GLI ELEMENTI
DI EUCLIDE

A MIGLIORE, E PIU' CHIARA MANIERA RIDOTTI,

ARRICCHITI PER LA MAGGIOR PARTE DI NUOVE DIMOSTRAZIONI,

PREMESSI

GLI ELEMENTI DELL' ALGEBRA,

DEDICATI

A S. S. R. M.

DAL P. MAESTRO GIULIO ACCETA, AGOSTINIANO,
Professore di Matematica nella Regia Università di Torino.

IN TORINO, MDCCLIII.

NELLA STAMPERIA REALE.

SIRE

SE io avessi voluto solamente considerare, che alla vostra grandezza, ed all' altissimo stato vostro nulla conviensi, che grande non sia, e splendido, e ammirabile; non avrei avuto giammai ardimento di offerire questa scarsa opera, e di sì comune soggetto, che

senza

senza ingannare di soverchio me stesso, io non poteva ritrovare in essa menoma cosa, che sotto dello sguardo Reale degna rendessela di comparire. Ma tra gl' innumerevoli vostri pregi, assai forte argomento a riconfortarmi ne porge quello eccelso carattere luminoso, che in Voi maravigliosamente risplende, di Protettore di ogni buona Letteratura, la quale da Voi, quasi da dolce Padre, è amorevolmente abbracciata, e con magnificenza splendidamente promossa. Carattere, del quale l' augusta Persona vostra non solo, ma il Regno intero rinomato rendesi, e glorioso: Imperocchè senza andar quì rammentando gli infiniti altri beni, che quindi, quasi da perenne fonte, derivano, mirabili sono oltre modo gli accrescimenti, e progressi, che ne ritraggono l' arte, ed il valor militare, da cui a' giorni nostri, seguendo le vostre eroiche vestigie, illustrata ne viene, e renduta celebre questa egregia Nazione. Conciosiacosachè dalle antiche, e moderne Storie veggiamo esservi connaturale unione, e fratellevole amicizia tra lo studio delle scienze, e belle arti, e la militare eccellenza; talmente che ne' popoli incolti, e selvaggi il combattere, e vincere attribuire si debba a furor barbaro di moltitudine, spinta da brutale fierezza, piuttosto che a virtù ragionevole regolata da consiglio, da disciplina, e da magnanima franca virile fortezza, vere cagioni del valor militare, da cui nomati sono gli Eroi. E certamente se a tutti note non fossero, e manifeste le altre cognizioni scientifiche, le quali a formare un eccellente Capitano, e a rendere invitto un esercito vi concorrono unitamente: nessuno però, che io creda, esser vi può, il quale non sappia, qual vasto, e direi immenso uso nella grande arte

mi-

militare si abbiano le Matematiche Scienze, e specialmente la Geometrìa. Che tutto ciò sia verissimo, SIRE, Voi più di ogni altro il sapete: e per la vostra incredibile propensione per questa sorta di studi, e per la intima, e piena cognizione da Voi posseduta, e per lunga, e molto usata sperienza fedele, persuaso della infinita loro utilità, con saggio lodevolissimo provvedimento ordinaste, che nella celebratissima Università Vostra i primi passi di tutta la Gioventù studiosa ne' Geometrici spazj si esercitassero: riducendo per tale maniera ad una ugualmente nobile, e giovevolissima pratica l' avvertimento di quell' antico, il quale volea, che alla scuola della Filosofía (vuolsi dire alla scienza delle umane cose, e Divine) chi non era Geometra, non si accostasse.

Da sì alte cagioni animato, già da gran tempo rivolsi il pensiero a cercare, se cosa alcuna far si potesse, che allo avanzamento di questi Studi contribuisse. Credei non infruttuoso lavoro lo andar quasi ritessendo il primitivo Testo degli Elementi di Euclide: e alle poche importanti proposizioni altre giovevoli sostituirne, e ritrovare dimostrazioni dirette, e facili in luogo delle strane, e difficili, capaci sovente di confondere piuttosto, e di alienare, che di porger chiara luce, e allettamento recare agli animi ancor immaturi, ed impazienti. Il benignissimo gradimento, col quale vi degnaste di accogliere questa mia idea, la prima volta, che ebbi l' onore di umiliarvela, diemmi tutto il coraggio per accingermi all' opra, e a compiuto fine condurla. Sotto auspicj sì favorevoli concepito questo pensiero ebbe ancora la sorte di piacere, e di comparire non inetto agli occhi perspicacissimi di sua

Altezza

Altezza Reale il Signor DUCA di SAVOJA , *Principe del quale per la grandezza dell'animo, e per la chiarezza de' talenti, e per tant' altre inestimabili doti, non può farsene un elogio, il quale meriti di essergli tributato, se non col dire, che egli è degno di Voi. Io non posso, nè debbo asserire, che al buon disegno, ed al premeditato scopo anche la esecuzione dell' opera corrisponda. Ma siccome giova sperare, che sia ben accolto anche un ardimento di chi, in quel poco, che a possa s' adopera per giovare altrui, ed ancora più per secondare le indefesse, benefiche vostre cure paterne: così confido, che questa mia fatica, e buona volontà sia per essere non solamente protetta dalla Maestà vostra, ma anche accetta, e grata a chiunque abbia a cuore il zelo, e bene del Pubblico.*

A' LEGGITORI.

Esce alla luce l' Opera del Padre Maestro Acceta. Egli desiderò, ma non ebbe la consolazione di veder compiuto questo non picciol frutto degli studi suoi, e dello zelo, che aveva di recare giovamento agli altri, e singolarmente alla studiosa Gioventù, che assai amava. Morte ce lo tolse in tempo, che ne era incominciata la stampa; onde a Noi Romitani di Sant' Agostino di Vigone, li quali egli a se unire volle in istretto nodo d'amistà, e per fratelli suoi trascelse specialmente, toccò la sorte di farvi porre l' ultima mano, in adempimento della volontà sua. Noi non parliamo dell' acutezza del suo ingegno, nè delle lunghe, ed utili meditazioni, che fece per lo corso d' anni ventidue, in cui insegnò le Matematiche in quest' alma, ed illustre Università, e nemmeno di quelle non meno importanti Osservazioni Astronomiche, per cui si meritò anche l' onore di essere aggregato alla celebre Accademia delle Scienze di Parigi. Imitatori della modestia di lui, accenneremo solamente, che in ogni cosa nodrì sempre una vera brama di poter giovare assai più, che piacere al Pubblico.

Tutta l' Opera è divisa in due parti, la prima delle quali contiene l' Algebra; e primieramente in essa con brevità, e chiarezza esposto ne viene l'Al-

gorismo

gorismo delle intiere quantità, cioè l' addizione, sottrazione, multiplicazione, divisione, ed estrazione delle radici quadrate, e cubiche, tanto da' numeri, quanto dalle specie, o quantità letterali: in secondo luogo ritrovasi un compiuto trattatto delle frazioni, dimostrando ad evidenza ciò, che propone, e dopo di questo evvi il calcolo delle quantità radicali: quindi si tratta delle equazioni Algebraiche, de' gradi diversi di esse, e chiare si danno, e brevi le regole di formare, e di ridurre ad equazione finale le primitive equazioni di primo, e secondo grado, e di rintracciare i valori delle incognite grandezze, che nelle medesime equazioni si ritrovano: finalmente per utilmente, e con diletto esercitare nel calcolo analitico i Giovani principianti, si risolvono ventidue Problemi semplici, undici di quantità intiere, ed altrettanti di quantità fratte. Vi sono dopo d' esse le regole dell'Algebra Diofantea, o sia di ridurre a perfetto quadrato qualunque data formola non quadrata, e dodici questioni, e problemi ad esso calcolo appartenenti si risolvono; vi sono inoltre quattro problemi quadratici semplici, e cinque quadratici affetti.

Nelle risoluzioni de' sopraddetti Problemi molte, ed utilissime riflessioni, e regole particolari si ritrovano per risolvere più facilmente, e con maggiore speditezza le quistioni proposte, quando tali condizioni in se racchiudono, che ci permettono di allontanarci dalle regole generali. E singolarmente si danno chiarissime regole, ed utilissime per determinare

nare i limiti, e delle arbitrarie quantità ne' Problemi indeterminati, e delle quantità cognite ancora, in certi Problemi, ne' quali non prendendosi le arbitrarie, e le cognite grandezze tra certi determinati limiti, impossibile, o impraticabile si rende la risoluzione d'essi quesiti: intorno a questo si leggeranno le risoluzioni dei Problemi, poste alle pagine 70. 71. 73. 74. 78. 83. 95. 103. 106. 117. 120. 123. 129., e singolarmente il Problema ultimo dei Quadratici affetti, posto alla pagina 132., nel quale chiaramente si può vedere, quale, e quanto artificio in alcuni quesiti necessario sia a determinare i limiti, tra' quali prendere si debbano le arbitrarie grandezze, e le cognite eziandio, acciocchè essi quesiti si possano risolvere.

La seconda parte di quest' Opera contiene i primi sei Libri degli Elementi di Euclide Geometrici, con breve trattato de' Solidi: tutte le Proposizioni in essi libri contenute sono dimostrate con grandissima facilità, e per mezzo di molte Proposizioni premesse, come Lemmi, alle più difficili di Euclide, e per via di molte utilissime verità dedotte, come Corollari, dalle principali Proposizioni precedentemente dimostrate. Alle poco importanti Proposizioni di Euclide ne sono sostituite delle altre di molta utilità, come particolarmente si può vedere nel quinto Libro, nel quale in luogo delle sei prime, e delle due ventesima, e ventunesima, si troveranno altre otto utilissime Proposizioni. Le Dimostrazioni poi quasi tutte sono dirette, e positive.

Tra

Tra le Propoſizioni aggiunte, oltre a quelle, che ſparſe ſono in tutti e ſei i libri, vi ſono tre utiliſſimi Problemi nel fine del primo libro, una Propoſizione di più nel ſecondo libro, le Propoſizioni del quale ſono tutte dimoſtrate, e ſinteticamente, ed analiticamente. Nel fine del terzo libro, oltre a quelle di Euclide, ſi trovano otto Propoſizioni di molta utilità, e quattro ſono aggiunte al quarto libro. Il quinto libro contiene propriamente la Scienza univerſale delle proporzioni: poichè dopo di avere nelle definizioni di eſſo data una chiara, e diſtinta idea di tutte le varie ragioni e ſemplici, e compoſte, e delle proporzioni, e de' diverſi generi di eſſe; ſi dimoſtrano tutte le Propoſizioni appartenenti alle quantità proporzionali, con dimoſtrazioni brevi, facili, ed univerſaliſſime; e colla medeſima facilità, e chiarezza nelle proporzioni ſeconda, ottava, decima, e nelle ultime dodici del medeſimo libro ſi dimoſtra la ſcienza delle quantità ſproporzionali, utiliſſima per l'intelligenza di Archimede, Apollonio, e degli altri Autori claſſici.

Anneſſe al medeſimo primo Libro vi ſono tredici Propoſizioni appartenenti alle ſerie, e progreſſioni Geometriche, e molto utili, e chiare. Vi ſono inoltre dodici Propoſizioni. Finalmente vi ſono dieci Problemi, o Queſtioni utiliſſime, le quali ſi riſolvono per mezzo delle ſuddette progreſſioni.

Il ſeſto Libro è trattato con maraviglioſo artificio, ripieno di nuove, ed utiliſſime coſe, che negli ordinari comenti di Euclide non vi ſono. Alle Propoſi-

poſizioni 27. 28. 29. di pochiſſimo uſo ſono ſoſti-
tuite altre Propoſizioni molto utili. Oltre a due Pro-
poſizioni aggiunte al medeſimo Libro, ſonovi dodi-
ci problemi dipendenti dall' uſo delle proporzioni,
cioè ſei belliſſime queſtioni aritmetiche, tre Proble-
mi lineari, e tre Problemi geometrici piani, colle
loro coſtruzioni geometriche, e dimoſtrazioni.

Il Trattato de' Solidi in poche Propoſizioni con-
tiene, quanto vi è di più neceſſario, ed utile nella
Geometría.

Così finiſce queſt' Opera, la quale non eſſendo
riuſcita ben purgata dagli errori, ſi troveranno que-
ſti deſcritti in fine del Libro.

Fr. FRANC.

Fr. FRANC. XAVERIUS VAZQUEZ Peruanus, Sacræ Theologiæ Magiſter, totius Ordinis Fratrum Erem. S. P. Auguſtini Vic. Generalis.

CUm Liber, qui inſcribitur: *Primi Elementi della Geometria di Euclide, e dell' Algebra, ec.* ab admodum Rev. Patre Magiſtro Fr. Julio Acceta elaboratus, a ſapientiſs. Viris, Nobis aſſentientibus, fuerit approbatus. Nos tenore præſentium, facultatem concedimus, ut typis mandetur, ſi ita iis, ad quos reliquum ſpectat, videbitur. In quorum fidem has literas noſtri muneris ſigillo munitas dedimus. Dat. in Conventu noſtro S. P. Auguſtini de Urbe die 5. Auguſti 1752.

Fr. FRANC. XAVERIUS VAZQUEZ
Vic. Generalis.

Magiſter Fr. Auguſtinus Selmi Venetus
Ordinis Secretarius.

Imprimatur. Vicarius Generalis S. Officii.

V. Guentius A. L. P.

Se ne permette la ſtampa. Morozzo per la Gran Cancelleria.

PRIMA PARTE.

INCOMINCIANO GLI ELEMENTI DELLA ALGEBRA APPARTENENTE A GEOMETRIA.

Definizione Prima.

1. ALGEBRA si puote acconciamente nomare sublime, ed universale Aritmetica speciosa, dacchè con le specie, o sieno lettere dello Alfabeto per se medesime indifferenti a disegnare qualunque sia quantità, forma i calcoli suoi. E per vero dire colle spezie a, o si vero b non rimane determinato verun quanto, ma liberi siamo ad indicare qualunque cosa ne piace. All' incontro colle cifre numeriche restiamo legati al valore determinato di ciascheduna di quelle; dacchè 4 non puotè indicare se non quattro unità, e non più, e non meno. E lo stesso delle altre numeriche note intraviene.

Intanto egli è costume servirsi delle prime lettere a, b, c, d, e, ec. dello Alfabeto per dinominare le cognite quantità, e date; al contrario poi dalle ultime lettere x, y, z indicate si vogliono le non conosciute quantità, e che si vanno cercando.

Definizione II.

2. Algorismo Algebraico gli è un artificio di compiere colle specie, che pur sono lettere, le operazioni tutte aritmetiche: sommare, sottrarre, multiplicare, dividere, e trarre eziandio le radici, impiegando sì fatte operazioni a dimostrare i teoremi, ed a risolvere i problemi.

Corollario.

3. Considerata adunque la significazione amplissima delle spezie, riescono le operazioni analitiche più universali, facili insieme, e precise nel dimostrare i teoremi, e nel risolvere le questioni, che problemi sono appellate. E tanto più, che col calcolo specioso trattate vengono le quantità conosciute, e del pari le incognite ancora.

Definizione III.

4. Segni Algebraici sono alcune cifre locate in vece delle parole, per iscorciare sì la scrittura, e sì rendere appariscente l'operazione, ed oculare; e sono tre i veri segni $+$, $-$, $=$, a' quali aggiugner si dee il quarto $\sqrt{}$.

Definizione IV.

5. $+$ Vale *più*, ed è segno positivo esprimente somma, ed addizione di quantità a quantità: perciò $a + x$ ne mostra la fatta somma delle due quantità a, ed x positive. Questo segno $+$ anche, se non si vede espresso, s'intende sempre affisso davanti a ciascuna quantità, purchè notato non abbia il suo contrario, che è

Definizione V.

6. $-$ *Meno* segno negativo, che dimostra le quantità, alle quali è prefisso doversi sottrarre, o essere già sottratte dalla quantità precedentemente scritta: quindi $a - x$ ne mostra un residuo avanzato dopo avere dalla quantità a sottratta la quantità x, la quale era positiva; ma per sottrazione fatta, in negativa si è cangiata. Il medesimo segno $-$ mai non s'intende, se espresso non vedesi; laonde, ove bisogna, ciascuna volta scriver si vuole.

Corollario.

7. Dunque $+$, e $-$ sono segni contrari, come quelli, che uno afferma, e l'altro nega: per uno si pone la quantità, e per l'altro viene distrutta; in somma uno è positivo, e l'altro negativo. Da ciò nasce, che la medesima quantità ritrovandosi

affetta

affetta da tali segni contrari $+$, e $-$ nel suo valore è nulla, così $a - a$ oppure che è (5) lo stesso $+ a - a$ val nulla, come appunto se uomo avesse di positivo mille scudi, cioè $+ 1000$, ed avesse insieme di debito mille scudi, cioè $- 1000$, sarebbe il suo avere $+ 1000 - 1000$, che vale a dire, gli resta zero, cioè nulla pagando i debiti suoi.

Definizione VI.

8. $=$ *Uguale*. Questo segno esprime uguaglianza tralle prescritte quantità, e tralle notate dopo del segno $a = x$, ne mostra, che a, et x sono quantità uguali $a = b + c$, o sia $9 = 6 + 3$, dinota, che la somma $b + c$ sia uguale alla quantità a; e $6 + 3$, sono uguali al solo 9. Finalmente $a = d - c$, oppure $9 = 12 - 3$, vuol dire, che il residuo dalla quantità d sottrattane c, è uguale ad a; siccome da 12 togliendo 3 avanza 9.

Definizione VII.

9. $\sqrt{}$ *Radice*. Questo segno esprime la radice della quantità tutta sotto la sbarra del segno notata; ma di che grado sia la radice, rimane indicato dal numero soprascritto nell' apertura del segno.

Perciò $\sqrt{a}$, o sia $\sqrt[2]{a}$, significa la radice quadrata, o seconda da estraersi, o già estratta dal quanto a. $\sqrt[3]{a}$ dinota la cuba, o terza radice da estraersi, o tratta dal quanto a. Onde se accade, che dalla quantità sotto al radical segno locata, la espressa radice estraere non si possa, allora la espressione $\sqrt[3]{a}$, o $\sqrt[4]{a}$, o altra, che sia, sempre sarà un quanto sordo, irrazionale, come sarebbe in numeri la radice quadrata, o cuba di $\sqrt{2}$, dacchè numero ritrovar non si puote, nè esprimere, che per se stesso multiplicato formi il 2.

Di tali radici però quantunque inestraibili, e che non si possono esprimere in numeri intieri, nè rotti, nè per mezzo di caratteri speciosi; nulladimeno molto comune egli è l' uso ne' calcoli, dacchè ne hanno le loro proprietà non meno singolari, e maravigliose di quello, che ne abbiano i razionali quanti medesimi, e particolarmente non meno che questi, anche le irrazionali quantità sono capaci delle generali operazioni. Si sommano insieme, si sottraggono, si multiplicano, e si dividono: e perciò si è trovato

vato il modo d'indicarle coll'accennato carattere $\sqrt{\ }$, e quindi proceder avanti ne' calcoli.

Il nome poi di radice ſignifica la quantità, che per ſe ſteſſa multiplicata altra ne forma, che è il quadrato della multiplicata radice, la quale, ove ſi torni a multiplicare col ſuo quadrato, altra quantità ne proviene, che è il cubo di ſua radice, e così in infinito.

Definizione VIII.

10. $>$ *Maggiore* Queſta cifra ne moſtra eſſere maggiore la quantità ſcritta nella apertura, e minore l'altra quantità ſegnata alla punta del ſegno. $a > b$ ſi legge a maggiore di b. Dunque roveſciando la cifra $<$ *Minore* vuol dire, che la quantità ſcritta da prima è minore della ſeguente. $d < c$ ſignifica eſſere d minore di c.

Definizione IX.

11. $\times$ Per queſta cifra dimoſtraſi la multiplicazione tralle quantità ſcritte da deſtra, e da ſiniſtra, e tutto inſieme ne dona il prodotto. Quindi $a \times b$ vale il prodotto, che naſce multiplicando le due quantità a, e b tra di loro. Inoltre la medeſima quantità riſultante dalla multiplicazione di più quantità, come $a \times b$, ſcriveſi ancora ab ſegnando i quanti multiplicatori un dopo l'altro uniti, e ſenza frapporvi ſegno veruno nè $+$, nè $-$ di ſorta, che ab ſignifica il prodotto di a in b, come appunto $a \times b$, ed $abcd$, è lo ſteſſo che $a \times b \times c \times d$, ſupponendo, che il perturbare l'ordine alfabetico delle lettere, nulla importa, nè varia la quantità; eſſendo $abcd = cadb$. Intanto però è uſo comune di ſegnare nelle compoſte quantità le loro ſpecie coll'ordine dell'alfabeto; onde ogni equivoco tolto ne venga. Che ſe poſcia un prodotto algebraico $abcd$, prender ſi debba un dato numero di volte, cioè multiplicare per un numero dato, allora ſi dee tal numero ſcrivere nel prodotto in primo luogo $3abcd$, e non altrimenti $ab3cd$; conciofſiacchè fuor dell'uſo comune operando, potrebbe indurre altrui in equivoco, ed errore.

12. La multiplicazione poi non altro è, che prendere una quantità tante volte, quante minime parti, o diciamo unità ſi

ritrovano nell' altra. Perciò ſe foſſe $a = 3$, e $b = 4$ ſarebbe $a \times b = 3 \times 4 = 12$. Dacchè eſſendovi tre unità nel 3., prender ſi dee il 4. tre volte, o ſi vero eſſendovi quattro unità nel 4., prender ſi dee il tre quattro volte, acciocchè ſi abbia il prodotto, cioè la quantità, che naſce dalla multiplicazione fatta tra due quantità, così $a \times b = 3 \times 4 = 12 = 4 + 4 + 4 = 3 + 3 + 3 + 3$. Che ſe in vece de' numeri foſſero i produttori, e moltiplicatori a, e b linee rette, cioè (*Fig. I.*) $a =$ AB, e $b =$ AC, ſarebbe $a \times b =$ AB $\times$ AC $=$ ABDC piana ſuperficie nata dal coſtituire la linea BA, ſiccome era in A, così ſopra ciaſcuna minima parte, o ſia unità, o ſia punto della linea AC per fino alla ſua eſtremità C; laonde AB dalla ſua poſizione in AB paſſando per tutti i minimi ſpazi intermedi viene a giugnere all' eſtrema poſizione in CD, ed il prodotto di tale moltiplicazione, che conſiſte in un movimento, o fluſſo uniforme di linea ſopra linea, egli è il piano ABDC; come appunto il prodotto, moltiplicando il 3 per 4, egli è il 12 numero piano in ſimigliante maniera, e nello ſteſſo modo ricomponente le ſue unità.

COROLLARIO I. (*Fig. II.*)

13. Dunque ſe il numero, o linea $= a =$ AB $=$ AC $= b$ numero, e linea v. g. $4 = 4$ ſarà AB $\times$ AC $= 4 \times 4 = 16$ quadrato (9) della radice 4, e nomaſi quadrato; perchè da tutte le bande ne moſtra la medeſima fronte, o ſia lato, e nella ſteſſa maniera.

COROLLARIO II.

14. E perchè ragion vuole, che le ſimili coſe, e dello ſteſſo valore vengano appellate con un ſolo nome, ed indicate con una ſpecie, e non con diverſe, opportune piuttoſto ad eſprimere diſuguali coſe, e diverſe; ſarà eſpreſſione algebraica di qualunque quadrato ſia numerico, ſia letterale la ſeguente formola $a \times a$, oppure $b \times b$, o ſia $x \times x$ ec. cioè aa, bb, xx, ec.

DEFINIZIONE X.

15. $\frac{m}{n}$. Queſta maniera di ſcrivere una ſpecie ſopra di orizzontal linea, l' altra ſotto, ſi legge, *m diviſo* per n, ed eſprime

me la superior quantità m essere stata divisa per la inferiore n; quindi $\frac{m}{n}$ è il valore della fatta divisione, qual valore quoziente si noma, e consiste nel numero delle parti, che m numeratore contiene di n divisore, o denominatore di qualunque sia unità, o quanto, che s'intende diviso in tante parti, quante da n sono espresse, e denominate.

Definizione XI.

16. Tutte le quantità sotto di ùn solo segno (4) $+$, o $-$ si nomano incomplesse, e semplici, come a, e $-b$, e $5ab$, oppure $\frac{ab}{c}$. Ma dove sono congiunte co' loro segni distinti, o diversi, composte si addomandano, e complesse, quali sono $a+b$, $c-d$, e $\frac{ac-bc}{m}$ ec.

Definizione XII.

17. Le parti delle composte quantità si appellano membri. Ove due se ne veggiono, $a+b$, o sia $a-b$, il quanto si dice binomio, trinomio quando ne ha tre ec.

Definizione XIII.

18. Gli numeri alle specie prefissi nomati vengono coefficienti. Nella quantità $8ab$ il coefficiente numerico è il numero 8, anche una specie si noma coefficiente dell' altra. Nella quantità ax la specie a dicesi coefficiente del x. Nella quantità $ax+4cx$ coefficiente del x egli è la quantità $a+4c$. Questi coefficienti sono per vero dire moltiplicatori, perchè (11) dimostrano quante volte si dee prendere la quantità. Oltredichè noiosissima cosa ad ognuno sarebbe scrivere, o enunziare $a+a+a+a+a$; laonde, numerando, torna comodo il dire, $5a$. Intanto sia regola generale, che l' unità è coefficiente di ogni quanto, e però $a=1\times a=1a$: similmente $x=1\times x=1x$, così $7bx=1\times 7bx$ ec.

Definizione XIV.

19. Quantità in tutto simili, ed uguali sono quelle, che hanno le medesime specie, e i medesimi segni, e gli stessi coefficienti, come $5acx$, e $5acx$, o si vero $2ab-3cx$, e $2ab-3cx$

$3cx$; ma in tutto simili, e disuguali sono quelle, che hanno i medesimi segni, e le specie istesse, ma diversi coefficienti, come sarebbero $3ax + 8cy$, e $5ax + 2cy$. Altre poi sono simili nelle specie, ma diverse ne' segni, e disuguali ne' coefficienti, come $2ac - 3ay$, e $7ac + ay$.

20. Oltre a queste vi sono quantità dissimili, e diverse, ma dello stesso valore, come sarebbe $a = b + c$, oppure $12 = 15 - 3 = 8 + 4$, o si vero $2 \times 9 = 6 \times 3 = 18$.

PROPOSIZIONE I.

Problema.

21. Ridurre a più semplice espressione le quantità complesse.

Risoluzione.

Le quantità simili nelle specie, e ne' segni, sieno uguali, sieno disuguali, vogliono esser scritte una sol volta, e per loro coefficiente nuovo numero, (18. 19.), che contenga tutti gli altri coefficienti. Ove sia $3ab + 2ac - 5bb + 2ab - 25bb + 3ac - 8bb + 9ab - 2bb + ab + ac$, riducendo sarà $15ab + 6ac - 40bb$.

22. Quelle poi, che hanno segni contrari, avendo uguali coefficienti, si deono cancellare. Se fosse $4ac + bb - 4ac$, spurgando risulta bb. Ma se disuguali sono i loro coefficienti, si dee ritenere col suo segno la maggior quantità, a quella prefiggendo per coefficiente il residuo, che avanza, togliendo dall' unione de' coefficienti maggiori del medesimo segno gli uniti coefficienti minori del segno contrario: se fosse la quantità $4ac - 8cx + bb - ac - 3bb + 3cx$, spurgando sarà $3ac - 2bb - 5cx$.

PROPOSIZIONE II.

23. Adattare il proprio nome alle aritmetiche cifre nelle consecutive sedi locate.

Risoluzione.

Si deono considerare le cifre (qualora non sono molte) come divise a tre a tre, principiando dalla destra, e procedendo a sinistra. De' caratteri di questi ternari sempre il primo è numero

mero, il secondo contiene decine, ed il terzo esprime centinaia. Nel secondo ternario il primo carattere disegna unità di migliaia, il secondo decine di migliaia, il terzo centinaia di migliaia.

Dove poi a sinistra si trovano altre cifre aritmetiche, si conservan per sempre le denominazioni già date alle prime sei cifre, e le altre seguenti sei sono milioni, le altre seguenti sei sono bilioni, e le altre susseguenti sei cifre sono trilioni, e così in infinito; quadrilioni ec. come si vede.

Mille trilioni	Cento trilioni	Dieci trilioni	Un trilione	Cento mila bilioni	Dieci mila bilioni	Mila bilioni	Cento bilioni	Dieci bilioni	Bilioni	Cento mila milioni	Dieci mila milioni	Mila milioni	Cento milioni	Dieci milioni	Milioni	Cento mila	Dieci mila	Mila	Cento	Dieci	Uno
1	2	1	1	7	1	8	5	1	3	9	1	4	5	1	7	8	1	4	2	1	1

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA.

24. Sommare le quantità.

RISOLUZIONE I.

Ove sieno numeri semplici, come 7, e 9, sarà loro somma $7 + 9 = 16$: ove sieno alquanto composti, come 3456, e 978, e 65, si scrivano un sotto l'altro, e così facendo di tutti, purchè sieno in retta linea da sù in giù giusta il loro grado, numeri sotto numeri, (23) decine, ec. come si vede ec., oppure la somma si faccia in tutto co' segni (4) $3456 + 978 + 65 = 4499$.

$$\begin{array}{r} 3456 \\ 978 \\ 65 \\ \hline 4499 \end{array}$$

RISOLUZIONE II.

Nelle lettere la somma di più quantità, sieno semplici, (15) sieno composte, si forma connettendo insieme le quantità medesime co' propri segni, che hanno, e poi (se fa d'uopo) si riducono collo spurgo (20).

a, b, x, fanno la ſomma $a+b+x$; così,
$a-y$, $a-x$, danno la ſomma $a-y+a-x$, e riducendo (22), $2a-y-x$. Ed avendo, $3a$, $c-x$, $x-3a$, $3b+4c$, ſarà, ſpurgando, e riducendo (20. 21. 22.) $5c+3b$. Similmente $3a-2\sqrt{ax}$, $8a-\sqrt{ax}$, $b-7a-12\sqrt{ax}$, fanno $4a+b-15\sqrt{ax}$. Inoltre $2a\sqrt{ax}$, $-3c\sqrt{ax}$, fanno $2a\sqrt{ax}-3c\sqrt{ax}$, che vale $\overline{2a-3c}\times\sqrt{ax}$ (11).

25. Le ſimili frazioni (15), le quali hanno lo ſteſſo Denominatore, vanno ſommate come ſi è fatto ſopra delle quantità intere, apponendo alla fatta ſomma de' numeratori una ſol volta il denominatore. Avendo,
$\frac{3aa}{m}-\frac{2bb}{m}$, & $\frac{4aa}{m}-\frac{3bb}{m}$, fanno la ſomma, $\frac{7aa-5bb}{m}$. Parimente
$\frac{4a}{m}\sqrt{ax}$, $\frac{4b}{m}\sqrt{ax}$, $-\frac{7b}{m}\sqrt{ax}$, $-\frac{3a}{m}\sqrt{ax}$, forman la ſomma, $\frac{\overline{a-3b}}{m}\times\sqrt{ax}$, cioè, $\frac{a\sqrt{ax}-3b\sqrt{ax}}{m}$.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA.

26. Sottrarre le quantità.

RISOLUZIONE I.

De' numeri ſemplici il reſiduo, cioè la differenza, con facilità ſi ritrova da chiccheſſia: ove poſcia ſono compoſti, ſi ſcriva ſotto al maggiore il minore per ordine di cifre (23), e ſi faccia la ſottrazione cifra per cifra. Quante volte la cifra di ſotto è maggiore di quella di ſopra, a quella coſtantemente ſi aggiunga il 10, ſi faccia la ſottrazione, ed alla ſuſſeguente inferiore a man ſiniſtra per giuſto compenſo aggiungaſi la unità. Avendo 85463, da cui ſottrarre ſi debba 5862, ſi ſcrivano i numeri ec. ſottraggaſi il 2 dal 3, e ſi noti il reſiduo 1, ſottraggaſi il 6 dal 6, e notiſi 0., ſottraggaſi l' 8 dal 14, e ſi ſegni il reſiduo 6. E perchè ſi è aggiunto il 10 al 4 ſuperiore, ſi reſtituiſca l' 1 al 5 inferiore, ed il formato 6 da 15 venga ſottratto,

$$\begin{array}{r}85463\\5862\\\hline 79601\end{array}$$

e si scriva il residuo 9 ; e perchè uno si porta per la prestata decina, sottraggasi 1 da 8, e si noti 7 residuo, il quale in tutto sarà 79601.

RISOLUZIONE II.

27. Si connettano insieme le quantità in quest' ordine. Prima si scriva la quantità minoranda, dalla quale la sottrazione fare si dee; poscia come in una somma susseguentemente si scriva la quantità sottraenda, mutando a ciascun membro di questa il proprio segno nel segno contrario. Sottraendo b dalla quantità a, fia residuo $a - b$, e da c sottraendo $-x$, esser dee residuo $c + x$ (6, e 7.).

Ove nascono simili membri (17. 19.) aventi i medesimi segni, o contrari, ridurre si deono, come al num. 21.

Dal quanto, $3ab - 5ax + 7cc + xx$, sottraendo, $2ab + 3ax - 6cc + xx$, sarà residuo, $3ab - 5ax + 7cc + xx - 2ab - 3ax + 6cc - xx$, e spurgando risulta, $ab - 8ax + 13cc$. Dalla quantità, $\frac{3aa - 4cc + 7xx}{m}$, sottraendo $\frac{2aa + 7xx - 4cc}{m}$, sarà residuo $\frac{aa}{m}$; perocchè l' operazione far si dee ne' soli numeratori (25), stante il divisore comune. Dalla quantità $3a\sqrt{ax}$ sottraendo $8a\sqrt{ax}$, nasce residuo $-5a\sqrt{ax}$. Dal quanto $\overline{2a - b}\sqrt{ax}$ togliendo $\overline{a - b}\sqrt{ax}$, esser dee residuo $a\sqrt{ax}$.

COROLLARIO I.

28. Dunque sommando quantità positive $+a, +a, +a$, o sottraendo quantità negative $-a, -a, -a$, sempre si ottiene un quanto positivo $= +3a$; e la sottrazione de' negativi si cangia in somma di positivi.

COROLLARIO II.

29. Sommando quantità negative $-a, -a, -a$, o sottraendo le positive $+a, +a, +a$, sempre negativo quanto si ottiene $= -3a$, e la somma in sottrazione si muta.

COROLLARIO III.

30. E perchè la multiplicazione è una somma reiterata della me-

medesima quantità (12), e la divisione è una replicata sottrazione della quantità (15), ne siegue, che multiplicare, e dividere in somigliante contraria maniera si distruggono scambievolmente, e quanto una compone, l'altra risolve: e come per la divisione un tutto v. g. $3a$ è risoluto nelle sue fattrici, e componenti parti 3, ed a; così al contrario per la multiplicazione delle medesime parti si ricompone lo stesso tutto $3a$: e se fosse $a = 2$, multiplicando 2 per 3, cioè (12) sommando due volte il 3 con se stesso, o tre volte il 2, si compone il prodotto 6, lo quale diviso per 2, cioè numerando (15) quante volte nel 6 il 2 si contiene, risulta il quoziente 3; e se per 3 dividesi il 6, ne nasce il 2.

PROPOSIZIONE V.

Teorema.

31. Ove sieno simili i segni + per +, o pure − per −, ne'fattori multiplicando, o nel divisore, e quantità dividenda, nella divisione, tanto nel prodotto, che nel quoziente il segno vuol essere positivo +.

Dimostrazione.

1.° Se i segni sono amendue positivi $+a$, & $+b$, col multiplicargli tra loro, altro non fassi (12), che una somma di quantità positive, laonde (28) il tutto, che ne risulta è positivo, $+a \times +b = a \times b = ab$.

Ma dividendo il tutto $+a \times +b$ v. g. per $+a$, non altro si opera (15., e 30.), che ritrovare le volte $+b$, che il divisore $+a$, contenuto si trova nel prodotto $+a \times +b$, ne siegue essere $+b$ il vero quoziente di tale divisione.

2°. Se tutti e due i segni si trovano essere negativi $-a$, & $-3b$; allora la multiplicazione (12), che è somma, in sottrazione si cangia (28): però alle negative quantità $-a$, & $-3b$ (27) mutare si dee il segno nel suo contrario, e positivo +, e sarà vero prodotto $-a \times -3b = a \times 3b = +3ab$.

Parimente, procedendo la divisione in simil contraria maniera della multiplicazione (30), esser dee anche positivo il quoziente,

 divi-

dividendo negativo per negativo. Conciosiachè se il dividere è una sottrazione continuata (15), e le quantità sono negative, la sottrazione si cangia in somma (28): perciò per $-b$ dividendo $-3b$, sarà il quoziente (15) $= \frac{-3b}{-b} = \frac{3b}{b}$, cioè $= 3$, positivamente numerando, che nel quanto $-3b$ il quanto $-b$ tre volte contiensi. Per questo abbiamo, che due negazioni affermano: e il dire, che taluno morto non sia, con queste due negazioni, si afferma colui esser vivo.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

32. Se contrari sono i segni $+$, e $-$, od al rovescio $-$, e $+$, sì nel multiplicare, sì nel dividere, sempre negativo $-$ sarà il segno da prefiggersi, o al prodotto, o al quoziente.

DIMOSTRAZIONE.

Debbasi multiplicare $+a$ con $-3b$, il multiplicatore positivo $+a$ ne dimostra, che a volte sommare si deve la quantità negativa $-3b$. Dunque giusta le regole del sommare (24), in cui si serbano delle sommate cose i propri segni, sarà questo prodotto una somma di negativi $-3b$, presi a volte, e perciò negativo esser dee, cioè $-$, il segno del prodotto.

Inoltre procedendo, la divisione colle medesime leggi risolvendo, come componesi multiplicando, ne siegue, che nel dividere per $+a$ il negativo quanto $-3a$, quoziente sarà (15) $\frac{-3a}{a} = -3$: dacchè non altro si cerca, se non che quante volte il divisore a negato venga nel quanto diviso $-3a$, e si vede esser negato tre volte, cioè -3, dacchè $+3$ afferma, e pone, non nega, e non sottrae.

2.° Se mai per $-a$ multiplicare si debba il positivo quanto $+3a$, tosto si scorge, che il negativo multiplicatore $-a$ cangia a volte in sottrazione la somma, cioè la multiplicazione (29) del positivo quanto $+3a$, di cui sottraendo, mutare si dee il segno $+$ nel suo (27) contrario $-$. Dunque $+$ per $-$ dee nel

pro-

prodotto avere affiſſo il ſegno $-$; quindi $-a \times +3a = -3aa$. E così riſolvendo col dividere per $-a$ il quanto $+3a$, ſi cerca quante le volte $-a$ negato viene nel quanto $+3a$, e ben ſi vede eſſer negato tre volte, però $\frac{+3a}{-a} = -3$. Che era ec.

Dimostrazione Generale.

Amendue gli eſpoſti teoremi dimoſtrati vengono ancora da naturale veridico raziocinio; ſupponendo eſſere (30) la multiplicazione una ſomma compendiata, e la diviſione un raccorciato ſottrarre. E perchè

Porre il poſitivo è un vero porre, laonde $+$ per $+$ fanno $+$.

Negare il negativo è un affermare, e porre, quindi $-$ per $-$ fanno $+$.

Affermare il negativo è un negare, e togliere, onde $+$ per $-$ fanno $-$.

Negare il poſitivo è un negare, e togliere, perciò $-$ per $+$ fanno $-$.

Proposizione VII.

Problema.

33. Multiplicare le quantità.

Risoluzione I.

Se ſono numeri v. g. per 68 multiplicare dovendo 753, ſi ſcriva quel ſotto a queſto giuſta l'ordine de' loro gradi. Quindi ſi multiplichi il 3 per 8, riſulta 24, di cui infra dell' 8 ſcrivaſi il 4, e ſi portin 2, che ſono decine. Si multiplichi il 5 per 8, ne naſce il 40, a cui giungaſi il portato 2, e del 42 formato, ſcrivaſi il 2 ſotto al 6, e ſi riporti il 4. Si multiplichi 8 per 7, ed al 56 giugnendo il 4, ſi forma 60, da ſcriverſi lo 0. ſotto al 7, ed il 6 in fuori a ſiniſtra. Poſcia anche tutto il numero ſuperiore per la ſeconda figura 6 multiplicare ſi vuole: il 6 per 3, ne dà 18, lo cui 8 ſcrivaſi ſotto il 2, ſotto il 6, ed 1 ſi riporti: Quindi 6 per 5 fan 30, ed

$$\begin{array}{r} 753 \\ 68 \\ \hline 6024 \\ 4518 \\ \hline 51204 \end{array}$$

ed 1 forman 31, scrivasi 1 sotto lo o., e si portino 3. Finalmente 6 per 7 forman 42, a cui giunto il 3 ritenuto, si ottiene 45, onde scriver si dee il 5 sotto al 6, ed il 4, che sporga in fuori. Di questi due ritrovati prodotti se ne faccia la somma (24), scrivendo 4, poscia per ordine 8, e 2 sono 10, scrivasi o. sotto all' 8, e riportisi 1; quindi 1, ed 1 fan 2, che si scrive a suo luogo; dipoi 5, e 6 fanno 11, si scriva 1, ed 1 si porti, che unito col 4 fa 5, e compie la somma, ed intero prodotto $51204 = 68 \times 753$.

Risoluzione II.

34. Ove siano quantità letterali incomplesse, e reca utilità il farlo, la multiplicazione si faccia col segno $\times$ (11); oppure come gli è uso più frequentato, si scrivano insieme le spezie, multiplicando come sopra i numeri coefficienti, e prefiggendo al prodotto il meritato segno (31, 32). Se poi sono quantità radicali, si multiplichino le specie, ed i numeri, come se fossero razionali (9), ed al prodotto lo stesso radical segno prefiggasi; così a per b, fanno il prodotto $ab = +ab$ (31); così $3a$ per $-5b$ fanno il prodotto (32) $-15ab$. Parimente $-4a$ per $-3b$ prodotto $+12ab$ (31): inoltre $3\sqrt{ax}$ per $2\sqrt{cx}$ ne danno il prodotto $6\sqrt{acxx}$.

35. Finalmente multiplicando a per aa, sarà prodotto aaa; e perchè incomodo riesce il pronunziare tante le volte la lettera istessa, si sono istituiti gli indici, o sieno esponenti numeri da apporsi alla destra in cima alla lettera: e così lo esponente numerico mostra quante le volte la quantità è multiplicata per se stessa, comprendendovi la unità. Or questi prodotti della quantità multiplicata in se stessa sono le algebraiche potestà, lo cui grado vien determinato dal proprio indice, cioè numero delle dimensioni, che sono le multiplicazioni già fatte. Pertanto a^1 vale a potestà prima di a, & $aa = a^2$, così $aaa = a^3$, che sono potestà prima, seconda, e terza di a ec. come si vede.

Po-

Prima $a^1 = a$.
Seconda $a^2 = aa$.
Terza $a^3 = aaa$.
Quarta $a^4 = aaaa$.
Quinta $a^5 = aaaaa$.
Sesta $a^6 = aaaaaa$.

COROLLARIO.

36. Dunque per multiplicare potestà per potestà della medesima specie, sommare si vogliono i loro indici, ed esponenti; qual somma per nuovo indice soprascritta alla specie, formata ne porge la prodotta potestà nuova; perocchè $aaa \times aa = aaaaa = a^{3+2} = a^5$.

Che se mai le potestà diverse fossero espresse con indici generali m, & n v. g. a^m, & a^n, sarà il loro prodotto, e potestà $a^m \times a^n = a^{m+n}$, e se fossero le potestà a^m, & a^3, sarà il loro prodotto, e potestà nuova a^{m+3}.

RISOLUZIONE III.

Multiplicazione delle quantità complesse.

37. Ove in acconcio ritorni, facciasi (11) anche delle composte quantità la multiplicazione col segno $\times$; avvertendo però di legare con una sbarra di ciascuna composta quantità (16) i membri diversi, acciocchè si conosca, che tutti con tutti multiplicati esser deono que' membri soprassegnati. Di $a-b$ per c, fia prodotto $c \times \overline{a-b}$. Di $a-b$ per $c-x+y$, prodotto gli è, $\overline{a-b} \times \overline{c-x+y}$.

38. In altra maniera, e più frequente si scrivono per ordine un sopra l' altro i due fattori, o produttori, o multiplicatori, sotto de' quali si tiri una linea: quindi la multiplicazione si faccia, che tutti i membri del superiore siano ad uno per uno multiplicati dal primo membro inferiore, il quale poi si cancelli. Si prosegusca in simil maniera la multiplicazione per lo secondo membro inferiore, come si è fatto col primo ec. Alla fine ogni superior membro da ciascun inferiore sarà multiplicato. Ad

ogni

ogni particolare prodotto si affigga il segno, che gli conviene (31. 32.), ed il tutto spurgando, e riducendo (21. 22.), si faccia una somma, la quale sarà purgato, e totale prodotto, come si vede da' seguenti esempli.

PRIMO.

$5a-2b+3x$ per
$\underline{3a+4b}$ sarà prodotto

$15aa-6ab+9ax+20ab-8bb+12bx$. Riducasi, sia
$15aa+14ab+9ax-8bb+12bx$.

SECONDO.

39. E si avverta, che se (13) multiplicando a per a si produce il suo quadrato aa, per la medesima legge multiplicando la quantità radicale per altra in tutto simile a se, ed uguale (18.19.), cioè per se stessa, il suo quadrato producesi, che vale a dire la medesima quantità, cancellato il radical segno.

$2\sqrt{ax-xx}\times3\sqrt{ax-xx}=6\times\overline{ax-xx}=6ax-6xx$.

$3a-4\sqrt{ay-yy}$ per $3a-4\sqrt{ay-yy}$, sarà prodotto $9aa-12a\sqrt{ay-yy}-12a\sqrt{ay-yy}+16\times\overline{ay-yy}$, e ridotto, $9aa-24a\sqrt{ay-yy}+16ay-16yy$, quadrato non solamente $16ay-16yy$ della sua radice $4\sqrt{ay-yy}$; ma tutto il prodotto è un quadrato, o diciamo seconda potestà (35) della radice, cioè quantità $\overline{3a-4\sqrt{ay-yy}}$.

Così $a-b$ per $a-b$ farà il suo quadrato $aa-2ab+bb$: oppure (35), non meno nelle semplici quantità, che nelle composte, esprimer si puote il quadrato coll' esponente 2, e sbarra $aa-2ab+bb=\overline{a-b}^2$.

E se fosse la quantità qualsivoglia, con maiuscole lettere indicata, come sarebbono A, oppure BC, sempre il quadrato di A, egli è A^2, e 'l quadrato di BC è $\overline{BC}^2$, sieno numeri, sieno linee, sieno spazi, o tempi, o celerità ec., e così delle altre potestà.

TERZO.

40. Si avverta altresì, che dove sono quantità radicali, almeno ne' segni dissimili di fuori, e senza veruno coefficiente,

op-

opportuna cosa ella è lo apporvi il suo (18) coefficiente 1, e questo per non confondersi co' membri radicali, sieno simili, sieno dissimili.

$\sqrt{ac-cx}$ per $-\sqrt{ac-cx}$, ne dà il prodotto $+1\sqrt{ac-cx}\times-1\sqrt{ac-cx}$ (32) $=-1\times\overline{ac-cx}=-ac+cx$ (31. 32.)

COROLLARIO.

41. Dunque dal secondo esempio (39) ricavasi, che il quadrato di un binomio $\overline{a\mp b}=\overline{a\pm b}^{2}=aa-2ab+bb$, si componga di aa quadrato del primo nome, del doppio prodotto de' due nomi affermato, $+2ab$, se il secondo nome è positivo; ma negato, $-2ab$, se il secondo nome è negativo; Finalmente di bb quadrato del secondo nome.

E perchè la potestà seconda multiplicata per la sua prima (35), viene a formare la potestà terza, che cubo si noma, come sarebbe

Radice, e potestà prima $a+b$.

Quadrato, e potestà seconda $aa+2ab+bb$

Cubo, e potestà terza $a^3+3aab+3abb+b^3$: chiaramente si vede, che il cubo di un binomio viene formato da a^3 cubo del primo nome. Inoltre di $3aab$ triplo solido generato dal triplo quadrato del primo nome multiplicato pel nome secondo; parimente di $3abb$ altro triplo solido dal quadrato del secondo nome multiplicato pel primo; Finalmente di b^3 cubo del nome secondo. In quanto a' segni, se il binomio è positivo, tutti gli membri son positivi nel cubo; Ma se il binomio avrà il secondo membro negativo, allora nel cubo, il primo cubo a^3, sarà positivo, il solido primo sarà negativo, $-3aab$, il solido secondo sarà positivo, $+3abb$, ed il cubo secondo del secondo nome sarà negativo $-b^3$; cioè $\overline{a-b}^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

PROPOSIZIONE VIII.

PROBLEMA.

42. Dividere le quantità.

Risoluzione I.

Se sono numeri, per quoziente si scriva (15) il numero delle volte, che il divisore è contenuto nel numero dividendo; perciò $6 = \frac{42}{7}$: ove poscia i numeri sono composti, la divisione si faccia a cifra a cifra del dividendo, incominciando da man sinistra; e quando il divisore non cape, si scriva zero nel quoziente: ed avvertasi, che per una cifra del dividendo s' intendono tante figure prese insieme, quante se ne ritrovano nel divisore. A dividere per 8 il numero 120; Si scriva il divisore 8, quindi il dividendo 120, si osservi, che l' 8 non si contiene nell' 1, però si prendano due figure, cioè 12 del dividendo, in cui capendovi l'8 una volta, si scrive 1 sotto dell' 8. Quindi si multiplica il quoziente 1 per lo divisore 8, ed il prodotto 8 si sottrae dal diviso 12, ed il residuo 4 si scrive sotto del 2, ed al 4 si annette la seguente figura o. del dividendo, onde nasce il 40, il quale divider si dee per 8, ed il quoziente 5 si segna per seconda figura col quoziente 1: e come sopra si multiplica 5 per 8, ed il prodotto 40 si sottrae dal diviso 40; e perchè nulla rimane, si ha chiaro argomento, che l' 8 è divisore esatto del numero 120; ed il quoziente è il 15. Se del dividendo fatta l' ultima sottrazione, numero avanza più piccolo del divisore, se ne faccia di quello un numeratore, a cui sottoscrivasi il divisore istesso, e si aggiunga allo intero quoziente, questa nuova quantità così divisa (15). Se fosse da dividersi per 8, il numero 123 quoziente sarebbe $15\frac{3}{8}$.

$$\begin{array}{c|l} 8 & 120 \\ \hline 15 & 40 \end{array}$$

Risoluzione II.

43. Se sono specie, ed incomplesse, si scriva sopra il prodotto dividendo, e sotto il divisore (15); e perchè sono contrarie multiplicazione, e divisione (30), laddove multiplicando, si sono scritte insieme le lettere de' due multiplicatori, perciò dividendo cancellare si vogliono le comuni lettere nel divisore, e nella quantità dividenda. In quanto ai numeri coefficienti, la divisione si faccia in aritmetico modo, come di sopra.

Se

Se tutto il divisore si ritrova nella quantità dividenda, come in $\frac{acx}{ax}$, cancellando sopra, e sotto la comune quantità ax, sarà quoziente c, e la divisione è esatta: ma se nel divisore evvi specie non comune alla quantità dividenda, si cancelli quanto vi è di comune sotto, e sopra; e quel, che avanza, è il quoziente non già più intero, ma fratto, o diciam rotto; e quel dividere si appella frazione; così $\frac{abx}{ac}$ cancellato il comune a, ne dona il quoziente $\frac{bx}{c}$ frazione, e necessaria, perchè ridur non si puote.

E per dare alcuni esempli

ab per a quoziente $=\frac{ab}{a}=b$.

abc per c quoziente $=\frac{abc}{c}=ab$.

abc per $3cm$ quoziente $=\frac{abc}{3cm}=\frac{ab}{3m}$.

ac per ac quoziente $=\frac{ac}{ac}=\frac{1ac}{ac}=1$ (18).

$-12bc$ per $3c$, quoziente $=-\frac{12bc}{3c}=-4b$ (32).

$15ab$ per $-5a$, quoziente $=\frac{15ab}{-5a}=-\frac{15ab}{5a}=-3b$.

$-18abc$ per $-6ac$, quoziente $=\frac{-18abc}{-6ac}=+\frac{18abc}{6ac}=+3b$ (31).

Corollario I.

44. Perciò dividendo $8abc$ per $16cc$, sarà quoziente $\frac{8abc}{16cc}$, nel quale il minor numero 8 per lo maggiore 16 viene diviso. Cancellisi adunque sotto, e sopra giusta la data regola quanto vi è di comune: lo che recar volendo ad effetto si osservi se numero vi è, che i due dati numeri esattamente divida, come nel caso dato il superiore 8 divide se stesso, lasciando per quoziente

 l'unità

l'unità, e divide il 16 inferiore; onde nasce il quoziente 2. Scrivasi pertanto $\frac{8abc}{16cc}=\frac{8abc}{8\times 2cc}$; ed ecco, che salta agli occhi sotto, e sopra il comune 8, non meno che il comune c, pe' quali spurgando, cioè cancellandoli si ottiene.

$\frac{8abc}{16cc}=\frac{8abc}{8\times 2cc}=\frac{ab}{2c}$, quoziente purgato. E così $\frac{10ab}{35a}=\frac{5\times 2ab}{5\times 7a}$ $=\frac{2b}{7}$.

Corollario II.

45. Dunque usando il superior corollario (quanto sovra s'insegna, si noma spurgar le frazioni) siamo sicuri, che cancellando tutto quel, sì numerico, sì letterale, che vi è di comune, multiplicatore, non si muta il valore della frazione, o diciamo del quoziente, e la sua espressione a' minori termini si riduce.

Corollario III.

46. Dalla data regola di partire, diducesi eziandio, che dividendo potestà per potestà, con opportuno compendio, si dee dallo indice (36) della dividenda potestà sottrarre lo indice della potestà dividente, ed il residuo ne darà lo indice della potestà quoziente.

Dimostrazione.

Da che (30) multiplicare, e dividere, deono procedere con simili regole opposte, ne siegue, che dove (36) multiplicando potestà per potestà, si sommano insieme i loro indici, all' incontro dividendo si deono sottrarre, come si è detto.

Oltre a che dividendo a^5 per a^3, giusta la data regola, egli è vero quoziente $\frac{aaaaa}{aaa}$, e spurgando (45) quanto vi è di comune sotto, e sopra si ottiene $\frac{aaaaa}{aaa}=aa=a^{5-3}=a^2$. Similmente a dividere a^7 per a^4, quoziente sarà $a^{7-4}=a^3$: E dovendosi a^2 dividere per a^5, ne somministra il quoziente a^{2-5} $=$

$=a^{-1}=a\frac{1}{3}$; conciosiachè per la dimostrata regola alla distesa scrivendo (35), egli è vero quoziente (42).

$$\frac{1\times aa}{aaaaa}=\frac{1}{aaa}=\frac{1}{a^3}=a^{-3}=a^{2-5}.$$

Corollario IV.

47. Ed ecco il vero fonte, onde nascono generate, non meno le potestà positive (35), delle quali lo indice è positivo, che le potestà negative, che hanno lo indice negativo. Di tali potestà dall'unità procedendo, o dallo zero, con maniere opposite, e per vie contrarie, due serie infinite si vengono a formare, e sono

$-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ec.

$a^{-6}, a^{-5}, a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^{0}, a^{1}, a^{2}, a^{3}, a^{4}, a^{5}, a^{6}$ ec.

$\frac{1}{a^6}, \frac{1}{a^5}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^1}, 1, \frac{1}{a^{-1}}, \frac{1}{a^{-2}}, \frac{1}{a^{-3}}, \frac{1}{a^{-4}}, \frac{1}{a^{-5}}, \frac{1}{a^{-6}}$ ec.

Risoluzione III.

Divisione delle quantità composte.

48. Dove il divisore si trova in ciaschedun membro della quantità dividenda, da essa il divisore si cancelli in ciaschedun membro; però a dividere $3ax+7bx-cx$ per x, quoziente sarà $3a+7b-c$. Così per dividere $3ax+7bx-cx$ per $3a+7b-c$, quoziente sarà x.

Corollario Fondamentale.

49. Quindi nasce, che avendo l'equazione qualunque $3ax+7bx-cx=aa-bc$, nella quale da una parte del segno $=$ si trovano tutti gli membri affetti dalla incognita, dividendo per tutta la somma de' coefficienti numerici (18.), e letterali di x tanto l'una, che l'altra parte dell'equazione, averemo altra equazione, in cui da una parte vi sarà il solo quoziente x, e dall'altra una frazione (43), e quoziente nato dall'altra parte dell'equazione divisa per gli coefficienti di x. Però dividendo la esposta equazione per $3a+7b-c$, si ottiene $x=\frac{aa-bc}{3a+7b-c}$.

RI-

RISOLUZIONE IV.

Divisione delle quantità molto composte.

50. 1.° Sia lo divisore $aa-bx+ax$, e quantità dividenda sia $bcx+aab-bbx-aac+a^3-acx+aax$, la quale ordinare si dee giusta le decrescenti potestà della più frequente lettera, che nel nostro caso veggiamo esser a. Si scriva intanto da sinistra il divisore, e tirisi una linea in giù, e quindi si seguiti a scrivere la quantità dividenda; si tagli la cadente linea da bastevoli lineette orizzontali, e distanti tra loro da potervi scriver in mezzo una frazione, come si vede. Tutto ciò disposto, si trasporti tra le due prime linee il membro a^3 continente la massima potestà di a, lettera scelta, e sotto si scriva il primo membro corrispondente aa del divisore. Si faccia la divisione $+$ per $+$, ed in faccia da destra della cadente linea si segni il quoziente $+a$, per lo quale il divisore tutto multiplicare si vuole, cioè $+a$ per aa fa a^3, che sottraggasi dalla dividenda quantità, scrivendo $-a^3$ susseguentemente: indi per $+a$ si multiplichi $-bx$, ed il prodotto $-abx$ sottraggasi scrivendo $+abx$ dopo di $-a^3$. Finalmente si multiplichi per $+a$ quoziente il membro ultimo $+ax$, ed il prodotto $+aax$ si sottragga scrivendo $-aax$ dopo di $+abx$, e fatta la riduzione della quantità dividenda così cresciuta di membri, rimangono eliminati gli membri a^3-a^3, ed $aax-aax$.

