Gesammelte

mathematische und astronomische Abhandlungen

von

Johann Franz

J. F. Encke.

Zweiter Band.

Methode der kleinsten Quadrate. Fehlertheoretische Untersuchungen.

Berlin, 1888.

Ferd. Dümmlers Verlagsbuchhandlung.

Vorwort.

Bei der Herausgabe dieses zweiten Bandes Encke'scher Abhandlungen ist nach den gleichen Grundsätzen verfahren worden, wie beim vorhergehenden Bande.

Das Formelmaterial wie die numerischen Anwendungen sind sorgfältigst geprüft, einige stylistische und sachliche Härten sind entfernt worden.

Das zu der grofsen, aus drei Jahrbuch-Aufsätzen bestehenden, Abhandlung über die Methode der kleinsten Quadrate gegebene Inhaltsverzeichnifs dürfte sowohl demjenigen, der die Sache aus diesem Buche erlernen will, als auch jenen, die dasselbe zum gelegentlichen Nachschlagen benutzen, erwünscht sein.

Am Schlusse des Bandes findet sich eine den Berliner Monatsberichten von 1850 entnommene Notiz Encke's über die Begründung der Methode der kleinsten Quadrate.

Für die gütige Ermächtigung zur Veröffentlichung derselben sage ich der Königlichen Akademie der Wissenschaften meinen verbindlichsten Dank.

Berlin 1888, Juli.

Gravelius.

Inhaltsverzeichnifs.

Seite

Ueber die Methode der kleinsten Quadrate.

Ueber die

Methode der kleinsten Quadrate.

I.

Bei der häufigen Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate, oder der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Resultate von Beobachtungen, habe ich gehofft, dafs manchen Besitzern dieser Ephemeriden eine möglichst kurze und elementare Uebersicht der Sätze, auf welchen diese Methode beruht, verbunden mit den Vorschriften, welche eine häufige Erfahrung mich als die bequemsten für die practische Anwendung erkennen liefs, nicht unwillkommen sein würde. Das folgende ist ein für diesen Zweck gemachter Auszug aus den Abhandlungen von Gaufs über diesen Gegenstand: *Theoria motus corporum coelestium* Lib. II. Sect. III., *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis. Comment. Gottingens. recentiores* Vol. I. 1808—1811, v. Lindenau und Bohnenberger Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften Bd. I. pg. 185. sqq., *Theoria Combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Comm. Gott. recent.* aus den Jahren 1821 und 1823. Pars. I. u. II., verbunden mit den Bemerkungen, welche Bessel in den *Fundamentis Astronomiae* pg. 18 und 116 und in der Abhandlung über den Olbers'schen Cometen darüber gemacht hat. Wenigstens wird kein Satz von einiger Erheblichkeit hier vorkommen, der nicht aus diesen Schriften entlehnt wäre; nur die Form der Beweise ist hin und wieder abgeändert worden, wie es der leichteren Uebersicht wegen angemessener schien. Eben deshalb habe ich auch geglaubt, die Citate der Stellen, wo die einzelnen Sätze vorkommen, weglassen zu dürfen.

Die classischen Arbeiten anderer Mathematiker, besonders von Laplace und Poisson, kommen in Hinsicht auf die Resultate vollkommen mit den hier gegebenen überein. Nur die Form der Darstellung und die Art der Ableitung ist hauptsächlich aus dem Grunde verschieden, weil Laplace besonders den rein theoretischen Gesichtspunkt festgehalten und nur eine Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, unter so vielen andern, darin gesehen zu haben scheint. Bei der so seltenen, und für die Ausbildung der neueren Astronomie so wichtig gewordenen, Verbindung der strengsten Theorie mit der glücklichsten Praxis bei den beiden obengenannten Astronomen, schien die Befolgung des von ihnen eingeschlagenen Weges für die gegenwärtige Absicht vorzuziehen zu sein.

Die Erfahrung lehrt, daſs auch bei der einfachsten Art von Beobachtungen, und der gröſsten Sorgfalt in der Entfernung aller solcher Umstände, die möglicherweise einen Irrthum veranlassen können, fortgesetzte Wiederholungen derselben Beobachtung stets etwas verschiedene Resultate finden lassen. Die Ursachen dieser Verschiedenheiten sind uns unbekannt, oder wenn man sie aus der Unvollkommenheit unserer Instrumente und der Unsicherheit aller Wahrnehmungen durch die Sinne erklären will, doch wenigstens von der Art, daſs der Einfluſs einer jeden einzelnen nicht der Rechnung unterworfen werden kann. Immer können wir indessen voraussetzen, daſs bei einer bestimmten Gattung von Beobachtungen, sowohl die Anzahl der Fehlerquellen, als auch die Anzahl der Verbindungen, die sie unter sich eingehen können, eine und dieselbe bleibt, sowie auch daſs dieselbe bestimmte Verbindung, wenn sie wieder vorkommt, denselben Fehler erzeugt. Kennten wir die Zahl aller möglichen Verbindungen der Fehlerquellen, und wüſsten wir, wie oft solche Verbindungen, welche gleiche Fehler geben, unter dieser Zahl enthalten sind, so würden wir nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung *a priori* berechnen können, wie oft ein bestimmter Fehler bei einer gegebenen Anzahl von Beobachtungen gesetzmäſsig vorkommen sollte, und könnten auch die Wahrscheinlichkeit berechnen, daſs er nicht seltener und nicht häufiger als eine anzugebende Anzahl von Malen statt fände. Bei der Unbekanntschaft mit den Ursachen wird es umgekehrt gestattet sein, die Wahrscheinlichkeitsrechnung aus der Erfahrung anzuwenden, oder aus der Häufigkeit, mit der ein Fehler unter einer Anzahl angestellter Beobachtungen wirklich vorgekommen ist, zu schlieſsen, wie oft er gesetzmäſsig hätte vorkommen sollen, und bei fortgesetzter Wiederholung künftig vorkommen wird. Diese Anwendung setzt nichts anders voraus, als daſs bei der fortgesetzten Wiederholung keine neue Fehlerquelle eingreift, die Anzahl der Fehlerquellen an sich, und ihrer Verbindungen unter einander, bleibt völlig unbestimmt.

Unter der Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Verbindung, oder aller der Verbindungen, die einen Fehler von bestimmter Gröſse erzeugen, versteht man das Verhältniſs der Anzahl solcher bestimmten Verbindungen zu der Zahl, welche alle möglichen Verbindungen überhaupt ausdrückt. Eben dieses Verhältniſs wird auch die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers Δ bedingen. Bezeichnet man diese Wahrscheinlichkeit, die nothwendig eine Function von Δ, und auſserdem noch von einer oder mehreren Constanten sein wird, welche sich auf die Gattung der Beobachtungen beziehen, allgemein durch $\varphi(\Delta)$, so werden sich unter m beobachteten Fehlern, der Wahrscheinlichkeit nach $m\varphi(\Delta)$ Fehler von der Gröſse Δ befinden, und diese Bestimmung wird der Wahrheit um so näher kommen, je gröſser m ist, so daſs sich bei unbeschränkter Vergröſserung von m keine Gröſse angeben läſst, um welche der Werth $m\varphi(\Delta)$ von der wahren Anzahl der Fehler Δ verschieden sein dürfte.

Auch bei dieser unbestimmten Bezeichnung lassen sich doch einige Eigenschaften der Function $\varphi(\Delta)$ angeben. So wissen wir, daſs, bei jeder Gattung von Beobachtungen, die vorkommenden Fehler eine gewisse, wenn gleich scharf nicht anzugebende, Grenze in keinem Falle überschreiten können. Für $\Delta > a$, abgesehen vom

Zeichen, wenn a den Werth dieser Grenze bezeichnet, wird folglich $\varphi(\Delta)$ unmöglich oder $= 0$ werden müssen. Ebenso liegt in der Voraussetzung der möglichsten Sorgfalt bei der Anstellung der Beobachtungen, und in der Annahme, die im Grunde allein die Sicherheit der Erfahrungswissenschaften verbürgen kann, dafs eine gröfsere Anzahl von Beobachtungen auch die Hoffnung eines genaueren Resultats gewährt, die Nothwendigkeit, dafs $\varphi(\Delta)$ ein Maximum habe für $\Delta = 0$, und für gleiche positive und negative Werthe gleich sei. Wäre nämlich dieses nicht der Fall, so würden bei fortgesetzter Wiederholung der Beobachtungen die Werthe der zu bestimmenden Gröfse, welche von der Wahrheit abweichen, entweder überhaupt, oder nach einer bestimmten Seite, der positiven oder negativen Fehler, hin, so vorherrschend werden, dafs wir in der Unmöglichkeit uns befänden, die Wahrheit zu erreichen, und als den wahrscheinlichsten Werth einen irrigen erhielten, selbst bei einer unendlichen Anzahl von Beobachtungen. Das aber heifst im Grunde nichts anders, als unsere Beobachtungen werden als den wahrscheinlichen Werth den erkennen lassen, für welchen $\varphi(\Delta)$ ein Maximum bei $\Delta = 0$, und aufserdem eine gerade Function von Δ ist, und da wir für die Bestimmung des wahren Werthes kein anderes Mittel als die Beobachtungen haben, so wird für uns auch dieser Werth der wahre sein müssen. Bei diesen Annahmen erfordert indessen die Unterscheidung zwischen constanten und irregulären Fehlern noch eine Berücksichtigung. Unter constanten Fehlern versteht man gewöhnlich diejenigen Fehler, deren Quellen nicht allgemein, sondern nur bei einer gewissen Art die Beobachtung anzustellen, etwa nur bei einem bestimmten Instrumente, und bei einer besonderen Individualität des Beobachters sich finden. Irreguläre Fehler dagegen sind solche, die unter allen Umständen eintreten, und daher eigentlich der Wahrscheinlichkeitsrechnung unterworfen sind. Die Ursachen der geringeren constanten Fehler sind an und für sich ganz analog den Ursachen, welche die irregulären Fehler hervorbringen, selbst die gänzliche Vermeidung aller constanten Fehler wird so gut wie unmöglich sein. Es kommt deshalb nur darauf an, ungewöhnliche gröfsere constante Fehler ganz zu vermeiden, und sie überhaupt so sehr als möglich zu verringern, oder ihren Einflufs so weit in Rechnung zu bringen, dafs die noch etwa übrig bleibenden constanten Fehler einer Art die Beobachtungen anzustellen. Fehlerquellen angehören, die auch bei anderen Arten, nur in verschiedenem Grade, stattfinden können. In diesem Falle wird die Vervielfältigung der Beobachtungen gleichsam in zweifacher Richtung zu nehmen sein, so dafs sowohl bei einer bestimmten Methode möglichst viele Wiederholungen gemacht werden, als auch die Methoden selbst möglichst verändert werden, um der Wahrheit nahe zu kommen. Auf die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat diese Unterscheidung so lange keinen Einflufs, als uns unbekannt ist, ob und welche constanten Fehler vorhanden sind. Ihre Existenz wird sich aber ermitteln lassen, wenn wir die Resultate verschiedener Methoden zusammen vergleichen, und die Verschiedenheit derselben gröfser finden, als wir nach der Behandlung der Beobachtungen jeder Methode besonders zu erwarten berechtigt waren. Meistentheils ist die Vervielfältigung der Beobachtungen bei einer bestimmten Methode leichter zu erhalten, und findet häufiger statt, als die Vervielfältigung der Methoden selbst. Hiernach wird auch gewöhnlich das als das wahrscheinlichste ermittelte Resultat ein einseitiges sein, und um der reinen Wahrheit möglichst nahe zu kommen, wird das hauptsächlichste Augenmerk auf die Vermeidung jedes möglichen constanten Fehlers gerichtet werden müssen. In dem folgenden wird dieser Unterschied deshalb übergangen werden. Er bewirkt nur, dafs die Schätzung der Genauigkeit eines solchen einseitigen Resultats immer etwas fehlerhaft ist, ein Umstand, der um so weniger bei der allgemeinen Betrachtung von Einflufs sein kann, als diese Schätzung selbst nicht auf absolute Bestimmtheit Anspruch macht.

Verbindet man nun mit den Bedingungen: $\varphi(\Delta)$ ein Maximum für $\Delta = 0$, $\varphi(\Delta)$ eine gerade Function von Δ, und $\varphi(\Delta) = 0$ für $\Delta > a$, die ebenfalls aus der Erfahrung entlehnte Bemerkung, dafs kleinere Fehler im allgemeinen häufiger vorkommen als gröſsere, und daſs gegen a als die äuſserste Grenze hin, die Anzahl der Fehler mit groſser Geschwindigkeit abnimmt, sowie auch daſs zwischen $\Delta = 0$ und $\Delta = a$, es im allgemeinen keinen Werth von Δ geben wird, für welchen $\varphi(\Delta)$ unmöglich ist, oder daſs alle Fehler durch alle Abstufungen von 0 bis a vorkommen können, so wird man daraus den Gang der Function sich im voraus denken können. Man kann hier eine geometrische Betrachtung zur leichteren Uebersicht benutzen. Werden die Δ als Abscissen, die zugehörigen $\varphi(\Delta)$ als rechtwinklige Ordinaten betrachtet, so wird die Wahrscheinlichkeitscurve auf beiden Seiten der Ordinatenaxe gleichförmig sein. Ein *Maximum maximorum* wird bei $\Delta = 0$ statt finden; von diesem Punkte aus wird die Curve in der Regel mit continuirlichem Zuge fortgehen, so daſs sie in der Nähe von $\Delta = a$ sehr schnell der Abscissenaxe sich nähert. Hieraus ergiebt sich noch ein für das Folgende sehr wichtiger Umstand. Die absolute Grenze a kann niemals fest bestimmt werden. Allein da schon in der Nähe von a die Ordinaten $\varphi(\Delta)$ sehr schnell abnehmen, so werden wir ohne einen für die Praxis merklichen Fehler, statt des Werthes von a, die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen können, sobald nur die Function, welche wir innerhalb der Werthe 0 bis a als übereinstimmend mit dem Gange der Curve finden sollten, die Eigenschaft hat, daſs sie bei zunehmendem Δ beständig abnimmt. Denn bei der schnellen Annäherung an die Abscissenaxe, sobald Δ dem a sich nähert, wird jede Function, die über a hinaus immer noch mehr abnimmt, und vorher schon sich schnell näherte, für ihre Werthe zwischen $\pm a$ und $\pm \infty$ nur ganz unmerkliche Gröſsen geben.

Auſserdem liegt es in der Definition von $\varphi(\Delta)$, daſs für eine so groſse Anzahl von Beobachtungen, daſs alle Fehler, jeder in dem gesetzmäſsigen Verhältniſs seiner Häufigkeit, darin vorkommen,

$$m\,\varphi(\Delta) + m\,\varphi(\Delta') + m\,\varphi(\Delta'') \ldots\ldots = m$$

oder

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(\varphi(\Delta)) = 1$$

Aus dieser Form sieht man, dafs bei der unendlichen Anzahl der Δ, wenn man alle Abstufungen von $\Delta = 0$ bis $\Delta = a$ betrachtet, für ein bestimmtes Δ die Function $\varphi(\Delta)$ ein unendlich Kleines sein wird. Man drückt nach dem analytischen Sprachgebrauch diese Bedingung bequemer so aus, dafs man nicht die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Fehlers allein betrachtet, sondern die Wahrscheinlichkeit der Fehler, die innerhalb der unendlich nahen Grenzen Δ und $\Delta + d\Delta$ liegen, zusammen. Innerhalb dieser unendlich nahen Grenze wird der Werth von $\varphi(\Delta)$ als constant betrachtet werden können. Hiernach ist die Wahrscheinlichkeit der Fehler zwischen Δ und $\Delta + d\Delta = \varphi(\Delta)\, d\Delta$, und überhaupt die Wahrscheinlichkeit der Fehler zwischen den Grenzen a und b gleich der Summe dieser Elemente innerhalb der angegebenen Grenzen, oder

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \int_a^b \varphi(\Delta)\, d\Delta$$

für die Grenzen, die alle Fehler umfassen, $-\infty$ und $+\infty$, wird

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta)\, d\Delta = 1$$

gleich der Gewifsheit. Das letztere Integral giebt den Flächennhalt der Wahrscheinlichkeitscurve, von der Abscissenaxe bis zu der Curve genommen. Es stellt die Anzahl von Beobachtungen vor, welche überhaupt möglich sind, und alle Fehler umfassen. Jedes Flächenelement $\varphi(\Delta)\, d\Delta$ giebt, damit verglichen, die Anzahl von Beobachtungen, welche in der ganzen Anzahl Fehler zwischen Δ und $\Delta + d\Delta$ geben, oder giebt die Anzahl der Beobachtungen mit diesen Fehlern behaftet, welche wahrscheinlich statt finden werden, wenn die ganze Anzahl $= 1$ gesetzt wird.

Jede Beobachtung hat den Zweck, eine oder mehrere Gröfsen zu ermitteln, durch welche die beobachtete Erscheinung bewirkt wird. Bei Planetenörtern werden diese Gröfsen z. B. die Elemente der Planeten- und Erd-Bahn sein können. Die Art der Verbindung der Elemente, um den beobachteten Werth hervorzubringen, mufs als bekannt vorausgesetzt werden, wenn wir aus der Beobachtung den Werth der Elemente bestimmen wollen. Ueberhaupt wird daher jede beobachtete Gröfse M eine Gleichung geben:

$$M = f(x, y, z \dots)$$

wo die Function f bekannt ist, und x, y, z ihrem wahrscheinlichsten Werthe nach bestimmt werden sollen. Diese Gleichung wird mehr oder weniger dargestellt werden, je nachdem wir für x, y, z andere Werthe annehmen. Setzte man $x = p$, $y = q$, $z = r$, und wäre

$$V = f(p, q, r)$$

so würde $M - V$ der Fehler der Beobachtung sein, in dem Falle, dafs die Werthe p, q, r die wahren wären. Hat man mehrere Beobachtungen derselben Art angestellt, in welchen alle dieselben Elemente p, q, r den beobachteten Werth bestimmen, so werden auf ähnliche Weise für die Annahme $x = p$, $y = q$, $z = r$ die Fehler $M' - V'$, $M'' - V''$, $M''' - V'''$ erhalten werden. Für eine andere Annahme $x = p'$, $y = q'$, $z = r'$, auf dieselbe Weise in alle Gleichungen substituirt, wird man im allgemeinen andere V, folglich auch andere $M - V$ erhalten, so dafs zu jeder Hypothese über den Werth von x, y, z ein bestimmtes System von Fehlern Δ, Δ', Δ'', die zugleich mit der Hypothese statt finden, gehört. Um hieraus die wahrscheinlichsten Werthe von x, y, z zu bestimmen, bedürfen wir zweier Sätze aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, von denen der eine die Wahrscheinlichkeit eines zusammengehörigen Systems von Fehlern giebt, wenn die Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen bekannt ist, der andere, die Wahrscheinlichkeit der Hypothese aus der Wahrscheinlichkeit des zu ihr gehörigen Systems von Fehlern bestimmen lehrt.

Für den ersten Satz giebt die Wahrscheinlichkeitsrechnung den Ausdruck:

I.

Wenn $\varphi(\Delta)$ die Wahrscheinlichkeit von Δ ist, ebenso $\varphi(\Delta')$ die von Δ' u. s. w., so ist die Wahrscheinlichkeit eines Zusammentreffens von Δ, Δ', Δ'' u. s. w.

$$= \varphi(\Delta) \cdot \varphi(\Delta') \cdot \varphi(\Delta'') \dots$$

Man kann sich hiervon auf folgende Art überzeugen. Seien, der Einfachheit wegen, in drei Beobachtungen zweimal der Fehler Δ, und einmal Δ' gefunden worden, sei ferner $\varphi(\Delta) = \frac{p}{n}$, $\varphi(\Delta') = \frac{q}{n}$. Man betrachte die drei Beobachtungen als gehörten sie zu einer so grofsen Reihe von m Beobachtungen, dafs darin alle Fehler nach ihrer Wahrscheinlichkeit vorkämen. Es werden folglich $\frac{p}{n}m$ Fehler $= \Delta$, $\frac{q}{n}m$ Fehler $= \Delta'$, darin vorkommen. Die Anzahl der übrigen sei s, bei welchen es hier gleichgültig ist, wieviele gleiche oder ungleiche sich darunter befinden. Abgesehen von s wird die Anzahl aller möglichen Anordnungen der Fehler in den m Beobachtungen sein:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \frac{p}{n} m \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \frac{q}{n} m}$$

Dadurch dafs drei Stellen von zwei Δ und einem Δ' eingenommen sind, bleiben für die übrigen $m - 3$ Beobachtungen noch

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \ldots (m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \,.\,.\, (\frac{p}{n} m - 2) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 0 \,.\,.\, (\frac{q}{n} m - 1)}$$

Versetzungen möglich. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dafs drei beliebige Stellen von zwei Δ und einem Δ' eingenommen werden

$$= \frac{\left(\frac{p}{n} m - 1\right) \cdot \frac{p}{n} m \cdot \frac{q}{n} m}{(m-2) \cdot (m-1) \cdot m}$$

oder

$$= \frac{\left(\frac{p}{n} - \frac{1}{m}\right) \cdot \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n}}{\left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdot 1}$$

Die gemachte Voraussetzung gilt aber nur der Strenge nach für $m = \infty$, oder die Wahrscheinlichkeit einer einzelnen Verbindung von zwei Δ und einem Δ', bei übrigens beliebiger Ordnung,

$$= (\varphi(\Delta))^2\, \varphi(\Delta')$$

woraus sich die obige Formel ergiebt.

Um den zweiten Satz zu erlangen, betrachte man den Fall, in welchem irgend welche Beobachtung den Werth M gegeben hat. Man vergleiche nun zwei verschiedene Hypothesen über x, y, z miteinander; sei

$$\text{Hyp. I.} \;\ldots\ldots\; x = p\,,\; y = q\,,\; z = r$$
$$\text{Hyp. II.} \;\ldots\; x = p',\; y = q',\; z = r'$$

Ehe M beobachtet ist, hat man für das Verhältnifs der Wahrscheinlichkeit beider Hypothesen, und aller übrigen, überhaupt kein Maafs, und wird sie deshalb vor der Beobachtung als gleich wahrscheinlich ansehen müssen. Nachdem aber der Werth M gefunden ist, wird die Hyp. I. den Fehler Δ, mit der Wahrscheinlichkeit $\varphi(\Delta)$, die Hyp. II. den Fehler Δ', mit der Wahrscheinlichkeit $\varphi(\Delta')$ geben. Versteht man unter m die Anzahl von Fällen, in welchen, wenn die Hyp. I. angenommen wird, der Werth M aus ihr hervorgeht, unter n die Anzahl von Fällen, in welchen M bei derselben Voraussetzung nicht erhalten wird, so wird

$$\varphi(\Delta) = \frac{m}{m+n}$$

eben so sei bei der Hyp. II. die Bedeutung von m' und n', folglich

$$\varphi(\Delta') = \frac{m'}{m'+n'}$$

Aufser diesen beiden Annahmen, dafs entweder die Hyp. I. oder die Hyp. II. die wahre, giebt es aber auch noch solche Fälle, in welchen beide nicht die wahren sind, und unter diesen können wiederum solche sein, die in einigen Fällen M geben. Sei die Bedeutung von m'' und n'' für alle anderen Hypothesen dieselbe wie oben, so wird die Anzahl aller möglichen Fälle $= m + n + m' + n' + m'' + n''$, also die Wahrscheinlichkeit der Hyp. I. vor der gemachten Beobachtung

$$= \frac{m+n}{m+n+m'+n'+m''+n''}$$

und die der Hyp. II. vor der gemachten Beobachtung

$$= \frac{m' + n'}{m + n + m' + n' + m'' + n''}$$

Diese beiden Werthe sollen als gleich betrachtet werden, woraus folgt

$$m + n = m' + n'$$

Nachdem nun aber M wirklich gefunden ist, fallen die Fälle, wo es nicht eintrat, aus; folglich wird die in Bezug auf den gefundenen Werth M relative Wahrscheinlichkeit der Hyp. I.

$$= \frac{m}{m + m' + m''}$$

und der Hyp. II.

$$= \frac{m'}{m + m' + m''}$$

oder sie verhalten sich wie $m : m'$, d. h. wegen der Gleichung $m + n = m' + n'$, wie $\frac{m}{m+n} : \frac{m}{m'+n'}$, oder wie $\varphi(\Delta) : \varphi(\Delta')$. Hieraus folgt der Satz:

II.

Die Wahrscheinlichkeit zweier vor den gemachten Beobachtungen gleich wahrscheinlichen und einander ausschliefsenden Hypothesen ist direct proportional der Wahrscheinlichkeit der aus ihnen hervorgehenden Fehler oder Fehler-Systeme.

Wenn folglich die Gröfsen M durch eine Art der Beobachtung gefunden sind, bei der man schon anderswoher weifs, welche Fehler und in welchem Verhältnifs sie bei ihr vorkommen können, oder für welche das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Fehler ...$\varphi(\Delta)$... bekannt ist (etwas, was ganz unabhängig ist von dem Gebrauche, den man nachher von diesen Beobachtungen zur Bestimmung einer oder mehrerer unbekannten Gröfsen macht), so ist die Wahrscheinlichkeit jeder Hypothese über x, y, z proportinal dem Producte

$$(3) \;\ldots\ldots\ldots\; \varphi(\Delta) \cdot \varphi(\Delta') \cdot \varphi(\Delta'') \cdot \varphi(\Delta''') \ldots\ldots = \Omega$$

wo Δ, Δ', Δ'', Δ''' die Fehler sind, welche in jeder Hypothese übrig bleiben. Am wahrscheinlichsten wird die Hypothese sein, in welcher Ω ein Maximum, oder wenn man differentiirt, $d\Omega = 0$ wird. Wegen der gegenseitigen Unabhängigkeit der Gröfsen x, y, z von einander, theilt sich diese Gleichung in die einzelnen $\frac{d\Omega}{dx} = 0$, $\frac{d\Omega}{dy} = 0$, $\frac{d\Omega}{dz} = 0$. Im allgemeinen ist jedes

$$\Delta = M - V$$

bezeichnet man folglich die Functionen $M - V$ vor der Substitution eines numerischen Werthes für x, y, z durch v, so dafs

$$M - V = v,\ M' - V' = v',\ M'' - V'' = v'' \text{ u. s. w.}$$

so werden diese Bedingungsgleichungen des Maximums, wenn man der leichteren Differentiation wegen setzt:

$$\lg \Omega = \lg \varphi(\Delta) + \lg \varphi(\Delta') + \lg \varphi(\Delta'') \ldots .$$

und das logarithmische Differential durch $\varphi'(\Delta)$ bezeichnet, so dafs

$$\frac{d\,\varphi(\Delta)}{\varphi(\Delta)\,d\Delta} = \varphi'(\Delta)$$

die folgenden werden:

$$\frac{dv}{dx}\varphi'(v) + \frac{dv'}{dx}\varphi'(v') + \frac{dv''}{dx}\varphi'(v'') + \frac{dv'''}{dx}\varphi'(v''') \ldots . = 0$$

$$\frac{dv}{dy}\varphi'(v) + \frac{dv'}{dy}\varphi'(v') + \frac{dv''}{dy}\varphi'(v'') + \frac{dv'''}{dy}\varphi'(v''') \ldots . = 0$$

$$\frac{dv}{dz}\varphi'(v) + \frac{dv'}{dz}\varphi'(v') + \frac{dv''}{dz}\varphi'(v'') + \frac{dv'''}{dz}\varphi'(v''') \ldots . = 0$$

aus welchen man die Werthe von x, y, z bestimmen mufs, die ihnen genug thun, und folglich die wahrscheinlichsten sind.

Diese allgemeinen Sätze werden indessen erst dann in Anwendung gebracht werden können, wenn die Function φ in jedem einzelnen Falle bekannt ist. Anstatt verschiedene Hypothesen über die zweckmäfsigste Form derselben aufzustellen, und zu versuchen, welche derselben der Erfahrung am besten entspricht, kommt man directer zum Ziel, wenn man umgekehrt den einfachsten Fall betrachtet, für ihn untersucht, welche Werthe die Erfahrung, abgesehen von den allgemeinen Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung, als die vorzugsweise zu wählenden erkennen lehrt, und daraus dann vermittelst der allgemeinen Formeln die Form von φ zu bestimmen versucht.

Man nehme an, es sei eine beliebige Anzahl von Beobachtungen, alle unter gleichen Umständen angestellt, so dafs man im Voraus keiner einzelnen irgend welchen Vorzug vor den andern geben kann. Diese Beobachtungen sollen ebenfalls nur angewandt werden, um den Werth einer unbekannten Gröfse zu bestimmen, welche unmittelbar durch jede einzelne Beobachtung ihrem wahren Werthe nach gegeben sein würde, wenn keine Fehler der Beobachtung statt fänden. Als Beispiel kann die Untersuchung über den Unterschied zweier vorliegenden Längen dienen.

Wenn hier zuerst eine Beobachtung gemacht ist, die den Werth a gegeben haben möge, so wird man keine Wahl haben, sondern

$$x = a$$

setzen müssen.

Haben dann zwei Beobachtungen die Werthe a und b gegeben, und soll keine vor der andern den Vorzug verdienen, so wird man aus ihnen allein den Werth von x so bestimmen müssen, dafs die Unterschiede $x - a$, und $x - b$, gleich herauskommen. Dieses giebt

$$x = \tfrac{1}{2}(a + b)$$

unter der Voraussetzung, dass eine positive und negative Abweichung von gleicher absoluter Gröfse, auch als gleiche Fehler angesehen werden sollen. Diese Voraussetzung scheint, wenn überhaupt ein Grundsatz nöthig ist, unter allen die einfachste zu sein. Sie beruht auf dem Bewufstsein, die möglichste Sorgfalt angewandt zu haben, so dafs kein Grund vorhanden ist anzunehmen, man habe entweder im positiven oder negativen Sinne gefehlt. Gesetzt aber auch es komme in einem Sinne ein Fehler vorzugsweise häufiger vor, so wird, so lange wir nicht wissen in welchem Sinne es geschieht, der Werth $\frac{1}{2}(a + b)$ der einzige sein, der, bei dieser Ungewifsheit, den Fehler des Resultats am kleinsten machen, oder wenigstens wo die Gefahr einer Vergröfserung des Fehlers am sichersten vermieden werden wird.

Seien nun drei Beobachtungen angestellt. Wegen des völlig gleichen Werthes der Beobachtungen wird man in jedem Fall die gefundenen Gröfsen a, b, c, so verbinden müssen, dafs keine mehr als die andere auf das Resultat einwirkt, ganz dabei abgesehen von ihrem numerischen Werthe. Oder es wird angenommen werden müssen

$$x = \text{symmetrische Function}\,(a, b, c).$$

Man kann aber auch die Sache noch von einer andern Seite auffassen. Die zwei ersten oder überhaupt zwei Beobachtungen allein betrachtet, würden, je nachdem man die Anordnung macht, als das aus ihnen allein zu wählende Resultat gegeben haben:

$$\tfrac{1}{2}(a+b), \qquad \tfrac{1}{2}(a+c), \qquad \tfrac{1}{2}(b+c),$$

zu diesem fügt die dritte Beobachtung c, b, a. Zwar werden wir die beiden Gröfsen in jeder einzelnen Anordnung nicht mehr symmetrisch verbinden dürfen, weil die eine auf zwei, die andere auf einer Beobachtung beruht. Allein irgend welche Form für die Verbindung beider mufs es unstreitig geben, die ebenfalls das Resultat, was bei drei Beobachtungen vorzuziehen ist, hervorbringen würde, und zwar wird diese Form, sie möge beliebig durch ψ bezeichnet werden, bei allen dreien dieselbe sein müssen. Hieraus hat man für x die drei Werthe

$$\begin{aligned} x &= \psi\left(\tfrac{1}{2}(a+b), c\right) \\ &= \psi\left(\tfrac{1}{2}(a+c), b\right) \\ &= \psi\left(\tfrac{1}{2}(b+c), a\right) \end{aligned}$$

Führt man hier die Summe von a, b, c ein, oder setzt man

$$a + b + c = s$$

so wird

$$\begin{aligned} x &= \psi\left(\tfrac{1}{2}(s-c), c\right) = \psi(s, c) \\ &= \psi\left(\tfrac{1}{2}(s-b), b\right) = \psi(s, b) \\ &= \psi\left(\tfrac{1}{2}(s-a), a\right) = \psi(s, a) \end{aligned}$$

Diese drei Formen sollen aber nach dem Obigen eine symmetrische Form für x in Bezug auf a, b, c geben, was, da s schon an sich eine symmetrische Form ist, nicht anders geschehen kann, als wenn c, b, a, bei der Entwickelung neben s herausfallen. Es wird folglich aus allen auf gleiche Weise

$$x = \psi(s)$$

Wenn nun in einem bestimmten Falle $a = b = c$ gefunden wäre, so würde der einzig mögliche Werth von $x = a$ sein. Folglich

$$a = \psi(3a)$$

oder das Functionszeichen ψ die Division durch 3 bedeuten. Hieraus folgt überhaupt

$$x = \frac{a + b + c}{3}$$

für drei Beobachtungen.

Eben so folgt allgemein, wenn für n Beobachtungen der zu wählende Werth

$$x = \frac{a + b + c \ldots + q}{n}$$

ist, so wird, wenn noch eine Beobachtung p hinzukommt, für $(n+1)$ Beobachtungen auch

$$x = \frac{a + b + c \ldots + q + q}{n + 1}$$

vorzugsweise zu wählen sein. Denn die Gleichheit der Beobachtungen fordert, dafs, wenn

$$a + b + c \ldots + q + p = s$$

gesetzt wird,

$$x = \psi\left(\frac{1}{n}(s - p), p\right) \text{ u. s. w.}$$

eine symmetrische Function von allen $n + 1$ Werthen werde. Nun aber gilt diese Form für 3 Werthe, folglich auch für jede beliebige grofse oder kleine Anzahl von Beobachtungen.

Dieser Satz, dafs bei einer beliebigen Anzahl gleich guter Beobachtungen einer unbekannten Gröfse das arithmetische Mittel aus allen den Werth giebt, der vorzugsweise zu wählen ist, und folglich auch als der wahrscheinlichste angesehen werden mufs, ist, so lange man überhaupt mehrere Beobachtungen unter sich verbunden hat, von jeher als Grundsatz angenommen worden, und im eigentlichen Verstande beruht die Meinung, die wir von der Sicherheit aller aus der Erfahrung genommenen Gröfsen in jeder Wissenschaft haben, wesentlich auf ihm. Man kann deswegen von ihm wohl behaupten, dafs die Erfahrung seine Richtigkeit bestätigt hat. Die hier gegebene Ableitung zeigt etwas deutlicher, als die reine Aufstellung des Satzes an sich, die Voraussetzungen die bei ihm zum Grunde liegen. Wenn die Beobachtungen strenge genommen unter gleichen Umständen angestellt sind, und bei zwei Beobachtungen eine gleich grofse positive und negative Abweichung als gleich angesehen wird, so ist das arithmetische Mittel der einzige Werth, welcher diesen Voraussetzungen nicht widerspricht. Denn dafs man einerlei Werth erhalten müsse, wenn man die Beobachtungen nicht blofs alle zugleich, sondern auch in beliebige Gruppen vertheilt betrachtet, so lange man dabei über die Verbindung der Resultate dieser Gruppen unter sich keine willkürliche Voraussetzung macht, kann wohl nicht geleugnet werden. Man würde damit ebenfalls leugnen, dafs es überhaupt einen Werth giebt, der vorzugsweise vor den andern zu wählen sei. Uebrigens kann es vielleicht zur Erläuterung der Wichtigkeit dienen, welche die Voraussetzung der Gleichartigkeit der Beobachtungen bei dem arithmetischen Mittel hat, wenn hier an ein von Lambert in der Photometrie § 276 aufgestelltes Beispiel erinnert wird, in welchem anscheinend das arithmetische Mittel nicht die gröfste Annäherung an die Wahrheit giebt. Der Umfang des Kreises liegt immer zwischen dem Werthe des Umfanges eines einbeschriebenen und eines umschriebenen Vielecks von gleichvielen Seiten. Betrachtet man also den Umfang eines *n* Ecks überhaupt als eine Beobachtung der Länge der Peripherie, und wollte das arithmetische Mittel zwischen dem einbeschriebenen und umschriebenen *n* Eck als den wahrscheinlichsten Werth der Peripherie ansehen, so würde man irren.

Man kommt der Wahrheit näher, wenn man zu dem einbeschriebenen den dritten Theil des Unterschiedes beider hinzulegt.

Man mag indessen nun das Princip des arithmetischen Mittels bei gleich sichern directen Beobachtungen einer unbekannten Gröfse als einen Grundsatz ansehen, den die Erfahrung bestätigt hat, oder es vorziehen, die Sätze, welche der hier gegebenen Ableitung nach ihm zum Grunde liegen, als einfachere weiter nicht zu beweisende Grundsätze aufzustellen, in beiden Fällen wird die Begründung der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Beobachtungen überhaupt, wie sie aus dem Princip des arithmetischen Mittels sich direct herleiten läfst, vielleicht unter allen andern Beweisarten, die sein, welche für den practischen Benutzer derselben am ansprechendsten ist. Der folgenden Ableitung liegt deshalb der Satz zum Grunde:

III.

Wenn eine beliebige Anzahl gleich guter directer Beobachtungen einer unbekannten Gröfse gegeben ist, so bestimmt das arithmetische Mittel aus allen beobachteten Werthen den wahrscheinlichsten Werth der unbekannten Gröfse, so weit er aus diesen Beobachtungen folgt, ganz allein, ohne dafs aufer ihm noch eine andere Bedingung erforderlich, und im allgemeinen zulässig ist.

Es seien also m gleich gute directe Beobachtungen der unbekannten Gröfse x gemacht, welche dafür die Werthe M, M', M'' u. s. w. ergeben haben. Nach dem letzten Satze wird, wenn

$$p = \frac{M + M' + M'' \ldots.}{m}$$

der wahrscheinlichste Werth von x in jedem Falle, soweit er aus diesen m Beobachtungen geschlossen werden kann, die Gröfse p sein. Als Fehler der Beobachtung müssen folglich angesehen werden $M-p$, $M'-p$, $M''-p$, oder die Gleichung, aus welcher nach dem arithmetischen Mittel der wahrscheinlichste Werth von x hervorgeht, ist

$$(4) \ldots M - x + M' - x + M'' - x + M''' - x \ldots\ldots = 0$$

Wendet man auf denselben Fall die allgemeinen Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung an, so wird hier

$$v = M - x,\ v' = M' - x,\ v'' = M'' - x \ldots.$$

folglich die einzige Bedingungsgleichung des wahrscheinlichsten Werthes:

$$\varphi'(M - x) + \varphi'(M' - x) + \varphi'(M'' - x) + \varphi'(M''' - x) \ldots. = 0$$

welcher man auch die Form geben kann

$$(M - x) \cdot \frac{\varphi'(M-x)}{M-x} + (M' - x) \cdot \frac{\varphi'(M'-x)}{M'-x} + (M'' - x) \cdot \frac{\varphi'(M''-x)}{M''-x} \ldots. = 0$$

Aus dieser letzten Form geht sogleich hervor, dafs die obige Gleichung aus dem arithmetischen Mittel hergeleitet, nur in dem Falle jedesmal auch dieser letzten Gleichung genug thun wird, wenn

$$\frac{\varphi'(M-x)}{M-x} = \frac{\varphi'(M'-x)}{M'-x} = \frac{\varphi'(M''-x)}{M''-x} \text{ u. s. w.}$$

oder wenn $\frac{\varphi'(\Delta)}{(\Delta)}$ unabhängig wird von dem Werthe von Δ, das heifst wenn $\frac{\varphi'(\Delta)}{(\Delta)}$ gleich einer Constante ist. Es kann nämlich irgendwelche Function $\frac{\varphi'(M-x)}{M-x}$, aufser dieser gemeinschaftlichen Constante nur noch solche Glieder enthalten, die mit dem Werthe von $(M - x)$ veränderlich, oder eine Function von $(M - x)$ sind. Welche Function man aber dafür auch annehmen will, so wird eine Summe von Producten der Form $(M - x) \cdot f(M - x)$, niemals im allgemeinen gleich 0 werden, vermöge der einzigen Gleichung (4). Denn gesetzt auch, es würde irgend einmal für die Werthe M, M', M'' ... diese Summe zugleich mit der Gleichung (4) gleich 0, so würde doch in allen den Fällen, in welchen man bei unveränderter Summe $M + M' + M'' \ldots = mp$, etwas verschiedene Werthe, etwa $M - \alpha$, $M' + \alpha$, $M'' - \beta$, $M''' + \beta$ u. s. w. gefunden hätte, eine neue Gleichung hervorgehen, die wenn das arithmetische

Mittel gilt, ebenfalls zugleich mit der Gleichung (4) gleich 0 sein müfste. Bei der unendlichen Verschiedenheit aber, welche sowohl in der Gröfse der Aenderungen von M, M', M'' etc., als auch in ihrer Vertheilung nicht blofs statt finden können, sondern auch der Erfahrung gemäfs statt finden werden, kann es keine Function geben, welche zu gleicher Zeit alle diese Bedingungen erfüllte. Obgleich die Werthe von $M-p$, $M'-p$, $M''-p$ etc., nicht absolut von einander unabhängig sind, weil p von ihrer Summe abhängt, so müssen sie, im Falle das arithmetische Mittel allgemein gilt, doch als unabhängige Variabeln betrachtet werden, weil die einzige Gleichung, welche bei jeder Zahl von Beobachtungen diese Abhängigkeit ausdrückt, verschwindet gegen die unendliche Mannigfaltigkeit der Werthe, die auch, nachdem diese Gleichung erfüllt ist, noch stattfinden können.

Diese Gleichung

$$\frac{\varphi'(\Delta)}{\Delta} = \frac{d\,\lg(\varphi(\Delta))}{\Delta\, d\Delta} = k$$

wo k eine beliebige Constante, giebt unmittelbar die Form von $\varphi(\Delta)$. Nach der Integration wird

$$\text{Const} + \lg \varphi(\Delta) = \tfrac{1}{2} k \Delta^2$$

oder

$$\varphi(\Delta) = \varkappa e^{\frac{1}{2} k \Delta\Delta}$$

in welcher Formel noch der Werth der Constanten zu bestimmen sein wird.

In Bezug auf k, giebt die obige Bemerkung, dafs $\varphi(\Delta)$ ein Maximum werden mufs für $\Delta = 0$, sogleich zu erkennen, dafs k stets negativ genommen werden müsse. Man kann deswegen bequemer schreiben

$$\varphi(\Delta) = \varkappa e^{-hh\Delta\Delta}.$$

Zur weiteren Bestimmung einer Constante wird dann noch die obige Gleichung (2):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\Delta)\, d\Delta = 1$$

dienen können. Setzt man $h\Delta = t$, so wird dieses Integral

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{x}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tt}\,dt = 1$$

wo die Grenzen dieselben wie früher bleiben.

Um den Werth dieses bestimmten Integrals zu erhalten, untersuche man das doppelte Integral*)

$$V = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(xx+yy)}\,dx\,dy$$

wo x und y zwei von einander unabhängige variable Gröfsen bedeuten, und die Grenzen $-\infty$ bis $+\infty$ sich sowohl auf die Integration nach x, als auf die nach y beziehen. Integrirt man zuerst nach y, wobei x als constant betrachtet werden mufs, und setzt den Werth

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-yy}\,dy = L$$

so wird

$$V = L\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xx}\,dx$$

folglich, wenn man jetzt auch nach x integrirt:

$$V = L^2.$$

Man kann aber auch den Ausdruck für V vergleichen mit der allgemeinen Formel für die Cubatur eines Körpers. Betrachtet man x, y und z als drei aufeinander rechtwinklige Coordinaten, und denkt sich die Oberfläche deren Gleichung

$$z = e^{-(xx+yy)}$$

so wird V das Volumen des von dieser ins unendliche ausgedehnten Oberfläche begrenzten Körpers ausdrücken. Diese Oberfläche wird aber offenbar durch Rotation um die Axe der z entstanden sein,

*) Nach der mündlichen Mittheilung, welcher ich diese kurze und elegante Art den Werth des bestimmten Integrals zu finden verdanke, hat Hr. Cauchy sie in seinen Vorlesungen so gegeben.

weil allen Punkten der Ebene der xy, die gleich weit vom Anfangspunkte abstehen, einerlei z zukommt. Man wird deswegen auch das Volumen des Körpers durch ein einfaches Integral ausdrücken können, wenn man ihn in eine Folge von unendlich dünnen Cylinderschalen, alle senkrecht auf die Ebene der xy, zerlegt sich denkt. Der körperliche Inhalt einer jeden solchen Cylinderschale von unendlich geringer Dicke wird, wenn

$$r^2 = x^2 + y^2$$

gesetzt wird, gefunden werden:

$$= 2\,rz\pi \cdot dr$$

folglich das Volumen des Körpers, für welches jetzt in Bezug auf r die Grenzen 0 bis ∞ anzunehmen sind,

$$V = \int_0^\infty 2r\pi e^{-rr}\,dr$$

wofür das Integral unmittelbar gefunden wird

$$V = \pi \int_0^\infty d\,(-e^{-rr})$$

oder für die angegebenen Grenzen

$$V = \pi.$$

Hieraus wird vermöge des obigen

$$L = \sqrt{\pi}$$

und folglich durch Substitution dieses Werthes in (5)

$$\frac{\varkappa}{h}\sqrt{\pi} = 1$$

oder

$$\varkappa = \frac{h}{\sqrt{\pi}}.$$

Der vollständige Ausdruck für $\varphi(\Delta)$ wird demnach

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-hh\Delta\Delta}$$

welcher nicht nur das Princip des arithmetischen Mittels in sich schliefst, sondern auch von dem letzteren so unmittelbar abhängt, dafs für alle solche Gröfsen, für welche das arithmetische Mittel, in dem einfachen Falle, in welchem es überhaupt angewendet werden darf, gilt, auch kein anderes Gesetz der Wahrscheinlichkeit angenommen werden darf, als das durch diese Formel ausgedrückte. Sie ist daher auf keine specielle Art der Beobachtung beschränkt, sondern ganz allgemein. Eben so allgemein ist das aus dieser Form unmittelbar folgende Resultat in Bezug auf Ω: **Für jede beliebige Anzahl der zu bestimmenden Gröfsen sind die Werthe die wahrscheinlichsten, welche die Summe $hh\Delta\Delta + h'h'\Delta'\Delta' + h''h''\Delta''\Delta'' \ldots\ldots$ zu einem Minimum machen.**

Nach der oben erwähnten Bedeutung dieser Formel ist folglich die Wahrscheinlichkeit dafs ein Fehler zwischen Δ und $\Delta + d\Delta$ liegt

$$(7) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hh\Delta\Delta} d\Delta$$

und die Wahrscheinlichkeit dafs er zwischen beliebigen Grenzen a und b liegt

$$(8) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-hh\Delta\Delta} d\Delta.$$

Eben dieses Integral drückt auch die Anzahl der Fehler aus, welche zwischen a und b gesetzmäfsig vorkommen sollten, und bei einer hinlänglich grofsen Anzahl auch sehr nahe vorkommen werden, wenn man die Anzahl der Fehler überhaupt $= 1$ setzt. Das Integral erhält, wenn man

$$h\Delta = t$$

setzt, die Form

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{ah;}^{bh} e^{-tt} dt;$$

nimmt man für die Grenzen einen gleichen positiven und negativen Werth $-ah$ bis $+ah$, so kann man es wegen der geraden Potenz von t in dem Differential schreiben:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{ah} e^{-tt}\,dt$$

und daraus vermittelst einer Tafel, welche dieses Integral für successive Werthe von ah giebt, von der Vertheilung der Fehler, ohne Rücksicht auf das Zeichen, blofs in Hinsicht auf ihre Gröfse, indem man von 0 bis zu der äufsersten Grenze fortschreitet, sich eine deutliche Vorstellung machen. Eine solche Tafel findet sich am Schlusse dieses Aufsatzes (Tab. I.). Sie ist unmittelbar aus der Tafel für das Integral $\int e^{-tt}\,dt$ in Bessel's *Fundamenta Astronomiae* hergeleitet. Die Berechnung einer solchen Tafel aus der Entwickelung des Integrals nach auf- und absteigenden Potenzen von t, oder einem Kettenbruch, findet man häufig angegeben, da diese merkwürdige Function bei verschiedenen Untersuchungen vielfach angewandt wird.

Diese Tafel zeigt zugleich, wie schnell bei gröfseren Werthen von t die Anzahl der Fehler innerhalb gleicher Intervalle dieser Werthe abnimmt, und rechtfertigt folglich die Annahme der Grenzen $-\infty$ und $+\infty$, statt der eigentlich stattfindenden engeren aber nie scharf anzugebenden. So werden bei 1000 Beobachtungen zwischen

$t=0$	bis	$t=0{,}5$	liegen	520	Fehler
$t=0{,}5$	„	$t=1{,}0$	„	323	„
$t=1{,}0$	„	$t=1{,}5$	„	123	„
$t=1{,}5$	„	$t=2{,}0$	„	29	„

und über diese letzte Grenze hinaus bis zu $t=\infty$ in Allem nur noch 5 Fehler, eine so geringe Zahl, dafs über diese Abweichung der Theorie von der Praxis, durch wirkliche Erfahrungen schwerlich jemals etwas entschieden werden kann.

Unter den verschiedenen Werthen von t ist vorzüglich einer, der zu einer bestimmten Ansicht über das Verhältnifs der Genauigkeit verschiedener Gattungen von Beobachtungen führen kann, und dazu auch am gewöhnlichsten benutzt wird. Dieses ist nämlich der Werth von t, für welchen das Integral den Werth 0,5 bekommt, oder welcher eine hinlänglich grofse Anzahl von Fehlern, wenn man sie sich ohne Rücksicht auf das Zeichen nach ihrer Gröfse geordnet denkt, in zwei Theile theilt, von denen jeder eine gleiche Anzahl von Fehlern enthält. Eine gröfsere Anzahl der Fehler überhaupt wird nur angenommen, damit das Gesetz der Wahrscheinlichkeit sich bei ihnen wirklich mit hinlänglicher Näherung ausgesprochen findet. Aus der Tafel findet man durch Interpolation, dafs der Werth des Integrals 0,5 dem Werthe von $t = 0{,}476936$ entspricht. Diese Zahl, die für alle Arten von Beobachtungen gilt, möge ihres häufigen Gebrauchs wegen mit ϱ bezeichnet werden, so dafs

$$(9) \ldots\ldots\ldots \varrho = 0{,}476936 \quad \text{und} \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho} e^{-tt}\, dt = \tfrac{1}{2}$$

Bezeichnet man den Fehler, der zu dem Werthe $t = \varrho$ in jeder Gattung von Beobachtung gehört, mit r, so wird

$$(10) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \varrho = hr \quad \text{oder} \quad h = \frac{\varrho}{r}.$$

Die Gröfe r wird von den deutschen Astronomen der wahrscheinliche Fehler einer bestimmten Gattung von Beobachtungen genannt*). Es ist der Fehler, unter welchem sich eben so viele kleinere Fehler der Zahl nach befinden, als gröfsere über ihm, so dafs es eben so viele Fälle giebt, in welchen die Fehler kleiner als r sind, als solche, in welchen sie gröfser sind. Man kann deswegen bei einer isolirten Beobachtung Eins gegen Eins wetten, dafs der Fehler derselbeu nicht gröfser als r sei, wenn für die Gattung, zu welcher die Beobachtung gehört, der Werth von r bekannt sein sollte.

Des häufigen Gebrauchs wegen ist in der zweiten Tafel der

*) Die französischen Geometer pflegen diesen Werth r mit dem Namen *l'erreur moyenne* zu belegen, worauf man um so mehr zu achten hat, als der nachher aufgeführte Begriff des mittleren Fehlers bei den deutschen Schriftstellern wesentlich von r verschieden ist.

Werth des Integrals $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-tt}dt$ auch nach einem Argumente geordnet aufgeführt worden, bei welchem der Werth von r als Einheit angenommen ist. Sie giebt für das Argument $\frac{\Delta}{r}$ den Werth von

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\varrho\Delta}{r}} e^{-tt}dt$$

so daſs man aus ihr unmittelbar findet, wie viele Fehler bis zu einem bestimmten Fehler Δ vorkommen werden (immer abgesehen vom Zeichen), sobald man das Verhältniſs des gegebenen Δ zu dem wahrscheinlichen Fehler kennt. Man übersieht hieraus noch leichter die Vertheilung der Fehler der Gröſse nach. Wenn die halbe Anzahl aller Fehler kleiner ist als ein Fehler $=r$, so werden unter 1000 beobachteten Fehlern 823 sich befinden, welche kleiner sind als $2r$, 957, welche kleiner sind als $3r$ und 993, welche kleiner sind als $4r$. Gröſser als $5r$ wird nur ein Fehler noch vorkommen.

Vermöge des neu eingeführten Begriffes des wahrscheinlichen Fehlers, wird man nun auch von der Bedeutung der Constante h sich eine deutlichere Rechenschaft geben können. Bei den verschiedenen Gattungen der Beobachtungen befolgen die Fehler immer dasselbe Gesetz, welches durch $\varphi(\Delta)$ ausgedrückt wird. Die Verschiedenheit einer gegebenen Gattung von allen übrigen wird daher allein von dem Werthe der Constante h, der bei ihr stattfindet, abhängen, und diese wiederum das Mittel darbieten, Beobachtungen verschiedener Art in Hinsicht auf ihre relative Genauigkeit zu vergleichen, und nachher auch verbinden zu können. Das Integral $\int\varphi(\Delta)\,d\Delta$, bis zu jeder beliebigen Grenze genommen, wird bei zwei Gattungen von Beobachtungen, deren einer die Constante h, deren anderer die Constante h' zukommt, gleiche Werthe haben, wenn der Werth der Grenze, bei beiden durch die Variable t bestimmt, gleich ist. Oder (da in der einen $t=h\Delta$, in der andern $t=h'\Delta'$, wenn die Fehler der zweiten Gattung durch Δ' bezeichnet werden) es werden gleich viele Fehler im Verhältnifs zu der ganzen Anzahl in beiden Gattungen innerhalb der Grenzen Δ und Δ' vorkommen, wenn man den einen dieser Werthe aus dem andern bestimmt durch die Gleichung:

$$(11) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; h\Delta = h'\Delta'$$

Die Constanten h stehen daher im umgekehrten Verhältnifs der gleich wahrscheinlichen Fehler zweier Gattungen von Beobachtungen. Dieses gilt für alle Fehler, also auch für die wahrscheinlichen Fehler jeder Gattung, wie schon die Gleichung $h = \frac{\varrho}{r}$ zeigt, weil ϱ hier eine absolute Zahl ist. Kann man deswegen gleich viel wetten, dafs bei der einen Gattung ein Fehler innerhalb einer Grenze, bei der andern innerhalb der andern fällt, wozu am allgemeinsten die wahrscheinlichen Fehler r und r' gewählt werden, so hat man auch das gegenseitige Verhältnifs der Constanten h und h', aus dem umgekehrten Verhältnifs der Grenzen überhaupt, oder aus dem der wahrscheinlichen Fehler r' und r. Es ergiebt sich hieraus eine vorläufige Schätzung des Verhältnisses von h und h'. Hat man Grund, bei zwei Winkelmessungen etwa, zu befürchten, dafs in der einen eben so leicht ein Fehler von ω'', als in der andern einer von $m\omega''$ begangen werden könne, so wird man, wenn für die letzte h angenommen wird, bei der ersten mh setzen müssen. Wegen dieses constanten Verhältnisses zwischen der Zunahme der Genauigkeit, und der Gröfse von h, nennt Gaufs diese Constante das **Maafs der Präcision.**

Auch bei dieser Betrachtung kann wiederum das geometrische Bild einer Wahrscheinlichkeitscurve angewandt werden. Man nehme eine beliebige Einheit als das allgemeine Maafs der Δ, oder der Abscissen an. Dann wird vermöge der Gleichung

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hh\Delta\Delta}$$

die ganze Curve sogleich verzeichnet werden können, sobald der Werth von h bekannt ist. Kennt man folglich nur eine Ordinate, welche zu einem bestimmten Δ gehört, so wird dadurch die ganze Curve völlig gegeben. Wählte man dazu die Ordinate, für welche $\Delta = 0$, so hat man durch Vergleichung ihres Werthes mit $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$ sogleich den Werth von h. Wählt man dazu die Ordinate, welche zu beiden Seiten des Nullpunktes den Flächeninhalt der Curve in zwei gleiche Theile theilt, so erhält man h aus der zu dieser Ordinate gehörigen Abscisse durch die Gleichung $h = \frac{\varrho}{r}$. Kennte man auch nur das Verhältniſs zweier Ordinaten zu einander, welche irgend welchen Abscissen Δ und Δ' entsprechen, so würde man, da dieses Verhältniſs wie $e^{-hh\Delta\Delta} : e^{-hh\Delta'\Delta'}$, oder wie $1 : e^{-hh(\Delta'\Delta' - \Delta\Delta)}$ ist, daraus h bestimmen können. Am bequemsten wählt man für die eine Ordinate die, welche dem Werthe $\Delta = 0$ entspricht. Hieraus folgt, wie es in der Folge häufiger angewandt wird:

IV.

Wenn die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers $= 0$ sich verhält zu der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers $= \Delta$, wie $1 : e^{-p\Delta\Delta}$, so wird für diese Gattung von Beobachtungen $h = \sqrt{p}$ genommen werden müssen.

Eine solche Bestimmung von h erlaubt selbst Beobachtungen zusammen zu verbinden, die sich auf heterogene Gröſsen z. B. auf Winkelgröſsen und Längengröſsen beziehen, sobald es nur möglich ist, die relativen Werthe von h in Bezug auf die Einheiten, die bei beiden angenommen sind, zu ermitteln.

Vielleicht kann es zur Erläuterung des Gegenstandes noch dienen, ein wirkliches Beispiel aus der Erfahrung aufzuführen, um sich zu überzeugen, wie sehr nahe die Function $\varphi(\Delta)$ die Vertheilung der Fehler ausdrückt, wenn nur die Zahl der Beobachtungen hinlänglich groſs ist. In den *Fundamentis Astronomiae*, in welchen Bessel ein bleibendes Muster von consequenter strenger und eleganter Behandlung einer Reihe von Beobachtungen aufgestellt hat, bestimmt er den Werth von r bei einer directen Beobachtung des Unterschiedes der geraden Aufsteigung der Sonne und eines der beiden Sterne *α Aquilae* und *α Canis minoris,* wie er aus dem Bradlei'schen Beobachtungsschatze folgt, zu

$$r = 0{,}''2637$$

und vergleicht dann die Anzahl von Fehlern, die zwischen den Grenzen 0,″0 und 0,″1, 0,″1 und 0,″2, und so fort immer um 0,″1 aufsteigend, der Theorie nach liegen sollen, mit den Fehlern, welche die wirkliche Erfahrung bei 470 Beobachtungen gegeben hat.

In Einheiten von r ausgedrückt, ist das Intervall von 0,″1 $= 0{,}3792\,r$. Sucht man also aus der zweiten Tafel den Werth des Integrals für die verschiedenen Grenzen, so findet man für

0,″1	0,3792	die Zahl	0,20186
0,2	0,7584	„ „	0,39102
0,3	1,1376	„ „	0,55709
0,4	1,5168	„ „	0,69372
0,5	1,8960	„ „	0,79904
0,6	2,2752	„ „	0,87511
0,7	2,6544	„ „	0,92661
0,8	3,0336	„ „	0,95926
0,9	3,4128	„ „	0,97864
1,0	3,7920	„ „	0,98944
....	∞	„ „	1,00000

Zieht man hier jede Zahl von der folgenden ab und multiplicirt die Reste mit der Anzahl der Beobachtungen $= 470$, so findet man

zwischen	Anzahl der Fehler	nach der Theorie	nach der Erfahrung
0,″0 — 0,″1	0,20186	95	94
0,1 — 0,2	0,18916	89	88
0,2 — 0,3	0,16607	78	78
0,3 — 0,4	0,13663	64	58
0,4 — 0,5	0,10532	50	51
0,5 — 0,6	0,07607	36	36
0,6 — 0,7	0,05150	24	26
0,7 — 0,8	0,03265	15	14
0,8 — 0,9	0,01938	9	10
0,9 — 1,0	0,01080	5	7
über 1,0	0,01056	5	8

Auch bei andern Beispielen findet sich meistentheils, dafs gröfsere Fehler etwas häufiger vorkommen in der Erfahrung, als in der Theorie, ein Beweis, dafs die Annahme der Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ zu keinem Irrthum Veranlassung gegeben hat, sonst müfste das Gegentheil stattfinden. Uebrigens ist diese Abweichung leicht aus dem Umstande erklärlich, dafs gröfsere Fehler in der Regel eine ganz ungewöhnliche Vereinigung von nachtheiligen Einwirkungen voraussetzen, ja selbst häufig durch ein so isolirt stehendes Ereignifs herbeigeführt werden, dafs keine Theorie sie der Rechnung wird unterwerfen können.

Den bestimmten Werth einer der Constanten h oder r bei einer Gattung von Beobachtungen wird man indessen nur aus einer wirklichen Erfahrung, oder aus einer Reihe von Fehlern, welche bei dieser Gattung statt gefunden haben, ableiten können. Es wird hierzu nöthig sein zuerst das Verfahren kennen zu lernen, wodurch man die Fehler, welche am meisten den wahren Fehlern sich nähern, bei gegebenen Beobachtungen erhält, und dann zu sehen, wie aus diesen Fehlern die Function $\varphi(\Delta)$ in allen ihren Theilen numerisch bestimmt wird. Man kann mit den einfachsten Fällen den Anfang machen. Die Vorschriften für die allgemeineren zusammengesetzten Fälle lassen sich dann leichter übersehen, da die allgemeinen Grundsätze unverändert bleiben.

Gesetzt man habe für den Werth einer unbekannten Gröfse x durch directe Beobachtung, bei einer m-maligen Wiederholung desselben Verfahrens, unter völlig gleichen Umständen, die Werthe

$$n \quad n' \quad n'' \quad n''' \ldots,$$

an der Zahl m, erhalten. Jede Beobachtung isolirt würde vermöge der Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} x - n &= 0 \\ x - n' &= 0 \\ x - n'' &= 0 \end{aligned}$$

einen genäherten Werth gegeben haben, so wie auch jede Bedingungsgleichung der allgemeine Ausdruck des Fehlers der Beobachtung in irgend welcher Hypothese für x ist. Gehört folglich zu dieser Gattung von Beobachtungen die Constante h, so dafs für sie

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hh\Delta\Delta}$$

so wird der allgemeine Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers in der ersten Beobachtung bei jeder Annahme für x

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hh(x-n)^2}$$

und die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von m Fehlern in diesen Beobachtungen

$$= \frac{h^m}{\pi^{\frac{1}{2}m}} e^{-hh\left\{(x-n)^2 + (x-n')^2 + (x-n'')^2 \ldots\right\}}.$$

Diese Wahrscheinlichkeit wird am gröfsten, wenn die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler nach einer angenommenen Hypothese die kleinstmöglichste ist, und folglich wird auch nach dem Satze II. die Hypothese über x, in welcher die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler ein absolutes Minimum ist, die wahrscheinlichste unter allen möglichen sein.

Man kann dieses Minimum entweder durch die Differentialrechnung erhalten, womit

$$2(x-n) + 2(x-n') + 2(x-n'') \ldots . = 0$$

oder

$$x = \frac{n + n' + n'' + \ldots}{m}$$

das arithmetische Mittel also, wie oben zum Grunde gelegt ward, der wahrscheinlichste Werth bei gleich guten Beobachtungen ist. Man kann aber auch der Summe der Quadrate der Fehler, bei unbestimmt gelassenem x, eine solche quadratische Form geben, dafs sowohl der wahrscheinlichste Werth von x, als auch das übrig bleibende Minimum der Fehlerquadrate sogleich daraus hervorgeht. Der Kürze wegen bezeichne man die Summe

$$(12) \ldots\ldots \quad \begin{array}{l} n + n' + n'' \ldots\ldots \text{ durch } [n] \\ nn + n'n' + n''n'' \ldots\ldots \text{ durch } [nn]. \end{array}$$

Diese Bezeichnungsart wird später auf jede beliebige symmetrische Function irgend welcher gegebener Gröfsen ausgedehnt werden. Damit wird die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, wenn man jeden Fehler wirklich quadrirt

$$\frac{h^m}{\pi^{\frac{1}{2}m}} e^{-hh\left\{mxx - 2[n]x + [nn]\right\}}$$

welchem Ausdruck man leicht die Form geben kann

$$\frac{h^m}{\pi^{\frac{1}{2}m}} e^{-hh\left\{[nn] - \frac{[n]^2}{m} + m\left(x - \frac{[n]}{m}\right)^2\right\}}.$$

Am kleinsten wird folglich der negative Exponent für

$$(13) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad x = \frac{[n]}{m}$$

und das Minimum der übrig bleibenden Fehler-Quadrate ist

$$(14) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = [nn] - \frac{[n]^2}{m}$$

Diese Form führt zugleich auf die Schätzung der Genauigkeit dieser Bestimmung von x. Nimmt man

$$x = \frac{[n]}{m}$$

so wird die Wahrscheinlichkeit dieser Hypothese

$$\frac{h^m}{\pi^{\frac{1}{2}m}} e^{-hh\left\{[nn] - \frac{[n]^2}{m}\right\}}$$

Irgend ein anderer Werth von x aber

$$x = \frac{[n]}{m} + \Delta'$$

hat die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{h^m}{\pi^{\frac{1}{2}m}} e^{-hh\left\{[nn] - \frac{[n]^2}{m} + m\Delta'\Delta'\right\}}$$

Es verhält sich folglich nach dem Satze II. die Wahrscheinlichkeit, dafs das arithmetische Mittel der wahre Werth sei, zu der Wahrscheinlichkeit, dafs es um die Gröfse Δ' fehlerhaft sei, wie

$$1 : e^{-hhm\Delta'\Delta'}$$

oder nach dem obigen Satze IV. wird für das H, welches dieser Bestimmung von x, aus m gleichen Beobachtungen hergeleitet, zukommt

$$(15) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad H = h\sqrt{m}$$

so dafs die Function $\varphi(\Delta)$ für diese Bestimmung von x wird

$$\varphi(\Delta) = \frac{h\sqrt{m}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-hhm\Delta\Delta}.$$

In einigen Fällen ist es bequemer, statt die relative Genauigkeit zweier Bestimmungen durch die Verhältnisse ihrer beiderseitigen h und r auszudrücken, den neuen Begriff des Gewichtes einzuführen. Man versteht unter Gewicht eines gegebenen Werthes die Anzahl von gleich guten Beobachtungen einer bestimmten Art (deren Genauigkeit als Einheit der Genauigkeit angesehen werden soll), welche erforderlich sein würde, um aus ihrem arithmetischen Mittel eine Bestimmung von gleicher Genauigkeit zu erhalten, wie die des gegebenen Werthes ist. Hiernach ist in dem gegenwärtigen Falle das Gewicht von x gleich m, wenn das Gewicht der einzelnen Beobachtung als Einheit angesehen wird, das Maafs der Genauigkeit von x gleich $h\sqrt{m}$, wenn h das Maafs der Genauigkeit der einzelnen Beobachtungen, und der wahrscheinliche Fehler von x gleich $\frac{\varrho}{H} = \frac{\varrho}{h\sqrt{m}} = \frac{r}{\sqrt{m}}$, wenn der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung durch r bezeichnet wird. Die Gewichte zweier Bestimmungen verhalten sich direct wie die Quadrate des beiderseitigen Maafses der Genauigkeit, und umgekehrt, wie die Quadrate der wahrscheinlichen Fehler.

Substituirt man den wahrscheinlichsten Werth von x in die Bedingungsgleichungen, so sind die Unterschiede der mit diesem Werthe geführten Rechnung und der wirklichen Beobachtung, als die Fehler der Beobachtung anzusehen, welche sich der Wahrheit am meisten nähern; so lange man also weiter keine Mittel hat, den Werth von x näher zu bestimmen, wird man die so erhaltenen Fehler als die wahren ansehen müssen. Die Summe ihrer Quadrate mufs nach der ganzen Herleitung gleich dem vorher unmittelbar bestimmten Minimum oder $= [nn] - \frac{[n]^2}{m}$ sein. Um im Allgemeinen für diese Summe einen bequemeren Ausdruck zu erhalten, hat man einen neuen Begriff, den des **mittleren Fehlers**, eingeführt. Unter dem **mittleren** Fehler versteht man die Gröfse, welche man erhält, wenn man die Summe der Quadrate der **wahren** Beobachtungsfehler dividirt durch die Anzahl der Beobachtungen, und aus dem Quotienten die Quadratwurzel auszieht. Bezeichnet man den mittleren Fehler überhaupt mit ε_2 so wird folglich in dem gegenwärtigen Falle

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\left(\frac{[nn] - \frac{[n]^2}{m}}{m}\right)}$$

oder

$$m\,\varepsilon_2\,\varepsilon_2 = [nn] - \frac{[n]^2}{m}$$

insofern man die aus der wahrscheinlichsten Hypothese hervorgehenden Fehler als die **wahren** einstweilen anzusehen genöthigt ist. Man kann den mittleren Fehler auch so definiren, dafs er der Fehler ist, welcher, wenn er allein bei allen Beobachtungen ohne Unterschied angenommen würde, dieselbe Summe der Quadrate der Fehler, wie die wirklich stattfindenden geben würde. Hiernach ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von m wahren Beobachtungsfehlern allgemein in jeder Hypothese, die man über die Constante h der Function $\varphi(\Delta)$ machen kann

$$W = \frac{h^m}{\pi^{\frac{1}{2}m}}\, e^{-hhm\,\varepsilon_2\,\varepsilon_2}.$$

Aus diesem Werthe wird man jetzt auch den wahrscheinlichsten Werth von h bestimmen können. Denn wenn die m Beobachtungsfehler, folglich auch ε_2, wirklich statt gefunden haben und weiter nicht verändert werden können, so wird das Maximum dieser Function W allein von dem Werthe von h abhängen. Der wahrscheinlichste Werth von h wird der sein, welcher diese Function W zu einem Maximum macht.

Man kann dieses Maximum zuerst wieder durch die Differentialrechnung suchen. Schreibt man den obigen Ausdruck so

$$\lg W = m \lg h - \tfrac{1}{2} m \lg \pi - hh\, m\, \varepsilon_2\, \varepsilon_2$$

so wird die Bedingung des Maximums

$$0 = \frac{m}{h} - 2m\, h\, \varepsilon_2\, \varepsilon_2$$

oder

$$1 = 2\, hh\, \varepsilon_2\, \varepsilon_2$$

womit

$$h = \frac{1}{\varepsilon_2 \sqrt{2}}.$$

Man kann indessen auch im allgemeinen die Gröſse W als Function von h für geänderte Werthe von h entwickeln. Es gehöre zu einem Werthe $h + \Delta$ der Werth W' eben so, wie zu h der Werth W gehört, so wird man haben:

$$\lg W' = m \lg (h + \Delta) - \tfrac{1}{2} m \lg \pi - (h + \Delta)^2\, m\, \varepsilon_2\, \varepsilon_2$$

schreibt man hier für $m \lg (h + \Delta)$ den Ausdruck

$$m \lg h + m \lg \left(1 + \frac{\Delta}{h}\right)$$

und entwickelt den letzten Theil in die bekannte Reihe, so wird

$$\begin{aligned} \lg W' = {} & m \lg h - \tfrac{1}{2} m \lg \pi - hh\, m\, \varepsilon_2\, \varepsilon_2 \\ & + m \frac{\Delta}{h} - \tfrac{1}{2} m \frac{\Delta^2}{h^2} + \tfrac{1}{3} m \frac{\Delta^3}{h^3} - \tfrac{1}{4} m \frac{\Delta^4}{h^4} \\ & - 2m\, \varepsilon_2\, \varepsilon_2\, h \Delta - m\, \varepsilon_2\, \varepsilon_2\, \Delta^2 \end{aligned}$$

und durch Verbindung mit dem Ausdruck von $\lg W$ wird

$$\begin{aligned} \lg \left(\frac{W'}{W}\right) = {} & \left(\frac{m}{h} - 2m\, h\, \varepsilon_2\, \varepsilon_2\right) \Delta - \left(\tfrac{1}{2} \frac{m}{h^2} + m\, \varepsilon_2\, \varepsilon_2\right) \Delta^2 \\ & + \tfrac{1}{3} \frac{m}{h^3} \Delta^3 - \tfrac{1}{4} \frac{m}{h^4} \Delta^4 + \ldots . \end{aligned}$$

Soll hier der Werth von h der wahrscheinlichste, folglich W ein absolutes Maximum werden und $\lg \frac{W'}{W}$ deshalb stets einen negativen Werth erhalten, so wird man den Coefficienten von Δ gleich Null setzen müssen. Für das Maximum von W wird also

$$(16) \ldots\ldots \frac{m}{h} - 2m\,h\,\varepsilon_2\,\varepsilon_2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{h} = \varepsilon_2 \sqrt{2}$$

und wenn man diesen wahrscheinlichsten Werth in die übrigen Glieder substituirt, so wird jeder andere Werth von W, insofern er von einem andern h abhängt, gefunden durch

$$W' = W \cdot e^{-2m\,\varepsilon_2\,\varepsilon_2\,\Delta\Delta\left\{1 - \frac{1}{3}(\varepsilon_2\sqrt{2})\,\Delta + \frac{1}{4}(\varepsilon_2\sqrt{2})^2\,\Delta^2 \ldots\right\}}$$

Man kann sich hier erlauben, die in dem Exponenten als Factor enthaltene Reihe $= 1$ zu setzen. Denn wenn man den Werth des wahrscheinlichsten h einführt, so wird sie

$$= 1 - \frac{1}{3}\frac{\Delta}{h} + \frac{1}{4}\frac{\Delta^2}{h^2} - \frac{1}{5}\frac{\Delta^3}{h^3} \ldots.$$

welche Reihe noch mit $m\frac{\Delta^2}{h^2}$ multiplicirt werden mufs. Wenn $\frac{\Delta}{h}$ ein kleiner Bruch ist, so wird die Reihe von der Einheit wenig abweichen, und noch mehr der Unterschied des vollständigen strengen Werthes von dem genäherten $e^{-m\frac{\Delta\Delta}{hh}}$ unmerklich sein. Sollte aber $\frac{\Delta}{h}$ einen gröfseren Werth haben, so wird W' sehr klein gegen W, und eben deshalb der ganz scharfe Ausdruck kein erhebliches Interesse haben. Hiernach verhält sich die Wahrscheinlichkeit, dafs $h = \frac{1}{\varepsilon_2\sqrt{2}}$, oder W, zu der Wahrscheinlichkeit, dafs der Werth von $h = \frac{1}{\varepsilon_2\sqrt{2}} + \Delta$, oder W', wie

$$1 : e^{-2m\,\varepsilon_2\,\varepsilon_2\,\Delta\Delta} \qquad \text{oder} \qquad 1 : e^{-\frac{m}{hh}\Delta\Delta}$$

Folglich ist nach dem Satze (IV) das Maafs der Präcision für den Werth von $h = \frac{1}{\varepsilon_2\sqrt{2}}$

$$= \varepsilon_2\sqrt{2m} \qquad \text{oder} \qquad = \frac{1}{h}\sqrt{m}$$

und der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung

$$= \frac{\varrho\, h}{\sqrt{m}} = \frac{\varrho}{\varepsilon_2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m}}$$

oder es ist Eins gegen Eins zu wetten, dafs der wahre Werth von h liegt zwischen

$$(17) \ldots \frac{1}{\varepsilon_2 \sqrt{2}}\left\{1+\frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right\} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varepsilon_2 \sqrt{2}}\left\{1-\frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right\}$$

Hieraus folgt zugleich wegen

$$r=\frac{\varrho}{h}$$

dafs der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Beobachtung von dem mittleren Fehler abhängt durch die Gleichung

$$(18) \ldots\ldots\ldots\ldots r=\varrho\sqrt{2}\cdot\varepsilon_2=0{,}674489\,\varepsilon_2$$

wenn der numerische Werth von $\varrho\sqrt{2}$ substituirt wird. Die Sicherheit dieser Bestimmung wird durch die Grenzwerthe von h bestimmt. Es ist Eins gegen Eins zu wetten, dafs r liegt zwischen

$$\frac{\varrho\sqrt{2}}{1+\frac{\varrho}{\sqrt{m}}}\varepsilon_2 \quad \text{und} \quad \frac{\varrho\sqrt{2}}{1-\frac{\varrho}{\sqrt{m}}}\varepsilon_2$$

wofür man sich, da eine absolute Genauigkeit nicht beabsichtigt wird, erlauben kann die Grenzen von $r=$

$$(19) \ldots \varepsilon_2\cdot\varrho\sqrt{2}\left(1-\frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right) \quad \text{und} \quad \varepsilon_2\cdot\varrho\sqrt{2}\left(1+\frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right)$$

zu setzen. Man vernachlässigt dabei die höheren Potenzen der Unsicherheit des wahrscheinlichen Fehlers gegen die erste, insofern man diese Unsicherheit als eine kleine Gröfse erster Ordnung betrachtet.

