\frac{1}{2})$	
$a+1.\omega$	$f(a+1)$		$''f(a+1)$
		$'f(a+\frac{3}{2})$	
$a+2.\omega$	$f(a+2)$		$''f(a+2)$
	etc.	etc.	

Werde zweitens gesucht:

$$\iint_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,dn^2$$

so wird man die erste Integration so ausführen, daſs man nach (10) in die erste Stelle der summirten Reihe $'f$, für $'f(a-\frac{1}{2})$ annimmt:

$$C_{-\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{24} f'(a-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{17}{5760} f'''(a-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{367}{967680} f^{\mathrm{V}}(a-\tfrac{1}{2}) \ldots$$

Mit diesem Werthe bildet man die erste summirte Reihe:

$$'f(a+\tfrac{1}{2}) = C_{-\frac{1}{2}} + f(a)$$
$$'f(a+\tfrac{3}{2}) = {}'f(a+\tfrac{1}{2}) + f(a+1)$$
$$'f(a+\tfrac{5}{2}) = {}'f(a+\tfrac{3}{2}) + f(a+2) \ldots \text{ etc.}$$

Zum Anschluss der zweiten Reihe sei irgend eine willkürliche Gröſse an die Stelle von $''f(a-1)$ angenommen, und mit ihr $''f(a) = {}''f(a-1) + C_{-\frac{1}{2}}$ gebildet. Zuerst wird man jetzt den Werth des doppelten Integrals für $n=-\frac{1}{2}$ zu suchen haben, um ihn von allen späteren abzuziehen. Hierzu muſs man die Gröſsen $''f$, f, f'' etc. interpoliren für das Argument $a-\frac{1}{2}\,\omega$, wenn man sie wirklich als Functionen von $a-1\,\omega$ und a betrachtet. Die Interpolation giebt in den verschiedenen Reihen die Werthe:

$$''f(a-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{8} f(a-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{3}{128} f''(a-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{5}{1024} f^{\mathrm{IV}}(a-\tfrac{1}{2}) \ldots$$
$$f(a-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{8} f''(a-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{3}{128} f^{\mathrm{IV}}(a-\tfrac{1}{2})$$
$$f''(a-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{8} f^{\mathrm{IV}}(a-\tfrac{1}{2})$$
$$f^{\mathrm{IV}}(a-\tfrac{1}{2})$$

wo $''f(a-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\, ''f(a-1) + \frac{1}{2}\, ''f(a)$ und eben so alle übrigen Functionen arithmetische Mittel sind. Multiplicirt man die erste Reihe mit 1, die zweite mit $+\frac{1}{12}$, die dritte mit $-\frac{1}{240}$, die vierte mit $\frac{31}{60480}$, und nimmt die Summe, so erhält man als Werth des Integrals für $n = -\frac{1}{2}$

$$''f(a-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{24} f(a-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{17}{1920} f''(a-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{367}{193536} f^{\mathrm{IV}}(a-\tfrac{1}{2}) \ldots$$

Da $''f(a-1)$ ganz willkürlich ist, also auch = Null gesetzt werden kann, so wird $''f(a-\frac{1}{2}) = ''f(a-1) + \frac{1}{2}\, 'f(a-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} C_{-\frac{1}{2}}$ oder nach dem obigen Werthe:

$$= -\tfrac{1}{48} f'(a-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{17}{11520} f'''(a-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{367}{1935360} f^{\mathrm{V}}(a-\tfrac{1}{2}) \ldots$$

Substituirt man diesen Werth und reducirt vermittelst der Gleichungen:

$$\begin{aligned}
f\ (a-\tfrac{1}{2}) &= f(a) - \tfrac{1}{2} f'(a-\tfrac{1}{2}) \\
f''\ (a-\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{2} f''(a-1) + \tfrac{1}{2} f''(a) \\
f'''(a-\tfrac{1}{2}) &= f''(a) - f''(a-1) \\
f^{\mathrm{IV}}(a-\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{2} f^{\mathrm{IV}}(a-1) - \tfrac{1}{2} f^{\mathrm{IV}}(a) \\
f^{\mathrm{V}}\ (a-\tfrac{1}{2}) &= f^{\mathrm{IV}}(a) - f^{\mathrm{IV}}(a-1)
\end{aligned}$$

so läfst sich der Werth des Integrals für $n = -\frac{1}{2}$ so schreiben:

$$-\tfrac{1}{24} f(a) + \tfrac{17}{5760}\{2f''(a) + f''(a-1)\} - \tfrac{367}{967680}\{3f^{\mathrm{IV}}(a) + 2f^{\mathrm{IV}}(a-1)\} \cdots$$

Diese Gröfse soll wegen der Anfangsgrenze überall abgezogen werden. Setzt man also an die Stelle von $''f(a-1)$ die Gröfse $C'_{-\frac{1}{2}}$ wo:

$$C'_{-\frac{1}{2}} = +\tfrac{1}{24} f(a) - \tfrac{17}{5760}\{2f''(a) + f''(a-1)\} + \tfrac{367}{967680}\{3f^{\mathrm{IV}}(a) + 2f^{\mathrm{IV}}(a-1)\} \cdots$$

so wird der beabsichtigte Zweck ein für allemal erreicht, und das vollständige Schema wird für Anfangsgrenze $n = -\frac{1}{2}$:

Argument.	Haupt-function.	I. summ. Reihe.	II. summ. Reihe.
$a-1\omega$	$f(a-1)$		$C'_{-\frac{1}{2}}$
		$C_{-\frac{1}{2}}$	
a	$f(a)$		$''f(a)$
		$'f(a+\frac{1}{2})$	
$a+1\omega$	$f(a+1)$		$''f(a+1)$
		$'f(a+\frac{3}{2})$	
$a+2\omega$	$f(a+2)$		$''f(a+2)$
		$'f(a+\frac{5}{2})$	
$a+3\omega$	$f(a+3)$		$''f(a+3)$
	etc.	etc.	

Für jede spätere Grenze $a+(i+n'')\omega$ wird auch hier wieder:

$$\iint f(a+n\omega)\,dn^2 = {}''f(a+i+n'') + \tfrac{1}{12} f(a+i+n'') - \tfrac{1}{240} f''(a+i+n'') + \tfrac{31}{60480} f^{\mathrm{IV}}(a+i+n'') \ldots$$

wobei für jedes n'' die verschiedenen Functionen so interpolirt werden müssen, als ob die wirklich in der summirten Reihe $''f$ vorkommenden Werthe Functionen von $a+i\omega$ wären. In dem speciellen Falle, daſs $n''=\frac{1}{2}$ ist, giebt die Interpolation in die Mitte hinein nach der eben ausgeführten Rechnung:

$$(14)\quad \iint_{-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} f(a+n\omega)\,dn^2 = {}''f(a+i+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{24} f(a+i+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{17}{1920} f''(a+i+\tfrac{1}{2}) - \tfrac{367}{193536} f^{\mathrm{IV}}(a+i+\tfrac{1}{2}) \ldots$$

wenn man unter $''f(a+i+\frac{1}{2})$ das arithmetische Mittel zwischen $''f(a+i)$ und $''f(a+i+1)$ versteht, und ähnlich bei allen andern Functionen f, f'', f^{IV}. Es bedarf keiner weiteren Erwähnung, daſs in den beiden Fällen der meistentheils nöthige Factor ω^2 für das doppelte Integral schon in den Functionen f enthalten gedacht worden ist, und daſs das erste Integral, wenn man es aus derselben Tabelle ableiten will, eben deshalb mit ω zu dividiren ist.

Es kann hierbei noch angenehm sein, das Gesetz der anscheinend so unregelmäſsig fortgehenden numerischen Coefficienten zu bestimmen, um eine festere Prüfung, leichtere Ableitung, und nöthigenfalls Fortsetzung derselben zu gewinnen. Hierzu wird am zweckmäſsigsten eine Function dienen, welche eine leichte Bildung der Differenz- und summirten Reihen gestattet, niemals auf constante Differenzen führt, und leicht direct integrirbar ist. Eine solche ist e^x wenn e die Basis des logarithmischen Systems. Sucht man das einfache oder doppelte Integral von $e^x\,dx$, und $e^x\,dx^2$ innerhalb bestimmter Grenzen, so wird man zur Ausführung der mechanischen Quadratur, von einem bestimmten Werthe a an, für den man $a = 0$ setzen kann, die Werthe $e^{a-2\omega}$ $e^{a-1\omega}$ e^{a} $e^{a+1\omega}$ etc. berechnen und die Differenzen bilden. Die Tafel wird folgende Gestalt erhalten:

Argument.	Haupt-function.	I. Diff.	II. Diff.	III. Diff.
$a - 2\omega$	$e^{-2\omega}$		$e^{-3\omega}(e^{\omega}-1)^2$	
		$e^{-2\omega}(e^{\omega}-1)$		$e^{-3\omega}(e^{\omega}-1)^3$
$a - 1\omega$	$e^{-\omega}$		$e^{-2\omega}(e^{\omega}-1)^2$	
		$e^{-\omega}\ (e^{\omega}-1)$		$e^{-2\omega}(e^{\omega}-1)^3$
a	e^{0}		$e^{-\omega}\ (e^{\omega}-1)^2$	
		$e^{0}\ \ (e^{\omega}-1)$		$e^{-\omega}\ (e^{\omega}-1)^3$
$a + 1\omega$	$e^{+\omega}$		$e^{0}\ \ (e^{\omega}-1)^2$	
		$e^{+\omega}\ (e^{\omega}-1)$		$e^{0}\ \ (e^{\omega}-1)^3$
$a + 2\omega$	$e^{+2\omega}$		$e^{+\omega}\ (e^{\omega}-1)^2$	

woraus sich die Fortsetzung der Differenzreihen von selbst ergiebt. Man kann den sämmtlichen Reihen sogleich die Form geben, dafs sie Functionen von $(a - \frac{1}{2}\omega)$, $(a - \omega)$ etc. werden, wenn man die Hülfsgrösse einführt:

$$e^{+\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega} = u$$

Es wird damit:

$$e^{m\omega}(e^{\omega}-1)^{p} = e^{(m+\frac{1}{2}p)\omega}\, u^{p}$$

wodurch sich die Differenzreihen schreiben lassen:

Argument.	Haupt-function.	I. Diff.	II. Diff.	III. Diff.	
$a - 2\omega$	$e^{-2\omega}$		$e^{-2\omega}\cdot u^2$		...
		$e^{-\frac{3}{2}\omega}\cdot u$		$e^{-\frac{3}{2}\omega}\cdot u^3$	...
$a - 1\omega$	$e^{-\omega}$		$e^{-\omega}\cdot u^2$		
		$e^{-\frac{1}{2}\omega}\cdot u$		$e^{-\frac{1}{2}\omega}\cdot u^3$	...
a	e^{0}		$e^{0}\cdot u^2$		
		$e^{+\frac{1}{2}\omega}\cdot u$		$e^{+\frac{1}{2}\omega}\cdot u^3$	...
$a + 1\omega$	$e^{+\omega}$		$e^{+\omega}\cdot u^2$		
		$e^{+\frac{3}{2}\omega}\cdot u$		$e^{+\frac{3}{2}\omega}\cdot u^3$	...
$a + 2\omega$	$e^{+2\omega}$		$e^{+2\omega}\cdot u^2$		

Hieraus geht sogleich auch die Form der summirten Reihen hervor. Es wird nämlich:

Argument.	Haupt-function.	I. summ. Reihe.	II. summ. Reihe.
$a-2\omega$	$e^{-2\omega}$		$e^{-2\omega}\cdot\frac{1}{u^2}$
		$e^{-\frac{3}{2}\omega}\cdot\frac{1}{u}$	
$a-1\omega$	$e^{-\omega}$		$e^{-\omega}\cdot\frac{1}{u^2}$
		$e^{-\frac{1}{2}\omega}\cdot\frac{1}{u}$	
a	e^0		$e^0\cdot\frac{1}{u^2}$
		$e^{+\frac{1}{2}\omega}\cdot\frac{1}{u}$	
$a+1\omega$	$e^{+\omega}$		$e^{+\omega}\cdot\frac{1}{u^2}$
		$e^{+\frac{3}{2}\omega}\cdot\frac{1}{u}$	
$a+2\omega$	$e^{+1\omega}$		$e^{+2\omega}\cdot\frac{1}{u^2}$

Die Annahme dieser Form für die mechanische Quadratur ist gestattet, weil bei der einfachen Integration $'f(a-\frac{1}{2})$ willkürlich ist. Setzt man es aber $=e^{-\frac{1}{2}\omega}\cdot\frac{1}{u}$ so ergeben sich die andern Werthe. Ganz derselbe Fall tritt bei der zweifachen Integration für $''f(a-1)$ ein, nur wird man zu berücksichtigen haben, daſs bei diesem Anfange für die zweite summirte Reihe, auf die Constante, welche der ersten Integration zukommen möchte, keine Rücksicht genommen ist, man also auch bei der Vergleichung des Resultats der mechanischen Quadratur mit der directen Integration, diese letztere ohne Rücksicht auf die Constante der ersten Integration auszuführen haben wird.

Werde jetzt zuerst gesucht:

$$A=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{n\omega}\,dn$$

so wird nach früherem (pag. 30) wegen $e^{+\frac{1}{2}\omega}-e^{-\frac{1}{2}\omega}=u$:

$$A=1+\tfrac{1}{24}u^2-\tfrac{17}{5760}u^4+\tfrac{367}{967680}u^6\ldots$$

Werde zweitens gesucht:

$$B=\int_0^1 e^{n\omega}\,dn$$

so wird nach (11):

$$B = \tfrac{1}{2}\left(e^{+\frac{3}{2}\omega} + e^{+\frac{1}{2}\omega}\right)\left\{\frac{1}{u} - \tfrac{1}{12}u + \tfrac{11}{720}u^3 - \tfrac{191}{60480}u^5 \cdots\right\}$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(e^{+\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}\right)\left\{\frac{1}{u} - \tfrac{1}{12}u + \tfrac{11}{720}u^3 - \tfrac{191}{60480}u^5 \cdots\right\}$$

oder da

$$e^{+\frac{3}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega} = (e^{\omega}+1)\left(e^{+\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}\right)$$
$$= (e^{\omega}+1)\,u$$
$$B = \tfrac{1}{2}(e^{\omega}+1)\left\{1 - \tfrac{1}{12}u^2 + \tfrac{11}{720}u^4 - \tfrac{191}{60480}u^6 \cdots\right\}$$

Werde drittens gesucht:

$$C = \iint_0^1 e^{n\omega}\,dn^2$$

ohne Rücksicht auf die Constante des ersten Integrals so wird nach (13):

$$C = e^{+\omega}\left\{\frac{1}{u^2} + \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{240}u^2 + \tfrac{31}{60480}u^4 \cdots\right\}$$
$$-e^{0}\left\{\frac{1}{u^2} + \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{240}u^2 + \tfrac{31}{60480}u^4 \cdots\right\}$$

oder

$$C = \frac{e^{\omega}-1}{u^2}\left\{1 + \tfrac{1}{12}u^2 - \tfrac{1}{240}u^4 + \tfrac{31}{60480}u^6 \cdots\right\}$$

Werde endlich viertens gesucht unter derselben Bedingung:

$$D = \iint_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{n\omega}\,dn^2$$

so wird nach (14):

$$D = \tfrac{1}{2}e^{+\omega}\left\{\frac{1}{u^2} - \tfrac{1}{24} + \tfrac{17}{1920}u^2 - \tfrac{367}{193536}u^4 \cdots\right\}$$
$$-\tfrac{1}{2}e^{-\omega}\left\{\frac{1}{u^2} - \tfrac{1}{24} + \tfrac{17}{1920}u^2 - \tfrac{367}{193536}u^4 \cdots\right\}$$

oder da

$$e^{+\omega} - e^{-\omega} = \left(e^{\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}\right)\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}\right)$$
$$= \left(e^{\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}\right)u$$

$$D = \tfrac{1}{2}\,\frac{e^{\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}}{u}\left\{1 - \tfrac{1}{24}u^2 + \tfrac{17}{1920}u^4 - \tfrac{367}{193536}u^6 \cdots\right\}$$

Für die directe Integration wird wenn:

$$x = n\omega \qquad dx = \omega\, dn$$

$$\int e^{n\omega}\, dn = \frac{1}{\omega}\int e^{x}\, dx = \frac{e^{x}}{\omega} + \text{Const.}$$

$$\iint e^{n\omega}\, dn^2 = \frac{1}{\omega^2}\iint e^{x}\, dx^2 = \frac{e^{x}}{\omega^2} + \text{Const.}$$

und die Grenzen n' und n'' werden sich verwandeln in:

$$x' = n'\omega \qquad x'' = n''\omega$$

Hieraus folgt:

$$A = \frac{e^{+\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}}{\omega} = \frac{u}{\omega}$$

$$B = \frac{e^{\omega} - 1}{\omega} = \tfrac{1}{2}(e^{\omega}+1)\frac{e^{\omega}-1}{e^{\omega}+1}\cdot\frac{2}{\omega} = \tfrac{1}{2}(e^{\omega}+1)\frac{u}{\omega}\cdot\frac{2}{e^{\frac{1}{2}\omega}+e^{-\frac{1}{2}\omega}}$$

$$C = \frac{e^{\omega}-1}{\omega^2} = \frac{(e^{\omega}-1)}{u^2}\cdot\frac{u^2}{\omega^2}$$

$$D = \frac{e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}}{\omega^2} = \frac{u}{\omega^2} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{e^{\frac{1}{2}\omega}+e^{-\frac{1}{2}\omega}}{u}\cdot\frac{u^2}{\omega^2}\cdot\frac{2}{e^{\frac{1}{2}\omega}+e^{-\frac{1}{2}\omega}}$$

und die Vergleichung der auf den beiden verschiedenen Wegen erhaltenen Resultate giebt, wenn beide richtig sein sollen, die Gleichungen:

$$\frac{u}{\omega} = 1 + \tfrac{1}{24}u^2 - \tfrac{17}{5760}u^4 + \tfrac{367}{967680}u^6 \cdots$$

$$\frac{u}{\omega}\cdot\frac{2}{e^{\frac{1}{2}\omega}+e^{-\frac{1}{2}\omega}} = 1 - \tfrac{1}{12}u^2 + \tfrac{11}{720}u^4 - \tfrac{191}{60480}u^6 \cdots$$

$$\frac{u^2}{\omega^2} = 1 + \tfrac{1}{12}u^2 - \tfrac{1}{240}u^4 + \tfrac{31}{60480}u^6 \cdots$$

$$\frac{u^2}{\omega^2}\cdot\frac{2}{e^{\frac{1}{2}\omega}+e^{-\frac{1}{2}\omega}} = 1 - \tfrac{1}{24}u^2 + \tfrac{17}{1920}u^4 - \tfrac{367}{193536}u^6 \cdots$$

zu welcher Prüfung man also jetzt noch der Reihenentwickelung von

$$\frac{u}{\omega} \qquad \text{und} \qquad \frac{2}{e^{\frac{1}{2}\omega}+e^{-\frac{1}{2}\omega}}$$

nach Potenzen von u bedarf.

Aus der Gleichung:

$$e^{+\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega} = u$$

erhält man durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$e^{+\frac{1}{2}\omega} = \quad \tfrac{1}{2}u + \sqrt{(1 + \tfrac{1}{4}u^2)}$$

$$e^{-\frac{1}{2}\omega} = -\tfrac{1}{2}u + \sqrt{(1 + \tfrac{1}{4}u^2)}$$

folglich:

$$e^{+\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega} = 2\sqrt{(1 + \tfrac{1}{4}u^2)}$$

$$\frac{2}{e^{\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}} = (1 + \tfrac{1}{4}u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}\frac{u^2}{2^2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{u^4}{2^4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{u^6}{2^6}\cdots \qquad (E)$$

und auf der andern Seite auch

$$\tfrac{1}{2}\omega = \log.\ \text{hyp.}\ (\tfrac{1}{2}u + \sqrt{(1 + \tfrac{1}{4}u^2)})$$

folglich wenn man zur leichteren Reihenentwickelung zuerst differentiirt:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\omega}{du} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}u(1 + \frac{1}{4}u^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}u + \sqrt{(1 + \frac{1}{4}u^2)}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(1 + \frac{1}{4}u^2)}}$$

oder

$$\frac{d\omega}{du} = (1 + \tfrac{1}{4}u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{2^2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{u^4}{2^4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{u^6}{2^6}\cdots$$

Integrirt man jetzt wieder, wobei eine Constante nicht hinzugefügt werden darf, weil für $u = 0$ auch

$$\tfrac{1}{2}\omega = \log.\ \text{hyp.}\ 1 = 0$$

so hat man:

$$\omega = u - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\frac{u^3}{2^2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{1}{5}\cdot\frac{u^5}{2^4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\tfrac{1}{7}\cdot\frac{u^7}{2^6}$$

woraus endlich

$$\frac{u}{\omega} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{u^2}{2^2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{u^4}{2^4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{u^6}{2^6}\cdots} \qquad (F)$$

Es sind also die Reihen, welche in den verschiedenen Integrationen vorkommen, und zwar bei

$$A \dots = \frac{u}{\omega} = F.$$

$$B \dots = \frac{u}{\omega} \cdot \frac{2}{e^{\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}} = F.\,E.$$

$$C \dots = \frac{u^2}{\omega^2} = F^2.$$

$$D \dots = \frac{u^2}{\omega^2} \cdot \frac{2}{e^{\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}} = F^2.\,E.$$

wovon man sich durch die wirkliche Ausführung der Divisionen und Multiplicationen überzeugen kann.

Durch diese Reihen und ihre Werthe kann man auch die oben angegebenen Constanten C_0, C'_0, $C_{-\frac{1}{2}}$, $C'_{-\frac{1}{2}}$ ausdrücken. Es wird

$$C_0 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}\right)\left\{\tfrac{1}{12}u - \tfrac{11}{720}u^3 + \tfrac{191}{60480}u^5 \dots\right\}$$

$$= -\tfrac{1}{2} + \frac{e^{\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}}{2u}\left\{1 - \frac{u}{\omega} \cdot \frac{2}{e^{\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}}\right\}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}\omega}}{u} - \frac{1}{\omega},$$

oder gleich dem Werthe der summirten Function, an deren Stelle C_0 gesetzt ist, nebst dem Werthe der Constante für die Anfangsgrenze $n = 0$. Eben so findet sich

$$C_{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\omega}\left\{\frac{1}{u} - \frac{1}{\omega}\right\} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\omega}}{u} - \frac{e^{-\frac{1}{2}\omega}}{\omega}$$

wo die hinzugefügte Gröfse der Werth der Constante für die Anfangsgrenze $n = -\frac{1}{2}$ ist.

Für C'_0 hat man

$$C'_0 = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{\omega^2} \cdot = \frac{e^0}{u^2} - \frac{e^0}{\omega^2}$$

und für

$$C'_{-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\omega}}{u^2} - \frac{e^{-\frac{1}{2}\omega}}{\omega^2} + \frac{1}{2}\frac{e^{-\frac{1}{2}\omega}}{\omega}$$

nach gehöriger Entwickelung, welche am leichtesten ausgeführt wird, wenn man für die vorkommenden Gröſsen ihre gleichbedeutenden Werthe nach den Gleichungen setzt:

$$1 = \tfrac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega})\, e^{-\frac{1}{2}\omega} + \tfrac{1}{2} u\, e^{-\frac{1}{2}\omega}$$

$$2 + e^{-\omega} = \tfrac{3}{2}(e^{\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega})\, e^{-\frac{1}{2}\omega} + \tfrac{1}{2} u\, e^{-\frac{1}{2}\omega}$$

$$3 + 2e^{-\omega} = \tfrac{5}{2}(e^{\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega})\, e^{-\frac{1}{2}\omega} + \tfrac{1}{2} u\, e^{-\frac{1}{2}\omega} \ldots$$

Das erste Glied in C'_0 und $C'_{-\frac{1}{2}}$ ist immer der Werth der an gleicher Stelle stehenden summirten Function. Das zweite ist die bei der zweiten Integration sich ergebende Constante für die Grenzen $n = 0$ und $n = -\frac{1}{2}$. Das dritte Glied in $C'_{-\frac{1}{2}}$ ist das Integral der bei der ersten Integration hinzugefügten Constante, genommen von $n = -\frac{1}{2}$ bis $n = -1$. Es fehlt bei C'_0, weil der Ort von C'_0 dem Anfange beider Integrationen entspricht. Wenn man diese Werthe in die beiden obigen allgemeinen Schemata gesetzt hätte, so würde man erhalten haben:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{n\omega}\, dn = \frac{e^{+\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}}{\omega}$$

$$\int_0^1 e^{n\omega}\, dn = \frac{e^{\omega} - 1}{\omega}$$

$$\iint_0^1 e^{n\omega}\, dn^2 = \frac{e^{\omega} - 1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega}$$

$$\iint_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{n\omega}\, dn^2 = \frac{e^{+\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}}{\omega^2} - \frac{e^{-\frac{1}{2}\omega}}{\omega}$$

d. h. die vollständigen Integrale mit Rücksicht auf alle Constanten. Uebrigens ist es von selbst klar, dafs die oben gegebene Entwickelung für die dritte Integration dem Cubus der Reihe F entsprechen mufs, und sofort bei allen folgenden.

Als Beispiel einer zweifachen Integration möge das Integral

$$\triangle M = \int\int \cdot \frac{d\mu}{dt} \cdot dt^2$$

dienen, wo μ die mittlere tägliche siderische Bewegung der Vesta ist, und $\frac{d\mu}{dt}$ den Differentialquotienten (in Bezug auf die Zeit) von der Störung ausdrückt, welche das μ der Vesta durch die directe Anziehung des Jupiters erleidet. Das erste Integral $\int \frac{d\mu}{dt} dt$ wird das wahre von den Störungen afficirte μ geben. Das zweite die mittlere Anomalie, welche zufolge der Störung von μ jedesmal stattfindet. Die Einheit in $\frac{d\mu}{dt}$ ist wiederum der mittlere Tag, das Zeitintervall ω war gleich 42 Tagen. Der Anfang beider Integrale fiel auf 1810. Jan. 0. Um $\triangle M$ unmittelbar zu erhalten, wurde:

$$\omega^2 \cdot \frac{d\mu}{dt} = 1764. \frac{d\mu}{dt}$$

als die Function f angesetzt, und für verschiedene Zeiten nämlich für:

$$a - 3\omega, \quad a - 2\omega, \quad a, \quad a + \omega \quad \text{etc.}$$

wo

$$a = 1810. \text{ Jan. } 0. + \tfrac{1}{2}\omega = 1810. \text{ Jan. } 21.$$

war, wurden die Werthe von $f\ (a + n\omega)$ berechnet. Hieraus entstand mit Zuziehung der Constanten $C_{-\frac{1}{2}}$ und $C'_{-\frac{1}{2}}$ die folgende Tafel.

0^h Par. Zt.	Argument.	$1764.\ \frac{d\mu}{dt}$	$'f$	$''f$
1809. Sept. 17.	$a - 3\omega$	$+6{,}''57219$		....
Oct. 29.	$a - 2\omega$	$+5{,}82592$	....	....
Dec. 10.	$a - \omega$	$+5{,}15193$	....	$+\ 0{,}''18914$
1810. Jan. 21.	a	$+4{,}55359$	$+\ 0{,}''02489$	$+\ 0{,}21403$
Mrz. 4.	$a + \omega$	$+4{,}01802$	$+\ 4{,}57848$	$+\ 4{,}79251$
Apr. 15.	$a + 2\omega$	$+3{,}53914$	$+\ 8{,}59650$	$+\ 13{,}38901$
Mai 27.	$a + 3\omega$	$+3{,}10646$	$+12{,}13564$	$+\ 25{,}52465$
Jul. 8.	$a + 4\omega$	$+2{,}71163$	$+15{,}24210$	$+\ 40{,}76675$
Aug. 19.	$a + 5\omega$	$+2{,}34609$	$+17{,}95373$	$+\ 58{,}72048$
Sept. 30.	$a + 6\omega$	$+2{,}00418$	$+20{,}29982$	$+\ 79{,}02030$
Nov. 11.	$a + 7\omega$	$+1{,}68040$	$+22{,}30400$	$+101{,}32430$
Dec. 23.	$a + 8\omega$	$+1{,}36911$	$+23{,}98440$	$+125{,}30870$
1811. Febr. 3.	$a + 9\omega$	$+1{,}06719$	$+25{,}35351$	$+150{,}66221$
Mrz. 17.	$a + 10\omega$	$+0{,}77184$	$+26{,}42070$	$+177{,}08291$
Apr. 28.	$a + 11\omega$	$+0{,}48183$	$+27{,}19254$	$+204{,}27545$

Es wird hier nämlich

$$f'\ (a-\tfrac{1}{2}) = -0{,}59834$$
$$f''\ (a-1) = +0{,}07565$$
$$f''\ (a) \quad = +0{,}06277$$
$$f'''\ (a-\tfrac{1}{2}) = -0{,}01288$$

Weiter als bis f''' ward nicht zurückgegangen, weil die Sprünge, welche sich sowohl hier bei $\frac{d\mu}{dt}$ als auch früher bei $\frac{d\pi}{dt}$ in den höheren Differenzen des Anfangs finden, nicht im Gange der Function liegen, sondern darin, dafs an dieser Stelle zwei nach verschiedenen Elementen geführte Rechnungen zusammenstofsen. Zufolge dieser Werthe wird:

$$C_{-\frac{1}{2}} = +0{,}02493 - 0{,}00004 = +0{,}02489$$
$$C'_{-\frac{1}{2}} = +0{,}18973 - 0{,}00059 = +0{,}18914.$$

Für 1811. Jan. 13. folgt damit weil das Argument $= a + (8 + \frac{1}{2})\omega$

$$\begin{aligned}
{}''f\ (a + \tfrac{17}{2}) &= + 137{,}98545\,.\,5 \\
- \tfrac{1}{24}\ f\ (a + \tfrac{17}{2}) &= - \quad 0{,}05075\,.\,6 \\
+ \tfrac{17}{5760} f''(a + \tfrac{17}{2}) &= \underline{+ \quad 0{,}00007\,.\,1} \\
\triangle M &= + 137{,}93477. \quad \text{von 1810. Jan. 0. bis 1811. Jan. 13.}
\end{aligned}$$

für 1811. Febr. 3 ... $(a + 9\,.\,\omega)$ ... wird:

$$\begin{aligned}
{}''f\ (a + 9) &= + 150{,}66221 \\
+ \tfrac{1}{12}\ f\ (a + 9) &= + \quad 0{,}08893\,.\,3 \\
- \tfrac{1}{240} f''(a + 9) &= \underline{- \quad 0{,}00002\,.\,7} \\
\triangle M &= + 150{,}75112. \quad \text{von 1810. Jan. 0. bis 1811. Febr. 3.}
\end{aligned}$$

Auf gleiche Weise folgt für das einfache Integral, dessen Werth hier $= 42 \triangle \mu$ wird, bis 1811. Jan. 13.

$$\begin{aligned}
{}'f\ (a + \tfrac{17}{2}) &= + 25{,}35351 \\
+ \tfrac{1}{24}\ f'\ (a + \tfrac{17}{2}) &= - \quad 0{,}01258 \\
- \tfrac{17}{5760} f'''(a + \tfrac{17}{2}) &= \underline{+ \quad 0{,}00001} \\
42 \triangle \mu &= + 25{,}34094 \\
\triangle \mu &= + \quad 0{,}603356 \quad \text{von 1810. Jan. 0. bis 1811. Jan. 13.}
\end{aligned}$$

und bis 1811. Febr. 3.

$$\begin{aligned}
{}'f\ (a + 9) &= + 25{,}88710\,.\,5 \\
- \tfrac{1}{12}\ f'\ (a + 9) &= + \quad 0{,}02488\,.\,6 \\
+ \tfrac{11}{720} f'''(a + 9) &= \underline{- \qquad\quad 3\,.\,2} \\
42 \triangle \mu &= + 25{,}91196 \\
\triangle \mu &= + \quad 0{,}616951. \quad \text{von 1810. Jan. 0. bis 1811. Febr. 3.}
\end{aligned}$$

Ueberhaupt werden die Integrale für verschiedene Epochen, immer von 1810. Jan. 0. an gerechnet bis:

1811. Jan. 13.	$\triangle \mu = + 0{,}603356$	$\triangle M = + 137{,}93477$
Febr. 3.	$= + 0{,}616951$	$= + 150{,}75112$
Febr. 24.	$= + 0{,}628771$	$= + 163{,}83430$
Mrz. 17.	$= + 0{,}638821$	$= + 177{,}14721.$

Wollte man für eine andere Zeit, etwa für 1811. Febr. 10., oder das Argument $a + (9 + \frac{1}{3})\,\omega$, unmittelbar aus der Tafel das erste und zweite Integral nehmen, so würde man für $42\,\Delta\mu$ interpoliren müssen:

$$'f\ (a+9+\tfrac{1}{6}) = {}'f\ (a+9+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}) = +26{,}''09809$$
$$f'\ (a+9+\tfrac{1}{6}) = f'\ (a+9+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}) = -\ \ 0{,}29740$$
$$f'''(a+9+\tfrac{1}{6}) = f'''(a+9+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}) = -\ \ 0{,}00175$$

und für ΔM:

$$''f\ (a+9+\tfrac{1}{6}) = +154{,}99961$$
$$f\ (a+9+\tfrac{1}{6}) = +\ \ \ 1{,}01754$$
$$f''(a+9+\tfrac{1}{6}) = +\ \ \ 0{,}00636$$

woraus man für Febr. 10. erhalten würde:

$$42\,\Delta\mu = +\ \ 26{,}09809 - 0{,}01239\,.\,2\ \ + 0{,}00000\,.\,5$$
$$= +\ \ 26{,}08570$$
$$\Delta\mu = +\ \ \ 0{,}621088 \quad 1810.\ \text{Jan.}\ 0. - 1811.\ \text{Febr.}\ 10.$$
$$\Delta M = +154{,}99961 + 0{,}08479\,.\,5\ \ - 0{,}00002\,.\,6$$
$$= +155{,}08438 \quad 1810.\ \text{Jan.}\ 0. - 1811.\ \text{Febr.}\ 10.$$

womit die Interpolation aus den früheren Werthen vollkommen übereinstimmt. Wird der Betrag aller übrigen Störungen ebenso berechnet, so wird man zuletzt noch den Werth, den μ für 1810. Jan. 0. wirklich hatte, etwa μ_0, hinzuzulegen haben zu $\Delta\mu$, und eben so den jedesmaligen Werth, den M ohne die Störungen gehabt haben würde, zu ΔM. Der letztere wird von der Form sein $M_0 + (n+\tfrac{1}{2})\,\omega\mu_0$. Es würde nur eine unnütze Vermehrung der Rechnung gewesen sein, wenn man, um alles unmittelbar zu erhalten, statt der Constante $C_{-\frac{1}{2}}$ angesetzt hätte $C_{-\frac{1}{2}} + 42\mu_0$ und statt $C'_{-\frac{1}{2}} \ldots C'_{-\frac{1}{2}} + M_0 - \tfrac{1}{2}\,\omega\mu_0$.

Ueber eine andere Methode, zu den Formeln der mechanischen Quadratur zu gelangen.

Bei der neueren Art, die Störungen zu berechnen, wird die mechanische Quadratur so häufig und in so verschiedener Weise angewandt, dafs eine Betrachtung derselben nach den mannigfachen Gesichtspunkten, die sie darbietet, nicht unangemessen erscheint. Im Jahrbuche für 1837*) habe ich sie aus den Interpolationsformeln abgeleitet. In dem Anhange zu dem *Nautical almanac* von 1856 hat Herr Airy die nöthigen Ausdrücke auf eine andere Art bewiesen, und in einer Abhandlung: „*Nouvelle méthode pour calculer les perturbations des planètes par M. Encke, mémoire traduit par MM. Terquem et Lafon,* Nancy 1858“ sind diese Ausdrücke noch auf eine andere Weise abgeleitet worden. Es ist in der That überflüssig, einen neuen Beweis hinzufügen zu wollen. Jeder, der sie anwendet, wird doch den einen oder den andern Weg für seine Auffassungsweise am vorzüglichsten finden. Aber dennoch können einige Betrachtungen darüber den Nutzen haben, das eigentliche Wesen derselben Denen, welche zuerst damit bekannt werden, klarer vor Augen zu bringen als die blofse Entwickelung der Zahlen und Formeln allein es vermag. Dieses wird der Zweck der folgenden Zeilen sein.

(1.)

Bei der Anwendung der mechanischen Quadratur haben wir es, wie überhaupt in den meisten Anwendungen bei der Astronomie, mit lauter Gröfsen zu thun, die, wenn man sie für verschiedene Werthe der Variabeln, von denen sie abhängen, bestimmt, und die

*) Diese Ausgabe Band I pag. 21.

(nicht zu grofsen) Aenderungen jener Werthe in arithmetischer Progression fortschreiten läfst, auf arithmetische Reihen von höheren Ordnungen führen, das heifst auf solche Reihen, bei welchen irgend eine der höheren Differenzen als constant oder verschwindend betrachtet werden kann. Für alle solche Reihen, bei denen die Continuität stets stattfindet, gilt der Taylor'sche Lehrsatz in aller Strenge und ohne Ausnahme. Wie weit man seine Entwickelung führen mufs, hängt von der Gröfse der Aenderung ab, die man in regelmäfsiger Reihefolge bei der zum Grunde gelegten Variabeln annimmt. Es gehört ein praktischer Takt, der nicht auf bestimmte Regeln sich zurückführen läfst, dazu, um das richtige Verhältnifs zwischen der Genauigkeit, die man erreichen will, und der dazu nöthigen Weitläuftigkeit der Rechnung zu finden.

So wie bei dem Taylor'schen Satze Differential-Quotienten der verschiedenen Ordnungen vorkommen, so werden bei der Anwendung die Differenzen gebraucht werden, die aus den verschiedenen Werthen der Functionen hervorgehen. Beide sind einander ganz analog. Wenn der Differential-Quotient der ersten Ordnung die Geschwindigkeit ist, mit welcher sich die Function für einen bestimmten Werth der zum Grunde liegenden Variabeln oder des Arguments ändert, und zwar auf eine dabei angenommene Einheit bezogen, so ist die erste Differenz der Inbegriff der sämmtlichen Aenderungen, welche der Werth der Function für eine angenommene Aenderung des Argumentes erlitten hat. Sie mufs deshalb, mehr oder minder genähert, das Product des Differential-Quotienten in die Aenderung des Argumentes sein, wenn man die letztere in den Einheiten ausdrückt, die bei dem Differential-Quotienten zum Grunde liegen. Wird deshalb der Differential-Quotient der ersten Ordnung bei der Function $f(x)$ mit $f'(x)$ bezeichnet, so liegt es in der Natur der Sache, die erste Differenz analog, aber doch verschieden, durch f'_0 anzudeuten. Dabei wird bei nicht allzu grofsem Intervalle des Arguments — es möge das Intervall mit ω bezeichnet werden — und zwei aufeinander folgenden Werthen a und $a+\omega$, die Differenz der Functionen $f(a)$ und $f(a+\omega)$ in der Regel am nächsten durch $\omega f'(a+\frac{1}{2}\omega)$ ausgedrückt werden. Zweckmäfsig wird deshalb auch die erste Differenz

$$f(a+\omega)-f(a)=f'_0(a+\tfrac{1}{2}\omega)$$

bezeichnet werden; und zwar dieses mit um so gröfserem Rechte, als bei der einfachen Betrachtung der Entwickelung nach dem Taylor'schen Satze:

$$f(a+\omega)=f(a+\tfrac{1}{2}\omega)+\tfrac{1}{2}\omega f'(a+\tfrac{1}{2}\omega)+\tfrac{1}{8}\omega^2 f''(a+\tfrac{1}{2}\omega)+\tfrac{1}{48}\omega^3 f'''(a+\tfrac{1}{2}\omega)..$$
$$fa=f(a+\tfrac{1}{2}\omega)-\tfrac{1}{2}\omega f'(a+\tfrac{1}{2}\omega)+\tfrac{1}{8}\omega^2 f''(a+\tfrac{1}{2}\omega)-\tfrac{1}{48}\omega^3 f'''(a+\tfrac{1}{2}\omega)..$$

die Differenz

$$f(a+\omega)-f(a)=\omega f'(a+\tfrac{1}{2}\omega)+\tfrac{1}{24}\omega^3 f'''(a+\tfrac{1}{2}\omega)....$$

sich als eine wirkliche Function von $a+\frac{1}{2}\omega$ darstellt, da die Differential-Quotienten $f'(a+\frac{1}{2}\omega)$, $f'''(a+\frac{1}{2}\omega)$, Functionen von x sind, in welchen nach der Differentiation $x=a+\frac{1}{2}\omega$ gesetzt worden ist. Stellt man deshalb die Argumente, von a an, regelmäfsig mit dem Intervalle ω fortschreitend, vertikal untereinander, und setzt die dazu gehörigen Functionen daneben, so wird, wenn man eine horizontale Linie zwischen a und $a+\omega$ hindurch führt, ganz der bisherigen Entwickelung gemäfs, die vertikale Reihe der ersten Differenz bei den Functionen sich so stellen:

Arg.	Funct.	I. Diff.
a	$f(a)$	
		$f'_0(a+\frac{1}{2}\omega)$
$a+\omega$	$f(a+\omega)$	
		$f'_0(a+\frac{3}{2}\omega)$
$a+2\omega$	$f(a+2\omega)$	
		$f'_0(a+\frac{5}{2}\omega)$
$a+3\omega$	$f(a+3\omega)$	
	etc.	

in welcher Bezeichnung für diese erste Differenz sich alles vereinigt, was man wünschen kann: die Analogie mit den Differential-Quotienten, der Ort, wohin die Differenz gehört, oder die beiden

Functionen, aus denen sie gebildet ist, und der Begriff, daſs die ersten Differenzen wirklich als reine Functionen der Argumente $(a+\frac{1}{2}\omega)$, $(a+\frac{3}{2}\omega)$, $(a+\frac{5}{2}\omega)$ etc. anzusehen sind; und da sie ebenfalls eine arithmetische Reihe der höheren Ordnung bilden, eine vollständige Interpolation bei ihnen stattfinden kann. Wenn folglich die erste Differenz

$$f'_0(a+\omega)$$

oder

$$f(a+\tfrac{3}{2}\omega)-f(a+\tfrac{1}{2}\omega)$$

verlangt wird, so wird es nur nöthig sein zwischen

$$f'_0(a+\tfrac{1}{2}\omega) \quad \text{und} \quad f'_0(a+\tfrac{3}{2}\omega)$$

strenge mit Rücksicht auf die höheren Differenzen zu interpoliren, um ohne die neuen Functionen $f(a+\frac{3}{2}\omega)$ und $f(a+\frac{1}{2}\omega)$ zu bilden, den richtigen Werth zu erhalten.

(2.)

Es wird kaum nöthig sein, hinzuzufügen, daſs diese Betrachtungen bei den höheren Differenzen sich fortsetzen. Die zweiten Differenzen werden folglich wieder den ganzen Argumenten a, $a+\omega$, $a+2\omega$ etc. entsprechen, oder es wird

$$f'_0(a+\tfrac{1}{2}\omega)-f'_0(a-\tfrac{1}{2}\omega)=f''_0(a)$$
$$f'_0(a+\tfrac{3}{2}\omega)-f'_0(a+\tfrac{1}{2}\omega)=f''_0(a+\omega) \text{ etc.}$$

Sie werden reine Functionen von a, $a+\omega$ etc. bilden und darnach interpolirt werden können, wenn es erforderlich ist. Später wird es doch noch nöthig sein, direct nachzuweisen, daſs $f''_0(a)$ eine Function von $f''(a)\,f^{\mathrm{IV}}(a)$ etc. ist, und also überhaupt eine Function von a sein muſs, wenn nach der Differentiation $x=a$ gesetzt wird. Hier braucht deshalb nur die Analogie zu Hülfe genommen zu werden.

Die dritten Differenzen werden wieder halbe Intervalle in ihrem Argumente haben, oder es wird

$$f''_0(a+\omega)\ -f''_0 a \qquad =f'''_0(a+\tfrac{1}{2}\omega)$$
$$f''_0(a+2\omega)-f''_0(a+\omega)=f'''_0(a+\tfrac{3}{2}\omega) \text{ etc.}$$

Bei den vierten Differenzen, überhaupt bei denen mit gerader Ordnungszahl, treten ganze Argumente ein, bei den fünften, überhaupt bei denen mit ungerader Ordnungszahl, halbe Intervalle. Das Schema wird also

Arg.	Funct.	I. Diff.	II. Diff.	III. Diff.	IV. Diff.
a	$f(a)$		$f''_0(a)$		$f^{IV}_0(a)$
		$f'_0(a+\frac{1}{2}\omega)$		$f'''_0(a+\frac{1}{2}\omega)$	
$a+\omega$	$f(a+\omega)$		$f''_0(a+\omega)$		$f^{IV}_0(a+\omega)$
		$f'_0(a+\frac{3}{2}\omega)$		$f'''_0(a+\frac{3}{2}\omega)$	
$a+2\omega$	$f(a+2\omega)$		$f''_0(a+2\omega)$		$f^{IV}_0(a+2\omega)$
	etc.			etc.	

Alle Vertikalreihen bilden Reihen einer höheren arithmetischen Ordnung und können für jedes andere Argument interpolirt werden, wenn man nur gehörig berücksichtigt, ob die wirklich gebildeten Differenzen Functionen von ganzen Argumenten sind oder von gebrochenen, das heifst von solchen, die halbe Intervalle neben sich haben.

So wie bei dem Taylor'schen Satze ein folgendes Glied das Differential des vorhergehenden, oder das vorhergehende Glied das Integral des folgenden enthält, so ist von selbst klar, dafs derselbe Zusammenhang zwischen den Reihen der Differenzen und der summirten Functionen stattfinden mufs, oder den Reihen, von deren erster die gegebenen Functionen $f(a)$, $f(a+\omega)$ etc. die Differenzen sind, von deren zweiter summirter Function die erste die Differenz ist u. s. w. Bezeichnet man nach der Analogie die erste summirte Function mit ${}'f_0$, die zweite mit ${}''f_0$, die dritte mit ${}'''f_0$, so werden auch diese als Reihen von höherer arithmetischer Ordnung gelten müssen, und zwar werden bei der ersten, dritten, und überhaupt denen mit ungerader Ordnungszahl, die ihnen zugehörigen Argumente ein halbes Intervall enthalten und Functionen von gebrochenem Argumente sein, die zweiten, vierten und überhaupt die mit gerader Ordnungszahl, zu ganzen Argumenten und solchen Functionen gehören. Das Schema wird folglich werden:

Arg.	III. summ. Funct.	II. summ. Funct.	I. summ. Funct.	Funct.
a		$''f_0(a)$		$f(a)$
	$'''f_0(a+\frac{1}{2}\omega)$		$'f_0(a+\frac{1}{2}\omega)$	
$a+\omega$		$''f_0(a+\omega)$		$f(a+\omega)$
	$'''f_0(a+\frac{3}{2}\omega)$		$'f_0(a+\frac{3}{2}\omega)$	
$a+2\omega$		$''f_0(a+2\omega)$		$f(a+2\omega)$
	$'''f_0(a+\frac{5}{2}\omega)$		$'f_0(a+\frac{5}{2}\omega)$	
$a+3\omega$		$''f_0(a+3\omega)$		$f(a+3\omega)$
	etc.		etc.	

Auch hier gilt Alles so wie bei den Differenzen, und die Verminderung der Accente, wenn man es so nennen will, oder die Vertauschung von f^{IV} mit f, f''' mit $'f$, f'' mit $''f$, f' mit $'''f$ geben, bei der Vergleichung mit dem Schema bis zur vierten Differenz, die Bezeichnung von selbst an. Der Anfang bei den summirten Functionen wird durch die Constanten bei der Integration bedingt. Er ist z. B. bei der ersten summirten Function völlig gleichgültig, sobald man nur ein bestimmtes Integral verlangt, oder die Differenz zweier summirter Functionen in der Vertikalreihe der ersten summirten Functionen. Bei den höheren mufs auf die Constanten der niederen summirten Functionen für den Anfang Rücksicht genommen werden. Das Schema der Differenzen und summirten Functionen ist völlig der Gliederung der Taylor'schen Reihe analog.

(3.)

Es möge hier noch eine Bezeichnung angeführt werden, welche blos zur leichtern Hinschreibung dient. Bei allen Vertikalreihen können durch Interpolation andere Argumente eingeführt werden, doch wird dieses in der Regel nur bei der Interpolation in die Mitte hinein stattfinden, so dafs z. B. bei den Vertikalreihen, die von der Form $a+n\omega$ sind, eine andere von der Form $a+(n+\frac{1}{2})\omega$ interpolirt wird, oder umgekehrt bei den Vertikalreihen von der Form $a+(n+\frac{1}{2})\omega$, eine andere von der Form $a+n\omega$. Bei dieser Interpolation kommt das arithmetische Mittel, zweier aufeinander folgenden Werthe, bei denen die Argumente nur um ω verschieden sind, aber welche immer derselben Vertikalreihe angehören, vor. Man bezeichne ein solches arithmetisches Mittel durch das untere Zeichen $\frac{1}{2}$ statt $_0$, und setze das arithmetische Mittel der Argumente hinzu, so wird nie eine Zweideutigkeit entstehen. So z. B. ist

$$\frac{1}{2}(f(a)+f(a+\omega))=f_{\frac{1}{2}}(a+\tfrac{1}{2}\omega)$$
$$\frac{1}{2}(f'_0(a+\tfrac{1}{2}\omega)+f'_0(a+\tfrac{3}{2}\omega))=f'_{\frac{1}{2}}(a+\omega)$$
$$\frac{1}{2}(f''(a+\omega)+f''_0(a+2\omega))=f''_{\frac{1}{2}}(a+\tfrac{3}{2}\omega)$$
$$\frac{1}{2}({}'f_0(a+\tfrac{3}{2}\omega)+{}'f_0(a+\tfrac{5}{2}\omega))={}'f_{\frac{1}{2}}(a+2\omega)$$

und so fort. Bei diesem arithmetischen Mittel wird also ein ganzes Argument bei den Differenzen und summirten Functionen von ungerader Ordnungszahl vorkommen, dagegen Argumente mit halben Intervallen bei den Differenzen und summirten Functionen von gerader Ordnungszahl. Diese Bezeichnung ist nicht wesentlich, aber sie macht die Formeln eleganter und übersichtlicher. Man mufs nur dabei unterscheiden, dafs namentlich

$$f_{\frac{1}{2}}(a+\tfrac{1}{2}\omega) \text{ ganz verschieden ist von } f(a+\tfrac{1}{2}\omega)$$

und ähnlich bei den andern Functionen.

(4.)