$aa-bx+ax$	$a^3+aab-aac+aax-acx-bbx+bcx-a^3+abx-aax$
	$-aab+bbx-abx+aac-bcx+acx.$
$\frac{+aaa}{+aa}$	$+a$
$\frac{+aab}{+aa}$	$+b$
$\frac{-aac}{+aa}$	$-c$

2.° Quindi per seconda operazione dalla dividenda quantità prendasi altro membro, in cui si veda esservi la maggior potestà di a lettera scelta, e sarà $+aab$, e si soscriva $+aa$, cioè il medesimo divisore, e si segni al suo luogo il quoziente $+b$, per cui tutto multiplicato ne venga il divisore, ed i prodotti dalla quantità dividenda, sottraggansi, e nuova riduzione si faccia.

3.° Prendasi finalmente dalla dividenda quantità il membro $-aac$, si scriva a suo luogo, e di sotto il solito divisore $+aa$, e facendo la divisione

— per +, il quoziente $-c$ si scriva in faccia, e per quello fatta la multiplicazione, e sottratti i prodotti, perchè riducendo, tutto svanisce, però si è fatta la divisione, e trovato il quoziente $a+b-c$ aggregato de' particolari quozienti già ritrovati.

ANNOTAZIONE.

Non di rado, intravenendo, che nelle quantità da dividersi vi manchin de' membri, perchè già, come contrari, furono spurgati, i quali poi rinascono nella attuale divisione; per questo a fine che la novità confusione non rechi, sia

ESEMPIO II.

51. Sia $ab^4-b^5+a^5$ la quantità da dividersi per lo divisore $aa+bb-ab$, che però si ordini per a^5, ed il divisore per aa come si vede.

$aa+bb-ab$		$a^5+ab^4-b^5-a^5-a^3bb+a^4b-a^4b-aab^3+a^3bb$ $+aab^3+b^5-ab^4$.
a^5 / a^2	a^3	
a^4b / a^2	aab	
$-a^2b^3$ / a^2	$-b^3$	

E dividendo a^5 per aa, + per +, si ottiene il quoziente $+a^3$, col quale multiplicando il divisore, riescono prodotti sottratti, $-a^5-a^3bb+a^4b$, de' quali si riducono solamente $+a^5-a^5$, e restano due nuovi membri $-a^3bb+a^4b$: e perchè questo membro $+a^4b$ contiene la potestà massima di a lettera sceltà, però dee essere preso per dividendo, e posto nel suo luogo con sotto il divisore a^2, e ne proviene il quoziente $+aab$, per lo quale fatta la multiplicazione, con tutto il divisore, saranno i prodotti sottratti $-a^4b-aab^3+a^3bb$, tutti nuovi, de' quali due, il primo, ed il terzo, si elidono co' loro contrari. Il membro $-aab^3$ si prenda per la divisione da farsi ancora, nella quale avendo — per +, ne sorte il quoziente $-b^3$, il quale multiplicato col divisore, al solito, e de' prodotti fattane la sottrazione, col ridurre, tutto svanisce; il perchè siamo sicuri aver trovato il legittimo quoziente $a^3+aab-b^3$ per la fatta divisione.

ESTRA-

ESTRAZIONI DELLE RADICI.

52. Da che intraviene ſovente il dover trarre anche da numeri la quadrata radice, per queſto fa d' uopo non tanto per le ſpecie, quanto pe' numeri ancora darne le regole.

ESTRAZIONE DELLE RADICI QUADRATE.

Prima Operazione.

53. Sia dato il numero 223729, le cui figure, incominciando da deſtra, ſi punteggino a due, a due, ſarà 22. 37. 29; da ciò, che rimane a ſiniſtra, ſi prenda la quadrata radice, o la proſſima inferiore nell' anneſſa tabella; e perchè abbiamo 22, dee ſceglierſi il 4 radice del quadrato 16, proſſimo inferiore al 22. Si ſottragga il quadrato della preſa radice, e nel ſuo luogo ſi ſcriva il reſiduo 6, a cui ſi annettano le ſeguenti due figure 37, e ſia compoſto il numero 637.

Radici.	Quadrati.
1 . . .	1
2 . . .	4
3 . . .	9
4 . . .	16
5 . . .	25
6 . . .	36
7 . . .	49
8 . . .	64
9 . . .	81
10 . . .	100

Seconda Operazione.

Si duplichi la tratta radice 4, ed il numero 8 doppio di 4 (tirata una linea) ſi ſoprascriva al medeſimo 4; ed 8 è il diviſore, per cui divideſi il 6, prima figura del 637: ma perchè non ſi può, ſi prendano due figure per una, cioè 63, il quale numero diviſo per 8 ne dà il quoziente 7, che ſotto col 4, e ſopra col 8 ſcriver ſi vuole.

```
22. 37. 29.
16.
———
 637.
 609.
———
  2829.
```

Per queſta figura ſeconda 7 della radice 7, tutto il ſuperior numero 87 ſi dee moltiplicare, ed il prodotto 609 ſottrarre dal diviſo numero 637, ed il reſiduo ſoſcrivere a ſuo luogo, il quale ſarà 28, a cui annetter ſi deono le due ſeguenti figure 29 del numero dato, onde ne viene

```
8      87
—      ——
4      47
```

com-

compoſto il numero 2829, dal quale la terza figura della radice ſi dee ricavare.

Terza Operazione.

Sopra l' 87 ſi tiri altra linea, e dupplicando il 7, figura ultima, ſi ſommi il 14 nel ſuo luogo coll' 8, che vale 80; onde ſarà la ſomma 94 novo diviſore da ſcriverſi ſopra la linea, cancellando l' 87.

Per la prima figura 9 del diviſore 94 ſi divida la prima figura 2, cioè 28 del compoſto ultimo numero 2829, ed il quoziente 3 ſi ſcriva colla radice 47, e col ſuperior numero 94: ſarà la radice 473, ed il diviſore diviene 943, il qual numero va multiplicato per 3 ultima ritrovata figura, e dal diviſo numero ſi ſottragga il prodotto 2829, il quale eſſendo lo ſteſſo diviſo 2829, e nulla avanzando di reſiduo, argomento egli è, che il dato numero è quadrato perfetto, e ſua radice è il ritrovato numero 473, perchè $473 \times 473 = 223729$. Ma ſe avanza qualche reſiduo, e del dato numero altra copia non ſi ha di figure, egli è contraſſegno, non eſſere quadrato il numero già propoſto, e la trovata radice ſolamente eſſere proſſima in intieri.

22. 37. 29.
16
———
637
609
———
2829
2829
———
943
———
87
473

Molti alla ſteſſa radice (per più approſſimarſi) giungono una frazione compoſta dal doppio della radice iſteſſa, con più l'unità, e ne fanno il diviſore, rimanendo per numeratore lo avanzo; operazione da non ſeguirſi. Per avere dunque la radice ſemprepiù proſſima geometricamente operando, ſarà

APPROSSIMAZIONE MAGGIORE.

54. Il dato numero ſi multiplichi per lo quadrato 100., la cui radice 10, o per lo quadrato 10000, la cui radice 100, e ſi tragga la quadrata radice, come ſopra, prendendo per frazioni tutte le cifre, che per gli zero aggiunti a ricavare ſi vengono. Suppongaſi adunque, che il dato numero ſia 224236, a cui quattro zero aggiugnendo, divenga A, e ſuppongaſi, che

A

2242360000
50700
47325
―――
337500

9470
―――
946. 5
―――
943
―――
$473.\frac{53}{100}$

la trovata radice prossima in intieri, sia 473 coll' avanzo del residuo 507, però il dato numero non è quadrato. Si duplichi adunque il 3 del divisore 943: onde sia divisor nuovo 946; si aggiungano al residuo due o.; e sarà numero da dividersi 50700, la cui cifra prima 5, cioè 50, divider si vuole per 9, ed il quoziente 5 sotto, e sopra si scriva, frapponendovi un punto, che lo divida da primi intieri; dunque averemo radice 473. 5, e di sopra 946. 5. Per lo ritrovato 5, tutto il superior numero si multiplichi, ed al solito si tragga il prodotto 47325, dal numero 50700, ed annettansi al residuo 3375 altri due zero, onde sia 337500; quindi si duplichi il ritrovato 5 del divisore, e sarà fatto divisor novo 9470, e per 9 il 33 si divida, ed il quoziente 3 si connetta col 5, onde radice più prossima sia $473.\frac{53}{100}$, ma un poco minore, perchè operando al solito avanza un residuo 53391, però è tanto vicina, che altra radice $473\frac{54}{100}$ è maggiore della vera. Chi poi la vuole più prossima aggiunga a due a due altri zero all' infinito; sempre però per un pajo di zero di giunta al numero dato, se ne dee accrescer uno al divisor della frazione.

ESTRAZIONE DELLA RADICE QUADRATA DALLE SPECIE ANALITICHE.

Prima Operazione.

55. Riesce tutta simile questa Operazione alla precedente già data (53), perciò avendo il quadrato Q da quello prender si dee qualunque piace membro quadrato perfetto v. g. *aa*, la cui radice *a*, si segni da parte, e si cancelli da Q il preso quadrato *aa*.

Se-

Seconda Operazione.

Per trovare il divisore, si duplichi la radice a, ed il doppio $2a$ di sopra si scriva, e per $2a$ si divida qualunque divisibile membro del quanto Q, sia, $-2ab$, ed il quoziente, $-b$, alla radice a col segno suo si connetta, ed anche al divisore $2a$. Per $-b$, si multiplichi la superior quantità $2a-b$, ed il prodotto $-2ab+bb$, si sottragga da Q.

$$Q$$
$$aa-2ab+bb+2ac+cc-2bc$$

$$\begin{array}{r} -2ab \\ +2a \\ \hline -b \end{array}$$

Terza Operazione.

Si sopratiri altra linea al divisore $2a-b$, e duplicando il secondo membro, $-b$, soprascrivasi il divisore nuovo, $2a-2b$.

Per, $2a$, si divida qualunque divisibile membro di Q, che troviamo essere, $2ac$, ed il quoziente, $+c$, sopra, e sotto si scriva. E per $+c$, si multiplichi tutta la superior quantità, $2a-2b+c$, ed il prodotto, $+2ac-2bc+cc$, dalla rimanente quantità Q, si sottragga; e perchè nulla rimane, argomento abbiamo, essere il Quanto Q perfetto quadrato, e sua radice, $a-b+c$, la quale per se stessa multiplicata il quadrato Q ne produce.

$$\begin{array}{l} +2ac \\ +2a \\ \hline +c \\ \\ 2a-2b+c \\ \hline 2a-b \\ \hline a-b+c \end{array}$$

Torna molto in acconcio lo insinuare agli studiosi Giovani principianti, che nelle soluzioni di simili problemi usino la penna, ed eseguiscano da se minutamente, quanto, e come da'precetti dati viene prescritto: e poca regola prendano dagli inseriti pratici esempi, i quali per togliere la confusione alla stampa, non si sono potuti mettere alla distesa, ma solamente se ne è dato un abbozzo.

ESTRAZIONE DELLA RADICE CUBA NE' QUANTI NUMERICI.

Radici.	Cubi.
1 . .	1
2 . .	8
3 . .	27
4 . .	64
5 . .	125
6 . .	216
7 . .	343
8 . .	512
9 . .	729

56. Primieramente fa d' uopo rammemorarsi, che il cubo d' un Binomio, $a+b$, egli è $=a^3+3aab+3abb+b^3$, siccome al numero 41 fu dimostrato. Sia pertanto il dato numero, 154854153, il quale divider si vuole a tre a tre, perciò averemo 154. 854. 153. Inoltre perchè de' cubi aventi le radici di una figura non vi è regola alcuna, essendo semplicissima l' operazione, egli è d'uopo avere o presente, od a memoria la Tavola delle semplici radici cubiche, e de' corrispondenti numeri cubi.

Prima Operazione.

$$\begin{array}{r} 154.854.153. \\ 125 \\ \hline 298 \\ 3aab=225 \\ \hline 73 \end{array}$$

Dalle figure avanzate alla sinistra parte nel punteggiare, riguardando nella Tavola, si prenda la cuba radice; ma perchè abbiamo 154 non cubo numero, perciò la radice prossima si pigli dal prossimo inferiore numero cubo 125, la quale si è 5, e da parte si segni, 5, il cui cubo 125 sottraggasi dal numero 154, ed il residuo 29 sotto la tirata linea si scriva.

Seconda Operazione.

$$\begin{array}{r} 3aab=225 \\ 3aa=75 \\ \hline a=5 \end{array}$$

Primieramente al residuo 29, abbassando, si unisca la prima seguente figura, 8, e tosto per avere la seconda figura della radice, ritrovare si dee il divisore del formato novo numero, 298. Chiamisi adunque la ritrovata radice, $5=a$, che per ritrovare l' altro nome, $=b$, divisore dee essere, $3aa=75$, che si scriva sopra una tirata linea. Dividasi per 7, prima figura del divisore 75, il 2, cioè 29, prima figura del dividendo, 298, ed il quozien-

te

te, $3=b$, colla prima radice si annetta, ed averemo 53, si formi il numero, $=3aab=225$, il quale dal diviso, 298, sottraggasi, ed al residuo, 73, il superior 5, abbassando si annetta, sarà 735, da cui sottrar si dee il membro $3abb=135$, ed in simil maniera al residuo, 600, la terza figura, 4, si unisca, onde composto ne venga il numero, 6004, dal quale sottrarre si dee il cubo dell' altro nome, b, cioè $b^3=27$, e rimane lo avanzo 5977.

Terza Operazione.

La ritrovata radice 53 chiamisi $a=53$, sarà il divisore presente, o diciamo secondo $3aa=3\times53\times53=8427$, per la cui prima figura 8, si divida il residuo accresciuto della discesa prima figura 1 della terza divisione 153; dividendo adunque 59 per 8, ne sorte il quoziente $7=b$, che va scritto colla radice 53, la quale ora diviene 537. Dal diviso numero 59771 si sottragga il membro $3aab=58989$. Si abbassi la seconda figura 5, e col residuo, 782, si unisca. Dal formato numero 7825 si sottragga il membro $3abb=7791$: fatta la sottrazione, al nuovo residuo 34 annettere deesi l'ultima figura 3, e da 343 si dee sottrarre $b^3=7\times7\times7=343$; che però il dato numero è cubo, e la ritrovata radice è cuba.

154854153
$a^3=125$

298
$3aab=225$

735
$3abb=135$

6004
$b^3=27$

59771
$3aab=58989$

7825
$3abb=7791$

343
$b^3=343$

000

$a=5$
Primo divisore
$3aa=75$,
$b=3$
Secondo divisore
$3aa=8427$
$a=53$
$b=7$
Radice 537

CAVARE DALLA SPECIE LA CUBA RADICE.

Prima Operazione.

57. C $a^3+3abb-3aac-6abc+3acc+b^3-3bbc+3bcc-c^3+3aab$,

sia

ſia il dato quanto analitico, da cui a piacere ſi ſcelga un membro cubo a^3, la cui cuba radice a da parte ſi ſegni, e cancelliſi il preſo cubo a^3.

Seconda Operazione.

$$\frac{3aab}{3aa}=+b$$

$$\overline{a+b}$$

Sempre ſopra la ritrovata radice a ſi dee ſcrivere il ſuo triplo quadrato $3aa$, che nel cubo C, ſarà diviſore di qualche diviſibile membro, come ſarebbe $+3aab$: onde fatta la diviſione rieſca nel quoziente il ſecondo membro della radice, il quale ſarà $+b$, che col ſuo ſegno ſommare ſi vuole col primo a, e la fin' ora trovata radice ſarà $a+b$.

Al diviſore $3aa$ ſi annetta col ſegno ſuo il triplo rettangolo, o ſia prodotto di $a\times b$, cioè $3ab$, ed il quadrato bb del nome ſecondo $+b$. Di preſente il quanto ſuperiore $3aa+3ab+bb$ per lo ſecondo nome b ſi multiplichi, ed il prodotto dal quanto C ſi ſottragga.

Terza Operazione.

$$\frac{-3aac}{+3aa}=-c$$

Per ritrovare il nuovo diviſore, ſi formi il quadrato della ritrovata radice $a+b$, e ſi triplichi, ed il triplo ſarà $3aa+6ab+3bb$ (41), il quale ſi ſcriva nel ſuo luogo ſuperiormente. Per lo diviſore $3aa$ ſi divida attualmente qualunque diviſibile membro v. g. $-3aac$ del quanto C, ed il quoziente $-c$ colla radice trovata ſi ſommi.

$$\begin{array}{l} \underline{3aa+6ab+3bb-3ac-3bc+cc} \\ \underline{3aa+6ab+3bb} \\ \underline{3aa+3ab+bb} \\ a+b-c \end{array}$$

Al diviſore uſato ſi aggiunga il triplo rettangolo $a\times-c$, cioè $-3ac$, ſuſſeguentemente il triplo rettangolo $b\times-c$, cioè $-3bc$, ed in oltre il quadrato di $-c$ terzo nome trovato, cioè $+cc$. Queſto quanto ſuperiore, o vogliam dire formata ſomma, per la ultima trovata radice $-c$, ſi multiplichi, e ſi ſottraggano dal quanto C i prodotti $-3aac-6abc-3bbc+3acc-c^3+3bcc$, e perchè nulla rimane, egli è il quanto C cubo perfetto, e ſua radice $a+b-c$.

La

La dimoſtrazione di amendue queſte eſtrazioni di cubiche radici sì per numeri, sì per le ſpecie, dipende tutta dal n. 41., anzi null'altro ſi è fatto, che riſolvere quel cubo, oſſervando le regole de' membri da ciaſchedun cubo compreſi, ove s'abbia radice (n. 41.) multinomia.

MANIERA DEL SIGNOR NEWTON.

58. Sia il dato cubo F, che al ſolito ſi punteggi. Da numeri della prima diviſione alla ſiniſtra, ſi prenda la proſſima radice cuba, che è di 94, viene ad eſſere 4, il cui cubo 64, da 94 ſottraggaſi, ed al reſiduo 30 ſi annetta la figura 8, prima della ſeguente diviſione. 2.° Il numero 308 ſi divida per 48, triplo quadrato della trovata radice 4, ed il giuſto quoziente 5 (eccedente ſarebbe il 6), ſi uniſca col 4 ſuſſeguentemente, onde fia radice 45, la quale ſi cubi, ed il ſuo cubo 91125 ſottragaſi dal trattato numero 94818, ed al reſiduo 3693 ſi connetta la figura 8, prima della ſeguente terza diviſione.

3.° Il formato numero 36938 ſi divida per 6075 triplo quadrato della radice 45. Per terza figura ſi connetta il quoziente 6, radice ſarà 456, la quale ſi cubi, ed il ſuo cubo da tutto il numero F ſottraggaſi, e perchè nulla rimane, il numero F è cubo, e la ſua radice cuba è il numero 456: ſe avanza qualche reſiduo, il dato numero non è cubo, e la ritrovata radice non è cuba, ma proſſima.

Se ſi vuol rendere più proſſima s' accreſca di tre zeri, cioè 000, o di ſei 000000, in ſomigliante maniera come ſi è fatto al num. 54 per la radice quadrata.

F

94818816 (4
64
____
308
____
94818
91125
____
36938
94818
91125
____
3693

$\frac{48}{5}\Big|\,308$

$3 \times 45 \times 45 = 6075$

$\frac{6075}{6}\Big|\,36938$

$\overline{456}^{3} = 94818816$

ESTRA-

59. Non di rado, ſenza attualmente eſtraere la radice dalle quantità, ſi ſuole quella indicare col (9) ſegno $\surd$, tirando una sbarra ſopra tutta la quantità radicale; perciò $\sqrt{456ax}$ eſprime la radice quadrata di $456ax$, così $\sqrt[3]{axx}$ dimoſtra la cuba radice di axx. Parimente $\sqrt[4]{aacx}$ ſignifica la radice quadrato quadrata, o ſia quarta della quantità $aacx$, e così delle altre poteſtà radicali di grado ſuperiore.

Corollario.

60. Dunque per avere della quantità radicale $\sqrt{ax}$ il quadrato algebraico ax, baſta cancellare il ſegno $\surd$, ſiccome axx ſarà il cubo algebraico di $\sqrt[3]{aax}$ ec., perchè ove ſi è indicata la radice col ſegno, cancellando dappoi il ſegno, ſi ha delle quantità radicali, il quadrato, ed il cubo ec.

ESPRESSIONI DELLE RADICI COLLO INDICE, ED ESPONENTE.

61. Da che non ſolo, delle algebraiche quantità, formate vengono le poteſtà conſecutive a^1, a^2, a^3, ec. multiplicando ec. (35), ma altre ne naſcono, le riſpettive radici traendo, eziandio di queſte altra ſerie, ne ſorge con indici radicali eſpreſſa. Per trarre adunque, e diſegnare le poteſtà radicali, eſſer deono gli indici $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ec. Quindi $a^{\frac{1}{2}}$ è la radice quadrata di a, & $a^{\frac{1}{3}}$ la radice cuba, così $a^{\frac{1}{4}}$ la quarta poteſtà radicale ec.: ove poſcia le quantità ſono compoſte, una sbarra di ſopra tirare ſi vuole, che tutti i membri comprenda. Quindi $\overline{aa-ax+xx}^{\frac{1}{2}}$ ne moſtra la ſeconda poteſtà radicale, o ſia radice quadrata di $aa-ax+xx$.

Dimostrazione.

E perchè dalla multiplicazione fatta della radice con ſe medeſima (35), il quadrato ne naſce, dalla triplice, il cubo ec. ed il mul-

multiplicare le poteſtà eſpreſſe con indici, egli è lo ſteſſo (36), che gli indici loro ſommare, ne avviene, che $a^{\frac{1}{2}}$ eſprima la radice quadrata di a, conciofiachè $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^1=a$, e nella ſteſſa maniera $a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$, perocchè $a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=a^1=a$, e così delle altre.

RITROVAMENTO DE' DIVISORI PER GLI NUMERI.

62. Si tenti la diviſione del dato numero per tutti i numeri dalla unità ſino alla quadrata radice ſua, ſe ſarà numero quadrato, altrimenti ſino al numero proſſimamente minore di ſua radice quadrata; ſi formi una colonna di tutti i numeri, de' quali la diviſione rieſce eſatta, ed altra colonna de' quozienti, che dalle fatte diviſioni riſultano (traſcurando que' numeri, che non ſono diviſori eſatti), ed i numeri nell' una, e nell' altra colonna compreſi, formeranno tutti i diviſori del numero già propoſto; come del numero 180.

1	. .	180
2	. .	90
3	. .	60
4	. .	45
5	. .	36
6	. .	30
9	. .	20
10	. .	18
12	. .	15

Nè occorre proſeguire la diviſione oltre la proſſima minore radice 13, del 180, che è tra il 13, e 14. Quindi è, che l' ultimo diviſore ſarà il 12, e gli numeri compreſi nelle due colonne, con tal regola formate, ſono tutti gli diviſori del propoſto numero 180.

Ma ſe ſi vuole il maſſimo comun diviſore tra due quantità, queſto ſi trova colla continua ſottrazione della minore dalla maggiore, e quindi del reſiduo dalla ſottratta quantità: e ſarà diviſore comune quello, che ſottraendoſi non laſcia reſiduo alcuno, purchè queſto non ſia l' unità, che allora ſono numeri primi, e non hanno comune diviſore alcuno: per eſempio ſi voglia ritrovare il maſſimo comun diviſore tra numeri 1457, & 589; ſi tolga due volte 589 da 1457, e ſarà avanzo 279, il quale dal già ſottratto numero 589, ſi ſottragga finchè ſi può, cioè due volte, ed avanzerà il reſiduo 31, che ſottratto dal numero 279 per nove volte, nulla avanza, e perciò ſi è ritrovato il numero 31, comune eſatto diviſore de' due dati numeri 1457, e 589; e tale, che nel primo entra quaranta ſette volte, e nel ſecondo diciannove.

PER LETTERE.

Sia la quantità $aax+axx$, per ritrovare i ſuoi diviſori, ſi ricerchino in prima i più ſemplici, ſarà $\frac{aax+axx}{a}=ax+xx$.

Queſto quoziente ſi divida per x, riſulta $\frac{ax+xx}{x}=a+x$: parimenti queſto quoziente $a+x$ ſi divida per ſe medeſimo, ne proviene $\frac{a+x}{a+x}=1$. Dunque ſaranno i ſemplici diviſori, $+a$, $+x$, & $a+x$; multiplicandogli a due, a due, ne naſcono i diviſori compoſti $a\times x=ax$, ſiccome $a\times\overline{a+x}=aa+ax$. Parimente $x\times\overline{a+x}=ax+xx$, e multiplicandogli tutti inſieme $a\times x\times\overline{a+x}=aax+axx$.

ALGORISMO DELLE FRAZIONI.

DEFINIZIONE.

63. Per la frazione $\frac{m}{n}$ generalmente s' intende eſpreſſo il valore di un quoziente nato dalla diviſione fatta di una quantità per altra, come ſogliono eſſere le frazioni $\frac{2ax-aa-xx}{a-x}$ così ſcritte,

te, perchè il quoziente $x-a$, a prima vista non si discerne, o pure, siccome delle altre, perchè sono senza comun divisore, e però di tal quoziente non si può tosto affermare, se sia quantità intera, o si vero maggiore dell' unità, o della unità stessa minore. Con ragione per altro diremo, che legittime, e spezialmente numeriche frazioni $\frac{m}{n}$ sono quelle (15), in cui m numera le parti prese, o che prender si deono di tutte le parti n, nelle quali fu divisa la unità, o qualsivoglia quantità considerata per uno intiero. Come se $\frac{m}{n}$ fosse $\frac{3}{4}$, si vorrebbe, che della unità divisa in parti $n=4$, se ne prendessero le numerate $3=m$. E perchè niuna quantità contiene più parti di quelle, che la compongono, anzi è uguale a tutte le parti sue insiememente prese, perciò non mai puote, m che numera, e numeratore si chiama, esser maggiore di n, che divide, e denomina quante della unità siano le parti; e però divisore, e denominatore si appella. Quindi è che dove prendesi $m=n$, il valor della frazione sarà un intiero, cioè essendo $m=n$ egli è $\frac{m}{n}=1$. Se poi nella frazione il numeratore m eccedesse il numero delle parti, nelle quali la unità fu divisa, cioè se fosse $m>n$, la frazione non sarebbe del tutto legittima, ma spurgabile, e riducibile, da che $\frac{23}{5}=4+\frac{3}{5}$; concludasi adunque, che vera, purgata numerica frazione sia quella, in cui il numeratore m è più piccolo del divisore n, che dee essere più grande.

ASSIOMA.

64. Ogni quantità come multiplicata, anche s' intenda divisa per l' unità, senza che il suo valore si muti; perchè $a=1a=\frac{a}{1}=\frac{1a}{1}$; quindi è, che l' unità non accresce multiplicando le cose, nè dividendo le minuisce; laonde prendendo qualsisia quantità m per unità, non si muta il valore di qualsivoglia altra quantità, multiplicandola insieme, e dividendola per m, sia perchè sotto, e sopra (45) spurgare si puote, sia perchè (30) quanto col

multiplicare per m componesi, altrettanto risolvesi dividendo per m. Egli è adunque $\frac{1a}{1}=\frac{ma}{m}=a$, e facendo $m=4$, & $a=3$ sarà $\frac{1\times3}{1}=\frac{m\times3}{m}=\frac{4\times3}{4}=3$. Anzi $\frac{1a}{1}=\frac{ma}{m}=\frac{mxa}{mx}=a$.

COROLLARIO.

Regola per ridurre le frazioni a comune Denominatore.

65. Ogni frazione si multiplichi sotto, e sopra per lo divisore dell'altra, e la riduzione è fatta. $\frac{ab}{c}$, & $\frac{xx}{m}$ ridotti saranno $\frac{amb}{cm}$, & $\frac{cxx}{cm}$. Similmente di $\frac{ac}{x}$, & $\frac{xx}{m}$, ne nascono le due frazioni di comune denominatore $\frac{acm}{mx}$, & $\frac{x^3}{mx}$. Parimente $\frac{ac}{x}$ & $\frac{ab}{m}$ & $\frac{bc}{r}$ saranno, ridotte le due prime $\frac{acm}{mx}$, & $\frac{abx}{mx}$; indi per la terza si ottiene $\frac{acmr}{mrx}$, & $\frac{abrx}{mrx}$, & $\frac{bcmx}{mrx}$, frazioni ridotte al comune denominatore mrx, e del valore medesimo delle tre prime (64).

Dove poscia intravenga dover ridurre a comune denominatore quantità intere, e fratte, si divida primieramente l'intera per la unità (64), che suo valore non muta, quindi si operi come sopra. Avendo a, & $\frac{bc}{m}$, facciasi $\frac{a}{1}$, $\frac{bc}{m}$, e riducendo sarà $\frac{am}{m}$, & $\frac{bc}{m}$, ma per compendio si multiplichi la quantità intera sotto, e sopra per lo divisore della frazione, e saranno ridotte a comune denominatore (64).

COMPENDIO.

66. Se mai occorre, che ne' denominatori diversi vi sia un comune multiplicatore, si dee sotto, e sopra multiplicare per l'altro multiplicatore comune quella frazione, in cui tale multipli-

tiplicatore non vedesi. Essendovi $\frac{ab}{cx}$, & $\frac{m}{x}$ frazioni, che hanno ne' loro denominatori il comune multiplicatore x, si dee multiplicare per lo non comune multiplicatore c, sotto, e sopra $\frac{m}{x}$, altra frazione, in cui c non si vede, e ridotte saranno $\frac{ab}{cx}$, & $\frac{cm}{cx}$. Trattando $\frac{ab}{3cx}$, & $\frac{m}{21x}$ multiplicare si vogliono la prima per 7, e la seconda per c sotto, e sopra, che ne risulta $\frac{7ab}{21cx}$, & $\frac{cm}{21cx}$. Se sia $\frac{ab}{a-x}$, & $\frac{cdd}{aa-2ax+xx}$, si multiplichi solamente sotto, e sopra, la prima per $a-x$, che ne risulta $\frac{aab-abx}{aa-2ax+xx}$, & $\frac{cdd}{aa-2ax+xx}$ ridotta a comune denominatore, conservato lo stesso valore primiero.

PROPOSIZIONE XIII.

Problema.

67. Sommare le frazioni.

Risoluzione.

Si uniscano insieme co' loro segni, consecutivamente scrivendole, come si è fatto per le quantità intere (24). Siavi $\frac{3}{4}$, & $\frac{2}{3}$, loro somma sarà $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$, che se ridotte si vogliono a comune denominatore, ciò si faccia colle date regole (65. 66), ed alla somma di tutti i numeratori, una sol volta, il comun divisore si sottoscriva; però $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{9+8}{12}=\frac{17}{12}$. Parimente $\frac{ab}{x}$ & $\frac{bb-bc}{m}$, formano la somma $\frac{ab}{x}+\frac{bb-bc}{m}$, e riducendo sarà

ab

$\frac{abm+bbx-bcx}{mx}$. Se gli è $\frac{2}{3}$, e $\frac{4}{5}$ sommati saranno $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$; ma ridotti a comune denominatore riescono $\frac{2\times5+4\times3}{3\times5}=\frac{10+12}{15}=\frac{22}{15}$ ec.

PROPOSIZIONE XIV.

PROBLEMA.

68. Sottrarre le frazioni.

RISOLUZIONE.

Si osservi la regola istessa della sottrazione (26) delle quantità intere. Però da $\frac{ab}{m}$ volendo sottrarre $\frac{bb-bc}{x}$, sarà residuo $\frac{ab}{m}-\frac{bb+bc}{x}$, così da $\frac{4}{5}$ sottraendone $\frac{2}{3}$, sarà residuo $\frac{4}{5}-\frac{2}{3}$, e perchè quasi sempre si vogliono ridotte le frazioni a comune denominatore, perciò riducendo (65) la prima frazione; e sottraendo sarà $\frac{abx-bbm+bcm}{mx}$, e la seconda sarà $\frac{4\times3-2\times5}{3\times5}=\frac{12-10}{15}=\frac{2}{15}$.

PROPOSIZIONE XV.

PROBLEMA.

69. Valutare scambievolmente le frazioni.

RISOLUZIONE.

Si riducano (65) a comune denominatore, ed il numeratore minore dal maggiore numeratore sottraggasi, ed il residuo sarà una frazione (68), con cui la frazione, che ha il numeratore più grande eccede la frazione, che ha il numeratore più piccolo. Avendo $\frac{3}{5}$, e $\frac{2}{7}$, saranno ridotti, $\frac{21}{35}$, e $\frac{10}{35}$; quindi sot-

ſottraendo 10 da 21, il reſiduo $\frac{11}{35}$ è lo eccesso, con cui la frazione $\frac{3}{5}=\frac{21}{35}$ eccede la minor frazione $\frac{2}{7}=\frac{10}{35}$: avendo $\frac{2}{3}$, & $\frac{3}{4}$ ſaranno ridotti $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$, & $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$, però $\frac{3}{4}$ vale $\frac{1}{12}$ più di $\frac{2}{3}$.

Da queſto problema ne naſcono le ſeguenti utiliſſime verità.

Corollario.

70. Le frazioni viepiù divengono maggiori, quando più ſi accreſce il numeratore in riguardo a' reſpettivi loro diviſori. dove ſieno $\frac{2}{9}$, & $\frac{3}{11}$, delle quali la ſeconda frazione è maggiore della prima per $\frac{5}{99}$, ſe poi ſono accreſciute ne' loro numeratori, che il 2 divenga 5, ed il 3 ſia 4, ſaranno $\frac{5}{9}$, & $\frac{4}{11}$, delle quali dove prima $\frac{2}{9}<\frac{3}{11}$, di preſente non ſolo $\frac{2}{9}<\frac{5}{9}$, & $\frac{3}{11}<\frac{4}{11}$, eſſendo gli eccesſi $\frac{3}{9}$, & $\frac{1}{11}$; ma in oltre $\frac{5}{9}>\frac{4}{11}$; dacchè $\frac{5}{9}=\frac{55}{99}$, & $\frac{4}{11}=\frac{36}{99}$. All' oppoſto poi, come impiccoliti ſono i numeratori, impiccolite poi vengono le frazioni riſpettivamente a' propri diviſori, lo che ſi dimoſtra roveſciando le frazioni ſuperiori.

Quando ſono accreſciuti i diviſori, allora vengono impiccolite nel proprio valore le frazioni in riguardo a' reſpettivi numeratori. Eſſendo $\frac{2}{3}>\frac{2}{5}$ per lo eccesso di $\frac{4}{15}$; ſe il 3 ſi accreſce, e facciaſi 9, e l' altro diviſore 5 divenga 7, ſarà non ſolo $\frac{2}{9}<\frac{2}{3}$, & $\frac{2}{7}<\frac{2}{5}$, ma $\frac{2}{9}<\frac{2}{7}$ per lo difetto di $\frac{4}{63}$: laonde al contrario maggiori divengono le frazioni, quando impiccoliti ſono i diviſori, ſempre in riguardo a' riſpettivi numeratori.

Teorema.

71. Di qualunque frazione ſempre ſi ottiene lo ſteſſo valore, multiplicando il diviſore, o dividendo il numeratore per la medeſima quantità m, ed al roveſcio ſempre ne naſce lo ſteſſo valore, dividendo il diviſore, o multiplicando il numeraratore per m.

Dimostrazione.

Sia $\frac{am}{x}$, della qual frazione ſempre ſi ottiene il valore $\frac{a}{x}$, o che per m ſi multiplichi il diviſore x, onde ſia $\frac{am}{x \times m}$, o chè ſi divida per m il numeratore am, da che cancellato m da am, o da $x \times m$ (45), ſarà $\frac{am}{x \times m} = \frac{a}{x}$ ſotto, e ſopra, ſpurgando per m. Inoltre ſia la frazione $\frac{a}{xm}$, ſempre ne riſulta $\frac{a}{x}$, tanto ſe ſi divide per m il diviſore mx, onde naſca il quoziente $\frac{a}{\frac{mx}{m}} = \frac{a}{x}$; perocchè (64) eſſendo $\frac{mx}{m} = x$, ſarà $\frac{a}{\frac{mx}{m}} = \frac{a}{x}$, lo che parimente ſi ottiene multiplicando per m il numeratore a, onde riſulti $\frac{a \times m}{mx} = \frac{a}{x}$, come ben ſi vede ſpurgando ſotto, e ſopra per m. Egli è adunque lo ſteſſo in qualunque ſia frazione multiplicare il diviſore, o dividere il numeratore per la medeſima quantità m: e da altra parte la medeſima coſa ſi ottiene dividendo il diviſore, o multiplicando il numeratore, per la medeſima quantità m. Ed acciocchè più manifeſto divenga il preſente teorema, fondamento di tutta la franchezza nell' uſo delle frazioni, giova non poco il darne un particolare numerico eſempio. Sia la frazione $\frac{8}{24}$, la quale divider ſi debba per 2, certamente

la

la ſua metà ſarà $\frac{8}{48}$, multiplicando per 2 il diviſore 24, o pure dividendo per 2 il numeratore 8, chè ſarà $\frac{4}{24}=\frac{8}{48}$, dacchè ſpurgando la prima ſotto, e ſopra per 4, e la ſeconda ſotto e ſopra per 8, ne riſulta $\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$, e la prima $\frac{8}{24}$ ſpurgata per 8 vale $\frac{1}{3}$ doppio di $\frac{1}{6}$.

Che ſe poi la data frazione $\frac{8}{24}$ ſi debba non dividere, ma multiplicare per 2, lo ſteſſo prodotto ſi ottiene, dividendo per 2 il diviſore 24, onde naſca $\frac{8}{12}$, o pure multiplicando per 2 il numeratore 8, acciocchè ſia il prodotto $\frac{16}{24}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$, ſpurgando ſotto, e ſopra la prima per 8, e la ſeconda per 4, e la data per 8, che diverrà $\frac{1}{3}$ metà di $\frac{2}{3}$.

PROPOSIZIONE XVI.

Problema.

72. Multiplicare le frazioni colle intere quantità.

Risoluzione.

Per la intera quantità c dovendo multiplicare la frazione $\frac{ab}{mc}$, primieramente per c ſi multiplichi il numeratore ab (71), ed averaſſi il prodotto $\frac{abc}{mc}$; in ſecondo luogo ſi ottiene lo ſteſſo prodotto, dividendo per la quantità c (71), cioè cancellandola dal diviſore (43. 44.) mc, onde naſca la frazione prodotta $\frac{ab}{m}=\frac{abc}{mc}=\frac{ab}{mc}\times c$. Similmente, ſe per c ſi dee multiplicare la frazione $\frac{ab}{c}$, ſarà prodotto $c\times\frac{ab}{c}=\frac{abc}{c}=ab$ (45).

Corollario Fondamentale.

73. E perchè si ottiene lo stesso prodotto per la medesima quantità c, o multiplicando il numeratore ab, o dividendo il divisore c (71): quindi è, che di ogni frazione $\frac{abx}{cm}$ cancellando il divisore cm, rimane tutta la frazione multiplicata per cm, e risulta per prodotto il numeratore, sempre intera quantità $abx = \frac{abxcm}{cm}$. Questa è la regola principale per togliere le frazioni dalle equazioni, cancellando da' membri fratti il divisore, e per quello multiplicando gli rimanenti non fratti membri, o aventi denominatore diverso.

PROPOSIZIONE XVII.

Problema.

74. Dividere una frazione per un' intera quantità.

Risoluzione.

Per la quantità intera, se si può, dividasi attualmente il numeratore, e ciò non potendosi fare, si multiplichi il divisore (71). Dividendo $\frac{ax}{m}$ per x, si cancelli x dal numeratore, e sarà quoziente $\frac{a}{m}$. In simigliante maniera volendo per c dividere $\frac{ax}{m}$, fa d' uopo dividere il numeratore ax per c, vuolsi dire, che per c si multiplichi (71) il divisore m, e sarà quoziente $\frac{ax}{cm}$.

PROPOSIZIONE XVIII.

Problema.

75. Multiplicare frazione per frazione.

Risoluzione.

Si multiplichino insieme i numeratori, ed insieme gli divisori,

sori, ed i nuovi prodotti saranno numeratore, e denominatore della multiplicata frazione. Avendo da multiplicare tra loro $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{m}$ sarà la frazione prodotta $\frac{a}{c} \times \frac{b}{m} = \frac{ab}{cm}$.

DIMOSTRAZIONE.

Sieno i multiplicatori $\frac{a}{c} = y$, & $\frac{b}{m} = x$, sarà loro prodotto $= xy$, conciosiachè (73) dalla prima equazione si ottiene $a = cy$, e dalla seconda $b = mx$, che multiplicate insieme, formano il prodotto $ab = cmxy$, e dividendo per cm, ne nasce $\frac{ab}{cm} = xy$, che era ec.

Torna molto in acconcio spurgare attualmente ciò, che vi è di comune ne' numeratori, e ne' divisori delle multiplicande frazioni. $\frac{m}{3\sqrt{ax}} \times \frac{ab\sqrt{ax}}{c} = \frac{abm\sqrt{ax}}{3c\sqrt{ax}} = \frac{abm}{3c}$. Parimente $\frac{a}{\sqrt{ax}} \times \frac{\sqrt{ax}}{m} = \frac{a}{1} \times \frac{1}{m} = \frac{a}{m}$, così $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$.

PROPOSIZIONE XIX.

PROBLEMA.

76. Dividere frazione per frazione.

RISOLUZIONE.

La frazione $\frac{a}{c}$ sia il divisore dell'altra dividenda frazione $\frac{b}{m}$, e però considerando nel divisore il solo numeratore a, per cui non potendosi (74) dividere il numeratore b, si multiplichi per a il divisore m, e ne risulta $\frac{b}{\frac{m \times a}{c}}$, cioè $\frac{b}{\frac{am}{c}}$, ma (71), egli è lo stesso dividere per c il divisore am (71), che multiplicare per c il numeratore b, però sarà più acconcia scrittura della fatta divisione, e vero, e legittimo quoziente, scrivendo $\frac{bc}{am}$; però da questa operazione ne nasce altra comune maniera, la quale è

 di

di ſcrivere il diviſore, e poi immediatamente la dividenda quantità, fratti, e multiplicare in croce, detto da' Latini *decuſſatim*, come dalle punteggiate linee indicato ne viene $\frac{a}{c} \cdot\cdot \frac{b}{m} = \frac{bc}{am}$, che è lo ſteſſo già ritrovato quoziente.

E ne naſce eziandio la ſpedita maniera del Signor Newton, la quale è di ridurre le frazioni a comune denominatore, ed ometterlo, e co' numeratori fare la diviſione, come ſe foſſero intere quantità, e perciò ſaranno le date frazioni $\frac{am}{cm}$, & $\frac{bc}{cm}$, e i ſoli numeratori am diviſore, & bc quantità dividenda, onde ne naſce la ſteſſa frazione quoziente $\frac{bc}{am}$.

Speſſe volte giova ſpurgare prima tuttociò, che vi è di comune sì ne' due numeratori, sì ne' due denominatori, quindi per $\frac{3m\sqrt{ax}}{2cc}$ divider volendo la frazione $\frac{3ab\sqrt{ax}}{2cc}$ ſi cancelli $3\sqrt{ax}$ comune nei numeratori, ed il comune $2cc$ ne' denominatori, e ſarà quoziente $\frac{ab}{m}$. Parimente per $\frac{3}{5}$ dividendo $\frac{2}{3}$, ſarà nella prima maniera il quoziente $\frac{2}{3 \times \frac{3}{5}} = \frac{2 \times 5}{3 \times 3} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$: ſe foſſe per $\frac{3}{5}$ da dividere $\frac{3}{4}$, ſi cancellino i numeratori 3, e 3, e la diviſione ſi faccia co' denominatori, dividendo al contrario il 5 per 4, concioſſiachè riducendo a comune denominatore, ſarà 3×4 diviſore, & 3×5 dividendo, omeſſo il comune denominatore 5×4, e dividendo attualmente, ſarà quoziente $\frac{3 \times 5}{3 \times 4}$, e ſpurgando per 3, riſulta $\frac{5}{4}$, ed eziandio per $\frac{2}{7}$ dividendo $\frac{6}{7}$, omeſſi i denominatori, la diviſione ſi faccia direttamente co' numeratori, e quoziente ſarà $\frac{6}{2} = 3$ intieri.

Da tante diverſe ſoluzioni ne naſce una forſe più comoda, ed ed è, che si rovesci il divisore fratto, e poi si multiplichi direttamente, e dove occorre si spurghi. Per $\frac{3}{5}$ dividendo $\frac{3}{4}$ sia quoziente $\frac{5}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$. Così per $\frac{2}{7}$ dividendo $\frac{6}{7}$ sarà quoziente $\frac{7}{2} \times \frac{6}{7} = \frac{6}{2} = 3$. E per $\frac{3}{5}$ dividendo $\frac{2}{3}$ sia quoziente $\frac{5}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$. Finalmente dividendo $\frac{b}{m}$ per $\frac{a}{c}$ quoziente sarà $\frac{c}{a} \times \frac{b}{m} = \frac{bc}{am}$.

Dimostrazione.

Se il divisore fosse y, e la quantità dividenda x, vero quoziente (43) sarà $\frac{x}{y}$. Facciasi adunque il divisore $\frac{a}{c} = y$, onde nasce l' equazione $a = cy$, e sia $x = \frac{b}{m}$, frazione dividenda, e quindi l' equazione $mx = b$. Si multiplichino insieme le due equazioni, sarà $bcy = amx$, la quale divisa per y ne porge altra equazione $bc = \frac{amx}{y}$, e questa divisa per am, diviene $\frac{bc}{am} = \frac{x}{y}$; che però essendo $\frac{x}{y}$ il vero quoziente, sarà lo stesso quoziente $\frac{bc}{am}$, che era quanto ec.

Riflessione.

77. Dalle risoluzioni di questi ultimi due problemi, e spezialmente osservando i numerici esempli, chiaramente si vede, che multiplicando tra di loro due purgate, e legittime, spezialmente numeriche (63) frazioni, ne risulta frazione prodotta minore dell' una, e dell' altra, che furono multiplicate; conciossiachè $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$, ella è la frazione prodotta $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$, $< \frac{2}{3}$ (69. 70.). Al contrario poi dividendo frazione per frazione, si ottiene quoziente frazione maggiore della dividente, e della divisa; da che per $\frac{3}{5}$ dividendo $\frac{2}{3}$, egli è quoziente $\frac{2 \times 5}{3 \times 3} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$,

e

e ben si vede, che la unità con $\frac{1}{9}$ è maggiore di $\frac{3}{5}$, e di $\frac{2}{3}$, ciascuno minore dell' unità. Anzi il quoziente $\frac{10}{9}$ è molto maggiore della prodotta frazione $\frac{2}{5}$ (70).

Viene tutto ciò considerato qual paradosso, ma ragion vuole, che intravenga così, e da quanto di sopra si è dimostrato, rimane evidente. Perocchè tutte le purificate frazioni (63) esprimono il valore di un quoziente inferiore alla unità, e quindi in ciascheduna il numeratore dee essere minore del proprio denominatore. Ma nelle multiplicazioni di simili quanti fratti, cioè $\frac{2}{5} \times \frac{3}{7}$, nasce prodotto il nuovo numeratore 6 da due numeratori 2, 3, ciascuno de' quali è più piccolo del suo divisore 5, 7, da' quali è generato il nuovo denominatore 35 molto maggiore del 6, di quello, che sia 5 del 2, e 7 del 3, perciò risultando il divisore più grande, menomata diviene la frazione prodotta (70), e molto più la stessa divenuta minore, per essere il numeratore impiccolito; il perchè la prodotta frazione dee risultare minore dell' uno, e dell' altro de' suoi multiplicatori. Tutto ciò si conosce, eziandio riducendole (65.66) a comune denominatore, e saranno $\frac{2}{5} = \frac{14}{35}$, $\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$, e la frazione prodotta $= \frac{6}{35}$ è superata di $\frac{8}{35}$ dalla multiplicante $\frac{2}{5}$, ed eziandio ecceduta di $\frac{9}{35}$ dall' altra multiplicante $\frac{3}{7}$.

Tutto al contrario nelle divisioni delle frazioni tra loro intraviene, dacchè per $\frac{2}{5}$ dividendo $\frac{3}{7}$ sarà quoziente $\frac{3 \times 5}{2 \times 7} = \frac{15}{14} = 1\,\frac{1}{14}$ quoziente maggiore della frazione dividente $\frac{2}{5}$, e della divisa $\frac{3}{7}$; questo nasce perchè il numeratore 2 minore del 5 multiplica il divisore 7, ed il maggiore 5 multiplica il numeratore 3 nel quoziente, lo cui valore cresce per

il

il denominatore 2×7 menomato dal 2, e per il numeratore 3×5 accrefciuto dal 5, e però (70) la quoziente frazione rifulta maggiore della dividente, e della divifa, e fovente anche maggiore dell' unità; conciossiachè fi accrefce il numeratore, e fi minora il divifore.

Non fembra inutile lo avvertire, che quanto le frazioni più fono lontane dall' unità, allora multiplicandole, il prodotto diviene minore, e dividendole il quoziente è maggiore, dacchè $\frac{1}{10}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{70}$, ma $\frac{10}{7}=1\frac{3}{7}$. Dove poi fono proffime all' unità, crefce il prodotto, e fi menoma il quoziente $\frac{9}{10}\times\frac{6}{7}=\frac{54}{70}$, ma $\frac{6\times10}{7\times9}=\frac{60}{63}$, fempre però il quoziente è maggiore del prodotto affolutamente ragionando, come $\frac{60}{63}>\frac{54}{70}$.

PROPOSIZIONE XX.

PROBLEMA.

78. Dalla data frazione prendere la parte denominata per frazione.

RISOLUZIONE.

Le frazioni fi multiplichino tra di loro (75), ed il prodotto farà la denominata parte della data frazione: fi defiderano $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$, i ricercati due terzi faranno $=\frac{2\times3}{3\times4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

DIMOSTRAZIONE.

Dacchè il denominatore di qualfivoglia frazione ci dinomina il numero delle parti, nelle quali è ftata divifa la unità, ed il numeratore ne conta, e determina il numero delle denominate parti, che fono ftate prefe (63), perciò di $\frac{a}{c}$ la unità è divifa in parti numero c, delle quali fe ne deono prendere numero

mero

mero a. In particolare poi di $\frac{3}{4}$ essendo l' unità divisa in quattro parti dinominate dal denominatore 4, di quelle se ne deono prendere tre, numerate dal numeratore 3. Ma $\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$: Dunque di queste tre quattro parti, prendendone due sole, saranno $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ vuolsi dire $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$. Generalmente dovendosi prendere $\frac{b}{m}$ di $\frac{a}{c}$ saranno le prese parti $\frac{ab}{cm}$. Multiplicando sempre numeratori insieme, ed insieme denominatori.

79. Per conferma di quanto si è proposto, e dimostrato nella precedente riflessione (77), e nel presente problema, che per avere $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$, bisogna multiplicargli insieme (75), acciocchè il prodotto ne somministri le ricercate parti espresse nella nuova prodotta frazione, nel presente esempio $=\frac{1}{2}$, si divida questo prodotto $\frac{1}{2}$ per uno de' due multiplicatori $\frac{2}{3}$, o sia $\frac{3}{4}$ che giusta le regole generali, quoziente sarà l' altro multiplicatore: e certamente per $\frac{2}{3}$ dividendo $\frac{1}{2}$, sarà quoziente $=\frac{3}{4}$, che è l' altro multiplicatore. E se per $\frac{3}{4}$ si divide $\frac{1}{2}$, sarà quoziente l' altro multiplicatore $\frac{2}{3}$, dacchè (76) $\frac{1}{2\times\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$, ed ancora $\frac{1}{2\times\frac{3}{4}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

PROPOSIZIONE XXI.

PROBLEMA.

79. Multiplicare, o sivvero dividere per intera quantità altra quantità intera, cui sia annessa quantità fratta.

RISOLUZIONE.

Sia per a da multiplicare il quanto b al quale sia aggiunta la la frazione $\frac{c}{m}$, cioè $b+\frac{c}{m}$, sarà l'indicato prodotto $a\times\overline{b+\frac{c}{m}}$: però si riduca b al comune denominatore (65) con c multiplicandolo per m, e la nuova frazione $\frac{bm+c}{m}$ si multiplichi (72) per a, e sarà vero prodotto $\frac{abm+ac}{m}$. Che se fossero da multiplicare per 7, i numeri $9+\frac{3}{5}$ si multiplichi il 9 per 5, ed al prodotto 45, si aggiunga il numeratore 3, onde sia $\frac{48}{5}$, e multiplicando 48 per 7, ne nasce (72) il numero $\frac{336}{5}=67+\frac{1}{5}$.

Dovendo poscia per la intera quantità a dividere $ab+\frac{ac}{m}$, si cancelli (74) dall'intero ab, e dal numeratore ac la lettera a, e sarà quoziente $b+\frac{c}{m}$, che è l'altro multiplicatore. Ma per maggior dimostrazione: sia da dividere per a il superiore prodotto $\frac{abm+ac}{m}$: ne' simili casi, per più chiarezza, si spezzi la frazione, e si scriva $\frac{abm}{m}+\frac{ac}{m}$, & $\frac{abm}{m}$ si divida per a, e si spurghi sotto, e sopra per m, sarà particolar quoziente lo intero b: il secondo membro $\frac{ac}{m}$, inespurgabile per m, si divida per a, onde nasce la quoziente frazione $\frac{c}{m}$, e sommando ritorna $b+\frac{c}{m}$, quantità multiplicata. Ne' numeri poi, prendendo il superiore prodotto $67+\frac{1}{5}$, si divida 67 per 7, che fu il multiplicatore, e ne viene il quoziente 9, coll'avanzo di 4 unità, le quali vanno ridotte al comun denominatore 5 della frazione $\frac{1}{5}$, onde sia $\frac{20}{5}+\frac{1}{5}=\frac{21}{5}$, e dividendo il numeratore 21 per lo divisore 7, sarà quoziente $\frac{3}{5}$, e quoziente intero risulta il quanto multiplicato $9+\frac{3}{5}$.

ALGORISMO DELLE QUANTITA RADICALI.

PROPOSIZIONE XXII.

PROBLEMA.

80. Ridurre le quantità radicali a più semplice espressione.

RISOLUZIONE I.

Quante le volte si vede, che un quadrato multiplica tutti i membri della quantità irrazionale, o tutta dividela, si può tirar fuori del segno il quadrato medesimo, fuori scrivendo la sua radice, e sotto al segno lasciando i multiplicatori del quadrato istesso: quindi è, che sono dello stesso valore $\sqrt{axx-bxx}=x\sqrt{a-b}$, e così $\sqrt{\frac{aac}{12}}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{c}{3}}$.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè, sotto il radical segno, la irrazionale quantità (59) si suppone un quadrato algebraico, la cui radice non è attualmente estratta, ma per lo segno (9) solamente indicata: dunque attualmente la radice traendo (55. 57.), deesi la tratta radice del perfetto quadrato (ove si puote) scrivere fuori del segno. Però essendo $\frac{a^2}{2^2}\times\frac{c}{3}=\frac{aa}{4}\times\frac{c}{3}$, cioè $\sqrt{\frac{a^2}{2^2}\times\frac{c}{3}}=\sqrt{\frac{aa}{4}\times\frac{c}{3}}=\sqrt{\frac{aac}{12}}$, sarà $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{c}{3}}=\sqrt{\frac{aac}{12}}$, e così delle altre potestà ec.

COROLLARIO.

Dunque avendo $c\sqrt{a-x}$, per locare sotto del segno la quantità razionale, ci fa d' uopo prima quadrarla, quindi multiplicarla con ciascun membro della irrazional quantità, serbando sempre lo stesso valore. Pero $c\sqrt{a-x}=\sqrt{acc-ccx}$.

Risoluzione III.

82. Ove le quantità radicali si veggano essere più composte, allora trovati (62) i divisori, la divisione si adopri. Che se mai un quoziente quadrato si ottiene, la quantità radicale si può ridurre, sia $\sqrt{12a^3-8aax-axx+x^3}$, e sia ritrovato il divisore $3a+x$, che lasci il quadrato quoziente $4aa-4ax+xx$, riducendo sarà (80) $\overline{2a-x}\sqrt{3a+x}=\sqrt{12a^3-8aax-axx+x^3}$.

PROPOSIZIONE XXIII.

Problema.

83. Ridurre le quantità radicali (59) al medesimo grado, ed indice, ove lo abbiano diverso.

Risoluzione.

Sieno da ridurre ad un medesimo radical segno $\sqrt[m]{a}$, & $\sqrt[n]{b}$, e che conservino il primo proprio valore. Il quanto a sotto il radical segno m, si riduca alla potestà n, sarà a^n; scambievolmente riducasi il quanto b del segno radical n alla potestà m, scrivendo b^m: poscia ad amendue li quanti a^n, & b^m, si adatti il medesimo radical segno mn, onde sia $\sqrt[mn]{a^n}$, & $\sqrt[mn]{b^m}$, e le proposte quantità radicali saranno ridotte al medesimo segno, lo cui indice è un prodotto de' primi esponenti numeri m, & n, e tutto ciò senza mutare a quelle il valore, lo che si dimostra. Conciosiachè (61) $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{1}{m}}$, così $\sqrt[n]{b}=b^{\frac{1}{n}}$: inoltre (64) essendo $\frac{1}{m}=\frac{n}{mn}$, similmente $\frac{1}{n}=\frac{m}{mn}$, dunque $\sqrt[m]{a}=a^{\frac{n}{mn}}$, & $\sqrt[n]{b}=b^{\frac{m}{mn}}$. Ma (61) egli è $a^{\frac{n}{mn}}=\sqrt[mn]{a^n}$, siccome $b^{\frac{m}{mn}}=\sqrt[mn]{b^m}$ adunque, senza avere mutato i valori, sono i due proposti radicali $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, stati ridotti a due equivalenti $\sqrt[mn]{a^n}$, & $\sqrt[mn]{b^m}$, che hanno lo stesso radical segno dal numero mn denominato.