Es bleibt hierbei noch der Umstand zu berücksichtigen, dafs die Gröfse ε_2, und damit auch h, nach den gemachten Voraussetzungen eigentlich aus den reinen Beobachtungsfehlern hätte bestimmt werden sollen, während sie doch nur aus dem erhaltenen Minimum der Fehlerquadrate abgeleitet worden ist. Es ist klar, dafs diese Art der Herleitung nothwendig etwas fehlerhaft ist, weil jeder noch so wenig von dem arithmetischen Mittel verschiedene Werth von x, in jedem Falle ein gröfseres ε_2, und ein kleineres h, geben mufs. Um dieses deutlicher zu übersehen, sei der wahrscheinlichste Werth von x, sofern es aus den m Beobachtungen folgt $= p$, oder

$$p = \frac{[n]}{m}$$

Der wahre Werth aber sei $p + \Delta p$. Dadurch, dafs p in die Bedingungsgleichungen substituirt wird, erhalten wir als die Fehler der Beobachtungen die Gröfsen: $p - n$, $p - n'$, $p - n''\ldots$, die der Kürze wegen mit α, α', $\alpha''\ldots$ bezeichnet werden mögen. Die Substitution des wahren Werthes $p + \Delta p$, würde dafür gegeben haben $p + \Delta p - n$, $p + \Delta p - n'$, $p + \Delta p - n''\ldots$, und diese letzteren Gröfsen, die mit δ, δ', δ'' bezeichnet werden mögen, würden die reinen Beobachtungsfehler gewesen sein. Wir haben folglich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha + \Delta p &= \delta \\ \alpha' + \Delta p &= \delta' \\ \alpha'' + \Delta p &= \delta'' \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Die Summe der Quadrate zu beiden Seiten genommen, wird, weil $[\alpha] = 0$ ist, geben

$$[\alpha\alpha] + m\,\Delta p^2 = [\delta\delta].$$

Nehmen wir also $[\alpha\alpha]$ als die wahre Summe der Fehlerquadrate, so fehlen wir stets um die positive Gröfse $m\,\Delta p^2$. Diese Darstellung giebt indessen zugleich das Mittel an die Hand, den Fehler so weit zu verbessern, als die Umstände erlauben. Wäre zu den m Beobachtungen noch eine neue hinzugekommen, ohne dafs wir bestimmt wüfsten, welchen Werth sie gegeben hätte, so würden wir dem $[\alpha\alpha]$ noch den Werth $\varepsilon_2\,\varepsilon_2$, als den mittleren Werth eines solchen Quadrats, hinzufügen müssen. Die Gleichung zeigt an, dafs $m\,\Delta p^2$ jedenfalls hinzugefügt werden mufs, und aus dem Obigen folgt, dafs p das Gewicht m hat, oder dafs wenn eine einzelne Beobachtung den mittleren Fehler ε_2 hat, der mittlere Fehler von p gleich $\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{m}}$ wird. Hieraus geht hervor, dafs wir der Wahrheit uns so viel als möglich nähern werden, wenn wir in dieser Gleichung die Gröfse von Δp so annehmen, wie es sein Verhältnifs zu den einzelnen Beobachtungen ergiebt, oder den Werth $\Delta p = \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{m}}$ substituiren. Damit wird

$$[\alpha\alpha] + \varepsilon_2\varepsilon_2 = [\delta\delta]$$

und weil der angenommenen Definition zufolge

$$[\delta\delta] = m\,\varepsilon_2\varepsilon_2$$

so wird der Werth von ε_2 aus den m übrig bleibenden Fehler nach der Substitution des arithmetischen Mittels erhalten durch

$$(20) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (m-1)\cdot\varepsilon_2\varepsilon_2 = [\alpha\alpha]$$

Um möglichst nahe den reinen mittleren Fehler der Beobachtungen zu erhalten, mufs man bei einer unbekannten Gröfse die Summe der Fehler-Quadrate so ansehen, als gehöre sie nicht zu m, sondern zu $(m-1)$ Fehlern.

Man kann sich von der Richtigkeit dieser Vorschrift ganz allgemein auch so, wenigstens vorläufig, überzeugen. Wenn μ unbekannte Gröfsen gefunden werden sollen, so werden dazu in jedem Falle μ von einander unabhängige Bedingungsgleichungen erfordert, und wenn nicht mehr als μ solcher Gleichungen gegeben sind, so werden diese genau dargestellt, ohne dafs uns irgend ein Maafsstab zu der Schätzung des möglichen Fehlers dabei übrig bleibt. Wir erhalten diesen erst, wenn wir die gefundenen Werthe in andere Bedingungsgleichungen für dieselben Unbekannten substituiren, und die vorkommenden Fehler vergleichen, so dafs bei m Beobachtungen, auf diese Art behandelt, $m-\mu$ Fehler vorkommen, die über die Genauigkeit urtheilen lassen. Dadurch, dafs wir nicht μ bestimmte Gleichungen allein als die absolut richtigen, und die Abweichungen aller übrigen von den, aus den μ gewählten, gezogenen Resultaten, als Fehler ansehen, sondern allen gleichen Antheil an der Bestimmung der Unbekannten gewähren, kommen wir gewifs der Wahrheit näher, aber wir heben dadurch nicht die analytische Nothwendigkeit auf, dafs wenn nicht μ bestimmte Gleichungen, doch aus allen zusammen ein Aequivalent für solche

μ Gleichungen, zur Bestimmung von μ unbekannten Gröſsen immer verwandt werden muſs. Folglich werden auch immer die so erhaltenen Functionen der übrig bleibenden Fehler sich nicht auf eine Zahl von m Fehlern, sondern auf die Zahl von $m-\mu$ Fehlern beziehen, wie es hier für $\mu=1$ gezeigt worden ist, und im folgenden für jedes beliebige μ gezeigt werden wird.

Zur leichteren Uebersicht der Vorschriften für den bisher betrachteten einfachsten Fall gleich guter directer Beobachtungen einer unbekannten Gröſse möge die Anwendung derselben auf Benzenberg's letzte und genaueste Fallversuche in den Schlebuscher Kohlenbergwerken dienen. Diese Versuche hatten den Zweck, die Axendrehung der Erde direct dadurch zu beweisen, daſs Kugeln aus einer beträchtlichen Höhe ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen in der untern Station beim Niederfallen weiter gegen Osten abweichen als ein ruhig hängendes Loth von demselben Anfangspunkte herabgelassen. Die Versuche wurden, wenn auch in einzelnen Theilen abgeändert, doch alle so angestellt, daſs ihnen gleicher Werth zukommt. Da sie nur als Beispiel dienen sollen, so lasse ich die (nicht mit der Theorie übereinstimmende) Abweichung der einzelnen Kugeln gegen Norden und Süden ganz auſser Acht; sie hebt sich überdieſs im Mittel aus allen Versuchen fast völlig auf. Eben so nehme ich nur die Versuche als gültig an, welche der Beobachter in der Tabelle seines Werkes (*Versuche über das Gesetz des Falles* u. s. w. von J. F. Benzenberg, Dortmund 1804) pg. 424 als stimmfähig erklärt, wenn gleich die Gründe des Ausschlieſsens mehrerer sonst angestellter vielleicht nicht ganz überzeugend sind. Bezeichnet man die östliche Abweichung vom Lothpunkte mit +, die wesentliche mit —, so wurden folgende Abweichungen in Pariser Linien bei einer Fallhöhe von 262 Pariser Fuſs beobachtet.

	n		n
Versuch 1.	− 3‴,0	Versuch 16.	− 8‴,0
2.	+ 12,0	17.	+ 8,0
3.	+ 3,0	18.	+ 10,0
4.	+ 13,0	19.	+ 7,0
5.	+ 20,0	20.	+ 7,5
6.	− 2,0	21.	+ 6,0
7.	+ 11,5	22.	− 2,0
8.	− 4,0	23.	+ 11,0
9.	+ 2,0	24.	− 4,0
10.	+ 2,0	25.	− 9,0
11.	+ 12,0	26.	− 10,0
12.	+ 7,0	27.	+ 8,5
13.	+ 13,5	28.	+ 10,0
14.	+ 11,0	29.	+ 5,5
15.	+ 9,0		

Die einfache Form der Bedingungsgleichungen, wenn x die gesuchte Abweichung bezeichnet, ist hier

$$x - n = 0$$

folglich ist nach (13) die wahrscheinlichste Abweichung

$$x = \frac{+\,189{,}5 - 42{,}0}{29} = +\,5{,}'''086$$

und die übrig bleibenden Fehler, der leichtern Uebersicht wegen nach ihrer absoluten Gröſse geordnet, sind:

Versuch 29.	− 0‴,414	Versuch 7.	− 6‴,414
21.	− 0,914	2.	− 6,914
12.	− 1,914	11.	− 6,914
19.	− 1,914	6.	+ 7,086
3.	+ 2,086	22.	+ 7,086
20.	− 2,414	4.	− 7,914
17.	− 2,914	1.	+ 8,086
9.	+ 3,086	13.	− 8,414
10.	+ 3,086	8.	+ 9,086
27.	− 3,414	24.	+ 9,086
15.	− 3,914	16.	+ 13,086
18.	− 4,914	25.	+ 14,086
28.	− 4,914	5.	− 14,914
14.	− 5,914	26.	+ 15,086
23.	− 5,914		

Die Summe der Quadrate dieser Fehler wird entweder durch unmittelbare Erhebung jedes einzelnen Fehlers in das Quadrat oder vermittelst der Formel (14) gefunden

$$= 1612{,}0 \quad \text{bei} \quad m = 29$$

folglich ist

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{1612{,}0}{28}} = 7''',588$$

woraus

$$r = \varepsilon_2 \cdot \varrho \sqrt{2} \quad = 5''',118$$

und

$$h = \frac{\varrho}{r} = 0{,}093$$

in Bezug auf die Einheit der Pariser Linie.

Wegen $m = 29$, also $\frac{\varrho}{\sqrt{m}} = 0{,}08846$ kann man Eins gegen Eins wetten, dafs liegen werde

ε_2 ..	zwischen	$6''',916$	und	$8''',260$
r...	„	4,665	„	5,571
h...	„	0,085	„	0,101

Endlich hat die wahrscheinlichste Abweichung in Bezug auf einen einzelnen dieser Versuche das Gewicht 29, folglich ist ihr wahrscheinlicher Fehler (und ähnlich das ihr zukommende H und der mittlere Fehler)

$$= \frac{r}{\sqrt{29}} = 0''',950$$

dessen Grenzen der Sicherheit aus den Grenzen von r sich auf dieselbe Weise ergeben, und man kann Eins gegen Eins wetten, dafs die wahre Abweichung liege zwischen

$$4''',136 \quad \text{und} \quad 6''',036$$

Der Werth, den die Theorie giebt, $4''',6$, liegt innerhalb dieser Grenzen. Die Versuche stimmen also damit überein. Eben so stimmen sie auch für ihre geringe Anzahl hinlänglich mit dem Werth von r, wonach die Hälfte der Fehler kleiner sein sollte, als $5''',118$. Unter 29 Fehlern sind 13 kleiner als diese Gröfse und

16 überschreiten sie. Gäbe es gar keine östliche Abweichung, so fände bei x ein Fehler von 5‴,086 statt. Da dieser aber mehr als das fünffache des wahrscheinlichen Fehlers von x ist, so grenzt das Vorhandensein einer östlichen Abweichung ganz nahe an die Gewifsheit. Wollte man die absolute Gröfse innerhalb engerer Grenzen bestimmen, so würde man beträchtlich mehr Versuche dieser Art anstellen müssen. Es würden 2600 ungefähr nöthig sein, um den wahrscheinlichen Fehler von x bis zu 0‴,1 zu verringern.

Immer darf man hierbei nicht übersehen, dafs die Fehlergrenze offenbar viel zu eng ist, theils weil bei der absoluten Kleinheit von x ein constanter Fehler in der Art der Beobachtung einen verhältnifsmäfsig sehr grofsen Einflufs haben wird, theils weil das Ausschliefsen der Beobachtungen, die über 2 Zoll abwichen (ihrer sind im Ganzen 11 bei 40 überhaupt gemachten), schwerlich vollkommen gerechtfertigt werden kann; überhaupt setzt ein solches Ausschliefsen, wenn es blofs nach dem Erfolg geschieht, der Gefahr aus, sich von der reinen Wahrheit zu entfernen, und bewirkt immer eine irrige Vorstellung von der Sicherheit des Resultats.

Der beschwerlichste Theil der Rechnung in diesem einfachsten Falle ist die Bestimmung der Summe der Fehler-Quadrate; man kann wünschen, auf eine einfachere Weise zu der Kenntnifs von r und h zu gelangen. Diese Untersuchung hat auch noch aufserdem den Nutzen, den Gegenstand von einer andern Seite zu betrachten, und zu der Bestimmung von h aus der Summe der Fehler-Quadrate noch auf einem andern Wege zu gelangen.

Wäre ganz allgemein (ohne bestimmte Annahme der obigen Function $\varphi(\Delta)$) das Gesetz der Fehler durch $\psi(\Delta)$ gegeben und diese Function vollständig bekannt, so würde man in Bezug auf m beliebige Beobachtungen, schon vorher ehe man ihr Resultat kennt, auf die Vertheilung der Fehler und auf die Gröfse beliebiger Functionen derselben einen Schlufs machen können, der sich um so mehr, nachdem die Beobachtungen gemacht sind, bestätigen müfste, je gröfser m ist. So z. B. werden der Wahrscheinlichkeit nach zwischen $\Delta = a$ und $\Delta = b$ eine Anzahl von Fehlern liegen

$$= m \int_a^b \psi(\Delta)\, d\Delta$$

eben so wird auch, da $m\psi(\Delta)$ die Anzahl der Fehler von der Gröfse Δ ist, die Gröfse $m\Delta^n\psi(\Delta)$ die Summe der n^{ten} Potenzen der Fehler von der Gröfse Δ bei m Beobachtungen sein und folglich

$$m \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^n \psi(\Delta) \cdot d\Delta = m k^{(n)}$$

die Summe der n^{ten} Potenzen aller der Fehler im Allgemeinen ausdrücken, die bei m Beobachtungen dem Gesetze der Wahrscheinlichkeit zufolge vorkommen sollten. Die Gröfse $k^{(n)}$, wo der Index (n) sich nach der Potenz von Δ richtet, oder das $\int$ zwischen den weitesten Grenzen genommen, kann nicht blofs eine absolute Zahl sein, sondern wird eine oder mehrere Constanten enthalten müssen, die sich auf die Gattung der Beobachtungen beziehen. Kennte man deshalb zwar die Form von $\psi(\Delta)$, aber wäre über den genauen Werth der darin enthaltenen Constanten noch ungewifs, so würden beliebige m Beobachtungen, wenn die reinen Beobachtungsfehler dadurch gefunden worden sind, zu der Kenntnifs der Constanten führen. Denn es seien die Fehler α, β, γ, δ an der Zahl m unmittelbar gegeben, so wird der wahrscheinlichste Werth von $k^{(n)}$ gefunden durch

$$k^{(n)} = \frac{\alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n \ldots}{m} = \frac{[\Delta^n]}{m}$$

Jede andere Hypothese über den Werth von $k^{(n)}$ würde die Fehler nicht nach dem Gesetze $\psi(\Delta)$ vertheilt voraussetzen, folglich einen Irrthum in einem oder mehreren Werthen von α^n, β^n, γ^n u. s. w. annehmen. Der Werth von $k^{(n)}$, welcher keinen Irrthum bedingt, mufs diesen m Beobachtungen zufolge, der wahrscheinlichste sein.

Diese Form giebt aber zugleich auch die Grenzen der Sicherheit der so erhaltenen Bestimmung von $k^{(n)}$ an. Es gilt bei $k^{(n)}$ völlig strenge das Princip des arithmetischen Mittels, wodurch man für jedes m, aus dem, was die Beobachtungen einzeln ergeben, den wahrscheinlichsten Werth einer und derselben unbekannten Gröfse findet. Die Gröfsen α^n, β^n, γ^n treten folglich in die Reihe von directen Beobachtungen der Gröfse $k^{(n)}$ und die Unterschiede $k^{(n)}-\alpha^n$, $k^{(n)}-\beta^n$, $k^{(n)}-\gamma^n$ sind als die Fehler einer solchen einzelnen Bestimmung anzusehen. Für sie gilt [abgesehen von der ursprünglichen Form $\psi(\Delta)$] in jedem Falle die oben bestimmte Form $\varphi(\Delta)$. Hiernach ist die mittlere Abweichung einer einzelnen Bestimmung

$$=\sqrt{\left(\frac{(k^{(n)}-\alpha^n)^2+(k^{(n)}-\beta^n)^2+(k^{(n)}-\gamma^n)^2+\ldots}{m}\right)}$$

wofür man sich erlauben kann, durch Substitution von

$$[\Delta^n]=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\delta^n\ldots=mk^{(n)}$$
$$[\Delta^{2n}]=\alpha^{2n}+\beta^{2n}+\gamma^{2n}+\delta^{2n}\ldots=mk^{(2n)}$$

zu schreiben, wenn man die Erhebung in das Quadrat ausführt:

$$\sqrt{\left\{k^{(2n)}-k^{(n)}k^{(n)}\right\}}$$

die wahrscheinliche Abweichung eines einzelnen Datums ist:

$$=\varrho\sqrt{\left\{2\,(k^{(2n)}-k^{(n)}k^{(n)})\right\}}$$

und folglich des arithmetischen Mittels aus m Angaben

$$=\varrho\sqrt{\frac{2\,(k^{(2n)}-k^{(n)}k^{(n)})}{m}}$$

Es ist folglich Eins gegen Eins zu wetten, dafs liege

$$k^{(n)} \text{ zwischen } \frac{[\Delta^n]}{m}+\varrho\sqrt{\left(\frac{2\,(k^{(2n)}-k^{(n)}k^{(n)})}{m}\right)}$$
$$\text{und } \frac{[\Delta^n]}{m}-\varrho\sqrt{\left(\frac{2\,(k^{(2n)}-k^{(n)}k^{(n)})}{m}\right)}$$

oder dafs

$$k^{(n)}=\frac{[\Delta^n]}{m}\left\{1\pm\varrho\sqrt{\frac{2}{m}}\cdot\sqrt{\left(\frac{k^{(2n)}}{k^{(n)}k^{(n)}}-1\right)}\right\}$$

wo die Klammer sich auf die Grenzwerthe bezieht, zwischen welchen die Wahrscheinlichkeit $=\frac{1}{2}$ ist.

In der Anwendung auf das oben für $\psi(\Delta)$ gefundene Gesetz $\varphi(\Delta)$ braucht man jedesmal den Werth von $\sqrt[n]{k^{(n)}}$. Bezeichnet man also allgemein

$$\sqrt[n]{\frac{[\Delta^n]}{m}} = \varepsilon_n$$

und zieht auf beiden Seiten die n^{te} Wurzel aus mit Vernachlässigung der höhern Potenzen für die Grenzwerthe, so wird

$$\sqrt[n]{k^{(n)}} = \varepsilon_n \left\{1 \pm \frac{\varrho}{n} \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{\left(\frac{k^{(2n)}}{k^{(n)} k^{(n)}} - 1\right)}\right\}.$$

Diese Formel bedarf nur noch der Bestimmung der Werthe von $k^{(n)}$ für jedes beliebige n. Für die hier geltende Function $\varphi(\Delta)$ wird

$$k^{(n)} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^n e^{-hh\Delta\Delta} d\Delta$$

oder wenn man, um die ungeraden Fehler-Potenzen (die sonst stets sich aufheben müfsten) mit in Rechnung ziehen zu können, alle Fehler als positiv betrachtet

$$k^{(n)} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \Delta^n e^{-hh\Delta\Delta} d\Delta$$

weil die Fehler zu beiden Seiten von Null gleich vertheilt sind. Setzt man hier

$$h\Delta = t$$

so wird

$$k^{(n)} \cdot \frac{h^n \sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{\infty} t^n e^{-t^2} dt$$

durch theilweise Integration findet man das allgemeine Integral

$$= -\tfrac{1}{2} t^{n-1} e^{-t^2} + \frac{n-1}{2} \int t^{n-2} e^{-t^2} dt$$

Der erste Theil verschwindet sowohl für die Grenze 0 als ∞, weil bei der letztern $e^{-t^2} = \frac{1}{e^{tt}}$, durch die Reihen-Entwicklung immer höhere Potenzen von t im Nenner hervorbringen wird als im Zähler sind, folglich wird

$$k^{(n)} \cdot \frac{h^n \sqrt{\pi}}{2} = \frac{n-1}{2} \int_0^\infty t^{n-2} e^{-t^2} dt$$

$$= \frac{n-1}{2} k^{(n-2)} \cdot \frac{h^{n-2} \sqrt{\pi}}{2}$$

oder

$$k^{(n)} = \frac{\frac{1}{2}(n-1)}{h^2} k^{(n-2)}; \qquad k^{(n+2)} = \frac{\frac{1}{2}(n+1)}{h^2} k^{(n)}$$

Durch die Fortsetzung dieser Operation wird man, je nachdem n gerade oder ungerade ist, entweder auf $k^{(0)}$ kommen oder auf $k^{(1)}$. Jenes ist aber nach (5)

$$k^{(0)} = 1$$

und für dieses findet sich durch unmittelbaren Anblick der Formel

$$k^{(1)} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$$

Hieraus ergeben sich von selbst die folgenden Werthe:

$$k^{(0)} = 1 \qquad\qquad k^{(1)} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$$

$$k^{(2)} = \frac{1}{2h^2} \qquad\qquad k^{(3)} = \frac{1}{h^3\sqrt{\pi}}$$

$$k^{(4)} = \frac{3}{4h^4} \qquad\qquad k^{(5)} = \frac{2}{h^5\sqrt{\pi}}$$

$$k^{(6)} = \frac{3 \cdot 5}{8h^6} \qquad\qquad k^{(7)} = \frac{2 \cdot 3}{h^7\sqrt{\pi}}$$

$$k^{(8)} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{16h^8} \qquad\qquad k^{(9)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{h^9\sqrt{\pi}}$$

Bei der Substitution dieser Werthe in die obige Formel wird auf der linken Seite der Gleichung $\sqrt[n]{k^{(n)}}$ werden für

$$n \text{ gerade} \quad = \frac{1}{h} \cdot \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots . (n-1)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots . \quad 2}}$$

$$n \text{ ungerade} = \frac{1}{h} \cdot \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \frac{1}{2}(n-1)}{\sqrt{\pi}}}$$

Multiplicirt man folglich beide Seiten mit ϱ und läfst dann auf der linken Seite $\frac{\varrho}{h} = r$ allein stehen, so erhält man folgende Werthe:

$$
\begin{aligned}
r &= \varrho\sqrt{\pi} \cdot \varepsilon_1 \left\{1 \pm \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\sqrt{(\pi-2)}\right\}\\
r &= \varrho\sqrt{2} \cdot \varepsilon_2 \left\{1 \pm \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right\}\\
r &= \varrho\sqrt[6]{\pi} \cdot \varepsilon_3 \left\{1 \pm \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\sqrt{\frac{15\pi-8}{36}}\right\}\\
r &= \varrho\sqrt[4]{\tfrac{4}{3}} \cdot \varepsilon_4 \left\{1 \pm \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\sqrt{\frac{4}{3}}\right\}\\
r &= \varrho\sqrt[10]{\tfrac{1}{4}\pi} \cdot \varepsilon_5 \left\{1 \pm \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\sqrt{\frac{945\pi-128}{1600}}\right\}\\
r &= \varrho\sqrt[6]{\tfrac{8}{15}} \cdot \varepsilon_6 \left\{1 \pm \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\sqrt{\frac{113}{45}}\right\}
\end{aligned}
$$

oder in Zahlen

$$
\begin{aligned}
r &= 0{,}845347 \cdot \varepsilon_1 \left\{1 \pm \frac{0{,}509584}{\sqrt{m}}\right\}\\
r &= 0{,}674489 \cdot \varepsilon_2 \left\{1 \pm \frac{0{,}476936}{\sqrt{m}}\right\}\\
r &= 0{,}577190 \cdot \varepsilon_3 \left\{1 \pm \frac{0{,}497199}{\sqrt{m}}\right\}\\
r &= 0{,}512502 \cdot \varepsilon_4 \left\{1 \pm \frac{0{,}550719}{\sqrt{m}}\right\}\\
r &= 0{,}465553 \cdot \varepsilon_5 \left\{1 \pm \frac{0{,}635508}{\sqrt{m}}\right\}\\
r &= 0{,}429497 \cdot \varepsilon_6 \left\{1 \pm \frac{0{,}755776}{\sqrt{m}}\right\}
\end{aligned}
$$

wo ε_1 das arithmetische Mittel aus allen Fehlern ist, ohne Rücksicht dabei auf ihre Zeichen zu nehmen, ε_2 die Quadratwurzel aus dem arithmetischen Mittel der Quadrate der Fehler, und überhaupt ε_n die n^{te} Wurzel aus dem arithmetischen Mittel der n^{ten} Potenzen, ohne Rücksicht auf das Zeichen.

Aus den Zahlen für die Grenzwerthe sieht man, dafs die Bestimmung durch die Summe der Quadrate die vortheilhafteste ist. Bei gleich vielen Beobachtungen erhält man durch sie die engsten Grenzen, innerhalb welchen man Eins gegen Eins wetten kann, dafs r liege. Zur Erlangung gleicher Grenzen wird, je nachdem man ε_1, ε_2, ε_3 u. s. w. anwendet, die nöthige Anzahl von Beobachtungen sich gegenseitig verhalten wie

$$\pi - 2 : 1 : \frac{15\,\pi - 8}{36} : \frac{4}{3} : \frac{945\,\pi - 128}{1600} : \frac{113}{45}$$

oder wenn man bei ε_2 100 Beobachtungen nöthig hat, um gewisse Grenzen zu erhalten, so braucht man für dieselben Grenzen bei

ε_1 ...... 114 Beobachtungen
ε_3 ...... 109 „
ε_4 ...... 133 „
ε_5 ...... 178 „
ε_6 ...... 251 „

Wegen der grofsen Bequemlichkeit von ε_1 und des doch nicht allzu erheblichen Unterschiedes in Hinsicht auf die Enge der Grenzen, wird man wohl meistentheils, wenn nicht schon die Summe der Fehler-Quadrate bekannt ist, die Anwendung von ε_1 vorziehen.

Für das obige Beispiel ist die Summe der absolut genommenen Fehler $= 181{,}898$, folglich

$$\varepsilon_1 = \frac{181{,}898}{28} = 6{,}''' 496$$

und daraus

$$r = 5{,}''' 492$$

innerhalb der Grenzen

$$4{,}''' 972 \quad \text{und} \quad 6{,}''' 012$$

Ein Werth, der, wenn er auch von dem oben gegebenen abweicht, doch für die geringe Zahl von Beobachtungen immer zu einer hinreichenden Schätzung der Genauigkeit des Resultats führen wird.

Man kann aufserdem noch zu dieser Bestimmung den Satz benutzen, welcher auf die Gröfse der einzelnen Fehler keinen directen Bezug hat, sondern nur ausspricht, dafs nach dem jedesmaligen Gesetze der Wahrscheinlichkeit [ohne bestimmte Annahme von $\varphi(\Delta)$] der Begriff des wahrscheinlichen Fehlers die Bedingung enthält, dafs eben so viele Fehler kleiner sind als r, als gröfsere vorkommen. Ordnet man deswegen die Fehler, ohne Rücksicht auf ihr Zeichen, nach ihrer absoluten Gröfse, und zählt von dem kleinsten an, so wird bei m Beobachtungen der, welcher zu dem Index $\frac{1}{2}(m+1)$ gehört, bei m ungerade, oder bei geradem m das arithmetische Mittel zwischen den Fehlern, deren Index $\frac{1}{2}m$ und $\frac{1}{2}m+1$ ist, einen genäherten Werth für r angeben. In dem obigen Beispiele wäre es wegen $m=29$ der 15te oder man fände hieraus

$$r = 5\overset{\prime\prime}{,}914.$$

Wenn indessen schon bei den Potenzensummen die gröfsere Anzahl der Beobachtungsfehler die Genauigkeit in Bezug auf die wahrscheinlichen Grenzen so sehr wachsen läfst, so wird bei dieser Zählungsweise es um so mehr stattfinden müssen. Da Gaufs in der *Zeitschrift für Astronomie* I. pg. 195 die dazu nöthige Formel ohne Beweis angegeben, so wird um so mehr der folgende elegante Beweis, den ich der Mittheilung meines geehrten Collegen, Herrn Prof. Dirichlet, verdanke, hier von Werth sein, als der Satz selbst anderswo noch nicht bewiesen ist.

Man suche die Wahrscheinlichkeit, dafs bei $(2n+1)$ Beobachtungen die Vertheilung der Fehler so sei, dafs ein Fehler liege zwischen t und $t+dt$, n Fehler zwischen 0 und t, und n Fehler zwischen $t+dt$ und ∞. Die Wahrscheinlichkeit, dafs ein Fehler kleiner als t, sei wiederum ganz allgemein

$$= \int_0^t \psi(\Delta)\, d\Delta = u$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers $> t+dt$ wird dann werden

$$1 - \psi(t)dt - \int_0^t \psi(\Delta) d\Delta = 1 - u - \psi(t)dt,$$

da die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen t und $t+dt$ ist $=\psi(t)dt$. Hiernach ist die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit einer Anordnung der Fehler, wenn n Fehler $< t$, ein Fehler zwischen t und $t+dt$, und n Fehler $> t+dt$

$$= u^n(1-u)^n \cdot \psi(t)dt$$

wenn man die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt, da das Resultat von der ersten Ordnung ist. Solcher Fälle oder Anordnungen können aber so viele vorkommen als Versetzungen von $2n+1$ Elementen möglich sind, wenn unter ihnen n gleiche Elemente einer Art (deren Wahrscheinlichkeit $= u$) und n gleiche Elemente einer andern Art (deren Wahrscheinlichkeit $= (1-u)$) vorkommen. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit aller möglichen Anordnungen dieser Art

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2n+1)}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n)^2} u^n (1-u)^n \psi(t) dt = U$$

Denkt man sich die Gröfse dt des Intervalls zwischen t und $t+dt$ constant, so giebt es einen Werth von t, für welchen U ein Maximum ist. Die sich durch Differentiation zur Bestimmung desselben ergebende Gleichung ist:

$$\frac{n\psi(t)}{u} - \frac{n\psi(t)}{1-u} + \psi'(t) = 0$$

wo $\psi'(t)$ die nämliche Bedeutung, wie oben $\varphi'(\Delta)$ hat. Es ist nämlich du, oder das Increment von $\int_0^t \psi(\Delta) d\Delta$ in Bezug auf eine unendlich kleine Aenderung der Grenze t, gleich $\psi(t)dt$. Man kann der letzten Gleichung die Form geben

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{1-u} + \frac{\psi' t}{n \psi t} = 0$$

Das letzte Glied wird um so kleiner werden, je gröfser n ist, oder je mehr Beobachtungen gegeben sind. Bei einer hinlänglich grofsen Anzahl wird man es vernachlässigen können. Oder der Werth von t, für welchen das Maximum statt findet, nähert sich bei wachsendem n immer mehr dem Werthe, welcher aus der Gleichung folgt:

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{1-u} = 0$$

d. h.

$$u = \int_0^t \psi(\Delta) d\Delta = \tfrac{1}{2}$$

oder nach der oben gegebenen Definition dem Werthe r.

Nimmt man das Integral von U zwischen bestimmten Grenzen, so erhält man daraus die Wahrscheinlichkeit, dafs der in der Mitte liegende Fehler in diesen Grenzen enthalten ist. Diese wird also für die Grenzen $r-\delta$ und $r+\delta$

$$=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n+1)}{(1\cdot 2\cdot 3\ldots n)^2}\int_{r-\delta}^{r+\delta} u^n(1-u)^n\,\psi(t)\,dt$$

oder weil $\psi(t)\,dt = du$, wenn wegen der Grenzen in Bezug auf t gesetzt wird

$$\int_0^{r-\delta}\psi(t)\,dt = u', \qquad \int_0^{r+\delta}\psi(t)\,dt = u''$$

so wird die Wahrscheinlichkeit, dafs der mittelste Werth zwischen $r-\delta$ und $r+\delta$ liegt

$$=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n+1)}{(1\cdot 2\cdot 3\ldots n)^2}\int_{u'}^{u''} u^n(1-u)^n\,du.$$

Je gröfser die Anzahl der Beobachtungen ist, desto enger werden die Grenzen, zwischen welchen t mit gleicher Wahrscheinlichkeit liegen wird. Sind deshalb die Beobachtungen zahlreich genug, so wird, wenn man u' und u'' nach dem Taylor'schen Satze entwickelt, es erlaubt sein, nur die erste Potenz von δ zu berücksichtigen. Dadurch wird

$$u' = \int_0^r \psi t\,dt - \delta\psi(r)\ldots = \tfrac{1}{2} - \delta\psi(r)$$

und ebenso

$$u'' = \tfrac{1}{2} + \delta\psi(r)$$

Sowohl diese Form, als auch die Verbindung von u und $1-u$ in dem Integral, zeigt an, dafs man eine noch bequemere Form erhalten wird, wenn man für u eine andere Variable einführt; am besten durch die Gleichung

$$u = \tfrac{1}{2} + \frac{s}{2\sqrt{n}} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

folglich

$$1-u=\tfrac{1}{2}-\frac{s}{2\sqrt{n}}=\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

wobei die Grenzen in Bezug auf s gefunden werden durch

$$\delta\psi(r)=\frac{s}{2\sqrt{n}}.$$

Hiernach wird das Integral

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n+1)}{(1\cdot 2\cdot 3\ldots n)^2}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}\sqrt{n}}\int_{-2\delta\sqrt{n}\psi(r)}^{+2\delta\sqrt{n}\psi(r)}\left(1-\frac{s^2}{n}\right)^n ds$$

oder weil s im Differential nur gerade Potenzen enthält

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n+1)}{(1\cdot 2\cdot 3\ldots n)^2}\cdot\frac{1}{2^{2n}\sqrt{n}}\int_{0}^{2\delta\sqrt{n}\psi(r)}\left(1-\frac{s^2}{n}\right)^n ds$$

Sei nun $\delta\sqrt{n}$ eine endliche Gröſse $=\gamma$, also die Grenze δ in eben dem Maaſse abnehmend wie $\sqrt{n}$ zunimmt, so bleibt s innerhalb der angenommenen Grenze endlich, wie sehr auch n zunimmt. Bei einem groſsen n wird man aber auch nach der Entwickelung der Logarithmen in Euler's *Introductio* setzen können:

$$\left(1-\frac{s^2}{n}\right)^n=e^{-s^2}$$

und

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n}{(1\cdot 2\cdot 3\ldots n)^2}=\frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}}$$

nach Euler *Calc. Diff.* P. II. Cap. VI. § 160-162, als dem Grenzwerthe, welchem es sich beständig mit wachsendem n nähert, so daſs der Ausdruck wird

$$\frac{2n+1}{n\sqrt{\pi}}\int_{0}^{2\delta\sqrt{n}\psi(r)}e^{-s^2}ds$$

wofür man unbedenklich schreiben kann

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{2\delta\sqrt{n}\psi(r)}e^{-s^2}ds$$

als den Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dafs bei zahlreichen Beobachtungen, der mittelste Fehler, wenn alle der Gröfse nach geordnet sind, liegt

$$\text{zwischen } r-\delta \text{ und } r+\delta$$

Diese Wahrscheinlichkeit wird folglich $\frac{1}{2}$, oder es sind die wahrscheinlichen Grenzen gegeben durch

$$2\delta\sqrt{n}\,\psi(r)=\varrho$$

d. h.

$$\delta=\frac{\varrho}{2\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\psi(r)}$$

Für das oben angenommene Gesetz der Fehler

$$\psi(\Delta)=2\varphi(\Delta)=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}e^{-hh\Delta\Delta}$$

werden also die wahrscheinlichen Grenzen von r

$$r\pm\frac{\varrho\, e^{hhrr}\sqrt{\pi}}{4\sqrt{n}\cdot h}$$

oder wenn man statt $2n+1$ die Anzahl der Beobachtungen m nennt, und die Gleichung

$$hr=\varrho$$

benutzt:

$$r\left\{1\pm\frac{e^{\varrho\varrho}\sqrt{\pi}}{\sqrt{(8m)}}\right\}$$

Der numerische Werth von $e^{\varrho\varrho}$ ist 1,2554176, womit der Ausdruck wird:

$$r\left\{1\pm\frac{0{,}786716}{\sqrt{m}}\right\}$$

Diese Art der Bestimmung von r ist folglich noch ungenauer als irgend eine der früheren bis zur Summe der 6ten Potenzen. Auf das obige Beispiel angewendet würde:

$$r=5''{,}914\pm0''{,}864$$

oder die Grenzen

$$5''{,}050 \text{ und } 6''{,}778.$$

Schon bei den bisherigen Beweisen war es häufig nothwendig, von der Wahrscheinlichkeit eines Werthes, auf diejenige eines anderen Werthes zu schliefsen, der von dem ersten auf eine einfache Weise abhing. Des folgenden wegen wird es nothwendig die allgemeine Aufgabe zu lösen: Wenn man die wahrscheinlichsten Werthe der von einander unabhängig bestimmten Gröfsen x, x', x'' u. s. w. kennt, und auch die verschiedenen Grenzen, innerhalb welcher diese wahrscheinlichsten Werthe liegen werden, wenn irgend eine bestimmte Wahrscheinlichkeit ihnen zugeschrieben werden soll, den wahrscheinlichsten Werth irgend welcher Function dieser Variabeln

$$X = f(x, x', x'' \ldots)$$

zu bestimmen, und die Grenzen, innerhalb welcher X dieselbe bestimmte Wahrscheinlichkeit hat. Da man, wenn der Werth von r bei einer durch Beobachtungen ermittelten Gröfse bekannt ist, sogleich h, ε_2 und alle andern Functionen der Fehler, so wie das vollständige Gesetz derselben $\varphi(\Delta)$ finden kann, so läfst die Aufgabe sich auch so fassen: Es sind unabhängig von einander für $x, x', x'' \ldots$ die wahrscheinlichsten Werthe $a, a', a'' \ldots$ gefunden worden, mit den wahrscheinlichen Fehlern $r, r', r'' \ldots$, man soll den wahrscheinlichsten Werth von $X = f(x, x', x'' \ldots)$ bestimmen, und seinen wahrscheinlichen Fehler.

Um hier von dem einfachsten Falle anzufangen, sei zuerst X eine lineare Function einer Unbekannten

$$X = \alpha x$$

In allen den Fällen, in welchen $x = a$ wird $X = \alpha a$, folglich wird auch dieses der wahrscheinlichste Werth von X sein. Eben so sind der Zahl nach die Fälle, in welchen x zwischen $a - r$ und $a + r$ liegt, gleich den Fällen, in welchen X zwischen $\alpha a - \alpha r$ und $\alpha a + \alpha r$ liegt, oder es ist

$$X = \alpha a \pm \alpha r$$

wo das letzte Glied den wahrscheinlichen Fehler von X bezeichnet.

Sei nun zweitens X die einfache lineare Function zweier Variabeln

$$X = x + x'.$$

Des bequemeren Ausdrucks wegen führe man statt der wahrscheinlichen Fehler das Gewicht der Werthe a und a' ein. Wenn als gemeinschaftliches Maafs eine Beobachtung genommen wird, deren wahrscheinlicher Fehler w ist, so wird das Gewicht von a wegen seines wahrscheinlichen Fehlers r sein

$$p = \frac{w^2}{r^2}$$

und eben so für a'

$$p' = \frac{w^2}{r^2}.$$

Hiernach ist, wenn h zu w gehört, die Wahrscheinlichkeit irgend welchen Werthes für x

$$= \frac{h\sqrt{p}}{\sqrt{\pi}} e^{-hhp(x-a)^2}$$

und für x'

$$= \frac{h\sqrt{p'}}{\sqrt{\pi}} e^{-hhp'(x'-a')^2}$$

die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens zweier beliebigen Werthe wird also sein

$$\frac{h^2\sqrt{pp'}}{\pi} e^{-hh\left\{p(x-a)^2+p'(x'-a')^2\right\}}$$

und für das Zusammentreffen zweier Werthe x und x', welche der Gleichung

$$x + x' = X$$

genug thun, wo X einen beliebigen aber bestimmten Werth bedeutet, wird sie gefunden, wenn man eine der Gröfsen x oder x', als eine Function der andern und der Gröfse X betrachtet, und den dadurch erhaltenen Werth substituirt. Hieraus wird die Wahrscheinlichkeit, dafs irgend ein Werth x, bei seinem Zusammentreffen mit einem Werthe x', das Resultat X giebt:

$$W = \frac{h^2\sqrt{pp'}}{\pi} e^{-hh\left\{p(x-a)^2+p'(X-x-a')^2\right\}}$$

Nimmt man also die Summe aller möglichen W, oder das $\int W dx$, innerhalb der Grenzen, in welchen ein Werth von x dazu wirken kann, also hier innerhalb $-\infty$ und $+\infty$, so wird man alle Fälle umfafst haben, in welchen X erhalten werden kann, oder die Wahrscheinlichkeit von X bestimmt haben. Um die Integration zu erleichtern, gebe man dem Exponenten die folgende Gestalt

$$-hh\left\{(p+p')\left(x-\frac{p'X+pa-p'a'}{p+p'}\right)^2+\frac{pp'}{p+p'}(X-a-a')^2\right\}$$

die sogleich sich ergiebt, wenn man alle Glieder, die x enthalten, in eine quadratische Form vereinigt. Sei nun zur augenblicklichen Abkürzung

$$x-\frac{p'X+pa-p'a'}{p+p'}=x_0$$

$$X-a-a'=X_0$$

so wird

$$\int_{-\infty}^{+\infty}Wdx=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\left(\frac{pp'}{p+p'}\right)}\cdot e^{-hh\frac{pp'}{p+p'}X_0^2}\times\frac{h\sqrt{(p+p')}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-hh(p+p')x_0^2}dx_0;$$

der Werth des Factors, welcher das Integral enthält, wird nach (5) gleich 1, folglich ist die Wahrscheinlichkeit von X

$$=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\left(\frac{pp'}{p+p'}\right)}\cdot e^{-hh\frac{pp'}{p+p'}(X-a-a')^2}$$

ein Maximum, wenn

$$X=a+a'$$

und das Gewicht dieser Bestimmung wird wie die Form unmittelbar angiebt

$$P=\frac{pp'}{p+p'}$$

folglich der wahrscheinliche Fehler

$$=\frac{w}{\sqrt{P}}=w\sqrt{\frac{p+p'}{pp'}}=\sqrt{\left(\frac{w^2}{p'}+\frac{w^2}{p}\right)}$$

$$=\sqrt{(r^2+r'^2)}$$

Der einfache hierdurch gefundene Satz heifst also: Wenn die wahrscheinlichsten (unabhängig gefundenen) Werthe von x und x' durch a und a', mit den wahrscheinlichen Fehlern r und r' gegeben sind, so ist der wahrscheinlichste Werth von $X=x+x'$

$$= a + a'$$

und der wahrscheinliche Fehler dieses Werthes

$$= \sqrt{(r^2 + r'^2)}$$

In Verbindung mit dem eben vorhergehenden Satze erhält man folglich für jede lineare Function

$$\left.\begin{array}{l} X = \alpha x + \beta x' + \gamma x'' \ldots . \\ \text{den wahrscheinlichsten Werth} \\ = \alpha a + \beta a' + \gamma a'' \ldots . \\ \text{mit dem wahrscheinlichen Fehler} \\ = \sqrt{(\alpha^2 r^2 + \beta^2 r'^2 + \gamma^2 r''^2 \ldots .)} \end{array}\right\} \ldots\ldots (20)$$

weil vermöge der Form für zwei unbekannte Gröfsen, die Form für beliebig viele sich sogleich ergiebt, wenn man bei dreien, zuerst zwei unter sich und ihr Resultat mit der dritten verbindet, bei vieren, drei unter sich und ihr Resultat mit der vierten verbindet u. s. w.

Auf die nämliche Weise würde sich auch die allgemeine Aufgabe lösen lassen, wenn die Integrationen auszuführen wären. Für

$$X = f(x, x', x'' \ldots .) \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

wird die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens beliebiger Werthe der μ Variabeln

$$= \frac{h^\mu \sqrt{(p \cdot p' \cdot p'' \ldots)}}{\pi^{\frac{1}{2}\mu}} e^{-hh(p(x-a)^2 + p'(x'-a')^2 + p''(x''-a'')^2 \ldots)}$$

Sollen hier nur die Fälle betrachtet werden, in welchen ein bestimmter Werth für X gefunden wird, so drücke man eine der Variabeln ..x, als Function von X und der übrigen aus. Substituirt man diesen Werth in den Exponenten, und nimmt die Summen oder Integrale innerhalb aller möglichen Grenzen für x', x''..., so wird man die Wahrscheinlichkeit des Werthes X erhalten, und daraus den wahrscheinlichsten Werth und seine Grenzen bestimmen können. Hiezu ist aber offenbar die Kenntnifs von f nöthig, und wenn diese Function nicht linear ist, so wird in den meisten Fällen die vollständige Integration unausführbar sein. Man kann indessen unter der Voraussetzung, dafs die Grenzen für die einzelnen Variabeln schon so enge sind, dafs man die höheren Potenzen der wahrscheinlichen Fehler vernachlässigen kann, einen Näherungswerth für X und seine Grenzen finden, der in der Praxis stets ausreichen wird.

Wählt man für beliebige Werthe von x, x', x'' ... die Form $a + \triangle x$, $a' + \triangle x'$, $a'' + \triangle x''$, so wird wenn

$$V = f(a, a', a'' \ldots.) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

der allgemeine Ausdruck für X mit Vernachlässigung der Potenzen von $\triangle x$, $\triangle x'$, $\triangle x''$, welche die erste Potenz überschreiten, sein:

$$X = V + \left(\frac{dV}{da}\right)\triangle x + \left(\frac{dV}{da'}\right)\triangle x' + \left(\frac{dV}{da''}\right)\triangle x'' \ldots$$

oder

$$X - V = \left(\frac{dV}{da}\right)\triangle x + \left(\frac{dV}{da'}\right)\triangle x' + \left(\frac{dV}{da''}\right)\triangle x'' \ldots$$

und die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens dieser Werthe wird

$$= \frac{h^{\mu}\sqrt{p \cdot p' \cdot p'' \ldots}}{\pi^{\frac{1}{2}\mu}} e^{-hh(p\triangle x^2 + p'\triangle x'^2 + p''\triangle x''^2 \ldots)}$$

Der wahrscheinlichste Werth von $X - V$ und seine Grenzen, werden unmittelbar durch den wahrscheinlichsten Werth von X und seine Grenzen bestimmt und umgekehrt, weil beide Gröfsen, $X - V$ und X, nur um eine Constante verschieden sind; eben so werden auch die wahrscheinlichen Fehler von $\triangle x$, $\triangle x'$, $\triangle x''$ u. s. w. die gegebenen Gröfsen r, r', r'' sein, und der wahrscheinlichste Werth von $\triangle x$, $\triangle x'$, $\triangle x''$ u. s. w. wird Null sein, vermöge der Gleichungen $x = a + \triangle x$ u. s. w. Hieraus folgt nach (20) der wahrscheinlichste Werth von $X - V$

$$X - V = 0$$

und der wahrscheinliche Fehler von $X - V$

$$F = \sqrt{\left\{\left(\frac{dV}{da}\right)^2 r^2 + \left(\frac{dV}{da'}\right)^2 r'^2 + \left(\frac{dV}{da''}\right)^2 r''^2 + \ldots\right\}} \quad (23)$$

oder der wahrscheinlichste Werth von X ist V und der wahrscheinliche Fehler von dieser Bestimmung ist gleich dem eben bestimmten F, eine Auflösung, die für lineare Functionen völlig strenge, für andere höhere nur genähert ist.

Uebrigens ist hievon verschieden der Fall, in welchem man für eine und dieselbe Unbekannte .. x .., aus verschiedenen Untersuchungen, die Werthe a, a', a'' ... mit den wahrscheinlichen Fehlern r, r', r'' ..., oder den Gewichten p, p', p'' ... gefunden hätte, und den wahrscheinlichsten Werth aus allen zusammen finden sollte. Die Definition des Begriffes Gewicht, nach welcher a, a', a'', respective als aus p, p', p'' gleich guten Beobachtungen gefunden, betrachtet werden müssen, giebt hier vermöge des arithmetischen Mittels den wahrscheinlichsten Werth von x

$$x = \frac{ap + a'p' + a''p'' \ldots}{p + p' + p'' \ldots}$$

mit dem Gewichte

$$p + p' + p'' \ldots$$

oder was dasselbe ist den wahrscheinlichsten Werth

$$x = \frac{\frac{a}{r^2} + \frac{a'}{r'^2} + \frac{a''}{r''^2} \ldots}{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r''^2} \ldots}$$

mit dem wahrscheinlichen Fehler ...... (24)

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} + \frac{1}{r''^2} \ldots\right)}}$$

$$\int_0^t \frac{2\, e^{-tt}\, dt}{\sqrt{\pi}} = \Theta(t)$$

t	$\Theta(t)$	Δ	Δ²	t	$\Theta(t)$	Δ	Δ²
0,00	0,00000 00	1128 33	0	0,30	0,32862 67	1028 14	6 19
0,01	01128 33	1128 11	22	0,31	33890 81	1021 78	6 36
0,02	02256 44	1127 66	45	0,32	34912 59	1015 26	6 52
0,03	03384 10	1126 99	67	0,33	35927 85	1008 59	6 67
0,04	04511 09	1126 09	90	0,34	36936 44	1001 75	6 84
0,05	05637 18	1124 97	1 12	0,35	37938 19	994 77	6 98
0,06	06762 15	1123 62	1 35	0,36	38932 96	987 63	7 14
0,07	07885 77	1122 04	1 58	0,37	39920 59	980 34	7 29
0,08	09007 81	1120 25	1 79	0,38	40900 93	972 92	7 42
0,09	10128 06	1118 24	2 01	0,39	41873 85	965 37	7 55
0,10	0,11246 30	1116 00	2 24	0,40	0,42839 22	957 68	7 69
0,11	12362 30	1113 54	2 46	0,41	43796 90	949 86	7 82
0,12	13475 84	1110 87	2 67	0,42	44746 76	941 91	7 95
0,13	14586 71	1107 99	2 88	0,43	45688 67	933 84	8 07
0,14	15694 70	1104 89	3 10	0,44	46622 51	925 67	8 17
0,15	16799 59	1101 58	3 31	0,45	47548 18	917 37	8 30
0,16	17901 17	1098 06	3 52	0,46	48465 55	908 97	8 40
0,17	18999 23	1094 34	3 72	0,47	49374 52	900 46	8 53
0,18	20093 57	1090 41	3 93	0,48	50274 98	891 85	8 61
0,19	21183 98	1086 27	4 14	0,49	51166 83	883 16	8 69
0,20	0,22270 25	1081 93	4 34	0,50	0,52049 99	874 38	8 78
0,21	23352 18	1077 40	4 53	0,51	52924 37	865 50	8 88
0,22	24429 58	1072 67	4 73	0,52	53789 87	856 54	8 96
0,23	25502 25	1067 75	4 92	0,53	54646 41	847 51	9 03
0,24	26570 00	1062 63	5 12	0,54	55493 92	838 41	9 10
0,25	27632 63	1057 34	5 29	0,55	56332 33	829 24	9 17
0,26	28689 97	1051 85	5 49	0,56	57161 57	820 01	9 23
0,27	29741 82	1046 18	5 67	0,57	57981 58	810 71	9 30
0,28	30788 00	1040 34	5 84	0,58	58792 29	801 36	9 35
0,29	31828 34	1034 33	6 01	0,59	59593 65	791 96	9 40
0,30	0,32862 67		6 19	0,60	0,60385 61		9 45

$$\int_0^t \frac{2\,e^{-tt}\,dt}{\sqrt{\pi}} = \Theta(t)$$

t	$\Theta(t)$			t	$\Theta(t)$		
0,60	0,60385 61	782 51	9 45	0,90	0,79690 82	497 46	9 04
0,61	61168 12	773 02	9 49	0,91	80188 28	488 49	8 97
0,62	61941 14	763 49	9 53	0,92	80676 77	479 58	8 91
0,63	62704 63	753 94	9 55	0,93	81156 35	470 75	8 83
0,64	63458 57	744 35	9 59	0,94	81627 10	461 98	8 77
0,65	64202 92	734 73	9 62	0,95	82089 08	453 28	8 70
0,66	64937 65	725 10	9 63	0,96	82542 36	444 67	8 61
0,67	65662 75	715 45	9 65	0,97	82987 03	436 12	8 55
0,68	66378 20	705 79	9 66	0,98	83423 15	427 66	8 46
0,69	67083 99		9 68	0,99	83850 81		8 39
		696 11				419 27	
0,70	0,67780 10	686 44	9 67	1,00	0,84270 08	410 97	8 30
0,71	68466 54	676 76	9 68	1,01	84681 05	402 75	8 22
0,72	69143 30	667 08	9 68	1,02	85083 80	394 62	8 13
0,73	69810 38	657 42	9 66	1,03	85478 42	386 57	8 05
0,74	70467 80	647 76	9 66	1,04	85864 99	378 61	7 96
0,75	71115 56	638 11	9 65	1,05	86243 60	370 75	7 86
0,76	71753 67	628 49	9 62	1,06	86614 35	362 97	7 77
0,77	72382 16	618 88	9 61	1,07	86977 32	355 29	7 68
0,78	73001 04	609 31	9 57	1,08	87332 61	347 69	7 60
0,79	73610 35		9 56	1,09	87680 30		7 49
		599 75				340 20	
0,80	0,74210 10	590 23	9 52	1,10	0,88020 50	332 80	7 40
0,81	74800 33	580 75	9 48	1,11	88353 30	325 49	7 31
0,82	75381 08	571 30	9 45	1,12	88678 79	318 28	7 21
0,83	75952 38	561 89	9 41	1,13	88997 07	311 16	7 12
0,84	76514 27	552 53	9 36	1,14	89308 23	304 15	7 01
0,85	77066 80	543 22	9 31	1,15	89612 38	297 24	6 91
0,86	77610 02	533 96	9 26	1,16	89909 62	290 42	6 82
0,87	78143 98	524 75	9 21	1,17	90200 04	283 70	6 72
0,88	78668 73	515 59	9 16	1,18	90483 74	277 09	6 61
0,89	79184 32		9 09	1,19	90760 83		6 52
		506 50				270 57	
0,90	0,79690 82		9 04	1,20	0,91031 40		6 42

$$\int_0^t \frac{2e^{-tt}\,dt}{\sqrt{\pi}} = \Theta(t)$$

t	$\Theta(t)$			t	$\Theta(t)$		
1,20	0,91031 40	264 15	6 42	1,50	0,96610 52	117 16	3 57
1,21	91295 55	257 84	6 31	1,51	96727 68	113 67	3 49
1,22	91553 39	251 62	6 22	1,52	96841 35	110 27	3 40
1,23	91805 01	245 51	6 11	1,53	96951 62	106 95	3 32
1,24	92050 52	239 49	6 02	1,54	97058 57	103 70	3 25
1,25	92290 01	233 58	5 91	1,55	97162 27	100 54	3 16
1,26	92523 59	227 77	5 81	1,56	97262 81	97 45	3 09
1,27	92751 36	222 06	5 71	1,57	97360 26	94 44	3 01
1,28	92973 42	216 45	5 61	1,58	97454 70	91 50	2 94
1,29	93189 87	210 93	5 52	1,59	97546 20	88 64	2 86
1,30	0,93400 80	205 52	5 41	1,60	0,97634 84	85 85	2 79
1,31	93606 32	200 20	5 32	1,61	97720 69	83 12	2 73
1,32	93806 52	194 98	5 22	1,62	97803 81	80 48	2 64
1,33	94001 50	189 87	5 11	1,63	97884 29	77 89	2 59
1,34	94191 37	184 85	5 02	1,64	97962 18	75 38	2 51
1,35	94376 22	179 92	4 93	1,65	98037 56	72 93	2 45
1,36	94556 14	175 10	4 82	1,66	98110 49	70 55	2 38
1,37	94731 24	170 36	4 74	1,67	98181 04	68 24	2 31
1,38	94901 60	165 73	4 63	1,68	98249 28	65 98	2 26
1,39	95067 33	161 18	4 55	1,69	98315 26	63 78	2 20
1,40	0,95228 51	156 73	4 45	1,70	0,98379 04	61 66	2 12
1,41	95385 24	152 38	4 35	1,71	98440 70	59 58	2 08
1,42	95537 62	148 11	4 27	1,72	98500 28	57 57	2 01
1,43	95685 73	143 93	4 18	1,73	98557 85	55 61	1 96
1,44	95829 66	139 84	4 09	1,74	98613 46	53 71	1 90
1,45	95969 50	135 85	3 99	1,75	98667 17	51 86	1 85
1,46	96105 35	131 94	3 91	1,76	98719 03	50 07	1 79
1,47	96237 29	128 12	3 82	1,77	98769 10	48 32	1 75
1,48	96365 41	124 38	3 74	1,78	98817 42	46 64	1 68
1,49	96489 79	120 73	3 65	1,79	98864 06	44 99	1 65
1,50	0,96610 52		3 57	1,80	0,98909 05		1 59

$$\int_0^t \frac{2e^{-tt}\,dt}{\sqrt{\pi}} = \Theta(t)$$

t	$\Theta(t)$			t	$\Theta(t)$		
1,80	0,98909 05	43 40	1 59	1,90	0,99279 04	29 95	1 16
1,81	98952 45	41 86	1 54	1,91	99308 99	28 83	1 12
1,82	98994 31	40 36	1 50	1,92	99337 82	27 75	1 08
1,83	99034 67	38 92	1 44	1,93	99365 57	26 69	1 06
1,84	99073 59	37 51	1 41	1,94	99392 26	25 68	1 01
1,85	99111 10	36 15	1 36	1,95	99417 94	24 69	99
1,86	99147 25	34 82	1 33	1,96	99442 63	23 74	95
1,87	99182 07	33 55	1 27	1,97	99466 37	22 83	91
1,88	99215 62	32 31	1 24	1,98	99489 20	21 94	89
1,89	99247 93	31 11	1 20	1,99	99511 14	21 09	85
1,90	0,99279 04		1 16	2,00	0,99532 23		82

$$\int_0^{\varrho\frac{\Delta}{r}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-tt} dt = \Theta\left(\varrho \frac{\Delta}{r}\right) \qquad \varrho = 0,4769360$$

$\frac{\Delta}{r}$	$\Theta\left(\varrho\frac{\Delta}{r}\right)$		$\frac{\Delta}{r}$	$\Theta\left(\varrho\frac{\Delta}{r}\right)$		$\frac{\Delta}{r}$	$\Theta\left(\varrho\frac{\Delta}{r}\right)$	
0,00	0,00000	538	0,30	0,16035	527	0,60	0,31430	495
0,01	00538	538	0,31	16562	526	0,61	31925	494
0,02	01076	538	0,32	17088	526	0,62	32419	492
0,03	01614	538	0,33	17614	524	0,63	32911	491
0,04	02152	538	0,34	18138	524	0,64	33402	490
0,05	02690	538	0,35	18662	523	0,65	33892	488
0,06	03228	538	0,36	19185	522	0,66	34380	486
0,07	03766	537	0,37	19707	522	0,67	34866	486
0,08	04303	537	0,38	20229	520	0,68	35352	483
0,09	04840	538	0,39	20749	519	0,69	35835	482
0,10	0,05378	536	0,40	0,21268	519	0,70	0,36317	481
0,11	05914	537	0,41	21787	517	0,71	36798	479
0,12	06451	536	0,42	22304	517	0,72	37277	478
0,13	06987	536	0,43	22821	515	0,73	37755	476
0,14	07523	536	0,44	23336	515	0,74	38231	474
0,15	08059	535	0,45	23851	513	0,75	38705	473
0,16	08594	535	0,46	24364	512	0,76	39178	471
0,17	09129	534	0,47	24876	512	0,77	39649	469
0,18	09663	534	0,48	25388	510	0,78	40118	468
0,19	10197	534	0,49	25898	509	0,79	40586	466
0,20	0,10731	533	0,50	0,26407	508	0,80	0,41052	465
0,21	11264	532	0,51	26915	506	0,81	41517	462
0,22	11796	532	0,52	27421	506	0,82	41979	461
0,23	12328	532	0,53	27927	504	0,83	42440	459
0,24	12860	531	0,54	28431	503	0,84	42899	458
0,25	13391	530	0,55	28934	502	0,85	43357	456
0,26	13921	530	0,56	29436	500	0,86	43813	454
0,27	14451	529	0,57	29936	499	0,87	44267	452
0,28	14980	528	0,58	30435	498	0,88	44719	450
0,29	15508	527	0,59	30933	497	0,89	45169	449
0,30	0,16035		0,60	0,31430		0,90	0,45618	

$$\int_0^{\varrho\frac{\Delta}{r}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-tt}\,dt = \Theta\left(\varrho\frac{\Delta}{r}\right) \qquad \varrho = 0{,}4769360$$

$\frac{\Delta}{r}$	$\Theta\left(\varrho\frac{\Delta}{r}\right)$		$\frac{\Delta}{r}$	$\Theta\left(\varrho\frac{\Delta}{r}\right)$		$\frac{\Delta}{r}$	$\Theta\left(\varrho\frac{\Delta}{r}\right)$	
0,90	0,45618	446	1,20	0,58171	387	1,50	0,68833	322
0,91	46064	445	1,21	58558	384	1,51	69155	319
0,92	46509	443	1,22	58942	383	1,52	69474	317
0,93	46952	441	1,23	59325	380	1,53	69791	315
0,94	47393	439	1,24	59705	378	1,54	70106	313
0,95	47832	438	1,25	60083	377	1,55	70419	310
0,96	48270	435	1,26	60460	373	1,56	70729	309
0,97	48605	434	1,27	60833	372	1,57	71038	306
0,98	49139	431	1,28	61205	370	1,58	71344	304
0,99	49570	430	1,29	61575	367	1,59	71648	301
1,00	0,50000	428	1,30	0,61942	366	1,60	0,71949	300
1,01	50428	425	1,31	62308	363	1,61	72249	297
1,02	50853	424	1,32	62671	361	1,62	72546	295
1,03	51277	422	1,33	63032	359	1,63	72841	293
1,04	51699	420	1,34	63391	356	1,64	73134	291
1,05	52119	418	1,35	63747	355	1,65	73425	289
1,06	52537	415	1,36	64102	352	1,66	73714	286
1,07	52952	414	1,37	64454	350	1,67	74000	285
1,08	53366	412	1,38	64804	348	1,68	74285	282
1,09	53778	410	1,39	65152	346	1,69	74567	280
1,10	0,54188	407	1,40	0,65498	343	1,70	0,74847	277
1,11	54595	406	1,41	65841	341	1,71	75124	276
1,12	55001	403	1,42	66182	339	1,72	75400	274
1,13	55404	402	1,43	66521	337	1,73	75674	271
1,14	55806	399	1,44	66858	335	1,74	75945	269
1,15	56205	397	1,45	67193	333	1,75	76214	267
1,16	56602	396	1,46	67526	330	1,76	76481	265
1,17	56998	393	1,47	67856	328	1,77	76746	263
1,18	57391	391	1,48	68184	326	1,78	77009	261
1,19	57782	389	1,49	68510	323	1,79	77270	258
1,20	0,58171		1,50	0,68833		1,80	0,77528	

$$\int_0^{\varrho\frac{\Delta}{r}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-tt}\,dt = \Theta\left(\varrho\frac{\Delta}{r}\right) \qquad \varrho = 0{,}4769360$$

$\frac{\Delta}{r}$	$\Theta\left(\varrho\frac{\Delta}{r}\right)$		$\frac{\Delta}{r}$	$\Theta\left(\varrho\frac{\Delta}{r}\right)$		$\frac{\Delta}{r}$	$\Theta\left(\varrho\frac{\Delta}{r}\right)$	
1,80	0,77528	257	2,10	0,84335	196	2,40	0,89450	145
1,81	77785	254	2,11	84531	195	2,41	89595	143
1,82	78039	252	2,12	84726	193	2,42	89738	141
1,83	78291	251	2,13	84919	100	2,43	89879	140
1,84	78542	248	2,14	85109	189	2,44	90019	138
1,85	78790	246	2,15	85298	188	2,45	90157	136
1,86	79036	244	2,16	85486	185	2,46	90293	135
1,87	79280	242	2,17	85671	183	2,47	90428	134
1,88	79522	239	2,18	85854	182	2,48	90562	132
1,89	79761	238	2,19	86036	180	2,49	90694	131
1,90	0,79999	236	2,20	0,86216	178	2,50	0,90825	129
1,91	80235	234	2,21	86394	176	2,51	90954	128
1,92	80469	231	2,22	86570	175	2,52	91082	126
1,93	80700	230	2,23	86745	172	2,53	91208	124
1,94	80930	228	2,24	86917	171	2,54	91332	124
1,95	81158	225	2,25	87088	170	2,55	91456	122
1,96	81383	224	2,26	87258	167	2,56	91578	120
1,97	81607	221	2,27	87425	166	2,57	91698	119
1,98	81828	220	2,28	87591	164	2,58	91817	118
1,99	82048	218	2,29	87755	163	2,59	91935	116
2,00	0,82266	215	2,30	0,87918	160	2,60	0,92051	115
2,01	82481	214	2,31	88078	159	2,61	92166	114
2,02	82695	212	2,32	88237	158	2,62	92280	112
2,03	82907	210	2,33	88395	155	2,63	92392	111
2,04	83117	207	2,34	88550	155	2,64	92503	110
2,05	83324	206	2,35	88705	152	2,65	92613	108
2,06	83530	204	2,36	88857	151	2,66	92721	107
2,07	83734	202	2,37	89008	149	2,67	92828	106
2,08	83936	201	2,38	89157	147	2,68	92934	104
2,09	84137	198	2,39	89304	146	2,69	93038	103
2,10	0,84335		2,40	0,89450		2,70	0,93141	

$$\int_0^{\varrho\frac{\Delta}{r}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-tt}\,dt = \Theta\left(\varrho\frac{\Delta}{r}\right) \qquad \varrho = 0{,}4769360$$

$\frac{\Delta}{r}$	$\Theta\left(\varrho\frac{\Delta}{r}\right)$		$\frac{\Delta}{r}$	$\Theta\left(\varrho\frac{\Delta}{r}\right)$		$\frac{\Delta}{r}$	$\Theta\left(\varrho\frac{\Delta}{r}\right)$	
2,70	0,93141	102	3,00	0,95698	69	3,30	0,97397	
2,71	93243	101	3,01	95767	68	3,31	97442	44
2,72	93344	99	3,02	95835	67	3,32	97486	44
2,73	93443	98	3,03	95902	66	3,33	97530	43
2,74	93541	97	3,04	95968	65	3,34	97573	42
2,75	93638	96	3,05	96033	65	3,35	97615	42
2,76	93734	94	3,06	96098	63	3,36	97657	41
2,77	93828	94	3,07	96161	63	3,37	97698	40
2,78	93922	92	3,08	96224	62	3,38	97738	40
2,79	94014		3,09	96286		3,39	97778	
		91			60			39
2,80	0,94105	90	3,10	0,96346	60	3,40	0,97817	359
2,81	94195	89	3,11	96406	60	3,50	98176	306
2,82	94284	87	3,12	96466	58	3,60	98482	261
2,83	94371	87	3,13	96524	58	3,70	98743	219
2,84	94458	85	3,14	96582	56	3,80	98962	185
2,85	94543	84	3,15	96638	56	3,90	99147	155
2,86	94627	84	3,16	96694	55	4,00	99302	129
2,87	94711	82	3,17	96749	55	4,10	99431	108
2,88	94793	81	3,18	96804	53	4,20	99539	88
2,89	94874		3,19	96857		4,30	99627	
		80			53			73
2,90	0,94954	79	3,20	0,96910	52	4,40	0,99700	60
2,91	95033	78	3,21	96962	51	4,50	99760	48
2,92	95111	76	3,22	97013	51	4,60	99808	40
2,93	95187	76	3,23	97064	50	4,70	99848	31
2,94	95263	75	3,24	97114	49	4,80	99879	26
2,95	95338	74	3,25	97163	48	4,90	99905	21
2,96	95412	73	3,26	97211	48	5,00	99926	
2,97	95485	72	3,27	97259	47			
2,98	95557	71	3,28	97306	46			
2,99	95628		3,29	97352				
		70			45			
3,00	0,95698		3,30	0,97397				

II.

Die allgemeinen vorstehend abgeleiteten Sätze reichen vollkommen hin, um die Aufgabe: Bei irgend welcher Anzahl von unbekannten Gröſsen die wahrscheinlichsten Werthe derselben aus gegebenen Beobachtungen zu bestimmen, in ihrer gröſsten Allgemeinheit zu lösen; so daſs es völlig unnöthig sein würde, auch jetzt noch stufenweise fortzuschreiten, und die speciellen Fälle zweier, dreier, u s. w. unbekannter Gröſsen besonders zu untersuchen.

Gewöhnlich unterscheidet man zwei Klassen von Aufgaben. Es können nämlich entweder die gesuchten unbekannten Werthe völlig unabhängig von einander sein, so daſs jeder Werth, den man für eine unbekannte Gröſse als den wahrscheinlichsten finden sollte, sich mit jedem Werthe aller übrigen vereinigen läſst. Dieses ist z. B. der Fall bei den Planeten-Elementen, bei welchen a priori kein Hinderniſs vorhanden ist, gegen die Verbindung einer beliebigen Neigung mit einem beliebigen Knoten, oder einer beliebigen Epoche und Länge des Perihels, sobald nur die Beobachtungen nicht widersprechen. Es können aber auch bestimmte Bedingungen vorhanden sein, welchen die anzunehmenden Werthe jedenfalls entsprechen müssen, so daſs nicht mehr alle Werthe, welche als die wahrscheinlichsten sich aus den Beobachtungen ergeben sollten, gleichzeitig stattfinden können. So wird z. B. in der Geodäsie nur ein solches Dreiecksystem möglich sein, welches die bekannten Bedingungen für die Summe der drei Winkel in jedem Dreiecke, oder sämmtlicher Winkel in einem Polygone, und noch einige andere, auf die Figur des Netzes als ein Ganzes betrachtet sich beziehende, erfüllt. Sind deswegen mehr Winkel als unumgänglich erforderlich waren, beobachtet, so wird man nicht mehr die wahrscheinlichsten Beobachtungswerthe für jeden einzelnen unverändert beibehalten dürfen, sondern diese so modificiren, dafs sie den erwähnten Bedingungen Genüge leisten. In gewissem Sinne kann man auch die letzte Aufgabe im Jahrbuche 1834*), deren Auflösung in (24) enthalten ist, hierher rechnen. Sie enthält die Bedingung, dafs ein und derselbe Werth aus allen Gruppen als der wahrscheinlichste bestimmt werden soll, wenn die wahrscheinlichste Gröfse desselben zufolge jeder einzelnen gegeben ist.

Theoretisch betrachtet sind beide Klassen nicht von einander unterschieden. Jede Bedingung nämlich zwischen den endlich anzunehmenden Werthen wird sich auf eine Gleichung zwischen den unbekannten Gröfsen zurückführen lassen müssen, welche genau erfüllt werden soll. Bestimmt man aus jeder solchen Gleichung den Werth einer Unbekannten als Function der übrigen, und substituirt diesen allgemeinen Ausdruck in alle andern Gleichungen, so wird man zuletzt so viel weniger unbekannte Gröfsen unabhängig von einander ihren wahrscheinlichsten Werthen nach zu suchen haben, als Bedingungsgleichungen der gegenseitigen Abhängigkeit vorhanden waren. Dieser Weg ist nicht nur immer theoretisch richtig, sondern mit geringen Modificationen auch der kürzeste, in den Fällen, in welchen die Anzahl der Bedingungsgleichungen der gegenseitigen Abhängigkeit gröfser ist als die Hälfte der Anzahl der unbekannten Gröfsen überhaupt, wenigstens in der Anwendung dieser Aufgabe, welches bis jetzt fast die einzige gewesen ist. Jedenfalls sieht man, dafs die Auflösung für nicht ganz unabhängige Gröfsen zurückgeführt werden kann auf die Auflösung für Gröfsen, deren definitive Werthe ganz unabhängig von einander sind, sowie überhaupt bei dieser zweiten Klasse, immer die Kenntnifs der Behandlung solcher Aufgaben, welche zur ersten gehören, vorausgesetzt wird. Es soll deswegen zuerst hier nur von Gröfsen, die völlig unabhängig von einander sind, die Rede sein.

Sei also M ein durch Beobachtung gefundener Werth, von welchem wir wissen, dafs er aufser den Fehlern der Beobachtung

---

*) pag. 59 des vorliegenden Bandes dieser Ausgabe.

nur von der richtigen Kenntnifs der Werthe der Unbekannten X, Y, Z u. s. w. abhängt, und bei dem wir ebenfalls die Natur der Function, welche den Zusammenhang von M mit X, Y, Z u. s. w. ausdrückt, genau kennen. Seien $M' M''$ ähnliche von denselben Unbekannten X, Y, Z bedingte Werthe. Ist die Anzahl der beobachteten M kleiner als die der Unbekannten, so ist die Aufgabe immer unbestimmt, ein Fall der hier ganz ausgeschlossen wird. Ist sie gleich der Anzahl der Unbekannten, und findet, wie immer vorausgesetzt wird, zwischen den Beobachtungen kein Zusammenhang statt, so dafs $M M' M''$ u. s. w. einzeln und unabhängig von einander gefunden worden, so ist die Aufgabe völlig bestimmt. Man wird dann für X, Y, Z Werthe finden, welche den $M M' M''$ genau genug thun, die Fehler der Beobachtung werden als verschwindend betrachtet werden müssen, und die gefundenen Werthe von X, Y, Z als erste Näherung. Die Sicherheit einer solchen Bestimmung wird in practischer Hinsicht wesentlich davon abhängen, ob der Einflufs der einzelnen Unbekannten auf die Werthe $M M' M''$, sich in Zeichen und Gröfse sehr verschieden bei den verschiedenen M äufsert. Sind aber mehr Werthe beobachtet als unbekannte Gröfsen gesucht werden, so ist die Aufgabe mehr als bestimmt. Ein einziges System von Werthen der Unbekannten wird im allgemeinen nicht mehr den Beobachtungen genug thun können, sondern die übrig bleibenden Unterschiede werden als Fehler der Beobachtung angesehen werden müssen, und dasjenige System wird das wahrscheinlichste sein, in welchem die Summe der Quadrate dieser Fehler die kleinstmöglichste ist.

Die practische Auflösung wird sich ohne Mühe auf jede beliebige Zahl von Unbekannten ausdehnen lassen. Um indessen schon in den Formeln den in der Astronomie am häufigsten, nämlich bei der Bestimmung der Planetenelemente, vorkommenden Fall, zu umfassen, sollen im folgenden sechs Unbekannte angenommen werden. Die wahren Werthe desselben seien $X, Y, Z, W, U, T,$ und mit ihnen würde der wahre Werth der beobachteten Gröfse

$$V = F(X, Y, Z, W, U, T)$$

wo die Function F völlig bekannt ist. Die Differenz $V-M$ wird also der wahre Beobachtungsfehler sein.

Der erste Schritt zur Auflösung der Aufgabe wird hier der sein müssen, auf irgend welche Weise, sei es aus andern Untersuchungen, oder aus der directen Behandlung von sechs Werthen unter den beobachteten, die am meisten dazu geeignet sein mögen, solche genäherte Werthe für die Unbekannten sich zu verschaffen, dafs wenn man sie und ihre Correctionen in den Ausdruck von V substituirt, und diesen dann vermittelst des Taylor'schen Satzes in eine Reihe nach Potenzen der Correctionen geordnet entwickelt, die Glieder der zweiten und höhern Ordnung so klein werden, dafs sie ganz zu vernachlässigen sind. Diese Voraussetzung, wonach die sämmtlichen Correctionen aus linearen Gleichungen abgeleitet werden, ist wesentlich, und liegt der ganzen folgenden Auflösung zum Grunde. Sie kann immer gemacht werden. Denn gesetzt auch, der Erfolg zeigte späterhin, dafs die Glieder höherer Ordnung nicht ganz unmerklich waren, so wird immer eine Auflösung, bei welcher sie vernachlässigt sind, solche Werthe geben, welche der gemachten Voraussetzung näher entsprechen, so bald nur die Reihe überhaupt eine hinlänglich schnell convergirende ist. Es wird also nur eine einmalige oder mehrmalige Wiederholung der Rechnung mit den zuletzt gefundenen Werthen nöthig sein. Weil aber die Voraussetzung der linearen Form wesentlich ist, so sollte man auch immer sich ihr so viel nähern als nur möglich; folglich immer ohne Ausnahme von den besten Näherungswerthen ausgehen, und selbst bei Unbekannten, deren numerischer Werth so klein ist, dafs allenfalls der Werth Null als Näherungswerth angesehen werden könnte, doch es vorziehen, einen der Wahrheit entsprechenderen zum Grunde zu legen. Die gröfsere Mühe, die man vielleicht aufwenden mufs, um einen solchen Näherungswerth in V einzuführen, wird reichlich dadurch ersetzt, dafs man dafür auch bei den Coefficienten der Reihe nur wenige Decimalstellen anzusetzen, und also auch Logarithmentafeln von höchstens fünf Decimalen zu gebrauchen nöthig hat. In der That ist die Berechnung dieser Coefficienten auf sieben und mehrere Decimalen, wie man sie noch häufig findet, so wenig ein Beweis von gröfserer Genauigkeit, dafs sie vielmehr nur zeigt, der Rechner sei sich des eigentlichen Zweckes nicht völlig bewufst. Den seltenen Fall ausgenommen, in welchem V selbst eine lineare Function von X, Y, Z u. s. w. ist, wird gewifs niemals die Convergenz der Reihe so grofs sein, dafs der Einflufs der vernachläfsigten höheren Glieder nicht noch auf die 5te, selbst auf die 4te, Decimale Einflufs hätte. Die Hinzufügung noch mehrerer trägt folglich zur gröfseren Genauigkeit nicht das mindeste bei. Wenn aber auch dieses nicht der Fall wäre, so würde doch die Genauigkeit unserer Beobachtungen, welcher Art sie auch sein mögen, eine bis jetzt gar nicht erreichte, und auch gar nicht erreichbare, sein müssen, wenn der millionste und zehnmillionste Theil einer kleinen Correction noch irgend welchen Werth haben könnte.