Die eigentliche Aufgabe der mechanischen Quadratur ist die Ermittelung des Integrals durch die Berechnung der einzelnen Werthe der Differential-Quotienten. Um indessen von dem allgemeinen Taylor'schen Satze ausgehen zu können, wird es passender sein, die Summe der einzelnen Differential-Quotienten, oder der gegebenen Functionen, aus dem Taylor'schen Satze herzuleiten. Drückt man jede nächste Function durch die ihr um ein Intervall nachfolgende aus, und schreibt eine Reihe solcher Gleichungen untereinander, so hat man:

$$
\begin{aligned}
f(a) &= f(a+\omega) - \omega f'(a+\omega) + \tfrac{1}{2}\omega^2 f''(a+\omega) \\
&\quad - \tfrac{1}{6}\omega^3 f'''(a+\omega) + \tfrac{1}{24}\omega^4 f^{\mathrm{IV}}(a+\omega) \ldots\ldots \\
f(a+\omega) &= f(a+2\omega) - \omega f'(a+2\omega) + \tfrac{1}{2}\omega^2 f''(a+2\omega) \\
&\quad - \tfrac{1}{6}\omega^3 f'''(a+2\omega) + \tfrac{1}{24}\omega^4 f^{\mathrm{IV}}(a+2\omega) \\
f(a+2\omega) &= f(a+3\omega) - \omega f'(a+3\omega) + \tfrac{1}{2}\omega^2 f''(a+3\omega) \\
&\quad - \tfrac{1}{6}\omega^3 f'''(a+3\omega) + \tfrac{1}{24}\omega^4 f^{\mathrm{IV}}(a+3\omega) \ldots\ldots \\
f(a+3\omega) &= f(a+4\omega) - \omega f'(a+4\omega) + \tfrac{1}{2}\omega^2 f''(a+4\omega) \\
&\quad - \tfrac{1}{6}\omega^3 f'''(a+4\omega) + \tfrac{1}{24}\omega^4 f^{\mathrm{IV}}(a+3\omega) \\
&\vdots \\
f(a+(n-2)\omega) &= f(a+(n-1)\omega) - \omega f'(a+(n-1)\omega) + \tfrac{1}{2}\omega^2 f''(a+(n-1)\omega) \\
&\quad - \tfrac{1}{6}\omega^3 f'''(a+(n-1)\omega) + \tfrac{1}{24}\omega^4 f^{\mathrm{IV}}(a+(n-1)\omega) \ldots\ldots \\
f(a+(n-1)\omega) &= f(a+n\omega) - \omega f'(a+n\omega) + \tfrac{1}{2}\omega^2 f''(a+n\omega) \\
&\quad - \tfrac{1}{6}\omega^3 f'''(a+n\omega) + \tfrac{1}{24}\omega^4 f^{\mathrm{IV}}(a+n\omega)
\end{aligned}
$$

Summirt man diese sämmtlichen Gleichungen, so wird auf der linken Seite nur $f(a)$ übrig bleiben, und auf der rechten Seite im ersten Gliede $f(a+n\omega)$. In den übrigen Gliedern kommen die Summen der verschiedenen Differential-Quotienten, von dem Argumente $a+\omega$ bis zu dem Argumente $a+n\omega$, überall vor. Bezeichnet man die endlichen Summen ähnlich wie die Integrale, indem man das letzte Argument als Endgrenze ansetzt, von der in gewöhnlicher Weise gebildeten Summe den Werth der Function für die Anfangsgrenze aber wieder abzieht, so daſs also:

$$f'(a+\omega) + f'(a+2\omega) \ldots + f'(a+n\omega) = \sum_{m=o}^{m=n} f'(a+m\omega)$$

so wird das Ganze

$$
\begin{aligned}
f(a) = f(a+n\omega) &- \omega \sum_{m=o}^{m=n} f'(a+m\omega) \\
&+ \tfrac{1}{2}\omega^2 \sum_{m=o}^{m=n} f''(a+m\omega) \\
&- \tfrac{1}{6}\omega^3 \sum_{m=o}^{m=n} f'''(a+m\omega) \\
&+ \tfrac{1}{24}\omega^4 \sum_{m=o}^{m=n} f^{\mathrm{IV}}(a+m\omega) \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

oder es wird

$$\omega \sum_{m=o}^{m=n} f'(a+m\omega) = f(a+n\omega) - f(a)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\omega^2 \sum_{m=o}^{m=n} f''(a+m\omega)$$
$$- \tfrac{1}{6}\omega^3 \sum_{m=o}^{m=n} f'''(a+m\omega)$$
$$+ \tfrac{1}{24}\omega^4 \sum_{m=o}^{m=n} f^{IV}(a+m\omega) \text{ etc.}$$

Da nun aber die Entwickelung ganz auf dieselbe Weise auch bei f'', f''' etc. stattfinden kann, so lassen sich die endlichen Summen auf der rechten Seite eliminiren. Man hat ganz analog

$$\omega \sum_{m=o}^{m=n} f''(a+m\omega) = f'(a+n\omega) - f'(a)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\omega^2 \sum_{m=o}^{m=n} f'''(a+m\omega)$$
$$- \tfrac{1}{6}\omega^3 \sum_{m=o}^{m=n} f^{IV}(a+m\omega)$$
$$+ \tfrac{1}{24}\omega^4 \sum_{m=o}^{m=n} f^{V}(a+m\omega) \text{ etc.}$$

$$\omega \sum_{m=o}^{m=n} f'''(a+m\omega) = f''(a+n\omega) - f''(a)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\omega^2 \sum_{m=o}^{m=n} f^{IV}(a+m\omega)$$
$$- \tfrac{1}{6}\omega^3 \sum_{m=o}^{m=n} f^{V}(a+m\omega) \text{ etc.}$$

Multiplicirt man die Gleichung für $\Sigma f'(a+m\omega)$ mit 1, die für $\Sigma f''(a+m\omega)$ mit $\alpha_0\omega$, für $\Sigma f'''(a+m\omega)$ mit $\beta_0\omega^2$, für $\Sigma f^{IV}(a+m\omega)$ mit $\gamma_0\omega^3$ u. s. w., und summirt die Produkte, wo α_0, β_0, γ_0 etc. unbestimmte Coefficienten sind, über die man so verfügen kann, dafs in der Summe aller Produkte die endlichen Summen der rechten Seite wegfallen, so hat man:

$$\omega \sum_{m=o}^{m=n} f'(a+m\omega) + (\alpha_0 - \tfrac{1}{2})\,\omega^2 \sum_{m=o}^{m=n} f''(a+m\omega)$$
$$+ (\beta_0 - \tfrac{1}{2}\alpha_0 + \tfrac{1}{6})\,\omega^3 \sum_{m=o}^{m=n} f'''(a+m\omega)$$
$$+ (\gamma_0 - \tfrac{1}{2}\beta_0 + \tfrac{1}{6}\alpha_0 - \tfrac{1}{24})\,\omega^4 \sum_{m=o}^{m=n} f^{\mathrm{IV}}(a+m\omega)\ldots.$$
$$= f(a+n\omega) - f(a) + \alpha_0\omega\,(f'(a+n\omega) - f'(a))$$
$$+ \beta_0\omega^2\,(f''(a+n\omega) - f''(a))$$
$$+ \gamma_0\omega^3\,(f'''(a+n\omega) - f'''(a))$$
$$+ \delta_0\omega^4\,(f^{\mathrm{IV}}(a+n\omega) - f^{\mathrm{IV}}(a))\ldots..$$

Für die Wegschaffung sämmtlicher endlichen Summen, aufser der für $f'(a+m\omega)$, hat man folglich die Gleichungen, welche beliebig fortgesetzt werden können:

$$\alpha_0 - \tfrac{1}{2} = 0$$
$$\beta_0 - \tfrac{1}{2}\alpha_0 + \tfrac{1}{6} = 0$$
$$\gamma_0 - \tfrac{1}{2}\beta_0 + \tfrac{1}{6}\alpha_0 - \tfrac{1}{24} = 0$$
etc.

oder wenn man sie nacheinander auflöst:

$$\alpha_0 = \tfrac{1}{2}$$
$$\beta_0 = +\tfrac{1}{12}$$
$$\gamma_0 = 0$$
$$\delta_0 = -\tfrac{1}{720}$$
$$\varepsilon_0 = 0$$
$$\zeta_0 = +\tfrac{1}{30240}$$
$$\eta_0 = 0$$
$$\vartheta_0 = -\tfrac{1}{1209600}$$

Bezeichnet man diese Brüche absolut genommen mit

$$A_1 = \tfrac{1}{12} \qquad A_2 = \tfrac{1}{720} \qquad A_3 = \tfrac{1}{30240} \qquad A_4 = \tfrac{1}{1209600}$$

so wird also die obige Gleichung:

$$\omega \sum_{m=o}^{m=n} f'(a+m\omega) = f(a+n\omega) - f(a)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\omega\,(f'(a+n\omega) - f'(a))$$
$$+ A_1\,\omega^2\,(f''(a+n\omega) - f''(a))$$
$$- A_2\,\omega^4\,(f^{\mathrm{IV}}(a+n\omega) - f^{\mathrm{IV}}(a))$$
$$+ A_3\,\omega^6\,(f^{\mathrm{VI}}(a+n\omega) - f^{\mathrm{VI}}(a)) \ldots\ldots$$

Da nun $f(x) = \int f'(x)dx$, so kann man für $f(a+n\omega) - f(a)$ schreiben:

$$\int_{x=a}^{x=a+n\omega} f'(x)dx$$

und wenn man die Functionen, für welche die successiven Werthe berechnet werden, lieber mit $f(a)$ statt mit $f'(a)$ bezeichnet (in der That sind sie eigentlich Differential-Quotienten), so wird die Bestimmung eines bestimmten Integrals, indem man überall die Accente in der obigen Formel um einen vermindert, durch mechanische Quadratur, in dem Ausdrucke enthalten sein:

$$\omega \sum_{m=o}^{m=n} f(a+m\omega) = \int_a^{a+n\omega} f(x)dx + \tfrac{1}{2}\omega\,(f(a+n\omega) - f(a))$$
$$+ A_1\,\omega^2\,(f'(a+n\omega) - f'(a))$$
$$- A_2\,\omega^4\,(f'''(a+n\omega) - f'''(a))$$
$$+ A_3\,\omega^6\,(f^{\mathrm{V}}(a+n\omega) - f^{\mathrm{V}}(a))$$

Die Glieder, die hier auf der rechten Seite neben dem Integrale stehen, und die den Unterschied zwischen diesem und der einfachen Summenformel bilden, sind sonach blos aus den Gliedern der Taylor'schen Reihe entstanden und werden immer geringer, je kleiner das Intervall angenommen wird. Sie sind die Reduction der Summenformel bei endlichem Intervall auf Summen bei unendlich kleinem oder verschwindendem Intervall, das heifst auf das wirkliche Integral.

(5.)

Die auffallende Eigenschaft der Zahlen α_0, β_0, γ_0 etc., dafs von β_0 an gerechnet nur die Zahlen in ungerader Stelle einen endlichen Werth haben, die in gerader Stelle stets $=0$ sind, erläutert Euler in seiner Differentialrechnung Cap. V. Zuerst entspringen sie aus der Entwickelung des Bruches

$$V=\frac{1}{1-\frac{1}{2}u+\frac{1}{6}u^2-\frac{1}{24}u^3\ldots.}=1+\alpha_0 u+\beta_0 u^2+\gamma_0 u^3 \text{ etc.}$$

wie man sogleich sieht, wenn man mit dem Nenner des Bruches hinüber multiplicirt, und da bei der Anwendung von Exponential-Functionen Euler zeigt, dafs

$$V-\frac{1}{2}u=\frac{1+\frac{u^2}{2\cdot 4}+\frac{u^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+}{1+\frac{u^2}{4\cdot 6}+\frac{u^4}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+}$$

so wird, wenn α_0, wie der Augenschein lehrt, $=\frac{1}{2}$ ist, keine ungerade Potenz in der Reihe vorkommen, die den Werth von $V-\frac{1}{2}u$ ausdrückt, also γ_0, ϵ_0, η_0 etc. $=$ Null werden. Ferner wird

$$\tfrac{1}{2}u \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}u=1-A_1 u^2-A_2 u^4-A_3 u^6\ldots..$$

wenn für A_1, A_2, A_3 die obigen Werthe angenommen werden. Endlich hängen diese A_1, A_2, A_3, auch zusammen mit den Summen der reciproken Werthe der geraden Potenzen der natürlichen Zahlen, wenn man sie in das Unendliche fortsetzt. Wenn

$$\left(1+\frac{1}{2^{2i}}+\frac{1}{3^{2i}}+\frac{1}{4^{2i}}\ldots\ldots\frac{1}{\infty}\right)=\left[\frac{1}{m^{2i}}\right]$$

gesetzt wird, so ist

$$A_1=\left[\frac{1}{m^2}\right]\cdot\frac{1}{2\pi^2}$$

$$A_2=\left[\frac{1}{m^4}\right]\cdot\frac{1}{2^3\,\pi^4}$$

$$A_3=\left[\frac{1}{m^6}\right]\cdot\frac{1}{2^5\,\pi^6}$$

und überhaupt

$$A_n=\left[\frac{1}{m^{2n}}\right]\cdot\frac{1}{2^{2n-1}\,\pi^{2n}}.$$

Für die mechanische Quadratur bedarf man dieser Eigenschaften weiter nicht. Man wird niemals mehr als die drei Werthe höchstens gebrauchen, die sich unmittelbar ihren numerischen Werthen nach ergeben aus den angeführten Gleichungen. Immerhin zeigt die letzte Relation für A_n, dafs, weil bei erhöhtem n die $\left[\frac{1}{m^{2n}}\right]$ sich immer mehr der Einheit nähern, die A nahe abnehmen werden, nach einer geometrischen Progression, deren Exponent $\frac{1}{2^2\,\pi^2}$ oder etwa $\frac{1}{40}$ ist.

(6.)

Die Formel

$$\omega \sum_{m=o}^{m=n} f(a+m\omega) = \int_a^{a+n\omega} f(x)dx + \tfrac{1}{2}\omega\,(f(a+n\omega)-f(a))$$
$$+ A_1\,\omega^2\,(f'(a+n\omega)-f'(a))$$
$$- A_2\,\omega^4\,(f'''(a+n\omega)-f'''(a))$$
$$+ A_3\,\omega^6\,(f^{\mathrm{v}}(a+n\omega)-f^{\mathrm{v}}(a))\ldots\ldots$$

hat das Unbequeme, dafs auf beiden Seiten dieselben Gröfsen, $f(a)$ und $f(a+n\omega)$, vorkommen. Die linke Seite ist

$$\omega\,(f(a+\omega)+f(a+2\omega)+f(a+3\omega)\ldots\ldots+f(a+n\omega))$$

Schafft man das Glied der rechten Seite hinüber

$$\tfrac{1}{2}\omega\,(f(a+n\omega)-f(a))$$

so werden beide Theile

$$\omega\,\{(\tfrac{1}{2}f(a)+\tfrac{1}{2}f(a+\omega))+(\tfrac{1}{2}f(a+\omega)+\tfrac{1}{2}f(a+2\omega))\ldots\ldots$$
$$+(\tfrac{1}{2}f(a+(n-1)\,\omega)+\tfrac{1}{2}f(a+n\omega))$$

Dieses führt darauf, die Form der Ausdrücke etwas zu ändern, um einen einfacheren Ausdruck zu bekommen. Setzt man zuerst

$a+\frac{1}{2}\omega$ statt a, $\frac{1}{2}\omega$ statt ω, $2n$ statt n

so wird die linke Seite und damit die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\omega\{f(a+\omega)\ \ +f(a+2\omega)+f(a+3\omega)\ldots\ldots+f(a+n\omega)\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\omega\{f(a+\tfrac{3}{2}\omega)+f(a+\tfrac{5}{2}\omega)+f(a+\tfrac{7}{2}\omega)\ldots\ldots+f(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega)\}$$
$$=\int\limits_{a+\frac{1}{2}\omega}^{a+(n+\frac{1}{2})\omega} f(x)\,dx+\tfrac{1}{4}\omega\,(f(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega)-f(a+\tfrac{1}{2}\omega))$$
$$+\tfrac{1}{4}A_1\,\omega^2\,(f'\,(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega)-f'\,(a+\tfrac{1}{2}\omega))$$
$$-\tfrac{1}{16}A_2\,\omega^4\,(f'''\,(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega)-f'''\,(a+\tfrac{1}{2}\omega))$$
$$+\tfrac{1}{64}A_3\,\omega^6\,(f^{\mathrm{V}}\,(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega)-f^{\mathrm{V}}\,(a+\tfrac{1}{2}\omega))$$

Vertauscht man aber in derselben Gleichung allein

$$a \text{ mit } a+\tfrac{1}{2}\omega$$

so wird die Gleichung

$$\omega\,(f(a+\tfrac{3}{2}\omega)+f(a+\tfrac{5}{2}\omega)+f(a+\tfrac{7}{2}\omega)\ldots\ldots+f(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega))$$
$$=\int\limits_{a+\frac{1}{2}\omega}^{a+(n+\frac{1}{2})\omega} f(x)\,dx+\tfrac{1}{2}\omega\,(f(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega)-f(a+\tfrac{1}{2}\omega))$$
$$+A_1\,\omega^2\,(f'\,(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega)-f'\,(a+\tfrac{1}{2}\omega))$$
$$-A_2\,\omega^4\,(f'''\,(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega)-f'''\,(a+\tfrac{1}{2}\omega))$$
$$+A_3\,\omega^6\,(f^{\mathrm{V}}\,(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega)-f^{\mathrm{V}}\,(a+\tfrac{1}{2}\omega))\ \text{etc.}$$

Multiplicirt man die vorletzte Gleichung mit 2 und zieht die letzte davon ab, so wird

$$\omega\sum_{m=o}^{m=n} f(a+m\omega)=\int\limits_{a+\frac{1}{2}\omega}^{a+(n+\frac{1}{2})\omega} f(x)dx-(1-\tfrac{1}{2})\,A_1\,\omega^2\,(f'\,(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega)-f'\,(a+\tfrac{1}{2}\omega))$$
$$+(1-\tfrac{1}{8})\,A_2\,\omega^4\,(f'''\,(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega)-f'''(a+\tfrac{1}{2}\omega))$$
$$-(1-\tfrac{1}{32})A_3\,\omega^6(f^{\mathrm{V}}(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega)-f^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{1}{2}\omega))\,\text{etc.}$$

Ein Ausdruck, aus welchem, durch Veränderung der Grenzen des Integrals, der vorhin bemerkte Uebelstand, dafs dieselben Gröfsen auf beiden Seiten vorkommen, verschwunden ist, und der deshalb einen kleinen Vorzug auch wegen der kleineren Corrections-Coefficienten vor dem andern hat.

(7.)

Hiermit würde die Aufgabe vollständig gelöst sein, wenn die Differential-Quotienten wirklich gegeben wären. Es würde dann, wenn statt der A die Zahlen eingesetzt werden:

$$\int\limits_{a+\frac{1}{2}\omega}^{a+(n+\frac{1}{2})\omega} f(x)\,dx = \omega \sum_{m=o}^{m=n} f(a+m\omega) + \tfrac{1}{24}\omega^2 \{f'(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega) - f'(a+\tfrac{1}{2}\omega)\}$$
$$- \tfrac{7}{5760}\omega^4 \{f'''(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega) - f'''(a+\tfrac{1}{2}\omega)\}$$
$$+ \tfrac{31}{967680}\omega^6 \{f^{\mathrm{V}}(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega) - f^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{1}{2}\omega)\}$$

oder nach der ersten Form:

$$\int\limits_{a}^{a+n\omega} f(x)\,dx = \omega \sum_{m=o}^{m=n} f(a+m\omega) - \tfrac{1}{2}\omega\,(f(a+n\omega) - f(a))$$
$$- \tfrac{1}{12}\omega^2 (f'(a+n\omega) - f'(a))$$
$$+ \tfrac{1}{720}\omega^4 (f'''(a+n\omega) - f'''(a))$$
$$- \tfrac{1}{30240}\omega^6 (f^{\mathrm{V}}(a+n\omega) - f^{\mathrm{V}}(a))$$

Da indessen nicht die Differential-Quotienten der berechneten Functionen, sondern die numerischen Differenzen gegeben sind, so bedarf es zur Bequemlichkeit der Rechnung noch der Reduction der einen auf die andern. Es würde ein bedeutender Umweg sein, wenn man zuerst die Differential-Quotienten berechnen müſste, um die Integrale dann vermittelst ihrer zu finden.

Die Gleichungen zwischen den Differential-Quotienten und den Differenzen finden sich wiederum durch einfache Anwendung des Taylor'schen Satzes. Man hat die beiden Gleichungen

$$f(a+\omega) = f(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{1}{2}\omega f'(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{1}{8}\omega^2 f''(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{1}{48}\omega^3 f'''(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \ldots.$$
$$f(a) = f(a+\tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{1}{2}\omega f'(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{1}{8}\omega^2 f''(a+\tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{1}{48}\omega^3 f'''(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \ldots.$$

folglich wird wegen $f(a+\omega) - f(a) = f'_0(a+\tfrac{1}{2}\omega)$

$$f'_0(a+\tfrac{1}{2}\omega) = \omega f'(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{1}{24}\omega^3 f'''(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{1}{1920}\omega^5 f^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{1}{2}\omega) \ldots..$$

Führt man hier die Differential-Quotienten $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$ etc. ein, so wird:

$$f'(a+\tfrac{1}{2}\omega) = f'(a) + \tfrac{1}{2}\omega f''(a) + \tfrac{1}{8}\omega^2 f'''(a) + \tfrac{1}{48}\omega^3 f^{\mathrm{IV}}(a) +$$
$$f'''(a+\tfrac{1}{2}\omega) = f'''(a) + \tfrac{1}{2}\omega f^{\mathrm{IV}}(a) \ldots..$$

und das Ganze wird

$$f'_0(a+\tfrac{1}{2}\omega) = \omega f'(a) + \tfrac{1}{2}\omega^2 f''(a) + \tfrac{1}{6}\omega^3 f'''(a) + \tfrac{1}{24}\omega^4 f^{\mathrm{IV}}(a) + \tfrac{1}{120}\omega^5 f^{\mathrm{V}}(a) + \ldots.$$

Es wird daraus, wegen

$$f_0'(a+\tfrac{1}{2}\omega) = f(a+\omega) - f(a)$$
$$f_0'(a-\tfrac{1}{2}\omega) = f(a) - f(a-\omega)$$

wenn man ω negativ setzt und auf der rechten Seite die Zeichen mit Rücksicht auf die Entwicklungen von $f'(a-\tfrac{1}{2}\omega)$ etc. ändert:

$$f_0'(a-\tfrac{1}{2}\omega) = \omega f'(a) - \tfrac{1}{2}\omega^2 f''(a) + \tfrac{1}{6}\omega^3 f'''(a) - \tfrac{1}{24}\omega^4 f^{\mathrm{IV}}(a) + \tfrac{1}{120}\omega^5 f^{\mathrm{V}}(a) -$$

oder wegen

$$f_0'(a+\tfrac{1}{2}\omega) - f_0'(a-\tfrac{1}{2}\omega) = f_0''(a)$$

erhält man

$$f_0''(a) = \omega^2 f''(a) + \tfrac{1}{12}\omega^5 f^{\mathrm{IV}}(a) + \tfrac{1}{360}\omega^6 f^{\mathrm{VI}}(a) \ldots..$$

Geht man so fort, so findet man

$$\begin{aligned}
f_0'''(a+\tfrac{1}{2}\omega) &= \omega^3 f'''(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{1}{8}\omega^5 f^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \\
f_0^{\mathrm{IV}}(a) &= \omega^4 f^{\mathrm{IV}}(a) + \tfrac{1}{6}\omega^6 f^{\mathrm{VI}}(a) \\
f_0^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{1}{2}\omega) &= \omega^5 f^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{5}{24}\omega^7 f^{\mathrm{VII}}(a+\tfrac{1}{2}\omega) \\
f_0^{\mathrm{VI}}(a) &= \omega^6 f^{\mathrm{VI}}(a) + \tfrac{1}{4}\omega^8 f^{\mathrm{VIII}}(a) \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Nimmt man hier die Functionen mit ganzen Argumenten zusammen, und die, bei welchen halbe Argumente vorkommen, so hat man die beiden Systeme, wobei die Entwickelung etwas weiter fortgeführt ist:

$$\begin{aligned}
f_0'(a+\tfrac{1}{2}\omega) &= \omega f'(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{1}{24}\omega^3 f'''(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{1}{1920}\omega^5 f^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{1}{2}\omega) \\
&\quad + \tfrac{1}{322560}\omega^7 f^{\mathrm{VII}}(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \\
f_0'''(a+\tfrac{1}{2}\omega) &= \omega^3 f'''(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{1}{8}\omega^5 f^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{13}{1920}\omega^7 f^{\mathrm{VII}}(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \\
f_0^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{1}{2}\omega) &= \omega^5 f^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{5}{24}\omega^7 f^{\mathrm{VII}}(a+\tfrac{1}{2}\omega)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
f_0''(a) &= \omega^2 f''(a) + \tfrac{1}{12}\omega^4 f^{\mathrm{IV}}(a) + \tfrac{1}{360}\omega^6 f^{\mathrm{VI}}(a) + \tfrac{1}{20160}\omega^8 f^{\mathrm{VIII}}(a) \ldots.. \\
f_0^{\mathrm{IV}}(a) &= \omega^4 f^{\mathrm{IV}}(a) + \tfrac{1}{6}\omega^6 f^{\mathrm{VI}}(a) + \tfrac{1}{80}\omega^8 f^{\mathrm{VIII}}(a) \ldots.. \\
f_0^{\mathrm{VI}}(a) &= \omega^6 f^{\mathrm{VI}}(a) + \tfrac{1}{4}\omega^8 f^{\mathrm{VIII}}(a) + \ldots\ldots
\end{aligned}$$

Leitet man aus diesen beiden Systemen die Werthe von $f'(a+\tfrac{1}{2}\omega)$ $f'''(a+\tfrac{1}{2}\omega)$ etc., $f''(a)$, $f^{\mathrm{IV}}(a)$ etc. aus den gegebenen Gröfsen $f_0'(a+\tfrac{1}{2}\omega)$ $f_0'''(a+\tfrac{1}{2}\omega)$ etc., $f_0''(a)$, $f_0^{\mathrm{IV}}(a)$ etc. ab, was durch einfache Multiplication mit zweckmäfsigen Zahlen-Coefficienten und Summirung der Producte geschieht, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
\omega\, f'\ (a+\tfrac{1}{2}\omega) &= f'_0\,(a+\tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{1}{24} f'''_0\,(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{3}{640} f^{\mathrm{V}}_0\,(a+\tfrac{1}{2}\omega) \\
&\quad - \tfrac{5}{7168} f^{\mathrm{VII}}_0\,(a+\tfrac{1}{2}\omega) \\
\omega^2 f''\,(a) &= f''_0\,(a) - \tfrac{1}{12} f^{\mathrm{IV}}_0\,(a) + \tfrac{1}{90} f^{\mathrm{VI}}_0\,(a) - \tfrac{1}{560} f^{\mathrm{VIII}}_0\,(a) \\
\omega^3 f'''\,(a+\tfrac{1}{2}\omega) &= f'''_0\,(a+\tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{1}{8} f^{\mathrm{V}}_0\,(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{37}{1920} f^{\mathrm{VII}}_0\,(a+\tfrac{1}{2}\omega) \\
\omega^4 f^{\mathrm{IV}}\,(a) &= f^{\mathrm{IV}}_0\,(a) - \tfrac{1}{6} f^{\mathrm{VI}}_0\,(a) + \tfrac{7}{240} f^{\mathrm{VIII}}_0\,(a) \\
\omega^5 f^{\mathrm{V}}\ (a+\tfrac{1}{2}\omega) &= f^{\mathrm{V}}_0\,(a+\tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{5}{24} f^{\mathrm{VII}}_0\,(a+\tfrac{1}{2}\omega) \\
\omega^6 f^{\mathrm{VI}}\,(a) &= f^{\mathrm{VI}}_0\,(a) - \tfrac{1}{4} f^{\mathrm{VIII}}_0\,(a)
\end{aligned}
$$

in welchen Ausdrücken die Entwickelung so weit getrieben ist, als man sie irgend gebraucht. In der Praxis wird man niemals so weit gehen, sondern statt bis zur 7ten und 8ten Differenz fortzugehen, lieber die Intervalle bei den Argumenten verringern, wodurch man höchstens bis zur fünften oder vierten Differenz zu gehen nöthig haben wird.

(8.)

Diese Ableitung für den Ausdruck der Differential-Quotienten durch Differenzen ist die elementarste, wenn man einmal blos von dem Taylor'schen Satze ausgehen will. Aber sie ist ungemein weitläuftig und deshalb unbefriedigend. Man kann sie weit übersichtlicher und eleganter machen, wenn man eine analytische Function zum Grunde legt, welche die Eigenschaften vereinigt, Ausdrücke für die Differenzen und Differential-Quotienten zu geben, die nie abbrechen, den hier gewählten Bezeichnungen sich anschliefsen und die sämmtlichen Ausdrücke auf eine oder einige Reihen reduciren, deren Entwickelung analytisch gegeben ist. Die Zahlen-Coefficienten müssen sich bei ihr völlig genau ergeben, da sie von der Natur der Function ganz unabhängig sind.

Eine solche ist die Exponential-Function e^x. Legt man sie statt der allgemeinen Function $f(x)$ zum Grunde, so hat man zuerst für die Differential-Quotienten in Bezug auf x stets denselben Werth e^x. Es werden folglich

$$
f(a) = e^a \qquad f'(a) = e^a \qquad f''(a) = e^a \qquad f'''(a) = e^a
$$

$$
f(a+\omega) = f'(a+\omega) = f''(a+\omega) = f^n(a+\omega) = e^{a+\omega} \text{ u. s. w.}
$$

Für die Differenzen aber hat man

$$
\begin{aligned}
f_0'(a+\tfrac{1}{2}\omega) &= e^{a+\omega}-e^a = e^{a+\frac{1}{2}\omega}(e^{\frac{1}{2}\omega}-e^{-\frac{1}{2}\omega}) \\
f_0''\,a &= (e^{a+\frac{1}{2}\omega}-e^{a-\frac{1}{2}\omega})\,(e^{\frac{1}{2}\omega}-e^{-\frac{1}{2}\omega}) \\
&= e^a\,(e^{\frac{1}{2}\omega}-e^{-\frac{1}{2}\omega})^2
\end{aligned}
$$

oder übersichtlicher, wenn man

$$e^{+\frac{1}{2}\omega}-e^{-\frac{1}{2}\omega}=u$$

setzt,

$$
\begin{aligned}
f_0'(a+\tfrac{1}{2}\omega) &= e^{a+\frac{1}{2}\omega}\cdot u = f'(a+\tfrac{1}{2}\omega)\cdot u \\
f_0''(a) &= e^a\cdot u^2 = f''\,a\cdot u^2 \\
f_0'''(a+\tfrac{1}{2}\omega) &= e^{a+\frac{1}{2}\omega}\cdot u^3 = f'''(a+\tfrac{1}{2}\omega)\cdot u^3 \\
f_0^{IV}(a) &= e^a\,.\,u^4 = f^{IV}\,a\cdot u^4
\end{aligned}
$$

u. s. w.

wie sich aus dem beliebig fortzusetzenden Schema

Arg.	Function.	I. Diff.	II. Diff.	III. Diff.	IV. Diff.
$a-\omega$	$e^{a-\omega}$		$e^{a-\omega}\,.\,u^2$		$e^{a-\omega}\,u^4$......
		$e^{a-\frac{1}{2}\omega}\,.\,u$		$e^{a-\frac{1}{2}\omega}\,u^3$	
a	e^a		$e^a\,.\,u^2$		$e^a\,.\,u^4$
		$e^{a+\frac{1}{2}\omega}\,.\,u$		$e^{a+\frac{1}{2}\omega}\,u^3$	
$a+\omega$	$e^{a+\omega}$		$e^{a+\omega}\,.\,u^2$		$e^{a+\omega}\,u^4$........

unmittelbar ergiebt. Substituirt man diese Werthe in die obigen Gleichungen für $\omega f'(a+\frac{1}{2}\omega)$, $\omega^2 f''(a)$ u. s. w. hinein, und hebt auf beiden Seiten die gleichen Factoren $e^{a+\frac{1}{2}\omega}$, e^a.... hinweg, so bleibt überall nur eine Potenz von ω auf der linken, und eine Reihe nach Potenzen von u auf der rechten Seite übrig. Entwickelt man deshalb aus der Gleichung

$$e^{+\frac{1}{2}\omega}-e^{-\frac{1}{2}\omega}=u$$

den Werth von ω nach einer Reihe, die nach Potenzen von u fortgeht, so wird diese Reihe und ihre Potenzen die numerischen Coefficienten in den obigen Entwickelungen geben müssen.

Zu diesem Zwecke hat man zuerst aus

$$e^{+\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega} = u$$

$$e^{+\frac{1}{2}\omega} = +\tfrac{1}{2}u + \sqrt{(1+\tfrac{1}{4}u^2)}$$

$$e^{-\frac{1}{2}\omega} = -\tfrac{1}{2}u + \sqrt{(1+\tfrac{1}{4}u^2)}$$

folglich

$$e^{+\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega} = 2\sqrt{(1+\tfrac{1}{4}u^2)}$$

$$\frac{2}{e^{+\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}} = (1+\tfrac{1}{4}u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Es ist aber auch nach dem Werthe von $e^{+\frac{1}{2}\omega}$

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{d\omega}{du} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}u\,(1+\frac{1}{4}u^2)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}u+\sqrt{(1+\frac{1}{4}u^2)}}$$

oder

$$\frac{d\omega}{du} = (1+\tfrac{1}{4}u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

folglich

$$\omega = \int (1+\tfrac{1}{4}u^2)^{-\frac{1}{2}}\,du$$

ohne weitere Hinzufügung einer Constante, weil für $u=0$ auch $\omega=0$ wird. In den beiden Reihen

$$(1+\tfrac{1}{4}u^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}\,\frac{u^2}{2^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{u^4}{2^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{u^6}{2^6} + \ldots\ldots\ldots$$

und

$$\omega = \int (1+\tfrac{1}{4}u^2)^{-\frac{1}{2}}\,du = u - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\frac{u^3}{2^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}\,\frac{u^5}{2^4}\ \text{etc.}$$

und den Potenzen dieser letzteren wird also das Gesetz der obigen Zahlen-Coefficienten in dem Ausdrucke der Differential-Quotienten durch die Differenzen enthalten sein. In der That ist:

$$\begin{aligned}
\omega\ &= u - \tfrac{1}{24}u^3 + \tfrac{3}{640}u^5 - \tfrac{5}{7168}u^7\ldots\\
\omega^2 &= u^2 - \tfrac{1}{12}u^4 + \tfrac{1}{90}u^6 - \tfrac{1}{560}u^8\ldots\\
\omega^3 &= u^3 - \tfrac{1}{8}u^5 + \tfrac{37}{1920}u^7\ldots\\
\omega^4 &= u^4 - \tfrac{1}{6}u^6 + \tfrac{7}{240}u^8\ldots\\
\omega^5 &= u^5 - \tfrac{5}{24}u^7\ldots\\
\omega^6 &= u^6 - \tfrac{1}{4}u^8\ldots
\end{aligned}$$

Fügt man auf der linken Seite die Differential-Quotienten je nach den Potenzen von ω, bei den geraden bezogen auf das Argument a, bei den ungeraden bezogen auf das Argument $a + \frac{1}{2}\omega$, hinzu, und vertauscht auf der rechten die Potenzen von u mit den Differenzen derselben Ordnung, ebenfalls bei den ungeraden für das Argument $a + \frac{1}{2}\omega$, bei den geraden für das Argument a, so hat man die obigen Werthe, die man hiernach beliebig fortsetzen kann.

(9.)

Die Ausdrücke der Differential-Quotienten durch die Differenzen in (8), kann man in die erste Integralformel in (7) sogleich substituiren, weil in derselben dann die Werthe der Differenzen $f_0'(a + \frac{1}{2}\omega)$, $f_0'''(a + \frac{1}{2}\omega)$, $f_0^{\mathrm{V}}(a + \frac{1}{2}\omega)$, $f_0''(a)$, $f_0^{\mathrm{IV}}(a)$, $f_0^{\mathrm{VI}}(a)$, vorkommen, die unmittelbar bei der Bildung der Differenzen vorliegen. Für die zweite Integralformel in (7) ist noch eine kleine Umformung nöthig. Hier werden $f'(a)$, $f'''(a)$, $f^{\mathrm{V}}(a)$, durch Differenzen ausgedrückt werden müssen, die folglich auch die Form haben werden $f_0'(a)$, $f_0'''(a)$, $f_0^{\mathrm{V}}(a)$, aber bei der Bildung der Differenzen aus den gegebenen Functionen nicht unmittelbar vorliegen, sondern erst durch Interpolation hergeleitet werden müfsten. Man würde z. B. den Werth von $f_0'(a)$ aus den beiden Werthen $f_0'(a - \frac{1}{2}\omega)$ und $f_0'(a + \frac{1}{2}\omega)$, die wirklich vorliegen, und ihren Differenzen, durch Interpolation zu suchen haben. Allein man kann auf leichterem Wege die nöthigen Reihen-Entwickelungen finden. Betrachtet man die Exponential-Function, so wird in ihr

$$f_0'(a) = e^a \cdot u$$

wenn man es aus der Bildung der Functionen $f(a - \frac{1}{2}\omega)$, $f(a + \frac{1}{2}\omega)$, $f(a + \frac{3}{2}\omega)$ ableitete.

Dagegen wird hier

$$f_0'(a + \tfrac{1}{2}\omega) = e^{a + \frac{1}{2}\omega}\, u$$
$$f_0'(a - \tfrac{1}{2}\omega) = e^{a - \frac{1}{2}\omega}\, u$$

folglich wird

$$f_0'(a) = \tfrac{1}{2}\left(f_0'(a+\tfrac{1}{2}\omega) + f_0'(a-\tfrac{1}{2}\omega)\right)\frac{2}{e^{+\frac{1}{2}\omega}+e^{-\frac{1}{2}\omega}},$$

oder nach der oben eingeführten Bezeichnung

$$f_0'(a) = f_{\frac{1}{2}}'(a)\cdot\frac{2}{e^{+\frac{1}{2}\omega}+e^{-\frac{1}{2}\omega}}.$$

Da nun ganz dasselbe auch bei

$$f_0'''(a) = f_{\frac{1}{2}}'''(a)\cdot\frac{2}{e^{+\frac{1}{2}\omega}+e^{-\frac{1}{2}\omega}}$$

$$f_0^{\mathrm{V}}(a) = f_{\frac{1}{2}}^{\mathrm{V}}(a)\cdot\frac{2}{e^{+\frac{1}{2}\omega}+e^{-\frac{1}{2}\omega}}$$

stattfindet, so wird in den Reihen von u, nach welchen ω und seine Potenzen entwickelt sind (und also auch in den Ausdrücken, wodurch die Differential-Quotienten aus den Differenzen hervorgehen), durch eine einfache Multiplication mit der Reihe, welche den Werth von $\frac{2}{e^{+\frac{1}{2}\omega}+e^{-\frac{1}{2}\omega}}$ nach Potenzen von u giebt, oder nach dem obigen durch

$$\frac{2}{e^{+\frac{1}{2}\omega}+e^{-\frac{1}{2}\omega}} = (1+\tfrac{1}{4}u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

der vollständige Ausdruck der Differential-Quotienten gegeben sein. Nur wird man hier die Potenzen von u, mit dem **arithmetischen Mittel** von derselben Ordnung und mit demselben Argumente bezeichnet, vertauschen, wobei die Differenzen von ungerader Ordnung ganze Argumente, die von gerader Ordnung gebrochene oder halbe Intervalle enthalten.

Nimmt man deshalb die Reihe

$$(1+\tfrac{1}{4}u^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}\,\frac{u^2}{2^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{u^4}{2^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{u^6}{2^6} + \ldots\ldots$$

und multiplicirt sie mit den verschiedenen Potenzen von ω, so wird:

$$\omega \cdot \frac{2}{e^{+\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}} = u - \tfrac{1}{6}u^3 + \tfrac{1}{30}u^5 - \tfrac{1}{140}u^7 \ldots.$$

$$\omega^2 \cdot \frac{2}{e^{+\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}} = u^2 - \tfrac{5}{24}u^4 + \tfrac{259}{5760}u^6 \ldots.$$

$$\omega^3 \cdot \frac{2}{e^{+\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}} = u^3 - \tfrac{1}{4}u^5 + \tfrac{7}{120}u^7 \ldots.$$

$$\omega^4 \cdot \frac{2}{e^{+\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}} = u^4 - \tfrac{7}{24}u^6 \ldots.$$

$$\omega^5 \cdot \frac{2}{e^{+\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}} = u^5 - \tfrac{1}{3}u^7 \ldots.$$

und durch Einführung der arithmetischen Mittel wird

$$\omega\, f'\ (a) = f'_{\frac{1}{2}}(a) - \tfrac{1}{6}f'''_{\frac{1}{2}}(a) + \tfrac{1}{30}f^{\mathrm{V}}_{\frac{1}{2}}(a) - \tfrac{1}{140}f^{\mathrm{VII}}_{\frac{1}{2}}(a) \ldots.$$

$$\omega^2 f''\ (a + \tfrac{1}{2}\omega) = f''_{\frac{1}{2}}(a + \tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{5}{24}f^{\mathrm{IV}}_{\frac{1}{2}}(a + \tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{259}{5760}f^{\mathrm{VI}}_{\frac{1}{2}}(a + \tfrac{1}{2}\omega) \ldots.$$

$$\omega^3 f'''(a) = f'''_{\frac{1}{2}}(a) - \tfrac{1}{4}f^{\mathrm{V}}_{\frac{1}{2}}(a) + \tfrac{7}{120}f^{\mathrm{VII}}_{\frac{1}{2}}(a) \ldots.$$

$$\omega^4 f^{\mathrm{IV}}(a + \tfrac{1}{2}\omega) = f^{\mathrm{IV}}_{\frac{1}{2}}(a + \tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{7}{24}f^{\mathrm{VI}}(a + \tfrac{1}{2}\omega) \ldots.$$

$$\omega^5 f^{\mathrm{V}}\ (a) = f^{\mathrm{V}}_{\frac{1}{2}}(a) - \tfrac{1}{3}f^{\mathrm{VII}}_{\frac{1}{2}}(a) \ldots.$$

Dieses sind die Ausdrücke, die in die zweite Integralformel eingeführt werden müssen, um die Correctionen durch die Differenzen auszudrücken.

(10.)

Endlich, da hier nun Differenzen mit ihren Bezeichnungen eingeführt sind, wird es zweckmäfsig sein, auch die summirten Funktionen statt der bisherigen Σ zu setzen. Es wird

$$\sum_{m=o}^{m=n} f(a + m\omega) = f(a + \omega) + f(a + 2\omega) \ldots. + f(a + n\omega)$$
$$= {}'f_0\,(a + (n + \tfrac{1}{2})\,\omega) - {}'f_0\,(a + \tfrac{1}{2}\omega)$$

und auf ähnliche Weise wie bei den Differenzen arithmetische Mittel vorkommen in der zweiten Formel, wird es auch bei den Summen der Fall sein. Es ist nämlich

$$\sum_{m=o}^{m=n} f(a+m\omega) - \tfrac{1}{2}\left(f(a+n\omega) - f(a)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{2} f(a) + f(a+\omega) + f(a+2\omega) + f(a+3\omega) + \ldots + f(a+(n-1)\omega) + \tfrac{1}{2} f(a+n\omega) \\
&= \tfrac{1}{2}\,{}'f_0\,(a+\tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{1}{2}\,{}'f_0\,(a-\tfrac{1}{2}\omega) + {}'f_0\,(a+(n-\tfrac{1}{2})\omega) - {}'f_0\,(a+\tfrac{1}{2}\omega) \\
&\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}\,{}'f_0\,(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega) - \tfrac{1}{2}\,{}'f_0\,(a+(n-\tfrac{1}{2})\omega) \\
&= \tfrac{1}{2}\left({}'f_0\,(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega) + {}'f_0\,(a+(n-\tfrac{1}{2})\omega)\right) - \tfrac{1}{2}\left({}'f_0(a+\tfrac{1}{2}\omega) + {}'f_0(a-\tfrac{1}{2}\omega)\right) \\
&= f'_{\frac{1}{2}}\,(a+n\omega) - {}'f_{\frac{1}{2}}\,(a)
\end{aligned}$$

Substituirt man jetzt die Differenzen statt der Differential-Quotienten, so wird nach gehöriger Reduction

$$\begin{aligned}
\int_{a+\frac{1}{2}\omega}^{a+(n+\frac{1}{2})\omega} f(x)\,dx = \omega \Big\{ &{}'f_0\,(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega) - {}'f_0\,(a+\tfrac{1}{2}\omega) \\
&+ \tfrac{1}{24}\left\{f_0'\,(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega) - f_0'\,(a+\tfrac{1}{2}\omega)\right\} \\
&- \tfrac{17}{5760}\left\{f_0'''\,(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega) - f_0'''\,(a+\tfrac{1}{2}\omega)\right\} \\
&+ \tfrac{367}{967680}\left\{f_0^{\mathrm{V}}\,(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega) - f_0^{\mathrm{V}}\,(a+\tfrac{1}{2}\omega)\right\} \text{ etc.} \Big\}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_{a}^{a+n\omega} f(x)\,dx = \omega \Big\{ &{}'f_{\frac{1}{2}}\,(a+n\omega) - {}'f_{\frac{1}{2}}\,(a) \\
&- \tfrac{1}{12}\left\{f_{\frac{1}{2}}'\,(a+n\omega) - f_{\frac{1}{2}}'\,(a)\right\} \\
&+ \tfrac{11}{720}\left\{f_{\frac{1}{2}}'''\,(a+n\omega) - f_{\frac{1}{2}}'''\,(a)\right\} \\
&- \tfrac{191}{60480}\left\{f_{\frac{1}{2}}^{\mathrm{V}}\,(a+n\omega) - f_{\frac{1}{2}}^{\mathrm{V}}\,(a) \text{ etc.} \right. \Big\}
\end{aligned}$$

Bei dem letzten Integrale thut man gut, die erste Zeile auf der rechten Seite

$${}'f_{\frac{1}{2}}\,(a+n\omega) - {}'f_{\frac{1}{2}}(a)$$

so zu schreiben

$${}'f_{\frac{1}{2}}\,(a+n\omega) - {}'f_0\,(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{1}{2} f(a)$$

weil in dem arithmetischen Mittel ${}'f_{\frac{1}{2}}(a)$ bereits ein Theil des Integrals enthalten ist, und die summirte Funktion doch mit einem ${}'f_0\,(a+\frac{1}{2}\omega)$ beginnen mufs, eine Gröfse, die ganz an sich willkürlich ist, da sie im Integrale wieder abgezogen wird.

Die letzten Glieder in beiden Ausdrücken, die zu den Argumenten $a+\frac{1}{2}\omega$ und a gehören, bilden, wenn man das Integral beliebig fortsetzen will, die Constante des Anfangs. Man kann deshalb die Formeln auch so schreiben, dafs man für die erste summirte Funktion an die Stelle von $'f_0(a+\frac{1}{2}\omega)$ setzt

$$C_{\frac{1}{2}}=\left\{-\tfrac{1}{24}f_0'(a+\tfrac{1}{2}\omega)+\tfrac{17}{5760}f_0'''(a+\tfrac{1}{2}\omega)-\tfrac{367}{967680}f_0^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{1}{2}\omega)\right\}$$

und damit die summirte Reihe bildet. Es wird dann ganz vollständig

$$\begin{aligned}\int^{a+(n+\frac{1}{2})\omega} f(x)dx=\omega\{'f_0(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega)&+\tfrac{1}{24}f_0'(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega)\\&-\tfrac{17}{5760}f_0'''(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega)\\&+\tfrac{367}{967680}f_0^{\mathrm{V}}(a+(n+\tfrac{1}{2})\omega)\}\end{aligned}$$

Für die zweite Formel setzt man an die Stelle von $'f_0(a+\frac{1}{2}\omega)$

$$C_0=\left\{+\tfrac{1}{2}f(a)+\tfrac{1}{12}f_{\frac{1}{2}}'(a)-\tfrac{11}{720}f_{\frac{1}{2}}'''(a)+\tfrac{191}{60480}f_{\frac{1}{2}}^{\mathrm{V}}(a)\ldots\right\}$$

und erhält dann, wenn man damit die summirte Reihe bildet, ebenfalls vollständig

$$\begin{aligned}\int^{a+n\omega} f(x)dx=\omega\{'f_{\frac{1}{2}}(a+n\omega)&-\tfrac{1}{12}f_{\frac{1}{2}}'(a+n\omega)\\&+\tfrac{11}{720}f_{\frac{1}{2}}'''(a+n\omega)\\&-\tfrac{191}{60480}f_{\frac{1}{2}}^{\mathrm{V}}(a+n\omega)\ldots\ldots\}\end{aligned}$$

Es wird dann das bestimmte Integral $a+\frac{1}{2}\omega$ bis $a+(n+\frac{1}{2})\omega$ und a bis $(a+n\omega)$ vollständig gefunden, wenn man an die Zahlen der summirten Funktion, die zu dem End-Argumente gehören, nur die angegebenen drei Correctionen anbringt und nähert sich in dieser Form der Entwickelung des allgemeinen Integrals.

(11.)

Am einfachsten lassen sich beide Ausdrücke so in Worten fassen. Es sei, um die kleinen Brüche zu vermeiden,

$$\alpha=\tfrac{1}{24},\qquad \beta=-\tfrac{17}{5760},\qquad \gamma=+\tfrac{367}{967680}\text{ etc.}$$

und man habe für die zu integrirende Funktion $f(x)$ die Reihenfolge von Werthen

$$f(a), \qquad f(a+\omega), \qquad f(a+2\omega)....$$

beliebig weit berechnet, so wird das Integral allgemein werden:

$$\begin{aligned}\int^{a+n\omega} f(x)dx = \omega\{{}'f_0(a+n\omega) &+ \alpha f'_0(a+n\omega)\\ &+\beta f'''_0(a+n\omega)\\ &+\gamma f^{\text{v}}_0(a+n\omega)+....\}\\ &+\text{Const.}\end{aligned}$$

wo die Constante so bestimmt wird, dafs für das Argument, für welches das Integral Null werden soll, es sei dieses das Argument $(a+n'\omega)$, die vorangehenden Ausdrücke mit negativem Zeichen hinzugesetzt werden, also

$$\begin{aligned}\text{Const.} = -\omega\{{}'f_0(a+n'\omega) &+ \alpha f'_0(a+n'\omega)\\ &+\beta f'''_0(a+n'\omega)\\ &+\gamma f^{\text{v}}_0(a+n'\omega)......\}\end{aligned}$$

Dieser allgemeine Ausdruck wird in der Rechnung am einfachsten, wenn, wie in der ersten Integrationsformel von (10), die Zahlen n und n' von der Form $(i+\frac{1}{2})$ und $(i'+\frac{1}{2})$ werden, weil dann unmittelbar die aus der Reihe $f(a)$, $f(a+\omega)$ u. s. w. sich ergebende summirte Funktion ${}'f_0(a+(i+\frac{1}{2})\omega)$, und Differenzen $f'_0(a+(i+\frac{1}{2})\omega)$, $f'''_0(a+(i+\frac{1}{2})\omega)$, $f^{\text{v}}_0(a+(i+\frac{1}{2})\omega)$, ohne weitere Aenderung angewandt werden können, und eben so bei i'. Ist aber n von einer andern Form, so müssen diese Funktionen von ${}'f_0$, f'_0, f'''_0, f^{v}_0 etc. aus den wirklich dastehenden Zahlen so interpolirt werden, als ob sie reine Funktionen der Argumente $a+(i+\frac{1}{2})\omega$ bei allen wären.

Ein Beispiel dieser Art giebt die zweite Integrationsformel, wo n von der Form i ist, und n' von der Form i'. Die hier nothwendige Interpolation in die Mitte hinein ist bei ihr ausgeführt, und da hier die arithmetischen Mittel der Funktionen von $a+(i+\frac{1}{2})\omega$, und $a+(i-\frac{1}{2})\omega$ vorkommen, so sind diese eingeführt und die Reihe

$$1-\tfrac{1}{12}u^2+\tfrac{11}{720}u^4-\tfrac{191}{60480}u^6......$$

ist entstanden aus dem Producte von

$$1 + \alpha u^2 + \beta u^4 + \gamma u^6 \ldots.$$

mit der bei der Interpolation in die Mitte hinein geltenden Reihe

$$(1 + \tfrac{1}{4} u^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{8} u^2 + \tfrac{3}{128} u^4 - \tfrac{5}{1024} u^6 \ldots..$$

Zur Bequemlichkeit der Rechnung kann man hier noch hinzufügen, dafs man am besten thut, nicht

$$f(a),\ f(a+\omega),\ f(a+2\omega), \text{ etc.}$$

anzusetzen, sondern

$$\omega f(a),\ \omega f(a+\omega),\ \omega f(a+2\omega) \text{ etc.}$$

Da dieser Faktor ω sowohl in die Differenzen als in die summirten Funktionen, die man aus $\omega f(a)$, $\omega f(a+\omega)$, $\omega f(a+2\omega)$ bildet, von selbst übergeht, so fällt er in diesem Falle aus der rechten Seite völlig weg.

Endlich kann man noch bemerken, dafs, wenn man das Beispiel der Exponentialgröfse e^x auch bei der Integrationsformel verfolgt, die summirte Funktion

$$'f_0\,(a + \tfrac{1}{2}\omega) = e^{a + \frac{1}{2}\omega} \frac{1}{u}$$

wird und da $\int e^x dx$ für $x = (a + \frac{1}{2}\omega)$ wiederum $e^{a+\frac{1}{2}\omega}$ ist, die obige Integralformel die Gleichung geben wird

$$1 = \omega \cdot \left\{ \frac{1}{u} + \alpha u + \beta u^3 + \gamma u^5 \ldots. \right\}$$

woraus folgt

$$\frac{u}{\omega} = 1 + \alpha u^2 + \beta u^4 + \gamma u^6 \ldots...$$

oder

$$\frac{u}{\omega} = \frac{u}{\int \frac{d\omega}{du} du} = \frac{u}{u - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \frac{u^3}{2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} \frac{u^5}{2^4} \ldots..}$$

das heifst

$$1 + \alpha u^2 + \beta u^4 + \gamma u^6 \ldots.. = \frac{1}{1 - \frac{1}{24} u^2 + \frac{3}{640} u^4 - \frac{5}{7168} u^6}$$

so dafs die Werthe α, β, γ etc., wenn man sie fortsetzen wollte, aus dem reciproken Werthe der Reihe entstehen würden, die bei dem ersten Differential-Quotienten $f'(a+\frac{1}{2}\omega)$ stattfindet, wie es auch bei dem Integrale in der Natur der Sache liegt.