PRO-

PROPOSIZIONE XXIV.

PROBLEMA.

84. Sommare le quantità radicali, e ſottrarle eziandio.

RISOLUZIONE.

Tutto ſi eſeguiſca come ſe foſſero quantità razionali, non meno ſommandole (24), che ſottraendole (26). $\sqrt{ax}$, & $\sqrt{cx}$ ſommate inſieme formano $\sqrt{ax}+\sqrt{cx}$. Se poſcia ſi ſottrae dalla prima la ſeconda, ſarà reſiduo $\sqrt{ax}-\sqrt{cx}$; e ſe intravenga, che le quantità radicali ſiano in tutto ſimili, ſommare ſi deono i loro coefficienti (21): però $3\sqrt{ax}$, & $\sqrt{ax}$ ſommate inſieme fanno $4\sqrt{ax}$; parimente ſottraendole, l'operazione ſi faccia nei loro coefficienti: da $3\sqrt{ax}$ ſottraendo $\sqrt{ax}$, rimane $2\sqrt{ax}$, e da $3\sqrt{ax}$ ſottraendo $5\sqrt{ax}$, ſarà reſiduo $-2\sqrt{ax}$.

PROPOSIZIONE XXV.

PROBLEMA.

85. Multiplicare le quantità radicali.

RISOLUZIONE.

Biſogna che ſieno del medeſimo grado, che però non eſſendo, fa d'uopo ridurle (83) allo indice ſteſſo.

Si multiplichino, come ſe foſſero quantità razionali, ed il loro prodotto dentro del ſegno ripongaſi, e ſe fuori del ſegno vi ſono quantità razionali, queſte a loro modo (33) multiplicare ſi vogliono, laſciando ſempre il loro prodotto fuori del ſegno. Avendo $a\sqrt{cx}$ da multiplicarſi per $3b\sqrt{ax}$, ſarà prodotto $3ab\sqrt{acxx}$ $=3abx\sqrt{ac}$; parimente $2a\sqrt[3]{abbc}\times 3c\sqrt[3]{aabb}=6ac\sqrt[3]{a^3b^4c}=6aabc\sqrt[3]{bc}$ (80); e così $\sqrt{ac+\sqrt{aa-yy}}\times\sqrt{ac+\sqrt{aa+yy}}$, ſarà il prodotto $ac+\sqrt{a^3c+acyy}+\sqrt{a^3c-acyy}+\sqrt{a^4-y^4}$. Avendo $3a\sqrt{ab^3}\times 2b\sqrt{a^3b}=$ $6ab\sqrt{a^4b^4}$, e traendo attualmente la quadrata radice (55) da $\sqrt{a^4b^4}$ ſarà $6ab\sqrt{a^4b^4}=6a^3b^3$.

COROLLARIO.

86. Dunque multiplicando le irrazionali quantità $\sqrt{a^3b}\times\sqrt{ab^3}$ ſpeſſo s'ottiene il prodotto razionale aab. PRO-

PROPOSIZIONE XXVI.

PROBLEMA.

87. Dividere quantità radicale per simile quantità radicale.

RISOLUZIONE.

Si dividano al solito (42), come se fossero intere quantità razionali, e si faccia lo spurgo, ove bisogna; ma sempre razionali co' razionali, e radicali co' radicali. $\sqrt{ab}$ divisa per $\sqrt{a}$, ne porge il quoziente $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{ab}{a}} = \sqrt{b}$. Parimente per $2bc\sqrt{aac-aax}$, dividendo $8ac\sqrt{aaxx-aacx}$, sarà quoziente $\frac{8ac\sqrt{aaxx-aacx}}{2bc\sqrt{aac-aax}} = \frac{4a\sqrt{xx-cx}}{b\sqrt{c-x}}$ (80) $= \frac{4a}{b}\sqrt{\frac{xx-cx}{c-x}}$.

Sempre supponendo, che le quantità radicali sieno del medesimo grado, altrimenti, prima d'ogni operazione, fa di mestiero il ridurle (83).

ASSIOMA.

88. Se a cose uguali, e del medesimo genere, uguali cose si aggiungono: o da quelle sono sottratte: o se uguali cose per altre uguali multiplicate sieno, o divise, o vengano elevate a simili potestà, o simili radici ne siano tratte da quelle; sempre uguali saranno le somme, i residui, i prodotti, i quozienti, ed uguali eziandio gli quadrati, gli cubi, e le simili radici quadrate, o cubiche saranno uguali.

ASSIOMA.

89. E se a disuguali cose, e dello stesso genere, sono aggiunte cose uguali, o queste da quelle sottratte: o sivvero disuguali cose, per cose uguali sieno multiplicate, o divise, o che vengano quelle elevate a simili potestà, o che le simili radici da disuguali cose sieno tratte; sempre disuguali saranno le somme, e gli residui, disuguali, i prodotti, e gli quozienti, come altresì gli quadrati, o gli cubi, e le simili quadrate radici, o cubiche, saran disuguali: dalla maggior quantità, la maggiore: e la minore dalla minore.

DE-

DEFINIZIONE XVI.

90. Equazione algebraica è un confronto di quantità uguali tra loro, o allo zero paragonate, col frapposto segno $=$, come sarebbe $a=a$, o sivvero $a+b=c-x$, o finalmente $a+b+x-c=0$. Delle equazioni poi: le quantità, le quali precedono il segno $=$, formano la prima parte, e la seconda parte dalle susseguenti al medesimo segno, viene costituita.

E perchè tutte le equazioni sono formate da quantità uguali, per questo legittimamente in vigore dello assioma al numero 88., si possono sommare, o sottrarre, o multiplicare tra loro, e ciascuna, in amendue le sue parti, può essere elevata a qualsivoglia potestà, o trarne qualsivoglia radice, sempre serbandosi equazione.

DEFINIZIONE XVII.

91. Equazione finita, cioè di determinato valore, o uno, o due, o tre ec. è quella, che una incognita sola contiene, come $\frac{ax}{c}=a-b$ di un solo valore, o sia $ac-xx=cx+bb$ di due valori ec.: ma dicasi infinita, e di valori infiniti quella equazione, in cui si veggono due, o più incognite, come sarebbe $a-x=c+y$.

DEFINIZIONE XVIII.

92. Grado, e potestà della equazione, dicesi in riguardo a quel termine, in cui la incognita x, o pur y, ascende alla maggiore dimensione.

$ax-ab=bb$ di primo grado, e lineare, per $x=x^1$.
$aa-xx=cx$ del secondo grado, quadrata, e piana, per $xx=x^2$.
$xx-aa=ac-by$ del secondo grado per xx, ma del primo per y.
$aax-a^3=x^3-axx$ di terzo grado, cubica, e solida, per $x^3=xxx$ ec.

DEFINIZIONE XIX.

93. Termini della equazione sono que' membri, nei quali la incognita x, o sia y, ascende a gradi diversi, aggiuntovi sempre per ultimo termine quello, in cui la incognita non si vede.

I nu-

I numeri naturali presi al rovescio 1, 0, oppure 2, 1, 0, ed ancora 3, 2, 1, 0 ec., sono gli indici della incognita, le cui potestà ne mostrano l' ordine dei termini stessi, ritenendo sempre lo zero per l' ultimo termine, in cui l' incognita non apparisce, e che omogeneo della ragione viene appellato. Perciò avendo $ax^3-bx^3+ax^2+bx^2+aax-abx-a^3+abb=0$, è una equazione di quatro diversi termini, ax^3-bx^3 formano il primo termine, ax^2+bx^2 compongono il secondo, ed il terzo da $aax-abx$; il quarto poi da due membri $-a^3+abb$.

Corollario.

94. Gli termini adunque delle equazioni sempre sono uno di più del numero formante l' indice della massima potestà dell' incognita, supponendo già cancellato ogni comun divisore.

Definizione XX.

95. Coefficiente dell' incognita egli è qualunque sia numerica, o letterale, intera, o fratta quantità, che multiplica, o divide la incognita istessa, o il suo quadrato, o il cubo ec. Di $3ax$ egli è coefficiente $3a$: di $abx-7ccx$, coefficiente $ab-7cc$: di $5abxx$, coefficiente egli è $5ab$: di $\frac{axx-cxx}{3a-cc}$, coefficiente $\frac{a-c}{3a-2c}$.

Definizione XXI.

96. Valore della incognita, o di qualunque sia quantità, si dice ancora tutt' altra quantità nell' adversa parte dell' equazione locata; qualora quella, che si valuta, sola ritrovasi dall' altra parte dell' equazione, e liberata da ogni coefficiente (95) $x=\frac{ab}{c}$ è una equazione, in cui il valore di x egli è $\frac{ab}{c}$ di $xx=\frac{a^3}{c}$ valore $\frac{a^3}{c}$: di $x^3=\frac{aabb}{5c}$, valore $\frac{aabb}{5c}$.

Definizione XXII., e Teorema.

97. Se a tutta l' equazione si aggiunge, e sottraesi la medesima quantità, che si trova nella equazione data, tale algorismo si dice antitesi: e nell' uso.

L' an-

L' antitesi ella è un trasportare uno, o più, o tutti gli membri da una, all' altra parte dell' equazione, mutando di ciascun traportato membro il segno nel contrario segno.

E per antitesi, nelle equazioni adoperata, equazione mai non si toglie; anzi nel confronto di quantità disuguali, avuta in uso l' antitesi, uguali cose adoperando, si conserva mai sempre loro disuguaglianza; le maggiori, maggiori: e le minori, minori.

Dimostrazione I.

Perchè in se medesima l' antitesi egli è un aggiugnere cose uguali ad uguali quantità, o cose uguali sottrarre da quelle; chiaramente ne siegue, che se le quantità presupposte sono uguali, aggiugnendo, o sottraendone cose uguali (88), uguali saranno le somme, ed uguali i residui. In simigliante contraria maniera, ove sieno disuguali le quantità, aggiugnendo a quelle cose uguali, o dalle medesime sottraendole, disuguali (89) dovranno essere le somme, ed i residui. Intanto giova non poco lo addurre alcuni esempli.

Alla equazione $b+c=a-x$ aggiungasi altra equazione $x=x$, ne nasce la somma $b+c+x=a-x+x$, ed espurgando risulta $b+c+x=a$; onde si vede, che $-x$ nella seconda parte è nell' altra parte divenuto $+x$. Se fosse poi l' equazione $b+c+x=a$, sottraendo da questa $b+c=b+c$, ne risulta $b+c+x-b-c=a-b-c$, ed espurgando fia $x=a-b-c$. Se fosse $x=a-b$ sarà $x-a+b=0$, che era ec. (90).

Siano le disuguali quantità $a-b>c-y$, alle quali aggiungendo le uguali cose $y=y$ saranno le somme certamente disuguali, la parte maggiore sarà maggiore; e la minore, minore, vuolsi dire $y+a-b>c-y+y$, e spurgando, risulta $y+a-b>c$, ed aggiugnendo b, e sottraendone a da amendue queste parti sarà $y>c+b-a$.

Corollario.

98. E dacchè eziandio multiplicando, o dividendo disuguali quantità per le uguali, i loro prodotti (30) devono essere somme compendiate, e gli quozienti, tanti compendiati residui, anche perciò sarà vero, quanto in questo teorema si è dimostrato

ſtrato, e ſtabilito nell' aſſioma al numero 89. Adunque dove ſia $\frac{ax-bb}{c} > \frac{aa-cx}{b}$ multiplicando per b, quindi per c, ne riſulta $\frac{abx-b^3}{bc} > \frac{aac-ccx}{bc}$, adeſſo, multiplicando per bc, cioè omettendo il comune denominatore bc, ſarà $abx-b^3 > aac-ccx$, e per antiteſi $abx+ccx > aac+b^3$, e dividendo per $ab+cc$, ne naſce $x > \frac{aac+b^3}{ab+cc}$.

Da tutto ciò ſi avvera ezîandio, che eſſendo $\sqrt{aa-by} > c$, farà, quadrando amendue le parti del confronto, $aa-by > cc$, e per antiteſi $aa-cc > by$, e dividendo per b, ne riſulta $y < \frac{aa-cc}{b}$

Ed avvertaſi attentamente non eſſer vero, che da tali due aſſiomi (88. 89.), e dalla preſente definizione ſeguir ne debba, che coſe uguali naſcano ſempre da coſe uguali, ove ſieno di genere, o ſpecie diverſa i loro principi. Concioſſiachè, ove diſuguali coſe ſono $a-x$, & $x-a$: eſſendo $a > x$, ſarà $a-x$ quantità poſitiva, & $x-a$ quantità negativa minore, e di genere totalmente diverſo. E pure quadrando le diverſe radici, ne naſcono uguali quantità: anzi lo ſteſſo quadrato $aa-2ax+xx$, generato ne viene.

DEFINIZIONE XXIII.

99. Radici della equazione ſono i valori (96) della incognita, da quella ſottratti, ed uguagliati allo zero, e dalla cui multiplicazione prodotta ne fu l' equazione iſteſſa. Di $xx-2ax+bx+$ $+aa-ab=0$ radici ſono $x+b-a=0$, & $x-a=0$, ed inſieme i valori di x ſono $x=a-b$, & $x=a$. Parimente della equazione $xx-ax+bx-ab=0$, le radici ſono $x-a=0$, & $x+b=0$, e quindi gli valori di x ſono $x=a$, & $x=-b$, ed acciocchè a chi che ſia dubbio non intravenga ſopra la eſpreſſa definizione, ed importantiſſima verità, che le radici di una equazione, altro non ſono, che la incognita diminuita di ciaſcuno de' ſuoi valori, quali reſidui multiplicati inſieme formano la medeſima equazione, dimoſtrare ſi può col raziocinio ſeguente.

Sia propoſta una equazione, qualunque ſi voglia, nella quale la incognita ſia x, o pur y, e ſiano della medeſima equazione gli eruibili valori di x, qualisivoglia, e quantisivoglia a, b, c, ec. donde ne nascono le equazioni, e valori di $x=a$, $x=b$, $x=c$, ec. sottraendo, ne nasceranno i residui $x-a=0$, & $x-b=0$, & $x-c=0$, i quali sono le radici della proposta equazione. Facciasi sommando $x-a+x-b+x-c$, ec. $=0$, sarà legittima questa equazione, da che sommando insieme cose uguali allo zero, sarà l'intera somma uguale allo zero.

Ed omai la prima parte di questa equazione, in cui tutti i termini della prima proposta equazione sono compresi, facciasi uguale A, sarà $A=x-a+x-b+x-c$ ec. e perciò egli è $A=0$, equazione, che in se contiene, e rappresenta la intera somma di tutti i residui nati dallo essere stata la incognita x diminuita di tutti i suoi valori, ciascuno sottratto da x, separatamente dall'altro; laonde dalla medesima equazione tutti si deono poter ricavare gli eruibili valori della incognita x. Egli è adunque certissimo, che se in vigore della equazione $A=0$, se ne ricava $x=a$, dovrà essere eziandio $x-a=0$ (97), ed ottenendosi $x=b$, parimente sarà $x-b=0$, e così di ogni altro valore di x, che dalla equazione $A=0$, avere si può; il perchè dalla medesima equazione tante simili equazioni semplici si potranno didurre, quanti sono i valori di A, dalla equazione medesima eruibili.

Intanto egli è certo, che se tra di loro tutti quei residui $x-a$, $x-b$, $x-c$ ec., nati dalla sottrazione di ogni valore dalla incognita x, vengono tra di loro multiplicati, potrassi il loro prodotto uguagliare allo zero, perchè prodotto di cose, delle quali ciascuna è uguale allo zero, ed anche in vigore della equazione $A=0$, sia necessario che sia di tutti il prodotto $=0$.

Chiamisi pertanto $=B$ il prodotto di tutti i residui $x-a$, $x-b$, $x-c$ ec., finchè presi vengono tutti gli valori di x della equazione $A=0$, sarà legittima eziandio la equazione $B=0$.

Si cerchino di presente gli valori di x, che ricavare si possono da questa ultima equazione $B=0$, cioè $\overline{x-a} \times \overline{x-b} \times \overline{x-c}$ ec. $=0$: e da che dividendo cose uguali per la medesima quantità, ne (88) risultano quozienti uguali, perciò dividendo B per $x-a$, e lo zero per $x-a$ sarà $\overline{x-b} \times \overline{x-c}$ ec. $=\frac{0}{x-a}$, cioè $=0$: e scambievolmente dividendo così B, come lo zero per $\overline{x-b} \times \overline{x-c}$ ec.

uguali

uguali quozienti ne nasceranno; sarà egli adunque:

$x-a=\frac{o}{\overline{x-b}\times\overline{x-c}}$ ec., cioè $x-a=o$; ed ecco un residuo di x ricavato dall' equazione $B=o$, il quale per antitesi è, $x=a$, valore della medesima incognita x.

Colle maniere medesime della rimanente equazione $\overline{x-b}\times\overline{x-c}$ ec. $=o$, dividendo per $x-b$, sia $x-c=\frac{o}{x-b}$, cioè $x-c=o$, dunque $x=c$: e rimanendo $x-b=o$, cioè $x=b$, questo senz' alcun dubbio parimente sarà altro valore di x, risultante dalla equazione $B=o$; anzi il medesimo dir si potrà di tutti gli altri, e diversi residui $x-d$, $x-f$, $x-g$. ec., dalla multiplicazione de' quali risulta il quanto B; se questi ancora dalla prima equazione $A=o$, vengono derivati.

Egli adunque rimane evidente, che dalla equazione $B=o$, ricavare si possono tutti gli stessi valori di x, nè più, nè meno, che dalla equazione da principio proposta $A=o$: ed essendo di queste due equazioni $A=o$, $B=o$, la seconda parte lo stesso zero; ne siegue, che ancora le due altre parti A, & B siano intieramente le stesse, ed in tutto, e per tutto uguali; non potendosi concepire, che A, & B non siano la cosa medesima, quante le volte legittimamente allo stesso zero, uguagliati sono amendue.

Definizione XXIV.

100. Delle equazioni alla medesima questione ordinate, altre sono primigenie, nelle quali lo stato della questione viene espresso, e quelle deono essere tante, quanto egli è il numero delle vere incognite: ad una incognita corrisponde una primigenia equazione; a due incognite, due equazioni ec. Altre poi sono le equazioni intermedie, che ci conducono alla equazione finale, in cui purificato rimane il valor della incognita, e reso uguale alle altre date, e cognite quantità.

Della equazione finale, bastevole idea formar se ne puote, osservando l' equazione seguente $x=\frac{aa+ab-bc}{3a-2c}$, equazione finale. Delle intermedie se ne tratterà colle seguenti regole, e della primigenia

migenia il Signor Newton nella ſua Aritmetica ne porge maniera tutta facile per ben inſtituirla; e per eſempio ſia propoſto di ritrovare diſtintamente le tre parti, o ſia i tre numeri delle lire, che ebbe ciaſcuno dei tre amici, i quali trovata una borſa, nella quale vi era ſegnato il numero di ll. 471., ſe le diviſero a ruba, e poi s'accorſero, che il ſecondo ne aveva avuto il doppio del primo, e lire 13 di più; ed il terzo ne averebbe avuto il doppio del primo, e del ſecondo, ſe non gli foſſero mancate lire 81.

Primieramente è neceſſario di eſaminare attentamente tutto lo ſtato del Problema, e quindi avanzarſi alla conſiderazione delle parti ad una, ad una, per ben diſtinguerle, ed aver chiara alla mente la loro conneſſione, e così ſtabilire, quale ſia quella, da cui le altre dipendono, e prenderla per incognita, e ſe una ſola non è ſufficiente, allora determinare due incognite.

Nel preſente problema ſi oſſervi, che niuna delle tre ricercate parti è conoſciuta, ma che bensì dalla notizia della prima, tutte le altre dipendono, ed in sì fatta maniera, che quella eſſendo cognita, divengono conoſciute le altre ancora, e però ſi prenda per incognita quantità la parte del primo, e ſi ſi formi il canone ſeguente

x . . .	Parte del primo. Ma il ſecondo ne ebbe il doppio, cioè $2x$; e lire 13 di più, ſarà perciò
$2x+13$ . .	Parte del ſecondo, e la ſomma di tutti e due ſarà $3x+13$: e perchè il terzo ne averebbe avuto il doppio di tutti e due, cioè $6x+26$, ſe mancate non gli foſſero lire 81, ſarà
$6x+26-81$ . .	La parte del terzo, e ſommando inſieme tutte e tre le parti, $x+2x+13+6x+$ $+26-81$, ne naſce
$9x+39-81$ . .	Somma di tutto il denaro contenuto nella borſa, qual ſomma per altra parte eſſendo cognita di lire 471, ſi ſono in queſta maniera ritrovati dello ſteſſo valore delle lire della borſa, due eſpreſſioni diverſe,

una

una algebraica $9x+39-81$, e l' altra già data di lire 471: ed ecco due quantità uguali, con cui formare si dee la primigenia equazione:

$9x+39-81=471$ Come poi trattare si debbano le primitive equazioni per ridurle alla finale, si vedrà nel seguente problema.

PROPOSIZIONE XXVII.

PROBLEMA.

101. Ridurre le primitive equazioni ad equazione finale.

RISOLUZIONE.

Regola I.

Se collo spurgo purificare si puote l' equazione, si faccia da prima, per così ridurre i termini a minor numero.
Avendo $2a-2b+3x=b+4x$ ad amendue le parti si aggiunga $2b$, e si tolga $3x$, che ne risulta $2a=3b+x$: e se fosse $5a+5b=$ $=3x+9b+3a$, si cancellino gli uguali $3a$, $+5b$, dall' una, e dall' altra parte, e si ottiene $2a=3x+4b$.

Regola II.

102. Dove si abbia, o risulti equazione divisa pel medesimo divisore, si multiplichi per quello tutta l' equazione, e ciò si fa omettendo, o cancellando il divisore comune.
Se sia $\frac{aa}{4cc}-\frac{ax}{8cc}=\frac{bb}{2cc}$, si cancelli il comun divisore $2cc$, ed avrassi $\frac{aa}{2}-\frac{ax}{4}=bb$.

Regola III.

103. Se tutta la equazione è divisibile per qualche divisore, spezialmente ove in esso siavi l' incognita, si riduca a cifra, e facciasi la divisione attuale, e del quoziente si restituisca l'equazione come più torna in acconcio.

Es-

Essendo $2axx-bxx=2abx-x^3-aax+aab$, sarà per antitesi x^3+ $+2axx-bxx+aax-2abx-aab=0$, e così ordinata dividasi per $x+a$, che ne risulterà il quoziente $xx+ax-bx-ab=0$, e per antitesi $xx+ax-bx=ab$. Con questa regola non di rado si abbassano a grado inferiore le equazioni: ma ci vuole attenzione, e finezza di occhio, per iscoprirne il divisore.

Regola IV.

104. Dove poscia il divisore è apparifscente, come nella equazione $12ax-8aa=20ab-248ax$, non è d'uopo ridurla a cifra per ritrovarne il divisore, ma si faccia alla prima in ciascun membro, come nel presente esempio, per $4a$, e ne nasce $3x-2a=$ $=5b-62x$, e per antitesi $65x=5b+2a$, e dividendo tutta la equazione per 65, si ottiene l'equazione finale $x=\frac{5b+2a}{65}$. Se fosse $3bcxx-2abcx=bbcx-bbxx$, si divida per bx, sarà $3cx-2ac=$ $=bc-bx$, e per antitesi $3cx+bx=bc+2ac$, e dividendo per $3c+b$, ne nasce $x=\frac{bc+2ac}{3c+b}$, equazione ultimata, e finale (91). Queste due operazioni, *Parabolismo* sono appellate.

Regola V.

105. Dove si veggano membri fratti, e continenti la incognita x, disterminare si vogliono le frazioni (65), tante volte multiplicando l'equazione tutta (72) per ciascun divisore, quanti per numero sono i medesimi divisori. Se egli è $\frac{aax}{3c}-\frac{a^3}{c-x}=bb$, multiplicare si dee per $3c$, e si ottiene $aax-\frac{3a^3c}{c-x}=3bbc$: quindi per $c-x$, ne risulta $aacx-aaxx-a^3c=3bbcc-3bbcx$, equazione, da cui sterminate rimangono le frazioni. *Isomeria* viene questa regola nominata.

Regola VI.

106. Anche riducesi, e con vantaggio, la equazione, abbassando ugualmente a grado inferiore le potestà della non conosciuta x, lo che colla divisione si reca ad effetto (43). Dove

sia

sia $x^4+bx^3-ax^3=abxx$, dividendo i membri tutti per lo comune divisore xx, viene la quadrato-quadrata equazione (92) ridotta al grado secondo, $xx+bx-ax=ab$; si vede per tanto, che tutti esser deono dalla incognita x affetti gli membri, e si vede, che sempre vi rimane un membro senza la incognita x, onde confermasi il numero 94. Vien detta la operazione presente *Ipobibasmo*.

Regola VII.

107. Riducesi eziandio l'equazione, liberandola dalle quantità irrazionali (9), cioè radicali, in cui ritrovasi l'incognita x, e questo si ottiene, trasportando per antitesi (97) da una parte i razionali membri, e dall'altra la irrazional quantità sola, e poi tutta la equazione quadrando (39), se la radice è quadrata, o cubando, se è cuba; ove abbiasi $a-\sqrt{ax-xx}$, si faccia (97) $a-x=\sqrt{ax-xx}$, e adesso quadrando si ottiene $aa-2ax+xx=ax-xx$, in quantità razionali.

Che se fossero due le quantità radicali, come in questa equazione $a+\sqrt{ax+yy}=\frac{b\sqrt{xx+yy}}{x}$, fa d'uopo togliere la frazione (105), ed avrassi $ax+x\sqrt{ax+yy}=b\sqrt{xx+yy}$, e quadrando (39), $aaxx+xx\times\overline{ax+yy}+2axx\sqrt{ax+yy}=bb\times\overline{xx+yy}$, cioè $aaxx+ax^3+xxyy+2axx\sqrt{ax+yy}=bbxx+bbyy$, e per antitesi $2axx\sqrt{ax+yy}=bbxx+bbyy-aaxx-ax^3-xxyy$, e quadrando $4aax^4\times\overline{ax+yy}=\overline{bbxx+bbyy-aaxx-ax^3-xxyy}^2$ (39). Se fossero tre quantità radicali, come nella equazione $\sqrt{ax}-\sqrt{cx}=\sqrt{ax-xx}$, quadrando sarà (39) $ax+cx-2\sqrt{acxx}=ax-xx$, e quindi (97) $xx+cx=2\sqrt{acxx}$, e di nuovo quadrando si ottiene $x^4+ccxx+2cx^3=4acxx$; laonde (*Reg.* IV.) $xx+cc+2cx=4ac$.

Ove però con tre quantità irrazionali uno, o più razionali membri si trovano, egli è impossibile il togliere quelle, se pur non fosse coll'artifizio del Signor Newton pag. 64. dell'Aritmetica sua generale, edizione di Leiden 1732. Togliere le *Assimetrie*, questa operazione si noma.

Regola VIII.

108. Viene ridotta eziandio l'equazione, disterminando le incogni-

cognite tutte, ove ſe ne abbiano più di una, e tante incognite, eliminare biſogna, quante ſono le equazioni più che una. Conſiſte lo artifizio col ritrovare di una incognita y (96) due valori, e paragonar quei tra loro, che y ſarà ſterminata, e così delle altre, ſi faccia: v. g. avendo $x+y=a$, & $y-b=c+x$ ſi faccia (97) $y=a-x$ dalla prima equazione, & $y=c+x+b$ dalla ſeconda; e paragonando i due valori di y, naſce l' equazione $c+x+b=a-x$, nella quale una incognita ſola ſi trova.

Regola IX.

109. Ordinando la equazione col tramutare i membri, che ſieno locati i termini (93) giuſta il loro grado, e tale, che la maſſima poteſtà di x ſia in primo luogo, quindi le inferiori per ordine ſucceſſivo, ed in ultimo luogo il termine omogeneo (93), o ſivvero queſto ſolo dall' altra parte dell' equazione rimanga. Se foſſe la equazione ſuperiore $c+x+b=a-x$, ſi faccia per antiteſi (97), $2x=a-b-c$, e dividendo per 2, ſi ottiene la equazione $x=\frac{a-b-c}{2}$ finale (91): ed avendo $a^3+ccx=abb-\frac{abbx}{4c}$, ſarà (*Reg. II.*) $4a^3c+4c^3x=4abbc-abbx$; quindi (97) $4c^3x+abbx=4abbc-4a^3c$, e dividendo per $4c^2+abb$. (*Reg.* IV.) ſarà $x=\frac{4abbc-4a^3c}{4c_3+abb}$ parimente finale; ove poſcia ſi abbia $aax-2cxx=ccx-a^3$, ſarà, ordinando per antiteſi (97), $2cxx+ccx-aax=a^3$, e dividendo per $2c$ coefficiente (95) di xx maſſima poteſtà di x, ſi ottiene $xx+\frac{cx}{2}-\frac{aax}{2c}=\frac{a^3}{2c}$, o ſivvero $xx+\frac{ccx-aax}{2c}=\frac{a^3}{2c}$.

COROLLARIO.

110. Dunque avendo i membri, in cui vi ſia x ſenza frazioni (105), ove ſiano ridotti in una parte della equazione, e dall' altra parte i membri tutti di quantità conoſciute, ſarà ſempre l' equazione eſattamente diviſibile da una parte per la quantità coefficiente (95) della incognita, e quoziente ſarà la incognita iſteſſa purgata da ogni altra quantità, che che ne ſia dell'altra parte dell' equazione, che ſarà ſempre una frazione, lo cui numeratore è la ridotta cognita quantità, e 'l diviſore ſarà ſempre lo

ſteſſo

stesso coefficiente di x , divisore (88) di tutta la equazione . Avendo $ab-cx+ax=aa-bx$, sarà (97) $ax+bx-cx=aa-ab$, e dividendo l' equazione per $a+b-c$, sarà $x=\frac{aa-ab}{a+b-c}$. Se fosse $ab-x==aa-ax$, risulta per antitesi (97) $ax-x=aa-ab$, e dividendo per $a-1$, coefficiente di x, sia $x=\frac{aa-ab}{a-1}$, e così tutte le altre ad equazione finale saranno ridotte.

PROPOSIZIONE XXVIII.

Problema.

111. Riduzione delle equazioni di secondo grado, cioè piane, o quadratiche (92).

Risoluzione.

Regola I.

Si riduca la equazione in maniera, che il quadrato xx della incognita sia libero da ogni divisore (105) , e da ogni multiplicatore (109. 110.) , e coll' uso dell' antitesi (97), se egli è d' uopo, anche a tutta la equazione i segni mutando, facciasi, che il quadrato xx da positivo segno affetto rimanga, e solo. E conciossiachè del quadrato xx è pronta la radice x; perciò da tutta la equazione si tragga la quadrata radice (55), ed otterrassi nuova equazione (99), in cui da una parte saravvi la sola incognita, e dall' altra il suo valore (96) razionale, o irrazionale , quale ottenere si puote: ove abbiasi $ab-\frac{bxx}{c}=aa$, risulterà dalle date regole (105) $xx=\frac{abc-aac}{b}$, e traendo la quadrata radice (55), ne nasce $x=\sqrt{\frac{abc-aac}{b}}$.

Regola II.

112. Ove poscia oltre il quadrato xx, anche si vegga x , o sia $\pm ax$ nella equazione, che perciò quadratica affetta si noma;

allora a volere uſare la data regola prima, fa d'uopo eliminare (93) il ſecondo termine ax, acciocchè rimanga il ſolo quadrato della incognita, a qual coſa fare ſi oſſervi il metodo, che ſiegue.

ELIMINAZIONE

Del Termine ſecondo.

113. Di qualunque ſia data equazione aſcendente a qualſivoglia grado oltre il primo, ſi toglie il termine ſecondo, accreſcendo, o minorando le radici dell' equazione di tutta la quantità coefficiente del termine ſecondo, diviſa per lo eſponente della poteſtà maſſima della incognita; quindi paragonando tale accreſciuta, o menomata radice, ad un' altra incognita y, oppur z, che nelle equazioni introduceſi, col ſoſtituire poſcia per z, o y introdotta, i valori della prima incognita x, e naſcerà nuova equazione, in cui il ſecondo termine più non ſi vede. In quanto poi ad accreſcere, o menomar le radici, ciò naſce dal ſegno, da cui affetto viene il ſecondo termine da eliminarſi, qual ſegno $+$, o $-$ che ſia, ſerbar ſempre ſi dee: ed in quanto alle quadratiche equazioni appartienſi, ſia

$xx-ax=aa$, perciò facendo

$x-\frac{a}{2}=y$, cioè per antiteſi

$x=y+\frac{a}{2}$, e quadrando tutta l' equazione (39)

$xx=yy+ay+\frac{aa}{4}$, e ſoſtituendo i valori di xx, & x, ſarà

$yy+ay+\frac{aa}{4}-ay-\frac{aa}{2}=aa$, e ſpurgando

$yy-\frac{aa}{4}=aa$, cioè $yy=\frac{5aa}{4}$, e traendone la radice quadrata, ſarà $y=\sqrt{\frac{5aa}{4}}=\frac{\sqrt{5aa}}{2}$ (80): e perchè $x=y+\frac{a}{2}$, ſarà

$x=\frac{\sqrt{5aa}}{2}+\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{5aa}+a}{2}$: e ſe foſſe $xx+ax=aa$, ſi faccia $x+\frac{a}{2}=y$

e

e per antitesi (97) $x=y-\frac{a}{2}$, e quadrando si conseguisce $xx=yy-ay+\frac{aa}{4}$, e sostituendo i valori di xx, & di x, ne proviene $yy-ay+\frac{aa}{4}+ay-\frac{aa}{2}=aa$, e spurgando sarà $yy-\frac{aa}{4}=aa$, cioè $yy=\frac{5aa}{4}$, e traendo la radice quadrata sarà $y=\sqrt{\frac{5aa}{4}}=\frac{\sqrt{5aa}}{2}$; laonde $x=\frac{\sqrt{5aa}}{2}-\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{5aa}-a}{2}$ equazione ultimata, e finale.

Regola III.

114. Ogni equazione quadratica affetta viene ridotta a finale, quadrando la ordinata parte (109), in cui si ritrovano i soli termini dell' incognita. Conseguiscesi tutto ciò, aggiugnendo (99) ad amendue le parti dell' equazione il quadrato della metà di tutto il coefficiente di x nel termine secondo: così dalla prima parte attualmente potrassi estraere la quadrata radice, e dalla seconda parte, come più tornerà in acconcio. Ove sia $xx-ax=aa$, quadrando $\frac{a}{2}$, e giugnendo il suo quadrato $\frac{aa}{4}$, sarà $xx-ax+\frac{aa}{4}=aa+\frac{aa}{4}=\frac{5aa}{4}$, e traendo la radice (55) quadrata, $x-\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{5aa}{4}}=\frac{\sqrt{5aa}}{2}$, & $x=\frac{\sqrt{5aa}+a}{2}$. Così se fosse $xx+ax=aa$, sarà, giugnendo $\overline{\frac{a}{2}}^2=\frac{aa}{4}$, diviene $xx+ax+\frac{aa}{4}=\frac{5aa}{4}$, e traendo la radice quadrata (55), $x+\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{5aa}{4}}=\frac{\sqrt{5aa}}{2}$: quindi (100) $x=\frac{\sqrt{5aa}-a}{2}$, come appunto si è ritrovato con eliminare il termine secondo (112).

COROLLARIO I.

115. E perchè d' ogni equazione quadratica due sempre esser deono le radici (95), essendo xx prodotto di x in x, +, o pur − qualche altra quantità, perciò in ogni valore di x, che

che nasce da quadratiche equazioni, si dee sempre davanti alla quantità radicale esprimere il doppio segno $\pm$, siccome due sono le soluzioni, e radici, ove però o una, o amendue non siano impossibili, immaginarie.

Usando per tanto la terza regola precedente (114), come quattro sono le formole quadratiche affette, diverse in riguardo a' segni, quattro parimente, e diversi sono i valori di x.

FORMULE QUADRATICHE AFFETTE.

I. $xx - ax = bb$, sua radice $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{bb + \frac{aa}{4}} = K$.

II. $xx + ax = bb$, sua radice $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{bb + \frac{aa}{4}} = L$.

III. $xx - ax = -bb$, sua radice $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} - bb} = P$.

IV. $xx + ax = -bb$, sua radice $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} - bb} = R$.

COROLLARIO III.

116. Dunque delle quattro formule quadratiche affette ridotte a quadrato, o espresse co' loro precisi tre termini (115), la radice quadrata è sempre in pronto, e viene ad essere $x \pm \frac{a}{2}$, binomio composto dalla radice x del quadrato xx, colla aggiunta di $\frac{a}{2}$, che è la metà di tutto il coefficiente di x. Per le formule L, R, cioè II, e IV, nelle quali il termine secondo è positivo $+ax$, e sarà la radice $x + \frac{a}{2}$; ma esser dee $x - \frac{a}{2}$ per le formule K, P: I, e III, in cui il termine secondo è negativo $-ax$, che però generalmente il segno del secondo nome della radice dee esser lo stesso del segno del termine secondo (55) della formula data.

PRO-

PROBLEMI SEMPLICI.

PROBLEMA I.

117. Le tre Grazie in un Giardino avevan raccolto ugual numero di pomi, e nel sortire avendo incontrato le nove Muse, ne dispensarono a quelle tanti, che tutte e dodici ne avevano ugual numero, ma se ciascuna Musa avesse ricevuto due pomi di meno, allora ogni Grazia ne avrebbe avuto il doppio di ogni Musa. Si ricerca il numero de' pomi ec.

RISOLUZIONE.

A ben risolvere speditamente questo, e sì fatti problemi, si avverta, che essendo tre le Grazie, e nove le Muse ad una di quelle corrispondevano tre di queste, che però i pomi di ogni Grazia dovevano esser divisi in quattro parti uguali; e però siano Pomi tutti di una Grazia $=4x$, laonde di tutte e tre le Grazie $=12x$, e fatta la distribuzione, ciascuna avea x; e perchè togliendo due pomi da ciascuna Musa delle tre, che corrispondevano a ciascheduna Grazia, questa avrebbe avuto $x+6$, il doppio d'ognuna di quelle, però ne nasce l'equazione $x+6=x-2+$ $+x-2=2x-4$, ed elidendo il comune x, e per antitesi sarà $x=10$, e quindi $4x=40$, ricevendone adunque le Muse dieci per una, le dodeci persone ne avrebbero avuto parti uguali, ma ricevendone due di meno, cioè otto, ogni Grazia ritenendosene $6=2\times3$, ne avrebbe avuto 16, numero doppio di 8, che era ec.

PROBLEMA II.

118. Un Mercante andato alla fiera per comprare lo stesso numero, o di cavalli, o di buoi, trattando il mercato, trovò, che del suo danaro comprando cavalli, mancavangli lire a, ma comprando buoi sopravanzavano lire b: si domanda qual fosse il numero de' cavalli, o de' buoi: quanto valesse ciascuna di quelle bestie: e quante lire seco avesse il Mercante.

RISOLUZIONE.

Si osservi, che più cose rimangono incognite, cioè numero de' cavalli, numero de' danari tutti, valore di un cavallo, ed

inoltre

inoltre il valore di un bue. E perchè tutta la questione in una sola equazione si può comprendere, perciò delle necessarie incognite x, y, z da assumersi, due, che più aggradano, prender si possono per arbitrarie (108), frattanto sono,
Numero de' cavalli, o de' buoi $=x$, valor di un cavallo $=y$, valor di un bue $=z$; e da quanto è proposto dee essere danaro tutto del Mercante $=xy-a$; dacchè mancava a, comprando cavalli: e perchè sopravanzava b comprando buoi, sarà lo stesso danaro tutto $=xz+b$, donde nasce l' equazione $xy-a=xz+b$, e per antitesi, $xy-xz=a+b$, e dividendo per $y-z$ coefficienti di x, ne nasce $x=\frac{a+b}{y-z}$ equazione ultimata, e nella quale y, & z sono quantità arbitrarie da prendersi a piacere, ma che sia $y>z$, per lo residuo, e denominatore $y-z$, ove si voglia x quantità positiva. Si stabiliscano adunque $y=250$, $z=200$, & $a=263$, $b=487$; saranno $y-z=50$, & $a+b=750$; laonde $x=\frac{a+b}{y-z}=$ $=\frac{750}{50}=15$, numero delle bestie da comprarsi, fossero buoi, fosser cavalli. Dal ritrovato numero delle bestie, 15, se ne ricava tutto il danaro, che seco avea il Mercante, che giusta le condizioni esposte, esser dovea $=xy-a=15\times250-263=3750-$ $-263=3487=xz+b=15\times200+487=3000+487=3487$: Di maniera che spendendo lire 3750 per la compra di quindici cavalli, a 250 lire l' uno, mancavagli lire $a=263$; e spendendo lire 3000 per comprare 15 buoi a 200 lire l' uno, gli avanzavano lire $b=487$, che è l' intiero scioglimento della data questione. Ed acciocchè sempre più, e con maggior evidenza si scorga, che le due incognite y, & z, nella equazione rimaste, sian divenute arbitrarie, prendasi tutt' ora $y=200$, & $z=190$, si vedrà sciolta la questione, non meno, che avendo preso $y=250$, & $z=200$; imperocchè in questa seconda ipotesi sarà $x=\frac{a+b}{y-z}=75$, e la somma da impiegarsi dal Mercatante $xy-a=xz+b=14737$ lire, con qual somma, volendo comprare 75 cavalli a ll. 200 ciascuno, la spesa monterebbe a ll. 15000, e mancherebbero al Mercante lire $a=263$, ma comprando 75 buoi

al prezzo di lire 190 ogni uno, ſpenderebbe ſolamente lire 14250, ed avanzerebbero lire $b=487$.

Similmente prendendo $y=180$, & $z=165$, ſarà ſciolta ugualmente la queſtione, riſultando $x=50$, e tutto il contante da ſpendere di lire 8737, colle quali comperando 50 cavalli a lire 180 l'uno, mancano lire $263=a$, ma comperando buoi 50 a lire 165 l'uno, avanzano lire $487=b$, ed il medeſimo intraverrà prendendo altri numeri a piacere per y, e per z.

Egli però è ben vero, che nel prendere ad arbitrio i ſopraddetti due numeri y, & z, fa d'uopo avvertire di ſceglierli tali, che ſia $y>z$; ed inoltre, che la loro differenza $y-z$, divida con eſattezza la ſomma de' numeri $a+b$, acciocchè il quoziente $x=\frac{a+b}{y-z}$ numero de' cavalli, o de' buoi rieſca numero intero, come interi comperare ſi vogliono tanto i cavalli, che i buoi. Parimente i numeri a, & b ſi vogliono prendere tali, che la loro ſomma $a+b$ non ſia numero primo, non avente altro diviſore, che l'unità, come ſono 13, 47, 59 ec.: ſarebbe allora eziandio impoſſibile la ſoluzione dell'eſpoſto problema.

Queſta condizione però, che $\frac{a+b}{y-z}$ debba eſſere un numero intero; naſce non già dalla natura intrinſeca del problema, ma ſolamente dal ſoggetto alla queſtione anneſſo, come quello, che nel mercato da farſi non ammette diviſione: di maniera, che ſe la domanda ſi faceſſe, non già in cavalli, ma in tante braccia di panno, o pure di altra coſa, che nel comperare ſi ſuole dividere in parti; non più allora è neceſſario, che ſia x numero intiero; il problema ſarà più generale, e qualunque numero prender ſi puote per a, b, y, z; purchè ſia $y>z$: lo che ſi dee oſſervare in tutti i conſimili reſidui, acciocchè nelle ſoluzioni rieſcano, dove biſogna, i numeri interi. Se ne darà qualche altro avvertimento ne' ſeguenti problemi. Alle volte il prendere la metà di coſe, che dividere non ſi poſſono, inganna a prima viſta, come nella queſtione ſeguente.

Problema III.

119. Eſſendo date tre ſomme a, b, c, provenienti da tre in-

incognite quantità prese a due, a due, ritrovare le quantità istesse.

RISOLUZIONE.

Siano gli incogniti numeri x, & y, & z, saranno formate tre equazioni a tenore dell' espresso problema; e si avverta, che essendo tre incognite, e tre equazioni, bisogna trattarle tutte per isterminarne due, non come nel precedente problema di tre incognite, e di una equazione, una incognita sola ha risoluto il problema, e le altre due sono rimaste arbitrarie. Sono intanto, $x+y=a$, prima equazione; $x+z=b$ seconda equazione; $y+z=c$, terza equazione: da questa si ricavi un valore di $z=c-y$. Dalla seconda si ricavi altro valore di z; sarà $z=b-x$: si formi nuova equazione di questi due valori di z, sia $c-y=$ $=b-x$, e per antitesi mutando tutti i segni, sarà $y=x+c-b$. Dalla prima equazione si cavi altro valore di $y=a-x$; si formi altra equazione con questi due valori di y, sarà $x+c-b=a-x$, e per antitesi $2x=a+b-c$, e dividendo per 2, coefficiente di x, ne nasce $x=\frac{a+b-c}{2}$, qual valore sostituito nel valore di y, ne darà $y=\frac{a+b-c}{2}+c-b$, e riducendo, $y=\frac{a+b-c+2c-2b}{2}$, cioè $y=\frac{a+c-b}{2}$. Questo sostituiscasi nel secondo valore di z, o x nel primo $z=c\frac{-a-c+b}{2}=\frac{2c-a-c+b}{2}=\frac{b+c-a}{2}$, e sono $x=\frac{a+b-c}{2}$ $y=\frac{a+c-b}{2}$, $z=\frac{b+c-a}{2}$, siano $a=37$, $b=45$, $c=19$, saranno $x=\frac{37+45-19}{2}=31\frac{1}{2}$; $y=\frac{37+19-45}{2}=5\frac{1}{2}$; $z=\frac{45+19-37}{2}=13\frac{1}{2}$. Di maniera che $x+y=31\frac{1}{2}+5\frac{1}{2}=$ $=37=a$; $x+z=31\frac{1}{2}+13\frac{1}{2}=45=b$; $y+z=5\frac{1}{2}+13\frac{1}{2}=19$ $=c$; si dee avvertire, che nel presente problema le cognite quantità a, b, c, hanno i limiti suoi, oltre cui la soluzione proposta si rende impossibile. E ritrovare volendogli, si prendano due

due qualſiſiano a, b, ſenza riſerva, a puro piacere, rimane il ritrovamento de' limiti della terza c, che toſto dal valore di x, che gli è $\frac{a+b-c}{2}$, toltone il diviſore 2, ben ſi vede dover eſſere $c<a+b$, limite di minoranza. Poſcia da valori di y, e di z, ſi ricava dover eſſere $a+c>b$, e per antiteſi $c>b-a$, come pure $b+c>a$, e per antiteſi $c>a-b$, due limiti di maggiorità di c. Quindi per eſſere ſicuri della ſoluzione del problema, baſta prendere c maggiore della maggiore di queſte due quantità, $b-a$, & $a-b$, lo che dipende da valori di a, & b; ſe ſi è preſo $a>b$, ſarà $a-b>b-a$; ma ſe $b>a$, ſarà $b-a>a-b$, così per trovare i limiti di a, avendo preſo a capriccio b, & c.

PROBLEMA IV.

120. Ritrovare tre numeri, de' quali ſi abbian le tre differenze, ſottraendone dal primo, e maſſimo, il ſecondo, e poſcia il terzo, ed anche dal ſecondo ſottraendone il minimo, e terzo.

RISOLUZIONE.

Sieno maſſimo ricercato numero $=x$; numero di mezzo ricercato $=y$; terzo numero, e minimo ricercato $=z$; differenze date, o ſieno reſidui a, b, c: dunque ſaranno $x-y=a$ prima, $x-z=b$ ſeconda, $y-z=c$ terza equazione, da cui ſi ricavi un valore di $z=y-c$: ſi ricavi altro valore dalla ſeconda equazione, $z=x-b$; ſi paragonino queſti valori, ſarà nova equazione $y-c=x-b$. Si trovi un valore di y, ſarà $y=x-b+c$; dalla prima equazione ſi ricavi altro valore di y, riſulta $y=x-a$. Si formi equazione de' due valori di y, ſarà $x-b+c=x-a$, e ſpurgando il comune x, rimane $-b+c=-a$, ed è ſvanita la incognita x: chiaro argomento eſſere x arbitraria, e che la queſtione è ſolubile ne' ſoli caſi, che ſi avveri $-b+c=-a$, cioè per antiteſi $a+c=b$. Vuolſi dire, che il reſiduo b, ſottraendo la minima dalla maſſima, ſia uguale agli altri due reſidui $a+c$. Ed altrimenti la ſoluzione è impoſſibile. Sieno $b=20$, $a=12$, ſarà $c=8$; quindi arbitraria $x=26$, ſaranno $y=14$, $z=6$; $x-y=26-14=12=a$; $x-z=26-6=20=b$; $y-z=14-6=8=c$.

ANNOTAZIONE.

121. Questo problema dee essere con attenzione osservato, da che vedesi in esso dileguata la incognita x da se medesima, laonde diviene arbitraria. Questa sia regola generale, che quante le volte dalla equazione svanisce la incognita, o delle incognite una intermedia, o la finale, sempre la svanita incognita diviene arbitraria, e tutto riducesi il quesito alle condizioni della rimasta equazione, le quali, non osservate, rendono impossibile il problema nello stato, in cui si è proposto, lo che si dimostra nel caso presente, e così di ogni altro; eziandio trattando il problema, si è pervenuto all' equazione $x-b+c=x-a$, o sia per antitesi $x+a+c=x+b$, da cui cancellatane la comune x, rimane $a+c=b$ equazione esprimente, che il quanto b dee prendersi, ed essere uguale alla somma de' quanti $a+c$, lo che osservando, ogni quanto prender si puote per x, da che a cose uguali, $a+c=b$, cose uguali aggiugnendo, cioè la medesima qualunque sia x, sempre si ottengono cose uguali, e mantiensi l' equazione $x+a+c=x+b$, alla quale ci ha indotto il problema. Al contrario se sono prese le quantità $a+c$ non uguali al quanto b, ma disuguali, e sia $a+c$ maggiore, o minore di b, a queste disuguali cose, cose uguali aggiugnendo, cioè la medesima qualunque sia x, disuguali cose ne nasceranno $x+a+c$ maggiore, oppure minore di $x+b$. Dunque non più si avvera del dato problema la legittima equazione $x+a+c=x+b$, cioè siamo fuor di sentiero, ed in un altro, per cui camminando, alla soluzione di questo problema non mai si perviene.

PROBLEMA V.

122. Quattro Amici fecero società, assegnandovi ciascuno il suo capitale. Si sa, che i tre primi posero insieme lire a più del quarto: il primo, il secondo, ed il quarto insieme posero lire b più del terzo: il primo col terzo, e quarto messo aveano lire c più del secondo: ed i tre ultimi aveano posto lire d più del primo. Si cercano tutti e quattro distintamente i capitali.

Sieno de' quattro Amici gli capitali: il primo uguale x; il ſecondo uguale y; il terzo uguale z; ed il quarto uguale t: e per tutto comprendere lo ſtato della queſtione, ſi vogliono iſtituire le quattro ſeguenti equazioni

$x+y+z=t+a$ - - Prima,
$x+y+t=z+b$ - - Seconda,
$x+z+t=y+c$ - - Terza,
$y+z+t=y+c$ - - Quarta.

Si ricavi dalla prima equazione il valore di $t=x+y+z-a$, e ſoſtituiſcaſi nelle rimanenti tre equazioni, che ſaranno tramutate in tre altre, nelle quali t non ſi vede, cioè ſeconda $x+y+x+y+z-a=z+b$, e riducendo, $2x+2y=b+a$, terza $x+z+x+y+z-a=y+c$, e riducendo $2y+2z=c+a$, quarta $y+z+x+y+z-a=x+d$, e riducendo $2y+2z=d+a$. Dalla terza, e quarta di queſte ridotte equazioni, ſi ricavino due valori di $z=\frac{c+a-2x}{2}$ dalla terza; quindi $x=\frac{d+a-2y}{2}$ dalla quarta; ſi paragonino queſti due valori, ſia $d+a-2y=c+a-2x$: ſia omeſſo il comun diviſore 2: ſi cancelli a, ſarà $d-2y=c-2x$, e per antiteſi, $2y=d-c+2x$, e dividendo per 2 ſi ottiene un valore di $y=\frac{d-c+2x}{2}$. Altro valore di y dalla ſeconda ridotta equazione, ſarà $y=\frac{b+a-2x}{2}$; ſi confrontino queſti due valori di y, omeſſo il diviſore 2, ſarà $d-c+2x=b+a-2x$, e riducendo ne naſce $4x=a+b+c-d$; e dividendo per 4 riſulta $x=\frac{a+b+c-d}{4}$; queſto valore ſoſtituiſcaſi nel valore di y, e di z, e di t, ſia $y=\frac{a+b+d-c}{4}$, $z=\frac{a+c+d-b}{4}$, $t=\frac{b+c+d-a}{4}$.

Queſte quattro ultime equazioni finali chiaramente ne dimoſtrano, che la riſoluzione del problema, trattandoſi di capitali quantità poſitive, ſi rende impoſſibile tutte le volte, che le quantità date a, b, c, d, non ſerbano i limiti neceſſari: per lo cui ritrovamento ſi prendano, come più piace, tre delle date quan-

tità

tità a, b, c; e per avere ſempre poſitivi gli capitali x, y, z, t, ſi ricerchino i limiti della non preſa arbitraria d, la quale nel valore di x, come ben ſi vede, dee eſſere $d<a+b+c$, e queſto è un limite di minoranza dell' arbitraria d. Si cerchi adeſſo, ſe ritrovare ſi puote, altro limite della medeſima arbitraria d, che ſi ricava dal valore di $y=a+b+d-c$ (ſempre omettendo il diviſore 4). Quindi egli è $a+b+d>c$, e per antiteſi $d>c-a-b$, limite di maggioranza, ed altro dal valore di z: $d>b-a-c$; finalmente $d>a-b-c$ dal valore di t. Da queſti tre limiti di maggioranza dell' arbitraria d, ne naſce, che baſta prenderla poſitiva, e maggiore della maggiore delle tre differenze già trovate, per avere poſitivi gli capitali x, y, z, t, e ſolubile la queſtione; che ſe poi qualunque ſia de' tre reſidui, ai quali d ſi vuol prendere maggiore, foſſe quantità negativa, o lo foſſero tutti e tre negativi, ciò nulla importa, e ſoltanto baſta, che prendaſi d maggiore dello zero; al che baſterebbe che foſſe $=1$; ma per lo diviſore 4 ne' valori di x, y, ec. prendere almeno ſi vuole $=4$, per eſſere $\frac{4}{4}=1$.

Che ſe poi i quattro non conoſciuti capitali ſi voleſſero non ſolamente poſitivi, ma numeri intieri; o che foſſe adattata la queſtione a coſe non diviſibili, allora biſogna prendere tutte e quattro le date quantità, a, b, c, d, ciaſcuna diviſibile per 4, ſtando ſempre ne' limiti ritrovati.

Si prendano per eſempio come piace le cognite $a=14000$, $b=6000$, $c=7000$: e perchè il maſſimo reſiduo egli è $a-b-c=$ $=1000$, ſi prenda d maggiore 1000, e minore di $27000=a+$ $+b+c$: onde $d=9000$, ſaranno gli quattro capitali ricercati $x=4500$, $y=5500$, $z=6000$, $t=2000$; laonde $x+y+z=t+a$, cioè $4500+5500+6000=2000+14000$: $x+y+t=z+b$, $4500+5500+2000=6000+6000$: $x+z+t=y+c$, $4500+$ $+6000+2000=5500+7000$: $y+z+t=x+d$, $5500+6000+$ $+2000=4500+9000$.

PROBLEMA VI.

123. Un Mercante vendute ſue mercanzie, duplicò ſuo capitale, e pagato un debito $=b$, impiegò lo avanzo in altre merci,

le quali

le quali vendè, e ne cavò il doppio di quello, che aveva speso. Poscia pagato altro debito $=c$, impiegò lo avanzo in tante nuove mercanzie, e vendutele, anche duplicando, ricavò tanto denaro, che pagato un terzo debito $=a$, sopravanzò a lui di libero il triplicato suo capitale; si cerca ec.

Risoluzione.

Ben si vede, che la soluzione del presente problema tutta dipende dal conoscere il primo capitale, che sia $=x$; e perchè fatta la prima vendita duplicò, avea $=2x$; ma pagò un debito b, dunque gli avanzò capitale $=2x-b$; con questo comprò altre mercanzie, e tornò a duplicare, la seconda volta vendendo; che però aveva $=4x-2b$; pagò da questa somma un debito c, perciò rimasegli $=4x-2b-c$; anche comprando, e la terza volta vendendo, tornò a duplicare questo ultimo capitale, onde avea $=8x-4b-2c$: ma pagò altro debito a; dunque gli avanzò $8x-4b-2c-a$; e perchè questo residuo si trovò essere triplo del primo impiegato capitale, ne nasce l' equazione $8x-4b-2c-a=3x$, ed elidendo $3x$, & $3x$ sarà $5x-4b-2c-a=$ $=0$, e per antitesi $5x=4b+2c+a$, e dividendo per 5 coefficiente di x, ne risulta $x=\frac{4b+2c+a}{5}$, equazione ultimata.