Möge es bei dieser Gelegenheit erlaubt sein, daran zu erinnern, wie viele Zeit bei Rechnungen aller Art dadurch erspart wird, dafs man gleich anfangs die anzuwendenden Mittel dem zu erreichenden Zwecke gemäfs wählt. Wenn man blofs auf Minuten bei den Winkeln, und also etwa auch den $\frac{1}{4000}$sten Theil bei Lineargröfsen ausgehen will, so werden bei gehöriger Benutzung der zweckmäfsigsten analytischen Formeln Logarithmentafeln von vier Decimalen ausreichen. Tafeln von fünf Decimalen geben unter denselben Verhältnissen die Winkel bis etwa 5″, die Lineargröfsen bis auf den vierzigtausendsten Theil genau, selbst bei längeren Rechnungen. Mit sechs Decimalen hat man fast die halbe Secunde sicher, mit sieben den zwanzigsten Theil einer Secunde, seltene Ausnahmen abgerechnet. Die Zeitersparnifs ist dabei höchst beträchtlich. Bei einerlei Rechnung verhält sich der Zeitaufwand bei sieben, sechs und fünf Decimalen nahe wie 3 : 2 : 1. Zugleich aber giebt diese vorläufige Ueberlegung, aufser dem Beweise, den sie ablegt, dafs der Berechner sich seiner Aufgabe völlig bewufst war, auch bei häufigerer Wiederholung einen sehr sichern Tact in der Unterscheidung des Wesentlichen von dem Unwesentlichen, und lehrt sehr scharf das trennen, was zur Ermittelung des wahren Resultats nothwendig ist, von dem, was nur als eine imaginäre Zahlengenauigkeit betrachtet werden mufs.

Die Näherungswerthe mögen durch

$$X_0 \; Y_0 \; Z_0 \; W_0 \; U_0 \; T_0$$

bezeichnet werden. Der Werth von V den sie geben mit V_0, so dafs

$$V_0 = F(X_0, \; Y_0, \; Z_0, \; W_0, \; U_0, \; T_0).$$

Die Correctionen mit x, y, z, w, u, t, wobei folglich

$$X = X_0 + x \qquad Y = Y_0 + y \qquad Z = Z_0 + z$$
$$W = W_0 + w \qquad U = U_0 + u \qquad T = T_0 + t$$

Ferner seien die ersten Differentialquotienten von V_0 in Bezug auf $X_0 \; Y_0 \; Z_0 \; W_0 \; U_0 \; T_0$ respective a, b, c, d, e, f, oder

$$\frac{dV_0}{dX_0} = a \qquad \frac{dV_0}{dY_0} = b \qquad \frac{dV_0}{dZ_0} = c$$
$$\frac{dV_0}{dW_0} = d \qquad \frac{dV_0}{dU_0} = e \qquad \frac{dV_0}{dT_0} = f.$$

Mit Vernachlässigung der höhern Glieder hat man dann

$$V = V_0 + ax + by + cz + dw + eu + ft.$$

Drücke nun v den wahren Fehler der Beobachtung aus, oder sei

$$v = V - M$$

und n den Fehler, den die Hypothese $X_0 \; Y_0 \; Z_0$ u. s. w. voraussetzt, also

$$V_0 - M = n$$

so wird man die Gleichung haben

$$v = n + ax + by + cz + dw + eu + ft.$$

Die Genauigkeit der Differentialquotienten $a \, b \, c \, d \, e \, f$, oder der Werth von $\frac{dV}{dX}, \frac{dV}{dY}, \frac{dV}{dZ}$, u. s. w., wenn darin $X_0 \; Y_0 \; Z_0$ u. s. w. substituirt werden, hängt zwar von der Genauigkeit dieser Näherungswerthe selbst ab. Allein da sie in die der Voraussetzung gemäfs stets kleinen Correctionen multiplicirt sind, so ist der Einflufs eines Fehlers in ihnen auf v immer von der zweiten hier vernachlässigten Ordnung. Man kann sie als völlig genau bestimmt ansehen. Selbst in den Fällen, in welchen die Glieder zweiter

Ordnung noch merklich sein sollten, und bei denen man folglich die Rechnung mit andern Werthen von X_0 Y_0 Z_0 u. s. w. wiederholen müfste, wird es in der Regel nicht nöthig sein, diese Coefficienten noch einmal zu berechnen. Denn da bei einer solchen Wiederholung die Glieder zweiter Ordnung gewifs als verschwindend angesehen werden können, so wird auch meistentheils das Product eines Fehlers der bessern Näherung, mit dem von der roheren Annahme herrührenden Fehler in a b c u. s. w., eine zu vernachlässigende Gröfse sein.

Jeder unabhängig beobachtete Werth M giebt eine solche Gleichung für ein v. Die Berechnung des dazu nöthigen V_0, und der Quotienten a b c u. s. w., ist meistentheils der beschwerlichste Theil der Arbeit, und wird es in Vergleich mit dem noch übrigen um so mehr, als die Richtigkeit der numerischen Werthe in dieser Gleichung keine Prüfung in sich hat. Die ganze noch übrige Rechnung kann dagegen ohne bedeutende Mühe so geführt werden, dafs man sicher ist jeden sich einschleichenden Rechnungsfehler sogleich zu entdecken und schnell zu corrigiren. Es hat mir deshalb, besonders bei weitläuftigeren Rechnungen, immer der Mühe lohnend geschienen, diese Bedingungsgleichungen, ehe man weiter geht, sorgfältig zu prüfen. Am natürlichsten geschieht dieses, wenn man zuerst für das System X_0 Y_0 Z_0 u. s. w., die V_0 a b c u. s. w. berechnet, dann aber für ein zweites System $X_0+\xi$, $Y_0+\eta$, $Z_0+\zeta$ u. s. w. das zugehörige V'_0 ebenfalls direct ermittelt, und die Uebereinstimmung des Werthes $V'_0 - V_0$ mit $a\xi + b\eta + c\zeta$ u. s. w. untersucht. Die einzige Vorsichtsmaafsregel, bei der sonst ganz willkürlichen Wahl von ξ, η, ζ u. s. w., ist die, dafs man sie weder so grofs annimmt, dafs in $V'_0 - V_0$ noch die Glieder zweiter Ordnung merklich werden können (in diesem Falle können die Bedingungsgleichungen richtig sein und doch die Prüfungsgleichung nicht erfüllt werden), noch so klein, dafs die Correctionen, welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung möglicher Weise finden lassen sollte, gröfser und zwar merklich gröfser ausfielen, dann würde die Prüfungsgleichung nicht mehr vollkommen sichern. Man erreicht beides in der Regel, wenn man sich nach der Gröfse der Coefficienten a, b, c bei der Annahme von $\xi\,\eta\,\zeta$ so richtet, dafs weder ein einzelnes Glied $a\xi$ oder $b\eta$ oder $c\zeta$ allzu merklich gegen alle andern überwiegt, noch auch die ganze Summe in jeder Gleichung $a\xi+b\eta+c\zeta$ einen zu grofsen numerischen Werth erhält, dabei aber diesen Werth gröfser annimmt, als die möglichen Beobachtungsfehler sein können. Denn wenn das System von Näherungswerthen X_0, Y_0, Z_0, richtig abgeleitet ist, so wird nicht etwa eine einzelne dieser Gröfsen allein fehlerhaft sein, sondern die Fehler werden sich über alle mit einer gewissen Gleichförmigkeit vertheilen, wobei in der Regel die Gröfse der Correction mit der mittleren Gröfse ihres Differentialquotienten etwa in umgekehrtem Verhältnifs stehen wird. Es versteht sich, dafs hier nur von einer ganz beiläufigen Schätzung die Rede ist.

Man hat auf diese Weise, bei m unabhängig erhaltenen Beobachtungen, ein System von m Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned} v &= n + ax + by + cz + dw + eu + ft \\ v' &= n' + a'x + b'y + c'z + d'w + e'u + f't \\ v'' &= n'' + a''x + b''y + c''z + d''w + e''u + f''t \end{aligned}$$

u. s. w. u. s. w.

in welchen die Zahlenwerthe $n\,n'\,n''$ u. s. w., d. h. die Gröfsen $V_0 - M$, $V'_0 - M'$, $V''_0 - M''$, veränderlich sind mit den angenommenen Näherungswerthen $X_0\ Y_0\ Z_0$ u. s. w., die Zahlenwerthe $a\,b\,c\,d\,e\,f$ aber als strenge oder doch hinlänglich genau bekannt betrachtet werden müssen für jede Hypothese. Aus ihnen soll das System von $x\,y\,z\,w\,u\,t$ gefunden werden, für welches die übrig bleibenden Fehler $v\,v'\,v''$ u. s. w. die wahrscheinlichsten sind.

Wenn, um den allgemeinsten Fall zu setzen, das Maafs der Genauigkeit für die verschiedenen Beobachtungen der Reihe nach $h\,h'\,h''$ u s. w. ist, so wird nach (6) die Wahrscheinlichkeit der Fehler $v\,v'\,v''$ in jeder Hypothese über $x\,y\,z$ u. s. w.

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-hhvv}, \quad \frac{h'}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h'h'v'v'}, \quad \frac{h''}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h''h''v''v''},$$

und die Wahrscheinlichkeit jeder Hypothese über $x\,y\,z$ u. s. w. selbst, welche ein System von Fehlern $v\,v'\,v''$ bewirkt, ist nach (I) und (II) proportional dem

$$\frac{h\,h'\,h''\ldots.}{\pi^{\frac{1}{2}m}}\,e^{-(hhvv+h'h'v'v'+h''h''v''v''\ldots)}$$

Sie wird am gröfsten, wenn

$$hh\,vv+h'h'\,v'v'+h''h''\,v''v''\ldots. = \text{einem Minimum}$$

aus welcher Bedingung sich nach (3) und den folgenden Formeln die Werthe von x, y, z, w, u, t ergeben.

Die Bestimmung der verschiedenen h, oder was dasselbe ist, des jeder Beobachtung zuzuschreibenden wahrscheinlichen Fehlers oder Gewichtes, mufs der Auflösung vorangehen, und ist an sich unabhängig von den spätern Rechnungsresultaten. Sind diese h gegeben, so wird es am einfachsten sein, die Multiplication mit h nicht erst bis zur Erhaltung des numerischen Werthes zu verschieben, sondern sie sogleich an dem allgemeinen Ausdrucke für v auszuführen, oder die obigen Gleichungen so zu schreiben, dafs man das zugehörige h mit jedem Coefficienten verbindet:

$$\begin{aligned} hv &= hn + ahx + bhy + chz + dhw + ehu + fht \\ h'v' &= h'n' + a'h'x + b'h'y + c'h'z + d'h'w + e'h'u + f'h't \\ &\qquad\text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

in welchem Falle die Summe der Quadrate der rechten Seiten dieser Gleichungen ein Minimum werden mufs. Es versteht sich, dafs für die Bestimmung der absoluten Gröfse von $x\,y\,z$ u. s. w., es ganz gleichgültig ist, welche Einheit man bei h zum Grunde legt, so dafs man nur mit einer Reihe von Zahlen, welche den $h\,h'\,h''$ oder den $\frac{1}{r}, \frac{1}{r'}, \frac{1}{r''}$ oder den $\sqrt{P}, \sqrt{P'}, \sqrt{P''}$ proportional sind, wenn r den wahrscheinlichen oder den mittleren Fehler, und P das Gewicht bedeutet, zu multipliciren hat. Da aber ein Hauptnutzen der Methode der kleinsten Quadrate in der Bestimmung des Gewichtes oder wahrscheinlichen Fehlers jedes durch sie gefundenen

Werthes besteht, so werden die Zahlen, die man für die Gewichte findet, auf die Einheit, welche bei den $h\,h'\,h''$ zum Grunde liegt, sich beziehen, und mit ihr veränderlich sein.

Die Natur der Sache bringt es mit sich, dafs die Ermittelung dieser verschiedenen h, das einzige gewissermafsen Willkürliche in der ganzen Aufgabe, der schwierigste und die meiste practische Umsicht erforderliche Theil der Auflösung ist. Am leichtesten und sichersten wird man dazu gelangen, wenn etwa die einzelnen Beobachtungen schon an sich das Mittel aus mehreren andern gleich gut zu achtenden Wahrnehmungen sind, wie etwa die auf den mittleren Faden reducirten Fadendurchgänge bei einem Meridianinstrumente, oder mehrmalige Vergleichung eines Cometen mit einem Sterne an demselben Abende. Hier wird die Quadratwurzel aus der Anzahl der Wiederholungen eine sehr zweckmäfsige Verhältnifszahl sein. Schwieriger bei weitem ist es, das Verhältnifs der Güte bei Beobachtungen verschiedener Art auf bestimmte Zahlen zu reduciren, und noch mehr den Einflufs atmosphärischer Umstände zu schätzen, oder das innere Gefühl, was jeder Beobachter hat, eine oder die andere Beobachtung überwiege bedeutend an Sicherheit, durch ein anzunehmendes h für sie festzustellen. Sind indessen die Beobachtungen jeder solcher geringeren und vorzüglicheren Art zahlreich genug, so kann eine indirecte Rechnung diesen Mangel ersetzen. Wären z. B. unter den m Beobachtungen vielleicht p Kreismikrometerbestimmungen, welchen man, unter sich verglichen, gleichen Werth zugestehen müfste, die andern $m-p$ aber Heliometermessungen, die ebenfalls unter sich gleich an Werth, den Kreismikrometerbestimmungen vorzuziehen wären, so nehme man nach irgend welcher Schätzung für die p Beobachtungen ein h an, für die $m-p$ ein h', und berechne damit das wahrscheinlichste System von $x\,y\,z$ u. s. w. unter dieser Voraussetzung. Man erhält dann auch die einzelnen Fehler, welche jeder Beobachtung beigelegt werden müssen. Bildet man nun die Summe der Quadrate der Fehler bei den p Beobachtungen, sie sei vv, und ebenso bei den $m-p$, sie sei $v'v'$, so wird das Verhältnifs von $h:h'$ in dieser

Hypothese sein wie $\sqrt{\frac{p}{vv}}:\sqrt{\frac{m-p}{v'v'}}$, und wenn dieses Verhältnifs genau oder hinlänglich genähert der anfänglichen Annahme entspricht, so wird man dabei stehen bleiben können. Entspricht es ihm nicht, so wiederhole man die Rechnung mit Werthen für h und h', deren Verhältnifs sich dem zuletzt gefundenen genau oder nahe anschliefst, und fahre so lange fort, bis die bei dem Anfange einer Rechnung gemachte Hypothese, dem Endresultate aus den vv und $v'v'$ abgeleitet, gemäfs ist. Auf diese Weise ist wenigstens die Rechnung in sich consequent, und setzt nur eine Schätzung der Gleichheit mehrerer Beobachtungen derselben Art voraus, welche immer genauer ausfallen wird, als eine Schätzung ihrer relativen wahrscheinlichen Fehler bei ungleichem Werthe. Auch wird in der Regel die Anzahl der Wiederholungen, welche nöthig sein möchten, nicht so grofs als man fürchten sollte. Denn da für jede Gattung von Beobachtungen $\varphi(\Delta)$ immer ein Maximum für $\Delta = 0$ ist, so werden auch schlechtere Data, wenn sie nur zahlreich genug sind, Werthe für $x\,y\,z$ geben, die von der Wahrheit sich nicht sehr entfernen, selbst wenn man die schlechteren Data allein benutzte. Verbunden mit den besseren, werden die Werthe von $x\,y\,z$ aus allen Beobachtungen, von einer nicht gar zu grofsen Verschiedenheit in den Annahmen für h noch weniger afficirt werden, und da von diesen Werthen die Fehler, und also auch die Summe ihrer Quadrate vv und $v'v'$ allein abhängt, so wird meistentheils nur eine Wiederholung nöthig sein, wenn man bei der neuen Rechnung das Resultat der ersten für h und h' zum Grunde legt, besonders da ein absolut genaues Zusammentreffen gar nicht erforderlich ist. Je geringer die Anzahl der Beobachtungen, desto mehr wird freilich die Verschiedenheit der h von Einflufs auf den Werth von $x\,y\,z$ sein, und desto wünschenswerther ist es in diesem Falle, eine möglichst genaue Kenntnifs des gegenseitigen Verhältnisses der Genauigkeit, sich auf anderm Wege verschaffen zu können.

Dafs diese Schwierigkeit in der Schätzung von h eine sehr reelle ist, zeigt das Beispiel unserer vorzüglichsten Beobachter.

So haben Gaufs, Bessel und Struve bei ihren geodätischen Messungen, wobei die Wahl der Umstände ihnen freier war, es, wie es scheint, als Grundsatz angenommen, nur dann zu beobachten, wenn die Umstände eine gute Messung hoffen liefsen, und den Vorzug einer gröfseren Anzahl gemischter, an Sicherheit ungleicher Beobachtungen, lieber aufgegeben, als die numerische Schätzung der gegenseitigen Genauigkeit versuchen wollen. Dagegen sind dann auch alle Messungen, welche während der Beobachtung für stimmfähig erklärt wurden, benutzt, ohne Rücksicht darauf, wie genau oder weniger genau sie sich früheren oder späteren anschlössen. Wo die Natur der Sache, wie in diesen Fällen, es erlaubt, die Gleichheit der äufsern Umstände abzuwarten, da wird unstreitig dieses Verfahren das vorzüglichste sein. Wenn aber, wie bei den meisten astronomischen Bestimmungen, die freie Auswahl in Hinsicht auf die äufsern Bedingungen der Zuverlässigkeit nicht gestattet ist, so möchte es fast vorzüglicher sein, lieber etwas zu wenig in der Abschätzung der gegenseitigen h zu thun, als zu viel; lieber allen Beobachtungen, falls sie nicht schon im Voraus als ganz verwerflich erkannt sind, wenn man einmal angefangen hat sie zuzuziehen, einen von der Gleichheit nicht allzu abweichenden Werth beizulegen, als durch Verminderung des Maafses ihrer Genauigkeit einzelne so gut wie unnütz zu machen. Man wird auf diesem Wege wenigstens die Unbefangenheit des Urtheils, und die Freiheit desselben von dem später sich zeigenden Erfolge am sichersten bewahren, dabei den Einflufs möglicher constanter Fehler einer besonderen Gattung schwächen, und doch bei vergröfserter Zahl der Beobachtungen, weniger den absoluten Werth der Unbekannten irrig finden, als in der Schätzung seines Gewichtes und der Genauigkeit der einzelnen Beobachtungen fehlen. Der letztere Nachtheil wäre kaum als ein solcher zu achten, da in der Regel schon der constanten Fehler wegen, die Gewichte unsicher und zu grofs ausfallen. Bei weitem mehr wird auf der andern Seite die Gefahr zu fürchten sein, durch den jedem Beobachter und Berechner nur allzu natürlichen Wunsch, schönharmonirende Resultate aufzuweisen, sich verleiten zu lassen, unter dem Vorhandenen so lange zu wählen, und durch leicht aufzufindende scheinbare Gründe die Wahl zu rechtfertigen, bis der versteckte Zweck erreicht ist.

Zur Vermeidung unnöthiger Buchstabenanhäufung soll im Folgenden immer das System der Gleichungen ohne Einführung des Factors h geschrieben werden, so dafs künftig die Gröfsen v, n, a, b, c, d, e, f eigentlich nicht die Fehler der Beobachtungen und die Differentialquotienten selbst, sondern das Product des jedesmaligen h in diese Fehler und Quotienten bezeichnen. Der Kürze wegen werden sie doch die Fehler und Differentialquotienten genannt werden. Alle Gleichungen sind auf diese Weise auf eine bestimmte Einheit bezogen und haben gleichen Werth.

Die allgemeine Aufgabe ist hiernach folgende:

Es sind in m linearen Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned} & v = ax + by + cz + dw + eu + ft + n \\ (25)\ldots\ & v' = a'x + b'y + c'z + d'w + e'u + f't + n' \\ & v'' = a''x + b''y + c''z + d''w + e''u + f''t + n'' \text{ u. s. w. u. s. w.} \end{aligned}$$

die Werthe aller a, b, c, d, e, f, n, gegeben. Man sucht die Werthe der unabhängigen Variabeln x, y, z, w, u, t, welche die Function Ω, wo

$$\Omega = vv + v'v' + v''v'' \ldots \text{ u. s. w.}$$

ist, zu einem absoluten Minimum machen.

Man kann hier, ähnlich wie bei einer unbekannten Gröfse, zuerst die Differentialrechnung anwenden. Wegen der Unabhängigkeit der Variabeln theilt sich die Gleichung für das Minimum von Ω in die sechs besondern:

$$\left(\frac{d\Omega}{dx}\right) = 0 \qquad \left(\frac{d\Omega}{dy}\right) = 0 \qquad \left(\frac{d\Omega}{dz}\right) = 0$$
$$\left(\frac{d\Omega}{dw}\right) = 0 \qquad \left(\frac{d\Omega}{du}\right) = 0 \qquad \left(\frac{d\Omega}{dt}\right) = 0$$

oder in die gleichbedeutenden sechs:

$$v\frac{dv}{dx}+v'\frac{dv'}{dx}+v''\frac{dv''}{dx}\ldots=0 \quad v\frac{dv}{dy}+v'\frac{dv'}{dy}+v''\frac{dv''}{dy}\ldots=0$$
$$v\frac{dv}{dz}+v'\frac{dv'}{dz}+v''\frac{dv''}{dz}\ldots=0 \quad v\frac{dv}{dw}+v'\frac{dv'}{dw}+v''\frac{dv''}{dw}\ldots=0$$
$$v\frac{dv}{du}+v'\frac{dv'}{du}+v''\frac{dv''}{du}\ldots=0 \quad v\frac{dv}{dt}+v'\frac{dv'}{dt}+v''\frac{dv''}{dt}\ldots=0.$$

Bei der linearen Form der Grundgleichungen (25) finden sich sogleich die Werthe der partiellen Differentialquotienten

$$\frac{dv}{dx}=a,\ \frac{dv}{dy}=b,\ \frac{dv}{dz}=c,\ \frac{dv}{dw}=d,\ \frac{dv}{du}=e,\ \frac{dv}{dt}=f,$$
$$\frac{dv'}{dx}=a',\ \frac{dv'}{dy}=b',\ \frac{dv'}{dz}=c',\ \frac{dv'}{dw}=d',\ \frac{dv'}{du}=e',\ \frac{dv'}{dt}=f'$$

u. s. w. u. s. w.

so dafs die Bedingungsgleichungen des Minimums werden

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\Omega}{dx}=av+a'v'+a''v''\ldots=0 \quad \tfrac{1}{2}\frac{d\Omega}{dy}=bv+b'v'+b''v''\ldots=0$$
$$(26)\quad \tfrac{1}{2}\frac{d\Omega}{dz}=cv+c'v'+c''v''\ldots=0 \quad \tfrac{1}{2}\frac{d\Omega}{dw}=dv+d'v'+d''v''\ldots=0$$
$$\tfrac{1}{2}\frac{d\Omega}{du}=ev+e'v'+e''v''\ldots=0 \quad \tfrac{1}{2}\frac{d\Omega}{dt}=fv+f'v'+f''v''\ldots=0$$

oder wenn man hier die Werthe von v substituirt, mit Benutzung der in (12) angegebenen Summenbezeichnung symmetrischer Functionen, nach welcher

$$av+a'v'+a''v''\ldots=[av] \quad bv+b'v'+b''v''\ldots=[bv]$$
$$an+a'n'+a''n''\ldots=[an] \quad aa+a'a'+a''a''\ldots=[aa]$$
$$ab+a'b'+a''b''\ldots=[ab] \quad ac+a'c'+a''c''\ldots=[ac] \text{ u. s. w.}$$

so erhält man als die sechs Bedingungsgleichungen des Minimums, aus welchen die Werthe der unbekannten sich ergeben, die folgenden:

$$(27)\quad \begin{aligned}
&[aa]\,x+[ab]\,y+[ac]\,z+[ad]\,w+[ae]\,u+[af]\,t+[an]=0\\
&[ab]\,x+[bb]\,y+[bc]\,z+[bd]\,w+[be]\,u+[bf]\,t+[bn]=0\\
&[ac]\,x+[bc]\,y+[cc]\,z+[cd]\,w+[ce]\,u+[cf]\,t+[cn]=0\\
&[ad]\,x+[bd]\,y+[cd]\,z+[dd]\,w+[de]\,u+[df]\,t+[dn]=0\\
&[ae]\,x+[be]\,y+[ce]\,z+[de]\,w+[ee]\,u+[ef]\,t+[en]=0\\
&[af]\,x+[bf]\,y+[cf]\,z+[df]\,w+[ef]\,u+[ff]\,t+[fn]=0
\end{aligned}$$

Die Bildung der Coefficienten in diesen Gleichungen ergiebt sich aus (25), und wird durch die Bezeichnung deutlich ausgedrückt. Um die erste Gleichung in (27) zu erhalten, multiplicirt man jede der Gleichungen (25) mit dem Coefficienten, den x in ihr hat, und vereinigt alle Producte in eine Summe. Bei der zweiten Gleichung verfährt man mit dem Coefficienten y eben so. Jede unbekannte Variable giebt auf diese Weise eine Gleichung.

Lineare Gleichungen wie die in (27), deren Anzahl gleich ist der Anzahl der Unbekannten, geben immer bestimmte Werthe für die letzteren, sobald die Gleichungen wirklich verschieden von einander sind, und keine in der andern, oder in einer Verbindung mehrerer anderer enthalten. Diese letzte Bedingung läfst sich am allgemeinsten so ausdrücken: Wenn $\alpha_0\, \beta_0\, \gamma_0\, \delta_0, \ldots, \varkappa_0 \ldots$ Gröfsen bedeuten, die frei von den Unbekannten $x\, y\, z$ sind, und die Bildung irgend welcher Gleichung

$$(28) \ldots . \alpha_0 [av] + \beta_0 [bv] + \gamma_0 [cv] + \delta_0 [dv] + \varepsilon_0 [ev] + \zeta_0 [fv] = \varkappa_0$$

möglich ist, so werden die Gleichungen $[av] = 0$, $[bv] = 0$ u. s. w., die Werthe der Unbekannten nicht bestimmen lassen; und umgekehrt, findet keine solche Gleichung statt, so ist die Aufgabe in Hinsicht auf die Unbekannten weder unbestimmt noch unmöglich.

Man kann aus den allgemeinen Gleichungen (25) eine Gleichung von ganz analoger Form herleiten, die für alle Werthe von $x\, y\, z$ u. s. w. gelten mufs. Multiplicirt man die erste der Gleichungen (25) mit v, die zweite mit v', die dritte mit v'', und addirt alle Producte, so wird

$$(29) \ldots \begin{aligned} & x [av] + y [bv] + z [cv] + w [dv] + u [ev] + t [fv] \\ & \qquad = v (v - n) + v' (v' - n') + v'' (v'' - n'') \ldots . \end{aligned}$$

Für $x\, y\, z$ u. s. w. lassen sich aber unter allen möglichen Werthen, auch folgende annehmen, in welchen ξ ein beliebiger Factor ist:

$$x = \alpha_0 \xi \quad y = \beta_0 \xi \quad z = \gamma_0 \xi \quad w = \delta_0 \xi \quad u = \varepsilon_0 \xi \quad t = \zeta_0 \xi$$

auch ist es klar, dafs vermöge (25), die v welche aus diesen Annahmen hervorgehen würden, die Form haben müssen:

$$v = n + \lambda_0 \xi \quad v' = n' + \lambda'_0 \xi \quad v'' = n'' + \lambda''_0 \xi \ldots$$

wo λ_0, λ'_0, λ''_0 frei von $x\ y\ z$ sind. Führt man diese Hypothese in (29) ein, so wird

$$\begin{aligned}\{\alpha_0[av]+\beta_0[bv]+\gamma_0[cv]+\delta_0[dv]+\varepsilon_0[ev]+\zeta_0[fv]\}\xi \\ =\lambda_0\xi(n+\lambda_0\xi)+\lambda'_0\xi(n+\lambda'_0\xi)+\lambda''_0\xi(n+\lambda''_0\xi)\ldots. \\ =[n\lambda_0]\xi+[\lambda_0\lambda_0]\xi\xi.\end{aligned}$$

Könnte folglich eine Gleichung wie (28) statt finden, so würde, wenn man sie hier substituirt, auch:

$$\varkappa_0\xi=[n\lambda_0]\xi+[\lambda_0\lambda_0]\xi\xi$$

also da ξ vollkommen willkürlich ist, nothwendig

$$[\lambda_0\lambda_0]=0$$

folglich weil $[\lambda_0\lambda_0]$ eine Summe von Quadraten ist, zugleich

$$\lambda_0=0,\ \lambda'_0=0,\ \lambda''_0=0,\ \lambda'''_0=0\ldots\left\{\begin{array}{l}\text{und eben deshalb } [n\lambda_0]=0\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\ \ \varkappa_0=0\end{array}\right.$$

sein müssen. Dieses aber heifst nach der Bedeutung von $\lambda_0\ \lambda'_0\ \lambda''_0\ldots$ so viel als, alle Werthe von $x\ y\ z$ u. s. w. von der Form

$$x+\alpha_0\xi\quad y+\beta_0\xi\quad z+\gamma_0\xi\quad w+\delta_0\xi\quad u+\varepsilon_0\xi\quad t+\zeta_0\xi$$

geben einerlei v, v', v'' ..., so dafs in diesem Falle auch wenn $v\ v'\ v''$ ... genau bekannt wären, und die Bedingung des Minimums ganz wegfiele, die Gleichungen (25) über die eigentlichen Werthe von $x\ y\ z$ nichts entscheiden könnten. Fälle dieser Art wo die Aufgabe an sich unbestimmt ist, gehören offenbar nicht hierher. So oft die Aufgabe überhaupt bestimmt ist, so oft wird auch die Auflösung nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmte Werthe vermöge der Gleichungen (27) geben.

Für die Praxis wird es nicht gerade nöthig sein, dafs eine Gleichung wie (28) in völliger Strenge statt finde, um die Aufgabe unbestimmt zu machen. Werden für ein System von $\alpha_0\ \beta_0\ \gamma_0\ldots$ die Coefficienten der Unbekannten in dieser Gleichung nur überhaupt so klein, dafs die Summe ihrer Producte mit den immer als Gröfsen der ersten Ordnung zu betrachtenden $x\ y\ z\ldots$, einer Gröfse der zweiten Ordnung gleich zu schätzen ist, welche bei dieser Rechnung überhaupt vernachlässigt wird, so mufs die Aufgabe practisch als unbestimmt betrachtet werden. Dieses würde der Fall sein, wenn das Verhältnifs der Coefficienten in allen Gleichungen (27) bei verschiedenen Unbekannten constant wäre. Allein eben damit wäre auch ein gleiches constantes Verhältnifs der Coefficienten in den Gleichungen (25) bedingt, und für diese folglich auch die Aufgabe practisch unbestimmt. Ueberhaupt gelten die Vorschriften, welche für die Wahl der Gleichungen, aus denen unbekannte Gröfsen gefunden werden sollen, in Hinsicht auf die practische Sicherheit des Resultats in den gewöhnlichen Fällen gegeben werden, gröfstmöglichste Verschiedenheit der Coefficienten in Gröfse und Zeichen, auch für die Methode der kleinsten Quadrate. Eine Bemerkung, die in der Folge auf bestimmtere Bedingungen zurückgeführt werden wird.

Die Elimination aus den Gleichungen (27) geschieht am leichtesten auf die gewöhnliche einfache Weise der successiven Substitution. Man sucht aus der ersten Gleichung den Werth von x als Function der übrigen, und setzt diesen Werth in alle folgenden. Mit den fünf hieraus hervorgehenden Gleichungen zwischen fünf Unbekannten, verfährt man eben so, bis man zuletzt auf eine Gleichung mit einer Unbekannten kommt. Des folgenden wegen wird es indessen nöthig sein, für diese Operationen nach Gaufs's höchst eleganten Vorschriften bestimmte Buchstabenbezeichnungen einzuführen.

Man setze die linke Seite der ersten Gleichung von (27) $= A$ so dafs

$$[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,w + [ae]\,u + [af]\,t + [an] = A$$

Die Annahme .... $A = 0$ .... giebt dann

$$x = -\frac{[ab]}{[aa]}\,y - \frac{[ac]}{[aa]}\,z - \frac{[ad]}{[aa]}\,w - \frac{[ae]}{[aa]}\,u - \frac{[af]}{[aa]}\,t - \frac{[an]}{[aa]}.$$

Substituirt man diesen Werth in die andern fünf, und vereinigt man in jeder die Coefficienten derselben Unbekannten in ein Glied, so zeigt der blofse Ueberblick, dafs folgende besonders zu bezeichnende Formen entstehen werden:

$$
(30)\qquad
\begin{array}{ll}
[bb]-\dfrac{[ab]}{[aa]}[ab]=[bb\cdot 1] & [dd]-\dfrac{[ad]}{[aa]}[ad]=[dd\cdot 1] \\[2ex]
[bc]-\dfrac{[ab]}{[aa]}[ac]=[bc\cdot 1] & [de]-\dfrac{[ad]}{[aa]}[ae]=[de\,.\,1] \\[2ex]
[bd]-\dfrac{[ab]}{[aa]}[ad]=[bd\cdot 1] & [df]-\dfrac{[ad]}{[aa]}[af]=[df\cdot 1] \\[2ex]
[be]-\dfrac{[ab]}{[aa]}[ae]=[be\cdot 1] & [ee]-\dfrac{[ae]}{[aa]}[ae]=[ee\cdot 1] \\[2ex]
[bf]-\dfrac{[ab]}{[aa]}[af]=[bf\cdot 1] & [ef]-\dfrac{[ae]}{[aa]}[af]=[ef\cdot 1] \\[2ex]
[cc]-\dfrac{[ac]}{[aa]}[ac]=[cc\cdot 1] & [ff]-\dfrac{[af]}{[aa]}[af]=[ff\cdot 1] \\[2ex]
[cd]-\dfrac{[ac]}{[aa]}[ad]=[cd\cdot 1] & [bn]-\dfrac{[ab]}{[aa]}[an]=[bn\cdot 1] \\[2ex]
[ce]-\dfrac{[ac]}{[aa]}[ae]=[ce\cdot 1] & [cn]-\dfrac{[ac]}{[aa]}[an]=[cn\cdot 1] \\[2ex]
[cf]-\dfrac{[ac]}{[aa]}[af]=[cf\cdot 1] & [dn]-\dfrac{[ad]}{[aa]}[an]=[dn\cdot 1] \\[2ex]
 & [en]-\dfrac{[ae]}{[aa]}[an]=[en\cdot 1] \\[2ex]
 & [fn]-\dfrac{[af]}{[aa]}[an]=[fn\cdot 1]
\end{array}
$$

Die fünf Gleichungen nach der Elimination von x sind also die folgenden:

$$
(31)\qquad
\begin{array}{l}
[bb\cdot 1]\,y+[bc\cdot 1]\,z+[bd\cdot 1]\,w+[be\cdot 1]\,u+[bf\cdot 1]\,t+[bn\cdot 1]=0 \\
[bc\cdot 1]\,y+[cc\cdot 1]\,z+[cd\cdot 1]\,w+[ce\cdot 1]\,u+[cf\cdot 1]\,t+[cn\cdot 1]=0 \\
[bd\cdot 1]\,y+[cd\cdot 1]\,z+[dd\cdot 1]\,w+[de\cdot 1]\,u+[df\cdot 1]\,t+[dn\cdot 1]=0 \\
[be\cdot 1]\,y+[ce\cdot 1]\,z+[de\cdot 1]\,w+[ee\cdot 1]\,u+[ef\cdot 1]\,t+[en\cdot 1]=0 \\
[bf\cdot 1]\,y+[cf\cdot 1]\,z+[df\cdot 1]\,w+[ef\cdot 1]\,u+[ff\cdot 1]\,t+[fn\cdot 1]=0
\end{array}
$$

Setzt man hier wieder die linke Seite der ersten $=B'$ so wird für $B'=0$

$$y=-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}z-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}w-\frac{[be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}u-\frac{[bf\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}t-\frac{[bn\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$$

und die Substitution dieses Werthes führt auf folgende Coefficienten:

(32)

$$[cc\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bc\cdot 1]=[cc\cdot 2]$$
$$[cd\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bd\cdot 1]=[cd\cdot 2]$$
$$[ce\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[be\cdot 1]=[ce\cdot 2]$$
$$[cf\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bf\cdot 1]=[cf\cdot 2]$$
$$[dd\cdot 1]-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bd\cdot 1]=[dd\cdot 2]$$
$$[de\cdot 1]-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[be\cdot 1]=[de\cdot 2]$$
$$[df\cdot 1]-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bf\cdot 1]=[df\cdot 2]$$
$$[ee\cdot 1]-\frac{[be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[be\cdot 1]=[ee\cdot 2]$$
$$[ef\cdot 1]-\frac{[be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bf\cdot 1]=[ef\cdot 2]$$
$$[ff\cdot 1]-\frac{[bf\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bf\cdot 1]=[ff\cdot 2]$$
$$[cn\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bn\cdot 1]=[cn\cdot 2]$$
$$[dn\cdot 1]-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bn\cdot 1]=[dn\cdot 2]$$
$$[en\cdot 1]-\frac{[be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bn\cdot 1]=[en\cdot 2]$$
$$[fn\cdot 1]-\frac{[bf\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bn\cdot 1]=[fn\cdot 2]$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$(33)\quad \begin{aligned}
&[cc\cdot 2]z+[cd\cdot 2]w+[ce\cdot 2]u+[cf\cdot 2]t+[cn\cdot 2]=0\\
&[cd\cdot 2]z+[dd\cdot 2]w+[de\cdot 2]u+[df\cdot 2]t+[dn\cdot 2]=0\\
&[ce\cdot 2]z+[de\cdot 2]w+[ee\cdot 2]u+[ef\cdot 2]t+[en\cdot 2]=0\\
&[cf\cdot 2]z+[df\cdot 2]w+[ef\cdot 2]u+[ff\cdot 2]t+[fn\cdot 2]=0
\end{aligned}$$

Die linke Seite der ersten derselben sei $=C''$. Aus $C''=0$ folgt:

$$z=-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}w-\frac{[ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}u-\frac{[cf\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}t-\frac{[cn\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$$

und die Substitution dieses Werthes verlangt folgende neue Gröſsen

(34)

$$[dd\cdot 2]-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[cd\cdot 2]=[dd\cdot 3]$$
$$[de\cdot 2]-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[ce\cdot 2]=[de\cdot 3]$$
$$[df\cdot 2]-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[cf\cdot 2]=[df\cdot 3]$$
$$[ee\cdot 2]-\frac{[ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[ce\cdot 2]=[ee\cdot 3]$$
$$[ef\cdot 2]-\frac{[ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[cf\cdot 2]=[ef\cdot 3]$$
$$[ff\cdot 2]-\frac{[cf\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[cf\cdot 2]=[ff\cdot 3]$$
$$[dn\cdot 2]-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[cn\cdot 2]=[dn\cdot 3]$$
$$[en\cdot 2]-\frac{[ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[cn\cdot 2]=[en\cdot 3]$$
$$[fn\cdot 2]-\frac{[cf\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[cn\cdot 2]=[fn\cdot 3]$$

womit die neuen Gleichungen werden:

$$(35) \ldots\ldots \begin{array}{l} [dd\cdot 3]\,w + [de\cdot 3]\,u + [df\cdot 3]\,t + [dn\cdot 3] = 0 \\ [de\cdot 3]\,w + [ee\cdot 3]\,u + [ef\cdot 3]\,t + [en\cdot 3] = 0 \\ [df\cdot 3]\,w + [ef\cdot 3]\,u + [ff\cdot 3]\,t + [fn\cdot 3] = 0 \end{array}$$

Wiederum giebt, wenn die linke Seite der ersten durch D''' bezeichnet wird, $D''' = 0$

$$w = -\frac{[de\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}u - \frac{[df\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}t - \frac{[dn\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$$

Macht man daher:

$$(36) \begin{array}{l|l} [ee\cdot 3] - \frac{[de\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}[de\cdot 3] = [ee\cdot 4] & [en\cdot 3] - \frac{[de\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}[dn\cdot 3] = [en\cdot 4] \\ [ef\cdot 3] - \frac{[de\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}[df\cdot 3] = [ef\cdot 4] & [fn\cdot 3] - \frac{[df\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}[dn\cdot 3] = [fn\cdot 4] \\ [ff\cdot 3] - \frac{[df\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}[df\cdot 3] = [ff\cdot 4] & \end{array}$$

so hat man nur noch die zwei Gleichungen:

$$(37) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{array}{l} [ee\cdot 4]\,u + [ef\cdot 4]\,t + [en\cdot 4] = 0 \\ [ef\cdot 4]\,u + [ff\cdot 4]\,t + [fn\cdot 4] = 0 \end{array}$$

In dem bisherigen analoger Weise führe man E^{IV} ein und entnehme aus $E^{\text{IV}} = 0$

$$u = -\frac{[ef\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}t - \frac{[en\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}$$

und für

$$(38) \; [ff\cdot 4] - \frac{[ef\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}[ef\cdot 4] = [ff\cdot 5] \;\Big|\; [fn\cdot 4] - \frac{[ef\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}[en\cdot 4] = [fn\cdot 5]$$

wird die letzte Gleichung

$$(39) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [ff\cdot 5]\,t + [fn\cdot 5] = 0$$

Die linke Seite gleich F^{V} gesetzt, und $F^{\text{V}} = 0$ genommen, giebt:

$$t = -\frac{[fn\cdot 5]}{[ff\cdot 5]}$$

wodurch t bekannt ist. Man substituire den Werth von t in $E^{\text{IV}} = 0$, so hat man u; womit aus $D''' = 0 \ldots w$, und eben so aus $C'' = 0$, $B' = 0$, $A = 0$, nach einander $z\,y\,x$ folgen.

Die Bezeichnungen sind sehr geeignet, die Uebersicht über die vielen Hülfsgröfsen zu erleichtern. Giebt man den linken Seiten der übrigen Gleichungen in (27), ähnlich wie der Werth derselben bei der ersten im Allgemeinen durch A ausgedrückt worden, die Bezeichnungen $B\,C\,D\,E\,F$, und verfährt auf gleiche Weise bei den abgeleiteten (31), (33), (35), (37), (39), so hat man das Schema:

$$\begin{array}{llllll} A \\ B & B' \\ C & C' & C'' \\ D & D' & D'' & D''' \\ E & E' & E'' & E''' & E^{IV} \\ F & F' & F'' & F''' & F^{IV} & F^{V} \end{array}$$

wodurch die Beziehung auf jede einzelne Gleichung leicht zu übersehen ist.

Eben so ist die Bezeichnung aller Hülfsgröfsen $[bb \cdot 1]$, $[bc \cdot 1]$, $[cc \cdot 2]$ u. s. w. in dem allgemeinen Schema enthalten:

$$[\beta\gamma \cdot \mu] - \frac{[\alpha\beta \cdot \mu]}{[\alpha\alpha \cdot \mu]} [\alpha\gamma \cdot \mu] = [\beta\gamma \cdot (\mu + 1)]$$

wenn $\alpha\,\beta\,\gamma$ irgend welche Buchstaben, und μ eine beliebige Zahl bedeutet.

Die allgemeine Form jedes der Systeme von Gleichungen (27), (31), (33), (35), (37), bringt es mit sich, dafs die Folgereihe der Coefficienten der verschiedenen Unbekannten in einer und derselben Gleichung, also in horizontaler Reihe, auch in verticaler Richtung bei derselben Unbekannten in den verschiedenen Gleichungen sich findet. Wenn deshalb die Anzahl der Unbekannten gleich i ist, so ist die Anzahl der Coefficienten, die aus n gebildeten mit einbegriffen, in (27) gleich $\frac{(i+1)\;(i+2)}{2} - 1 = \frac{i\,(i+3)}{2}$, woraus für die abgeleiteten Coefficienten in den andern Systemen folgt:

Anzahl in dem Systeme $B'\,C'$ u. s. w. $\frac{(i-1)\;(i+2)}{2}$

" " " " $C''\,D''$ " $\frac{(i-2)\;(i+1)}{2}$

und so fort bis zu der Zahl 2 in der letzten Gleichung herunter. Die ganze Anzahl aller aus den Summencoefficienten von (27) abgeleiteten andern Zahlengröfsen beträgt damit $\frac{(i-1)\,i\,(i+4)}{2\cdot 3}$, und wenn man dazu die Anzahl der Coefficienten in (27) selbst legt, so sind bis zu den Endgleichungen $A\ B'\ C''\ D'''$ u. s. w. zusammen $\frac{i\,(i+1)\ (i+5)}{2\cdot 3}$ zu bildende Gröfsen nöthig. Die Weitläuftigkeit der Rechnung nimmt deshalb sehr zu, wenn die Anzahl der Unbekannten wächst.

Der leichteren Uebersicht wegen mögen noch die Endgleichungen, aus welchen die Werthe der Unbekannten unmittelbar folgen, hier zusammengestellt werden:

$$
(40)\qquad
\begin{array}{r}
x+\frac{[ab]}{[aa]}\,y+\frac{[ac]}{[aa]}\,z+\frac{[ad]}{[aa]}\,w+\frac{[ae]}{[aa]}\,u+\frac{[af]}{[aa]}\,t+\frac{[an]}{[aa]}=0\\
y+\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\,z+\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\,w+\frac{[be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\,u+\frac{[bf\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\,t+\frac{[bn\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=0\\
z+\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\,w+\frac{[ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\,u+\frac{[cf\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}\,t+\frac{[cn\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}=0\\
w+\frac{[de\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}\,u+\frac{[df\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}\,t+\frac{[dn\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}=0\\
u+\frac{[ef\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}\,t+\frac{[en\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}=0\\
t+\frac{[fn\cdot 5]}{[ff\cdot 5]}=0
\end{array}
$$

Man kommt genau zu denselben Gleichungen, wenn man ähnlich wie bei dem einfachen Falle einer unbekannten Gröfse, ohne Hülfe der Differentialrechnung, der Function Ω eine solche Form giebt, dafs das Minimum unmittelbar daraus hervorgeht. Zugleich erlangt man eben dieselben Vortheile in Bezug auf das Gewicht der Unbekannten und die Gröfse des absoluten Minimums, welche schon bei einer Unbekannten durch die ähnliche Umformung erreicht wurden.

Die wirkliche hierzu nöthige Entwickelung von

$$\Omega = vv + v'v' + v''v''\ldots.$$

indem man die Quadrate von v selbst aus (25) ableitet und substituirt, wird durch die Bezeichnungsart leicht hingeschrieben werden können. Da alle v einerlei Form haben, so erhebe man eines derselben in das Quadrat, und verwandele dann, um Ω zu erhalten, alle aus n, a, b, c, d, e, f gebildeten Gröfsen durch eckige Klammern in Summen. Hieraus folgt der Ausdruck:

$$\Omega = \begin{cases} [aa]xx \\ +2[ab]xy + [bb]yy \\ +2[ac]xz + 2[bc]yz + [cc]zz \\ +2[ad]xw + 2[bd]yw + 2[cd]zw + [dd]ww \\ +2[ae]xu + 2[be]yu + 2[ce]zu + 2[de]wu + [ee]uu \\ +2[af]xt + 2[bf]yt + 2[cf]zt + 2[df]wt + 2[ef]ut + [ff]tt \\ +2[an]x + 2[bn]y + 2[cn]z + 2[dn]w + 2[en]u + 2[fn]t + [nn] \end{cases} \tag{41}$$

Man nehme hier alle Glieder, die x enthalten, heraus, und bringe sie in eine quadratische Form. Jede Function

$$\Omega = Pxx + 2Qx + R$$

kann auch geschrieben werden

$$\Omega = \frac{(Px+Q)^2}{P} + R - \frac{Q^2}{P}.$$

Für den gegenwärtigen Fall wird folglich

$$Px + Q = [aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]w + [ae]u + [af]t + [an] = A$$

wo A denselben Werth hat wie oben bei der Ableitung der Formeln (30), und das Glied $\frac{Q^2}{P}$ wird nach der wirklichen Entwickelung die Form haben:

$$\frac{Q^2}{P}=\left\{\begin{array}{l}
\frac{[ab]^2}{[aa]}yy \\
+2\frac{[ab]}{[aa]}[ac]yz+\frac{[ac]^2}{[aa]}zz \\
+2\frac{[ab]}{[aa]}[ad]yw+2\frac{[ac]}{[aa]}[ad]zw+\frac{[ad]^2}{[aa]}ww \\
+2\frac{[ab]}{[aa]}[ae]yu+2\frac{[ac]}{[aa]}[ae]zu+2\frac{[ad]}{[aa]}[ae]wu \\
+2\frac{[ab]}{[aa]}[af]yt+2\frac{[ac]}{[aa]}[af]zt+2\frac{[ad]}{[aa]}[af]wt \\
+2\frac{[ab]}{[aa]}[an]y+2\frac{[ac]}{[aa]}[an]z+2\frac{[ad]}{[aa]}[an]w \\
\qquad\qquad+\frac{[ae]^2}{[aa]}uu \\
\qquad\qquad+2\frac{[ae]}{[aa]}[af]ut+\frac{[af]^2}{[aa]}tt \\
\qquad\qquad+2\frac{[ae]}{[aa]}[an]t+2\frac{[af]}{[aa]}[an]t+\frac{[an]^2}{[aa]}
\end{array}\right.$$

Vereinigt man diese Glieder mit denen in Ω, welche frei von x sind, oder bildet man die Function

$$R-\frac{Q^2}{P}$$

so wird man finden, dafs alle Hülfsgröfsen, welche in (30) gebildet sind, hier wieder ihre Anwendung finden. Man kann aufserdem noch, der Analogie wegen, ein Glied, was hier neu sich bildet

$$[nn]-\frac{[an]^2}{[aa]}=[nn\cdot 1]$$

setzen, und erhält dann folgende allgemeine Form für Ω

$$(42)\qquad \Omega-\frac{A^2}{[aa]}=\left\{\begin{array}{l}
[bb\cdot 1]yy \\
+2[bc\cdot 1]yz+[cc\cdot 1]zz \\
+2[bd\cdot 1]yw+2[cd\cdot 1]zw+[dd\cdot 1]ww \\
+2[be\cdot 1]yu+2[ce\cdot 1]zu+2[de\cdot 1]wu+[ee\cdot 1]uu \\
+2[bf\cdot 1]yt+2[cf\cdot 1]zt+2[df\cdot 1]wt+2[ef\cdot 1]ut \\
+2[bn\cdot 1]y+2[cn\cdot 1]z+2[dn\cdot 1]w+2[en\cdot 1]u \\
\qquad\qquad\qquad+[ff\cdot 1]tt \\
\qquad\qquad\qquad+2[fn\cdot 1]t+[nn\cdot 1]
\end{array}\right.$$

Von der allgemeinen Gültigkeit dieser Formel kann man sich auch auf anderm Wege überzeugen.

Multiplicirt man in (25) die Gleichungen auf beiden Seiten respective mit $v, v', v'' \ldots$ so erhält man

$$\Omega = [av]\,x + [bv]\,y + [cv]\,z + [dv]\,w + [ev]\,u + [fv]\,t + [nv]$$

und wenn man in $[nv]$ die Werthe von v selbst substituirt, oder um $[nv]$ zu finden, die Gleichungen (25) respective mit $n, n', n'' \ldots$ u. s. w. multiplicirt:

$$\begin{aligned}\Omega = \quad & [av]\,x + [bv]\,y + [cv]\,z + [dv]\,w + [ev]\,u + [fv]\,t \\ & + [an]\,x + [bn]\,y + [cn]\,z + [dn]\,w + [en]\,u + [fn]\,t + [nn]\end{aligned}$$

welches mit (41) übereinstimmt. Denn die Gleichungen (27) sind, der Bedingung des Minimums wegen, dadurch entstanden, dafs man $[av]$, $[bv]$, $[cv]$, $[dv]$, $[ev]$, $[fv]$, oder nach der später erwähnten Art der Bezeichnung $A, B, C, D, E, F = 0$ setzte, woraus sich die Identität der hier angewandten Coefficienten von x, y, z, u. s. w. in der ersten Reihe, mit den Gleichungen (27) ergiebt. Multiplicirt man aber die Gleichungen (27) respective mit x, y, z, w, u, t, addirt die Producte und fügt die andern Glieder in diesem Ausdruck von Ω hinzu, so entsteht die Gleichung (41).

Zieht man jetzt auf beiden Seiten $\frac{[av]^2}{[aa]}$ oder $\frac{A^2}{[aa]}$ ab, und entwickelt auf der rechten Seite

$$\begin{aligned}[av]\,x - \frac{[av]^2}{[aa]} &= [av]\left\{x - \frac{[av]}{[aa]}\right\} \\ &= A\left\{-\frac{[ab]}{[aa]}\,y - \frac{[ac]}{[aa]}\,z - \frac{[ad]}{[aa]}\,w - \frac{[ae]}{[aa]}\,u - \frac{[af]}{[aa]}\,t - \frac{[an]}{[aa]}\right\} \\ &= A\left\{-\frac{[ab]}{[aa]}\,y - \frac{[ac]}{[aa]}\,z - \frac{[ad]}{[aa]}\,w - \frac{[ae]}{[aa]}\,u - \frac{[af]}{[aa]}\,t\right\} \\ &\quad + \left\{-[an]\,x - \frac{[ab]}{[aa]}[an]\,y - \frac{[ac]}{[aa]}[an]\,z - \frac{[ad]}{[aa]}[an]\,w \right. \\ &\qquad \left. - \frac{[ae]}{[aa]}[an]\,u - \frac{[af]}{[aa]}[an]\,t - \frac{[an]^2}{[aa]}\right\}\end{aligned}$$

so erhält man die Form

$$\Omega - \frac{A^2}{[aa]} = \left(B - \frac{[ab]}{[aa]} A\right) y + \left(C - \frac{[ac]}{[aa]} A\right) z + \left(D - \frac{[ad]}{[aa]} A\right) w$$
$$+ \left(E - \frac{[ae]}{[aa]} A\right) u + \left(F - \frac{[af]}{[aa]} A\right) t + \left([bn] - \frac{[ab]}{[aa]} [an]\right) y$$
$$+ \left([cn] - \frac{[ac]}{[aa]} [an]\right) z + \left([dn] - \frac{[ad]}{[aa]} [an]\right) w$$
$$+ \left([en] - \frac{[ae]}{[aa]} [an]\right) u + \left([fn] - \frac{[af]}{[aa]} [an]\right) t$$
$$+ \left([nn] - \frac{[an]^2}{[aa]}\right)$$

Nun aber entstanden die Gleichungen (31) oder B', C', D', E', F', aus der Elimination von x zwischen B und A, C und A, D und A u.s.w. wodurch offenbar

$$B' = \left(B - \frac{[ab]}{[aa]} A\right), \quad C' = \left(C - \frac{[ac]}{[aa]} A\right) \text{ u. s. w.}$$

folglich wird die neue Function

$$\Omega - \frac{A^2}{[aa]} = B'y + C'z + D'w + E'u + F't$$
$$+ [bn \cdot 1]y + [cn \cdot 1]z + [dn \cdot 1]w + [en \cdot 1]u + [fn \cdot 1]t + [nn \cdot 1]$$

welches die Formel (42) ist.

Aus dieser Ableitung geht hervor, dafs ein ganz ähnliches Verfahren bei allen Systemen von Gleichungen angewandt werden kann, deren Coefficienten eben so symmetrisch geordnet sind wie die der Gleichungen (27), und da bei allen folgenden Systemen dieser Fall eintritt, so wird eine weitere Entwickelung unnöthig sein. Man übersieht sogleich, dass die folgende Endform richtig sein mufs.

Zuerst führe man noch folgende neue Hülfsgröfsen ein:

$$(43)^* \begin{cases} [nn] - \frac{[an]^2}{[aa]} = [nn \cdot 1] & [nn \cdot 3] - \frac{[dn \cdot 3]^2}{[dd \cdot 3]} = [nn \cdot 4] \\ [nn \cdot 1] - \frac{[bn \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} = [nn \cdot 2] & [nn \cdot 4] - \frac{[en \cdot 4]^2}{[ee \cdot 4]} = [nn \cdot 5] \\ [nn \cdot 2] - \frac{[cn \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} = [nn \cdot 3] & [nn \cdot 5] - \frac{[fn \cdot 5]^2}{[ff \cdot 5]} = [nn \cdot 6] \end{cases}$$

Ferner setze man wie oben:

$$
(43)\quad
\begin{aligned}
&[aa]x+[ab]\,y+[ac]\,z+[ad]\,w+[ae]\,u+[af]\,t+[an]=A\\
&\qquad [bb\cdot1]y+[bc\cdot1]z+[bd\cdot1]w+[be\cdot1]u+[bf\cdot1]t+[bn\cdot1]=B'\\
&\qquad\qquad [cc\cdot2]z+[cd\cdot2]w+[ce\cdot2]u+[cf\cdot2]t+[cn\cdot2]=C''\\
&\qquad\qquad\qquad [dd\cdot3]w+[de\cdot3]u+[df\cdot3]t+[dn\cdot3]=D'''\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad [ee\cdot4]u+[ef\cdot4]t+[en\cdot4]=E^{\mathrm{IV}}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [ff\cdot5]t+[fn\cdot5]=F^{\mathrm{V}}
\end{aligned}
$$

Gleichungen, welche immer den ersten Gleichungen in den Systemen (27), (31), (33), (35), (37), (39) correspondiren. Dann wird für jeden Werth von x, y, z, u. s. w.

$$
(44)\,..\;\Omega=\frac{AA}{[aa]}+\frac{B'B'}{[bb\cdot1]}+\frac{C''C''}{[cc\cdot2]}+\frac{D'''D'''}{[dd\cdot3]}+\frac{E^{\mathrm{IV}}E^{\mathrm{IV}}}{[ee\cdot4]}+\frac{F^{\mathrm{V}}F^{\mathrm{V}}}{[ff\cdot5]}+[nn\cdot6]
$$

Bei dieser neuen Form ist es ein wesentlicher Umstand, dafs alle Nenner $[aa]$, $[bb\cdot1]$, $[cc\cdot2]$, $[dd\cdot3]$, $[ee\cdot4]$, $[ff\cdot5]$, ihrer Natur nach positiv sein müssen. Für

$$[aa]=aa+a'a'+a''a''+\ldots$$

als einer Summe von Quadraten ist dieses von selbst einleuchtend. In Bezug auf $[bb\cdot1]$ betrachte man die Function $\Omega-\frac{AA}{[aa]}$. Sowohl nach den letzten Formeln als nach der obigen Entwickelung ist diese Function frei von x. Hätte man daher in Ω den Werth von x substituirt, der aus $A=0$ hervorgeht, so würde man sogleich $\Omega-\frac{AA}{[aa]}$ erhalten haben, oder wenn man in jedem v dem x den Werth gegeben hatte, für welchen $A=0$ wird, so würde die Summe der Quadrate dieser v gleich $\Omega-\frac{A^2}{[aa]}$ geworden sein. In diesem Falle würde der Coefficient von yy gleich $[bb\cdot1]$ geworden sein, folglich mufs $[bb\cdot1]$, als eine Summe von lauter Quadraten der neuen Coefficienten von y in jedem v, nothwendig immer eine positive Gröfse bleiben. Eben diese Schlufsart ist auf alle anderen Nenner anwendbar. So würde $[cc\cdot2]$ der Coefficient von zz geworden sein, wenn man in jedem v den Unbekannten x und y die Werthe, welche aus $A = 0$ und $B' = 0$ hervorgehen, gleich anfangs gegeben hätte, und dann durch Erhebung jedes v in das Quadrat, und die Summirung aller Quadrate die Function $\Omega - \frac{AA}{[aa]} - \frac{B'B'}{[bb \cdot 1]}$ unmittelbar entwickelt erhalten hätte. Eben so ist $[dd \cdot 3]$ der Coefficient von ww nach der Elimination von x, y, z, aus den ursprünglichen Bedingungsgleichungen vermittelst $A = 0$, $B' = 0$, $C'' = 0$ u. s. w.

Hieraus folgt, dafs, da die rechte Seite der Gleichung (44) aus lauter positiven Gliedern zusammengesetzt ist, von denen jedes folgende Glied immer eine unbekannte Gröfse weniger als das vorhergehende enthält, und deshalb auch, weil die Unbekannten selbst unabhängig von einander sind, kein Glied durch das andere seinem Werth nach bedingt ist, der absolut kleinste Werth von Ω nur dadurch erhalten werden kann, dafs man jedes einzelne Glied $= 0$ setzt. Die Bedingung des Minimums ist folglich, übereinstimmend mit dem durch die Differentialrechnung gefundenen Resultate, in den Gleichungen

$$A = 0, \quad B' = 0, \quad C'' = 0, \quad D''' = 0, \quad E^{\mathrm{IV}} = 0, \quad F^{\mathrm{V}} = 0$$

nothwendig, aber auch vollständig enthalten.

Indessen giebt die neue Form (44), aufser den Bedingungen des Minimums, auch noch den numerischen Werth dieses Minimums selbst, nämlich $[nn \cdot 6]$, und gewährt dadurch eine höchst scharfe, und bei der Weitläuftigkeit der Rechnung, eine höchst erwünschte Prüfung über das ganze Eliminationsverfahren. Hat man nämlich die Werthe von x, y, z, u. s. w. aus den Bedingungsgleichungen des Minimums entwickelt, so wird man in der Regel auch die Mühe der Substitution dieser Werthe in die Gleichungen (25) nicht scheuen, um die Fehler, welche nun noch übrig bleiben, einzeln kennen zu lernen. Erhebt man dann jeden dieser so bestimmten Fehler in das Quadrat, und bildet die Summe der Quadrate, so mufs diese $= [nn \cdot 6]$ werden, versteht sich innerhalb der Grenze der Genauigkeit, welche die angewandten Logarithmentafeln erlauben. Die Uebereinstimmung controllirt die ganze Rechnung von den Gleichungen (25) an, so dafs, wenn man nach dem obigen Vorschlage diese Gleichungen besonders geprüft hat, die Richtigkeit der Rechnung verbürgt werden kann. Dabei ist der zu dieser Controlle nöthige Zeitaufwand höchst gering. Es wird nur die Bildung der ersten sechs Hülfsgröfsen in (43)* erfordert, deren Anzahl, wenn man noch $[nn]$ hinzurechnet, was früher auch nicht eingeführt war, sich auf $(i+1)$ neue Gröfsen beläuft. Wenn also vorher die Anzahl der Summencoefficienten in den Gleichungen (27) $\frac{i(i+3)}{2}$ war, so ist sie jetzt $= \frac{i(i+3)}{2} + 1 = \frac{(i+1)(i+2)}{2}$, und wenn vorher $\frac{(i-1)i(i+4)}{2\cdot 3}$ neue Hülfsgröfsen daraus abgeleitet wurden, so werden jetzt $\frac{(i-1)i(i+4)}{2\cdot 3} + i$ oder $\frac{i(i+1)(i+2)}{2\cdot 3}$ daraus berechnet. Die ganze Anzahl aller Zahlengröfsen betrug vorher $\frac{i(i+1)(i+5)}{2\cdot 3}$, und mit der Controlle $\frac{(i+1)(i+2)(i+3)}{2\cdot 3}$.

Die entwickelte Form des Minimums

$$[nn\cdot 6] = [nn] - \frac{[an]^2}{[aa]} - \frac{[bn\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]} - \frac{[cn\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]} - \frac{[dn\cdot 3]^2}{[dd\cdot 3]} - \frac{[en\cdot 4]^2}{[ee\cdot 4]} - \frac{[fn\cdot 5]^2}{[ff\cdot 5]}$$

zeigt übrigens, wie es in der Natur der Sache liegt, dafs nach dieser Substitution der Werthe, welche das Minimum bewirken, alle $[an]$, $[bn\cdot 1]$, $[cn\cdot 2]$, u. s. w., folglich auch alle $[an]$, $[bn]$, $[cn]$, $[dn]$, $[en]$, $[fn]$, sämmtlich $=0$ werden müssen.

Wenn gleich durch die bisher gegebene Auflösung der nächste Zweck, die Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten, vollständig erreicht ist, so würde doch ein Hauptvortheil bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate, ja vielleicht der wesentlichste und wichtigste Nutzen, den sie gewährt, ganz wegfallen, wenn man nicht zugleich auch den Grad der Sicherheit kennen lernte, den die erhaltenen Werthe haben werden. Schon ehe man diese Methode kannte, hatte man durch Vervielfältigung der Beobachtungen, und mannichfache Combination der Bedingungsgleichungen, den Mangel an Consequenz, den die frühere empirische Weise unbekannte Gröfsen aus beobachteten Werthen zu bestimmen nothwendig haben mufste, häufig mit dem besten Erfolge ersetzt, so dafs die Behauptung mehrerer berühmter Astronomen, wie z. B. eines Delambre, in der ersten Zeit der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Beobachtung nicht ganz ungegründet war, man könne auf den gewöhnlichen Wegen fast dieselben Werthe der Unbekannten finden. Die Methode der kleinsten Quadrate kann und soll ihrer Natur nach nicht etwas ganz Neues sonst gar nicht Erreichbares geben. So wie im gewöhnlichen Leben practischer Blick und richtiges Urtheil das wahrscheinlichere Resultat von dem weniger wahrscheinlichen, besonders in einfachen Fällen, und da wo keine absolute Schärfe verlangt wird, meistentheils unterscheiden läfst, so werden bei einiger Uebung auch Werthe der Unbekannten, die von den wahrscheinlichsten nicht sehr abweichen, aus den vorgelegten Beobachtungen sich auch ohne Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung wohl ermitteln lassen, besonders wenn die Anzahl der Unbekannten nicht sehr grofs ist. Dafs indessen diese letztere Beschränkung dabei sehr zu beachten ist, lehrt die Erfahrung aller früheren Zeiten auf das deutlichste. Immer gingen die früheren Methoden darauf hinaus, die Unbekannten wo möglich einzeln zu bestimmen. Für die Elemente der Planetenbahnen z. B. benutzte man bei jedem einzelnen ganz allein die Hauptepochen, welche es am schärfsten zu geben versprachen, und liefs die Beobachtungen, in welchen kein Element einen ganz überwiegenden Einflufs äufserte, nur als eine ziemlich rohe Bestätigung der anderweitig erhaltenen Bestimmungen gelten, ohne sie in gehörige Verbindung mit den übrigen zu setzen. Der Vortheil der Methode der kleinsten Quadrate besteht bei der Ermittelung der wahrscheinlichsten Werthe demnach hauptsächlich darin, dafs diese Methode in allen Fällen, gleichviel ob eine gröfsere oder geringere Zahl von Unbekannten zusammen vorhanden ist, für alle Berechner, sie mögen mehr oder weniger geübt sein in der Unterscheidung des wahrscheinlicheren vom unwahrscheinlicheren, und völlig consequent, sobald die ursprünglichen Annahmen über das relative Verhältnifs der Güte der einzelnen Beobachtungen, und ihre Abhängigkeit von den theoretischen Hypothesen festgestellt sind, die wahrscheinlichsten Werthe finden läfst. Der einzige Einwurf gegen sie kann in dieser Hinsicht nur ihre gröfsere Weitläuftigkeit sein. Allein dieser ist in der That nicht so begründet als man es häufig glauben machen wollte. Würden die vielen wiederholten Versuche, die man bei dem rein empirischen Verfahren macht und machen mufs, um einigermafsen sicher zu gehen, dafs nicht etwa ein Irrthum sich eingeschlichen, besonders wenn man die wahrscheinlicheren Werthe noch nicht sehr genähert kennt, mit gleicher Offenheit angegeben, mit welcher das Verfahren bei der Methode der kleinsten Quadrate dargelegt werden kann, so würde der Zeitaufwand auch in den einfacheren Fällen so gut wie gleich ausfallen, und der etwaige Unterschied, durch die Sicherheit, welche die Methode der kleinsten Quadrate gewährt, völlig vergütet werden. In zusammengesetzteren Fällen scheint es selbst fast unmöglich, ohne diese Methode etwas befriedigendes zu erhalten. Ein andrer Einwurf, den man hin und wieder wohl macht, dafs die constanten Fehler und Mängel der Theorie doch die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung unsicher, und folglich überflüssig machten, kann schwerlich in Betracht kommen. Dieselben Umstände, welche der strengeren Behandlung in den Weg treten, müssen auch der roheren Schätzung in eben dem Grade hinderlich sein.

Allein aufser der Ermittelung der wahrscheinlichsten Werthe aus gegebenen Beobachtungen, oder aufser der besten oder doch einer befriedigenden Darstellung des Vergangenen zufolge einer theoretischen Hypothese, verlangt die Natur unserer Erfahrungswissenschaften auch einen sicheren Schlufs auf die Zukunft. Besteht doch das eigentliche Wesen aller dieser Wissenschaften darin, fortwährend sich Rechenschaft zu geben, ob die aufgestellten Theorieen in ihren einzelnen Theilen der Natur entsprechen, und zu diesem Zwecke fortwährend die früheren Theorieen mit der späteren Praxis prüfend zu vergleichen, um aus ihrer Abweichung oder Uebereinstimmung für die Aenderung oder Beibehaltung sich entscheiden zu können. Fehlt uns hier der aus den früheren Daten allein zu entlehnende Maaſsstab, wie groſs eine solche Abweichung sein kann, ohne noch gerade einen Fehler der Theorie anzuzeigen, oder wann ein solcher als durchaus bewiesen anzunehmen ist, so entbehren wir jeder Art von Leitfaden, und werden eben so leicht verführt werden können, Richtiges zu bezweifeln als Falsches beizubehalten. Besonders wird dieses da der Fall sein können, wo die Theorie ausgebildet genug ist, um nur in Einzelheiten, deren Wirkung weniger auffallend in die Augen fällt, und nur in einer gröſseren Masse von Erscheinungen sich zeigt, noch successiver Verbesserung zu bedürfen. Dieser Schluſs aber von der Vergangenheit auf die Zukunft, wenn er auf bestimmte Zahlenverhältnisse zurückgeführt werden soll, kann nur durch die strengere Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung aus der Erfahrung erhalten werden. Das empirische Verfahren, wenn es in den Werthen, wie die Vergangenheit sie fordert, auch nicht allzubedeutend irren würde, gewährt gar keine Bestimmung der Grenze, innerhalb welcher sie allein schwanken können, und beraubt uns so des einzigen Mittels schnell und sicher dem wahren Ziele uns zu nähern. Selbst wenn es uns das Richtige giebt, so läſst es doch in völliger Ungewiſsheit über den eigentlichen Werth des Besitzes.

Die Geschichte der Astronomie ist voll von Beispielen der nachtheiligen Wirkung einer solchen Unkenntniſs. Wäre, um nur aus den neueren Zeiten einiges anzuführen, der hohe Werth der Bradley'schen Beobachtungen früher so erkannt worden, wie er durch Bessel's Bearbeitung sich gezeigt hat (und es unterliegt keinem Zweifel, daſs eine richtige Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, auch nach dem damaligen Zustande der astronomischen anderweitigen Kenntnisse, eine genäherte Schätzung schon viel früher möglich, selbst nicht sehr schwer gemacht hätte), so wäre der jetzt so allgemein erregte Wetteifer weit früher eingetreten, und es würden nicht noch in der letzten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts und im Anfange des jetzigen, gröſsere

Fehler selbst von einer oder mehreren Minuten, als unbeträchtlich haben angesehen werden können. Differenzen, wie die zwischen den Maskely'neschen und Piazzi'schen Declinationen, hätten nicht so lange, wie es geschehen ist, die so häufig hervorgehobene Genauigkeit der astronomischen Daten zweifelhaft gemacht. Die lebendige Ueberzeugung von der Unmöglichkeit solcher Fehler, wie die Hypothese einer Kreisbewegung sie bei den Piazzi'schen Ceresbeobachtungen, zur Zeit ihrer Entdeckung, zurückliefs, würde es gar nicht gestattet haben, sich bei dieser Hypothese zu beruhigen, und eben so wenig würden die irrigen Voraussetzungen über die Lage der Apsidenlinie, die Burkhardt machte, und aus welchen er schlofs, dafs zur Aufsuchung im nächsten Jahre eine sehr vage Kenntnifs der Elemente hinreichen würde, die Gefahr eines Verschwindens des neuentdeckten Planeten herbeigeführt haben. Wenn nicht ein glückliches Zusammentreffen von Umständen damals Gaufs der Astronomie zugewandt hätte, und durch ihn die Auflösung eines der schwierigsten Problems der theoretischen Astronomie, gerade in dem Augenblicke wo das Bedürfnifs es dringend forderte, gegeben wäre, so kann man mit vollem Rechte zweifeln, ob, wegen der Unkenntnifs des wahren Werthes der astronomischen Beobachtungen überhaupt, die Wiederauffindung der Ceres gelungen wäre. Denn wenn auch die directe Auflösung fehlte, so würde bei fester Einsicht von der Nothwendigkeit Piazzi's Beobachtungen gehörig darzustellen, die Zeit eines Jahres hingereicht haben, und die Wichtigkeit des Gegenstandes grofs genug gewesen sein, um sich nicht abschrecken zu lassen durch vielfache Versuche dem Ziele wenigstens etwas näher zu kommen.

Auch bei diesem unbestreitbaren Vortheile, den die Methode der kleinsten Quadrate, und nur sie allein vermittelst der Beobachtungen gewähren kann, die Bestimmung der Sicherheit, mit welcher wir irgend welche Gröfsen zu kennen hoffen dürfen, hat man den Einwurf gemacht, dafs diese Kenntnifs sich häufig später nicht als genau bewährte, und es deswegen nicht immer der Mühe werth sei darauf auszugehen. Es läſst sich dabei nicht leugnen, daſs eine nicht ganz richtige Anwendung der Methode, oder vielmehr eine Ueberschätzung, ein Miſskennen dessen was sie leisten könne, dazu beigetragen hat, diesem Einwurfe bei Vielen Gewicht zu verschaffen. Nur zu häufig glaubt man durch diese Methode allein alle anderen Mängel ersetzen zu können, und durch sie sowohl ungenaue Beobachtungen zu dem Range von genauen zu erheben, als auch selbst die Lücken in der theoretischen Kenntniſs auszufüllen. Die Methode giebt mit strenger Consequenz das was aus den ursprünglichen Annahmen folgt, und der ungünstige spätere Erfolg kann nicht ihr, sondern nur der Unrichtigkeit dieser Annahmen zur Last fallen. Waren die Beobachtungen nicht so genau, als man annehmen zu können glaubte, so folgt von selbst, daſs auch die Sicherheit der abgeleiteten Resultate in eben dem Verhältniſs geringer wird, besonders wenn groſse constante Fehler den Schluſs, den man sonst von der Uebereinstimmung der Beobachtungen unter sich, auf ihre absolute Güte machen kann, ganz entkräften sollten. Fehlt auſserdem die Theorie noch um so viel, daſs ganze beträchtliche Glieder, die nicht um den Werth von Null als ein Maximum herumschwanken, sondern andere Gesetze befolgen, den Bedingungsgleichungen eigentlich noch beigefügt werden sollten, so kann natürlich die Methode der kleinsten Quadrate diese nicht ersetzen. Aber anstatt hierin einen Nachtheil zu finden, sollte man dieses vielmehr als einen Vorzug betrachten. Gerade hierin liegt die Möglichkeit, sich die feste Ueberzeugung zu verschaffen, es sei noch ein wesentlicher Mangel in der theoretischen Behandlung der Aufgabe selbst, und es wirke noch ein Element ein, was man bisher auſser Acht gelassen — eine Ueberzeugung, die wir sonst vielleicht noch längere Zeit entbehren, und niemals mit gleicher Sicherheit aus dem empirischen Verfahren erhalten würden. Ganz dasselbe findet auch in Bezug auf die Entdeckung constanter Fehlerquellen statt, deren Existenz die Methode der kleinsten Quadrate am schnellsten, sichersten und leichtesten erkennen läſst. Sind freilich die Beobachtungen so ungenau, und ist die Theorie so mangelhaft, dafs wir schon im Voraus wissen, die jetzt daraus zu ziehenden Resultate werden später noch einer gänzlichen Umwandlung bedürfen; so ist kein Grund vorhanden weiter zu gehen, als bis zu den Näherungswerthen von welchen die Methode der kleinsten Quadrate erst anfängt; und wenn gleich ihr Gebrauch nie schaden kann, so wird doch die Unterlassung ihrer Anwendung unter solchen unvortheilhaften Umständen hinreichend entschuldigt sein.

Der Wichtigkeit des vorgesetzten Zweckes, die Bestimmung der Gewichte der wahrscheinlichsten Werthe, scheint es angemessen, die verschiedenen Wege, auf denen man dazu gelangen kann, ausführlicher durchzugehen. Sie sind sämmtlich von Gaufs ihren Principien, und gröfstentheils auch ihrer vollständigen Entwickelung nach, in der *Theoria motus corp. coel.* und in der *Theoria combinationis Observationum* angegeben.