(12.)

Vermittelst dieses allgemeinen Ausdrucks der Integration für jede Form des Argumentes, nöthigenfalls mit Zuziehung der Interpolation, werden sich die zweiten, dritten und folgenden Integrationen ohne alle Mühe ausführen und ableiten lassen. Bei der Bildung der verschiedenen Constanten findet immer dasselbe Princip statt, die allgemeinen Integrationsformeln so zu benutzen, daſs man die Werthe der Constanten mit ihrer Zuziehung richtig erhält. Diese Werthe sind an der gehörigen Stelle in den summirten Reihen so anzusetzen und zu der Bildung der summirten Reihen zu benutzen, daſs später auf die Anfangsgrenze nicht mehr Rücksicht zu nehmen ist, sondern an alle Werthe der dadurch gebildeten summirten Reihen nur die Correctionen der Endgrenze anzubringen sind. Die Bequemlichkeit der Rechnung wird dabei allein noch einige Betrachtungen nöthig machen.

Werde zuerst das zweite Integral gesucht, so giebt die allgemeine Formel für das erste Integral

$$\begin{aligned}\int f(x)dx = \omega\{ {}'f_0(a+n\omega) &+ \alpha f_0'(a+n\omega)\\ &+ \beta f_0'''(a+n\omega)\\ &+ \gamma f_0^{V}(a+n\omega)\ldots\ldots\}\end{aligned}$$

die verschiedenen Theile des zweiten Integrals, je nach den Theilen, aus denen das erste besteht. Setzt man zuerst statt

$$f(a+n\omega)\ldots\ldots\ {}'f_0(a+n\omega)$$

so hat man für den ersten Theil des zweiten Integrals den Ausdruck

$$\int dx \int f(x)dx =$$

$$\omega^2\{ {}''f_0(a+n\omega) + \alpha f(a+n\omega) + \beta f_0''(a+n\omega) + \gamma f_0^{IV}(a+n\omega)$$

weil bei den beiderseitigen höhern arithmetischen Reihen die Differenzreihen nur vorrücken. Eben so werden die folgenden Theile, wenn man für

$$\begin{array}{llll} f(a+n\omega) \text{ nach und nach} & f'_0\,(a+n\omega) \\ \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} & f'''_0\,(a+n\omega) \\ \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} & f^{\mathrm{V}}_0\,(a+n\omega) \end{array}$$

setzt, respective

$$\begin{array}{l} \omega^2\{\alpha f(a+n\omega)+\alpha^2 f''_0(a+n\omega)+\alpha\beta f^{\mathrm{IV}}_0\,(a+n\omega)\ldots.\} \\ \omega^2\{\qquad\qquad\qquad \beta\, f''_0(a+n\omega)+\alpha\beta f^{\mathrm{IV}}_0\,(a+n\omega)\ldots.\} \\ \omega^2\{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \gamma f^{\mathrm{IV}}_0(a+n\omega)\ldots.\} \end{array}$$

Zusammen wird also

$$\int^{a+n\omega} dx \int f(x)dx = \omega^2\{''f_0\,(a+n\omega)+2\alpha\, f(a+n\omega) \\ +(\alpha^2+2\beta)\, f''_0\,(a+n\omega) \\ +2(\alpha\beta+\gamma)\, f^{\mathrm{IV}}_0\,(a+n\omega)\ldots.\}$$

oder die Zahlenreihe der wirklichen Integrations-Coefficienten wird die Form geben

$$\int^{a+n\omega} dx \int f(x)dx = \omega^2\{''f_0\,(a+n\omega)+\tfrac{1}{12}\, f(a+n\omega) \\ -\tfrac{1}{240}\, f''_0\,(a+n\omega) \\ +\tfrac{31}{60480}\, f^{\mathrm{IV}}_0\,(a+n\omega)\ldots..\}$$

bei denen, wenn man

$$\alpha_1=\tfrac{1}{12}, \qquad \beta_1=-\tfrac{1}{240}, \qquad \gamma_1=+\tfrac{31}{60480}$$

setzt, die Reihe

$$1+\alpha_1\, u^2+\beta_1\, u^4+\gamma_1\, u^4+\ldots=\left(\frac{u}{\omega}\right)^2$$

nach dem oben am Ende von (11) angeführten Werthe. Unmittelbar kann sie angewandt werden für

$$n\omega = i\omega$$

weil in den geraden summirten Reihen und Differenzen die Werthe $''f_0(a+i\omega)$, $f(a+i\omega)$, $f''_0(a+i\omega)$, $f^{\mathrm{IV}}_0(a+i\omega)$ ohne weitere vorzunehmende Aenderung vorkommen.

Ist aber $n\omega$ von der Form $(i+\frac{1}{2})\omega$, so müssen diese Reihen so in die Mitte hinein interpolirt werden, als wären sie reine Funktionen von $(a+i\omega)$. Multiplicirt man also

$$\left(\frac{u}{\omega}\right)^2 \text{ mit } (1+\tfrac{1}{4}u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

und führt statt der wirklichen Differenzen die arithmetischen Mittel ein, so erhält man

$$\int^{a+(i+\frac{1}{2})\omega} dx \int f(x)dx = \omega^2 \Big\{ {}''f_{\frac{1}{2}}(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) - \tfrac{1}{24} f_{\frac{1}{2}}(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) + \tfrac{17}{1920} f''_{\frac{1}{2}}(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) - \tfrac{367}{193536} f^{\mathrm{IV}}_{\frac{1}{2}}(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) \ldots\ldots \Big\}$$

Es wird bei der Rechnung bequemer sein, bei einer solchen zweiten Integration nicht $f(a)$, $f(a+\omega)$ u. s. w. anzusetzen, sondern $\omega^2 f(a)$, $\omega^2 f(a+\omega)$ etc. Man erhält dann allerdings das erste Integral, verbunden mit dem Factor ω, und mufs, wenn man es gebrauchen will, mit diesem Factor erst dividiren. In der Regel aber wird man gröfsere und bequemere Zahlenwerthe erhalten.

(13.)

Wendet man dasselbe Verfahren auf die dritte Integration an, so wird man erhalten

$$\int^{a+n\omega} dx \int dx \int f(x)dx = \omega^3 \Big\{ {}'''f_0(a+n\omega) + \tfrac{1}{8}\,{}'f_0(a+n\omega) + \tfrac{7}{1920} f'_0(a+n\omega) + \tfrac{457}{967680} f'''_0(a+n\omega) \ldots\ldots \Big\}$$

Setzt man hier

$$\alpha_2 = \tfrac{1}{8}, \qquad \beta_2 = -\tfrac{7}{1920}, \qquad \gamma_2 = +\tfrac{457}{967680}$$

so entspringt die Reihe aus diesen Coefficienten aus $\left(\frac{u}{\omega}\right)^3$; oder es ist

$$1 + \alpha_2 u^2 + \beta_2 u^4 + \gamma_2 u^6 + \ldots = \left(\frac{u}{\omega}\right)^3.$$

Unmittelbar ist diese Form anzuwenden, wenn n von der Form ist $i+\frac{1}{2}$, wegen der ungeraden Ordnungszahl der summirten Reihen und Differenzen. Für die Form

$$n = i$$

wird man die letzte Reihe

$$1 + \alpha_2 u^2 + \beta_2 u^4 + \gamma_2 u^6 + \ldots \text{ multipliciren mit } (1 + \tfrac{1}{4}u^2)^{-\frac{1}{2}},$$

und statt der Differenzen arithmetische Mittel einführen müssen. Man erhält dann

$$\int dx \int dx \int f(x)\,dx = \omega^3 \Big\{ {}'''f_{\frac{1}{2}}(a + i\omega) + \tfrac{1}{240} f'_{\frac{1}{2}}(a + i\omega) \\ - \tfrac{31}{30240} f'''_{\frac{1}{2}}(a + i\omega) \ldots \Big\}$$

Das Glied mit ${}'f_{\frac{1}{2}}(a + i\omega)$ hat hier den Coefficienten Null, so dafs mit verhältnifsmäfsig weit gröfserer Näherung als bei den früheren Integrationen, die dritte summirte Funktion das dreifache Integral ausdrückt.

(14.)

Es mögen jetzt die Werthe der sowohl am Anfange als am Ende der Integration anzusetzenden Gröfsen, welche nach den bisher ausgesprochenen Grundsätzen nur bei dem Anfange besonders eine etwas gröfsere Mühe der Berechnung verlangen, so für die drei ersten Integrationen übersichtlich zusammengestellt werden, und zwar für beide Formen von x und x', $= a$ und $= a + \frac{1}{2}\omega$, dafs man unmittelbar das jedesmalige Nöthige daraus entnehmen kann.

Zuerst hat man nach dem Ausdrucke für $\dfrac{u}{\omega}$ in einer Reihe, und ihrer Potenzen bis zur dritten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{u}{\omega} &= 1 + \tfrac{1}{24}u^2 - \tfrac{17}{5760}u^4 + \tfrac{367}{967680}u^6 \ldots \\ &= 1 + \alpha u^2 + \beta u^4 + \gamma u^6 \ldots\ldots \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{u^2}{\omega^2} &= 1 + \tfrac{1}{12}u^2 - \tfrac{1}{240}u^4 + \tfrac{31}{60480}u^6 \ldots \\ &= 1 + \alpha_1 u^2 + \beta_1 u^4 + \gamma_1 u^6 \ldots\ldots \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{u^3}{\omega^3} &= 1 + \tfrac{1}{8}u^2 - \tfrac{7}{1920}u^4 + \tfrac{457}{967680}u^6 \ldots \\ &= 1 + \alpha_2 u^2 + \beta_2 u^4 + \gamma_2 u^6 \ldots\ldots \end{aligned}\right\}$$

Die Werthe α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, die hierdurch gegeben sind, bilden die Zahlenwerthe der Coefficienten, welche bei der ersten, zweiten und dritten Integration für die wirklich dastehenden Differenzen gebraucht werden.

Multiplicirt man diese Reihen mit $(1+\frac{1}{4}u^2)^{-\frac{1}{2}}$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}\frac{u}{\omega}\cdot(1+\tfrac{1}{4}u^2)^{-\frac{1}{2}} &= 1-\tfrac{1}{12}u^2+\tfrac{11}{720}u^4-\tfrac{191}{60480}u^6\,.....\\ &= 1+\alpha' u^2+\beta' u^4+\gamma' u^6\,.........\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{u^2}{\omega^2}\cdot(1+\tfrac{1}{4}u^2)^{-\frac{1}{2}} &= 1-\tfrac{1}{24}u^2+\tfrac{17}{1920}u^4-\tfrac{367}{193536}u^6\,.....\\ &= 1+\alpha_1' u^2+\beta_1' u^4+\gamma_1' u^6\,.........\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{u^3}{\omega^3}\cdot(1+\tfrac{1}{4}u^2)^{-\frac{1}{2}} &= 1-0\,u^2+\tfrac{1}{240}u^4-\tfrac{31}{30240}u^6\,.....\\ &= 1+\alpha_2' u^2+\beta_2' u^4+\gamma_2' u^6\,.........\end{aligned}\right\}$$

Die Werthe α', β', γ', α_1', β_1', γ_1', α_2', β_2', γ_2', die hierdurch gegeben sind, und nöthigenfalls fortgesetzt werden können, bilden die Zahlenwerthe, welche bei der ersten, zweiten und dritten Integration bei Anwendung der arithmetischen Mittel gebraucht werden.

Es sei jetzt die Anfangsgrenze für alle drei Integrationen so gegeben, dafs für $x'=a$ die Integrale sämmtlich Null werden. Hat man dann die Reihe der Werthe berechnet

$$f(a),\qquad f(a+\omega),\qquad f(a+2\omega)\,.....\,f(a+n\omega)\,.....$$

so bildet man für die Anfangsgrenze von der Form:

$$1)\quad n=i'=0$$

bei der ersten Integration die erste summirte Reihe so, dafs man an die Stelle von ${}'f_0(a+\frac{1}{2}\omega)$ setzt

$$(A)\qquad {}'f_0(a+\tfrac{1}{2}\omega)=C_0=\tfrac{1}{2}f(a)-\alpha' f'_{\frac{1}{2}}(a)-\beta' f'''_{\frac{1}{2}}(a)-\gamma' f^{\mathrm{V}}_{\frac{1}{2}}(a)\,.....$$

Für die zweite Integration, fügt man mit Beibehaltung der ersten summirten Reihe, eine zweite summirte Reihe hinzu, indem man an die Stelle von ${}''f_0(a)$ setzt:

$$(B)\qquad {}''f_0(a)=C_0'=\{-\alpha_1 f(a)-\beta_1 f_0''(a)-\gamma_1 f_0^{\mathrm{IV}}(a)\,.....\}$$

Für die dritte Integration bildet man aus der zweiten summirten Reihe eine dritte summirte Reihe, indem man in derselben anfängt, mit dem Werthe C_0'', der an die Stelle von ${}'''f_0(a+\frac{1}{2}\omega)$ gesetzt wird, wo

$$(C) \qquad '''f_0(a+\tfrac{1}{2}\omega) = C_0'' = \{-\tfrac{1}{2}\alpha_1 f(a) + \beta_1 f_0'(a-\tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{1}{2}\gamma_1\{f_0'''(a+\tfrac{1}{2}\omega)+3f_0'''(a-\tfrac{1}{2}\omega)\}\ldots\}$$

Wenn dagegen die Anfangsgrenze für alle drei Integrationen so gegeben ist, dafs für $x = a + \frac{1}{2}\omega$ die Integrale sämmtlich Null werden, so bildet man bei der Form

$$2) \quad n = i' + \tfrac{1}{2}$$

die erste summirte Reihe, so dafs man an die Stelle von $'f_0(a+\frac{1}{2}\omega)$ die Gröfse $C_{\frac{1}{2}}$ setzt, wo

$$(D) \qquad 'f_0(a+\tfrac{1}{2}\omega) = C_{\frac{1}{2}} = \{-\alpha f_0'(a+\tfrac{1}{2}\omega) - \beta f_0'''(a+\tfrac{1}{2}\omega) - \gamma f_0^{\mathrm{V}}(a+\tfrac{1}{2}\omega) \ldots\ldots\}$$

Für die zweite Integration wird unter Beibehaltung der auf diese Weise gebildeten ersten summirten Reihe für den Anfang an die Stelle von $''f_0(a)$ die Gröfse $C_{\frac{1}{2}}''$ gesetzt, wo

$$(E) \qquad ''f_0(a) = C_{\frac{1}{2}}' = \{\alpha f(a+\omega) + \beta(2f_0''(a+\omega) + f_0''(a)) + \gamma(3f_0^{\mathrm{IV}}(a+\omega) + 2f_0^{\mathrm{IV}}(a)) \ldots\ldots\}$$

Vermittelst der hiemit gebildeten zweiten summirten Reihe, wird für die dritte Integration eine dritte summirte Reihe gebildet, bei der der Anfang gemacht wird, indem man an die Stelle von $'''f_0(a+\frac{1}{2}\omega)$ die Gröfse $C_{\frac{1}{2}}''$ setzt, wo

$$(F) \qquad '''f_0(a+\tfrac{1}{2}\omega) = C_{\frac{1}{2}}'' = \{-\alpha_2\, 'f_0(a+\tfrac{1}{2}\omega) - \beta_2 f_0'(a+\tfrac{1}{2}\omega) - \gamma_2 f_0'''(a+\tfrac{1}{2}\omega) \ldots\ldots\}$$

Es stellen sich folglich die Anfänge der drei summirten Reihen so: wenn die Integrale sämmtlich Null sind für die Anfangsgrenze

$$1) \quad x' = a$$

Argument.	Funktion.	I. summ. Reihe.	II. summ. Reihe.	III. summ. Reihe.
a	$f(a)$		C_0'	
		C_0		C_0''
$a+\omega$	$f(a+\omega)$		$C_0 + C_0'$	
		$C_0 + f(a+\omega)$		$C_0 + C_0' + C_0''$
$a+2\omega$	$f(a+2\omega)$		$2C_0 + C_0' + fa + \omega$	

2) für $x' = a + \frac{1}{2}\omega$

Arg.	Funktion.	I. summ. Reihe.	II. summ. Reihe.	III. summ. Reihe.
a	$f(a)$		$C'_{\frac{1}{2}}$	
		$C_{\frac{1}{2}}$		$C''_{\frac{1}{2}}$
$a+\omega$	$f(a+\omega)$		$C_{\frac{1}{2}} + C'_{\frac{1}{2}}$	
		$C_{\frac{1}{2}} + f(a+\omega)$		$C_{\frac{1}{2}} + C'_{\frac{1}{2}} + C''_{\frac{1}{2}}$
$a+2\omega$	$f(a+2\omega)$		$2C_{\frac{1}{2}} + C'_{\frac{1}{2}} + f(a+\omega)$	

Der Werth der ganzen bestimmten Integrale hängt dann nur von der Form der Endgrenze ab, und ist, je nachdem diese von der Form $a + i\omega$ oder $a + (i + \frac{1}{2})\omega$ ist, von einander unterschieden. Indessen wird der Ausdruck derselben weit einfacher, weil keine Rücksicht mehr genommen zu werden braucht auf die in den andern summirten Reihen anzusetzenden Zahlen, welche sich aus den ausgeführten Summirungen von selbst ergeben. Man hat dann

1) für die Endgrenze $x = a + i\omega$.

$$\left.\begin{aligned}
\int f(x)dx &= \omega\{{}'f_{\frac{1}{2}}(a+i\omega) + \alpha' f'_{\frac{1}{2}}(a+i\omega) + \beta' f'''_{\frac{1}{2}}(a+i\omega) \\
&\qquad + \gamma' f^{\mathrm{V}}_{\frac{1}{2}}(a+i\omega) \ldots\ldots \\
\int dx \int f(x)dx &= \omega^2\{{}''f_0(a+i\omega) + \alpha_1 f(a+i\omega) + \beta_1 f''_0(a+i\omega) \\
&\qquad + \gamma_1 f^{\mathrm{IV}}_0(a+i\omega) \ldots\ldots \\
\int dx \int dx \int f(x)dx &= \omega^3\{{}'''f_{\frac{1}{2}}(a+i\omega) + \alpha'_2\,{}'f_{\frac{1}{2}}(a+i\omega) + \beta'_2 f'_{\frac{1}{2}}(a+i\omega) \\
&\qquad + \gamma'_2 f'''_{\frac{1}{2}}(a+i\omega) \ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\ \mathrm{I}$$

2) für die Endgrenze $x = a + (i + \frac{1}{2})\omega$.

$$\left.\begin{aligned}
\int f(x)dx &= \omega\ \{{}'f_0(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) + \alpha f'_0(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) \\
&\qquad + \beta f'''_0(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) + \gamma f^{\mathrm{V}}_0(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) + \ldots\ldots \\
\int dx \int f(x)dx &= \omega^2\{{}''f_{\frac{1}{2}}(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) + \alpha'_1 f_{\frac{1}{2}}(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) \\
&\qquad + \beta'_1 f''_{\frac{1}{2}}(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) + \gamma'_1 f^{\mathrm{IV}}_{\frac{1}{2}}(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) + \ldots\ldots \\
\int dx \int dx \int f(x)dx &= \omega^3\{{}'''f_0(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) + \alpha_2\,{}'f_0(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) \\
&\qquad + \beta_2 f'_0(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) + \gamma_2 f'''_0(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) + \ldots\ldots
\end{aligned}\right\}\ \mathrm{II}$$

(15.)

Setzt man in diesen letzten Ausdrücken $i=0$, so wird man die Werthe der oben angegebenen Constanten erhalten für

$$1)\ x'=a$$

hat man aus dem ersten Systeme

$$\left\{ {}'f_{\frac{1}{2}}(a)+\alpha' f'_{\frac{1}{2}}(a)+\beta' f'''_{\frac{1}{2}}(a)+\gamma' f^{\mathrm{V}}_{\frac{1}{2}}(a)\ldots\ldots\right\}=0$$

oder weil

$$(A)\qquad {}'f_{\frac{1}{2}}(a)={}'f_0(a+\tfrac{1}{2}\omega)-\tfrac{1}{2}f(a)=C_0-\tfrac{1}{2}f(a)$$

den Werth von C_0 wie oben.

Eben so wird für C'_0 die Gleichung

$$(B)\qquad \left\{ {}''f_0(a)+\alpha_1 f(a)+\beta_1 f''_0(a)+\gamma_1 f^{\mathrm{IV}}_0(a)\ldots\ldots\right\}=0$$

oder weil ${}''f_0(a)=C'_0$, den Werth von C'_0 geben.

Endlich für C''_0 hat man bei dem dritten Integrale

$$\left\{ {}'''f_{\frac{1}{2}}(a)+\alpha'_2\,{}'f_{\frac{1}{2}}(a)+\beta'_2 f'_{\frac{1}{2}}(a)+\gamma'_2 f'''_{\frac{1}{2}}(a)\ldots\ldots\right\}=0$$

oder weil

$${}'''f_{\frac{1}{2}}(a)={}'''f_0(a+\tfrac{1}{2}\omega)-\tfrac{1}{2}\,{}''f_0(a)$$

$$\text{und } C''_0={}'''f_0(a+\tfrac{1}{2}\omega);\ C'_0={}''f_0(a)$$

$$\left\{ C''_0-\tfrac{1}{2}C'_0+\alpha'_2\,{}'f_{\frac{1}{2}}(a)+\beta'_2 f'_{\frac{1}{2}}(a)+\gamma'_2 f'''_{\frac{1}{2}}(a)\ldots\ldots\right\}=0$$

Da nun aber

$$\alpha'_2=0,\quad \beta'_2=-\beta_1,\quad \text{und}\quad \gamma'_2=-2\gamma_1$$

ist, so wird, wenn man die früheren Werthe substituirt

$$\begin{array}{llll}
-\tfrac{1}{2}C'_0 & =+\tfrac{1}{2}\alpha_1 f(a) & +\tfrac{1}{2}\beta_1 f''_0(a) & +\tfrac{1}{2}\gamma_1 f^{\mathrm{IV}}_0(a)\ldots\ldots \\
+\alpha'_2\,{}'f_{\frac{1}{2}}(a)= & 0 & & \\
+\beta'_2 f'_{\frac{1}{2}}(a)= & & -\beta_1 f'_{\frac{1}{2}}(a) & \\
+\gamma'_2 f'''_{\frac{1}{2}}(a)= & & & -2\gamma_1 f'''_{\frac{1}{2}}(a)
\end{array}$$

Dabei ist

$$f_0''(a) = f_0'(a + \tfrac{1}{2}\omega) - f_0'(a - \tfrac{1}{2}\omega)$$
$$f_{\frac{1}{2}}'(a) = \tfrac{1}{2} f_0'(a + \tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{1}{2} f_0'(a - \tfrac{1}{2}\omega)$$
$$f_0^{IV}(a) = f_0'''(a + \tfrac{1}{2}\omega) - f_0'''(a - \tfrac{1}{2}\omega)$$
$$f_{\frac{1}{2}}'''(a) = \tfrac{1}{2} f_0'''(a + \tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{1}{2} f_0'''(a - \tfrac{1}{2}\omega)$$

und die Gleichung wird

$$(C) \qquad C_0'' + \left\{ \tfrac{1}{2}\alpha_1 f(a) - \beta_1 f_0'(a - \tfrac{1}{2}\omega) \right.$$
$$\left. - \tfrac{1}{2}\gamma_1 \left\{ f_0'''(a + \tfrac{1}{2}\omega) + 3 f_0'''(a - \tfrac{1}{2}\omega) \right\} \right\} = 0$$

und giebt damit den obigen Werth von C_0''.

Aus dem zweiten Systeme hat man für

$$2) \quad x = a + \tfrac{1}{2}\omega$$

$$(D) \qquad C_{\frac{1}{2}} + \left\{ \alpha f_0'(a + \tfrac{1}{2}\omega) + \beta f_0'''(a + \tfrac{1}{2}\omega) + \gamma f_0^{V}(a + \tfrac{1}{2}\omega) \ldots \right\} = 0$$

weil

$$C_{\frac{1}{2}} = {}'f_0(a + \tfrac{1}{2}\omega)$$

Bei der zweiten Integration wird

$$''f_{\frac{1}{2}}(a + \tfrac{1}{2}\omega) = C_{\frac{1}{2}}' + \tfrac{1}{2} C_{\frac{1}{2}}$$
$$= C_{\frac{1}{2}}' - \tfrac{1}{2}\alpha f_0'(a + \tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{1}{2}\beta f_0'''(a + \tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{1}{2}\gamma f_0^{V}(a + \tfrac{1}{2}\omega)$$

und damit soll die Gleichung stattfinden

$$C_{\frac{1}{2}}' - \tfrac{1}{2}\alpha f_0'(a + \tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{1}{2}\beta f_0'''(a + \tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{1}{2}\gamma f_0^{V}(a + \tfrac{1}{2}\omega) \ldots\ldots$$
$$+ \alpha_1' f_{\frac{1}{2}}(a + \tfrac{1}{2}\omega) + \beta_1' f_{\frac{1}{2}}''(a + \tfrac{1}{2}\omega) + \gamma_1' f_0^{IV}(a + \tfrac{1}{2}\omega) \ldots\ldots = 0$$

Es ist hier aber

$$\alpha_1' = -\alpha, \qquad \beta_1' = -3\beta, \qquad \gamma_1' = -5\gamma \ldots\ldots$$

und

$$f_0'(a + \tfrac{1}{2}\omega) = f(a + \omega) - f(a)$$
$$f_{\frac{1}{2}}(a + \tfrac{1}{2}\omega) = \tfrac{1}{2} f(a + \omega) + \tfrac{1}{2} f(a)$$

so wie die analogen Werthe bei f_0''' und f_0^{V}. Setzt man diese Werthe zusammen, so wird

$$(E) \; C_{\frac{1}{2}}' - \alpha f(a + \omega) - \beta\{2 f_0''(a + \omega) + f_0''(a)\} - \gamma\{3 f_0^{IV}(a + \omega) + 2 f_0^{IV}(a)\} = 0$$

wie es der oben gegebene Werth verlangt.

Endlich findet wegen $C''_{\frac{1}{2}} = '''f_0(a+\frac{1}{2}\omega)$ für die dritte Integration die Gleichung statt

$$C''_{\frac{1}{2}} + \alpha_2\,'f_0(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \beta_2 f'_0(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \gamma_2 f'''_0(a+\tfrac{1}{2}\omega) = 0$$

oder wegen $'f_0(a+\frac{1}{2}\omega) = C_{\frac{1}{2}}$

$$(F) \qquad C''_{\frac{1}{2}} + \alpha_2 C_{\frac{1}{2}} + \beta_2 f'_0(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \gamma_2 f'''_0(a+\tfrac{1}{2}\omega) = 0$$

wie es die obige Angabe verlangt.

Für den Anfang der verschiedenen Integrationen wird man die zu berechnenden Funktionen immer so wählen können, dafs bei berechneten $f(a)$, $f(a+\omega)$ etc. der Anfang entweder auf $x' = a$, oder $= a + \frac{1}{2}\omega$ fällt und reicht dann mit diesen Formeln aus.

Für die Endgrenze ist es mir am bequemsten vorgekommen, einige Werthe der Integrale für

$$a+(i-1)\omega,\quad a+(i-\tfrac{1}{2})\omega,\quad a+i\omega,\quad a+(i+\tfrac{1}{2})\omega,\quad a+(i+1)\omega$$

nach den hier gegebenen Ausdrücken zu berechnen und aus ihnen den Werth des Integrals für andere Grenzen, die nicht auf $a+i\omega$ und $a+(i+\frac{1}{2})\omega$ fallen, strenge zu interpoliren. Man kann ähnlich auch bei dem Anfange verfahren, nur wird man bei den höheren Integrationen, auf den richtigen Beginn der sämmtlichen vorangehenden summirten Reihen zu sehen haben.

(16.)

Als Beispiel kann noch die Annahme

$$f(x) = x^4, \qquad a = 1, \qquad \omega = 1,$$

behandelt werden. Es wird damit für

1) $x' = 1$

$$\int f(x)dx = \tfrac{1}{5}\,x^5 - \tfrac{1}{5}$$

$$\int dx \int f(x)dx = \tfrac{1}{30}\,x^6 - \tfrac{1}{5}\,x + \tfrac{1}{6}$$

$$\int dx \int dx \int f(x)dx = \tfrac{1}{210}\,x^7 - \tfrac{1}{10}\,x^2 + \tfrac{1}{6}\,x - \tfrac{1}{14}$$

und für

$$2)\quad x' = 1{,}5$$

$$\int f(x)dx = \tfrac{1}{5}\ x^5 - \tfrac{243}{160}$$

$$\int dx \int f(x)\,dx = \tfrac{1}{30}\ x^6 - \tfrac{243}{160}\,x + \tfrac{243}{128}$$

$$\int dx \int dx \int f(x)\,dx = \tfrac{1}{210}\,x^7 - \tfrac{243}{320}\,x^2 + \tfrac{243}{128}\,x - \tfrac{2187}{1792}$$

Zu dem Anfange der Reihen bei der mechanischen Quadratur bedarf man der Differenzen der ersten Werthe von $f(a)$, $f(a+\omega)$ u. s. w. Diese sind

	Arg.	Funkt.	f'_0	f''_0	f'''_0	f^{IV}_0	f^{V}_0
$a-\omega$	0	0		2		24	
			1		12		0
a	1	1		14		24	
			15		36		0
$a+\omega$	2	16		50		24	

Soll nun zuerst die Anfangsgrenze

$$1)\quad x' = 1$$

sein, so wird nach den in (14) gegebenen Werthen

$$C_0 = \tfrac{1}{2}\,f(a) + \tfrac{1}{12}\,f'_{\frac{1}{2}}(a) - \tfrac{11}{720}\,f'''_{\frac{1}{2}}(a) + \tfrac{191}{60480}\,f^{V}_{\frac{1}{2}}(a)$$

$$C'_0 = -\tfrac{1}{12}\,f(a) + \tfrac{1}{240}\,f''_0(a) - \tfrac{31}{60480}\,f^{IV}_0(a)$$

$$C''_0 = -\tfrac{1}{24}\,f(a) - \tfrac{1}{240}\,f'_0(a - \tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{31}{120960}\,(f'''_0(a + \tfrac{1}{2}\omega) + 3f'''_0(a - \tfrac{1}{2}\omega))$$

und da hier

$$\begin{array}{lll}
f\ (a) = 1 & f''_0(a) = 14 & f'_0(a - \tfrac{1}{2}\omega) = 1 \\
f'_{\frac{1}{2}}(a) = 8 & f^{IV}_0(a) = 24 & f'''_0(a - \tfrac{1}{2}\omega) = 12 \\
f'''_{\frac{1}{2}}(a) = 24 & & f'''_0(a + \tfrac{1}{2}\omega) = 36 \\
f^{V}_{\frac{1}{2}}(a) = 0 & &
\end{array}$$

so wird

$$C_0 = +0{,}8000$$
$$C'_0 = -0{,}0373$$
$$C''_0 = -0{,}0274$$

und die summirten Reihen bilden sich so:

	Arg.	fa	$'f(a+\frac{1}{2}\omega)$	$''f(a)$	$'''f(a+\frac{1}{2}\omega)$
a	1	1		$-$ 0,037	
			$+$ 0,800		$-$ 0,027
$a+\omega$	2	16		$+$ 0,763	
			$+$ 16,800		$+$ 0,736
$a+2\omega$	3	81		$+$ 17,563	
			$+$ 97,800		$+$ 18,299
$a+3\omega$	4	256		$+$ 115,363	
			$+$ 353,800		$+$ 133,662
$a+4\omega$	5	625		$+$ 469,163	
			$+$ 978,800		$+$ 602,825
$a+5\omega$	6	1296		$+$ 1447,963	
etc.				etc.	

Wird

$$2) \quad x' = 1{,}5$$

angenommen, so sind die Werthe zu nehmen:

$$C_{\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{24} f'_0(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{17}{5760} f'''_0(a+\tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{367}{967680} f^{\mathrm{V}}_0(a+\tfrac{1}{2}\omega)$$

$$C'_{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{24} f(a+\omega) - \tfrac{17}{5760}\left(2f''_0(a+\omega) + f''_0(a)\right) + \tfrac{367}{967680}\left(3f^{\mathrm{IV}}_0(a+\omega) + 2f^{\mathrm{IV}}_0 a\right)$$

$$C''_{\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{8}\, 'f_0(a+\tfrac{1}{2}\omega) + \tfrac{7}{1920} f'_0(a+\tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{457}{967680} f'''_0(a+\tfrac{1}{2}\omega)$$

Da nun hier

$$\begin{array}{ll} f'_0(a+\frac{1}{2}\omega) = 15 & f\ (a+\omega) = 16 \\ f'''_0(a+\frac{1}{2}\omega) = 36 & f''_0(a) = 14 \\ f^{\mathrm{V}}_0(a+\frac{1}{2}\omega) = 0 & f''_0(a+\omega) = 50 \\ & f^{\mathrm{IV}}_0(a) = 24 \\ & f^{\mathrm{IV}}_0(a+\omega) = 24 \end{array}$$

und wenn man den Werth von $C_{\frac{1}{2}}$ an die Stelle von $'f_0(a+\frac{1}{2}\omega)$ setzt

$$C''_{\frac{1}{2}} = +\tfrac{17}{1920} f'_0(a+\tfrac{1}{2}\omega) - \tfrac{407}{483840} \cdot f'''_0(a+\tfrac{1}{2}\omega)$$

so werden die Werthe

$$C_{\frac{1}{2}} = -0{,}5188$$

$$C'_{\frac{1}{2}} = +0{,}3757$$

$$C''_{\frac{1}{2}} = +0{,}1025$$

und die summirten Reihen bilden sich für den Anfangswerth $x' = 1{,}5$ so:

	Arg.	$f(a)$	$'f_0(a+\frac{1}{2}\omega)$	$''f_0(a)$	$'''f_0(a+\frac{1}{2}\omega)$
a	1	1		+ 0,376	
			— 0,519		+ 0,103
$a+\omega$	2	16		— 0,143	
			+ 15,481		— 0,040
$a+2\omega$	3	81		+ 15,338	
			+ 96,481		+ 15,298
$a+3\omega$	4	256		+ 111,819	
			+ 353,481		+ 127,117
$a+4\omega$	5	625		+ 465,300	
			+ 978,481		+ 592,417
$a+5\omega$	6	1296		+ 1443,781	
etc.				etc.	

Aus beiden Tabellen werden sich die richtigen Werthe nach den Formeln I und II in (14) ergeben, die nach der Substitution der Zahlen werden:

für

$$1)\quad x = a + i\omega$$

$$\int f(x)dx = \omega\,\{'f_{\frac{1}{2}}(a+i\omega) - \tfrac{1}{12} f'_{\frac{1}{2}}(a+i\omega) + \tfrac{11}{720} f'''_{\frac{1}{2}}(a+i\omega) - \tfrac{191}{60480} f^{\mathrm{V}}_{\frac{1}{2}}(a+i\omega)$$

$$\int dx \int f(x)dx = \omega^2\{''f_0(a+i\omega) + \tfrac{1}{12} f(a+i\omega) - \tfrac{1}{240} f''_0(a+i\omega) + \tfrac{31}{60480} f^{\mathrm{IV}}_0(a+i\omega)$$

$$\int dx \int dx \int f(x)dx = \omega^3\{'''f_{\frac{1}{2}}(a+i\omega) + \tfrac{1}{240} f'_{\frac{1}{2}}(a+i\omega) - \tfrac{31}{30240} f'''_{\frac{1}{2}}(a+i\omega) \ldots\}$$

und für

$$2)\quad x = a + (i+\tfrac{1}{2})\omega$$

$$\int f(x)dx = \omega\,\{'f_0(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) + \tfrac{1}{24} f'_0(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) - \tfrac{17}{5760} f'''_0(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) + \tfrac{367}{967680} f^{\mathrm{V}}_0(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega)$$

$$\int dx \int f(x)dx = \omega^2\{''f_{\frac{1}{2}}(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) - \tfrac{1}{24} f_{\frac{1}{2}}(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) + \tfrac{17}{1920} f''_{\frac{1}{2}}(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) - \tfrac{367}{193536} f^{\mathrm{IV}}_{\frac{1}{2}}(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega)$$

$$\int dx \int dx \int f(x)dx = \omega^3\{'''f_0(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) - \tfrac{1}{8}\,'f_0(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) + \tfrac{7}{1920} f'_0(a+(i+\tfrac{1}{2})\omega) - \tfrac{457}{967680} f'''_0(a+i+\tfrac{1}{2})\omega)$$

Ueber die

Cotes'ischen Integrations-Faktoren.*)

Die Methode der mechanischen Quadratur, wie sie in dem Jahrbuche für 1862**) aus dem Taylor'schen Lehrsatze, oder früher aus der Lehre von der Interpolation abgeleitet wurde, ist für die Störungs-Rechnungen, bei denen die Resultate für eine längere Zeit hintereinander gefordert werden, und in denen stets neue für die folgenden Zeiten geltende Werthe sich an das frühere anschliefsen sollen, unstreitig die bequemste und vortheilhafteste. Indessen wird bei andern Aufgaben, wie z. B. in der Meteorologie, die Integration nicht immer in fortlaufendem Zusammenhange verlangt, sondern auf bestimmte Zeitabschnitte beschränkt, so dafs nicht wie bei den Störungen die Anfangsgrenze allein fest gegeben ist und die Endgrenze immer weiter und weiter hinausgerückt wird, sondern beide Grenzen zunächst ganz bestimmt sind.

*) Anmerkung. Die hier von Encke nach Gaufs vorgetragene Newton-Cotes'ische Integrationsmethode hat in Heine's Handbuch der Kugelfunktionen Band II eine sehr eingehende und weiterführende Darstellung gefunden. Siehe auch den Aufsatz des Herrn Christoffel im 55. Bande des Journals f. Mathematik.

**) Diese Ausgabe Band I pag. 61.

Bei fortgesetzten Untersuchungen kann dann allerdings die erste Endgrenze als neue Anfangsgrenze bei einem folgenden Integrale angesetzt, und so ein Ganzes für längere Zeitintervalle gebildet werden, zunächst aber werden doch nur bestimmte Abschnitte in das Auge gefaſst. In solchen Fällen ist es weit bequemer, die unmittelbar berechneten Differential-Quotienten zum Grunde zu legen und nicht die Differenzen derselben zu Hülfe zu rufen. Dieses führt auf die sogenannten Cotes'ischen Integrations-Coefficienten.

Newton hat (wie Jacobi in Crelle Journ. I. p. 302 bemerkt) in den Principiis eine Methode angegeben, wie man durch eine Anzahl gegebener Punkte eine parabolische Curve legen könne. Diese Aufgabe erscheint analytisch als Integrations-Problem, aus mehreren Gliedern einer Reihe das allgemeine zu finden. Newton hat hiervon eine Anwendung auf die Quadraturen gemacht, und hat ferner von jenem Integrations-Problem und seiner Anwendung auf die Quadraturen in einer kleinen Schrift gehandelt, welche *Methodus differentialis* betitelt ist, und zuerst der Amsterdamer Ausgabe seiner *Principia* vom Jahre 1723 nebst andern Abhandlungen angehängt gefunden wird. Hier räth er unter anderm, zum Behuf der leichteren Berechnung der Integrale, für jede Zahl der berechneten Ordinaten, deren Intervalle er gleich groſs annimmt, Tafeln anzufertigen, von denen er auch selbst einen Anfang giebt, und die hernach Roger Cotes in seiner *Harmonia mensurarum* fortgesetzt hat.

In den Göttinger Commentarien (*Comment. Götting. Recentiores Vol. III. Class. mathem.* p. 39 sqq.) zeigt aber Gauſs, daſs man durch schickliche Wahl der Abscissen, für welche die Ordinaten berechnet werden, den Grad der Näherung auf das Doppelte treiben kann; und da diese Bestimmung unabhängig von der Natur der zu quadrirenden Curven geschieht, so ist es möglich, auch nach der so vervollkommneten Methode Tafeln zu verfertigen, von denen Gauſs eine Probe gegeben hat. Gauſs gelangt zu seinen Resultaten auf dem Wege einer schwierigen Induktion, die durch die sogenannte Kästner'sche Methode, wenn etwas für die Zahl n

gilt, es auch für die Zahl $n+1$ zu erweisen, zur Allgemeinheit erhoben werden kann. Ein direkter Beweis war also sehr zu wünschen und die grofse Einfachheit und Eleganz der Gaufsischen Resultate liefs einen einfachen Weg vermuthen. Jacobi in Crelle Journ. I pag. 301 u. folg., fand einen solchen so einfachen, und man möchte sagen so direkt aus der Natur des Problems abgeleiteten, dafs man ihn unstreitig als den wahren ansehen mufs.

Gaufs hatte wahrscheinlich gröfsere Hoffnungen auf diese Art der Integration gebaut, als er später verwirklicht fand. Er beschäftigte sich zu der Zeit, als ich unter ihm studirte, mit seiner Abhandlung, von der die einzelnen Bogen mir zur Abschrift mitgetheilt wurden, die ich noch als ein werthvolles Andenken bewahre. Die Berechnung der Pallas-Störungen, die ebenfalls in dieser Zeit mit grofsem Eifer von ihm verfolgt wurde, mochte mit diesen Untersuchungen in enger Verbindung stehen. Später hat er, so viel mir bekannt, keinen Gebrauch davon gemacht, wovon der Grund nicht schwer nachzuweisen sein dürfte, und überhaupt möchte bei periodischen, gröfsere Zeiträume umfassenden Funktionen eine Anwendung dieser Methode höchst selten vorkommen. Nur bei der Berechnung des numerischen Werthes eines einzelnen ganz bestimmten Integrals, dessen Ermittelung auf anderem Wege allzu beschwerlich ist, wird man eine zweckmäfsige Anwendung machen können, wie Gaufs es bei seiner Abhandlung in Bezug auf das Integral

$$\int \frac{dx}{\lg x}$$

von $x = 100000$ bis $x = 200000$ als Beispiel ausgeführt hat.

Die schwierige Induktion, durch welche Gaufs zu seinem Resultate gelangt, zeigt sich auch in dem ersten Theile, worin er die rein Cotes'ischen Ausdrücke für solche Ordinaten entwickelt, welche gleichen Intervallen der Abscissen angehören, und besonders da, wo er die Grenze der Genauigkeit bestimmt, die bei jeder angenommenen Zahl von Abscissen zu erwarten ist, wobei sich das auffallende Resultat ergiebt, dafs, wenngleich mit der vermehrten Anzahl der Ordinaten die Genauigkeit des erhaltenen Werthes immer zunimmt, doch es allgemein genommen immer vortheilhafter ist, für die Anzahl der Intervalle zwischen den Abscissen eine gerade Zahl zu nehmen als eine ungerade. Denn die Genauigkeit, womit man das Integral erhält, nimmt nur wenig zu, wenn man von einer geraden Anzahl der Intervalle zur nächstfolgenden ungeraden Anzahl übergeht; der Grad der Annäherung bleibt derselbe, nur der Coefficient des Irrthums wird verringert; während bei dem Uebergange von einer ungeraden Anzahl von Intervallen zur nächstfolgenden geraden, der zu befürchtende Irrthum sogleich um zwei Ordnungen sinkt. Diese Eigenschaft, die wahrscheinlich bei Gaufs der erste Anlafs gewesen ist, durch eine andere Vertheilung der Intervalle zu versuchen, die Genauigkeit auf das gröfstmöglichste Maafs zu treiben, ist allerdings von Gaufs, wie sich von selbst bei diesem Meister versteht, strenge erwiesen, gewährt aber nicht die Anschaulichkeit, die man bei dem an sich einfachen Satze wünschen möchte, sowie auch das Verhältnifs der einzelnen Coefficienten bei der Entwickelung des Fehlers nach einer Reihe, welche nach ganzen Potenzen der Variabeln fortgeht, bei Gaufs durch blofse Induktion gefunden und nachher erst erwiesen, meinem Gefühle nach etwas fremdartig erscheint, was, sowie man den Jacobi'schen strengen Beweis auf diesen einfachen Fall der gleichen Intervalle anwendet, von selbst wegfällt. Ich will deshalb hier den Beweis von Jacobi auf die Ermittelung des Fehlers, den man bei den von Cotes behandelten gleichen Intervallen im Integrale zu befürchten hat, anwenden.

Das Integral

$$\int y\,dx$$

sei zwischen den Grenzen $x=0$ bis $x=1$ zu finden. Der analytische Ausdruck der Funktion von x, welche hier als y aufgeführt wird, sei entweder unbekannt, oder der Ausdruck $y=f(x)$ zu unbequem und verwickelt, um damit die Integration auszuführen. Man kenne aber den numerischen Werth von y für $n+1$ Punkte, welche in der Regel wenigstens zwischen 0 und 1 liegen, so dafs für

$$\begin{array}{ll} x = a & y = f(a) \\ x = a_1 & y = f(a_1) \\ x = a_2 & y = f(a_2) \\ \vdots & \vdots \\ x = a_n & y = f(a_n) \end{array}$$

den numerischen Werthen nach gegeben sind, so wird sich nach der Interpolationsformel von Lagrange eine Form finden lassen, welche den einzigen hier bekannten Bedingungen genügt, dafs dem Werthe von $x = a_n$ der Werth $y = f(a_n)$ entspricht. Diese Form, in welcher y in eine Reihe nach den ganzen Potenzen von x entwickelt erscheint, wird wegen der $n+1$ Werthe $f(a)$, die Coefficienten der Reihe von x^0 bis x^n strenge finden lassen, so dafs der Ausdruck von y in dieser Form ganz vollständig und genau wird, wenn die Reihenentwickelung von y nur bis zur n^{ten} Potenz von x geht, oder innerhalb dieser Potenz aufhört.

Bezeichnet man das Produkt

$$(1) \qquad (x-a)\,(x-a_1)\,(x-a_2)\ldots.(x-a_n)$$

durch $\varphi(x)$, so wird sich die Lagrange'sche Interpolationsformel auch so ableiten lassen, dafs man den Bruch

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

in die partiellen Brüche auflöst, deren jeder einen der Faktoren $x-a$ etc. bis $x-a_n$ zum Nenner hat. Da nach der Natur der Aufgabe hier keine gleichen Faktoren vorkommen können, so wird der Zähler jedes dieser partiellen Brüche nach den Vorschriften der Differentialrechnung geschrieben werden können:

$$\frac{f(a_n)}{\varphi'(a_n)}$$

für den Nenner $x-a_n$, wenn man unter $\varphi'(a_n)$ den Werth des ersten Differential-Coefficienten $\varphi'(x) = \dfrac{d\varphi(x)}{dx}$ für den Werth $x = a_n$ versteht. Es wird damit der Ausdruck

$$(2)\quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(a)}{\varphi'(a)(x-a)} + \frac{f(a_1)}{\varphi'(a_1)(x-a_1)} + \ldots + \frac{f(a_n)}{\varphi'(a_n)(x-a_n)}$$

und folglich

$$(3)\quad f(x) = \frac{f(a)}{x-a} \cdot \frac{\varphi(x)}{\varphi'(a)} + \frac{f(a_1)}{(x-a_1)} \cdot \frac{\varphi(x)}{\varphi'(a_1)} \ldots + \frac{f(a_n)}{(x-a_n)} \cdot \frac{\varphi(x)}{\varphi'(a_n)}$$

welches die Lagrange'sche Interpolationsformel ist. Der Zahlencoefficient, mit dem jedes $f(a_m)$ multiplicirt wird, wenn m eine von den Zahlen 0 bis n ist, wird für den Werth a_m von x nothwendig $= 1$, für jeden andern Werth aber $= 0$, weil

$$\frac{\varphi(x)}{x-a_m} = (x-a)(x-a_1)\ldots(x-a_{m-1})(x-a_{m+1})\ldots(x-a_n)$$

und folglich

$$\frac{\varphi(a_m)}{(x-a_m)} = (a_m-a)(a_m-a_1)\ldots(a_m-a_{m-1})(a_m-a_{m+1})\ldots(a_m-a_n)$$

oder $= \varphi'(a_m)$ ist, für jeden der andern m Werthe aufser a_m aber einen Faktor $= 0$ enthält.

Aus der Entwickelung der Gleichung (2), wenn man die rechte Seite unter einen gemeinschaftlichen Nenner bringt, geht aber hervor, dafs nur dann die Gleichung strenge richtig sein kann, wenn $f(x)$ eine Funktion von x ist, die in Bezug auf x mindestens um eine Ordnung niedriger ist als $\varphi(x)$. Die Lagrange'sche Interpolationsformel wird strenge für $f(x)$ nurgelten, wenn $f(x)$ nicht über die n^{te} Ordnung in Bezug auf x steigt, da $\varphi(x)$ bis zur $n+1^{\text{ten}}$ geht, eine Beschränkung, die eben so erhalten wird, wenn man die Lagrange'sche Interpolationsformel aus der Entwickelung ihrer einzelnen Glieder nach dem Taylor'schen Lehrsatze herleitet.

Denkt man sich daher $f(x)$ in eine Reihe nach steigenden Potenzen von x entwickelt und geht dabei über die n^{te} Potenz hinaus, oder nimmt man

$$(4)\quad f(x) = K + K_1 x + K_2 x^2 \ldots K_n x^n + K_{n+1} x^{n+1} + K_{n+2} x^{n+2} \ldots$$

so wird die Gleichung (2) nur die Glieder bis zu x^n geben können und der volle Ausdruck von y wird erst erhalten, wenn die höheren Potenzen besonders hinzugefügt werden. Dividirt man deshalb $f(x)$

durch $\varphi(x)$, so daſs man die ganze rationale Funktion von x, welche in $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ enthalten ist, besonders erhält, und fügt den noch übrig bleibenden unechten Bruch hinzu, so ist die strenge Form von y vollständig

$$y = V\varphi(x) + U$$

wo V eine ganze rationale Funktion von x ist, welche aus den in y enthaltenen Gliedern von x^{n+1} an entstanden ist. Der erste Theil $V\varphi(x)$ wird in allen den Fällen, in welchen man einen der Werthe $x = a$ bis zu $x = a_n$ numerisch substituirt, mit $\varphi(x)$ selbst $= 0$, und die Lagrange'sche Interpolationsformel giebt, auch wenn die Entwickelung von y über die n^{te} Potenz hinausgeht, immer nur den Werth der aus

$$y = U$$

allein folgen würde. Der Fehler der Lagrange'schen Interpolationsformel und überhaupt aller Interpolationen, welche von einer nach steigenden ganzen Potenzen der Variabeln geordneten Form der Entwickelung ausgehen, ist folglich

$$= V\varphi(x)$$

und er tritt in allen den Fällen ein, in welchen ein Werth von x angewandt wird, der nicht zu den $n+1$ Werthen a bis a_n gehört.

Einen bequemen analytischen Ausdruck, der zugleich eine leichte Uebersicht für die Schätzung des Fehlers gewährt, erhält man, wenn man $\frac{1}{\varphi(x)}$ in eine Reihe nach fallenden ganzen Potenzen von x entwickelt. Es sei

$$(5) \qquad \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{x^{n+1}} + \frac{q_1}{x^{n+2}} + \frac{q_2}{x^{n+3}} + \dots .$$

Bildet man dann das Produkt $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ und nimmt aus demselben nur die Glieder, welche ganze positive Potenzen von x, die Null mit eingeschlossen, enthalten, so werden diese die Gröſse V geben. Nach der obigen Form der Entwickelung von $f(x)$

$$f(x) = K + K_1 x + K_2 x^2 \dots + K_n x^n + K_{n+1} x^{n+1} \dots$$

wird folglich in $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$

$$\begin{aligned} V = K_{n+1} &+ (x + q_1) K_{n+2} \\ &+ (x^2 + q_1 x + q_2) K_{n+3} \\ &+ (x^3 + q_1 x^2 + q_2 x + q_3) K_{n+4} \dots \end{aligned}$$

Der Fehler der Lagrange'schen Interpolationsformel wird deshalb bei der Entwickelung nach ganzen steigenden Potenzen von x

$$\begin{aligned} V\varphi(x) = \quad & K_{n+1} \varphi(x) \\ &+ (x + q_1) \varphi(x) K_{n+2} \\ &+ (x^2 + q_1 x + q_2) \varphi(x) K_{n+3} \\ &+ (x^3 + q_1 x^2 + q_2 x + q_3) \varphi(x) K_{n+4} + \dots \end{aligned}$$

Bei der Anwendung auf das Integral $\int_0^1 y\,dx$, wenn man die Lagrange'sche Formel als den allgemeinen Ausdruck von y ansieht, wird man deshalb den Fehler

$$\int_0^1 V\varphi(x)\,dx$$

begehen und dieser sich aus den Integralen

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx, \qquad \int_0^1 x\,\varphi(x)\,dx, \qquad \int_0^1 x^2\,\varphi(x)\,dx \text{ etc.}$$

zusammensetzen und berechnen lassen. Diese Betrachtungen gelten ganz allgemein für jede Annahme, welche man bei der Anordnung der Werthe $a\, a_1\, a_2 \dots$ für x hat eintreten lassen.