Si prendano delle date quantità a piacere i valori $b=870$, sarà $4b=3480$: facciasi $c=1360$, sarà $2c=2720$; finalmente $a=2750$, sarà $x=\frac{3480+2720+2750}{5}=\frac{8950}{5}=1790$ primo suo capitale.

Però primo impiegato capitale nella compra di mercanzia, che portò a vendere la prima volta - - -	$=1790$
Prima vendita, e primo guadagno duplo del capitale primo - - - - - - - - -	$=3580$
Pagò il primo debito b - - - - -	$=870$
Che però era suo avanzo, e secondo capitale -	$=2710$
Colle quali comprando, e vendendo la seconda volta duplicò - - - - - - - - -	$=5420$
E perchè pagò da questa somma altro debito c -	$=1360$

Ri-

Rimane il terzo capitale - - - - $=4060$
Con cui comprando, e vendendo, duplicò il suo avere - - - - - - - - - $=8120$
Ma pagò il terzo debito a - - - - - $=2750$

Dunque gli rimase la somma di lire - - - - - $=5370$
Quale ultimo residuo essendo tre volte maggiore del primo capitale x, perciò diviso per 3 dee essere quoziente $1790=x=\frac{5370}{3}$.

PROBLEMA VII.

124. Dati due numeri a, & b trovarne due altri x, & y, de' quali il primo x aggiunto al primo dato a, ne risulti il secondo y preso un dato numero di volte m: e vicendevolmente al secondo dato b giunto il secondo y, se ne formi x preso n volte.

RISOLUZIONE.

Aggiugnendo a, & x insieme risultare ne dee il secondo y preso m volte, cioè my: e quindi la prima equazione $a+x=my$; da altra parte, sommando y, & b, ne proviene x preso n volte, che vale nx: onde $b+y=nx$ equazione seconda.

Dalla prima $a+x=my$ un valore delle due incognite si ricavi, come più torna in acconcio, e si avrà $x=my-a$; sostituiscasi di presente nella seconda equazione $b+y=nx$, il ritrovato valore di x, per n multiplicandolo; ed averassi la seconda equazione tramutata in questa $b+y=mny-na$; e per antitesi $mny-y=na+b$, e dividendo per $mn-1$, ne nasce $y=\frac{na+b}{mn-1}$. Da questo ritrovato valore di y ritrovare si dee quello di x, da tutte le incognite ripurgato; ed essendo $=my-a$, fa d'uopo multiplicare per m il valore di y, e poscia sottrarne il numero a: sarà adunque $x=\frac{mna+mb}{mn-1}-a$, quindi a comune denominatore riducendo la parte seconda, ed insieme spurgando, si ottiene $x=\frac{mb+a}{mn-1}$.

Pren-

Prendasi $a=50$, & $b=40$, & $m=3$, finalmente $n=5$, sarà $x=\frac{85}{7}$, & $y=\frac{145}{7}$, ed aggiugnendo ad $a=50$ il ritrovato $x=\frac{85}{7}$, si compone $\frac{435}{7}$, che è triplo del secondo quesito y; aggiugnendo poi da altra parte al secondo dato $b=40$, il secondo quesito $y=\frac{145}{7}$, si compone $\frac{425}{7}$, quintuplo del primo mo ricercato numero x.

In questo sempliciſſimo problema due importanti rifleſſioni occorrono a farsi, e fare si deono, come quelle, che ci hanno indotto a proporre la questione: la prima egli è il mettere in uso la regola indicata altrove; che nelle semplici equazioni, ove siano tutti gli termini aventi la incognita, ad una sola parte ridotti, e che divider si debba per tutto il complesso di tutti i coefficienti la stessa incognita multiplicanti, ove si vegga, che in qualche termine la incognita non abbia coefficiente veruno, sempre, secondo il precetto dato al numero 110, si dee considerare, e prendere l'unità per coefficiente.

Il perchè il valore di y dalla equazione $mny-y=na+b$ ritrovar volendo, si è diviso per mn, coefficiente del primo membro, ed unitamente per -1, coefficiente di y.

L'altra rifleſſione, a cui ne rivolge il presente problema, si aggira intorno al modo di contenersi, ove ne' numeri quesiti una condizione più si domandi, cioè che quelli debbano esser interi, e non rotti; soggetto, di cui fa d'uopo farne menzione più volte, a tenore delle diverse equazioni, diverse formole, e materie diverse. Come in altro caso al problema sesto ne fu ragionato di tale ricerca non men difficile, che curiosa; egli è ben chiaro, che quando il numerico problema è interamente determinato, cioè dove niuna incognita rimanga arbitraria, ma la incognita, o tutte quante, se sono, necessariamente debbano essere composte delle date, come ne' loro valori risulta; allora la condizione di esser quelle numeri interi, non dipende da una elezione arbitraria, ma bensì da soli numeri dati, li quali se saranno di tale condizione, che la x, e la y ec. a norma de' ritrovati valori, composte da quelli riescano interi,

in

in tal caso la condizione della integrità delle incognite sia necessaria : ma se riescono rotti ; quella condizione si rende impossibile nel caso presente , in cui si sono presi $a=50$, & $b=40$, $m=3$, $n=5$. Ne risulta $y=\frac{145}{7}$, & $x=\frac{85}{7}$: dunque egli è impossibile ottenere, che da que' dati a, & b, le incognite abbiano altri valori, non che intieri , ma nè meno rotti; per lo contrario se nello scioglimento d' un problema , una , o più arbitrarie delle incognite fosser rimaste, in tal caso cercare si puote quali prender si debbano quelle , affinchè le altre incognite dipendenti da loro riescano interi numeri, e non rotti.

Tuttavia però anche nei problemi determinati si può ricercare, quali essere debbano le quantità date a , & b ec. acciocchè i valori delle incognite , risultanti da quelle , ne riescano intieri .

Quindi è, che i dati numeri in questa ricerca riescono come incognite , volendosi da loro la condizione della integrità delle vere incognite x, y ec. Laonde in questo genere di ricerche , si possono promiscuamente considerare come incognite , tanto le date, quanto le arbitrarie , ed il presente problema ne serva di esempio. Abbiamo i numeri dati , a , b, m , n , e si vuole, che $x=\frac{mb+a}{mn-1}$, & $y=\frac{na+b}{mn-1}$ risultino amendue numeri intieri . In questo caso tutti gli numeri dati considerare si possono come arbitrari. Per determinare adunque tutto ciò, si avverta , che se tanto a, quanto b , saranno numeri interi divisibili per $mn-1$; essendo altresì m , & n numeri intieri, egli è certo, che na, non meno , che mb , sarà divisibile per $mn-1$; e però $mb+a$, & $na+b$, perchè composti di termini, de'quali ciascuno divider si puote per $mn-1$; basterà dunque supporre m, & n interi, siccome a, & b, e ciascuno di loro divisibili per $mn-1$, e saremo sicuri, che x, & y riusciranno interi numeri, e risoluto il problema senza frazione veruna.

Ritenendo intanto per m , e per n gli già presi numeri 3 , & 5 , se vorremo , che x , & y siano intieri , basterà prenderli amendue divisibili per $15-1$, cioè per 14, e si avrà l'intento ; sia adunque $a=42$, & $b=70$, sarà $x=18$, & $y=20$, e se se fosse stato $m=16$, & $n=11$, sarebbe stato $mn-1=175$; avrebbe in tal caso convenuto prendere a, & b, amendue divisibili per 175. Preso adunque $a=525$, & $b=1225$, si troverà $x=115$, & $y=40$.

Sarà adunque regola generale, che render volendo intera qualunque frazione composta di varie lettere algebraiche, ove diasi l' arbitrio di prendere per ciascuna di quelle un numero, qual piace, allora si dee eleggere per ciascuna lettera esistente nel numeratore, un numero divisibile per il denominatore. E se non sempre sarà in arbitrio il prendere a piacere le lettere tutte, che nel numeratore si trovano, come nel caso proposto, supponendo a, & b divisibili per $mn-1$, sarà bene il dar qualche saggio di un' altra regola più generale, che molte volte, ed utilmente si adopra, e questa è di uguagliargli a qual ne aggrada numero intiero, ed arbitrario, da dinotarsi colla lettera qualunque sia, v. g. $=r$, come si è praticato nel problema sesto.

Volendosi dunque x, cioè $\frac{mb+a}{mn-1}$ sia numero intero, si formi la equazione $\frac{mb+a}{mn-1}=r$, che ne esprime qualunque numero intero preso ad arbitrio, trattando intanto questa equazione, finalmente risulta $a=mnr-r-mb$, ed è certo, che se dagli interi numeri dati m, n, b, e dall' arbitrario intero r comporrassi il numero $mnr-r-mb$, il quale si prenda per a, infallibilmente allora sarà un numero intero quello, che espresso ne viene colla formola fratta $\frac{mb+a}{mn-1}$, cioè x, perchè sarà $=r$ numero intero, ed arbitrariamente preso.

Ma perchè inoltre si vuole anche y, cioè $\frac{na+b}{mn-1}$ numero intero, sostituiremo in questa formola per a il valore di sopra trovato, il quale serve a rendere x numero intiero, ed avrassi per y la espressione $mnnr-nr-mnb+b$, la quale ne riesce molto in acconcio, che sia espurgabile per $mn-1$, e vi rimanga $nr-b$. Si uguagli adesso questa formola ad un altro arbitrario numero intero, che chiameremo q; onde sia $nr-b=q$, e quindi $b=nr-q$; sostituiscasi questo valore di b nel valore di a, che di sopra fu ritrovato essere $mnr-r-mb$, ed avrassi $a=mq-r$. Se adunque si prende un numero intero arbitrario r, che si multiplichi pel dato numero n, e dal prodotto si tragga qualunque altro intero numero q, che prender si dee minore di nr, quel residuo sarà il numero b. E se da altra parte lo intero q multiplicato venga per m, e dal loro prodotto sottraggasi lo intero r, prender si vuole il residuo per a; con sicurezza, che ove m, & n siano interi numeri, sarà sciolta la questione in interi, & x, & y numeri interi.

Sia $m=3$, & $n=5$, come da prima; prendasi $r=12$, & $q=33$, amendue interi, viene ad essere $a=mq-r=99-12=87$. Quindi $b=nr-q=60-33=27$, onde x, & y saranno infallibilmente numeri interi, perchè i loro valori a' numeri interi furono paragonati, onde risultano $x=\frac{3\times27+87}{14}=12=r$; similmente $y=\frac{5\times87+27}{14}=33=q$.

La medesima regola con molta utilità adoperare si puote in altri simili casi, ne' quali proposto ne venga di rendere intero il valore di un numero espresso con una frazione; sempre però dee avvertirsi, come nel caso particolare del presente problema, di prendere gli arbitrari interi r, & q con tali misure, che nè a, nè b, negativi quanti divengano; lo che tosto risalta agli occhi nelle presenti due formole $mq-r$, & $nr-q$, delle quali ciascuna dee essere maggior dello zero, col prendere $r<mq$, & $q<nr$: O veramente facendo $mq-r>o$, e per antitesi $mq>r$, e dividendo per m, risulta $q>\frac{r}{m}$, e col calcolo istesso si trova $r>\frac{q}{n}$; ed ecco i limiti, tra quali prender si deono gli arbitrari numeri intieri r, & q, cioè dee essere $r<mq$, & $r>\frac{q}{n}$, ed in simigliante maniera $q<nr$, & $q>\frac{r}{m}$. Dee adunque $\frac{r}{m}$ essere minore di nr, siccome $\frac{q}{n}<mq$, non essendo possibile prendere un quanto $>A$, & $<B$, se non quando B, limite della grandezza, egli è maggiore di A, termine della piccolezza; sarà però sempre possibile l'una, e l'altra condizione sopra

pra richiesta per essere nr necessariamente maggiore di $\frac{r}{m}$, lo che sia necessario per mn prodotto di numeri interi, sempre maggiore dell' unità. Preso adunque ad arbitrio lo intero numero r, e preso l'altro intero q maggiore di $\frac{r}{m}$, ma minore di nr, si compongano i due numeri $nr-q$, che sia b, & $mq-r$, che sia a, saranno senza alcun dubbio interi, e positivi i due quanti x, & y, che nella presente ipotesi sono le incognite, per cui si risolve la questione proposta.

Problema VIII.

125. Quattro Amici, per far un fondo di mercanzie, posero ciascuno sua parte in danaro, e solo si sa, che le parti del primo, e del secondo fossero scudi a; del secondo, e del terzo scudi b, e del terzo, e del quarto scudi c, e del primo, e del quarto scudi d; si cerca il comune capitale, e le parti di ciascheduno.

Risoluzione.

Dacchè conosciute le parti, dalla loro somma si ottiene il fondo comune, perciò siano la parte del primo $=x$, del secondo $=y$, del terzo $=z$, del quarto $=r$, e quindi ne nascono le quattro equazioni $x+y=a$, $y+z=b$, $z+r=c$, $y+r=d$, quindi $r=c-z$, & $r=d-x$, e però $c-z=d-x$, & $z=c+x-d$. Dalla seconda equazione si ricavi altro valore di $z=b-y$, e perciò $c+x-d=b-y$, & $y=b+d-c-x$; dalla prima equazione si ritrovi altro valore di $y=a-x$, e confrontando questi due valori di y, ne risulta l' equazione $b+d-c-x=a-x$, e spurgando per $-x$, che svanisce, e diviene arbitraria, rimane $b+d-c=a$, e per antitesi $a+c=b+d$. Questa equazione finale, a cui tutta si dee rivolgere l' attenzione, ci dà a divedere essere impossibile la soluzione del presente problema, quante le volte le quattro date somme a, b, c, d, non sono tali, che la prima, e la terza $a+c$ non sieno uguali alla seconda, e quarta insieme $b+d$.

In oltre è neceſſario, che ſi verifichi $b+d-c-x=a-x$, cioè $x<a=b+d-c$, limite di minoranza dell' arbitraria x. Finalmente per ritrovare il ſupremo limite di ſua grandezza, ſi prenda il valore di $z=b-y$, e ſoſtituendo il valore di $y=a-x$, ſarà $z=b+x-a$, il perchè dee eſſere $b+x>a$, e per antiteſi $x>a-b$; non può adunque prenderſi tale x, che ſia minore della differenza nata, ſottraendo dalla data quantità a, l' altra data b, e nulla importa anche ſe ſia $b>a$, dacchè $a-b$ ſarà quantità negativa, ed ogni poſitiva arbitraria $x<a$, ſoddisfarà al problema. Adunque riſtretta è l' arbitraria x tra i due limiti, che ſono $x<a$, & $x>a-b$; e con queſte condizioni, e limiti, da tutti i numeri viene riſoluto il preſente problema; altrimente ſi rende impoſſibile nella ipoteſi, che x, y, z, r ſiano quantità poſitive formanti vere ſomme, e non ſottrazioni, e reſidui; lo che tutto ne' ſeguenti eſempli chiaramente ſi vede.

Si oſſervi ancora, che prendendo a, b, c, d, & x colle già dimoſtrate condizioni, e ricavando i valori di y, z, r, ſempre delle ſtabilite quattro incognite la ſomma rieſce uguale alla metà della ſomma delle quattro date a, b, c, d; dacchè ſommando le quattro primigenie equazioni, riſulta $2x+2y+2z+2r=a+b+c+d$, e dividendo per 2, ſarà

$$x+y+z+r=\frac{a+b+c+d}{2}$$, ma $a+c=b+d$: dunque per quattro mezzi, prendendone due intieri, ſi ottiene $x+y+z+r=a+c=b+d$.

Si prenda $a=18$, $b=7$, $c=10$, $d=21$, $x=13>11$, & <18, $y=5$, $z=2$, $r=8$, ſaranno $13+5=18$, $5+2=7$, $2+8=10$, $13+8=21$; ſimilmente prendendo $a=16$, $b=19$, $c=12$, $d=9$, $x=5<16$, & >-3, $y=11$, $z=8$, $r=4$, ſaranno $x+y=a=5+11=16$, $y+z=b=11+8=19$, $z+r=c=8+4=12$, $x+r=d=5+4=9$.

PROBLEMA IX.

126. Due Mercanti avendo fatto venire della medeſima mercanzia; uno libbre 80, e pagò per dazio del tutto libbre 14 della ſteſſa mercanzia; e furongli ritornate in dietro lire 4 in denari; l' altro introduſſe 190 libbre, e per dazio ne pagò libbre

bre 31 della stessa mercanzia, e di più lire 4 in denari; si ricerca il valore della mercanzia, e quanto si pagasse per dazio, per ogni libbra.

RISOLUZIONE.

Prezzo d' ogni libbra $=x$; dazio per ogni libbra $=y$; dunque $80y=14x-4$, prima equazione: dazio per 190 libbre $=190y$; dunque $190y=31x+4$, seconda: e dividendo la prima per 80, sarà $y=\frac{14x-4}{80}$; e dividendo la seconda per 190, sarà $y=\frac{31x+4}{190}$; e paragonando i due valori di y, sarà $\frac{14x-4}{80}=\frac{31x+4}{190}$; e spurgando sotto e sopra per 2 la prima parte, sarà $\frac{7x-2}{40}=\frac{31x+4}{190}$; e liberando l' equazione dalle frazioni $1330x-380=1240x+160$; e spurgando per $1240x$, e per antitesi $90x=540$; e dividendo per 90, risulta $x=\frac{540}{90}=6$, valore di ciascuna libbra di mercanzia. Per ritrovare y, che esprime il dazio d' ogni libbra, si prenda uno de' suoi valori $=\frac{14x-4}{80}=\frac{7x-2}{40}=\frac{7\times6-2}{40}=\frac{40}{40}=1$: cioè ogni libbra di mercanzia valeva lire 6, e pagava di dazio lire 1; quindi il primo avendo per libbre 80 di mercanzie, che meritano lire 80 di denaro, pagato libbre 14 della stessa mercanzia, che vale 6 lire la libbra, venne a dare lire $14\times6=84$, che sono lire 4 di più del giusto; l' altro poi introducendo 190 libbre di mercanzie, doveva dare 190 lire di denaro, ed avendo lasciato libbre 31 al valore di 6 lire, diede lire 186, e però dovette aggiugnere altre lire 4 per compimento delle lire 190, che era ec.

PROBLEMA X.

127. Un Signore volendo andare in lontano paese, lasciò ad un suo Fattore la cura de' suoi poderi, acciocchè facessegli coltivare, e ne ritraesse, e serbasse le rendite annuali, le quali ritornato

tornato il Signore dopo quattr' anni, le furono consegnate in una somma di denaro contante. Interrogato il Fattore delle rendite distinte in ogni anno, rispose, che non ne aveva ricordo, sapeva però, che il frutto de' tre primi anni era $=a$, de' due primi, e del quarto lire b, del primo, e due ultimi lire c; finalmente de' tre ultimi lire d. Si cercano i distinti redditi, onde il totale de' quattro anni.

RISOLUZIONE.

Sieno le rendite de' quattro anni; prima $=x$, seconda $=y$, terza $=z$, quarta $=r$: dunque per le esposte condizioni sarà $x+y+z=a$, & $x+y+r=b$, & $x+z+r=c$, & $y+z+r=d$; dalle due prime equazioni sommate insieme, si ricavi il valore di $z+r$, che sarà $z+r=a+b-2x-2y$, il quale si sostituisca nelle due ultime equazioni, che diverranno $a+b-x-2y=c$, $a+b-2x-y=d$; e quindi si ricavino due valori di y; $y=\frac{a+b-c-x}{2}$

$y=a+b-d-2x=\frac{2a+2b-2d-4x}{2}$, e da questi due valori di y la equazione $a+b-c-x=2a+2b-2d-4x$, e spurgando, e per antitesi, $3x=a+b+c-2d$, e dividendo per 3 ne nasce $x=\frac{a+b+c-2d}{3}$, e sostituendo questo valore, si ottiene

$$y=\frac{a+b+d-2c}{3},\ z=\frac{a+c+d-2b}{3},\ r=\frac{b+c+d-2a}{3}.$$

PROBLEMA XI.

128. Data la somma $=a$, e la differenza $=b$, di due non conosciute disuguali quantità, ritrovare amendue distintamente.

RISOLUZIONE.

Prima ricercata, e maggior quantità $=x$; seconda ricercata minor quantità $=y$: sarà dunque, da quanto si è proposto $x+y=a$, & $x-y=b$, onde si ricavino due valori di y, e saranno $y=a-x$, & $y=x-b$; si paragonino insieme questi due valori di y, e si ottiene l' equazione $x-b=a-x$, e per antitesi $2x=a+b$, e dividendo per 2, coefficiente di x, ne nasce

$x=$

$x = \frac{a+b}{2}$, qual valore di x sostituito in uno de' valori di $y = x - b$, ne darà $y = \frac{a+b}{2} - b = \frac{a+b-2b}{2}$, e spurgando $y = \frac{a-b}{2}$.

Siano $a = 19$, $b = 13$, sarà $x = \frac{19+13}{2} = \frac{32}{2} = 16$, prima ricercata quantità maggiore; $y = \frac{19-13}{2} = \frac{6}{2} = 3$, seconda, e minore quantità ricercata, la cui somma $x + y = a = 19 = 16 + 3$, la cui differenza $x - y = 16 - 3 = 13$.

ANNOTAZIONE.

Questo problema è stato proposto per ricavare da esso il molto utile teorema.

PROPOSIZIONE.

TEOREMA.

129. Se di due incognite quantità disuguali, non conosciute la loro somma, e la lor differenza, sempre la maggiore x sarà uguale alla semisomma, giuntavi la semidifferenza: e la minore y sarà uguale al residuo, dalla semisomma sottraendone la semidifferenza.

DIMOSTRAZIONE.

Dal calcolo superiore ella è la maggiore incognita $x = \frac{a+b}{2}$ vuolsi dire, che la maggior quantità x sia uguale alla somma data a delle due incognite, aggiuntavi la semidifferenza b, di tutto prendendone la metà; ma la minore incognita $y = \frac{a-b}{2}$ dal suo valor ne dimostra sempre essere uguale alla metà del residuo, dalla somma a sottraendone la differenza, e dividendo tutto per 2.

PRO-

PROBLEMI SEMPLICI DI QUANTITÀ FRATTE.

PROBLEMA XII.

130. Ritrovare un numero, la cui metà, e terza parte, aggiunte al numero a, facciano un numero triplo del numero ricercato.

RISOLUZIONE.

Numero ricercato $=x$ sarà sua metà $=\frac{x}{2}$, e la terza parte $=\frac{x}{3}$; dunque per le condizioni proposte, $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+a=3x$: si multiplichi per 2 tutta l'equazione, $x+\frac{2x}{3}+2a=6x$; si multiplichi per 3 secondo divisore, $3x+2x+6a=18x$, cioè $5x+6a=18x$, e spurgando per $5x$ comune, sarà $6a=13x$, e dividendo per 13 coefficiente di x, sarà $x=\frac{6a}{13}$.

Prendasi $a=312$, sarà $6a=1872$, $\frac{6a}{13}=\frac{1872}{13}=144=x$; $\frac{x}{2}=72$, $\frac{x}{3}=48$; perciò $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+a=72+48+312=432=3x=3\times144$.

PROBLEMA XIII.

131. Si trovi un numero; de' $\frac{2}{3}$, del quale prendendone $\frac{4}{5}$, sieno $=a$.

RISOLUZIONE.

Numero ricercato $=x$, del quale $\frac{2}{3}=\frac{2x}{3}$ prendendone adesso $\frac{4}{5}$, saranno $\frac{4}{5}\times\frac{2x}{3}=\frac{8x}{15}=a$; quindi $8x=15a$, e dividendo per 8, sarà $x=\frac{15a}{8}$.

Sia

Sia $a=1$, sarà $x=\frac{15}{8}$, di cui sono li $\frac{2}{3}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$, ed i $\frac{4}{5}$ di $\frac{5}{4}$, sono $=\frac{4}{4}=1$.

Sia $a=3$, sarà $x=\frac{45}{8}$, i cui $\frac{2}{3}=\frac{30}{8}=\frac{15}{4}$, del quale gli $\frac{4}{5}$ $=\frac{12}{4}=3$.

PROBLEMA XIV.

132. Si trovi un numero, del quale $\frac{1}{2}$ di $\frac{4}{5}$, più $\frac{2}{3}$ di $\frac{5}{6}$ facciano a.

RISOLUZIONE.

Sia numero ricercato $=x$, gli $\frac{4}{5}$ saranno $\frac{4x}{5}$, e di questo il $\frac{1}{2}=\frac{4x}{10}=\frac{2x}{5}$. Inoltre $\frac{5}{6}$ del numero x sono $\frac{5x}{6}$, e gli $\frac{2}{3}=$ $=\frac{10x}{18}=\frac{5x}{9}$, che sommati insieme, ne danno l' equazione $\frac{2x}{5}$ $+\frac{5x}{9}=a$; e tolte le frazioni, risulta $18x+25x=45a$, & $43x=$ $=45a$, & $x=\frac{45a}{43}$; prendasi $a=7$, sarà $x=\frac{315}{43}$, & $\frac{4x}{5}=$ $=\frac{252}{43}$, del quale $\frac{1}{2}=\frac{126}{43}$. Si avverta di presente, che di $x=$ $=\frac{315}{43}$ non si possono prendere con nettezza gli $\frac{5}{6}$, perchè è stata ridotta per 2 la frazione, si multiplichi adunque per 2 il valore di x, sarà $x=\frac{315\times 2}{43\times 2}=\frac{630}{86}$, li cui $\frac{5}{6}=\frac{525}{86}$, del quale gli $\frac{2}{3}=\frac{350}{86}$ numero, che sommato con $\frac{126}{43}$ dee essere 7: però $\frac{126}{43}+\frac{350}{86}=7$; e riducendo a comun denominatore, anche multiplicando per 2 la prima parte, sia $\frac{252+350}{86}=\frac{602}{86}=7$. Da questo esemplo ben si vede, che non sempre riesce utile all' operante lo schifare le frazioni.

PROBLEMA XV.

133. Si vuole un numero, dagli $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{5}$ del quale, sottraendone $\frac{1}{2}$ di $\frac{3}{4}$, rimanga il numero a.

RISOLUZIONE.

Numero chiesto $=x$, del quale $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{5}$ sono $\frac{2}{3}\times\frac{4x}{5}=\frac{8x}{15}$ ed $\frac{1}{2}$ di $\frac{3}{4}=\frac{3x}{8}$, e sottraendone questo da quello, sarà il residuo $\frac{8x}{15}-\frac{3x}{8}=a$, e togliendo le frazioni, sia $64x-45x=120a$, e togliendo $45x$, rimane $19x=120a$; però $x=\frac{120a}{19}$. Sia $a=5$ sarà $x=\frac{600}{19}$, del quale gli $\frac{4}{5}=\frac{480}{19}$, e sono di questo gli $\frac{2}{3}=\frac{320}{19}$. Adesso di $x=\frac{600}{19}$ si piglino gli $\frac{3}{4}=\frac{450}{19}$, la cui metà $=\frac{225}{19}$ si sottragga da $\frac{320}{19}$, sarà $\frac{320-225}{19}=\frac{95}{19}=5$ dacchè $5\times19=95$.

PROBLEMA XVI.

134. Furono da un Padre pel prezzo di lire a comperati due poderi, ed assegnati uno al Primogenito, altro al Cadetto, si desidera il prezzo distinto, sapendosi, che $\frac{1}{5}$ di quello del Primogenito era uguale ad $\frac{1}{3}$ del valore del podere del Cadetto.

RISOLUZIONE.

Sia il prezzo del podere del Primogenito $=x$: dunque sarà del secondo $=a-x$, ed $\frac{x}{5}=\frac{a-x}{3}$, e togliendo le frazioni, sarà

rà $3x = 5a - 5x$, e per antitesi $8x = 5a$, e dividendo per 8, $x =$
$= \frac{5a}{8}$.

Sia $a = 56000$, sarà $5a = 280000$, & $x = \frac{5a}{8} = 35000$, e del secondo $= a - x = 21000$.

PROBLEMA XVII.

135. Un Mercante spedì a Venezia mercanzie pel valore di $\frac{2}{5}$ del suo capitale, ed ivi guadagnò a ragione di $\frac{1}{4}$, spedì a Livorno altre mercanzie per $\frac{1}{3}$ di suo capitale, ed il lucro ivi fu a ragione di $\frac{1}{2}$; fatto il conto si trovò, che la somma dei due avuti guadagni furono lire $= a$, si vuole il capitale intero, e gli due guadagni distintamente.

RISOLUZIONE.

Sia il capitale tutto $= x$; dunque mandò a Venezia $\frac{2x}{5}$, ma di questi ne lucrò a ragione di $\frac{1}{4}$, dunque il guadagno fatto in Venezia fu $\frac{1}{4}$ di $\frac{2x}{5}$, cioè $\frac{2x}{20} = \frac{x}{10}$. Mandò a Livorno per $\frac{1}{3}$ di suo capitale, cioè $\frac{x}{3}$, e lucrò a ragione di $\frac{1}{2}$; fu adunque il lucro $\frac{1}{2}$ di $\frac{1 \times x}{3}$, cioè $\frac{1}{2} \times \frac{x}{3} = \frac{x}{6}$. E perchè gli due fatti guadagni furono $= a$, sarà l'equazione $\frac{x}{10} + \frac{x}{6} = a$, e togliendo le frazioni, sarà $6x + 10x = 60a$, & $16x = 60a$, e dividendo per 4, $4x = 15a$, & $x = \frac{15a}{4}$.

Sia $a = 8648$, sarà $15a = 129720$, & $x = 32430$, e $\frac{2}{5}$ di $x =$ $= 12972$, capitale a Venezia $\frac{1}{3}$ di $x = 10810$, capitale a Livorno.

Laonde

Laonde primo lucro $=\frac{12972}{4}=3243$; secondo lucro $=\frac{10810}{2}$ $=5405$, & $3243+5405=8648=a$.

PROBLEMA XVIII.

136. Essendo stati presentati ad Assuero gli Eunuchi venuti da Etiopia per la custodia di quattro appartamenti; ordinò, che al primo appartamento fosse assegnata la metà, ed un mezzo Eunuco di più: al secondo appartamento la metà dell'avanzo, ed un mezzo Eunuco di più: al terzo appartamento la metà de' rimasti, ed un mezzo Eunuco di più: al quarto il rimanente degli Eunuchi. Si domanda quanti fossero in tutto, e quanti per guardia di ciascuno appartamento.

RISOLUZIONE.

Numero di tutti gli Eunuchi $=x$, la cui metà, e più un mezzo, sarà $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2}$ numero degli Eunuchi del primo appartamento, e rimase $x-\frac{x-1}{2}=\frac{2x-x-1}{2}=\frac{x-1}{2}$, primo avanzo, e togliendo la metà $+\frac{1}{2}$ Eunuco, sarà

$\frac{x-1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{x-1+2}{4}=\frac{x+1}{4}$, seconda parte, onde rimase

$\frac{x-1}{2}-\frac{x-1}{4}=\frac{2x-2-x-1}{4}=\frac{x-3}{4}$, secondo avanzo, quindi

$\frac{x-3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{x-3+4}{8}=\frac{x+1}{8}$, terza parte, onde rimase

$\frac{x-3}{4}-\frac{x-1}{8}=\frac{2x-6-x-1}{8}=\frac{x-7}{8}$, quale terzo residuo dee essere la parte del quarto appartamento già stabilita $=a$, onde nasce l'equazione $\frac{x-7}{8}=a$, e multiplicando per 8, e trasportando per antitesi il 7, sarà $x-7=8a$, & $x=8a+7$. Si prenda $a=9$, sarà $x=72+7=79$; onde la guardia del primo appartamento fu di Eunuchi $39\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=40$, e ne rimasero 39; quin-

quindi al secondo appartamento $19\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=20$, essendo rimasti 19, il perchè la guardia del terzo appartamento fu $9\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=10$, ed il terzo avanzo pel quarto appartamento fu di Eunuchi $9=a$, e tutti $40+20+10+9=79=x$, che era ec.

Questo, ed altri sì fatti problemi forse con maggior comodo si possono risolvere coll' uso di molte incognite, e nel nostro caso sia numero di tutti gli Eunuchi $=x$: però, guardia del primo appartamento $=\frac{x+1}{2}$, e facciasi il primo avanzo $=\frac{x-1}{2}=y$ sarà la guardia del secondo appartamento $=\frac{y+1}{2}$, e si faccia il secondo avanzo $=\frac{y-1}{2}=z$. Quindi la guardia del terzo appartamento $=\frac{z+1}{2}$, onde il terzo avanzo sarà $\frac{z-1}{2}=a$, guardia del quarto appartamento. Si ricavi il valore di $z=2a+1=\frac{y-1}{2}$; quindi il valore di $y=4a+3=\frac{x-1}{2}$, e però $8a+6=x-1$, e per antitesi $x=8a+7$, come sopra.

Problema XIX.

137. Un Padre di famiglia per testamento ordinò, che la sua eredità, ridotta in denaro contante, fosse divisa in due parti: una per i figliuoli, altra per le figlie; che i figliuoli dividessero la loro parte, che il primo ne prendesse un ceesimo, cioè $\frac{1}{c}$, e di più doppie $=a$; del residuo il secondo, $\frac{1}{c}$, e di più doppie $=2a$, e così il terzo $=\frac{1}{c}+3a$ ec. Delle figlie poi la prima prendesse doppie $=a$, ed $\frac{1}{m}$ dell' avanzo: del residuo la seconda prendesse doppie $=2a$, ed $\frac{1}{m}$ dell' avanzo; e così delle altre: all' ultima però l' ultimo avanzo. Si trovò, che i figliuoli tra loro, e tra loro le figlie aveano avuto parti uguali.

Si

Si ricercano quanti figliuoli fossero, e quante figlie, la parte di ciascuna persona, le somme di quelli, e di queste, onde quanta l' eredità tutta.

RISOLUZIONE.

Sia la parte da dividersi tra figliuoli $=y$. Però il primo ebbe $\frac{y}{c}+a=\frac{y+ca}{c}$, e rimase $y-\frac{y-ca}{c}=\frac{cy-y-ca}{c}$. Di questo avanzo il secondo figliuolo dee prendere $\frac{1}{c}+2a$; dunque sarà sua parte $\frac{cy-y-ca}{cc}+2a=\frac{cy-y-ac+2acc}{cc}$, la quale essendo uguale alla prima $\frac{y+ca}{c}$, cioè $\frac{cy+cca}{cc}$; omesso cc comune denominatore, ne nasce l' equazione $cy+cca=cy-y-ca+2cca$, e spurgando per cy, & cca, risulta $0.=-y-ca+cca$, e per antitesi $y=cca-ca$.

Sia eredità di tutte le figlie $=x$, della quale dee la prima prendere doppie $=a$, e rimane $x-a$, di che dee averne $\frac{1}{m}$, vuolsi dire $\frac{x-a}{m}$, e sarà la prima parte $a+\frac{x-a}{m}=\frac{ma+x-a}{m}$, e lo avanzo sarà $x\frac{-ma-x+a}{m}=\frac{mx-ma-x+a}{m}$. Di questo residuo la seconda figlia dee prendere doppie $=2a$, rimane $\frac{mx-ma-x+a}{m}-2a=\frac{mx-x+a-3ma}{m}$, e prendendone $\frac{1}{m}$, sarà parte della seconda $\frac{mx-x+a-3ma}{mm}+2a=\frac{mx-x+a-3ma+2mma}{mm}$ uguale alla prima parte $\frac{ma+x-a}{m}$, cioè $\frac{mma+mx-ma}{mm}$, ed omesso il comune denominatore mm, sarà l' equazione $mma+$ $+mx-ma=mx-x+a-3ma+2mma$, e spurgando fia $0.=-x+a-$ $-2ma+mma$, e per antitesi $x=mma+a-2ma$.

Pei figli sia $a=100$, & $c=7$, sarà $y=cca-ca=4900-700=$ $=4200$ doppie, se ne tolga $\frac{1}{7}$, e poi 100 sarà la parte del primo mo di doppie $=600+100=700$, e rimangono doppie 3500, di queste pel secondo si prenda $\frac{1}{7}$, e poi 200 sarà $500+200=$ $=700$; onde, primo $=600+100=700$: secondo $=500+200=700$: terzo $=400+300=700$: quarto $=300+400=700$: quinto $=200+500=700$: sesto $=100+600=700$, tutti insieme $=6\times700=4200$.

Finalmente per le figlie sia $a=100$ come sopra, & $m=6$, sarà $x=mma+a-2ma=3600+100-1200=2500$ doppie. La prima ne prenda 100, rimane 2400, ne prenda anche $\frac{1}{6}$ sarà 400, & 100 sono 500, e rimane 2000; la seconda ne prenda 200, rimane 1800, la cui sesta parte 300, & 200 fanno 500: laonde prima figlia $=100+400=500$: seconda $=200+300=$ $=500$: terza $=300+200=500$: quarta $=400+100=500$; quinta $=500+0=500$, somma di tutte $=5\times500=2500$.

Epperò in queste denominazioni, sei erano i figliuoli, e cinque le figlie, e la eredità fatta di doppie $4200+2500=6700$.

PROBLEMA XX.

138. Due Amici fecero borsa comune di scudi $=a$; il primo ne spese un terzo della sua parte, e l' altro un quinto della sua; tra tutti due scudi $=b$; si chieggono le parti di ciascuno, e le particolari spese fatte.

RISOLUZIONE.

Giova il munirsi di due incognite, per quindi rintracciare i limiti di a, & di b; sia adunque parte del primo $=x$, e del secondo $=y$, sarà $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=b$, & $5x+3y=15b$, e per antitesi, e dividendo per 5, $x=\frac{15b-3y}{5}$; ma si comanda, che sia $a=x+y$, dunque $x=a-y$, e da due valori di x si ottiene $\frac{15b-3y}{5}=a-y$, & $15b-3y=5a-5y$, e spurgando per $3y$, risulta $15b=5a-2y$, e per antitesi, e dividendo per 2, si ottiene ne $y = \frac{5a - 15b}{2}$, d' onde $x = a - \frac{5a + 15b}{2} = \frac{2a - 5a + 15b}{2}$, cioè $x = \frac{15b - 3a}{2}$.

Da questo valore di x si ricava, che debba essere $\frac{15b}{2} > \frac{3a}{2}$, e multiplicando per 2, e dividendo per 3, egli è $5b > a$, & $b > \frac{a}{5}$, limite di maggioranza di b; dalla equazione poi di y si ricava $5a > 15b$, e dividendo per 5, sia $a > 3b$, cioè $3b < a$, & $b < \frac{a}{3}$ limite di minoranza; dunque nella sua picciolezza b dee eccedere la quinta parte di a, e la sua grandezza dee essere sotto ad un terzo di a. In tutti gli altri casi è impossibile il problema.

Si prenda intanto per una risoluzione del presente problema $a = 45$, sarà $\frac{a}{5} = \frac{45}{5} = 9$; laonde dee essere $b > 9$, e perchè $\frac{a}{3} = \frac{45}{3} = 15$, dee essere $b < 15$; si prenda tra limiti 9, & 15, e sia $b = 11$, sarà $y = \frac{5a - 15b}{2} = \frac{225 - 165}{2} = \frac{60}{2} = 30$; dunque $x = a - y = 45 - 30 = 15$, e però la perdita del primo x, che fu d' un terzo, cioè di $\frac{x}{3} = \frac{15}{3} = 5$, e la perdita del secondo y, che fu di $\frac{y}{5} = 6$, e tutte due le perdite $5 + 6 = 11 = b$. Furono adunque del primo la parte di zecchini 15, e la perdita di zecchini 5: del secondo poi y, la parte di zecchini 30, e la perdita di zecchini 6; epperò le due parti di $a = x + y = 15 + 30 = 45$, e le due perdite $5 + 6 = b = 11$ zecchini, che era ec.

Problema XXI.

139. Diciotto Appaltatori presero il pubblico Dazio in Appalto per lire 660000, formando della loro società quattro diverse

verse classi, cioè 4, 5, 3, 6; di maniera che i quattro della prima posero un'intera parte: ognuno della seconda classe un mezzo: quei della terza classe un terzo: e quei della quarta classe un ottavo d'un'intera parte ciascuno. Finito l'appalto si ritrovò il guadagno di lire $=a$, del quale se ne vuole la distribuzione opportuna, come ancora dei messi fondi d'ognuno nella sua classe.

Risoluzione.

Questo problema, che sembra portar seco medesimo due diverse soluzioni, pur si riduce ad una sola, conciosiachè supporre si debba, che i fondi messi deono corrispondere ai fatti guadagni; che però, o de' fondi, o de' guadagni un'intera parte sia $=x$, saranno quattro parti dei quattro della prima classe $=4x$, cinque mezze parti dei cinque della seconda classe $=\frac{5x}{2}$, tre terze parti de' tre della terza classe $=\frac{3x}{3}=x$, sei ottave parti de' sei della quarta classe $=\frac{6x}{8}=\frac{3x}{4}$; somma $=4x+\frac{5x}{2}+x+\frac{3x}{4}$, la quale essendo uguale, o all'intero fondo, o all'intero guadagno dato, perciò $=a$, ne nasce l'equazione $4x+\frac{5x}{2}+x+\frac{3x}{4}=a$: per ridurre speditamente la equazione tutta a comun denominatore, che si omette, si multiplichino gli termini primo, e terzo, come ancora a, per 4, ed il secondo per 2, e ne risulta $16x+10x+4x+3x=4a$, cioè $33x=$ $=4a$, e dividendo per 33 si ottiene $x=\frac{4a}{33}$.

Prendasi il fatto guadagno $a=23100$ lire, sarà $4a=92400$, e quindi $x=\frac{4a}{33}=2800$; il perchè saranno lire 11200, lucro dei quattro della prima classe a lire 2800, lire 7000 per i cinque della seconda classe, ciascuno $=1400$, lire 2800 per i tre della terza classe, ciascuno $=933.\ 6.\ 8$, lire 2100 per i sei della quarta classe, ognuno $=350$. Intero guadagno $=a=23100$ lire.

Se poi per a si vuole prendere il fondo avanzato di 660000, sarà $x=\frac{4a}{33}=\frac{2640000}{33}=80000$, epperò lire 320000 pe'quattro della prima classe, a lire 80000 per uno; lire 200000 pei cinque della seconda classe, a lire 40000 ognuno; lire 80000 pe' tre della seconda classe, a lire 26666. 13. 4. ciascuno; lire 60000 pe' sei della quarta classe, a lire 10000 per uno; onde $320000+200000+80000+60000=660000=a$.

Problema XXII.

140. Quattro Associati per negoziare fecero un fondo di lire $=a$, e le quattro parti furono distribuite di maniera, che la parte del primo con un terzo degli altri tre, era uguale alla parte del secondo con $\frac{1}{4}$ del primo, terzo, e quarto di più.

La parte del secondo con $\frac{1}{4}$ degli altri era uguale alla parte del terzo con $\frac{1}{5}$ de' rimanenti; finalmente la parte del quarto $+\frac{1}{6}$ dei tre primi, era uguale alla parte del terzo con $\frac{1}{5}$ de' rimanenti.

Risoluzione.

Sieno le parti ricercate prima $=x$, seconda $=y$, terza $=z$, e quarta $=t$: saranno le tre equazioni anche ridotte a comun denominatore A. $x+\frac{y+z+t}{3}=\frac{y+x+z+t}{4}$ & $12x+4y+4z+4t=$ $=12y+3x+3z+3t$, cioè $9x+z+t=8y$, & $t=8y-9x-z=$A. B. $y\frac{+x+z+t}{4}=z\frac{+x+y+t}{5}$; cioè $20y+5x+5z+5t=20z+$ $+4x+4y+4t$, e spurgando, e per t sostituendo il suo valore A, e dividendo per 8, sia $24y-8x=16z$, cioè $3y-x=2z$, & $x=3y-2z$ B. C. $z\frac{+x+y+t}{5}=t\frac{+x+y+z}{6}$, & $30z+6x+6y+$ $+6t=30t+5x+5y+5z$, e sostituendo i valori A, & B di t, & x, e spurgando sarà C. $25z+3y-2z+y=408z-456y$, &

385z

$385z=460y$, e dividendo per 5, C. $77z=92y$, & $z=\frac{92y}{77}$ qual valore sostituito nel valore B di x, darà $x=\frac{47y}{77}$, questi due valori di z, & x si sostituiscano nel valore A di t, sarà $t=\frac{101y}{77}$; che però sono le quattro parti sommate insieme, y, cioè $\frac{77y}{77}+\frac{92y}{77}+\frac{47y}{77}+\frac{101y}{77}=a$, cioè $\frac{317y}{77}=a$, & $317y=77a$, & $y=\frac{77a}{317}$. Si sostituisca questo valore di y in questi ultimi ritrovati valori di x, z, t, saranno $x=\frac{47}{77}\times\frac{77a}{317}=\frac{47a}{317}$, $y=\frac{77a}{317}$ $z=\frac{92}{77}\times\frac{77a}{317}=\frac{92a}{317}$, $t=\frac{101}{77}\times\frac{77a}{317}=\frac{101a}{317}$.

Facciasi $a=634$, saranno $x=94$, $y=154$, $z=184$, $t=202$; però $\frac{y+z+t}{3}=\frac{540}{3}=180$, $\frac{x+z+t}{4}=\frac{480}{4}=120$, $\frac{x+y+t}{5}=$ $=\frac{450}{5}=90$, $\frac{x+y+z}{6}=\frac{432}{6}=72$; & $94+180=154+120=$ $=274$, $154+120=184+90=274$, $184+90=202+72=274$.

DELLA

DELLA ALGEBRA

DIOFANTEA.

Definizione.

Algebra Diofantea, a noi pervenuta dal Greco Alessandrino Diofanto, è un artifizio, per cui qualunque data formola non quadrata, a quadrato perfetto ridurre si tenta, e così in razionale quantità ritrovar sua radice.

PROPOSIZIONE.

Problema I.

Ridurre una formola data a perfetto quadrato, la cui radice sia razionale.

Risoluzione.

Regola I.

La data formola si paragoni ad un perfetto quadrato; per esempio, essendo $xx-ab$, dovrà farsi $xx-ab=\square$. Di questo quadrato solamente espresso in cifra, tale dee prendersi la radice, che per divisione, o per ispurgamento abbassare si venga a minore dimensione la massima potestà della incognita x, oppur y.

Quindi è, che per la data formola $xx-ab=\square$ assumer si puote l' arbitraria t minorata, od accresciuta dalla incognita x; e per questo prendendo $t-x$ per radice, averemo il quadrato $tt-2tx+xx$, da mettersi in luogo della cifra nella ideata equazione, e si otterrà $xx-ab=tt-2tx+xx$ equazione, in cui chiaramente si vede, che (106) sterminato il comune xx, resta l'incognita x abbassata dalla seconda potestà alla prima, e semplice x; si spurghi adunque l' equazione sottraendo xx, e sarà il residuo $-ab=tt-2tx$, la quale col comune algorismo trattata, ne darà $x=\frac{tt+ab}{2t}$ (97. 101.)

Re-

Regola II.

Che se fosse la data formola affetta in ogni suo membro da varie dimensioni della incognita x, come sarebbe $2xx+5ax$ da paragonarsi a quadrato, allora gli è d' uopo tale radice assumere, che l' arbitraria t colla incognita x multiplicata ne venga, come sarebbe tx per radice, lo cui quadrato egli è $=ttxx$, al quale la data formola paragonando, e tutta l' equazione per x dividendo, averemo abbassata la incognita alla semplice dimensione x; $2xx+5ax=ttxx$, divisa per x la equazione tutta, ne dà un quoziente di semplice dimensione, ed è $2x+5a=ttx$, da trattarsi nelle usate maniere semplici; onde $x=\frac{5a}{tt-2}$.

Regola III.

Bisogna intanto avvertire, che del quadrato perfetto, il quale al paragone si assume, non sia la radice repugnante; perciò data la formola da quadrarsi $xx-ax$, questa paragonar non potrassi ad un perfetto quadrato, la cui radice sia $t+x$; perocchè quadrando, e paragonando, otterassi l' equazione $xx-ax=tt+$ $+2tx+xx$, e spurgando sarà $-ax=tt+2tx$; cosa impossibile: in primo luogo, che da xx sottrattone ax, ne rimanga un residuo $=xx$ colla aggiunta di $2tx$, e del quadrato tt: in oltre $-ax$, quantità negativa, uguale sarebbe alla positiva tt colla aggiunta del doppio rettangolo $2tx$: quindi avvertasi a segni $+$, e $-$ delle radici binomie $t+x$, o sia $t-x$, di prenderne la convenevole data.

Regola IV.

Se una frazione dee uguagliarsi a quadrato, ed intervenga, che il divisore sia quadrato, omettasi pure tal divisore, e tutto si rivolga lo studio a quadrare il numeratore.

Dacchè ciò eseguito, tutta la frazione sarà un quadrato perfetto. Sia, verbi grazia $\frac{aaxx-b^3x}{xx-2cx+cc}$ da quadrarsi, facciasi, omesso il divisore quadrato, $aaxx-b^3x=ttxx$ (119.), e dividendo per

per x, ne risulta $aax - b^3 = ttx$: quindi (97) $aax - ttx = b^3$, & (110) $x = \frac{b^3}{aa - tt}$.

Regola V.

Se la formola da uguagliarsi a quadrato sarà divisibile per quadrato, si potrà fare la divisione; e quindi tentare di rendere quadrato il solo non quadrato quoziente: perciò avendo la formola $\frac{x^4 - ax^3 + ccxx}{aa}$ da quadrarsi, si ometta il multiplicatore quadrato xx, ed il divisore aa, cioè la frazione $\frac{xx}{aa}$ quadrata, e tutta si rivolga l' attenzione a quadrare il quoziente, o sia l' altro multiplicatore $xx - ax + cc$, e paragonandolo al quadrato della radice $t - x$, sia $xx - ax + cc = tt + xx - 2tx$, ed elidendo xx, rimane $cc - ax = tt - 2tx$: quindi (97) $2tx - ax = tt - cc$, & $x = \frac{tt - cc}{2t - a}$.

ANNOTAZIONE.

Ottimo è l' uso di questa maniera Diofantea nel quadrare le irrazionali quantità, e radicali, che particolarmente, quasi sempre si trovano nelle soluzioni de' problemi quadratici, sieno semplici (101), sieno affetti (111). E perchè souo sempre tutte quantità conosciute, prender si dee qual più torna in acconcio cognita quantità a, o veramente b per incognita, e come tale si tratta quasi fosse x, o y. Supponendo, verbi grazia, essere stati indotti a questa finale $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa - 4bb}{4}} = \frac{a \pm \sqrt{aa - 4bb}}{2}$, per rendere razionale la formola $aa - 4bb$, si prenda a per incognita, e si tratti, come se fosse x, colle regole precedenti, e come in pratica viene eseguito in appresso. E nella formola $\sqrt{3aa - ab}$ si prenda b per incognita ec.

PROBLEMA II.

Trovar due quadrati, de' quali la differenza sia un quadrato.

RISOLUZIONE.

Supponiamo il tutto eseguito, epperò de' quadrati, che ricerchiamo, sieno maggiore $=xx$, minore $=yy$, loro differenza $xx-yy$, la quale esser dee un quadrato, avremo perciò $xx-yy=\square$; per indice di questo quadrato si prenda $t-x$, lo cui quadrato $tt-2tx+xx$, e perciò sarà $xx-yy=tt-2tx+xx$, ed elidendo il comune xx rimarrà $-yy=tt-2tx$, & (97) $2tx=tt+yy$, e dividendo per $2t$, otterrassi $x=\frac{tt+yy}{2t}$. Si avverta, che avendo in una sola equazione due incognite xx, & yy, una di loro ne resta arbitraria, perciò abbiamo preso a trattare l' incognita xx, imperocchè positivo il quadrato, d'onde dell' altro quadrato negativo $-yy$, inutile sarebbe stato il ricercarne la radice.

Per applicare a numeri particolari la formola data si piglino $y=6$, $\square yy=36$; $t=18$, $\square tt=324$; $2t=36$; che però $x=\frac{36+324}{36}=\frac{360}{36}=10$, & $xx=100$, & $xx-yy=100-36=64\square$, la cui radice $=t-x=18-10=8$. Così per yy qualsivoglia quadrato numero, come si vuole, prendendo, e per t qualunque altro numero, si troverà sempremai il valore di x, che la data questione risolve.

RIFLESSIONE.

Dallo scioglimento di questo problema deducesi, che preso ad arbitrio qualsivoglia quadrato numero yy, ritrovare si possono infiniti altri numeri quadrati, da ciascuno de' quali sottraendone quello, il residuo sia sempre un quadrato. Conciosiachè preso ad elezione il quadrato yy, basta prendere, come più piace, altro numero grande, piccolo, intero, rotto, che nulla importa, e chiamarlo t, e con esso comporre il numero $\frac{tt+yy}{2t}$, e questo sarà la radice di altro quadrato, da cui toltone yy, sem-

sempre sarà il rimanente un numero perfetto quadrato. Prendasi per primo quadrato yy la unità, ed infiniti sono i quadrati numeri, da' quali trattane la unità, il residuo sarà un quadrato. Prendasi per yy il numero 4, ed infiniti saranno i numeri quadrati, da quali sottrattone il numero 4, rimarrà nel residuo un numero quadrato; e prendasi pure $\frac{1}{9}$ per yy, ed infiniti saranno i numeri quadrati, da cui sottrattone $\frac{1}{9}$, il residuo sarà un quadrato.

Ma se in oltre si domandasse, che la risoluzione del problema eseguita venisse in numeri interi, e che amendue gli quadrati, che si ricercano, fossero numeri interi, questa nuova condizione adempiere si potrebbe, prendendo per t, e per y due numeri interi, amendue pari, o dispari amendue, e dei quali t fosse un comun divisore. Perciocchè essendo pari amendue t, & y, pari saranno eziandio gli loro quadrati, e quindi la somma di quelli $tt+yy$ sarà pari; e per conseguenza divisibile per 2. Se poi t, & y saranno dispari l'uno e l'altro, gli loro quadrati saranno altresì dispari; onde pari sarà loro somma $tt+yy$; perocchè due numeri dispari uniti insieme per necessità compongono un numero pari: dunque la somma $yy+tt$ sarà divisibile per 2; perchè poi tanto y, quanto t, per comun divisore aver debbono il numero t, anco i loro quadrati avranno lo stesso comun divisore, e la somma degli stessi quadrati avrà lo stesso divisore comune. Sarà adunque $tt+yy$ divisibile per 2, e per t; laonde $\frac{tt+yy}{2t}$, cioè x, sarà un intero, ed intero ancora il quadrato xx, e perciò interi amendue gli quadrati xx, & yy, che si ricercano. Sia per esempio $y=70$, & $t=14$: onde $yy=4900$, & $tt=196$, de' quali la somma $tt+yy=5096$, divisa per $2t=28$, darà l'intero 182, che sarà x, il cui quadrato xx sarà $=33124$, da cui sottratto $yy=4900$, rimane 28224 quadrato del numero 168. In altra maniera prendendo le due arbitrarie t, & y, amendue dispari, si puol fare $t=3$, & $y=21$: onde $tt=9$, & $yy=441$: il perchè $tt+yy$ sarà 450, che diviso per $2t=6$ lascia $\frac{tt+yy}{2t}=75=x$, il cui quadrato $xx=5625$, da cui toltone $yy=441$, il residuo 5184 è il quadrato di 72.

Vi

Vi ſono però ancora altri modi di attribuire alle arbitrarie tali valori, che facciano riuſcire interi i numeri per le date formole eſpreſſi, particolarmente quando le formole date, tutte ſono compoſte di numeri arbitrari, a' quali ſi poſſono far prendere que' valori, che più ſono in acconcio al deſiderato intento. Nel problema ſi ſono accennati, e adoperati alcuni di queſti modi; ma quì ſe ne propone un altro, che rieſce molto a propoſito nel caſo preſente, in cui cercando due quadrati numeri xx, yy, de' quali la differenza $xx-yy$ ſia un quadrato perfetto, ſi è trovato dover eſſere $x=\frac{tt+yy}{2t}$, rimanendo amendue gli numeri t, & y arbitrari; ma di preſente in oltre ſi chiede che x, cioè $\frac{tt+yy}{2t}$ ſia un numero intero.

Preſo un numero intero ad arbitrio f, e multiplicato per il numero proſſimo inferiore, che ſarà $f-1$, il prodotto ſarà ſempre un numero pari, perchè di due numeri, che ſi ſieguono l'un l'altro, uno dei due biſogna, che infallibilmente ſia pari, e l'altro diſpari, epperò biſogna, che il prodotto di quelli ſia pari, eſſendo dunque pari il numero $f\times\overline{f-1}$, cioè $ff-f$ potrà dividerſi per 2. Laonde poſſiamo aſſerire per coſa certa, che $\frac{ff-f}{2}$ è ſempre un numero intero, purchè f ſia eſſo un numero intero, ed il medeſimo dir ſi puote di $f\times\overline{f+1}$, perchè ſe $f+1$ ſarà un numero pari, allora f ſarà numero diſpari, e multiplicandoli inſieme, il loro prodotto ſarà pari, cioè diviſibile per 2, onde $\frac{ff+f}{2}$ ſarà un intero. Dovendo noi dunque cercare i valori delle arbitrarie t, & y, che fanno riuſcire un intero la formola $\frac{tt+yy}{2t}$, uguaglieremo queſta formola al numero intero $\frac{ff-f}{2}$, ed eſſendo f arbitraria, prenderemo t in luogo di f, perchè ci torna comodo il ciò fare, onde avremo la equazione $\frac{tt+yy}{2t}=\frac{tt-t}{2}$, e multiplicando per $2t$, avremo $tt+yy=t^3-tt$, cioè $yy=t^3-2tt$: onde ſe per yy prenderemo t^3-2tt,

 (eſſen-

(essendo t arbitraria) avremo sciolta la questione in interi, ma bisogna, che t^3-2tt sia un quadrato, senza la qual condizione nulla si sarà fatto. Sarà t^3-2tt un quadrato, quando (dividendo pel quadrato tt) sarà quadrato $t-2$, facciamo dunque $t-2=$ al quadrato rr, cioè $t=rr+2$.