Am directesten gelangt man zu der Bestimmung der Gewichte, bei jedem für die Unbekannten gefundenen Werthe, durch die Verbindung der letzten Form für Ω (44), mit den früheren Sätzen [I] und [II]. Nach diesen letzteren ist die Wahrscheinlichkeit irgend welches Systems von x, y, z, w, u, t, proportional der Function

$$\frac{h^m}{\pi^{\frac{1}{2}m}} e^{-hh \cdot \Omega}$$

wenn h die anfänglich angenommene Einheit der Genauigkeit bezeichnet, oder mit Weglassung des constanten Factors proportional*) dem

$$e^{-hh \cdot \Omega}$$

Die Anzahl aller möglichen Systeme wird sich zusammensetzen aus den Combinationen aller möglichen Werthe der einzelnen x, y, z u. s. w. mit einander. Aehnlich wie bei den Fehlern der

*) Strenger: die Wahrscheinlichkeit des Fehlers eines Systems, der zwischen x, y, z, w, u, t und $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, $w+dw$, $u+du$, $t+dt$, liegt, ist proportional dem $e^{-hh \cdot \Omega}\, dx \cdot dy \cdot dz \cdot dw \cdot du \cdot dt$, wofür im folgenden derselbe abgekürzte Ausdruck wie hier gesetzt werden wird.

Beobachtung wird es auch hier erlaubt sein, die Grenzen, innerhalb welcher ein Werth von x z. B. möglich ist, analytisch anzunehmen, d. h. so wie die Natur der Functionen v für die möglichen Werthe jedes v es erlaubt; oder da v für alle Correctionen eine lineare Function ist, für x, y, z u. s. w. die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ zu setzen. Nimmt man nun die Summe aller der Functionen, welchen die jedesmalige Wahrscheinlichkeit einer einzelnen Combination von x, y, z u. s. w. proportional ist, für alle möglichen Werthe, so wird man die Gröfse erhalten, welcher die Gewifsheit proportional gesetzt werden mufs, oder für unsern Fall wird die Gewifsheit ausgedrückt werden können durch das sechsfache Integral, welches deswegen als Einheit für die andern Wahrscheinlichkeiten gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hh\Omega}\, dx\, dy\, dz\, dw\, du\, dt = 1$$

wo sich die Grenzen auf jede Variable beziehen.

Integrirt man hier zuerst nach einer der Variablen, z. B. x, und betrachtet bei dieser Integration die andern als constant, so erhält man die Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen bestimmten Systems von y, z, w, u, t, bei unbestimmt gelassenem x, in Bezug auf die eben bestimmte Einheit, oder man erhält die Zahl, wie oft ein einzelnes bestimmtes System von y, z, w, u, t, mit Rücksicht auf die Häufigkeit seines Vorkommens unter den übrigen, sich mit irgend welchem Werthe von x verbinden kann, wenn das eben angegebene sechsfache Integral alle möglichen Fälle überhaupt vorstellt. Die Integration nach x kann vermöge der Form von Ω in (44) sehr leicht ausgeführt werden. Denn da hier nur A allein unter allen andern Gröfsen x enthält, und

$$[aa]\, dx = dA$$

ist, so wird

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hh\Omega}\, dx = e^{-hh\left\{\frac{B'B'}{[bb\cdot 1]} + \frac{C''C''}{[cc\cdot 2]} + \frac{D'''D'''}{[dd\cdot 3]} + \frac{E^{IV}E^{I}}{[ee\cdot 4]} + \frac{F^{V}F^{V}}{[ff\cdot 5]} + [nn\cdot 6]\right\}}$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hh\frac{AA}{[aa]}} \frac{dA}{[aa]}$$

wofür man nach (5) sogleich den Werth findet

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{h\sqrt{[aa]}}\,e^{-hh\left\{\frac{B'B'}{[bb\cdot 1]}+\frac{C''C''}{[cc\cdot 2]}+\frac{D'''D'''}{[dd\cdot 3]}+\frac{E^{IV}E^{IV}}{[ee\cdot 4]}+\frac{F^{V}F^{V}}{[ff\cdot 5]}+[nn\cdot 6]\right\}}$$

Integrirt man diesen letzten Ausdruck jetzt nach y, bei constantem z, w, u, t, so hat man wiederum die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen bestimmten Systems dieser vier letzten Variabeln, bei unbestimmt gelassenem x und y, in Bezug auf die obige Einheit, oder die Anzahl der Verbindungen, in welche irgend ein bestimmtes System von z, w, u, t, mit allen möglichen x und y treten kann. Da wiederum B' allein y enthält, so wird, wie man sogleich übersieht

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hh\Omega}\,dx\,dy$$

$$=\frac{\pi}{h^2\sqrt{([aa][bb\cdot 1])}}\,e^{-hh\left\{\frac{C''C''}{[cc\cdot 2]}+\frac{D'''D'''}{[dd\cdot 3]}+\frac{E^{IV}E^{IV}}{[ee\cdot 4]}+\frac{F^{V}F^{V}}{[ff\cdot 5]}+[nn\cdot 6]\right\}}$$

Geht man so fort für z, w, u, so findet sich zuletzt für einen bestimmten Werth von t allein der Ausdruck:

$$\frac{\sqrt{\pi^5}}{h^5\sqrt{([aa][bb\cdot 1][cc\cdot 2][dd\cdot 3][ee\cdot 4])}}\,e^{-hh\left(\frac{F^{V}F^{V}}{[ff\cdot 5]}+[nn\cdot 6]\right)}$$

Die oben bezeichnete Einheit wird, auf dieselbe Weise behandelt, für den Inbegriff aller möglichen Fälle geben:

$$\frac{\sqrt{\pi^6}}{h^6\sqrt{([aa][bb\cdot 1][cc\cdot 2][dd\cdot 3][ee\cdot 4][ff\cdot 5])}}\,e^{-hh[nn\cdot 6]}$$

so dafs die Wahrscheinlichkeit irgend welches bestimmten Werthes von t ausgedrückt wird durch

$$\frac{h\sqrt{[ff\cdot 5]}}{\sqrt{\pi}}\,e^{-hh\frac{F^{V}F^{V}}{[ff\cdot 5]}}$$

oder wenn man den Werth von F^{V} substituirt, so wird die Wahrscheinlichkeit von t:

$$=\frac{h\sqrt{[ff\cdot 5]}}{\sqrt{\pi}}\,e^{-hh[ff\cdot 5]\left\{t+\frac{[fn\cdot 5]}{[ff\cdot 5]}\right\}^2}$$

aus welcher Form sogleich hervorgeht, dafs sowohl der Werth von t, für welchen $F^v = 0$, der wahrscheinlichste ist, als auch das H, welches diesem Werthe entspricht gleich $h \sqrt{[ff \cdot 5]}$, oder das Gewicht des wahrscheinlichsten Werthes von t gleich $[ff \cdot 5]$ wird, d. h. gleich dem Coefficienten von t in der letzten Gleichung, in welcher t allein vorkommt.

Man würde ohne Berücksichtigung der hier betrachteten Einheit, als des Inbegriffs aller möglichen Fälle, aus dem Satze (IV), der sich auf das Verhältnifs der verschiedenen Wahrscheinlichkeiten gründet, dasselbe gefunden haben.

Hieraus folgt die erste allgemeine Methode, das Gewicht jedes wahrscheinlichsten Werthes bei jeder beliebigen Anzahl von Unbekannten zu finden, wie Gaufs sie in der *Theoria motus corp. coel.* § 182 gegeben hat:

Eliminirt man aus den unveränderten Gleichungen des Minimums, eine Unbekannte nach der andern, durch successive Substitution, ohne einen Eliminationsfactor weiter einzuführen, so ist das Gewicht des wahrscheinlichsten Werthes der Unbekannten, die zuletzt allein übrig bleibt, gleich dem Coefficienten, welchen die Unbekannte in der letzten Gleichung hat, in welcher sie allein erscheint, versteht sich in Bezug auf die Einheit der Genauigkeit, welche bei den Grundgleichungen angenommen ist.

Um hiernach die Gewichte aller Unbekannten zu bestimmen, wird man genöthigt sein, nach und nach jede zur letzten allein übrigbleibenden zu machen. Die anscheinende Weitläuftigkeit dieser Rechnung wird indessen in der Ausübung sehr vermindert, und im Wesentlichen darauf beschränkt, dafs man einmal vollständig umkehrt, also wenn man zuerst die Reihefolge $x, y, z, w, u, t,$ angenommen hat, oder was der Bezeichnung nach leichter bei der Rechnung zu übersehen ist, $a, b, c, d, e, f,$ man nachher auch einmal die Ordnung $f, e, d, c, b, a,$ vollständig durchführt. Es ist nämlich klar, da es blofs darauf ankommt, eine Gröfse zu der letzten zu machen, dafs die Ordnung, in welcher die früheren auf einander folgen, hierbei gleichgültig ist. Wählt man folglich unter allen Combinationen, bei welchen e (oder u) die letzte ist, die folgende a, b, c, d, f, e, aus, so wird man alle Systeme bis zu $[ee \cdot 4]$ $[ef \cdot 4]$ unverändert aus der ersten Elimination beibehalten können, und hat nur mit den beiden Gleichungen E^{IV} und F^{IV} zu thun, wodurch man sogleich $[ee \cdot 5]$ erhält. Eben so folgt $[dd \cdot 5]$ aus den drei Gleichungen D''', E''', F''', ganz allein. Behandelt man nun die Anordnung f, e, d, c, b, a, eben so, so hat man $[aa \cdot 5]$ unmittelbar, $[bb \cdot 5]$ aus zwei, $[cc \cdot 5]$ aus drei Gleichungen. Ueberhaupt gehe man, nachdem man einmal vollständig umgekehrt hat, in jeder der beiden Eliminationen bis zur halben Zahl der Unbekannten zurück, und bringe durch fortgesetzte Halbirungen jede einzelne zuletzt allein in eine Endgleichung. Man hat dabei keine anderen Formeln zu beachten, als die der ursprünglichen Elimination, kann, wenn man nur die Gewichte haben will, bei der zweiten Umkehrung die aus n zusammengesetzten Gröſsen weglassen, da sie nur den Zahlenwerth bestimmen, und wird wenn man die kleine Mühe nicht scheut diese mitzunehmen, eine schöne Prüfung für das Eliminationsverfahren haben. Denn der Werth von x bei der zweiten Umkehrung, der direct erhalten wird, muſs übereinstimmen mit dem aus der successiven Substitution in $F^{V} = 0$, $E^{IV} = 0$, $D''' = 0$, $C'' = 0$, $B' = 0$, $A = 0$ sich ergebenden.

Diese Auflösung ist bisher am häufigsten angewandt worden, und besonders der eben erwähnten Prüfung halber, deren Zweckmäſsigkeit bei dem wirklichen Gebrauche sehr hervor tritt, wird sie auch wohl in practischer Hinsicht in Zukunft den Vorrang behaupten. Will man doch einmal vollständig die Reihefolge umkehren, so ist die übrige Rechnung zur Ermittelung der Gewichte ganz unbedeutend. Indessen so wenig gegen ihre Strenge sich einwenden läſst, so kann man es doch als eine kleine Unvollkommenheit ansehen, daſs hierbei die Werthe und Gewichte nicht isolirt für jede einzelne Unbekannte, sondern nur gewissermaſsen gemeinschaftlich bestimmt werden. Eine andere von Gauſs in der *Theoria combinationis obsv.* gegebene Methode (die zum Theil schon in der *Theoria motus corp.* § 183 angedeutet ist) ist von diesem kleinen Mangel frei, und betrachtet überhaupt die Aufgabe aus einem so verschiedenen Gesichtspuncte, dafs sie eben deshalb den wichtigen Zweck für Viele noch anschaulicher machen wird.

Betrachtet man sowohl die ursprünglichen Gleichungen (25) und (27), als auch die, welche die Auflösung unmittelbar geben (40), so sieht man, dafs die wahrscheinlichsten Werthe von x, y, z u. s. w. nothwendig lineare Functionen in Bezug auf die einzelnen n stets sein müssen. Man kann sich nämlich bei den Gleichungen (40) leicht überzeugen, dafs alle Gröfsen $[an]$, $[bn \cdot 1]$ bis $[fn \cdot 5]$ sämmtlich lineare Functionen der n sein müssen, wenn man auf ihre Zusammensetzung zurückgeht. Wären diese Werthe unmittelbar als solche lineare Functionen gegeben, hätte z. B. die erste der Gleichungen (40) an sich schon die entwickelte Form:

$$x + \alpha n + \alpha' n' + \alpha'' n'' \ldots\ldots = 0$$

so würde die Bestimmung des mittleren Fehlers, folglich auch des Gewichtes oder wahrscheinlichen Fehlers von x nach (20) sehr einfach sein. Der Voraussetzung zufolge haben alle n einen gleichen mittleren Fehler, er sei $= \varepsilon$, wonach der mittlere Fehler von x

$$\begin{aligned} &= \varepsilon \sqrt{(\alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' \ldots .)} \\ &= \varepsilon \sqrt{[\alpha\alpha]} \end{aligned}$$

oder das Gewicht

$$= \frac{1}{[\alpha\alpha]}.$$

Die unmittelbare Ableitung der linearen Form würde indessen, wenn jedes α gegeben werden sollte, der Verwickelung der Formeln wegen theils höchst weitläuftig, kaum ausführbar sein, theils auch unnütz, weil zu unserm Zwecke die Summe $[\alpha\alpha]$ allein erforderlich ist. Man kann aber durch eine allgemeinere Behandhandlung der ursprünglichen Aufgabe die allgemeinen Relationen zwischen den α und den a, b, c, d, u. s. w., und somit auch elegante und geschmeidige Formeln für die Gewichte erhalten. Zu diesem Zweck gehe man zu den ersten Bedingungsgleichungen (25) zurück, und behandele sie, ohne die Bedingung des Minimums einzuführen, eben so als nach dieser Bedingung in dem Vorhergehenden geschehen ist. Die Folge davon ist, dafs in (27) die Gröfsen $[av]$ $[bv]$ $[cv]$ u. s. w. auf der rechten Seite stehen bleiben, und überhaupt in den Endgleichungen (40), die Werthe von x, y, z, nicht mehr blofs Functionen der n, sondern auch der v werden. Vermöge der Form der Gleichungen (25), wird sich das Resultat für diese allgemeinere Art der Elimination, sogleich aus den Resultaten, die mit der Bedingung des Minimums sich ergeben haben, ableiten lassen. Denn da die ursprünglichen Bedingungsgleichungen (25) auch geschrieben werden können

$$0 = ax + by + cz + dw + eu + ft + n - v$$

so wird man überall nur $n - v$ statt n zu setzen haben, oder, bei linearen Functionen von n, dieselben Functionen von v bilden, und mit entgegengesetztem Zeichen hinzufügen. Nothwendig müssen aber alle Gleichungen, welche man auf diese allgemeine Art bildet, vollkommen identisch werden, sobald man in ihnen für die v ihre Werthe in x, y, z, u. s. w. ausgedrückt wieder substituirt, und wegen der Unabhängigkeit der Variabeln müssen dann auch die Coefficienten von x, y, z, u. s. w. jeder besonders gleich 0 werden. Man bekommt auf diese Weise die Formeln für das gegenseitige Verhalten der Coefficienten der v, die zugleich die Coefficienten der correspondirenden n im Falle des Minimums sind, und der $a, b, c, d \ldots$, welche durch die Substitution der Werthe von v eingeführt werden.

Es kommen hier folglich zwei Arten von Werthen von x, y, z, u. s. w. vor. Die Werthe, die mit der Bedingung des Minimums als reine Function von n gefunden worden, vermöge der Gleichungen (40), sollen in Zukunft durch x_0, y_0, z_0, w_0, u_0, t_0, bezeichnet werden. Sie sind bestimmte Zahlengröfsen. Die anderen, aus der allgemeinen Form der Gleichungen (25) abgeleiteten, für welche x, y, z, w, u, t, beibehalten werden, bleiben bei der identischen Form der Gleichungen immer unbestimmte Gröfsen, welche ganz unabhängig von einander sind.

Nach der obigen Bemerkung über die lineare Form der Endgleichungen, in Bezug auf n, wird es erlaubt sein für x_0, y_0, z_0 u. s. w. folgende Form anzunehmen

$$
(45)\ldots\ldots
\begin{aligned}
x_0+\alpha n+\alpha' n'+\alpha'' n''\ldots &= x_0+[\alpha n]=0\\
y_0+\beta n+\beta' n'+\beta'' n''\ldots &= y_0+[\beta n]=0\\
z_0+\gamma n+\gamma' n'+\gamma'' n''\ldots &= z_0+[\gamma n]=0\\
w_0+\delta n+\delta' n'+\delta'' n''\ldots &= w_0+[\delta n]=0\\
u_0+\zeta n+\zeta' n'+\zeta'' n''\ldots &= u_0+[\zeta n]=0\\
t_0+\theta n+\theta' n'+\theta'' n''\ldots &= t_0+[\theta n]=0
\end{aligned}
$$

so dafs hiernach die verschiedenen Gewichte werden:

$$
\begin{aligned}
\text{Gewicht von } x_0\ldots\ldots &= \frac{1}{[\alpha\alpha]}\\
\text{„ \quad „ } y_0\ldots\ldots &= \frac{1}{[\beta\beta]}\\
\text{„ \quad „ } z_0\ldots\ldots &= \frac{1}{[\gamma\gamma]}\\
\text{„ \quad „ } w_0\ldots\ldots &= \frac{1}{[\delta\delta]}\\
\text{„ \quad „ } u_0\ldots\ldots &= \frac{1}{[\zeta\zeta]}\\
\text{„ \quad „ } t_0\ldots\ldots &= \frac{1}{[\theta\theta]}
\end{aligned}
$$

Eben solche Gleichungen wird man auch für x, y, z u. s. w. erhalten, wenn man in den eben gegebenen, $x_0, y_0, z_0\ldots$ mit $x, y, z\ldots$, und n, n', n'', mit $n-v,\ n'-v',\ n''-v''\ldots$ vertauscht. Man hat folglich mit Berücksichtigung dieser Gleichungen:

$$
(46)\ldots\ldots
\begin{aligned}
x &= x_0+\alpha v+\alpha' v'+\alpha'' v''\ldots = x_0+[\alpha v]\\
y &= y_0+\beta v+\beta' v'+\beta'' v''\ldots = y_0+[\beta v]\\
z &= z_0+\gamma v+\gamma' v'+\gamma'' v''\ldots = z_0+[\gamma v]\\
w &= w_0+\delta v+\delta' v'+\delta'' v''\ldots = w_0+[\delta v]\\
u &= u_0+\zeta v+\zeta' v'+\zeta'' v''\ldots = u_0+[\zeta v]\\
t &= t_0+\theta v+\theta' v'+\theta'' v''\ldots = t_0+[\theta v]
\end{aligned}
$$

Substituirt man in diese letzten Gleichungen die Werthe von v, v', v'', aus (25), so erhält man aus der ersten:

$$x = x_0 + [a\alpha]\,x + [b\alpha]\,y + [c\alpha]\,z + [d\alpha]\,w + [e\alpha]\,u + [f\alpha]\,t + [\alpha n]$$

folglich, da $x_0 + [\alpha n]$ vermöge (45) $= 0$, aus der Vergleichung der Coefficienten der unbestimmten Variabeln:

$$[a\alpha] = 1, \quad [b\alpha] = 0, \quad [c\alpha] = 0, \quad [d\alpha] = 0, \quad [e\alpha] = 0, \quad [f\alpha] = 0.$$

Aehnliche Bestimmungen giebt die zweite Gleichung für β, und die folgenden für die andern Coefficienten. Man hat also zusammengestellt:

$$(47)\ldots\quad \begin{array}{ll}
[a\alpha] = 1 & [b\alpha] = [c\alpha] = [d\alpha] = [e\alpha] = [f\alpha] = 0 \\
[b\beta] = 1 & [a\beta] = [c\beta] = [d\beta] = [e\beta] = [f\beta] = 0 \\
[c\gamma] = 1 & [a\gamma] = [b\gamma] = [d\gamma] = [e\gamma] = [f\gamma] = 0 \\
[d\delta] = 1 & [a\delta] = [b\delta] = [c\delta] = [e\delta] = [f\delta] = 0 \\
[e\zeta] = 1 & [a\zeta] = [b\zeta] = [c\zeta] = [d\zeta] = [f\zeta] = 0 \\
[f\theta] = 1 & [a\theta] = [b\theta] = [c\theta] = [d\theta] = [e\theta] = 0
\end{array}$$

Statt der Gleichungen (27) kommen hier die allgemeineren

$$(48)\quad \begin{array}{l}
[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + [ad]\,w + [ae]\,u + [af]\,t + [an] = [av] \\
[ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + [bd]\,w + [be]\,u + [bf]\,t + [bn] = [bv] \\
[ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + [cd]\,w + [ce]\,u + [cf]\,t + [cn] = [cv] \\
[ad]\,x + [bd]\,y + [cd]\,z + [dd]\,w + [de]\,u + [df]\,t + [dn] = [dv] \\
[ae]\,x + [be]\,y + [ce]\,z + [de]\,w + [ee]\,u + [ef]\,t + [en] = [ev] \\
[af]\,x + [bf]\,y + [cf]\,z + [df]\,w + [ef]\,u + [ff]\,t + [fn] = [fv]
\end{array}$$

Welche Art der Elimination man auch bei ihnen vornehmen will, immer wird sich das Endresultat dadurch erreichen lassen, dafs man die Gleichungen respective mit den unbestimmten Factoren Q, Q', Q'' ... multiplicirt, und diese letzteren dadurch bestimmt, dafs in der Summe aller Producte die Coefficienten aller Unbekannten Null werden, bis auf den Coefficienten der einen Unbekannten, deren Werth man angeben will. Der Coefficient dieser Unbekannten wird $= 1$ gesetzt werden müssen. Wollte man z. B. aus den Gleichungen (48) x bestimmen, so setze man

$$
(49)\ldots\quad
\begin{aligned}
&[aa]\,Q + [ab]\,Q' + [ac]\,Q'' + [ad]\,Q''' + [ae]\,Q^{\text{IV}} + [af]\,Q^{\text{V}} = 1\\
&[ab]\,Q + [bb]\,Q' + [bc]\,Q'' + [bd]\,Q''' + [be]\,Q^{\text{IV}} + [bf]\,Q^{\text{V}} = 0\\
&[ac]\,Q + [bc]\,Q' + [cc]\,Q'' + [cd]\,Q''' + [ce]\,Q^{\text{IV}} + [cf]\,Q^{\text{V}} = 0\\
&[ad]\,Q + [bd]\,Q' + [cd]\,Q'' + [dd]\,Q''' + [de]\,Q^{\text{IV}} + [df]\,Q^{\text{V}} = 0\\
&[ae]\,Q + [be]\,Q' + [ce]\,Q'' + [de]\,Q''' + [ee]\,Q^{\text{IV}} + [ef]\,Q^{\text{V}} = 0\\
&[af]\,Q + [bf]\,Q' + [cf]\,Q'' + [df]\,Q''' + [ef]\,Q^{\text{IV}} + [ff]\,Q^{\text{V}} = 0
\end{aligned}
$$

Dann wird:

$$
(50)\quad
\begin{aligned}
x + \;& Q\,[an] + Q'[bn] + Q''[cn] + Q'''[dn] + Q^{\text{IV}}[en] + Q^{\text{V}}[fn]\\
&= Q\,[av] + Q'[bv] + Q''[cv] + Q'''[dv] + Q^{\text{IV}}[ev] + Q^{\text{V}}[fv]
\end{aligned}
$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der angenommenen allgemeinen Form für x in (46), wobei offenbar die linke Seite dieser Gleichung $x_0 + [\alpha n]$ werden mufs, löst auf der rechten die Summen der Gröfsen v auf, und setzt, wie es nach der Natur der Aufgabe geschehen mufs, die Coefficienten der einzelnen v in beiden Gleichungen sich gleich, so hat man:

$$
(51)\ldots\quad
\begin{aligned}
&a\;\;Q + b\;\;Q' + c\;\;Q'' + d\;\;Q''' + e\;\;Q^{\text{IV}} + f\;\;Q^{\text{V}} = \alpha\\
&a'\;Q + b'\;Q' + c'\;Q'' + d'\;Q''' + e'\;Q^{\text{IV}} + f'\;Q^{\text{V}} = \alpha'\\
&a''Q + b''Q' + c''Q'' + d''Q''' + e''Q^{\text{IV}} + f''Q^{\text{V}} = \alpha''
\end{aligned}
$$

u. s. w. u. s. w.

multiplicirt man diese Gleichungen respective mit α, α', α'', so erhält man:

$$[a\alpha]\,Q + [b\alpha]\,Q' + [c\alpha]\,Q'' + [d\alpha]\,Q''' + [e\alpha]\,Q^{\text{IV}} + [f\alpha]\,Q^{\text{V}} = [\alpha\alpha]$$

folglich mit Berücksichtigung der Relationen in (47)

$$Q = [\alpha\alpha]$$

Eben so giebt die Multiplication derselben Gleichungen mit $\beta, \beta', \beta''\ldots$, mit $\gamma, \gamma', \gamma''\ldots$, $\delta, \delta', \delta''\ldots$, u. s. w.

$$Q' = [\alpha\beta],\quad Q'' = [\alpha\gamma],\quad Q''' = [\alpha\delta],\quad Q^{\text{IV}} = [\alpha\zeta],\quad Q^{\text{V}} = [\alpha\theta]$$

und durch die Substitution dieser Werthe in (51) hat man

$$
\begin{aligned}
&a\;\;[\alpha\alpha] + b\;\;[\alpha\beta] + c\;\;[\alpha\gamma] + d\;\;[\alpha\delta] + e\;\;[\alpha\zeta] + f\;\;[\alpha\theta] = \alpha\\
&a'\;[\alpha\alpha] + b'\;[\alpha\beta] + c'\;[\alpha\gamma] + d'\;[\alpha\delta] + e'\;[\alpha\zeta] + f'\;[\alpha\theta] = \alpha'\\
&a''[\alpha\alpha] + b''[\alpha\beta] + c''[\alpha\gamma] + d''[\alpha\delta] + e''[\alpha\zeta] + f''[\alpha\theta] = \alpha''
\end{aligned}
$$

u. s. w. u. s. w.

so wie durch dieselbe Einführung in (49) man erhält:

$$(52)\quad\begin{array}{l}
[aa][\alpha\alpha]+[ab][\alpha\beta]+[ac][\alpha\gamma]+[ad][\alpha\delta]+[ae][\alpha\zeta]+[af][\alpha\theta]=1\\
[ab][\alpha\alpha]+[bb][\alpha\beta]+[bc][\alpha\gamma]+[bd][\alpha\delta]+[be][\alpha\zeta]+[bf][\alpha\theta]=0\\
[ac][\alpha\alpha]+[bc][\alpha\beta]+[cc][\alpha\gamma]+[cd][\alpha\delta]+[ce][\alpha\zeta]+[cf][\alpha\theta]=0\\
[ad][\alpha\alpha]+[bd][\alpha\beta]+[cd][\alpha\gamma]+[dd][\alpha\delta]+[de][\alpha\zeta]+[df][\alpha\theta]=0\\
[ae][\alpha\alpha]+[be][\alpha\beta]+[ce][\alpha\gamma]+[de][\alpha\delta]+[ee][\alpha\zeta]+[ef][\alpha\theta]=0\\
[af][\alpha\alpha]+[bf][\alpha\beta]+[cf][\alpha\gamma]+[df][\alpha\delta]+[ef][\alpha\zeta]+[ff][\alpha\theta]=0
\end{array}$$

und also auch statt (50)

$$x=x_0+[\alpha\alpha][av]+[\alpha\beta][bv]+[\alpha\gamma][cv]+[\alpha\delta][dv]+[\alpha\zeta][ev]+[\alpha\theta][fv]$$

Die Bedeutung dieser letzten Formeln läfst sich, da in (52) die Coefficienten von $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$ u. s. w. genau dieselben sind, wie in den Bedingungsgleichungen des Minimums die Coefficienten von x, y, z u. s. w., so aussprechen: **Wenn in den Bedingungsgleichungen des Minimums -1 an Stelle von $[an]$, für alle andern Functionen von n aber, $[bn]$, $[cn]$, $[dn]$ bis $[fn]$, Null gesetzt wird, so ist der unter diesen Annahmen herauskommende Werth von x gleich dem Quotienten des Gewichtes von x_0 in die Einheit.** Da offenbar für alle andern Variabeln dasselbe gilt, da z. B. um das Gewicht von y zu erhalten, man $[bn]$ durch -1, und alle andern $[an]$, $[cn]$ bis $[fn]$ durch Null ersetzen müfste, so geht hieraus schon eine grofse Abkürzung hervor, weil jetzt das Gewicht nur noch von sehr einfachen Werthen der ganzen Summen $[an]$ bis $[fn]$ abhängt, nicht mehr von den Coefficienten der einzelnen n.

Der Vollständigkeit wegen mögen hier die sämmtlichen Systeme von Gleichungen für alle Unbekannte, welche aus den eben abgeleiteten durch gleichzeitige Vertauschung von allen a und α mit den b und β oder c und γ u. s. w. entstehen, folgen:

$$[A]\ldots\begin{array}{l}
a\,[\alpha\alpha]+b\,[\alpha\beta]+c\,[\alpha\gamma]+d\,[\alpha\delta]+e\,[\alpha\zeta]+f\,[\alpha\theta]=\alpha\\
a'[\alpha\alpha]+b'[\alpha\beta]+c'[\alpha\gamma]+d'[\alpha\delta]+e'[\alpha\zeta]+f'[\alpha\theta]=\alpha'\\
a''[\alpha\alpha]+b''[\alpha\beta]+c''[\alpha\gamma]+d''[\alpha\delta]+e''[\alpha\zeta]+f''[\alpha\theta]=\alpha''
\end{array}$$

u. s. w. u. s. w.

$$[B]\ldots\quad \begin{aligned} &a\ [\alpha\beta]+b\ [\beta\beta]+c\ [\beta\gamma]+d\ [\beta\delta]+e\ [\beta\zeta]+f\ [\beta\theta]=\beta \\ &a'\ [\alpha\beta]+b'\ [\beta\beta]+c'\ [\beta\gamma]+d'\ [\beta\delta]+e'\ [\beta\zeta]+f'\ [\beta\theta]=\beta' \\ &a''[\alpha\beta]+b''[\beta\beta]+c''[\beta\gamma]+d''[\beta\delta]+e''[\beta\zeta]+f''[\beta\theta]=\beta'' \end{aligned}$$

u. s. w. u. s. w.

$$[C]\ldots\quad \begin{aligned} &a\ [\alpha\gamma]+b\ [\beta\gamma]+c\ [\gamma\gamma]+d\ [\gamma\delta]+e\ [\gamma\zeta]+f\ [\gamma\theta]=\gamma \\ &a'\ [\alpha\gamma]+b'\ [\beta\gamma]+c'\ [\gamma\gamma]+d'\ [\gamma\delta]+e'\ [\gamma\zeta]+f'\ [\gamma\theta]=\gamma' \\ &a''[\alpha\gamma]+b''[\beta\gamma]+c''[\gamma\gamma]+d''[\gamma\delta]+e''[\gamma\zeta]+f''[\gamma\theta]=\gamma'' \end{aligned}$$

u. s. w. u. s. w.

$$[D]\ldots\quad \begin{aligned} &a\ [\alpha\delta]+b\ [\beta\delta]+c\ [\gamma\delta]+d\ [\delta\delta]+e\ [\delta\zeta]+f\ [\delta\theta]=\delta \\ &a'\ [\alpha\delta]+b'\ [\beta\delta]+c'\ [\gamma\delta]+d'\ [\delta\delta]+e'\ [\delta\zeta]+f'\ [\delta\theta]=\delta' \\ &a''[\alpha\delta]+b''[\beta\delta]+c''[\gamma\delta]+d''[\delta\delta]+e''[\delta\zeta]+f''[\delta\theta]=\delta'' \end{aligned}$$

u. s. w. u. s. w.

$$[E]\ldots\quad \begin{aligned} &a\ [\alpha\zeta]+b\ [\beta\zeta]+c\ [\gamma\zeta]+d\ [\delta\zeta]+e\ [\zeta\zeta]+f\ [\zeta\theta]=\zeta \\ &a'\ [\alpha\zeta]+b'\ [\beta\zeta]+c'\ [\gamma\zeta]+d'\ [\delta\zeta]+e'\ [\zeta\zeta]+f'\ [\zeta\theta]=\zeta' \\ &a''[\alpha\zeta]+b''[\beta\zeta]+c''[\gamma\zeta]+d''[\delta\zeta]+e''[\zeta\zeta]+f''[\zeta\theta]=\zeta'' \end{aligned}$$

u. s. w. u. s. w.

$$[F]\ldots\quad \begin{aligned} &a\ [\alpha\theta]+b\ [\beta\theta]+c\ [\gamma\theta]+d\ [\delta\theta]+e\ [\zeta\theta]+f\ [\theta\theta]=\theta \\ &a'\ [\alpha\theta]+b'\ [\beta\theta]+c'\ [\gamma\theta]+d'\ [\delta\theta]+e'\ [\zeta\theta]+f'\ [\theta\theta]=\theta' \\ &a''[\alpha\theta]+b''[\beta\theta]+c''[\gamma\theta]+d''[\delta\theta]+e''[\zeta\theta]+f''[\theta\theta]=\theta'' \end{aligned}$$

u. s. w. u. s. w.

Entweder aus diesen sechs Systemen, durch Bildung der $[a\alpha]$, $[a\beta]$ u. s. w. $[b\alpha]$, $[b\beta]$ u. s. w., und Vergleichung der Relationen in (47), oder durch unmittelbare Vertauschung der correspondirenden Buchstaben in (52) findet man:

$$[A']\quad \begin{aligned} &[aa][\alpha\alpha]+[ab][\alpha\beta]+[ac][\alpha\gamma]+[ad][\alpha\delta]+[ae][\alpha\zeta]+[af][\alpha\theta]=1 \\ &[ab][\alpha\alpha]+[bb][\alpha\beta]+[bc][\alpha\gamma]+[bd][\alpha\delta]+[be][\alpha\zeta]+[bf][\alpha\theta]=0 \\ &[ac][\alpha\alpha]+[bc][\alpha\beta]+[cc][\alpha\gamma]+[cd][\alpha\delta]+[ce][\alpha\zeta]+[cf][\alpha\theta]=0 \\ &[ad][\alpha\alpha]+[bd][\alpha\beta]+[cd][\alpha\gamma]+[dd][\alpha\delta]+[de][\alpha\zeta]+[df][\alpha\theta]=0 \\ &[ae][\alpha\alpha]+[be][\alpha\beta]+[ce][\alpha\gamma]+[de][\alpha\delta]+[ee][\alpha\zeta]+[ef][\alpha\theta]=0 \\ &[af][\alpha\alpha]+[bf][\alpha\beta]+[cf][\alpha\gamma]+[df][\alpha\delta]+[ef][\alpha\zeta]+[ff][\alpha\theta]=0 \end{aligned}$$

$$[B']\quad\begin{array}{l}
[aa][\alpha\beta]+[ab][\beta\beta]+[ac][\beta\gamma]+[ad][\beta\delta]+[ae][\beta\zeta]+[af][\beta\theta]=0\\
[ab][\alpha\beta]+[bb][\beta\beta]+[bc][\beta\gamma]+[bd][\beta\delta]+[be][\beta\zeta]+[bf][\beta\theta]=1\\
[ac][\alpha\beta]+[bc][\beta\beta]+[cc][\beta\gamma]+[cd][\beta\delta]+[ce][\beta\zeta]+[cf][\beta\theta]=0\\
[ad][\alpha\beta]+[bd][\beta\beta]+[cd][\beta\gamma]+[dd][\beta\delta]+[de][\beta\zeta]+[df][\beta\theta]=0\\
[ae][\alpha\beta]+[be][\beta\beta]+[ce][\beta\gamma]+[de][\beta\delta]+[ee][\beta\zeta]+[ef][\beta\theta]=0\\
[af][\alpha\beta]+[bf][\beta\beta]+[cf][\beta\gamma]+[df][\beta\delta]+[ef][\beta\zeta]+[ff][\beta\theta]=0
\end{array}$$

$$[C']\quad\begin{array}{l}
[aa][\alpha\gamma]+[ab][\beta\gamma]+[ac][\gamma\gamma]+[ad][\gamma\delta]+[ae][\gamma\zeta]+[af][\gamma\theta]=0\\
[ab][\alpha\gamma]+[bb][\beta\gamma]+[bc][\gamma\gamma]+[bd][\gamma\delta]+[be][\gamma\zeta]+[bf][\gamma\theta]=0\\
[ac][\alpha\gamma]+[bc][\beta\gamma]+[cc][\gamma\gamma]+[cd][\gamma\delta]+[ce][\gamma\zeta]+[cf][\gamma\theta]=1\\
[ad][\alpha\gamma]+[bd][\beta\gamma]+[cd][\gamma\gamma]+[dd][\gamma\delta]+[de][\gamma\zeta]+[df][\gamma\theta]=0\\
[ae][\alpha\gamma]+[be][\beta\gamma]+[ce][\gamma\gamma]+[de][\gamma\delta]+[ee][\gamma\zeta]+[ef][\gamma\theta]=0\\
[af][\alpha\gamma]+[bf][\beta\gamma]+[cf][\gamma\gamma]+[df][\gamma\delta]+[ef][\gamma\zeta]+[ff][\gamma\theta]=0
\end{array}$$

$$[D']\quad\begin{array}{l}
[aa][\alpha\delta]+[ab][\beta\delta]+[ac][\gamma\delta]+[ad][\delta\delta]+[ae][\delta\zeta]+[af][\delta\theta]=0\\
[ab][\alpha\delta]+[bb][\beta\delta]+[bc][\gamma\delta]+[bd][\delta\delta]+[be][\delta\zeta]+[bf][\delta\theta]=0\\
[ac][\alpha\delta]+[bc][\beta\delta]+[cc][\gamma\delta]+[cd][\delta\delta]+[ce][\delta\zeta]+[cf][\delta\theta]=0\\
[ad][\alpha\delta]+[bd][\beta\delta]+[cd][\gamma\delta]+[dd][\delta\delta]+[de][\delta\zeta]+[df][\delta\theta]=1\\
[ae][\alpha\delta]+[be][\beta\delta]+[ce][\gamma\delta]+[de][\delta\delta]+[ee][\delta\zeta]+[ef][\delta\theta]=0\\
[af][\alpha\delta]+[bf][\beta\delta]+[cf][\gamma\delta]+[df][\delta\delta]+[ef][\delta\zeta]+[ff][\delta\theta]=0
\end{array}$$

$$[E']\quad\begin{array}{l}
[aa][\alpha\zeta]+[ab][\beta\zeta]+[ac][\gamma\zeta]+[ad][\delta\zeta]+[ae][\zeta\zeta]+[af][\zeta\theta]=0\\
[ab][\alpha\zeta]+[bb][\beta\zeta]+[bc][\gamma\zeta]+[bd][\delta\zeta]+[be][\zeta\zeta]+[bf][\zeta\theta]=0\\
[ac][\alpha\zeta]+[bc][\beta\zeta]+[cc][\gamma\zeta]+[cd][\delta\zeta]+[ce][\zeta\zeta]+[cf][\zeta\theta]=0\\
[ad][\alpha\zeta]+[bd][\beta\zeta]+[cd][\gamma\zeta]+[dd][\delta\zeta]+[de][\zeta\zeta]+[df][\zeta\theta]=0\\
[ae][\alpha\zeta]+[be][\beta\zeta]+[ce][\gamma\zeta]+[de][\delta\zeta]+[ee][\zeta\zeta]+[ef][\zeta\theta]=1\\
[af][\alpha\zeta]+[bf][\beta\zeta]+[cf][\gamma\zeta]+[df][\delta\zeta]+[ef][\zeta\zeta]+[ff][\zeta\theta]=0
\end{array}$$

$$[F']\quad\begin{array}{l}
[aa][\alpha\theta]+[ab][\beta\theta]+[ac][\gamma\theta]+[ad][\delta\theta]+[ae][\zeta\theta]+[af][\theta\theta]=0\\
[ab][\alpha\theta]+[bb][\beta\theta]+[bc][\gamma\theta]+[bd][\delta\theta]+[be][\zeta\theta]+[bf][\theta\theta]=0\\
[ac][\alpha\theta]+[bc][\beta\theta]+[cc][\gamma\theta]+[cd][\delta\theta]+[ce][\zeta\theta]+[cf][\theta\theta]=0\\
[ad][\alpha\theta]+[bd][\beta\theta]+[cd][\gamma\theta]+[dd][\delta\theta]+[de][\zeta\theta]+[df][\theta\theta]=0\\
[ae][\alpha\theta]+[be][\beta\theta]+[ce][\gamma\theta]+[de][\delta\theta]+[ee][\zeta\theta]+[ef][\theta\theta]=0\\
[af][\alpha\theta]+[bf][\beta\theta]+[cf][\gamma\theta]+[df][\delta\theta]+[ef][\zeta\theta]+[ff][\theta\theta]=1
\end{array}$$

Jedes dieser letzteren Systeme verbunden mit (48) giebt

$$[G'] \quad \begin{aligned}
x &= x_0+[\alpha\alpha][av]+[\alpha\beta][bv]+[\alpha\gamma][cv]+[\alpha\delta][dv]+[\alpha\zeta][ev]+[\alpha\theta][fv]\\
y &= y_0+[\alpha\beta][av]+[\beta\beta][bv]+[\beta\gamma][cv]+[\beta\delta][dv]+[\beta\zeta][ev]+[\beta\theta][fv]\\
z &= z_0+[\alpha\gamma][av]+[\beta\gamma][bv]+[\gamma\gamma][cv]+[\gamma\delta][dv]+[\gamma\zeta][ev]+[\gamma\theta][fv]\\
w &= w_0+[\alpha\delta][av]+[\beta\delta][bv]+[\gamma\delta][cv]+[\delta\delta][dv]+[\delta\zeta][ev]+[\delta\theta][fv]\\
u &= u_0+[\alpha\zeta][av]+[\beta\zeta][bv]+[\gamma\zeta][cv]+[\delta\zeta][dv]+[\zeta\zeta][ev]+[\zeta\theta][fv]\\
t &= t_0+[\alpha\theta][av]+[\beta\theta][bv]+[\gamma\theta][cv]+[\delta\theta][dv]+[\zeta\theta][ev]+[\theta\theta][fv]
\end{aligned}$$

Gleichungen, welche in der *Theoria mot. corp.* § 183 auf etwas anderm Wege abgeleitet sind, und die in Worten so ausgedrückt werden können: Bei der allgemeinen Elimination, in welcher $[av]$, $[bv]$, $[cv]$, nicht gleich Null gesetzt, sondern als besondere Functionen beibehalten werden, ist in dem Ausdrucke für x der Coefficient von $[av]$, für y der von $[bv]$, für z der von $[cv]$ u. s. w., oder in dem Ausdrucke für eine Unbekannte jedesmal der Coefficient derjenigen Summe, welche aus den Coefficienten dieser unbekannten Gröſse gebildet wird, gleich dem Quotienten des Gewichts dieser Unbekannten in die Einheit.

Hierauf gründet sich die Methode zur Bestimmung der Gewichte, welche Herr Director **Hansen** in dem Programm, mit dem die Seeberger Sternwarte das Jubiläum des Herrn Doctor **Olbers** gefeiert hat, vorschlägt. Er läſst auf der rechten Seite der Gleichungen (27), oder der Gleichungen A, B, C, D, E, F, die $[av]$, $[bv]$, $[cv]$ u. s. w. stehen, für welche er dabei, der Vermeidung der Brüche wegen, die Form annimmt:

$$\begin{aligned}
[av] &= [aa] \quad P\\
[bv] &= [bb\cdot 1]\, Q\\
[cv] &= [cc\cdot 2]\, R \ldots \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

Es ist klar, daſs dadurch auf der rechten Seite der Gleichungen (31), oder des Systems B' C' D' E' F' die Ausdrücke kommen:

$$\begin{aligned}
&-[ab]\,P+[bb\cdot 1]\,Q\\
&-[ac]\,P+[cc\cdot 2]\,R \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

Geht man folglich in der Elimination so weiter, so wird in den Gleichungen (33), die rechte Seite Glieder von P, Q, R, enthalten, z. B. die erste Gleichung C'' wird auf der rechten Seite haben

$$-\left\{[ac]-\frac{[ab]}{[bb\cdot 1]}[bc\cdot 1]\right\}P-[bc\cdot 1]\,Q+[cc\cdot 2]\,R$$

und ähnlich die folgenden. Führt man hier bei den zusammengesetzteren Coefficienten ähnliche Bezeichnungen wie oben ein, so erhält man für die Endgleichungen (40) eine Form, in welcher die rechte Seite der ersten Gleichung blos P, die der zweiten P und Q, der dritten P, Q, R, u. s. w. bis zur sechsten, welche alle $[av]$, $[bv]$ u. s. w. oder die correspondirenden $P\,Q\,R\,S$ u. s. w. enthält. Die successive Substitution der Werthe von t, u, w, u. s. w. giebt auf diese Weise zuletzt bei x den Coefficienten von P, bei y die Coefficienten von P und Q, bei z die Coefficienten von P, Q, R u. s. w., welche nach ihrer wahren Bedeutung respective werden:

$[\alpha\alpha]\,[aa]$;

$[\alpha\beta]\,[aa]$, $[\beta\beta]\,[bb\cdot 1]$;

$[\alpha\gamma]\,[aa]$, $[\beta\gamma]\,[bb\cdot 1]$, $[\gamma\gamma]\,[cc\cdot 2]$; u. s. w.

woraus man folglich die Werthe der Summen $[\alpha\alpha]\,[\beta\beta]\,[\alpha\beta]$ u. s. w. findet. Es würde unnütz sein, auch die Coefficienten von Q, R u. s. w bei x, oder von R, S, bei y und so fort berechnen zu wollen, weil man dadurch nichts neues erführe. Sie fallen bei Hansen nur deswegen verschieden aus, weil die $[av]$ $[bv]$ nicht selbst beibehalten, sondern durch P, Q, R, ersetzt sind. So werden die Coefficienten von Q und R bei x respective $[\alpha\beta]\,[bb\cdot 1]$ und $[\alpha\gamma]\,[cc\cdot 2]$.

Diese Methode ist deshalb nichts anders als die wirkliche Ausführung der von Gaufs vorgeschlagenen allgemeinen Elimination. Man kann sie die zweite Methode zur Bestimmung der Gewichte nennen. Weiter unten werden die nöthigen Formeln vollständig entwickelt vorkommen.*)

Eine dritte Methode, von Herrn Director Hansen in Schumachers Nachrichten No. 192 vorgeschlagen, gründet sich auf die Systeme der Gleichungen $[A']$, $[B']$, $[C']$, $[D']$, $[E']$, $[F']$. Jedes dieser Systeme besonders aufgelöst, würde eine der Summen, welche die Gewichte geben $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$ u. s. w., finden lassen, und aufserdem die jedesmaligen Combinationen von α mit den übrigen

*) Die Gröfsen, welche auf der rechten Seite der Formeln (40) bei dieser Methode hinzugefügt werden müssen, sind in den Formeln (60) angegeben.

Coefficienten, β mit den übrigen u. s. f. Löste man deswegen alle Systeme auf, so würde man jede Summe, die aus der Combination zweier Coefficienten entsteht, doppelt erhalten. Man kann diesen unnöthigen Zeitaufwand vermeiden, wenn man die Gleichungen der sechs Systeme anders combinirt. Die ersten Gleichungen dieser sechs Systeme enthalten alle Combinationen von α mit allen Coefficienten. Man nehme sie zusammen. Dann eliminire man aus jeden zwei ersten Gleichungen der fünf letzten Systeme, die Combinationen, welche α enthalten, so hat man fünf Gleichungen, welche die Combinationen von β mit den andern Coefficienten aufser α umfassen. Die Elimination kann vermöge der Hülfsgröfsen in (30) sogleich hingeschrieben werden, auch müssen alle Gleichungen in Bezug auf die aus a, b, c, d, gebildeten Gröfsen die Form der Gleichung B' (der ersten Gleichung von (31)) nothwendig haben. Eben so eliminire man aus den drei ersten Gleichungen jedes der vier letzten Systeme $[C']$, $[D']$, $[E']$, $[F']$ die Combinationen mit α und β, so erhält man lauter Gleichungen von derselben Form wie C'' (die erste der Gleichungen (33)), worin nur Combinationen zwischen γ, δ, ζ, θ vorkommen. Dieses Verfahren, so fortgesetzt, lehrt nach und nach durch lauter Gleichungen, welche die Form der Endgleichungen A, B', C'', D''', E^{iv}, F^{v}, haben, alle Summen kennen, ohne irgend eine doppelt anzugeben.

Das ganze Schema ist in den folgenden Gleichungen enthalten:

$$[aa][\alpha\alpha]+[ab][\alpha\beta]+[ac][\alpha\gamma]+[ad][\alpha\delta]+[ae][\alpha\zeta]+[af][\alpha\theta]=1$$
$$[aa][\alpha\beta]+[ab][\beta\beta]+[ac][\beta\gamma]+[ad][\beta\delta]+[ae][\beta\zeta]+[af][\beta\theta]=0$$
$$[aa][\alpha\gamma]+[ab][\beta\gamma]+[ac][\gamma\gamma]+[ad][\gamma\delta]+[ae][\gamma\zeta]+[af][\gamma\theta]=0$$
$$[aa][\alpha\delta]+[ab][\beta\delta]+[ac][\gamma\delta]+[ad][\delta\delta]+[ae][\delta\zeta]+[af][\delta\theta]=0$$
$$[aa][\alpha\zeta]+[ab][\beta\zeta]+[ac][\gamma\zeta]+[ad][\delta\zeta]+[ae][\zeta\zeta]+[af][\zeta\theta]=0$$
$$[aa][\alpha\theta]+[ab][\beta\theta]+[ac][\gamma\theta]+[ad][\delta\theta]+[ae][\zeta\theta]+[af][\theta\theta]=0$$

$$[bb\cdot1][\beta\beta]+[bc\cdot1][\beta\gamma]+[bd\cdot1][\beta\delta]+[be\cdot1][\beta\zeta]+[bf\cdot1][\beta\theta]=1$$
$$[bb\cdot1][\beta\gamma]+[bc\cdot1][\gamma\gamma]+[bd\cdot1][\gamma\delta]+[be\cdot1][\gamma\zeta]+[bf\cdot1][\gamma\theta]=0$$
$$[bb\cdot1][\beta\delta]+[bc\cdot1][\gamma\delta]+[bd\cdot1][\delta\delta]+[be\cdot1][\delta\zeta]+[bf\cdot1][\delta\theta]=0$$
$$[bb\cdot1][\beta\zeta]+[bc\cdot1][\gamma\zeta]+[bd\cdot1][\delta\zeta]+[be\cdot1][\zeta\zeta]+[bf\cdot1][\zeta\theta]=0$$
$$[bb\cdot1][\beta\theta]+[bc\cdot1][\gamma\theta]+[bd\cdot1][\delta\theta]+[bc\cdot1][\zeta\theta]+[bf\cdot1][\theta\theta]=0$$

$$[cc\cdot 2][\gamma\gamma]+[cd\cdot 2][\gamma\delta]+[ce\cdot 2][\gamma\zeta]+[cf\cdot 2][\gamma\theta]=1$$
$$[cc\cdot 2][\gamma\delta]+[cd\cdot 2][\delta\delta]+[ce\cdot 2][\delta\zeta]+[cf\cdot 2][\delta\theta]=0$$
$$[cc\cdot 2][\gamma\zeta]+[cd\cdot 2][\delta\zeta]+[ce\cdot 2][\zeta\zeta]+[cf\cdot 2][\zeta\theta]=0$$
$$[cc\cdot 2][\gamma\theta]+[cd\cdot 2][\delta\theta]+[ce\cdot 2][\zeta\theta]+[cf\cdot 2][\theta\theta]=0$$
$$[dd\cdot 3][\delta\delta]+[de\cdot 3][\delta\zeta]+[df\cdot 3][\delta\theta]=1$$
$$[dd\cdot 3][\delta\zeta]+[de\cdot 3][\zeta\zeta]+[df\cdot 3][\zeta\theta]=0$$
$$[dd\cdot 3][\delta\theta]+[de\cdot 3][\zeta\theta]+[df\cdot 3][\theta\theta]=0$$
$$[ee\cdot 4][\zeta\zeta]+[ef\cdot 4][\zeta\theta]=1$$
$$[ee\cdot 4][\zeta\theta]+[ef\cdot 4][\theta\theta]=0$$
$$[ff\cdot 5][\theta\theta]=1$$

Bei der Anwendung dieser **dritten** Methode fängt man, sobald die Endgleichungen (40) abgeleitet sind, von der hier gegebenen letzten an, welche mit dem oben aus der Integration von $e^{-hh\Omega}$ erhaltenen Satze übereinstimmt. Mit dem Werthe von $[\theta\theta]$ erhält man aus der vorletzten $[\zeta\theta]$, und damit aus der drittletzten $[\zeta\zeta]$. Ueberhaupt giebt jede frühere Gleichung einen neuen Werth, mit dessen Hülfe aus den Gleichungen, welche auf der rechten Seite den Werth 1 haben, eine der Summen $[\theta\theta]$, $[\zeta\zeta]$, $[\delta\delta]$, $[\gamma\gamma]$, u. s. w. erhalten wird. Man kann übrigens die Gleichungen auch so ordnen, wie Hansen es am angeführten Orte gethan hat, daſs man die letzten Gleichungen in jeder Abtheilung zusammenstellt, darauf die vorletzten, dann die drittletzten u. s. f.

Die Bedeutung der Summen $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, $[\gamma\gamma]$ u. s. w. unterliegt keiner Schwierigkeit, sie sind, wenn man es so ausdrücken will, die reciproken Werthe der Gewichte. Eher möchte es nicht überflüssig sein, die Bedeutung und den Gebrauch der Summen $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$, $[\beta\gamma]$ u. s. w. durch ein Beispiel zu erläutern.

Gesetzt man wünsche von irgend welcher linearen Function von $x, y, z, w, u, t,$ etwa von

$$(53) \; \ldots \; Q=q_0\,x+q_1\,y+q_2\,z+q_3\,w+q_4\,u+q_5\,t$$

in welcher $x, y, z, w, u, t,$ dieselben Variabeln sind, deren Werthe aus den obigen Bedingungsgleichungen sich ergeben, den wahrscheinlichsten Werth, und den mittleren oder den wahrscheinlichen

Fehler desselben zu erfahren, so wird der erstere nach (20) nothwendig sogleich

$$q_0 x_0 + q_1 y_0 + q_2 z_0 + q_3 w_0 + q_4 u_0 + q_5 t_0.$$

Der mittlere Fehler aber wird nicht so geradezu aus den mittlern Fehlern von x_0, y_0, z_0, u. s. w. sich ergeben, weil die wahrscheinlichsten Werthe dieser Gröfsen nicht mehr unabhängig, sondern zugleich aus denselben Beobachtungen gefunden sind. Man wird deswegen bis zu diesen Beobachtungen zurückgehen müssen, und nach (20), wenn der mittlere Fehler jedes n gleich ε gesetzt wird, den mittleren Fehler von Q, er möge durch (εQ) bezeichnet werden, finden durch die Formel

$$(\varepsilon Q) = \varepsilon \sqrt{\left(\left(\frac{dQ}{dn}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dn'}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dn''}\right)^2 + \ldots\right)}$$

oder da

$$dQ = q_0\, dx + q_1\, dy + q_2\, dz + q_3\, dw + q_4\, du + q_5\, dt$$

man wird die Werthe von $\frac{dx_0}{dn}$, $\frac{dy_0}{dn}$, $\frac{dz_0}{dn}$ u. s. w. kennen müssen. Man kann diese entweder aus (45) nehmen, oder man kann auch sogleich in Q die aus der allgemeinen Elimination nach (46) folgenden Werthe von x, y, z u. s. w., substituiren, wodurch man erhält

$$\begin{aligned} Q = \; & q_0 x_0 + q_1 y_0 + q_2 z_0 + q_3 w_0 + q_4 u_0 + q_5 t_0 \\ & + (q_0 \alpha + q_1 \beta + q_2 \gamma + q_3 \delta + q_4 \zeta + q_5 \theta)\, v \\ & + (q_0 \alpha' + q_1 \beta' + q_2 \gamma' + q_3 \delta' + q_4 \zeta' + q_5 \theta')\, v' \\ & + (q_0 \alpha'' + q_1 \beta'' + q_2 \gamma'' + q_3 \delta'' + q_4 \zeta'' + q_5 \theta'')\, v'' \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

in welchem Ausdrucke die Coefficienten von v' v'' v''' u. s. w. nach dem Obigen $= -\frac{dQ}{dn}, -\frac{dQ}{dn'}, -\frac{dQ}{dn''}$ u. s. w. sind. Es wird hiernach der mittlere Fehler von Q gefunden aus der Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2}(\varepsilon Q)^2 = & \; \Sigma\{(q_0 \alpha + q_1 \beta + q_2 \gamma + q_3 \delta + q_4 \zeta + q_5 \theta)^2\} \\ = & \; q_0 q_0 [\alpha\alpha] + 2 q_0 q_1 [\alpha\beta] + 2 q_0 q_2 [\alpha\gamma] + 2 q_0 q_3 [\alpha\delta] \ldots \\ & + q_1 q_1 [\beta\beta] + 2 q_1 q_2 [\beta\gamma] + 2 q_1 q_3 [\beta\delta] \ldots \\ & + q_2 q_2 [\gamma\gamma] + 2 q_2 q_3 [\gamma\delta] \ldots \\ & + q_3 q_3 [\delta\delta] \ldots \\ & \text{u. s. w. u. s. w.} \end{aligned} \tag{54}$$

In diesem Ausdrucke ist

$$[\alpha\alpha] = \frac{(\varepsilon x)^2}{\varepsilon^2}$$

$$[\beta\beta] = \frac{(\varepsilon y)^2}{\varepsilon^2} \text{ u. s. f.}$$

Wären diese Fehler unabhängig von einander, so würden blofs Glieder dieser Form vorkommen. Die jetzt noch aufserdem sich findenden von der Form $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$, entstehen aus der Abhängigkeit der Fehler von x und y u. s. w. zu einander, und entsprechen auf diese Weise dem mittleren Werthe des Productes $\frac{(\varepsilon x)\cdot(\varepsilon y)}{\varepsilon \cdot \varepsilon}$. So dafs man zur Findung des mittleren (und damit des wahrscheinlichen) Fehlers einer solchen linearen Function die Regel geben kann: Man setze an die Stelle der Gröfsen selbst ihre mittleren Fehler, nehme dann das Quadrat der Function, und substituire darin

$$\begin{array}{llll} \text{für} \ldots\ldots & \frac{(\varepsilon x)^2}{\varepsilon^2} \ldots\ldots & \text{die Summe} & [\alpha\alpha] \\ \text{„} \ldots\ldots & \frac{(\varepsilon x)(\varepsilon y)}{\varepsilon \cdot \varepsilon} \ldots & \text{„} \quad \text{„} & [\alpha\beta] \\ \text{„} \ldots\ldots & \frac{(\varepsilon y)^2}{\varepsilon^2} \ldots\ldots & \text{„} \quad \text{„} & [\beta\beta] \\ \text{„} \ldots\ldots & \frac{(\varepsilon y)(\varepsilon z)}{\varepsilon \cdot \varepsilon} \ldots & \text{„} \quad \text{„} & [\beta\gamma] \end{array}$$

oder noch einfacher, man setze für die Gröfsen selbst ihre Differentialquotienten in Bezug auf ein einzelnes n, erhebe diese Function in das Quadrat, und verwandele nachher die aus den Differentialquotienten gebildeten Quadrate und Producte durch eckige Klammern in Summen, welchen man den Werth beilegt, der vermöge der Gleichungen für x_0, y_0, z_0 u. s. w., ihnen zukommt. Das Resultat giebt das Quadrat des mittleren Fehlers der Function, den einer einzelnen Beobachtung als Einheit betrachtet.

Man kann vermöge der Gleichungen (46) für Ω eine ganz der (54) analoge Form finden. Zu dem Ende bezeichne man die in dem Systeme des Minimums zurückbleibenden Fehler durch l, l', l'', oder man setze

$$\begin{aligned}
l &= ax_0 + by_0 + cz_0 + dw_0 + eu_0 + ft_0 + n \\
l' &= a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 + d'w_0 + e'u_0 + f't_0 + n' \\
l'' &= a''x_0 + b''y_0 + c''z_0 + d''w_0 + e''u_0 + f''t_0 + n'' \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

Hier ist der Bedingung des Minimums wegen nothwendig:

$$[ll] = [nn \cdot 6]$$
$$[al] = [bl] = [cl] = [dl] = [el] = [fl] = 0$$

und damit vermöge der Systeme $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$, $[E]$, $[F]$, wenn man jedes derselben mit l, l', l'', resp. multiplicirt, und die Producte addirt, auch

$$[\alpha l] = [\beta l] = [\gamma l] = [\delta l] = [\zeta l] = [\theta l] = 0.$$

Ferner multiplicire man die Gleichungen $[G']$ resp. mit a, b, c, d, e, f, mit a', b', c', d', e', f', mit $a'', b'', c'', d'', e'', f''$, u. s. f., und addire die Producte, so erhält man mit Rücksicht auf die in den Systemen $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$, $[E]$, $[F]$, enthaltenen Relationen:

$$\begin{aligned}
v &= \alpha\,[av] + \beta\,[bv] + \gamma\,[cv] + \delta\,[dv] + \zeta\,[ev] + \theta\,[fv] + l \\
v' &= \alpha'[av] + \beta'[bv] + \gamma'[cv] + \delta'[dv] + \zeta'[ev] + \theta'[fv] + l' \\
v'' &= \alpha''[av] + \beta''[bv] + \gamma''[cv] + \delta''[dv] + \zeta''[ev] + \theta''[fv] + l''
\end{aligned}$$

u. s. w. u. s. w.

folglich wenn man auf beiden Seiten in das Quadrat erhebt, und summirt, wegen $[\alpha l] = [\beta l]$ u. s. w. $= 0$ die Form:

$$\begin{aligned}
\Omega - [nn \cdot 6] &= \Sigma\{(\alpha\,[av] + \beta\,[bv] + \gamma\,[cv] + \delta\,[dv] + \zeta\,[ev] + \theta\,[fv])^2\} \\
&= [av]^2\,[\alpha\alpha] + 2[av]\,[bv]\,[\alpha\beta] + 2[av]\,[cv]\,[\alpha\gamma] \ldots\ldots \\
&\qquad + [bv]^2[\beta\beta] \quad + 2[bv]\,[cv]\,[\beta\gamma] \ldots\ldots \\
&\qquad\qquad + [cv]^2[\gamma\gamma] \ldots\ldots\ldots \\
&\qquad\qquad\qquad \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

so dafs die Function $\Omega - [nn \cdot 6]$ als der allgemeine Typus für das Quadrat des mittleren Fehlers jeder linearen Function erscheint. Man erhält, wenn man diese Form mit (54) vergleicht, den Satz: Die Function $\Omega - [nn \cdot 6]$ giebt für jede lineare Function Q der x, y, z, u. s. w. den Werth $\frac{(\varepsilon Q)^2}{\varepsilon^2}$, wenn man in $\Omega - [nn \cdot 6]$

$$[av] \text{ ersetzt durch } q_0 = \frac{dQ}{dx}$$

$$[bv] \quad „ \quad „ \quad q_1 = \frac{dQ}{dy}$$

$$[cv] \quad „ \quad „ \quad q_2 = \frac{dQ}{dz} \text{ u. s. w.}$$

Eine Eigenschaft, die sich nothwendig auch auf alle andere Formen von $\Omega - [nn \cdot 6]$ erstrecken mufs, namentlich auch auf die in (44) gegebene Form. In dieser ist, wie man leicht übersieht

$$A = [av]. \quad B' = [bv \cdot 1]. \quad C'' = [cv \cdot 2]. \quad D''' = [dv \cdot 3].$$
$$E^{\text{IV}} = [ev \cdot 4]. \quad F^{\text{V}} = [fv \cdot 5].$$

Es entspricht nämlich die Function von v jedesmal der in derselben Gleichung vorkommenden Function von n, weil jede lineare Function von n aus der Bedingung des Minimums abgeleitet, durch die Substitution von $n - v$ statt n, den Werth giebt, den die allgemeine Elimination erhalten haben lassen würde. Man hat folglich:

$$\Omega - [nn \cdot 6] = \frac{[av]^2}{[aa]} + \frac{[bv \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{[cv \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} + \frac{[dv \cdot 3]^2}{[dd \cdot 3]} + \frac{[ev \cdot 4]^2}{[ee \cdot 4]} + \frac{[fv \cdot 5]^2}{[ff \cdot 5]}$$

und damit auch sogleich den Werth von $\frac{(\varepsilon Q)^2}{\varepsilon^2}$, wenn man

$$[av] = \tfrac{1}{2} \frac{d\Omega}{dx} \text{ vertauscht mit } \frac{dQ}{dx}$$

$$[bv] = \tfrac{1}{2} \frac{d\Omega}{dy} \quad „ \quad „ \quad \frac{dQ}{dy}$$

$$[cv] = \tfrac{1}{2} \frac{d\Omega}{dz} \quad „ \quad „ \quad \frac{dQ}{dz} \text{ u. s. w.}$$

Dieser Satz (der allgemeinere statt des obigen speciellen, dafs man um $\frac{(\varepsilon x)^2}{\varepsilon^2}$ zu finden, setzen soll $[av] = 1$ und $[bv] = [cv]$ u. s. w. $= 0$) verbunden mit der letzten Form, in welcher die $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$ u. s. w. ganz verschwunden sind, würde deshalb nur noch die Operation erfordern, die Ableitung von $[bv \cdot 1]$, $[cv \cdot 2]$ u. s. w. aus $[av]$, $[bv]$, $[cv]$, auf eine bequeme Weise so zu geben, dafs man die geforderten Substitutionen mit Leichtigkeit ausführen könnte.

Er kann aber noch eleganter ausgedrückt werden. Denn da Ω sowohl wie Q Functionen von denselben Variabeln sind, die vollständigen Differentiale beider also sind:

$$d\Omega = \frac{d\Omega}{dx}dx + \frac{d\Omega}{dy}dy + \frac{d\Omega}{dz}dz + \ldots$$

$$dQ = \frac{dQ}{dx}dx + \frac{dQ}{dy}dy + \frac{dQ}{dz}dz + \ldots$$

und die erstere Function $\Omega - [nn \cdot 6]$ in $\frac{(\varepsilon Q)^2}{\varepsilon^2}$ übergeht, wenn man

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\Omega}{dx} = \frac{dQ}{dx}, \quad \tfrac{1}{2}\frac{d\Omega}{dy} = \frac{dQ}{dy}, \quad \tfrac{1}{2}\frac{d\Omega}{dz} = \frac{dQ}{dz},$$

u. s. w. setzt, da ferner dx, dy, dz, unabhängig von einander sind, der ursprünglichen Voraussetzung gemäfs, so läfst sich auch der Uebergang von $\Omega - [nn \cdot 6]$ in $\frac{(\varepsilon Q)^2}{\varepsilon^2}$ dadurch allgemein aussprechen, dafs man für ihn

$$\tfrac{1}{2}d\Omega = dQ$$

nehmen mufs, eine Bedingung, die wiederum frei ist von der Form, unter welcher $\Omega - [nn \cdot 6]$ oder Q gegeben worden.

Man nehme nun an, man habe Q umgewandelt in die Form $Q = k_0[av] + k_1[bv \cdot 1] + k_2[cv \cdot 2] + k_3[dv \cdot 3] + k_4[ev \cdot 4] + k_5[fv \cdot 5]$, eine Transformation, die bei der linearen Form immer möglich ist. In diesem Falle wird

$$dQ = k_0\, d[av] + k_1\, d[bv \cdot 1] + k_2\, d[cv \cdot 2] + k_3\, d[dv \cdot 3] + k_4\, d[ev \cdot 4] + k_5\, d[fv \cdot 5]$$

Eben so giebt die obige Form für $\Omega - [nn \cdot 6]$

$$\tfrac{1}{2}d\Omega = \frac{[av]}{[aa]}d[av] + \frac{[bv \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}d[bv \cdot 1] + \frac{[cv \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}d[cv \cdot 2] + \frac{[dv \cdot 3]}{[dd \cdot 3]}d[dv \cdot 3] + \frac{[ev \cdot 4]}{[ee \cdot 4]}d[ev \cdot 4] + \frac{[fv \cdot 5]}{[ff \cdot 5]}d[fv \cdot 5].$$

Sucht man hieraus die Bedingungen, für welche sein wird

$$dQ = \tfrac{1}{2}d\Omega$$

so wird man nothwendig die Coefficienten der einzelnen Differentiale unabhängig von einander vergleichen müssen, weil $[av]$ unter allen andern Gröfsen allein alle Variabeln enthält, $[bv \cdot 1]$ alle Variabeln aufser x, $[cv \cdot 2]$ alle aufser x und y, folglich wegen der Unabhängigkeit der dx, dy, dz, u. s. w. von einander, auch $d[av]$, $d[bv \cdot 1]$, $d[cv \cdot 2]$, als unabhängige Differentiale betrachtet werden müssen. Man wird demnach, um

$$\tfrac{1}{2}\, d\Omega = dQ$$

zu erhalten, setzen müssen:

$$\begin{array}{ll} [av] \quad\;\;\, = [aa] \quad\; k_0 & \qquad [dv \cdot 3] = [dd \cdot 3]\, k_3 \\ [bv \cdot 1] = [bb \cdot 1]\, k_1 & \qquad [ev \cdot 4] = [ee \cdot 4]\, k_4 \\ [cv \cdot 2] = [cc \cdot 2]\, k_2 & \qquad [fv \cdot 5] = [ff \cdot 5]\, k_5 \end{array}$$

und wenn man diese Werthe in $\Omega - [nn \cdot 6]$ substituirt, wodurch dieses in $\frac{(\varepsilon Q)^2}{\varepsilon^2}$ übergeht, so erhält man folgenden allgemeinen Satz:

Wenn für irgend welche lineare Function Q von x, y, z, w, u, t, die Form hergestellt ist

$$(55) \left\{ \begin{array}{ll} & Q = k_0\,[av] + k_1\,[bv \cdot 1] + k_2\,[cv \cdot 2] + k_3\,[dv \cdot 3] \\ & \qquad\qquad + k_4\,[ev \cdot 4] + k_5\,[fv \cdot 5] \\ \text{so ist} & \\ & (\varepsilon Q)^2 = \varepsilon^2 \;\{[aa]\,k_0 k_0 + [bb \cdot 1]\,k_1 k_1 + [cc \cdot 2] k_2 k_2 \\ & \qquad + [dd \cdot 3]\,k_3 k_3 + [ee \cdot 4]\,k_4 k_4 + [ff \cdot 5] k_5 k_5\} \end{array} \right.$$

Die Umwandlung der Function Q in die hier verlangte Form hat keine Schwierigkeit. Auf der einen Seite hat man

$$Q = q_0\,x + q_1\,y + q_2\,z + q_3\,w + q_4\,u + q_5\,t$$

auf der andern, wenn man die in den Formeln (43) gegebenen Werthe von $[av]$, $[bv \cdot 1]$, u. s. w. oder von A, B', in die in (55) verlangte Form wirklich substituirt:

$$\begin{array}{rl} Q = [aa]\,k_0\,x + [ab] \quad k_0\,y + [ac] \quad k_0\,z + [ad] \quad k_0\,w \ldots\ldots \\ + [bb \cdot 1]\,k_1\,y + [bc \cdot 1]\,k_1\,z + [bd \cdot 1]\,k_1\,w \ldots\ldots \\ + [cc \cdot 2]\,k_2\,z + [cd \cdot 2]\,k_2\,w \ldots\ldots \\ + [dd \cdot 3]\,k_3\,w \ldots\ldots \\ \text{u. s. w. u. s. w.} \end{array}$$

Vergleicht man also hier die Coefficienten der x, y, z, für jede Variable besonders, so hat man:

$$q_0 = [aa]\,k_0$$
$$q_1 = [ab]\,k_0 + [bb\cdot 1]\,k_1$$
$$q_2 = [ac]\,k_0 + [bc\cdot 1]\,k_1 + [cc\cdot 2]\,k_2$$
$$q_3 = [ad]\,k_0 + [bd\cdot 1]\,k_1 + [cd\cdot 2]\,k_2 + [dd\cdot 3]\,k_3$$
$$q_4 = [ae]\,k_0 + [be\cdot 1]\,k_1 + [ce\cdot 2]\,k_2 + [de\cdot 3]\,k_3 + [ee\cdot 4]\,k_4$$
$$q_5 = [af]\,k_0 + [bf\cdot 1]\,k_1 + [cf\cdot 2]\,k_2 + [df\cdot 3]\,k_3 + [ef\cdot 4]\,k_4 + [ff\cdot 5]\,k_5$$

aus welchen Gleichungen sich successive die verschiedenen k_0 bis k_5 ergeben.

Hiernach kommt es zur Bestimmung des (εx), (εy), u. s. w. nur darauf an, dem x, y, z, u. s. w. die hier verlangte Form zu geben. Man braucht aber nicht einmal die aus der allgemeinen Elimination folgende Form hinzuschreiben. Denn da in $\frac{(\varepsilon Q)^2}{\varepsilon^2}$ nur immer die Quadrate $k_0\,k_0$, $k_1\,k_1$ u. s. w. vorkommen und die Coefficienten der Functionen von v sich nur im Zeichen von den Coefficienten der gleichen Functionen von n unterscheiden, so kann man sogleich den Werth von x_0, y_0, z_0 u. s. w., durch $[an]$, $[bn\cdot 1]$, u. s. w. ausdrücken und erhält dadurch $-k_0$, $-k_1$, $-k_2$ u. s. w. Dieses giebt, aufser der Bestimmung der Gewichte, auch noch eine neue Art, die wahrscheinlichsten Werthe nicht durch successive Substitutionen, sondern unabhängig von einander zu finden.