Betrachtet man zuerst den Fall, der bei den Cotes'ischen Formeln stattfindet, dafs die Werthe von a den Anfangswerth und den Endwerth von 0 und 1, und aufserdem die in gleichen Intervallen zwischen beiden Grenzen liegenden Werthe begreifen, oder dafs

$$a = 0,\ a_1 = \frac{1}{n},\ a_2 = \frac{2}{n} \dots\dots a_{n-1} = \frac{n-1}{n},\ a_n = 1$$

wenn n die Anzahl der Intervalle ist, so kann man durch die Sätze über die Summen der Potenzen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung, die Entwickelung von $\varphi(x)$ durch die Zahl n ausdrücken. Es sind nämlich die Werthe von a, die hier angenommen werden, die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x)=0$. Wäre also

$$X = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} \ldots\ldots = 0$$

so hat man durch Differentiation

$$\frac{d \lg X}{dx} = \frac{m x^{m-1} + (m-1) p_1 x^{m-2} + (m-2) p_2 x^{m-3} \ldots\ldots}{x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} \ldots\ldots}$$
$$= \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} \ldots\ldots$$

und wenn man die partiellen Brüche in Reihen entwickelt

$$\begin{aligned} \frac{d \lg X}{dx} &= x^{-1} + a\ x^{-2} + a^2 x^{-3} + a^3 x^{-4} \ldots\ldots \\ &+ x^{-1} + a_1 x^{-2} + a_1^2 x^{-3} + a_1^3 x^{-4} \ldots\ldots \\ &+ x^{-1} + a_2 x^{-2} + a_2^2 x^{-3} + a_2^3 x^{-4} \ldots\ldots \\ &\quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

oder wenn man die Summen der Potenzen sämmtlicher Wurzeln je nach dem Grade der Potenz, zu welcher jede Wurzel erhoben ist, mit $\int(1)$, $\int(2)$, $\int(3)$, etc. bezeichnet

$$\frac{d \lg X}{dx} = m x^{-1} + \int(1)\, x^{-2} + \int(2)\, x^{-3} + \int(3)\, x^{-4} + \ldots\ldots$$

Multiplicirt man sowohl die erste Form von $\frac{d \lg X}{dx}$ als auch diese letzte mit X und entwickelt das Produkt in die wirklichen Reihen nach x, so giebt die Vergleichung der Coefficienten derselben Potenz die Gleichungen

$$\begin{aligned} m &= m \\ (m-1)\, p_1 &= \int(1) + m p_1 \\ (m-2)\, p_2 &= \int(2) + p_1 \int(1) + m p_2 \ \text{ etc.} \end{aligned}$$

oder einfacher

$$\begin{aligned} &\int(1) + p_1 = 0 \\ &\int(2) + p_1 \int(1) + 2 p_2 = 0 \\ &\int(3) + p_1 \int(2) + p_2 \int(1)\ 3 p_3 = 0 \ \text{ etc.} \end{aligned}$$

Liegen die sämmtlichen Wurzeln in gleichen Intervallen zwischen 0 und 1, so hängen die $\int(1)$, $\int(2)$, $\int(3)$ von den Summen der Potenzen der natürlichen Zahlen ab, für welche man bei den Werthen

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots\ldots \frac{n-1}{n}, 1$$

die Ausdrücke hat

$$\begin{aligned}
\int(1) &= \tfrac{1}{2}(n+1) \\
\int(2) &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} \\
\int(3) &= \frac{(n+1)^2}{4n} \\
\int(4) &= \frac{(n+1)\ (2n+1)\ (3n^2+3n+1)}{30n^3} \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

so dafs man erhält

$$\begin{aligned}
X = \varphi(x) = x^{n+1} &- \tfrac{1}{2}(n+1)\,x^n \\
&+ \frac{(n-1)\ (n+1)\ (3n+2)}{24n}\,x^{n-1} \\
&- \frac{(n-2)(n-1)(n+1)^2}{48n}\,x^{n-2} \\
&+ \frac{(n-3)(n-2)(n-1)(n+1)\left\{15n^2(n+1)-2(5n+4)\right\}}{5760n^3}\,x^{n-3} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

und durch Umkehrung $\frac{1}{\varphi(x)}$ ableiten könnte.

Noch einfacher leitet man aber aus $\frac{1}{x}$ auf dieselbe Weise, wenn man die oben angenommene Form der Entwickelung von $\frac{1}{\varphi(x)}$ beibehält, die Gleichungen ab:

$$\begin{aligned}
&\int(1) = q_1 \\
&\int(2) + q_1 \int_1 = 2q_2 \\
&\int(3) + q_1\int(2) + q_2\int(1) = 3q_3 \\
&\int(4) + q_1\int(3) + q_2\int(2) + q_3\int(1) = 4q_4 \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

woraus man sogleich erhält

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{x^{n+1}} + \tfrac{1}{2}(n+1)\frac{1}{x^{n+2}}$$
$$+ \frac{(n+2)(n+1)(3n+1)}{24n}\frac{1}{x^{n+3}}$$
$$+ \frac{(n+3)(n+2)(n+1)^2}{48n}\frac{1}{x^{n+4}}$$
$$+ \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)\{15n(n+1)^2 - 2(5n+1)\}}{5760n^3}\frac{1}{x^{n+5}}$$
etc.

Man hat demnach bei n gleichen Intervallen der Abscissen zwischen 0 und 1 die Werthe

$$(6) \qquad \begin{aligned} q_1 &= \tfrac{1}{2}(n+1) \\ q_2 &= \frac{(n+2)(n+1)(3n+1)}{24n} \\ q_3 &= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)^2}{48n} \\ q_4 &= \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)\{15n(n+1)^2 - 2(5n+1)\}}{5760n^3} \end{aligned}$$

und der Fehler des Werthes, welchen die Cotes'ischen Integrationsformeln geben, wird bei dem Integrale $\int_0^1 y\,dx$, nach dem oben angeführten Werthe von $V\varphi(x)$

$$\{K_{n+1} + q_1 K_{n+2} + q_2 K_{n+3} \ldots\} \int_0^1 \varphi(x)\,dx$$
$$+ \{K_{n+2} + q_1 K_{n+3} + q_2 K_{n+4} \ldots\} \int_0^1 x\,\varphi(x)\,dx$$
$$+ \{K_{n+3} + q_1 K_{n+4} \ldots\} \int_0^1 x^2\,\varphi(x)\,dx \text{ etc.}$$

Bei der symmetrischen Vertheilung der Werthe von $x = 0$ bis $x = 1$, fällt es von selbst in die Augen, dafs die Ausdrücke einfacher werden, wenn man den Anfangspunkt in die Mitte zwischen beide Grenzen verlegt. Führt man deshalb als neue Variable die Gröfse w ein, so dafs

$$(7) \qquad x = w + \tfrac{1}{2}$$

so werden die Grenzen für w sich verwandeln in $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ und das Integral

$$\int_0^1 y\,dx \text{ wird } \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} y\,dw$$

die Funktion $\varphi(x)$ wird übergehen in

$$\varphi(w) = (w+\tfrac{1}{2})\left(w+\frac{n-2}{2n}\right)\left(w+\frac{n-4}{2n}\right)\ldots\left(w-\frac{n-4}{2n}\right)\left(w-\frac{n-2}{2n}\right)(w-\tfrac{1}{2})$$

und es wird damit

1) für $n =$ einer geraden Zahl

$$(8)\quad \varphi(w) = (w^2-\tfrac{1}{4})\left(w^2-\frac{(n-2)^2}{4n^2}\right)\left(w^2-\frac{(n-4)^2}{4n^2}\right)\ldots\left(w^2-\frac{4}{4n^2}\right)w$$

oder eine ungerade Funktion von w, und

2) für $n =$ einer ungeraden Zahl

$$(9)\quad \varphi(w) = (w^2-\tfrac{1}{4})\left(w^2-\frac{(n-2)^2}{4n^2}\right)\left(w^2-\frac{(n-4)^2}{4n^2}\right)\ldots\left(w^2-\frac{1}{4n^2}\right)$$

oder einer geraden Funktion von w.

Führt man hier ebenfalls die Summen der Potenzen der natürlichen Zahlen ein, so erhält man

$$(10)\quad \begin{aligned} \varphi(w) = w^{n+1} &- \frac{(n+1)(n+2)}{24n}\,w^{n-1} \\ &+ \frac{(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)(5n+12)}{5760n^3}\,w^{n-3}\;. \end{aligned}$$

Hauptsächlich kommt indessen hier in Betracht, dafs bei dem Integral nach w, die Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$, an Gröfse einander gleich und nur im Zeichen verschieden sind. Es folgt daraus, dafs

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \varphi(w)\,dw$$

jedesmal $=0$ wird, wenn $\varphi(w)$ eine ungerade Funktion von w ist, also wenn n eine gerade Zahl, und eben so werden die andern Integrale

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} w^2\varphi(w)\,dw,\ \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} w^4\varphi(w)\,dw$$

in diesem Falle ebenfalls gleich Null, so dafs die Glieder in dem Ausdrucke des Fehlers des ganzen Integrals, welche von solchen Ausdrücken abhängen, ebenfalls gleich Null werden, während die Integrale

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} w\,\varphi(w)\,dw,\ \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} w^3\,\varphi(w)\,dw \text{ etc.}$$

einen endlichen Werth behalten. Der entgegengesetzte Fall tritt ein, wenn n eine ungerade Zahl, also $\varphi(w)$ eine gerade Funktion und $\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \varphi(w)\,dw$ eine ungerade Funktion von w wird. Jedes Integral, in welchem $\varphi(w)$ mit einer geraden Potenz von w, die Null mit eingerechnet, multiplicirt unter dem Integralzeichen vorkommt, wird für n gerade $=$ Null und die davon abhängigen Glieder des Fehlers der Cotes'ischen Integration verschwinden, während die andern Glieder bleiben. Dagegen verschwinden bei n ungerade die Integrale, die unter dem Integralzeichen das Produkt einer ungeraden Potenz von w mit $\varphi(w)$ enthalten, und nur die andern Glieder in dem Ausdrucke des Fehlers der Cotes'ischen Formeln bleiben.

Hieraus folgen in Verbindung mit den Werthen von q, die oben angegeben sind, die Sätze, welche Gaufs aus der Induktion gefunden hat. Er bemerkt nämlich, nachdem er das Verzeichnifs der Cotes'ischen Werthe und der bei ihnen zu befürchtenden Fehler gegeben hat, dafs, wenn man den zu befürchtenden Fehler durch

$$k_n K_n + k_{n+1} K_{n+1} + k_{n+2} K_{n+2} \ldots$$

bezeichnet, überall bei n gerade $k_{n+1} = 0$ und aufserdem $k_{n+3} = \frac{n+3}{2}\, k_{n+2}$ gefunden wird, bei n ungerade aber $k_{n+2} = \frac{n+2}{2}\, k_{n+1}$, und beweist es aus dem Ausdrucke des Fehlers und der Entwickelung nach einer andern Variabeln, die mit dem hier eingeführten w übereinkommt.

Am einfachsten erhält man diese Sätze, wenn man den Fehler der Lagrange'schen Interpolationsformel wegen der Vernachlässigung der höheren Potenzen die über die n^{te} hinausgehen, das oben angeführte $V\varphi(x)$, auf die Variable w bringt; der obige Ausdruck war

$$\begin{aligned} V\varphi(x) = & K_{n+1}\,\varphi(x) \\ & + (x+q_1)\,K_{n+2}\,\varphi(x) \\ & + (x^2+q_1\,x+q_2)\,K_{n+3}\,\varphi(x) \\ & \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Führt man hier statt $\varphi(x)$ die Funktion $\varphi(w)$ ein, und statt $x \ldots . w+\frac{1}{2}$, substituirt auch die Werthe

$$q_1 = \tfrac{1}{2}(n+1) \qquad q_2 = \frac{(n+2)(n+1)(3n+1)}{24n}$$

so wird man die Form erhalten

$$\begin{aligned} V\varphi(x) = & \left\{K_{n+1} + \frac{n+2}{2}\,K_{n+2} + \frac{(n+2)(3n^2+10n+1)}{24n}\,K_{n+3}\right\}\varphi(w) \\ & + \left(K_{n+2} + \frac{n+3}{2}\,K_{n+3}\right) w\,\varphi(w) \\ & + (K_{n+3} \ldots .)\, w^2\,\varphi(w). \end{aligned}$$

Der Fehler der Cotes'ischen Integration ist aber

$$\int_0^1 V\,\varphi(x)\,dx$$

oder nach dem eben gegebenen Ausdrucke von $\varphi(x)$ und w

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} V\,\varphi(w)\,dw$$

Hieraus ergiebt sich sogleich, dafs

1) für n gerade

wo also

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \varphi(w)\,dw = 0 \qquad \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} w^2\,\varphi(w)\,dw = 0$$

der Ausdruck des Fehlers ist

$$= (K_{n+2} + \tfrac{1}{2}(n+3)\,K_{n+3} \ldots .) \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} w\,\varphi(w)\,dw$$

und k_{n+1} immer gleich Null ist.

2) Für n ungerade

werden wegen $$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} w\,\varphi(w)\,dw = 0$$

die ersten Glieder des Fehlers

$$\left\{K_{n+1} + \tfrac{1}{2}(n+2)\,K_{n+2}\right\} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \varphi(w)\,dw$$

Es sind deshalb, ganz wie Gaufs es gefunden und bewiesen hat, bei der Form des Fehlers

$$k_{n+1}\,K_{n+1} + k_{n+2}\,K_{n+2} + k_{n+3}\,K_{n+3}\ldots\ldots$$

die ersten zwei Glieder

1) bei n gerade

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} w\,\varphi(w)\,dw \cdot K_{n+2} + \tfrac{1}{2}(n+3) \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} w\,\varphi(w)\,dw \cdot K_{n+3}\ldots\ldots$$

2) bei n ungerade

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \varphi(w)\,dw \cdot K_{n+1} + \tfrac{1}{2}(n+2) \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \varphi(w)\,dw \cdot K_{n+2}$$

oder im ersten Falle $\quad k_{n+3} = \frac{1}{2}(n+3)\,k_{n+2}$

im zweiten $\quad k_{n+2} = \frac{1}{2}(n+2)\,k_{n+1}$

Cotes hat den Ausdruck der Integrations-Coefficienten bis zu $n = 10$ berechnet, und Gaufs in seiner Abhandlung eben so weit die Coefficienten bei der Entwickelung des Fehlers bis k_{n+2} und k_{n+3} für n gerade, und k_{n+1} und k_{n+2} für n ungerade hinzugefügt. Durch den obigen Ausdruck von φw kann man die Werthe dieser letzten Coefficienten allgemein als Funktion von n geben bis zu $n = 4$, da $\varphi(x)$ und $\varphi(w)$ bis zu w^{n-3} entwickelt sind. Die allgemeine Form wird bei der weiteren Fortsetzung immer weitläuftiger, so dafs bei dem geringen Interesse, welches sie hat, eine weitere Entwickelung unnöthig sein würde. Denn da

$$\varphi(w) = w^{n+1} - \frac{(n+1)(n+2)}{24n} w^{n-1}$$
$$+ \frac{(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)(5n+12)}{5760n^3} w^{n-3} \ldots.$$

$$\frac{1}{\varphi(w)} = \frac{1}{w^{n+1}} + \frac{(n+2)(n+1)}{24n} \frac{1}{w^{n+3}}$$
$$+ \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)(5n-2)}{5760n^3} \frac{1}{w^{n+5}}$$

so wird für n ungerade

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \varphi(w)\, dw = \frac{1}{2^{n+1}(n+2)} - \frac{(n+1)(n+2)}{24n^2} \frac{1}{2^{n-1}}$$
$$+ \frac{(n-1)(n+1)(n+2)(5n+12)}{5760\, n^3} \frac{1}{2^{n-3}}$$

und für n gerade

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} w\varphi(w) dw = \frac{1}{(n+3)} \cdot \frac{1}{2^{n+2}} - \frac{(n+2)}{24n} \cdot \frac{1}{2^n}$$
$$+ \frac{(n-2)(n+1)(n+2)(5n+12)}{5760n^3} \frac{1}{2^{n-2}}$$

Man erhält damit für

$$n = 1 \;\; k_2 = -\tfrac{1}{6}, \quad k_3 = -\tfrac{1}{4}$$
$$n = 2 \;\; k_3 = 0 \quad k_4 = -\tfrac{1}{120}, \quad k_6 = -\tfrac{1}{48}$$
$$n = 3 \;\; k_4 = -\tfrac{1}{270}, \quad k_5 = -\tfrac{1}{108}$$
$$n = 4 \;\; k_5 = 0 \quad k_6 = -\tfrac{1}{2688} \quad k_7 = -\tfrac{1}{768}$$

für $n = 5$ wird man für φw den Ausdruck haben

$$(w^2 - \tfrac{25}{100})(w^2 - \tfrac{9}{100})(w^2 - \tfrac{1}{100})$$

oder $$\varphi(w) = w^6 - \tfrac{35}{100} w^4 + \tfrac{259}{10000} w^2 - \tfrac{9}{40000}.$$

und also für $\int \varphi(w)\, dw$ den Ausdruck

$$\int \varphi(w)\, dw = \tfrac{1}{7} w^7 - \tfrac{7}{100} w^5 + \tfrac{259}{30000} w^3 - \tfrac{9}{40000} w$$

Für die Grenzen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ werden diese vier Glieder

$$= \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^6} - \frac{7}{100} \frac{1}{2^4} + \frac{259}{30000} \frac{1}{2^2} - \frac{9}{40000}$$

von denen die drei ersten in der obigen allgemeinen Form enthalten sind, das vierte eine Entwickelung von $\varphi(w)$ bis zu w^{n-5} erfordert haben würde. Die ganze Summe giebt für $n = 5$

$$k_6 = -\tfrac{11}{32500} \text{ und damit } k_7 = -\tfrac{11}{15000}.$$

In ganz ähnlicher Weise wird man bloſs durch wirkliche Entwickelung von $\varphi(w)$ nach den Zahlenwerthen die Fehler-Coefficienten bis zu $n = 10$ ohne allzu groſse Mühe gleich finden können. Alle ohne Ausnahme haben das Vorzeichen Minus. Die Tafel der Cotesi'schen Integrations-Faktoren, nebst den dazu gehörigen Fehler-Coefficienten, erlaube ich mir hier nach Gauſs vollständig herzusetzen, da sie selten so gefunden wird. Die Berechnung der Integrations-Faktoren, die mit R, R', R'', ... $R^{(n)}$ bezeichnet werden mögen, so daſs

$$11) \qquad \int_0^1 y\,dx = R f(a) + R' f(a_1) + R'' f(a_2) \ldots . R^{(n)} f(a_n),$$

wird sich, wie es auch bei Gauſs angegeben wird, am einfachsten machen, wenn man $\frac{\varphi(x)}{x - a_m}$ für alle Zahlen $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \ldots . 1$ gleich m gesetzt, wirklich durch Multiplikation entwickelt und numerisch integrirt. Sei

$$\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{x - a_m}\,dx = X_m$$

und der numerische Werth von $\frac{\varphi(x)}{x - a_m}$ für $x = a_m$, der am leichtesten aus dem Produkt

$$(a_m - a)(a_m - a_1)(a_m - a_2) \ldots . (a_m - a_{m-1})(a_m - a_{m+1}) \ldots . (a_m - a_n)$$

gefunden wird, oder was dasselbe ist

$$\varphi'(a_m) = M_m$$

so wird $R^{(m)} = \frac{X_m}{M_m}$. Auch kann der einfacheren Bezeichnung wegen immer der Werth der Integrations-Faktoren, die symmetrisch gleich weit vom Anfang oder Ende liegen, zusammen angegeben werden, da bei den Annahmen für die Intervalle nach Cotes immer

$$R^{(m)} = R^{(n-m)}$$

sein mufs, was Gaufs durch Einführung einer dem w analogen neuen Variabeln beweist.

Tafel der Cotes'ischen Integrations-Faktoren und der Fehler-Coefficienten des Integrals nach Gaufs.

$$n = 1$$

$R = R' = \frac{1}{2}$

$k_2 = -\frac{1}{6} \qquad k_3 = -\frac{1}{4}.$

$$n = 2$$

$R = R'' = \frac{1}{6}, \qquad R' = \frac{2}{3}$

$k_3 = 0 \qquad k_4 = -\frac{1}{120}, \qquad k_5 = -\frac{1}{48}.$

$$n = 3$$

$R = R''' = \frac{1}{8}, \qquad R' = R'' = \frac{3}{8}$

$k_4 = -\frac{1}{270}, \qquad k_5 = -\frac{1}{108}.$

$$n = 4$$

$R = R^{IV} = \frac{7}{90}, \qquad R' = R''' = \frac{16}{45}, \qquad R'' = \frac{2}{15}$

$k_5 = 0 \qquad k_6 = -\frac{1}{2688}, \qquad k_7 = -\frac{1}{768}.$

$$n = 5$$

$R = R^{V} = \frac{19}{288}, \qquad R' = R^{IV} = \frac{25}{96}, \qquad R'' = R''' = \frac{25}{144}$

$k_6 = -\frac{11}{52500}, \qquad k_7 = -\frac{11}{15000}.$

$$n = 6$$

$R = R^{VI} = \frac{41}{840}, \qquad R' = R^{V} = \frac{9}{35}, \qquad R'' - R^{IV} = \frac{9}{280}, \qquad R''' = \frac{34}{105}$

$k_7 = 0 \qquad k_8 = -\frac{1}{38880}, \qquad k_9 = -\frac{1}{8640}.$

$$n = 7$$

$R = R^{VII} = \frac{751}{17280}, \qquad R' = R^{VI} = \frac{3577}{17280}, \qquad R'' = R^{V} = \frac{49}{640}$

$R''' = R^{VI} = \frac{2989}{17280}$

$k_8 = -\frac{167}{10588410}, \qquad k_9 = -\frac{167}{2352980}.$

$$n=8$$

$$R=R^{\mathrm{VIII}}=\tfrac{989}{28350},\qquad R'=R^{\mathrm{VII}}=\tfrac{2944}{14175},\qquad R''=R^{\mathrm{VI}}=-\tfrac{464}{14175},$$

$$R'''=R^{\mathrm{V}}=\tfrac{5248}{14175},\qquad R^{\mathrm{IV}}=-\tfrac{454}{2835}$$

$$k_9=0\qquad k_{10}=-\tfrac{37}{17301504},\qquad k_{11}=-\tfrac{37}{3145728}.$$

$$n=9$$

$$R=R^{\mathrm{IX}}=\tfrac{2857}{89600},\qquad R'=R^{\mathrm{VIII}}=\tfrac{15741}{89600},\qquad R''=R^{\mathrm{VII}}=\tfrac{27}{2840},$$

$$R'''=R^{\mathrm{VI}}=\tfrac{1209}{5900},\qquad R^{\mathrm{IV}}=R^{\mathrm{V}}=\tfrac{2989}{44800}$$

$$k_{10}=-\tfrac{865}{6313351908},\qquad k_{11}=-\tfrac{865}{114791256}.$$

$$n=10$$

$$R=R^{\mathrm{X}}=\tfrac{16067}{598752},\qquad R'=R^{\mathrm{IX}}=\tfrac{26575}{149688},\qquad R''=R^{\mathrm{VIII}}=-\tfrac{16175}{199884},$$

$$R'''=R^{\mathrm{VII}}=\tfrac{5675}{12474},\qquad R^{\mathrm{IV}}=R^{\mathrm{VI}}=-\tfrac{4825}{11088},\ R^{\mathrm{V}}=\tfrac{17807}{24948}$$

$$k_{11}=0\qquad k_{12}=-\tfrac{26927}{1365000000000},\qquad k_{13}=-\tfrac{26927}{21000000000}.$$

Wäre hiernach das Integral

$$X=\int_8^9\frac{dx}{x}$$

oder der hyperbolische Logarithmus von $\frac{9}{8}$ zu finden, so würde es auf die Form gebracht werden

$$\int_0^1\frac{dx}{8+x}$$

und für y den Werth $y=\dfrac{1}{8+x}$ geben. Es wäre folglich für

$$n=1$$

$$f(a)=\tfrac{1}{8},\qquad f(a_1)=\tfrac{1}{9}.$$

$$X=\tfrac{17}{144}$$

$$=0{,}11805\,\ldots\,.$$

$$n=2$$

$$f(a)=\tfrac{1}{8},\ f(a_1)=\tfrac{2}{17},\ f(a_2)=\tfrac{1}{9}.$$

$$X=\tfrac{865}{7344}$$

$$=0{,}11778\ 322\,\ldots\,.$$

$$n=3$$

$$f(a)=\tfrac{1}{8},\; f(a_1)=\tfrac{3}{25},\; f(a_2)=\tfrac{3}{62},\; f(a_3)=\tfrac{1}{9}.$$

$$X=\tfrac{22049}{187200}$$

$$=0{,}11778\;3119\ldots.$$

$$n=4$$

$$f(a)=\tfrac{1}{8},\; f(a_1)=\tfrac{4}{33},\; f(a_2)=\tfrac{2}{17},\; f(a_3)=\tfrac{4}{35},\; f(a_4)=\tfrac{1}{9}.$$

$$X=\tfrac{4905367}{42411600}$$

$$=0{,}11778\;30357\;73\ldots.$$

Die Entwickelung von $f(x)$ wird

$$f(x)=\frac{1}{8+x}=\frac{1}{8}-\frac{1}{8^2}\,x+\frac{1}{8^3}\,x^2-\frac{1}{8^4}\,x^3\ldots.$$

Es wird folglich der Fehler des Integrals wegen $K^n=(-1)^n\,\dfrac{1}{8^{n+1}}$

$$\text{für } n=1\ldots.=-\frac{1}{6}\,\frac{1}{8^3}+\frac{1}{4}\,\frac{1}{8^4}=-0{,}00026\;45$$

$$n=2\qquad=-\frac{1}{120}\,\frac{1}{8^5}+\frac{1}{48}\,\frac{1}{8^6}=-0{,}00000\;01758$$

$$n=3\qquad=-\frac{1}{270}\,\frac{1}{8^5}+\frac{1}{108}\,\frac{1}{8^6}=-0{,}00000\;00777$$

$$n=4\qquad=-\frac{1}{2688}\,\frac{1}{8^7}+\frac{1}{768}\,\frac{1}{8^8}=-0{,}00000\;00000\;998$$

Diese Fehler stimmen, so weit die Vernachlässigung der späteren Glieder es gestattet, vollkommen mit dem wahren Werthe 0,11778 30356 5638 und zeigen auch, wie sehr viel gröfser die erlangte Genauigkeit ist bei dem Uebergange von einem ungeraden n zu dem nächstfolgenden geraden, als bei dem Uebergange von einem geraden n zu dem nächstfolgenden ungeraden.

Sind demnach die Werthe der a ihrer Vertheilung nach gegeben, wie es bei Cotes der Fall ist, so wird man zuerst aus ihnen die Funktion $\varphi(x)$ bilden müssen, und aus derselben $\dfrac{1}{\varphi(x)}$, damit V und endlich den Fehler des Integrals erhalten. Er hat immer denselben Werth

$$\triangle = \int_0^1 V \varphi(x)\, dx$$

wenn man ihn mit Jacobi durch $\triangle$ bezeichnet. Da er sich aber zusammensetzt aus den Integralen

$$\int_0^1 x\, \varphi(x)\, dx, \quad \int_0^1 x^2\, \varphi(x)\, dx \text{ etc.} \quad \int_0^1 x^m\, \varphi(x)\, dx$$

so kann man auch die Aufgabe umkehren, und von einer Gleichung

$$\varphi(x) = 0$$

ausgehen. Hat diese Gleichung lauter reelle positive Wurzeln an der Zahl $n+1$, so kann man diese für die Werthe der Abscissen annehmen und mit den so erhaltenen a die Operation des Integrirens vornehmen. So wie in dem früheren Falle die Bildung von $\varphi(x)$ die lästigste Operation ist, so ist es in dem zweiten Falle die Ableitung der Wurzeln der Gleichung, oder die Bestimmung der a. Dabei aber gewährt der zweite Fall den grofsen Vortheil, dafs man es in seiner Gewalt hat, so viele $\int_0^1 x^m\, \varphi(x)\, dx$ successive von $\int_0^1 \varphi(x)\, dx$ an gleich Null zu machen als die Aufgabe gestattet, und damit eine Anzahl der Coefficienten des Ausdrucks von $\triangle$ von k_{n+1} an zu vernichten. Dieses ist durch die neue Methode von Gaufs geschehen und die schwierige Induktion, die ihn darauf geführt hat, durch den Jacobi'schen directen Beweis so concis abgeleitet worden, dafs nur noch der Gang, den dieser dabei genommen hat, kurz angedeutet werden möge.

Die Integrale, die hier verschwinden sollen, haben die Grenzen 0 und 1, und es müssen, um die auf einander folgenden Glieder der Entwickelung von $\triangle$ aufzuheben oder zu vernichten, und folglich die gröfstmöglichste Genauigkeit des Integrals $\int_0^1 y\, dx$ zu erreichen, die Integrale

$$\int_0^1 \varphi(x)\, dx, \int_0^1 x\, \varphi(x)\, dx, \int_0^1 x^2\, \varphi(x)\, dx \ldots . \int_0^1 x^n\, \varphi(x)\, dx$$

Null werden. Da $\varphi(x)$ eine Funktion von der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung von x ist, so ist es unmöglich, weiter zu gehen und noch mehr als diese $n+1$ Integrale verschwinden zu machen, weil ihre Zahl gleich der Anzahl der Wurzeln der Gleichung ist, über welche allein man verfügen kann.

Jacobi zeigt zuerst durch eine einfache Reduktionsformel, dafs die Verschwindung der $n+1$ Integrale $\int_0^1 \varphi(x)\,dx$ bis $\int_0^1 x^n\,\varphi(x)\,dx$ auch bedingt, dafs die $(n+1)$ Integrale $\int_0^1 \varphi(x)\,dx$ bis $\int_0^1{}^{n+1} \varphi(x)\,dx^{n+1}$ zwischen denselben Grenzen genommen verschwinden müssen und umgekehrt. Sind die Grenzen wie hier 0 und 1, d. h.: bestimmt man das Integral so, dafs, wenn es für $x=0$ verschwindet, es auch für $x=1$ verschwinden soll, so kann man die Aufgabe, die hier vorliegt, auch so fassen:

Man soll eine Funktion $\Pi(x)$ finden, die für $x=0$ und für $x=1$ zugleich mit ihrem 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten} bis n^{ten} Differentiale verschwindet. Dieses fordert wieder, dafs $\Pi(x)$ die Faktoren x^{n+1} und $(x-1)^{n+1}$ habe und umgekehrt; jede Funktion, die den Faktor $x^{n+1}\,(x-1)^{n+1}$ hat und aufserdem nur constante Faktoren, erfüllt diese Bedingungen. Da nun

$$\varphi(x) = (x-a)\,(x-a_1)\,(x-a_2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(x-a_n)$$

also eine ganze rationale Funktion von der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, so ist $\Pi(x) = \int^{n+1} \varphi(x)\,dx^{n+1}$ schon an sich von der $(2n+2)^{\text{ten}}$ Ordnung. Bildet man deshalb

$$\frac{d^{n+1}x\,(x^{n+1}\,(x-1)^{n+1})}{dx^{n+1}}$$

und dividirt mit dem constanten Faktor, der sich bei der Differentiation entwickelt, so erhält man

$$\varphi(x) = x^{n+1} - \frac{(n+1)^2}{2n+2}\,x^n + \frac{(n+1)^2\,n^2}{1\cdot 2\cdot(2n+2)\,(2n+1)}\,x^{n-1}$$
$$-\frac{(n+1)^2\,n^2\,(n-1)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot(2n+2)\,(2n+1)\,(2n)}\,x^{n-2}\,.\,.\,.\,.$$
$$+(-1)^{n+1}\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)\,.\,.\,.\,.\,1}{(2n+2)\,(2n+1)\,(2n)\,.\,.\,.\,.\,(n+2)}$$

Die Wurzeln der Gleichung, wenn dieses so bestimmte $\varphi(x)=0$

gesetzt wird, geben die Gröfsen a bis a_n, und da die Wurzeln der Gleichung $\Pi(x)=0$ alle reell und $n+1$ von ihnen $=0$, die $n+1$ andern $=1$ sind, so folgt aus der Lehre von den Gleichungen, dafs die a bis a_n sämmtlich alle reell sind und zwischen 0 und 1 liegen.

Zuletzt bestimmt Jacobi auch den Ausdruck des Fehlers und findet die Form für denselben, den er nicht blofs auf sein erstes Glied beschränkt, ganz so wie bei Gaufs, nämlich für das erste Glied:

$$k_{2n+2}=\left(\frac{1\,2\,3\ldots.(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)\ldots.(2n+2)}\right)^2\frac{1}{2n+3}.$$

Es kann hier noch bemerkt werden, dafs hier wie bei Gaufs die Zahl n die Anzahl der Intervalle bedeutet, während bei Jacobi n die Anzahl der Abscissen ist.

Auch hier erlaube ich mir nach Gaufs die Werthe der a und der R, die wie bei den Cotes'ischen Werthen symmetrisch in Bezug auf den Anfang und das Ende vertheilt sind, bis auf 10 Decimalen herzusetzen, um alle Zahlenwerthe beisammen zu haben.

Tafel der Vertheilung der Abscissen-Werthe und der Integrations-Faktoren bei der Gaufs'ischen Integration von

$$\int_0^1 y\,dx$$

$$n=0$$

$a=0{,}5$

$R=1$

$$k_2=\tfrac{1}{12}$$

$$n=1$$

$a=0{,}2113248654$

$a_1=0{,}7886751346$

$R=R'=\tfrac{1}{2}$

$$k_4=\tfrac{1}{180}$$

$$n = 2$$

$$a = 0{,}1127016654$$
$$a' = 0{,}5$$
$$a'' = 0{,}8872983346$$
$$R = R'' = \tfrac{5}{18}$$
$$R' = \tfrac{4}{9}$$
$$k_6 = \tfrac{1}{2800}$$

$$n = 3$$

$$a = 0{,}0694318442$$
$$a' = 0{,}3300094782$$
$$a'' = 0{,}6699905218$$
$$a''' = 0{,}9305681558$$
$$R = R''' = 0{,}1739274226$$
$$R' = R'' = 0{,}3260725774$$
$$k_8 = \tfrac{1}{441000}$$

$$n = 4$$

$$a = 0{,}0469100770$$
$$a' = 0{,}2307653449$$
$$a'' = 0{,}5$$
$$a''' = 0{,}7692346551$$
$$a^{IV} = 0{,}9530899230$$
$$R = R^{IV} = 0{,}1184634425$$
$$R' = R^{V} = 0{,}2393143352$$
$$R''' = 0{,}2844444444 = \tfrac{64}{225}$$
$$k_{10} = \tfrac{1}{608544}$$

$$n = 5$$

$$a = 0{,}0337652429$$
$$a' = 0{,}1693953068$$
$$a'' = 0{,}3806904070$$
$$a''' = 0{,}6193095930$$
$$a^{IV} = 0{,}8306046932$$
$$a^{V} = 0{,}9662347571$$
$$R = R^{V} = 0{,}0856622462$$

$$R' = R^{\mathrm{IV}} = 0{,}1803807865$$
$$R'' = R''' = 0{,}2339569673$$
$$k_{12} = \frac{1}{11099088}$$
$$n = 6$$
$$a = 0{,}0254460438$$
$$a' = 0{,}1292344072$$
$$a'' = 0{,}2970774243$$
$$a''' = 0{,}5$$
$$a^{\mathrm{IV}} = 0{,}7029225757$$
$$a^{\mathrm{V}} = 0{,}8707655928$$
$$a^{\mathrm{VI}} = 0{,}9745539562$$
$$R = R^{\mathrm{VI}} = 0{,}0647424831$$
$$R' = R^{\mathrm{V}} = 0{,}1398526957$$
$$R'' = R^{\mathrm{IV}} = 0{,}1909150253$$
$$R''' = 0{,}2089795918 = \frac{256}{1225}$$
$$k_{14} = \frac{1}{176679360}$$

Man sieht hieraus, dafs 3 Abscissen bei Gaufs dieselbe Genauigkeit geben wie 5 bei Cotes, sowie 6 Abscissen bei Gaufs noch genauere Resultate geben wie 11 bei Cotes; auch fällt bei Gaufs der Unterschied zwischen der Genauigkeit bei gerader und ungerader Zahl der Intervalle ganz weg. In den ersten fünf Jahren der neuen Berliner Sternwarte beobachtete mein damaliger Gehülfe, der jetzige Direktor der Breslauer Sternwarte, Herr Prof. Galle, dreimal täglich den Barometerstand und Thermometerstand zu den Zeiten, welche um den neunten Theil des ganzen Tagebogens später als Sonnenaufgang und früher als Sonnenuntergang fielen und zur Zeit des nahen Mittags. Er erreichte dadurch dieselbe Genauigkeit, als wenn er fünfmal täglich in gleichen Zeitintervallen die Beobachtungen angestellt hätte, wie es in der That auch die Erfahrung bei der Herleitung des mittlern Thermo- und Barometerstandes aus seinen Beobachtungen, verglichen mit denen einer längeren Reihe von Jahren, bestätigt hat.

Allgemeine

Auflösung der numerischen Gleichungen.

Der Lösung des Problems, welches Lagrange so ausdrückt:

> *Etant donnée une équation numérique sans aucune notion de la grandeur ni de la nature de ses racines, en trouver les valeurs numériques, exactes s'il est possible, ou aussi approchées qu'on voudra,*

ist durch Hrn. Prof. Gräffe in Zürich eine neue Seite abgewonnen worden. In seiner Schrift: Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen als Beantwortung einer von der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin aufgestellten Preisfrage, Zürich 1837, zeigt er, daſs, wenn man aus einer gegebenen Gleichung eine andere ableitet, deren Wurzeln sehr hohe Potenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, aus den Coefficienten der letzten Gleichung die reellen Wurzeln und die Moduln der imaginären sich sämtlich ergeben. Er zeigt auch den einfachsten Weg, zu solchen sehr hohen Potenzen der Wurzeln zu gelangen. Diese Sätze sind in den folgenden Blättern zusammengestellt, und mit dem vervollständigt, was sie noch für die gänzliche Lösung des Problems vermissen lieſsen. Nämlich mit der Ermittelung der imaginären Wurzeln selbst auf einfachem und strengem Wege, mit einer Erleichterung des Verfahrens bei Wurzeln, die nahe zusammenliegen, und auch bei sehr hohen Potenzen sich nicht entscheidend genug trennen würden, und mit den Methoden die Werthe so weit der Wahrheit näher zu bringen, als man immer wünschen mag.

Die so auf Hrn. Prof. Gräffe's neuem Wege sich ergebende Auflösung empfiehlt sich in sehr hohem Grade durch ihre Allgemeinheit, Strenge und Kürze. Sie ist in so fern direct, als sie keine Versuche irgend welcher Art nöthig macht. Sie ist auf alle noch so hohen Grade der Gleichungen anwendbar, führt nie auf Gleichungen höheren Grades als die gegebene ist, und verlangt bei ihrem stets unverändert bleibenden Verfahren nie unausführbare Rechnungen. Die Natur der Wurzeln, die Anzahl der imaginären, legt ihr durchaus kein Hindernifs in den Weg, sie giebt immer bestimmte Resultate, über deren Richtigkeit die einfachste Substitution entscheiden läfst. Sie setzt durchaus gar keine Kenntnifs von der Natur der Wurzeln voraus, sowie sie überhaupt aus den einfachsten Eigenschaften der Gleichungen sich herleiten läfst. Für die Kürze derselben spricht endlich der Umstand, dafs die Bestimmung der sämtlichen Wurzeln einer Gleichung vom 7 ten Grade bei sechs imaginären Wurzeln, so weit der Wahrheit genähert als Logarithmen von 7 Decimalen es erlauben, in etwa zwei bis drei Stunden gänzlich vollendet sein wird.

* * *

Die Auflösung der Gleichungen kommt bekanntlich darauf hinaus: die linearen Faktoren zu finden, aus deren Multiplication mit einander die Funktion einer Variabeln entstanden ist, welche für gewisse Werthe dieser Variabeln verschwinden soll. Etwas abweichend von dem gewöhnlichen Sprachgebrauch, werde ich die bekannte Gröfse in einem solchen linearen Faktor, die Wurzel der Gleichung nennen, so dafs wenn ein Faktor einer Funktion von x durch $x+a$ bezeichnet wird, a künftig die Wurzel der Gleichung heifst, welche entsteht, wenn man die Funktion gleich Null setzt. Man hat bei dieser Benennung den für die numerische Rechnung angenehmen Vortheil, dafs eine einfachere Betrachtung der Zeichen eintritt. Geht man nämlich von positiven Wurzeln aus, wie es am angemessensten ist, so hat man nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch in einer Gleichung, die lauter positive Wurzeln hat, abwechselnde Zeichen, während nach der hier angenommenen Benennung lauter positive Zeichen in diesem Falle vorkommen. Der an sich unerhebliche Unterschied wird nur bemerkt, um Mifsverständnisse zu verhüten.

Betrachtet man zuerst den Fall, wo alle Wurzeln reell und unter sich verschieden sind, so ist die Gleichung entstanden aus einem Produkt von der Form

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\ldots = 0.$$

Nach bekannten Lehren werden bei der wirklich ausgeführten Multiplication die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x gebildet aus den Combinationen (ohne Wiederholung) der Wurzeln zu 1, zu 2, zu 3, so dafs jeder Coefficient die Summe aller ähnlichen Combinationen ist. Bezeichnet man also die Summen solcher Combinationen, je nach dem Grade derselben mit $[a]$, $[ab]$, $[abc]$ etc., so wird die entwickelte Gleichung

$$x^n + [a]\,x^{n-1} + [ab]\,x^{n-2} + [abc]\,x^{n-3} + [abcd]\,x^{n-4} \ldots = 0.$$

Aus den Coefficienten einer solchen Gleichung kann man aber nach bekannten Lehren alle symmetrischen Funktionen der Wurzeln finden und numerisch berechnen, ohne die Wurzeln selbst zu kennen. Man kann folglich auch vermittelst dieser Coefficienten die Combinationen beliebig hoher Potenzen der Wurzeln zu 1, zu 2, zu 3 bestimmen, oder die Summen $[a^m]$, $[a^m\,b^m]$, $[a^m\,b^m\,c^m]$ etc. Folglich kann man auch die sämtlichen Coefficienten einer Gleichung angeben, deren Wurzeln die m^{ten} Potenzen der Wurzeln der ursprünglich gegebenen Gleichung sind, nämlich

$$x^n + [a^m]\,x^{n-1} + [a^m\,b^m]\,x^{n-2} + [a^m\,b^m\,c^m]\,x^{n-3} + \ldots = 0.$$

Die Gröfse von m kann ganz beliebig, so hoch man will, angenommen werden. Man nehme nun an, um den Gang der Entwickelung leichter zu übersehen, es sei unter den Wurzeln a die gröfste, b die nächst gröfste, c die folgende etc. oder es sei

$$a > b, \quad b > c, \quad c > d, \quad d > e \ldots \text{etc.},$$

ferner sei m eine sehr hohe Potenz, so wird in

$$[a^m] = a^m + b^m + c^m + d^m + e^m \dots .$$

für einen gewissen Grad der Näherung, endlich einmal der Fall stattfinden bei stets vergröfsertem m, dafs e^m verschwindet oder vernachlässigt werden kann gegen d^m, d^m gegen c^m, c^m gegen b^m, b^m gegen a^m, und also auch die Summe aller Potenzen der kleineren Wurzeln gegen die Potenz der gröfsten. In diesem Falle wird man setzen können

$$[a^m] = a^m.$$

Das ähnliche wird in der Summe $[a^m\, b^m]$ stattfinden in Bezug auf das Glied $a^m\, b^m$, welches zuletzt nothwendig gegen die Summe aller andern $a^m\, c^m$, $a^m\, d^m$, $b^m\, c^m$ etc. überwiegen mufs. Es wird folglich ebenfalls dann gesetzt werden können

$$[a^m\, b^m] = a^m\, b^m$$

und ganz analog bei allen folgenden Gliedern, oder die Endgleichung wird bei stets vergröfsertem m endlich einmal die Form annehmen

$$x^n + a^m\, x^{n-1} + a^m b^m\, x^{n-2} + a^m b^m c^m\, x^{n-3} + a^m b^m c^m d^m\, x^{n-4} + \dots = 0.$$

Hat man die Coefficienten dieser Gleichung numerisch, so hat man unmittelbar a^m, durch Division von $\frac{a^m\, b^m}{a^m}$ dann auch b^m, nachher aus dem Bruche $\frac{a^m\, b^m\, c^m}{a^m\, b^m}$ ebenfalls c^m, und überhaupt die m^{ten} Potenzen aller Wurzeln zu gleicher Zeit, aus denen sich die Wurzeln selbst durch Ausziehung der m^{ten} Wurzel ergeben. Das Kennzeichen, ob für einen bestimmten Grad der Näherung die Grenze erreicht sei, wird man darin finden, dafs wenn man von der Potenz m zu der Potenz m' übergeht, also aus der obigen Gleichung die folgende bildet

$$x^n + [a^{m'}]\, x^{n-1} + [a^{m'}\, b^{m'}]\, x^{n-2} + [a^{m'}\, b^{m'}\, c^{m'}]\ x^{n-3} + \dots = 0,$$

die Coefficienten der gleichen Potenzen von x in beiden Gleichungen sich verhalten wie die m^{te} Potenz einer Gröfse zu der m'^{ten} derselben, oder wenn man die Logarithmen eines Coefficienten von x^{n-r} in beiden Gleichungen hat, die etwa durch lg α_m in der ersten, lg $\alpha_{m'}$ in der zweiten bezeichnet werden mögen, so mufs für den angenommenen Grad der Näherung

$$\frac{1}{m} \lg \alpha_m = \frac{1}{m'} \lg \alpha_{m'} \quad \text{oder} \quad \lg \alpha_{m'} = \frac{m'}{m} \lg \alpha_m$$

sein, und zwar bleibend, da in speciellen Fällen es wohl sein kann, dafs die Summe sämmtlicher kleinerer Wurzeln und ihrer Combinationen doch noch erheblich genug ist, um ein ähnliches Verhältnifs hervorzurufen. Indessen wird die Möglichkeit dieser Ausnahme immer verringert werden, je mehr m wächst, und wird zuletzt ganz aufhören.

Wollte man die Erhebung zu solchen sehr hohen Potenzen auf die gewöhnliche Art durch Bildung der symmetrischen Funktionen bewirken, so würde die Rechnung nicht ausführbar sein. Man erreicht aber dasselbe, wenn man stufenweise erst die Wurzeln zur Potenz p erhebt, und die Gleichung bildet, welche den a^p, b^p etc. entspricht. Leitet man aus den numerisch berechneten Coefficienten dieser Gleichung die andere ab, welche die p^{te} Potenz der Wurzeln derselben enthält, so hat man die Gleichung, deren Wurzeln die pp^{te} Potenz der Wurzeln der ursprünglich gegebenen Gleichung sind, und fährt man so fort, so erhält man nach und nach Gleichungen, deren Wurzeln

$$a^p \; a^{p^2} \; a^{p^3} \text{ etc.}$$

sind, wo folglich m gleich einer Potenz von p sehr schnell wächst. Schon die kleinsten Zahlen für p werden hier alle Bequemlichkeit gewähren.

Wäre zuerst $p=2$ und die vorgegebene Gleichung:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} \ldots + a_n = 0,$$

so schreibe man für $x \ldots x^{\frac{1}{2}}$. Die linearen Factoren dieser Gleichung werden dann sein

$$(x^{\frac{1}{2}}+a)\ (x^{\frac{1}{2}}+b)\ (x^{\frac{1}{2}}+c)\ldots=0.$$

Schafft man aus ihr alle Wurzelgröſsen weg, so werden die Factoren der neuen Gleichung

$$(x-a^2)\ (x-b^2)\ (x-c^2)\ldots=0,$$

und um positive Wurzeln zu erhalten (in dem obigen Sinne), ändere man das Zeichen aller Glieder, die der zweiten, vierten etc., das heiſst also, überhaupt einer geraden Ordnungszahl angehören, wenn man von der höchsten Potenz von x anfängt und keine übergeht.

Zur Wegschaffung der Wurzelgröſsen kann man davon ausgehen, daſs für $p+q=0$ auch $p^2-q^2=0$. Wenn man die Gleichung also in zwei solche Theile abtheilt, daſs jeder für sich, wenn man ihn in das Quadrat erhebt, von aller Irrationalität frei ist, so ist das Verlangte erreicht. Diese Theile können in jedem Falle sein

$$x^{\frac{n}{2}}+\alpha_2\,x^{\frac{n-2}{2}}+\alpha_4\,x^{\frac{n-4}{2}}+\alpha_6\,x^{\frac{n-6}{2}}$$

und

$$\alpha_1\,x^{\frac{n-1}{2}}+\alpha_3\,x^{\frac{n-3}{2}}+\alpha_5\,x^{\frac{n-5}{2}}+\alpha_7\,x^{\frac{n-7}{2}}$$

Ihre Quadrate sind

$$x^n+2\alpha_2\,x^{n-1}+\left.\begin{array}{l}\alpha_2^2\\+2\alpha_4\end{array}\right\}x^{n-2}+\left.\begin{array}{l}2\alpha_2\,\alpha_4\\+2\alpha_6\end{array}\right\}x^{n-3}+\left.\begin{array}{l}\alpha_4^2\\+2\alpha_2\,\alpha_6\\+2\alpha_8\end{array}\right\}x^{n-4}\ldots$$

und

$$\alpha_1^2\,x^{n-1}+2\,\alpha_1\,\alpha_3\,x^{n-2}+\left.\begin{array}{l}\alpha_3^2\\+2\alpha_1\,\alpha_5\end{array}\right\}x^{n-3}+\left.\begin{array}{l}2\alpha_3\,\alpha_5\\+2\alpha_1\,\alpha_7\end{array}\right\}x^{n-4}+\left.\begin{array}{l}\alpha_5^2\\+2\alpha_3\,\alpha_7\\+2\alpha_1\,\alpha_9\end{array}\right\}x^{n-5}\ldots$$

Nimmt man die Differenz dieser Quadrate und ändert die Zeichen, wie eben bemerkt, so wird

$$x^n+\left.\begin{array}{l}\alpha_1^2\\-2\alpha_2\end{array}\right\}x^{n-1}+\left.\begin{array}{l}\alpha_2^2\\-2\alpha_1\,\alpha_3\\+2\alpha_4\end{array}\right\}x^{n-2}+\left.\begin{array}{l}\alpha_3^2\\-2\alpha_2\,\alpha_4\\+2\alpha_1\,\alpha_5\\-2\alpha_6\end{array}\right\}x^{n-3}+\left.\begin{array}{l}\alpha_4^2\\-2\alpha_3\,\alpha_5\\+2\alpha_2\,\alpha_6\\-2\alpha_1\,\alpha_7\\+2\alpha_8\end{array}\right\}x^{n-4}+\ldots=0$$

die Gleichung sein, deren Wurzeln a^2, b^2, c^2 etc. sind. Diese Form giebt eine höchst einfache und übersichtliche Rechnung. Der Coefficient einer Potenz von x in der neuen Gleichung wird gebildet durch die Verbindung des Quadrats des Coefficienten derselben Potenz in der schon berechneten Gleichung, mit den doppelten Producten je zweier gleich weit zu beiden Seiten von ihm abstehender Coefficienten, die letzteren regelmäſsig mit abwechselnden Zeichen genommen.