Prendasi dunque per la arbitraria t qualsivoglia quadrato intero rr accresciuto del binario, come $t=100+2=102$, oppure $t=16+2=18$, o altro ad arbitrio; con questa assunzione si è sicuro, che t^3-2tt sarà un quadrato intero; prendasi questo per yy, indi per x prendasi $\frac{tt+yy}{2t}$, cioè $\frac{tt-t}{2}$, i due numeri x, cioè $\frac{tt-t}{2}$, e y, cioè $t\sqrt{t-2}$ saranno amendue razionali interi, e sciorranno la questione.

Per esempio prendasi $t=100+2=102$, $t^3-2tt=yy=1040400$ quadrato di 1020; x, cioè $\frac{tt+yy}{2t}$, sarà $=\frac{10404+1040400}{204}$ cioè sarà l' intero 5151 il quadrato xx, cioè di 5151 è 26532801, dal quale cavandone yy, che è 1040400, il residuo sarà 25492401, ed è il quadrato della radice 5049.

Prendasi $t=9+2=11$, sarà t^3-2tt, cioè $yy=1089$ quadrato di 33, e quindi $x=\frac{tt+yy}{2t}=\frac{121+1089}{22}$ frazione, che è uguale al numero intero $55=x$, ed il quadrato di 55 sarà 3025, da cui toltone $yy=1089$, sarà il residuo 1936 quadrato di 44.

PROBLEMA III.

Trovare un numero, al quale aggiunto un dato numero a, la somma sia $\square$, ed al medesimo ricercato numero aggiuntovi il quadrato aa del dato numero a faccia pure $\square$.

RISOLUZIONE.

Numero dato $=a$, numero ricercato $=x$. $x+a=\square$. $x+aa=\square$. $x+a=zz$. $x=zz-a$. $zz-a+aa=zz+yy+2zy$. $aa-a=yy+2zy$. $z=\frac{aa-a-yy}{2y}$. Sieno $a=6$, $\square=36$. $y=2$ arbitraria, sarà

z

$z=\frac{13}{2}$, $x=\frac{145}{4}$, $z=\frac{36-6-4}{2y}=\frac{26}{4}=\frac{13}{2}$, & $x=zz-a=\frac{169}{4}-6=\frac{169-24}{4}=\frac{145}{4}$. $x+a=zz$, cioè $\frac{145}{4}+6=\frac{145+24}{4}=$ $=\frac{169}{4}$ quadrato della radice $\frac{13}{2}$. $x+aa=\frac{145}{4}+36=$ $=\frac{145+144}{4}=\frac{289}{4}$ quadrato della radice $=\frac{17}{2}$.

Riflessione.

Anche nel presente problema, ove piaccia, che sia risoluto in numeri interi, nella ipotesi, che siasi preso a numero intero, e quindi fare, che $x=zz-a=\frac{a^4+aa+y^4-2a^3-2aayy-2ayy}{4yy}-a$ sia un numero intero; basterà, che z sia intero; perchè in tal caso intero sarà zz, ed intero il residuo di due numeri interi $zz-a=x$. Ma egli è $z=\frac{aa-a-yy}{2y}$ giusta il valore, che si è ritrovato, rimanendo y arbitraria, laonde conviene cercare qual valore si deggia dare alla y, acciocchè $\frac{aa-a-yy}{2y}$ risulti un intero. E quì rimane per se medesimo manifesto il ripiego di prendere tale y, che il suo doppio sia numero sumultiplice di a, vuolsi dire, che a sia numero alliquoto di $2y$, ed in oltre, che la medesima y sia un numero pari, dacchè scrivendo quella formola in questa altra maniera $\frac{aa-a}{2y}-\frac{y}{2}$, è chiaro, che se $2y$ entrerà esattamente in a, dovrà essere $\frac{aa-a}{2y}$ un intero, e se y sarà pari, anche sarà $\frac{y}{2}$ un intero. Dunque $\frac{aa-a}{2y}-\frac{y}{2}=\frac{aa-a-yy}{2y}$, (che è il valore di z), sarà un intero. Non potrà mai essere il numero a alliquoto di $2y$, essendo y un numero pari, quante le volte a non sia un numero divisibile per 4: epperò non essendo tale, non si potrà coll'uso di questa regola, sciogliersi in numeri interi questo problema. Sia $a=100$, e si prenda per y qualunque numero pari, il cui doppio divider possa il 100 con esattezza

tezza, per esempio prendasi $y=10$, il cui doppio $2y=20$ precisamente divide il primo 100, sarà $\frac{aa-a-yy}{2y}=z=$

$$=\frac{10000-100-100}{20}=490,$$ ed essendo $z=490$, sarà $zz=240100$, quindi $zz-a=240100-100=240000$. Questo numero scioglie la questione, perchè egli è $x+a=240100$ quadrato di 490; & $x+aa=240000+10000=250000$ quadrato di 500.

Collo stesso dato numero $a=100$ si puote ancora prendere $y=2$ numero pari, il cui doppio $2y=4$ divide con esattezza il dato numero 100, ed in questa scelta sarà $z=\frac{aa-a-yy}{2y}=$

$$=\frac{10000-100-4}{4}=2474;$$ dunque $zz=6120676$, & $zz-a=x=$ $=6120576$; da qual numero viene risoluta la questione in interi, dacchè sarà $x+a=6120676$ quadrato di 2474, e parimente $x+aa=6130576$ quadrato di 2476. Supponendo però lo stesso dato numero $100=a$, non si può già prendere $y=1$, perchè y dee essere un numero pari, e nemmeno si può prendere $y=4$, perchè il numero 8 suo doppio, non divide il dato numero 100. Si può ben prendere $y=50$, perchè questo è numero pari, ed il suo doppio 100 divide $a=100$; in questa ipotesi sarà $z=\frac{10000-100-2500}{100}=74$, onde $zz=5476$, & $zz-a=x=$ $=5376$ numero, da cui è risoluta la questione in interi, perchè sarà $x+a=5476$ quadrato di 74, & $x+aa=15376$ quadrato di 124. Quando però il numero a non sia numero divisibile per 4, non sembra così facile il trovare una regola per isciorre il problema per via d'un numero intero x; dacchè niuna delle regole fin'ora assegnate, applicare si puote al presente caso; conciosiachè niuna di quelle è universale, nè sembra potersene dare alcuna, che sia tale da servirsene sicuramente a render intera qualunque formola.

PROBLEMA IV.

Dividere un dato numero in tre parti, di maniera che multiplicandole a due a due, la somma dei tre prodotti sia un quadrato.

Ri-

RISOLUZIONE.

Numero dato $=a$, prima parte $=x$, seconda parte $=xz$, terza parte $=a-x-xz$; primo prodotto $=xxz$, secondo prodotto $=ax-xx-xxz$, terzo prodotto $=axz-xxz-xxzz$, e loro somma $=ax-xx+axz-xxz-xxzz=\square$. $ax-xx+axz-xxz-xxzz=ttxx$, e dividendo per x, sarà $a-x+az-xz-xzz=ttx$, e per antitesi, $ttx+zzx+xz+x=a+az$, e dividendo per $tt+zz+z+1$, sarà $x=\frac{a+az}{tt+zz+z+1}$.

Sia $a=24$, arbitraria $z=2$, arbitraria $tt=9$, sarà $x=$ $=\frac{24+48}{9+4+2+1}=\frac{72}{16}=\frac{9}{2}$, $xz=\frac{9}{2}\times 2=9$; $a-x-xz=24-\frac{9}{2}-9$ $=\frac{48-9-18}{2}=\frac{21}{2}$.

Primo prodotto $xxz=\frac{9}{2}\times\frac{9}{2}\times 2=\frac{162}{4}$. Secondo prodotto $ax-$ $-xx-xxz=\frac{9}{2}\times\frac{21}{2}=\frac{189}{4}$. Terzo prodotto $=9\times\frac{21}{2}=\frac{18}{2}\times\frac{21}{2}=$ $=\frac{378}{4}$. Somma di tutti e tre i prodotti $=\frac{162+189+378}{4}=$ $=\frac{729}{4}$ quadrato della presa radice $tx=3\times\frac{9}{2}=\frac{27}{2}$.

Tutto l'artificio della presente soluzione è indirizzato a prendere tali parti di a, che in tutti gli membri vi sia x, e che la incognita x non passi oltre la seconda potestà; dacchè poscia paragonando la formola ordinata al quadrato $ttxx$ della radice tx, diviene tutta la equazione divisibile per x.

PROBLEMA V.

Ritrovare due numeri disuguali, la cui differenza aggiunta alla differenza de' loro quadrati, presa questa quante volte piace, faccia una somma, che sia quadrata.

RISOLUZIONE.

Numero delle volte, che prendere piace la differenza de'quadrati $=a$. Numero maggiore $=x$, suo $\square=xx$. Numero minore

nore $=y$, suo $\square=yy$. Differenza de' numeri $=x-y$. Differenza de' quadrati $=xx-yy$, la quale presa a volte, sarà $axx-ayy$. Onde sarà formola de' quadrati $x-y+axx-ayy=\square$. Facciasi $y=x-z$, e sostituiscasi alla formola tal valore di y, sarà $x-x+$ $+z+axx-axx-azz+2axz=\square$, e spurgando, $2axz+z-azz=tt$, e per antitesi, $2axz=tt+azz-z$, e dividendo per $2az$, sarà $x=\frac{tt+azz-z}{2az}$.

L' Artificio della soluzione presente tutto consiste nel fare, che il membro axx della prima formola vada svanito, perchè non è quadrato; dacchè, se fosse quadrato, potrebbe essere terminato, come nel primo problema, paragonando la formola a tale quadrato, che contenesse simile membro axx. Adunque per fare, che si dilegui $+axx$, veggendo nella formola altro membro $-ayy$, si forma $y=x-z$, perchè dee essere la maggiore $x=y+z$. Quindi sostituendo il valore di y, ne nasce $-axx$, per cui distrutto ne viene $+axx$, restando x nella prima dimensione. Questo artificio è generale, tutte le volte, che le diverse incognite della formola, ascendenti ad uguali dimensioni, hanno gli stessi coefficienti, e gli segni contrari.

PROBLEMA VI.

Ritrovare tre numeri in proporzione aritmetica, il prodotto de' quali sia un quadrato.

RISOLUZIONE.

Primo termine $=x$. Differenza $=y$; dunque saranno i tre termini (457) $\div\, x : x+y : x+2y$.

Prodotto del primo nel secondo $=xx+xy$, che multiplicato nel terzo darà la formola $x^3+xxy+2xxy+2xyy=x^3+$ $+3xxy+2xyy=\square$. Si faccia $2x=tt$; quindi $x=\frac{tt}{2}$, qual valore sostituiscasi nella formola, che diverrà $\frac{t^6}{8}+\frac{3t^4y}{4}+ttyy=\square$ della radice $ty+z$ comodamente presa per elidere nella formola il membro quadrato ayy, restando y incognita, però senza ridurre a comune denominatore, sarà l' equazione

t^6

$\frac{t^6}{8}+\frac{3t^4y}{4}+ttyy=ttyy+zz+2tyz$ si riduca a comune denominatore, e si spurghi, sarà $t^6+6t^4y=8zz+16tyz$, e per antitesi $16tyz-6t^4y=t^6-8zz$; d' onde $y=\frac{t^6-8zz}{16tz-6t^4}$. Si osservi, che il quadrato di yy essendo multiplicato per $2x$, necessità ha voluto di rendere $2x=tt\square$ perfetto, acciocchè sostituendo il valore di $2x$, divenisse $2xyy=ttyy$ quadrato della radice ty, che comodamente si è fatto svanire.

PROBLEMA VII.

Ritrovare due quadrati, alla cui doppia somma aggiunto il numero a, se ne formi un quadrato.

RISOLUZIONE.

Primo quadrato $=xx$, secondo quadrato $=yy$, numero che si aggiunge $=a$, doppia somma $=2xx+2yy$; somma di tutto $=2xx+2yy+a=\square$. Suppongasi $xx>yy$; quindi si faccia $x=y+z$, & $xx=yy+zz+2yz$, & $2xx=2yy+2zz+4yz$, e sostituendo nella formola, sarà $2yy+2zz+4yz+2yy+a=\square$, cioè $4yy+2zz+4yz+a=\square$ della radice $t+2y$; laonde $4yy+2zz+$ $+4yz+a=tt+4ty+4yy$, ed elidendo $4yy$ comune, $2zz+4yz+$ $+a=tt+4ty$, e per antitesi $4ty-4yz=a+2zz-tt$, quindi $y=$ $=\frac{a+2zz-tt}{4t-4z}$.

Il ripiego per isciogliere tale problema, è stato quello di osservare, che il numero 2, coefficiente de' quadrati xx, & yy nella formola, preso due volte forma il quadrato 4, però sostituendo diviene $2xx+2yy$ ridotto a perfetto quadrato $4yy$. Questa regola generale in tutti gli altri coefficienti, che sommati formano un quadrato, o che sottraendo, lasciano un quadrato, è molto comoda nel calcolare.

PROBLEMA VIII.

Dividere il dato numero quadrato in tre parti, a ciascuna delle quali aggiunto il numero istesso, ne riesca sempre un quadrato.

Ri-

RISOLUZIONE.

Dato numero quadrato $=aa$, prima sua parte $=x$, seconda parte $=y$, terza $=aa-x-y$: quindi B. $aa+x=\square$, & $aa+$ $+x=uu$, & $x=uu-aa$ C. $aa+y=\square$, & $aa+y=zz$, & $y=zz-aa$ D. $2aa-x-y=\square$, e sostituendo i valori di x, e di y, $2aa-uu+$ $+aa-zz+aa=\square$, cioè F. $4aa-uu-zz=\square$, facciasi $z=tu$, & $zz=ttuu$, che sarà, sostituendo G. $4aa-uu-ttuu=4aa+rruu-4aru$ quadrato della radice $2a-ru$; si cancelli il comune $4aa$, e si divida per u, ne risulta $rru+ttu+u=4ar$, e dividendo per $rr+tt+1$, ne nasce $u=\frac{4ar}{rr+tt+1}$. Si osservi, che nella formola D, sostituiti si sono i valori delle due formole B, C, d'onde è nata la formola F, la quale, col cognito quadrato $4aa$, contenendo due quadrati incogniti $-uu$, $-zz$ negativi, rendevano in tale stato la soluzione impossibile, per via di sterminare o l'uno, o l'altro; si è adunque rivolto il pensiero di deprimere la potestà seconda colla divisione, come nella regola sesta (106), che però si è fatto $zz=ttuu$, d'onde è nata la formola G, uguale al quadrato della radice $2a-ru$; che comodamente ne induce ad eliminare, e dividere.

PROBLEMA IX.

Dati due numeri, la cui somma sia un quadrato, ritrovare altro quadrato numero, che multiplicato in uno de' dati, con aggiungervi l'altro, si formi un quadrato.

RISOLUZIONE.

Primo numero dato $=b$, secondo $=aa-b$, loro somma $=aa-b+b=aa$, quadrato che si ricerca $=zz$, sarà $bzz+aa-b=\square$. Facciasi $zz=\overline{t+1}^{\,2}=tt+2t+1$, e si sostituisca $btt+2bt+b+aa-$ $-b=\square$ della radice $a+tu$, sarà $btt+2bt+aa=aa+ttuu+2atu$; si cancelli aa comune, e si divida per t, risulta $bt+2b=tuu+$ $+2au$, e per antitesi $bt-tuu=2au-2b$, e dividendo per $b-uu$, sarà $t=\frac{2au-2b}{b-uu}$; quindi quadrando $tt=\frac{4aauu+4bb-8abu}{bb+u^4-2buu}$. Ma si è fatto il ricercato quadrato $zz=tt+2t+1$, & $z=t+1$; dunque sostituendo li valori di tt, e di t, sarà

zz

$zz = \frac{4aauu + 4bb - 8abu}{bb + u^4 - 2buu} + 2 \times \frac{2au - 2b}{b - uu} + 1$. Si riduca a comune denominatore (65), multiplicando il valore di $2t = 2 \times \frac{2au - 2b}{b - uu}$ per lo suo divisore, radice dell' altro divisore suo quadrato; e finalmente il membro $+1$, si multiplichi per lo divisore quadrato $bb + u^4 - 2buu$, e da questo divisore $b - uu$, che la formola tutta ridotta, e spurgata, sarà $zz = \frac{4aauu + bb + u^4 - 4au^3 - 4abu + 2buu}{bb + u^4 - 2buu}$ quadrato della radice $\frac{2au - b - uu}{b - uu}$. Avuto il valore di zz, rimane sciolta la questione, dacchè egli è

$bzz + aa - b = \square = b \times \frac{4aauu + bb + u^4 - 4au^3 - 4abu + 2bu^2}{bb + u^4 - 2buu} + a^2 - z$, vale a dire riducendo a comune denominatore, e spurgando, sarà $bzz + aa - b = \frac{2aabuu - 4abu^3 - 4abbu + 4bbuu + aabb + aau^4}{u^4 + bb - 2buu}$.

Proviene la facilità della risoluzione dallo avere osservato, che il termine $-b$, debba essere mandato via dalla formola, la quale senza di quel termine $-b$ rimane $+aa$ quadrato perfetto, e quindi la formola tutta trattabile. Facilmente si è fatto adunque $zz = \overline{t+1}^2$, acciocchè il membro bzz contenga $+b$, d'onde eliso rimanga l' altro membro $-b$; e la residua formola $btt + 2bt + aa$, comodamente paragonare si puote a quadrato, del quale appiacere si è presa la radice $a + tu$, per lo vantaggio, che spurgandosi l' equazione per aa, gli membri rimanenti restano tutti divisibili per t, come nell' usato calcolo ben si vede.

PROBLEMA X.

Ritrovare due numeri, che da ciascun loro quadrato, trattone l' altro numero, vi rimanga un quadrato.

RISOLUZIONE.

Primo ricercato numero $= x$, secondo $= y$, sarà A; $xx - y = \square$, & B; $yy - x = \square$; $xx - y = xx + tt - 2tx$, e per antitesi, e spurgando

gando, sarà $2tx = tt + y$, ed $x = \frac{tt+y}{2t}$. Sostituiscasi questo valore di x nella equazione B., e sarà C. $yy - \frac{tt-y}{2t} = yy + zz - 2yz$; e spurgando pel comune yy, avrassi, $\frac{-tt-y}{2t} = zz = 2yz$; e si avverta, che la formola da quadrarsi $yy \frac{-tt-y}{2t}$ non è stata ridotta a comune denominatore, per non isturbare il quadrato yy dell' incognita, e non poterlo più elidere, come avviene nella equazione C, d' onde $\frac{-tt-y}{2t} = zz - 2yz$, e riducendo a comun denominatore $-tt-y = 2tzz - 4tyz$, e per antitesi $4tyz - y = 2tzz + tt$, e dividendo per $4tz - 1$, $y = \frac{2tzz+tt}{4tz-1}$, il cui quadrato $yy = \frac{4ttz^4+t^4+4t^3zz}{16ttzz+1-8tz}$, e sostituendo in x il valore di y, sarà $2tx = tt + \frac{2tzz+tt}{4tz-1} = \frac{4t^3z-tt+2tzz+tt}{4tz-1}$, e spurgando, sarà $x = \frac{2ttz+zz}{4tz-1}$, il cui quadrato sarà $xx = \frac{4t^4zz+z^4+4ttz^3}{16ttzz+1-8tz}$: quindi A. $xx - y = \frac{4t^4zz+z^4+4ttz^3}{16ttzz+1-8tz} - \frac{2tzz-tt}{4tz-1}$, e riducendo a comune denominatore, sarà $xx - y = \frac{4t^4zz+z^4+4ttz^3 - \overline{2tzz-tt} \times \overline{4tz-1}}{16ttzz+1-8tz} =$ $= \frac{4t^4zz+z^4-4ttz^3-4t^3z+2tzz+tt}{16ttzz+1-8zt}$ quadrato della radice $\frac{zz-2ttz+t}{4tz-1}$. Colla dimostrazione, e calcolo istesso verificata dimostrasi la seconda formola B. $yy - xx = z$, prendendo di sopra i ritrovati valori di $yy - x$, vuolsi dire, che dal valore di yy si sottragga il valore di x, per formare $yy - x$.

PROBLEMA XI.

Ritrovare due numeri, de' cui quadrati la somma aggiunta alla loro semidifferenza, e al dato numero a, formi tal somma, che sia quadrato.

RI-

Risoluzione.

Ricercato numero maggiore $=x$, minore $=y$, differenza $=x-y$: che però sarà $xx+yy+\frac{x-y}{2}+a=\square=tt+xx+2tx$, e spurgando $yy+\frac{x-y}{2}+a=\square=tt+xx+2tx$, & $2yy+x-y+2a=$ $=2tt+4tx$, e per antitesi $4tx-x=2yy-2tt-y+2a$, e dividendo per $4t-1$, sarà $x=\frac{2yy-2tt-y+2a}{4t-1}$, rimanendo y arbitraria con a, & t.

Con opportuno consiglio si è tralasciato di togliere le frazioni dalla formola prima, bastando all' intento di avere purificato il quadrato xx, che sterminare si dee. Che se mai viene a succedere, che con ridurre a comune denominatore, la potestà dell' incognita diviene quadrata, allora bisogna praticare l' Isomeria, e non altrimenti.

Problema XII.

Ritrovare due numeri, de' cui quadrati la somma sia quadrato, e la somma de' numeri istessi coll' aggiunta del numero a sia parimente quadrato.

Risoluzione.

Primo numero $=x$, secondo $=y$, dunque A. $xx+yy=\square=$ $=xx+ttyy-2txy$, della radice $ty-x$. Si spurghi per xx, e quindi si divida per y, sarà coll' antitesi $2tx=tty-y$, & $x=\frac{tty-y}{2t}$. Inoltre deve essere B. $x+y+a=\square$, ed in questa formola B sostituiscasi il valore di x, ricavato dalla formola A, ne risulta ridotta ec. B. $\frac{tty+2ty-y+2at}{2t}=mm$, e multiplicando per $2t$, sarà $tty+2ty-y+2at=2tmm$, e per antitesi, e dividendo ec. $y=\frac{2tmm-2at}{tt+2t-1}$, qual valore di y sostituito nel valore di x, ne darà $x=\frac{2t^3mm-2at^3-2tmm+2at}{2t^3+4tt-2t}$, e spurgando sotto, e sopra

pra per $2t$, $x = \frac{ttmm - att - mm + a}{tt + 2t - 1}$ primo numero ricercato, & $y = \frac{2tmm - 2at}{tt + 2t - 1}$ secondo quesito numero.

Sia per esempio il dato numero $a = 35$, e prendasi l' arbitraria $t = 3$, e l' altra arbitraria $m = 7$, saranno $x = \frac{9 \times 49 - 35 \times 9 - 49 + 35}{9 + 6 - 1} = \frac{112}{14} = 8$: similmente $y = \frac{6 \times 49 - 6 \times 35}{9 + 6 - 1} = \frac{84}{14} = 6$, epperò $64 + 36 = 100$ numero quadrato, la cui radice $10 = ty - x = 18 - 8$, e finalmente $x + y + a$, cioè $8 + 6 + 35 = 49 = mm$.

PROBLEMI QUADRATICI SEMPLICI.

PROBLEMA I.

Ritrovare un numero, la cui metà multiplicata per la sua terza parte produca il numero 54.

RISOLUZIONE.

Numero ricercato $= x$, sua metà $= \frac{x}{2}$, sua terza parte $= \frac{x}{3}$ dunque $\frac{x}{2} \times \frac{x}{3} = 54$, ed attualmente multiplicando, sarà $\frac{xx}{6} = 54$, e multiplicando per 6, ne risulta $xx = 324$, e traendone la radice quadrata, sarà $x = \pm\sqrt{324} = 18$; epperò $\frac{x}{2} = 9$ $\frac{x}{3} = 6$, & $9 \times 6 = 54$.

Generalmente.

Se si fosse proposto, che il prodotto della metà colla terza parte facesse il numero a, sarebbe stato $xx = 6a$, & $x = \pm\sqrt{6a}$.

PROBLEMA II.

Un Maestro di Aritmetica mandò due suoi figli separatamente ad esigere alcuni suoi crediti, ritornati a casa, ne dierono conto

conto al Padre, dicendo, che il Primogenito avea riscosso minor numero di scudi del Cadetto, e che delle fatte riscossioni la differenza multiplicata pel numero maggiore, formava il numero $=a$, ma multiplicata pel numero minore, faceva il numero $=b$: però il Padre ritrovasse il maggior numero, ed il minore degli scudi esatti dal Cadetto, e dal Primogenito.

RISOLUZIONE.

Siano gli ricercati numeri, maggiore $=x$, minore $=y$, sarà loro differenza $x-y$, e per le proposte condizioni ne nascono le due equazioni, $xx-xy=a$, & $xy-yy=b$; e volendo trattare le suddette due equazioni colle usate maniere (111. 112.), si ridurrebbe la soluzione a grado molto intralciato; che però adoperando il calcolo, che torna più comodo, si sommino le sopraddette due equazioni, sarà loro somma $xx-yy-xy+xy=a+b$, cioè $xx-yy=a+b$, e per antitesi $xx=a+b+yy$, cioè $yy=xx-a-b$: e conciosiachè in tutte le disuguali quantità la differenza aggiunta alla minore, nella somma viene a formare la maggior quantità, e sottratta dalla maggiore, lascia nel residuo la minore, però sia la differenza $x-y=z$, sarà $y=x-z$, e quadrando avrassi $yy=xx-2xz+zz$, e paragonando questi due valori di yy, sarà $xx-2xz+zz=xx-a-b$, ed elidendo il comune xx, e per antitesi $2xz-a-b=zz$. Ma perchè la differenza $z\times x=a$, sarà $x=\frac{a}{z}$, qual valore sostituito nel membro $2xz$, risulta $2z\times\frac{a}{z}-a-b=zz$, e riducendo sarà $2a-a-b=zz$, cioè $a-b=zz$, e traendo la quadrata radice $z=\pm\sqrt{a-b}$; e perchè $x=\frac{a}{z}$, sostituendo il valore di z, sarà $x=\pm\frac{a}{\sqrt{a-b}}$, & $y=x-z$, sarà $y=\pm\frac{a}{\sqrt{a-b}}-z$, cioè $y=\pm\frac{a}{\sqrt{a-b}}-\sqrt{a-b}$.

Sieno $a=24$, $b=15$, saranno $a-b=9$, $z=\pm\sqrt{a-b}=3=\pm\sqrt{24-15}=\pm\sqrt{9}$; dunque $x=\frac{a}{z}=\frac{24}{3}=8$, &

$y=x-z=\pm\frac{a}{\sqrt{a-b}}-\sqrt{a-b}=\frac{24}{3}-3=8-3=5$, cioè $x=8$, $y=5$, $z=3$;

$z=3$; d' onde $xx-xy=a$, cioè $64-40=24$, & $xy-yy=b$, cioè $40-25=15$.

Nella risoluzione di questo problema si è praticato un metodo particolare, perchè nel caso presente si è ritrovato più semplice, e più comodo, come quello, che speditamente ne ha condotti ai valori delle due incognite x, & y, i quali però si sarebbono ritrovati colle regole de' num. 111., e 112., ma con maggiore prolissità; e si dee avvertire, che le regole date nei detti luoghi, siccome altre ancora, hanno il vantaggio di essere sicure, ed immancabili in qualsivoglia caso; e seguitando quelle, senza dubbio si arriva alla separazione de' valori della incognita, ed alle soluzioni de' problemi. Ma le generali regole non hanno sempre il beneficio di essere le più brevi, e le più comode, ed a tale, che in alcuni casi particolari non si possono ritrovare altre vie scorciatoie, per le quali con passi minori si giunga al ritrovamento de' valori delle incognite: il medesimo si vede succedere ancora nelle operazioni numeriche, nelle quali sebbene abbiamo la regola generale, e sicura, alla quale attenendosi, non possiamo mancare di condurre al suo fine la operazione medesima, e nei casi medesimi sono di molto soccorso, ma vagliono solo in quello, o in quell' altro caso, nè per questi può darsi una certa regola generale; ciò succede, per esempio, nella divisione di un numero grande per un altro di non poche figure, per la qual operazione abbiamo la regola sicura, ed universale al numero 42; ma in molti casi lo andar dividendo per tutti i divisori del divisore, è un ripiego, che giova ad agevolare la operazione, ed ove possa adoperarsi, è assai comodo, non vale però, se non quando il divisore è il prodotto di vari numeri semplici.

Per l' uso di questi compendi, e per la invenzione, ed applicazione di quelli nella risoluzione analitica dei quesiti, non è possibile il dar regole universali. Si puote però dire in generale esser sempre lecito il comporre tra di loro in qualche modo escogitabile le equazioni del problema, purchè si proceda con giusto raziocinio, cioè purchè dalle equazioni precedenti, legittimamente se ne deduca dover rimanere ancora cose fra di loro uguali dopo la operazione, e combinazione che si vuol

fare.

fare. Per esempio, due equazioni possono legittimamente sommarsi insieme, e sottrarsi una dall' altra, eguagliando fra di loro i risultati da cotali somme, e sottrazioni; perciocchè, se abbiamo $a=b$, & $c=d$, sarà $a+c=b+d$, ed $a-c=b-d$: potranno ancora multiplicarsi fra di loro le equazioni, ove giovi il farlo, perchè se $a=b$, & $c=d$ multiplicando cose fra di loro eguali per cose eguali, i prodotti risultanti non possono non esser eguali; onde sarà conseguenza infallibile essere $ac=bd$, & $ad=bc$. Onde se sommando insieme le due equazioni, o multiplicandole, o sottraendole una dall' altra, riesce di ricavare una conseguenza, la qual conferisca al più spedito scioglimento della questione, si puote usare questo compendio, con sicurezza di non indurre errore nel calcolo. I valori trovati per mezzo di questi compendi saranno legittimi, e potranno, occorrendo, sostituirsi nelle altre equazioni, e le risultanti equazioni saranno vere. In fine, purchè si proceda con giusto raziocinio, le conseguenze saranno sempre giuste, onde se con questi artifici, rimescolando fra di loro le equazioni del problema, riesce di spianare la strada allo scioglimento della questione; nessuna necessità abbiamo di star attaccati alla regola generale, in modo che, ove trovisi espediente, non possa abbandonarsi quella, procedendo per una strada più compendiosa; e questo è per l' appunto ciò, che si è fatto nella quì proposta questione. E' ancora alle volte confacevole al più sollecito scioglimento del quesito l' introdurre una nuova incognita nelle equazioni, oltre a quelle, che da principio furono denominate, quantunque fossero quelle sufficienti alla risoluzione del quesito, ciò facendo, affinchè, mediante alcuni altri teoremi già noti coll' uso della introdotta, si vengano a risparmiare le potestà, a cui elevar si dovrebbero le prime incognite, il che ove riesca d conseguire, ben si vede, che risparmiate le dimensioni della incognita, il problema si riduce a maggiore facilità.

Dee però stare avvertito l' Annalista, che molte volte usando questi compendi, accade, che non si trovino poi tutti i valori delle incognite, che servir possono a sciorre la questione, prendendosene qualcuno appunto, quando riesca di far sparire dalle equazioni le maggiori dimensioni delle prime incognite; onde

onde in fine si conchiude, che la via indicata ai numeri 111. 112. è sempre la più sicura per condurre ad una perfetta, ed adeguata risoluzione del problema.

PROBLEMA . III.

Dividere un dato numero a in due parti, delle quali i quadrati siano differenti tra loro di un altro dato numero b.

RISOLUZIONE.

Sia la parte maggiore $=x$, suo $\square = xx$; sarà l' altra residua $=a-x$, suo $\square = aa-2ax+xx$, ed al maggiore xx sottraendone il minore, sarà differenza $xx-aa+2ax-xx$, e spurgando sia la proposta differenza $=2ax-aa$, la quale deve essere uguale al dato numero b, onde nasce l' equazione $2ax-aa=b$, e per antitesi $2ax=b+aa$, e dividendo per $2a$, sarà finalmente $x=\frac{b+aa}{2a}$. Prendasi $a=8$, & $b=5$, sarà $x=\frac{64+5}{16}=\frac{69}{16}$, prima parte maggiore; sarà l' altra parte $a-x=8-\frac{69}{16}=\frac{128-69}{16}$ $=\frac{59}{16}$. Di queste ritrovate due parti del dato numero 8 sono i quadrati $\frac{4761}{256}$ della radice $\frac{69}{16}$, e della minor parte $\frac{59}{16}$ egli è il quadrato $=\frac{3481}{256}$, che sottratto da quello, ne lascia il residuo $\frac{1280}{256}=5=b$. Se in altra ipotesi il dato numero da dividere a si faccia $=11$, e la data differenza $b=17$, sarà $x=\frac{138}{22}$, e l' altra parte sarà $11\frac{-138}{22}=\frac{104}{22}$. Il quadrato di $\frac{138}{22}$ egli è $\frac{19044}{484}$, e l' altro quadrato di $\frac{104}{22}$, sarà $\frac{10816}{484}$, e sottraendo questo da quello, sarà la differenza $=\frac{8228}{484}=17$.

Sembra adunque a prima vista, che nissuna condizione richiedasi fra i dati numeri a, & b, acciocchè si possa risolvere la questione; anzi sembra, che qualunque sia il dato numero a,

e

e l' altro b, ſempre ſi troverà una $x = \frac{aa+b}{2a}$, che riſolverà il problema; e di vero in queſta formola non ſi ſcorge condizione veruna: dall' altra parte intendere non ſi puote, come ſia mai poſſibile, che un dato numero a, il quale picciolisſimo ſi potrebbe prendere, ſi abbia a divider in due parti, gli cui quadrati differiſcano tra di loro pel dato numero b, che ſi potrebbe ſtabilire grandisſimo. Per eſempio, come l' unità divider ſi poſſa in due parti, delle quali i quadrati ſiano fra di loro differenti, di mille, e di cento mila unità.

Queſta riflesſione ne dona il luogo ad un avvertimento molto importante da averſi nello ſcioglimento delle queſtioni col mezzo della analiſi, quando nel progreſſo del calcolo ſi debbano fare i quadrati, oppure eſtrarre le quadrate radici. Vuolſi adunque dire, che quante le volte per eſprimere le condizioni del problema egli è d' uopo formare i quadrati delle quantità, o quando per trovare il valore della incognita, trarre ſi dee la quadrata radice da qualſivoglia quantità, allora il valore della incognita ſerve a ſciorre non ſolo la propoſta queſtione, ma qualche altra eziandio, alla quale lo analiſta rivolto non avea il penſiero. La ragione di tutto ciò egli è lo avere ogni quadrato due quadrate diverſe radici, d' onde ne naſce, che facendoſi da quella radice, che ſi quadra nell' adoperato calcolo il quadrato, ne rieſce la medeſima equazione, come ſe il quadrato formato ſi foſſe dall' altra radice non eſpreſſa nella queſtione, il perchè conſeguentemente con uguali maniere la equazione ſervirà per riſolvere altra queſtione non già propoſta, come ſi è uſata per diſciogliere la eſpreſſa, in cui ſtata vi foſſe l' altra radice, che il quadrato medeſimo viene a formare; coll' eſempio l' avvertimento più chiaro vedrasſi.

Nella queſtione propoſta deeſi fare il quadrato di $a-x$, il quale egli è $aa-2ax+xx$, e lo ſteſſo quadrato conſeguito ſarebbeſi da altra radice $x-a$. Dunque ſe propoſto ſi foſſe $x-a$ in vece di $a-x$, la medeſima equazione ſarebbeſi ottenuta col proporre di ritrovare qualunque numero x, da cui ſottraendone il dato numero a, il quadrato del reſiduo foſſe minore di una data differenza b, di quello, che ſia il quadrato del richiesto numero x. Certamente la equazione sarebbe stata la medesima, conciosiachè dal quadrato di x si sarebbe dovuto sottrarre il quadrato di $x-a$, che è lo stesso del quadrato di $a-x$; il perchè ritrovato il valore di x, che dalla equazione risulta, quello sarà per risolvere non meno questa nuova, che la prima questione, anzi scioglierà quella prima, sino a tanto che x sarà minore di a, cioè una sua parte, ma scioglierà l'altra, quando x comincierà ad essere maggiore di a, ed allora il quadrato di $x-a$, e non già l'altro di $a-x$ sarà quello, che intendere si dovrà tratto dal quadrato di x, acciocchè nel residuo si ottenga il dato numero b; allora la quistione non già più sarà quella, che da principio proposta ne venne, ma altra di ritrovare un numero, da cui traendone il dato numero a, il quadrato del residuo per il dato numero b sia minore del quadrato del numero già richiesto.

Ricavasi da tutto ciò, che per isciogliere precisamente la proposita quistione, fia d'uopo, che x sia minore di a, condizione, che viene a limitare quella universalità, che pareva potersi dare alla x, e toglie di mezzo la implicanza accennata nella medesima universalità. Quindi addiviene, che fra le date a, & b, tale condizione esser vi dee, che $\frac{aa+b}{2a}$ (valore di x) sia minore di a; locchè seco ne porta, che b sia minore di aa; vuolsi dire, che la data differenza dei quadrati dee esser minore del quadrato del numero a, altrimenti il proposto numero non mai sarà diviso in parti aventi la data condizione: anzi allora è, che il dato numero a tratto dal ricercato numero x, altro numero ne lascierà, il cui quadrato ecceduto sarà per lo eccesso b, dal quadrato dello stesso quesito numero; ed in questi termini la quistione non ha limite alcuno, dacchè amendue le parti comprende; egli è perciò necessario, che nei problemi, in cui conviene formare quadrati, o estrarne quadrate radici, o una, o più volte, si dee bene avvertire, e distinguere qual sia tra valori dell'incognita quello, che discioglie la precisa quistione proposta, e quale è quello, che altre questioni disnoda, entrate nella equazione col progresso del calcolo, distinguendo i casi, in cui il valore medesimo risolve ora l'una, ora l'altra quistione.

PRO-

Problema IV.

Si ricercano tre numeri, di cui le tre somme a due a due multiplicate, per il rimanente facciano tre prodotti uguali a tre numeri dati a, b, c.

Risoluzione.

Il presente problema va trattato con tutta attenzione per evitare la confusione nella lunghezza del calcolo, e far sì, che non ascenda a grado molto superiore. Sia pertanto primo ricercato numero $=x$, secondo $=y$, terzo $=z$, e quindi le tre equazioni $xz+yz=a$, dalla quale $z=\frac{a}{x+y}$; $xy+yz=b$, $xy+$ $+xz=c$.

Per ritrovare altro valore di z, si sommino insieme la seconda, e la terza equazione, sarà $2xy+xz+yz=b+c$, e per antitesi $xz+yz=b+c-2xy$, e dividendo per $x+y$, ne nasce un secondo valore di $z=\frac{b+c-2xy}{x+y}$, e da questi due valori di z omettendo il comune divisore $x+y$, si ottiene l'equazione $a=b+c-2xy$, e per antitesi; e dividendo per $2x$ ne nasce un valore di $y=\frac{b+c-a}{2x}$.

Per ritrovare un altro valore di y si sostituisca nella seconda, e terza delle tre prime equazioni il valore z ricavato dalla prima, cioè $=\frac{a}{x+y}$, sarà $xy\frac{+ay}{x+y}=b$, cioè $xxy+xyy+ay=$ $=bx+by$, & $xy\frac{+ax}{x+y}=c$, cioè $xxy+xyy+ax=cx+cy$, e sottraendo l'una dall'altra, risulta $xxy+xyy+ay-xxy-xyy-ax=$ $=bx+by-cx-cy$, e spurgando $ay-ax=bx+by-cx-cy$, e per antitesi $ay+cy-by=bx+ax-cx$, e dividendo per $a+c-b$, sarà $y=\frac{bx+ax-cx}{a+c-b}$, valore da paragonarsi coll'altro valore di $y=\frac{b+c-a}{2x}$; onde $\frac{bx+ax-cx}{a+c-b}=\frac{b+c-a}{2x}$, e togliendo le frazioni, e spurgando sarà $2axx+2bxx-2cxx=2ab+cc-aa-bb$, e dividendo.

videndo per $2a+2b-2c$, ne nasce $xx=\frac{2ab+cc-aa-bb}{2a+2b-2c}$, e traendo la quadrata radice sarà $x=\pm\sqrt{\frac{2ab+cc-aa-bb}{2a+2b-2c}}=\pm\sqrt{m}$, e sostituendo questo valore, saranno $y=\frac{a+b-c\times\sqrt{m}}{a+c-b}$, &

$$z=\frac{aa+ac-ab}{2a\sqrt{m}}=\frac{a+c-b}{2\sqrt{m}}.$$

Rimane ora di prendere delle tre cognite quantità a, b, c, una quale ne aggrada c, e trattarla come arbitraria, ed indagarne i limiti suoi, acciocchè il valore di x non riesca immaginario, ed impossibile, e tutte e tre x, y, z si ricavino quantità positive.

Per avere dunque x reale, e quindi positiva, egli èd'uopo, che il suo valore $\sqrt{\frac{2ab+cc-aa-bb}{2a+2b-2c}}$ sia quantità positiva, e quindi reale, epperò numeratore, e denominatore della radical frazione deono essere amendue positivi, o amendue negativi. Il denominatore sempre sarà positivo, ove si prenda $c<a+b$, ed il numeratore sarà positivo, dove sia $2ab+cc>aa+bb$, e per antitesi $cc>aa+bb-2ab$; e perchè amendue le parti del confronto sono quadrate, traendone le positive quadrate radici, sarà $c>a-b$, se egli si è preso $a>b$, altrimenti se $b>a$, saranno positive radici c, & $b-a$, onde essere dee $c>b-a$. Tralasciata adunque la radice negativa, come quella, che è inutile, e per quanto da prima si è detto, non se ne può fare uso determinato, si prenda la radice positiva, & c maggiore di quella, ed otterrassi l'incognita x positiva, e positive le altre incognite y, & z.

Sono pertanto della arbitraria c limite di minoranza, dovendola prendere $c<a+b$, e prendendola (supposto che sia $a>b$) $c>a-b$, oppure essendo $a<b$, dovrà essere $c>b-a$ limite di maggioranza.

Si scelgano pertanto gli dati numeri a, b appiacere, $a=135$, $b=63$, $c=144<a+b$, & $>a-b$, saranno $x=\sqrt{\frac{2ab+cc-aa-bb}{2a+2b-2c}}=$

$=12$

$=12=\sqrt{m}$, $y=\frac{\overline{a+b-c}\times\sqrt{m}}{a+c-b}=3$, $z=\frac{a+c-b}{2\sqrt{m}}=9$; laonde $\overline{x+y}\times z=\overline{12+3}\times 9=135$, $\overline{x+z}\times y=\overline{12+9}\times 3=63$, & $\overline{y+z}\times x=\overline{3+9}\times 12=144$. In ſimigliante maniera prendendo $b>a$, cioè $a=50$, $b=54$, $c=44<a+b$, & $>b-a$, e le tre incognite ſaranno $x=4$, $y=6$, $z=5$.

Avvertimento.

Giova non poco lo avvertire generalmente, che tutti gli problemi appellati numerici ſi riſolvono, e con maggiore univerſalità eziandio colle ſpecie analitiche, ma vi biſogna molta franchezza di calcolo.

Perchè, come ſi è veduto, ſono gli valori algebraici delle tre incognite $x=\sqrt{\frac{2ab+cc-aa-bb}{2a+2b-2c}}$,

$$y=\frac{\overline{a+b-c}\times\sqrt{\frac{2ab+cc-aa-bb}{2a+2b-2c}}}{a+c-b},$$

$$z=\frac{a+c-b}{2\sqrt{\frac{2ab+cc-aa-bb}{2a+2b-2c}}}$$

: ed eſſendo omai ritrovati gli tre valori delle tre incognite, torna molto in acconcio, per evitare la confuſione, e ben riſolvere il queſito, formare diſtintamente gli opportuni tre prodotti xz, yz, & xy, i quali ſaranno

$$xz=\sqrt{\frac{2ab+cc-aa-bb}{2a+2b-2c}}\times\frac{a+c-b}{2\sqrt{\frac{2ab+cc-aa-bb}{2a+2b-2c}}}.$$

Si cancellino (ſpurgando ſotto e ſopra) le due quantità radicali, che ſono in luogo di numeratore, e denominatore, e ſarà il purificato prodotto $xz=\frac{a+c-b}{2}$. In ſimil maniera ſi ricavi l' altro prodotto.

$$yz=\frac{\overline{a+b-c}\times\sqrt{\frac{2ab+cc-aa-bb}{2a+2b-2c}}}{a+c-b}\times\frac{a+c-b}{2\sqrt{\frac{2ab+cc-aa-bb}{2a+2b-2c}}}$$

Parimente ſi cancellino le due quantità radicali, numeratore, e denominatore, e per lo motivo medeſimo ſi cancellino le le ſimili quantità $a+c-b$, onde purificato ne viene il prodotto $yz=\frac{a+b-c}{2}$.

Finalmente ſi formi il terzo prodotto xy, ſarà $xy=\sqrt{\frac{2ab+cc-aa-bb}{2a+2b-2c}}\times\frac{\overline{a+b-c}}{\overline{a+c-b}}\sqrt{\frac{2ab+cc-aa-bb}{2a+2b-2c}}$; e perchè le due quantita radicali ſono amendue ne' numeratori, che deono multiplicarſi tra loro, però cancellandone il ſegno, riſulta $xy=\frac{2ab+cc-aa-bb}{2\times a+b-c}\times\frac{a+b-c}{a+c-b}$: ſi cancelli il numeratore, ed il denominatore $a+b-c$, e ſi multiplichi per due, cioè per 2 il diviſore della ſeconda frazione, e ſarà finalmente lo eſpurgato prodotto $xy=\frac{2ab+cc-aa-bb}{2a+2c-2b}$, e perchè ſi ſono ritrovati gli altri $xz=\frac{a+c-b}{2}$, $yz=\frac{a+b-c}{2}$, e quindi ſarà

$xz+yz=\frac{a+c-b+a+b-c}{2}=\frac{2a}{2}=a$, come è ſtato propoſto.

$xy+yz=\frac{2ab+cc-aa-bb}{2a+2c-2b}+\frac{a+b-c}{2}$, e riducendo a comune denominatore ſarà $xy+zy=\frac{2ab+cc-aa-bb+\overline{a+b-c}\times\overline{a+c-b}}{2a+2c-2b}=$

$=\frac{2ab+cc-aa-bb+aa+ab-ac+ac+bc-cc-ab-bb+bb}{2a+2c-2b}$, e ſpurgando, e dividendo ſotto, e ſopra per 2, ne riſulta il prodotto ſecondo, il quale da quanto ſi è propoſto, dee eſſere $=b$, cioè $xy+yz=\frac{ab+bc-bb}{a+c-b}=b$.

Finalmente colle ſteſſe maniere di operare, ritrovare ſi vuole il valore del terzo prodotto $+xy+xz$ comandato $=cxy+$ $+xz=\frac{2ab+cc-bb-aa}{2a+2c-2b}+\frac{a+c-b}{2}=c$, e riducendo ſarà

$xy+xz=\frac{2ab+cc-bb-aa+\overline{a+c-b}\times\overline{a+c-b}}{2a+2c-2b}$, vuolſi dire

$xy+xz=\frac{2ab+cc-bb-aa+aa+cc+bb+2ac-2ab-2bc}{2a+2c-2b}=c$, e ſpurgando, e dividendo per 2. la ridotta frazione, proviene

xy

$xy+xz=\frac{ac+cc-bc}{a+c-b}=c$; laonde tutti e tre i purificati prodotti vengono ad essere $xz+yz=\overline{x+y}\times z=\frac{a+c-b+a+b-c}{2}=\frac{2a}{2}=a$,

$xy+yz=\overline{x+z}\times y=\frac{ab+bc-bb}{a+c-b}=b$,

$xy+xz=\overline{y+z}\times x=\frac{ac+cc-bc}{a+c-b}=c$.

PROBLEMI QUADRATICI AFFETTI.

PROBLEMA I.

Uno che ritornava dal Mercato avendo comprati cavalli, e capre, fu interrogato quante bestie avesse, e quanti cavalli, e quante capre. Rispose, le bestie tutte sono per numero $=a$, ho comprato le capre un scudo l'una, ed ogni cavallo tanti scudi, quante sono le capre, ed in tutto ho speso scudi $=b$, si cerca il numero distinto de' cavalli, e delle capre.

RISOLUZIONE.

Sia il numero delle capre $=x$, sarà il numero de' cavalli $=a-x$, ed il loro valore sarà di scudi $x\times\overline{a-x}=ax-xx$, e perchè le capre furono comprate uno scudo l'una, sarà il valore di scudi $=x$, qual somma di scudi essendo $=b$, ne nasce l'equazione $ax-xx+x=b$, e per antitesi totale sarà $xx-ax-x=-b$, ed aggiugnendo $\frac{aa}{4}+\frac{2a}{4}+\frac{1}{4}$ □ del coefficiente di x, $xx-ax-x+\frac{aa}{4}+\frac{2a}{4}+\frac{1}{4}=\frac{aa}{4}+\frac{2a}{4}+\frac{1}{4}-b$, e traendo la quadrata radice, sarà $x\frac{-a-1}{2}=\pm\sqrt{\frac{aa+2a+1-4b}{4}}$, e per antitesi

$$x=\pm\frac{\sqrt{aa+2a+1-4b}+a+1}{2}.$$

Siano $a=42$, sarà $aa=1764$, & $2a=84$, & $+1b=420$; & $4b=1680$; che però la quantità radicale $aa+2a+1-4b=$ $=1849-1680=169$ quadrato della radice 13,

&

due quadrati di x, e di $b+x$, d'onde la equazione quadratica affetta $aa=2xx+2bx+bb$, la quale maneggiata coll'uso delle sopra stabilite regole, ne somministra il finale valore di $x=\frac{-b\pm\sqrt{2aa-bb}}{2}$, ed ecco come dallo avere resa più generale la questione, ponendo a, & b in luogo dei determinati numeri 74, & 46, se ne ricava una regola generale per tutte le sì fatte formole, ed è che mai il problema non potrà essere sciolto, dove non sia $2aa>bb$, oppur sia $aa>\frac{bb}{2}$. Conciosiachè il quanto $2aa-bb$ sotto il radical segno locato, non potrà mai essere positivo, ove non sia $2aa>bb$, e non essendo positivo il quanto, da cui estrarre si dee la radice quadrata, non puote uscir fuori un valore della incognita x, laonde bisogna, che il quadrato del numero, che esprime la ruba del primo sia maggiore della metà del quadrato del numero secondo, che ne indica quanto più del terzo il secondo avea preso; altrimente si rende impossibile la soluzione del problema.

Bisogna inoltre, che $\sqrt{2aa-bb}$ sia maggiore di b, e non già che questa condizione sia necessaria per rendere reale il valore della incognita x, ma solamente ella dee verificarsi, acciocchè il terzo in vece di partecipare del tesoro ritrovato non vi abbia piuttosto rimesso qualcosa del suo, come contra lo stato della questione ne seguirebbe, se il valore di x fosse quantità negativa. Dovendo adunque $\sqrt{2aa-bb}$ esser maggiore di b, acciocchè sia $\sqrt{2aa-bb}-b$ quantità positiva, fa d'uopo, che sia quadrando $2aa-bb>bb$, e per antitesi $2aa>2bb$, ed $aa>bb$.

Finalmente le positive radici prendendo, dee essere $a>b$; laonde quando per rendere reale il valore della parte x toccata al terzo, bastava, che aa fosse maggiore di $\frac{1}{2}bb$; per renderla positiva non basta questa condizione, ma richiedesi, che aa sia maggiore non solo di $\frac{1}{2}bb$, ma all'intero bb. Se al numero delle doppie toccate al terzo, che è $\frac{\sqrt{2aa-bb}-b}{2}$, aggiugneremo b, ne risulterà il numero delle doppie toccate al secondo, che

che sarà $\frac{\sqrt{2aa-bb}+b}{2}$. Tutto il numero poi delle doppie trovate risulterà della somma delle tre porzioni a; & $\frac{\sqrt{2aa-bb}+b}{2}$. Finalmente $\frac{\sqrt{2aa-bb}-b}{2}$, le quali sommano $a+\sqrt{2aa-bb}$.

Quindi se $2aa-bb$ sarà un quadrato perfetto, il problema si risolverà in numeri razionali, ma se $2aa-bb$, non è un quadrato perfetto, non si potrà mai risolvere il quesito, che per lo solo mezzo de' numeri sordi.

PROBLEMA IV.

Un Signore avendo risparmiato $\frac{1}{2}$ di $\frac{3}{4}$ delle sue entrate di un anno, avendo aggiunto anche lire $=b$, comprò una casa: si sa solamente, che $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{5}$ di tutto il suo reddito multiplicati per la fatta spesa faceano la somma di lire $=a$; si cerca il reddito annuale, ed il valore dell'acquistata casa.

RISOLUZIONE.

Reddito di un anno $=x$. Risparmio di un anno $=\frac{1}{2}\times\frac{3x}{4}=\frac{3x}{8}$. Prezzo della casa $=\frac{3x}{8}+b$; inoltre $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{5}$ del reddito $=\frac{2}{3}\times\frac{4x}{5}=\frac{8x}{15}$, quantità, che multiplicata col prezzo della casa forma un prodotto $\frac{8x}{15}\times\overline{\frac{3x}{8}+b}=\frac{8\times\overline{3xx+8bx}}{15\times8}$, spurgando per 8, sarà $\frac{3xx+8bx}{15}$ prodotto, che dee essere uguale alla somma di lire $=a$: dunque nasce l' equazione $\frac{3xx+8bx}{15}=a$, & $3xx+8bx=15a$, e dividendo per 3, sarà $xx+\frac{8bx}{3}=5a$, ed aggiugnendo $\overline{\frac{4b}{3}}^2=\frac{16bb}{9}$, sarà $xx+\frac{8bx}{3}+\frac{16bb}{9}=5a+\frac{16bb}{9}$, e

traen-

traendo la quadrata radice $x+\frac{4b}{3}=\pm\sqrt{\frac{5a+16bb}{9}}$, e per antitesi $x=\pm\sqrt{\frac{5a+16bb}{9}}-\frac{4b}{3}$.

Siano $b=3600$, $\frac{4b}{3}=4800$, $\frac{16bb}{9}=23040000$, $a=328320000$, $5a=1641600000$, $5a+\frac{16bb}{9}=1664640000\square$, la cui radice $=40800$, e tolto $\frac{4b}{3}$, sarà $40800-4800=36000=x$ reddito annuo; laonde $\frac{3x}{8}=13500$, $\frac{3x}{8}+b=17100$ prezzo della casa, $\frac{8x}{15}=19200$; quindi $19200\times17100=a=328320000$.

PROBLEMA V.

Dividere il dato numero a in tre parti, x, y, z, i cui tre quadrati xx, yy, zz presi insieme facciano un dato numero b.

RISOLUZIONE.

Questo problema si propone per prendere da esso la occasione di dir qualche cosa intorno ai casi della impossibilità della risoluzione di alcuni quesiti, come anco intorno ai limiti delle arbitrarie.

Dovendo essere $x+y+z=a$, si avrà $z=a-x-y$, & $zz=aa+$ $+xx+yy-2ax-2ay+2xy$. Questo valore di zz si sostituisca nell' altra equazione, che è $xx+yy+zz=b$; e si avrà la equazione $xx+yy+aa+xx+yy-2ax-2ay+2xy=b$, cioè $2xx+2yy-2ax-$ $-2ay+2xy=b-aa$, la quale è sempre quadratica affetta, o si voglia trattare per incognita x, oppure y. Assumeremo dunque x come arbitraria, e tratteremo y come incognita, avremo perciò $yy+xy-ay=\frac{b-aa}{2}-xx+ax$, ed aggiunto, secondo la regola insegnata al num. 114. all' una, ed all' altra parte il quadrato di $\frac{x-a}{2}$, si avrà $yy+xy-ay+\frac{xx+aa-2ax}{4}=\frac{b-aa}{2}$

$-xx$

$-xx$, $+ax+\frac{xx+aa-2ax}{4}$: la seconda parte di questa equazione ridotta a comun denominatore diventa $\frac{2b-aa-3xx+2ax}{4}$, estraendo pertanto le radici quadrate dall' una, e dall' altra parte della equazione, si avrà $y+\frac{x-a}{2}=\pm\sqrt{\frac{2b-aa-3xx+2ax}{4}}$; e finalmente $y=\frac{a-x\pm\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}$.

Per trovar dunque la y (assunta, che siasi ad arbitrio una x) conviene estrarre la radice quadrata del quanto $2b-aa-3xx+2ax$, ed aggiunta questa radice quadrata al quanto $a-x$ (o levata da quello), deesi dividere per metà la somma, o il resto, ed in tal modo si comporrà la y; sottratta poi dal dato quanto a la somma delle due porzioni x, & y, il residuo sarà la terza porzione desiderata del dato numero a.