Hierzu wird es nur erforderlich sein, in das System der Endgleichungen (40), wo die dortigen x, y, z, u. s. w. natürlich das sind, was hier zuletzt mit x_0, y_0, z_0, u. s. w. bezeichnet ward, gewisse Multiplicatoren einzuführen, die alle andern Variabeln bis auf eine entfernen. Man multiplicire die sechs Gleichungen (40) respective mit 1, A', A'', A''', A^{IV}, A^{V}, und bestimme diese A' bis A^{V} so, dafs in der Summe der Producte die Coefficienten aller Variabeln aufser x Null werden. Man multiciplire dann die fünf letzten Gleichungen von (40), in welchen x fehlt, respective mit 1, B'', B''', B^{IV}, B^{V}, und bestimme diese B'' bis B^{V} so, dafs in der Summe dieser fünf Producte die Coefficienten aller andern Variabeln aufser y Null werden. Eben so nehme man für die vier letzten Gleichungen als Multiplicatoren: 1, C''', C^{IV}, C^{V}; für die drei letzten: 1, D^{IV}, D^{V}; für die zwei letzten: 1, E^{V}; so wird man zur Bestimmung der Multiplicatoren folgende Gleichungen haben:

$$(56)\begin{cases}
0=\frac{[ab]}{[aa]}+A' \\
0=\frac{[ac]}{[aa]}+\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}A'+A'' \\
0=\frac{[ad]}{[aa]}+\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}A'+\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}A''+A''' \\
0=\frac{[ae]}{[aa]}+\frac{[be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}A'+\frac{[ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}A''+\frac{[de\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}A'''+A^{\text{IV}} \\
0=\frac{[af]}{[aa]}+\frac{[bf\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}A'+\frac{[cf\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}A''+\frac{[df\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}A'''+\frac{[ef\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}A^{\text{IV}}+A^{\text{V}} \\
0=\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}+B'' \\
0=\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}+\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}B''+B''' \\
0=\frac{[be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}+\frac{[ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}B''+\frac{[de\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}B'''+B^{\text{IV}} \\
0=\frac{[bf\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}+\frac{[cf\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}B''+\frac{[df\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}B'''+\frac{[ef\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}B^{\text{IV}}+B^{\text{V}} \\
0=\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}+C''' \\
0=\frac{[ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}+\frac{[de\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}C'''+C^{\text{IV}} \\
0=\frac{[cf\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}+\frac{[df\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}C'''+\frac{[ef\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}C^{\text{IV}}+C^{\text{V}} \\
0=\frac{[de\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}+D^{\text{IV}} \\
0=\frac{[df\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}+\frac{[ef\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}D^{\text{IV}}+D^{\text{V}} \\
0=\frac{[ef\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}+E^{\text{V}}
\end{cases}$$

Vermittelst der aus diesen Gleichungen bestimmten Multiplicatoren hat man dann ferner die Werthe von x_0, y_0, z_0, u. s. w.

$$(57)\begin{cases} -x_0 = \frac{[an]}{[aa]} + A' \frac{[bn\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} + A'' \frac{[cn\cdot 2]}{[cc\cdot 2]} + A''' \frac{[dn\cdot 3]}{[dd\cdot 3]} + A^{\mathrm{IV}} \frac{[en\cdot 4]}{[ee\cdot 4]} \\ \qquad\qquad + A^{\mathrm{V}} \frac{[fn\cdot 5]}{[ff\cdot 5]} \\ -y_0 = \frac{[bn\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} + B'' \frac{[cn\cdot 2]}{[cc\cdot 2]} + B''' \frac{[dn\cdot 3]}{[dd\cdot 3]} + B^{\mathrm{IV}} \frac{[en\cdot 4]}{[ee\cdot 4]} + B^{\mathrm{V}} \frac{[fn\cdot 5]}{[ff\cdot 5]} \\ -z_0 = \frac{[cn\cdot 2]}{[cc\cdot 2]} + C'' \frac{[dn\cdot 3]}{[dd\cdot 3]} + C^{\mathrm{IV}} \frac{[en\cdot 4]}{[ee\cdot 4]} + C^{\mathrm{V}} \frac{[fn\cdot 5]}{[ff\cdot 5]} \\ -w_0 = \frac{[dn\cdot 3]}{[dd\cdot 3]} + D^{\mathrm{IV}} \frac{[en\cdot 4]}{[ee\cdot 4]} + D^{\mathrm{V}} \frac{[fn\cdot 5]}{[ff\cdot 5]} \\ -u_0 = \frac{[en\cdot 4]}{[ee\cdot 4]} + E^{\mathrm{V}} \frac{[fn\cdot 5]}{[ff\cdot 5]} \\ -t_0 = \frac{[fn\cdot 5]}{[ff\cdot 5]} \end{cases}$$

und folglich vermöge des obigen Satzes für den mittleren Fehler da hier

$$\begin{array}{llll} \text{für } x \ldots\ldots k_0 = \frac{1}{[aa]}, & k_1 = \frac{A'}{[bb\cdot 1]}, & k_2 = \frac{A''}{[cc\cdot 2]} & \text{u. s. f.} \\ \text{„ } y \ldots\ldots k_0 = 0, & k_1 = \frac{1}{[bb\cdot 1]}, & k_2 = \frac{B''}{[cc\cdot 2]} & \text{u. s. f.} \\ \text{„ } z \ldots\ldots k_0 = 0, & k_1 = 0, & k_2 = \frac{1}{[cc\cdot 2]} & \text{u. s. f.} \\ \qquad \text{u. s. w.} & \text{u. s. w.} & & \end{array}$$

die folgenden eleganten Ausdrücke

$$(58)\begin{cases} \frac{(\varepsilon x_0)^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{[aa]} + \frac{A' A'}{[bb\cdot 1]} + \frac{A'' A''}{[cc\cdot 2]} + \frac{A''' A'''}{[dd\cdot 3]} + \frac{A^{\mathrm{IV}} A^{\mathrm{IV}}}{[ee\cdot 4]} + \frac{A^{\mathrm{V}} A^{\mathrm{V}}}{[ff\cdot 5]} \\ \frac{(\varepsilon y_0)^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{[bb\cdot 1]} + \frac{B'' B''}{[cc\cdot 2]} + \frac{B''' B'''}{[dd\cdot 3]} + \frac{B^{\mathrm{IV}} B^{\mathrm{IV}}}{[ee\cdot 4]} + \frac{B^{\mathrm{V}} B^{\mathrm{V}}}{[ff\cdot 5]} \\ \frac{(\varepsilon z_0)^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{[cc\cdot 2]} + \frac{C''' C'''}{[dd\cdot 3]} + \frac{C^{\mathrm{IV}} C^{\mathrm{IV}}}{[ee\cdot 4]} + \frac{C^{\mathrm{V}} C^{\mathrm{V}}}{[ff\cdot 5]} \\ \frac{(\varepsilon w_0)^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{[dd\cdot 3]} + \frac{D^{\mathrm{IV}} D^{\mathrm{IV}}}{[ee\cdot 4]} + \frac{D^{\mathrm{V}} D^{\mathrm{V}}}{[ff\cdot 5]} \\ \frac{(\varepsilon u_0)^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{[ee\cdot 4]} + \frac{E^{\mathrm{V}} E^{\mathrm{V}}}{[ff\cdot 5]} \\ \frac{(\varepsilon t_0)^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{[ff\cdot 5]} \end{cases}$$

welches die Formeln von Gaufs in der *Theoria combinat. observ.* sind. Diese vierte Methode giebt den mittleren oder wahrscheinlichen Fehler der Werthe der Variabeln, für jede gesondert, unabhängig von den Fehlern der übrigen.

So wie die Gleichungen zur Findung der hier gebrauchten Multiplicatoren oben geordnet stehen, findet man aus einem System alle A, die den Fehler von x bedingen, aus einem zweiten alle B, die zu dem Fehler von y gehören u. s. f. Diese Anordnung ist daher die zweckmäfsigste, wenn man den mittleren Fehler irgend einer Unbekannten allein bestimmen will. Sonst kann man die Multiplicatoren auch in anderer Ordnung finden. Denn da bei ihrer Herleitung die Gröfsen $[an]$, $[bn]$, $[cn]$, u. s. w. als relativ unabhängig angesehen worden, so müssen diese auch umgekehrt wenn man aus (57) die Gleichungen (40) wieder herstellt, als unabhängige Gröfsen betrachtet, und ihre Coefficienten einzeln verglichen werden. Multiplicirt man also in dem System (57) die Gleichungen resp. mit 1, $\frac{[ab]}{[aa]}$, $\frac{[ac]}{[aa]}$, $\frac{[ad]}{[aa]}$, $\frac{[ae]}{[aa]}$, $\frac{[af]}{[aa]}$, und addirt die Producte, um die erste der Gleichungen (40) wieder in ihrer Summe zu erhalten, so mufs der Coefficient von $[an]$ gleich $\frac{1}{[aa]}$, die Coefficienten von $[bn\cdot1]$, $[cn\cdot2]$ u. s. w. jeder gleich Null werden. Aehnlich ist das Verhalten wenn man aus den fünf letzten Gleichungen von (57) die zweite von (40), aus den vier letzten von (57) die dritte von (40) und so fort bildet. Man erhält hieraus die Bedingungen:

$$
(59)\begin{cases}
0=[aa]A'+[ab] \\
0=[aa]A''+[ab]B''+[ac] \\
0=[aa]A'''+[ab]B'''+[ac]C'''+[ad] \\
0=[aa]A^{\text{IV}}+[ab]B^{\text{IV}}+[ac]C^{\text{IV}}+[ad]D^{\text{IV}}+[ae] \\
0=[aa]A^{\text{V}}+[ab]B^{\text{V}}+[ac]C^{\text{V}}+[ad]D^{\text{V}}+[ae]E^{\text{V}}+[af] \\
0=[bb\cdot1]B''+[bc\cdot1] \\
0=[bb\cdot1]B'''+[bc\cdot1]C'''+[bd\cdot1] \\
0=[bb\cdot1]B^{\text{IV}}+[bc\cdot1]C^{\text{IV}}+[bd\cdot1]D^{\text{IV}}+[be\cdot1] \\
0=[bb\cdot1]B^{\text{V}}+[bc\cdot1]C^{\text{V}}+[bd\cdot1]D^{\text{V}}+[be\cdot1]E^{\text{V}}+[bf\cdot1] \\
0=[cc\cdot2]C'''+[cd\cdot2] \\
0=[cc\cdot2]C^{\text{IV}}+[cd\cdot2]D^{\text{IV}}+[ce\cdot2] \\
0=[cc\cdot2]C^{\text{V}}+[cd\cdot2]D^{\text{V}}+[ce\cdot2]E^{\text{V}}+[cf\cdot2] \\
0=[dd\cdot3]D^{\text{IV}}+[de\cdot3] \\
0=[dd\cdot3]D^{\text{V}}+[de\cdot3]E^{\text{V}}+[df\cdot3] \\
0=[ee\cdot4]E^{\text{V}}+[ef\cdot4]
\end{cases}
$$

Aus diesen Gleichungen findet man zuerst A', B'', C''', D^{IV}, E^{V}, deren Werthe in einer Gleichung immer allein vorkommen. Vermittelst dieser erhält man A'', B''', C^{IV}, D^{V}, aus den Gleichungen mit zwei Multiplicatoren, dann folgen A''', B^{IV}, C^{V}, aus den Gleichungen mit drei Multiplicatoren, und so alle übrigen. Gaufs nennt jene Art, die Multiplicatoren zu finden, die erste, diese die zweite.

Um den Zusammenhang der früheren specielleren Sätze mit dem letzten allgemeinen zu übersehen, kann man noch bemerken, dafs eben diese Multiplicatoren auch die Functionen $[bn\cdot1]$, $[cn\cdot2]$.... vermittelst $[an]$, $[bn]$, $[cn]$...., oder was dasselbe ist $[bv\cdot1]$ $[cv\cdot2]$, vermittelst $[av]$, $[bv]$, $[cv]$, geben. Vergleicht man nämlich das Differential von Ω aus (44)

$$\tfrac{1}{2}d\Omega=\frac{[av]}{[aa]}d[av]+\frac{[bv\cdot1]}{[bb\cdot1]}d[bv\cdot1]+\frac{[cv\cdot2]}{[cc\cdot2]}d[cv\cdot2]\ldots$$

mit der andern ursprünglichen Form

$$\tfrac{1}{2}d\Omega=[av]\,dx+[bv]\,dy+[cv]\,dz+[dv]\,dw\ldots\ldots\ldots\ldots$$

nachdem man in diese letztere die Werthe von dx, dy, dz, als Functionen von $d[av]$, $d[bv\cdot 1]$, $d[cv\cdot 2]$, u. s. w., wie sie sich aus (57) unmittelbar hinschreiben lassen, substituirt hat, und setzt die Coefficienten der unabhängigen Differentiale einander gleich, so erhält man

$$(60)\begin{cases}[av] = [av] \\ [bv\cdot 1] = A'\,[av] + [bv] \\ [cv\cdot 2] = A''\,[av] + B''\,[bv] + [cv] \\ [dv\cdot 3] = A'''\,[av] + B'''\,[bv] + C'''\,[cv] + [dv] \\ [ev\cdot 4] = A^{\mathrm{IV}}\,[av] + B^{\mathrm{IV}}\,[bv] + C^{\mathrm{IV}}\,[cv] + D^{\mathrm{IV}}\,[dv] + [ev] \\ [fv\cdot 5] = A^{\mathrm{V}}\,[av] + B^{\mathrm{V}}\,[bv] + C^{\mathrm{V}}\,[cv] + D^{\mathrm{V}}\,[dv] + E^{\mathrm{V}}\,[ev] + [fv].\end{cases}$$

Natürlich wird das Verhalten derselben Functionen von n gegen einander ganz das nämliche.

Wendet man auf diese Formeln die obigen specielleren Vorschriften an, nach welchen man, um $\frac{(\varepsilon x)^2}{\varepsilon^2}$ zu finden, in dem Werthe von x_0, $[an] = -1$, $[bn] = [cn] =$ u. s. w. $= 0$ setzen soll, so wie für $\frac{(\varepsilon y)^2}{\varepsilon^2}$, $[bn] = -1$ und $[an] = [cn]$ u. s. w. $= 0$, so sieht man, daſs

für $\frac{(\varepsilon x)^2}{\varepsilon^2}$ $[an] = -1$, $[bn\cdot 1] = -A'$, $[cn\cdot 2] = -A''$, $[dn\cdot 3] = -A'''$, $[en\cdot 4] = -A^{\mathrm{IV}}$, $[fn\cdot 5] = -A^{\mathrm{V}}$

„ $\frac{(\varepsilon y)^2}{\varepsilon^2}$ $[bn\cdot 1] = -1$, $[cn\cdot 2] = -B''$, $[dn\cdot 3] = -B'''$, $[en\cdot 4] = -B^{\mathrm{IV}}$, $[fn\cdot 5] = -B^{\mathrm{V}}$ u. s. w.

in die Formeln für x_0, y_0, z_0, u. s. w. (57) gesetzt werden müssen, wodurch dieselben Werthe der mittleren Fehler wie in (58) erhalten werden.

Endlich liegt in diesen Formeln noch das vollständige Schema für die oben angeführte zweite Methode, oder die wirkliche Ausführung der allgemeinen Elimination. Hat man die $A,'$ $A,''$ ... A^{V}, $B,''$ $B,'''$ .... B^{V}, u. s. f. bis zu E^{V} berechnet, so fügt man auf der rechten Seite der Gleichungen (40) die Werthe

$$\frac{[av]}{[aa]},\quad \frac{[bv\cdot 1]}{[bb\cdot 1]},\quad \frac{[cv\cdot 2]}{[cc\cdot 2]},\quad \frac{[dv\cdot 3]}{[dd\cdot 3]},\quad \frac{[ev\cdot 4]}{[ee\cdot 4]},\quad \frac{[fv\cdot 5]}{[ff\cdot 5]},$$

nach der hier gegebenen Form als Functionen von $[av]$, $[bv]$, $[cv]$, $[dv]$, $[ev]$, $[fv]$ hinzu, betrachtet diese letzteren als unabhängige Variabele, und erhält so durch die successive Substitution der Werthe von t, u, w, z, y, wie die spätern Gleichungen sie geben, in die früheren, so wohl nach den Functionen von n, als nach denen von v, die Coefficienten von $[av]$ für x, von $[bv]$ für y, von $[cv]$ für z, u. s. w., welche respective gleich den oben so bezeichneten $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, $[\gamma\gamma]$, oder den $\frac{(\varepsilon x)^2}{\varepsilon^2}$, $\frac{(\varepsilon y)^2}{\varepsilon^2}$, $\frac{(\varepsilon z)^2}{\varepsilon^2}$ u. s. w. sind.

So wie die in Bezug auf jedes einzelne n entwickelte Form der Variabeln zu verschiedenen Methoden die Gewichte zu bestimmen geführt hat, unter welchen die von Gaufs vorgezogene (hier die vierte) Methode, sowohl in Hinsicht auf analytische Eleganz, als auf Kürze, und besonders auch wegen des Umstandes, dafs die Gewichte jeder Unbekannten unabhängig von denen der übrigen gefunden werden können, den Vorrang hat; so läfst sich auch an die erste Auflösung aus der Integration von $e^{-hh\Omega}$, und dem daraus folgenden Satze für den Coefficienten der letzten Unbekannten, noch eine Betrachtung anknüpfen, die zu einer Abkürzung führen kann.

Die Integration von $e^{-hh\Omega}$ nach allen Variabeln, innerhalb der Grenzen $-\infty$ und $+\infty$, führt auf einen Ausdruck, der aufser constanten Gröfsen auch das Product

$$w = [aa] \cdot [bb \cdot 1] \cdot [cc . 2] \cdot [dd \cdot 3] \cdot [ee \cdot 4] \cdot [ff \cdot 5]$$

enthält. Da die Ordnung des Integrirens willkürlich ist, so mufs dieses Product unabhängig von der Ordnung sein, in welcher man eliminirt hat. Für jede Anordnung ist w eine und dieselbe Gröfse.

Man kann dasselbe auch aus der gewöhnlichen Lehre über Elimination bei Gleichungen des ersten Grades, angewandt auf die Gleichungen (27) finden. Es wird sich dabei zeigen, dafs w immer eine ganze Function der Coefficienten von x, y, z, u. s. w. in den Gleichungen (27) ist, und dafs es der gemeinschaftliche Nenner ist, den man, falls kein unnöthiger Factor eingeführt ward, auf dem

9*

gewöhnlichen Wege bei allen Unbekannten aus der gehörigen Combination der Coefficienten erhält, woraus wiederum, wenn er vollständig entwickelt wäre, auch der Zähler bei jedem x, y, z, sich auf eine leichte Weise ergeben würde.

Nimmt man nun an, es seien sechs verschiedene Anordnungen, in jeder eine andere Variable zur letzten gemacht, die übrigen aber in ihrer zuerst gewählten Ordnung beibehalten, und fügt man, um die in jeder Anordnung gebildeten analogen Hülfsgröfsen von einander zu unterscheiden, einer solchen immer unten den Buchstaben hinzu, den man zum letzten gemacht hat, mit Ausnahme des f, der in der natürlichen Ordnung zuletzt kommt, so hat man für w die sechs Formen:

$$\begin{aligned}
w &= [aa]\;[bb\cdot 1]\;[cc\cdot 2]\;[dd\cdot 3]\;[ee\cdot 4]\;[ff\cdot 5]\\
&= [aa]_e\;[bb\cdot 1]_e\;[cc\cdot 2]_e\;[dd\cdot 3]_e\;[ff\cdot 4]_e\;[ee\cdot 5]\\
&= [aa]_d\;[bb\cdot 1]_d\;[cc\cdot 2]_d\;[ee\cdot 3]_d\;[ff\cdot 4]_d\;[dd\cdot 5]\\
&= [aa]_c\;[bb\cdot 1]_c\;[dd\cdot 2]_c\;[ee\cdot 3]_c\;[ff\cdot 4]_c\;[cc\cdot 5]\\
&= [aa]_b\;[cc\cdot 1]_b\;[dd\cdot 2]_b\;[ee\cdot 3]_b\;[ff\cdot 4]_b\;[bb\cdot 5]\\
&= [bb]_a\;[cc\cdot 1]_a\;[dd\cdot 2]_a\;[ee\cdot 3]_a\;[ff\cdot 4]_a\;[aa\cdot 5].
\end{aligned}$$

Allein es ist klar, dafs durch den Umstand, dafs eine andere Unbekannte zur letzten gemacht ist, nur die Hülfsgröfsen sich ändern, in welchen bei der natürlichen Buchstabenfolge die Unbekannte eliminirt ist, welche bei der neuen Anordnung zur letzten gemacht ward. Für alle Hülfsgröfsen z. B., die in der Klammer eine Zahl bis 4 enthalten, ist es gleichgültig, ob f oder e die letzte Gröfse ist, für alle mit 3 bezeichnete, ob d oder e oder f zuletzt bleibt, für die mit 2 bezeichneten, ob c, d, e oder f, für die mit 1, ob b, c, d, e oder f, für die ohne Zahl (die wirklichen Coefficienten), ob a, b, c, d, e, f, die letzte wird. Hiernach erhält man, wenn man jeden spätern Werth von w dem in der ersten Anordnung gleich setzt, folgende Gleichungen:

$$
(61)\left\{\begin{array}{l}
[ff\cdot5]=[ff\cdot5]\\[4pt]
[ee\cdot5]=[ee\cdot4]\cdot\dfrac{[ff\cdot5]}{[ff\cdot4]}\\[4pt]
[dd\cdot5]=[dd\cdot3]\cdot\dfrac{[ee\cdot4]}{[ee\cdot3]}\cdot\dfrac{[ff\cdot5]}{[ff\cdot4]_d}\\[4pt]
[cc\cdot5]=[cc\cdot2]\cdot\dfrac{[dd\cdot3]}{[dd\cdot2]}\cdot\dfrac{[ee\cdot4]}{[ee\cdot3]_c}\cdot\dfrac{[ff\cdot5]}{[ff\cdot4]_c}\\[4pt]
[bb\cdot5]=[bb\cdot1]\cdot\dfrac{[cc\cdot2]}{[cc\cdot1]}\cdot\dfrac{[dd\cdot3]}{[dd\cdot2]_b}\cdot\dfrac{[ee\cdot4]}{[ee\cdot3]_b}\cdot\dfrac{[ff\cdot5]}{[ff\cdot4]_b}\\[4pt]
[aa\cdot5]=[aa]\cdot\dfrac{[bb\cdot1]}{[bb]}\cdot\dfrac{[cc\cdot2]}{[cc\cdot1]_a}\cdot\dfrac{[dd\cdot3]}{[dd\cdot2]_a}\cdot\dfrac{[ee\cdot4]}{[ee\cdot3]_a}\cdot\dfrac{[ff\cdot5]}{[ff\cdot4]_a}
\end{array}\right.
$$

In dieser Form, verbunden mit einer einmaligen völligen Umkehrung, scheint mir die Berechnung der Gewichte für die Praxis am kürzesten und sichersten, wenn man nämlich nicht bloſs die Endgleichungen (40) kennt, sondern was meistentheils der Fall sein wird, auch alle andere Hülfsgröſsen vor sich hat.

Man verfährt dann hier so: Zuerst eliminirt man nach der Ordnung a, b, c, d, e, f, und berechnet auſser den oben angezeigten Hülfsgröſsen noch

$$[ff\cdot4]_d=[ff\cdot3]-\frac{[ef\cdot3]}{[ee\cdot3]}[ef\cdot3]$$

damit sind die $[ff\cdot5]$, $[ee\cdot5]$, $[dd\cdot5]$, vermöge der eben gegebenen Formeln (61), in einer für die logarithmische Rechnung sehr bequemen Gestalt unmittelbar gefunden, ohne weitere Einführung anderer Factoren.

Dann eliminirt man nach der Ordnung f, e, d, c, b, a, und fügt hier noch die Hülfsgröſse hinzu

$$[aa\cdot4]_c=[aa\cdot3]-\frac{[ab\cdot3]}{[bb\cdot3]}[ab\cdot3]$$

so wird man wiederum vermittelst lauter gegebenen Gröſsen haben:

$$
\begin{aligned}
[aa\cdot5]&=[aa\cdot5]\\
[bb\cdot5]&=[bb\cdot4]\frac{[aa\cdot5]}{[aa\cdot4]}\\
[cc\cdot5]&=[cc\cdot4]\frac{[bb\cdot4]}{[bb\cdot3]}\cdot\frac{[aa\cdot5]}{[aa\cdot4]_c}
\end{aligned}
$$

Die einmalige Umkehrung controllirt, wegen des doppelt zu findenden Werthes von x, den Theil der Rechnung von den Gleichungen (27) an, bis zu den wahrscheinlichsten Werthen selbst. Es bedarf übrigens wohl kaum der Erinnerung, dafs die $[aa \cdot 5]$, $[bb \cdot 5]$, $[cc \cdot 5]$ u. s. w. resp. gleich sind den $\frac{1}{[\alpha\alpha]}$, $\frac{1}{[\beta\beta]}$, $\frac{1}{[\gamma\gamma]}$ u. s. w. oder den $\frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon x)^2}$, $\frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon y)^2}$, $\frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon z)^2}$ u. s. w.

Alle Brüche, die in diesen Formeln vorkommen, sind ihrer Natur nach ächte Brüche, so dafs man deutlich übersieht, wie die vergröfserte Anzahl der zu ermittelnden Werthe bei denselben Gleichungen das Gewicht der einzelnen immer mehr und mehr vermindert. Es ist selbst möglich, dafs die Bestimmung einer einzelnen Variablen, wegen der geringen Sicherheit, mit welcher sie aus den Gleichungen sich ableiten läfst, einen so nachtheiligen Einflufs auf die Sicherheit der andern ausübt, dafs es rathsamer ist diese Variable gar nicht bestimmen zu wollen, sondern die übrigen als Functionen derselben auszudrücken, mit dem Vorbehalt, wenn man auf anderm Wege einen zuverlässigeren Werth der unbestimmt gelassenen erhalten, diesen später anzuführen. Dieses würde z. B. der Fall sein, wenn die Aufgabe in practischer Hinsicht sich einer unbestimmten zu sehr näherte, wenn also die Coefficienten aller oder einiger der Variabeln in allen Gleichungen nahe dasselbe Verhältnifs zu einander hätten, wodurch man zwar wohl einige der Correctionen x_0, y_0, z_0, genau erhalten könnte, wenn die übrigen bekannt wären, aber nur höchst unsicher die wahren Werthe aller zugleich, getrennt von einander aus solchen Gleichungen allein bestimmen könnte. Der gröfseren Bequemlichkeit halber, wenn dieses ungünstige Verhältnifs eintreten sollte, wird es gut sein, die Ordnung, in welcher man die erste Elimination durchführt, ungefähr nach der Sicherheit der Endbestimmungen einzurichten, worüber schon ein flüchtiger Anblick der Bedingungsgleichungen im rohen belehren wird. Hat man so den Gröfsen, welche sich am sichersten bestimmen lassen, die Coefficienten a, b, c, gegeben, und findet sich $[ff \cdot 5]$ gar zu klein, so gehe man nicht bis zur letzten Gleichung F^{V} fort, sondern bleibe bei E^{IV} stehen, und substituire den Werth von u, der aus ihr folgt,

$$u = -\frac{[ef\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}\,t - \frac{[en\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}$$

in alle früheren Gleichungen. Man erhält dann w, z, y, x, als Functionen von t, damit auch die bei den neuen Bestimmungen noch zurückbleibenden Fehler l, $l,'$ $l,''$. eben so, und selbst die Summe der Quadrate der Fehler in derselben Form. Die Sicherheit oder das Gewicht, was man jetzt erhält, setzt die Richtigkeit des angenommenen Werthes für T_0 voraus, und ändert sich mit der Sicherheit, welche man irgend einem anzunehmenden Werthe von t zuschreiben darf.

Die Formeln für die obige vierte Methode sind für einen solchen Fall, der z. B. bei parabolischen Cometenbahnen eintritt, schon völlig eingerichtet. Es ist im höchsten Grade unwahrscheinlich, dafs Cometen sich genau in einer Parabel bewegen. Sie werden immer Ellipsen oder Hyperbeln, welche der Parabel sich nähern, durchlaufen. Bringt man also, nachdem man die Functionen V_0 in einer strengen Parabel berechnet hat, in die Bedingungsgleichungen für diese parabolische Bahn noch ein Glied, was den Einflufs einer geänderten Excentricität ausdrückt, hinein, so wird man nur selten, wenn der Comet blofs in einer Erscheinung beobachtet ist, das Gewicht für eine solche Excentricitätsänderung grofs genug erhalten, um sie einführen zu können. Billig aber sollte man, den Formeln (57) und (58) gemäfs, die kleine Mühe nicht scheuen, die Correctionen und mittleren Fehler der andern Elemente, wenn man die in der Parabel wahrscheinlichsten etwa durch x'_0, y'_0, z'_0, w'_0, u'_0, bezeichnen will, und unter t_0 die unbestimmt gelassene Correction der Excentricität versteht, so zu geben:

$$(62)\quad \begin{cases} x_0 = x'_0 + A^{\mathrm{V}}\,t_0 & (\varepsilon x_0)^2 = (\varepsilon x'_0)^2 + A^{\mathrm{V}}A^{\mathrm{V}}\,(\varepsilon t_0)^2 \\ y_0 = y'_0 + B^{\mathrm{V}}\,t_0 & (\varepsilon y_0)^2 = (\varepsilon y'_0)^2 + B^{\mathrm{V}}B^{\mathrm{V}}\,(\varepsilon t_0)^2 \\ z_0 = z'_0 + C^{\mathrm{V}}\,t_0 & (\varepsilon z_0)^2 = (\varepsilon z'_0)^2 + C^{\mathrm{V}}C^{\mathrm{V}}\,(\varepsilon t_0)^2 \\ w_0 = w'_0 + D^{\mathrm{V}}\,t_0 & (\varepsilon w_0)^2 = (\varepsilon w'_0)^2 + D^{\mathrm{V}}D^{\mathrm{V}}\,(\varepsilon t_0)^2 \\ u_0 = u'_0 + E^{\mathrm{V}}\,t_0 & (\varepsilon u_0)^2 = (\varepsilon u'_0)^2 + E^{\mathrm{V}}E^{\mathrm{V}}\,(\varepsilon t_0)^2 \end{cases}$$

Diese Ausdrücke sind für jeden Werth von t_0, den man späterhin vielleicht einführen möchte, vollkommen strenge. Denn bei der Durchsicht der Formeln (56) sieht man bald, daſs die Coefficienten von t in den Bedingungsgleichungen, oder die f, nur auf die Multiplicatoren, welche mit dem Accente $^{\mathrm{v}}$ bezeichnet sind, Einfluſs haben, alle andern Multiplicatoren sind von ihnen unabhängig. Hieraus läſst sich schon mit Sicherheit schlieſsen, daſs die letzten Glieder in x_0, y_0, z_0, u. s. w. den ganzen Einfluſs, den irgend ein Werth von t_0 auf die andern Variabeln haben kann, umfassen oder daſs

$$\frac{dx_0}{dt_0} = A^{\mathrm{v}}, \quad \frac{dy_0}{dt_0} = B^{\mathrm{v}}, \quad \frac{dz_0}{dt_0} = C^{\mathrm{v}} \text{ u. s. w.}$$

sein wird, eine Eigenschaft, die aus den Gleichungen (57) vermöge ihrer Ableitung aus (40) sich auch direct und strenge ergiebt.

Dieselben Betrachtungen lassen sich auch auf den Fall anwenden, wenn vielleicht wegen mangelhafter Kenntniſs der theoretischen Bedingungen der Aufgabe, eine Variable ganz bei der Berechnung der V_0 übergangen wäre, wie es in der Astronomie in geringerem Grade, in stärkerem in der Physik stattfinden wird, wo der Einfluſs so mancher Kräfte noch bei vielen Erscheinungen ganz unbekannt ist. Man kann diesen Fehler sich so vorstellen, als ob einer der Variabeln ein bestimmter Werth beigelegt ist, am häufigsten vielleicht $T_0 = 0$ gesetzt ist, manchmal auch wie bei der Excentricität der parabolischen Cometenbahnen $T_0 = 1$, oder sonst einer Constante gleich genommen, und die Correction sowohl der Annahme selbst, als auch das von ihrer Veränderlichkeit herrührende Glied in den Bedingungsgleichungen vernachläſsigt wäre. Die obigen Formeln zeigen hier zuerst, daſs die Methode der kleinsten Quadrate solche Mängel durchaus nicht ersetzen kann, sie wird wie jede andere mehr oder minder irrige Werthe für die andern Variabeln geben. Wenigstens aber gewinnt man häufig durch sie ein sicheres Criterium, ob ein solcher Mangel für die gegebenen Beobachtungen von sehr groſsem Einfluſs ist. Es wird nämlich in diesem Falle das Minimum der Fehlerquadrate:

$$
\begin{aligned}
&= [nn\cdot 6] + \frac{F^{\text{v}} F^{\text{v}}}{[fn\cdot 5]} \\
&= [nn\cdot 6] + [ff\cdot 5]\left\{t - \frac{[fn\cdot 5]}{[ff\cdot 5]}\right\}^2 \\
&= [nn\cdot 6] + \frac{[fn\cdot 5]^2}{[ff\cdot 5]} = [nn\cdot 5]
\end{aligned}
$$

Kennt man, was häufig der Fall sein wird, die ungefähre Fehlergrenze der Beobachtungen, also auch die ungefähre Summe der Quadrate der Fehler bei den m Beobachtungen, welche bei vollständiger Theorie von $[nn\cdot 6]$ nicht viel abweichen darf, und erfährt man durch die strenge Behandlung nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche Summe der Fehlerquadrate, der gemachten Hypothese zufolge, die kleinstmöglichste ist, so wird ein allzustarker Unterschied zwischen beiden, der nothwendig in dem Sinne stattfinden wird, dafs $[nn\cdot 5] > [nn\cdot 6]$ und zwar um vieles ist, mit Sicherheit auf einen Mangel in der Theorie schliefsen lassen. Endlich geben die Formeln für die $(\varepsilon x_0)^2$, $(\varepsilon y_0)^2$ u. s. w., dafs die Weglassung einer Variablen ebenfalls nothwendig einen zu grofsen Grad der Sicherheit bei den andern Bestimmungen annehmen läfst; und erklären dadurch die Erscheinung, dafs bei unvollkommener theoretischer Kenntnifs die vermöge der Methode der kleinsten Quadrate aus verschiedenen Reihen von Beobachtungen erhaltenen Werthe derselben Variabeln häufig aufserhalb der Grenzen, welche die Gewichte ihnen anweisen, verschieden ausfallen. Ganz ähnlich wirken constante Fehler.

Bei zwei und mehreren unbestimmt zu lassenden Variabeln können die Formeln (57) nicht mehr so geradezu angewandt, sehr leicht aber auf ganz ähnliche Weise die analogen gefunden werden. Fälle dieser Art sind indessen weit seltener und sollten wo möglich vermieden werden.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die Bestimmung des mittleren Fehlers einer Beobachtung aus den in der Hypothese des absoluten Minimums übrig bleibenden Fehlern näher zu untersuchen. Wären diese Fehler die wahren, so würde nach der Definition des mittleren Fehlers, bei den m hier vorliegenden Beobachtungen

$$m\varepsilon^2 = [nn \cdot 6]$$

sein. Indessen ist es klar, dafs aus dieser Gleichung der mittlere Fehler immer zu klein gefunden werden mufs. Um ein der Wahrheit näher kommendes Resultat zu erhalten, bezeichne man wie früher die Fehler des Minimums mit l, l', l'', u. s. w.

$$l = ax_0 + by_0 + cz_0 + dw_0 + eu_0 + ft_0 + n$$
$$l' = a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 + d'w_0 + e'u_0 + f't_0 + n' \quad \text{u. s. w.}$$

wobei nothwendig $[ll] = [nn \cdot 6]$

$$[al] = [bl] = [cl] = [dl] = [el] = [fl] = 0.$$

Ferner seien die wahren Werthe von x, y, z, w, u, t, $x_0 + \triangle x$, $y_0 + \triangle y$, $z_0 + \triangle z$, $w_0 + \triangle w$, $u_0 + \triangle u$, $t_0 + \triangle t$, und die wahren Fehler resp. $\lambda, \lambda', \lambda''$ u. s. w. Durch die Substitution dieser wahren Werthe wird man die strengen Gleichungen haben:

$$(63)\ldots\begin{cases} \lambda = a\triangle x + b\triangle y + c\triangle z + d\triangle w + e\triangle u + f\triangle t + l \\ \lambda' = a'\triangle x + b'\triangle y + c'\triangle z + d'\triangle w + e'\triangle u + f'\triangle t + l' \\ \lambda'' = a''\triangle x + b''\triangle y + c''\triangle z + d''\triangle w + e''\triangle u + f''\triangle t + l'' \\ \text{u. s. w.} \qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Erhebt man hier auf beiden Seiten in das Quadrat, so wird wegen der Bedingungen des Minimums $[al] = [bl]$ u. s. w. $= 0$:

$$[\lambda\lambda] = [ll] + \Sigma\{(a\triangle x + b\triangle y + c\triangle z + d\triangle w + e\triangle u + f\triangle t)^2\}$$

Diese letztere Summe läfst sich analog, wie oben bei Ω geschehen, in eine andere Form umgestalten. Setzt man

$$[aa]\triangle x + [ab]\triangle y + [ac]\triangle z + [ad]\triangle w + [ae]\triangle u + [af]\triangle t = A_0$$
$$[bb\cdot 1]\triangle y + [bc\cdot 1]\triangle z + [bd\cdot 1]\triangle w + [be\cdot 1]\triangle u + [bf\cdot 1]\triangle t = B_0'$$
$$[cc\cdot 2]\triangle z + [cd\cdot 2]\triangle w + [ce\cdot 2]\triangle u + [cf\cdot 2]\triangle t = C_0''$$
$$[dd\cdot 3]\triangle w + [de\cdot 3]\triangle u + [df\cdot 3]\triangle t = D_0'''$$
$$[ee\cdot 4]\triangle u + [ef\cdot 4]\triangle t = E_0^{\text{IV}}$$
$$[ff\cdot 5]\triangle t = F_0^{\text{V}}$$

und für $[\lambda\lambda]$ den Werth $m\varepsilon^2$, so wie $[nn \cdot 6]$ für $[ll]$, so wird die Gleichung:

$$m\varepsilon^2 = [nn \cdot 6] + \frac{A_0 A_0}{[aa]} + \frac{B'_0 B'_0}{[bb \cdot 1]} + \frac{C''_0 C''_0}{[cc \cdot 2]} + \frac{D'''_0 D'''_0}{[dd \cdot 3]} + \frac{E^{IV}_0 E^{IV}_0}{[ee \cdot 4]} + \frac{F^{V}_0 F^{V}_0}{[ff \cdot 5]}$$

Vermöge der Gleichungen (63) wird aber:

$$\begin{aligned} A_0 &= [a\lambda] \quad - [al] \quad = [a\lambda] \\ B'_0 &= [b\lambda \cdot 1] - [bl \cdot 1] = [b\lambda \cdot 1] \\ C''_0 &= [c\lambda \cdot 2] - [cl \cdot 2] = [c\lambda \cdot 2] \end{aligned}$$

u. s. f. wie die Bildung der Hülfsgröfsen an sich es lehrt. Man hat folglich die strenge Gleichung

$$m\varepsilon^2 = [nn \cdot 6] + \frac{[a\lambda]^2}{[aa]} + \frac{[b\lambda \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{[c\lambda \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} + \frac{[d\lambda \cdot 3]^2}{[dd \cdot 3]} + \frac{[e\lambda \cdot 4]^2}{[ee \cdot 4]} + \frac{[f\lambda \cdot 5]^2}{[ff \cdot 5]}$$

wo die Zahl der auf der rechten Seite neben $[nn \cdot 6]$ stehenden stets positiven Glieder, immer gleich ist der Anzahl der unbekannten, oder vielmehr hier ihren wahrscheinlichen Werthen nach zu bestimmenden Gröfsen.

Die quadratische Form, in der diese Glieder erscheinen, zeigt, dafs $[nn \cdot 6]$ immer kleiner sein mufs als $m\varepsilon^2$, zugleich aber auch, dafs, wenngleich $[a\lambda]$, $[b\lambda \cdot 1]$, $[c\lambda \cdot 2]$ u. s. f. aus einerlei System der λ bestimmt werden, doch die Fehler, welche in jeder einzelnen dieser Summen deswegen zurückbleiben, weil wir bei ihnen nur die wahrscheinlichsten, nicht die wahren Fehler anwenden können, sich nie gegenseitig aufheben können, sondern jeder einzeln nach ihrer Gröfse einwirken. Wären zu den m Beobachtungen noch andere derselben Art hinzugekommen, deren Fehler wir nicht genau kennten, so würden wir so viele ε^2 zu $[nn \cdot 6]$ hinzulegen müssen, als hinzugekommene Beobachtungen vorhanden gewesen. Wollen wir uns deswegen in dem gegenwärtigen Falle der Wahrheit so viel nähern als möglich, so werden wir für $[a\lambda]$, $[b\lambda \cdot 1]$ u. s. w. die Werthe setzen müssen, welche durch das Verhältnifs der bei diesen Summen möglichen Fehler, in Vergleich mit dem mittleren Fehler einer Beobachtung sich ergeben. Diese mittleren Fehler der Summen aber finden sich aus dem allgemeinen Satze für den mittleren Fehler irgend einer linearen Function Q ganz unmittelbar, denn es ist klar, dafs die Variabeln hier von denselben Bedingungsgleichungen wie oben abhängen. Zugleich aber haben die Summen schon die dort verlangte Form. Für $[a\lambda]$ wird $k_0 = 1$, alle andern k gleich Null; für $[b\lambda \cdot 1]$ wird $k_1 = 1$, alle andern k gleich Null und ähnlich bei den übrigen. Es werden deshalb die mittleren Fehler von

$$\begin{array}{llll} [a\lambda] & \ldots\ldots \varepsilon\sqrt{[aa]} & [d\lambda \cdot 3] & \ldots\ldots \varepsilon\sqrt{[dd \cdot 3]} \\ [b\lambda \cdot 1] & \ldots\ldots \varepsilon\sqrt{[bb \cdot 1]} & [e\lambda \cdot 4] & \ldots\ldots \varepsilon\sqrt{[ee \cdot 4]} \\ [c\lambda \cdot 2] & \ldots\ldots \varepsilon\sqrt{[cc \cdot 2]} & [f\lambda \cdot 5] & \ldots\ldots \varepsilon\sqrt{[ff \cdot 5]} \end{array}$$

und wenn wir diese Werthe substituiren, so kommt:

$$m\varepsilon^2 = [nn \cdot 6] + \varepsilon^2 + \varepsilon^2 + \varepsilon^2 + \varepsilon^2 + \varepsilon^2 + \varepsilon^2$$

oder wenn die Anzahl der aus den Gleichungen bestimmten wahrscheinlichsten Werthe $= \mu$ gesetzt wird

$$(64) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} m\varepsilon^2 = [nn \cdot 6] + \mu\varepsilon^2 \\ \varepsilon = \sqrt{\left(\dfrac{[nn \cdot 6]}{m - \mu}\right)} \end{array} \right.$$

worin der allgemeine Satz für jede Anzahl von Variabeln ausgesprochen ist.

III.

Zur vollständigen Auflösung der Aufgabe, bei irgend welcher Anzahl von unbekannten Gröfsen die wahrscheinlichsten Werthe derselben aus gegebenen Beobachtungen zu bestimmen, wenn die Gröfsen selbst völlig unabhängig von einander sind, gehört indessen wesentlich auch die Andeutung eines möglichst bequemen Weges für die numerische Berechnung dieser Werthe und ihrer Gewichte. Denn es ist nicht zu leugnen, dafs die allgemeinen Formeln, durch die verschiedenen eingeführten Hülfsgröfsen, den Schein einer so grofsen Verwickelung haben, dafs wenn es wirklich nöthig wäre, diesen Formeln stets Schritt für Schritt folgen zu müssen, die Ausführung der Rechnung sehr ermüdend sein würde. Allein es wird sich hoffentlich im Folgenden zeigen, dafs bei gehöriger Anordnung der einzelnen Theile es niemals nöthig sein wird, auch bei der weitläuftigsten Rechnung dieser Art einen Blick auf die Bedeutung der Buchstabenwerthe zu werfen. Man kann ganz allgemein für alle Fälle von Anfang an eine feste Vorschrift sich machen, welche niemals einer Zweideutigkeit unterworfen ist, und zugleich den Vorzug einer strengen Prüfung der ganzen Rechnung und jedes einzelnen Theiles gewährt.

Die Berechnung theilt sich zuerst in die Entwickelung der ursprünglichen Bedingungsgleichungen und die dazu gehörige Bestimmung des Gewichtes einer jeden einzelnen derselben. Hierüber lassen sich weiter keine allgemeinen Vorschriften geben, als in Bezug auf die Prüfung der Richtigkeit der Bedingungsgleichungen, und auf die zweckmäfsigste Wahl der Werthe für h schon früher angerathen worden sind, es müfste denn sein, dafs aus der Natur des behandelten Gegenstandes ein specielles Gesetz für die Coefficienten hervorginge. Indessen möchte es doch vielleicht nicht ganz überflüssig sein daran zu erinnern, wie sehr man an Sicherheit und schneller Ausführung der Rechnung gewinnt, wenn bei einer Aufgabe wie diese, wo eine gröfsere Anzahl ähnlicher Beobachtungen und Bedingungsgleichungen zusammen behandelt werden, die Rechnung so tabellarisch eingerichtet wird, dafs jede Beobachtung eine Verticalcolumne einnimmt, in welcher die horizontalen Zeilen überall die ähnlichen Werthe angeben. Es wird dadurch möglich, viele Bedingungsgleichungen zusammen zu berechnen, nicht jede einzeln, und da meistentheils die Zu- und Abnahme der Coefficienten und der trigonometrischen Functionen, die hier eingreifen, nicht sprungweise geht, sondern einen gesetzmäfsigeren Gang hat, den man häufig noch dadurch regelmäfsiger machen kann, dafs man die Beobachtungen nicht gerade der Zeitfolge nach in der Rechnung berücksichtigt, sondern sie mehr nach der Gleichartigkeit der Elemente ordnet, so erspart man theils viele Zeit im Aufschlagen der Logarithmen, theils sichert man sich gegen zufällige Fehler in der Gröfse der Werthe und ihrem Zeichen.

Sind nun die Bedingungsgleichungen in der Form wie sie in (25) verstanden worden, jede schon mit ihrem h multiplicirt, gegeben, so erfordert die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate noch folgende Rechnungen:

I. die Bildung der Summen $[an]$, $[bn]$, $[cn]$ etc. $[aa]$, $[ab]$, $[ac]$ etc. bis zu $[ff]$.

II. die Bildung der Hülfsgröfsen $[bn\cdot 1] \ldots [fn\cdot 5]$, $[bb\cdot 1]$, $[bc\cdot 1]$ etc. bis zu $[ff\cdot 5]$.

III. die Auflösung der aus diesen Hülfsgröfsen gebildeten Gleichungen (40).

IV. die Rechnungen, welche nach irgend einer der angeführten Methoden zur Kenntniss der Gewichte führen.

Von diesen vier Theilen hängen die drei letzten nicht von der Anzahl der Bedingungsgleichungen, sondern blofs von der Anzahl der unbekannten Gröfsen ab. Da diese letztere meistentheils nicht grofs ist, selten die Zahl 6 überschreitet, während die Anzahl der Bedingungsgleichungen in das unbestimmte wachsen kann, und manchmal über 50, selbst über 100 steigt, so wird der erste Theil, der zugleich von der Anzahl der unbekannten Gröfsen und der Bedingungsgleichungen abhängt, bei weitem den gröfsten Theil der ganzen Arbeit umfassen, und eine Prüfung der Richtigkeit bei seiner Weitläuftigkeit, so wie ebenfalls eine Anordnung um kein Product und keine Summe zu übergehen, um so wichtiger werden.

Das letztere erreicht man am einfachsten, wenn man die Zahlen der Bedingungsgleichungen so ordnet:

	Nummer der Beobachtung.						
	1	2	3	4	5	6	
Zahlenwerthe . . .	$\log n$	$\log n'$	$\log n''$	$\log n'''$	$\log n^{\mathrm{IV}}$	$\log n^{\mathrm{V}}$	etc.
Coeffic. von $x \ldots a$	$\log a$	$\log a'$	$\log a''$	$\log a'''$	$\log a^{\mathrm{IV}}$	$\log a^{\mathrm{V}}$	etc.
Coeffic. von $y \ldots b$	$\log b$	$\log b'$	$\log b''$	$\log b'''$	$\log b^{\mathrm{IV}}$	$\log b^{\mathrm{V}}$	etc.
Coeffic. von $z \ldots c$	$\log c$	$\log c'$	$\log c''$	$\log c'''$	$\log c^{\mathrm{IV}}$	$\log c^{\mathrm{V}}$	etc.
Coeffic. von $w \ldots d$	$\log d$	$\log d'$	$\log d''$	$\log d'''$	$\log d^{\mathrm{IV}}$	$\log d^{\mathrm{V}}$	etc.
Coeffic. von $u \ldots e$	$\log e$	$\log e'$	$\log e''$	$\log e'''$	$\log e^{\mathrm{IV}}$	$\log e^{\mathrm{V}}$	etc.
Coeffic. von $t \ldots f$	$\log f$	$\log f'$	$\log f''$	$\log f'''$	$\log f^{\mathrm{IV}}$	$\log f^{\mathrm{V}}$	etc.

Schreibt man sich jetzt zuerst die $\log n$, $\log n'$, $\log n''$, $\log n'''$ etc. auf den untern Rand eines Papiers, so dafs, wenn man dieses über die Tabelle hält, Spalte auf Spalte pafst, und legt das Papier zuerst so, dafs der $\log n$ über dem $\log n$, $\log n'$ über $\log n'$ etc. zu stehen kommt, so kann man mit Leichtigkeit, besonders da die Logarithmen nur fünf Stellen enthalten, die beiden übereinanderstehenden Logarithmen jedesmal im Kopf addiren, und die zu der Summe gehörige Zahl sogleich aufsuchen und hinschreiben. Diese Zahlen vertical untereinander gesetzt und addirt geben das Product $[nn]$. Schiebt man dann das Papier eine Zeile tiefer, so dafs $\log n$ über $\log a$, $\log n'$ über $\log a'$ etc. zu stehen kommt, so erhält man auf dieselbe Weise das Product $[an]$; und wenn man so fortfährt, nach einander $[bn]$, $[cn]$, $[dn]$, $[en]$, $[fn]$, womit die Multiplicationen von n beendigt sind. Man schreibt sich jetzt wieder auf den untern Rand eines Papiers die $\log a$, $\log a'$ etc., fängt mit diesen bei der Zeile $\log a$, $\log a'$ etc. an und erhält bei successivem Herabrücken die Producte $[aa]$, $[ab]$, $[ac]$, $[ad]$, $[ae]$, $[af]$. Hiermit schliefsen die Multiplicationen mit a. Es folgt dann die Zeile $\log b$, $\log b'$ etc., die zuerst mit sich selbst multiplicirt, und nachher mit den unter ihr stehenden, die Producte $[bb]$, $[bc]$, $[bd]$, $[be]$, $[bf]$ giebt. Die beständige Fortsetzung der nämlichen Operationen führt zuletzt auf $[ff]$, womit die Rechnung schliefst.

Möge es erlaubt sein, hier ein paar kleine practische Bemerkungen hinzuzufügen. Das Aufschlagen der Logarithmen und die Regelmäfsigkeit des Schreibens der Zahlen, was so wesentlich zur Vermeidung von Fehlern beiträgt, wird beträchtlich erleichtert, wenn man sich gewöhnt, bei zwei Logarithmen, die zu einander addirt oder von einander subtrahirt werden, die Addition und Subtraction von der Linken zur Rechten (nicht wie gewöhnlich von der Rechten zur Linken) zu machen. Man erhält dadurch zuerst die Zahlen, welche das Aufschlagen leiten müssen, ohne (bei siebenstelligen Logarithmen) das Gedächtnifs mit den letzten Ziffern zu beschweren, und für die kleine Aufmerksamkeit, ob man eine Einheit mehr oder weniger nehmen müsse der folgenden Stellen wegen, erlangt man die nöthige Uebung fast augenblicklich, so lange nur zwei Reihen von Zahlen miteinander zu verbinden sind. Sollte die Summe oder Differenz wirklich hingeschrieben werden müssen, so ist unsere Gewohnheit zu schreiben dieser Art der Verbindung ebenfalls günstiger.

Für das Zeichen der Zahlen, deren Logarithmen man vor sich hat, scheint eben so die Art, welche Gaufs in der *Theoria motus* eingeführt hat, hinter dem Logarithmen einer negativen Zahl ein kleines n zu setzen, Vorzüge zu haben vor der andern Methode, ein Minus- oder Pluszeichen vor oder hinter zu setzen, weil durch das letztere nur allzuleicht Verwechselungen der Logarithmen mit den Zahlen herbeigeführt werden können. Eine gerade Anzahl der n vernichtet sie in der Verbindung mehrerer Logarithmen, eine ungerade läfst ein n hinzufügen.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, eine bequeme Prüfungsrechnung mit diesem weitläuftigsten Theile zu verbinden. Zu diesem Zwecke scheint es am einfachsten, in jeder Bedingungsgleichung die algebraische Summe aller Coefficienten der unbekannten Gröfsen zu nehmen, so dafs

$$a + b + c + d + e + f = s$$
$$a' + b' + c' + d' + e' + f' = s' \text{ etc.}$$

und diese neuen Gröfsen s, s', s'' etc. gleichsam als Coefficienten einer siebenten unbekannten Gröfse zu den übrigen Gliedern noch hinzuzusetzen, und völlig auf dieselbe Weise mit der Bildung der Summen bei ihnen zu verfahren wie bei den andern. Es kommt folglich zu dem obigen Schema noch die neue Zeile hinzu:

Summen-Coeff. s | $\log s$ | $\log s'$ | $\log s''$ | $\log s'''$ | $\log s^{\text{IV}}$ | $\log s^{\text{V}}$ | etc.

und die Verbindungen dieser Logarithmen mit den darüber stehenden $\log n$, $\log a$, $\log b$ u. s. w. werden auf dieselbe Weise gleichzeitig mit den andern gebildet. Aus dem Werthe von s, s' etc. folgt, dafs

$$an + bn + cn + dn + en + fn = sn$$
$$a'n' + b'n' + c'n' + d'n' + e'n' + f'n' = s'n' \text{ etc.}$$

also auch:

$$\begin{aligned}
[an] + [bn] + [cn] + [dn] + [en] + [fn] &= [sn]\\
[aa] + [ab] + [ac] + [ad] + [ae] + [af] &= [as]\\
[ab] + [bb] + [bc] + [bd] + [be] + [bf] &= [bs]\\
[ac] + [bc] + [cc] + [cd] + [ce] + [cf] &= [cs]\\
[ad] + [bd] + [cd] + [dd] + [de] + [df] &= [ds]\\
[ae] + [be] + [ce] + [de] + [ee] + [ef] &= [es]\\
[af] + [bf] + [cf] + [df] + [ef] + [ff] &= [fs].
\end{aligned}$$

Auf diese Weise werden durch die Bildung von sieben neuen Summen alle übrigen, mit Ausnahme von $[nn]$, um so sicherer geprüft, als die meisten derselben zweimal in zwei verschiedenen Summirungen vorkommen. Allgemein, wenn i die Anzahl der Unbekannten ist, so prüft man durch $(i+1)$ neue Summen die Richtigkeit der übrigen, an der Zahl $\frac{i(i+3)}{1 \cdot 2}$. Auch ist der Ort des Fehlers, wenn nach der Bildung von $[sn]$, $[as]$ etc. eine Verschiedenheit sich zeigen sollte, sehr leicht zu entdecken, weil nach der Anordnung der Rechnung und der Bedeutung von s, die Summe aller Glieder, unter den Gröfsen an, aa, ab etc., welche in einer horizontalen Reihe, bevor sie zusammenaddirt sind, stehen, gleich ist dem Gliede von sn, as etc. was auf der gleichen Zeile berechnet worden ist.

Man würde auch $[nn]$ prüfen können, wenn man in den Ausdruck von s, s' etc. die Glieder n, n' etc. hätte einschliefsen wollen. Allein diese Zusammensetzung ist der Schärfe der Prüfung nicht vortheilhaft, welche man überhaupt durch eine leichte Aenderung in der Gröfse der Coefficienten, jedesmal wo es nöthig sein sollte, so viel als möglich zu erhöhen suchen sollte. Wenn nämlich einige Coefficienten z. B. die a oder die Coefficienten von x, sehr viel gröfser sind als die übrigen, so wird man zwar durch $[as]$, die Richtigkeit der aus a gebildeten Summen ganz so scharf prüfen können als die Rechnung es verlangt, allein für die andern, nicht aus a gebildeten Summen, $[bb]$, $[bc]$, $[cc]$ etc. werden die Prüfungssummen $[bs]$, $[cs]$ etc. nicht dieselbe Sicherheit bis auf die Decimalstellen, die man bei ihnen noch verbürgt zu sehen wünschen könnte, gewähren, weil in jeder derselben eine aus a gebildete Summe vorkommt, welche wegen der überwiegenden Gröfse der Coefficienten nicht die letzten Decimalen als gültig anzusehen erlaubt. Es ist deswegen vortheilhaft dahin zu trachten, dafs alle Coefficienten möglichst gleich hohe Werthe, abgesehen von ihren Zeichen, haben. Hierzu aber steht es uns frei, statt x z. B. zu berechnen, irgend ein Multiplum oder einen aliquoten Theil desselben als unbekannte Gröfse zu betrachten, oder zu schreiben:

$$\text{statt } ax \;\ldots\ldots\; \frac{a}{m}\,(mx)$$

$$a'x \;\ldots\ldots\; \frac{a'}{m}\,(mx) \text{ etc.}$$

wo m eine beliebige positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl sein kann. Rechnet man dann mit den neuen Coefficienten $\frac{a}{m}$, $\frac{a'}{m}$, $\frac{a''}{m}$ etc., so findet man den numerischen Werth und das Gewicht von mx, und wird jenen durch m zu dividiren, dieses mit m^2 zu multipliciren haben, um Werth und Gewicht von x allein zu erhalten. Wenn man mit einiger Umsicht dieses Hülfsmittel gleich bei der ersten Bildung der Bedingungsgleichungen anwendet, und überhaupt, je gröfser die Anzahl der unbekannten Gröfsen ist, um so strenger die bekannten Vorsichtsmaafsregeln befolgt, für die positiven und negativen Producte besondere Rubriken zu machen, die Prüfungssummen nicht blofs zuletzt, sondern in gewissen Abschnitten, je nach 15 oder 20 Gleichungen zu bilden u. s. w., so wird die völlige Sicherheit, die Ordnung, die in dem ganzen Verfahren herrscht, und die Symmetrie desselben erlauben, die Rechnung abzubrechen und wieder aufzunehmen ganz nach der Bequemlichkeit, und einzelne günstige Momente zu benutzen, wenn vielleicht ein zu anhaltendes Verweilen ermüden sollte. Es ist mir nie rathsam erschienen, und fast möchte ich glauben, es sei in der Regel nicht kürzer oder überhaupt vortheilhaft, wie es manchmal vorgeschlagen wird, sowohl bei diesem als bei den folgenden Theilen gewissermaafsen indirect zu verfahren; zuerst vielleicht kleine Gröfsen zu vernachlässigen, oder bei einer gröfseren Anzahl von Unbekannten erst nur eine Klasse derselben vorzunehmen, und den Einflufs der andern als völlig verschwindend zu betrachten, um weniger Summen zu bilden zu haben; nachher dann die hier vernachläfsigten wieder allein zu behandeln, und mit jedesmaliger Substitution der erhaltenen Werthe abwechselnd von der einen Klasse zur andern überzugehen. Häufig setzt man sich dabei der Gefahr aus, durch irrige Schätzung der verschiedenen Ordnungen in Hinsicht auf die Gröfse des Einflusses, der Wahrheit sich nur bis zu einer gewissen Grenze zu nähern, und wenn diese erreicht ist, entweder gar nicht weiter zu kommen, oder selbst von dem wahren Ziele sich zu entfernen. Man hat nie die Befriedigung, das ganz scharfe Resultat kennen zu lernen, während es doch nur erforderlich ist, mit fester Ruhe die erste Anlage gehörig zu entwerfen, und ohne Uebereilung den sicheren Weg, der niemals irre leiten kann, mit der gehörigen Ausdauer zu verfolgen. Die gröfsere Schnelligkeit, mit der man jedesmal rechnen wird, wenn man weifs, dafs eine ganz sichere Prüfung stattfindet, ersetzt in jedem Falle reichlich den Zeitaufwand, den die Bildung der Summen s, s', s'' etc. erfordert. Bei der kleinsten wie bei der gröfsten Ausdehnung der Arbeit habe ich sie jedesmal vortheilhaft gefunden.

Auf die Bildung der Summen $[an]$, $[bn]$ etc. folgt dann zweitens die Berechnung der Hülfsgröfsen $[bn\cdot 1]$ bis zu $[ff\cdot 5]$. Betrachtet man die Form dieser sämmtlichen Hülfsgröfsen, so ergiebt sich sehr bald das einfache Gesetz, nach welchem sie eine aus der andern entstehen. Alle Gröfsen, die die Zahl 1 in der Klammer führen, und den Buchstaben b, werden gebildet durch die Differenz zwischen der gleiche Buchstaben enthaltenden Klammer ohne Zahl, und einem Producte, dessen einer Factor $\frac{[ab]}{[aa]}$ bei allen der nämliche ist, während der andere successive die Verbindungen des Buchstaben b mit den sämmtlichen andern enthält. Dasselbe findet bei c, d, e, f, n statt. Die Hülfsgröfsen, welche die Zahl 2 in der Klammer führen, entstehen aus denen mit 1 versehenen auf ganz ähnliche Art. Das folgende Schema wird deshalb von selbst verständlich sein.

Zuerst schreibt man in einer horizontalen Linie neben einander:

$$[aa]\ [ab]\ [ac]\ [ad]\ [ae]\ [af]\ [as]\ [an],$$

und darunter ihre Logarithmen.

Unter diesen Logarithmen kommen die Gröfsen zu stehen:

$$[bb]\ [bc]\ [bd]\ [be]\ [bf]\ [bs]\ [bn],$$

so dafs vorne eine Stelle eingerückt ist. Man nimmt dann den Logarithmen von $\frac{[ab]}{[aa]}$; addirt ihn successive zu den Logarithmen von $[ab]$, $[ac]$ etc. bis $[an]$, d. h. zu allen Logarithmen, die auf der rechten Seite des Zählers dieses Bruches stehen, den Zähler selbst mit eingeschlossen, und setzt die zu dieser Summe der beiden Logarithmen gehörige Zahl unter die in gleicher Verticale stehenden Werthe, oder das Product

$$\frac{[ab]}{[aa]} \cdot [ab] \text{ unter } [bb]$$

$$\frac{[ab]}{[aa]} \cdot [ac] \text{ unter } [bc]$$

$$\frac{[ab]}{[aa]} \cdot [ad] \text{ unter } [bd] \text{ etc.}$$

Zieht man dann die beiden Zeilen von einander ab, so erhält man:

$$[bb\cdot 1] \cdot [bc\cdot 1] \cdot [bd\cdot 1] \cdot [be\cdot 1] \cdot [bf\cdot 1] \cdot [bs\cdot 1] \cdot [bn\cdot 1]$$

Von diesen setzt man wieder die Logarithmen unter jede Zahl.

Jetzt folgt die Reihe der Werthe

$$[cc]\ [cd]\ [ce]\ [cf]\ [cs]\ [cn]$$

gegen die b um eine Stelle vorne, gegen die a um zwei Stellen eingerückt. Die erste Linie unter diesen wird gebildet durch die Producte

$$\frac{[ac]}{[aa]}[ac],\ \frac{[ac]}{[aa]}[ad],\ \frac{[ac]}{[aa]}[ae],\ \frac{[ac]}{[aa]}[af],\ \frac{[ac]}{[aa]}[as],\ \frac{[ac]}{[aa]}[an].$$

Beider Zeilen Differenz giebt $[cc\cdot 1]\,[cd\cdot 1]\,[ce\cdot 1]\,[cf\cdot 1]\,[cs\cdot 1]\,[cn\cdot 1]$. Man schreibt sie hin, und setzt unter dieselbe die ganz auf ähnliche Weise gebildeten Producte

$$\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bc\cdot 1],\ \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bd\cdot 1],\ \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[be\cdot 1],\ \frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bf\cdot 1] \text{ etc.}$$

Diese, von neuem abgezogen, geben die Gröfsen

$$[cc\cdot 2]\ [cd\cdot 2]\ [ce\cdot 2]\ [cf\cdot 2]\ [cs\cdot 2]\ [cn\cdot 2]$$

von denen man die Logarithmen ansetzt.

Die folgende Reihe $[dd]\ [de]\ [df]\ [ds]\ [dn]$ wird wiederum gegen die c um eine Stelle vorne eingerückt, und hat unmittelbar unter sich die Gröfsen $\frac{[ad]}{[aa]}[ad]$, $\frac{[ad]}{[aa]}[ae]$ etc. Von beiden wird die Differenz gebildet. Diese Differenz bekommt unter jedem Werthe die Producte $\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bd\cdot 1]$, $\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[be\cdot 1]\ldots$ etc. und auf die ausgeschriebene Differenz dieser beiden Zeilen folgt die Zeile

$\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[cd\cdot 2]$, $\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[ce\cdot 2]$ etc. Die ausgeschriebene Differenz dieser letzten beiden Zeilen giebt die Gröfsen $[dd\cdot 3]$ $[de\cdot 3]$ $[df\cdot 3]$ etc., von denen man wiederum die Logarithmen ansetzt. So setzt sich das treppenförmige Schema weiter fort. Den Gröfsen $[cc\cdot 2]$ etc. gehen zwei, den Gröfsen $[dd\cdot 3]$ drei, den Gröfsen $[ee\cdot 4]$ vier Subtractionen voran, und von jeder Zeile, welche bei b die Zahl 1, bei c die Zahl 2, bei d die Zahl 3, überhaupt bei dem m^{ten} Buchstaben die Zahl $(m-1)$ in der Klammer hat, werden auch die Logarithmen hingeschrieben.

Auch diese Rechnung hat vermöge der s ihre strenge Controlle. Denn da

$$[as]=[aa]+[ab]+[ac]+[ad]+[ae]+[af],$$

und

$$[bs]=[ab]+[bb]+[bc]+[bd]+[be]+[bf],$$

so wird

$$[bs\cdot 1]=[bs]-\frac{[ab]}{[aa]}[as]$$

$$=[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]+[bc]-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]+[bd]-\frac{[ab]}{[aa]}[ad]$$

$$+[be]-\frac{[ab]}{[aa]}[ae]+[bf]-\frac{[ab]}{[aa]}[af]$$

$$=[bb\cdot 1]+[bc\cdot 1]+[bd\cdot 1]+[be\cdot 1]+[bf\cdot 1],$$

und ganz dasselbe Verhalten findet bei allen folgenden Hülfsgröfsen statt, so dafs zuletzt

$$[fs\cdot 5]=[ff\cdot 5],\quad [sn\cdot 5]=[fn\cdot 5]$$

werden mufs.

Der leichtern Uebersicht wegen möge der Anfang des Schemas, so viel der Druck verstattet, hier folgen.

	$[aa]$,	$[ab]$,	$[ac]$,	$[ad]$,	$[ae]$,	$[af]$,	$[as]$,	$[an]$
	log	log	log	log	log	log	log	log
		$[bb]$	$[bc]$	$[bd]$	$[be]$	$[bf]$	$[bs]$	$[bn]$
Fact. $\frac{[ab]}{[aa]}$		. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
		$[bb\cdot 1]$	$[bc\cdot 1]$	$[bd\cdot 1]$	$[be\cdot 1]$	$[bf\cdot 1]$	$[bs\cdot 1]$	$[bn\cdot 1]$
		log	log	log	log	log	log	log

	$[cc]$	$[cd]$	$[ce]$	$[cf]$	$[cs]$	$[cn]$
Fact. $\frac{[ac]}{[aa]}$	…	…	…	…	…	…
	$[cc\cdot 1]$	$[cd\cdot 1]$	$[ce\cdot 1]$	$[cf\cdot 1]$	$[cs\cdot 1]$	$[cn\cdot 1]$
Fact. $\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	…	…	…	…	…	…
	$[cc\cdot 2]$	$[cd\cdot 2]$	$[ce\cdot 2]$	$[cf\cdot 2]$	$[cs\cdot 2]$	$[cn\cdot 2]$
	log	log	log	log	log	log
		$[dd]$	$[de]$	$[df]$	$[ds]$	$[dn]$
Fact. $\frac{[ad]}{[aa]}$		…	…	…	…	…
		$[dd\cdot 1]$	$[de\cdot 1]$	$[df\cdot 1]$	$[ds\cdot 1]$	$[dn\cdot 1]$
Fact. $\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$		…	…	…	…	…
		$[dd\cdot 2]$	$[de\cdot 2]$	$[df\cdot 2]$	$[ds\cdot 2]$	$[dn\cdot 2]$
Fact. $\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$		…	…	…	…	…
		$[dd\cdot 3]$	$[de\cdot 3]$	$[df\cdot 3]$	$[ds\cdot 3]$	$[dn\cdot 3]$
		log	log	log	log	log
			$[ee]$	$[ef]$	$[es]$	$[en]$
Fact. $\frac{[ae]}{[aa]}$			…	…	…	…
			$[ee\cdot 1]$	$[ef\cdot 1]$	$[es\cdot 1]$	$[en\cdot 1]$
Fact. $\frac{[be\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$			…	…	…	…
			$[ee\cdot 2]$	$[ef\cdot 2]$	$[es\cdot 2]$	$[en\cdot 2]$
Fact. $\frac{[ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$			…	…	…	…
			$[ee\cdot 3]$	$[ef\cdot 3]$	$[es\cdot 3]$	$[en\cdot 3]$
Fact. $\frac{[de\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}$			…	…	…	…
			$[ee\cdot 4]$	$[ef\cdot 4]$	$[es\cdot 4]$	$[en\cdot 4]$
			log	log	log	log
				$[ff]$	$[fs]$	$[fn]$
Fact. $\frac{[af]}{[aa]}$				…	…	…
				$[ff\cdot 1]$	$[fs\cdot 1]$	$[fn\cdot 1]$
Fact. $\frac{[bf\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$				…	…	…
				$[ff\cdot 2]$	$[fs\cdot 2]$	$[fn\cdot 2]$

$$\text{Fact. } \frac{[cf \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} \cdots\cdots\cdots \quad \underline{\qquad\qquad\qquad} \quad [ff \cdot 3] \; [fs \cdot 3] \; [fn \cdot 3]$$

$$\text{Fact. } \frac{[df \cdot 3]}{[dd \cdot 3]} \cdots\cdots\cdots \quad \underline{\qquad\qquad\qquad} \quad [ff \cdot 4] \; [fs \cdot 4] \; [fn \cdot 4]$$

$$\text{Fact. } \frac{[ef \cdot 4]}{[ee \cdot 4]} \cdots\cdots\cdots \quad \underline{\qquad\qquad\qquad} \quad [ff \cdot 5] \; [fs \cdot 5] \; [fn \cdot 5]$$

$$\text{log} \qquad \text{log} \qquad \text{log}$$

Es fehlen dann nur noch die beiden Gattungen von Hülfsgröſsen, welche aus $[sn]$ und $[nn]$ entstehen, von welchen die ersten zur Controlle der $[bn \cdot 1]$ $[cn \cdot 1]$ etc. $[cn \cdot 2]$ $[dn \cdot 2]$ etc. dienen, die andern zuletzt den mittleren Fehler ermitteln lassen. Bei diesen beiden treten andere Factoren ein, nämlich $\frac{[an]}{[aa]}$, $\frac{[bn \cdot 1]}{[bn \cdot 1]}$ etc., so daſs man diese beiden besonders berechnen kann, und der Symmetrie wegen die Gröſsen $[sn]$ und $[nn]$ in dieselbe horizontale Linie mit $[ff]$ $[fs]$ $[fn]$ bringen. Für sie wird folglich, wenn man als zweite Factoren bei den Producten, welche stets abgezogen werden, immer die beiden letzten Logarithmen einer jeden Reihe von Logarithmen versteht, das Schema so sich stellen:

$$[sn] \qquad [nn]$$

$$\text{Fact. } \frac{[an]}{[aa]} \cdots\cdots\cdots \quad \underline{\qquad\qquad} \quad [sn \cdot 1] \; [nn \cdot 1]$$

$$\text{Fact. } \frac{[bn \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} \cdots\cdots\cdots \quad \underline{\qquad\qquad} \quad [sn \cdot 2] \; [nn \cdot 2]$$

$$\text{Fact. } \frac{[cn \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} \cdots\cdots\cdots \quad \underline{\qquad\qquad} \quad [sn \cdot 3] \; [nn \cdot 3]$$

$$\text{Fact. } \frac{[dn \cdot 3]}{[dd \cdot 3]} \cdots\cdots\cdots \quad \underline{\qquad\qquad} \quad [sn \cdot 4] \; [nn \cdot 4]$$

$$\text{Fact.}\ \frac{[en\cdot 4]}{[ee\cdot 4]}\cdots\cdots\cdots\cdots\quad \begin{array}{cc} \hline [sn\cdot 5] & [nn\cdot 5] \end{array}$$

$$\text{Fact.}\ \frac{[fn\cdot 5]}{[ff\cdot 5]}\cdots\cdots\cdots\cdots\quad \begin{array}{cc} \hline 0 & [nn\cdot 6] \end{array}$$

Hierdurch ist alles controllirt. Jede Summe, welche s enthält, ist gleich der Summe der links neben ihr auf gleicher Linie stehenden, und der in verticalem Sinne über dem letzten linken Gliede sich befindenden Gröſsen derselben Ordnung. So z. B. wird

$$[es\cdot 4] = [ef\cdot 4] + [ee\cdot 4]$$
$$[es\cdot 2] = [ef\cdot 2] + [ee\cdot 2] + [de\cdot 2] + [ce\cdot 2]$$

u. s. w., für die Glieder, welche n enthalten, geben die Glieder mit sn die gehörige Controlle. Die einzige Reihe von $[nn]$ bis $[nn\cdot 6]$ bleibt ohne Prüfung. Indessen dient diese theils nur zur Ermittelung der Schätzung für den wahrscheinlichen Fehler, auf die Werthe der Unbekannten ist sie ganz ohne Einfluſs, theils fehlt bei ihnen eine und vielleicht die häufigste Quelle der Rechnungsfehler, nämlich der Zeichenwechsel. Alle hier vorkommenden Zahlen sind ihrer Natur nach nothwendig positiv.

Wenn auch bei den Bedingungsgleichungen und den Summationen nur Logarithmen von fünf Decimalen angewandt sind, so scheint es bei dieser Elimination, wo in der Regel gröſsere Zahlen vorkommen, rathsam, mehr Decimalen, sechs oder sieben, zu gebrauchen. Häufig vermindern sich die anfänglich beträchtlichen Summen $[an]$ $[aa]$ etc. in den Hülfsgröſsen so sehr, daſs wenn auch die letzten Decimalstellen immer unsicher bleiben, es doch wünschenswerth wird, sie wenigstens so zu kennen, wie sie der früheren Rechnung entsprechen. Aus eben diesem Grunde möchte es auch zweckmäſsig sein, bei $[as]$ $[bs]$ etc. nicht die Werthe anzusetzen, welche die unmittelbare Berechnung ergeben hat, sondern die, welche den Summen $[aa] + [ab] + [ac] + [ad] + [ae] + [af]$ für $[as]$, und ähnlich für die andern Hülfsgröſsen, genau entsprechen. Man wird dann die schärfste Prüfung bei den abgeleiteten Hülfsgröſsen haben.

Das nächste Geschäft ist jetzt drittens, aus den Endgleichungen (40) die Werthe von $x\ y\ z$ etc. zu berechnen. Die Endgleichungen selbst sind schon vollständig ausgeschrieben in dem obigen Schema enthalten, es sind alle die Zeilen, deren Logarithmen angesetzt worden sind; nur mit dem Unterschiede von (40) in Hinsicht auf die Form, dafs durch die Coefficienten von $x\ y\ z$ etc. oder die Gröfsen $[aa]$, $[bb\cdot 1]$, $[cc\cdot 2]$, noch nicht dividirt ist. Fängt man also hier bei der letzten Gleichung an, und nimmt die Differenz der Logarithmen von $[fn\cdot 5]$ und $[ff\cdot 5]$, und zwar mit entgegengesetztem Zeichen, so hat man den Werth von t. Schreibt man sich diesen auf den untern Rand eines Papiers an der rechten Seite, so dafs linker Hand noch Raum zu mehreren Logarithmen ist, und hält diesen Werth über $[ef\cdot 4]$, so wird die der Summe beider Logarithmen entsprechende Zahl zu $[en\cdot 4]$ addirt werden müssen. Die Differenz der Logarithmen dieser letzten Summe und des log $[ee\cdot 4]$, und zwar mit entgegengesetztem Zeichen genommen, giebt den Werth von u. Dieser linker Hand neben dem log t auf den untern Rand des Papiers geschrieben, und beide dann über $[df\cdot 3]$ und $[de\cdot 3]$ gehalten, geben Zahlen, die zu $[dn\cdot 3]$ addirt werden müssen, um durch $[dd\cdot 3]$ dividirt den Werth von w zu geben, wobei immer das Zeichen entgegengesetzt genommen werden mufs. Die Operation setzt sich auf diese Weise ganz mechanisch fort, bis zu dem Werthe von x. Bei x müssen sechs Zahlen addirt werden, bei y fünf, bei z vier, bis zu t herunter, wo keine Addition vorkommt. Der bequemste Raum zu der Hinsetzung der zu addirenden Zahlen findet sich unter $[aa]$, $[bb\cdot 1]$, $[cc\cdot 2]$, $[dd\cdot 3]$, $[ee\cdot 4]$, wodurch alles leicht übersichtlich wird.

Es wird häufig nicht nöthig sein, für diese Operation (bei der blofs auf die Vertauschung der Zeichen bei der letzten Division für jeden Werth einige Aufmerksamkeit zu richten ist) eine besondere Prüfung zu haben. Meistentheils giebt die Rechnung für die Gewichte sie. Will man sie aber doch haben, so bilde man durch unmittelbare Addition, welche sich der Anordnung nach leicht ausführen läfst, die Gleichung:

$$\begin{aligned}[aa]x &+ \{[ab]+[bb\cdot 1]\}y \\ &+ \{[ac]+[bc\cdot 1]+[cc\cdot 2]\}z \\ &+ \{[ad]+[bd\cdot 1]+[cd\cdot 2]+[dd\cdot 3]\}w \\ &+ \{[ae]+[be\cdot 1]+[ce\cdot 2]+[de\cdot 3]+[ee\cdot 4]\}u \\ &+ \{[af]+[bf\cdot 1]+[cf\cdot 2]+[df\cdot 3]+[ef\cdot 4]+[ff\cdot 5]\}t \\ &+ \ [an]+[bn\cdot 1]+[cn\cdot 2]+[dn\cdot 3]+[en\cdot 4]+[fn\cdot 5]=0\end{aligned}$$

welcher durch die gefundenen Werthe von $x\ y\ z\ w\ u\ t$ genau genug gethan werden mufs. Sollte hier ein Fehler entdeckt werden, so wird man leicht durch die Addition der einzelnen Producte, die schon berechnet vorliegen, den Ort des Fehlers entdecken.