Eine ähnliche Ableitung kann man auch für $p = 3$ machen. Da jedesmal, was auch p, q und r sein mögen,

$$(p+q+r)^3 = p^3 + q^3 + r^3 + 3(p+q+r)(pq+qr+pr) - 3pqr,$$

so wird auch immer, wenn $p + q + r = 0$,

$$p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr = 0.$$

Wenn man also in der gegebenen Gleichung statt $x \ldots x^{\frac{1}{3}}$ schreibt, wodurch die linearen Factoren werden $x^{\frac{1}{3}} + a$, $x^{\frac{1}{3}} + b$ und hier die Wurzelgröſsen wegschafft, so erhält man die Factoren $x + a^3$, $x + b^3$, $x + c^3$, ohne daſs es nöthig wäre, die Zeichen nachher noch zu ändern. Zu dieser Wegschaffung ist es nach der eben angeführten Gleichung nur erforderlich, die Gleichung in drei solche Theile zu theilen, daſs der Cubus jedes einzelnen und das Product aller drei frei von einer Irrationalität ist. Solche Theile können immer sein:

$$\begin{aligned}
x^{\frac{n}{3}} + \alpha_3 x^{\frac{n-3}{3}} + \alpha_6 x^{\frac{n-6}{3}} + \cdots\cdots &= A \\
\alpha_1 x^{\frac{n-1}{3}} + \alpha_4 x^{\frac{n-4}{3}} + \alpha_7 x^{\frac{n-7}{3}} \cdots\cdots\cdot &= B \\
\alpha_2 x^{\frac{n-2}{3}} + \alpha_5 x^{\frac{n-5}{3}} + \alpha_8 x^{\frac{n-8}{3}} \cdots\cdot &= C.
\end{aligned}$$

Denn sie werden

$$\begin{aligned}
x^{\frac{n}{3}} \left\{ 1 + \alpha_3 x^{-1} + \alpha_6 x^{-2} \cdots\cdot \right\} &= A \\
x^{\frac{n-1}{3}} \left\{ \alpha_1 + \alpha_4 x^{-1} + \alpha_7 x^{-2} \cdots\cdot \right\} &= B \\
x^{\frac{n-2}{3}} \left\{ \alpha_2 + \alpha_5 x^{-1} + \alpha_8 x^{-2} \cdots\cdot \right\} &= C,
\end{aligned}$$

die offenbar, jeder für sich zum Cubus erhoben, und mit einander multiplicirt, frei von einer Irrationalität sind. Bildet man also

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC,$$

so werden die ersten Glieder

$$\begin{aligned} &x^n + (\alpha_1^3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_3)\, x^{n-1} \\ &\quad + (\alpha_2^3 + 3\alpha_1^2\alpha_4 - 3\alpha_1\alpha_5 - 3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_4 + 3\alpha_3^2 + 3\alpha_6)\, x^{n-2} \\ &\quad + \left\{\begin{matrix} \alpha_3^3 - 3\alpha_1\alpha_8 + 3\alpha_1^2\alpha_7 - 3\alpha_1\alpha_2\alpha_6 - 3\alpha_1\alpha_3\alpha_5 + 3\alpha_1\alpha_4^2 + 3\alpha_2^2\alpha_5 \\ -3\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - 3\alpha_2\alpha_7 - 3\alpha_4\alpha_5 + 6\alpha_3\alpha_6 + 3\alpha_9 \end{matrix}\right\} x^{n-3} \end{aligned}$$

Der Vortheil der Kürze und Einfachheit ist so entschieden bei dem Falle $p = 2$, daſs weder das bedeutend langsamere Fortschreiten der Potenzen 2, 4, 8, 16 etc., verglichen mit 3, 9, 27 etc., ihm Eintrag thut, noch selbst der Umstand, daſs für p gleich einer geraden Zahl, der Unterschied zwischen einer positiven und einer negativen Wurzel gleich anfangs verschwindet, während eine ungerade Potenz ihn bestehen läſst. Wenn man die Wurzel ihrer absoluten Gröſse nach kennt, und nur das Zeichen ungewiſs ist, so reicht eine einfache Substitution, wobei man die geraden und ungeraden Potenzen von x von einander trennt, sogleich hin, um darüber zu entscheiden. Sonst könnte man auch durch Substitution der nächsten positiven und negativen Grenzen in runden Zahlen um so unbedenklicher darüber sich versichern, als man alle andern Wurzeln gleichzeitig kennen lernt, und folglich die Grenzen stets so nehmen kann, daſs nur die eine Wurzel innerhalb derselben vorhanden ist.

Eine solche Substitution des zuerst gefundenen Werthes wird man doch nicht vermeiden können, abgesehen von der Prüfung der Richtigkeit, die sie gewährt, da es niemals rathsam sein wird, gleich Anfangs die Grenze der Genauigkeit, bis zu welcher man gehen will, mit einem Male zu umfassen. Die Rechnung muſs mit Logarithmen ausgeführt werden. Aus einem später zu erwähnenden Grunde sind Logarithmen von fünf Decimalen, in jedem Falle, wo man eine groſse Genauigkeit haben will, vorzuziehen. Angenommen daher, was später immer vorausgesetzt werden soll, es werde die erste Rechnung mit Logarithmen von fünf Decimalen und so ausgeführt, daſs man nach Potenzen von 2 fortschreitet, so kann man sowohl im Voraus übersehen, wie weit man gehen, wie viele solcher Rechnungen man machen muſs, als auch das Verfahren, wie der gefundene Werth am bequemsten verbessert wird, angeben.

Die Grenze für alle Wurzeln wird erreicht sein, wenn das Quadrat jedes Coefficienten, so gegen das doppelte Product der ihm zur Seite stehenden überwiegt, daſs das letztere auf die fünfte Decimale keinen Einfluſs mehr hat, oder bei Logarithmen von fünf Decimalen kleiner als der 100,000[te] Theil des ersteren ist. Das gröſste Product, wenn man sich der Grenze einmal schon genähert hat, werden immer die beiden nächsten Coefficienten geben. Denn wenn die Reihefolge der Coefficienten ist

$$a^m b^m,\quad a^m b^m c^m,\quad a^m b^m c^m d^m,\quad a^m b^m c^m d^m e^m,\quad a^m b^m c^m d^m e^m f^m,$$

so wird für den mittelsten der Werth in der neuen Gleichung werden

$$a^{2m} b^{2m} c^{2m} d^{2m} - 2a^{2m} b^{2m} c^{2m} d^m e^m + 2a^{2m} b^{2m} c^m d^m e^m f^m,$$

wo das zweite Glied zum dritten sich verhält wie $c^m : f^m$, dagegen das erste zum zweiten wie $d^m : 2e^m$. Ueberhaupt kommt man sehr bald dahin, daſs die folgenden Glieder nach dem zweiten unbeträchtlich werden. Soll aber das zweite gegen das erste verschwinden, so daſs es nicht mehr in Rechnung gebracht werden kann, so muſs

$$100{,}000 \cdot e^m < \tfrac{1}{2} d^m \quad \text{oder} \quad \left(\frac{d}{e}\right)^m > 200{,}000$$

d. h.

$$m > \frac{5{,}30103}{\lg \dfrac{d}{e}}.$$

Hieraus ergiebt sich für die Werthe

$$\frac{d}{e} = 1{,}1 \qquad m = 128 \quad = 2^7$$

$$\frac{d}{e} = 1{,}01 \qquad m = 1227 \quad < 2^{11}$$

$$\frac{d}{e} = 1{,}001 \qquad m = 12212 < 2^{14}$$

und bei einem gröſseren $\frac{d}{e}$ natürlich eine um so viel geringere Anzahl von Operationen. Es folgt hieraus, daſs man in der Regel mit sieben Umformungen völlig ausreicht. In dem ungewöhnlichen Falle von so äuſserst nahe liegenden Wurzeln, wie für $\frac{d}{e} = 1{,}01$ oder 1,001, würde man doch nur elf und vierzehn Operationen gebrauchen. Allein es wird später gezeigt werden, daſs Fälle solcher sehr nahe liegenden Wurzeln, nach der Art der gleichen Wurzeln behandelt werden können, so daſs man die Operationen gar nicht nöthig hat so weit fortzusetzen, bis die Wurzeln selbst von einander getrennt sind, sondern nur so weit, bis ihr Product sich von den Producten der übrigen Wurzeln mit einander unterscheidet. Bei häufigen Anwendungen ist mir kein Beispiel vorgekommen, wo auch im ungünstigsten Falle von sieben Wurzeln, die sämmtlich zwischen 1,1 und 1,6 lagen, mehr als acht Operationen nöthig gewesen wären.

In der Regel wird man bei einer Rechnung mit fünf Decimalen, nach Ausziehung der m^{ten} Wurzel, den Werth der Wurzel sehr genau erhalten, so daſs die fünfte Decimale immer sicher, und meistentheils selbst die sechste es ist. Dieses scheint daher zu kommen, daſs im Anfange bei den ersten Operationen die Coefficienten sich aus mehreren Theilen zusammensetzen, so daſs die Ungewiſsheit der letzten Stelle verringert wird, weil selten alle Fehler der letzten Decimale auf eine Seite fallen. Bei der Ausziehung der m^{ten} Wurzel dividirt man aber auf einmal mit einer groſsen Zahl, und vermindert so die Ungewiſsheit der letzten Decimale.

Bei dieser sehr groſsen Annäherung an die Wahrheit, bis auf den 100,000sten Theil des Ganzen, kann man unbedenklich den Taylor'schen Lehrsatz oder die Newton'sche Approximationsmethode anwenden; denn die Unsicherheit derselben findet nur dann statt, wenn der Werth, von dem man ausgeht, nicht bloſs einer, sondern mehreren Wurzeln sehr nahe ist. Nach dem Taylor'schen Satze wird für

$$x = x_0 + \triangle x_0$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx_0} \triangle x_0 + \cdots$$

Hat $f(x)$ die Form, in der die Gleichungen immer als gegeben angesehen werden

$$x_0^n + \alpha_1 x_0^{n-1} + \alpha_2 x_0^{n-2},$$

so wird $\frac{df(x_0)}{dx_0} = n x_0^{n-1} + (n-1)\alpha_1 x_0^{n-2} + (n-2)\alpha_2 x_0^{n-3} + \cdots$

oder $x_0 \frac{df(x_0)}{dx_0} = n x_0^n + (n-1)\alpha_1 x_0^{n-1} + (n-2)\alpha_2 x_0^{n-2} + \cdots$

Hat man also die Substitution von x_0, dem gefundenen genäherten Werthe, in die Gleichung gemacht, wovon das Resultat mit $[x_0^n]$ bezeichnet werden möge, so multiplicirt man jedes Glied mit dem Exponenten der Potenz von x, die darin vorkommt, das Resultat dieser Operation möge mit $[n x_0^n]$ bezeichnet werden, dann wird

$$\frac{\triangle x_0}{x_0} = \triangle \lg x_0 = -\frac{[x_0^n]}{[n x_0^n]} M,$$

wo M der Modulus des briggischen Systems ist, dessen logar. = 9,6377843. Auf diese Weise wird man ohne eine gröfsere Mühe, als die Substitution des Werthes von x_0 in die Gleichung, den Werth von $\lg x$ so genau erhalten, als Logarithmen von 7 Decimalen ihn zu geben vermögen, da die Multiplication mit den Exponenten kaum in Betracht kommt. Eine gröfsere Genauigkeit wird kaum je verlangt werden, und kann, wenn sie gewünscht wird, auf dieselbe Weise erhalten werden.

Betrachtet man zweitens den Fall, in welchem alle Wurzeln imaginär sind, und unter diesen wiederum keine mit der andern zusammenfallend, so wird es, um mit imaginären Gröfsen nicht in der Rechnung zu thun zu haben, am gerathensten sein, von den trinomischen Factoren auszugehen, in welche sich jede solche Gleichung zerlegen lassen mufs. Sei die allgemeine Form eines solchen Factors

$$x^2 + fx + g^2,$$

wo g bei imaginären Wurzeln stets reell ist, so sind die beiden linearen Factoren dieser Gröfse bekanntlich von der Form

$$x+\alpha+\beta\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad x+\alpha-\beta\sqrt{-1}$$

oder auch, wenn

$$\frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}=\cos\varphi, \qquad \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}=\sin\varphi,$$

$$x+g(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}) \quad \text{und} \quad x+g(\cos\varphi-\sin\varphi\sqrt{-1}),$$

so dafs $g=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}$ und $f=2g\cos\varphi$,

folglich für imaginäre Wurzeln oder bei reellem φ stets

$$f<2g.$$

Werden aus solchen Factoren die Factoren hergeleitet, welche die m^{ten} Potenzen der Wurzeln enthalten, so werden diese letzteren, wegen

$$(\cos\varphi\pm\sin\varphi\sqrt{-1})^m=\cos m\varphi\pm\sin m\varphi\sqrt{-1},$$

vollständig werden:

$$x+g^m(\cos m\varphi+\sin m\varphi\sqrt{-1}), \quad x+g^m(\cos m\varphi-\sin m\varphi\sqrt{-1}),$$

woraus der trinomische Factor entsteht

$$x^2+2g^m\cos m\varphi\, x+g^{2m},$$

oder wenn man ihn bezeichnet durch

$$x^2+f_m x+g^{2m},$$

so wird wiederum bei imaginären Wurzeln

$$f_m=2g^m\cos m\varphi\leqq 2g^m,$$

d. h. f_m kann nie gröfser als $2g^m$ werden, abgesehen vom Zeichen. Es kann nämlich $f_m=2g^m$ werden, wenn $m\varphi$ ein vielfaches von π ist, und wenn es dieses einmal geworden ist, so wird es bei der Erhebung in das Quadrat oder die höheren Potenzen stets diesen Werth behalten. Imaginäre Wurzeln geben in diesem speciellen Falle dasselbe Resultat, wie gleiche reelle. In allen andern Fällen aber wird f_m, je nach dem verschiedenen Werthe von $\cos m\varphi$, bald ab-, bald zunehmen, im Zeichen wechseln, stets aber der absoluten Gröfse nach kleiner als $2g^m$ bleiben.

Hat nun eine Gleichung lauter imaginäre Wurzeln, so wird sie das Product lauter solcher trinomischer Factoren sein, in welchen $f < 2g$ ist. Die Form dieses Productes wird, wenn die einzelnen Factoren sind

$$x^2 + fx + g^2, \quad x^2 + f'x + g'^2, \quad x^2 + f''x + g''^2 \ldots\ldots \text{etc.}$$

und wenn die obige Summen-Bezeichnung beibehalten wird

$$\begin{aligned} x^{2n} + [f]\, x^{2n-1} &+ ([g^2] + [ff'])\, x^{2n-2} \\ &+ ([g^2 f'] + [ff'f''])\, x^{2n-3} \\ &+ ([g^2 g'^2] + [g^2 f' f''] + [ff'f''f'''])\, x^{2n-4} \\ &\;\;\vdots \\ &+ ([g^2 g'^2 \ldots g^{(n-2)^2}] + [g^2 g'^2 \ldots g^{(n-3)^2} f^{(n-2)} f^{(n-1)}])\, x^2 \\ &+ ([g^2 g'^2 \ldots g^{(n-2)^2} f^{(n-1)}]\, x \\ &+ \;\; g^2 g'^2 \ldots g^{(n-1)^2} \qquad = 0. \end{aligned}$$

Daſs diese Form die richtige ist, wird man aus den einfachen Gesetzen der Multiplication ableiten können, und daſs namentlich in den letzten Gliedern die f einzeln, oder zu zweien, oder zu dreien mit den g combinirt vorkommen müssen, eben so wie in den ersten Gliedern, so daſs das zweite und vorletzte, das dritte und drittletzte etc. einander in Bezug auf den Grad der f, die mit einander und den g multiplicirt sind, entsprechen, wird man sogleich übersehen, wenn man die trinomischen Factoren so schreibt

$$g^2\left\{1 + \frac{f}{g^2}\, x + \frac{1}{g^2}\, x^2\right\}, \qquad g'^2\left\{1 + \frac{f'}{g'^2}\, x + \frac{1}{g'^2}\, x^2\right\} \text{ etc.}$$

und sie dann miteinander multiplicirt.

Werden nun aus einer solchen Gleichung die Gleichungen hergeleitet, deren Wurzeln die m^{ten} Potenzen der ursprünglichen Wurzeln sind, so geht f über in f_m, f' in f'_m etc., g^2 in g^{2m}, g'^2 in g'^{2m} und die neue Gleichung wird folglich die Form haben:

$$\begin{aligned} x^{2n} + [f_m]\, x^{2n-1} &+ ([g^{2m}] + [f_m f'_m])\, x^{2n-2} \\ &+ ([g^{2m} f'_m] + [f_m f'_m f''_m])\, x^{2n-3} \\ &+ ([g^{2m} g'^{2m}] + [g^{2m} f'_m f''_m] + f_m f'_m f''_m f'''_m]\, x^{2n-4} \\ &\;\;\vdots \\ &+ ([g^{2m} g'^{2m} \ldots g^{(n-2)^{2m}}] + [g^{2m} g'^{2m} \ldots g^{(n-3)^{2m}} f_m^{n-2} f_m^{n-1}])\, x^2 \\ &+ ([g^{2m} g'^{2m} \ldots g^{(n-2)^{2m}} f_m^{n-1}]\, x \\ &+ \;\; g^{2m} g'^{2m} \ldots g^{(n-1)^{2m}} \qquad = 0. \end{aligned}$$

Nimmt man hier wiederum zur leichteren Uebersicht des Ganges an, dafs g der gröfste Modul (nach der gewöhnlichen Benennung), g' der nächstgröfste, g'' der folgende u. s. w. oder dafs

$$g > g', \quad g' > g'', \quad g'' > g''' \ldots$$

und kein Modul dem andern gleich ist, und betrachtet man zuerst die Glieder, in welchen die Potenz eine gerade Zahl ist, so wird bei ihren Coefficienten das jedesmal vorkommende, von allen f_m ganz freie Glied $\ldots [g^{2m} g'^{2m} g''^{2m} \ldots]$, ganz ähnlich wie bei den reellen Wurzeln, bei vergröfsertem m zuletzt übergehen in

$$g^{2m} g'^{2m} g''^{2m} \ldots$$

so dafs für $[g^{2m}]$ geschrieben werden kann g^{2m}, für $[g^{2m} g'^{2m}] \ldots g^{2m} g'^{2m}$ u. s. w. Neben diesen Summen kommen aber noch theils solche Summen vor, in denen mehrere g mit mehreren f verbunden sind, oder auch solche, wo nur f darin enthalten sind. In allen diesen Summen müssen die f immer in gerader Zahl vorhanden sein. Substituirt man hier für jedes f_m seine äufserste Grenze $2g^m$, so wird das Resultat zuverlässig immer gröfser oder gleich grofs mit dem eigentlichen Werthe, und die Grenze, der sich mit vergröfsertem m diese Summen nähern, wenn man in ihnen jedes f_m mit $2g^m$ vertauscht hat, kann nie überschritten werden. Hiernach wird bei dem Coefficienten von x^{2n-2} die Summe $[f_m f'_m]$ niemals die Summe von $4[g^m g'^m]$ überschreiten können, folglich wird auch die Grenze dieser letzten Summe bei vergröfsertem m, nämlich die Gröfse $4 g^m g'^m$ selbst der äufserste Grenzwerth für $[f_m f'_m]$ sein. Von den beiden Theilen aber, aus denen der Coefficient zuletzt allein besteht

$$g^{2m} + 4 g^m g'^m$$

wird auch der zweite zuletzt verschwinden müssen gegen den ersten, sobald

$$g^m > 4 g'^m,$$

d. h. sobald $$g > g' \sqrt[m]{4},$$

denn in einem solchen Falle wird irgend einmal, wenn m erhöht worden ist zu m^{ν}, $g^{m^{\nu}}$ ganz und gar überwiegen. Die Zahl 4 unter dem Wurzelzeichen ist unabhängig von der Potenz m, und bleibt für alle Werthe derselben constant, folglich wird sich $\sqrt[m]{4}$ der Einheit immer mehr und mehr nähern, und zuletzt so ganz damit zusammenfallen, dafs die Bedingung $g > g' \sqrt[m]{4}$ übergeht in $g > g'$. So z. B. ist für $m = 128$

$$\sqrt[m]{4} = 1{,}0102.$$

Es geht demnach, sobald $g > g'$ der Coefficient von x^{2n-2},

$$[g^{2m}] + [f_m f'_m] \text{ über in } g^{2m}.$$

Ganz dieselben Schlüsse lassen sich bei allen Coefficienten machen, welche mit geraden Potenzen verbunden sind, und man braucht bei ihnen immer nur die Summen, welche lauter g enthalten, zu vergleichen mit den Summen, in welchen zwei f mit den g verbunden sind. Kommen nämlich mehr f als zwei in der Summe vor, so gehören sie nothwendig zu kleineren g als die sind, welche in den Summen vorkommen die nur g enthalten. Im Allgemeinen werden mit vergröfsertem m die Coefficienten der geraden Potenzen von x, ganz wie bei den reellen Wurzeln übergehen in

$$g^{2m}, \quad g^{2m} g'^{2m}, \quad g^{2m} g'^{2m} g''^{2m}, \text{ etc.}$$

Die Coefficienten der ungeraden Potenzen von x enthalten kein Glied, in welchem nicht wenigstens ein f_m vorkäme, und da jedes solche f_m schwankende Werthe hat, selbst Null werden kann oder doch einen sehr kleinen Werth erhalten, so können diese Coefficienten auch bei noch so grofsem m nie einer bestimmten Grenze sich nähern, den Ausnahmefall ausgenommen, wenn $m\varphi$ ein Vielfaches von π ist, welcher, da er mit den gleichen reellen Wurzeln zusammenfällt, später betrachtet werden soll. Bei lauter imaginären Wurzeln und ungleichen Moduln wechselt ein unbestimmtes Glied stets ab mit einem solchen, welches den Werth eines neuen g^{2m} zu den vorigen hinzufügt. Wenn folglich die Grenze, in welcher die Endform stattfindet, erreicht ist, worüber man eben so wie bei den reellen Wurzeln durch den Gang der Rechnung unterrichtet wird, so hat die Gleichung die Form:

$$x^{2n} + f_0\, x^{2n-1} + g^{2m}\, x^{2n-2} + f_0'\, x^{2n-3} + g^{2m}\, g'^{2m}\, x^{2n-4} + f_0''\, x^{2n-5}$$
$$+ g^{2m}\, g'^{2m}\, g''^{2m}\, x^{2n-6} \ldots . = 0,$$

wo durch f_0, f_0', f_0'' der schwankende Werth der Coefficienten bezeichnet wird.

Man findet also ganz auf dieselbe Weise, wie bei den reellen Wurzeln, durch successive Divisionen erst g^{2m}, dann $\frac{g^{2m}\, g'^{2m}}{g^{2m}} = g'^{2m}$ u. s. w. So daſs jetzt bei bekannten g die zu jedem Modul gehörigen f noch zu bestimmen sind.

Hiezu bietet die gegebene Gleichung selbst weit mehr Bedingungsgleichungen dar, als nöthig sind, so daſs sich a priori übersehen läſst, daſs die verschiedenen f jedesmal linear und ohne Zweideutigkeit sich bestimmen lassen müssen. Eine Gleichung vom $2n^{\text{ten}}$ Grade, in der alle g bekannt sind, enthält in ihren $2n+1$ Gliedern $2n$ Coefficienten, in denen die unbekannten Gröſsen f an der Zahl n enthalten sind, und aus welchen sie bestimmt werden können. Von diesen Coefficienten ist einer, der letzte, frei von allen f, von den noch übrigen $2n-1$ sind zwei, der zweite und vorletzte, vom ersten Grade in Bezug auf die f, zwei, der dritte und drittletzte, vom zweiten Grade und überhaupt sind immer zwei gleich weit vom Anfange und Ende abstehende Coefficienten von gleichem Grade in Bezug auf die f durch alle Grade durch bis zum $(n-1)^{\text{ten}}$ inclusive, der mittelste alleinstehende aber vom n^{ten} Grade. Man kann deswegen zur Bestimmung der f so verfahren, daſs man aus

$$\alpha_1 = [f] \quad \text{und} \quad \alpha_{2n-1} = [g^2\, g'^2 \ldots g^{(n-2)^2}\, f^{(n-1)}]$$

zwei f linear als Function der übrigen und bekannter Gröſsen bestimmt. Es mögen dieses etwa f und f' sein. Substituirt man diese Werthe in

$$\alpha_2 \quad = [g^2] + [ff'],$$
$$\alpha_{2n-2} = [g^2 g'^2 \ldots g^{(n-2)^2}] + [g^2 g'^2 \ldots g^{(n-3)^2} f^{(n-2)} f^{(n-1)}],$$

so hat man zwei Gleichungen vom zweiten Grade, aus deren Verbindung sich ein drittes f, etwa f'', linear als Function der übrigen finden läfst. Dieses geschieht unmittelbar durch die Division beider Gleichungen in einander, bis ein Ausdruck übrig bleibt, der nur noch die erste Potenz von f'' enthält. Die Substitution dieses Werthes in eine der Gleichungen, aus der er hervorging, wird eine Gleichung vom 4ten Grade geben, aus welcher die drei $f f' f''$ verschwunden sind, und wenn man die Werthe dieser drei Gröfsen in die Coefficienten von x^{2n-3} und x^3 substituirt, so hat man zwei neue Gleichungen vom 6ten Grade, die in Verbindung mit der vom 4ten Grade wieder linear zwei neue f als Functionen der übrigen bestimmen lassen müssen. Allein auf diesem Wege wird man doch höchstens noch ein viertes f, etwa f''', bestimmen können, oder also nur in dem Falle von 8 imaginären Wurzeln Gebrauch davon machen können. Denn die Elimination von f''' aus einer Gleichung vom 4ten und vom 6ten Grade wird mindestens zu einer Gleichung vom 24sten Grade führen, die sich nicht mehr behandeln läfst. In der Praxis wird der Grad noch höher steigen. Denn wenn man sich nicht die Mühe geben will, die symmetrischen Functionen der Wurzeln zu bilden, sondern den Weg der Division, der auch der einzige wirklich anwendbare sein möchte, wählt, so wird man bei der Verbindung einer Gleichung vom $m$ten Grade mit einer vom $n$ten in der Regel so viele überflüssige Factoren einführen müssen, dafs die Endgleichung, in welcher die zu eliminirende Gröfse nur noch auf der ersten Potenz sich befindet, in Bezug auf die übrigen darin enthaltenen Unbekannten, vom $(m+n-2)$ten Grade ist, also durch die Substitution des aus ihr erhaltenen Werthes nothwendig einen höheren Grad als den mnten erreichen läfst, wenn m und n die Potenz 2 übersteigen. Man wird deshalb höchstens bis zur Bestimmung von vier f diesen Weg einschlagen können.

In der That scheint es aber auch in der Natur der Aufgabe zu liegen, dafs eine gewisse Weitläufigkeit nicht zu vermeiden ist. Denn wenn auch nur n Gröfsen f gesucht werden, so würde doch eine Gleichung vom n^{ten} Grade allein nicht dem Probleme genügen, wenn man sie auch aufstellen könnte. Man verlangt nämlich nicht blofs die Werthe der verschiedenen f selbst, sondern man verlangt den Werth eines jeden bestimmten f, was einem bestimmten g angehört. Sonach möchte es wohl die einfachste Auflösung sein, die sich erwarten läfst, wenn man eine Gleichung angiebt, die je nachdem man den Werth eines bestimmten g in sie hinein substituirt, auch jedesmal das zugehörige f giebt. Diese Gleichung mufs vom n^{ten} Grade sein, da in dem Falle, das sämmtliche Moduln g einander gleich wären, während die Winkel φ und folglich die f verschieden sind, die n Werthe von f aus den Wurzeln der Gleichung sich ergeben müfsten. Kann man damit eine ähnliche Gleichung niederen Grades verbinden, die bei gleicher Substitution des bestimmten g jedesmal als gemeinschaftliche Wurzel mit der ersten Gleichung den verlangten Werth von f hat, so dafs man durch einfache Division den Werth von f linear findet, und läfst sich diese Division mit der gröfsten Bequemlichkeit in jedem Falle ausführen, so scheint die Aufgabe so einfach gelöst zu sein, als die Natur des Gegenstandes es erlaubt.

Solche zwei Gleichungen erlangt man auf die einfachste Weise, wenn man die allgemeine Form der imaginären Wurzeln in die gegebene Gleichung hinein substituirt. Ein Werth

$$x = r(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$$

giebt, wenn man ihn in die Gleichung

$$x^{2n} + \alpha_1 x^{2n-1} + \alpha_2 x^{2n-2} \dots + \alpha_{2n} = 0$$

setzt, durch Trennung des imaginären vom reellen, oder indem man den zweiten Werth $x = r(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})$ ebenfalls einführt, und die Resultate beider Substitutionen verbindet, zwei Gleichungen:

$$0 = r^{2n}\cos 2n\varphi + \alpha_1 r^{2n-1}\cos(2n-1)\varphi + \alpha_2 r^{2n-2}\cos(2n-2)\varphi \ldots . + \alpha_{2n-1} r\cos\varphi + \alpha_{2n}$$

$$0 = r^{2n}\sin 2n\varphi + \alpha_1 r^{2n-1}\sin(2n-1)\varphi + \alpha_2 r^{2n-2}\sin(2n-2)\varphi \ldots . + \alpha_{2n-1} r\sin\varphi.$$

Multiplicirt man die erste mit $\cos n\varphi$ und die zweite mit $\sin n\varphi$ und addirt beide Producte, und multiplicirt man nachher auch die erste mit $\sin n\varphi$ und die zweite mit $\cos n\varphi$ und subtrahirt das erste Product vom zweiten, so erhält man die zwei Gleichungen:

$$0 = r^{2n}\cos n\varphi + \alpha_1 r^{2n-1}\cos(n-1)\varphi + \alpha_2 r^{2n-2}\cos(n-2)\varphi \ldots .. + \alpha_{2n-2} r^2\cos(n-2)\varphi + \alpha_{2n-1} r\cos(n-1)\varphi + \alpha_{2n}\cos n\varphi$$

$$0 = r^{2n}\sin n\varphi + \alpha_1 r^{2n-1}\sin(n-1)\varphi + \alpha_2 r_{2n-2}\sin(n-2)\varphi \ldots .. - \alpha_{2n-2} r^2\sin(n-2)\varphi - \alpha_{2n-1} r\sin(n-1)\varphi - \alpha_{2n}\sin n\varphi.$$

In diesen enthalten immer die gleich weit vom Ende und vom Anfange abstehenden Glieder einerlei Sinus und Cosinus. Vereinigt man diese und setzt man also

$$\begin{array}{lll}
1 + \alpha_{2n} r^{-2n} = \beta & \qquad & 1 - \alpha_{2n} r^{-2n} = \gamma \\
\alpha_1 + \alpha_{2n-1} r^{-(2n-2)} = \beta_1 & & \alpha_1 - \alpha_{2n-1} r^{-(2n-2)} = \gamma_1 \\
\alpha_2 + \alpha_{2n-2} r^{-(2n-4)} = \beta_2 & & \alpha_2 - \alpha_{2n-2} r^{-(2n-4)} = \gamma_2 \\
\vdots & & \vdots \\
\alpha_{n-1} + \alpha_{n+1} r^{-2} = \beta_{n-1} & & \alpha_{n-1} - \alpha_{n+1} r^{-2} = \gamma_{n-1} \\
\alpha_n + \alpha_n = \beta_n, & &
\end{array}$$

so werden die beiden Gleichungen, wenn man sie mit r^{2n} dividirt

$$0 = \beta\cos n\varphi + \frac{\beta_1}{r}\cos(n-1)\varphi + \frac{\beta_2}{r^2}\cos(n-2)\varphi \ldots\ldots + \frac{\beta_{n-1}}{r^{n-1}}\cos\varphi + \frac{\beta_n}{2r^n}$$

$$0 = \gamma\sin n\varphi + \frac{\gamma_1}{r}\sin(n-1)\varphi + \frac{\gamma_2}{r^2}\sin(n-2)\varphi \ldots\ldots + \frac{\gamma_{n-1}}{r^{n-1}}\sin\varphi.$$

Es lassen sich aber durch die bekannten Reihen die Cosinus und Sinus des vielfachen Winkels als Function der Cosinus und Sinus des einfachen ausdrücken, und für n gleich einer ganzen positiven Zahl ist allgemein, wenn man alle negativen Potenzen der Cosinus und Sinus des einfachen Winkels wegläſst:

$$\cos n\varphi = 2^{n-1}\cos\varphi^n - \frac{n}{1}2^{n-3}\cos\varphi^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}2^{n-5}\cos\varphi^{n-4}$$
$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}2^{n-7}\cos\varphi^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}2^{n-9}\cos\varphi^{n-8} - \text{etc.}$$
$$\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} = 2^{n-1}\cos\varphi^{n-1} - \frac{n-2}{1}2^{n-3}\cos\varphi^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}2^{n-5}\cos\varphi^{n-5}$$
$$-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}2^{n-7}\cos\varphi^{n-7} + \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}2^{n-9}\cos\varphi^{n-9} - \text{etc.}$$

Substituirt man diese Reihen in die beiden letzten Gleichungen, so erhält man:

$$0 = 2^{n-1}\beta\cos\varphi^n + \frac{\beta_1}{r}2^{n-2}\cos\varphi^{n-1} + \frac{\beta_2}{r^2}2^{n-3}\cos\varphi^{n-2}$$
$$-\frac{n}{1}2^{n-3}\beta\cos\varphi^{n-2}$$
$$+\frac{\beta_3}{r^3}2^{n-4}\cos\varphi^{n-3} + \frac{\beta_4}{r^4}2^{n-5}\cos\varphi^{n-4}$$
$$-\frac{n-1}{1}\frac{\beta_1}{r}2^{n-4}\cos\varphi^{n-3} - \frac{n-2}{1}\frac{\beta_2}{r^2}2^{n-5}\cos\varphi^{n-4}$$
$$+\frac{n\cdot n-3}{1\cdot 2}\beta 2^{n-5}\cos\varphi^{n-4} + \ldots\text{ etc.}$$

$$0 = 2^{n-1}\gamma\cos\varphi^{n-1} + \frac{\gamma_1}{r}2^{n-2}\cos\varphi^{n-2} + \frac{\gamma_2}{r^2}2^{n-3}\cos\varphi^{n-3}$$
$$-\frac{n-2}{1}\gamma 2^{n-3}\cos\varphi^{n-3}$$
$$+\frac{\gamma_3}{r^3}2^{n-4}\cos\varphi^{n-4} + \frac{\gamma_4}{r^4}2^{n-5}\cos\varphi^{n-5}$$
$$-\frac{n-3}{1}\frac{\gamma_1}{r}2^{n-4}\cos\varphi^{n-4} - \frac{(n-4)}{1}\frac{\gamma_2}{r^2}2^{n-5}\cos\varphi^{n-5}$$
$$+\frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}\gamma 2^{n-5}\cos\varphi^{n-5} + \ldots\text{etc.}$$

Man wünscht aber eigentlich nicht $\cos\varphi$ zu erhalten, sondern die Gröfse f des trinomischen Factors der beiden imaginären Wurzeln, also nach der angenommenen Form $x = r(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1})$ die Gröfse

$$-2r\cos\varphi = t.$$

Multiplicirt man deshalb, um t als Wurzel zu bekommen, die Glieder beider Gleichungen nacheinander mit

$$(-2r)^0,\quad (-2r)^1,\quad (-2r)^2,\quad (-2r)^3\ldots$$

so werden sich beide Gleichungen durch 2^{n-1} dividiren lassen, und die Endform wird mit Weglassung aller negativen Potenzen von t sein:

$$\begin{aligned}0 = \beta t^n - \beta_1 t^{n-1} + \beta_2 t^{n-2} - \beta_3 t^{n-3} \ldots \pm \beta_n \\ - r^2 \left\{ n\beta t^{n-2} - (n-1)\beta_1 t^{n-3} + (n-2)\beta_2 t^{n-4} - \ldots \right\} \\ + r^4 \left\{ \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}\beta t^{n-4} - \frac{(n-1)(n-4)}{1\cdot 2}\beta_1 t^{n-5} + \frac{(n-2)(n-5)}{1\cdot 2}\beta_2 t^{n-6} - \ldots \right\} \\ - r^6 \left\{ \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}\beta t^{n-6} - \frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}\beta_1 t^{n-7} \ldots \right\} \\ + r^8 \left\{ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\beta t^{n-8} \ldots \right\} - \text{etc.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 = \gamma t^{n-1} - \gamma_1 t^{n-2} + \gamma_2 t^{n-3} - \gamma_3 t^{n-4} \ldots \pm \gamma_{n-1} \\ - r^2 \left\{ (n-2)\gamma t^{n-3} - (n-3)\gamma_1 t^{n-4} + (n-4)\gamma_2 t^{n-5} \ldots \right\} \\ + r^4 \left\{ \frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}\gamma t^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)}{1\cdot 2}\gamma_1 t^{n-6} \ldots \right\} \\ - r^6 \left\{ \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}\gamma t^{n-7} - \frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3}\gamma_1 t^{n-8} \ldots \right\} \\ + r^8 \left\{ \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\gamma t^{n-9} \ldots \right\} - \text{etc.}\end{aligned}$$

Wenn in die Werthe der β und γ, und in diese beiden Gleichungen, für r ein bestimmtes g substituirt ist, so werden beide Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel für t geben müssen, welche nichts anderes als der Werth des f ist, was zu dem substituirten g gehört. Die sämmtlichen Ausdrücke sind höchst einfach. Der Grad der Gleichungen ist nicht höher als unumgänglich nöthig, und die Division läſst sich, wie sogleich gezeigt werden wird, mit der gröſsten Leichtigkeit vermittelst der Logarithmen ausführen, so daſs man ohne Mühe aus dem gemeinschaftlichen linearen Divisor beider Gleichungen den Werth von f ohne Zweideutigkeit erhält. Gehören mehrere f zu demselben Werthe von g, wenn nämlich mehrere Paare imaginärer Wurzeln gleiche Moduln haben, so wird der gemeinschaftliche Divisior ein quadratischer oder cubischer. Die Wurzeln müssen in diesem Falle stets reell sein und die verschiedenen Werthe für die einzelnen f geben.

Für die einfacheren gewöhnlichen Fälle sind die Formeln folgende:

Vier imaginäre Wurzeln.

$$\begin{array}{ll} 1 + \alpha_4 r^{-4} = \beta & 1 - \alpha_4 r^{-4} = \gamma \\ \alpha_1 + \alpha_3 r^{-2} = \beta_1 & \alpha_1 - \alpha_3 r^{-2} = \gamma_1 \\ 2\alpha_2 \quad = \beta_2 & \end{array}$$

$$0 = \beta t^2 - \beta_1 t + \beta_2 - 2\beta r^2$$
$$0 = \gamma t - \gamma_1.$$

Hier reicht die letzte Gleichung schon allein aus. Die erste kann als Prüfung der Rechnung gebraucht werden.

Sechs imaginäre Wurzeln.

$$\begin{array}{ll} 1 + \alpha_6 r^{-6} = \beta & 1 - \alpha_6 r^{-6} = \gamma \\ \alpha_1 + \alpha_5 r^{-4} = \beta_1 & \alpha_1 - \alpha_5 r^{-4} = \gamma_1 \\ \alpha_2 + \alpha_4 r^{-2} = \beta_2 & \alpha_2 - \alpha_4 r^{-2} = \gamma_2 \\ 2\alpha_3 \quad = \beta_3 & \end{array}$$

$$0 = \beta t^3 - \beta_1 t^2 + (\beta_2 - 3\beta r^2) t - (\beta_3 - 2\beta_1 r^2)$$
$$0 = \gamma t^2 - \gamma_1 t + (\gamma_2 - \gamma r^2).$$

Acht imaginäre Wurzeln.

$$\begin{array}{ll} 1 + \alpha_8 r^{-8} = \beta & 1 - \alpha_8 r^{-8} = \gamma \\ \alpha_1 + \alpha_7 r^{-6} = \beta_1 & \alpha_1 - \alpha_7 r^{-6} = \gamma_1 \\ \alpha_2 + \alpha_6 r^{-4} = \beta_2 & \alpha_2 - \alpha_6 r^{-4} = \gamma_2 \\ \alpha_3 + \alpha_5 r^{-2} = \beta_3 & \alpha_3 - \alpha_5 r^{-2} = \gamma_3 \\ 2\alpha_4 \quad = \beta_4 & \end{array}$$

$$0 = \beta t^4 - \beta_1 t^3 + (\beta_2 - 4\beta r^2) t^2 - (\beta_3 - 3\beta_1 r^2) t + \beta_4 - 2\beta_2 r^2 + 2\beta r^4$$
$$0 = \gamma t^3 - \gamma_1 t^2 + (\gamma_2 - 2\gamma r^2) t - (\gamma_3 - \gamma_1 r^2).$$

Es würde keine Mühe machen, die Division in Zeichen wirklich auszuführen, und den Ausdruck von t als Function von r^2 und den β und γ hinzusetzen. Allein es ist weit bequemer, die Division numerisch zu machen. Denn vermittelst der Gauſs'ischen Tafeln, welche aus den Logarithmen zweier Zahlen sogleich durch einmaliges Eingehen den Logarithmen der Summe und Differenz ganz strenge finden lassen, und die besonders für Logarithmen von 5 Decimalen höchst bequem sind (für 7 Decimalen ist mir der Gebrauch dieser Tafeln nicht so bequem vorgekommen, doch kann es Mangel an Uebung sein), dividirt man solche Gleichungen mit einer Leichtigkeit in einander, die nichts zu wünschen übrig läſst.

Bei den Gauſs'ischen Tafeln wird der Logarithme von $a \pm b$ gefunden dadurch, daſs man zu dem Logarithmen der gröſsten Zahl eine aus den Tafeln genommene hinzugelegt oder abzieht. Die Form ist also allgemein

$$\lg (a \pm b) = \lg a \pm B,$$

wo B mit $\lg a - \lg b$ gefunden wird. Man bestimme nun die Logarithmen sämmtlicher Coefficienten beider Gleichungen und bringe sie durch Abziehen von $\lg \beta$ in der ersten, und $\lg \gamma$ in der zweiten Gleichung auf die Form

$$0 = t^n \quad - \delta t^{n-1} + \delta' t^{n-2} - \delta'' t^{n-3} \ldots$$
$$0 = t^{n-1} - \varepsilon\, t^{n-2} + \varepsilon' t^{n-3} - \varepsilon'' t^{n-4} \ldots$$

Hier bedeuten die δ und ε die Logarithmen der Coefficienten, denen die Zeichen ebenso wie den Zahlen vorgesetzt werden. Geht man nun mit $\delta - \varepsilon$ oder $\varepsilon - \delta$ in die Gauſs'ischen Tafeln ein, und ebenso mit $\delta' - \varepsilon'$ oder $\varepsilon' - \delta'$ etc., so erhält man die verschiedenen B, die gehörig unter $\varepsilon\, \varepsilon'\, \varepsilon''$ gesetzt werden, und nach den Zeichen mit dem gröſseren Logarithmen verbunden geben

$$0 = \zeta t^{n-1} + \zeta' t^{n-2} + \zeta'' t^{n-3} \ldots$$

Diese Gleichung bringt man wieder durch Abziehen von ζ auf die Form

$$0 = t^{n-1} + \theta\, t^{n-2} + \theta' t^{n-3} \ldots \text{ etc.}$$

und verbindet sie auf dieselbe Weise mit der Gleichung vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade. Auf dieselbe Weise fährt man fort, bis man zu dem linearen gemeinschaftlichen Factor kommt, der gleich Null gesetzt, den Werth von f giebt. Das Schema ist also folgendes:

$$0 = \beta t^n \quad - \beta_1 t^{n-1} + (\beta_2 - n\beta r^2)\, t^{n-2} \ldots\ldots . \text{ etc.}$$
$$0 = \gamma t^{n-1} - \gamma_1 t^{n-2} + (\gamma_2 - (n-2)\gamma r^2)\, t^{n-3} \ldots \text{ etc.}$$

Hieraus werden zuerst die Logarithmen statt der Zahlen gesetzt, die Zeichen der Zahlen aber beibehalten, und dann wird nach und nach gebildet

$$\begin{array}{l}
0 = t^n \quad + \delta t^{n-1} + \delta' t^{n-2} + \delta'' t^{n-3} \ldots \\
0 = t^{n-1} + \varepsilon t^{n-2} + \varepsilon' t^{n-3} + \varepsilon'' t^{n-4} \ldots \\
\qquad\qquad B \qquad\quad B' \qquad\quad B'' \ldots \\
\hline
\qquad\quad \theta t^{n-1} + \theta' t^{n-2} + \theta'' t^{n-3} \ldots \\
\\
0 = t^{n-1} + \zeta t^{n-2} + \zeta' t^{n-3} + \zeta'' t^{n-4} \ldots \\
\qquad\qquad B_1 \qquad\quad B_1' \qquad\quad B_1'' \ldots \\
\hline
\qquad\quad \eta t^{n-2} + \eta' t^{n-3} + \eta'' t^{n-4} \ldots \\
\\
0 = t^{n-2} + \iota t^{n-3} + \iota' t^{n-4} + \iota'' t^{n-5} \ldots \\
\qquad\qquad B_2 \qquad\quad B_2' \qquad\quad B_2'' \ldots \\
\hline
\qquad\quad \varkappa t^{n-2} + \varkappa' t^{n-3} + \varkappa'' t^{n-4} \ldots \\
\\
0 = t^{n-2} + \lambda t^{n-3} + \lambda' t^{n-4} + \lambda'' t^{n-5} \ldots
\end{array}$$

Die einzige Tafel, die man gebraucht bei dieser Division, ist die Gaufs'ische für Differenz und Summe der Logarithmen, und die Hauptaufmerksamkeit wird auf die Zeichen gerichtet werden müssen, um gehörig zu addiren oder zu subtrahiren, und dem Resultate sein ihm zukommendes Zeichen zu geben.

Die beiden Gleichungen zwischen t und r haben aber noch eine weitere Bedeutung, die für die Auflösung der Gleichungen im Allgemeinen von Wichtigkeit ist. Denn wenngleich sie aus der Form der imaginären Wurzeln abgeleitet sind, so gelten sie doch für alle trinomische Factoren, auch für die, deren Wurzeln reell sind. Wenn für irgend welchen trinomischen Factor

$$x^2 + tx + v$$

der Werth von v bekannt geworden ist, und man substituirt ihn an die Stelle der r^2 in β, γ und in die beiden Gleichungen, so giebt die Division beider in einander den Werth von t, der zu v gehört. Man kann nämlich die beiden linearen Factoren von x^2+tx+v jedesmal darstellen unter der Form

$$(x+y\sqrt{v})\left(x+\frac{1}{y}\sqrt{v}\right).$$

Denn für ein positives v, oder $\sqrt{v}=$ einer reellen Gröſse g, wird

$$t=g\left(y+\frac{1}{y}\right)$$

und da t in diesem Falle die Summe beider Wurzeln ist, so werden die Wurzeln selbst gy und $g\frac{1}{y}$, oder wenn man sie mit a und b bezeichnet, so wird

$$y=\sqrt{\frac{a}{b}},\qquad \frac{1}{y}=\sqrt{\frac{b}{a}},\qquad g=\sqrt{ab}.$$

Diese Form gilt für reelle Wurzeln, welche, wegen v positiv, gleiches Zeichen haben müssen, so wie für imaginäre, bei welchen letzteren:

$$y=\sqrt{\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\alpha-\beta\sqrt{-1}}}=\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}},\qquad \frac{1}{y}=\frac{\alpha-\beta\sqrt{-1}}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}},\quad .\quad g=\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}.$$

Wenn aber v negativ, der Fall, wo die Wurzeln stets reell sein müssen, aber verschiedenes Zeichen haben, so wird

$$y=-\sqrt{-1}\sqrt{\frac{a}{b}},\qquad \frac{1}{y}=\sqrt{-1}\sqrt{\frac{b}{a}},\qquad g=\sqrt{-1}\sqrt{ab},$$

und folglich $\qquad t=a-b,$

wie es hier sein muſs. Substituirt man nun in die Gleichung

$$x^{2n}+\alpha_1 x^{2n-1}+\alpha_2 x^{2n-2}\ldots\ldots\ldots+\alpha_{2n}=0$$

die beiden Werthe von x

$$x=-gy\qquad\text{und}\qquad x=-\frac{g}{y},$$

so erhält man zwei Gleichungen

$$g^{2n}y^{2n} - \alpha_1 g^{2n-1}y^{2n-1} + \alpha_2 g^{2n-2}y^{2n-2} - \ldots\ldots + \alpha_{2n-2}g^2y^2 - \alpha_{2n-1}gy + \alpha_{2n} = 0$$

$$g^{2n}y^{-2n} - \alpha_1 g^{2n-1}y^{-(2n-1)} + \alpha_2 g^{2n-2}y^{-(2n-2)} - \ldots\ldots + \alpha_{2n-2}g^2y^{-2} - \alpha_{2n-1}gy^{-1} + \alpha_{2n} = 0.$$

Man multiplicire die erste mit $g^{-2n}y^{-n}$, die zweite mit $g^{-2n}y^n$, so werden sie

$$y^n - \alpha_1 g^{-1}y^{n-1} + \alpha_2 g^{-2}y^{n-2} - \ldots\ldots + \alpha_{2n-2}g^{-(2n-2)}y^{-(n-2)} - \alpha_{2n-1}g^{-(2n-1)}y^{-(n-1)} + \alpha_{2n}g^{-2n}y^{-n} = 0$$

$$y^{-n} - \alpha_1 g^{-1}y^{-(n-1)} + \alpha_2 g^{-2}y^{-(n-2)} - \ldots\ldots + \alpha_{2n-2}g^{-(2n-2)}y^{n-2} - \alpha_{2n-1}g^{-(2n-1)}y^{n-1} + \alpha_{2n}g^{-2n}y^n = 0.$$

Legt man diese beiden letzten zusammen, und subtrahirt sie von einander, so erhält man die zwei folgenden Gleichungen:

$$(y^n + y^{-n}) - \alpha_1 g^{-1}(y^{n-1} + y^{-(n-1)}) + \alpha_2 g^{-2}(y^{n-2} + y^{-(n-2)}) - \ldots + \alpha_{2n-2}g^{-(2n-2)}(y^{n-2} + y^{-(n-2)}) - \alpha_{2n-1}g^{-(2n-1)}(y^{n-1} + y^{-(n-1)}) + \alpha_{2n}g^{-2n}(y^n + y^{-n}) = 0$$

und

$$(y^n - y^{-n}) - \alpha_1 g^{-1}(y^{n-1} - y^{-(n-1)}) + \alpha_2 g^{-2}(y^{n-2} - y^{-(n-2)}) - \ldots - \alpha_{2n-2}g^{-(2n-2)}(y^{n-2} - y^{-(n-2)}) + \alpha_{2n-1}g^{-(2n-1)}(y^{n-1} - y^{-(n-1)}) - \alpha_{2n}g^{-2n}(y^n - y^{-n}) = 0.$$

Um hier die Glieder, welche gleich weit ab vom Anfang und Ende stehen, und die einerlei Potenz von y angehören, zu vereinigen, setze man wie oben:

$$\begin{array}{ll}
1 + \alpha_{2n}\,g^{-2n} = \beta & 1 - \alpha_{2n}\,g^{-2n} = \gamma \\
\alpha_1 + \alpha_{2n-1}g^{-(2n-2)} = \beta_1 & \alpha_1 - \alpha_{2n-1}g^{-(2n-2)} = \gamma_1 \\
\alpha_2 + \alpha_{2n-2}g^{-(2n-4)} = \beta_2 & \alpha_2 - \alpha_{2n-2}g^{-(2n-4)} = \gamma_2 \\
\vdots & \vdots \\
\alpha_{n-1} + \alpha_{n+1}g^{-2} = \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} - \alpha_{n+1}g^{-2} = \gamma_{n-1} \\
2\alpha_n = \beta_n, &
\end{array}$$

so erhält man die Form

$$\beta(y^n + y^{-n}) - \frac{\beta_1}{g}(y^{n-1} + y^{-(n-1)}) + \frac{\beta_2}{g^2}(y^{n-2} + y^{-(n-2)}) - \dots$$
$$\pm \frac{\beta_{n-1}}{g^{n-1}}(y + y^{-1}) \mp \beta_n = 0$$

$$\gamma(y^n - y^{-n}) - \frac{\gamma_1}{g}(y^{n-1} - y^{-(n-1)}) + \frac{\gamma_2}{g^2}(y^{n-2} - y^{-(n-2)}) - \dots$$
$$\cdot \pm \frac{\gamma_{n-1}}{g^{n-1}}(y - y^{-1}) \qquad = 0.$$

Es haben nun aber die hier vorkommenden Functionen die Eigenschaft, wovon man sich durch unmittelbare Rechnung überzeugen kann, dafs

$$y^n + y^{-n} = (y + y^{-1})(y^{n-1} + y^{-(n-1)}) - (y^{n-2} + y^{-(n-2)})$$
$$y^n - y^{-n} = (y + y^{-1})(y^{n-1} - y^{-(n-1)}) - (y^{n-2} - y^{-(n-2)}),$$

für welche letztere Gleichung man auch schreiben kann

$$\frac{y^n - y^{-n}}{y - y^{-1}} = (y + y^{-1})\left(\frac{y^{n-1} - y^{-(n-1)}}{y - y^{-1}}\right) - \left(\frac{y^{n-2} - y^{-(n-2)}}{y - y^{-1}}\right);$$

fängt man also von den einfachsten Functionen dieser Art an, so ist

$$y^0 + y^{-0} = 2$$
$$y + y^{-1} = \frac{t}{g} \quad \text{nach dem Obigen}$$
$$y^2 + y^{-2} = \frac{t^2}{g^2} - 2$$
$$y^3 + y^{-3} = \frac{t^3}{g^3} - 3\frac{t}{g}$$
$$y^4 + y^{-4} = \frac{t^4}{g^4} - 4\frac{t^2}{g^2} + 2$$

und allgemein, was sich ebenfalls durch Prüfung bei dem Uebergange von n auf $n+1$ zeigen läfst, mit Weglassung aller negativen Potenzen von t:

$$y^n + y^{-n} = \frac{t^n}{g^n} - n\frac{t^{n-2}}{g^{n-2}} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}\frac{t^{n-4}}{g^{n-4}} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{t^{n-6}}{g^{n-6}} \dots$$

eine Reihe, die ganz der obigen Cosinus-Reihe entspricht, da ihre Ableitung auch völlig identisch mit der von der Reihe für cos $n\varphi$ ist.