Se il quanto $2b-aa-3xx+ax$ posto sotto il segno radicale, sarà un numero positivo, potremo estraerne la radice quadrata coll' artificio insegnato al num. 55.; ma se sarà un quanto negativo, questa radice quadrata non mai si potrà estraere, non essendosi mai insegnato, nè potendosi insegnare, e neppur concepire in mente il modo di estraere le radici quadrate dai nuri negativi, nè credasi già, che siccome $+c$ è la radice quadrata di $+cc$, così $-c$ possa prendersi per la radice quadrata di $-cc$, e che perciò considerando il dato quanto $=cc$, come se fosse positivo, ed estrattane la radice $+c$, possa poi mutare a questa il segno, e prendere $-c$ per radice del quadrato negativo $-cc$: non potrà giammai nè $-c$, nè alcun altro numero negativo assegnarsi per radice quadrata di qualsivoglia numero negativo; perciocchè niun quanto, ancorchè negativo multiplicato in se stesso puote mai mettere in essere un prodotto negativo; laonde d' ogni quadrato positivo $+cc$ potranno bensì assegnarsi due radici quadrate, delle quali una è $+c$, e l' altra $-c$, ma del quadrato negativo $-cc$ niuna radice quadrata potrà mai rinvenirsi, nè fra i numeri positivi, nè fra i negativi, e per conseguenza la radice quadrata di un numero negativo sarà un quanto impossibile da ritrovarsi, sia fra i positivi, sia fra i negativi, e quando il valore di un numero incognito

gnito viene espresso per la radice quadrata di un numero negativo, tanto basta per far conoscere il medesimo numero incognito impossibile a ritrovarsi, perciò i quanti espressi per le radici quadrate di cose negative, si chiamano immaginari; e se in una quistione si ricavasse il valore della incognita espresso per la radice quadrata di un quanto, il quale secondo la varia qualità dei numeri dati, potesse in un caso essere positivo, ed in un altro negativo, il problema sarebbe solubile, quando il numero, da cui estraere si dovesse la radice quadrata, fosse positivo, e sarebbe impossibile ad esser sciolto nei casi, ne' quali la radice quadrata trarre si dovesse da un numero negativo; come se sciogliendo un problema, in cui siano due numeri dati a, & b, si giugnesse alla equazione $xx = aa - ab$, onde fosse finalmente la incognita $x = \pm\sqrt{aa-ab}$, sinattanto che aa fosse maggiore di ab, e conseguentemente $aa-ab$ fosse un numero positivo, il problema sarebbe possibile a risolversi, ma se aa fosse minore di ab (il che accaderebbe, ove il dato numero b fosse maggiore dell' altro dato a), allora dovendosi estrarre la radice quadrata da un numero negativo, ed essendo impossibile una tale radice quadrata, sarebbe impossibile il valore di x.

Essendo poi impossibile la radice quadrata di un quanto negativo, sarà impossibile ancora aggiugner quella a qualunque altro quanto, ancorchè questo fosse reale, perchè la somma di più quanti costa essenzialmente di tutti quelli, come il tutto costa di tutte le sue parti insieme congiunte, ed una sola di quelle parti, che sia impossibile, si rende impossibile il tutto; laonde se ab sarà maggiore di aa, non solamente diverrà impossibile $\sqrt{aa-ab}$, ma ancora diverrà impossibile $c+\sqrt{aa-ab}$, ancorchè c fosse un quanto reale, onde se x fosse $= c+\sqrt{aa-ab}$, (essendo ab maggiore di aa) sarà ancora impossibile il complesso di queste due parti, delle quali c potrebbe essere reale, ma $\sqrt{aa-ab}$ supponesi impossibile.

E questa impossibilità, che nasce dal doversi estrarre la radice quadrata da' quanti negativi, è una impossibilità metafisica, la quale è talmente connessa colla quistione, che in qualunque genere di quanti accada, sempre induce impossibilità, sinattanto che rimane negativo il quanto, da cui estrarre si dee la radice qua-

quadrata; ben altrimenti da quello, che accade, quando la insolubilità del problema nasce dalla natura de' soggetti, a' quali esso è applicato, ne' quali casi coll' applicarlo ad un altro genere di cose, puote divenir solubile; laddove quando si tratti di radici quadrate di quanti negativi, la impossibilità risultando sin dai principi della quistione in qualsivoglia genere di cose, che quella si proponga, la medesima implicanza sempre avrà luogo, e solamente potrà quella togliersi di mezzo, quando i quanti dati siano talmente fra di loro riferiti, che divenga positivo il quanto, da cui estrarre si dee la radice quadrata.

Ciò stante nel caso particolare della proposta quistione, in cui il valore della incognita si è trovato $y = \frac{a-x \pm \sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}$ acciò il problema sia risolvibile, converrà, che sia positivo, o almeno, che non sia negativo il quanto, da cui estrarre si dee la radice quadrata. Vediamo perciò dentro a quali limiti abbiano a restare compresi gli numeri dati, e fra quali termini assumere debbasi la arbitraria x, acciò sia positivo il quanto $2b-aa-3xx+2ax$; imperciocchè se ciò non succede, non potrà essere reale il valore di y, o si prenda $y = \frac{a-x+\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}$, oppure $y = \frac{a-x-\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}$. In questa ricerca terremo il seguente ordine.

Acciò y sia un quanto reale, conviene, che $2b-aa-3xx+2ax$ sia maggiore dello zero, cioè sia quanto positivo; conviene pertanto, che i due termini positivi presi tutti insieme siano maggiori del complesso di tutti i negativi: dunque dovrà essere $2b+2ax$ maggiore di $3xx+aa$, e sottraendo da ogni parte $2ax+aa$, dovrà essere $2b-aa$ maggiore di $3xx-2ax$, cioè $3xx-2ax$ minore di $2b-aa$: imperciocchè egli è comodo il ridurre sempre nella prima parte della equazione (o piuttosto della comparazione, perchè non puote chiamarsi equazione, ove una parte si pone maggiore dell' altra) la incognita, cioè quella, di cui si cercano i limiti; e proseguendo avanti, come se volessimo cercare i valori della x in una equazione quadratica affet-

affetta, e perciò dividendo per 3, dovrà essere $xx-\frac{2}{3}ax$ minore di $\frac{2b-aa}{3}$, ed aggiugnendo all' una, ed all' altra parte della equazione il quadrato di $\frac{1}{3}a$ (metà del quanto, di cui è affetto il termine, che ha x, come si fa nel ridurre le equazioni quadratiche affette), converrà, che acciò y sia quanto reale, sia il quadrato perfetto $xx-\frac{2ax}{3}+\frac{aa}{9}$ minore di $\frac{2b-aa}{3}+\frac{aa}{9}=\frac{6b-2aa}{9}$.

E prima di andare avanti è necessario al presente riflettere, che essendo la prima parte del confronto un quadrato perfetto, non può non essere un quanto positivo; conciosiachè, come altrove si è detto, ogni quadrato, o provenga da positiva radice, o da negativa, è necessariamente positivo, perchè da positivo multiplicato per positivo, o da negativo per negativo, non mai ne può nascere negativo prodotto, ma sempre mai positivo, e perciò il superiore quadrato $xx\frac{-2ax}{3}+\frac{aa}{9}$, sempre sarà un quanto positivo; se adunque ella è necessaria condizione per rendere y reale, che sia il quadrato $xx\frac{-2ax}{3}+\frac{aa}{9}<\frac{6b-2aa}{9}$ forza egli è, che $\frac{6b-2aa}{9}$ sia quantità positiva, conciosiachè se fosse quanto negativo non potrebbe il superiore quadrato esser minore. Ecco dunque una condizione, che dee necessariamente presupporsi fra le date a, b, ad effetto, che y sia reale, ed il problema risolver si possa, ed egli è, che $6b-2aa$ non sia quantità negativa, vuolsi dire, che sia $6b>2aa$, cioè $3b>aa$; e quindi $b>\frac{aa}{3}$, o almeno $b=\frac{aa}{3}$, condizione, senza la quale niun valore di y potrà esser reale. Se adunque essendo $a=30$, si domandasse la divisione del numero 30 in tre parti, delle quali facendone i tre quadrati, fosse loro somma $b=166$, il pro-

problema sarebbe insolubile, perchè il numero $b=166$ non sarebbe uguale, o maggiore di $\frac{aa}{3}$, essendo $aa=900$, & $b=\frac{aa}{3}=300$. Se dunque non è $3b>aa$, non occorre andare più avanti, il problema è insolubile, e tutti i valori di y divengono immaginari, eccettuato il caso del minimo $b=\frac{aa}{3}$, nel quale deve essere $x=\frac{a}{3}$; quindi risulta $y=\frac{a}{3}$, e rimane $z=\frac{a}{3}$, ed a diviso in tre parti uguali. Supponendo però, che sia $3b>aa$, proseguire si puote la ricerca intrapresa sopra i limiti, dentro de' quali prendere si dovrà l' arbitraria x, acciocchè y sia reale: ed avendo già ritrovato, che per essere y reale, fa d' uopo, che sia il quadrato $xx-\frac{2ax}{3}+\frac{aa}{9}<\frac{6b-2aa}{9}$, si dee concludere, che la quadrata radice del primo termine del paragone dovrà esser minore della radice quadrata del termine secondo. Nello estrarre però tali radici, necessità vuole di assicurarsi di prendere le positive radici dell' una, e dell'altra parte: dacchè non vale la generale conseguenza, che dallo esser maggiori i quadrati, debbano eziandio le radici esser maggiori: è verissimo, che sia $144>9$, e che conseguentemente le positive radici prendendo, si possa conchiudere legittimamente, che ancora sia $12>3$, ma non si potrà già conchiudere, che sia l' altra radice di 144, cioè $-12>3$, perocchè da una parte la negativa radice si prende, e dall' altra la positiva; siccome neppure conchiudere si potrebbe, che sia $-12>-3$, perocchè nei negativi la cosa cammina tutto al contrario di quello, dove si prendono amendue positive le radici di quei quadrati, che si paragonano tra di loro.

Ciò stante avendo noi ritrovato, che per rendere y reale debba essere $xx-\frac{2ax}{3}+\frac{aa}{9}<\frac{6b-2aa}{9}$, a volere conchiudere, che anche la radice quadrata della prima parte, debba essere minore della radice quadrata della seconda, bisogna, che ci assicuriamo di prendere le radici positive.

Quale dunque dovrà prendersi per radice positiva del quadrato $xx - \frac{2}{3}ax + \frac{1}{9}aa$? Dovremo noi prendere $x - \frac{1}{3}a$, oppure $\frac{1}{3}a - x$? Ciò dipende dal voler noi prendere x maggiore, o minore di $\frac{1}{3}a$, mentre che fino ad ora non sappiamo, che siavi limitazione alcuna da non prenderla a nostro arbitrio. Se vogliamo prendere x maggiore di $\frac{1}{3}a$, la radice positiva del detto quadrato sarà $x - \frac{a}{3}$, ed allora dal dover essere $xx - \frac{2ax}{3} + \frac{aa}{9} < \frac{6b - 2aa}{9}$, se ne potrà legittimamente arguire dover essere $x \frac{-a}{3} < \frac{\sqrt{6b-2aa}}{3}$; dal che se ne deduce, che volendo prendere $x > \frac{a}{3}$, bisogna prenderla minore di $\frac{a + \sqrt{6b-2aa}}{3}$. Che se poi ne piace di prendere $x < \frac{a}{3}$, allora la positiva radice del quadrato $xx - \frac{2ax}{3} + \frac{aa}{9}$, sarà $\frac{a}{3} - x$, e dovrà essere $\frac{a}{3} - x < \frac{\sqrt{6b-2aa}}{3}$; cioè dovrà essere $\frac{a}{3} < x + \frac{\sqrt{6b-2aa}}{3}$, o vogliam dire rovesciando $x + \frac{\sqrt{6b-2aa}}{3} > \frac{a}{3}$, e finalmente $x > \frac{a}{3} - \frac{\sqrt{6b-2aa}}{3}$.

Conchiudasi adunque (sempre supponendo $3b > aa$, senza di che non mai potrassi avere alcuna y reale), che per dare un valore all'arbitraria x, che reale renda la y, se si vuol prendere $x > \frac{a}{3}$, conviene prenderla minore di $\frac{a + \sqrt{6b-2aa}}{3}$, e volendo prendere $x < \frac{a}{3}$, fa d'uopo prenderla maggiore di $\frac{a - \sqrt{6b-2aa}}{3}$ affinchè y sia reale, locchè in sostanza vale il medesimo, che il dire doversi prendere x fra questi due limiti, cioè minore di di $\frac{a+\sqrt{6b-2aa}}{3}$, e maggiore di $\frac{a-\sqrt{6b-2aa}}{3}$. Presa adunque ad arbitrio x fra questi due limiti, si avranno per ciascuna x due valori di y, ed amendue reali; uno sarà

$$y=\frac{a-x+\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2},$$ e l' altro valore

$$y=\frac{a-x-\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}.$$

Affinchè poi possa ottenersi una vera divisione del dato numero a in tre parti x, y, $z=a-x-y$, e che y non sia piuttosto un numero da aggiugnersi ad a, che una positiva parte del dato numero a, conviene, che avendo presa una x positiva, e minore di a, sia ancora y positiva, ed inoltre che sia $x+y<a$, acciocchè anche $z=a-x-y$ sia un numero, vera positiva parte di a. Il prendere $x<a$, acciocchè sia x una parte di a, questa è una circostanza, che riconoscesi a prima vista necessaria, acciocchè il dato numero a diviso rimanga in tre parti: nè a questa condizione si oppone alcuna delle ritrovate condizioni di x necessarie per rendere y reale; dacchè la condizione di dover prendere $x>\frac{a-\sqrt{6b-2aa}}{3}$, non ripugna al dover prendere $x<a$; imperciocchè manifestamente, e di molto, essendo $a>\frac{a-\sqrt{6b-2aa}}{3}$, si potrà sempre prendere $x<a$, ed anche $>\frac{a-\sqrt{6b-2aa}}{3}$. Cercherassi adunque se altri limiti aver debba l' arbitraria x (che sempre supponesi positiva minore di a, e presa fra i due limiti $\frac{a+\sqrt{6b-2aa}}{3}$, & $\frac{a-\sqrt{6b-2aa}}{3}$), acciò si rendano vere eziandio queste due altre condizioni: e giova d' incominciar la ricerca dal valore di $y=\frac{a-x+\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}$, per continuarla poi intorno all'altro valore della medesima $y=\frac{a-x-\sqrt{2b-2aa-3xx+2ax}}{2}$.

Dee adunque in primo luogo essere $\frac{a-x+\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}$

mag-

maggiore dello zero, prima condizione sempre necessariamente annessa al quanto y; perocchè essendo $x<a$, sarà $a-x>0$, e tanto più il positivo $a-x$ giunto al positivo $\frac{\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}$ la somma diverrà un quanto sempre più positivo.

Vadasi adunque ad esaminare l' altra condizione, che verificare si dee nella y, che consiste nel dover essere $y+x<a$ numero dato; dovrà dunque essere $\frac{a-x+\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}+x<a$, e riducendo a comun denominatore, e per antitesi dovrà essere $\sqrt{2b-aa+2ax-3xx}<a-x$, ed essendo $a-x$ quantità positiva, per essersi presa $x<a$, legittimamente argomentare si puote dal dover essere maggiori le positive radici, che ancora della radice maggiore il quadrato dovrà esser maggiore del quadrato della radice minore; dunque conchiuder si dee, che dal dover essere $\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}<a-x$, anche debba essere $2b-aa-3xx+2ax<aa-2ax+xx$, onde tutto da una parte locando, fa d'uopo, che sia $2b+4ax-2aa-4xx<0$, e per antitesi $2b+4ax<$ $<2aa+4xx$, e dividendo per 2, esser dee $b+2ax<2xx+aa$; quindi $b-aa<2xx-2ax$, cioè $2xx-2ax>b-aa$, e dividendo per 2 ne risulta $xx-ax>\frac{b-aa}{2}$, ed aggiunto $\frac{aa}{4}$ per ogni parte, giusta le regole quadratiche affette, esser dee il quadrato $xx-$ $-ax\frac{+aa}{4}>\frac{2b-aa}{4}$. E prima di procedere oltre, si dee osservare, che se il quanto $\frac{2b-aa}{4}$ fosse un negativo, sarebbe necessario, che il quadrato $xx-ax+\frac{aa}{4}$ fosse maggiore di quello; perocchè ogni quadrato di necessità è un quanto positivo. Ma il quanto $\frac{2b-aa}{4}$ sarà negativo quante le volte sia $2b<aa$, cioè $b<\frac{aa}{2}$; dunque se b sarà minore di $\frac{aa}{2}$, sarà necessario, che $x+y$ sia minore di a, prendendo per y il valore già intrapreso $\frac{a-x+\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}$. Questo caso, che sia $b<\frac{aa}{2}$ potrebbe be intravenire, perocchè altra limitazione fin' ora non si ha, se non che debba essere $b > \frac{aa}{3}$, e può benissimo essere $b > \frac{aa}{3}$ & $b < \frac{aa}{2}$: se questo accade, il valore di y, di cui si ragiona, aggiunto all' arbitraria x, sarà necessariamente una somma minore di a, e per conseguenza sì fatto valore di y ben servirà per dividere il dato numero a in tali parti, che del problema ne serbino le esposte condizioni, senza che x ad altre leggi sia sottoposta, che di esser presa minore di a, e fra i due estremi $\frac{a+\sqrt{6b-2aa}}{3}$, & $\frac{a-\sqrt{6b-2aa}}{3}$.

Si avanzi adunque il calcolo per rintracciare i limiti, dentro ai quali dovrassi prendere la arbitraria x, affinchè la somma di x, e di $y = \frac{a-x+\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}$, sia minore di a, e procedendo mai sempre nella ipotesi, che sia $b > \frac{aa}{3}$, anzi maggiore di $\frac{aa}{2}$, de' quali supposti, il primo si richiede, acciocchè y sia reale, e non immaginario; il secondo poi è necessario, acciocchè la somma $x+y$ risultar possa minore del dato numero a; ripigliando pertanto le radici positive dei due quanti amendue positivi $xx-ax+\frac{aa}{4}$, & $\frac{2b-aa}{4}$, de' quali il primo esser dovrà maggiore del secondo, e quindi legittimamente conchiuder si vuole, che sia parimente delle radici $\frac{a}{2} - x > \frac{\sqrt{2b-aa}}{4}$. Dunque $\frac{a}{2} < x + \frac{\sqrt{2b-aa}}{4}$, che è quanto a dire $x + \frac{\sqrt{2b-aa}}{4} > \frac{a}{2}$, e per antitesi parimente esser dee $x < \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{2b-aa}}{4}$, e riducendo a comune denominatore, con estrarre la radice del 4, dee essere $x < \frac{a-\sqrt{2b-aa}}{2}$; supponendo in questo calcolo, quanto di sopra si è stabilito, che sia $x < \frac{a}{2}$, e quindi $\frac{a}{2} - x$ sia positi-

va

va radice del quadrato $xx-ax+\frac{aa}{4}$. Volendo dunque prendere $x<\frac{a}{2}$ converrà prenderla eziandio minore di $\frac{a-\sqrt{2b-aa}}{2}$, perchè sia la somma $x+y<a$. Ma perchè y ne riesca quantità reale, ne conviene da altra parte prendere $x>\frac{a-\sqrt{6b-2aa}}{3}$, e quindi egli è d' uopo indagare, se sia possibile, prendendo $x<\frac{a}{2}$ anche $x<\frac{a-\sqrt{2b-aa}}{2}$, ed insiememente prendere $x>\frac{a-\sqrt{6b-2aa}}{3}$.

Perchè adunque si possa prendere una x minore di $\frac{a}{2}$, ed anche minore di $\frac{a-\sqrt{2b-aa}}{2}$, e nel medesimo tempo maggiore di $\frac{a-\sqrt{6b-2aa}}{3}$, senza alcun dubbio è necessario, che il quanto $\frac{a-\sqrt{6b-2aa}}{3}$ sia minore di amendue i termini $\frac{a}{2}$, ed $\frac{a-\sqrt{2b-aa}}{2}$ e sarà certamente tale, se sarà minore della minore delle suddette due quantità, delle quali egli è evidente, che la minore sia $\frac{a-\sqrt{2b-aa}}{2}$, essendo manifesta cosa, che sia $\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{2b-aa}}{2}<\frac{a}{2}$ bisogna dunque, che sia $\frac{a-\sqrt{6b-2aa}}{3}<\frac{a-\sqrt{2b-aa}}{2}$ acciocchè si possa prendere una $x<\frac{a-\sqrt{2b-aa}}{2}$, e maggiore di $\frac{a-\sqrt{6b-2aa}}{3}$, condizione dimostrata già necessaria, acciocchè y riesca reale, e non immaginaria.

Ed appunto egli è $\frac{a-\sqrt{6b-2aa}}{3}$ minore di $\frac{a-\sqrt{2b-aa}}{2}$, e ciò si riconosce multiplicando in croce, e levando $2a$ per parte, perchè resta $-2\sqrt{6b-2aa}$, che è minore di $a-3\sqrt{2b-aa}$, e trasportando resta $3\sqrt{2b-aa}$, che è minore di $a+2\sqrt{6b-2aa}$; e quadrando questi due quanti amendue positivi, ne viene $18b-9aa$ minore di $24b-7aa+4a\sqrt{6b-2aa}$, e levando i termini comuni resta zero minore della quantità positiva $6b+2aa+4a\sqrt{6b-aa}$.

Dun-

Dunque prender volendo x minore di $\frac{1}{2}a$, possiamo farlo, purchè la prendiamo ancora minore di $\frac{a-\sqrt{2b-aa}}{2}$, ma insieme maggiore di $\frac{a-\sqrt{6b-2aa}}{3}$, il che sarà sempre possibile a fare.

Quì si avverta, che nella ipotesi, in cui siamo, cioè che $2b$ sia maggiore di aa, e b di $\frac{1}{2}aa$, il quanto $\frac{a-\sqrt{6b-2aa}}{3}$ è necessariamente un quanto negativo, per essere a minore di $\sqrt{6b-2aa}$; laonde purchè si prenda x positiva, non potrà non prendersi maggiore di $\frac{a-\sqrt{6b-2aa}}{3}$; sicchè quando sia b maggiore di $\frac{1}{2}aa$ ogni x positiva è minore di $\frac{a+\sqrt{6b-2aa}}{3}$, farà reali i valori di y, perchè già sarà la x necessariamente maggiore dell'altro termine $\frac{a-\sqrt{6b-2aa}}{3}$, che era già prescritto per rendere y reale.

Noi abbiamo supposto nel nostro calcolo di voler prendere x minore di $\frac{1}{2}a$, e perciò abbiamo presa $\frac{1}{2}a-x$ per radice positiva del quadrato $xx-ax+\frac{1}{4}aa$, che dovea esser maggiore di $\frac{2b-aa}{4}$. Ma se supporremo di voler prendere x maggiore di $\frac{1}{2}a$, converrà prendere $x-\frac{1}{2}a$ per radice positiva del quadrato $xx-ax+\frac{1}{4}aa$.

Ed in questa ipotesi, perchè sia $x+y$ minore di a, converrà, che $x-\frac{1}{2}a$ sia maggiore di $\frac{\sqrt{2b-aa}}{4}$, cioè x maggiore di $\frac{a+\sqrt{2b-aa}}{2}$. Dunque a voler prendere x maggiore di $\frac{1}{2}a$, conviene prenderla maggiore ancora di $\frac{a+\sqrt{2b-aa}}{2}$, e basterà prenderla maggiore del maggiore di quelli, cioè di $a+\sqrt{\frac{2b-aa}{2}}$. Peraltro sappiamo, che acciò sia y reale, dee x essere minore di di $\frac{a+\sqrt{6b-2aa}}{3}$: onde bisogna vedere se sia possibile prendere una x maggiore di $\frac{a+\sqrt{2b-aa}}{2}$, e minore di $\frac{a+\sqrt{6b-2aa}}{3}$. Sarà possibile prendere x maggiore di $\frac{a+\sqrt{2b-aa}}{2}$, ma minore di $\frac{a+\sqrt{6b-2aa}}{3}$, quando sia $\frac{a+\sqrt{6b-2aa}}{3}$ maggiore di $\frac{a+\sqrt{2b-aa}}{2}$ ed appunto è necessariamente $\frac{a+\sqrt{6b-2aa}}{3}$ maggiore di $\frac{a+\sqrt{2b-aa}}{2}$, perchè riducendo a comun denominatore, si trova essere $2a+2\sqrt{6b-2aa}$ maggiore di $3a+3\sqrt{2b-aa}$, e levando $2a$ per parte, trovasi essere $2\sqrt{6b-2aa}$, maggiore di $a+3\sqrt{2b-aa}$, e quadrando questi quanti positivi, trovasi essere $24b-8aa$ maggiore di $18b-8aa+6a\sqrt{2b-aa}$, e levando il comune $18b-8aa$, trovasi essere $6b$ maggiore di $6a\sqrt{2b-aa}$, e quadrando questi due quanti positivi, trovasi essere $36bb$ maggiore di $72aab-36a^4$ e trasportando tutto alla parte sinistra, trovasi essere $36bb+$ $+36a^4-72aab$ maggiore di zero, il che è evidente, per essere il primo termine della comparazione un quadrato perfetto della radice $6b-6aa$, che necessariamente essendo positivo, è maggiore dello zero; dunque perchè $\frac{a+\sqrt{6b-2aa}}{3}$ è maggiore di $\frac{a+\sqrt{2b-aa}}{2}$, potremo prendere x maggiore di $\frac{1}{2}a$, prendendola ancora maggiore di $\frac{a+\sqrt{2b-aa}}{2}$, e minore di $\frac{a+\sqrt{6b-aa}}{3}$.

Ristringiamo ora quì tutte le condizioni, che sono venute fuori da osservarsi, acciocchè il dato numero a possa subire una vera divisione in tre parti x, y, & $a-x-y$, talmente che i quadrati di queste insieme presi, facciano un dato numero b. Dovrà in primo luogo essere $6b$ maggiore di $2aa$ altrimenti il problema è impossibile a risolversi, cioè esser dee $b>\frac{aa}{3}$. Dovrà prendersi una x ad arbitrio positiva, e minore di a.

Dovrà

Dovrà la assunta x esser maggiore di $\frac{a-\sqrt{6b-2aa}}{3}$, e minore di $\frac{a+\sqrt{6b-2aa}}{3}$, altrimenti niuna y potrebbe essere reale.

Presa dunque x dentro a questi limiti, se b sarà minore di $\frac{1}{2}aa$, non vi sarà altra condizione da osservarsi nella elezione della x, ma ogni x, che si prenda dentro ai termini di sopra prescritti, renderà y positiva, ed $x+y$ minore di a, onde servirà alla vera divisione del dato numero a in tre parti aventi le dette condizioni.

Ma se b sarà maggiore di $\frac{1}{2}aa$, converrà, nella elezione di x, avvertire, che volendola prendere minore di $\frac{1}{2}a$, sia la medesima ancora minore di $\frac{a-\sqrt{2b-aa}}{2}$, e volendola prendere maggiore di $\frac{1}{2}a$, sia la medesima ancora maggiore di $\frac{a+\sqrt{2b-aa}}{2}$: avvertendo sempre, che fin quì abbiamo preso il valore di $y=\frac{a-x+\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}$.

Prendendo x fuori di questi limiti, non per questo il valore di y diverrebbe immaginario, quando fosse $6b$ maggiore di $2aa$, ma succederebbe solamente, che $y+x$ non sarebbe minore di a, laonde il dato numero a, che dividere dovrebbesi in tre parti, non restarebbe veramente diviso in parti, ma piuttosto restarebbe aumentato di un altro numero, e con questo accrescimento, che gli si desse, formarebbe tre numeri, de'quali i quadrati insieme presi, comporrebbero il dato numero b. Ma volendo, che il dato numero resti per mezzo di una vera divisione compartito in tre parti, bisogna, che siano x, & y positivi, e di più $x+y$ minore di a.

Per esempio, se il numero dato a fosse 210 da dividere in tre parti la somma dei quadrati, delle quali esser dovesse 20000, onde fosse $b=20000$, numero maggiore di $\frac{1}{3}aa$, che è 14700, ma minore di $\frac{1}{2}aa$, che è 22050, in questo caso sarà $\sqrt{6b-2aa}=\sqrt{31800}$, la quale è fra 178, e 179; sicchè i limiti, fra quali si dovrà prendere x, saranno fra $\frac{210-179}{3}$, e $\frac{210+179}{3}$, cioè fra $10\frac{1}{3}$, e $129\frac{2}{3}$; nè altra condizione che questa osservar deesi nell' assumere la x: presa dunque $x=$ $=100$, numero compreso fra i detti due estremi, sarà $y=$ $\frac{a-x+\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}=\frac{210-100+\sqrt{40000-44100-30000+42000}}{2}$ $=\frac{110+\sqrt{7900}}{2}=\frac{110+2\sqrt{1975}}{2}=55+\sqrt{1975}$; aggiunte insieme x, & y faranno la somma $155+\sqrt{1975}$, la quale sottratta da a, che è 210, lascierà il terzo segmento, z, del proposto numero, che sarà $55-\sqrt{1975}$. Saranno dunque le tre parti, in cui dividere si dee il proposto numero 210, le tre seguenti, cioè $x=100$, $y=55+\sqrt{1975}$, e $z=55-\sqrt{1975}$, delle quali gli quadrati sono $xx=10000$, $yy=5000+110\sqrt{1975}$, & $zz=5000-$ $-110\sqrt{1975}$, de' quali quadrati la somma è 20000 appunto come si desidera.

Se vorremo poi prendere b, che sia maggiore ancora di $\frac{1}{2}aa$, cioè di 22050, prendiamo per esempio $b=36000$, restando a, come prima, $=210$; gli limiti, fra quali si dovrà prendere x, acciò y riesca reale (gli quali sono $\frac{a-\sqrt{6b-2aa}}{3}$ & $\frac{a+\sqrt{6b-2aa}}{3}$, de' quali però il primo si puote trascurare, perchè quando b è maggiore di $\frac{1}{2}aa$, egli è negativo), saranno $\frac{210-\sqrt{127800}}{3}$, e $\frac{210+\sqrt{127800}}{3}$: la radice del 127800 è fra 357, e 358. Dunque acciò y possa essere reale, converrà prenderla fra $-49\frac{1}{3}$, e $189\frac{1}{3}$, de' quali estremi essendo il primo un negativo, ogni volta che x si prenda positiva, si è sicuro

curo di averla presa maggiore di quello; sicchè per rendere reale il valore di y, basterà prendere x positiva, e minore di $189\frac{1}{3}$ con un rotto. Ma perchè inoltre si vuole ancora, che $x+y$ sia un quanto minore di a, cioè di 210, rimane il determinarsi, se piace prendere x maggiore, o veramente minore di $\frac{a}{2}$, cioè di 105, e volendola prender minore, si dee anche prender minore di $\frac{a-\sqrt{2b-aa}}{2}$, ma volendola prender maggiore di $\frac{a}{2}$, fa d'uopo anche prenderla maggiore di $\frac{a+\sqrt{2b-aa}}{2}$. Nei numeri, che si sono presi, sarà $2b-aa=27900$, la cui radice sarà tra gli due numeri 167, & 168. Stabiliscasi adunque in primo luogo $x<\frac{a}{2}$, cioè minore di 105, e però conviene prenderla anche minore di $\frac{210-168}{2}$, cioè minore di 21: prendasi pertanto $=18$, sarà $y=\frac{210-18+\sqrt{72000-44100-9724+7560}}{2}=$ $=\frac{192+\sqrt{34488}}{2}=\frac{192+2\sqrt{8622}}{2}=96+\sqrt{8622}$, & $y+x$, sarà $=114+\sqrt{8622}$, che sottratto da $a=210$, lascierà $z=96-\sqrt{8622}$. Sono adunque le tre parti, in cui è diviso il numero 210, $y=96+\sqrt{8622}$, suo $\square=yy=17838+192\sqrt{8622}$; $x=18$, suo $\square=xx=324$; $z=96-\sqrt{8622}$, suo $\square=zz=17838-192\sqrt{8622}$; de' quali quadrati la somma è $=36000=b$, per l'appunto come desideravasi; ma se co' medesimi numeri si vorrà prendere una $x>\frac{a}{2}$, cioè maggiore di 105 (prendendola però minore di $\frac{210+\sqrt{127800}}{3}$, acciocchè riesca y reale positiva), converrà anche prenderla maggiore di $\frac{a+\sqrt{2b-aa}}{2}$, cioè di $\frac{210+\sqrt{27900}}{2}$, fra quali due termini di numeri quasi uguali tra loro potrassi prendere $=189$, e sarà $y=\frac{210-189+\sqrt{72000-44100-107163+79380}}{2}$

$=$

$=\frac{21+\sqrt{117}}{2}$, quindi $y+x$ sarà $189+\frac{21+\sqrt{117}}{2}=\frac{399+\sqrt{117}}{2}$ e sottraendone questa somma dal dato numero a, sarà $z=$ $=210-\frac{399-\sqrt{117}}{2}=\frac{21-\sqrt{117}}{2}$. Sono adunque le tre ricercate parti del numero 210, $x=189$, suo $\square=xx=35721$; $y=\frac{21+\sqrt{117}}{2}$, suo $\square=yy=\frac{558+42\sqrt{117}}{4}$; $z=\frac{21-\sqrt{117}}{2}$, suo $\square=zz=\frac{558-42\sqrt{117}}{4}$; de' quali la somma ella è 36000, come il problema richiede. Ed ecco lo stesso numero 210 come in diverse maniere divider si puote in tre parti, delle quali i quadrati presi insieme fanno 36000. Anzi perchè si puote variar x indefinitamente dentro i limiti già prescritti, ne nasce, che con maniere indefinitamente diverse il problema risolver si può, ritenendo anche le istesse date a, & b, purchè abbiano queste le ricercate condizioni tra loro, acciocchè gli valori di y ne nascano reali, e non immaginari.

Coll' ordine istesso procedere si potrebbe nello indagare i limiti di x, che rendono positivo l' altro valore di y, il quale è $\frac{a-x-\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}$, e che rendono $x+y$ minore di a, ma questa è fatica da risparmiarsi, imperciocchè quando si prende $y=\frac{a-x+\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}$, sarà $z=a-x-y=$ $=\frac{a-x-\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}$, come ognuno può facilmente sperimentare, sottraendo da a la somma di x col primo valore di y, che vedrà il resto, altro non essere, che l' altro valore della medesima, $y=\frac{a-x-\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}$, e scambievolmente, se per y prenderemo $\frac{a-x-\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}$, sarà $z=$ $=\frac{a-x+\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}$, in maniera che i tre quanti x, $\frac{a-x+\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}$, & $\frac{a-x-\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}$, sono sem-

pre

pre le tre parti, nelle quali dividere si dee il dato numero a, acciò resti sciolto il problema, e la loro somma fa sempre a, e la somma dei loro quadrati fa sempre b. Ogni volta dunque, che abbiamo trovati i limiti di x, che servono a rendere y positiva, ed $x+y$ minore di a, prendendo per y il suo valore $\frac{a-x+\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}$, siamo sicuri, che ancora z sarà positiva, e minore di a, perchè $z=a-x-y$; ma quando y è $\frac{a-x+\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}$, allora z è $\frac{a-x-\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}$; dunque da questo esempio a bella posta scelto, non fra i più difficili, ma però nè meno fra i più facili, si puote argomentare quanta complicazione di condizioni richiedere si possa in qualche caso più complesso per mettere in chiaro i limiti, dentro ai quali si debbano prendere le arbitrarie, o abbiano a consistere le date, acciò i problemi possano risolversi, e quanta accuratezza debbasi avere nel combinare fra di loro le diverse condizioni, che si vanno ricavando dal calcolo, dipendendo molte volte la impossibilità della quistione, non tanto dal non essere possibili le condizioni da quella richieste, quanto dal non essere compossibili fra di loro le medesime condizioni, ancorchè ognuna di quelle da se sia possibile.

Dunque, ove siano trovate le condizioni, che rendono $\frac{a-x+\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}$ positiva, & $x+y$ minore di a, si è sicuro, che le medesime condizioni renderanno ancora positiva la quantità $\frac{a-x-\sqrt{2b-aa-3xx+2ax}}{2}$, cioè z positiva, ed $x+z$ minore di a.

INDICE

INDICE.

Prop. XVI.

SECONDA PARTE.

INCOMINCIANO I SEI PRIMI LIBRI

DEGLI ELEMENTI DI EUCLIDE.

LIBRO PRIMO.

Definizione I.

1. PUNTO è menoma intelligibile cosa, che non ha estensione, non ha figura, non parti.

Definizione II.

2. La linea è lunghezza senza larghezza.

Concepire si puote qual flusso, o vestigio di un punto, che per immaginabile tratto di spazio localmente si muove.

Definizione III.

3. E della linea i termini sono i punti.

Anzi in tutta la linea vi sono i punti, perchè viene generata dal flusso di un punto.

Definizione IV. (*Fig.* 111.)

4. La retta linea è quella, che in una sola direzione tutti ha locati i suoi punti.

La retta linea va concepita per un vestigio il più breve, e cortissima via AB disegnata tra due punti A, B, e però dee avere tutti in una sola direzione collocati i suoi punti.

 Corol-

COROLLARIO 1°. (*Fig.* IV.)

5. Quindi la linea ADB, che ſi piega, e dal diritto ſentiero verſo D ſi divaga, più lunga diviene della diritta AB.

Si appelli ADB linea torta, o curva, di cui la interiore banda M diceſi concava: ma la eſteriore D ſi noma conveſſa.

E perchè, ſieno rette le linee, ſien curve, non mai hanno larghezza (*n.*° 2.), ma ſolamente lunghezza, neceſſità quindi vuole, che un ſolo punto comune aver poſſono due linee, o che ſi ſeghino, o che ſi tocchino.

Se amendue ſono rette, ſi ſegano nel punto E, ma per le (4) direzioni loro diverſe, non più ſi poſſono riſegare (*Fig.* v.).

Se ſono due curve, o pure una retta, altra curva, toccare ſi poſſono quelle in D, queſte in E, quante volte avendo comune quel punto, ſi incamminano per direzioni diverſe. (*Fig.* VI.)

Finalmente (*Fig.* VI.) ſegandoſi in A, riſegare ſi poſſono in G, dove una ad incontrar l' altra ritorna.

COROLLARIO 2°. (*Fig.* IV.)

6. Ne ſiegue altresì, che la vera diſtanza tra punti A, & B ſia non la curva AMB, ma ſolo la retta linea AB; e perciò uguali eſſere (*Fig.* VII.) deono le rette linee AB, CD condotte da punti A, & C agli equidiſtanti reſpettivi punti B, & D.

DEFINIZIONE V. (*Fig.* VIII.)

7. La ſuperficie è una lunghezza, e larghezza ſolamente. Dal fluſſo di una linea AB camminante per BC, generata concepire ſi puote la ſuperficie ABCD.

DEFINIZIONE VI. (*Fig.* VIII.)

8. Le linee AB, BC, CD, DA ſono termini eſtremi della ſuperficie ABCD.

DEFINIZIONE VII. (*Fig.* VIII.)

9. Piana ſuperficie è quella, che tutte con uniforme maniera ha le ſue rette linee locate.

Concepire ſi puote generata la ſuperficie piana dal fluſſo uniforme,

forme, e non mai pieghevole della retta linea AB ſopra la retta linea BC; ma ſe (*Fig.* IX.) tutte e due ſono curve, o veramente una retta B C camminante ſopra la curva B D A allora generata rimane la ſuperficie curva ADCE conveſſa al di fuori in H, e concava dentro in K.

DEFINIZIONE VIII. (*Fig.* X.)

10. Angolo piano BAC egli è l'inclinazione di due linee BA, CA, nel punto comune A, concorrenti.

RIFLESSIONE 1.ª (*Fig.* X.)

11. Di qualunque angolo BAC il punto A ſi nomina vertice, punta, o cima, le cui formatrici due linee BA, CA ſi appellano lati, dalla cui lunghezza la quantità dell'angolo non dipende; ma bensì maggiore diviene, o minore a miſura, che i lati girandoſi d'intorno al comun vertice A formano maggiore, o minore inclinazione, ed apertura tra loro.

RIFLESSIONE 2.ª (*Fig.* X.)

12. Vuolſi l'angolo dinominare con una lettera ſola ſcritta, o fuori, o dentro la cima, v. g. angolo A, o pure *m*, altrimenti ſi denomina con tre lettere, delle quali la ſeconda ſia quella ſegnata alla cima, e le altre due anneſſe a' lati; per indicare l'angolo A dire anche ſi dee BAC, o ſia CAB, e non altrimenti.

DEFINIZIONE IX. (*Fig.* X.)

13. Quando le linee formanti lo angolo ſono rette, rettilineo lo angolo BAC nominare ſi vuole.

COROLLARIO. (*Fig.* X.)

14. Dunque per la medeſima etimologia, ſe ſono due curve, curvilineo dire ſi dee l'angolo CEB, e ſe ſono una retta DE, altra curva EB, miſtilineo lo angolo DEB appellare conviene.

DEFINIZIONE X. (*Fig.* XI.)

15. Se la retta D A inſiſtendo nel punto A ſopra la retta BC, forma uguali tra loro i due angoli DAB, DAC, ſono, e ſi dicono

amendue retti gli angoli stessi; e la cadente DA è perpendicolare alla BC, siccome BA perpendicolare alla DA.

DEFINIZIONE XI. (*Fig.* XII.)

16. Ottuso è lo angolo BAE maggiore del retto.

DEFINIZIONE XII. (*Fig.* XII.)

17. Acuto però si nomina l'angolo CAE minore del retto.

COROLLARIO 1.° (*Fig.* XII.

18. Chiaramente si vede, che dove la perpendicolare DA, insiste su la retta BC, e dal punto B declina, inclinandosi verso C, forma col lato AB un angolo ottuso BAE, ove sia pervenuta nella posizione EA: e forma altro angolo acuto EAC coll' altra parte AC, a cui s' inclina. Imperciocchè si discosta EA dal perpendicolo AD per la quantità dello angolo DAE $= m$, dunque l'angolo ottuso EAB eccede lo stesso retto DAB $= r$ per la quantità dello angolo m. Quindi l'ottuso angolo EAB $= r + m$, prende dall' altro angolo retto DAC $= r$ lo angolo DAE $= m$, ed eccede lo acuto angolo EAC per lo valore dello stesso angolo m; epperò egli è il residuo acuto angolo EAC $= r - m$.

COROLLARIO 2.° (*Fig.* XII.)

19. Quanto più adunque il lato EA declina dal lato AB, o dal perpendicolo AD, tanto maggiore diviene lo angolo ottuso EAB, e quanto più s' inclina EA verso AC, tanto minore lo angolo EAC, e più acuto si rende.

DEFINIZIONE XIII.

20. Termine perimetro, o contorno egli è tutto ciò, che fornisce, e comprende qualunque sia cosa.

DEFINIZIONE XIV.

21. La figura chiusa viene dal suo perimetro, cioè terminata da una, o più linee, che si dimandano lati.

DEFI-

DEFINIZIONE XV. (*Fig.* XIII.)

22. Il cerchio è una piana figura compresa da una linea sola, che circonferenza si appella, o perifería, alla quale tutte le linee provenienti da un punto C, locato per entro della figura, sono uguali tralloro, e si nomano raggi, come CA, CB.

DEFINIZIONE XVI. (*Fig.* XIII.)

23. Quel punto C si appella centro del cerchio.

DEFINIZIONE XVII. (*Fig.* XIV.)

24. Diametro del cerchio egli è qualsivoglia retta linea, che passa pel centro per fino alla circonferenza da ambe le parti, e che sega in due parti uguali, o siano mezzi cerchi lo stesso cerchio. Dal diametro ACB formati sono i due mezzi cerchi ABD, ABE. Ed il diametro è formato da due raggi AC+CB in una sola retta linea AB collocati; quindi il raggio (22) semidiametro viene appellato.

DEFINIZIONE XVIII. (*Fig.* XIV.)

25. Il mezzo cerchio BAD dal diametro AB, e dalla recisa circonferenza ADB, o veramente dall'altra opposta AEB rimane compreso.

DEFINIZIONE XIX. (*Fig.* XV.)

26. Porzione, o sia segmento del cerchio è una figura FDH chiusa dalla circonferenza, e dalla retta FH, che sega, e dentro cade, e corda si noma dell' arco reciso.

RIFLESSIONE I.ª (*Fig.* XIV.)

27. Con evidenza maggiore, e più chiara idea viene descritto il cerchio, dicendo:

Se la linea, o generante raggio CA d' intorno all' immutabile punto E, si concepisce aggirato di maniera, che slontanandosi da A principio del moto, e procedendo per D, giunga in B, punto opposto al primo punto A, onde sia ACB una retta linea nominata diametro, rimane generato il mezzo cerchio ADBA. Per com-

comprendere quindi l' altro mezzo cerchio, prendasi il punto B per nuovo principio del moto del raggio CB d'intorno al medesimo punto C, e di maniera, che B descrivendo vada l' adversa curva per E, finchè ritorni in A, d'onde prima incominciò il suo moto, allora il generante raggio AC sarà tornato in se stesso, e compiuto averà l'altro mezzo cerchio ABEA sul diametro istesso ACB. Ed ecco formato lo intiero cerchio ADBE chiuso da un curvo perimetro, che ritorna in se stesso, e di tale maniera, che tutti gli punti suoi sono equidistanti dal centro C per la ragione, che la circonferenza, ed il contenuto piano sono determinati dal medesimo raggio, e misura AC in diverse parti locato: e quindi pur nasce, che ogni diametro taglia la circolare figura in due mezzi cerchj.

Che se mai il generante raggio C A (come sarebbe uno della *Fig.* XVII.) prolungato venisse quanto ne piace oltre il girevole punto A, e nella lunghezza sua altri punti si segnassero, come più aggrada, allora come prima aggirandolo attorno di se, certamente da nuovi punti nuovi cerchj, e nella stessa maniera comparirebbero generati maggiori, e maggiori, come maggiormente i punti saranno distanti dal centro comune C.

Questi cerchj sono appellati concentrici, o di un medesimo centro, i quali non mai toccare si possono, nè segare, come i punti generatori in una stessa linea segnati non mai si possono avvicinare tra loro, nè slontanarsi.

RIFLESSIONE 2.ª (*Fig.* XVI.)

28. Dove poi gli cerchj diversi hanno diversi centri A, B nella indefinita retta linea A B, certamente si possono segare in C punto distante dal centro A, quanta è la lunghezza del raggio C A, ed insieme lontano dal centro B quanto egli è lungo il raggio B C; anzi dall' opposita parte a riguardo di C si ritornano a segare per appunto in H, dove gli generanti raggj, e gli formati cerchj si erano avanzati uno nella giurisdizione dell' altro; quindi col girevole loro moto pervengono in H, dove sia A C = A H, & B C = B H, e poi sempre più slontanando si vanno tra loro.

RIFLES-

RIFLESSIONE 3.ª (*Fig.* XVII.)

29. Concepiſcaſi finalmente la generante retta linea, e raggio C A, che all' intorno del centro C rivolgendoſi, e co' ſuoi innumerabili punti A innumerabili cerchj formare dovendo (27.), ove incominciato abbia il ſuo giro, poſcia di quando in quando per uguali intervalli di deſcritta circonferenza, e per uguali declinazioni da ſe medeſimo, vuolſi dire (10. 11.) per uguali angoli A C A, laſciando vi vada il proprio veſtigio C A, C A, ec.: neceſſità vuole, che come un cerchio, così ciaſcun altro in uguali parti A B A della propria circonferenza diviſo rimanga, nel mentre, che al centro C formati vengono altrettanti angoli uguali A C A chiuſi, e ſotteſi da uguali archi A B A della circonferenza dal proprio raggio deſcritta.

Quindi è, che dove 360. ſi contano gl' impreſſi veſtigi, vuolſi dire 360. raggi per lunghezza infiniti, che formino in C, 360. angoli uguali, e che dividano la circonferenza di un cerchio in 360. archi uguali, che gradi ſono appellati, forza egli è, che ciaſcuno degli altri cerchi concentrici in ſomigliante maniera ne' propri ſuoi gradi 360. diviſo rimanga.

Divideſi ancora ogni grado in 60. minuti primi, ogni minuto primo in 60. minuti ſecondi, e ciaſcun di queſti in 60. minuti terzi, ec., i quali a comune uſo con queſte cifre vengono indicati.

$56.^{\circ}$	$27.'$	$45.''$	$30.'''$
Gradi,	Minuti primi,	Secondi,	Terzi.

COROLLARIO 1.°

30. Gli angoli adunque, e gli archi generati dal medeſimo raggio, o da uguali ſono reciprocamente gli uni miſura degli altri; uguali angoli da uguali archi, e così angoli maggiori, o minori, da maggiori, o da minori archi, ed al roveſcio, ſon miſurati.

COROLLARIO 2.° (*Fig.* XVIII.)

31. Intendendoſi omai ogni cerchio in 360°. diviſo, ne ſegue, che ſia ciaſcun mezzo cerchio $ADB = \frac{360^{\circ}}{2} = 180^{\circ}$, ed ogni quadrante

drante DA=DB=$\frac{360°}{4}$=$\frac{180°}{2}$=90° sempre simili gradi.

COROLLARIO 3.° (*Fig.* XVIII.)

32. Considerandosi il mezzo cerchio ADB diviso a mezzo nel punto D, nominato del 90.^{mo} grado, egli è ciascuno (31.) de' due quadranti DA=DB=90.°. Laonde dal centro C il condotto raggio DC formerà gli angoli DCA=DCB=90.°, uguali tra di loro, e perciò retti (*def.* 10. 15.), e perpendicolari uno all'altro i raggi CA, CD, come CB, CD.

Il perchè dello angolo retto verace misura determinata ella è un arco=90.°. E lo angolo rettilineo ACD del quadrante AD è sempre retto, e lo arco AD=90. de' medesimi gradi.

COROLLARIO 4.° (*Fig.* XVIII.)

33. Di presente nel cerchio ADBF, di cui AB sia diametro, e D punto del novantesimo grado del mezzo cerchio ADB, ove conducasi dal punto D altro diametro DCF, sarà F opposito punto del novantesimo grado nell' altro mezzo cerchio AFB, a cagione, che nel mezzo cerchio DAF (31.) l'arco AF=180°−90°=90°, e nel mezzo cerchio AFB lo arco BF=180.°−90° =90.°. Però sono quattro quadranti AD, DB, BF, FA: e gli quattro angoli ACD, DCB, BCF, FCA al centro C sono retti. Laonde allo intorno di un punto C in un piano locato, non più, non meno di quattro angoli retti si possono costruire.

COROLLARIO 5.° (*Fig.* XVIII.)

34. Nasce da ciò, che se in un cerchio, da quattro punti A, B oppositi, ed oppositi D, F de' quattro quadranti, si tirino al centro C quattro raggi, saranno due AC, BC una retta linea, e diametro AB, e gli altri due DC, FC altro diametro, e retta linea DF (24.)

COROLLARIO 6.° (*Fig.* XIX.)

35. Prendasi ora mai nel quadrante AD del mezzo cerchio ADB qualsivoglia altro punto E, donde tirato sia il raggio EC: allora nomando l' arco DE=m, sarà l' arco AE=AD−DE=

=90°

$=90^\circ - m$ minore del quadrante, e misura dello angolo acuto ACE; all'incontro l'arco $BE = BD + DE = 90^\circ + m$ misura dell' angolo ottuso BCE (30. 16. 18.), e la somma degli archi $AE + BE = 90^\circ + m + 90^\circ - m = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Perciò si avvera, che ogni mezzo cerchio comunque diviso rimanga da un punto sia D, sia E, diviso egli è sempre, o in due quadranti, o in due archi per somma uguali a due quadranti. Così degli angoli ottuso BCE, ed acuto ACE confermato rimane quanto fu detto al num. 18., e che sia espressione dello angolo ottuso $BCE = 90^\circ + m$, e dello angolo acuto $ACE = 90^\circ - m$, e sempre loro $somma = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, vuolsi dire uguali a due angoli retti.

DEFINIZIONE XX.

36. Quelle figure, che sono comprese da linee rette, rettilinee si vogliono appellare.

COROLLARIO.

37. Dunque dire si deono curvilinee quelle figure, che da linee curve sono comprese: mistilinee quelle, lo cui perimetro da linee rette, e da curve, come un mezzo cerchio, un quadrante &c. sono formate.

ANNOTAZIONE.

Per la intelligenza più chiara del medesimo Euclide giova lo annettere di presente, come che non sieno sue, le definizioni seguenti.

Definizione 1. (*Fig. 1.*)

38. Angoli contigui si dicono BCA, BCD, gli quali hanno un lato comune BC; ma gli altri due lati in una retta linea non sono.

Definizione 2. (*Fig. 2.*)

39. Angoli conseguenti si nomano BCE, ACE, i quali hanno un lato comune EC, e gli altri due lati AC, CB in una retta linea AB si ritrovano.

Definizione 3.

40. Angoli obliqui sono tutti gli conseguenti, e gli contigui altresì, ove retti non sono.

Definizione 4. (*Fig.* 2.)

41. Di due conseguenti angoli obliqui sempre uno per riguardo all' altro si denomina supplemento. Egli è adunque BCE supplemento di ACE; ed al contrario ACE supplemento di BCE a fornire quel mezzo cerchio, che dal centro C con arbitrario raggio descriver si puote, e così degli archi &c.

Da quanto si è detto (18. 35.), e dimostrato, con evidenza ne siegue, che di archi, e di angoli uguali, v. g. di $70^\circ = 70^\circ$ uguali esser devono gli supplementi $110^\circ = 110^\circ$, perchè sempre gli angoli, co' suoi supplementi formano il mezzo cerchio $= 180^\circ$.

Definizione 5. (*Fig.* XIX.)

42. Ma in riguardo allo angolo retto ACD, o sia quadrante AD qualunque de' due compresi angoli acuti dal raggio CE formati, uno si dice compimento dell'altro al quadrante; così DCE compimento di ACE, ed al roverscio ACE compimento di DCE al quadrante. Da ciò ne nasce, che (18. 35.) di uguali angoli acuti $m = m$ uguali sono i compimenti $90^\circ - m = 90^\circ - m$, oppure se fossero $30^\circ = 30^\circ$, uguali esser deono i compimenti $90^\circ - 30^\circ = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Definizione 6. (*Fig.* V.)

43. Angoli alla cima oppositi, o al vertice sono quelli, che da due rette linee AB, DC segantesi in E, formati rimangono, come AED, BEC, & AEC, BED nel vertice E sono oppositi.

Definizione 7. (*Fig.* 3.)

44. Angolo al centro egli è quello, la cui cima insiste nel centro C del cerchio ADB, e gli estremi punti de' lati suoi nella circonferenza in A, & B, come lo angolo ACB.

Defini-

Definizione 8. (*Fig.* 3.)

45. Angolo ADB alla circonferenza dicesi allora, che ha la cima D, ed anche gli estremi A, B de' suoi lati nella circonferenza del cerchio.

Definizione 9. (*Fig.* 4.)

46. Angolo di contatto egli è il mistilineo (14) AFL, o sia DFK formato da un' arco DFA, e da una retta linea KL, ove lo arco, e la retta hanno comune il punto solo F cima dell'angolo: la retta linea KL, che tocca in F lo arco DFA, e tutta cade di fuori, si appella tangente.

Definizione 10. (*Fig.* 5.)

47. E se tra due rette linee AB, CD altra retta linea EF vi cade, allora gli angoli *m*, *r*, ed *o*, *n*, che colle punte opposite parti riguardano, sono chiamati alterni.

Interni però, ed alla medesima parte si nomano gli angoli *o*, *m*, siccome *r*, *n*.

Ma esterno, ed interno, ed alla medesima parte s' appellano gli angoli F, *m*, o sia E, *r*, dalla cadente EF formati.

Definizione 11.

48. Figure equiangole si nomano quelle, che hanno gli angoli tutti uguali tra loro; ed equilatere si appellano ancora, se i loro lati sono della lunghezza istessa.

Definizione 12.

49. Regolare figura dicesi quella, che è equiangola, ed equilatera (48).

Definizione 13. (*Fig.* 6.)

50. Figure ABC, ABC scambievolmente equiangole sono quelle, che uguali hanno gli angoli a due, a due l' uno con l'altro A=A, quindi B=B, e così C=C. (*Fig.* 29.)

Ma se poscia in simil maniera hanno i lati scambievolmente uguali AB=*ab*, & AC=*ac*, come BC=*bc*, si dicono tali figure scambievolmente equilatere.

Ed avvertasi, che le figure equiangole non sono sempre equilatere, nè pure scambievolmente. Dimostrerassi bensì (e de' triangoli spezialmente) (104. 105.), che dove sono equilatere, esser deono equiangole.

Definizione 14. (*Fig.* 7.)

51. In qualunque sia figura quadrilatera, &c., la linea, che passa per gli angoli opposti, diagonale si noma, e diametro AB.

Definizione 15. (*Fig.* 8.)

52. Ove dal punto E alla retta linea CD condurre si possa la retta linea perpendicolare EF, convengono gli Geometri essere EF misura della vera distanza del punto E alla retta CD. E ciò tanto più, che al num. 142. sarà dimostrato essere la perpendicolare più corta linea tra le altre oblique rette linee, che da un punto solo ad una linea retta, si possono dimetter giammai.

Che se inoltre nel punto E applicata vi fosse altra linea AB, a cui la medesima FE anche insistesse perpendicolarmente in E, sarà, e dicasi allora la perpendicolare FE comune, e vera distanza tra le due rette AB, CD.

Definizione 16. (*Fig.* 9.)

53. Base della figura ADCE si dice il lato AE del suo perimetro, sul quale lato insistere la figura si concepisce; per questo ogni lato puot' esser preso per base.

Definizione 17. (*Fig.* 9.)

54. Angolo verticale D nella figura è quello, a cui s' oppone la base AE.

Definizione 18. (*Fig.* 9.)

55. Cima, e vertice della figura si noma il punto D tra tutti dalla base AE più lontano.

Definizione 19. (*Fig.* 9.)

56. Altezza della figura egli è il perpendicolo DF, che dal vertice D sopra la base AE cade.

DEFI-

DEFINIZIONE XXI.

57. Trilatere figure ſono pur quelle, che da tre lati vengono chiuſe.

DEFINIZIONE. XXII.

58. E ſe hanno quattro lati ſi nomano quadrilatere.

DEFINIZIONE XXIII.