Endlich kommt viertens die Berechnung der Gewichte. Diese wird sich ändern, je nachdem man die eine oder die andere der vorgeschlagenen Methoden vorzieht. Mir ist es am bequemsten vorgekommen, jedesmal einmal vollständig die Ordnung der Unbekannten umzukehren, also mit Bezug auf das obige Schema eine zweite Rechnung auszuführen nach der Form:

$$\begin{array}{llllllllll}
[ff] & [ef] & [df] & [cf] & [bf] & [af] & [fs] & [fn] & & \\
 & [ee] & [de] & [ce] & [be] & [ae] & [es] & [en] & & \\
 & & [dd] & [cd] & [bd] & [ad] & [ds] & [dn] & & \\
 & & & [cc] & [bc] & [ac] & [cs] & [cn] & & \\
 & & & & [bb] & [ab] & [bs] & [bn] & & \\
 & & & & & [aa] & [as] & [an] & [sn] & [nn].
\end{array}$$

Hierdurch werden die numerischen Werthe für $x\ y\ z$ etc., wie man sie aus der vorigen Rechnung erhalten hat, vollständig controllirt, weil x hier zuletzt erscheint, und der auf diese Weise unmittelbar erhaltene Werth übereinstimmen mufs mit dem durch die successiven Substitutionen erhaltenen. Ferner hat man durch die doppelte Rechnung die Gewichte von vier Unbekannten sogleich, nämlich:

$$[ff\cdot 5] \ \ldots\ldots \text{ für } t \qquad\qquad [aa\cdot 5] \ \ldots\ldots \text{ für } x$$

$$[ee\cdot 4]\,\frac{[ff\cdot 5]}{[ff\cdot 4]} \text{ für } u \qquad\qquad [bb\cdot 4]\,\frac{[aa\cdot 5]}{[aa\cdot 4]} \text{ für } y.$$

Für die in der Mitte liegenden Unbekannten bildet man jetzt noch die Ableitungen:

$$[ff\cdot 4]_d = [ff\cdot 3] - \frac{[ef\cdot 3]}{[ee\cdot 3]}[ef\cdot 3]$$

$$[aa\cdot 4]_c = [aa\cdot 3] - \frac{[ab\cdot 3]}{[bb\cdot 3]}[ab\cdot 3]$$

so wird für das Gewicht von w der Werth:

$$[dd\cdot 3]\cdot\frac{[ee\cdot 4]}{[ee\cdot 3]}\cdot\frac{[ff\cdot 5]}{[ff\cdot 4]_d}$$

und für das Gewicht von z der Werth:

$$[cc\cdot 3]\cdot\frac{[bb\cdot 4]}{[bb\cdot 3]}\cdot\frac{[aa\cdot 5]}{[aa\cdot 4]_c}$$

gefunden. Oder man geht in den beiden Entwicklungen bis zu der in oder nächst der Mitte liegenden Unbekannten zurück, und rechnet nach dem Schema:

$$\begin{array}{ccccccc}
[ff\cdot 3] & [ef\cdot 3] & [df\cdot 3] & [fs\cdot 3] & [fn\cdot 3] & & \\
 & [ee\cdot 3] & [de\cdot 3] & [es\cdot 3] & [en\cdot 3] & & \\
 & & [dd\cdot 3] & [ds\cdot 3] & [dn\cdot 3] & [sn\cdot 3] & [nn\cdot 3] \\
\\
[aa\cdot 3] & [ab\cdot 3] & [ac\cdot 3] & [as\cdot 3] & [an\cdot 3] & & \\
 & [bb\cdot 3] & [bc\cdot 3] & [bs\cdot 3] & [bn\cdot 3] & & \\
 & & [cc\cdot 3] & [cs\cdot 3] & [cn\cdot 3] & &
\end{array}$$

in welchem letzteren Falle es manchmal angenehm ist, die Gröfsen, welche n enthalten, mitzunehmen, wenn gleich sie nicht nöthig thun zur Bestimmung der Gewichte, um bei der unbedeutenden Vermehrung der Arbeit, zugleich noch eine directe Bestimmung des numerischen Werthes von z und w zu haben. Uebrigens wird in der Regel dieser letztere Werth ungenauer ausfallen, als der in der früheren Ableitung, weil der Divisor hier jedenfalls kleiner ist. Dagegen gestattet eine solche Durchführung der Rechnung, ohne alle Mühe sich die Anordnung auszuwählen, welche der Genauigkeit am entsprechendsten zu sein scheint, so dafs wenn vielleicht das Gewicht einer der Unbekannten gar zu klein ausfällt, man um nicht die anderen Werthe dadurch unsicherer zu machen, eine solche entweder ganz vernachlässigen, oder sie doch zur letzten machen kann, und die anderen als Functionen derselben darstellen. Die Rechnung hierfür, oder die Berechnung A^{v}, B^{v} etc., ist ganz einfach darin enthalten, dafs man für ein unsicheres t z. B., als die Theile der verschiedenen Glieder des Endresultats, nicht blofs die reinen Zahlenwerthe $[en\cdot 4]$ $[dn\cdot 3]$ $[cn\cdot 2]$ $[bn\cdot 1]$ $[an]$ ansieht, sondern die combinirten Glieder:

$$\begin{aligned}
&[ef\cdot 4]+[en\cdot 4]\\
&[df\cdot 3]+[dn\cdot 3]\\
&[cf\cdot 2]+[cn\cdot 2]\\
&[bf\cdot 1]+[bn\cdot 1]\\
&[af] \quad\;\; +[an]
\end{aligned}$$

und dem aus den ersten, f in sich begreifenden, Gliedern abgeleiteten Coefficienten, den Factor t hinzufügt. Es verursacht dieses durchaus keine gröfsere Mühe als die numerische Substitution.

Ein vollständig durchgeführtes Rechnungsbeispiel für sechs unbekannte Gröfsen wird sich des Druckes wegen hier nicht geben lassen. Indessen wird auch eine geringere Anzahl bei der symmetrischen Form der Entwicklungen den Gang vollkommen deutlich erkennen lassen. Ich füge deshalb hier die Ausführung der Rechnung mit dem ganzen Detail für die vier Gleichungen bei, welche Gaufs in seiner *Theoria motus* §. 184. als ein solches Beispiel gegeben hat.

Die Bedingungsgleichungen sind hier:

$$\begin{aligned}
x-\;\,y+2z&=\;3\\
3x+2y-5z&=\;5\\
4x+\;\,y+4z&=21\\
-2x+6y+6z&=28.
\end{aligned}$$

Die drei ersten haben das Gewicht 1, die letzte das Gewicht $\frac{1}{4}$; so dafs die ersten unverändert beizubehalten sind, die letzte mit $\frac{1}{2}$ zu multipliciren. Hiernach wird das System der Bedingungsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
x - \;\; y + 2z - \;\; 3 &= v \\
3x + 2y - 5z - \;\; 5 &= v' \\
4x + \;\; y + 4z - 21 &= v'' \\
- \;\; x + 3y + 3z - 14 &= v'''
\end{aligned}
$$

Obgleich die Coefficienten hier so einfach sind, dafs man die Multiplicationen ohne Logarithmen ausführen kann, so werde ich doch die Form der Berechnung dafür einrichten.

Zuerst wird für die verschiedenen s gefunden

$$+2, \quad 0, \quad +9, \quad +5,$$

und damit wird die ganze Zusammenstellung:

log ...... n	$0{,}47712_n$	$0{,}69897_n$	$1{,}32222_n$	$1{,}14613_n$
log Coeff. x .... a	0,00000	0,47712	0,60206	$0{,}00000_n$
„ „ y .... b	$0{,}00000_n$	0,30103	0,00000	0,47712
„ „ z c	0,30103	$0{,}69897_n$	0,60206	0,47712
log .... s	0,30103	∞	0,95424	0,69897

$[nn]$	$[an]$		$[bn]$		$[cn]$		$[sn]$		$[aa]$	$[ab]$	
+	+	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−
9,0		3,0	3,0			6,0		6,0	1,0		1,0
25,0		15,0		10,0	25,0		0,0		9,0	6,0	
441,0		84,0		21,0		84,0		189,0	16,0	4,0	
196,0	14,0			42,0		42,0		70,0	1,0		3,0
671,0	14,0	102,0	3,0	73,0	25,0	132,0	0,0	265,0	+ 27,0	10,0	4,0
	− 88,0		− 70,0		− 107,0		− 265,0			+ 6,0	

$[ac]$		$[as]$		$[bb]$	$[bc]$		$[bs]$		$[cc]$	$[cs]$	
+	−	+	−	+	+	−	+	−	+	+	−
2,0		2,0		1,0		2,0		2,0	4,0	4,0	
	15,0		0,0	4,0		10,0	0,0		25,0		0,0
16,0		36,0		1,0	4,0		9,0		16,0	36,0	
	3,0		5,0	9,0	9,0		15,0		9,0	15,0	
18,0	18,0	38,0	5,0	+ 15,0	13,0	12,0	24,0	2,0	+ 54,0	55,0	0,0
0,0		+ 33,0			+ 1,0		+ 22,0			+ 55,0	

$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[as]$	$[an]$
$+27{,}000\ +$	$6{,}000\ +$	$0{,}000\ +$	$33{,}000\ -$	$88{,}000$
$1{,}43136$	$0{,}77815$	∞	$1{,}51851$	$1{,}94448_n$
$-88{,}000$				
$0{,}000$	$[bb]$	$[bc]$	$[bs]$	$[bn]$
$+21{,}305\ +$	$15{,}000\ +$	$1{,}000\ +$	$22{,}000\ -$	$70{,}000$
$-66{,}695\ +$	$1{,}333$	$0{,}000\ +$	$7{,}333\ -$	$19{,}556$
$1{,}82410_n\ +$	$13{,}667\ +$	$1{,}000\ +$	$14{,}667\ -$	$50{,}444$
$\log x = 0{,}39274$	$1{,}13567$	$0{,}00000$	$1{,}16633$	$1{,}70281_n$

	$[cc]$	$[cs]$	$[cn]$	$[sn]$	$[nn]$
$-50{,}444$	$+54{,}000$	$+55{,}000$	$-107{,}000$	$-265{,}000$	$671{,}000$
$+\ 1{,}916$	$0{,}000$	$0{,}000$	$0{,}000$	$-107{,}555$	$-286{,}815$
$1{,}68599_n$	$+54{,}000$	$+55{,}000$	$-107{,}000$	$-157{,}445$	$+384{,}185$
$\log y = 0{,}55033$	$+\ 0{,}073$	$+\ 1{,}073$	$-\ 3{,}691$	$-\ 54{,}135$	$+186{,}189$
	$+53{,}927$	$+53{,}927$	$-103{,}309$	$-103{,}310$	$+197{,}996$
	$1{,}73181$		$2{,}01414_n$		$+197{,}909$
			$\log z = 0{,}28233$		$[nn\cdot 3] = 0{,}087$

und die Rechnung für die Gewichte wird:

$[bb]$	$[bc]$	$[cc]$				
$+15{,}000$	$+1{,}000$	$+54{,}000$	$\log[bb\cdot 1]$	$1{,}13566$	$\log[cc\cdot 2]$	$1{,}73181$
$1{,}17609$	$0{,}0000$	$0{,}067$	$\log[bb]$	$1{,}17609$	$\log[cc\cdot 1]$	$1{,}73239$
		$+53{,}933$			$\log[cc\cdot 1]_a$	$1{,}73185$

$1{,}43136$	$1{,}13566$	$1{,}73181$
$9{,}95957$	$9{,}99942$	log. Gew. v. z
$9{,}99996$	$1{,}13508$	
$1{,}39089$	log. Gew. v. y.	
log. Gew. v. x.		

Auch wird die folgende Prüfungsgleichung erfüllt

$$27{,}000\,x + 19{,}667\,y + 54{,}927\,z - 241{,}753 = 0$$

so daſs das Endresultat wird:

$x = +2{,}4702$	Gewicht	24,597
$y = +3{,}5508$	„	13,648
$z = +1{,}9157$	„	53,928.

Zum völligen Schlufs und zur deutlichen Erkennung der Vertheilung der Fehler, kann man nun noch die Werthe von x, y, z, in die Bedingungsgleichungen substituiren, und die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler bilden, welche, wenn sie mit $[nn \cdot 6]$ übereinstimmt, die letzte Prüfung darbietet. Wollte man, wenn die Anzahl der Bedingungsgleichungen sehr grofs ist, für diese Substitutionen eine Controlle haben, so würde man neue Summen aus den Coefficienten derselben Unbekannten in den verschiedenen Bedingungsgleichungen bilden müssen, und etwa 10 und 10, und 15 und 15 derselben auf diese Art in eine Summengleichung vereinigen, so dafs wenn

$$\begin{aligned} n + n' + n'' \ldots\ldots + n^{10} &= \nu \\ a + a' + a'' \ldots\ldots + a^{10} &= \sigma \\ b + b' + b'' \ldots\ldots + b^{10} &= \sigma' \\ c + c' + c'' \ldots\ldots + c^{10} &= \sigma'' \text{ etc.} \end{aligned}$$

die Prüfungssumme würde

$$\sigma x + \sigma' y + \sigma'' z + \sigma''' w + \sigma^{\text{IV}} u + \sigma^{\text{V}} t + \nu$$

welche nach der Substitution der numerischen Werthe von $x\ y\ z$ etc. zu ihrem Resultate die Summe der wirklich übrig bleibenden Fehler

$$\nu + \nu' + \nu'' + \ldots + \nu^{10}$$

geben müfste. In dem vorigen Beispiele sind die übrig bleibenden Fehler

$$-0{,}25 \quad -0{,}07 \quad +0{,}09 \quad -0{,}07,$$

deren Summe der Quadrate 0,080 so weit mit $[nn \cdot 3]$ übereinstimmt, als die Rechnung mit fünf Decimalen erlaubt.

Wenn gleich es etwas ungewöhnlich ist, zu einer allgemeinen Formel den Schematismus der Rechnung so weitläuftig anzugeben, wie hier geschehen ist, so hoffe ich doch, dafs der häufig sehr grofse Umfang der numerischen Ausführung, welcher eben deshalb jede noch so kleine Bequemlichkeit um so wünschenswerther macht, den etwas gewagten Versuch, eine Rechnungsmanipulation in Worte zu übertragen, entschuldigen wird.

Auf specielle Verhältnisse der Coefficienten der Bedingungsgleichungen, wie sie z. B. bei einigen Anwendungen der Methode der kleinsten Quadrate in der Physik statt finden, wo die Coefficienten der Unbekannten $x\ y\ z$ etc. aus den Potenzen ganzer Zahlen gebildet werden, kann hier nicht eingegangen werden. Die Erleichterung, welche die Bildung der Summen vermittelst der bekannten Summen der Potenzen erhalten kann, wird aufgehoben, sobald die regelmäfsige Reihe der Potenzen unterbrochen ist, oder die Gewichte der einzelnen Beobachtungen nicht als gleich angesehen werden dürfen. Eben so scheint auch eine andere Vorschrift welche man häufig in einem ebenfalls speciellen Falle giebt, mir nicht wesentlich zur Erleichterung der Rechnung beizutragen. Wenn nämlich das System der Bedingungsgleichungen so beschaffen ist, dafs eine unbekannte Gröfse in allen Gleichungen denselben Coefficienten hat (wodurch es gestattet ist, diesen Coefficienten gleich 1 zu setzen, weil in diesem Falle nur statt x eine andere Variable z. B. ax eingeführt wird, wenn a der constante Coefficient von x in allen Bedingungsgleichungen ist), so soll man das arithmetische Mittel aus allen Bedingungsgleichungen nehmen, dieses arithmetische Mittel von jeder einzelnen Bedingungsgleichung abziehen, wodurch die eine Unbekannte eliminirt wird, und mit dem neuen System von Bedingungsgleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate verfahren. Der Vortheil, den man dadurch hat, dafs jetzt die Anzahl der Unbekannten um eine Einheit vermindert ist, wird durch die Subtraction des arithmetischen Mittels von jeder einzelnen Bedingungsgleichung meistentheils völlig aufgewogen. Das Verfahren gründet sich darauf, dafs für ein System von Bedingungsgleichungen von der Form:

$$x + by + cz + dw + eu + ft + n = v$$
$$x + b'y + c'z + d'w + e'u + f't + n' = v' \text{ etc.}$$

die erste Summengleichung (25), d. h. die Gleichung, welche für das Minimum der Fehlerquadrate gilt, so fern es von dem Werthe von x abhängt, in diesem Falle bei m Bedingungsgleichungen wird:

$$mx + [b]y + [c]z + [d]w + [e]u + [f]t + [n] = 0,$$

woraus der entsprechende Werth von x, welcher in die übrigen Summengleichungen substituirt werden soll, gefunden wird durch:

$$x + \frac{[b]}{m}y + \frac{[c]}{m}z + \frac{[d]}{m}w + \frac{[e]}{m}u + \frac{[f]}{m}t + \frac{[n]}{m} = 0,$$

oder durch das arithmetische Mittel aus allen Bedingungsgleichungen. Es mufs für die übrigen Werthe gleichgültig sein, ob man diesen Ausdruck in die einzelnen Bedingungsgleichungen selbst durch Subtraction desselben von jeder einzelnen substituirt, oder nach der allgemeinen Vorschrift ihn zur Bildung von $[bb\cdot 1]$ $[bc\cdot 1]$ etc. benutzt. Uebrigens läfst sich diese Uebereinstimmung auch direct leicht übersehen. In dem ersten Falle wird das neue System von Bedingungsgleichungen:

$$\left(b - \frac{[b]}{m}\right)y + \left(c - \frac{[c]}{m}\right)z + \left(d - \frac{[d]}{m}\right)w \ldots + \left(n - \frac{[n]}{m}\right) = 0$$

$$\left(b' - \frac{[b]}{m}\right)y + \left(c' - \frac{[c]}{m}\right)z + \left(d' - \frac{[d]}{m}\right)w \ldots + \left(n' - \frac{[n]}{m}\right) = 0$$

etc. etc.

folglich wird die Summe der Quadrate der Coefficienten von y:

$$[bb] - 2\frac{[b][b]}{m} + \frac{[b]^2}{m} = [bb] - \frac{[b]^2}{m}$$

und die Summe der Producte der Coefficienten zweier verschiedenen Variablen:

$$[bc] - [b]\frac{[c]}{m} - [c]\frac{[b]}{m} + \frac{[b][c]}{m} = [bc] - \frac{[b][c]}{m}$$

was vollkommen übereinstimmt mit dem Ausdrucke für:

$$[bb\cdot 1] = [bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]} \qquad [bc\cdot 1] = [bc] - \frac{[ab][ac]}{[aa]}$$

wenn wie hier der Fall ist $[ab] = [b]$ und $[aa] = m$ wird. Es ist mir immer am bequemsten vorgekommen, auch in diesem Falle von der gewöhnlichen allgemeinen Form nicht abzuweichen. Selten dürfte es vorkommen, dafs man die Werthe der unbekannten Gröfsen, wie sie aus der Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate sich ergeben, und ihre Gewichte im weiteren Verfolg einer analytischen Entwickelung benutzen will. Dann freilich wird es gerathen sein, analytische Ausdrücke an die Stelle der numerischen Operationen treten zu lassen.

Ein Fall, der in der Astronomie und Physik sehr häufig vorkommt, die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate bei periodischen Functionen, würde vielleicht allein eine specielle Ausführung verdienen wegen der Eleganz und Kürze der Resultate, wenn dieser Fall nicht schon häufig behandelt wäre und die unvorhergesehene Länge dieses Aufsatzes nicht Kürze geböte.

Aufser der bisher allein betrachteten ersten Klasse von Aufgaben, in welcher die Werthe der unbekannten Gröfsen in dem Sinne unabhängig von einander sind, dafs jeder numerische Werth, den man für die eine als den wahrscheinlichsten gefunden hat, sich mit jedem eben so ermittelten numerischen Werthe der andern verbinden läfst, hat man in der neueren Zeit, namentlich bei geodätischen Vermessungen, auch angefangen, die Methode der kleinsten Quadrate bei Aufgaben der zweiten Klasse in Anwendung zu bringen, bei denen diese Unabhängigkeit der End-Werthe von einander nicht stattfindet. In einem System von Dreiecken werden gewöhnlich mehr Gröfsen unmittelbar durch Beobachtung bestimmt, als unumgänglich nothwendig sind, um das ganze System und jeden einzelnen Theil desselben finden zu können. So würden in jedem einzelnen Dreiecke eine Seite und zwei Winkel, nöthigenfalls verbunden mit dem sogenannten sphärischen Excefs, hinreichen, das Dreieck zu bestimmen. Hat man aufserdem noch den dritten Winkel so beobachtet, dafs dieser Bestimmung ein gewisses Gewicht gegeben werden mufs, so wird die Verbindung dieser Beobachtung mit den Beobachtungen der beiden andern Winkel nicht mehr gestatten, die beobachteten Werthe geradezu anzuwenden, den ganz unwahrscheinlichen und in der Wirklichkeit nie eintretenden Fall ausgenommen, in welchem alle drei beobachteten Werthe ganz genau die der Theorie nach erforderliche Summe geben sollten. Denn theils ist kein Grund vorhanden, gerade zwei der beobachteten Winkel als absolut richtig anzunehmen, und den ganzen bei der Summe von allen dreien vorhandenen Fehler einer einzigen Beobachtung, der des dritten Winkels, aufzubürden. Theils wird, wenn man eine solche ausschliefsliche Wahl zweier Winkel treffen wollte, für die Theile des Dreiecks, welche man aus den beobachteten Gröfsen berechnen mufs, eine Ungewifsheit in ihrer Bestimmung zurückbleiben, welche auf die Fortsetzung der ganzen Dreieckskette Einflufs äufsert. Man wird ungewifs sein, welchen Werth man der zweiten Seite beilegen soll, ob den aus den Winkeln A und B, oder A und C, oder B und C folgenden. Was hier schon bei einem Dreiecke stattfindet, gilt eben so bei dem vollständigen als ein Ganzes betrachteten Netze. Sind immer nur die drei Winkel in jedem Dreiecke beobachtet, und hat jedes folgende Dreieck nur eine Seite mit einem einzigen der früheren gemein, so finden nur die Bedingungen in Bezug auf die Summe der drei Winkel in jedem Dreiecke statt. Kehrt aber die Kette nach längeren oder kürzeren Intervallen in sich selbst zurück, so dafs man auf zwei oder mehreren Wegen irgend welche Seite, oder irgend welchen Theil des Netzes aus den beobachteten Werthen berechnen kann, so treten noch andere Bedingungen hinzu, die von der Betrachtung des Netzes als eines geschlossenen Polygons abhängen; besonders wenn man sich bei der Beobachtung nicht blofs auf die Winkel jedes Dreiecks in bekannter Reihenfolge beschränkt hat, sondern überhaupt an allen Punkten so viele Winkel als irgend möglich gemessen, und auf diese Weise zwischen mehr als drei Punkten die Möglichkeit ihrer Verbindung zu je dreien auf mehrfache Weise sich eröffnet hat.

Nach der früheren empirischen Behandlung eines solchen Dreiecksnetzes, pflegte man mit ziemlicher Willkür aus den beobachteten Daten so viele herauszunehmen, als zur Bestimmung aller hier vorkommenden Gröfsen nöthig waren, und die Unterschiede, welche auf diese Weise bei den übrigen direct beobachteten übrig blieben, als eine ungefähre Prüfung der Genauigkeit zu betrachten. Eine zweite Prüfung fand man darin, wenn eine und dieselbe Gröſse, zu welcher man auf zwei verschiedenen Wegen, durch verschiedene Reihen von Dreiecken, gelangen konnte, nahe gleich groſs gefunden ward. Denn da man fast immer ausschlieſslich das Ganze nur als ein Netz von Dreiecken betrachtete, von denen jedes mit dem folgenden eine Seite gemein hat, so vernachlässigte man in der Regel alle Bedingungen, welche aus der Betrachtung des ganzen Netzes als eines geschlossenen Polygons herrührten, und stellte dadurch häufig ein in dem strengsten Sinne unmögliches System von Werthen auf, in welchem, wenn auch die Dreiecke, in welchen man zwei Winkel aus den beobachteten genommen, und den dritten aus diesen beiden geschlossen hatte, möglich waren, doch die aus den so erhaltenen Winkelpunkten allgemein zu bildenden Figuren, seien es nun Dreiecke, Vierecke oder andere Polygone, nicht mehr den theoretischen Bedingungen entsprachen, und folglich auch, je nachdem man die zu ihrer Bestimmung unumgänglich nothwendigen Stücke aus der einen oder der andern Rechnung wählte, für die daraus berechneten verschiedenen Werthe finden lieſsen. Man hatte auf diese Weise, selbst nach der willkürlichen Wahl unter den beobachteten Winkeln, nie die Befriedigung, von ihnen aus mit vollständiger Sicherheit Gröſsen finden zu können, die auf einer zusammengesetzteren Verbindung der ausgewählten Beobachtungen beruhten, und war selbst dann nicht im Stande, den möglichen Irrthum bei diesen Gröſsen anzugeben, wenn man auch eine solche Schätzung bei den ausgewählten beobachteten Winkeln versucht haben sollte.

Es ist übrigens im Voraus zu übersehen, daſs wenn man zu einer und derselben Gröſsenbestimmung z. B. einer Dreieckseite, auf mehrfachem Wege gelangen kann, und jedesmal etwas verschiedene Werthe erhält, einer dieser Wege und einer dieser Werthe genauer sein muſs als die übrigen, oder wenigstens daſs ein gewisses Maximum der Sicherheit jedesmal eintreten muſs, abhängig von den Gröſsen, die aus der unmittelbaren Beobachtung sich ergeben haben; und im Allgemeinen kann man vielleicht sagen, daſs der kürzeste Weg, den man von der unmittelbaren Beobachtung aus wählen kann, die geringste Zahl von beobachteten Werthen, die man zu benutzen nöthig hat, auch die gröſste Hoffnung eines genauen Resultats verbürgt, weil der Fehler des Resultats sich immer aus einer Summe von Quadraten zusammensetzt, deren jedes den Fehler der beobachteten Gröſse und den Differentialquotienten der zu berechnenden Function in Bezug auf diese Gröſse enthält. Sind deswegen die Differentialquotienten nicht allzusehr verschieden und die Gewichte nahe gleich, was nur bei einem bestimmten Falle entschieden werden kann, so wird die Anzahl der Glieder den Ausschlag geben. Dieser vortheilhafteste Weg läſst sich aber häufig nicht leicht finden, und da man doch gewöhnlich an das unmittelbar Beobachtete weitere Folgerungen anknüpft, so muſs man wünschen, auf irgend eine Weise sich diese Wahl erspart zu sehen und versichert zu sein, daſs man in jedem Falle den vortheilhaftesten Weg eingeschlagen hat, oder vielmehr in jedem Falle auf diesen vortheilhaftesten Weg hingeleitet wird.

Um deswegen nun für jedes Datum, was aus den Beobachtungen sich herleiten läſst, wenn gewisse Bedingungen der Aufgabe nicht erlauben, die unmittelbaren Beobachtungen anzuwenden, insofern sie etwas sich widersprechendes geben würden, doch immer nur einen bestimmten Werth zu bekommen, wird man zuerst die Beobachtungsdata so ändern müssen, daſs sie den Bedingungen Genüge leisten, und wenn dieses auf mehrfache Art geschehen kann, die Aufgabe also eine unbestimmte ist, was hier immer vorausgesetzt wird, so wird man dahin streben müssen, die Aenderungen der Beobachtungsdata so einzurichten, daſs man ganz allgemein durch die geänderten Beobachtungsdata jedesmal den Werth bekommt, der am wenigsten durch die zufälligen Beobachtungsfehler einem Irrthum ausgesetzt ist. An und für sich ist es nicht klar, daſs dieser letzte Vortheil, so wie er hier ausgedrückt worden, nothwendig verbunden ist mit der Methode der kleinsten Quadrate, oder mit der Vorschrift, nach welcher unter den Aenderungen, welche den Bedingungen der Aufgabe entsprechen, diejenigen die wahrscheinlichsten sind, bei welchen die Summe der mit den respectiven Gewichten multiplicirten Quadrate der Aenderungen ein absolutes Minimum ist. Um so mehr aber wird es nöthig sein, gerade diesen Gesichtspunkt nach dem *Supplementum Theor. combinat. Obsv.* von Gaufs ebenfalls zu verfolgen, als er eine der elegantesten Formen darbietet, unter welcher man den Erfolg, den die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate gewährt, in Worten auffassen kann.

Der allgemeinste Ausdruck für diese zweite Klasse von Aufgaben würde sein: Es sind zwischen einer Anzahl von Unbekannten theils Gleichungen gegeben, welche in aller Strenge erfüllt werden sollen, theils solche, denen man nur genähert Genüge zu thun braucht, und überhaupt kann. Man soll das System finden, was beiden Arten von Gleichungen zufolge das wahrscheinlichste ist. Im folgenden indessen wird die Beschränkung eintreten, welche auch Gaufs, sowie Bessel und Hansen bei ihren Abhandlungen über diesen Gegenstand, in Bezug auf die Anwendung in der Geodäsie angenommen haben, dafs nämlich die Gleichungen, welchen möglichst Genüge gethan werden soll, nur eine Unbekannte jedesmal enthalten, oder wie man es auch ausdrückt, dafs die Werthe, welche verbessert werden sollen, um den Bedingungsgleichungen strenge zu genügen, unmittelber durch Beobachtung gegeben sind und nicht erst auf anderm Wege aus den Beobachtungen abgeleitet werden müssen. Es wird dieses gestattet sein, da eine der nachfolgenden Behandlungen ganz unmittelbar im allgemeinsten Falle angewendet werden kann. Dagegen abgesehen davon, dafs bis jetzt wenigstens noch kein Beispiel von diesem allgemeinsten Fall in der Praxis aufgestellt worden, folglich auch das Bedürfnifs der gröfsten Allgemeinheit nicht vorhanden ist, möchte die elegantere Form, welche das Problem so annimmt, die Einsicht in das eigentliche Wesen desselben erleichtern.

Angenommen also, es seien die wahren Werthe irgend welcher Gröſsen $w' \; w'' \; w'''$ etc. an der Zahl m; aus unmittelbaren Beobachtungen hat man für sie die Werthe

$$v' \; v'' \; v''' \ldots\ldots v^{(m)}$$

erhalten, und weiſs im Voraus, daſs die Unterschiede $w'-v'$, $w''-v''$ etc., oder die Fehler der Beobachtungen, überall so klein sind, daſs man ihre höheren Potenzen vernachlässigen kann gegen die erste. Die Gewichte der verschiedenen Beobachtungen auf eine beliebige, aber bestimmte Einheit bezogen, sollen

$$p' \; p'' \; p''' \ldots\ldots p^{(m)}$$

sein.

Zwischen den Gröſsen $w' \; w'' \; w'''$ finden vermöge der Natur der Aufgabe gewisse Beziehungen statt, nach welchen sie nicht als völlig unabhängig von einander zu betrachten sind. Diese Beziehungen werden sich immer auf Gleichungen zwischen den Gröſsen $w' \; w'' \; w'''$ etc. und gewissen Constanten zurückführen lassen, wie z. B. in dem Falle eines Dreiecks die Summe der drei Winkel weniger 180° nebst dem sphärischen Excesse gleich Null werden muſs. Wenn also $X \; Y \; Z$ etc. Functionen von $w' \; w'' \; w'''$ etc. sind, so werden die Bedingungsgleichungen die Form haben:

$$\begin{aligned} X &= f \;\, (w,' \; w,'' \; w,''' \ldots\ldots) = 0 \\ Y &= f' \, (w,' \; w,'' \; w,''' \ldots\ldots) = 0 \\ Z &= f''(w,' \; w,'' \; w,''' \ldots\ldots) = 0 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Ihre Zahl möge μ sein, wobei der Natur der Aufgabe gemäſs stets $\mu < m$. Bezeichnet man die bis jetzt noch unbekannten wahrscheinlichsten Verbesserungen, welche an die beobachteten Werthe $v' \; v'' \; v'''$ etc. anzubringen sind, um den Bedingungen der Aufgabe zu genügen mit $x' \; x'' \; x'''$ etc., so daſs die wahrscheinlichsten Werthe werden:

$$w' = v' + x' \qquad w'' = v'' + x'' \qquad w''' = v''' + x''' \text{ etc.}$$

setzt man ferner, daſs nach der wirklichen Substitution von $v' \; v'' \; v'''$ etc. statt $w' \; w'' \; w'''$ etc. gefunden werde:

$$f\ (v', v'', v''', \ldots) = n'$$
$$f'\ (v', v'', v''', \ldots) = n''$$
$$f''(v', v'', v''', \ldots) = n'''$$

und nennt die ersten Differentialquotienten $\frac{dX}{dw'}, \frac{dX}{dw''}, \frac{dX}{dw'''}, \ldots\ldots$ $\frac{dY}{dw'}, \frac{dY}{dw''}$ etc., nachdem in ihnen ebenfalls v' v'' v''' etc. statt w' w'' w''' etc. substituirt sind, a' a'' a''', b' b'' etc., oder setzt man:

$$\frac{df\ (v', v'', v''', \ldots)}{dv'} = a', \quad \frac{df\ (v', v'', v''', \ldots)}{dv''} = a'', \quad \frac{df\ (v', v'', v''', \ldots)}{dv'''} = a''',$$
$$\frac{df'\ (v', v'', v''', \ldots)}{dv'} = b', \quad \frac{df'\ (v', v'', v''', \ldots)}{dv''} = b'', \quad \frac{df'\ (v', v'', v''', \ldots)}{dv'''} = b''',$$
$$\frac{df''(v', v'', v''', \ldots)}{dv'} = c', \quad \frac{df''(v', v'', v''', \ldots)}{dv''} = c'', \quad \frac{df''(v', v'', v''', \ldots)}{dv'''} = c''',$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

vernachlässigt dabei, wegen der Kleinheit von x' x'' x''' etc. die höheren Ordnungen, so erhalten die obigen Bedingungsgleichungen die Form:

$$\begin{aligned} a'x' + a''x'' + a'''x''' + \ldots\ldots + n' &= 0 \\ b'x' + b''x'' + b'''x''' + \ldots\ldots + n'' &= 0 \\ c'x' + c''x'' + c'''x''' + \ldots\ldots + n''' &= 0 \text{ etc.} \end{aligned} \tag{65}$$

Diesen μ Gleichungen mufs durch irgend welche Werthe von x' x'' x''' etc. strenge Genüge gethan werden.

Die unmittelbaren Beobachtungen haben v' mit dem Gewichte p', v'' mit dem Gewichte p'' etc. gegeben. Wenn folglich die wahrscheinlichsten Fehler der Beobachtung nach dem obigen mit x' x'' x''' etc. bezeichnet werden, so dafs die Gleichungen stattfinden:

$$w' - v' = x'$$
$$w'' - v'' = x'' \text{ etc.}$$

so wird das h, was der ersten Beobachtung zukommt, $\sqrt{p'}$ sein, während zu der zweiten gehört $\sqrt{p''}$ etc. Diese Gleichungen, auf eine Einheit der Genauigkeit gebracht, werden also:

$$(w' - v')\sqrt{p'} = x'\sqrt{p'}$$
$$(w'' - v'')\sqrt{p''} = x''\sqrt{p''} \text{ etc.}$$

bei welchen nach der Methode der kleinsten Quadrate die Fehler die wahrscheinlichsten sind, für welche die Summe der Quadrate ein Minimum, folglich:

$$p'x'^2 + p''x''^2 + p'''x'''^2 + \ldots\ldots = \text{(Minimum)}$$

oder

$$(66) \quad p'x'dx' + p''x''dx'' + p'''x'''dx''' + p^{\text{IV}}x^{\text{IV}}dx^{\text{IV}}\ldots\ldots = 0.$$

Fänden keine Bedingungsgleichungen statt, so wären dx', dx'', dx''', ... völlig unabhängig von einander. Der Coefficient eines jeden Differentialquotienten müfste gleich Null gesetzt werden, folglich wären die wahrscheinlichsten Werthe $x' = x'' = x''' = \ldots = 0$. Allein da die obigen μ Bedingungsgleichungen für alle Werthe von x' x'' x''' etc. strenge erfüllt werden sollen, so folgt daraus, dafs wenn durch ein bestimmtes System von Werthen x' x'' x''' etc. einmal ihnen Genüge gethan ist, die übrigen möglichen Systeme (immer unter der Voraussetzung sehr kleiner Aenderungen) nur so angenommen werden dürfen, dafs die Unterschiede der neuen Werthe von x' x'' x''' etc. dieser Erfüllung keinen Eintrag thun, oder dafs gleichzeitig mit (65) auch die Gleichungen statt finden:

$$(67) \quad \begin{aligned} a'dx' + a''dx'' + a'''dx''' \ldots\ldots &= 0 \\ b'dx' + b''dx'' + b'''dx''' \ldots\ldots &= 0 \\ c'dx' + c''dx'' + c'''dx''' \ldots\ldots &= 0 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Diese Gleichungen, an der Zahl μ, zeigen, dafs μ Differentiale ausgedrückt werden können durch die $(m - \mu)$ übrigen. Führt man diese Elimination aus, und substituirt die Werthe dieser μ Differentiale in (66), so bleiben noch $m - \mu$ unabhängige Differentiale übrig. Die Coefficienten derselben, Functionen von a' a'' etc., b' b'' etc., p' p'' etc., x' x'' etc., jeder einzeln gleich Null gesetzt, geben $(m - \mu)$ Gleichungen, welche mit den μ Gleichungen (65) verbunden, ein System von m Gleichungen darbieten, aus denen sich die m Gröfsen x' x'' x''' etc. bestimmen lassen.

Es kommt bei diesem zuerst sich darbietenden und ganz allgemeinen Wege darauf an, ob die Bestimmung des Ausdruckes der μ Differentiale durch die $m - \mu$ übrigen, mit Leichtigkeit sich bewerkstelligen läfst, oder was dasselbe ist, ob die Bedingungsgleichungen (65) sich leicht in die Form bringen lassen, dafs μ Gröfsen x' x'' etc. durch die übrigen $m-\mu$ Gröfsen vermittelst linearer Gleichungen ohne allzu grofse Weitläuftigkeit direct gefunden werden können. In dieser letzten Form nämlich sind dann auch die Differentialgleichungen sogleich enthalten. Dafs dieses immer möglich ist, da die Form der Bedingungsgleichungen selbst linear ist, ist für sich klar, es müfste denn sein, dafs unter den Bedingungsgleichungen eine oder mehrere schon in den andern enthalten wären, in welchem Falle man auf die Form $\frac{0}{0}$ für alle oder einige der zu bestimmenden Gröfsen x geführt werden würde. Dieser Fall wird hier ganz ausgeschlossen, da man bei jeder speciellen Aufgabe Mittel in Händen hat, schon *a priori* die Anzahl der Bedingungsgleichungen zu überschlagen, und die überflüssigen zu verwerfen. Die Bequemlichkeit der Ausführung hängt wesentlich von der Natur der Coefficienten a, b, c, etc. ab. In der Geodäsie fallen diese Coefficienten meistentheils sehr einfach aus, häufig sind sie der Einheit gleich, oder doch ganze Zahlen, und die wenigsten Bedingungsgleichungen (65) enthalten sehr viele Gröfsen x, so dafs sich für die zu wählenden μ Gröfsen dieser Art, immer solche, wenigstens zum gröfseren Theile, nehmen lassen, bei denen die Umformung durchaus keine Schwierigkeit hat. Will man indessen eine allgemeine Form, so können sehr einfache Betrachtungen dazu führen.

Es mögen die μ Gröfsen unter den x, welche durch die übrigen $m-\mu$ ausgedrückt werden sollen, wobei der Kürze wegen

$$m-\mu=\varrho$$

gesetzt werde, durch einen unteren Index bezeichnet werden. Eben so mögen auch ihre Coefficienten durch einen unteren Index unterschieden werden. Man hat also für diese μ Gröfsen selbst die Zeichen:

$$x_1' \; x_1'' \; x_1''' \; x_1^{\mathrm{IV}} \ldots\ldots x_1^{(\mu)}$$

und für die respectiven Coefficienten:

$$a_1' \, a_1'' \ldots\ldots a_1^{(\mu)}, \quad b_1' \, b_1'' \ldots b_1^{(\mu)}, \quad c_1' \, c_1'' \ldots\ldots c_1^{(\mu)},$$

etc. Ihr Ausdruck durch die andern Gröfsen $x' \, x'' \ldots x^{(\varrho)}$ wird im allgemeinen die Form haben müssen:

$$(68) \quad \begin{array}{l} x_1' \;\; = \alpha' x' \;\; + \beta' x'' \;\; + \gamma' x''' \; \ldots\ldots + \varrho' x^{(\varrho)} \;\; + \nu' \\ x_1'' \;\; = \alpha'' x' \; + \beta'' x'' \; + \gamma'' x''' \; \ldots\ldots + \varrho'' x^{(\varrho)} \; + \nu'' \\ x_1''' \; = \alpha''' x' + \beta''' x'' + \gamma''' x''' \ldots\ldots + \varrho''' x^{(\varrho)} + \nu''' \\ \vdots \\ x_1^{(\mu)} = \alpha^{(\mu)} x' + \beta^{(\mu)} x'' + \gamma^{(\mu)} x''' \ldots\ldots + \varrho^{(\mu)} x^{(\mu)} + \nu^{(\mu)} \end{array}$$

Substituirt man diese Werthe in die Bedingungsgleichungen hinein, so sind die dann noch zurückbleibenden Gröfsen $x' \, x'' \ldots x^{(\varrho)}$ als völlig von einander unabhängig zu betrachten, und da den Gleichungen (65) immer Genüge geschehen mufs, so folgt nothwendig, dafs der Coefficient jeder einzelnen dieser Gröfsen für sich gleich Null gesetzt werden mufs, und ebenso der von ihnen freie Theil. Hieraus erhält man ϱ Systeme von Gleichungen, von denen jedes μ Coefficienten $\alpha \; \beta \; \gamma$ etc. bestimmt, und noch aufserdem ein System, welches die ν finden läfst. Es wird nämlich

$$69) \quad \begin{array}{l} a' + a_1' \alpha' + a_1'' \alpha'' + a_1''' \alpha''' \ldots\ldots + a_1^{(\mu)} \alpha^{(\mu)} = 0 \\ b' + b_1' \alpha' + b_1'' \alpha'' + b_1''' \alpha''' \ldots\ldots + b_1^{(\mu)} \alpha^{(\mu)} = 0 \\ c' + c_1' \alpha' + c_1'' \alpha'' + c_1''' \alpha''' \ldots\ldots + c_1^{(\mu)} \alpha^{(\mu)} = 0 \text{ etc.} \end{array}$$

aus welchen μ Gleichungen die $\alpha' \; \alpha''$ bis $\alpha^{(\mu)}$ gefunden werden. Ebenso hat man:

$$(69) \quad \begin{array}{l} a'' + a_1' \beta' + a_1'' \beta'' + a_1''' \beta''' \ldots\ldots + a_1^{(\mu)} \beta^{(\mu)} = 0 \\ b'' + b_1' \beta' + b_1'' \beta'' + b_1''' \beta''' \ldots\ldots + b_1^{(\mu)} \beta^{(\mu)} = 0 \\ c'' + c_1' \beta' + c_1'' \beta'' + c_1''' \beta''' \ldots\ldots + c_1^{(\mu)} \beta^{(\mu)} = 0 \text{ etc.} \end{array}$$

wodurch $\beta' \; \beta''$ bis $\beta^{(\mu)}$ gegeben sind. Ganz ähnliche Gleichungen finden bei den $\gamma' \; \gamma'' \; \gamma'''$ etc. statt, wobei überall die Coefficienten $a_1' \; a_1'' \ldots b_1' \; b_1''$ etc. in allen Gleichungen dieselben sind. Für die $\nu' \; \nu'' \ldots \nu^{(\mu)}$ hat man gleichfalls:

$$(69) \quad \begin{array}{l} n' \;\; + a_1' \nu' + a_1'' \nu'' + a_1''' \nu''' \ldots\ldots + a_1^{(\mu)} \nu^{(\mu)} = 0 \\ n'' \; + b_1' \nu' + b_1'' \nu'' + b_1''' \nu''' \ldots\ldots + b_1^{(\mu)} \nu^{(\mu)} = 0 \\ n''' + c_1' \nu' + c_1'' \nu'' + c_1''' \nu''' \ldots\ldots + c_1^{(\mu)} \nu^{(\mu)} = 0 \text{ etc.} \end{array}$$

Wenn auf diese Weise die Bedingungsgleichungen auf ihre einfachste Form gebracht sind, so kann man bei dieser zweiten Klasse von Aufgaben ganz denselben Weg einschlagen wie bei der ersten. Die aus den Beobachtungen abgeleiteten wahrscheinlichsten Werthe von $x' \; x'' \ldots x^{(\varrho)}, \; x_1' \; x_1'' \ldots x_1^{(\mu)}$ sind gleich Null. Jeder durch die Bedingungsgleichung geforderte Werth derselben wird als Fehler der Beobachtung angesehen werden müssen. Seien diese schon auf eine bestimmte Einheit gebrachten wahren Fehler respective $\varepsilon' \; \varepsilon'' \ldots \varepsilon^{(\varrho)}, \; \varepsilon_1' \; \varepsilon_1'' \ldots \varepsilon_1^{(\mu)}$, so werden die strengen Gleichungen

$$\begin{array}{llll}
\varepsilon' & & = x' \sqrt{p'} & \\
\varepsilon'' & & = x'' \sqrt{p''} & \\
\varepsilon''' & & = x''' \sqrt{p'''} & \\
\vdots & & & \qquad (70) \\
\varepsilon^{(\varrho)} & & = x^{(\varrho)} \sqrt{p^{(\varrho)}} & \\
\varepsilon_1' & = x_1' \sqrt{p_1'} & = x'\alpha' \sqrt{p_1'} & + x''\beta' \sqrt{p_1'} + x'''\gamma' \sqrt{p_1'} \ldots\ldots \\
& & & + x^{(\varrho)} \varrho' \sqrt{p_1'} + \nu' \sqrt{p_1'} \\
\varepsilon_1'' & = x_1'' \sqrt{p_1''} & = x'\alpha'' \sqrt{p_1''} & + x''\beta'' \sqrt{p_1''} + x'''\gamma'' \sqrt{p_1''} \ldots\ldots \\
& & & + x^{(\varrho)} \varrho'' \sqrt{p_1''} + \nu'' \sqrt{p_1''} \\
\varepsilon_1''' & = x_1''' \sqrt{p_1'''} & = x'\alpha''' \sqrt{p_1'''} & + x''\beta''' \sqrt{p_1'''} + x'''\gamma''' \sqrt{p_1'''} \ldots\ldots \\
\vdots & & & + x^{(\varrho)} \varrho''' \sqrt{p_1'''} + \nu''' \sqrt{p_1'''} \\
\varepsilon_1^{(\mu)} & = x_1^{(\mu)} \sqrt{p_1^{(\mu)}} & = x'\alpha^{(\mu)} \sqrt{p_1^{(\mu)}} & + x''\beta^{(\mu)} \sqrt{p_1^{(\mu)}} + x'''\gamma^{(\mu)} \sqrt{p_1^{(\mu)}} \ldots\ldots \\
& & & + x^{(\varrho)} \varrho^{(\mu)} \sqrt{p_1^{(\mu)}} + \nu^{(\mu)} \sqrt{p_1^{(\mu)}}.
\end{array}$$

Die Gleichungen für das Minimum der Summe der Quadrate

$$\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 \ldots\ldots + \varepsilon^{(\varrho)2} + \varepsilon_1'^2 + \varepsilon_1''^2 \ldots\ldots + \varepsilon_1^{(\mu)2},$$

wobei man diese Summe, und ähnlich die übrigen durch $[\varepsilon\varepsilon]$ bezeichnen kann, werden die Bildung von Summen-Coefficienten, wie in (27) erfordern, wobei aber der einfachen Form der ersten ϱ Gleichungen wegen, wesentlich nur die letzten μ in Betracht kommen. Wegen jener ersten ϱ Gleichungen wird nur jedem Summen-Coefficienten, der aus quadratischen Gliedern besteht, resp. $p' \; p'' \; p''' \ldots p^{(\varrho)}$ hinzuzufügen sein. Man hat folglich ϱ Gleichungen von der Form:

$$
(71)\quad
\begin{aligned}
&(p' + [\alpha\alpha p_1])\, x' + [\alpha\beta p_1]\, x'' + [\alpha\gamma p_1]\, x''' \ldots + [\alpha\nu p_1] = 0\\
&[\alpha\beta p_1]\, x' + (p'' + [\beta\beta p_1])\, x'' + [\beta\gamma p_1]\, x''' \ldots + [\beta\nu p_1] = 0\\
&[\alpha\gamma p_1]\, x' + [\beta\gamma p_1]\, x'' + (p''' + [\gamma\gamma p_1])\, x''' \ldots + [\gamma\nu p_1] = 0 \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen geben die Werthe von $x'\ x'' \ldots x^{(\varrho)}$, welche dem Minimum entsprechen; den Bedingungsgleichungen wird Genüge gethan, wenn die Werthe von $x_1'\ x_1'' \ldots x_1^{(\mu)}$ vermittelst $x'\ x'' \ldots x^{(\varrho)}$ aus (68) berechnet werden. Die Summe der Quadrate der ν, oder $[\nu\nu p_1]$, ist die Summe, welche bei der bestimmten Wahl der μ Gröſsen $x_1'\ x_1'' \ldots x_1^{\mu}$, als die Summe der Quadrate der Fehler, oder der an diese μ Gröſsen anzubringenden Verbesserungen gefunden werden würde, wenn man alle $x'\ x''$ bis $x^{(\varrho)}$ = Null setzte. Das absolute Minimum, was zuletzt nach der Beendigung der Elimination erhalten wird, und welches nach der früheren Bezeichnung von der Form $[\nu\nu p_1 \cdot \varrho]$ ist, giebt die kleinstmöglichste Summe der Quadrate der Verbesserungen an, und läſst zugleich, da diese Verbesserungen als Fehler der Beobachtungen zu betrachten sind, auf die Sicherheit der letzteren schlieſsen. Bei $(\varrho + \mu)$ Gleichungen, durch welche ϱ Gröſsen ermittelt werden, wird der mittlere Fehler sich ergeben nach (64):

$$\sqrt{\left(\frac{[\nu\nu p_1 \cdot \varrho]}{\mu}\right)}.$$

Die hier gegebene Auflösung der Aufgabe, welche identisch ist mit der von Herrn Director Hansen in den „Astronomischen Nachrichten No. 202 u. f.“ aus andern Gründen abgeleiteten, ist die, welche sich unmittelbar darbietet. Auch ist sie ganz allgemein, und erstreckt sich eben so wohl auf den Fall, wo die zu verbessernden Gröſsen nicht unmittelbar durch die Beobachtung gegeben sind, sondern erst aus ihrer Verbindung mit andern Daten und Theoremen gefunden werden müssen. Man substituirt in diesem Falle in die Gleichungen, welche die Abhängigkeit der Beobachtungsdata von den zu ermittelnden Elementen ausdrücken, überall die Werthe der μ Gröſsen $x_1'\ x_1'' \ldots x_1^{(\mu)}$, als Functionen der andern ϱ Gröſsen aus (68), und erhält so in diesen Gleichungen, deren

Anzahl mindestens gröſser als ϱ sein muſs, nur ϱ Unbekannte, die als ganz unabhängig von einander nach der bei der ersten Klasse erwähnten Methode behandelt werden.

In der einfachen Form indessen, wie in der Geodäsie die Aufgaben der zweiten Klasse auftreten, kann man aus der eben gegebenen Auflösung noch einige Folgerungen ableiten, welche den Uebergang zu der zweiten von Gauſs und Bessel gegebenen Auflösung machen. Man sieht nämlich, daſs das Problem von den beiden Systemen von Gleichungen (68) und (71) abhängt, von denen das erste μ Variable durch die übrigen ϱ vermittelst μ Gleichungen finden läſst, das zweite die letzteren ϱ Variablen selbst giebt. Kann man aus ihrer Verbindung andere von einander unabhängige Gleichungen ableiten, welche ebenfalls die erforderliche Zahl von $(\mu + \varrho)$ Gleichungen zusammen geben, so werden diese eben so gut zur Lösung des Problems angewandt werden können. Solche Gleichungen erhält man aber, wenn man beide Systeme so verbindet, daſs die Gröſsen ν, die einzigen, welche von den wirklich beobachteten Werthen abhängen, eliminirt werden. Multiplicirt man in (68) die erste Gleichung mit $\alpha' \, p_1'$, die zweite mit $\alpha'' \, p_1''$, die dritte mit $\alpha''' \, p_1'''$ u. s. f., und addirt dann alle Producte, so erhält man:

$$\alpha' p_1' x_1' + \alpha'' p_1'' x_1'' + \alpha''' p_1''' x_1''' \ldots\ldots = [\alpha\alpha p_1]\, x' + [\alpha\beta p_1]\, x'' \ldots\ldots + [\alpha\nu p_1]$$

allein vermöge der ersten Gleichung von (71) ist die rechte Seite dieser Gleichung gleich $-p' \, x'$, folglich hat man:

$$0 = p' x' + \alpha' p_1' x_1' + \alpha_1'' p_1'' x'' + \alpha''' p_1''' x''' \ldots\ldots + \alpha^{(\mu)} p_1^{(\mu)} x_1^{(\mu)}.$$

Eben so giebt die Multiplikation von (68) respect. mit $\beta' p_1'$, $\beta'' p_1''$, $\beta''' p_1'''$ etc. vermöge der zweiten Gleichung von (71):

$$0 = p'' x'' + \beta' p_1' x' + \beta_1'' p_1'' x'' \ldots\ldots \beta^{(\mu)} p_1^{(\mu)} x_1^{\mu},$$

so daſs man durch die fortgesetzte Operation mit allen Coefficienten bis zu ϱ hin, ein System von ϱ Gleichungen erhält:

$$(72)\quad \begin{aligned} &p'x' + \alpha' p_1' x_1' + \alpha'' p_1'' x_1'' + \alpha''' p_1''' x_1''' \ldots\ldots + \alpha^{(\mu)} p_1^{(\mu)} x_1^{(\mu)} = 0 \\ &p''x'' + \beta' p_1' x_1' + \beta'' p_1'' x_1'' + \beta''' p_1''' x_1''' \ldots\ldots + \beta^{(\mu)} p_1^{(\mu)} x_1^{(\mu)} = 0 \\ &p'''x''' + \gamma' p_1' x_1' + \gamma'' p_1'' x_1'' + \gamma''' p_1''' x_1''' \ldots\ldots + \gamma^{(\mu)} p_1^{(\mu)} x_1^{(\mu)} = 0 \\ &\vdots \\ &p^{(\varrho)}x^{(\varrho)} + \varrho' p_1' x_1' + \varrho'' p_1'' x_1'' + \varrho''' p_1''' x_1''' \ldots\ldots + \varrho^{(\mu)} p_1^{(\mu)} x_1^{(\mu)} = 0 \end{aligned}$$

welche Gleichungen an die Stelle von (71) treten können, und mit (68) verbunden, ebenfalls das Problem lösen. Jedes System von Werthen $x'\ x''\ x''' \ldots\ x^{(\varrho)}$, $x_1'\ x_1''\ x_1''' \ldots\ x_1^{(\mu)}$, welches den $(\mu + \varrho)$ Gleichungen (68) und (72) Genüge thut, von denen die ersten μ die Gröfsen x_1' bis $x_1^{(\mu)}$ aus den übrigen finden lehren, die letzten ϱ auf eben so einfache Weise die Gröfsen x bis $x^{(\varrho)}$ geben, wenn x_1' bis $x_1^{(\mu)}$ bekannt sind, wird die wahrscheinlichsten Verbesserungen enthalten. In den letzten ϱ Gleichungen (72) fehlen alle Zahlen-data, welche sich auf die wirkliche Beobachtung beziehen, sie enthalten nur die Coefficienten der Variablen in den Bedingungsgleichungen, und können deshalb vortheilhaft gebraucht werden, wenn vielleicht es angemessen scheinen sollte, vor der strengen Ermittelung der wahren Correctionen andere aus irgend welchen vorläufigen Rechnungen gefundene einzuführen. Eine ganz willkürliche Wahl für alle Correctionen wird dabei nothwendig nur die Rechnung ohne allen weiteren Nutzen erschweren. Denn wenn man etwa die vorläufige Annahme für jedes x mit ξ bezeichnet, und was noch zu ξ hinzu kommen mufs, um das wahre x zu erhalten, mit η, so dafs:

$$\begin{aligned} \eta' + \xi' &= x' \qquad & \eta_1' + \xi_1' &= x_1' \\ \eta'' + \xi'' &= x'' \qquad & \eta_1'' + \xi_1'' &= x_1'' \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

so wird man der Strenge nach doch nur in (70) diese Werthe substituiren müssen, und folglich auch bei den ersten Gleichungen zwei Glieder bekommen, für welche neue Summen-Coefficienten zu entwickeln wären. Eben so wird es keinen Nutzen haben, wenn man die ξ etwa so annehmen wollte, dafs dadurch den Bedingungsgleichungen Genüge geschieht. Man hat zwar auf diese Weise ein mögliches System von Werthen, wird aber, um das wahrscheinlichste zu erhalten, dieselbe Vermehrung der Rechnung sich zugezogen haben. Anders indessen ist der Fall, wenn man die ξ so wählt, dafs dadurch den Gleichungen (72) Genüge geschieht, oder für irgend welche Annahme der $\xi_1' \; \xi_1'' \; \xi_1'''$ bis $\xi_1^{(\mu)}$, die ξ' bis $\xi^{(\varrho)}$ berechnet aus den Gleichungen:

$$
(73) \quad \begin{array}{l}
p'\xi' \quad + \alpha' p_1' \xi_1' + \alpha'' p_1'' \xi_1'' \ldots\ldots + \alpha^{(\mu)} p_1^{(\mu)} \xi_1^{(\mu)} = 0 \\
p''\xi'' \quad + \beta' p_1' \xi_1' + \beta'' p_1'' \xi_1'' \ldots\ldots + \beta^{(\mu)} p_1^{(\mu)} \xi_1^{(\mu)} = 0 \\
\vdots \\
p^{(\varrho)}\xi^{(\varrho)} + \varrho' p_1' \xi_1' + \varrho'' p_1'' \xi_1'' \ldots\ldots + \varrho^{(\mu)} p_1^{(\mu)} \xi_1^{(\mu)} = 0
\end{array}
$$

Wenn jetzt die vollständigen Werthe $\eta' + \xi'$, $\eta'' + \xi''$ etc. sind, so wird nothwendig wegen (72) auch sein müssen:

$$
(74) \quad \begin{array}{l}
p'\eta' \quad + \alpha' p_1' \eta_1' + \alpha'' p_1'' \eta_1'' \ldots\ldots + \alpha^{(\mu)} p_1^{(\mu)} \eta_1^{(\mu)} = 0 \\
p''\eta'' \quad + \beta' p_1' \eta_1' + \beta'' p_1'' \eta_1'' \ldots\ldots + \beta^{(\mu)} p_1^{(\mu)} \eta_1^{(\mu)} = 0 \\
\vdots \\
p^{(\varrho)}\eta^{(\varrho)} + \varrho' p_1' \eta_1' + \varrho'' p_1'' \eta_1'' \ldots\ldots + \varrho^{(\mu)} p_1^{(\mu)} \eta_1^{(\mu)} = 0
\end{array}
$$

Hat man nun in die Bedingungsgleichungen die Werthe $\eta' + \xi'$, $\eta'' + \xi''$ etc. ebenfalls substituirt, oder was dasselbe ist, die Functionen $f(w'\,w''\ldots)$, $f'(w'\,w''\ldots)$, nicht mehr mit den Näherungswerthen $v'\,v''$ etc., sondern jetzt mit $v' + \xi'$, $v'' + \xi''$ etc. berechnet, so werden die Gleichungen (68), wenn man setzt:

$$
(75) \quad \begin{array}{l}
\lambda' \;\; = \alpha'\xi' \;\; + \beta'\xi'' \;\; + \gamma'\xi''' \;\; \ldots\ldots + \varrho'\xi^{(\varrho)} \;\; + \nu' \;\; - \xi_1' \\
\lambda'' \;\; = \alpha''\xi' \;\; + \beta''\xi'' \;\; + \gamma''\xi''' \;\; \ldots\ldots + \varrho''\xi^{(\varrho)} \;\; + \nu'' \;\; - \xi_1'' \\
\lambda''' = \alpha'''\xi' + \beta'''\xi'' + \gamma'''\xi''' \ldots\ldots + \varrho'''\xi^{(\varrho)} + \nu''' - \xi_1''' \\
\vdots \\
\lambda^{(\mu)} = \alpha^{(\mu)}\xi' + \beta^{(\mu)}\xi'' + \gamma^{(\mu)}\xi''' \ldots\ldots + \varrho^{(\mu)}\xi^{(\varrho)} + \nu^{(\mu)} - \xi_1^{(\mu)}
\end{array}
$$

die Form erhalten:

$$
(76) \quad \begin{array}{l}
\eta_1' \;\; = \alpha'\eta' \;\; + \beta'\eta'' \;\; + \gamma'\eta''' \;\; \ldots\ldots + \varrho'\eta^{(\varrho)} \;\; + \lambda' \\
\eta_1'' \;\; = \alpha''\eta' \;\; + \beta''\eta'' \;\; + \gamma''\eta''' \;\; \ldots\ldots + \varrho''\eta^{(\varrho)} \;\; + \lambda'' \\
\eta_1''' = \alpha'''\eta' + \beta'''\eta'' + \gamma'''\eta''' \ldots\ldots + \varrho'''\eta^{(\varrho)} + \lambda''' \\
\vdots \\
\eta_1^{(\mu)} = \alpha^{(\mu)}\eta' + \beta^{(\mu)}\eta'' + \gamma^{(\mu)}\eta''' \ldots\ldots + \varrho^{(\mu)}\eta^{(\varrho)} + \lambda^{(\mu)}
\end{array}
$$

und die beiden Systeme (74) und (76) werden die strengen Werthe von $\eta'\;\eta''$ etc. geben, welche zu $\xi'\;\xi''$ hinzugefügt, die genauen Werthe $x'\;x''$ etc. erhalten lassen. Multiplicirt man aber in (76) die erste Gleichung mit $\alpha' p_1'$, die zweite mit $\alpha'' p_1''$, und so fort die letzte mit $\alpha^{(\mu)} p_1^{(\mu)}$, addirt alle Producte und substituirt den dadurch gegebenen Werth von

$$\alpha' p_1' \eta_1' + \alpha'' p_1'' \eta_1'' + \ldots\ldots + \alpha^{(\mu)} p_1^{(\mu)} \eta_1^{(\mu)}$$

in (74), so erhält man:

$$(p' + [\alpha\alpha p_1])\,\eta' + [\alpha\beta p_1]\,\eta'' + [\alpha\gamma p_1]\,\eta''' \ldots + [\alpha\varrho p_1]\,\eta^{(\varrho)} + [\alpha p_1 \lambda] = 0$$

eben so giebt die respective Multiplikation der Gleichungen (76) mit $\beta' p_1'$, $\beta'' p_1''$ etc. eine Gleichung von der Form:

$$[\alpha\beta p_1]\,\eta' + (p'' + [\beta\beta p_1])\,\eta'' + [\beta\gamma p_1]\,\eta''' \ldots + [\beta\varrho p_1]\,\eta^{(\varrho)} + [\beta p_1 \lambda] = 0$$

so dafs man zur Ermittelung der η' $\eta''\ldots$ ein System von Gleichungen erhält:

$$(77)\quad \begin{array}{l} (p' + [\alpha\alpha p_1])\,\eta' + [\alpha\beta p_1]\,\eta'' + [\alpha\gamma p_1]\,\eta''' \ldots\ldots + [\alpha\lambda p_1] = 0 \\ [\alpha\beta p_1]\,\eta' + (p'' + [\beta\beta p_1])\,\eta'' + [\beta\gamma p_1]\,\eta''' \ldots\ldots + [\beta\lambda p_1] = 0 \\ [\alpha\gamma p_1]\,\eta' + [\beta\gamma p_1]\,\eta'' + (p''' + [\gamma\gamma p_1])\,\eta''' \ldots\ldots + [\gamma\lambda p_1] = 0 \\ \qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

welches völlig analog ist mit dem System (72), wodurch die $x' x'' x'''$ etc. selbst erhalten werden. Wenn deswegen die vorläufigen Verbesserungen, oder wie Gaufs sie nennt, die unvollkommnen Ausgleichungen ξ' $\xi''\ldots$ so bestimmt werden, dafs sie den Gleichungen (73) genügen, so kann man mit den Werthen $v' + \xi'$, $v'' + \xi''$, etc. eben so fort rechnen, als wären diese Correctionen gar nicht angebracht. Man kann die so corrigirten Beobachtungswerthe völlig an die Stelle der reinen Beobachtungswerthe setzen, und wird auf ganz gleichem Wege identisch gleiche Resultate erhalten, als wenn man wieder zu den reinen Datis zurückgekehrt wäre. Diese Uebereinstimmung läfst sich auch für das absolute Minimum leicht nachweisen. Auf der einen Seite kann man für

$$p' x'^2 + p'' x''^2 \ldots\ldots + p^{(\varrho)} x^{(\varrho)2} + p_1' x_1'^2 + p_1'' x_1''^2 \ldots\ldots + p_1^{(\mu)} x_1^{(\mu)2}$$

wenn die Werthe x' x'' etc. wirklich die wahrscheinlichsten sind, also den Gleichungen (68) und (72) genügen, einen eleganten Ausdruck finden, in dem man die erste der Gleichungen (72) mit x', die zweite mit x'' etc. multiplicirt und die Gleichungen (68) in die Producte substituirt. Man erhält damit:

$$(78)\quad [px^2] = p_1'\nu' x_1' + p_1''\nu'' x_1'' + p_1'''\nu''' x_1''' \ldots\ldots p_1^{(\mu)}\nu^{(\mu)} x_1^{(\mu)}.$$

Auf der andern giebt die Multiplication des Systems (73) respective mit ξ' ξ'' etc. und die Substitution aus (75) den Werth

$$[p\xi^2] = p_1'(\nu' - \lambda')\xi_1' + p_1''(\nu'' - \lambda'')\xi_1'' \ldots\ldots + p_1^{(\mu)}(\nu^{(\mu)} - \lambda^{(\mu)})\xi_1^{(\mu)},$$

und eben so das System (74) multiplicirt mit η' η'' etc. und verbunden mit (76):

$$[p\eta^2] = p_1'\lambda'\eta_1' + p_1''\lambda''\eta_1'' \ldots\ldots + p_1^{(\mu)}\lambda^{(\mu)}\eta_1^{(\mu)}.$$

Aufserdem hat man, wenn das System (74) mit ξ' ξ'' etc. multiplicirt und mit (75) verbunden wird:

$$[p\xi\eta] = p_1'(\nu' - \lambda')\eta_1' + p_1''(\nu'' - \lambda'')\eta_1'' \ldots\ldots + p_1^{(\mu)}(\nu^{(\mu)} - \lambda^{(\mu)})\eta_1^{(\mu)},$$

und wenn man (73) mit η' η'' etc. multiplicirt und mit (76) verbindet:

$$[p\xi\eta] = p_1'\lambda'\xi_1' + p_1''\lambda''\xi_1'' \ldots\ldots + p_1^{(\mu)}\lambda^{(\mu)}\xi_1^{(\mu)},$$

folglich wird, wenn man diese vier Werthe zusammen legt:

$$\begin{aligned}[p\xi^2] + 2[p\xi\eta] + [p\eta^2] = [p(\eta + \xi)^2] = {} & p_1'\nu'(\eta_1' + \xi_1') \\ & + p_1''\nu''(\eta_1'' + \xi_1'') \ldots\ldots + p_1^{(\mu)}\nu^{(\mu)}(\eta_1^{(\mu)} + \xi_1^{(\mu)}),\end{aligned}$$

oder wegen $(\eta' + \xi') = x'$, $\eta'' + \xi'' = x''$, etc. eine vollkommen mit (78) identische Gleichung.

Die Ursache dieses Vorzuges eines Systems von Correctionen, welches den Gleichungen (72) genügt, vor jedem andern, liegt in der eigentlichen Bedeutung dieser Gleichungen. Vermöge der Bedingungsgleichungen ist:

$$\begin{aligned}dx_1' &= \alpha'\, dx' + \beta'\, dx'' + \gamma'\, dx''' \ldots\ldots + \varrho'\, dx^{(\varrho)} \\ dx_1'' &= \alpha''\, dx' + \beta''\, dx'' + \gamma''\, dx''' \ldots\ldots + \varrho''\, dx^{(\varrho)} \\ dx_1''' &= \alpha'''\, dx' + \beta'''\, dx'' + \gamma'''\, dx''' \ldots\ldots + \varrho'''\, dx^{(\varrho)} \text{ u. s. f.}\end{aligned}$$

so dafs:

$$\alpha' = \frac{dx_1'}{dx'} \qquad \alpha'' = \frac{dx_1''}{dx'} \qquad \alpha''' = \frac{dx_1'''}{dx'}$$
$$\beta' = \frac{dx_1'}{dx''} \qquad \beta'' = \frac{dx_1''}{dx''} \qquad \beta''' = \frac{dx_1'''}{dx''}$$
$$\gamma' = \frac{dx_1'}{dx'''} \qquad \gamma'' = \frac{dx_1''}{dx'''} \qquad \gamma''' = \frac{dx_1'''}{dx'''} \text{ u. s. f.}$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (72), so werden sie

$$p'\ x'\ dx' \ + p_1' x_1' dx_1' + p_1'' x_1'' dx_1'' + \ldots\ldots p_1^{(\mu)}\, x_1^{(\mu)}\, dx_1^{(\mu)} = 0$$
$$p''\ x''\ dx'' \ + p_1' x_1' dx_1' + p_1'' x_1'' dx_1'' + \ldots\ldots p_1^{(\mu)}\, x_1^{(\mu)}\, dx_1^{(\mu)} = 0$$
$$p''' x''' dx''' + p_1' x_1' dx_1' + p_1'' x_1'' dx_1'' + \ldots\ldots p_1^{(\mu)}\, x_1^{(\mu)}\, dx_1^{(\mu)} = 0 \text{ u. s. f.}$$

oder sie sind die Bedingungsgleichungen für das Minimum der Summe der Quadrate

$$p' x'^2 + p'' x''^2 + p''' x'''^2 \ldots + p^{(\varrho)} x^{(\varrho)2} + p_1' x_1'^2 + p_1'' x_1''^2 \ldots + p_1^{(\mu)} x_1^{(\mu)2},$$

wenn man die Gröfsen x' x'' bis x^ϱ als von einander unabhängig ansieht, und die Abhängigkeit der dx_1' dx_1'' bis $dx_1^{(\mu)}$ von den andern Differentialen dx' dx'' bis $dx^{(\varrho)}$ so bestimmt, wie die Bedingungsgleichungen es verlangen. Sie geben folglich, wenn man sie allein berücksichtigt, das System von Werthen x' $x'' \ldots x^\varrho$, welches dem Minimum der Summe der Fehlerquadrate entspricht, wenn man für x_1' $x_1'' \ldots x_1^{(\mu)}$ bestimmte Werthe angenommen hat, oder sie bestimmen das relative Minimum in Bezug auf irgend welches bestimmte System so vieler Gröfsen, als vermöge der Anzahl der Bedingungsgleichungen der Aufgabe von den andern abhängig gedacht werden können. Dieses relative Minimum wird in das absolute verwandelt, wenn man das System der abhängigen Werthe durch Berücksichtigung der Gleichungen (68) einführt, was die wirklichen Beobachtungen verlangen. Vermöge der linearen Form der Bedingungsgleichungen mufs es dabei gleichgültig sein, ob man unmittelbar zu dem absoluten Minimum gelangt, oder gleichsam durch Zerfällung des wahren Werthes der abhängigen Gröfsen in mehrere Theile, für deren jeden man das relative Minimum bestimmt hat, stufenweise das absolute Minimum erhält. Von welchem relativen Minimum man auch ausgeht, immer wird das absolute

Minimum und die einzelnen Werthe genau eben so grofs gefunden werden, und ohne alle Vermehrung der Rechnung, da die Form stets die nämliche ist.

Kann man bei der Ermittelung eines solchen relativen Minimums es zugleich bewirken, dafs einige der angenommenen Werthe der abhängigen Gröfsen einigen unter den Bedingungsgleichungen Genüge thun, so werden in diesem Falle einige der λ gleich Null, und die Bildung der Summen, in welchen diese Werthe vorkommen, wird erleichtert. Wäre zufällig es gelungen, alle λ gleich Null zu machen, so würde damit das absolute Minimum ohne weitere Rechnung erhalten worden sein. Das relative Minimum genügt entweder keiner oder einigen Bedingungsgleichungen, das absolute allen. Allein noch weniger fast in der Abkürzung der Summenbildung zeigt sich der Nutzen dieser Betrachtung oder der unvollkommenen Ausgleichung, als in der leichteren Verknüpfung mehrerer Systeme, deren jedes man früher allein zu behandeln sich veranlafst finden könnte. Wenn in einer sehr ausgedehnten Dreieckskette man zuerst eine Anzahl von Dreiecken für sich betrachtet, und als ein besonderes System vollständig unter sich ausgleicht, so kann man mit diesen verbesserten Werthen sogleich die folgenden unmittelbaren Beobachtungen verbinden, um Alles, was überhaupt nur in irgend welchem Zusammenhange steht, gemeinschaftlich auszugleichen, und braucht nicht wiederum zu den ersten Beobachtungen selbst zurückzukehren. Man geht auf diese Weise von einem, in Bezug auf die sämmtlichen Bedingungsgleichungen relativen, Minimum für die erste Anzahl von Dreiecken aus, wodurch einer Anzahl von Bedingungen schon Genüge geleistet ist, hat folglich die Erleichterung, dafs mehrere λ gleich Null sind, findet in der Regel immer kleinere und kleinere Verbesserungen, welche an die unvollkommen ausgeglichenen Werthe anzubringen sind, und kann auf diese Weise bei dem allmäligen Fortschritte der Arbeit, ohne dafs die früheren Rechnungen ganz überflüssig wären, oder die folgenden erschwerten, bis zu jedem Zeitmoment das System von Werthen angeben, welches den bis dahin gefundenen

Resultaten nach das wahrscheinlichste ist. Es braucht übrigens wohl nicht erwähnt zu werden, dafs die Bedingungsgleichungen, welche bei den unvollkommen ausgeglichenen Werthen im Anfange benutzt sind, nachher immer wieder in Betracht gezogen werden müssen. Die unvollkommene Ausgleichung erlaubt nie eine Bedingungsgleichung wegzulassen, wenn nicht die Gröfsen, die darin vorkommen, weiter gar nicht mit den andern in Verbindung stehen, und ein völlig abgeschlossenes System bilden.

Bei der bisherigen Betrachtung ist angenommen worden, dafs man die Bedingungsgleichungen aus der allgemeinen Form (65), in welcher sie zuerst sich darbieten, umgewandelt habe in die bebestimmte Form (68), welche die Abhängigkeit einer Anzahl von μ Variablen von den übrigen unmittelbar angiebt. Diese Umformung wird zwar in der Geodäsie selten grofse Schwierigkeiten haben, und auch dadurch in der Regel sehr erleichtert werden, dafs die Wahl der Gröfsen x_1' x_1'' bis $x_1^{(\mu)}$ völlig frei steht, man also solche Gröfsen dafür wählen kann, welche am einfachsten die verlangte Form annehmen. Allein die letzte Betrachtung der unvollkommenen Ausgleichung führt von selbst darauf, dafs diese bestimmte Form nicht gerade nöthig ist. Es kommt nur darauf an, mit den ursprünglichen Bedingungsgleichungen noch andere Gleichungen in der nöthigen Zahl zu verbinden, durch welche die allgemeine Gleichung des Minimums in so viele einzelne Gleichungen zerfällt wird, als unabhängige Differentialquotienten der zu ermittelnden Gröfsen, vermöge der Anzahl der Bedingungsgleichungen, vorhanden sind. Anstatt diese Zerfällung durch directe Substitution auszuführen, kann man sie in den Formeln analytisch andeuten, und ohne gerade eine bestimmte Wahl von μ Werthen unter den Gröfsen x selbst zu treffen, lieber eine gleiche Anzahl einstweilen noch unbestimmt gelassener Functionen derselben einführen, deren Werthe sich im Laufe der Rechnung dadurch ergeben müssen, dafs die Bedingung der Abhängigkeit von μ Differentialen gegen die andern ausgedrückt wird.

Die allgemeine Form der Bedingungsgleichungen (65) führt für die Relation ihrer Differentiale unter einander zu den Gleichungen:

$$
(67)\qquad
\begin{aligned}
0 &= a'.dx' + a'' dx'' \ldots\ldots + a^{(m)} dx^{(m)}\\
0 &= b' dx' + b'' dx'' \ldots\ldots + b^{(m)} dx^{(m)}\\
0 &= c' dx' + c'' dx'' \ldots\ldots + c^{(m)} dx^{(m)}, \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

vermittelst welcher μ Differentiale durch die übrigen ϱ ausgedrückt werden sollen, um sie in die Bedingungsgleichung des Minimums

$$p' x' dx' + p'' x'' dx'' + p''' x''' dx''' \ldots\ldots + p^{(m)} dx^{(m)} = 0$$

zu substituiren, und dann diese Gleichung in so viele einzelne zu zerfällen, als unabhängige Differentiale übrig bleiben. Multiplicirt man die erste der obigen Gleichungen mit dem unbestimmten Factor A, die zweite mit B, die dritte mit C etc., nimmt die Summe aller, und vereinigt sie mit der Bedingungsgleichung des Minimums, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
&(p' x' + a' A + b' B + c' C \ldots\ldots + \mu' M)\, dx'\\
+&(p'' x'' + a'' A + b'' B + c'' C \ldots\ldots + \mu'' M)\, dx''\\
+&(p''' x''' + a''' A + b''' B + c''' C \ldots\ldots + \mu''' M)\, dx'''\\
&\vdots\\
+&(p^{(m)} x^{(m)} + a^{(m)} A + b^{(m)} B + c^{(m)} C \ldots\ldots + \mu^{(m)} M)\, dx^{(m)} = 0.
\end{aligned}
$$

Um hieraus μ Differentiale zu eliminiren, wird man die Factoren $A\ B\ C \ldots M$ so bestimmen müssen, dafs die Coefficienten von μ Differentialen, jeder einzeln, gleich Null gesetzt werden, und die aus diesen μ Gleichungen erhaltenen Werthe $A\ B\ C \ldots M$ nachher in die übrigen substituiren, um nach der Substitution ebenfalls wieder jeden Coefficienten der jetzt von einander unabhängigen Differentiale einzeln gleich Null zu setzen. Offenbar ist dieses Verfahren ganz identisch mit dem, wonach man allgemein jede einzelne Zeile der letzten Gleichung gleich Null setzt, und dabei die μ Factoren $A\ B\ C \ldots M$ als neue zu bestimmende Gröfsen betrachtet. Die so erhaltenen m Gleichungen enthalten die $m + \mu$ unbekannten Gröfsen $x'\ x'' \ldots x^{(m)}\ A\ B\ C \ldots M$, und geben mit den μ Bedingungsgleichungen vereinigt, in denen nur die $x'\ x'' \ldots x^{(m)}$ als zu ermittelnde Gröfsen vorkommen, $m + \mu$ Gleichungen, aus welchen die $m+\mu$ Gröſsen jedesmal zu bestimmen sind. Das Ganze beruht deshalb auf den $m+\mu$ Gleichungen:

$$
(79)\quad
\begin{aligned}
0 &= a'x' + a''x'' + a'''x''' \ldots\ldots\ldots\ldots + a^{(m)}x^{(m)} + n \\
0 &= b'x' + b''x'' + b'''x''' \ldots\ldots\ldots\ldots + b^{(m)}x^{(m)} + n' \\
0 &= c'x' + c''x'' + c'''x''' \ldots\ldots\ldots\ldots + c^{(m)}x^{(m)} + n'' \\
&\vdots \\
0 &= \mu'x' + \mu''x'' + \mu'''x''' \ldots\ldots\ldots\ldots + \mu^{(m)}x^{(m)} + n^{(\mu)} \\
0 &= p'x' + a'A + b'B + c'C \ldots\ldots + \mu'M \\
0 &= p''x'' + a''A + b''B + c''C \ldots\ldots + \mu''M \\
0 &= p'''x''' + a'''A + b'''B + c'''C \ldots\ldots + \mu'''M \\
&\vdots \\
0 &= p^{(m)}x^{(m)} + a^{(m)}A + b^{(m)}B + c^{(m)}C \ldots\ldots + \mu^{(m)}M
\end{aligned}
$$

aus deren Verbindung unter einander Alles sich ergeben muſs.