Ebenso ist

$$\frac{y^0 - y^{-0}}{y - y^{-1}} = 0$$

$$\frac{y - y^{-1}}{y - y^{-1}} = 1$$

$$\frac{y^2 - y^{-2}}{y - y^{-1}} = \frac{t}{g}$$

$$\frac{y^3 - y^{-3}}{y - y^{-1}} = \frac{t^2}{g^2} - 1$$

$$\frac{y^4 - y^{-4}}{y - y^{-1}} = \frac{t^3}{g^3} - 2\frac{t}{g}$$

$$\frac{y^5 - y^{-5}}{y - y^{-1}} = \frac{t^4}{g^4} - 3\frac{t^2}{g^2} + 1$$

und allgemein mit Weglassung aller negativen Potenzen von t:

$$\frac{y^n - y^{-n}}{y - y^{-1}} = \frac{t^{n-1}}{g^{n-1}} - (n-2)\frac{t^{n-3}}{g^{n-3}} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}\frac{t^{n-5}}{g^{n-5}} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{t^{n-7}}{g^{n-7}}.$$

Eine Reihe, die wiederum mit der obigen Reihe für $\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$ der Form und Ableitung nach identisch ist.

Substituirt man nun diese Werthe in die obigen Gleichungen, und multiplicirt sie nachher mit g^n, so erhält man

$$\begin{aligned}\beta t^n \quad & - \beta_1 t^{n-1} + \beta_2 t^{n-2} - \beta_3 t^{n-3} \ldots\ldots \pm \beta_n \\ & - g^2 \left\{ \beta n t^{n-2} - \beta_1 (n-1) t^{n-3} + \beta_2 (n-2) t^{n-4} \ldots \right\} \\ & + g^4 \left\{ \frac{n\cdot(n-3)}{1\cdot 2} t^{n-4} - \frac{(n-1)(n-4)}{1\cdot 2} t^{n-5} + \ldots \right\} \text{ etc.} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma t^{n-1} & - \gamma_1 t^{n-2} + \gamma_2 t^{n-3} - \gamma_3 t^{n-4} \ldots\ldots \pm \gamma_{n-1} \\ & - g^2 \left\{ \gamma (n-2) t^{n-3} - \gamma_1 (n-3) t^{n-4} + \gamma_2 (n-4) t^{n-5} \ldots \right\} \\ & + g^4 \left\{ \gamma \frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2} t^{n-5} - \gamma_1 \frac{(n-4)(n-5)}{1\cdot 2} t^{n-6} \ldots \right\} \text{ etc.} = 0,\end{aligned}$$

das heifst ganz die obigen Gleichungen. Es ist klar, dafs hier g^2 nur statt v eingeführt ist, um $\sqrt{v} = g$ bequemer zu schreiben. Auch kommen in den sämmtlichen Formeln nur Potenzen von g^2 vor. Hiernach läfst sich ganz allgemein folgender Satz aussprechen:

Wenn in einem trinomischen Factor einer Gleichung

$$x^{2n} + \alpha_1\, x^{2n-1} + \alpha_2\, x^{2n-2} + \cdots\cdots + \alpha_{2n} = 0,$$

der von der Form ist $x^2 + tx + v$, die Gröfse v auf irgend welche Art bekannt geworden ist, so findet man das zugehörige t, wenn man setzt:

$$\begin{array}{llll}
1 \quad + \dfrac{\alpha_{2n}}{v^n} = \beta & & 1 \quad - \dfrac{\alpha_{2n}}{v^n} = \gamma \\[2ex]
\alpha_1 \quad + \dfrac{\alpha_{2n-1}}{v^{n-1}} = \beta_1 & & \alpha_1 \quad - \dfrac{\alpha_{2n-1}}{v^{n-1}} = \gamma_1 \\[2ex]
\alpha_2 \quad + \dfrac{\alpha_{2n-2}}{v^{n-2}} = \beta_2 & & \alpha_2 \quad - \dfrac{\alpha_{2n-2}}{v^{n-2}} = \gamma_2 \\
\quad\vdots & & \quad\vdots \\
\alpha_{n-1} + \dfrac{\alpha_{n+1}}{v} = \beta_{n-1} & & \alpha_{n-1} - \dfrac{\alpha_{n+1}}{v} = \gamma_{n-1} \\[2ex]
\quad 2\alpha_n \qquad = \beta_n & &
\end{array}$$

und dann die gemeinschaftliche Wurzel der folgenden beiden Gleichungen, in welchen alle negativen Potenzen von t weggelassen werden müssen, auf bekannte Weise bestimmt:

$$\begin{aligned}
\beta t^n \;& - \beta_1\, t^{n-1} + \beta_2\, t^{n-2} - \beta_3\, t^{n-3} \cdots\cdot \pm \beta^n \\
& - v\, \left\{ \beta n t^{n-2} - \beta_1\, (n-1)\, t^{n-3} + \beta_2\, (n-2)\, t^{n-4} - \cdots\cdot \right\} \\
& + v^2 \left\{ \beta\, \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}\, t^{n-4} - \beta_1\, \frac{(n-1)\,(n-4)}{1 \cdot 2}\, t^{n-5} - \cdots\cdot \right\} \\
& - v^3 \left\{ \beta\, \frac{n(n-4)\,(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\, t^{n-6} - \cdots\cdot \right\} \text{ etc.} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma t^{n-1} & - \gamma_1\, t^{n-2} + \gamma_2\, t^{n-3} - \gamma_3\, t^{n-4} \cdots\cdot \pm \gamma_n \\
& - v\, \left\{ \gamma(n-2)\, t^{n-3} - \gamma_1\, (n-3)\, t^{n-4} + \gamma_2\, (n-4)\, t^{n-5} \cdots\cdot \right\} \\
& + v^2 \left\{ \gamma\, \frac{(n-3)\,(n-4)}{1 \cdot 2}\, t^{n-5} - \gamma_1\, \frac{(n-4)\,(n-5)}{1 \cdot 2}\, t^{n-6} + \cdots\cdot \right\} \\
& + v^3 \left\{ \gamma\, \frac{(n-4)\,(n-5)\,(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\, t^{n-7} - \cdots\cdot \right\} \text{ etc.} = 0.
\end{aligned}$$

Sobald v und t gefunden sind, so werden die einfachen Factoren des trinomischen Factors am leichtesten auf folgende Art bestimmt, wobei drei Fälle zu unterscheiden sind:

1) v positiv $\qquad t < 2\sqrt{v}$

$$\frac{t}{2\sqrt{v}} = \cos\varphi; \quad x^2 + tx + v = (x + \{\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}\}\sqrt{v})$$
$$(x + \{\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1}\}\sqrt{v})$$

2) v positiv $\qquad t > 2\sqrt{v}$

$$\frac{2\sqrt{v}}{t} = \sin\varphi; \quad x^2 + tx + v = (x + \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{v})(x + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{v}),$$

3) v negativ

$$\frac{2\sqrt{v}}{t} = \operatorname{tg}\varphi; \quad x^2 + tx - v = (x + \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{v})(x - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\sqrt{v}).$$

Es wird hier bei $\sqrt{v}$ überall abgesehen von dem Zeichen, was v vor sich hat, und nur seine absolute Gröſse in Betracht gezogen.

Bei der Anwendung dieses allgemeinen Satzes macht man den Grad der Gleichung immer zu einer geraden Zahl; wenn es nöthig sein sollte, durch Hinzufügung eines Factors $(x+0)$ oder durch Multiplication der Gleichung mit x, wobei α_{2n} dann $=$ Null wird.

Auſserdem kann bei der Benutzung der oben entwickelten Art, die v durch lauter gerade Potenzen der Wurzeln zu bestimmen, der Zweifel entstehen, ob in den trinomischen Factoren v positiv oder negativ zu nehmen ist. Will man diesem Zweifel ganz ausweichen, so bestimme man nicht die trinomischen Factoren der gegebenen Gleichung selbst, sondern die trinomischen Factoren der Gleichung, deren Wurzeln die Quadrate der ursprünglichen Wurzeln sind, oder der ersten unter den abgeleiteten. Diese Gleichung wird nämlich zu Wurzeln haben 1) die Quadrate der reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung, die als Quadrate ihrer Natur nach positiv sind, und stets ein positives v geben müssen; 2) die Quadrate der vollständigen imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung, die den trinomischen Factor $x^2 + 2g^2\cos 2\varphi\, x + g^4$ geben, und also ebenfalls ein positives v; 3) die Quadrate der unvollständigen imaginären Wurzeln unter den gegebenen, $x + g\sqrt{-1}$, $x - g\sqrt{-1}$, wenn solche vorhanden sind, in denen $\varphi = 90°$ oder überhaupt von der Form $(n + \frac{1}{2})\pi$, diese werden den trinomischen Factor $x^2 - 2g^2 x + g^4$ also ebenfalls ein positives v geben; auch kann nie der Fall eintreten, dafs die beiden einzelnen Factoren $(x-g^2)(x-g^2)$ getrennt würden, und sich so mit anderen zu einem negativen v verbänden, da die v stets ihrer Gröfse nach geordnet erscheinen, und folglich zwei gleich grofse lineare Factoren sich nothwendig zu einem trinomischen Factor vereinigen müssen. Wenn man auf diese Weise die trinomischen Factoren der ersten abgeleiteten Gleichung, welche etwa durch

$$x^2 + t_2 x + v_2$$

bezeichnet werden mögen, gefunden hat, wo v_2 nothwendig stets positiv sein mufs, so hat man für die Factoren der gegebenen Gleichung

$$v = \pm \sqrt{v_2}, \quad t = \sqrt{(t_2^2 \pm 2\sqrt{v_2})},$$

wo die Vorzeichen zusammengehören, und wobei man auch noch den Fall, dafs t positiv oder negativ sein kann, in Betracht ziehen mufs. Bei reellen Wurzeln wird sich dieses leicht entscheiden, und bei imaginären kann man auch immer direct die Factoren der gegebenen Gleichung selbst bestimmen, da v bei diesen immer positiv ist.

Ueberhaupt ist diese Ungewifsheit über das Zeichen von v von keinem praktischen Nachtheil. Denn der Fall, wo man bei reellen Wurzeln es vorziehen mufs, die trinomischen Factoren statt der einzelnen Wurzeln selbst zu bestimmen, tritt nur ein, wenn zwei Wurzeln gleich oder so nahe einander gleich sind, dafs sie erst sehr spät sich von einander trennen lassen würden. Unter gleichen Wurzeln werden alle die verstanden, welche der absoluten Gröfse nach ohne Rücksicht auf das Zeichen einander gleich sind oder nahe kommen. Ein solcher Fall ist an sich schon sehr selten, wenn er aber eintritt, so giebt es ein fast immer unfehlbares Kennzeichen, das oder die v, die zu reellen Wurzeln gehören, von denen zu unterscheiden, die von imaginären gebildet werden. Denn da alle reellen Wurzeln gleich in der ersten abgeleiteten Gleichung nur positive Wurzeln geben, so kann irgend ein negatives Zeichen überhaupt nur dann in irgend einer der abgeleiteten

Gleichungen vorkommen, wenn die erste Gleichung imaginäre Wurzeln hat, und bei den verschiedenen Stufen, die m und mit ihm $\cos m\varphi$ durchgeht, wird auch fast immer in einer der abgeleiteten Gleichungen in diesem Falle einmal ein Minuszeichen erscheinen. Dieser Zeichenwechsel wird einem oder mehreren Coefficienten, in denen er zuerst sich gezeigt hat, wiederum in den meisten Fällen eigen bleiben, und kann besonders bei den höheren Potenzen der Wurzeln als ein sicheres Kennzeichen angesehen werden, dafs der Coefficient, welcher zuerst nach einem solchen Minuszeichen eine bestimmte Grenze erreicht, den Modul einer imaginären Wurzel enthält. Man kann daher mit völliger Sicherheit schliefsen, dafs wenn vor einem Gliede, wodurch ein v bestimmt wird, ein anderes vorhergeht, welches bei den höheren Potenzen irgend einmal einen Zeichenwechsel dargeboten hat, das aus diesem Gliede erhaltene v nothwendig positiv ist, und wird nur bei den v, denen nie ein Zeichenwechsel vorangegangen ist, über das Zeichen ungewifs sein können, und also auch nur in diesem seltenen Falle zu dem vorgeschlagenen Mittel zu greifen brauchen.

Endlich wird es in jedem Falle zweckmäfsig sein, die beiden linearen Gleichungen in Bezug auf f, die aus den Coefficienten α_1 und α_{2n-1} hervorgehen, mit zu benutzen, so dafs man, vermittelst der zuletzt abgeleiteten Gleichungen, immer zwei f weniger als überhaupt erforderlich sind, bestimmt.

Hat man auf diese Weise die erste Näherung für die Werthe von t und v, ebenfalls vermittelst der Logarithmen von 5 Decimalen erhalten, so ist es eben so leicht wie bei den reellen Wurzeln die genaueren Werthe zu finden. Die Gleichung

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx_0} \triangle x_0 = [x_0^n] + [nx_0^n] \frac{\triangle x_0}{x_0}$$

findet auch hier statt. Hat der trinomische Factor imaginäre Wurzeln, wo folglich

$$x_0 = -g_0(\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0 \sqrt{-1}), \quad x_0' = -g_0(\cos\varphi_0 - \sin\varphi_0 \sqrt{-1}),$$

so erhält man durch Substitution von $(-g_0)^n \cos n\varphi_0$ für jedes x_0^n, und $(-g_0)^n \sin n\varphi_0$ für jedes $x_0'^n$ den Werth von

$$f(x_0) = [(-g_0)^n \cos n\varphi_0] + [(-g_0)^n \sin n\varphi_0]\sqrt{-1}$$

und $$f(x_0') = [(-g_0)^n \cos n\varphi_0] - [(-g_0)^n \sin n\varphi_0]\sqrt{-1}.$$

Auf gleiche Weise wird

$$[nx_0^n] = [n(-g_0)^n \cos n\varphi_0] + [n(-g_0)^n \sin n\varphi_0]\sqrt{-1}$$

und $$[nx_0'^n] = [n(-g_0)^n \cos n\varphi_0] - [n(-g_0)^n \sin n\varphi_0]\sqrt{-1}.$$

Endlich wird wegen

$$\begin{aligned} \lg x_0 &= \lg(-g_0) + \lg(\cos\varphi_0 + \sin\varphi_0\sqrt{-1}) \\ &= \lg(-g_0) + \varphi_0\sqrt{-1} \end{aligned}$$

und $$\lg x = \lg(-g) + \varphi\sqrt{-1}$$

$$\triangle \lg x_0 = \triangle \lg g_0 + \triangle\varphi_0\sqrt{-1}$$

und ebenso $\triangle \lg x_0' = \triangle \lg g_0 - \triangle\varphi_0\sqrt{-1}$.

Setzt man also, was immer erlaubt ist

$$\begin{aligned} &[(-g_0)^n \cos n\varphi_0] = P\cos Q \qquad &[n(-g_0)^n \cos n\varphi_0] = \varrho\cos\psi \\ &[(-g_0)^n \sin n\varphi_0] = P\sin Q \qquad &[n(-g_0)^n \sin n\varphi_0] = \varrho\sin\psi, \end{aligned}$$

so hat man die zwei Gleichungen

$$0 = P\cos Q + P\sin Q\sqrt{-1} + \{\varrho\cos\psi + \varrho\sin\psi\sqrt{-1}\}\{\triangle\lg g_0 + \triangle\varphi_0\sqrt{-1}\}$$
$$0 = P\cos Q - P\sin Q\sqrt{-1} + \{\varrho\cos\psi - \varrho\sin\psi\sqrt{-1}\}\{\triangle\lg g_0 - \triangle\varphi_0\sqrt{-1}\},$$

aus welchen man durch Verbindung vermittelst Addition und Subtraction erhält

$$0 = P\cos Q + \varrho\cos\psi\,\triangle\lg g_0 - \varrho\sin\psi\,\triangle\varphi_0$$
$$0 = P\sin Q + \varrho\sin\psi\,\triangle\lg g_0 + \varrho\cos\psi\,\triangle\varphi_0$$

oder nach gehöriger Elimination

$$\triangle\lg g_0 = -\frac{P\cos(Q-\psi)}{\varrho}M, \qquad \triangle\varphi_0 = -\frac{P\sin(Q-\psi)}{\varrho},$$

wo der Factor M wie oben den Modulus des briggischen Systems bezeichnet. Aus beiden kann man, wenn man es vorzieht, ableiten

$$\triangle f_0 = -\frac{2Pg_0\cos(Q-\psi+\varphi_0)}{\varrho}$$

oder $$\triangle\lg f_0 = -\frac{P\cos(Q-\psi+\varphi_0)}{\varrho\cos\varphi_0}M.$$

Die Rechnung kommt sonach im Wesentlichen auf die Substitution von den beiden Werthen von $x^n = (-g)^n \cos n\varphi$ und $x^n = (-g)^n \sin n\varphi$ hinaus, da die Ermittelung von $n(-g)^n \cos n\varphi$ und $n(-g)^n \sin n\varphi$, oder die Multiplication jedes Gliedes mit dem Exponenten der Potenz von x, welche in ihm vorkommt, kaum in Anschlag zu bringen ist.

Sind beide Wurzeln reell, so substituirt man jede einzelne in die Gleichung, und bestimmt ihre Correction, wie oben gezeigt ward, oder wenn man es vorzieht, so kann man die Correction von v und t suchen. Die Substitution der Wurzeln giebt, wenn $\sqrt{v} = g$

$$[(-g_0 y_0)^n] = A, \qquad [(-g_0 y_0^{-1})^n] = B,$$

weil die beiden Werthe von x sind $-g_0 y_0$ und $-\dfrac{g_0}{y_0}$, und daraus folgen die Differentialquotienten in Bezug auf den Logarithmen der Wurzeln

$$[n(-g_0 y_0)^n] = p, \qquad [n(-g_0 y_0^{-1})^n] = q.$$

Man hat folglich

$$0 = A + p\{\triangle \lg g_0 + \triangle \lg y_0\}$$
$$0 = B + q\{\triangle \lg g_0 - \triangle \lg y_0\},$$

woraus

$$\frac{1}{M}\triangle \lg g_0 = -\tfrac{1}{2}\left\{\frac{A}{p} + \frac{B}{q}\right\}$$
$$\frac{1}{M}\triangle \lg y_0 = -\tfrac{1}{2}\left\{\frac{A}{p} - \frac{B}{q}\right\}$$

und dann wegen $\triangle \lg t_0 = \triangle \lg g_0 + \triangle \lg\left(y_0 + \dfrac{1}{y_0}\right)$ für Wurzeln, die gleiche Zeichen haben, folgen wird:

$$\frac{1}{M}\triangle \lg v_0 = -\left\{\frac{A}{p} + \frac{B}{q}\right\}$$
$$\frac{1}{M}\triangle \lg t_0 = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{A}{p} + \frac{B}{q}\right) - \tfrac{1}{2}\cos\varphi\left\{\frac{A}{p} - \frac{B}{q}\right\}$$
$$= -\left\{\frac{A}{p}\cos \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \frac{B}{q}\sin \tfrac{1}{2}\varphi^2\right\}$$

und für $\triangle \lg t_0 = \triangle \lg g_0 + \triangle \lg \left(y_0 - \frac{1}{y_0}\right)$, für Wurzeln, die ungleiche Zeichen haben

$$\frac{1}{M} \triangle \lg v_0 = -\left\{\frac{A}{p} + \frac{B}{q}\right\}$$

$$\frac{1}{M} \triangle \lg t_0 = -\tfrac{1}{2}\left\{\frac{A}{p} + \frac{B}{q}\right\} - \tfrac{1}{2} \sec\varphi \left\{\frac{A}{p} - \frac{B}{q}\right\}$$

$$= - \frac{1}{\cos\varphi}\left\{\frac{A}{p} \cos\tfrac{1}{2}\varphi^2 - \frac{B}{q} \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2\right\}.$$

In diesem letzten Satze ist durch die Ermittelung der trinomischen Factoren die Auflösung der Aufgabe vollständig enthalten, und es wird nun keine Schwierigkeit haben, in dem allgemeinen Falle, wo imaginäre und reelle Wurzeln zugleich vorkommen, den Gang der Operationen und die Form des Endresultats zu übersehen. Man kann dazu entweder die beiden oben gegebenen Formen für reelle Wurzeln und für imaginäre mit einander multipliciren, wodurch man erhalten wird

$$x^{2n} + \{[a^m] + [f_m]\} x^{2n-1} + \{[a^m b^m] + [a^m f_m] + [g^{2m}]\} x^{2n-2}$$
$$+ \{[a^m b^m c^m] + [a^m b^m f_m] + [a^m g^{2m}] + [g^{2m} f'_m]\} x^{2n-3}$$
$$+ \{[a^m b^m c^m d^m] + [a^m b^m c^m f_m] + [a^m b^m g^{2m}] + [a^m g^{2m} f'_m]$$
$$+ [g^{2m} g'^{2m}]\} x^{2n-4} \ldots\ldots \text{etc.} = 0.$$

Oder noch einfacher betrachtet man jede Gleichung, nachdem man nöthigenfalls ihren Grad durch Multiplication mit x zu einer geraden Zahl gemacht hat, als ein Product der trinomischen Factoren

$$(x^2 + tx + v)(x^2 + t'x + v')(x^2 + t''x + v'') \ldots = 0.$$

Wenn dann durch Erhebung der Wurzeln zur m^{ten} Potenz die Form erhalten ist:

$$x^{2n} + C_1 x^{2n-1} + C_2 x^{2n-2} + C_3 x^{2n-3} + C_4 x^{2n-4} \ldots + C_{2n} = 0,$$

so findet im Allgemeinen, unter der Annahme, daſs $v > v'$, $v' > v''$, $v'' > v''' \ldots v^{(n-1)} > v^{(n)}$, und jede reelle Wurzel, welche zu einem v gehört, gröſser ist als jede zu einem kleineren v gehörige Wurzel, oder die Quadratwurzel aus einem kleineren v, das Verhalten statt, daſs nach der Gröſse der v geordnet:

$$\begin{aligned} C_2 &= v^m \\ C_4 &= v^m v'^m \\ C_6 &= v^m v'^m v''^m \\ &\vdots \\ C_{2r+2} &= v^m v'^m v''^m \ldots v^{(r)m}. \end{aligned}$$

Die Coefficienten C_1, C_3, C_5, überhaupt die von der Form C_{2r+1} sind dagegen Functionen der verschiedenen t; wenn irgend ein $v^{(r)}$ zu einem trinomischen Factor gehört, dessen Wurzeln reell sind, so wird C_{2r+1} die Form haben

$$C_{2r+1} = v^m v'^m \ldots\ldots v^{(r-1)m} a_r^m,$$

wo a_r die gröfste reelle Wurzel ist, die zu v_r gehört; das letztere hat dann den Werth $a_r\, b_r$ und man findet durch Division

$$\frac{C_{2r+1}}{C_{2r}} = a_r^m, \qquad \frac{C_{2r+2}}{C_{2r+1}} = b_r^m.$$

Wenn dagegen $v^{(r)}$ zu einem trinomischen Factor gehört, dessen Wurzeln imaginär sind, so nähert sich C_{2r+1} nicht continuirlich einer bestimmten Grenze, sondern hat stets Werthe, die niemals den Werth von

$$2 v^m v'^m v''^m \ldots v^{(r-1)m} v^{(r)\frac{1}{2}m}$$

überschreiten können. Der Coefficient C_{2r+1} behält folglich immer schwankende, häufig mit dem Minuszeichen behaftete, Werthe, welches letztere, wenn es sich in irgend einer der abgeleiteten Gleichungen zeigt, ein unfehlbares Kennzeichen ist, dafs die gegebene Gleichung imaginäre Wurzeln hat. Hat man durch Division von

$$\frac{C_{2r+2}}{C_{2r}} = v^r$$

die v^r gefunden, sie mögen zu imaginären Wurzeln gehören oder zu reellen, so benutzt man zur Bestimmung der t, wenn nicht mehr als 4 imaginäre Wurzeln vorhanden sind oder zwei t gesucht werden, die linearen Gleichungen, die sich für die t aus den Coefficienten α_1 und α_{2n-1} der gegebenen Gleichung finden. Werden mehrere t verlangt, so substituirt man die Werthe der verschiedenen v in die oben entwickelten Gleichungen vom n^{ten} und $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, und erhält durch die Aufsuchung ihres gemeinschaftlichen Divisors den Werth des zu jedem v gehörigen t.

Im Falle endlich, dafs ein $v^{(r)}$ zu völlig gleichen Wurzeln gehört, so hat der Coefficient C_{2r+1} den Werth

$$C_{2r+1} = 2 v^m v'^m \dots v^{(r-1)m} v^{(r)\frac{1}{2}m},$$

denselben, welcher bei imaginären Wurzeln die äufserste Grenze bildet.

Ausnahmen von dieser allgemeinen Regel treten nur ein, wenn die obigen Bedingungen nicht alle erfüllt sind, wenn also z. B. gleiche reelle Wurzeln oder der Modul eines imaginären Wurzelpaares zwischen zwei oder mehreren reellen Wurzeln liegt, die der Gröfse der v nach zu einem und demselben v gehören. In diesem Falle ordnen sich die Glieder, die zu solchen Ausnahmen gehören, immer so, wie die Reihefolge der Coefficienten in den einfachen Factoren, welche diese Ausnahme bilden, sich darstellt. Wenn also 3 gleiche reelle Wurzeln vorhanden wären, die mit der nächststehenden ungleichen reellen Wurzel ein Product zweier trinomischer Factoren bilden werden, so ist wegen

$$(x+a)^3 (x+b) = x^4 + (3a+b)x^3 + (3a^2+3ab)x^2 + (3a^2b+a^3)x + a^3b,$$

für $b < a$ die Aufeinanderfolge der C

$$\begin{aligned}
C_{2r} &= v^m v'^m \dots v^{(r-1)m} \\
C_{2r+1} &= 3 v^m v'^m \dots v^{(r-1)m} a^m \\
C_{2r+2} &= 3 v^m v'^m \dots v^{(r-1)m} a^{2m} \\
C_{2r+3} &= v^m v'^m \dots v^{(r-1)m} a^{3m} \\
C_{2r+4} &= v^m v'^m \dots v^{(r-1)m} a^{3m} b^m = v^m v'^m \dots v^{(r-1)m} v^{(r)m} v^{(r+1)m}.
\end{aligned}$$

Und ganz ähnlich werden die übrigen Coefficienten der verschiedenen Potenzen eines Binoms sich in Fällen von mehreren gleichen Wurzeln zeigen. Ebenso übersieht man leicht die Reihefolge, wenn $b > a$ wäre.

Wenn eine reelle Wurzel gleich dem Modul einer imaginären wäre, und also wiederum mit der nächstangrenzenden reellen

Wurzel verbunden, ein doppelter trinomischer Factor sich bildete, so geht die Form

$$(x^2+fx+g^2)(x+g)(x+a)$$
$$=x^4+(a+f+g)x^3+(ag+af+fg+g^2)x^2+(afg+ag^2+g^3)x+ag^3,$$

im Falle $a<g$ wäre, weil f_m sich dem $2g^m$ möglicherweise nähern, und auf keinen Fall für immer dagegen als verschwindend betrachtet werden kann, über in:

$$x^4+*\,x^3+*\,x^2+g^{3m}x+a^m g^{3m}$$

und folglich wird die Reihefolge der Coefficienten werden

$$C_{2r}=v^m v'^m \ldots v^{(r-1)\,m}$$
$$C_{2r+1}=\text{unbestimmt und schwankend}$$
$$C_{2r+2}=\text{unbestimmt und schwankend}$$
$$C_{2r+3}=v^m v'^m \ldots v^{(r-1)\,m}\, g^{(r)\,3m}$$
$$C_{2r+4}=v^m v'^m \ldots v^{(r-1)\,m}\, g^{(r)\,3m}\, a^m=v^m v'^m \ldots v^{(r-1)\,m}\, v^{(r)\,m}\, v^{(r+1)\,m}$$

und ganz ähnlich in allen andern Fällen. Gleiche Moduln bei mehreren Paaren imaginärer Wurzeln werden drei aufeinander folgende unbestimmte Glieder geben, wenn zwei Moduln einander gleich sind, 5 aufeinander folgende unbestimmte Glieder, wenn drei Moduln gleich sind u. s. w. Es wird hiernach keine Schwierigkeit haben, sich in allen Fällen den Gang erklären zu können, und die Resultate daraus herzuleiten.

Es mufs hiebei beachtet werden, dafs wenn man immer zu geraden Potenzen erhebt, die Gleichheit der Wurzeln von der absoluten Gröfse ohne Rücksicht auf das Zeichen zu verstehen ist, und dafs eben deswegen das Zeichen der v, welche nicht zu imaginären Wurzeln gehören, zweideutig ist, wenn man auf die ursprüngliche Gleichung zurückgeht. Die Zweideutigkeit hört auf, wenn man die Gleichung auflöst, welche den Quadraten der Wurzeln entspricht. In ihr sind alle v positiv. Dasselbe gilt von den Zeichen der einfachen reellen Wurzeln, über welche durch unmittelbare Substitution oder auf anderm Wege stets zu entscheiden ist.

Diese Ausnahmefälle von gleichen Wurzeln und Moduln erfordern aber aufserdem noch, bei der Verbesserung der zuerstgefundenen Näherungswerthe, eine besondere Berücksichtigung. Denn wenn man nicht aus der Natur der Aufgabe, welche durch eine Gleichung ausgedrückt wird, weifs, dafs in aller Strenge gleiche Wurzeln vorhanden sein müssen, so giebt die erste Näherung, wenn sie auf gleiche Wurzeln und Moduln führt, doch nichts anderes zu erkennen, als dafs diese Gleichheit innerhalb der Grenzen dieser ersten Näherung stattfindet. Sie kann aber nicht berechtigen, bei der Verbesserung der gefundenen Werthe diese Gleichheit beizubehalten und vorauszusetzen. Es müssen daher die verbesserten Werthe durch eine Methode gefunden werden, welche über diesen Punkt entscheidet, abgesehen davon, dafs die oben angeführten Formeln für die Verbesserung der ersten Werthe die Ungleichheit sämmtlicher Wurzeln und selbst eine merkliche Ungleichheit voraussetzen, welche mindestens das Doppelte der etwaigen Verbesserung beträgt, und für die praktische Brauchbarkeit noch stärker sein mufs.

Zur Erhaltung einer solchen Verbesserungsmethode setze man wie oben

$$f(x) = (x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\ldots\ldots$$

und bezeichne aufserdem das Product

$$\left(1+\frac{1}{x+a}\,y\right)\left(1+\frac{1}{x+b}\,y\right)\left(1+\frac{1}{x+c}\,y\right)\left(1+\frac{1}{x+d}\,y\right)\ldots\ldots$$

durch die Form

$$1+\varepsilon_1 y+\varepsilon_2 y^2+\varepsilon_3 y^3+\varepsilon_4 y^4\ldots\ldots$$

so dafs

$$\varepsilon_1=\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+c}+\frac{1}{x+d}\quad\ldots\ldots=\left[\frac{1}{x+a}\right]$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{(x+a)(x+b)}+\frac{1}{(x+a)(x+c)}+\frac{1}{(x+b)(x+c)}=\left[\frac{1}{(x+a)(x+b)}\right]$$

$$\varepsilon_3=\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}+\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+d)}\cdots=\left[\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}\right]\text{u.s.w.}$$

oder ε_m die Summe der Combinationen der m^{ten} Ordnung ohne Wiederholung von den n Elementen $\frac{1}{x+a}$, $\frac{1}{x+b}$, etc. bezeichnet. Man wird nun ohne Mühe finden, dafs jedesmal

$$\frac{df(x)}{dx} = \varepsilon_1 f(x)$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \varepsilon_2 f(x)$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{d^3 f(x)}{dx^3} = \varepsilon_3 f(x)$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}\,\frac{d^m f(x)}{dx^m} = \varepsilon_m f(x)$$

sein wird. Es enthält nämlich $\varepsilon_m f(x)$ die Combinationen der $(n-m)^{\text{ten}}$ Ordnung von n Elementen $(x+a)$, $(x+b)$, deren es

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots m}$$

verschiedene giebt. Jedes einzelne dieser Glieder differentiirt, giebt $(n-m)$ Werthe, in welchen immer $(n-m-1)$ solcher Elemente verbunden sind, zusammen sind also in $\frac{d(\varepsilon_m f(x))}{dx}$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots m}$$

Glieder, deren jedes $(n-m-1)$ Factoren enthält, und da in dieser Summe nur Combinationen von der $(n-m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung enthalten sein können, und auch alle symmetrish darin enthalten sein müssen, solcher Combinationen aber nur

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(m+1)}$$

möglich sind, so mufs sich jede Combination $(m+1)$ mal wiederholen. Oder es ist

$$\frac{d(\varepsilon_m f(x))}{dx} = (m+1)\,\varepsilon_{m+1} f(x),$$

woraus der allgemeine Ausdruck folgt. Wendet man nun auf $f(x)$ den Taylor'schen Lehrsatz an und setzt man

$$x = x^0 + \triangle x^0,$$

so wird

$$f(x) = f(x^0) + \frac{d f(x^0)}{d x^0} \triangle x^0 + \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{d^2 f(x^0)}{d x^{0^2}} \triangle x^{0^2} + \ldots$$

Bezeichnet man also durch ε_m^0 die ε_m, welche den Factoren $(x^0 + a)$, $(x^0 + b)$, $(x^0 + c)$ etc. entsprechen, und substituirt, so wird

$$f(x) = f(x^0) \left\{ 1 + \varepsilon_1{}^0 \triangle x^0 + \varepsilon_2{}^0 \triangle x^{0^2} + \varepsilon_3{}^0 \triangle x^{0^3} \ldots . \right\},$$

welche Reihe Glied für Glied der Taylor'schen Reihe entspricht, so dafs das Resultat aus den m ersten Gliedern dieser Reihe vollkommen identisch ist mit dem Resultat aus den m ersten Gliedern der Taylor'schen Reihe. Es soll nun $f(x)$ Null werden für gewisse Werthe von x, also mufs, was auch x^0 für ein Werth sein mag, da nach der Form von $f(x)$ die Taylor'sche Reihe, wenn sie ganz zu Ende geführt wird, stets den strengen Werth giebt, ein Werth von $\triangle x^0$ gefunden werden, der der Gleichung

$$0 = 1 + \varepsilon_1{}^0 \triangle x^0 + \varepsilon_2{}^0 \triangle x^{0^2} + \varepsilon_3{}^0 \triangle x^{0^3} \ldots .$$

entspricht, und jedes Resultat, was aus dieser Form bei einer gewissen Anzahl Glieder gefunden wird, mufs eben so aus der gleichen Anzahl Glieder der Taylor'schen Reihe hervorgehen.

Sei jetzt x^0 ein Werth, der einer negativen Wurzel sehr nahe kommt, etwa $x^0 = -a^0$, so wird $\triangle x^0 = a^0 - a$ eine kleine Gröfse der ersten Ordnung, deren verschiedene Potenzen nur dann in der Gleichung

$$0 = 1 + \varepsilon_1{}^0 \triangle x^0 + \varepsilon_2{}^0 \triangle x^{0^2} + \varepsilon_3{}^0 \triangle x^{0^3} \ldots .$$

das erste Glied ... 1 ... aufheben können, wenn sie mit Factoren multiplicirt werden, deren Nenner ebenfalls kleine Gröfsen der ersten Ordnung zu den verschiedenen Potenzen von $\triangle x^0$ erhoben enthalten, während die Zähler Gröfsen der 0^{ten} Ordnung sind. Ein solcher Factor wird in

$$\varepsilon_1{}^0 = \frac{1}{x^0 + a} + \frac{1}{x^0 + b} + \ldots = \frac{1}{a - a^0} + \frac{1}{b - a^0} + \ldots$$

nur das erste Glied sein, wenn die übrigen Wurzeln so unterschieden von a sind, dafs $b-a^0$, $c-a^0$ nicht als kleine Gröfsen der ersten Ordnung betrachtet werden können. In diesem Falle werden auch die folgenden $\varepsilon_2{}^0$, $\varepsilon_3{}^0$... keine Nenner enthalten, welche als Gröfsen der zweiten und dritten etc. Ordnung die Kleinheit von Δx^{0^2}, Δx^{0^3}... etc. aufheben, und eine merkliche Gröfse hervorbringen könnten, weil die stattfindenden Combinationen ohne Wiederholung sind. Man findet folglich ohne merklichen Fehler Δx^0 aus

$$0 = 1 + \varepsilon_1{}^0 \Delta x^0 = 1 + \frac{1}{a-a^0} \Delta x^0$$

oder

$$\Delta x^0 = a^0 - a.$$

Vermittelst des ersten Differentials von $f(x)$ wird man daher bei lauter ungleichen Wurzeln und hinlänglicher Näherung an eine derselben, einen genaueren Werth finden, worin die Anwendbarkeit und Beschränkung der Newton'schen Approximationsmethode ausgesprochen ist.

Wenn aber aufser a noch eine zweite Wurzel b dem a^0 so nahe liegt, dafs $b-a^0$ ebenfalls eine kleine Gröfse erster Ordnung ist, so wird nicht allein

$$\varepsilon_1{}^0 = \frac{1}{a-a^0} + \frac{1}{b-a^0},$$

sondern es kommt nun auch in $\varepsilon_2{}^0$ ein Glied vor, welches mit Δx^{0^2} verbunden ebenfalls eine Gröfse 0^{ter} Ordnung giebt, und nicht übergangen werden darf. Nämlich ohne merklichen Fehler wird

$$\varepsilon_2{}^0 = \frac{1}{(a-a^0)(b-b^0)}.$$

Die Gleichung

$$0 = 1 + \varepsilon_1{}^0 \Delta x^0 + \varepsilon_2{}^0 \Delta x^{0^2}$$

zerlegt sich dann in die Factoren $0 = \left(1 + \frac{\Delta x^0}{a-a^0}\right)\left(1 + \frac{\Delta x^0}{b-a^0}\right)$.

Oder: Wenn zwei Wurzeln vorhanden sind, die einander sehr nahe sind, so berechnet man $\frac{df(x^0)}{dx^0}$ und $\frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{d^2 f(x^0)}{dx^{0^2}}$, und findet aus der Auflösung der quadratischen Gleichung zwei Wurzeln, welche, zu dem Näherungswerthe $-a^0$ hinzugefügt, die wahren Werthe geben, die man sucht. Die folgenden ε_3^0, ε_4^0 etc. haben hier weiter keinen Einflufs. In der Regel werden, wenn a^0 und b^0 reell sind, beide Wurzeln dieser quadratischen Gleichung reell sein; sind sie gleich, so sind die Hauptwurzeln innerhalb der Grenzen der neuen Näherung wiederum als gleich anzunehmen. Sind sie aber imaginär, so hatte die Hauptgleichung zwei imaginäre Wurzeln von der Form $a+\beta\sqrt{-1}$ und $a-\beta\sqrt{-1}$. Indessen mufs in diesem Falle β eine kleine Gröfse der ersten Ordnung sein, weil in ε_1 die beiden Glieder für imaginäre Wurzeln

$$\frac{1}{x+a+\beta\sqrt{-1}}+\frac{1}{x+a-\beta\sqrt{-1}}$$

sich vereinigen in

$$\frac{2(x+a)}{(x+a)^2+\beta^2}=\frac{2}{x+a+\dfrac{\beta^2}{x+a}}$$

und also nur dann eine kleine Gröfse der ersten Ordnung im Nenner geben können, wenn β von derselben Ordnung wie $a-a^0$ ist. Auf die absolute Gröfse von $\frac{df(x^0)}{dx^0}$ und $\frac{d^2f(x^0)}{dx^{0^2}}$ kommt es dabei nicht an. Es kann der Fall eintreten, dafs $\frac{df(x^0)}{dx^0}$ = Null wird, sowohl bei reellen als imaginären Wurzeln. Es ist aber unmöglich, dafs alle Differentialquotienten, welche nöthig sind, zugleich Null werden, weil in diesem Falle die Aufgabe eine unbestimmte würde.

Hiemit ist der Weg für alle ferneren Fälle angezeigt. Wenn bei der ersten Näherung m nahe gleiche Wurzeln gefunden sind, so geht man bis zu ε_m^0 fort oder bis zu $\frac{d^mf(x^0)}{dx^{0^m}}$, und löst die Gleichung vom m^{ten} Grade auf. Diese Auflösung, die niemals in solchen Ausnahmefällen zu vermeiden sein wird, mufs immer zum Ziele führen, und wird es um so leichter, als durch den eingeführten Näherungswerth x^0 die Δx^0, wenn sie verschieden sind, ein sehr merkliches Verhältnifs zu einander haben müssen, und die Schnelligkeit der Auflösung von diesem Verhältnifs der Wurzeln zu einander abhängt, wie schon oben bemerkt ward. Auch ist es ein Vorzug dieser Auflösungsmethode, dafs man von allen Wurzeln sehr genäherte Werthe findet, und folglich über die mögliche Anzahl einander sehr nahe liegender gar nicht in Zweifel sein kann.

Für die numerische Rechnung ist es bequemer, zu setzen

$$x = x^0 + x^0 \frac{\Delta x^0}{x^0}$$

und die Taylor'sche Reihe zu schreiben

$$f(x) = f(x^0) + x^0 \frac{d f x^0}{d x^0} \cdot \frac{\Delta x^0}{x^0} + \tfrac{1}{2}\, x^{0\,2} \frac{d^2 f(x^0)}{d x^{0\,2}} \left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^2 + \ldots$$

Es werden nämlich die Werthe

$$f(x^0) = [x^{0\,n}], \qquad x^0 \frac{d f(x^0)}{d x^0} = [n x^{0\,n}], \qquad x^{0\,2} \frac{d^2 f(x^0)}{d x^{0\,2}} = [n(n-1) x^{0\,n}], \text{ etc.}$$

aus dem ersten $f(x^0)$ durch einfache Multiplication jedes Gliedes mit n (der Potenz von x^0, die darin vorkommt), mit $(n-1)$ u. s. w. gefunden. Der Werth $\frac{\Delta x^0}{x^0}$, den man findet, wird dann fast immer gleich $\Delta \lg x^0$ gesetzt werden können, mit Rücksicht auf den Modulus des briggischen Systems.

Dieses Verfahren gilt allgemein für reelle und imaginäre Wurzeln. Indessen ist es vielleicht nicht überflüssig, in Bezug auf die letzteren eine nähere Entwickelung hinzuzufügen. Wenn zwei Paare imaginärer Wurzeln von der Form $\alpha \pm \beta \sqrt{-1}$ und und $\alpha' \pm \beta' \sqrt{-1}$ einander so nahe liegen, dafs die erste Näherung gleiche imaginäre Wurzeln von der Form $\alpha^0 \pm \beta^0 \sqrt{-1}$ gegeben hat, so braucht hier nur der Fall betrachtet zu werden, wo β^0 eine merkliche Gröfse hat, weil der andere, wenn β^0 sehr klein ist, sich aus der Substitution der reellen Wurzel $x^0 = -\alpha^0$ ergeben würde, wie oben bei zwei gleichen reellen Wurzeln angeführt ist. In diesem Falle wird $\varepsilon_1{}^0$ den Werth haben, wenn $x^0 = -\alpha^0 - \beta^0 \sqrt{-1}$ substituirt ist:

$$\frac{1}{\alpha-\alpha^0+(\beta-\beta^0)\sqrt{-1}}+\frac{1}{\alpha'-\alpha^0+(\beta'-\beta^0)\sqrt{-1}},$$

denn die Verbindung von $-\alpha^0-\beta^0\sqrt{-1}$ mit $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ und $\alpha'-\beta'\sqrt{-1}$ wird in dem Nenner die sehr merklichen Gröfsen $-(\beta+\beta^0)\sqrt{-1}$ und $-(\beta'+\beta^0)\sqrt{-1}$ einführen, die sich nicht gegenseitig vernichten. Dasselbe wird in ε_2^0 stattfinden, welches den Werth erhält

$$\frac{1}{(\alpha-\alpha^0+(\beta-\beta^0)\sqrt{-1})\,(\alpha'-\alpha^0+(\beta'-\beta^0)\sqrt{-1})}.$$

Die späteren Werthe von ε_3^0, ε_4^0 haben keinen Einflufs. Man wird also aus der Gleichung

$$0=f(x^0)+x^0\frac{df(x^0)}{dx^0}\cdot\frac{\Delta x^0}{x^0}+\frac{x^{0\,2}}{1\cdot 2}\cdot\frac{d^2f(x^0)}{dx^{0\,2}}\left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^2,$$

wenn für x^0 der Werth $-\alpha^0-\beta^0\sqrt{-1}$ gesetzt ist, die beiden Wurzeln für Δx^0 erhalten aus der Gleichung

$$\left\{\Delta x^0+\alpha-\alpha^0+(\beta-\beta^0)\sqrt{-1}\right\}\left\{\Delta x^0+\alpha'-\alpha^0+(\beta'-\beta^0)\sqrt{-1}\right\}=0$$

und auf dieselbe Weise, wenn $-\alpha^0+\beta^0\sqrt{-1}$ substituirt ist, aus

$$\left\{\Delta x^0+\alpha-\alpha^0-(\beta-\beta^0)\sqrt{-1}\right\}\left\{\Delta x^0+\alpha'-\alpha^0-(\beta'-\beta^0)\sqrt{-1}\right\}=0$$

und die Verbindung dieser beiden Gleichungen vom zweiten Grade in Bezug auf Δx^0, die man so erhält, wird eine Gleichung vom vierten Grade geben, nämlich:

$$\left\{\Delta x^0+\alpha-\alpha^0\pm(\beta-\beta^0)\sqrt{-1}\right\}\left\{\Delta x^0+\alpha'-\alpha^0\pm(\beta'-\beta^0)\sqrt{-1}\right\}=0.$$

Sind deshalb die Wurzeln wirklich ungleich, so mufs man durch unmittelbare Substitution entscheiden, welches Wurzel-Paar zu $\alpha^0+\beta^0\sqrt{-1}$, und welches zu $\alpha^0-\beta^0\sqrt{-1}$ gehört. Ebenso wird man bei drei nahe gleichen Paaren imaginärer Wurzeln auf eine Gleichung vom 6ten Grade geführt, bei vieren auf eine vom achten u. s. w.

Die Form dieser Gleichungen wird sich am leichtesten übersehen lassen, wenn man setzt

$$\alpha^0=r^0\cos\varphi^0 \qquad \beta^0=r^0\sin\varphi^0$$

und damit

$$[(-r^0)^n \cos n\varphi^0] = P\cos Q \quad [(-r^0)^n \sin n\varphi^0] = P\sin Q$$
$$[n(-r^0)^n \cos n\varphi^0] = \varrho\,\cos\psi \quad [(n(-r^0)^n \sin n\varphi^0] = \varrho\,\sin\psi$$
$$[n(n-1)(-r^0)^n \cos n\varphi^0] = \varrho'\cos\psi' \quad [n(n-1)(-r^0)^n \sin n\varphi^0] = \varrho'\sin\psi'$$
$$[n(n-1)(n-2)(-r^0)^n \cos n\varphi^0] = \varrho''\cos\psi''$$
$$[n(n-1)(n-2)(-r^0)^n \sin n\varphi^0] = \varrho''\sin\psi'' \text{ etc.}$$

Es wird dann die Gleichung aus der Substitution von

$$x^0 = -\alpha^0 - \beta^0\sqrt{-1}$$

$$0 = P\cos Q + \varrho\cos\psi\frac{\Delta x^0}{x^0} + \tfrac{1}{2}\varrho'\cos\psi'\left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\varrho''\cos\psi''\left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^3 \ldots$$
$$+\left\{P\sin Q + \varrho\sin\psi\frac{\Delta x^0}{x^0} + \tfrac{1}{2}\varrho'\sin\psi'\left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\varrho''\sin\psi''\left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^3 \ldots\right\}\sqrt{-1}$$

oder wenn man die $\sqrt{-1}$ wegschafft

$$0 = \left\{P\cos Q + \varrho\cos\psi\frac{\Delta x^0}{x^0} + \tfrac{1}{2}\varrho'\cos\psi'\left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\varrho''\cos\psi''\left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^3 \ldots\right\}^2$$
$$+\left\{P\sin Q + \varrho\sin\psi\frac{\Delta x^0}{x^0} + \tfrac{1}{2}\varrho'\sin\psi'\left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^2 + \tfrac{1}{6}\varrho''\sin\psi''\left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^3 \ldots\right\}^2,$$

welche letztere Gleichung ebenfalls für die Substitution von $x^0 = -\alpha^0 + \beta^0\sqrt{-1}$ gilt, so dafs man immer nur auf eine Gleichung von demselben Grade mit der Anzahl der imaginären Wurzeln geführt wird.

In den einfacheren Fällen, wo zwei Paare oder drei Paare imaginärer Wurzeln gleich sind, kommt man indessen noch einfacher zum Ziel, und ohne alle Zweideutigkeit, wenn man bei der ersten aus der Substitution von $x^0 = -\alpha^0 - \beta^0\sqrt{-1}$ allein hervorgehenden Gleichung stehen bleibt, und diese Gleichung auflöst. Man bekommt dann unmittelbar die Werthe von $\alpha - \alpha^0 + (\beta - \beta^0)\sqrt{-1}$ und von $\alpha' - \alpha^0 + (\beta' - \beta^0)\sqrt{-1}$. Diese Gleichungen unterscheiden sich freilich von den gewöhnlichen dadurch, dafs ihre Coefficienten imaginäre Gröfsen sind, aber für die Fälle, für welche man Gleichungen direct auflösen kann, also bis zum 4ten Grade, oder bis zu vier Paaren nahe gleicher imaginärer Wurzeln, wird man diese Auflösung fast mit derselben Leichtigkeit wie bei reellen Coefficienten machen. Es mögen hier noch die einfachen Formeln für die Auflösung einer solchen quadratischen Gleichung mit imaginären Coefficienten folgen.