59. E moltilatere, o ſia poligoni vengono dette, qualora hanno più lati.

DEFINIZIONE XXIV. (*Fig.* 10.)

60. Tralle figure trilatere, il triangolo equilatero è quello, che viene compreſo da tre lati uguali, come ACD.

DEFINIZIONE XXV. (*Fig.* 11.)

61. Iſoſcele è quel triangolo, che ha ſolamente due lati uguali AC=BC.

DEFINIZIONE XXVI. (*Fig.* 12.)

62. Scaleno è il triangolo, ove abbia tutti i tre lati ſuoi diſuguali DE>EF>DF.

DEFINIZIONE XXVII. (*Fig.* 13.)

63. In oltre tra tutti i triangoli egli è triangolo rettangolo ABC, o ſia ortogonio, quante le volte ha un angolo retto B.

ANNOTAZIONE. (*Fig.* 13.)

64. Giova non poco la coſtumanza di porre di mezzo tra le tre lettere quella, che ne dimoſtra lo angolo retto; però dicendo triangolo rettangolo ABC, toſto conoſceſi, che de' tre angoli A, B, C l'angolo retto ſia B, e così degli ottuſi triangoli ancora.

DEFINIZIONE XXVIII. (*Fig.* 14.)

65. Ottuſangolo triangolo, o ambligonio EFD è quello, che ha un angolo F ottuſo.

DEFI-

Definizione XXIX. (*Fig.* 15.)

66. Acutangolo, oppure offigonio è il triangolo ADC, che ha tutti e tre gli angoli acuti A, D, C.

Avvertimento.

67. Notisi attentamente, che per le tre definizioni espresse a' numeri 60. 61. 62. sono definiti, e contradistinti i triangoli in riguardo a' loro lati; ma nelle altre tre a' num. 63. 65. 66. vengono definiti, e diversificati rispetto agli angoli loro.

Definizione XXX. (*Fig.* 16.)

68. Quadrato tra le figure quadrilatere è quello, che è equilatero, e rettangolo.

Definizione XXXI. (*Fig.* 17.)

69. Quadrilungo, o sia rettangolo è una figura rettangola, ma non equilatera.

Definizione XXXII. (*Fig.* 18.)

70. Rombo è una figura equilatera, ma non già rettangola.

Definizione XXXIII. (*Fig.* 19.)

71. Romboide si nomina quella, che avendo gli adversi lati, ed angoli uguali, non è equilatera, nè rettangola.

Definizione XXXIV.

72. Oltre a queste le quadrilatere figure sono appellate trapezi.

Definizione XXXV. (*Fig.* VII.)

73. Parallele linee si dicono quelle, che essendo nel medesimo piano, anche da amendue le parti in infinito prolungate, non mai concorrono da parte veruna, come AB, CD.

Annotazione.

74. E' molto difficile, ed a' principianti in spezie, il formar chiara idea di questa 35.ª Definizione di Euclide, perchè non bene

bene potendosi concepir l'infinito, resta perciò confusa la mente volendo capire la sorte, che intraverrà a due linee, che prolungate si vogliono in infinito. Il perchè da buoni Geometri, come più chiare, sono ricevute le definizioni seguenti, che per altro concorrono al medesimo scopo. La prima adunque ella è (*Fig.* 8.)

75. Parallele linee si dicono quelle, che essendo nel medesimo piano hanno sempre, e conservano tuttavia la distanza medesima EF tra di loro (52.), come sono AB, CD. In altra maniera poi

76. Se nel medesimo piano si concepiscono la retta infinita CD, e ad angoli retti insistente in essa la terminata retta linea EF, la quale si intenda, che scorra per la retta CD serbando sempre gli due angoli retti in F; certamente l'altro punto E descriverà nel medesimo tempo altra retta AB, in tutti gli punti suoi equidistante da CD, conservandosi tra di loro sempre mai la distanza medesima EF. Conciossiachè anche in E con AB la fluente FE formerà sempre due angoli retti. Da tutto ciò chiaramente ne siegue.

77. Se due rette linee AB, CD in un medesimo piano condotte, sono talmente disposte, che altra retta EF cadendo tra loro per tutta loro estensione faccia due angoli retti in E colla retta AB, ed insieme due angoli retti in F coll'altra retta CD, sono le mentovate linee AB, CD equidistanti, ed in infinito condotte conservando la stessa distanza, non mai si congiungeranno, epperò son parallele.

Corollario 1.° (*Fig.* 8.)

78. E perchè le dette linee conservano sempre la direzione medesima, non fa d'uopo di molte perpendicolari cadenti EF, ma una sola basta, insieme perpendicolare a tutte due, acciocchè quelle sian parallele.

Corollario 2.° (*Fig.* 8.)

79. Dunque se nel medesimo piano vi sono due rette linee AB, CD di tale posizione, che cadendo tralloro la retta EF, la quale se sia perpendicolare in F alla CD, parimente sia perpendicolare in E coll'altra AB, sono AB, CD parallele tra loro;

perchè

perchè rette linee, ed equidistanti, e sempre la stessa cadente EF è misura determinata della comune loro distanza (52.)

COROLLARIO 3°. (*Fig.* 20.)

80. Chiaramente ne siegue eziandio, che dove tra due rette linee AG, CD cade la retta EF, la quale formi con quelle gli angoli interni m, n, cioè EFD, FEG, non amendue retti, ma uno di loro n acuto, a tale che sia loro somma minore a due retti $m+n<180.°$, dovranno le date AG, CD prolungate quanto bisogna concorrere insieme dalla banda G, alla quale formano minori a due retti gli angoli interni $m+n$. Conciossia, ove suppongasi, che la retta EF formi in E, ed F colle due rette HB, CD i due angoli interni, e dalla medesima banda FEB, EFD amendue retti, son parallele tralloro HB, CD; ma in ipotesi gli angoli FEG, EFD formati coll' altra AG sono minori a due retti; dunque supponendo lo stesso angolo EFD in amendue i casi, che niente varia, sarà
EFD+FEB=180.° cadendo EF tra le due CD, HB. Ma
EFD+FEG<180.°; dunque
EFD+FEG<EFD+FEB, e togliendo il comune EFD sia
FEG<FEB, e perciò la retta AG cade sotto la parallela HB inclinandosi verso l' altra parallela CD, la quale prolungata quanto bisogna, congiungerassi coll' inclinata AEG, e sarà anche segata nella cima dell' angolo, che faranno (10) verso D.

COROLLARIO 4°. (*Fig.* 20.)

81. Da ciò dimostrato rimane, che se dalla inclinata AG viene recisa la retta HB, anche CD parallela di HB, dee esser recisa dalla cadente AG, prolungandola quanto bisogna.

82. Anche le curve generate dal moto (*Fig.* 21.) della retta CAA, che si raggiri al punto C di maniera, che i punti A, ed A della medesima raggirandosi disegnino cerchi equidistanti, essendo sempre uguale la loro distanza AA, si nomano cerchi paralleli, vuolsi dire concentrici, perchè descritti dal medesimo centro C.

DEFI-

Definizione 20. (*Fig.* 22.)

83. Aggiungasi inoltre alle definizioni d' Euclide. Che parallelogrammi, e parallelogramme figure AD, o sia BC, vuolsi dire ABDC sono quelle, i cui oppositi lati son parallele rette linee.

Definizione 21. (*Fig.* 22.)

84. Sopraggiungasi eziandio, che ove due rette linee, una GE, l' altra HL parallele a respettivi oppositi lati (83.) del parallelogrammo BC si seghino in F, punto della diagonale AD (51.); onde il parallelogrammo BC in quattro parallelogrammi GH, HE, EL, GL diviso ne venga, gli due GH, EL, pe' quali il diametro passa, d' intorno al diametro si dimandino.

Ma gli altri due HE, GL compimenti sogliono dirsi, o supplementi.

POSTULATI, O DIMANDE.

POSTULATO I. (*Fig.* 23.)

85. Concedasi pure, che da qualsivoglia punto A ad altro punto B una retta linea AB si conduca.

POSTULATO II. (*Fig.* 23.)

86. E concedasi eziandio il prolungare direttamente la retta AB quanto bisogna in E.

POSTULATO III. (*Fig.* 28.)

87. E dato un centro A, e lo intervallo, cioè spazio, e raggio AB, descrivere nel dato piano un cerchio.

Postulato 4. (*Fig.* 24.)

88. E concedasi parimenti (oltre a quanto per Euclide dimandasi), che col compasso, o con altra più acconcia maniera si prenda la esatta misura della retta AB accessibile, e terminata.

E se bisogna applicare la misura di AB sopra la maggiore EA in AB; onde sieno AB=AB.

Postulato 5.

89. Concedasi di poter descrivere cerchi uguali ad un dato cerchio, usando il raggio di quello.

Postulato 6. (*Fig.* 25.)

90. E finalmente si ammetta, che da uguali cerchi, o dal medesimo cerchio, o da archi col medesimo raggio descritti, usando il compasso, od altro instrumento si tronchi la porzione AB=CD data porzione, sempre la minore dalla maggiore AE.

ASSIOMI.

ASSIOMA I.

91. Quelle cose, che sono uguali ad una medesima, o ad uguali, sono uguali tralloro.

ASSIOMA II.

92. Se a cose uguali si aggiungono cose uguali, uguali sono le somme.

ASSIOMA III.

93. Se da cose uguali si sottragono cose uguali, si ottengono uguali i residui.

ASSIOMA IV.

94. Se alle cose disuguali se ne aggiungono uguali, disuguali saranno le somme.

ASSIOMA V.

95. E se da disuguali, uguali cose vengono tratte, saranno disuguali i residui.

ASSIOMA VI.

96. Le cose doppie di altra cosa sono uguali tra loro.

Ed anche, ove sieno triple, quadruple, ec. di altra cosa, o di cose uguali.

ASSIO-

ASSIOMA VII.

97. E quelle, che di altra cosa sono metà, u[illegible]ono trallor[illegible]loche eziandio si avvera, ove sieno terze parti, o [illegible]arte, ec.

ASSIOMA VIII.

98. Le cose, le quali si adattano insieme, sono uguali tra loro.

ANNOTAZIONE. (*Fig.* [illegible]

99. Questo Assioma si dee bene disaminare; conciossiachè la linea retta AB, e la curva ADB, anzi le due curve dissimili ADB, AMB si adattano ne' punti estremi A, B, e pure [illegible]n sono uguali, non adattandosi nel rimanente.

100. Deesi dunque intendere lo Assioma delle simili cose, (*Fig.* VII.) e che tra loro si adattano in tutto, e per tutto, come sono le due rette linee AB, CD, le quali se il punto C col punto A, ed il punto D col punto B si adattino, tutta la retta CD colla retta AB adatterassi con esattezza; perocchè una è la diritta via cortissima (4.) tra due rette linee, e però sono uguali tra loro: e reciprocamente, se sono uguali, senza dubbio i punti estremi dell' una adattare si deono co' punti estremi dell' altra. Ed in oltre, perchè le rette linee conservano sempre le medesime direzioni, perciò, se sono parallele, o pure insieme adattate, anche prodotte quanto si vuole, quelle sempre saranno parallele, e queste saranno sempre adattate.

101. Ed avanzando il raziocinio (*Fig.* 27.) anche due angoli rettilinei CAF, DBE, ove si adattino insieme le due cime A, e B, e gli due lati AC, BD, e gli altri due AF, BE si adatteranno con esattezza le comuni aperture, o siano inclinazioni de' lati, e gli angoli sono uguali, nulla dovendosi aver di riguardo alle lunghezze de' lati, da' quali la misura degli angoli non dipende, ma dalle sole aperture: e quì anche reciprocamente, se di due angoli uguali CAF, DBE si adatti la cima B sopra la cima A, ed il lato BE caschi sul lato AF, necessariamente l'altro lato BD si adatterà coll' altro lato AC. Perocchè di uguali angoli le aperture, ed inclinazioni de' lati sono le istesse.

 102. Delle

102. Delle figure poi, che comprendono interno spazio (*Fig.* 28.) spesse volte l'Assioma non si avvera, ove si riguardino le uguali misure degli scambievoli loro lati. Imperocchè prendendo quattro (*Fig.* 26.) linee uguali tra loro formandone un quadrato perfetto, o se con altre quattro uguali linee formato ne venga un rombo, sono certamente uguali i lati delle figure, ma le figure non sono uguali. Dacchè avendo angoli diversi non si possono adattare. Al contrario poi due cerchi descritti co' raggi uguali AB, CD senza alcun (*Fig.* 28.) dubbio si adattano esattamente, e sono uguali; conciossiachè sopraponendo il raggio CD al raggio AB, uniti saranno i due centri A, C, ed uniti alla circonferenza i due punti estremi B, D; ed aggirandosi il raggio CD al proprio centro d'intorno, sarà dallo girevole punto D descritta la medesima prima circonferenza già segnata dal punto B, o al più saranno sempre descritti due cerchi adattati tra loro, ed uguali.

103. Quindi è, che recidendone (*Fig.* 28.) uno colla retta EF, lo stesso taglio farassi nell'altro, ed uguali saranno i corrispondenti archi, uguali le corde EF, che sottendono archi uguali, e de' cerchi medesimi uguali eziandio i segmenti: e se inoltre verranno segnati in un cerchio i due raggi AE, AF, sempre le medesime incisioni saranno fatte nell'altro, ed uguali saranno gli angoli EAF, ECF a centri, sottesi dagli archi uguali EF, EF, ed uguali ancora i rimanenti archi, come pure uguali i settori.

104. Dove poi il perimetro (*Fig.* 29.) della Figura viene composto di sole tre linee AB, AC, BC, senza alcun dubbio da quelle un solo, ed unico, e determinato triangolo ABC costruire si puote, conciossiachè supponendo essere formato il triangolo ABC dalle tre mentovate linee già per lunghezza determinate, necessariamente lo angolo A compreso da lati AB, AC, terminati da punti B, e C variar non si puote, perocchè l'apertura dell'angolo istesso, cioè l'inclinazione de' lati suoi viene chiusa, ed immutabilmente stabilita, e determinata dall'opposto lato BC, la cui lunghezza è parimenti determinata. Con somigliante maniera variar non si puote lo angolo B: Dacchè la inclinazione de' lati, che lo formano, viene determinata dalla loro lunghezza BA, BC, e chiusa dalla lunghezza del lato AC, che chiude l'angolo istesso.

Final-

Finalmente rimane invariabile il terzo angolo C, la cui apertura rimane ſtabilita dalle lunghezze AC, BC de' lati, che lo formano, ed inſieme dalla lunghezza del lato AB, dal quale è ſotteſo; ed è ciò tanto vero, che prendendo altre tre linee rette *ab*, *ac*, *bc* reſpettivamente uguali alle prime una ad una. AB = *ab*, ed AC = *ac*, ſiccome BC = *bc*, non ſi puote formare da quelle altro triangolo diſuguale, e diverſo, ma o rifare il primo, o coſtruirne altro in tutto, e per tutto adattato col primo; concioſſiachè ſoprapponendo le uguali linee alle uguali, ſaranno (100.) adattate le due AB, *ab*, ed adattate le altre due AC, *ac* anche uguali tra loro: Siccome adattate le due uguali BC, *bc*, e gli punti eſtremi ſaranno adattati tra loro *a* con A, ſiccome *b* con B, e finalmente *c* con C, e tutto il triangolo *abc* adattato eſattiſſimamente col triangolo ABC, e di tale maniera, che in tutto, e per tutto ſono uguali, uguali avendo i lati, ed uguali gli angoli corriſpondenti tra loro adattati, e che ſotteſi vengono da' lati uguali: reciprocamente quegli angoli A, ed *a* ſono adattati, ed uguali, a' quali ſi oppongono lati uguali BC, *bc*, e così degli altri angoli adattati, ed uguali B, e *b*, a' quali ſi oppongono gli adattati uguali lati AC, *ac*, e finalmente agli uguali adattati angoli C, *c* oppoſti ſono gli uguali lati BA, *ba*.

Nè vale a dire, che adattando la linea *bc* ſopra la linea BC ſi può il punto *c* ſoprapporre al punto B, & *b* al punto C, ed allora il punto *a* non più ſarebbe adattato col punto A, nè i lati co' lati, perocchè con tale giacitura cambiata, non ſi forma altro diverſo triangolo, ma il medeſimo roveſciato.

Da verità sì patente ben dimoſtrato ne naſce il generale Teorema.

Teorema.

105. I triangoli ſcambievolmente equilateri ſono ſcambievolmente equiangoli, ed uguali hanno quegli angoli, che ſotteſi vengono da lati uguali, e reciprocamente uguali que' lati, che ſi oppongono agli angoli uguali.

Assioma IX.

106. Il tutto è maggiore della ſua parte; ma peraltro egli è uguale a tutte le parti ſue preſe inſieme.

Assioma

ASSIOMA X.

107. Tutti gli angoli retti ſono uguali tralloro (32.)

ASSIOMA XI.

108. Se tra due rette linee cadendone altra, forma due angoli interni dalla medeſima banda minori a due retti, da quella banda concorreranno le due rette linee in infinito prolungate. Egli è un Teorema queſto da dimoſtrarſi più toſto, che un aſſioma; s'oſſervi pertanto la dimoſtrazione data intorno a ciò nel num. 80.

ASSIOMA XII.

109. Due rette linee non comprendono ſpazio.

ASSIOMA XIII.

110. Soſtituire ſi poſſono uguali coſe ad uguali.

PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA I.

111. Sopra la data retta linea terminata AB, un triangolo equilatero ABC, coſtruire.

RISOLUZIONE. (*Fig.* 30.)

Dal centro A collo ſpazio, cioè raggio, o ſia apertura di compaſſo, ad eſatta miſura della data AB (*Poſt.* 4. 88.) ſi deſcriva il cerchio BDC (*Poſt.* 3. 87.), e con ſimil maniera dal centro B col raggio medeſimo = AB ſi formi altro cerchio AEC, dal quale nel punto C il primo cerchio ſegato rimane. Dal medeſimo punto C a' due punti A, B (*Poſt.* 1. 85.) ſi conducano gli due lati, e rette linee CA, CB, da quelli col terzo lato AB formato ne viene il triangolo equilatero ABC.

DIMOSTRAZIONE I.

Perchè il punto A ſi è preſo per centro del cerchio BDC ſono (*Def.* 15. 22.) uguali tra loro i due raggi AC, AB. Similmente eſſendo ſtato il punto B preſo per centro del cerchio AEC,

collo

collo ſteſſo raziocinio dimoſtraſi (22.), che al raggio AB anche ſia uguale il raggio CB non meno, che il raggio CA, ſono adunque eziandio uguali tralloro CA, CB (*Aſſ.* 1. 91.), coſtruito pertanto ſi è il triangolo ABC, e dimoſtrato inſieme eſſere equilatero.

ANNOTAZIONE.

Queſta maniera di dimoſtrare è la comune adattata da Comentatori al teſto di Euclide, e così procedono gli ſuſſeguenti. Sembra però, che uſare ſi poſſa queſt' altro metodo certamente più breve, e forſi più chiaro.

DIMOSTRAZIONE 2.ª

AC = AB (*Def.* 15. *num.* 22.)
BC = AB (*Def.* 15. *num.* 22.); Dunque
AC = AB = BC (*Aſſ.* 1. 91.); adunque il coſtruito triangolo ABC gli è equilatero (*Def.* 24. 60.)

Quale dimoſtrazione, ſiccome riguardando ſi ſcorge, più chiara eſſendo, e più breve, e come ſuol dirſi, ſaltante agli occhi, però ſovente di queſto metodo, ove più in acconcio ritorna, ne farem' uſo.

COROLLARIO. (*Fig.* 31.)

112. Colla riſoluzione medeſima del precedente Problema ſi coſtruiſce un triangolo iſoſcele ABC, prendendo un raggio maggiore, o minore della data retta linea AB, e da punti A, B come centri col preſo raggio formando una ſezione di archi in C, dacchè conducendo le rette linee CA, CB, ſarà formato il triangolo iſoſcele ABC, di cui è baſe la data AB, e lati ſono CA, CB certamente uguali tra loro, perchè raggi di cerchi uguali (*Aſſ.* 1. 91.) perchè uguali amendue CA, CB al preſo raggio comune.

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA II. (*Fig.* 32.)

113. Ad un dato punto A adattare la linea AD alla data BC uguale.

RISO-

RISOLUZIONE.

Col raggio uguale alla data BC (*Post.* 4. 88.), e dal centro A si descriva un cerchio DE (87.), in cui, come piace, si tiri un raggio AD, sarà AD = BC, ed al punto A adattata.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè del cerchio DE il preso raggio è uguale alla data BC, e tutti del medesimo cerchio gli raggi sono uguali (*Def.* 15. 22.), sarà del punto, e centro A qualunque raggio AD = BC retta linea data, che era, ec.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA III. (*Fig.* 33.)

114. Essendo date due rette linee AB > CD, recidere da AB la porzione AE = CD data.

RISOLUZIONE.

Si prenda per centro il punto A, e col raggio = CD linea data, descrivasi un cerchio EF, che seghi la maggiore AB nel punto E, sarà la recisa AE = CD.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè dal cerchio EF si è preso il raggio = CD linea data, ed al raggio medesimo è uguale la porzione AE (*Def.* 15. 22.) sarà AE = CD. (*Ass.* 1. 91.)

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA I. (*Fig.* 34.)

115. Se due triangoli AFC, BED hanno due lati scambievolmente uguali, cioè AF = BE, & AC = BD, ed hanno eziandio uguali i contenuti angoli A, e B, uguali averanno le basi CF, DE, e saranno i rimanenti angoli C = D, & F = E, sottesi da lati uguali, e tutto il triangolo sarà uguale a tutto il triangolo:

DIMO-

DIMOSTRAZIONE.

Dacchè per ipotesi i due angoli A, e B sono uguali, ed uguali i due lati AF, BE, ed anche uguali gli altri due lati AC, BD, ove la cima dello angolo B si soprapponga alla cima dello angolo A, ed il lato BE al suo uguale lato AF, certamente il lato BD sarà soprapposto al suo uguale lato AC (101.), e congiunti saranno (100.) i due punti E, F, e gli due punti D, C, perchè termini di linee uguali, di cui gli primi punti già sono adattati. Quindi è, che i due uniti punti F, E sono equidistanti (6.) a due uniti punti C, D: Epperò uguali saranno le condotte linee CF, DE, ed i triangoli AFC, BED sono scambievolmente equilateri (104. 105.), ed equiangoli, ed in tutto uguali tra loro, ed uguali hanno quegli angoli, che si oppongono a lati uguali, che era, ec.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA 2.° (*Fig.* 35.)

116. Ne' triangoli isosceli ABC gli angoli m, ed n sopra la base BC sono uguali, e prolungando gli uguali lati AB in G, & AC in E; anche sotto la base uguali formati rimangono gli angoli CBG, BCE.

DIMOSTRAZIONE.

Da punti B, C estremi della base, come centri, e con arbitrario raggio $BF > \frac{BC}{2}$ si faccia una sezione di archi in F, a cui si conducano BF, CF, ed AF; e perchè i due triangoli BAF, CAF scambievolmente sono equilateri per la comune AF, e per $AB = AC$ (*Def.* 25. 61.), ed essendo $BF = CF$ per costruzione, sono gli angoli $o = r$ nel vertice A, perchè (105.) opposti a lati uguali BF, CF. Ma ne' triangoli ADB, ADC sono gli uguali angoli o, r compresi da lati uguali, perchè si suppongono $AB = AC$, e AD è comune, saranno (4. 115.) le basi $DB = DC$, e però scambievolmente equilateri gli due triangoli istessi ADB, ADC, ed anche (105.) equiangoli; laonde su le basi BD, DC ſono gli angoli $m = n$ oppoſti al comune lato AD, cioè a due lati uguali AB, AC, anzi ADB = ADC ſono retti, perchè uguali, e formati dalla retta AD cadente ſu la retta BC (*Def.* 10. 15.). Finalmente eſſendo uguali ſopra la baſe BC gli angoli m, n, come ſi è dimoſtrato, uguali eſſer debbono i loro ſupplementi CBG, BCE (41.).

Corollario.

117. Dalla uſata dimoſtrazione rimane eziandio evidente, che ne' triangoli iſoſceli, ſe dal punto D, che divide a mezzo la baſe BC, ſi erge un perpendicolo, quello vaſſene a ferire direttamente la cima del verticale angolo A; ed intanto divide lo ſteſſo triangolo ABC iſoſcele in due triangoli ADB, ADC rettangoli in D ſcambievolmente equilateri, ed equiangoli, ed in tutto uguali tra loro.

Inoltre ſe dal verticale angolo A ſi dimette un perpendicolo AD ſopra la baſe BC, tanto queſta, che lo angolo A rimangono diviſi a mezzo dal perpendicolo iſteſſo.

Finalmente ſe la baſe BC ſi divide a mezzo in D, e quindi ſi conduce la linea DA all' angolo A, queſto è diviſo a mezzo, e la condotta linea AD è perpendicolare alla baſe.

Proposizione VI.

Teorema III. (*Fig.* 36.)

118. Se del triangolo BAC uguali ſono alla baſe BC gli angoli CBA, BCA : $m = n$: uguali ſaranno i lati CA, BA oppoſti agli angoli uguali $m = n$.

Dimostrazione.

Dal centro B, punto eſtremo della baſe BC collo ſpazio BA (*Poſt.* 3. 87.) deſcrivaſi un arco, che in F ſegato venga da altro arco formato dal centro C col raggio CA, e ſi conducano le rette BF, CF; ſono adunque per la coſtruzione CA = CF, e BA = = BF (*Def.* 15. 22.), e per lo comune terzo lato BC, ſono (50.) ſcambievolmente equilateri i due triangoli BAC, BFC; dunque (105.) da lati uguali BA, BF, uguali ſono i ſotteſi angoli.

BCA

BCA=BCF, cioè $n=r$; ma per ipoteſi ſono gli angoli BCA=CBA, cioè $n=m$, dunque (*Aſſ.* 1. 91.) ſono gli angoli CBA=BCF, cioè $m=r$, ed uguali (104. 105.) gli oppoſti lati CA=BF; ma per coſtruzione (*Def.* 15. 22.) ſono i lati BA=BF, dunque (*Aſſ.* 1. 91.)
CA=BA lati oppoſti agli uguali angoli m, n, che era ec.

COROLLARIO. (*Fig.* 37.)

119. Se adunque ſopra la retta linea, o ſia baſe BC diviſa a mezzo in D ſi alza il perpendicolo DA, e negli eſtremi punti B, e C vi ſono, o ſi formano gli due uguali angoli acuti B, e C, ed i lati formanti gli angoli ſteſſi ſi prolungano quanto biſogna, quelli deono compiere un triangolo iſoſcele ABC, ed unire ſi deono nel punto A, comune altresì al perpendicolo DA, onde ſi avveri (117.), che il perpendicolo innalzato dalla metà della baſe vaſſene a ferire direttamente la cima del verticale angolo A, e ſi avveri eziandio, che dal medeſimo perpendicolo AD il triangolo iſoſcele ABC venga diviſo in due uguali triangoli rettangoli ADB, ADC equilateri ſcambievolmente, ed equiangoli.

Ed acciocchè di queſto a noi utiliſſimo Corollario ogni menoma dubbiezza ſi tolga, e vie più la verità chiara ſi vegga, ſuppongaſi pure, che la cima dello angolo C ſopra la cima dell' uguale angolo B, ed il lato CD ſopra l' uguale lato BD ſian collocati, certamente il punto D ſarà in D (100.), e l'altro lato dell' angolo C adattato ſarà coll' altro lato dell' uguale angolo B (101.): Ma due rette linee, che da principio ſono inſieme adattate, anche ſe ſi prolungano quanto ſi vuole (100.), ſono ſempre adattate; dunque nel medeſimo punto A il perpendicolo DA viene reciſo dalle due adattate linee rette BA, CA, lati degli uguali angoli B, e C; epperò amendue chiuſi dalla ſteſſa lunghezza del perpendicolo AD. Però ſono i due adattati triangoli ADB, ADC rettangoli in D equilateri, equiangoli, ed uguali.

Si raggiri di preſente il triangolo ADC d' intorno al perpendicolo AD, per fino che caggia nella parte oppoſta del medeſimo piano, certamente per gli due angoli retti in D ſarà da due lati BD, DC formata una ſola retta linea BC, diametro (24.) del

del mezzo cerchio, che descriver si vuole dal centro D col raggio DC uguale DB; ed ecco BC divenuta base del triangolo isoscele ABC, ricomposto da mentovati due rettangoli, triangoli ADB, ADC uguali, equilateri, ed equiangoli; concioffiachè dal mezzo D della base BC fu alzato il perpendicolo DA, e ne' punti estremi della medesima base equidistanti dal perpendicolo D, costituiti furono due angoli uguali B, e C.

Corollario.

120. Ed il triangolo equilatero avendo per ogni verso due lati uguali, e due angoli uguali sul terzo lato, ne siegue, che ciascun triangolo equilatero esser dee equiangolo (116.), ed ogni equiangolo triangolo esser vuole equilatero (118.), anzi di ogni triangolo equilatero, o sia equiangolo, tutte si avverano dello isoscele (117.) le proprietà.

Proposizione VII.

Teorema IV. (*Fig.* 38.)

121. Sopra gli estremi punti A, B della retta linea AB costituir non si possono alla medesima parte due rette AC, BE in altro punto unite, che in D, ove sono congiunte due altre rette AD, BD scambievolmente uguali alle prime, cioè AD=AC, e BD=BE.

Dimostrazione.

Dal centro A spazio AD formisi l'arco di cerchio DC, siccome dal centro B spazio BD (*Post.* 3. 87.) si formi altro arco DE, sarà da questo segato il primo arco CD nell'unico punto D (5.), che di comune hanno i due archi da quella banda, e dove si congiungono le due prime rette AD, BD. Dunque le loro uguali AC, BE non mai unire potranno gli estremi lor punti C, E, se non che in D, ove si segano gli archi da loro descritti (102.), perchè raggi uguali a' respettivi raggi.

PRO-

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA V. (*Fig.* 39.)

122. Se due triangoli ABC, ABC hanno due lati AB, AB scambievolmente uguali a due lati AD, AD, ed hanno eziandio anche uguali le basi BC=BC, averanno altresì uguali gli angoli verticali in A.

DIMOSTRAZIONE.

Questa proposizione con maggiore universalità si contiene espressa nel numero 105., e dimostrata coll' Ass. 8., e suoi Corollari per tutto il numero 104. Quindi è, che in vece di questa Proposizione presente sarà in avvenire citato il Teorema, e Corollario nel num. 105.

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA IV. (*Fig.* 40.)

123. Dividere a mezzo un dato rettilineo angolo E.

RISOLUZIONE.

Dal vertice E, come centro si descriva con opportuno raggio l' arco AB terminato a' lati dell' angolo, e da centri A, B, col medesimo raggio si faccia una sezione di archi in G, e la retta EG dividerà in due parti uguali l' angolo E.

DIMOSTRAZIONE.

Sono scambievolmente equilateri i due triangoli GEA, GEB (*Def.* 15. 22.), dunque sono (105.) gli angoli GEA=GEB, perchè opposti a lati uguali GA, GB, che era, ec.

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA V. (*Fig.* 41.)

124. Dividere a mezzo in C la data retta linea, e terminata AB.

RISO-

RISOLUZIONE.

Da centri A, B, estremi punti della data linea, si faccia col medesimo raggio una sezione di archi in E, e con altro arbitrario raggio si faccia da centri medesimi, a qual banda piace, altra sezione di archi in G, e si tiri la retta GE, per fino che seghi la data AB in C, che ivi sarà anche a mezzo recisa.

DIMOSTRAZIONE 1.ª

Sieno per prima soluzione le due sezioni E, G in diverse bande, e si conducano le due rette AE=BE raggi uguali, come parimente AG=BG. Sono per lo comune lato EG scambievolmente equilateri i due triangoli AGE, BGE; dunque (105.) uguali sono gli angoli GEA, GEB, i quali essendo compresi da lati AE, CE, e BE, CE scambievolmente uguali ne' triangoli ACE, BCE, uguali sono le basi CA, CB (4. 115.). Che era, ec.

DIMOSTRAZIONE 2.ª (*Fig.* 42.)

Per seconda soluzione sieno fatte le sezioni E, G nella medesima plaga, ed eseguiscasi quanto sopra; e perchè i due triangoli GEA, GEB, oltre il lato comune GE, hanno uguali i lati AG=BG, ed AE=BE sono scambievoli (105.), ed uguali gli angoli BGE, AGE sottesi da lati uguali AE, BE, rimane adunque nel triangolo ABG isoscele il verticale angolo G diviso a mezzo della cadente GC, la quale è un perpendicolo (117.), che divide a mezzo la base AB nel punto C. Che era, ec.

COROLLARIO. (*Fig.* 43.)

125. Se adunque sulla medesima base AB sono costituiti alla banda istessa infiniti triangoli isosceli AEB, AGB, AFB, ec., e dal punto C, che divide a mezzo la base AB si erge la perpendicolare infinita CG, questa passa per tutte le cime E, G, F, ec. degli angoli verticali de' triangoli stessi, conciossiachè, come si è dimostrato nella seconda dimostrazione superiore, che il perpendicolo CG sega a mezzo i due angoli G, ed E de' due triangoli AEB, AGB. Così dimostrerassi degli altri due angoli F, G, e così in infinito, essendo sempre i due triangoli FGA, FGB scambie-

ſcambievolmente equilateri, come lo ſono i due FEA, FEB.

Quindi ne ſiegue eziandio, che da un angolo verticale G de' mentovati triangoli dimettendo alla baſe AB il perpendicolo infinito GC, queſto, come ſega a mezzo l'angolo G (117.), così ſega a mezzo tutti i ſuperiori angoli F, e tutti gli angoli E inferiori.

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA VI. (*Fig.* 44.)

126. Da un dato punto C nella data linea AB alzare la perpendicolare CE.

RISOLUZIONE.

Dal punto C, sì da una, che da altra parte ſi prendano nella retta AB due uguali porzioni CD, CF, e da punti D, F, come centri, e con arbitrario raggio ſi faccia una ſezione di archi in E, ſi conduca CE, che ſarà la perpendicolare deſiderata.

DIMOSTRAZIONE.

Per la fatta coſtruzione, ove tirati vengano i due lati DE, FE, ſaranno uguali, come uguali ſono le preſe porzioni CD, CF; il perchè ſtante il comun lato CE ſono ſcambievolmente equilateri i due triangoli ECD, ECF (105.), e dagli uguali lati ED, EF ſotteſi vengono angoli uguali ECD, ECF, formati nel punto C, però retti (*Def.* 10. 15.), e la cadente EC perpendicolare in C alla retta AB, a cui inſiſte. Che era, ec.

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA VII. (*Fig.* 45.)

127. Da un dato punto E fuori della linea AB dimettere alla medeſima il perpendicolo EC.

RISOLUZIONE.

Dal centro E, e con raggio opportuno un arco deſcrivaſi, da cui ne' punti D, F la data retta AB ſegata ne venga; quindi

da

da centri D; F con arbitrario raggio la sezione di archi si formi nel punto G; per lo qual punto, e per E si conduca la retta EG, che seghi in C la data retta AB, e sarà CE la desiderata perpendicolare.

DIMOSTRAZIONE.

Ove tirati vengono i due lati DE, FE, essendo stati presi uguali tra loro, ed uguali gli altri due DG, FG, ne siegue essere scambievoli i due triangoli DEG, FEG nel comune lato EG, ed uguali (105.) gli angoli DEG, FEG, i quali ne' due triangoli ECD, ECF essendo compresi da uguali lati, e dal comune CE (4. 115.) vogliono avere uguali le basi, ed uguali gli angoli formati in C dalla cadente EC sopra la retta DF; e però (*Def.* 10. 15.) retti sono gli angoli uguali ACE, BCE, ed EC perpendicolare alla retta linea AB, che era, ec.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA VI. (*Fig.* 46.)

128. La retta CD, o sia CE, che nel punto C insiste alla retta AB, dee formare con essa (39.) i due angoli conseguenti, o retti, o uguali a due retti.

Questo Teorema fu già dimostrato chiarissimamente nel Corollario 6.° della Definizione del cerchio al numero 35., il perchè solamente giova lo esporre il Corollario seguente.

COROLLARIO. (*Fig.* 46.)

129. Dunque nel punto C sopra la retta AB cadendo quante si voglia rette linee DC, EC, FC formeranno tanti angoli DCA, ec., de' quali la somma è misurata dal mezzo cerchio, e però sempre uguale a due angoli retti. Anzi le medesime linee prolungate oltre il punto C formeranno la somma di due altri angoli retti nell' opposita banda di AB; e però dato un punto C nel piano, se in C concorrono linee innumerabili tirate per lo medesimo piano, quelle tutte formeranno innumerabili angoli, de' quali la somma è sempre uguale a quattro angoli retti, vuolsi dire, all' intero cerchio, che descrivesi dal centro C.

PRO-

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA VII. (*Fig.* 46.)

130. Se al punto C di una retta linea EC vi concorrono da bande diverſe altre due rette linee AC, BC, le quali colla data linea retta EC formino due angoli ECB, ECA, o retti, o uguali a due retti, ſaranno le linee AC, BC una ſola retta linea continuata.

DIMOSTRAZIONE.

Primieramente ſuppongaſi, che la retta linea ſia EC, e formi due angoli retti ACE, + BCE = 180°; perciò dal punto C, in cui tutte e tre coſpirano le rette linee, come centro, e con opportuno raggio AC ſi deſcriva lo arco AEB, terminato dalle due rette AC, BC. Ma i due miſurati angoli ECB, ECA ſono retti. Dunque (32.) gli due archi AE, BE ſono quadranti, e tutto l'arco AEB di gradi 180 è un mezzo cerchio (31.), e le due linee AC, BC ſono un diametro AB (24.)

Inoltre la data retta linea ſia CD, o CF, e dal centro C deſcritto l'arco ADB, come ſopra; dacchè de' due angoli (per ipoteſi) la ſomma è uguale a due retti ACD+BCD=180°, eziandio eſſer deono le loro miſure; vuolſi dire la ſomma degli archi AD+DB=180° (35), egli è adunque un mezzo cerchio lo arco ADB, e le due coſpiranti linee un diametro ſolo. Che era ec. (34).

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA VIII. (*Fig.* 47.)

131. Se due rette linee AB, CD ſi ſegano in E uguali formano al vertice E (43.) gli angoli oppoſti.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè ſu la retta CD cade la retta AE, ne avviene, che gli angoli AEC+AED=180° (13. 128), e cadendo DE ſopra AB, ſarà ſimilmente DEB+AED=180°; dunque (*Aſs.* 1. 91.)

e AEC

AEC+AED=DEB+AED , e sottraendo AED comune, resta (*Ass.* 3. 93.) AEC=DEB angoli alla cima.

Inoltre dal mezzo cerchio ADB , cioè da 180° sottraendo DEB, e così dall' altra banda ACB sottraendo AEC: dacchè AEC=DEB, sono parimente uguali i supplementi residui (41.) AED=CEB. che era ec.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA IX. (*Fig.* 48.)

132. Di qualunque triangolo ABC prolungato un lato BC in D, sarà lo esteriore angolo ACD maggiore di ciascuno dei due interni, ed opposti angoli ABC, o sia BAC.

DIMOSTRAZIONE.

Seghisi a mezzo il lato AC nel punto E, per lo quale da B venga la retta BE prolungata in F, che sia EF=EB, e si conduca FC.

E perchè AE=EC, siccome EB=EF, ed uguali i contenuti angoli nel vertice E (15. 131.), saranno ne' triangoli AEB, CEF uguali le basi (4. 115.) AB=CF, ed i medesimi triangoli hanno scambievoli i lati, e gli angoli BAE=FCE all' incontro de' lati BE=FE; ma lo angolo DCA>FCE, il tutto dalla sua parte (*Ass.* 9. 106.). Dunque lo esterno DCA>BAC==FCE, e così dimostrare si puote d' ogni altro. Che era, ec.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA X. (*Fig.* 49.)

133. In qualunque triangolo ACB prendendo due angoli a piacere, sarà loro somma minore di due angoli retti.

DIMOSTRAZIONE.

Si suppongano presi i due angoli A, B, laonde il lato AB, che compie i due angoli presi A, B, sia prolungato per A in D. Cade pertanto sopra la retta BD la linea AC nel punto A, e per questo sono formati in A i due angoli CAD+CAB=180°.

(13.

(13. 128.); ma (16. 132.) lo angolo $B<CAD$; dunque aggiugnendo il comune CAB, sarà $B+CAB<CAD+CAB=180°$; però $B+CAB<180°$, che, ec.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA XI. (*Fig.* 50.)

134. In ogni triangolo AEC il maggior lato AC è sottoposto al maggior angolo AEC.

DIMOSTRAZIONE.

Dacchè per ipotesi $AC>AE$, si recida dal lato AC (3. 114.) la porzione $AD=AE$, e si conduca ED, che nel triangolo EDC egli è lo interno, ed opposto angolo C minore (16. 132.) dello esterno $EDA=DEA$ nello isoscele AED, sopra la base ED. Dunque lo angolo DEA è maggiore di C, ed aggiunto l'angolo DEC, sarà tutto lo angolo AEC molto maggiore dell'angolo C. Che era, ec.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA XII. (*Fig.* 51.)

135. Il maggior angolo B del triangolo ABC dal maggior lato AC viene sotteso.

DIMOSTRAZIONE.

Dal centro B con opportuno raggio BF si descriva l'arco FD, che seghi in F, e D gli lati AB, BC, sarà lo arco FD misura (30.) del maggior angolo ABC. Dal centro A col medesimo raggio BF si descriva l'arco GH, che in G, ed H seghi gli lati AB, AC del minor angolo BAC, la cui misura GH certamente è minore di FD, misura dell'angolo maggiore. Che però da F in E, dal maggior arco FD si recida $FE=GH$: senza alcun dubbio il punto E sarà tra F, e D, e non oltre; e però da B per E si conduca la retta BE fino, che seghi in K lo adverso lato AC. Ma allo angolo $KBA=A$ si oppone AK, ed all'angolo ABC si oppone il lato $AK+KC$, vuolsi dire AC maggiore di

AK. Dunque il maggiore angolo ABC dal maggior lato AC viene sotteso, ed il minor dal minore, che, ec.

Dimostrazione II.

Sono degli angoli ABC>BAC, ma non può essere AC=BC, altrimenti ABC=BAC (5. 116.), nè tanpoco AC<BC, perchè ABC<BAC (18. 134.), contro l'ipotesi. Dunque il maggior angolo ABC si oppone al maggior lato AC, ed il minor angolo BAC dal minor lato BC viene sotteso. Che era, ec.

Proposizione XX.

Teorema XIII. (*Fig.* 52.)

136. In ogni triangolo ABC due lati AB+AC comunque sian presi, sono sempre maggiori del rimanente BC.

Dimostrazione.

Si prolunghi il lato BA in D, che sia AD=AC, e si tiri CD, saranno nello isoscele CAD sopra la base CD gli angoli $r=n$; laonde tutto lo angolo $C=m+n$ è maggiore del solo angolo $r=n$ (*Ass.* 9. 106.), il perchè nel triangolo BCD (19. 135.) egli è il lato BD>BC: ma per costruzione BD=BA+AC, perciò BA+AC>BC. Che era, ec.

Proposizione XXI.

Teorema XIV. (*Fig.* 53.)

137. Se dagli estremi punti A, C del lato AC a qualunque sia altro punto D locato dentro il triangolo ABC, si conducano due rette linee AD, CD, queste insieme saranno minori de' rimanenti lati AB, BC del triangolo istesso: comprenderanno però un angolo ADC, vuolsi dire x maggiore dell'angolo B.

Dimostrazione.

Ove la retta AD persino, che seghi l'opposto lato BC in E prolungata ne venga, sarà (20. 136.) nel triangolo ABE, AB+ +BE>AE; dunque aggiugnendo la comune EC, risulta AB+ +BE

$+BE+EC=AB+BC>AE+EC$; ma nel triangolo CDE (20. 136.) $DE+EC>DC$, aggiugnendo il lato comune AD, si ottiene $AD+DE+EC>CD+AD$; dunque essendo $AB+$ $+BC>AE+EC$, cioè di $AD+DE+EC$, saranno molto maggiori di $CD+AD$.

In oltre perchè (16. 132.) lo esterno angolo $x>r>y$, sarà $x>y$. Che era, ec.

PROPOSIZIONE XXII.

PROBLEMA VIII. (*Fig.* 54.)

138. Di tre date rette linee AB, BC, CA costruire un triangolo ABC, purchè due di quelle siano della rimanente sempre maggiori.

RISOLUZIONE.

Si prendano per centri gli estremi punti A, B della data AB, o di altra sua uguale, e col raggio AC dal centro A, e da B col raggio BC, si formi una sezione di archi in C; d' onde a' presi centri A, B le rette linee CA, CB sieno condotte, e formato rimane il triangolo ABC, che si brama.

DIMOSTRAZIONE.

Dalla fatta costruzione risulta essere $AB=AB$, il raggio $AC=$ $=AC$, ed il raggio $BC=BC$ linee date; laonde il triangolo ABC formato rimane da tre linee uguali alle tre date AB, BC, CA. Che era, ec.

PROPOSIZIONE XXIII.

PROBLEMA IX. (*Fig.* 55.)

139. Al punto B di una data retta linea RD formare lo angolo $DBO=A$ angolo dato.

RISOLUZIONE, e DIMOSTRAZIONE.

Dal centro A, cima dello angolo dato, con opportuno raggio AD un arco DC si descriva. Quindi col raggio medesimo $AD=BD$ dal centro B si formi altro arco DE, dal quale, essendo maggiore,

si tronsi tronchi la porzione DO=DC minore (*Post.* 6. 90.), e si conduca la retta BO, saranno uguali gli angoli DBO, ed A, perchè misurati dagli archi DO=DC col medesimo raggio descritti. (30.)

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA XV. (*Fig.* 56.)

140. Se due triangoli ABC, ABD hanno scambievolmente due lati uguali AB=AB, BC=BD, ma l'angolo ABD è maggiore dell'angolo ABC, che da lati uguali sono compresi, sarà la base AD>AC base.

DIMOSTRAZIONE.

Se per la precedente Proposizione (23. 139.) sopra il lato AB del triangolo ABD si forma al punto B lo angolo ABC=ABC, vuolsi dire, se centro B col raggio BC=BD si forma un arco di cerchio ECD, il quale si seghi in C con altro arco descritto dal centro A col raggio AC, e si conducano le rette linee AC, BC, sarà formato (22. 138.) altro triangolo ABC in tutto uguale al dato ABC; si tiri adesso CD, e sarà lo angolo intero ACD>>BCD sua parte (*Ass.* 9. 106.), ma (5. 116.) nel triangolo isoscele BCD sopra la base CD uguali sono gli angoli BCD, BDC, che è molto maggiore della sua parte ADC; laonde nel triangolo DAC al maggior angolo ACD è opposto il maggior lato AD (19. 135.), ed al minor angolo ADC il minor lato AC. Ma AD maggiore è base del triangolo ABD opposta al maggior angolo ABD, e da altra parte AC minore è base del triangolo ABC supposta al minor angolo ABC. Rimane dunque evidente, che se due triangoli ABC, ABD, ec.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA XVI. (*Fig.* 57.)

141. Se due triangoli ABD, ABC hanno due lati AB, BD scambievolmente uguali a due lati AB, BC, maggiore però la base AD della base AC, saranno da lati uguali, contenuti disuguali

guali angoli ABD > ABC, come ſono ſotteſi da diſuguali baſi AD > AC.

DIMOSTRAZIONE.

Formando la precedente coſtruzione, ſi prolunghi il lato BA, finchè ſeghi in F l' arco DF deſcritto dal centro B col raggio BD = BC = BF; e perchè il maggior arco DF è miſura dello angolo ABD, ed il minor arco CF è miſura dello angolo ABC, (30.) eſſer dee ABD > ABC angoli, che, ec.

LEMMA I.

Teorema. (*Fig.* 58.)

142. Tra tutte le rette linee, o ſien raggi dal punto A cadenti ſopra la data RM, una ſola è perpendicolare AB, e minima, e tutte le altre AD, AF ſono oblique, ed obliqui gli angoli in D, ed F.

2. Le oblique poi, e gli angoli ottuſi eſterni, ſono ſempre maggiori, e gli acuti lor ſupplementi, ſono minori, come dal punto B caſcano più lontani. Finalmente le linee rette, e gli angoli a due a due ſono uguali tralloro nelle medeſime ſpecie, a norma che ſono equidiſtanti dal punto B del perpendicolo AB.

DIMOSTRAZIONE.

Dal dato punto A alla data RM (12. 127.) la perpendicolare AB ſi dimetta, e nella medeſima RM avendone preſo quale piace altro punto D, ſi conduca la retta AD, e formata ne viene la figura trilatera ABD, nella quale lo interno angolo ADB è acuto (17.), perchè minore dello eſterno, ed oppoſto angolo retto ABM (16. 132.). Laonde di quell' angolo acuto il ſupplemento ADF gli è ottuſo, e la cadente AD non è perpendicolare (*Def.* 10. 15.), ma obliqua (40. 52.).

Nel triangolo rettangolo ABD all' acuto, e minore angolo ADB opponendoſi il perpendicolo AB, ed al maggiore angolo retto in B la obliqua AD (19. 135.) eſſer dee AB < AD, anzi AB minima tra ogni altra obliqua, che dal punto A ſulla data RM viene a cadere: e colla ſteſſa ragione dimoſtraſi, che ſe

oltre

oltre D più lontano da B, venga preso altro punto F, a cui da A si tiri la obliqua AF, nel triangolo ADF, sempre egli è lo acuto angolo esterno ADB>AFD interno, ed opposto (16. 132.), e sono gli ottusi loro supplementi al contrario, ADR<AFR; e perchè nel triangolo ADF all' ottuso angolo ADF si oppone la più lontana obliqua AF, ed all' acuto angolo AFD molto minore dell' ottuso ADF si oppone AD; dunque sarà AF>AD, la più rimota, sempre maggiore della più vicina al punto B.

Finalmente dal punto A caschi in B la perpendicolare AB sopra la retta RM, in cui di qua, e di là da B si prendano uguali porzioni BC, BD, e si conducano AC, AD cadenti oblique: e da che ne' triangoli ABC, ABD, per lo comune AB, sono gli angoli retti in B, contenuti da lati uguali BA, BC, e BA, BD, deono essere uguali (4. 115.) le basi AC, AD; uguali gli angoli in C, e D: ed eziandio in A uguali gli acuti CAB, DAB. Col medesimo raziocinio, se vengono nella medesima RM prese le uguali porzioni BE, BF, anche similmente ne' due triangoli ABE, ABF uguali si dimostrano le oblique AE, AF; uguali gli angoli in E, ed F: ed uguali gli angoli in A.

LEMMA II.

Teorema. (*Fig.* 59.)

143. Se gli triangoli rettangoli ABC, ABD hanno uguali un angolo acuto all' acuto, ed un lato corrispondente ad un lato, cioè le ipotenuse, ovvero i due cateti, opposti, ed annessi agli uguali angoli acuti, sono equilateri, ed equiangoli, ed in tutto uguali i triangoli mentovati.

DIMOSTRAZIONE.

I dati triangoli abbiano primieramente uguali gli angoli acuti C, e D, ed uguali gli annessi cateti BC, BD, i quali uniti in una retta linea nel punto B, saranno per gli angoli retti in B adattati i due altri cateti BA, BA in una linea sola, dunque pel Corollario della sesta proposizione al num. 119, le due ipotenuse CA, DA, ed il perpendicolo AB vanno ad unirsi nel solo punto A, onde formato ne sia il triangolo isoscele ACD, e i due trian-

triangoli rettangoli ABC, ABD sue metà, in tutto, e per tutto uguali, equilateri, ed equiangoli sono.

Se poi gli stessi triangoli colle uguali ipotenuse AC, AD annessi hanno i medesimi uguali angoli C, e D, si concepiscano adattate insieme A in A, e 'l vertice D sopra C (100. 101.); dunque il perpendicolo solo cadente dal medesimo punto A, sega i due adattati cateti nel medesimo punto B (*Lem. I.* 142.); onde i due triangoli esattamente adattati, sono equiangoli (105.), ed equilateri, ed uguali con esattezza.

Finalmente se uguali sono i due cateti BA, BA opposti agli acuti angoli C, & D, si adattino insieme gl' istessi cateti, che saranno i punti A in A, &B in B, e per gli angoli retti in B (14. 130.), saranno in una retta linea CBD gli altri due cateti CB, DB, e perchè dalle due oblique AC, AD cadenti dal medesimo punto A formato ne viene il triangolo ADC sopra la base CD, ne' cui estremi punti C, D sono per ipotesi costituiti gli due uguali angoli ADC, ACD, egli è isoscele (6. 118.) il triangolo stesso ADC, di cui si avverano le proprietà tutte (117. 118. 125.) de' triangoli isosceli, spezialmente che dal perpendicolo AB diviso rimanga in due triangoli rettangoli ABC, ABD scambievolmente equilateri, ed equiangoli, che era ec.

Che se in vece degli angoli C, & D uguali si supponessero gli angoli BAD, BAC, si usi la medesima dimostrazione, mutando solamente le lettere, o adattando i due cateti BC, BD, che era, ec.

Definizione. (*Fig.* 59. 60.)

144. Nella analisi de' triangoli costumano i Geometri, in riguardo ad un angolo ADB, nominare la opposta retta AB, che dal lato DA cade perpendicolarmente sopra l'altro lato DB, *seno retto* dell' angolo ADB, da' detti lati compreso; il lato poi obliquo AD terminato dal vertice D dell' angolo, e dal punto A, donde la perpendicolare proviene, dicesi *raggio*; e l' altro lato DB contenuto tra il vertice D, e tra il punto B, in cui il perpendicolo cade, si appella *Cosino*.

Da' precedenti due Lemmi, supponendo la Definizione presente, ne nascono i tre Corollari seguenti.

COROLLARIO I. (*Fig.* 59. 60.)

145. Se due angoli uguali C, D hanno uguali i seni retti AB, AB uguali hanno i raggi AC, AD, ed uguali eziandio i cosini BC, BD, conciosiachè (*Lemma* 2. 143.) i due seni sono lati corrispondenti opposti a' medesimi angoli uguali, e formanti due triangoli rettangoli ABC, ABD equilateri, ed equiangoli.

COROLLARIO II. (*Fig.* 59. 60)

146. Se due angoli uguali C, D uguali hanno i raggi AC, AD, uguali deono avere i seni AB, AB, ed uguali i cosini BC, BD, imperocchè da' punti A, & A de' raggi uguali annessi agli angoli uguali C, & D, dimesse le due perpendicolari sopra degli altri lati, se ne formano due triangoli rettangoli, che hanno uguali ipotenuse annesse a' medesimi angoli uguali; dunque pel secondo lemma uguali hanno i seni, ed uguali i cosini.

COROLLARIO III. (*Fig.* 59. 60.)

147. Se due angoli uguali C, D uguali hanno i cosini BC, BD, anche uguali hanno i seni AB, AB, ed uguali i raggi AC, AD; perciocchè da punti estremi B, & B degli uguali cosini erette due perpendicolari, finchè segati ne vengano le due oblique CA, DA, formati sono due triangoli rettangoli ABC, ABD, i quali hanno due lati uguali, e corrispondenti, perchè annessi agli angoli C, D acuti, supposti uguali, ed annessi a due angoli retti in B; epperò (*Lem.* 2. 143.) uguali hanno i seni AB, AB, ed uguali i raggi AC, AD.

RIFLESSIONE.

148. Da quanto da precedenti lemmi si è dimostrato, ne nasce anche un teorema non solamente necessario per la intelligenza della settima proposizione del seguente libro sesto, ma eziandio per molti casi nell' analisi de' triangoli: ed è

PRO-

PROPOSIZIONE.

Teorema. (*Fig.* 58. 60.)

149. Se due triangoli AED, ACF, ovvero ACF, ADF hanno due lati uguali a due lati, ed un angolo uguale ad un angolo, non compreso da lati uguali, ma di quegli alla base, niuna certezza dare si puote di loro uguaglianza, o disuguaglianza, qualora non si sappia, se gli angoli rimanenti sieno della medesima specie, acuti, oppure ne abbiano ottuso uno, ed uno acuto, ed allora saranno uguali tra loro i triangoli dati. Ma se gli angoli rimanenti in un triangolo ACF siano acuti, e nell' altro triangolo ADF uno ve ne sia ADF ottuso, disuguali saranno allora i triangoli mentovati.

DIMOSTRAZIONE.

Ne' due triangoli AFC, AFD aventi lo angolo comune F, ed uguali due lati a due lati, cioè FA=FA; & AD=AC, che non comprendono lo uguale angolo F, niuna certezza avere si puote di loro uguaglianza, o disuguaglianza, senza sapere, se gli angoli rimanenti a due a due siano della medesima specie. Chiaramente dimostrasi, ove dal centro A venga descritto un arco, che seghi la base FC in C, & D, col raggio AC minore lato cadente da A, certamente tirato il raggio AD, che sarà uguale ad AC, i due triangoli AFC, AFD hanno due lati uguali a due lati, per esser AF comune, & AD, AC raggi del medesimo cerchio. Ma il triangolo AFD è una porzione del triangolo AFC, onde sono disuguali ad occhio veggente, e tutta la ragione consiste, che nel triangolo AFD lo angolo ADF è ottuso, e nel triangolo AFC tutti e tre gli angoli sono acuti, e di specie diversa.