Man kann sich direct überzeugen, daſs diese Gleichungen der Sache nach identisch sind mit den Gleichungen (72). Denn nimmt man aus ihnen μ bestimmte heraus nach der obigen Bezeichnung:

$$
\begin{aligned}
0 &= p_1'x_1' + a_1'A + b_1'B + c_1'C \ldots\ldots + \mu_1'M \\
0 &= p_1''x_1' + a_1''A + b_1''B + c_1''C \ldots\ldots + \mu_1''M \\
0 &= p_1'''x_1' + a_1'''A + b_1'''B + c_1'''C \ldots\ldots + \mu_1'''M \\
&\vdots \\
0 &= p_1^{(\mu)}x_1^{(\mu)} + a_1^{(\mu)}A + b_1^{(\mu)}B + c_1^{(\mu)}C \ldots\ldots + \mu_1^{(\mu)}M
\end{aligned}
$$

multiplicirt die erste mit α', die zweite mit α'', die dritte mit α''' etc. und addirt die Producte, so wird:

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \alpha'p_1'x_1' + \alpha''p_1''x_1'' + \alpha'''p_1'''x_1''' \ldots + \alpha^{(\mu)}p_1^{(\mu)}x_1^{(\mu)} \\
& + \{\alpha'a_1' + \alpha''a_1'' + \alpha'''a_1''' \ldots\ldots\ldots + \alpha^{(\mu)}a_1^{(\mu)}\}A \\
& + \{\alpha'b_1' + \alpha''b_1'' + \alpha'''b_1''' \ldots\ldots\ldots + \alpha^{(\mu)}b_1^{(\mu)}\}B \\
& \vdots \\
& + \{\alpha'\mu_1' + \alpha''\mu_1'' + \alpha'''\mu_1''' \ldots\ldots\ldots + \alpha^{(\mu)}\mu_1^{(\mu)}\}M.
\end{aligned}
$$

Hierfür giebt die Substitution der Gleichungen (69) den Werth

$$
\begin{aligned}
0 = {} & \alpha'p_1'x_1' + \alpha''p_1''x_1'' + \alpha'''p_1'''x_1''' \ldots + \alpha^{(\mu)}p_1^{(\mu)}x_1^{(\mu)}, \\
& - a'A - b'B - c'C \ldots\ldots\ldots\ldots - \mu'M,
\end{aligned}
$$

oder vermöge der ersten der obigen Gleichungen:

$$0 = p'x' + \alpha'p_1'x_1' + \alpha''p_1''x_1'' + \alpha'''p_1'''x_1''' \ldots\ldots \alpha^{(\mu)}p_1^{(\mu)}x_1^{(\mu)},$$

welches die erste der Gleichungen (72) ist. Die successive Anwendung von $\beta' \beta'' \ldots \beta^{(\mu)}$, $\gamma' \gamma'' \ldots \gamma^{(\mu)}$ etc. wird alle folgenden des Systems (72) ergeben, so daſs dieses System nichts anderes ist, als eine Folge der wirklichen Elimination von den μ Factoren $A\ B\ C \ldots M$, aus den m obigen Gleichungen, in welchen sie enthalten sind.

Allein bei der einfachen Form dieser letzteren, nach welcher in jeder Gleichung nur eine unbekannte Gröſse vorkommt, wird man auch einen andern Weg einschlagen können, nämlich nicht die $A\ B\ C$ etc. zu eliminiren, sondern vielmehr die $x'\ x''$ bis $x^{(m)}$ selbst wegzuschaffen, und wird auf diesem Wege ebenfalls Gleichungen erhalten, welche dieselbe symmetrische Form wie die Gleichungen des Minimums bei den Aufgaben der ersten Klasse haben, so daſs dasselbe Verfahren auf sie anwendbar ist.

Multiplicirt man die erste der Gleichungen unter den Gleichungen (79), in welchen die Factoren $A\ B\ C \ldots M$ vorkommen, mit $\frac{a'}{p'}$, die zweite mit $\frac{a''}{p''}$, die dritte mit $\frac{a'''}{p'''}$ etc. bis zur m^{ten}, welche mit $\frac{a^{(m)}}{p^{(m)}}$ multiplicirt wird, addirt alle Producte, und berücksichtigt die erste der Bedingungsgleichungen, so erhält man, wenn:

$$\frac{a'a'}{p'} + \frac{a''a''}{p''} + \frac{a'''a'''}{p'''} + \cdots\cdots + \frac{a^{(m)}a^{(m)}}{p^{(m)}} = \left[\frac{aa}{p}\right]$$

gesetzt wird, und analog die andern Formen, eine Gleichung,

$$\left[\frac{aa}{p}\right]A + \left[\frac{ab}{p}\right]B + \left[\frac{ac}{p}\right]C \ldots\ldots + \left[\frac{a\mu}{p}\right]M = n,$$

in welcher bloſs noch die Gröſsen $A\ B\ C \ldots M$ als zu bestimmende Gröſsen vorkommen. Eine zweite Multiplication mit $\frac{b'}{p'}$, $\frac{b''}{p''} \ldots \frac{b^{(m)}}{p^{(m)}}$, eine dritte mit $\frac{c'}{p'}$, $\frac{c''}{p''} \ldots \frac{c^{(m)}}{p^{(m)}}$ giebt ähnliche Gleichungen an der Zahl μ, deren vollständiges System folgendes wird:

$$(80)\quad \begin{aligned}
&\left[\frac{aa}{p}\right]A+\left[\frac{ab}{p}\right]B+\left[\frac{ac}{p}\right]C\ldots\ldots+\left[\frac{a\mu}{p}\right]M=n\\
&\left[\frac{ab}{p}\right]A+\left[\frac{bb}{p}\right]B+\left[\frac{bc}{p}\right]C\ldots\ldots+\left[\frac{b\mu}{p}\right]M=n'\\
&\left[\frac{ac}{p}\right]A+\left[\frac{bc}{p}\right]B+\left[\frac{cc}{p}\right]C\ldots\ldots+\left[\frac{c\mu}{p}\right]M=n''\\
&\quad\vdots\\
&\left[\frac{a\mu}{p}\right]A+\left[\frac{b\mu}{p}\right]B+\left[\frac{c\mu}{p}\right]C\ldots\ldots+\left[\frac{\mu\mu}{p}\right]M=n^{(\mu)},
\end{aligned}$$

aus welchen man $A\ B\ C \ldots M$ findet. Sobald diese gegeben sind, so erhält man die wirklichen Correctionen $x'\ x'' \ldots x^{(m)}$ aus (79) vermöge

$$(81)\quad \begin{aligned}
x' &= -\frac{a'A+b'B+c'C\ldots\ldots+\mu'M}{p'}\\
x'' &= -\frac{a''A+b''B+c''C\ldots\ldots+\mu''M}{p''}\\
x''' &= -\frac{a'''A+b'''B+c'''C\ldots\ldots+\mu'''M}{p'''}\\
&\ \vdots\\
x^{(m)} &= -\frac{a^{(m)}A+b^{(m)}B+c^{(m)}C\ldots\ldots+\mu^{(m)}M}{p^{(m)}}
\end{aligned}$$

Diese Auflösung, welche von Gaufs in dem *Suppl. Theor. Comb. observationum,* und von Bessel (Rosenberger über Maupertuis' Gradmessung, Astronom. Nachr. No. 121) gegeben ist, bedarf folglich keiner Umwandlung der Bedingungsgleichungen. Sie führt auf μ lineare Gleichungen (80) von einer Form, welche die Anwendung der früher bei den Aufgaben der ersten Klasse auseinandergesetzten Eliminationsmethode gestattet, und verlangt nachher m Substitutionen (so viele als Correctionen gesucht werden) der μ Werthe $A\ B\ C \ldots M$, welchen Gaufs den Namen der Correlaten der Bedingungsgleichungen gegeben hat. Die frühere Auflösung nach Hansen erfordert eine Umwandlung der Bedingungsgleichungen, oder eine Ermittlung von $\mu\ (m-\mu+1)$ Coefficienten, führt dann auf $m-\mu$ Gleichungen, aus denen die Werthe von eben so vielen Correctionen gefunden werden, und fordert zuletzt μ Substitutionen der $m-\mu$ Werthe, um die noch rückständigen μ Correctionen zu finden. Die Summencoefficienten, welche bei beiden Auflösungen gebildet werden müssen, beziehen sich bei der ersten auf μ, bei der zweiten auf $m-\mu$ Werthe. Die Umwandlung der Bedingungsgleichungen kann den Umständen nach sehr leicht, kann aber auch so weitläuftig werden, dafs eine Methode, die sie nicht erfordert, einen wesentlichen Vorzug hat; auf der andern Seite wird sie bei dieser zweiten Klasse von Aufgaben, im allgemeinsten Falle nicht umgangen werden können. Sieht man davon ab, so ist die Bildung der Summencoefficienten der weitläuftigste Theil, und somit wird sich der Vorzug, den man einer oder der andern Auflösung zu geben geneigt sein könnte, wesentlich darnach richten, ob $\mu > m-\mu$ oder $\mu < m-\mu$, d. h. ob die Anzahl der Bedingungsgleichungen gröfser oder kleiner ist, als die Hälfte der Anzahl der zu ermittelnden Correctionen. Ist sie kleiner, so wird die Auflösung von Gaufs jedenfalls weit kürzer sein. Ist sie gröfser, so kann die Mühe der Umwandlung der Bedingungsgleichungen vielleicht aufgewogen werden durch die spätere geringere Anzahl der übrigen aufzulösenden Gleichungen.

Was übrigens bei der Gaufs'schen Auflösung die unvollkommene Ausgleichung betrifft, so wird diese, wie der ganze Gang lehrt, sich eben so an ein gewähltes System von Correlaten knüpfen, wie sie bei der andern an ein gewähltes System von μ Werthen unter den x geknüpft war. Die Gleichungen von der Form:

$$0 = p'x' + a'A + b'B + c'C \dots\dots$$

geben eben so wie die früheren, wenn man vermittelst ihrer die Werthe von x' $x''\dots x^{(m)}$ als Functionen irgend welches Systems von Correlaten A' B' $C'\dots$ bestimmt, das relative Minimum in Bezug auf dieses System, und die so ermittelten Werthe erlauben auf ganz ähnliche Weise die unmittelbare Anknüpfung der weiteren Rechnungen. Man kann dieses auf dieselbe Weise ableiten.

Es mögen ξ' $\xi''\dots \xi^{(m)}$ Verbesserungen sein, welche man an die verschiedenen Beobachtungen angebracht hat, und welche für irgend welche Werthe von Correlaten $A' \; B' \; C' \ldots$ den Gleichungen genügen:

$$
\begin{aligned}
p'\xi' \quad + a'A' \; + b'B' \; + c'C' \ldots\ldots &= 0 \\
p''\xi'' \; + a''A' \; + b''B' \; + c''C' \ldots\ldots &= 0 \\
p'''\xi''' + a'''A' + b'''B' + c''C' \ldots\ldots &= 0
\end{aligned}
$$

Die dadurch unvollkommen ausgeglichenen Beobachtungswerthe werden folglich $v' + \xi'$, $v'' + \xi''$, $v''' + \xi'''$ etc., und wenn man setzt:

$$
\begin{aligned}
f \;\; (v' + \xi', \; v'' + \xi'', \; v''' + \xi''', \ldots\ldots) &= \pi' \\
f' \; (v' + \xi', \; v'' + \xi'', \; v''' + \xi''', \ldots\ldots) &= \pi'' \\
f'' (v' + \xi', \; v'' + \xi'', \; v''' + \xi''', \ldots\ldots) &= \pi''' \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

so wird vermöge der früheren Annahmen sein:

$$
\begin{aligned}
n' \quad + a'\xi' + a''\xi'' + a'''\xi''' + \ldots\ldots &= \pi' \\
n'' \; + b'\xi' + b''\xi'' + b'''\xi''' + \ldots\ldots &= \pi'' \\
n''' + c'\xi' + c''\xi'' + c'''\xi''' + \ldots\ldots &= \pi''' \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

Nennt man jetzt die zu ermittelnden Correctionen, welche an die zunächst unvollkommen ausgeglichenen Beobachtungen noch angebracht werden müssen, um die wahrscheinlichsten Correctionen zu erhalten, $\eta' \; \eta'' \; \eta''' \ldots$, so haben die Bedingungsgleichungen die Form:

$$
\begin{aligned}
a'\eta' + a''\eta'' + a'''\eta''' \ldots\ldots + \pi' \; &= 0 \\
b'\eta' + b''\eta'' + b'''\eta''' \ldots\ldots + \pi'' &= 0 \\
c'\eta' + c''\eta'' + c'''\eta''' \ldots\ldots + \pi''' &= 0 \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

Behandelt man die unvollkommen ausgeglichenen Beobachtungen genau so wie die ursprünglichen, so wird man mit diesen Gleichungen ein neues System anderer zu verbinden haben, in welchem neue Correlaten $A'' \; B'' \; C''$ etc. eingeführt sind, nämlich:

$$
\begin{aligned}
p'\eta' \quad + a'A'' \; + b'B'' \; + c'C'' \ldots\ldots &= 0 \\
p''\eta'' \; + a''A'' \; + b''B'' \; + c''C'' \ldots\ldots &= 0 \\
p'''\eta''' + a'''A'' + b'''B'' + c'''C'' \ldots\ldots &= 0 \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

und die Gleichungen, wodurch diese neuen Correlaten sich bestimmen, werden sein:

$$\left[\frac{aa}{p}\right] A'' + \left[\frac{ab}{p}\right] B'' + \left[\frac{ac}{p}\right] C'' \ldots\ldots = \pi'$$
$$\left[\frac{ab}{p}\right] A'' + \left[\frac{bb}{p}\right] B'' + \left[\frac{bc}{p}\right] C'' \ldots\ldots = \pi''$$
$$\left[\frac{ac}{p}\right] A'' + \left[\frac{bc}{p}\right] B'' + \left[\frac{cc}{p}\right] C'' \ldots\ldots = \pi''' \text{ etc.}$$

Auf der andern Seite geben aber auch die obigen beiden ähnlichen Systeme für ξ' ξ'' ξ''' etc., für diese Gröſsen die Gleichungen:

$$\left[\frac{aa}{p}\right] A' + \left[\frac{ab}{p}\right] B' + \left[\frac{ac}{p}\right] C' \ldots\ldots = n' - \pi'$$
$$\left[\frac{ab}{p}\right] A' + \left[\frac{bb}{p}\right] B' + \left[\frac{bc}{p}\right] C' \ldots\ldots = n'' - \pi''$$
$$\left[\frac{ac}{p}\right] A' + \left[\frac{bc}{p}\right] B' + \left[\frac{cc}{p}\right] C' \ldots\ldots = n''' - \pi''' \text{ etc.}$$

und die Summe dieser letzteren mit den vorigen giebt:

$$\left[\frac{aa}{p}\right] (A' + A'') + \left[\frac{ab}{p}\right] (B' + B'') + \left[\frac{ac}{p}\right] (C' + C'') \ldots = n'$$
$$\left[\frac{ab}{p}\right] (A' + A'') + \left[\frac{bb}{p}\right] (B' + B'') + \left[\frac{bc}{p}\right] (C' + C'') \ldots = n''$$
$$\left[\frac{ac}{p}\right] (A' + A'') + \left[\frac{bc}{p}\right] (B' + B'') + \left[\frac{cc}{p}\right] (C' + C'') \ldots = n''' \text{ etc.}$$

Da nun dieses ganz die nämlichen Gleichungen in Hinsicht auf jeden einzelnen Coefficienten und Zahlenwerth sind wie (80), so muſs nothwendig werden:

$$A' + A'' = A$$
$$B' + B'' = B$$
$$C' + C'' = C \text{ etc.}$$

oder unvollkommen ausgeglichene Beobachtungen, bei denen die angebrachten Correctionen den obigen Gleichungen für ein System von Correlaten Genüge leisten, erfordern, wenn man von ihnen als von reinen Beobachtungen ausgeht, ein neues System von Correlaten, welche mit dem zum Grunde gelegten Systeme vereinigt, genau dieselben Correlaten geben, als wenn man von den ursprünglichen Beobachtungswerthen unmittelbar ausgegangen wäre. Hiermit steht in natürlicher Verbindung, dafs da:

$$p'\xi' + a'A' + b'B' + c'C' \;\ldots\ldots = 0$$
$$p'\eta' + a'A'' + b'B'' + c'C'' \;\ldots\ldots = 0,$$

auch wegen $A' + A'' = A$ etc.

$$p'(\xi' + \eta') + a'A + b'B + c'C \ldots\ldots = 0$$

das heifst, dafs

$$\xi' + \eta' = x'$$

und eben so

$$\xi'' + \eta'' = x''$$
$$\xi''' + \eta''' = x''' \text{ etc.,}$$

oder dafs die Summe der bei den unvollkommen ausgeglichenen Beobachtungen angebrachten Correctionen, und der wahrscheinlichsten Verbesserungen, welche ihnen noch hinzuzufügen sind, genau dieselben wahrscheinlichsten Correctionen ergiebt, welche unmittelbar aus den reinen Beobachtungen hätten abgeleitet werden können. Uebrigens werden die unvollkommenen Ausgleichungen bei dieser Auflösung identisch sein mit denen der vorigen, wenn das System A' B' C' etc. so gewählt ist, dafs für die μ Gröfsen unter den x, welche man bei der früheren Auflösung als abhängig von den andern betrachtet hat, dieselben Werthe sich ergeben, als man dort angenommen, wie die frühere Vergleichung zwischen beiden Auflösungen lehrt.

Auch für die Summe der letzten Fehlerquadrate, das absolute Minimum, kann man auf ähnliche Weise wie oben einen eleganten Ausdruck geben. Multiplicirt man von den Gleichungen (79), welche die Correlaten enthalten, die erste mit x', die zweite mit x''. die dritte mit x''' etc., und substituirt die Bedingungsgleichungen hinein, so erhält man:

$$[px^2] = An' + Bn'' + Cn''' + \ldots\ldots Mn^{(\mu)}.$$

Sind also die Correlaten aus den Gleichungen (80) bestimmt, so wird, wenn man die erste der Gleichungen (80) mit A, die zweite mit B etc. multiplicirt und Alles addirt, wegen der Gleichheit der rechten Seite, das absolute Minimum:

$$
\begin{aligned}
[px^2] = \left[\frac{aa}{p}\right] AA + 2\left[\frac{ab}{p}\right] AB + 2\left[\frac{ac}{p}\right] AC \ldots + 2\left[\frac{a\mu}{p}\right] AM \\
+ \left[\frac{bb}{p}\right] BB + 2\left[\frac{bc}{p}\right] BC \ldots + 2\left[\frac{b\mu}{p}\right] BM \\
+ \left[\frac{cc}{p}\right] CC \ldots + 2\left[\frac{c\mu}{p}\right] CM \\
\vdots \\
+ \left[\frac{\mu\mu}{p}\right] MM
\end{aligned}
$$

In den Bedingungsgleichungen des Minimums vertritt aber $-n'$ die Stelle, welche bei der Behandlung der Gleichungen der ersten Klasse durch $[an]$ angedeutet war, n'' ist an die Stelle von $[bn]$ getreten, n''' an die von $[cn]$, so wie $\left[\frac{aa}{p}\right]$, $\left[\frac{ab}{p}\right]$, $\left[\frac{ac}{p}\right]$, etc. an die Stellen von $[aa]$, $[ab]$, $[ac]$; führt man folglich in Bezug auf diese Gröſsen dieselben Hülfsgröſsen ein wie bei jenen, so daſs z. B.

$$\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right] = \left[\frac{bb}{p}\right] - \frac{\left[\frac{ab}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}$$

etc., so wird man das absolute Minimum, auf dieselbe Art wie früher ähnliche Functionen ausgedrückt wurden, so bezeichnen können:

$$[px^2] = \frac{n'n'}{\left[\frac{aa}{p}\right]} + \frac{[n''\cdot 1]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} + \frac{[n'''\cdot 2]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]} + \frac{[n^{\mathrm{IV}}\cdot 3]^2}{\left[\frac{dd}{p}\cdot 3\right]} \text{ etc.}$$

wodurch sich nach der Elimination und Substituirung der wahrscheinlichsten Werthe von x' x'' etc., dieselbe Controlle wie früher ergiebt. Die Verschiedenheit, welche sich bei diesem Ausdrucke des Minimums gegen den der ersten Klasse ergiebt, bei welcher letzteren von der Summe der Quadrate der ursprünglichen Fehler ein Ausdruck von der hier stattfindenden Form abgezogen wird, um das Minimum zu erhalten, liegt in der ganz verschiedenen Natur der Aufgaben beider Klassen. Bei der ersten bleiben die Fehler mit den Gröfsen verbunden, bei welchen sie im Anfange als stattfindend angenommen wurden, und durch Bestimmung der Elemente wird nur bewirkt, dafs die Summe ihrer Quadrate ein Minimum werde; bei der zweiten Klasse werden die Fehler, oder die n, welche aus den nicht erfüllten Bedingungsgleichungen entspringen, völlig vernichtet, in so fern sie bei diesen Bedingungsgleichungen stattfinden, und dagegen auf die Gröfsen $x' \; x'' \; x'''$ etc., durch deren Verbesserung man diese Vernichtung bewirkt, übertragen. Wenn also in den Aufgaben der ersten Klasse und in den dort gewählten Zeichen aus der Gleichung

$$\Omega = \frac{AA}{[aa]} + \frac{B'B'}{[bb \cdot 1]} + \frac{C''C''}{[cc \cdot 2]} \ldots\ldots + [nn \,.\, \mu]$$

bei gegebenem Ω das absolute Minimum $[nn \cdot \mu]$ gesucht wird, so findet bei den Aufgaben der zweiten Klasse, den Beobachtungen zufolge, schon der kleinstmöglichste Werth von $[nn \cdot \mu]$, nämlich in Bezug auf $x' \; x'' \; x'''$ etc.

$$[nn \cdot \mu] = 0$$

statt, wenn die Bedingungsgleichungen nicht forderten, zu ihrer strengen Erfüllung gewisse Verbesserungen dabei anzunehmen, und man sucht demzufolge das Ω, was am kleinsten ausfällt, wenn $[nn \cdot \mu]$ gleich Null war, wodurch die obige Form erhalten wird.

Alles Bisherige hat Gaufs in dem *Supplementum Theoriae combinationis errorum* auf einem ganz verschiedenen Wege abgeleitet, ein Weg, der zugleich eine sehr klare Einsicht in die eigentliche Bedeutung und den Werth der gefundenen Resultate gewährt, und deshalb hier nicht übergangen werden darf.

Wenn, um das geodätisehe Beispiel beizubehalten, in einem Dreiecksnetze gewisse Bedingungsgleichungen:

$$X=0 \quad Y=0 \quad Z=0$$

stattfinden, so wird man zu allen Gröfsen, auf welche diese Bedingungsgleichungen Einflufs haben, auf mehrfachem Wege kommen können, je nachdem man die eine oder die andere Verbindung vorzieht. Möge eine solche von v' v'' v''' etc. abhängige Gröfse u sein, und die verschiedenen Wege durch die Functionenzeichen φ und ψ unterschieden werden. Wären die wahren Werthe von v' v'' $v'''\ldots$ d. h. die Werthe w' w'' w''' etc. bekannt, und damit das wahre System, in welchem allen Bedingungsgleichungen genügt wird, so würde auch der wahre Werth von u auf allen Wegen gleich gefunden werden, oder es wird sein müssen:

$$u=\varphi\,(w', w'', w'''\ldots)=\psi\,(w', w'', w'''\ldots).$$

Nimmt man aber statt w w' $w''\ldots$ die unmittelbar beobachteten $v, v', v''\ldots,$ so wird der Werth von u durch φ erhalten, verschieden von dem durch ψ erhaltenen ausfallen, und eine Wahl uns frei stehen, für welchen dieser Werthe wir uns entscheiden wollen. Hierbei mufs uns der allgemeine Satz (20) leiten, nach welchem der wahrscheinliche Fehler von φ $(v', v'', v'''\ldots)$ gefunden wird, durch Berücksichtigung des Differentialquotienten dieser Function in Bezug auf jede Variable. Sei nämlich:

$$\frac{d\cdot\varphi\,(v', v'', v'''\ldots)}{dv'}=l'$$

$$\frac{d\cdot\varphi\,(v', v'', v'''\ldots)}{dv''}=l''$$

$$\frac{d\cdot\varphi\,(v', v'', v'''\ldots)}{dv'''}=l'''.$$

Sei ferner r die Einheit des wahrscheinlichen Fehlers, auf welchen sich die Gewichte p' p'' p''' etc. beziehen, so dafs der

wahrscheinliche Fehler von v' ist $\dfrac{r}{\sqrt{p'}}$

" " " v'' " $\dfrac{r}{\sqrt{p''}}$

" " " v''' " $\dfrac{r}{\sqrt{p'''}}$ etc.

so wird der wahrscheinliche Fehler von $\varphi\,(v', v''\, v'''\ldots)$

$$r\sqrt{\left(\frac{l'^2}{p'}+\frac{l''^2}{p''}+\frac{l'''^2}{p'''}\ldots\right)}$$

und eben so grofs der wahrscheinliche Fehler des Werthes von u, den wir durch φ gefunden haben. Wäre eben so:

$$\frac{d\cdot\psi\,(v', v'', v'''\ldots)}{dv'}=L'$$

$$\frac{d\cdot\psi\,(v', v'', v'''\ldots)}{dv''}=L''$$

$$\frac{d\cdot\psi\,(v', v'', v'''\ldots)}{dv'''}=L''',$$

so würde auf dieselbe Weise der wahrscheinliche Fehler von $\psi\,(v', v'', v'''\ldots)$

$$r\sqrt{\left(\frac{L'^2}{p'}+\frac{L''^2}{p''}+\frac{L'''^2}{p'''}\ldots\right)}$$

und eben so grofs der wahrscheinliche Fehler des Werthes von u, den wir durch $\psi\,(v', v'', v'''\ldots)$ gefunden haben. Es wird folglich unter allen möglichen Functionen φ, ψ, und Berechnungsarten von u, diejenige die vortheilhafteste sein, für welche die ihr zugehörige Gröfse:

$$\frac{l'^2}{p'}+\frac{l''^2}{p''}+\frac{l'''^2}{p'''}+\ldots\ldots \qquad \text{oder: } \frac{L'^2}{p'}+\frac{L''^2}{p''}+\frac{L'''^2}{p'''}\ldots\ldots$$

die kleinstmöglichste ist. Angenommen nun die Functionen ψ oder der Werth $\frac{L'^2}{p'}+\frac{L''^2}{p''}+\frac{L'''^2}{p'''}+\ldots$ entspreche diesem Minimum, so wird die Aufgabe sein müssen, in jedem Falle diesen vortheilhaftesten Werth für jede Function u zu ermitteln.

Aus der Betrachtung, dafs für die wahren Werthe $w'\, w''\, w'''$ etc. alle Functionen φ mit der Function des Minimums ψ gleiche Werthe geben müssen, während die mit den Fehlern der Beobachtung behafteten, und deshalb den Bedingungsgleichungen nicht genügenden Werthe $v'\, v''\, v'''$ etc. verschiedene Resultate geben, ergiebt sich von selbst, dafs der Unterschied dieser sämmtlichen Functionen, so weit er hier in Betracht kommt, nur auf die Erfüllung oder Nichterfüllung der Bedingungsgleichungen Bezug haben kann, oder dafs man als allgemeine Form annehmen darf:

$$\psi(w', w'', w''' \ldots) = \varphi(w', w'', w''' \ldots) + x^0 X + y^0 Y + z^0 Z + U,$$

wo U eine solche Function ist, welche Null wird, sobald alle Bedingungsgleichungen $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ erfüllt sind. Man kann sie sich etwa als eine von den ganzen Potenzen von X, Y, Z, gebildete Function denken. In Bezug auf die Differentialquotienten aber, die allein uns hier interessiren, wird es selbst gestattet sein, eine blofse lineare Form gelten zu lassen, oder in den obigen Zeichen allgemein anzunehmen:

$$L' = l' + x^0 \frac{dX}{dv'} + y^0 \frac{dY}{dv'} + z^0 \frac{dZ}{dv'}$$

$$L'' = l'' + x^0 \frac{dX}{dv''} + y^0 \frac{dY}{dv''} + z^0 \frac{dZ}{dv''}, \text{ etc.}$$

wenn, was hier immer vorausgesetzt wird, die Fehler von v' v'' v''' etc. so gering sind, dafs ihre höhern Potenzen vernachlässigt werden können. Diese lineare Form für die Differentialquotienten erfüllt alle Forderungen, und die Factoren x^0, y^0, z^0, müssen frei sein von jedem Einflusse der nicht erfüllten Bedingungsgleichungen, oder als unabhängig von den etwaigen Fehlern der Beobachtungen angenommen werden können, weil im entgegengesetzten Falle der Unterschied der berechneten Werthe vermittelst zweier verschiedener Wege, nicht mehr allein von den ersten Potenzen der Beobachtungsfehler abhängig sein würde.

Wenn nun in den früheren Zeichen gesetzt wird:

$$\frac{dX}{dv'} = a' \qquad \frac{dX}{dv''} = a'' \qquad \frac{dX}{dv'''} = a'''$$

$$\frac{dY}{dv'} = b' \qquad \frac{dY}{dv''} = b'' \qquad \frac{dY}{dv'''} = b'''$$

$$\frac{dZ}{dv'} = c' \qquad \frac{dZ}{dv''} = c'' \qquad \frac{dZ}{dv'''} = c''' \text{ etc.}$$

so werden die Gleichungen zwischen den Differentialquotienten der Function des Minimums, und jeder beliebigen andern die allgemeine Form haben:

$$(82)\qquad \begin{aligned} L' &= l' + a'x^0 + b'y^0 + c'z^0 \ldots\ldots \\ L'' &= l'' + a''x^0 + b''y^0 + c''z^0 \ldots\ldots \\ L''' &= l''' + a'''x^0 + b'''y^0 + c'''z^0 \ldots\ldots \text{ etc.} \end{aligned}$$

und wenn man zur Ermittelung von u irgend welchen Weg vermittelst irgend welcher Function φ eingeschlagen hat, wodurch denn auch die zu φ gehörigen Gröfsen l gegeben sind, so wird man die L, welche zu der vortheilhaftesten Bestimmung von u gehören, zuerst dadurch bestimmen, dafs man vermittelst der m Gleichungen (82) (deren Anzahl so grofs als die Anzahl der v, oder der Beobachtungen ist) ein System von μ Factoren x^0, y^0, z^0, etc. (deren Zahl gleich der Zahl der Bedingungsgleichungen ist) sucht, welches die Gröfse:

$$\begin{aligned} \frac{L'^2}{p'} + \frac{L''^2}{p''} + \frac{L'''^2}{p'''} = {} & \frac{(l' + a'x^0 + b'y^0 + c'z^0 + \ldots)^2}{p'} \\ & + \frac{(l'' + a''x^0 + b''y^0 + c''z^0 + \ldots)^2}{p''} \\ & + \frac{(l''' + a'''x^0 + b'''y^0 + c'''z^0 + \ldots)^2}{p'''} + \text{etc.} \end{aligned}$$

zu einem Minimum machen. Damit wird aber zugleich auch der vortheilhafteste Werth von u selbst bekannt werden. Denn da:

$$u = \psi(w', w'', w''' \ldots) = \varphi(w', w'', w''' \ldots),$$

so würde auch, wenn man das wahre System von Correctionen an die v', v'', v''' etc. anbrächte, etwa für $w' = v' + e'$ etc.:

$$\begin{aligned} u &= \psi(v', v'', v''' \ldots) + L'e' + L''e'' + L'''e''' \ldots\ldots \\ &= \varphi(v', v'', v''' \ldots) + l'e' + l''e'' + l'''e''' \ldots\ldots \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \psi(v', v'', v''' \ldots) = \varphi(v', v'', v''' \ldots) & + (l' - L')e' \\ & + (l'' - L'')e'' \\ & + (l''' - L''')e''', \end{aligned}$$

oder nach der Substitution aus (82):

$$\begin{aligned}\psi(v', v'', v''' \ldots) = \varphi(v', v'', v''' \ldots) &- (a'e' + a''e'' + a'''e''' \ldots)\, x^0 \\ &- (b'e' + b''e'' + b'''e''' \ldots)\, y^0 \\ &- (c'e' + c''e'' + c'''e''' \ldots)\, z^0 \\ &- \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

Zwar kennt man nicht die wahren Correctionen, aber welcher Art sie auch sein mögen, so werden immer doch bei ihnen die Bedingungsgleichungen:

$$X = 0 \qquad Y = 0 \qquad Z = 0$$

oder nach (65) die Gleichungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned}a'e' + a''e'' + a'''e''' \ldots\ldots + n' &= 0 \\ b'e' + b''e'' + b'''e''' \ldots\ldots + n'' &= 0 \\ c'e' + c''e'' + c'''e''' \ldots\ldots + n''' &= 0 \text{ etc.}\end{aligned}$$

Hierdurch wird aber der obige Werth:

$$\psi(v', v'', v''' \ldots) = \varphi(v', v'', v''' \ldots) + n'x^0 + n''y^0 + n'''z^0 + \ldots\ldots$$

folglich ganz bekannt, sobald x^0, y^0, z^0 etc. gefunden sind.

Diese Gröfsen x^0, y^0, z^0 etc. werden durch Gleichungen bestimmt, welche ganz die Form der Bedingungsgleichungen bei den Aufgaben der ersten Klasse haben. Man kann sie so schreiben:

$$\begin{aligned}\frac{l'}{\sqrt{p'}} + \frac{a'}{\sqrt{p'}} x^0 + \frac{b'}{\sqrt{p'}} y^0 + \frac{c'}{\sqrt{p'}} z^0 \ldots\ldots &= \frac{L'}{\sqrt{p'}} \\ \frac{l''}{\sqrt{p''}} + \frac{a''}{\sqrt{p''}} x^0 + \frac{b''}{\sqrt{p''}} y^0 + \frac{c''}{\sqrt{p''}} z^0 \ldots\ldots &= \frac{L''}{\sqrt{p''}} \\ \frac{l'''}{\sqrt{p'''}} + \frac{a'''}{\sqrt{p'''}} x^0 + \frac{b'''}{\sqrt{p'''}} y^0 + \frac{c'''}{\sqrt{p'''}} z^0 \ldots\ldots &= \frac{L'''}{\sqrt{p'''}} \text{ etc.}\end{aligned}$$

woraus sich die Bedingungsgleichungen für das Minimum der Summe der Quadrate $\frac{L'^2}{p'} + \frac{L''^2}{p''} + \frac{L'''^2}{p'''} + \ldots$ ergeben.

$$(83)\qquad \begin{aligned}\left[\frac{aa}{p}\right] x^0 + \left[\frac{ab}{p}\right] y^0 + \left[\frac{ac}{p}\right] z^0 \ldots\ldots + \left[\frac{al}{p}\right] &= 0 \\ \left[\frac{ab}{p}\right] x^0 + \left[\frac{bb}{p}\right] y^0 + \left[\frac{bc}{p}\right] z^0 \ldots\ldots + \left[\frac{bl}{p}\right] &= 0 \\ \left[\frac{ac}{p}\right] x^0 + \left[\frac{bc}{p}\right] y^0 + \left[\frac{cc}{p}\right] z^0 \ldots\ldots + \left[\frac{cl}{p}\right] &= 0 \\ \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}\end{aligned}$$

und dann nach der früheren Herleitung die Endgleichungen folgen:

$$\begin{array}{ll} & \left[\frac{aa}{p}\right]x^0+\left[\frac{ab}{p}\right]y^0 \;+\left[\frac{ac}{p}\right]z^0\ldots\ldots\ldots+\left[\frac{al}{p}\right] \;=0 \\ (84) & \qquad\qquad \left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]y^0+\left[\frac{bc}{p}\cdot 1\right]z^0\ldots\ldots+\left[\frac{bl}{p}\cdot 1\right]=0 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]z^0\ldots\ldots+\left[\frac{cl}{p}\cdot 2\right]=0 \text{ etc.} \end{array}$$

Hat man hieraus $x^0\ y^0\ z^0\ldots$ erhalten, so ist der genaueste Werth, oder der Werth, dessen wahrscheinlicher Fehler der kleinstmöglichste ist:

$$u=\varphi\,(v',v'',v'''\ldots)+n'x^0+n''y^0+n'''z^0\ldots\ldots$$

und der wahrscheinliche Fehler dieses Werthes selbst ist

$$\left[\frac{LL}{p}\right]\cdot r$$

$$(85)\quad =r\cdot\left\{\left[\frac{ll}{p}\right]-\frac{\left[\frac{al}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{\left[\frac{bl\cdot 1}{p}\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}-\frac{\left[\frac{cl\cdot 2}{p}\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}\ldots\ldots\right\}$$

wodurch alles vollkommen bestimmt gegeben ist.

Man kann jetzt untersuchen, in wie fern dieser Werth von u übereinstimmt oder abweicht von dem Werthe, den wir für u erhalten haben würden, falls wir statt der eigentlichen Beobachtungen $v'\ v''\ v'''\ldots$ die nach den obigen Vorschriften corrigirten Werthe $v'+x'$, $v''+x''$, $v'''+x'''$ angewandt hätten. In diesem Falle würden wir bei gleicher Rechnung erhalten haben:

$$\varphi\,(v',v'',v'''\ldots)+l'x'+l''x''+l'''x'''\ldots\ldots$$

weil $l'\ l''\ l'''$ die Differentialquotienten von φ in Bezug auf $v'\ v''\ v'''$ etc. sind. Multiplicirt man aber die letzten m Gleichungen von (79) respective mit $\frac{l'}{p'}$, $\frac{l''}{p''}$, $\frac{l'''}{p'''}$ etc. und addirt alle Producte, so erhält man:

$$l'x'+l''x''+l'''x'''=-\left[\frac{al}{p}\right]A-\left[\frac{bl}{p}\right]B-\left[\frac{cl}{p}\right]C\ldots \text{ etc.}$$

und wenn man aus (83) die Werthe von $\left[\frac{al}{p}\right]$, $\left[\frac{bl}{p}\right]$, $\left[\frac{cl}{p}\right]$.... substituirt, so wird:

$$\begin{aligned} l'x' + l''x'' + l'''x'''... = & \left\{\left[\frac{aa}{p}\right]A + \left[\frac{ab}{p}\right]B + \left[\frac{ac}{p}\right]C...\right\}x^0 \\ & + \left\{\left[\frac{ab}{p}\right]A + \left[\frac{bb}{p}\right]B + \left[\frac{bc}{p}\right]C...\right\}y^0 \\ & + \left\{\left[\frac{ac}{p}\right]A + \left[\frac{bc}{p}\right]B + \left[\frac{cc}{p}\right]C...\right\}z^0 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Hierfür aber geben die Gleichungen (80), vermöge des aus ihnen herzuleitenden Werthes der hier vorkommenden Coefficienten von x^0 y^0 z^0 etc. die Gleichung:

$$l'x' + l''x'' + l'''x'''..... = n'x^0 + n''y^0 + n'''z^0.....$$

Da nun der Werth von u, wie er am vortheilhaftesten aus den unmittelbaren Datis der Beobachtungen bestimmt werden kann

$$u = \varphi(v', v'', v'''...) + n'x^0 + n''y^0 + n'''z^0.....$$

und der Werth, wie er aus den nach der Methode der kleinsten Quadrate verbesserten einzelnen Werthen von v' v'' v''' etc. mit Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen, folglich auch so, dafs er auf allen möglichen Wegen identisch herauskommen mufs, bestimmt werden kann

$$u = \varphi(v', v'', v'''...) + l'x' + l''x'' + l'''x''' + ...$$

so ergiebt sich aus der Gleichheit der beiden Incremente, dafs die nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Rücksicht auf die Erfüllung der Bedingungsgleichungen corrigirten Beobachtungen für jede Gröfse des Systems, auf welches diese Bedingungsgleichungen sich erstrecken, welchen Weg man bei der Berechnung des numerischen Werthes auch einschlagen mag, stets genau denselben Werth finden lassen, den man aus den uncorrigirten Beobachtungen erhalten haben würde, wenn man die möglichst vortheilhafteste Combination angewandt hätte.

Zugleich mit diesem eleganten Resultate hat man auch noch durch die letzte Ableitung das Mittel, den wahrscheinlichen Fehler oder das Gewicht eines solchen Werthes, der zu dem System gehört, zu finden. Das Gewicht ist nämlich gleich $\frac{1}{\left[\frac{LL}{p}\right]}$, wo:

$$\left[\frac{LL}{p}\right]=\left[\frac{ll}{p}\right]-\frac{\left[\frac{al}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{\left[\frac{bl}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}-\frac{\left[\frac{cl}{p}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}-\text{etc.}$$

und dieser Werth wird gefunden, wenn man für irgend welche Function φ, vermittelst welcher man aus den verbesserten Werthen $v'+x'$, $v''+x''$, $v'''+x'''$ etc. die Gröfse u gefunden hat, die zugehörigen l' l'' l''' etc. numerisch berechnet und die Gleichungen (83) dann auflöst, oder was hier allein nöthig ist, das Minimum so bestimmt, als ob $\frac{l'}{\sqrt{p'}}$, $\frac{l''}{\sqrt{p''}}$, $\frac{l'''}{\sqrt{p'''}}$ etc. Fehler von wirklichen Beobachtungen wären, bei welchen x^0 y^0 z^0 etc. die Stelle der Elemente verträten.

Ueber

die Anwendung der Wahrscheinlichkeits-Rechnung auf Beobachtungen.

Die Abhandlungen über die Anwendung der Wahrscheinlichkeits-Rechnung auf Beobachtungen, welche in den Jahrgängen 1836—1838 des Berliner Jahrbuchs*) enthalten sind, schliefsen sich bei Begründung derselben keineswegs der Art an, wie man bei andern Aufgaben die Wahrscheinlichkeits-Rechnung erläutert. Bei allen andern Aufgaben bringt man gewöhnlich sie zurück auf ein Spiel mit Würfeln (den Begriff der Würfel im weitesten Sinne genommen, wonach sie nicht als gewöhnliche Würfel zu betrachten sind, sondern als Prismen von beliebig vielen Seitenflächen, bei denen auf irgend eine Weise vermieden ist, dafs sie auf die beiden Endflächen fallen können; man kann in diesem Sinne auch von zweiseitigen Würfeln sprechen, wie etwa gewöhnliche Münzen sein würden), oder auf die Ziehung verschiedenfarbiger Kugeln aus verschiedenen Gefäfsen. Bei der Anwendung auf Beobachtungen ist der a. a. O. befolgte Gang ein hievon ganz verschiedener und besonderer, so dafs eben dadurch auch die Betrachtung einigen Mifsverständnissen ausgesetzt gewesen ist. Gegründet ward sie dort, nach Gaufs' Methode in der Theoria motus, auf den Erfahrungssatz des Princips des arithmetischen Mittels, als des wahrscheinlichsten, und wenn auch versucht ward, die Gründe, auf welche dieses Princip, wenn man weiter zurückgeht, sich stützt, näher anzudeuten, so blieb doch

*) Diese Ausgabe, vorliegender Band II pag. 1—200.

immer eine willkürliche Annahme übrig, von der man als einem Axiom ausgehen mufste, wenn man den Beweis der Nothwendigkeit dieses Princips führen wollte.

Es giebt indessen eine schon seit langer Zeit publicirte Abhandlung des grofsen Lagrange (Mélanges de Philosophie et de Mathématique de la Société Royale de Turin, pour les Années 1770—1773; Miscellanea Taurinensia Tomus V. pag. 167), welche den Titel führt: *Mémoire sur l'utilité de la méthode, de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilités; et où l'on résoud différens problèmes relatifs à cette matière;* und in welcher sowohl die Anwendung auf Beobachtungen, ganz nach der Art wie sonst verfahren wird, gemacht ist, als auch ein Beweis für das arithmetische Mittel geführt wird, der zwar nur auf Induction beruht, aber sonst allem entspricht, was man in dieser Beziehung wünschen kann. Die Abhandlung mufs, als sie erschien, als eine sehr wichtige und einen Gegenstand, der etwas Neues und daher Fremdartiges an sich trägt, behandelnde erschienen sein, da der grofse Euler (Nova Acta Academiae Petropolitanae T. III. pag. 289) für nöthig befunden hat, Eclaircissements dazu zu geben, welche indessen nur die Berechnung der Wahrscheinlichkeit in dem einfachsten Falle erläutern. Sie scheint auch später wenig bekannt geworden zu sein, da ich sie nur einmal von Lacroix citirt gefunden habe. Ich werde mir deshalb erlauben, völlig dem Gange, den Lagrange genommen hat, folgend, — wie könnte man sich erdreisten, bei der ungemeinen Klarheit, Einfachheit und Tiefe des grofsen Meisters eine irgend bedeutende Aenderung vorzunehmen — den Theil der Abhandlung hier wiederzugeben, welcher den Beweis für das arithmetische Mittel enthält, und selbst Sätze, die im Grunde schon die Methode der kleinsten Quadrate in sich begreifen. Den letzten Theil der Abhandlung, der davon entferntere Betrachtungen enthält, werde ich nur dem Inhalte nach andeuten. Endlich werden sich an die Sätze von Lagrange verwandte Untersuchungen anknüpfen, welche vielleicht die Art, wie man die Anwendung der

Wahrscheinlichkeits-Rechnung auf Beobachtungen anzusehen hat, einigermaſsen erläutern können.

Der Theil des Inhaltes der Abhandlung von Lagrange, der hier ausführlich mitgetheilt werden soll, ist von ihm in sechs Probleme, mit beigefügten Bemerkungen (Remarques), Scholien und Corollarien abgetheilt.

Problem I.

§ 1. Vorausgesetzt, man könne sich bei jeder Beobachtung um eine Einheit sowohl in plus als in minus irren, es sei aber das Verhältniſs der Anzahl der Fälle, in denen man ein genaues Resultat erhält, zur Anzahl derer, welche einen Fehler von einer Einheit geben, wie $a:2b$, so verlangt man die Wahrscheinlichkeit zu wissen, daſs das arithmetische Mittel aus n Beobachtungen ein genaues Resultat geben soll.

Da es a Fälle giebt, wo der Fehler Null, b, wo er $+1$, und b, wo er -1 ist, so wird, nach den gewöhnlichen Regeln der Wahrscheinlichkeit, die Wahrscheinlichkeit, daſs eine Beobachtung ein genaues Resultat giebt gleich, $\frac{a}{a+2b}$. Die vorgelegte Frage wegen des Mittels aus n Beobachtungen läſst sich so fassen: Es seien n Würfel (das Wort Würfel in dem oben angedeuteten Sinne genommen), von denen jeder a Seiten hat, die mit Null bezeichnet sind, b die mit $+1$ und b die mit -1, so daſs die Anzahl der Seitenflächen $a+2b$ ist; man suche die Wahrscheinlichkeit mit n solchen Würfeln Null (als das Resultat aller oben stehenden Zahlen) zu werfen. Man weiſs aber nach der Lehre der Combinationen, daſs wenn man $a+b(x+x^{-1})$ auf die Potenz n erhebt, der Coefficient des von x freien Gliedes die Anzahl der Fälle bezeichnen wird, in welchen die Summe aller geworfenen Augen Null ist. Nennt man ihn A, so wird, da die Anzahl aller Fälle $(a+2b)^n$ ist, die gesuchte Wahrscheinlichkeit $=\frac{A}{(a+2b)^n}$.

Man kann A auf einem doppelten Wege finden. Zuerst entwickele man

$$(a+b\,(x+x^{-1}))^n = a^n + n a^{n-1}\,b\,(x+x^{-1}) \\ + \frac{n\,(n-1)}{1 \quad 2}\, a^{n-2}\,b^2\,(x+x^{-1})^2 + \ldots$$

Die ungeraden Potenzen von $(x+x^{-1})$ werden kein von x freies Glied enthalten. Für die geraden wird das von x freie Glied sein bei:

$$(x+x^{-1})^2 \ldots . \, 2, \quad (x+x^{-1})^4 \ldots . \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}, \quad (x+x^{-1})^6 \ldots . \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}$$

Hieraus folgt

$$A = a^n + 2\cdot\frac{n\,(n-1)}{1 \quad 2}\, a^{n-2}\,b^2 + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4}\, a^{n-4}\,b^4 \\ + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6}\, a^{n-6}\,b^6 \text{ etc.}$$

oder

$$(1) \quad \begin{aligned} A &= a^n + n\,(n-1)\,a^{n-2}\,b^2 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1 \quad 2 \quad 1 \quad 2}\, a^{n-4}\,b^4 \\ &+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{1 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 3}\, a^{n-6}\,b^6 + \ldots \end{aligned}$$

Man kann auch zweitens setzen:

$$a + b\,(x+x^{-1}) = (\alpha + \beta x)\,(\alpha + \beta x^{-1}),$$

woraus

$$\alpha = \frac{\sqrt{(a+2b)} + \sqrt{(a-2b)}}{2}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{(a+2b)} - \sqrt{(a-2b)}}{2}$$

und dann wegen

$$(a+b\,(x+x^{-1}))^n = (\alpha+\beta x)^n\,(\alpha+\beta x^{-1})^n$$

$$= \left(\alpha^n + n\alpha^{n-1}\beta x + \frac{n\,(n-1)}{1 \quad 2}\,\alpha^{-n2}\,\beta^2\,x^2 + \ldots\right)$$

$$\times \left(\alpha^n + n\alpha^{n-1}\,\beta x^{-1} + \frac{n\,(n-1)}{1 \quad 2}\,\alpha^{n-2}\beta^2\,x^{-2} + \ldots\right)$$

woraus fast unmittelbar hervorgeht, dafs

$$(2) \qquad A = \alpha^{2n} + (n\alpha^{n-1}\,\beta)^2 + \left(\frac{n\,(n-1)}{1 \quad 2}\,\alpha^{n-2}\beta^2\right)^2 + \ldots$$

Hieraus folgen mehrere Corollarien und Bemerkungen.

§ 2. Wenn $a=b$, so ist für eine einzelne Beobachtung die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ und nach (1) für

$n=1$	die Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{3}$
$=2$	"	$\frac{1}{9}$
$=3$	"	$\frac{7}{27}$
$=4$	"	$\frac{19}{81}$
$=5$	"	$\frac{51}{243}$
$=6$	"	$\frac{141}{729}$

oder die Wahrscheinlichkeit nimmt ab, je gröſser n wird.

§ 3. Sei $a=2b$, so wird das obige $\alpha=\sqrt{b}$ und $\beta=\sqrt{b}$, sowie $a+2b=4b$, und man hat nach (2):

$$\frac{A}{(a+2b)^n}=\frac{1}{4^n}\left\{1+n^2+\left(\frac{n(n-1)}{1\quad 2}\right)^2+\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{1\quad 2\quad 3}\right)^2+\ldots\right\}$$

oder für	$n=1$	die Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{2}$
	$=2$	"	$\frac{3}{8}$
	$=3$	"	$\frac{5}{16}$
	$=4$	"	$\frac{35}{128}$

Die Wahrscheinlichkeit nimmt auch hier ab, je gröſser n wird.

§ 4. Ebendasselbe findet statt, wenn $b=2a$, nur daſs hier im Anfang die Reihenfolge der Zahlen für $n=1$, 2, 3, wird $\frac{1}{5}$, $\frac{9}{25}$, $\frac{1}{5}$, also für $n=2$ die Wahrscheinlichkeit am gröſsten wird. Nachher nimmt sie immer ab.

§ 5. Es wird gut sein, um die Auflösung des gegebenen Problems zu erleichtern, das Gesetz zu suchen, welches die Glieder der Reihe befolgen, für die Wahrscheinlichkeit bei 1, 2, 3 etc. Beobachtungen. Wenn man den Bruch

$$\frac{1}{1-z(a+b(x+x^{-1}))}$$

nach Potenzen von z entwickelt, so wird man erhalten

$$1+z(a+b(x+x^{-1}))+z^2(a+b(x+x^{-1}))^2+z^3(a+b(x+x^{-1}))^3+\ldots$$

so daſs in dieser Reihe der Coefficient von z^n die $n$te Potenz von

$a+b(x+x^{-1})$ ist. Nennt man also A' A'' A''' die Werthe von A, welche den Werthen $n=1, 2, 3$ entsprechen, nämlich die Glieder ohne x in den Potenzen von $a+b(x+x^{-1})$, so wird offenbar die Reihe $1+A'z+A''z^2+A'''z^3+\ldots$ der Summe der Glieder ohne x, in der Entwickelung des obigen Bruches nach Potenzen von x und x^{-1} gleich sein. Bezeichnet man diese Entwickelung durch

$$Z+Z'(x+x^{-1})+Z''(x^2+x^{-2})+\ldots$$

da sie nothwendig diese Form haben mufs, so wird folglich

$$Z=1+A'z+A''z^2+A'''z^3+\ldots$$

Man braucht also nur den Werth von Z in eine Reihe nach Poten von z zu entwickeln, um die sämmtlichen Werthe A' A'' A''' etc. zu erhalten.

Zu dem Ende setze man

$$1-az-bz(x+x^{-1})=(p-qx)(p-qx^{-1})$$

woraus $p^2+q^2=1-az$, $pq=bz$. Ferner setze man

$$\frac{1}{(p-qx)(p-qx^{-1})}=\alpha+\frac{\beta}{p-qx}+\frac{\beta}{p-qx^{-1}}$$

woraus $$\alpha=\frac{1}{q^2-p^2},\quad \beta=\frac{p}{p^2-q^2}$$

und da nun $$\frac{1}{p-qx}=\frac{1}{p}+\frac{q}{p^2}x+\frac{q^2}{p^3}x^2+\ldots$$

$$\frac{1}{p-qx^{-1}}=\frac{1}{p}+\frac{q}{p^2}x^{-1}+\frac{q^2}{p^3}x^{-2}+\ldots$$

so wird $$Z=\alpha+\frac{2\beta}{p},\quad Z'=\frac{\beta q}{p^2},\quad Z''=\frac{\beta q^2}{p^3}\ldots$$

oder es ist $$Z=\frac{1}{q^2-p^2}+\frac{2}{p^2-q^2}=\frac{1}{p^2-q^2}=\frac{1}{(p+q)(p-q)}$$

Nun aber folgt aus

$$p^2+q^2=1-az,\qquad pq=bz$$
$$p+q=\sqrt{(1-az+2bz)},\quad p-q=\sqrt{(1-az-2bz)}$$

und daher $$Z=\frac{1}{\sqrt{(1-2az+(a^2-4b^2)z^2)}}$$

Wenn also $Z = 1 + A'z + A''z^2 + A'''z^3 + \ldots$ sein soll, so erhält man zur Bestimmung von A', A'', A''' etc.*)

$$A' = a$$

$$A'' = \frac{3aA' + 4b^2 - a^2}{2}$$

$$A''' = \frac{5aA'' + 2(4b^2 - a^2)A'}{3}$$

$$A^{IV} = \frac{7aA''' + 3(4b^2 - a^2)A''}{4} \text{ etc.}$$

Bezeichnet man mit P', P'', $P'''\ldots$ die Wahrscheinlichkeiten, dafs bei 1, 2, 3 Beobachtungen der Fehler des Mittels Null sein wird, oder nimmt man

$$P' = \frac{A'}{a + 2b}, \quad P'' = \frac{A''}{(a + 2b)^2}, \quad P''' = \frac{A'''}{(a + 2b)^3},$$

und setzt zur Abkürzung $\frac{2b}{a} = r$, so wird

$$P' = \frac{1}{1 + r}$$

$$P'' = \frac{3P' + r - 1}{2(1 + r)}$$

$$P''' = \frac{5P'' + 2(r - 1)P'}{3(1 + r)}$$

$$P^{IV} = \frac{7P''' + 3(r - 1)P''}{4(1 + r)} \text{ etc.}$$

§ 6. Wäre $r = 1$ oder $a = 2b$, der Fall von § 3, so würde

$$P' = \frac{1}{2}, \quad P'' = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \quad P''' = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \text{ und sonach}$$

$$P^{(n)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots \ldots 2n}$$

*) Man differentiire beide Formen von Z logarithmisch, multiplicire mit den Nennern der erhaltenen Brüche über Kreuz, und setze die Coefficienten derselben Potenzen von z auf beiden Seiten einander gleich, so erhält man diese Relationen.

Mit wachsendem n nimmt folglich die Wahrscheinlichkeit immer ab, wie oben bemerkt ward, und da nach dem Ausdrucke für die Quadratur des Kreises von Wallis:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \ldots}$$

oder für $\lim n = \infty$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \ldots 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1)(2n+1)}$$

so wird $$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)} = \sqrt{\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)}$$

für $\lim n = \infty$, oder $$P^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} = 0$$

§ 7. Nach den Formeln in § 5 hat man

$$P^{(n)} = \frac{(2n-1)P^{(n-1)} + (n-1)(r-1)P^{(n-2)}}{n(r+1)}$$

$$P^{(n+1)} = \frac{(2n+1)P^{(n)} + n(r-1)P^{(n-1)}}{(n+1)(r+1)}$$

$$P^{(n+2)} = \frac{(2n+3)P^{(n+1)} + (n+1)(r-1)P^{(n)}}{(n+2)(r+1)}$$

Wenn n hinlänglich grofs ist, so werden diese Werthe nahe*)

---

*) Lagrange hat durch einen kleinen Irrthum

$$P^{(n)} = \frac{P^{(n-1)} + (r-1)P^{(n-2)}}{r+1}$$

und eben so bei $P^{(n+1)}$. Auch wird der Ausspruch, dafs die P eine recurrirende Reihe von der im Texte angegebenen Form bilden, mit Vorsicht anzuwenden sein. Es ist nämlich

$$P^{(n)} = \frac{2P^{(n-1)} + (r-1)P^{(n-2)}}{r+1} - \frac{P^{(n-1)} + (r-1)P^{(n-2)}}{n(r+1)}$$

wo das erste Glied die angegebene Form hat, das letzte aber immer den Werth von $P^{(n)}$ verringert, wie es auch die Natur der Sache mitbringt. Nur für $\lim n = \infty$ wird es ganz unmerklich sein, weil dann $P^{(n)} = 0$. Bei jedem hinlänglich grofsen n wird man es nicht vernachlässigen können, weil sonst vor dem Werthe 0 eine Grenze erreicht werden würde, ja selbst für $r > 1$ die P wieder wachsen könnten, da hiernach

$$P^{(n)} = P^{(n-1)} + \frac{r-1}{r+1}\left\{P^{(n-2)} - P^{(n-1)}\right\}$$

$$P^{(n)} \quad = \frac{2P^{(n-1)} + (r-1)\,P^{(n-2)}}{r+1}$$

$$P^{(n+1)} = \frac{2P^{(n)} + (r-1\,P^{(n-1)}}{r+1}$$

Es bilden folglich die P eine recurrirende Reihe, deren Beziehungsscale $\frac{2}{r+1}$, $+\frac{r-1}{r+1}$ ist, oder welche aus dem Bruche

$$\frac{1}{1-\frac{2}{r+1}x-\frac{r-1}{r+1}x^2}$$

entsteht, wenn man ihn nach Potenzen von x entwickelt, wobei $P^{(n)}$ der Coefficient von x^n ist.

§ 8. Scholium. Wenn ϱ das Resultat ist, welches jede Beobachtung geben sollte, wenn sie genau wäre, so wird nach der Hypothese, daſs man sich um -1 oder $+1$ irren kann, für jede Beobachtung eines der drei Resultate stattfinden können, ϱ, $\varrho-1$, $\varrho+1$; nimmt man also bei zwei Beobachtungen das Mittel, so wird man eines der fünf Resultate erhalten, ϱ, $\frac{2\varrho-1}{2}$, $\frac{2\varrho+1}{2}$, $\frac{2\varrho-2}{2}$, $\frac{2\varrho+2}{2}$, oder ϱ, $\varrho-\frac{1}{2}$, $\varrho+\frac{1}{2}$, $\varrho-1$, $\varrho+1$. Der Fehler kann also in diesem Falle entweder $\pm\frac{1}{2}$, oder ± 1 sein. Bei dreien wird er auf dieselbe Weise $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$, ± 1 sein können u. s. w. Obgleich deshalb die Wahrscheinlichkeit, daſs der Fehler Null ist, bei dem Mittel aus mehreren Beobachtungen kleiner sein kann, als bei einer einzelnen, so wird doch, wenn man die Wahrscheinlichkeit sucht, daſs der Fehler nicht $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ überschreiten wird, diese in dem ersten Falle gröſser sein als in dem zweiten. Bei dem zweiten Fall einer einzelnen Beobachtung hat man keine andern günstigen Fälle, als wo der Fehler absolut Null ist; bei mehreren Beobachtungen, und dem Mittel daraus, aber auch solche, bei welchen der Fehler $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ etc. ist. Aus dieser Rücksicht ist es immer vortheilhafter, das Mittel aus mehreren Beobachtungen zu nehmen, als bei einer einzelnen Beobachtung stehen zu bleiben.

Problem II.

§ 9. Man soll unter denselben Voraussetzungen, wie bei dem ersten Problem, die Wahrscheinlichkeit finden, dafs bei dem Mittel aus n Beobachtungen der Fehler nicht $\frac{m}{n}$ überschreite, wo $m < n$ ist.

Bei dem Mittel aus n Beobachtungen kann offenbar der Fehler entweder Null, oder $\pm\frac{1}{n}$, $\pm\frac{2}{n}$ bis zu $\pm\frac{n}{n} = \pm 1$ sein. Die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler nicht gröfser als $\pm\frac{m}{n}$ sei, wird also die Summe der Wahrscheinlichkeiten von Null, $\pm\frac{1}{n}$, $\pm\frac{2}{n} \dots$ bis $\pm\frac{m}{n}$ sein. Zuerst suche man die Wahrscheinlichkeit des Fehlers $\pm\frac{\mu}{n}$.

Führt man diese Frage auf die Würfel zurück, wie im Problem I., so sieht man, dafs es darauf ankommt, die Wahrscheinlichkeit zu finden, mit n Würfeln $+\mu$ oder $-\mu$ Augen zu werfen, wenn jeder Würfel a Seiten hat, die mit Null, b Seiten, die mit $+1$, und b Seiten, die mit -1 bezeichnet sind. Man hat dazu nur nöthig, das Trinomium $a + b(x + x^{-1})$ zur $n$ten Potenz zu erheben. Der Coefficient von x^{μ} wird dann die Anzahl der Fälle andeuten, wo die Summe aller Augen μ ist, so wie der von $x^{-\mu}$ die Anzahl der Fälle, wo die Summe aller Augen $-\mu$ ist. Die Summe beider Coefficienten, dividirt durch $(a+b)^n$, wird die verlangte Wahrscheinlichkeit geben.

Nun ist

$$(a + b(x + x^{-1}))^n = a^n + na^{n-1}b(x + x^{-1}) + \frac{n(n-1)}{1 \quad 2} a^{n-2} b^2 (x^2 + x^{-1})^2 + \dots .$$

und dabei

$$(x + x^{-1})^2 = x^2 + x^{-2} + 2$$

$$(x + x^{-1})^3 = x^3 + x^{-3} + 3(x + x^{-1})$$

$$(x + x^{-1})^4 = x^4 + x^{-4} + 4(x^2 + x^{-2}) + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}$$

$$(x + x^{-1})^5 = x^5 + x^{-5} + 5(x^3 + x^{-3}) + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}(x + x^{-1})$$

und ähnlich für die andern Potenzen. Wenn man also annimmt

$$(a+b\,(x+x^{-1}))^n = A + B\,(x+x^{-1}) + C\,(x^2+x^{-2}) + D\,(x^3+x^{-3}) + \ldots$$

so hat man

$$A = a^n + 2\,\frac{n\,(n-1)}{1\quad 2}\,a^{n-2}\,b^2 + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\quad 2\quad 3\quad 4}\,a^{n-4}\,b^4$$
$$+ \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6}\,a^{n-6}\,b^6 + \ldots$$

$$B = n a^{n-1}\,b + 3\,\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\quad 2\quad 3}\,a^{n-3}\,b^3$$
$$+ \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5}\,a^{n-5}\,b^5$$
$$+ \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)\,(n-6)}{1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7}\,a^{n-6}\,b^6 + \ldots$$

$$C = \frac{n\,(n-1)}{1\quad 2}\,a^{n-2}\,b^2 + 4\,\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\quad 2\quad 3\quad 4}\,a^{n-4}\,b^4$$
$$+ \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6}\,a^{n-6}\,b^6$$
$$+ \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots(n-7)}{1\quad 2\quad 3\ldots\ldots\ldots\ldots 8}\,a^{n-8}\,b^8 + \ldots$$

und ähnlich für die folgenden Coefficienten. Bezeichnet man mit M den Coefficienten von x^μ, so wird M der $(\mu+1)$te Coefficient in der hier angefangenen Reihe der Coefficienten sein, und sein Werth wird erhalten durch

$$M = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-\mu+1)}{1\quad 2\quad 3\qquad\quad \mu}\,a^{n-\mu}\,b^\mu$$
$$+ \frac{\mu+2}{1}\cdot\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-\mu-1)}{1\quad 2\quad 3\qquad (\mu+2)}\,a^{n-\mu-2}\,b^{\mu+2}$$
$$+ \frac{(\mu+4)\,(\mu+3)}{1\qquad 2}\cdot\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-\mu-3)}{1\quad 2\quad 3\qquad (\mu+4)}\,a^{n-\mu-4}\,b^{\mu+4}\ldots$$

Dieser Coefficient wird auch zu $x^{-\mu}$ gehören, so dafs die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler $\pm\frac{\mu}{n}$ sei, gleich sein wird

$$= \frac{2M}{(a+2b)^n}$$

Folglich wird die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler $\pm\frac{\mu}{n}$ nicht überschreite, ausgedrückt werden durch die Reihe

$$\frac{A+2B+2C+2D\ldots\ldots+2M}{(a+2b)^n}$$

Um die Ermittelung der Werthe von A, B, C, etc. zu erleichtern, wird es gut sein, zu untersuchen, wie sie einer von dem andern abhängen; hiezu nehme man die Gleichung wieder vor

$$(a+b\,(x+x^{-1}))^n = A + B\,(x+x^{-1}) + C\,(x^2+x^{-2}) + D\,(x^3+x^{-3}) + \ldots$$

Durch logarithmische Differentiation der beiden Seiten dieser Gleichung wird erhalten:

$$\frac{nb\,(x-x^{-1})}{a+b\,(x+x^{-1})} = \frac{B\,(x-x^{-1})+2C\,(x^2-x^{-2})+3D\,(x^3-x^{-3})\ldots}{A+B\,(x+x^{-1})+C\,(x^2+x^{-2})+D\,(x^3+x^{-3})\ldots.}$$

Multiplicirt man über das Kreuz, so kommt heraus

$$\begin{aligned} nbA\,(x-x^{-1}) + nbB\,(x^2-x^{-2}) + nbC\,(x^3-x^{-3}-x+x^{-1}) \\ + nbD\,(x^4-x^{-4}-x^2+x^{-2}) + \ldots = \\ aB\,(x-x^{-1}) + 2aC\,(x^2-x^{-2}) + 3aD\,(x^3-x^{-3}) \\ + bB\,(x^2-x^{-2}) + 2bC\,(x^3-x^{-3}+x-x^{-1}) \\ + 3bD\,(x^4-x^{-4}+x^2-x^{-2}) + \ldots \end{aligned}$$

so dafs, wenn man die Coefficienten der gleichen Potenzen auf beiden Seiten zusammenstellt, man erhält:

$$\begin{aligned} nb\,(A-C) &= aB + 2bC \\ nb\,(B-D) &= 2aC + b\,(B+3D) \\ nb\,(C-E) &= 3aD + b\,(2C+4E)\ldots \end{aligned}$$

u. s. w. Setzt man also der Einfachheit wegen $\frac{a}{b}=k$, so wird

$$C = \frac{nA-kB}{n+2}$$

$$D = \frac{(n-1)\,B-2kC}{n+3}$$

$$E = \frac{(n-2)\,C-3kD}{n+4}$$

u. s. w., so dafs, wenn man A und B kennt, man alle andern Werthe berechnen kann.

§ 10. Man nehme wie in § 2 $a = b$, so dafs $k = 1$ wird, und mache nach einander $n = 1, 2, 3$, so wie $a = 1$, was erlaubt ist. Man wird dann folgende Werthe erhalten:

n	A	B	C	D	E	F	G
1	1	1	0	0	0	0	0
2	3	2	1	0	0	0	0
3	7	6	3	1	0	0	0
4	19	16	10	4	1	0	0
5	51	45	30	15	5	1	0
6	141	126	90	50	21	6	1

woraus sich folgende Tabelle für die Wahrscheinlichkeiten ergiebt:

Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler nicht überschreitet

n	$\pm\frac{0}{n}$	$\pm\frac{1}{n}$	$\pm\frac{2}{n}$	$\pm\frac{3}{n}$	$\pm\frac{4}{n}$	$\pm\frac{5}{n}$
1	$\frac{1}{3}$					
2	$\frac{3}{9}$	$\frac{7}{9}$				
3	$\frac{7}{27}$	$\frac{19}{27}$	$\frac{25}{27}$			
4	$\frac{19}{81}$	$\frac{51}{81}$	$\frac{71}{81}$	$\frac{79}{81}$		
5	$\frac{51}{243}$	$\frac{141}{243}$	$\frac{201}{243}$	$\frac{231}{243}$	$\frac{241}{243}$	
6	$\frac{141}{729}$	$\frac{393}{729}$	$\frac{573}{729}$	$\frac{673}{729}$	$\frac{715}{729}$	$\frac{727}{729}$

Man sieht aus dieser Tabelle, dafs, wenn man das Mittel aus zwei Beobachtungen nimmt, die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler Null sei, $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ist, und die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler nicht gröfser sei als $\pm\frac{1}{2}$, gleich $\frac{7}{9}$ ist; nun ist in jeder einzelnen Beobachtung die Wahrscheinlichkeit des Fehlers Null gleich $\frac{1}{3}$, und da nach der Hypothese der Fehler nur Null oder ± 1 sein kann, so ist es offenbar, dafs die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler nicht gröfser als $\frac{1}{2}$ sei, auch $\frac{1}{3}$ sein wird; obgleich deshalb die Wahrscheinlichkeit des Fehlers Null dieselbe ist, man mag nun das Mittel aus zwei Beobachtungen nehmen, oder nur das Resultat einer einzelnen gelten lassen, so ist doch die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler nicht gröfser sei als $\frac{1}{2}$, in dem ersten Falle gröfser wie in dem zweiten, und zwar im Verhältnisse von $\frac{7}{9} : \frac{1}{3}$ oder von $7:3$.

Bei dem Mittel aus drei Beobachtungen hat man auf gleiche Weise die Wahrscheinlichkeit $\frac{7}{27}$ für den Fehler Null, und $\frac{19}{27}$ für einen Fehler, der nicht gröfser als $\pm \frac{1}{3}$ ist, so wie $\frac{25}{27}$ dafür, dafs der Fehler nicht gröfser als $\pm \frac{2}{3}$ sei. In einer einzelnen Beobachtung ist die Wahrscheinlichkeit des Fehlers Null gleich $\frac{1}{3}$, und nach der Hypothese, dafs die Fehler nur Null und ± 1 sein können, die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler nicht $\pm \frac{1}{3}$ oder $\pm \frac{2}{3}$ überschreite, ebenfalls $\frac{1}{3}$. Es wird deshalb allerdings die Wahrscheinlichkeit des Fehlers Null in dem Falle einer einzelnen Beobachtung gröfser als bei dem Mittel aus dreien, und zwar in dem Verhältnifs von $9:7$, aber dagegen diejenige, dafs der Fehler nicht $\pm \frac{1}{3}$ überschreite, in dem zweiten Falle gröfser als in dem ersten, und zwar in dem Verhältnisse von $19:9$, sowie dieses Verhältnifs bei der Grenze $\pm \frac{2}{3}$ für die Gröfse des Fehlers noch stärker wird, nämlich wie $25:9$.

Hierin besteht der Hauptvortheil, den man bei dem Mittel aus mehreren Beobachtungen erreicht. Um diesen Vortheil noch sichtbarer zu machen, wollen wir die Wahrscheinlichkeit aufsuchen, dafs der Fehler nicht $\pm \frac{1}{2}$ überschreite, indem wir nach und nach $n = 1, 2, 3$ etc. setzen, oder für eine, zwei, drei Beobachtungen. Wir erhalten:

$$n = \quad 1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4 \qquad 5 \qquad 6 \ldots\ldots$$

$$\text{Wahrsch.} = \frac{1}{3} \quad \frac{7}{9} \quad \frac{19}{27} \quad \frac{71}{81} \quad \frac{201}{243} \quad \frac{673}{729} \ldots\ldots$$

oder wenn man einerlei Nenner einführt:

$$\text{Wahrsch.} = \frac{243}{729} \quad \frac{567}{729} \quad \frac{513}{729} \quad \frac{639}{729} \quad \frac{603}{729} \quad \frac{673}{729} \cdots$$

Man sieht hieraus, dafs die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler, der nicht $\pm \frac{1}{2}$ überschreitet, immer gröfser wird, je gröfser die Anzahl der Beobachtungen ist, deren Mittel man nimmt, doch mit dem Unterschiede, dafs die Wahrscheinlichkeit für zwei Beobachtungen gröfser ist wie für drei, für 4 gröfser wie für 5, und überhaupt für jede gerade Zahl gröfser wie für die folgende ungerade. In der hier angenommenen Hypothese wird es deshalb vortheilhafter sein, das Mittel nur aus einer geraden Anzahl von Beobachtungen zu nehmen.

§ 11. In § 5 ist gezeigt, dafs, wenn man den Bruch

$$\frac{1}{1 - z(a + b(x + x^{-1}))}$$

in eine Reihe $Z + Z'(x + x^{-1}) + Z''(x^2 + x^{-2}) + \ldots\ldots$ entwickelt, wo Z, Z', Z'' Functionen von z sind, man haben wird

$$Z = \frac{1}{p^2 - q^2}, \quad Z' = \frac{\beta q}{p^2} = \frac{q}{p} Z, \quad Z'' = \frac{\beta q^2}{p^3} = \frac{q}{p} Z' \text{ etc.,}$$

wo $p^2 + q^2 = 1 - az$ und $pq = bz$, woraus folgt

$$p^2 - q^2 = \sqrt{(1 - 2az + (a^2 - 4b^2) z^2)}$$

und

$$\frac{q}{p} = \frac{1 - az - \sqrt{(1 - 2az + (a^2 - 4b^2) z^2)}}{2bz}.$$

Setzt man also der Kürze halber

$$\zeta = \sqrt{(1 - 2az + (a^2 - 4b^2) z^2)},$$

so hat man

$$Z = \frac{1}{\zeta}$$

$$Z' = \frac{1 - az - \zeta}{2bz} \cdot \frac{1}{\zeta}$$

$$Z'' = \left(\frac{1 - az - \zeta}{2bz}\right)^2 \cdot \frac{1}{\zeta} \text{ und allgemein}$$

$$Z^{(\mu)} = \left(\frac{1 - az - \zeta}{2bz}\right)^\mu \cdot \frac{1}{\zeta}.$$

Entwickelt man diese Gröfse in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von z, so sieht man nach dem, was oben auseinandergesetzt ist, leicht, dafs der Coefficient irgend einer Potenz wie z^n die Anzahl der Fälle ausdrücken wird, in welchen die Summe der Fehler von n Beobachtungen entweder $-\mu$ oder $+\mu$ sein wird, so dafs das zweifache dieses Coefficienten die Anzahl aller Fälle bezeichnen wird, in welchen der Fehler des Mittels $\pm\frac{\mu}{n}$ ist. Hieraus schliefst man sogleich, dafs die Gröfse

$$\left\{1+2\frac{1-az-\zeta}{2bz}+2\left(\frac{1-az-\zeta}{2bz}\right)^2+\ldots+2\left(\frac{1-az-\zeta}{2bz}\right)^\mu\right\}\cdot\frac{1}{\zeta}$$

wenn man sie als eine Function von z betrachtet und nach Potenzen dieser Variabeln entwickelt, eine Reihe geben wird, in welcher der Coefficient irgend einer Potenz von $z \ldots z^n$ genau die Anzahl der Fälle ausdrücken wird, in welchen der Fehler zwischen den Grenzen $-\frac{\mu}{n}$ und $+\frac{\mu}{n}$ eingeschlossen ist. Nun aber ist diese Gröfse nichts anderes als eine geometrische Reihe, und kann deshalb einfacher ausgedrückt werden durch

$$\left\{2\,\frac{1-\left(\frac{1-az-\zeta}{2bz}\right)^{\mu+1}}{1-\left(\frac{1-az-\zeta}{2bz}\right)}-1\right\}\frac{1}{\zeta}$$

Die ganze Schwierigkeit wird deshalb darin bestehen, diesen Ausdruck in eine unendliche Reihe nach Potenzen von z zu entwickeln. Um dieses leichter ausführen zu können, setze man ihn gleich einer unbestimmten Gröfse y; man wird dann eine Gleichung zwischen y und z haben, welche sich durch Differentiationen sowohl von der Potenz $\mu+1$, als von der Irrationalität von z befreien läfst. Auf diese Weise wird man eine Differentialgleichung zweiten Grades zwischen y und z erhalten, und braucht dann nur anzunehmen

$$y = 1 + Az + Bz^2 + \ldots . \text{ etc.},$$

um die Coefficienten A, B etc. durch Vergleichung der Coefficienten der Glieder von derselben Ordnung zu bestimmen.