Die imaginären Coefficienten lassen sich leicht dividiren und multipliciren, wenn sie auf die Form $\lambda \cos\mu + \lambda \sin\mu \sqrt{-1}$ gebracht sind, weil

$$\frac{\lambda \cos\mu \pm \lambda \sin\mu \sqrt{-1}}{\lambda' \cos\mu' \pm \lambda' \sin\mu' \sqrt{-1}} = \frac{\lambda}{\lambda'}\{\cos(\mu-\mu') \pm \sin(\mu-\mu')\sqrt{-1}\}.$$

Man bringt also die gegebene Gleichung

$$0 = P(\cos Q + \sin Q \sqrt{-1}) + \varrho(\cos\psi + \sin\psi\sqrt{-1})\frac{\Delta x^0}{x^0} + \tfrac{1}{2}\varrho'(\cos\psi' + \sin\psi'\sqrt{-1})\left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^2$$

zuerst auf die Form

$$\left(\frac{\Delta x^0}{x^0}\right)^2 + \frac{2\varrho}{\varrho'}(\cos(\psi-\psi') + \sin(\psi-\psi')\sqrt{-1})\frac{\Delta x^0}{x^0} + \frac{2P}{\varrho'}(\cos(Q-\psi') + \sin(Q-\psi')\sqrt{-1}) = 0,$$

woraus

$$\frac{\Delta x^0}{x^0} = -\frac{\varrho(\cos(\psi-\psi') + \sin(\psi-\psi')\sqrt{-1})}{\varrho'} \pm \sqrt{\frac{\varrho^2(\cos 2(\psi-\psi') + \sin 2(\psi-\psi')\sqrt{-1}) - 2P\varrho'(\cos(Q-\psi) + \sin(Q-\psi')\sqrt{-1})}{\varrho'^2}}.$$

Setzt man jetzt, was immer erlaubt ist

$$\delta^2 \cos 2\gamma = \varrho^2 \cos 2(\psi-\psi') - 2P\varrho' \cos(Q-\psi')$$
$$\delta^2 \sin 2\gamma = \varrho^2 \sin 2(\psi-\psi') - 2P\varrho' \sin(Q-\psi'),$$

so wird

$$\frac{\Delta x^0}{x^0} = -\frac{\varrho(\cos(\psi-\psi') + \sin(\psi-\psi')\sqrt{-1})}{\varrho'} \pm \frac{\delta(\cos\gamma + \sin\gamma\sqrt{-1})}{\varrho'}.$$

Nun ist

$$\frac{\Delta x^0}{x^0} = \frac{\alpha - \alpha^0 + (\beta-\beta^0)\sqrt{-1}}{\alpha^0 + \beta^0\sqrt{-1}}.$$

Setzt man also

$$\alpha - \alpha^0 = l \cos L \qquad \beta - \beta^0 = l \sin L$$
$$\alpha^0 = r^0 \cos\varphi^0 \qquad \beta^0 = r^0 \sin\varphi^0,$$

so wird

$$\frac{\Delta x^0}{x^0} = \frac{l}{r^0}\cos(L-\varphi^0) + \frac{l}{r^0}\sin(L-\varphi^0)\sqrt{-1},$$

folglich wird man erhalten

$$\frac{l}{r^0}\cos(L-\varphi^0) = -\frac{\varrho}{\varrho'}\cos(\psi-\psi') \pm \frac{\delta}{\varrho'}\cos\gamma$$

$$\frac{l}{r^0}\sin(L-\varphi^0) = -\frac{\varrho}{\varrho'}\sin(\psi-\psi') \pm \frac{\delta}{\varrho'}\sin\gamma.$$

Wenn man den wahren Werth von x durch

$$-r\cos\varphi - r\sin\varphi\sqrt{-1}$$

ausdrückt, so wird

$$r^0\cos\varphi^0 + l\cos L = r\cos\varphi$$

$$r^0\sin\varphi^0 + l\sin L = r\sin\varphi$$

oder

$$r^0 + l\cos(L-\varphi^0) = r\cos(\varphi-\varphi^0)$$

$$l\sin(L-\varphi^0) = r\sin(\varphi-\varphi^0)$$

so dafs

$$\frac{r}{r^0}\cos(\varphi-\varphi^0) = 1 - \frac{\varrho}{\varrho'}\cos(\psi-\psi') \pm \frac{\delta}{\varrho'}\cos\gamma$$

$$\frac{r}{r^0}\sin(\varphi-\varphi^0) = -\frac{\varrho}{\varrho'}\sin(\psi-\psi') \pm \frac{\delta}{\varrho'}\sin\gamma,$$

wobei die doppelten Vorzeichen so zu nehmen sind, dafs die obern zusammengehören und auch die untern.

Die sämmtlichen Formeln für zwei Paare gleicher imaginärer Wurzeln sind also folgende:

Man bestimmt aus den Substitutionen von $(-r^0)^n \cos n\varphi$ für x^{0^n} und $(-r^0)^n \sin\varphi$ für x^{0^n} die Werthe P, Q, ϱ, ψ, ϱ', ψ'. Dann setzt man

$$\delta^2\cos 2\gamma = \varrho^2\cos 2(\psi-\psi') - 2P\varrho'\cos(Q-\psi')$$

$$\delta^2\sin 2\gamma = \varrho^2\sin 2(\psi-\psi') - 2P\varrho'\sin(Q-\psi')$$

und hat sofort:

$$\frac{r}{r^0}\cos(\varphi-\varphi^0) = 1 - \frac{\varrho}{\varrho'}\cos(\psi-\psi') \pm \frac{\delta}{\varrho'}\cos\gamma$$

$$\frac{r}{r^0}\sin(\varphi-\varphi^0) = -\frac{\varrho}{\varrho'}\sin(\psi-\psi') \pm \frac{\delta}{\varrho'}\sin\gamma.$$

Für den ersten Werth kann man bei der Kleinheit von $\varphi - \varphi^0$ meistentheils $\frac{r}{r^0}$ setzen, für den zweiten, weil $\frac{r}{r^0}$ nahe eins, den Werth $\varphi - \varphi^0$. Man wird dann in den meisten Fällen schreiben können:

$$\frac{1}{M} \triangle \lg r^0 = -\frac{\varrho}{\varrho'} \cos(\psi - \psi') \pm \frac{\delta}{\varrho'} \cos\gamma$$

$$\triangle \varphi^0 \quad = -\frac{\varrho}{\varrho'} \sin(\psi - \psi') \pm \frac{\delta}{\varrho'} \sin\gamma.$$

In diesen Ausdrücken sind sowohl die für gleiche Wurzeln enthalten, für welche $Q = \psi = \psi' = 0$, als auch läfst sich aus ihnen die oben gegebene Bestimmung der verbesserten Werthe bei ungleichen Wurzeln herleiten. Es ist wegen des doppelten Vorzeichens $\pm$ gleichgültig, welchen Werth von γ man aus 2γ wählt, da es freisteht, sowohl γ als $180 + \gamma$ zu nehmen. Für drei Paare gleicher imaginärer Wurzeln wird die Cardanische Formel sich ebenfalls ganz bequem gebrauchen lassen.

In dem hier Gegebenen ist die Auflösung der Aufgabe vollständig enthalten. Es kann kein Fall vorkommen, der sich nicht in aller Strenge durch die angegebenen Ausdrücke lösen liefse. Ungleiche Wurzeln, reell oder imaginär, trennen sich von selbst, und bei gleichen oder nahe gleichen Wurzeln sind leichte und strenge Mittel gegeben, von einem gemeinschaftlichen Näherungswerthe aus entweder der völligen Gleichheit der Wurzeln sich zu versichern, oder die einzelnen Wurzeln selbst zu berechnen. Bei einem praktischen Gegenstande wird es jetzt noch ein Interesse haben, an einigen Beispielen den Gang der Rechnung kennen zu lernen.

Als erstes Beispiel möge die Gleichung siebenten Grades dienen, wodurch nach Gaufs die Punkte auf einer gegebenen Abscissenlinie bestimmt werden, welche für die mechanische Quadratur das möglichst vortheilhafte Resultat geben, wenn man überhaupt nicht mehr als sieben Ordinaten anwenden will. Diese Gleichung heifst

$$x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{63}{13}x^5 - \frac{175}{52}x^4 + \frac{175}{143}x^3 - \frac{63}{286}x^2 + \frac{7}{429}x - \frac{1}{3432} = 0.$$

Sucht man hier zuerst die Logarithmen der Coefficienten auf, welchen die Zeichen ebenso wie den Zahlen vorgesetzt werden, so wird die Gleichung:

$$x^7 - 0{,}5440680\,x^6 + 0{,}6853971\,x^5 - 0{,}5270347\,x^4 + 0{,}0877020\,x^3 \\ - 9{,}3429745\,x^2 + 8{,}2126407\,x - 6{,}4644527 = 0.$$

Es ist für die Rechnung angenehmer, keine Logarithmen von Brüchen zu haben, weil man bei der Erhebung zu sehr hohen Potenzen immer dann beachten mufs, ob -10 oder -20, oder ein anderes Vielfaches von 10 von der Charakteristik abgezogen werden mufs. Man lege deshalb zu dem Logarithmen aller Coefficienten ein Vielfaches einer solchen Zahl hinzu, welche die Brüche wegschafft, und zwar zu dem Coefficienten von x^{n-r} das r fache dieser Zahl, so wird man alle Wurzeln mit einem bestimmten Factor multiplicirt erhalten. Kann man dabei bewirken, dafs $\alpha_n = 1$ wird, so wird die Rechnung etwas bequemer. Hier wird der Zweck erreicht, wenn man die Vielfachen von $\frac{10 - 6{,}4644527}{7} = 0{,}5050782$ hinzulegt. Die Gleichung wird dann

$$x^7 - 1{,}0491462\,x^6 + 1{,}6955535\,x^5 - 2{,}0422693\,x^4 + 2{,}1080148\,x^3 \\ - 1{,}8683655\,x^2 + 1{,}2431099\,x - 0{,}0000001 = 0.$$

Bei dem Anfange der Rechnung zeigt sich hier sogleich, dafs man mehr als fünf Decimalen bei den ersten Erhebungen zu höhern Potenzen anwenden mufs. Denn es wird z. B.

$$\begin{aligned} \lg \alpha_2^2 &= 3{,}39111 \\ \lg - 2\alpha_1\,\alpha_3 &= -3{,}39245 \\ \lg + 2\alpha_4 &= +2{,}40904. \end{aligned}$$

Wenn aber die Differenz zweier Logarithmen so klein wie hier ist, nur 0,00134, so bewirkt nach den Gaufs'ischen Tafeln die Unsicherheit einer einzigen Einheit in der letzten fünften Stelle schon einen Fehler von 330 Einheiten in dem Logarithmen der Differenz, so daſs sich das Resultat gar nicht verbürgen läſst. Man wird also die beiden ersten Erhebungen hier mit 7 Decimalstellen ausführen müssen, so wie es überhaupt vortheilhaft ist, die ersten Erhebungen möglichst genau zu machen. Die Fehler in denselben pflanzen sich zu beiden Seiten in vergröſsertem Maaſsstabe fort, besonders bei Gleichungen wie diese mit lauter reellen Wurzeln, in denen immer Subtractionen vorkommen. Man findet so:

Potenz der Wurzeln $= 2^1$

$$x^7 + 1{,}4180048\,x^6 + 2{,}3959870\,x^5 + 3{,}0189949\,x^4 + 3{,}2738401\,x^3 + 3{,}0739348\,x^2 + 2{,}2004297\,x + 0{,}0000002 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^2$

$$x^7 + 2{,}2735725\,x^6 + 4{,}0410890\,x^5 + 5{,}3386202\,x^4 + 6{,}0534451\,x^3 + 5{,}9093643\,x^2 + 4{,}3578860\,x + 0{,}0000004 = 0.$$

Von hier an kann man mit fünf Decimalen rechnen, weil sich doch, des eben bemerkten Umstandes wegen, auch bei sieben Decimalen die letzten Stellen nicht verbürgen lassen werden. Die kleinen nöthigen Hülfsmittel, bei den groſsen Charakteristiken eine Anzahl Einheiten erst wegzunehmen, und nach gemachter Addition und Subtraction wieder zuzulegen, wird jeder Rechner sich selbst machen. Schon von jetzt an sind die Producte der entfernter stehenden Coefficienten wenig merklich.

Potenz der Wurzeln $= 2^3$

$$x^7 + 4{,}12268\,x^6 + 7{,}61495\,x^5 + 10{,}36176\,x^4 + 11{,}96640\,x^3 + 11{,}78333\,x^2 + 8{,}71441\,x + 0{,}00000 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^4$

$$x^7 + 7{,}97094\,x^6 + 15{,}03723\,x^5 + 20{,}65592\,x^4 + 23{,}91840\,x^3 + 23{,}56553\,x^2 + 17{,}42882\,x + 0{,}00000 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^5$

$$x^7 + 15{,}81746\,x^6 + 30{,}04231\,x^5 + 41{,}30800\,x^4 + 47{,}83679\,x^3 + 47{,}13106\,x^2 + 34{,}85764\,x + 0{,}00000 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^6$

$$x^7 + 31{,}61214\,x^6 + 60{,}08366\,x^5 + 82{,}61598\,x^4 + 95{,}67358\,x^3 + 94{,}26212\,x^2 + 69{,}71528\,x + 0{,}00000 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^7$

$$x^7 + 63{,}22365\,x^6 + 120{,}16732\,x^5 + 165{,}23196\,x^4 + 191{,}34716\,x^3 + 188{,}52424\,x^2 + 139{,}43056\,x + 0{,}00000 = 0.$$

Hier wird die Rechnung geschlossen. Bei allen andern Coefficienten sind schon die neuen Werthe die reinen Quadrate der früheren, und auch bei α_1 wird $\alpha_1^2 - 2\alpha_2$ nicht mehr von α_1^2 sich unterscheiden. Es sind folglich alle Wurzeln reell, und wenn man die Logarithmen nach einander subtrahirt, so hat man

$\lg a^{128} = 63{,}22365$	$\lg a = 0{,}493935$
$\lg b^{128} = 56{,}94367$	$\lg b = 0{,}444872$
$\lg c^{128} = 45{,}06464$	$\lg c = 0{,}352067$
$\lg d^{128} = 26{,}11520$	$\lg d = 0{,}204025$
$\lg e^{128} = 125{,}17708 - 128{,}0$	$\lg e = 9{,}977946$
$\lg f^{128} = 78{,}90632 - 128{,}0$	$\lg f = 9{,}616456$
$\lg g^{128} = 116{,}56944 - 256{,}0$	$\lg g = 8{,}910699$

Zieht man von diesen Wurzeln den oben hinzugefügten Logarithmen 0,5050782 ab, so hat man die wahren Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$\lg a = 9{,}98886$$
$$\lg b = 9{,}93979$$
$$\lg c = 9{,}84699$$
$$\lg d = 9{,}69895$$
$$\lg e = 9{,}47287$$
$$\lg f = 9{,}11138$$
$$\lg g = 8{,}40562$$

Werden die negativen Werthe dieser Wurzeln, um ihre Zeichen kennen zu lernen und sie zu verbessern, in die Gleichung substituirt, so zeigt sich, dafs sie keinen Fehler geben, der auch noch bei einer Rechnung mit sieben Decimalen bemerkt werden könnte. So z. B. findet man für $\lg b = 9{,}9397900$

x^7	$= + 0{,}3789047$	$7x^7$	$= + \ \ 2{,}6523329$
$\alpha_1 x^6$	$= - 1{,}5233790$	$6\alpha_1 x^6$	$= - \ \ 9{,}1402740$
$\alpha_2 x^5$	$= + 2{,}4229648$	$5\alpha_2 x^5$	$= + 12{,}1148240$
$\alpha_3 x^4$	$= - 1{,}9328347$	$4\alpha_3 x^4$	$= - \ \ 7{,}7313388$
$\alpha_4 x^3$	$= + 0{,}8073689$	$3\alpha_4 x^3$	$= + \ \ 2{,}4221067$
$\alpha_5 x^2$	$= - 0{,}1669377$	$2\alpha_5 x^2$	$= - \ \ 0{,}3338754$
$\alpha_6 x$	$= + 0{,}0142047$	$\alpha_6 x$	$= + \ \ 0{,}0142047$
α_7	$= - 0{,}0002914$	$x^0 \dfrac{df(x^0)}{dx^0}$	$= - \ \ 0{,}0020199$
$f(x^0)$	$= + 0{,}0000003.$		

Es würde folglich

$$\frac{1}{M} \triangle \lg x^0 = \frac{-0{,}0000003}{-0{,}0020199},$$

wenn überhaupt der Werth von $f(x^0)$ verbürgt werden könnte, was hier keineswegs der Fall ist, da 3 die achte bedeutende Ziffer ist in den Zahlen, aus denen $f(x^0)$ gebildet wird, während schon die siebente ungewifs sein mufs. Will man also hier die Logarithmen der Wurzeln verbessern, so mufs man bei der Substitution Logarithmen von 10 Decimalen anwenden oder unmittelbar substituiren, eine Mühe, die hier unnöthig scheint, da Gaufs die Wurzeln bis auf 16 Decimalen gegeben hat, so dafs man den strengen Werth mit dem gefundenen genäherten vergleichen kann. Die Logarithmen der wahren Wurzeln und die Unterschiede von der eben gefundenen ersten Näherung sind:

$\lg a = 9{,}98881$	Unterschied	0,00005
$b = 9{,}93990$	"	0,00011
$c = 9{,}84691$	"	0,00008
$d = 9{,}69897$	"	0,00002
$e = 9{,}47287$	"	0,00000
$f = 9{,}11138$	"	0,00000
$g = 8{,}40562$	"	0,00000

Die Wurzeln (nach meiner Benennung) sind alle negativ. Obgleich diese Unterschiede für die erste Näherung sämmtlich höchst unbedeutend sind, der gröfste $= \frac{1}{4000}$ des Ganzen, so sieht man doch, dafs sie im Grunde blofs von dem bemerkten Umstande bei α_2 in der ersten Potenzirung herrühren. Ich habe dieses Beispiel als das ungünstigste unter den mir bekannten bei der ersten Näherung gewählt, wie überhaupt die Lage von sieben reellen Wurzeln, sämmtlich zwischen 0 und 1, bei jeder Methode wegen der Nothwendigkeit, mit gröfserer Genauigkeit, als man sonst bei den ersten Versuchen zu thun pflegt, zu substituiren, die Lösung erschwert haben würde. Die Vergröfserung der Wurzeln allein würde bei keiner Methode wesentlich zur Erleichterung beigetragen haben. Hätte man übrigens, wozu aber kein Grund vorhanden war, dem oben gefundenen Werthe von $f(x^0)$ trauen wollen, so würde man erhalten haben

$$\triangle \lg \text{brigg.}\, x^0 = +\,0{,}000065,$$

wodurch man der Wahrheit näher gekommen wäre. Ein Zeichen, dafs die Uebereinstimmung der ersten Näherung nicht blofs zufällig war.

Als zweites Beispiel kann die höchste Gleichung dienen, welche Fourier in seinem vortrefflichen Werke pag. 111 unter den Beispielen aufführt:

$$x^7 - 2\,x^5 - 3\,x^3 + 4\,x^2 - 5\,x + 6 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^1$

$$x^7 + 4\,x^6 - 2\,x^5 - 2\,x^4 + 29\,x^3 - 14\,x^2 - 23\,x + 36 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^2$

$$x^7 + 20\,x^6 + 78\,x^5 + 54\,x^4 + 589\,x^3 + 1386\,x^2 + 1537\,x + 1296 = 0$$

oder um von jetzt an Logarithmen zu gebrauchen

$$x^7 + 1{,}30103\,x^6 + 1{,}89209\,x^5 + 1{,}73239\,x^4 + 2{,}77012\,x^3 + 3{,}14176\,x^2 + 3{,}18667\,x + 3{,}11261 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^3$

$$x^7 + 2{,}38739\,x^6 + 3{,}70774\,x^5 \dot{-} 4{,}56350\,x^4 + 5{,}58565\,x^3 + 5{,}39859\,x^2 - 6{,}08996\,x + 6{,}22522 = 0.$$

Die Minuszeichen in der zweiten Gleichung zeigten schon an, dafs imaginäre Wurzeln vorhanden seien. In der letzten Gleichung kann man aus dem Orte der Minuszeichen mit Sicherheit schliefsen, dafs der Coefficient von x^3 einen Modul, und das bekannte Glied einen zweiten Modul geben wird.

Potenz der Wurzeln $= 2^4$

$$x^7 + 4{,}69313\,x^6 + 7{,}64995\,x^5 - 9{,}39198\,x^4 + 11{,}18557\,x^3 + 11{,}94810\,x^2 + 11{,}82750\,x + 12{,}45044 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^5$

$$x^7 + 9{,}37002\,x^6 + 15{,}34998\,x^5 - 18{,}87658\,x^4 + 22{,}44623\,x^3 + 23{,}75387\,x^2 - 24{,}65849\,x + 24{,}90088 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^6$

$$x^7 + 18{,}73971\,x^6 + 30{,}70300\,x^5 - 37{,}83535\,x^4 + 44{,}89718\,x^3 + 47{,}76037\,x^2 + 49{,}06887\,x + 49{,}80176 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^7$

$$x^7 + 37{,}47942\,x^6 + 61{,}40601\,x^5 - 75{,}51594\,x^4 + 89{,}79441\,x^3 + 95{,}49582\,x^2 + 97{,}80854\,x + 99{,}60352 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^8$

$$x^7 + 74{,}95884\,x^6 + 122{,}81202\,x^5 - 151{,}32153\,x^4 + 179{,}58882\,x^3 + 190{,}99129\,x^2 + 195{,}21132\,x + 199{,}20704 = 0.$$

Hier schliefst die Rechnung, da alle Coefficienten, mit Ausnahme zweier, zu imaginären Wurzeln gehöriger, welche durch die Minuszeichen angedeutet waren, reine Quadrate sind und im Fortgange der Rechnung keine Veränderung würden erleiden können. Zieht man jeden vorhergehenden Coefficienten von dem folgenden ab, so geben die Verbindungen der Coefficienten von

x^7 und x^6	$\lg a^{256} = 74{,}95884$	$\lg a = 0{,}292808$
x^6 und x^5	$\lg b^{256} = 47{,}85318$	$\lg b = 0{,}186927$
x^5 und x^4	unbestimmt	
x^5 und x^3	$\lg g^{512} = 56{,}77680$	$\lg g^2 = 0{,}221785$
x^3 und x^2	$\lg c^{256} = 11{,}40247$	$\lg c = 0{,}044541$
x^2 und x	unbestimmt	
x^2 und x^0	$\lg g'^{512} = 8{,}21575$	$\lg g'^2 = 0{,}032093$

Da hier nur zwei Paare imaginärer Wurzeln sind, so kann man die beiden in Bezug auf f linearen Gleichungen, die sich aus α_1 und α_6 ergeben, anwenden. Hiezu ist es aber erforderlich, erst des Zeichens von a, b, c sich zu versichern. Eine beiläufige Substitution zeigt, dafs a positiv ist, b negativ und c negativ. Denn es geben z. B. bei c, wenn man $\lg x = 0{,}044541 n$ (oder negativ) substituirt, die ungeraden Potenzen x^7, x^5, x^3, x den Werth der aus ihnen erhaltenen Summe

$$= + 10{,}9106$$

und die geraden Potenzen x^4, x^2 und x^0 den Werth der aus ihnen erhaltenen Summe

$$= + 10{,}9106$$

Es mufs folglich ein positiver Werth von x substituirt werden, oder c negativ genommen. Die beiden linearen Gleichungen sind

$$a + b + c + f + f' = \alpha_1 = 0$$

$$g^2 g'^2 (ab + ac + bc) + abc\, g^2 f' + abc\, g'^2 f = \alpha_6 = -5,$$

welche in Zahlen ausgedrückt werden

$$f + f' = + 0{,}68341$$

$$3{,}60055 f + 5{,}57264 f' = + 1{,}25927$$

woraus man erhält

$$f = + 1{,}29258 \qquad f' = - 0{,}60917.$$

Die erste Näherung giebt daher die linke Seite der Gleichung als das Product der Factoren

$$(x + 1{,}96249)(x - 1{,}53790)(x - 1{,}10800)(x^2 + 1{,}29258\, x + 1{,}66642) \times (x^2 - 0{,}60917\, x + 1{,}07669).$$

Will man diese Werthe verbessern, z. B. den ersten der beiden trinomischen Factoren, so findet sich für ihn

$$\lg r^0 = 0{,}11089 \qquad \varphi^0 = 59^\circ\, 57'\, 25{,}''3.$$

Der leichteren Rechnung wegen nehme man aber φ^0 in runden Zehnern von Secunden, etwa

$$\varphi^0 = 59^\circ\, 57'\, 20''.$$

Man erhält damit

$$
\begin{array}{rlrl}
-r^{0^7}\cos 7\varphi^0 &= -3{,}0148035 & -7r^{0^7}\cos 7\varphi^0 &= -21{,}1036245\\
-\alpha_2 r^{0^5}\cos 5\varphi^0 &= +3{,}5605688 & -5\alpha_2 r^{0^5}\cos 5\varphi^0 &= +17{,}8028440\\
-\alpha_4 r^{0^3}\cos 3\varphi^0 &= -6{,}4534218 & -3\alpha_4 r^{0^3}\cos 3\varphi^0 &= -19{,}3602654\\
+\alpha_5 r^{0^2}\cos 2\varphi^0 &= -3{,}3238460 & +2\alpha_5 r^{0^2}\cos 2\varphi^0 &= -\ \ 6{,}6476920\\
-\alpha_6 r^0\cos\varphi^0 &= +3{,}2315655 & -\ \alpha_6 r^0\cos\varphi^0 &= +\ \ \underline{3{,}2315655}\\
\text{bek. Glied}\ldots &= +\underline{6{,}0} & [n(-r^0)^n\cos n\varphi^0] &= -26{,}0771724\\
[(-r^0)^n\cos n\varphi^0] &= +0{,}0000630 & &
\end{array}
$$

ferner

$$
\begin{array}{rlrl}
-r^{0^7}\sin 7\varphi^0 &= -5{,}1569226 & -7r^{0^7}\sin 7\varphi^0 &= -36{,}0984582\\
-\alpha_2 r^{0^5}\sin 5\varphi^0 &= -6{,}2226992 & -5\alpha_2 r^{0^5}\sin 5\varphi^0 &= -31{,}1134960\\
-\alpha_4 r^{0^3}\sin 3\varphi^0 &= +0{,}0150177 & -3\alpha_4 r^{0^3}\sin 3\varphi^0 &= +\ \ 0{,}0450531\\
+\alpha_5 r^{0^2}\sin 2\varphi^0 &= +5{,}7777520 & +2\alpha_5 r^{0^2}\sin 2\varphi^0 &= +11{,}5555040\\
-\alpha_6 r^0\sin\varphi^0 &= +\underline{5{,}5872230} & -\ \alpha_6 r^0\sin\varphi^0 &= +\ \ \underline{5{,}5872230}\\
[(-r^0)^n\sin n\varphi^0] &= +0{,}0003709 & [n(-r^0)^n\sin n\varphi^0] &= -50{,}0241741.
\end{array}
$$

Hieraus folgt dann weiter:

$$
\begin{array}{rlrl}
\lg P &= 6{,}575433 & \lg \varrho &= 1{,}751380\\
Q &= 80^\circ\ 21'\ 35{,}''7 & \psi &= 242^\circ\ 28'\ 2{,}''5
\end{array}
$$

und damit

$$\triangle \lg r^0 = +0{,}0000027\cdot 56 \quad \triangle\varphi = +0{,}''42$$

so dafs $\lg g = \ 0{,}1108927\cdot 56 \quad \varphi = 59^\circ\ 57'\ 20{,}''42.$

Auf ähnliche Art wird g' und φ' genauer gefunden und für die reellen Wurzeln hat man z. B. für a

$$\lg a^0 = 0{,}292808$$

$$
\begin{array}{rlrl}
-a^{0^7} &= -112{,}112997 & -7a^{0^7} &= -784{,}790979\\
-\alpha_2 a^{0^5} &= +\ \ 58{,}219704 & -5\alpha_2 a^{0^5} &= +291{,}098520\\
-\alpha_4 a^{0^3} &= +\ \ 22{,}674894 & -3\alpha_4 a^{0^3} &= +\ \ 68{,}024682\\
+\alpha_5 a^{0^2} &= +\ \ 15{,}405508 & +2\alpha_5 a^{0^2} &= +\ \ 30{,}811016\\
-\alpha_6 a^0 &= +\ \ \ \ 9{,}812460 & -\ \alpha_6 a^0 &= +\ \ \ \ \underline{9{,}812460}\\
\text{bek. Glied} &= +\ \ \ \ \underline{6{,}0} & [n(-^0)a^n] &= -385{,}044301\\
[(-a^0)^n] &= -\ \ \ \ 0{,}000431, & &
\end{array}
$$

woraus $\quad \Delta \lg a^0 = -0{,}0000005 \qquad \lg a = 0{,}2928075.$

Die Verbesserung jedes einzelnen Werthes, isolirt für sich, giebt zuletzt die Factoren der Gleichung:

$$\{x^2 - 0{,}6092132\,x + 1{,}0766801\}\,\{x^2 + 1{,}2926302\,x + 1{,}6664238\}$$
$$\{x + 1{,}9624901\} \times \{x - 1{,}5378905\}\,\{x - 1{,}1080166\},$$

welche, da jeder für sich gefunden ist, die Prüfung der Rechnung gewähren, dafs sein mufs

$$a + b + c + f + f' = \alpha_1 = 0.$$

Die Werthe der ersten Näherung sind in diesem Beispiel so nahe der Wahrheit, wie man es für fünfstellige Logarithmen kaum erwarten durfte.

Als drittes Beispiel einer Gleichung mit mehr als vier imaginären Wurzeln kann die Gleichung dienen

$$x^7 + 3x^4 + 6 = 0$$

Potenz der Wurzeln $= 2^1$

$$x^7 + 9x^4 + 36x^2 + 36 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^2$

$$x^7 + 81\,x^4 - 648\,x^3 + 1944\,x^2 - 2592\,x + 1296 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^3$

$$x^7 - 1296\,x^5 + 11745\,x^4 + 104976\,x^3 + 629856\,x^2 + 1679616\,x + 1679616 = 0.$$

Von hier an Logarithmen:

Potenz der Wurzeln $= 2^4$

$$x^7 + 3{,}41364\,x^6 + 6{,}27636\,x^5 + 8{,}60926\,x^4 - 9{,}91005\,x^3 + 10{,}92186\,x^2 + 11{,}84836\,x + 12{,}45042 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^5$

$$x^7 + 6{,}46828\,x^6 + 12{,}16012\,x^5 + 17{,}29346\,x^4 + 17{,}89851\,x^3 + 22{,}31679\,x^2 + 22{,}41671\,x + 24{,}90084 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^6$

$$x^7 + 12{,}75961\,x^6 + 23{,}97079\,x^5 + 34{,}58689\,x^4 - 39{,}91125\,x^3 + 44{,}63668\,x^2 - 47{,}51776\,x + 49{,}80168 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^7$

$$x^7 + 25{,}49393\, x^6 + 47{,}63345\, x^5 + 69{,}17378\, x^4 + 79{,}51832\, x^3 + 89{,}26074\, x^2 + 94{,}72953\, x + 99{,}60336 = 0.$$

Potenz der Wurzeln $= 2^8$

$$x^7 + 50{,}98747\, x^6 + 94{,}96298\, x^5 + 138{,}34756\, x^4 + 158{,}73567\, x^3 + 178{,}52144\, x^2 + 189{,}15081\, x + 199{,}20672 = 0.$$

Hier wird die Rechnung geschlossen, weil die Coefficienten von x^6, x^4, x^2 und das bekannte Glied reine Quadrate bleiben. Die negativen Coefficienten von x^3 und x in der 6ten abgeleiteten Gleichung, zeigen, dafs die Coefficienten, die auf sie folgen, zwei Moduln bestimmen werden. Auch der Coefficient von x^5 ist in der dritten abgeleiteten Gleichung negativ. Es ist deshalb sehr wahrscheinlich, dafs auch der Coefficient von x^4 einen Modul bestimmt. Die erste Wurzel ist reell. Aus der successiven Division erhält man

$$\begin{array}{ll} \lg a^{256} = 50{,}98747 & \lg a = 0{,}199170 \\ \lg g^{512} = 87{,}36009 & \lg g^2 = 0{,}341250 \\ \lg g'^{512} = 40{,}17388 & \lg g'^2 = 0{,}156929 \\ \lg g''^{512} = 20{,}68528 & \lg g''^2 = 0{,}080802. \end{array}$$

Um die zu den verschiedenen g gehörigen f zu finden, wird die Gleichung zu einer vom achten Grade gemacht. Es ist dann

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 3, \quad \alpha_4 = 0, \quad \alpha_5 = 0, \quad \alpha_6 = 0, \quad \alpha_7 = 6, \quad \alpha_8 = 0,$$

womit die β und γ werden

$$\begin{array}{l} \beta = 1, \quad \beta_1 = 6r^{-6}, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 3, \quad \beta_4 = 0, \\ \gamma = 1, \quad \gamma_1 = -6r^{-6}, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 3. \end{array}$$

Die beiden Gleichungen für t werden also

$$\begin{array}{l} 0 = t^4 - 6r^{-6}\, t^3 - 4r^2\, t^2 + (18r^{-4} - 3)\, t + 2r^4 \\ 0 = t^3 + 6r^{-6}\, t^2 - 2r^2\, t - (6r^{-4} + 3). \end{array}$$

Wird hier zuerst $\lg r^2 = 0{,}34125$ substituirt, und die Coefficienten logarithmisch mit vorgesetztem Zeichen geschrieben, so stellt sich die Division beider Gleichungen in einander so:

$$0 = t^4 - 9{,}75440\, t^3 - 0{,}94331\, t^2 + 9{,}86872\, t + 0{,}98353$$

$$\begin{array}{llll}
 & 0 = t^3 + 9{,}75440\, t^2 - 0{,}64228\, t - 0{,}62802 & & \\
\lg B \ldots\ldots\ldots & 0{,}30103 & 0{,}30103 & 0{,}06969 \\
\hline
 & -0{,}05543\, t^3 - 0{,}64228\, t^2 + 0{,}69771\, t + 0{,}98353 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
 & 0 = t^3 + 0{,}58685\, t^2 - 0{,}64228\, t - 0{,}92810 & & \\
\lg B' \ldots\ldots\ldots & 0{,}06909 & \infty & 0{,}30198 \\
\hline
 & -0{,}51776\, t^2 \ldots\ldots\ldots\ldots t + 0{,}62612 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & 0 = t^2 \ldots\ldots\ldots\ldots t - 0{,}10836 & \\
\lg B'' \ldots\ldots\ldots & 0{,}00000 & 0{,}15026 \\
\hline
 & +0{,}58685\, t^2 - 0{,}49202\, t - 0{,}92810 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 & 0 = t^2 - 9{,}90517\, t - 0{,}34125 & \\
\lg B''' \ldots\ldots\ldots & 0{,}00000 & 0{,}38189 \\
\hline
 & +9{,}90517\, t + 9{,}95936 &
\end{array}$$

$$0 = t + 0{,}05419.$$

Die Uebereinstimmung dieses letzten Werthes von t mit einer Wurzel der Gleichung $0 = t^2 - 0{,}10836$ zeigt, dafs die Annahme eines positiven r^2 richtig ist. Bei der Einfachheit der Coefficienten in den beiden Gleichungen, welche durch

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_8 = 0$$

herbeigeführt ist, kann man auch die Gleichungen unmittelbar in einander dividiren, wodurch man erhält:

$$0 = t + \frac{3\, r^{12}}{r^{14} + 18 r^4 - 36}$$

Substituirt man hier $\lg g'^2 = 0{,}15693$ und $\lg g''^2 = 0{,}08080$, so erhält man die logarithmischen Werthe:

$$0 = f' + 0{,}28435 \qquad\qquad 0 = f'' - 0{,}16895.$$

Es sind folglich die Factoren aus der ersten Näherung:

$$0 = (x + 1{,}58186)\,(x^2 - 1{,}13289\, x + 2{,}19405)\,(x^2 - 1{,}92464\, x + 1{,}43527)\,.$$
$$(x^2 + 1{,}47553\, x + 1{,}20447).$$

Die durch eine Rechnung mit 7 Decimalen gefundenen verbesserten Werthe sind:

$$0 = (x + 1{,}5818592)\,(x^2 - 1{,}1328854\,x + 2{,}1940798)$$
$$(x^2 - 1{,}9246556\,x + 1{,}4352554)\,(x^2 + 1{,}4756817\,x + 1{,}2044862).$$

Als letztes Beispiel endlich einer Trennung gleicher, oder nahe gleicher, reeller oder imaginärer Wurzeln möge die Gleichung dienen:

$$0 = x^4 + 4{,}002\,x^3 + 14{,}01801\,x^2 + 20{,}03802\,x + 25{,}07005.$$

Bei jeder ersten Näherung wird man geneigt sein, die rechte Seite der Gleichung für ein vollständiges Quadrat zu halten. Denn es ist

$$\{x^2 + 2{,}001\,x + 5{,}007\}^2 = x^4 + 4{,}002\,x^3 + 14{,}018001\,x^2 + 20{,}038014\,x + 25{,}070049,$$

welcher Werth sich von der rechten Seite der Gleichung nur in der fünften Decimalstelle erst unterscheidet. Es würde sonach eine sehr weitläufige Rechnung werden, wenn man durch Potenzirung der Wurzeln die einzelnen Wurzeln oder Moduln trennen wollte. Angenommen daher, man habe nach 6 oder 7 Operationen die Ueberzeugung gewonnen, dafs hier zwei einander sehr nahe stehende trinomische Factoren stattfinden, so würde man als erste Näherung annehmen

$$g^2 = g'^2 = 5{,}007 \qquad f = f' = 2{,}001$$

und daraus

$$\lg r^0 = 0{,}3497888 \qquad \varphi^0 = 63^\circ\, 26'\, 26{,}''4.$$

Der leichteren Rechnung wegen nehme man

$$\lg r^0 = 0{,}3498000 \qquad \varphi^0 = 63^\circ\, 26'\, 20'',$$

so giebt die Substitution bei Logarithmen von 10 Decimalen, die hier nöthig sind:

$$\begin{aligned}
+r^{0^4}\cos 4\varphi^0 &= -\ \ 7{,}0137170573 & 4r^{0^4}\cos 4\varphi^0 &= -\ \ 28{,}0548682292\\
-\alpha_1 r^{0^3}\cos 3\varphi^0 &= +44{,}1162372122 & -3\alpha_1 r^{0^3}\cos 3\varphi^0 &= +132{,}3487116366\\
+\alpha_2 r^{0^2}\cos 2\varphi^0 &= -42{,}1228012449 & +2\alpha_2 r^{0^2}\cos 2\varphi^0 &= -\ \ 84{,}2456024898\\
-\alpha_3 r^0\cos\ \varphi^0 &= -20{,}0498010266 & -\ \alpha_3 r^0\cos\ \varphi^0 &= -\ \ \underline{20{,}0498010266}\\
&\ \ +\underline{25{,}07005} & [n(-r^0)^n\cos n\varphi^0] &= -\ \ \ \ 0{,}0015601090\\
[(-r^0)^n\cos n\varphi^0] &= -\ \ \underline{\underline{0{,}0000321166}} & &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+r^{0^4}\sin 4\varphi^0 &= -24{,}0716609670 & 4r^{0^4}\sin 4\varphi^0 &= -\ \ 96{,}2866438680\\
-\alpha_1 r^{0^3}\sin 3\varphi^0 &= +\ \ 8{,}0305364993 & -3\alpha_1 r^{0^3}\sin 3\varphi^0 &= +\ \ 24{,}0916094979\\
+\alpha_2 r^{0^2}\sin 2\varphi^0 &= +56{,}1476453709 & +2\alpha_2 r^{0^2}\sin 2\varphi^0 &= +112{,}2952907418\\
-\alpha_3 r^0\sin\ \varphi^0 &= -\underline{40{,}1064968325} & -\ \alpha_3 r^0\sin\ \varphi^0 &= -\ \ \underline{40{,}1064968325}\\
[(-r^0)^n\sin n\varphi^0] &= +\ \ \underline{\underline{0{,}0000240707}} & [n(-r^0)^n\sin n\varphi^0] &= -\ \ \ \ \underline{\underline{0{,}0062404608}}
\end{aligned}$$

Wegen der Gleichheit der Wurzeln mufs hier noch hinzugefügt werden

$$\begin{aligned}
3\cdot 4r^{0^4}\cos 4\varphi^0 &= -\ \ 84{,}1646047\\
-2\cdot 3\alpha_1 r^{0^3}\cos 3\varphi^0 &= +264{,}6974233\\
+1\cdot 2\alpha_2 r^{0^2}\cos 2\varphi^0 &= -\ \ \underline{84{,}2456025}\\
[n(n-1)(-r^0)^n\cos n\varphi^0] &= +\ \ \underline{\underline{96{,}2872161}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3\cdot 4r^{0^4}\sin 4\varphi^0 &= -288{,}8599316\\
-2\cdot 3\alpha_1 r^{0^3}\sin 3\varphi^0 &= +\ \ 48{,}1832190\\
+1\cdot 2\alpha_2 r^{0^2}\sin 2\varphi^0 &= +\underline{112{,}2952907}\\
[n(n-1)(-r^0)^n\sin n\varphi^0] &= -\underline{\underline{128{,}3814219}}
\end{aligned}$$

Aus diesen Werthen ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\lg P &= 5{,}603531 & Q &= 143^\circ\ 8'\ 57{,}''0\\
\lg \varrho &= 7{,}808380 & \psi &= 255\ \ 57\ \ 49{,}7\\
\lg \varrho' &= 2{,}205414 & \psi' &= 306\ \ 52\ \ 13{,}0,
\end{aligned}$$

woraus weiter folgt

$$\lg\delta = 9{,}054660 \qquad \gamma = 8^\circ\ 3'\ 29{,}''35$$

und dann

$$\frac{r}{r^0} = 1 - 0{,}000025276 \pm 0{,}000699739$$

$$\varphi - \varphi^0 = +\,6{,}''417 \qquad\qquad \pm\, 20{,}''434.$$

Man hat folglich folgende zusammengehörige Werthe

$$\lg g\ = 0{,}3500928 \qquad \varphi\ = 63^\circ\, 26'\, 46{,}''85$$
$$\lg g' = 0{,}3494850 \qquad \varphi' = 63^\circ\, 26'\ \ 5{,}''98$$

und wenn man hieraus die Factoren der Gleichung bildet, so erhält man:

$$(x + 1{,}0010021 + 2{,}0030005\sqrt{-1})\ (x + 1{,}0010021 - 2{,}0030005\sqrt{-1})$$
$$(x + 0{,}9999979 + 2{,}0000009\sqrt{-1})\ (x + 0{,}9999979 - 2{,}0000009\sqrt{-1}).$$

Die Factoren, aus denen sie wirklich gebildet ist, sind

$$(x + 1{,}001 \pm 2{,}003\sqrt{-1})\ (x + 1{,}000 \pm 2{,}000\sqrt{-1})$$

und die kleinen Unterschiede der berechneten Werthe, rühren nur davon her, wie die obigen Zahlen ausweisen, dafs auch mit Logarithmen von 10 Decimalen die letzten 3 Decimalstellen in $f(x^0)$ sich nicht mehr verbürgen lassen. Es sind nämlich die wahren Werthe

$$\lg g\ = 0{,}3500926 \qquad \varphi\ = 63^\circ\, 26'\, 47{,}''01$$
$$\lg g' = 0{,}3494850 \qquad \varphi' = 63^\circ\, 26'\ \ 5{,}''82$$

von welchen die Winkel um $0{,}''16$, die Logarithmen der Moduln um 2 Einheiten der letzten Decimale bei dem ersten abweichend, bei dem zweiten völlig übereinstimmend gefunden sind.

Ueber die Entwickelung
einer Funktion in eine periodische Reihe
nach Herrn Le Verrier's Vorschlag.

Die Entwickelung einer Funktion in eine nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen eines Winkels fortschreitenden Reihe, ist in der angewandten Mathematik von so grofser Bedeutung, dafs jede Modification der bisher angewandten Methoden, um auf mechanischem Wege (so genannt zum Unterschiede von dem rein analytischen) die numerischen Werthe der Coefficienten der einzelnen Glieder dieser Reihe zu erhalten, mit dem gröfsten Danke aufgenommen werden mufs. Eine solche hat Herr Le Verrier in dem ersten Bande der *Annales de l'Observatoire impérial de Paris,* Paris 1855 pag. 384, angegeben und abgeleitet. Seine Ableitung gründet sich auf die imaginären Ausdrücke für Sinus und Cosinus, und gewährt dadurch meiner Ansicht nach keine so leichte und klare Uebersicht, als bei der Einfachheit des zum Grunde liegenden Gedankens es wünschenswerth ist. Hier werde ich deshalb diese Ableitung auf die gewöhnliche Form zurückführen. Es hat mir dabei nothwendig geschienen, die ersten Transformationen vielleicht etwas zu weitläufig im Detail auszuführen. Wenn man aber eine vollständige Einsicht über die etwaigen Vorzüge dieser Methode erlangen will, und über die Fälle, in denen vorzugsweise diese Methode zu empfehlen sein würde, so wird zum sichern Urtheil einige Weitläufigkeit nicht gescheut werden dürfen.

Bisher ging man von den numerischen Werthen aus, welche die Funktion erhält, wenn man zu der Einheit des Winkels, für welchen man ihre Werthe berechnete, einen aliquoten Theil der Peripherie wählte. Man theilte die Peripherie in beliebige $2n$ Theile und erhielt eben deshalb auch $2n$ verschiedene Werthe der Funktion, und nicht mehr; so dafs man vermittelst derselben $2n$ Coefficienten der Reihe bestimmen konnte, wozu man gewöhnlich die ersten $n+1$ Coefficienten der Cosinus und $n-1$ Coefficienten der Sinus wählte. An sich braucht die Zahl der Theile keine gerade Zahl zu sein. Allein die Bequemlichkeit des Werthes π bei einer geraden Anzahl von Theilen ist so grofs, dafs bei einer ernstlichen gröfseren Anwendung wohl niemals der Fall einer ungeraden Anzahl von Theilen gewählt worden ist. Sind die $2n$ numerischen Werthe der Funktion gefunden, so sind die Combinationen, die man bei ihrer Verbindung eintreten läfst, um die $2n$ Coefficienten daraus zu erhalten, einfach genug. Bei der Entwickelung des reciproken Werthes von dem Cubus des Abstandes der Pallas vom Jupiter bin ich an einigen Stellen bis zu $2n=48$ fortgegangen, und konnte die 25 Cosinus-Coefficienten und 23 Sinus-Coefficienten noch ohne allzugrofse Mühe erhalten.

Statt dieses Werthes $\frac{2\pi}{2n}$, der immer nur $2n$ verschiedene Funktions-Werthe geben kann, nimmt Herr Le Verrier einen ganz beliebigen Werth für den einfachen Winkel an, er möge, wie im folgenden, 2α heifsen. Man kann voraussetzen, dafs 2α incommensurabel mit 2π ist. Wäre er commensurabel, so würde das ältere Verfahren eintreten können. Diese willkürliche Annahme eines zu 2π incommensurabeln Winkels gestattet nicht blos, $2n$ verschiedene Funktionswerthe zu finden, sondern unendlich viele, oder so viele man will, und folglich, da bei gehöriger Behandlung jeder Funktionswerth einen Coefficienten, sei es eines Cosinus oder eines Sinus bestimmen läfst, so viele Coefficienten der Reihe zu bestimmen, als man für nöthig hält. Man kann folglich bei diesem Verfahren zuerst sich darauf beschränken, m Coefficienten aus m Funktions-Werthen herzuleiten. Sollten diese nicht ausreichen, so kommt es darauf an, die Berechnung von $m+m'$ Coefficienten so einzurichten, dafs man die ersten Rechnungen für die ersten m Coefficienten benutzen kann, um zu ihnen neue m' Coefficienten hinzuzufügen. Wenn dieses gelingen sollte, so würde man auf diesem Wege durch successive Vermehrung der Zahl $m + m' + m''$, vielleicht am leichtesten den Zweck erreichen bis zu der Grenze, die man sich vorgesetzt hat.