Die hier angezeigte Rechnung ist etwas lang, weshalb sie Dem überlassen bleiben möge, der diesen Weg weiter verfolgen will.

§ 12. Scholium. In den beiden vorhergehenden Problemen haben wir angenommen, die Anzahl der Fälle sei für positive und negative Fehler dieselbe. Wäre das nicht der Fall und wäre die Anzahl der Fälle, welche einen Fehler Null, $+1$ und -1 geben, resp. gleich a, b, c, so könnte man das Problem mit derselben Leichtigkeit lösen, wenn man statt des Trinoms $a+bx+bx^{-1}$ das Trinom $a+bx+cx^{-1}$ betrachtete, um die Anzahl der Fälle zu erhalten, in welchen man einen gegebenen Fehler des Mittels erhielte, wobei man dann $(a+b+c)^n$ statt $(a+2b)^n$ als die Anzahl aller Fälle zu setzen hätte. Man könnte selbst die frühern Formeln ganz auf diesen neuen Fall anwenden. Denn wenn man in das Trinom $a+bx+cx^{-1}$ für x die Gröfse $x\sqrt{\frac{b}{c}}$ setzt, so wird es $a+\sqrt{bc}\cdot(x+x^{-1})$. Man hätte also nur in dem Trinom $a+b(x+x^{-1})$, $\sqrt{bc}$ zu setzen statt b, und $x\sqrt{\frac{b}{c}}$ statt x. Allgemeiner wird aber die Aufgabe in dem folgenden Probleme behandelt werden.

Problem III.

§ 13. Angenommen, es sei jede Beobachtung einem negativen Fehler -1, und einem positiven Fehler $+r$ unterworfen, und es sei die Anzahl der Fälle, welche die Fehler Null, -1, und $+r$ geben, respective a, b, c, so verlangt man die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler des Mittels bei mehreren Beobachtungen in bestimmte Grenzen eingeschlossen ist.

Es sei n die Anzahl der Beobachtungen, aus denen man das Mittel nehmen will, man bilde die $n$te Potenz des Trinomiums $(a+bx^{-1}+cx^r)$; es wird dann der Coefficient irgend einer Potenz x^μ die Anzahl der Fälle ausdrücken, in welchen die Summe der Fehler μ ist, und folglich der Fehler des Mittels $\frac{\mu}{n}$. Man betrachte demzufolge die Gröfse $(a+bx^{-1}+cx^r)^n$, welche sich reducirt auf $\frac{(b+x(a+cx^r))^n}{x^n}$. Da nun

$$(b+x(a+cx^r))^n = b^n + nb^{n-1}x(a+cx^r) + \frac{n(n-1)}{1\quad 2} b^{n-2}x^2(a+cx^r)^2 + \text{etc.}$$

so ist es leicht zu übersehen, dafs der Coefficient irgend einer Potenz x^s sein wird:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)}{1\quad 2\quad 3\ldots\ldots\ldots s} b^{n-s}a^s$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-s+r+1)}{1\quad 2\quad 3\ldots\ldots\ldots(s-r)}\cdot\frac{s-r}{1} b^{n-s+r}a^{s-r}c$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+2r+1)}{1\quad 2\quad 3\ldots\ldots.(s-2r)}\cdot\frac{(s-2r)(s-2r-1)}{1\quad 2} b^{n-s+2r}a^{s-2r}c^2\ldots$$

welche Reihe so weit fortgesetzt wird, bis man auf negative Glieder kommt. Es wird deshalb dieser Coefficient zu x^{s-n} gehören in dem Ausdrucke $(a+bx^{-1}+cx^r)^n$. Bezeichnet man also allgemein durch (μ) den Coefficienten von x^μ in dieser letzten Gröfse, so hat man

$$(\mu) = \frac{n(n-1)\ldots(1-\mu)}{1\quad 2\ldots\ldots(\mu+n)} b^{-\mu}a^{\mu+n}$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots.(r+1-\mu)}{1\quad 2\ldots.(\mu+n-r-1)} b^{r-\mu}a^{\mu+n-r}c$$
$$+\frac{n\cdot(n-1)\ldots\ldots\ldots(2r+1-\mu)}{1\cdot 2\ldots(\mu+n-2r-2)\cdot 1\cdot 2} b^{2r-\mu}a^{\mu+n-2r}c^2\ldots$$

wo alle Glieder wegbleiben müssen, die negative Potenzen von a oder b enthalten.

Weil nun bei n Beobachtungen die Anzahl aller Fälle $(a+b+c)^n$ ist, so wird man für die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler des Mittels $\frac{\mu}{n}$ ist, den Werth $\frac{(\mu)}{(a+b+c)^n}$ erhalten, und daraus folgt, dafs die Wahrscheinlichkeit, der Fehler des Mittels sei in den Grenzen $-\frac{p}{n}$ und $+\frac{q}{n}$ eingeschlossen, ausgedrückt wird durch die Reihe:

$$\frac{(-p+1)+\ldots+(-1)+(0)+(+1)\ldots+(q-1)}{(a+b+c)^n}$$

Problem IV,

§ 14. Alles wie im vorigen Problem vorausgesetzt, verlangt man, den Fehler des Mittels zu wissen, für welchen die Wahrscheinlichkeit am gröfsten ist.

Wir haben gesehen, dafs die Wahrscheinlichkeit, der Fehler des Mittels sei $\frac{\mu}{n}$, gleich ist $\frac{(\mu)}{(a+b+c)^n}$, wo (μ) der Coefficient von x^μ in dem Trinomium $(a+bx^{-1}+cx^r)^n$ ist. Es kommt also nur darauf an, zu wissen, welches das Glied der $n$ten Potenz von $a+bx^{-1}+cx^r$ ist, dessen Coefficient der gröfste ist. Hierzu hat man offenbar nur zu untersuchen, welches das gröfste Glied in dem Trinomium $a+b+c$, zur $n$ten Potenz erhoben, ist. Denn sei dieses Glied $\pi a^\alpha b^\beta c^\gamma$ wo $\alpha\ \beta\ \gamma$ die Exponenten von $a\ b\ c$ sind, deren Summe $= n$ sein mufs, und π der Coefficient dieses Gliedes, so braucht man nur bx^{-1} an die Stelle von b, und cx^r an die Stelle von c zu setzen, und man wird für das gesuchte Glied der $n$ten Potenz (von $a+bx^{-1}+cx^r$) den Ausdruck haben:

$$\pi a^\alpha b^\beta c^\gamma x^{-\beta+r\gamma}.$$

Macht man also $-\beta+r\gamma=\mu$, so hat man $\frac{r\gamma-\beta}{n}$ für den Fehler des Mittels, dessen Wahrscheinlichkeit am gröfsten ist.

Man weifs nun aber aus den Regeln der Combinationen, dafs der Coefficient π des Gliedes $\pi a^\alpha b^\beta c^\gamma$ sein mufs:

$$=\frac{1\quad 2\quad 3\ldots\ldots\ldots\ldots n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\alpha\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots\beta\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots\gamma}.$$

Nennt man also dieses Glied M, so wird

$$M=\frac{1\quad 2\quad 3\ldots\ldots\ldots\ldots n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\alpha\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots\beta\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots\gamma}a^\alpha b^\beta c^\gamma$$

und dieser Werth von M mufs nach dem Verlangten immer abnehmen, wenn man die Exponenten $\alpha\ \beta\ \gamma$ um eine Einheit ändert. Aendern wir also α um eine Einheit, so dafs es $\alpha+1$ wird, so mufs, da $\alpha+\beta+\gamma=n$, entweder β oder γ zu gleicher Zeit um eine Einheit abnehmen. Man sieht nun leicht, dafs wenn man in dem Werthe von M, $\alpha+1$ statt α und $\beta-1$ statt β setzt, der Werth verwandelt wird in

$$\frac{\beta}{\alpha+1}\times\frac{aM}{b}$$

folglich mufs dieser Ausdruck kleiner sein als M, und daher

$$\frac{\beta}{\alpha+1}\cdot\frac{a}{b}<1.$$

Vergröfsert man dagegen β um eine Einheit, und vermindert α um eine Einheit, so wird man die Bedingung erhalten

$$\frac{\alpha}{\beta+1}\cdot\frac{b}{a}<1.$$

Es mufs deshalb zu gleicher Zeit sein

$$\frac{\alpha}{\beta+1}<\frac{a}{b} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha+1}{\beta}>\frac{a}{b}$$

Dieses findet aber statt, wenn $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a}{b}$. Auf dieselbe Weise findet man $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{a}{c}$, so dafs, wenn man einen unbestimmten Coefficienten p nimmt, man in dem Falle des Maximums hat: $\alpha=pa$, $\beta=pb$, $\gamma=pc$, und weil $\alpha+\beta+\gamma=n$, also $p=\frac{n}{a+b+c}$, so erhält man:

$$\alpha=\frac{na}{a+b+c},\quad \beta=\frac{nb}{a+b+c},\quad \gamma=\frac{nc}{a+b+c}.$$

Sind diese Gröfsen ganze Zahlen, so hat man $\alpha\,\beta\,\gamma$ genau gleich ihren Werthen zu nehmen, wie wir eben gesehen haben. Sind sie aber Brüche, so mufs man für $\alpha\,\beta\,\gamma$ die nächsten ganzen Zahlen nehmen. Man kann indessen auch einfach die Werthe beibehalten, weil der Fehler, wenn einer stattfindet, immer nur klein sein kann. Auf diese Weise haben wir für den Fehler des Mittels, der die gröfste Wahrscheinlichkeit hat, den Werth $\frac{r\gamma-\beta}{n}=\frac{rc-b}{a+b+c}$.

§ 15. Es folgt daraus, dafs man immer die Gröfse $\frac{rc-b}{a+b+c}$ als den Fehler des Mittels ansehen kann, und folglich diese Gröfse als Correction des Mittels annehmen.

Wenn $r=1$ und $c=b$, wie in der Hypothese des Problem I., so wird die Correction des Mittels Null. Sie wird es auch, wenn $rc=b$, in allen andern Fällen wird sie um so gröfser, je mehr rc von b differirt.

Problem V.

§ 16. Angenommen, jede Beobachtung sei irgend welchen gegebenen Fehlern unterworfen, und man kenne zugleich die Anzahl der Fälle, in welchen jeder Fehler eintreten wird, so verlangt man die Correction, die man an das Mittel mehrerer Beobachtungen anbringen mufs, zu bestimmen.

Es seien $p\ q\ r$ etc. die Fehler, welchen jede Beobachtung unterworfen ist, und $a\ b\ c$ etc. die Zahl der Fälle, welche diese Fehler eintreten lassen, so dafs a zu p, b zu q, c zu r gehört und so ferner, so ist es klar, dafs nach den Beweisen der früheren Probleme man die Wahrscheinlichkeit, dafs der Fehler des Mittels von n Beobachtungen $\frac{\mu}{n}$ sei, erhalten wird, wenn man das Polynom $ax^p+bx^q+cx^r\ldots$ zur $n$ten Potenz erhebt, und wenn M der Coefficient von x^μ genannt wird, den Ausdruck $\frac{M}{(a+b+c+d\ldots)^n}$ bildet. Aus der Theorie der Combinationen weifs man aber, dafs der Coefficient M von der Form ist

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots\ldots n a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots\ldots}{1\cdot 2\ldots\alpha\cdot 1\cdot 2\ldots\beta\cdot 1\cdot 2\ldots\gamma}$$

wo die Exponenten $\alpha\,\beta\,\gamma$ so bestimmt werden müssen, dafs $\alpha+\beta+\gamma+\delta\ldots=n$, und $\alpha p+\beta q+\gamma r\ldots=\mu$. Aufserdem kann man auf ähnliche Weise, wie im vorigen Probleme leicht beweisen, dafs der Coefficient M am gröfsten sein wird, wenn

$$\alpha = \frac{na}{a+b+c+d}$$

$$\beta = \frac{nb}{a+b+c+d}$$

$$\gamma = \frac{nc}{a+b+c+d} \dots \text{ etc.}$$

Es folgt hieraus, dafs der Fehler des Mittels, für welchen die Wahrscheinlichkeit am gröfsten ist, ausgedrückt sein wird durch

$$\frac{\mu}{n} = \frac{ap+bq+cr+\dots}{a+b+c+\dots}$$

Dieser Werth wird also die Correction sein, die man an das Mittel aus mehreren Beobachtungen anzubringen hat.

§ 17. Betrachtet man die Gröfsen a, b, c, etc. als Gewichte, angebracht an einer Geraden von unbestimmter Länge, in Entfernungen $= p$, q, r etc., diese genommen von einem festen Punkte in der Geraden, und sucht man den Schwerpunkt dieser Gewichte, so wird die Entfernung dieses Schwerpunktes von dem festen Punkte die Correction sein, die man an das Mittel mehrerer Beobachtungen anzubringen hat, wie es aus dem eben gefundenen Werthe dieser Correction unmittelbar hervorgeht.

§ 18. Nimmt man also an, dafs jede Beobachtung allen möglichen Fehlern unterworfen sei, welche innerhalb bestimmter Grenzen stattfinden können, und kennt man die Curve der Häufigkeit, (*facilité*) dieser Fehler, bei welcher die Abscissen als die Fehler, die Ordinaten die Häufigkeiten darstellen, so braucht man nur den Schwerpunkt der ganzen Fläche dieser Curve zu bestimmen, und die Abscisse desselben wird die Correction des Mittels ausdrücken. Man sieht daraus, dafs, wenn die Curve symmetrisch ist in Bezug auf die Ordinate des Anfangspunktes der Abscissen, so dafs diese Ordinate ein Durchmesser der Curve ist, die Correction Null sein wird, weil der Schwerpunkt nothwendig in diesen Durchmesser fällt. Dieses findet jedesmal statt, wenn positive und negative Fehler gleich möglich sind.

Problem VI.

§ 19. Ich nehme an, ein Instrument sei mehreremal in Bezug auf seinen Fehler untersucht, und man habe bei gleichen Untersuchungen verschiedene Werthe für diesen Fehler gefunden, von denen jeder eine gewisse Anzahl von Malen sich wiederholt hat; man verlangt den Werth dieses Fehlers, den man als die Correction des Instrumentes zu nehmen hat.

Es seien p, q, r etc. die gefundenen Fehler, und α, β, γ etc. die Zahlen, welche bezeichnen, wie oft sich bei n Untersuchungen die gefundenen Fehler wiederholt haben; man nehme an, die Anzahl der Fälle, welche den Fehler p, q, r etc. geben können, sei a, b, c etc.; man erhebe das Polynom $ax^p + bx^q + cx^r$ etc. zu der n^{ten} Potenz, und es sei $N(ax^p)^\alpha (bx^q)^\beta (cx^r)^\gamma \ldots$ irgend ein Glied dieses Polynoms. Es wird dann der Coefficient $N a^\alpha b^\beta c^\gamma$ von der Potenz von x, welche den Exponenten $\alpha p + \beta q + \gamma r \ldots$ hat, dividirt durch $(a + b + c \ldots)^n$ die Wahrscheinlichkeit ausdrücken, dafs die Fehler p, q, r etc. so zusammen verbunden vorkommen, dafs $p \ldots \alpha$mal, $q \ldots \beta$mal, $r \ldots \gamma$mal u. s. w. stattfinden. Diese Wahrscheinlichkeit wird am gröfsten sein in der Combination, in welcher der Werth von $N a^\alpha b^\beta c^\gamma$ u. s. w. die gröfste ist. Nun aber ist

$$N = \frac{1 \cdot \ 2 \cdot \ \ 3 \ldots\ldots\ldots n}{1 \cdot 2 \ldots \alpha \cdot 1 \cdot 2 \ldots \beta \cdot 1 \cdot 2 \ldots \gamma \ldots}$$

wie wir es schon im vorigen Problem gesehen haben. Folglich wird nach demselben Probleme der gröfste Werth von $N a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ stattfinden, wenn

$$\alpha = \frac{na}{a + b + c + \ldots}$$

$$\beta = \frac{nb}{a + b + c + \ldots}$$

$$\gamma = \frac{nc}{a + b + c + \ldots}$$

aus welchen Gleichungen man die Unbekannten a, b, c etc. wird bestimmen können. Es wird daher, wenn

$$a + b + c + \ldots = s,$$

erhalten werden

$$a = \frac{s}{n}\alpha, \quad b = \frac{s}{n}\beta, \quad c = \frac{s}{n}\gamma \ldots \text{ etc.}$$

Nun ist im vorigen Probleme bewiesen, dafs die Correction, welche an das Mittel einer beliebigen Anzahl von Beobachtungen anzubringen ist, ausgedrückt wird durch

$$\frac{ap + bq + cr + \ldots}{a + b + c + \ldots}$$

Substituirt man hierin die eben gefundenen Werthe von a, b, c etc., so wird die Correction, auf die es hier ankommt, werden:

$$\frac{\alpha p + \beta q + \gamma r + \ldots .}{n}$$

oder gleich dem Fehler des Mittels, wenn man alle durch die n Untersuchungen gefundenen Fehler einzeln nimmt, und ihre Summe durch die ganze Anzahl der Untersuchungen theilt.

§ 20. Wollte man hier wenigstens genähert den dazwischen liegenden Fehlern, denen das Instrument ausgesetzt sein kann, ebenfalls Rechnung tragen, so hätte man nur auf einer unbestimmt verlängerten geraden Linie Abscissen aufzutragen, welche den gefundenen Fehlern p, q, r etc. wie in § 17 proportional sind, und nachdem man mit ihnen Ordinaten verbunden hätte, welche den Gröfsen a, b, c etc. proportional sind, hätte man durch die Endpunkte derselben eine parabolische Linie zu ziehen. Dann würde man den Schwerpunkt des Flächeninhalts der ganzen Curve zu suchen haben, und die Senkrechte, aus diesem Schwerpunkte auf die Abscissenaxe gefällt, würde auf dieser eine Abscisse abschneiden, welche die Correction des Instrumentes gäbe.

Man sieht, wie man auf diese Weise *a posteriori* das Gesetz finden kann für die relative Häufigkeit (*facilité*) der Fehler eines Instrumentes.

* * *

Bis hierher ist der Inhalt der Abhandlung von Lagrange, vollständig übersetzt, wiedergegeben. Die folgenden Paragraphen behandeln dieselben Fragen, welche bei dem jetzt gültigen Gesetze der Wahrscheinlichkeit der Fehler ganz in derselben Form aufgeworfen werden und nur nach der bestimmten Form bequemer gelöst werden können, mit einer für die Praxis hinreichenden Schärfe, als Lagrange es bei der nicht bestimmten Form des Gesetzes der Wahrscheinlichkeit gethan hat. In § 21 untersucht er die Grenzen der Sicherheit, mit welcher man aus der wirklich vorgekommenen Anzahl bestimmter Fehler auf ihr gesetzmäfsiges Vorkommen schliefsen kann, oder nach der Bezeichnung im Problem VI, aus $\frac{\alpha}{n}$ auf $\frac{\alpha}{s}$ etc. Er nimmt dann in § 22 n sehr grofs an und modificirt darnach die Ausdrücke. Die §§ 23, 24, 25 enthalten Hülfssätze, welche die Lösung des Problems VII vorbereiten. In diesem nimmt er an, die Fehler bei jeder Beobachtung seien möglich innerhalb der Grenzen $-\alpha$ und $+\beta$, und zwar mit gleicher Wahrscheinlichkeit für alle Gröfsen $-\alpha \ldots, -2, -1, -0, +1, +2 \ldots, +\beta$, und untersucht die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers des Mittels $\pm\frac{\mu}{n}$ oder eines Fehlers innerhalb der Grenzen $-\frac{p}{n}$ und $+\frac{q}{n}$. Er nimmt dann in § 27 die Zahl n wieder sehr grofs an. Hierauf folgt das Problem VIII, wo die Anzahl der Fälle, in welchen die Fehler

$$-\omega, \ldots -2, \; -1, 0, \; +1, \; +2, \ldots . +\omega$$

stattfinden können, respective den Zahlen

$$1, 2, 3 \ldots ., \; \alpha+1, \; \ldots 3, 2, 1$$

proportional gesetzt werden, und hierauf die Lösung derselben Aufgabe wie in Problem VII angewandt. In den §§ 31 und 32 wird der specielle Fall grofser Zahlen erläutert und verwandte Betrachtungen daran geknüpft. Die §§ 33—38 enthalten Lemmen, welche als Vorbereitung zu dem Problem X dienen. In diesem wird ganz allgemein angenommen, es seien die Beobachtungen allen Fehlern zwischen $-p$ und $+q$ unterworfen und das Gesetz der relativen Häufigkeit derselben gegeben, man sucht die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers des Mittels zwischen bestimmten Grenzen. Für das Gesetz nimmt Lagrange in zwei Beispielen zuerst die Gleichheit der Wahrscheinlichkeit an, wie in dem Problem VII, nachher auch, dafs die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers x ausgedrückt werde durch $k(p^2-x^2)$, wo p und $-p$ die Grenzen dieses Fehlers sind. Dieses letztere Beispiel, welches Lagrange in § 43 für das einfachste und natürlichste erklärt, ist merkwürdig, weil es das erste Glied der Entwickelung des jetzt gültigen Gesetzes enthält und folglich als ein erster Schritt dazu betrachtet werden kann. Endlich im Problem XI nimmt Lagrange für das Gesetz die Form $a \cos x$ an, mit welcher Lösung die Abhandlung schliefst.

Man sieht, dafs in dieser Abhandlung auf eine höchst einfache und elementare Weise die Grundlage unserer jetzigen Rechnungsform gegeben ist, und dafs namentlich in § 17, durch die Zurückführung auf den Schwerpunkt und die Annahme, dafs die Zahl, welche angiebt, wie oft ein bestimmter Fehler eintrifft, mit den Gewichten, die Gröfse der Fehler mit den Entfernungen zusammengestellt wird, eigentlich die Methode der kleinsten Quadrate ausgesprochen ist. Die Betrachtung einer der vielen Eigenschaften des Schwerpunktes würde sie unmittelbar gegeben haben. Dabei ist die Abhandlung keineswegs, wie man aus der Stelle, wo Lacroix sie citirt, allenfalls hätte vermuthen können, astronomisch, sondern so rein mathematisch gehalten, dafs sie Jeden anziehen wird, wenn er auch mit der Astronomie sich nicht bekannt gemacht hat.

Die Betrachtungen, welche Lagrange anstellt, um den Fehler eines Mittels aus n Beobachtungen, deren jede einem bestimmten Complexus von Fehlern unterworfen ist, zu bestimmen, lassen sich ohne alle Aenderung geradezu auf die Fehler einer einzelnen Beobachtung anwenden. Wenn der Fehler des Mittels aus n Beobachtungen $\frac{\mu}{n}$ ist, so ist die Summe der mit n Würfeln geworfenen Augen $=\mu$. Man sehe also dieses μ an als den Fehler, der hervorgegangen ist aus dem Zusammentreffen von einer gewissen Anzahl von positiven und negativen Gröfsen, die jede dadurch entstanden ist, dafs eine Zahl von Ursachen, in verschiedenen Verbindungen mit einander oder mit verschiedenem Einflusse, gewirkt haben. Es werden dann die Fehler-Quellen, mögen sie nun in den Geistesthätigkeiten und ihrer gröfseren oder geringeren Anspannung, oder in der Form der Instrumente, oder in ihrem Material, oder in den äufseren Umständen liegen, sehr schicklich durch die Würfel repräsentirt werden, und die verschiedene Gröfse der Irrthümer, welche aus jeder Fehler-Quelle, unter verschiedenen Verhältnissen entsteht, falle sie nun positiv oder negativ aus, durch die Anzahl und Bezeichnung der Seiten der Würfel mit positiven und negativen Zahlen, je nachdem bei der Fehler-Quelle, welche durch den Würfel repräsentirt wird, die Fehler von verschiedener Gröfse, und in irgend welchem von der Gröfse der Fehler abhängigen Verhältnisse der Zahl nach vorkommen können. Wäre die Anzahl der Fehler-Quellen bei einer bestimmten Gattung von Beobachtungen bekannt, und wüfste man, welche Gröfse bei jeder Fehler-Quelle die Fehler erreichen können, sowie die Häufigkeit des Vorkommens eines jeden, so würde *a priori* der Fehler einer Beobachtung seiner Wahrscheinlichkeit nach bestimmt werden können, wenn man die Wahrscheinlichkeit des Werfens einer gewissen Summe von Augen mit einer solchen Anzahl von Würfeln berechnete.

Wenn hierdurch das Problem der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Beobachtungen auch auf eine bei den andern Anwendungen gebräuchliche Form zurückgeführt ist, so wird man deshalb doch das Problem *a priori* nicht lösen können, weil sowohl die Anzahl der Fehlerquellen (oder der Würfel), als die Anzahl und Bezeichnung der Seiten jedes Würfels (oder die Gröfse, das Zeichen und die Häufigkeit des Vorkommens eines Fehlers, sofern er aus der bestimmten Fehler-Quelle entspringt) gänzlich unbekannt ist, und auch wohl für immer bleiben wird. Allein es kann doch ein gewisses Interesse haben, nachzusehen, ob unter den verschiedenen Arten des Würfelspiels es nicht eine giebt, bei welcher das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Fehler, wie wir es jetzt annehmen, entweder strenge oder doch mit hinlänglicher Annäherung für die Praxis, unmittelbar auf die Anzahl der geworfenen Augen sich anwenden läfst. Es gewährt diese Untersuchung, wenn sie auch nichts beweisen kann, doch die Möglichkeit, sich die Entstehung der aus so vielen Ursachen hervorgehenden Fehler zu erklären.

Eine solche Untersuchung findet sich, nur in einer von der gegenwärtigen etwas verschiedenen Form, ausgeführt in dem vortrefflichen Buche des Herrn Geheimen Ober-Bauraths Hagen: „Ueber die Wahrscheinlichkeits-Rechnung." Nach dem Zwecke seines besonders für Feldmesser bestimmten Buches hat der Verfasser sich darauf beschränkt, aus einfachen Betrachtungen der Combinationslehre nachzuweisen, dafs das für die Beobachtungen gültige Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Fehler bei einer grofsen Anzahl von Würfeln (um die hier gewählte Form beizubehalten) dargestellt werden kann durch das bekannte Spiel Bild und Schrift (oder *croix et pile*), wenn man die eine Seite des hier stattfindenden zweiseitigen Würfels (oder einer Fläche von äufserst geringer Dicke) mit $+\alpha$, die andere mit $-\alpha$ Augen bezeichnet denkt, und diese Bezeichnung in derselben Art und Gröfse bei allen Würfeln annimmt. Will man dieses Bild verfolgen, so kann es von Interesse sein, bestimmt nachzuweisen, wie grofs wohl etwa die Zahl der Würfel (oder Fehler-Quellen) sein mufs, wenn mit jedem nur entweder $+\alpha$ oder $-\alpha$ Augen geworfen werden können (oder jede Fehlerquelle nur einen positiven oder negativen Fehler von gleicher Gröfse bewirken kann), damit sich das für die Uebereinstimmung der geworfenen Augen mit dem angenommenen Gesetze der Wahrscheinlichkeit der Beobachtungen erreichen lasse, was wir bei der meistens beschränkten Wiederholung der Beobachtungen, der Erfahrung gemäfs, aus den wirklich gefundenen Fehlern als übereinstimmend mit dem angenommenen Gesetze direct nachweisen können. Hiezu bedarf man einiger Sätze, die unter andern in Eulers Introductio und seiner Differentialrechnung vorkommen, und die ich hier mit kurzer Andeutung der Beweise vorausschicken werde, um Alles zusammen zu haben, was an sich zwar sehr bekannt, doch vielleicht im Augenblicke nicht gleich gegenwärtig sein möchte.

I. Der erste Satz ist der schon oben angeführte Ausdruck von Wallis für die Zahl π. Euler leitet ihn daraus her, dafs in der Gleichung

$$\sin x = x - \tfrac{1}{6} x^3 + \tfrac{1}{120} x^5 - + \ldots = 0$$

die reellen Wurzeln stattfinden

$$x = 0, \quad = \pm \pi, \quad = \pm 2\pi, \quad = \pm 3\pi \text{ etc.},$$

so dafs die Factoren $(x \mp m\pi)$, oder $\left(1 \mp \frac{x}{m\pi}\right)$, für jede ganze Zahl m, in dem Ausdrucke von $\sin x$ enthalten sein müssen, oder

$$\sin x = x\left(1 \mp \frac{x}{\pi}\right)\left(1 \mp \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 \mp \frac{x}{3\pi}\right)\ldots.$$

gesetzt werden kann, welches sich auch schreiben läfst

$$\sin x = x\left(1 - \frac{xx}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{xx}{4\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{xx}{9\pi\pi}\right)\ldots.$$

Setzt man $x = \frac{m\pi}{2n}$, so wird

$$\sin \frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\left(\frac{2n-m}{2n}\right)\left(\frac{2n+m}{2n}\right)\left(\frac{4n-m}{4n}\right)\left(\frac{4n+m}{4n}\right)\left(\frac{6n-m}{6n}\right)\left(\frac{6n+m}{6n}\right)\ldots$$

wonach man auch, wenn man m mit $n - m$ vertauscht, wegen

$$\sin \frac{(n-m)\pi}{2n} = \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - \frac{m\pi}{2n}\right) = \cos \frac{m\pi}{2n}$$

schreiben kann

$$\cos \frac{m\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{n-m}{n}\right)\left(\frac{n+m}{2n}\right)\left(\frac{3n-m}{2n}\right)\left(\frac{3n+m}{4n}\right)\left(\frac{5n-m}{4n}\right)\left(\frac{5n+m}{6n}\right)\ldots$$

Man kann aber auch, weil $\cos x = 0$ wird, für $x = \pm \frac{1}{2}\pi$, $\pm \frac{3}{2}\pi$, $\pm \frac{5}{2}\pi \ldots$ etc. den Cosinus ausdrücken durch

$$\cos x = \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{2x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{2x}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{2x}{3\pi}\right)\ldots$$

oder wenn man nimmt $x = \frac{m\pi}{2n}$

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n-m}{n}\right)\left(\frac{n+m}{n}\right)\left(\frac{3n-m}{3n}\right)\left(\frac{3n+m}{3n}\right)\ldots$$

Dividirt man diesen Ausdruck von $\cos\frac{m\pi}{2n}$ in den eben erhaltenen hinein, so wird man erhalten

$$1 = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots$$

oder

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\ldots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\ldots}$$

wo die geraden und ungeraden Zahlen im Zähler und Nenner in das Unendliche fortgehen müssen. Es findet nur der Unterschied bei den Quadraten beider Zahlengattungen statt, daſs, wenn bei einem vollständigen Quadrate bei einer Gattung abgebrochen wird, bei der andern nur der einfache Factor der correspondirenden Zahl mitgenommen werden darf. Oder wenn n sehr groſs ist, so wird mit beträchtlicher Näherung

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\ldots\ldots(2n-2)\,2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\ldots(2n-1)(2n-1)}$$

und daher

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\ldots\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n-1)}\right)^2\cdot\frac{1}{2n}$$

welches für $\lim n = \infty$ völlig strenge ist.

II. Der zweite Satz betrifft den Werth der Summe von den reciproken Werthen der geraden Potenzen der natürlichen Zahlen, oder wenn man

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \left[\frac{1}{m^2}\right]$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots = \left[\frac{1}{m^4}\right]$$

bezeichnet, die Reihen immer in das Unendliche fortgesetzt gedacht, oder überhaupt

$$1 + \frac{1}{2^{2i}} + \frac{1}{3^{2i}} + \frac{1}{4^{2i}} + \ldots = \left[\frac{1}{m^{2i}}\right]$$

die Werthe dieser Gröfsen. Euler leitet sie daraus ab, dafs, wenn man den obigen Ausdruck von sin x durch Factoren logarithmisch schreibt

$$\lg \sin x = \lg x + \lg\left(\frac{\pi - x}{\pi}\right) + \lg\left(\frac{\pi + x}{\pi}\right) + \lg\left(\frac{2\pi - x}{2\pi}\right) + \lg\left(\frac{2\pi + x}{2\pi}\right) + \ldots$$

und dann differentiirt, man erhält

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{1}{\pi - x} + \frac{1}{\pi + x} - \frac{1}{2\pi - x} + \frac{1}{2\pi + x} \ldots$$

Setzt man also $x = u\pi$, so wird

$$\pi \operatorname{cotg} u\pi = \frac{1}{u} - \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} - \frac{1}{2-u} + \frac{1}{2+u} \ldots$$

$$= \frac{1}{u} - \frac{2u}{1-u^2} - \frac{2u}{4-u^2} - \frac{2u}{9-u^2} \ldots$$

oder

$$\frac{1}{2u^2} - \frac{\pi}{2u} \operatorname{cotg} u\pi = \frac{1}{1-u^2} + \frac{1}{4-u^2} + \frac{1}{9-u^2} \ldots$$

Entwickelt man hier

$$\frac{1}{1-u^2} = 1 + u^2 + u^4 + u^6 \ldots$$

$$\frac{1}{4-u^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} u^2 + \frac{1}{2^6} u^4 + \frac{1}{2^8} u^6 \ldots$$

$$\frac{1}{9-u^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} u^2 + \frac{1}{3^6} u^4 + \frac{1}{3^8} u^6 \ldots$$

so erhält man nach der Summirung

$$\frac{1}{2u^2} - \frac{\pi}{2u} \operatorname{cotg} u\pi = \left[\frac{1}{m^2}\right] + \left[\frac{1}{m^4}\right] u^2 + \left[\frac{1}{m^6}\right] u^4 \ldots$$

Man kann den Werth der Gröfse linker Hand auch daraus herleiten, dafs

$$\cos \tfrac{1}{2}u = 1 - \frac{1}{1\cdot 2} \cdot \frac{1}{2^2} u^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \cdot \frac{1}{2^4} u^4 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} \cdot \frac{1}{2^6} u^6 \ldots$$

$$\sin \tfrac{1}{2}u = \tfrac{1}{2}u - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{1}{2^3} u^3 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \cdot \frac{1}{2^5} u^5 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} \cdot \frac{1}{2^7} u^7 \ldots$$

folglich

$$\tfrac{1}{2}u \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}u = \frac{1 - \frac{u^2}{2\cdot 4} + \frac{u^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} - \frac{u^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} \ldots}{1 - \frac{u^2}{4\cdot 6} + \frac{u^4}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} - \frac{u^6}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14} \ldots}$$

Setzt man diesen Bruch nach seiner Entwickelung

$$= 1 - A_1 u^2 - A_2 u^4 - A_3 u^6 \ldots.$$

und vertauscht u mit $2u\pi$, so erhält man

$$u\pi \operatorname{cotg} u\pi = 1 - 2^2\pi^2 A_1 u^2 - 2^4\pi^4 A_2 u^4 - 2^6\pi^6 A_3 u^6 \ldots$$

und daraus

$$\frac{1}{2u^2} - \frac{\pi}{2u} \operatorname{cotg} u\pi = 2\pi^2 A_1 + 2^3\pi^4 A_2 u^2 + 2^5\pi^6 A_3 u^4 \ldots.$$

Durch Vergleichung beider Werthe der links stehenden Gröfse wird

$$2\pi^2 A_1 = \left[\frac{1}{m^2}\right],\ 2^3\pi^4 A_2 = \left[\frac{1}{m^4}\right],\ 2^5\pi^6 A_3 = \left[\frac{1}{m^6}\right].$$

Es wird deshalb zur Bestimmung der $\left[\frac{1}{m^{2i}}\right]$ nur erfordert, dafs die Coefficienten der Reihen-Entwickelung von $\frac{1}{2}u \operatorname{cotg} \frac{1}{2}u$ bestimmt werden. Setzt man

$$s = \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}u$$

woraus

$$ds = -\frac{\frac{1}{4}du}{\sin \frac{1}{2}u^2} = -\tfrac{1}{4}du\,(1 + 4ss)$$

oder

$$\frac{4ds}{du} + 1 + 4ss = 0$$

so erhält man wegen

$$s = \frac{1}{u} - A_1 u - A_2 u^3 - A_3 u^5 \ldots$$

wenn man hieraus $\frac{ds}{du}$ und ss ableitet, zur Bestimmung der A die Bedingungsgleichung

$$0 = \tfrac{1}{4} - 3A_1 - (5A_2 - A_1^2)u^2 - (7A_3 - 2A_1A_2)u^4$$
$$- (9A_4 - 2A_1A_3 - A_2^2)u^6 \ldots.$$

und folglich, indem man die Coefficienten jeder Potenz von u gleich Null setzt:

$$A_1 = \frac{1}{12}$$

$$A_2 = \frac{A_1^2}{5} = \frac{1}{720}$$

$$A_3 = \frac{2A_1A_2}{7} = \frac{1}{30240}$$

$$A_4 = \frac{2A_1A_3 + A_2^2}{9} = \frac{1}{1209600} \text{ etc.}$$

Das Gesetz der Bildung dieser Werthe, wenn man sie weiter fortsetzen wollte, würde sich so aussprechen lassen, daſs man jeden Index, der zu einem zu bestimmenden A gehört, so oft in zwei gleiche oder ungleiche Factoren zerlegt als es angeht, die A, die zu diesen Factoren gehören, mit einander multiplicirt, und bei den ungleichen Factoren den Factor 2, bei den gleichen 1 als Factor nimmt. Die Summe dieser Producte ist der Zähler, die auf den doppelt genommenen Index des zu bestimmenden A folgende ungerade Zahl der Nenner des Bruches, welcher den neuen Werth giebt. Hieraus folgt

$$\left[\frac{1}{m^2}\right] = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\left[\frac{1}{m^4}\right] = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\left[\frac{1}{m^6}\right] = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\left[\frac{1}{m^8}\right] = \frac{\pi^8}{9450}$$

$$\left[\frac{1}{m^{10}}\right] = \frac{\pi^{10}}{93555} \text{ etc.}$$

III. Der dritte Satz ist die Summationsformel, welche die endliche Summation einer Reihe discreter Glieder aus dem Integrale und den Differentialen der Function finden läſst, wodurch das Gesetz der Reihe ausgedrückt wird, der Uebergang vom Endlichen zum Unendlichen, welcher bei meiner früheren Darstellung zu einem Miſsverständnisse Veranlassung gegeben hat, und den ich deshalb ebenfalls vollständig ableiten werde.

Nach dem Taylor'schen Lehrsatze hat man, wenn durch $f^n(x+m\omega)$ der Werth von $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ bezeichnet wird, nachdem man darin statt x den Werth $x+m\omega$ substituirt hat:

$$f(x) = f(x+\omega) - \omega f'(x+\omega) + \tfrac{1}{2}\omega^2 f''(x+\omega) - \tfrac{1}{6}\omega^3 f'''(x+\omega) + \ldots$$

und ebenso

$$f(x+\omega) = f(x+2\omega) - \omega f'(x+2\omega) + \tfrac{1}{2}\omega^2 f''(x+2\omega) - \tfrac{1}{6}\omega^3 f'''(x+2\omega) + \ldots$$
$$f(x+2\omega) = f(x+3\omega) - \omega f'(x+3\omega) + \tfrac{1}{2}\omega^2 f''(x+3\omega) - \tfrac{1}{6}\omega^3 f'''(x+3\omega) + \ldots$$

Setzt man dieses fort bis zu

$$f(x+(n-1)\omega) = f(x+n\omega) - \omega f'(x+n\omega) + \tfrac{1}{2}\omega^2 f'(x+n\omega) - \tfrac{1}{6}\omega^3 f'''(x+n\omega) + \ldots$$

und bildet die Summe dieser Gleichungen, so wird erhalten:

$$f(x) = f(x+n\omega) - \omega \overset{m=1\ldots n}{\Sigma} f'(x+m\omega) + \tfrac{1}{2}\omega^2 \overset{m=1\ldots n}{\Sigma} f''(x+m\omega) - \tfrac{1}{6}\omega^3 \overset{m=1\ldots n}{\Sigma} f'''(x+m\omega) + \ldots$$

und folglich

$$\omega \overset{m=1\ldots n}{\Sigma} f'(x+m\omega) = f(x+n\omega) - f(x) + \tfrac{1}{2}\omega^2 \overset{m=1\ldots n}{\Sigma} f''(x+m\omega) - \tfrac{1}{6}\omega^3 \overset{m=1\ldots n}{\Sigma} f'''(x+m\omega) + \ldots$$

Ganz analog wird auch sein

$$\omega \overset{m=1\ldots n}{\Sigma} f''(x+m\omega) = f'(x+n\omega) - f'(x) + \tfrac{1}{2}\omega^2 \overset{m=1\ldots n}{\Sigma} f'''(x+m\omega) - \tfrac{1}{6}\omega^3 \overset{m=1\ldots n}{\Sigma} f^{\text{IV}}(x+m\omega) + \ldots$$
$$\omega \overset{m=1\ldots n}{\Sigma} f'''(x+m\omega) = f''(x+n\omega) - f''(x) + \tfrac{1}{2}\omega^2 \overset{m=1\ldots n}{\Sigma} f^{\text{IV}}(x+m\omega) - \tfrac{1}{6}\omega^3 \overset{m=1\ldots n}{\Sigma} f^{\text{V}}(x+m\omega) + \ldots$$

u. s. w. Um hier die $\overset{m=1\ldots n}{\Sigma} f'(x+m\omega)$ bloſs durch $f(x+n\omega)$, $f(x)$ und die dazu gehörigen Differentiale ausgedrückt zu erhalten, multiplicire man die zweite Gleichung für $\omega \overset{m=1\ldots n}{\Sigma} f''(x+m\omega)$ mit $\alpha\omega$, die nächste mit $\beta\omega^2$, die folgende mit $\gamma\omega^3$ u. s. w., nehme die Summe aller Producte und bestimme die α β γ etc. nachher so, daſs die andern Summen, ausgenommen die von $f'(x+m\omega)$, verschwinden. Man erhält dann zuerst:

$$\begin{aligned}
&\omega \overset{m=1\ldots n}{\Sigma} f'(x+m\omega) + (\alpha - \tfrac{1}{2})\,\omega^2 \overset{m=1\ldots n}{\Sigma} f''(x+m\omega) \\
&\qquad + (\beta - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{6})\,\omega^3 \overset{m=1\ldots n}{\Sigma} f'''(x+m\omega) \\
&\qquad + (\gamma - \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{6}\alpha - \tfrac{1}{24})\,\omega^4 \overset{m=1\ldots n}{\Sigma} f^{\text{IV}}(x+m\omega) \\
&\qquad + \ldots .
\end{aligned}$$

$$= f(x+n\omega) - f(x) + \alpha\omega\,(f'(x+n\omega) - f'(x))$$
$$+ \beta\omega^2\,(f''(x+n\omega) - f''(x))$$
$$+ \gamma\omega^3\,(f'''(x+n\omega) - f'''(x))$$
$$+ \ldots\ldots$$

Wenn folglich gesetzt wird

$$0 = \alpha - \tfrac{1}{2}$$
$$0 = \beta - \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{6}$$
$$0 = \gamma - \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{6}\alpha - \tfrac{1}{24}$$
$$0 = \delta - \tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{1}{6}\beta - \tfrac{1}{24}\alpha + \tfrac{1}{120}$$

so bleibt auf der linken Seite allein das erste Glied. Bestimmt man aus diesen Gleichungen die Werthe von $\alpha\ \beta\ \gamma$ etc., so erhält man $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{12}$, $\gamma = 0$, $\delta = -\frac{1}{720}$ etc., und überhaupt alle Coefficienten, die auf der linken Seite bei den geraden Potenzen eintreten, gleich Null, α ausgenommen.

Zur Erläuterung dieses Umstandes und der Bestimmung der Coefficienten überhaupt dient die Bemerkung, dafs die Entwickelung des Bruches

$$\nu = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}u^2 - \frac{1}{24}u^3 + \frac{1}{120}u^4 \ldots}$$

eine Reihe geben wird, in der die $\alpha\ \beta\ \gamma \ldots$ in derselben Ordnung vorkommen, nämlich

$$\nu = 1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 \ldots$$

wovon man sich durch Multiplication des Nenners mit dieser Reihe sogleich überzeugt. Da nun

$$e^{-u} = 1 - u + \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{6}u^3$$

und also $$\frac{1 - e^{-u}}{u} = 1 - \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{6}u^2 - \tfrac{1}{24}u^3 \ldots.$$

so wird $$\nu = \frac{u}{1 - e^{-u}} \text{ und } \nu - \tfrac{1}{2}u = \tfrac{1}{2}u\,\frac{1 + e^{-u}}{1 - e^{-u}}.$$

Da $\alpha = \frac{1}{2}$, so kann man hiernach schreiben

$$\nu - \alpha u = 1 + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 \ldots = \tfrac{1}{2}u\,\frac{1 + e^{-u}}{1 - e^{-u}}$$

und durch eine leichte Transformation

$$\nu - \alpha u = \tfrac{1}{2} u \cdot \frac{e^{+\frac{1}{2}u} + e^{-\frac{1}{2}u}}{e^{+\frac{1}{2}u} - e^{-\frac{1}{2}u}}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4}\left(\frac{u}{2}\right)^4 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\left(\frac{u}{2}\right)^6 \cdots}{1 + \frac{1}{2\cdot3}\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\left(\frac{u}{2}\right)^4 + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\left(\frac{u}{2}\right)^6 \cdots}.$$

Es fallen deshalb in $\nu - \alpha u$ alle ungeraden Potenzen von u weg, weshalb die Coefficienten γ, ε, etc. Null sein müssen. Wenn aber

$$\nu - \alpha u = 1 + \beta u^2 + \delta u^4 + \zeta u^6 \ldots$$

so wird auch, wenn man in dem Ausdrucke von $\nu - \alpha u$ statt u einführt $u\sqrt{-1}$, die dann hervorgehende Reihe werden

$$= 1 - \beta u^2 + \delta u^4 - \zeta u^6 \ldots$$

und da durch die Vertauschung von u mit $u\sqrt{-1}$ der Ausdruck von $\nu - \alpha u$

oder $\frac{1}{2} u \dfrac{e^{+\frac{1}{2}u} + e^{-\frac{1}{2}u}}{e^{+\frac{1}{2}u} - e^{-\frac{1}{2}u}}$ wird

$$= \tfrac{1}{2} u \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} u,$$

wofür oben die Reihe angenommen ist:

$$\tfrac{1}{2} u \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} u = 1 - A_1 u^2 - A_2 u^4 - A_3 u^6 \ldots$$

und die A bestimmt sind, so hat man sogleich:

$$\alpha = \tfrac{1}{2},\ \beta = A_1 = \tfrac{1}{12},\ \delta = -A_2 = -\tfrac{1}{720},\ \zeta = A_3 = +\tfrac{1}{30240} \ldots$$

Es wird daher die Summationsformel

$$\begin{aligned} \omega \overset{m=1\ldots n}{\Sigma} f'(x + m\omega) = f(x + n\omega) - f(x) &+ \tfrac{1}{2}\omega\, (f'(x + n\omega) - f'(x)) \\ &+ A_1 \omega^2 (f''(x + n\omega) - f''(x)) \\ &- A_2 \omega^4 (f^{\mathrm{IV}}(x + n\omega) - f^{\mathrm{IV}}(x)) \\ &+ A_3 \omega^6 (f^{\mathrm{VI}}(x + n\omega) - f^{\mathrm{IV}}(x)) \ldots \end{aligned}$$

Da $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$, so wird auch $f(x) = \int f'(x)dx$, und folglich $f(x + n\omega) - f(x) = \int\limits_x^{x+n\omega} f'(x)dx$. Vermindert man deshalb alle Accente um eine Einheit, was gestattet ist, da diese Relationen nur die successiven Differentiationen bedeuten, so erhält man

$$\omega \overset{m=1\ldots n}{\Sigma} f(x+m\omega) = \int_x^{x+n\omega} f(x)\,dx + \tfrac{1}{2}\omega\,(f(x+n\omega)-f(x))$$
$$+ A_1\omega^2\,(f'(x+n\omega)-f'(x))$$
$$- A_2\omega^4\,(f'''(x+n\omega)-f'(x))$$
$$+ A_3\omega^6\,(f^{\mathrm{v}}(x+n\omega)-f^{\mathrm{v}}(x))\ldots$$

wo $A_1 = \frac{1}{12}$, $A_2 = \frac{1}{720}$, $A_3 = \frac{1}{30240}\ldots$ etc. Um die Convergenz beurtheilen zu können, setze man für die A ihre Werthe durch $\left[\frac{1}{m^{2i}}\right]$, so erhält man:

$$\omega \overset{m=1\ldots n}{\Sigma} f(x+m\omega) = \int_x^{x+n\omega} f(x)\,dx + \tfrac{1}{2}\omega\,(f(x+n\omega)-f(x))$$
$$+ \frac{\omega^2}{2\pi^2}\left[\frac{1}{m^2}\right](f'(x+n\omega)-f'(x))$$
$$- \frac{\omega^4}{2^3\pi^4}\left[\frac{1}{m^4}\right](f'''(x+n\omega)-f'''(x))$$
$$+ \frac{\omega^6}{2^5\pi^6}\left[\frac{1}{m^6}\right](f^{\mathrm{v}}(x+n\omega)-f^{\mathrm{v}}(x)) \text{ etc.}$$

Da die Gröfsen $\left[\frac{1}{m^{2i}}\right]$ sich mit wachsendem i immer mehr der Einheit nähern werden, so wird, abgesehen von den Differentialquotienten, jedes folgende Glied sich sehr bald dem Werthe nähern, dafs sein Coefficient gleich wird $\frac{\omega^2}{2^2\pi^2}$, multiplicirt mit dem Coefficienten des vorigen Gliedes, oder die Convergenz der Coefficienten der Differentialquotienten sehr bald so sein, dafs sie eine geometrische Reihe bilden, deren Exponent $= \frac{1}{40}\omega^2$ etwa ist.

Diese Form der Summationsreihe scheint ansprechender als die durch die Bernouillischen Zahlen, die eine stark divergirende Reihe bilden, sobald man zu den späteren Zahlen kommt. Eine Eigenschaft, die wegen des Zusammenhangs derselben mit den Coefficienten A nothwendig verbunden ist. Es ist nämlich die $n$te Bernouillische Zahl P_n dadurch gegeben, dafs

$$P_n = 2n\cdot(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots.3\cdot2\cdot1\cdot A_n$$

IV. Der vierte Satz, der mit Hülfe des vorigen abgeleitet werden kann, ist die Formel von Stirling, das Product einer grofsen Zahl aufeinander folgender natürlicher Zahlen zu bestimmen. Zuerst suche man die Summe ihrer Logarithmen. Es wird hier $f(x) = \lg x$, folglich

$$\int f(x)\,dx = x \lg x - x$$

$$f'(x) = +\frac{1}{x},\ f''(x) = -\frac{1}{x^2},\ f'''(x) = +\frac{1 \cdot 2}{x^3} \ldots f^{\text{IV}}(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4} \text{ etc.}$$

Das Intervall ω wird hier $= 1$, der Anfangswerth $\lg 1$, der Endwerth sei $\lg x$. Die Gröfsen, welche sich auf den Anfangswerth beziehen, fasse man in eine einzige Constante zusammen, so hat man nach der Summationsformel:

$$\overset{1 \ldots x}{\Sigma} \lg x = x \lg x - x + \tfrac{1}{2} \lg x + A_1 \frac{1}{x} - A_2 \frac{1 \cdot 2}{x^3} + A_3 \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} \ldots + \text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Constante dient der Ausdruck für π von Wallis, nach welchem für $\lim x = \infty$

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2x}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2x-1)}\right)^2 \frac{1}{2x}$$

Es ist folglich für $\lim x = \infty$

$$\begin{aligned} \lg \pi - \lg 2 = {} & 2 \cdot (\lg 2 + \lg 4 + \lg 6 \ldots + \lg 2x) - \lg 2x \\ & - 2 \cdot (\lg 3 + \lg 5 + \ldots + \lg (2x-1)) \end{aligned}$$

Die obige Formel giebt aber für $\lim x = \infty$

$$\overset{1 \ldots \infty}{\Sigma} \lg x = x \lg x - x + \tfrac{1}{2} \lg x + \text{Const.} = (x + \tfrac{1}{2}) \lg x - x + C,$$

woraus

$$\begin{aligned} \overset{1 \ldots \infty}{\Sigma} \lg 2x &= (2x + \tfrac{1}{2}) \lg 2x - 2x + C \\ &= (2x + \tfrac{1}{2}) \lg x + (2x + \tfrac{1}{2}) \lg 2 - 2x + C. \end{aligned}$$

Die Summe der Logarithmen der geraden Zahlen wird

$$\begin{aligned} \lg 2 + \lg 4 \ldots + \lg 2x &= \overset{1 \ldots \infty}{\Sigma} \lg x + x \lg 2 \\ &= (x + \tfrac{1}{2}) \lg x + x \lg 2 - x + C, \end{aligned}$$

folglich die der ungeraden Zahlen, wenn man diesen Werth von dem vorigen abzieht

$$\lg 3 + \lg 5 + \ldots + \lg (2x-1) = x \lg x + (x + \tfrac{1}{2}) \lg 2 - x$$

und wenn man beides in $\lg \frac{\pi}{2}$ substituirt,

$$\lg \pi - \lg 2 = (2x+1) \lg x + 2x \lg 2 - 2x + 2C - \lg x - \lg 2$$
$$- 2x \lg x - (2x+1) \lg 2 + 2x$$

oder

$$\lg \pi - \lg 2 = 2C - 2 \lg 2$$
$$\text{Const.} = \tfrac{1}{2} \lg 2\pi$$

Für briggische Logarithmen wird

$$\lg \sqrt{2\pi} = 0{,}3990899.$$

Nach dieser Ermittelung des Werthes der Constante hat man vollständig für briggische Logarithmen, wenn M der Modulus des briggischen Systems ist:

$$\overset{1\ldots x}{\Sigma} \lg x = \lg \sqrt{2\pi} + (x + \tfrac{1}{2}) \lg x - M \left\{ x - A_1 \frac{1}{x} + A_2 \frac{1 \cdot 2}{x^3} - A_3 \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} \ldots \right\}$$

Geht man nun zu den Zahlen über, so wird das Product

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x = \sqrt{2\pi} \cdot \frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{e^x} e^{A_1 \cdot \frac{1}{x} - A_2 \cdot \frac{1 \cdot 2}{x^3} + A_3 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} \ldots}$$
$$= \sqrt{2\pi} \cdot \frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{e^x} e^{\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5}}$$
$$= \sqrt{2\pi} \cdot x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} \ldots \right\}$$

Mit Hülfe dieses Satzes läſst sich die zu untersuchende Hypothese für jede Anzahl von Fehlerquellen oder Würfeln prüfen.

Die Aufgabe kann so gefaſst werden: Es sei eine Anzahl $2n$ Würfel gegeben, von denen jeder nur zwei Seiten hat, auf der einen mit $+\alpha$, auf der andern mit $-\alpha$ bezeichnet. Man sucht die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Wurf $2m\alpha$.

Es sind hier, was ohne Nachtheil geschehen kann, eine gerade Anzahl von Würfeln angenommen, um die Möglichkeit eines Wurfes Null, und ein gröſstes mittelstes Glied bei der Entwickelung eines

Binoms zu erhalten. Aus der Bezeichnung mit $+\alpha$ und $-\alpha$ folgt damit, dafs die Zahl der geworfenen Augen jedesmal nur um Vielfache von 2α von irgend einer andern verschieden sein kann.

Nach derselben Art, wie Lagrange die Aufgabe behandelt, ist die Anzahl der Fälle für jede Zahl von Augen gegeben, wenn man $(x^{-\alpha}+x^{+\alpha})$ auf die Potenz $2n$ erhebt. Der Coefficient irgend einer Potenz $2m\alpha$ zeigt an, wie viele Fälle stattfinden, wo $2m\alpha$ Augen geworfen werden, und diese Zahl dividirt mit der Anzahl aller Fälle $=(1+1)^{2n}=2^{2n}$, giebt die Wahrscheinlichkeit des Wurfes $2m\alpha$. Nach der gewöhnlichen Entwickelung wird

$$(x^{-\alpha}+x^{+\alpha})^{2n}=x^{-2n\alpha}+2nx^{-(2n-2)\alpha}+\frac{2n\cdot(2n-1)}{1\quad 2}x^{-(2n-4)\alpha}+\ldots$$

$$+\frac{2n\cdot(2n-1)\ldots(n+2)}{1\quad 2\ldots\ldots.(n-1)}x^{-2\alpha}+\frac{2n\cdot(2n-1)\ldots(n+1)}{1\quad 2\ldots\ldots\ldots n}x^{0}$$

$$+\frac{2n\cdot(2n-1)\ldots(n+2)}{1\quad 2\ldots\ldots.n}x^{+2\alpha}\ldots.$$

$$+\frac{2n\cdot(2n-1)}{1\quad 2}x^{(2n-4)\alpha}+2nx^{(2n-2)\alpha}+x^{2n\alpha}$$

Der gröfste Coefficient, wenn man die Coefficienten mit y und dem zugehörigen Exponenten von x als Accent genommen bezeichnen will, wird nach Lagrange's Ableitung sein:

$$y_0=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots.2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n\cdot\; 1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$$

gehörig zu der Zahl der Augen Null, und zu jeder positiven oder negativen Zahl der Augen $2m\alpha$, wird gehören

$$y_{2m\alpha}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2n}{1\cdot 2\ldots(n-m)\,1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+m)}$$

Wendet man die Formel von Stirling auf den Zähler von y_0 an, so wird der Zähler:

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n=\sqrt{2\pi}\cdot(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}\left\{1+\frac{1}{24n}+\frac{1}{1152n^2}-\frac{139}{414720n^3}\ldots\right\}$$

und jeder Factor des Nenners wird

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots n = \sqrt{2\pi}\cdot n^{n+\frac{1}{2}}\,e^{-n}\left\{1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\frac{139}{51840n^3}\ldots\right\}$$

folglich wird

$$y_0 = \frac{2^{2n}}{\sqrt{(n\pi)}}\left\{1-\frac{1}{8n}+\frac{1}{128n^2}+\frac{5}{1024n^3}\ldots\right\}$$

oder die Wahrscheinlichkeit des Wurfes Null, wenn sie durch ψ (0) bezeichnet wird, ist

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{(n\pi)}}\left\{1-\frac{1}{8n}+\frac{1}{128n^2}+\frac{5}{1024n}\ldots\right\}$$

Anstatt $y_{2m\alpha}$ selbst zu suchen, sucht man etwas bequemer

$$\frac{y_{2m\alpha}}{y_0} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots\ldots n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-m)\,1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+m)}$$

Die Formel von Stirling hierauf angewandt, giebt

$$\frac{y_{2m\alpha}}{y_0} = \frac{2\pi\cdot n^{2n+1}\,e^{-2n}\,e^{\frac{1}{6n}-\frac{1}{180}\frac{1}{n^3}\ldots}}{2\pi(n-m)^{n-m+\frac{1}{2}}(n+m)^{n+m+\frac{1}{2}}\,e^{-2n}\,e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}\right)-\frac{1}{360}\left(\frac{1}{(n-m)^3}+\frac{1}{(n+m)^3}\right)}}$$

oder

$$\frac{y_{2m\alpha}}{y_0} = \left(\frac{n}{n-m}\right)^{n-m+\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{n+m}\right)^{n+m+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}-\frac{n}{n^2-m^2}\right)-\frac{1}{180}\left\{\frac{1}{n^3}-\frac{n^3+3nm^2}{(n^2-m^2)^3}\right\}\ldots}$$

Da allgemein $x = e^{\lg x}$, so kann man wegen

$$\lg\left(\frac{n}{n-m}\right) = \frac{m}{n}+\tfrac{1}{2}\frac{m^2}{n^2}+\tfrac{1}{3}\frac{m^3}{n^3}\ldots$$

$$\lg\left(\frac{n}{n+m}\right) = -\frac{m}{n}+\tfrac{1}{2}\frac{m^2}{n^2}-\tfrac{1}{3}\frac{m^3}{n^3}\ldots$$

wenn man den ersten Logarithmen mit $(n+\frac{1}{2}-m)$, den zweiten mit $(n+\frac{1}{2}+m)$ multiplicirt und beide Producte zusammen addirt, setzen:

$$\left(\frac{n}{n-m}\right)^{n-m+\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{n+m}\right)^{n+m+\frac{1}{2}} = e^{-\frac{2m^2}{n}+(n+\frac{1}{2})\frac{m^2}{n^2}-\frac{2}{3}\frac{m^4}{n^3}+\frac{2n+1}{4}\frac{m^4}{n^4}\ldots}$$

$$= e^{-\frac{m^2}{n}+\frac{1}{2}\frac{m^2}{n^2}-\frac{1}{6}\frac{m^4}{n^3}+\frac{1}{4}\frac{m^4}{n^4}\ldots}$$

Aufserdem ist

$$\frac{1}{n}-\frac{n}{n^2-m^2}=-\frac{m^2}{n(n^2-m^2)}=-\frac{m^2}{n^3}-\frac{m^4}{n^5}-\cdots$$

$$\frac{1}{n^3}-\frac{n^3+3nm^2}{(n^2-m^2)^3}=-\frac{6m^2}{n^5}+\cdots$$

so dafs, wenn man Alles zusammennimmt und nur bis zu den Gliedern, die n^4 im Nenner haben, die Entwickelung fortsetzt, man erhält

$$\frac{y_{2m\alpha}}{y_0}=e^{-\frac{m^2}{n}+\frac{1}{2}\frac{m^2}{n^2}-\frac{1}{6}\frac{m^4+m^2}{n^3}+\frac{1}{2}\frac{m^4}{n^4}\cdots}$$
$$=e^{-\frac{m^2}{n}}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{m^2}{n^2}-\frac{1}{6}\frac{m^4+m^2}{n^3}+\frac{3}{8}\frac{m^4}{n^4}\cdots\right\}.$$

Das Verhältnifs zwischen der Wahrscheinlichkeit eines Wurfes zu der eines andern kann in der Praxis nur dann ein Interesse haben, wenn es kein allzu kleines ist, da bei der wirklichen Anwendung niemals eine so grofse Anzahl von Versuchen gemacht wird, dafs man irgendwie bei sehr kleinen Wahrscheinlichkeiten Theorie und Erfahrung vergleichen könnte. Hiernach wird für alle hier zu beachtenden Fälle $\frac{m^2}{n}$ nur eine kleine Zahl sein dürfen, wie grofs auch n sein mag. Man setze deshalb

$$m=p\cdot\sqrt{n}$$

wo p nicht einmal $=3$ angenommen werden kann, wenn man nicht Wahrscheinlichkeiten mit einander vergleichen will, von denen die eine fast 0,0001 der andern ist. Es wird dann

$$\frac{y_{2m\alpha}}{y_0}=\frac{\psi(2m\alpha)}{\psi(0)}=e^{-p^2}\left\{1+\frac{1}{2}p^2\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{6}\cdot\frac{p^4}{n}-\frac{1}{6}\cdot\frac{p^2}{n^2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{p^4}{n^2}\cdots\right\}$$

oder wenn man jetzt den Werth von $\psi_{(0)}$ einführt

$$\psi(2m\alpha)=\frac{1}{\sqrt{(n\pi)}}e^{-p^2}\left\{1-\left(\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{2}p^2+\tfrac{1}{6}p^4\right)\frac{1}{n}+\cdots\cdots\right\}\cdots$$

Wenn p merklich ist, da es überhaupt kaum >2 angenommen werden kann für die Fälle der Praxis, so wird $\psi(2m\alpha)$ wegen e^{-p^2}

zu klein, als dafs der letzte Factor irgend noch in Betracht kommen könnte, sobald n eine etwas grofse Zahl ist. Für den Wurf Null wird der Factor $(1 - \frac{1}{8n} \ldots)$, selbst wenn n nur $= 30$ angenommen würde, die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit nur so wenig ändern, dafs für den gegenwärtigen Zweck er völlig bei Seite gesetzt werden kann.

Man kann deshalb, mit völlig hinlänglicher Näherung, für die Wahrscheinlichkeit eines Wurfes von $2m\alpha$ Augen annehmen

$$\psi(2m\alpha) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} e^{-\frac{m^2}{n}}$$

Wendet man jetzt dieses Resultat auf die Beobachtungen an, nennt $2m\alpha$ einen beliebigen Fehler, der aus $2n$ Fehler-Quellen entsteht, von denen jede nur entweder einen Fehler $-\alpha$ oder einen Fehler $+\alpha$ bewirken kann, aber auch in jedem Falle einen von beiden bewirkt, so sei

$$2m\alpha = \Delta \qquad 2n\alpha = M$$

also M der möglichst gröfste Fehler, wenn alle Fehler-Ursachen auf eine Seite fallen. Es wird dann

$$\psi(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} e^{-\frac{1}{M2\alpha}\Delta\Delta}$$

Setzt man also

$$\frac{1}{M2\alpha} = hh \text{ oder } \frac{1}{n} = (h \cdot 2\alpha)^2$$

so wird

$$\psi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hh\Delta\Delta} . 2\alpha$$

für den Fall, dafs die Fehler um die Gröfse 2α sprungweise wachsen. Bei einerlei α verhalten sich folglich, bei verschiedenen Gattungen von Beobachtungen, die h umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den gröfstmöglichsten Fehlern, oder die Quadratwurzel aus der Anzahl der Fehler-Ursachen, die dabei concurriren.

Da zwischen $k(2\alpha)$ und $(k+1)2\alpha$ keine Fehler vorkommen können, so lange man discrete Fehler annimmt, so mufs die für $k(2\alpha)$ gefundene Wahrscheinlichkeit für den ganzen Raum von $(2k-1)\alpha$ bis $(2k+1)\alpha$ als geltend angenommen werden, wenn man zu continuirlichen Fehlern fortschreiten will, woraus, wenn 2α unendlich klein $= d\Delta$ angenommen wird, sich von selbst ergiebt, dafs

$$\psi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hh\Delta\Delta} \cdot d\Delta$$

die Wahrscheinlichkeit der Fehler ausdrückt, die zwischen Δ und $\Delta + d\Delta$ liegen, wenn die Fehler als continuirlich angesehen werden.

Die Hypothese, welche der Herr Geheime Oberbaurath Hagen, nicht zum Beweise, sondern zur Veranschaulichung des Gesetzes der Wahrscheinlichkeit der Fehler aufgestellt hat, empfiehlt sich in mehrfacher Hinsicht für diesen Zweck. Sie läfst gewissermafsen ahnden, wie auch bei den Fehlern der Beobachtungen eine gröfsere Anzahl von Elementen, bei denen wir absolute Ruhe voraussetzen, durch ihre Schwingungen, wie sie überall in der Natur sich finden, die gröfseren und kleineren Fehler bewirken können. Selbst das, was dabei am befremdendsten erscheinen kann, dafs jedem Elemente eine gleich grofse Schwingung beigelegt wird, ist näher betrachtet nicht so auffallend, als es zuerst erscheint. Jede Thätigkeit, sei es des Körpers oder Geistes, bedingt das Zusammenwirken einer so unendlich grofsen Anzahl von Theilchen, dafs, wenn über die Zahl derselben, wie hier, nichts festgesetzt wird, die Unterschiede in ihren Wirkungen, deren jede eine geringe ist, als verschwindend in dem Endresultat angesehen werden können. Man erhält so das Bild, als werde die Wahrheit durch eine gerade Linie vorgestellt, deren elementare Theile wir nie völlig an ihrer richtigen Stelle wahrnehmen können, sondern entweder nach der einen oder nach der andern Seite hin abweichend, wobei der Ueberschufs der Abweichungen auf der einen gegen die andere Seite verglichen, unserm getrübten Blicke nie die richtige Lage wirklich erblicken, sondern nur, wenn er sich vernichtet, annehmen lassen, dafs das Bild, was wir gesehen, der Wahrheit nahe kommen möge.

Zum Schlusse erlaube ich mir noch auf eine Stelle in meiner früheren Darstellung zurückzukommen, die eine Mifsdeutung erfahren hat. Ich hatte $\varphi(\Delta)$ definirt als die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers Δ bei discreten Fehlern, woraus von selbst folgt

$$\overset{0\ldots\infty}{\Sigma}\varphi(\Delta)=1.$$

Bei dem Uebergange zu continuirlichen Fehlern hatte ich kurz erwähnt, dafs man in diesem Falle diese Gleichung ersetzt durch

$$\int_0^\infty \varphi(\Delta)d\Delta=1.$$

Weniger einem Mifsverständnifs ausgesetzt wäre dieser Uebergang gewesen, wenn bei Annahme des constanten Intervalls zwischen zwei discreten Fehlern $=\omega$ die Wahrscheinlichkeit eines discreten Fehlers $=\omega\varphi(\Delta)$ angenommen wäre, woraus

$$\overset{0\ldots\infty}{\Sigma}\omega\varphi(\Delta)=1,$$

welches bei unendlich kleinem ω sogleich in das Integral übergeht. Es mufs nämlich in dem Ausdrucke der Wahrscheinlichkeit eines discreten Fehlers die Gröfse der Intervalle nothwendig als Factor aufgenommen werden, da bei einer bestimmten Gattung von Beobachtungen, für welche $\varphi(\Delta)$ als gegeben angenommen wird, die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Fehlers von der Gröfse des Intervalls abhängt. Theilt man die Differenz zwischen der äufsersten negativen und äufsersten positiven Grenze der Fehler $-a$ bis $+a$ in m Theile, so dafs $2a=m\omega$, und nimmt eine bestimmte Anzahl von Beobachtungen N an, so vertheilen diese sich auf $m+1$ Punkte bei discreten Fehlern, woraus sich die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Δ ergiebt. Hätte man dieselbe Differenz in $2m$ Theile getheilt, so dafs $2a=2m\frac{\omega}{2}$, so würden die N Beobachtungen sich auf $2m+1$ Punkte vertheilt haben, und folglich die Zahl der Fälle, in denen ein bestimmtes Δ stattfindet, um so näher nur halb so grofs wie früher gewesen sein, je gröfser die

Zahl m oder je kleiner das davon abhängige ω ist. Es ist deshalb der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers Δ bei discreten Fehlern bestimmter zu nehmen $= \omega\varphi(\Delta)$ für das Intervall ω, das letztere natürlich in denselben Einheiten ausgedrückt wie Δ. Diese Wahrscheinlichkeit erstreckt sich dann bei der Vorbereitung zu continuirlichen Fehlern und kleinem ω auf alle Fehler, die von $\Delta - \frac{1}{2}\omega$ bis $\Delta + \frac{1}{2}\omega$ etwa stattfinden könnten.

Es geht übrigens die Annahme $\omega\varphi(\Delta)$ über in $\varphi(\Delta)$ allein, wenn $\omega = 1$ ist, oder wenn als Einheit bei dem Ausdrucke von Δ diese Gröfse ω angenommen worden ist, so dafs die in der früheren Darstellung angewandte Form ebenfalls richtig ist, sobald als Einheit bei Δ die Gröfse des Intervalls zum Grunde gelegt wird, um welche die discreten Fehler springen.

Beitrag zur Begründung der Methode der kleinsten Quadrate.*)

In den Turiner Memoiren T. V. pg. 167 seqq. findet sich eine Abhandlung von Lagrange: *„Sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations“*, welche jetzt weniger bekannt zu sein scheint, da sie nur einmal von Lacroix in seinem kleinen Lehrbuch über Wahrscheinlichkeitsrechnung erwähnt gefunden wird. Die Behandlung der angedeuteten Aufgabe in derselben hat insofern ein grofses Interesse, als sie die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in eine solche Form

*) Am 8. December 1831 hat Encke in der Akademie einen Aufsatz gelesen: „Ueber die Begründung der Methode der kleinsten Quadrate“, von dessen Aufnahme in diese Sammlung abgesehen werden konnte, weil Encke selbst in dem ersten in diesem Band enthaltenen Aufsatz den wesentlichen Inhalt der erwähnten Arbeit fast wörtlich wiedergegeben hat. Siehe pag. 12—15 dieses Bandes. Der oben abgedruckte Aufsatz ist aufgenommen worden, weil er wohl geeignet scheint, den Leser über Ziel und Zweck des vorhergehenden auf pag. 201 kurz zu orientiren.

bringt, wie sie bei anderen Anwendungen gebräuchlich ist, und sonach wesentlich zur Erläuterung dieses speciellen Falles beiträgt. Bezeichnet man mit dem Namen Würfel solche Prismen von beliebig vielen Seitenflächen, bei denen auf irgend eine Weise vermieden ist, daſs sie auf die Endflächen fallen können, so führt Lagrange die Aufgabe darauf zurück, daſs man die Wahrscheinlichkeit sucht, mit welcher man hoffen kann, bei einer beliebigen Anzahl von Würfeln, deren Seitenflächen mit negativen und positiven Zahlen, sowie auch der Null, bezeichnet sind, einen Wurf zu thun, bei welchem die Summe der obenstehenden Zahlen gleich Null wird. Er leitet hieraus durch Induction, aber sonst strenge, ab, daſs das arithmetische Mittel aus einer Anzahl von Beobachtungen von gleicher Güte das wahrscheinlichste Resultat giebt, und knüpft an diesen Satz, den auch Gauſs bei seinen Arbeiten über die Theorie der Methode der kleinsten Quadrate einmal (in der Theoria motus corp. coel.) benutzt hat, Betrachtungen, die eigentlich die Methode der kleinsten Quadrate schon impliciren, wenn man sie etwas weiter verfolgt, wie z. B. die Analogie mit den Eigenschaften des Schwerpunkts, sowie auch der Gebrauch des Wortes „Gewicht eines Resultates" andeutet.

Bei den ganz hiermit analogen Betrachtungen, welche unser Mitglied, Herr Hagen, in seinem Buche über Wahrscheinlichkeitsrechnung angestellt hat, läſst sich fragen, welches Würfelspiel unter den bekannten dasjenige sein würde, bei welchem die verschiedenen möglichen Würfe sich so vertheilen würden, wie die Fehler bei den Beobachtungen bei dem in neuerer Zeit angenommenen Gesetz. Herr Hagen hat gezeigt, daſs dieses der Fall sein würde, wenn man eine gröſsere Menge von Fehlerursachen annähme, von denen jede entweder einen positiven oder einen negativen kleinen Fehler, von gleicher Gröſse bei allen, zu bewirken vermöchte. Es kann sonach die Art, wie die Fehler bei den Beobachtungen sich vertheilen, reducirt werden auf das bekannte Spiel Bild und Schrift, wenn man die eine Seite der aufgeworfenen Münze mit einem positiven, die andere mit einem negativen Fehler, von gleicher absoluter Gröfse, bezeichnet, und eine hinlänglich grofse Anzahl von Münzen jedesmal gleichzeitig aufwirft. Die Anzahl der Münzen fällt zusammen mit der Anzahl der Fehlerquellen, und jede obenliegende Fläche giebt die Einwirkung an, welche eine einzelne bestimmte Fehlerquelle in einem bestimmten Falle ausübte.

Untersucht man, wie viele solcher Fehlerquellen etwa erforderlich sein möchten, um die Vertheilung so genau darzustellen, wie auch bei der am weitesten Erfahrung aus dieser abgeleitet oder als wirklich mit der Erfahrung übereinstimmend nachgewiesen werden kann, so findet sich, dafs schon bei 80 Fehlerursachen, deren jede immer entweder einen positiven oder einen negativen kleinen Fehler, und zwar beide sowohl unter sich als auch bei jeder einzelnen Fehlerursache von derselben absoluten Gröfse, bewirkt, Alles erreicht wird, was irgend aus der Erfahrung abgeleitet werden kann.

Die Entstehung der Fehler im Allgemeinen kann sonach aus den Schwingungen einer gar nicht sehr bedeutenden Anzahl von Elementen erklärt werden, wobei es sich von selbst versteht, dafs hier nur solche Fehler in Betracht kommen, welche recht eigentlich in das Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung fallen, bei welchen also ein nachweisbarer Grund der Entstehung nicht angenommen werden kann.

Druck von G. Bernstein in Berlin.