Die Form der periodischen Reihe, in welche man die Funktion entwickeln will, sei

$$\begin{aligned} X = C_0 &+ C_1 \cos x + S_1 \sin x \\ &+ C_2 \cos 2x + S_2 \sin 2x \\ &+ C_3 \cos 3x + S_3 \sin 3x \\ &+ C_4 \cos 4x + S_4 \sin 4x \\ &+ C_i \cos ix + S_i \sin ix \\ &\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ &+ C_k \cos kx + S_k \sin kx \end{aligned}$$

Man berechne zuerst die Werthe von X für $x = 0$, $x = 2\alpha$, $x = 2 \cdot 2\alpha$, $x = 3 \cdot 2\alpha$, $x = 4 \cdot 2\alpha$ bis zu $x = n \cdot 2\alpha$, wenn man $n + 1$ Coefficienten bestimmen will. Dabei sei 2α ein willkürlicher, aber mit 2π nicht commensurabler Winkel. Die numerischen Werthe mögen mit R_0, R_1, R_2, R_3, R_4 bis zu R_n bezeichnet werden. Man hat also

$$\begin{aligned} R_0 = C_0 &+ C_1 \\ &+ C_2 \\ &+ C_3 \\ &+ C_4 \\ &\;\vdots \\ &+ C_i \\ &\;\vdots \\ &+ C_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 = C_0 &+ C_1 \cos 2\alpha + S_1 \sin 2\alpha \\ &+ C_2 \cos 4\alpha + S_2 \sin 4\alpha \\ &+ C_3 \cos 6\alpha + S_3 \sin 6\alpha \\ &+ C_4 \cos 8\alpha + S_4 \sin 8\alpha \\ &\;\vdots \\ &+ C_i \cos 2i\alpha + S_i \sin 2i\alpha \\ &\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ &+ C_k \cos 2k\alpha + S_k \sin 2k\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_2 = C_0 &+ C_1 \cos\ 4\alpha + S_1 \sin\ 4\alpha \\
&+ C_2 \cos\ 8\alpha + S_2 \sin\ 8\alpha \\
&+ C_3 \cos 12\alpha + S_3 \sin 12\alpha \\
&+ C_4 \cos 16\alpha + S_4 \sin 16\alpha \\
&\ \vdots \\
&+ C_i \cos 4i\alpha + S_i \sin 4i\alpha \\
&\ \vdots \\
&+ C_k \cos 4k\alpha + S_k \sin 4k\alpha \\
R_3 = C_0 &+ C_1 \cos\ 6\alpha + S_1 \sin\ 6\alpha \\
&+ C_2 \cos 12\alpha + S_2 \sin 12\alpha \\
&+ C_3 \cos 18\alpha + S_3 \sin 18\alpha \\
&+ C_4 \cos 24\alpha + S_4 \sin 24\alpha \\
&\ \vdots \\
&+ C_i \cos 6i\alpha + S_i \sin 6i\alpha \\
&\ \vdots \\
&+ C_k \cos 6k\alpha + S_k \sin 6k\alpha
\end{aligned}$$

und überhaupt

$$\begin{aligned}
R_{k-1} = C_0 &+ C_1 \cos\ (2k-2)\,\alpha + S_1 \sin\ (2k-2)\,\alpha \\
&+ C_2 \cos\ (4k-4)\,\alpha + S_2 \sin\ (4k-4)\,\alpha \\
&+ C_3 \cos\ (6k-6)\,\alpha + S_3 \sin\ (6k-6)\,\alpha \\
&+ C_4 \cos\ (8k-8)\,\alpha + S_4 \sin\ (8k-8)\,\alpha \\
&\ \vdots \\
&+ C_i \cos i\,(2k-2)\,\alpha + S_i \sin i\,(2k-2)\,\alpha \\
R_k = C_0 &+ C_1 \cos\ 2k\alpha + S_1 \sin\ 2k\alpha \\
&+ C_2 \cos\ 4k\alpha + S_2 \sin\ 4k\alpha \\
&+ C_3 \cos\ 6k\alpha + S_3 \sin\ 6k\alpha \\
&+ C_4 \cos\ 8k\alpha + S_4 \sin\ 8k\alpha \\
&\ \vdots \\
&+ C_i \cos 2ik\alpha + S_i \sin 2ik\alpha.
\end{aligned}$$

Am einfachsten bestimmt man die Werthe der Coefficienten durch successive Elimination, wozu sich für C_0 die einfachen ersten Differenzen darbieten. Bildet man also

$$\begin{aligned}
R_0 - R_1 &= (1)_1 \\
R_1 - R_2 &= (1)_2 \\
R_2 - R_3 &= (1)_3 \\
R_3 - R_4 &= (1)_4 \\
&\ \vdots \\
R_{k-1} - R_k &= (1)_k
\end{aligned}$$

so wird man in den Gröfsen (1) kein C_0 mehr haben, und zugleich lassen die Werthe derselben auf folgende Art sich schreiben, wie man sogleich sieht:

$$\begin{aligned}
(1)_1 = {} & 2\sin\alpha\,(C_1\sin\alpha - S_1\cos\alpha) \\
& + 2\sin 2\alpha\,(C_2\sin 2\alpha - S_2\cos 2\alpha) \\
& + 2\sin 3\alpha\,(C_3\sin 3\alpha - S_3\cos 3\alpha) \\
& + 2\sin 4\alpha\,(C_4\sin 4\alpha - S_4\cos 4\alpha) \\
& \quad\vdots \\
& + 2\sin i\alpha\,(C_i\sin i\alpha - S_i\cos i\alpha) \\
(1)_2 = {} & 2\sin\alpha\,(C_1\sin 3\alpha - S_1\cos 3\alpha) \\
& + 2\sin 2\alpha\,(C_2\sin 6\alpha - S_2\cos 6\alpha) \\
& + 2\sin 3\alpha\,(C_3\sin 9\alpha - S_3\cos 9\alpha) \\
& + 2\sin 4\alpha\,(C_4\sin 12\alpha - S_4\cos 12\alpha) \\
& \quad\vdots \\
& + 2\sin i\alpha\,(C_i\sin 3i\alpha - S_i\cos 3i\alpha) \\
(1)_3 = {} & 2\sin\alpha\,(C_1\sin 5\alpha - S_1\cos 5\alpha) \\
& + 2\sin 2\alpha\,(C_2\sin 10\alpha - S_2\cos 10\alpha) \\
& + 2\sin 3\alpha\,(C_3\sin 15\alpha - S_3\cos 15\alpha) \\
& + 2\sin 4\alpha\,(C_4\sin 20\alpha - S_4\cos 20\alpha) \\
& \quad\vdots \\
& + 2\sin i\alpha\,(C_i\sin 5i\alpha - S_i\cos 5i\alpha)
\end{aligned}$$

und so fort, so wie allgemein

$$\begin{aligned}
(1)_k = {} & 2\sin\alpha\,(C_1\sin(2k-1)\alpha - S_1\cos(2k-1)\alpha) \\
& + 2\sin 2\alpha\,(C_2\sin 2(2k-1)\alpha - S_2\cos 2(2k-1)\alpha) \\
& + 2\sin 3\alpha\,(C_3\sin 3(2k-1)\alpha - S_3\cos 3(2k-1)\alpha) \\
& + 2\sin 4\alpha\,(C_4\sin 4(2k-1)\alpha - S_4\cos 4(2k-1)\alpha) \\
& \quad\vdots \\
& + 2\sin i\alpha\,(C_i\sin i(2k-1)\alpha - S_i\cos i(2k-1)\alpha)
\end{aligned}$$

Es wird auch des Folgenden wegen bequemer sein, durch Hilfswinkel die Cosinus und Sinus der gleichen Vielfachen zu vereinigen. Sei deshalb

$$\begin{aligned}
C_1 &= M_1\cos N_1 & S_1 &= M_1\sin N_1 \\
C_2 &= M_2\cos N_2 & S_2 &= M_2\sin N_2 \\
C_3 &= M_3\cos N_3 & S_3 &= M_3\sin N_3 \\
C_4 &= M_4\cos N_4 & S_4 &= M_4\sin N_4 \\
&\ \vdots & &\ \vdots \\
C_i &= M_i\cos N_i & S_i &= M_i\sin N_i
\end{aligned}$$

so werden die Formen der ersten Differenz

$$
\begin{aligned}
(1)_1 = {} & \,2 \sin \alpha \; M_1 \sin \; (\alpha - N_1) \\
& + 2 \sin 2\alpha \; M_2 \sin \; (2\alpha - N_2) \\
& + 2 \sin 3\alpha \; M_3 \sin \; (3\alpha - N_3) \\
& + 2 \sin 4\alpha \; M_4 \sin \; (4\alpha - N_4) \\
& \;\;\vdots \\
& + 2 \sin i\alpha \; M_i \sin \; (i\alpha - N_i) \\
(1)_2 = {} & \,2 \sin \alpha \; M_1 \sin \; (3\alpha - N_1) \\
& + 2 \sin 2\alpha \; M_2 \sin \; (6\alpha - N_2) \\
& + 2 \sin 3\alpha \; M_3 \sin \; (9\alpha - N_3) \\
& + 2 \sin 4\alpha \; M_4 \sin (12\alpha - N_4) \\
& \;\;\vdots \\
& + 2 \sin i\alpha \; M_i \sin (3i\alpha - N_i) \\
(1)_3 = {} & \,2 \sin \alpha (M_1 \sin \; (5\alpha - N_1)) \\
& + 2 \sin 2\alpha (M_2 \sin (10\alpha - N_2)) \\
& + 2 \sin 3\alpha \; M_3 \sin (15\alpha - N_3) \\
& + 2 \sin 4\alpha \; M_4 \sin (20\alpha - N_4) \\
& \;\;\vdots \\
& + 2 \sin i\alpha \; M_i \sin (5i\alpha - N_i) \\
(1)_4 = {} & \,2 \sin \alpha \; M_1 \sin \; (7\alpha - N_1) \\
& + 2 \sin 2\alpha \; M_2 \sin (14\alpha - N_2) \\
& + 2 \sin 3\alpha \; M_3 \sin (21\alpha - N_3) \\
& + 2 \sin 4\alpha \; M_4 \sin (28\alpha - N_4) \\
& \;\;\vdots \\
& + 2 \sin i\alpha \; M_i \sin (7i\alpha - N_i)
\end{aligned}
$$

und sofort allgemein

$$
\begin{aligned}
(1)_k = {} & \,2 \sin \alpha M_1 \sin \; ((2k-1)\alpha - N_1) \\
& + 2 \sin 2\alpha M_2 \sin (2\,(2k-1)\alpha - N_2) \\
& + 2 \sin 3\alpha M_3 \sin (3\,(2k-1)\alpha - N_3) \\
& + 2 \sin 4\alpha M_4 \sin (4\,(2k-1)\alpha - N_4) \\
& \;\;\vdots \\
& + 2 \sin i\alpha M_i \sin (\,i\,(2k-1)\alpha - N_i)
\end{aligned}
$$

Wollte man aus diesen ersten Differenzen die folgende Differenz bilden, so würde immer nur eine der Gröfsen M_1 oder N_1 eliminirt werden können, und die erhaltenen Formen würden eben deshalb unsymmetrisch ausfallen. Geht man aber sogleich zur zweiten

Differenz der Gröſsen (1), oder wenigstens zu einer analogen Verbindung, über, so erhält man symmetrische, leicht übersichtliche Formen und eliminirt zu gleicher Zeit immer die zwei Gröſsen M_1 und N_1, M_2 und $N_2 \ldots M_i$ und N_i u. s. w.

In den verschiedenen Gröſsen (1) kommen die Gröſsen M_1 und N_1 so vor:

$$\begin{array}{ll}
\text{in } (1)_1 \ldots\ldots\ldots & 2 \sin \alpha\, M_1 \sin\ (\alpha - N_1) \\
\text{in } (1)_2 \ldots\ldots\ldots & 2 \sin \alpha\, M_1 \sin (3\alpha - N_1) \\
\text{in } (1)_3 \ldots\ldots\ldots & 2 \sin \alpha\, M_1 \sin (5\alpha - N_1) \\
\text{in } (1)_4 \ldots\ldots\ldots & 2 \sin \alpha\, M_1 \sin (7\alpha - N_1) \\
\vdots & \\
\text{in } (1)_k \ldots\ldots\ldots & 2 \sin \alpha\, M_1 \sin ((2k-1)\,\alpha - N_1)
\end{array}$$

Die Faktoren $2 \sin \alpha$ sind überall dieselben. Die Winkel unter dem Sinus bilden eine arithmetische Progression, deren Differenz 2α ist. Es ist nun aber nach der elementaren Formel

$$- \sin (n-2)\, \alpha + 2 \cos 2\alpha \sin n\alpha - \sin (n+2)\, \alpha = 0.$$

Bildet man folglich die Gröſsen

$$\begin{array}{l}
-(1)_1 \quad + 2 \cos 2\alpha\, (1)_2 - (1)_3 \quad = (2)_2 \\
-(1)_2 \quad + 2 \cos 2\alpha\, (1)_3 - (1)_4 \quad = (2)_3 \\
-(1)_3 \quad + 2 \cos 2\alpha\, (1)_4 - (1)_5 \quad = (2)_4 \\
\vdots \\
-(1)_{k-1} + 2 \cos 2\alpha\, (1)_k - (1)_{k+1} = (2)_k
\end{array}$$

so werden aus der Reihe der Gröſsen (2), die offenbar eine groſse Analogie mit den zweiten Differenzen der Gröſsen (1) haben, die beiden Gröſsen M_1 und N_1 verschwunden sein.

Die Gröſsen M_2 und N_2 kommen dagegen in den Gröſsen (1) unter folgender Verbindung vor:

$$\begin{array}{ll}
\text{in } (1)_1 \ldots\ldots & 2 \sin 2\alpha\, M_2 \sin\ (2\alpha - N_2) \\
\text{in } (1)_2 \ldots\ldots & 2 \sin 2\alpha\, M_2 \sin\ (6\alpha - N_2) \\
\text{in } (1)_3 \ldots\ldots & 2 \sin 2\alpha\, M_2 \sin (10\alpha - N_2) \\
\text{in } (1)_4 \ldots\ldots & 2 \sin 2\alpha\, M_2 \sin (14\alpha - N_2) \\
\vdots & \\
\text{in } (1)_k \ldots\ldots & 2 \sin 2\alpha\, M_2 \sin (2\,(2k-1)\,\alpha - N_2)
\end{array}$$

Die Faktoren $2 \sin 2\alpha$ sind auch hier überall gleich. Die Winkel unter dem Sinuszeichen bilden eine arithmetische Progression, deren Differenz 4α ist. Wenn folglich für alle Glieder in (1) dasselbe Gesetz der Bildung der Gröfsen (2) angewandt wird, so hat man in

$$-(1)_1 + 2\cos\alpha\,(1)_2 - (1)_3 = (2)_2$$

das Glied

$$2\sin 2\alpha\, M_2 \{-\sin(2\alpha - N_2) + 2\cos\alpha\sin(6\alpha - N_2) - \sin(10\alpha - N_2)\}$$

und da, wenn für eine arithmetische Progression, deren Differenz in den Winkeln $h\alpha$ ist,

$$-\sin(n-h)\,\alpha + 2\cos h\alpha\sin n\,\alpha - \sin(n+h)\,\alpha = 0,$$

so wird für eine andere arithmetische Progression, deren Differenz in den Winkeln $g\alpha$ ist, die Gröfse

$$\begin{aligned} G &= -\sin(n-g)\,\alpha + 2\cos h\alpha\sin n\alpha - \sin(n+g)\alpha \\ &= 4\sin\tfrac{1}{2}(g-h)\sin\tfrac{1}{2}(g+h)\sin n\alpha \end{aligned}$$

was am einfachsten erhalten wird, wenn man

$$-\sin(n-g)\,\alpha + 2\cos(g\alpha)\sin n\alpha - \sin(n+g)\alpha = 0$$

von G abzieht. Bei den Gröfsen M_2 und N_2 ist in den Gröfsen (1) die arithmetische Progression der Winkel so, dafs $g = 4$ ist, während bei den Gröfsen (2) $h = 2$ ist. Man hat also $G = 4\sin\alpha\sin 3\alpha\sin n\alpha$, folglich erscheinen die Gröfsen M_2 und N_2 in den Gröfsen (2) unter folgenden Verbindungen:

$$\begin{array}{ll} \text{in } (2)_2 \ldots\ldots & 8\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha\, M_2\sin(6\alpha - N_2) \\ \text{in } (2)_3 \ldots\ldots & 8\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha\, M_2\sin(10\alpha - N_2) \\ \text{in } (2)_4 \ldots\ldots & 8\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha\, M_2\sin(14\alpha - N_2) \\ \quad\vdots & \\ \text{in } (2)_k \ldots\ldots & 8\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha\, M_2\sin(2(2k-1)\,\alpha - N_2) \end{array}$$

und überhaupt wird eine ähnliche Form bei allen andern Gliedern M_i und N_i stattfinden. So wird vorkommen für die Gröfsen M_3 und N_3

$$\begin{array}{ll} \text{in } (2)_2 \ldots\ldots & 8\sin 2\alpha\sin 3\alpha\sin 4\alpha\, M_3\sin(9\alpha - N_3) \\ \text{in } (2)_3 \ldots\ldots & 8\sin 2\alpha\sin 3\alpha\sin 4\alpha\, M_3\sin(15\alpha - N_3) \\ \text{in } (2)_4 \ldots\ldots & 8\sin 2\alpha\sin 3\alpha\sin 4\alpha\, M_3\sin(21\alpha - N_3) \\ \quad\vdots & \\ \text{in } (2)_k \ldots\ldots & 8\sin 2\alpha\sin 3\alpha\sin 4\alpha\, M_3\sin(3(2k-1)\,\alpha - N_3) \end{array}$$

Allgemein

in $(2)_k$ ..... $8 \sin(i-1)\alpha \sin i\alpha \sin(i+1)\alpha\, M_i \sin(i(2k-1)\alpha - N_i)$

Hat man also die Gröfsen (2) gebildet, so ist ihr analytischer Ausdruck:

$$\begin{aligned}
(2)_2 = {} & 8 \sin \alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha\, M_2 \sin(6\alpha - N_2) \\
& + 8 \sin 2\alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha\, M_3 \sin(9\alpha - N_3) \\
& + 8 \sin 3\alpha \sin 4\alpha \sin 5\alpha\, M_4 \sin(12\alpha - N_4) \\
& \vdots \\
& + 8 \sin(i-1)\alpha \sin i\alpha \sin(i+1)\alpha\, M_i \sin(3i\alpha - N_i) \\
(2)_3 = {} & 8 \sin \alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha\, M_2 \sin(10\alpha - N_2) \\
& + 8 \sin 2\alpha \sin 3\alpha \sin 4\alpha\, M_3 \sin(15\alpha - N_3) \\
& + 8 \sin 3\alpha \sin 4\alpha \sin 5\alpha\, M_4 \sin(20\alpha - N_4) \\
& \vdots \\
& + 8 \sin(i-1)\alpha \sin i\alpha \sin(i+1)\alpha\, M_i \sin(5i\alpha - N_i) \\
(2)_4 = {} & 8 \sin \alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha\, M_2 \sin(14\alpha - N_2) \\
& + 8 \sin 2\alpha \sin 3\alpha \sin 4\alpha\, M_3 \sin(21\alpha - N_3) \\
& + 8 \sin 3\alpha \sin 4\alpha \sin 5\alpha\, M_4 \sin(28\alpha - N_4) \\
& \vdots \\
& + 8 \sin(i-1)\alpha \sin i\alpha \sin(i+1)\alpha\, M_i \sin(7i\alpha - N_i)
\end{aligned}$$

und überhaupt allgemein

$$\begin{aligned}
(2)_k = {} & 8 \sin \alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha\, M_2 \sin(2(2k-1)\alpha - N_2) \\
& + 8 \sin 2\alpha \sin 3\alpha \sin 4\alpha\, M_3 \sin(3(2k-1)\alpha - N_3) \\
& + 8 \sin 3\alpha \sin 4\alpha \sin 5\alpha\, M_4 \sin(4(2k-1)\alpha - N_4) \\
& \vdots \\
& + 8 \sin(i-1)\alpha \sin i\alpha \sin(i+1)\alpha\, M_i \sin(i(2k-1)\alpha - N_i)
\end{aligned}$$

Es geht hieraus schon hervor, wie man fortfahren kann. Ganz ähnlich wie aus den Gröfsen (1) die beiden M_1 und N_1 eliminirt worden sind durch Bildung der Gröfsen (2), so wird man auch aus diesen letzteren die M_2 und N_2 wegschaffen können durch analoge Bildung von Gröfsen (3), und zwar wird hier der Faktor $2 \cos 4\alpha$ anzuwenden sein, weil 4α die Differenz der Winkel ist, deren Sinus mit M_2 verbunden ist. Wenn man also bildet

$$\begin{aligned}
-(2)_2 + 2 \cos 4\alpha\, (2)_3 - (2)_4 &= (3)_3 \\
-(2)_3 + 2 \cos 4\alpha\, (2)_4 - (2)_5 &= (3)_4 \\
-(2)_4 + 2 \cos 4\alpha\, (2)_5 - (2)_6 &= (3)_5 \\
&\vdots \\
-(2)_{k-1} + 2 \cos 4\alpha\, (2)_k - (2)_{k+1} &= (3)_k
\end{aligned}$$

so sind aus allen diesen Gröfsen (3) die Werthe von M_2 und N_2

verschwunden und der Ausdruck derselben fängt mit M_3 und N_3 an; da bei diesen die Winkel in einer arithmetischen Progression, deren Differenz 6α ist, fortschreiten, also das obige g hier 6 ist, so wie das obige h hier 4 wird, so kommen als neue Faktoren bei M_3 und N_3 hinzu $4\sin\alpha\,\sin 5\alpha$. Bei M_4 und N_4, wo $g = 8\alpha$ ist, kommen hinzu $4\sin 2\alpha\,\sin 6\alpha$ und so fort, bei M_i und N_i die Faktoren $4\sin(i-2)\alpha\cdot\sin(i+2)\alpha$. Damit wird sich gleich der analytische Ausdruck der Gröſsen (3) hinschreiben lassen. Es wird

$$\begin{aligned}
(3)_3 = {} & 32\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha\sin 4\alpha\sin 5\alpha\, M_3\sin(15\alpha - N_3)\\
& + 32\sin 2\alpha\sin 3\alpha\sin 4\alpha\sin 5\alpha\sin 6\alpha\, M_4\sin(20\alpha - N_4)\\
& + 32\sin 3\alpha\sin 4\alpha\sin 5\alpha\sin 6\alpha\sin 7\alpha\, M_5\sin(25\alpha - N_5)\\
& \quad\vdots\\
& + 32\sin(i-2)\alpha\sin(i-1)\alpha\sin i\alpha\sin(i+1)\alpha\sin(i+2)\alpha\\
& \qquad\qquad M_i\sin(5i\alpha - N_i)\\
(3)_4 = {} & 32\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha\sin 4\alpha\sin 5\alpha\, M_3\sin(21\alpha - N_3)\\
& + 32\sin 2\alpha\sin 3\alpha\sin 4\alpha\sin 5\alpha\sin 6\alpha\, M_4\sin(28\alpha - N_4)\\
& + 32\sin 3\alpha\sin 4\alpha\sin 5\alpha\sin 6\alpha\sin 7\alpha\, M_5\sin(35\alpha - N_5)\\
& \quad\vdots\\
& + 32\sin(i-2)\alpha\sin(i-1)\alpha\sin i\alpha\sin(i+1)\alpha\sin(i+2)\alpha\\
& \qquad\qquad M_i\sin(7i\alpha - N_i)\\
(3)_k = {} & 32\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha\sin 4\alpha\sin 5\alpha\, M_3\sin(3(2k-1)\alpha - N_3)\\
& + 32\sin 2\alpha\sin 3\alpha\sin 4\alpha\sin 5\alpha\sin 6\alpha\, M_4\sin(4(2k-1)\alpha - N_4)\\
& \quad\vdots\\
& + 32\sin(i-2)\alpha\sin(i-1)\alpha\sin i\alpha\sin(i+1)\alpha\sin(i+2)\alpha\\
& \qquad\qquad M_i\sin(i(2k-1)\alpha - N_i)
\end{aligned}$$

Aus den Gröſsen (3) werden die Gröſsen (4) gebildet durch

$$\begin{aligned}
-(3)_3 + 2\cos 6\alpha\,(3)_4 - (3)_5 &= (4)_4\\
&\vdots\\
-(3)_{k-1} + 2\cos 6\alpha\,(3)_k - (3)_{k+1} &= (4)_k
\end{aligned}$$

Sie lassen die Gröſsen M_3 und N_3 verschwinden und fügen den andern Gliedern neue Faktoren hinzu, nämlich

$$\text{in } (4)_k \begin{cases} \ldots\ldots\ 4\sin\alpha\sin 7\alpha & \text{den Gliedern mit } M_4 \text{ und } N_4\\ \ldots\ldots\ 4\sin 2\alpha\sin 8\alpha & \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad M_5 \text{ ,, } N_5\end{cases}$$

u. s. w. Es möchte wohl an den bisherigen Entwickelungen hinreichend sein, um den allgemeinen Gang und die Form der Glieder klar zu übersehen.

Für die Uebersicht aller der Werthe, welche man berechnen mufs, wird es am besten sein, sie in folgender Uebersicht zusammenzustellen.

$$\begin{array}{llll}
R_0 & & & \\
R_1 & (1)_1 & & \\
R_2 & (1)_2 & (2)_2 & \\
R_3 & (1)_3 & (2)_3 & (3)_3 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
R_{k-3} & (1)_{k-3} & (2)_{k-3} & (3)_{k-3} \\
R_{k-2} & (1)_{k-2} & (2)_{k-2} & \\
R_{k-1} & (1)_{k-1} & & \\
R_k & & &
\end{array}$$

Die Gröfsen (1) sind die reinen ersten Differenzen der Gröfsen R, so dafs immer die folgende von der vorhergehenden abgezogen wird. Die folgenden Gröfsen entstehen aus jeder vorhergehenden Vertikalreihe durch einen Ausdruck von der Form

$$\begin{aligned}
-(1)_1 + 2\cos 2\alpha\,(1)_2 - (1)_3 &= (2)_2 \\
-(2)_2 + 2\cos 4\alpha\,(2)_3 - (2)_4 &= (3)_3 \\
-(3)_3 + 2\cos 6\alpha\,(3)_4 - (3)_5 &= (4)_4
\end{aligned}$$

u. s. w. Da in den Gröfsen (1) das Glied C_0 fehlt, in den Gröfsen (2) aufserdem noch M_1 und N_1 in (3) noch M_2 und N_2 eliminirt sind, so sieht man, dafs bei Fortsetzung der Reihen zuletzt Gröfsen (m) vorkommen, in welchen alle Coefficienten bis auf M_m und N_m eliminirt sind und die der kleineren Vielfachen nicht mehr vorkommen, und wenn man deshalb zu dem Schlusse berechtigt ist, dafs alle späteren Coefficienten zu vernachlässigen sind, so wird man zuerst M_m und N_m aus zwei Gleichungen der Gröfsen (m) bestimmen und durch Substitution dieser Werthe nach und nach bis zu M_1 und N_1 heruntersteigen.

Gewöhnlich wird es die Absicht sein, alle Coefficienten bis zu einem bestimmten hin, also etwa bis zu C_i und S_i oder M_i und N_i zu erhalten. Man wird dann $2i+1$ Werthe R berechnen müssen. Aus ihnen entstehen $2i$ Werthe (1), $2i-2$ Werthe (2), $(2i-4)$ Werthe (3) u. s. w. bis 4 Werthe $(i-1)$ und endlich zwei Werthe (i).

Die letzteren geben unmittelbar M_i und N_i, in so fern die Coefficienten C_{i+1}, S_{i+1} etc. zu vernachlässigen sind. Die Gröſsen $(i-1)$ geben vermittelst der eben gefundenen M_i und N_i die beiden Werthe M_{i-1} und N_{i-1}, und so geht man zurück, bis man aus zwei Gröſsen (1) die Werthe M_1 und N_1 erhält. Der vereinzelte Werth C_0 wird gefunden aus

$$C_0 = R_0 - C_1 - C_2 - C_3 \dots .$$

Hiernach stellen sich die sämmtlichen Operationen, um $2i+1$ Coefficienten zu bestimmen, so:

I. Berechnung der Werthe R, von R_0 bis zu R_{2i}

II. Bildung der Gröſsen (1) von $(1)_1$ bis $(1)_{2i}$, wobei

$$R_k - R_{k+1} = (1)_k$$

Der Ausdruck dieser Gröſsen ist

$$(1)_k = \Sigma\{2 \sin i\alpha\, M_i\, (\sin i\,(2k-1)\,\alpha - N_i)\}$$

wenn man für i alle ganzen Zahlen setzt von

$$i = 1 \text{ bis zu } i = i$$

und für k alle ganzen Zahlen von

$$k = 1 \text{ bis zu } k = 2i$$

III. Bildung der Gröſsen (2) von $(2)_2$ bis zu $(2)_{2i-1}$, wobei

$$-(1)_{k-1} + 2\cos 2\alpha\,(1)_k - (1)_{k+1} = (2)_k$$

Der Ausdruck dieser Gröſsen ist:

$$(2)_k = \Sigma\{8 \sin(i-1)\,\alpha\, \sin i\alpha \sin(i+1)\,\alpha\, M_i \sin(i(2k-1)\,\alpha - N_i)\}$$

wenn für i alle ganzen Zahlen gesetzt werden von

$$i = 2 \text{ bis zu } i = i$$

und für k alle ganzen Zahlen von

$$k = 2 \text{ bis zu } k = 2i - 1$$

IV. Bildung der Gröſsen (3) von $(3)_3$ bis zu $(3)_{2i-2}$, wobei

$$-(2)_{k-1} + 2\cos 4\alpha\,(2)_k - (2)_{k+1} = (3)_k$$

Der Ausdruck dieser Gröſsen ist:

$$(3)_k = \Sigma\{32 \sin(i-2)\,\alpha \sin(i-1)\,\alpha \sin i\alpha \sin(i+1)\,\alpha \sin(i+2)\,\alpha \\ M_i \sin(i\,(2k-1)\,\alpha - N_i)\}$$

wenn für i alle ganzen Zahlen gesetzt werden von

$$i = 3 \text{ bis zu } i = i$$

und für k alle ganze Zahlen von

$$k = 3 \text{ bis zu } k = 2i - 2$$

V. Bildung der Gröfsen (4) von $(4)_4$ bis zu $(4)_{2i-3}$, wobei

$$-(3)_{k-1} + 2\cos 6\alpha\,(3)_i - (3)_{k+1} = (4)_k$$

Der Ausdruck dieser Gröfsen ist

$$(4)_k = \Sigma\{128 \sin(i-3)\,\alpha \,....\, \sin(i+3)\,\alpha\, M_i \sin(i(2k-1)\,\alpha - N_i)\}$$

wenn für i alle ganzen Zahlen gesetzt werden von

$$i = 4 \text{ bis zu } i = i$$

und für k alle ganzen Zahlen von

$$k = 4 \text{ bis zu } k = 2i - 3$$

In derselben Weise geht man zu den Gröfsen (5) fort mit

$$-(4)_{k-1} + 2\cos 8\alpha\,(4)_k - (4)_{k+1} = (5)_k$$

deren Ausdruck sich ebenfalls ergiebt

$$(5)_k = \Sigma\{512 \sin(i-4)\,\alpha \,....\, \sin(i+4)\,\alpha\, M_i \sin(i(2k-1)\,\alpha - N_i)\}$$

und kommt endlich zu den Gröfsen $(i-1)$, welche entstehen aus

$$+(i-2)_{k-1} + 2\cos(2i-4)\,\alpha\,(i-2)_k - (i-2)_{k+1} = (i-1)_k$$

Der Ausdruck dieser Gröfsen ist:

$$(i-1)_k = \Sigma\{2^{2i-3} \sin\alpha \sin 2\alpha \ldots \sin(2i-3)\,\alpha M_{i-1} \sin((i-1)(2k-1)\,\alpha - N_{i-1})$$
$$+ 2^{2i-3} \sin 2\alpha \sin 3\alpha \ldots \sin(2i-2)\,\alpha M_i \sin(i(2k-1)\,\alpha - N_i)\}$$

wo k nur die vier Werthe $k = i-1$, i, $i+1$ und $i+2$ haben kann und endlich ganz zuletzt auf die Gröfsen (i), deren es nur 2 giebt

$$(i)_i \quad = 2^{2i-1} \sin\alpha \sin 2\alpha \,.......\, \sin(2i-1)\,\alpha\, M_i \sin(i(2i-1)\,\alpha - N_i)$$
$$(i)_{i+1} = 2^{2i-1} \sin\alpha \sin 2\alpha \,.......\, \sin(2i-1)\,\alpha\, M_i \sin(i(2i+1)\,\alpha - N_i)$$

Es sind folglich der Reihe nach folgende Gröfsen ermittelt

$$\begin{array}{llllllll}
R_0 & & & & & & \\
R_1 & (1)_1 & & & & & \\
R_2 & (1)_2 & (2)_2 & & & & \\
R_3 & (1)_3 & (2)_3 & (3)_3 & & & \\
R_4 & (1)_4 & (2)_4 & (3)_4 & (4)_4 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
R_i & (1)_i & (2)_i & (3)_i & (4)_i & \ldots\ldots & (i)_i \\
R_{i+1} & (1)_{i+1} & (2)_{i+1} & (3)_{i+1} & (4)_{i+1} & & (i)_{i+1} \\
\vdots & & & & & & \\
R_{2i-3} & (1)_{2i-3} & (2)_{2i-3} & (3)_{2i-3} & (4)_{2i-3} & & \\
R_{2i-2} & (1)_{2i-2} & (2)_{2i-2} & (3)_{2i-2} & & & \\
R_{2i-1} & (1)_{2i-1} & (2)_{2i-1} & & & & \\
R_{2i} & (1)_{2i} & & & & &
\end{array}$$

Ehe man weiter geht wird es zweckmäſsig sein, in jedem dieser Werthe den Coefficienten des ersten Gliedes auf 1 zu bringen. Dieser Coefficient von M_1 bei (1), von M_2 bei (2) etc. ist bei allen Gröſsen dieser Art gleich und ein Sinusprodukt von $\sin\alpha$ bis zum Sinus von $(2m-1)\alpha$ multiplicirt mit einer Potenz von 2 in jedem Werthe von $(m)_k$. Man bilde also

$$[1]_k = \frac{(1)_k}{2\sin\alpha}$$

$$[2]_k = \frac{(2)_k}{8\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha}$$

$$[3]_k = \frac{(3)_k}{32\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha\sin 4\alpha\sin 5\alpha}$$

$$[4]_k = \frac{(4)_k}{128\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha\sin 4\alpha\sin 5\alpha\sin 6\alpha\sin 7\alpha}$$

$$\vdots$$

$$[i]_k = \frac{(i)_k}{2^{2i-1}\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha\ldots\sin(2i-1)\alpha}$$

so werden sich jetzt die Gleichungen, aus denen die M und N gefunden werden sollen, so stellen, wenn man immer die zwei Gleichungen für jedes M und N benutzt, welche von der Form $(1)^i$ und $(1)_{i+1}$, $(3)_i$ und $(3)_{i+1}$ etc. sind und von dem letzten Paare, aus welchem M_i und N_i sich ergeben, anfängt.

$$[i]_i \quad = M_i\sin(i(2i-1)\alpha - N_i)$$

$$[i]_{i+1} = M_i\sin(i(2i+1)\alpha - N_i)$$

$$[i-1]_i = M_{i-1}\sin((i-1)(2i-1)\alpha - N_{i-1}) + \frac{\sin(2i-2)\alpha}{\sin\alpha} M_i \sin(i(2i-1)\alpha - N_i)$$

$$[i-1]_{i+1} = M_{i-1}\sin((i-1)(2i+1)\alpha - N_{i-1}) + \frac{\sin(2i-2)\alpha}{\sin\alpha} M_i \sin(i(2i+1)\alpha - N_i)$$

$$[i-2]_i = M_{i-2}\sin((i-2)(2i-1)\alpha - N_{i-2}) + \frac{\sin(2i-4)\alpha}{\sin\alpha} M_{i-1}\sin((i-1)(2i-1)\alpha - N_{i-1}) + \frac{\sin(2i-3)\alpha\sin(2i-4)\alpha}{\sin\alpha\sin 2\alpha} M_i \sin(i(2i-1)\alpha - N_i)$$

$$[i-2]_{i+1} = M_{i-2}\sin((i-2)(2i+1)\alpha - N_{i-2}) + \frac{\sin(2i-4)\alpha}{\sin\alpha} M_{i-1}\sin(((i-1)(2i+1)\alpha) - N_{i-1}) + \frac{\sin(2i-3)\sin(2i-4)\alpha}{\sin\alpha\sin 2\alpha} M_i \sin(i(2i+1)\alpha - N_i)$$

$$[i-3]_i = M_{i-3}\sin((i-3)(2i-1)\alpha - N_{i-3}) + \frac{\sin(2i-6)\alpha}{\sin\alpha} M_{i-2}\sin((i-2)(2i-1)\alpha - N_{i-2}) + \frac{\sin(2i-5)\alpha\sin(2i-6)\alpha}{\sin\alpha\sin 2\alpha} M_{i-1}\sin((i-1)(2i-1)\alpha - N_{i-1}) + \frac{\sin(2i-4)\alpha\sin(2i-5)\alpha\sin(2i-6)\alpha}{\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha} M_i \sin(i(2i-1)\alpha - N_i)$$

$$[i-3]_{i+1} = M_{i-3}\sin((i-3)(2i+1)\alpha - N_{i-3}) + \frac{\sin(2i-6)\alpha}{\sin\alpha} M_{i-2}\sin((i-2)(2i+1)\alpha - N_{i-2}) + \frac{\sin(2i-5)\alpha\cdot\sin(2i-6)\alpha}{\sin\alpha\sin 2\alpha} M_{i-1}\sin((i-1)(2i+1)\alpha - N_{i-1}) + \frac{\sin(2i-4)\alpha\sin(2i-5)\alpha\sin(2i-6)\alpha}{\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha} M_i \sin(i(2i+1)\alpha - N_i)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$[3]_i = M_3\sin(3(2i-1)\alpha - N_3) + \frac{\sin 6\alpha}{\sin\alpha} M_4\sin(4(2i-1)\alpha - N_4) + \frac{\sin 6\alpha\cdot\sin 7\alpha}{\sin\alpha\sin 2\alpha} M_5\sin(5(2i-1)\alpha - N_5) + \frac{\sin 6\alpha\sin 7\alpha\sin 8\alpha}{\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha} M_6\sin(6(2i-1)\alpha - N_6) \text{ etc.}$$

$$[3]_{i+1} = M_3 \sin(3(2i+1)\alpha - N_3) + \frac{\sin 6\alpha}{\sin\alpha} M_4 \sin(4(2i+1)\alpha - N_4)$$
$$+ \frac{\sin 6\alpha \sin 7\alpha}{\sin\alpha \sin 2\alpha} M_5 \sin(5(2i+1)\alpha - N_5)$$
$$+ \frac{\sin 6\alpha \sin 7\alpha \sin 8\alpha}{\sin\alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha} M_6 \sin(6(2i+1)\alpha - N_6) \text{ etc.}$$

$$[2]_i = M_2 \sin(2(2i-1)\alpha - N_2) + \frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha} M_3 \sin(3(2i-1)\alpha - N_3)$$
$$+ \frac{\sin 4\alpha \sin 5\alpha}{\sin\alpha \sin 2\alpha} M_4 \sin(4(2i-1)\alpha - N_4)$$
$$+ \frac{\sin 4\alpha \sin 5\alpha \sin 6\alpha}{\sin\alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha} M_5 \sin(5(2i-1)\alpha - N_5) \ldots \text{ etc.}$$

$$[2]_{i+1} = M_2 \sin(2(2i+1)\alpha - N_2) + \frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha} M_3 \sin(3(2i+1)\alpha - N_3)$$
$$+ \frac{\sin 4\alpha \sin 5\alpha}{\sin\alpha \sin 2\alpha} M_4 \sin(4(2i+1)\alpha - N_4)$$
$$+ \frac{\sin 4\alpha \sin 5\alpha \sin 6\alpha}{\sin\alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha} M_5 \sin(5(2i+1)\alpha - N_i) \ldots \text{ etc.}$$

$$[1]_i = M_1 \sin((2i-1)\alpha - N_1) + \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} M_2 \sin(2(2i-1)\alpha - N_2)$$
$$+ \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} M_3 \sin(3(2i-1)\alpha - N_3)$$
$$+ \frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha} M_4 \sin(4(2i-1)\alpha - N_4) \ldots + \text{ etc.}$$

$$[1]_{i+1} = M_1 \sin((2i+1)\alpha - N_1) + \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} M_2 \sin(2(2i+1)\alpha - N_2)$$
$$+ \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} M_3 \sin(3(2i+1)\alpha - N_3)$$
$$+ \frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha} M_4 \sin(4(2i+1)\alpha - N_4) + \text{ etc.}$$

Man erhält aus diesen Gleichungen folglich nach und nach immer zwei Werthe von

$$M_k \sin(k(2i-1)\alpha - N_k) \quad \text{und} \quad M_k \sin(k(2i+1)\alpha - N_k)$$

Sei der erste = der Zahl A, der zweite = der Zahl B, so wird

$$M_k \cos N_k \sin(k(2i-1)\alpha) - M_k \sin N_k \cos(k(2i-1)\alpha) = A$$
$$M_k \cos N_k \sin(k(2i+1)\alpha) - M_k \sin N_k \cos(k(2i+1)\alpha) = B$$

oder

$$M_k \cos N_k = C_k = \frac{B \cos (k(2i-1)\alpha) - A \cos (k(2i+1)\alpha)}{\sin 2k\alpha}$$

$$M_k \sin N_k = S_k = \frac{B \sin (k(2i-1)\alpha) - A \sin (k(2i+1)\alpha)}{\sin 2k\alpha}$$

und zuletzt C_0 aus den Bestimmungen aller übrigen C_1 bis C_i durch Subtraction ihrer Summe von R_0.

Wenn nun nach der Bestimmung der C und S bis zu C_i und S_i es sich zeigen sollte, dafs die folgenden Coefficienten bis zu $C_{i+i'}$ und $S_{i+i'}$ noch ermittelt werden müfsten, so würde ein grofser Theil der Rechnungen allerdings nicht zu wiederholen sein. Die Werthe bis $R_{2i}\,(1)_{2i}\,(2)_{2i-1}$ etc. bleiben. Man hat noch hinzuzufügen die Berechnung von R_{2i+1} bis $R_{2i+2i'}$ und damit zu bilden die Gröfsen $(1)_{2i+1}$ bis $(1)_{2i+2i'}$. Ferner $(2)_{2i}$ bis $(2)_{2i+2i'-1}$, $(3)_{2i-1}$ bis $(3)_{2i+2i'-2}$, $(4)_{2i-2}$ bis $(4)_{2i+2i'-3}$ u. s. w. Man wird dann die Ermittelung der Werthe aus den Gröfsen bestimmen, welche die Marke $i+i'$ und $i+i'+1$ tragen, oder aus $R_{i+i'}$, $R_{i+i'+1}$, $(1)_{i+i'}$, $(1)_{i+i'+1}$ etc., und wird dieses Verfahren so lange fortsetzen können, bis man mit Sicherheit behaupten kann, die nöthige Grenze erreicht zu haben. Es geht hieraus hervor, dafs ein grofser Theil der Rechnungen beibehalten wird, aber freilich die Ableitung der C und S aus den Gröfsen (1) (2) (3) etc. nach einer geänderten Form neu gemacht.

Der Vortheil, der dadurch erreicht wird, kann erst vollkommen deutlich übersehen werden, wenn man durch praktische Anwendungen sich völlig in den Besitz der anzuwendenden Formeln gesetzt hat. Ich wage nicht, darüber ein Urtheil zu fällen, da ich bei den wenigen Anwendungen, die ich von dieser Methode gemacht habe, gerade in der Herleitung der C und S aus den Gröfsen (1) (2) (3) eine gewisse Schwierigkeit gefunden habe. Je höhere Vielfache kommen, desto mehr setzen sich die Werthe der C und S aus einzelnen Theilen zu einer Summe zusammen. Wenn man bis zu M_i und N_i gehen will, so wird M_i und N_i aus i Gliedern zusammengesetzt werden, die aus Produkten der übrigen M und N mit Brüchen entstehen, welche aus den Sinussen der Vielfachen von α gebildet werden und bei welchen auf die Zeichen natürlich genau Rücksicht genommen werden mufs. Diese Form der Rechnung ist mir nicht gerade die angenehmste und kann bei der gewöhnlichen Art der Ermittelung der Coefficienten aus Werthen, welche sich auf Winkel beziehen, die gleichmäfsig in der Peripherie vertheilt sind, wenigstens bis zu dem Coefficienten des zwölffachen Winkels vermieden werden. Da indessen, wenn man sich einmal für ein bestimmtes α entschieden hat, die Faktoren, welche aus den Sinus der Vielfachen von α entstehen, ein- für allemal berechnet werden können, so mag die Form für andere Rechner ihre Vorzüge haben.

Ich füge hier noch ein Beispiel hinzu:

Es seien für $2\alpha = 42^\circ\, 14'$ folgende 9 Werthe berechnet

$$\begin{aligned}
R_0 &= -1{,}8586986\\
R_1 &= +1{,}6200211\\
R_2 &= +4{,}1962233\\
R_3 &= +4{,}5912438\\
R_4 &= +2{,}7838515\\
R_5 &= -0{,}2990814\\
R_6 &= -3{,}2312842\\
R_7 &= -4{,}5368275\\
R_8 &= -3{,}3571685
\end{aligned}$$

Man erhält hieraus

$$\begin{aligned}
(1)_1 &= -3{,}4787197\\
(1)_2 &= -2{,}5762022\\
(1)_3 &= -0{,}3950205\\
(1)_4 &= +1{,}8073923\\
(1)_5 &= +3{,}0829329\\
(1)_6 &= +2{,}9322028\\
(1)_7 &= +1{,}3055433\\
(1)_8 &= -1{,}1796590
\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich

$$(2)_2 = +0{,}0588296$$
$$(2)_3 = +0{,}1838526$$
$$(2)_4 = -0{,}0114766$$
$$(2)_5 = -0{,}1743046$$
$$(2)_6 = -0{,}0463902$$
$$(2)_7 = +0{,}1807402$$

ferner

$$(3)_3 = -0{,}0118971$$
$$(3)_4 = -0{,}0117612$$
$$(3)_5 = +0{,}0242522$$
$$(3)_6 = -0{,}0153819$$

und zuletzt

$$(4)_4 = +0{,}0017025$$
$$(4)_5 = -0{,}0018444.$$

Zur Ermittelung der Coefficienten C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, S_1, S_2, S_3, S_4 bildet man zuerst

$$[4]_4 = +0{,}0001501$$
$$[4]_5 = -0{,}0001626$$
$$[3]_4 = -0{,}0017712$$
$$[3]_5 = +0{,}0036524$$
$$[2]_4 = -0{,}0066284$$
$$[2]_5 = -0{,}1006708$$
$$[1]_4 = +2{,}5083983$$
$$[1]_5 = +4{,}2786634$$

und hat dann die Gleichungen

$$[4]_4 = C_4 \sin 28\alpha - S_4 \cos 28\alpha$$
$$[4]_5 = C_4 \sin 36\alpha - S_4 \cos 36\alpha$$
$$[3]_4 = C_3 \sin 21\alpha - S_3 \cos 21\alpha + \frac{\sin 6\alpha}{\sin \alpha}[4]_4$$
$$[3]_5 = C_3 \sin 27\alpha - S_3 \cos 27\alpha + \frac{\sin 6\alpha}{\sin \alpha}[4]_5$$
$$\begin{aligned}[2]_4 = C_2 \sin 14\alpha - S_2 \cos 14\alpha \\ + \frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha}(C_3 \sin 21\alpha - S_3 \cos 21\alpha) \\ + \frac{\sin 4\alpha \sin 5\alpha}{\sin \alpha \sin 2\alpha}(C_4 \sin 28\alpha - S_4 \cos 28\alpha)\end{aligned}$$

$$[2]_5 = C_2 \sin 18\alpha - S_2 \cos 18\alpha$$
$$+ \frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha} (C_3 \sin 27\alpha - S_3 \cos 27\alpha)$$
$$+ \frac{\sin 4\alpha \sin 5\alpha}{\sin \alpha \sin 2\alpha} (C_4 \sin 36\alpha - S_4 \cos 36\alpha)$$
$$[1]_4 = C_1 \sin 7\alpha - S_1 \cos 7\alpha$$
$$+ \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} (C_2 \sin 14\alpha - S_2 \cos 14\alpha)$$
$$+ \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} (C_3 \sin 21\alpha - S_3 \cos 21\alpha)$$
$$+ \frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha} (C_4 \sin 28\alpha - S_4 \cos 28\alpha)$$
$$[1]_5 = C_1 \sin 9\alpha - S_1 \cos 9\alpha$$
$$+ \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} (C_2 \sin 18\alpha - S_2 \cos 18\alpha)$$
$$+ \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} (C_3 \sin 27\alpha - S_3 \cos 27\alpha)$$
$$+ \frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha} (C_4 \sin 36\alpha - S_4 \cos 36\alpha)$$

oder wenn

$$C_i \sin ik\alpha - S_i \cos ik\alpha = P_i\,(ik\alpha)$$

gesetzt wird, die folgenden, leichter zu übersehenden Gleichungen

$$P_4\,(28\alpha) = [4]_4$$
$$P_4\,(36\alpha) = [4]_5$$
$$P_3\,(21\alpha) = [3]_4 - \frac{\sin 6\alpha}{\sin \alpha} P_4\,(28\alpha)$$
$$P_3\,(27\alpha) = [3]_5 - \frac{\sin 6\alpha}{\sin \alpha} P_4\,(36\alpha)$$
$$P_2\,(14\alpha) = [2]_4 - \frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha} P_3\,(21\alpha) - \frac{\sin 4\alpha \sin 5\alpha}{\sin \alpha \sin 2\alpha} P_4\,(28\alpha)$$
$$P_2\,(18\alpha) = [2]_5 - \frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha} P_3\,(27\alpha) - \frac{\sin 4\alpha \sin 5\alpha}{\sin \alpha \sin 2\alpha} P_4\,(36\alpha)$$
$$P_1\,\;(7\alpha) = [1]_4 - \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} P_2\,(14\alpha) - \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} P_3\,(21\alpha) - \frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha} P_4\,(28\alpha)$$
$$P_1\,\;(9\alpha) = [1]_5 - \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} P_2\,(18\alpha) - \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} P_3\,(27\alpha) - \frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha} P_4\,(36\alpha)$$

und damit

$$C_k = \frac{P_k(k(2i+1)\alpha)\cos(k(2i-1)\alpha) - P_k(k(2i-1)\alpha)\cos(k(2i+1)\alpha)}{\sin 2k\alpha}$$

$$S_k = \frac{P_k(k(2i+1)\alpha)\sin k(2i-1)\alpha - P_k(k(2i-1)\alpha)\sin(k(2i+1)\alpha)}{\sin 2k\alpha}$$

Man erhält hier

$$\begin{aligned} P_4(28\alpha) &= +0{,}0001501 & P_4(36\alpha) &= -0{,}0001626 \\ P_3(21\alpha) &= -0{,}0021052 & P_3(27\alpha) &= +0{,}0040143 \\ P_2(14\alpha) &= -0{,}0014063 & P_2(18\alpha) &= -0{,}1111176 \\ P_1\;(7\alpha) &= +2{,}5158299 & P_1\;(9\alpha) &= +4{,}4767656 \end{aligned}$$

und daraus zuletzt

$$\begin{aligned} C_4 &= -0{,}0000673 & S_4 &= +0{,}0001561 \\ C_3 &= -0{,}0016994 & S_3 &= +0{,}0036555 \\ C_2 &= -0{,}0469688 & S_2 &= +0{,}1011360 \\ C_1 &= -1{,}9510791 & S_1 &= +4{,}2004395 \end{aligned}$$

und aus der Summe der C verbunden mit R_0

$$\begin{aligned} C_0 &= -1{,}8586986 + 1{,}9998146 \\ &= +0{,}1411160 \end{aligned}$$

so daſs die Reihe wird

$$\begin{aligned} +0{,}1411160 &- 1{,}9510791 \cos \omega + 4{,}2004395 \sin \omega \\ &- 0{,}0469688 \cos 2\omega + 0{,}1011360 \sin 2\omega \\ &- 0{,}0016994 \cos 3\omega + 0{,}0036555 \sin 3\omega \\ &- 0{,}0000673 \cos 4\omega + 0{,}0001561 \sin 4\omega \end{aligned}$$

Die Werthe R sind die heliocentrischen Coordinaten des Jupiters, bezogen auf die Pallasbahn, und zwar die x, genommen in der Ebene der Pallasbahn, wenn die Axe der x in die Apsidenlinie der Pallasbahn gelegt wird, positiv nach der Seite des Perihels der Pallas und die Entwickelung nach der mittleren Anomalie geschieht. Ich hatte dieselbe Reihe aus 24 in der Peripherie gleich vertheilten Winkeln und den dazu gehörigen Werthen R entwickelt und dafür erhalten:

$$
\begin{aligned}
+\,0{,}1411198 - 1{,}9510790 \cos\ \omega &+ 4{,}2004382 \sin\ \omega \\
- 0{,}0469672 \cos 2\omega &+ 0{,}1011344 \sin 2\omega \\
- 0{,}0016961 \cos 3\omega &+ 0{,}0036522 \sin 3\omega \\
- 0{,}0000726 \cos 4\omega &+ 0{,}0001564 \sin 4\omega \\
- 0{,}0000035 \cos 5\omega &+ 0{,}0000075 \sin 5\omega
\end{aligned}
$$

Der Versuch, durch Hinzufügung von R_9 und R_{10}, auch noch C_5 und S_5 bestimmen zu wollen, führt zu keinem befriedigenden Resultate. Man erhält

$$
\begin{aligned}
R_9 &= -\,0{,}2157188 \\
R_{10} &= +\,3{,}0663635
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
(1)_9 &= +\,3{,}1414497 \\
(1)_{10} &= -\,3{,}2820823 \\
(2)_8 &= +\,0{,}0890350 \\
(2)_9 &= -\,0{,}1902028 \\
(3)_7 &= -\,0{,}0077891 \\
(3)_8 &= +\,0{,}0266330 \\
(4)_6 &= +\,0{,}0019220 \\
(4)_7 &= -\,0{,}0019412 \\
(5)_5 &= -\,0{,}0000044 \\
(5)_6 &= +\,0{,}0000129
\end{aligned}
$$

Hieraus wird

$$
\begin{aligned}
[5]_5 &= +\,0{,}0000029 \\
[5]_6 &= -\,0{,}0000085
\end{aligned}
$$

und endlich

$$
\begin{aligned}
C_5 &= -\,0{,}0000097 \\
S_5 &= -\,0{,}0000071.
\end{aligned}
$$

Der Grund liegt eben darin, weshalb auch die anderen Coefficienten in den letzten beiden Decimalen so stark von einander abweichen. Die Gröfse der R erlaubt nur, die ersten fünf Decimalstellen bei einer Rechnung mit 7 Decimalen verbürgen zu können. Die letzten zwei Decimalstellen bleiben immer mehr oder weniger ungewifs. Bei verschiedenen Werthen, von denen man ausgeht, können deshalb die Werthe der Coefficienten nur so weit übereinstimmen, als sie dem wahren Werthe vollkommen entsprechend sind. Im Grunde ist doch die Entwickelung in eine periodische Reihe, wenn gegebene numerische Gröfsen dadurch dargestellt werden sollen, eine Interpolation angewandt auf die bestimmte Form einer periodischen Reihe. Das gewöhnliche Verfahren, durch Werthe, die in der Periode gleichmäfsig vertheilt sind, die Coefficienten zu bestimmen, benutzt nur die Werthe selbst und entspricht deshalb der Interpolation, welche aus der Lagrange'schen Interpolationsformel unmittelbar hervorgeht. Das hier von Herrn Le Verrier vorgeschlagene benutzt Gröfsen, welche den Differenzen analog sind und durch sie ausgedrückt werden können. Die Gröfsen (1) sind unmittelbar die ersten Differenzen. Die Gröfsen (2) werden aus drei aufeinander folgenden Gröfsen (1) hergeleitet. Seien diese letzteren drei a, b, c, so wird, wenn die Differenzen gebildet werden

$$\begin{array}{ccc} a & & \\ & \Delta a & \\ b & & \Delta^2 b \\ & \Delta b & \\ c & & \end{array} \qquad \begin{aligned} \text{wo } \Delta a &= a - b \\ \Delta b &= b - c \\ \Delta^2 b &= + a - 2b + c \end{aligned}$$

weil die hieraus abgeleitete Gröfse (2) gebildet wird durch

$$(2) = -a + 2\cos k\alpha \cdot b - c$$

$$\Delta^2 b + (2) = -4\sin(\tfrac{1}{2}k\alpha)^2 \cdot b$$

$$(2) = -\Delta^2 b - 4\sin(\tfrac{1}{2}k\alpha)^2\, b$$

Es wird deshalb die Gröfse (2) die Fehler, welche in den zweiten Differenzen von a, b, c, wegen der ursprünglichen Mangelhaftigkeit der Hauptwerthe sich zeigen, theilen können und würde sie genau zeigen, wenn das Glied $b \sin \frac{1}{2} k\alpha^2$ nicht eine Modifikation eintreten liefse. Da nun die Gröfsen selbst schon erste Differenzen sind und die späteren Gröfsen (3), (4) etc. auf ähnliche Weise aus (2) gebildet werden wie (2) aus (1), so wird man sich auf Fehler gefafst machen müssen, welche in den ungeraden Differenzen eintreten werden, wenn die Werthe R, von denen ausgegangen wird, nicht ganz strenge richtig sind. Diese Fehler richten