Che se poscia sapendosi la uniformità delle specie degli angoli rimanenti (trattine gli angoli supposti uguali), che due, e due siano acuti, o che uno, ed uno siano ottusi, sempre della medesima specie, senza dubbio da precedenti lemmi ben si dimostra, che i triangoli siano in tutto, e per tutto uguali; conciosiachè (*Fig.* 58.) i due triangoli ACF, ADE avendo uguali

uguali gli angoli F, & E, ed uguali i lati AF, AC a due rispettivi lati AE, AD, ed i rimanenti angoli EAD, FAC acuti uguali, ed acuti uguali gli altri due ADE, ACF, sono dimostrati essere uguali. Di presente da' medesimi uguali triangoli vengane tolto il triangolo comune ACD, uguali saranno i residui triangoli ACE, ADF, i quali hanno gli angoli uguali in F, & E, & CAE, DAF della medesima specie uguali acuti, ed il terzo angolo ACE col terzo angolo ADF della medesima specie, ottusi, uguali; laonde ben dimostrato rimane, che di sì fatti triangoli niuna certezza avere si puote di uguaglianza, o disuguaglianza, se prima non si conosce di che specie siano de' triangoli dati gli angoli rimanenti.

PROPOSIZIONE XXVI.

Teorema XVII. (*Fig.* 60.)

150. Se due triangoli ADE, ACF hanno due angoli scambievolmente uguali a due angoli E=F, & D=C, ed abbiano DE=CF, basi annesse agli angoli uguali, oppure AD=AC, o finalmente AE=AF, lati opposti, ed annessi a' rispettivi angoli uguali, uguali saranno in tutto scambievolmente equilateri, ed equiangoli i triangoli dati.

Dimostrazione.

Nel triangolo ACF (qualsivoglia dei due dati), dal verticale angolo A, si dimetta AB perpendicolare (12. 27.) alla base CF (prolungata se occorre), sarà AB seno retto (144.) dell' angolo F in riguardo al raggio AF, (ed eziandio sarà seno retto dell' angolo C rispetto al raggio CA). Dalla base DE del triangolo ADE, si prenda la porzione EB=FB, acciocchè i due uguali angoli E, & F abbiano uguali cosini EB, & FB; però (*Lem.* 2. *Corol.* 3. 148.) uguali sono i raggi EA, FA, ed uguali i seni AB, AB degli uguali annessi angoli E, & F, il perchè alle uguali basi BF, BE corrispondendo le uguali ipotenuse AF, AE, ed uguali i perpendicoli AB, AB, sono i due triangoli rettangoli ABF, ABE equilateri, ed equiangoli, ed adattabili, non solamente in E, & F, ed in B, ma nel comune

mune vertice A. Inoltre ne' due triangoli ABC, ABD, essendo dimostrati uguali i seni AB, AB, opposti agli uguali angoli C, & D, uguali esser deono le ipotenuse AC, AD, ed uguali i cosini BC, BD, che uniti agli uguali BF, BE, ne nascono le uguali basi CF, DE, come per ipotesi era supposto; quindi i due triangoli dati sono equilateri, e però (105.) equiangoli, ed esattamente uguali.

Finalmente suppongasi, che dei due dati triangoli siano uguali i due lati AF, AE annessi agli uguali angoli F, & E, ed insieme opposti agli altri uguali C, & D; dunque (*Lem.* 2. 143.) uguali sono i cosini BF, BE, ed uguali i seni AB, AB; onde ne nascano i due triangoli rettangoli ABF, ABE, i cui uguali perpendicoli AB, AB sono seni degli uguali angoli C, D; il perchè de' medesimi angoli uguali, uguali sono i raggi AC, AD, ed uguali i cosini BC, BD: ma uguali si sono dimostrati BF, BE, e perciò a cose uguali, cose uguali aggiugnendo, formate ne vengono le uguali basi CF, DE; ancora dunque in questa ipotesi sono equilateri scambievolmente i due dati triangoli ACF, ADE (105.), quindi equiangoli, ed uguali con esattezza, che era ec.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA XVIII. (*Fig.* 61.)

151. Se tra due rette linee AB, CD, cadendo la retta EF, forma uguali gli angoli alterni (47.) EFD, FEA, deono essere parallele le date linee AB, CD.

DIMOSTRAZIONE.

La cadente EF si divida a mezzo in M, e dal punto M si dimetta MH perpendicolare alla CD (*Prop.* 12. 127.), e si prolunghi la stessa MH, che seghi in G l'altra data AB.

E perchè ne' due triangoli MHF, GME si sono costituite uguali le basi MF, ME, sopra le quali uguali sono i due angoli FMH, EMG opposti alla cima (15. 131.), ed uguali si suppongono gli alterni angoli MFH, GEM, uguali sono gli stessi triangoli (26. 150.) scambievolmente equilateri, ed il ter-

zo

zo angolo MHF uguale al terzo angolo MGE. Dunque essendosi fatto retto il primo, sarà anche retto quest' altro, e però (13. 128.) retti sono gli angoli in H, & G; quindi se tra le rette linee AB, CD la cadente EF forma uguali gli angoli alterni m, n, anche vi cade la retta GH perpendicolare alle date CD, AB, e coll' una, e coll' altra forma tutti gli angoli retti, e perciò (77. 79.) le date AB, CD sono equidistanti parallele. Che era ec.

PROPOSIZIONE XXVIII.

Teorema XIX. (*Fig.* 62.)

152. Se tra due rette linee cade la retta GH segante in E, & F, che formi; primo lo esterno angolo BEG=EFD (47), interno all' esterno opposto alla medesima banda; oppure secondo, uguali a due retti gli angoli AEF+EFC amendue interni, ed alla medesima banda, saranno le date AB, CD parallele tra loro.

Dimostrazione.

BEG=EFD per ipotesi; BEG=AEF (15. 131.); dunque (*Ass.* 1. 91.) EFD=AEF alterni (47.), perciò (27. 151.) le rette AB, CD sono parallele.

Secondo. AEF+CFE=180° per ipotesi, CFE+EFD==180° (13. 128.), e perciò (*Ass.* 1. 91.) AEF+CFE==CFE+EFD: si tolga CFE comune, resta (*Ass.* 3. 93.) AEF=EFD angoli alterni (47.), e le date rette AB, CD sono parallele (27. 151.)

PROPOSIZIONE XXIX.

Teorema XX. (*Fig.* 63.)

153. Tra due rette AB, CD parallele, cadendo altra retta GH, dee formare uguali gli angoli alterni $m=n$.

Secondo. Ed uguali gli angoli esterno $r=m$ interno opposto, e dalla medesima parte.

Terzo. E gli due angoli AEF+CFE interni, alla medesima parte, esser deono uguali a due angoli retti. Di-

DIMOSTRAZIONE.

Da due punti E, F, ne' quali dalla cadente GH segate sono le parallele AB, CD, si dimettano reciprocamente i perpendicoli EL, FK, i quali essendo distanze di linee equidistanti, vogliono essere uguali tra loro, però avendo nel comune raggio EF uguali i perpendicoli EL=FK, sono (146.) gli angoli $m=n$ alterni, ed uguali altresì gli rimanenti alterni CFE==BEF supplementi di angoli uguali (41).

Secondo. $m=n$, come si è già dimostrato, $n=r$ (15. 131.); dunque (*Ass.* 1. 91.) $r=m$ esterno, ed interno opposti alla medesima parte.

Terzo. CFE+DFE=180° (13. 128.), ma DFE=AEF; dunque sostituendo (*Ass.* 13. 110.) CFE+AEF=180°, uguali a due retti gli angoli interni alla medesima banda.

COROLLARIO I. (*Fig.* 63

154. Dalle dimostrazioni precedenti (151. 153.) usate per le tre ultime proposizioni superiori, ne siegue, che se da' punti E, F esistenti in due rette linee AB, CD caggiono due adverse perpendicolari in L, & K, se quelle sono uguali tra loro EL=FK, sono le date AB, CD parallele.

COROLLARIO II. (*Fig.* 64.)

155. E ne addiviene altresì (152.), che due rette KF, EL perpendicolari alla medesima retta CD, sono parallele tra loro, per lo esterno angolo ELD uguale allo interno KFL (28. 152).

COROLLARIO III. (*Fig.* 65.)

156. Ed anche sono parallele tra loro due rette CD, EF, che cascano sopra la retta AB alla medesima banda inclinate, con uguali angoli obliqui, interno CDF=EFB esterno (28. 152.)

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA XXI. (*Fig.* 66.)

157. Le rette AB, CD ad una medesima retta GH parallele, sono ezi andio parallele tra loro. Di-

DIMOSTRAZIONE.

Sono parallele AB, GH, e perciò (29. 153.) gli alterni angoli $m=o$; son parallele CD, GH, però gli angoli, esterno, ed interno $n=m$; dunque (*Ass.* 1. 91.), $n=o$ angoli alterni; il perchè (27. 51.) sono parallele AB, CD anche tra loro. Che era ec.

PROPOSIZIONE XXXI.

PROBLEMA X. (*Fig.* 67.)

158. Per un dato punto G condurre la retta AB parallela alla data CD.

RISOLUZIONE, E DIMOSTRAZIONE.

Dal punto G alla data CD si conduca una obliqua retta linea GH, e centro H spazio GH, si tiri l'arco GF. Quindi centro G col medesimo raggio GH, si descriva altro arco opportuno, dal quale (*Post.* 6. 90.) recidasi l'arco HE=FG, e per i punti G, E si conduca la retta AEB parallela alla data CD, a cagione degli uguali alterni angoli EGH, FHG misurati (30) da uguali archi EH, GF, col medesimo raggio formati.

COROLLARIO.

159. Dunque la retta GH, che sega in H la parallela CD, segherà anche in G l'altra parallela AB, ove prolunghisi GE quanto bisogna.

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA XXII. (*Fig.* 68.)

160. In ogni triangolo ABC prolungato qualunque lato BC in E, sarà lo angolo esterno $ACE=A+B$ interni, ed opposti. Secondo. E gli tre angoli interni $A+B+o$ d'ogni triangolo sono uguali a due retti.

DIMOSTRAZIONE.

Per lo punto C si conduca CD parallela al lato AB (31. 158.); dun-

dunque $A = n$ angoli alterni formati dalla cadente AC tra le due parallele AB, CD (29. 153.). Ma tra le medesime parallelle cade la retta BCE; dunque lo angolo esterno $m = B$ interno, ed opposto (29. 153.): ma lo angolo esterno tutto $ACE = m + n$ (*Ass.* 9. 106.) però $ACE = A + B$ interni, ed opposti.

Secondo. Perchè $n + m = A + B$, sarà (*Ass.* 2. 92.) aggiugnendo il comune angolo $= o = ACB$, sarà $n + m + o = A + B + ACB$; ma $n + m + o = ACE + ACB = 180°$ (13. 128.), dunque (*Ass.* 1. 91.) $A + B + ACB = 180°$. Che era ec.

Corollario I.

161. E dacchè ogni triangolo equilatero egli è insiememente equiangolo (120.), ne nasce, che ogni suo angolo sia $= 60° = \frac{180°}{3} = \frac{1}{3}$ di due angoli retti.

Corollario II. (*Fig.* 69.)

162. Quindi nasce util problema di ergere sul punto A, estremo della data linea AB la perpendicolare AD nella seguente facil maniera. Della linea AB, se ne prenda una porzione AB per raggio, e da' centri A, B si faccia una sezione di archi in C, qual punto preso per centro descrivasi altro arco verso D, opposita plaga di B, e si tiri pe' punti B, C la retta linea BCD, che seghi in D l'arco D, si conduca AD, che sarà perpendicolare alla data AB.

Dimostrazione.

Perchè $m = n$ nel triangolo equilatero ABC (120), & $m = 60°$, & (161.) $m + n = 120° = z$ angolo esterno (160.), perciò nel triangolo ACD isoscele su la base AD sono gli angoli $r = y$ (5. 116.), ma $r + y + z = 180°$, sarà $r + y = 180° - z = 180° - 120° = 60°$. Dunque $r = \frac{60°}{2} = 30°$, però $m + r = 60° + 30° = 90°$ uguale a tutto lo angolo A, il quale perciò è retto (32.), e la linea AD perpendicolare alla data AB ec.

COROLLARIO III.

163. E dacchè nella superiore dimostrazione nello isoscele ACD si avverano le equazioni $r+y=180°-z$ angolo verticale, ed inoltre $r=\frac{r+y}{2}=\frac{60}{2}$, ne siegue, che ne' simili triangoli sottraendo da due retti lo angolo verticale z, nel residuo si ottiene la somma de' due uguali angoli $r+y$ alla base, qual somma divisa a mezzo dimostra il valore dell' angolo r, o pur y alla base.

Che se il triangolo isoscele fosse rettangolo, sarebbero i due angoli alla base uguali ad un retto, epperò ciascuno di loro $=\frac{90}{2}=45°$, perciò nello isoscele rettangolo i detti angoli sono uguali semiretti.

COROLLARIO IV. (*Fig.* 70.)

164. In ogni triangolo ottusangolo AFB la somma $A+B$ dei due angoli sarà sempre minore di un retto, ove l' angolo F sia ottuso; dacchè sottraendo un ottuso da due retti, il residuo sarà sempre minore di un retto, perciò gli angoli acuti $A+B<90°$; laonde ne' rettangoli, ed ottusangoli triangoli un solo può essere l' angolo retto, oppure l' angolo ottuso, e gli altri due sempre acuti, nè dare si puote ottusangolo insieme, e rettangolo un triangolo.

COROLLARIO V. (*Fig.* 71.)

165. Stabilito, che in ogni triangolo rettangolo ABC sia la somma (163.) di due angoli acuti $A+C=90°$, sarà $C=90-A$, e dato che nel triangolo rettangolo DEF sia lo angolo $F=C$, essendo $F+D=90°$, sarà $F=90°-D$; però (*Ass.* 1. 91.) $90°-A=90°-D$, e per antitesi $D+90°=A+90°$, e togliendo il comune $90°$, rimane $D=A$; ma (*Ass.* 10. 107.) i due retti $E=B$, e per ipotesi $F=C$, chiaramente ne siegue, che sono scambievolmente equiangoli due triangoli rettangoli DEF, ABC, ove abbiano un angolo acuto uguale.

Co-

COROLLARIO VI. (*Fig.* 68.)

166. Generalmente in tutti i triangoli ABC, conoſcendo un angolo A, e ſottraendolo da 180°, ſi ha nel reſiduo la ſomma degli alrri due angoli B+C, ed ove queſta ſomma ſia conoſciuta, e ſottratta da 180°, ſarà il terzo incognito angolo A==180°—B—C, reſiduo di due angoli ſottratti dal mezzo cerchio.

COROLLARIO VII.

167. Dunque ſe due triangoli hanno un angolo uguale, anche uguali aver deono le ſomme degli angoli rimanenti. E ſe uguali hanno le ſomme di due angoli, avranno il terzo angolo uguale al terzo.

COROLLARIO VIII. (*Fig.* 72.)

168. Di qualunque ſia quadrilatera figura ABDC gli angoli interni, tutti e quattro inſieme ſono uguali a quattro angoli retti; conciosiachè a due angoli oppoſti tirando la diagonale AD, ſegato rimane il quadrilatero in due triangoli ADB, ADC, i quali contengono ognuno due angoli retti, e perciò tutti e due inſieme i triangoli formano il quadrilatero, e quattro angoli retti. Generalmente

COROLLARIO IX. (*Fig.* 73.)

169. Di qualunque rettilinea figura ABCDE gli angoli interni A+B+C ec., formano una ſomma di tanti angoli retti, quanto è il doppio numero de' propri lati, ſempre quattro di meno; perciocchè da qualunque punto F preſo in mezzo della figura ad ogni angolo di eſſa, tirando una linea, ſi vengono a formare tanti triangoli FAB, FBC ec., quanti ſono i lati della figura. Ma ogni triangolo contiene due angoli retti, e tutti hanno la cima nel punto F, in cui quattro angoli retti ſolamente ſi poſſono formare (33.); laonde nelle baſi AB, BC ec., ſi formano angoli retti in numero doppio de' formati triangoli, cioè de' lati della figura, toltine quattro angoli retti.

Quindi è, che delle regolari figure, come quelle, che ſono equiangole, facilmente ſi trova il valore di ciaſcun angolo, col du-

duplicare i suoi lati, e togliere dal doppio numero il numero costante 4; il residuo poscia si multiplichi per lo numero 90°, ed il prodotto si divida per lo numero de' lati della regolare figura, ed il quoziente darà il valore de' gradi di ciascun angolo: v. g. Per lo pentagono il valore dello angolo sarebbe $5 \times 2 = 10 - 4 = \frac{6 \times 90^\circ}{5} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$ ec.

COROLLARIO X. (*Fig.* 74.)

170. Da tutto ciò altro corollario ne nasce, che sembra recar maraviglia, ed è, che di qualunque rettilinea figura gli angoli esterni $n + n + n$ ec. $= 4 \times 90^\circ$, vuolsi dire a quattro angoli retti; conciossiachè in tutti i punti n formati sono due angoli, uno interno m, altro esterno n, uguali insieme a due retti (13. 128.). Ma gli interni $m + m$ ec. sono uguali a tanti angoli retti, quanto è il doppio numero de' lati -4. Dunque per gli esterni angoli n rimane da distribuirsi la somma di quattro angoli retti costantemente.

PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA XXIII. (*Fig.* 75.)

171. Le rette linee AC, BD, dalle quali congiunte vengono uguali, e parallele linee AB, CD, sono anche uguali, e parallele tra loro.

DIMOSTRAZIONE.

Si conduca la diagonale BC, la quale cadendo tra le due parallele AB = CD, forma uguali gli angoli alterni CBA, BCD (29. 153.), e considerando i due triangoli ABC, DCB, ne' quali gli angoli uguali già mentovati, vengono per lo comune BC contenuti da lati uguali, esser deono le basi AC = BD (4. 115.), tra le quali dalla cadente CB essendo formati uguali i due angoli alterni BCA, CBD ne' due triangoli (105) scambievolmente equilateri ABC, DCB all' incontro de' lati uguali AB, CD, sono anche parallele tra loro le rette AC, BD (27. 151.). Che era ec.

PRO-

PROPOSIZIONE XXXIV.

TEOREMA XXIV. (*Fig.* 75.)

172. Delle figure parallelogramme uguali ſono i lati, e gli angoli adverſi, le quali inoltre in due parti uguali ſegate vengono dal diametro, o ſia diagonale.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè la retta BC cade tra due parallele AB, CD, uguali ſono (29. 153.) gli alterni angoli CBA, BCD, ed uguali gli alterni BCA, CBD, cadendo la ſteſſa tra le altre due parallele AC, BD, perciò i due triangoli ABC, DCB ſu la baſe comune BC hanno uguali gli angoli ſcambievolmente; laonde (26. 150.) tutto il triangolo è uguale a tutto il triangolo, ed i rimanenti angoli A=D, ſiccome i compoſti B=C (*Aſs.* 2. 92.), e gli oppoſti lati AB=CD, & AC=BD ec.

PROPOSIZIONE XXXV.

TEOREMA XXV. (*Fig.* 76.)

173. I parallelogrammi ABCD, EBCF ſu la medeſima baſe BC coſtituiti, e tra le medeſime parallele AF, BC ſono uguali tra loro.

DIMOSTRAZIONE.

Sono AD=BC, EF=BC (34. 172.); però (*Aſs.* 1. 91.) ſarà AD=EF; dunque aggiugnendo la comune DE, ſarà (*Aſs.* 2. 92.) AE=DF, e perchè nel parallelogrammo EBCF (34. 172.) EB=CF, ed inoltre gli angoli eſterno, ed interno (29. 153.) AEB=DFC, ſono compreſi da lati ſcambievolmente uguali, forza è, che ſiano uguali (4. 115.) i due triangoli AEB, DFC, da' quali togliendo la comune figura DGE, reſteranno i trapezzi ADGB=FEGC (*Aſs.* 3. 93), a' quali aggiugnendo la ſteſſa figura BGC, uguali riſultano (*Aſs.* 2. 92.) i formati parallelogrammi ABCD, EBCF, che era ec.

PRO-

PROPOSIZIONE XXXVI.

TEOREMA XXVI. (*Fig.* 77.)

174. I parallelogrammi ABCD, EFGH tra le medesime parallele, AH, BG, e sopra le uguali basi BC=FG costituiti, sono uguali tra loro.

DIMOSTRAZIONE.

Si tirino le rette BE, CH, certamente uguali, e parallele, perchè congiungono le uguali parallele BC, EH (33. 171.), però è un parallelogrammo EBCH=ABCD, perchè sopra la medesima base BC (35. 173.); e per la stessa ragione EBCH==EFGH su la medesima base EH. Dunque (*Ass.* 1. 91.) ABCD=EFGH, che era ec.

COROLLARIO I. (*Fig.* 78.)

175. E perchè dal flusso uniforme (7.) della retta AD=a, dicasi =5 (parti uguali, o sieno unità) insistente ad angoli retti, e camminante su la retta AB=b, dicasi =3 (simili parti uguali), formato rimane il parallelogrammo rettangolo ABCD; sarà perciò tutto il parallelogrammo ABCD=$a \times b$, cioè $5 \times 3 = 15$ piccoli quadrati, lo cui lato è una delle prese parti di AB, o di AD; ma il parallelogrammo rettangolo è uguale a qualunque altro obbliquangolo ABFE, ove abbiano la medesima base (35. 173.), o basi uguali (36. 174.), e sieno tra le medesime parallele, cioè abbiano la medesima altezza (56.), la quale tra due parallele, e la medesima distanza (75.), e perpendicolare AD=a costante. Da ciò ne nasce, che il prodotto =ab sia espressione, e valore di qualsivoglia parallelogrammo, sia rettangolo, sia obbliquangolo, purchè per a s' intenda la medesima, o uguale altezza (56), e per b la base della figura. Da tutto chiaramente sarà compresa la definizione prima del secondo libro.

COROLLARIO II.

176. Ne proviene da ciò non solamente de' rettangoli nominati

nati quadrilunghi la determinata misura, ma eziandio di tutte le altre quadrilatere parallelogramme figure, lo che si ottiene multiplicando insieme la base colla perpendicolare altezza insistente alla base, supponendo amendue divise, e numerate nelle parti uguali corrispondenti a data misura di lineare lunghezza, sia pertica, sia trabucco ec.

PROPOSIZIONE XXXVII.

Teorema XXVII. (*Fig.* 79.)

177. I triangoli ABC, DBC costituiti tra le medesime parallele AD, BC, e su la medesima base BC, sono uguali tra loro ABC=DBC.

Dimostrazione.

Si renda infinita la linea AD; per B si conduca BE parallela al lato CA, e dal punto C si conduca (31. 158.) CF parallela al lato BD; adunque BCAE, CBDF sono due parallelogrammi (35. 173.) uguali tra loro, perchè su la medesima base tra parallele istesse. Ma il triangolo ABC è la metà del parallelogrammo BCAE per lo diametro AB, che per mezzo lo sega (34. 172.): e parimente il triangolo DBC è una metà del parallelogrammo CBDF per la segante diagonale DC; dunque essendo metà di cose uguali, sono (*Ass.* 7. 97.) uguali tra di loro i due triangoli ABC=DBC, che era ec.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

Teorema XXVIII. (*Fig.* 80.)

178. I triangoli ABC, DEF tra le medesime parallele GH, BF costituiti, e sopra le uguali basi BC, EF, sono uguali tra loro, ABC=DEF.

Dimostrazione.

Per lo punto B fino all'infinita GH si tiri BG, parallela al lato CA, e così FH parallela al lato ED (31. 158.); dunque le figure ACBG, DEFH sono due parallelogrammi (83.), ed uguali

uguali tra loro (36. 174.), perchè hanno le basi BC=EF; ma il triangolo ABC per la segante diagonale AB (34. 172.), siccome il triangolo DEF per la segante diagonale DF, sono metà di uguali parallelogrammi GC, EH. Dunque (*Ass.* 7. 97.) sono uguali i due triangoli ABC, DEF sopra uguali basi tra le medesime parallele esistenti, che ec.

COROLLARIO I. (*Fig.* 81.)

179. Dalle due precedenti ultime dimostrazioni fondate sopra la trentesimaquarta proposizione anche compresa vedesi, e dimostrata la seguente proposizione 41., e più amplamente, non solo su la medesima base, ma eziandio sopra uguali basi, e tra le medesime parallele sia il parallelogrammo BA=BF doppio del triangolo CEB=$\triangle$EAC=$\triangle$BCD=$\triangle$CDF, onde nasce l'equazione $\square$BA=BF=2$\triangle$AEC=2$\triangle$CEB=2$\triangle$BCD=2$\triangle$CDF, e dividendo per 2, sarà $\triangle$EAC=$\triangle$ECB=$\triangle$BDC==$\triangle$CDF=$\square\frac{BA}{2}=\square\frac{BF}{2}=\frac{ab}{2}$ (175.); e perchè lo essere parallelogrammi, e triangoli tra le medesime parallele, altro non esprime, che (75.) dovere quelle figure avere la medesima altezza FK, ne siegue, che tutti gli triangoli di qualsivoglia specie, aventi uguali altezze, ed uguali basi, sono uguali tra loro, e sono metà de' parallelogrammi costituiti sulle medesime basi, ed altezze.

COROLLARIO II. (*Fig.* 81.)

180. Dunque $\frac{ab}{2}$ ella è vera espressione, e formola continente il valore di ogni triangolo, la cui base BC=b, ed altezza EB=a; dacchè essendo (175.) $\square$BA=ab=2$\triangle$AEC ec., dividendo per 2, ne proviene $\triangle$AEC=$\frac{ab}{2}=\square\frac{BA}{2}$.

COROLLARIO III. (*Fig.* 81.)

181. Addiviene da ciò, che se due parallelogrammi BA==BF=ab, e due triangoli AEC=CDF=$\frac{1}{2}ab$ hanno la base

me-

medesima $=b$, aver deono la medesima altezza $=a$. Ed al contrario gli uguali parallelogrammi, ed i triangoli uguali, ove abbiano la medesima altezza $=a$, sono determinati a non potere avere altra base, che $=b$, essendo il determinato valore de' primi $=ab$, e de' secondi il valore $=\frac{ab}{2}$.

COROLLARIO IV. (*Fig.* 81.)

182. Coerentemente quindi nasce la regola di misurare qualunque piano triangolare AEC, CDF di qualunque sia spezie, riducendolo sempre, e prendendolo per rettangolo, cioè avendo sua base $=b$, ritrovare sua perpendicolare altezza $=a$, e del loro prodotto $a \times b = ab$ prenderne la metà, e sia $\frac{ab}{2} = \triangle$ AEC $= \triangle$CDF ec., oppure multiplicando tutta la base b colla mezza altezza $\frac{a}{2}$, o veramente la mezza base $\frac{b}{2}$ con tutta l'altezza a, che sempre otterrassi $\frac{a \times b}{2} = b \times \frac{a}{2} = a \times \frac{b}{2} = \frac{ab}{2}$ vero valore del triangolo dato.

PROPOSIZIONE XXXIX.

TEOREMA XXIX. (*Fig.* 82.)

183. I triangoli uguali ABC, DBC costituiti su la medesima base BC, ed alla medesima banda, sono eziandio tra le medesime parallele FG, AD.

DIMOSTRAZIONE.

Per ipotesi i triangoli dati ABC, DBC si suppongono esistenti su la medesima base BC$=b$, ed insieme uguali tra loro; dunque aver deono (181.) la medesima altezza (56.) AF$=$DG$=a$; il perchè per i punti A, D tirando la retta AD, sono le due FG, AD equidistanti tra loro per gli uguali perpendicoli AF, DG, e perciò parallele (75.), che ec.

PROPOSIZIONE XL.

TEOREMA XXX. (*Fig.* 83.)

184. I triangoli uguali ſopra uguali baſi coſtituiti, e dalle medeſime parti, ſono tra parallele linee locati (intendendoſi, che le due baſi BC, FE, ſieno compoſte in una medeſima retta linea).

DIMOSTRAZIONE.

Perchè i due triangoli ABC, DFE ſono uguali tra loro, e ſopra baſi uguali, hanno perciò uguali le altezze (181.). Tiriſi intanto la retta AD, ed infinita ſi renda la linea BF. Da due vertici A, D ſi dimettano (12. 127.) le due perpendicolari AL, DG, ſono queſte de' dati triangoli le vere altezze (56.), ed uguali tra loro, come ſi è dimoſtrato (181.); ma le due uguali AL, DG perpendicolari alla medeſima FG (155.) ſono parallele tra loro; dunque ſono eziandio parallele le altre due AD, FG (33. 171.), perchè congiungono parallele, ed uguali, che era ec.

PROPOSIZIONE XLI.

TEOREMA XXXI. (*Fig.* 84.)

185. Se il parallelogrammo BD, ed il triangolo BEC hanno la medeſima baſe, e ſono tra le medeſime parallele AE, BC, il parallelogrammo ſarà doppio del triangolo, cioè $\square\frac{BD}{2} = \triangle BEC$ (179.).

DIMOSTRAZIONE.

Si conduca la diagonale AC, ſarà $\triangle BEC = \triangle BAC$ (38. 178.), ma (34. 172.) $\triangle BAC = \square\frac{BD}{2}$; dunque (*Aſs.* 1. 91.) $\square\frac{BD}{2} = \triangle BEC$, che vale $\square BD$ doppio del triangolo BEC, che era ec.

PRO-

PROPOSIZIONE XLII.

PROBLEMA XI. (*Fig.* 85.)

186. Al dato triangolo ACB uguale parallelogrammo EG costituire in un dato angolo CEF=D rettilineo angolo dato.

RISOLUZIONE.

Per lo punto A, cima dello angolo A, a cui si oppone la base BC, si conduca la retta AG parallela (31. 158.) alla medesima base BC, la quale divisa venga per mezzo (10. 124.) in E., ed in E costituiscasi lo angolo CEF=D angolo dato (23. 139.); quindi per C si conduca CG alla tirata EF parallela (31. 158.); dico essere parallelogrammo EG=△ACB ec.

DIMOSTRAZIONE.

Si conduca la retta EA, sarà il triangolo ACB diviso in due uguali triangoli ABE=ACE (38. 178.); dunque lo intero △ACB=2△ACE; ma (41. 185.) □EG=2△ACE: dunque (*Ass.* 6. 96. & 1. 91.) △ACB=□EG, lo cui angolo CEF=D per costruzione, che ec.

PROPOSIZIONE XLIII.

TEOREMA XXXII. (*Fig.* 86.)

187. In ogni spazio parallelogrammo BD i supplementi FH, GE di quelli, che al diametro sono d'intorno (84.), sono uguali tra loro, cioè □FH=GE□ supplementi (84.).

DIMOSTRAZIONE.

Dal diametro AC rimane il parallelogrammo BD diviso (34. 172.) in due uguali triangoli ABC, ADC: e per la stessa ragione uguali sono gli altri triangoli GKC=FKC, & EKA==HKA; dunque GKC+EKA=FKC+HKA (91.), e sottraendo (*Ass.* 3. 93.), sarà ABC−GKC−EKA=□GE=□FH=ADC−FKC−HKA, che ec.

PRO-

PROPOSIZIONE XLIV.

PROBLEMA XII. (*Fig.* 87.)

188. Alla data retta linea AB adattare un parallelogrammo BL, che sia uguale al triangolo dato BCR, e che abbia inoltre lo angolo B=D angolo dato.

RISOLUZIONE.

Costruiscasi il parallelogrammo BEFG=△BCR dato, e ciò si eseguisca nello angolo GBE=D (42. 186.); si prolunghi la retta EF in infinito verso K, R, e la retta FG verso H, e saranno parallele EA, FH rette linee: siccome RK, CB, la quale infinitamente prolunghisi verso M. Da G verso H recidasi GH=AB (3. 114.), e si conducano le due rette linee HBK, & HAL; quindi per lo punto K si tiri KL parallela (31. 158.) alla retta linea AE, e finchè in L segata rimanga la infinita AH; dico □BL=△BCR.

DIMOSTRAZIONE.

△BCR=□BF per costruzione, ma nel parallelogrammo LF gli è □BF=□BL (43. 187.); dunque (*Ass.* 1. 91.) □BL==△BCR, che era ec.

PROPOSIZIONE XLV.

PROBLEMA XIII. (*Fig.* 88.)

189. Ad un dato rettilineo ABCE costituire un uguale parallelogrammo KL nel dato angolo rettilineo D, (e se piace formarlo sopra la data FK).

RISOLUZIONE.

La data rettilinea figura in triangoli BCE, BEA, ec. si divida; quindi si formi il parallelogrammo FH uguale al dato triangolo AEB, e che abbia l'angolo K=D angolo dato (42. 186.). Poscia sul lato GH per la proposizione precedente, e sull'angolo GHM=K esterno all'interno, si costituisca il paralrallelogrammo GM=BCE, secondo triangolo della data figura (44. 188.). Sul lato, che siegue, LM altro parallelogrammo si formi, se la data figura in più triangoli è divisa, altrimenti il tutto è fornito.

DIMOSTRAZIONE.

Perocchè tutto il parallelogrammo KL è formato da due parallelogrammi KG, HL, de' quali il primo egli è uguale al triangolo ABE, il secondo HL=BCE, residuo triangolo della data figura; dunque lo intero parallelogrammo KL=AC rettilinea intera figura. Ma si è fatto l'angolo K=D, però si è eseguito quanto, ec.

PROPOSIZIONE XLVI.

PROBLEMA XIV. (*Fig.* 89.)

190. Su la data retta linea AB formare un quadrato AE.

RISOLUZIONE I.

Sul punto estremo A si erga (162.) il perpendicolo AD==AB data. Per lo punto D si conduca DE parallela (31. 158.), ed uguale AB, e si tiri BE; dico la figura AE essere un perfetto quadrato (*Def.* 30. 68.).

DIMOSTRAZIONE.

DA=EB, perchè congiungono le fatte parallele AB=DE (33. 171.): ma DA=AB per costruzione; dunque (*Ass.* 1. 91.) AB=EB, perciò DA=AB=EB=DE (*Ass.* 1. 91.); Inoltre gli angoli A=90° per costruzione; quindi (34. 172.) E=90°; ma sopra la retta AD caggiono le due parallele DE, AB; dunque gli angoli interni, ed alla medesima parte (29. 153.), A+D=180°. E perchè egli è A=90°, rimane D=90°, e per conseguenza anche (34. 172.) B=90°. Dunque la figura quadrilatera AE è rettangola, ed equilatera, però un quadrato perfetto (*Def.* 30. 68.).

RISOLUZIONE II. (*Fig.* 90.)

Alla retta AB nell' estremo punto A (162.) si alzi la perpendicolare AD=AB, e da' centri D, B col raggio =AB si faccia una sezione di archi in E, si conducano le rette BE, DE, che il quadrato DB sarà costruito con quattro lati presi uguali; ma l' angolo A si è formato retto; dunque retto gli è ancora l' opposto angolo E. Concepiscasi adesso tirato il diametro AE ne' due triangoli isosceli AED, AEB, sono uguali gli angoli sopra la base AE (5. 116.), però semiretti; dunque ciascun degli angoli D, B verticali è retto (163.).

COROLLARIO I. (*Fig.* 90.)

191. Dunque ogni quadrilatera figura parallelogramma, che ha quattro lati uguali, ove abbia un angolo retto A, retti aver dee gli altri rimanenti tre angoli B, E, D. E se un angolo A è retto, ed i due lati AB, AD, che lo comprendono, sono uguali, la figura è un quadrato perfetto, purchè i lati opposti sian paralleli.

COROLLARIO II.

192. Ed usando spezialmente la risoluzione seconda, potesi il precedente problema ridurre a generale maniera di costruire qualsivoglia quadrilatera parallelogramma figura (68. 69. 70. 71.)

RISOLUZIONE I. (*Fig.* 91.)

Il rettangolo si costruisce su la base AB, alzando la perpendicolare AC nel punto (162.) estremo A, di maniera che sieno AB=b, ed altezza AC=a; quindi centro C, raggio AB, si tiri l' arco LL, il quale segato venga in D dall' arco HH descritto dal centro B, raggio AC, e condotte le linee DB, DC, sarà formato il rettangolo BC=ab.

RISOLUZIONE II. (*Fig.* 92.)

Il rombo viene descritto, qualora alla data AB si annetta la uguale AC, che formi obliquo (40.) l' angolo CAB. Da centri B, & C col raggio AB=AC facciasi la sezione di archi in in D, e si conducano le due linee DC, DB, dalle quali fornito rimane il rombo BC.

Risoluzione III. (*Fig.* 93.)

La romboide si costruisce, ove si formi qual piace angolo obliquo (40.) BAC, i cui lati BA, CA sien disuguali, e dal centro C col raggio AB, e dal centro B coll' adverso raggio AC si formi una sezione di archi in D; dacchè condotti gli adversi lati DC, DB, fornita rimane la romboide BC.

Dimostrazione.

Si conduca la diagonale AD, la quale essendo comune a due triangoli ADC, ADB, i cui scambievoli lati per costruzione AC=BD, & AB=CD, ne dimostrano essere i predetti triangoli scambievolmente equilateri (105.), e perciò equiangoli, ed uguali hanno gli angoli DAB=ADC alterni (27. 151.), però son parallele le uguali AB, CD; inoltre ADB=DAC alterni, però parallele AC=BD, & (*Ass.* 2. 92.) A=D, siccome B=C opposti al comun lato AD. Dunque la costruita figura BC è parallelogramma (*Def.* 36. 83.); nel primo caso è tutta rettangola, perchè A=D=90°; ma C=B, & (168.) C+B=180°, però C=B=90°. Nel secondo caso la figura è equilatera, ed ha gli angoli opposti uguali, però è un rombo (70.). Nel terzo caso la figura non è equilatera; ma come nel secondo caso, essendo obliquangola, ha uguali gli angoli adversi, e per costruzione uguali gli adversi lati, perciò è romboide (*Def.* 33. 71.) ec.

Corollario III. (*Fig.* 91. 92. 93.)

193. Dunque ogni quadrilatera figura non solamente avendo gli adversi lati uguali AB=CD, & AC=BD, ma avendo altresì uguali gli adversi angoli A=D, & B=C, ella è un parallelogrammo (*Def.* 36. 83.). Inoltre se un angolo A è retto, sono anche retti i tre angoli rimanenti, e la figura è un rettangolo (*Def.* 31. 69.). Se lo angolo A è obliquo, anche obliqui esser deono i tre rimanenti. E se AB=AC, il parallelogrammo un rombo sarà. Se AB>, o <AC, il parallelogrammo sarà una romboide.

Co-

COROLLARIO IV.

194. Generalmente si avvera la proposizione conversa della trentesimaquarta, che tutti gli spazi quadrilateri, i quali hanno almeno uguali gli opposti angoli a due a due, sono sempre parallelogramme figure, e dal diametro segate a mezzo.

ANNOTAZIONE. (*Fig.* 94.)

Nel triangolo rettangolo ABC (63.) egli è costume di nominare i suoi lati,

AC ipotenusa opposta all' angolo retto B.

$\left.\begin{array}{l}\text{BA cateto}\\ \text{BC cateto}\end{array}\right\}$ perpendicoli formanti l'angolo retto B.

PROPOSIZIONE XLVII.

TEOREMA XXXIII. (*Fig.* 94.)

195. Ne' triangoli rettangoli ABC, il quadrato della ipotenusa AC è uguale alla somma de' due quadrati de' cateti BA, BC, cioè $\overline{AC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{BC}^2$.

DIMOSTRAZIONE.

Supponendo già costruiti (46. 190.) i tre rispettivi quadrati AD, BF, BK, si conduca per lo punto B dello angolo retto la linea BE parallela ai lati CD, AG del quadrato AD, e si congiungano i punti C, F, & B, G colle rette CF, BG, e perchè i triangoli ACF, BAG hanno due lati scambievolmente uguali FA=BA, AC=AG (68.), i quali comprendono uguali angoli FAC, BAG formati da un retto, e dal comune BAC, ne siegue (4. 115.), che sieno le basi CF=BG, ed i triangoli ACF=BAG; ma $\triangle ACF = \square\frac{BF}{2}$ esistenti sopra la base FA, e tra le parallele FA, HC (41. 185.), e per la stessa ragione il triangolo $BAG = \square\frac{AE}{2}$, perchè sopra la base AG, e su le medesime parallele AG, BE; dunque (*Ass.* 1. 91.) $\square$

$\square\frac{BF}{2} = \triangle ACF = \triangle BAG = \square\frac{AE}{2}$, però (*Ass.* 1. 91.) $\square\frac{BF}{2} = \square\frac{AE}{2}$, e multiplicando per 2, ne risulta $\square BF = \square AE$.

Conducendo poscia le rette BD, & AK, si dimostra nella stessa maniera $\square BK = \square CE$; ma (*Ass.* 9. 106.) sommando $\square AD = \square AE + \square CE = \square BF + \square BK$; però $\square AD = \square BF + \square BK$; vuolsi dire $\overline{AC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{BC}^2$, che era ec.

COROLLARIO I. (*Fig.* 95.)

196. Nominando pertanto, ipotenusa $AC = a$, cateto $AB = b$, altro cateto $BC = c$; avendo $\overline{AC}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{BC}^2$, sarà $aa = bb + cc$ equazione inducente a triangolo rettangolo, della cui ipotenusa il quadrato $aa = bb + cc$, somma de' quadrati de' due cateti. Dunque facilmente sommare si possono insieme quanti quadrati ne piace bb, cc, dd; formando un angolo retto in B, di cui un lato $AB = b$, e l' altro lato $BC = c$, sarà della tirata ipotenusa $AC = a$ il quadrato $aa = bb + cc$; quindi sopra la ipotenusa AC alzando la perpendicolare $CF = d$, sarà dell' altra ipotenusa $AF = m$ il quadrato $mm = aa + dd$, e sostituendo il valore di aa, sia $mm = bb + cc + dd$, e così in infinito.

COROLLARIO II. (*Fig.* 95.)

197. Avendo il valore de' due cateti $AB = b$, & $BC = c$, si trova ben tosto della non conosciuta ipotenusa $AC = x$ il valore, quadrando i due cateti, sarà $xx = bb + cc$, e traendone la radice quadrata da tutta l' equazione (*Alg.* 59. 98.), si ottiene $x = \sqrt{bb + cc}$; dunque questa formola sempre ne esprime con x la lunghezza della ipotenusa AC del triangolo rettangolo ABC esser uguale al valore della quadrata radice cavata dalla somma de' quadrati de' due cateti, e perciò quindi nasce la facil maniera, e costruzione geometrica di trarre la quadrata radice dalla somma di due quadrati, anzi di quanti ne piace, riducendogli a due coll' uso del corollario superiore (196.).

COROLLARIO III. (*Fig.* 95.)

198. Ed avendo nel triangolo rettangolo ABC la equazione

$aa = bb + cc$, sarà per antitesi $bb = aa - cc$, e traendone la quadrata radice, risulta $b = \sqrt{aa - cc}$ formola, nella cui radical quantità si vede non già una somma, ma una differenza $aa - cc$ di quadrati, la cui radice quadrata ne somministra il valore di b, uno de' cateti; quindi $\sqrt{aa - cc}$ sempremai è la espressione di un cateto $AB = b$ del triangolo rettangolo ABC, la cui ipotenusa $AC = a$, e l'altro cateto $BC = c$.

Corollario IV.

199. Da quanto si è dimostrato ne' tre corollari superiori, ne siegue la formola $x = \sqrt{aa + bb + cc}$ ec., essere costruibile per un triangolo rettangolo; inoltre quella eziandio, in cui de' quadrati la somma per un coefficiente numerico effettuata si vede, come sarebbe $x = \sqrt{5cc}$, in cui x è valore della ipotenusa AC del triangolo rettangolo ABC, lo cui cateto $AB = 2c$, e l'altro cateto $BC = c$; il perchè essendo (195.) $xx = 4cc + cc = 5cc$, sarà traendo ec. $x = \sqrt{5cc} = c\sqrt{5}$ (*Alg.* 80.).

Da quà dimostrato rimane il teorema ultimo del decimo libro di Euclide, che il lato AB del quadrato BD (*Fig.* 90.) sia incommensurabile colla sua diagonale AE, conciosiachè nomando $AB = a$, sarà l'altro uguale lato $BE = a$, e nel triangolo rettangolo ABE sarà della ipotenusa AE il quadrato $\overline{AE}^2 = 2aa$, e traendo la radice ec. risulta $AE = \sqrt{2aa} = a\sqrt{2}$; ma $\sqrt{2}$ è affatto irrazionale inesprimibile, ed a qualunque razional numero incommensurabile; però in ogni quadrato la diagonale è incommensurabile col lato della stessa figura.

PROPOSIZIONE XLVIII.

Teorema XXXIV. (*Fig.* 96.)

200. Se il quadrato del lato AC del triangolo ABC è uguale a due quadrati degli altri lati AB, BC, lo angolo ABC da questi lati compreso esser dee angolo retto.

Dimostrazione.

Al punto B, estremo della retta AB, si alzi (162.) la perpendicodicolare BD=BC altro lato, e si conduca la retta AD; e perchè si è fatto BD=BC, sarà quadrando l'equazione tutta, $\overline{BD}^2=\overline{BC}^2$; dunque aggiugnendo il comune $\overline{BA}^2$, (*Ass.* 2. 92.), sarà $\overline{BD}^2+\overline{BA}^2=\overline{BA}^2+\overline{BC}^2$; ma (47. 195.) $\overline{DA}^2=$ $=\overline{BD}^2+\overline{BA}^2$ nel triangolo rettangolo ABD; inoltre per ipotesi $\overline{AC}^2=\overline{BA}^2+\overline{BC}^2$; dunque (*Ass.* 1. 91.) $\overline{DA}^2=\overline{AC}^2$, e traendone la quadrata radice, risulta DA=AC, ed essendo per costruzione BD=BC, ed il lato BA comune, sono gli due triangoli ABD, ABC scambievolmente equilateri; perciò equiangoli, ed uguali hanno gli angoli ABD, ABC; ma il primo di questi per la fatta costruzione è retto, perciò retto sarà eziandio il dato angolo ABC, che era ec.

ANNOTAZIONE.

Ottima cosa sembra, e necessaria di terminare il presente primo libro, coll' aggiunta di alcuni geometrici problemi, i quali risolver si possono da quanto si è detto, e spezialmente per la proposizione 47., e suoi corollari; da tutto ciò se ne ritrae il vantaggio di incominciare a congiugner insieme l'analisi colla Geometria lineare, in cui tutto risiede il nobile, e maestrevole grado della Geometria.

PROBLEMA I. (*Fig.* 97.)

201. Ritrovare i precisi tre lati del triangolo ABC, di cui sono date tre somme de' lati presi a due a due.

RISOLUZIONE.

Sieno le tre somme delle tre linee date $AB+AC=a$, $AB+$ $+BC=b$, $AC+BC=c$. Sia nominata $AC=x$, sarà $AB=a$ $-x$, siccome $BC=c-x$, e sostituendo questi due valori di AB, BC nella seconda equazione, sarà $AB+BC=b$, cioè $a-x+c-x=b$, e riducendo $a+c-2x=b$, e per antitesi $2x=a+$ $+c-b$, e dividendo l'equazione per 2, sarà $x=\frac{a+c-b}{2}$.

COSTRUZIONE.

Si tiri la infinita linea DE, dalla quale si recida la porzione ne DF uguale alle due date $a+c$, e da DF si tolga $FG=b$, sarà $DG=a+c-b$; la cui metà DH sarà $\frac{a+c-b}{2}=x=AC$ primo lato. Togliendo poscia dalla retta a la lunghezza ritrovata AC, rimane AB lato secondo, e dalla somma c togliendo la medesima AC, nel residuo si ha il terzo lato BC, colle quali tre date linee si costruisce per lo problema il triangolo desiderato.

PROBLEMA II. (*Fig.* 98.)

202. Di due rette linee datane la somma AB, e la differenza CD, ritrovare le medesime linee.

RISOLUZIONE.

Sieno la somma $AB=a$, la loro differenza $CD=b$, la ricercata linea maggiore $=x$, e la minore linea ricercata $=y$, e per questo sarà loro somma $x+y=a$, e la loro differenza $x-y=b$, e ricavando dalle due equazioni i valori di y, (*Alg.* 107.) si ottiene $y=a-x$, & $y=x-b$, e paragonando questi due valori, ne nasce $x-b=a-x$, e per antitesi $2x=a+b$, e dividendo per 2, sarà $x=\frac{a+b}{2}$, e sostituendo questo valore di x in uno de' valori di y, ne risulta $y=\frac{a-b}{2}$.

COSTRUZIONE.

Perchè $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, si divida per metà la linea AB in F, alla cui metà si aggiunga la metà della linea $CD=b$ da F in G, sarà tutta AG la ricercata linea maggiore $=x$.

A ritrovar poi la minore $y=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$, dalla metà BF della somma si tolga FG, metà della differenza, ed il residuo BG sarà la minore $=y$.

PROBLEMA III. (*Fig.* 99.)

203. Di un parallelogrammo rettangolo data l'area, e la differenza de' lati, trovare i suoi lati.

RI-

RISOLUZIONE.

Il piano dato del rettangolo ſia uguale al quadrato della linea a, però ſarà $=aa$, la data differenza de' lati ſia $=b$, ſia il lato minore $=x$, ſarà il maggiore $=b+x$; ed il rettangolo ſarà $=bx+xx$, ma queſto è $=aa$; dunque $xx+bx=aa$, ed aggiugnendo il quadrato $\frac{bb}{4}$ (*Alg.* 113.) $xx+bx+\frac{bb}{4}=aa+\frac{bb}{4}$, e traendo la radice (*Alg.* 55. 59.) $x+\frac{b}{2}=\pm\sqrt{\frac{aa+bb}{4}}$, e per antiteſi $x=\pm\sqrt{\frac{aa+bb}{4}}-\frac{b}{2}$.

COSTRUZIONE.

La quantità radicale $aa+\frac{bb}{4}$ ſi riduca al comun diviſore 4 quadrato, che traggaſi fuori del ſegno, ſarà $\frac{\sqrt{4aa+bb}}{2}$. Adeſſo per avere la radice di $4aa+bb$, ſi formi lo angolo retto MFH, in cui ſi prenda $FM=2a$, & $FG=b$, ſi conduca l' ipotenuſa $MG=\sqrt{4aa+bb}$, dalla cui metà MO togliendone $OR=\frac{b}{2}$, rimane $MR=x$ lato minore, ed aggiugnendo ad $OR=\frac{b}{2}$ la retta $OG=\frac{\sqrt{4aa+bb}}{2}$, ſarà GR lato maggiore, eſſendo $b+x=b\pm\frac{\sqrt{4aa+bb}-b}{2}=\frac{b\pm\sqrt{4aa+bb}}{2}$.

DEGLI

DEGLI ELEMENTI DI EUCLIDE.

LIBRO SECONDO.

DEFINIZIONE I.

204. Ogni rettangolo parallelogrammo, diceſi contenuto da due rette linee, che comprendono lo angolo retto. Si oſſervi quanto ſi è detto ſopra di ciò nel corollario I. della propoſizione 36. al num. 175.

DEFINIZIONE II. (*Fig.* 100.)

205. In ogni parallelogrammo ſpazio ABCD, ciaſcuno di quelli circa il diametro poſti inſieme co' due ſupplementi (*lib.* 1. *def.* 37. 84.) ſi appelli Gnomone.

ANNOTAZIONE.

206. Per la voce rettangolo, ſempre s'intende il quadrilungo (*Def.* 31. 69.), cioè parallelogramma figura quadrilatera, che ha uguali gli adverſi lati, ed i quattro angoli retti.

Giova di molto nello eſprimere i rettangoli, ſervirſi de' due lati il rettangolo medeſimo generanti, comunque ſieno locati, o in retta linea, o nell' angolo determinato; v. g. ſupponendo BC=BO, allora □ABC, & AB×BC, & □ABO, & AB×BO, ſono tutte eſpreſſioni del rettangolo iſteſſo ABCD.

Sovente eziandio vengono denominate le figure parallelogramme di quattro lati, indicando i ſoli due angoli oppoſti; così AC, oppure BD ugualmente ne moſtrano la figura quadrilatera ABCD.

In riguardo poi allo Gnomone, egli è coſtume (*Fig.* 107.) dal centro H, ove ſi ſegano le tre linee, diametro FB, e riſpettive parallele LK, GC, e fare un arco di cerchio MNX, diſegnante lo Gnomone MNX, da cui il □LG ne viene eſcluſo.

PRO-

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA I. (*Fig.* 191.)

207. Se sono due rette linee A, & BC, delle quali una BC venga recisa, come piace, nelle parti BD, DE, EC ec.; il rettangolo dalle due intere date linee compreso è uguale a quei rettangoli, che dalla non recisa A, e da ciascuna parte BD, DE, EC, della recisa BC, sono compresi; cioè $A \times BC = A \times BD + A \times DE + A \times EC$.

DIMOSTRAZIONE I.

Colle due date rette A, BC, si compia il parallelogrammo $BH = A \times BC$ (192.), e per i punti D, E, si conducano (31. 1. 158.) le rette DK, EL parallele a' paralleli lati BG, CH, saranno (34. 1. 172.)

$BG = DK = EL = CH = A$ data; e compiuti i rettangoli, sarà $\square BK = A \times BD$, $\square DL = A \times DE$, $\square EH = A \times EC$; ma egli è (*Ass.* 9. 106.) $\square BH = \square BK + \square DL + \square EH$, però essendosi fatto $BH = A \times BC$, sia $A \times BC = A \times BD + A \times DE + A \times EC$, che era ec.

DIMOSTRAZIONE II. GENERALISSIMA.

208. Delle quantità a, & b, il rettangolo è $= ab$. Sia b divisa nelle parti c, d, m, sarà (*Ass.* 9. 106.) $b = c + d + m$, e multiplicando l' equazione per a, sarà $ab = ac + ad + am$, che era ec.

ANNOTAZIONE.

Delle precedenti due dimostrazioni, la seconda analitica è più facile, e generalissima, che a tutte le quantità si puote applicare. Nelle altre proposizioni sarà in uso la maniera analitica per esercizio degli studiosi: ed anche il primo metodo sintetico, come quello, che in effetto presenta agli occhi i quadrati, ed i rettangoli, potenze delle rette linee, di cui nel presente libro Euclide intende trattare.

PRO-

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA II. (*Fig.* 102.)

209. Se la retta linea AB, comunque piace, ſegata venga in C, i rettangoli contenuti da tutta con ciaſcheduno ſegmento, ſono uguali al quadrato, che dalla data linea ſi forma; cioè $\square AF+\square CE=\overline{AB}^2$.

DIMOSTRAZIONE I.

Su la data AB ſi formi (46. 1. 190.) il quadrato $AE=\overline{AB}^2$ e per lo punto C ſi conduca la retta CF (31. 1. 158.) parallela al lato AD, o ſia BE (30. 1. 157.), ſaranno compiuti i rettangoli, cioè $\square AF=AB\times AC$; dacchè $AB=AD=CF=BE$, $\square CE=AB\times BC$. Ma egli è (*Aſs.* 9. 106.) $\square AE=\square AF+$ $+\square CE$; dunque (*Aſs.* 1. 91.) $\overline{AB}^2=AB\times AC+AB\times BC$, che era ec.

DIMOSTRAZIONE II. GENERALISSIMA.

210. Della quantità a ſieno le parti b, c, ſarà (*Aſs.* 9. 106.) $a=b+c$, e multiplicando per a, ſi ottiene $aa=ab+ac$.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA III. (*Fig.* 103.)

211. Se la retta linea AB, ſia come ſi voglia, ſegata in C, il rettangolo ABC, cioè $\square AE$ contenuto da tutta, e da una porzione BC, è uguale al rettangolo compreſo dai due ſegmenti, inſieme col quadrato della già preſa porzione $\square ABC=AC\times$ $\times BC+\overline{BC}^2$.

DIMOSTRAZIONE I.

Colle due rette AB, & BC ſua porzione ſi formi (192.) il $\square ABC=AB\times BC=AE$, e dal punto C ſi conduca CD parallela (31. 1. 158.) al lato AF, ſaranno $BC=BE=DE=CD=$ $=AF$, sì per la fatta coſtruzione, sì per (34. 1. 172.), e ſaranno compiuti gli $\square AD=AC\times BC$. Inoltre per gli uguali lati, ed ed angoli retti $\square CE = \overline{BC}^2$. Dunque essendo (*Ass.* 9. 106.) $\square AE = \square AD + \square CE$, sarà $\square ABE$, cioè $AB \times BC = AC \times BC + \overline{BC}^2$, che era ec.

Dimostrazione II. Generalissima.

212. Della quantità a sieno le parti b; & c, sarà (*Ass.* 9. 106.) $a = b + c$, e multiplicando per b, sarà $ab = bb + bc$, oppure multiplicando per c, $ac = bc + cc$, che era ec.

PROPOSIZIONE IV.

Teorema IV. (*Fig.* 104.)

213. Se la retta linea EF segata rimane in G, il quadrato da tutta descritto è uguale a due quadrati di ciaschedun segmento, ed insieme al doppio rettangolo da due segmenti compreso, che vale a dire $\overline{EF}^2 = \overline{GF}^2 + \overline{GE}^2 + 2GF \times EG$.

Dimostrazione I.

Sopra la retta EF sia costruito (1. 46. 190.) il suo quadrato $ABEF = \overline{EF}^2$, la cui diagonale BF segata in H dalla CG proveniente dal punto G parallela (1. 31. 158.) al lato AF, o sia BE; quindi per H sia condotta LHK parallela al lato AB, o sia EF; dunque (1. 29. 153.) gli angoli esterno, ed interno $FHC = FBA = EFB$ alterni. Ma ne' due triangoli rettangoli isosceli ABF, BEF, essendo uguali i quattro semiretti angoli (163.) su la base BF, ed uguali a' predetti i quattro angoli nel punto H formati dalla diagonale BF (1. 29. 153.), ne siegue, che ne' due triangoli FHG, LFH sopra la comune base HF uguali sono i semiretti angoli; però (1. 6. 118., & 1. 34. 172.) sono i quattro lati $GF = HL = FL = HG$, e per l'angolo retto in F egli è (1. 191.) GL un quadrato della retta, e porzione GF; però $\square GL = \overline{GF}^2$; così ne' due triangoli CBH, HBK si dimostra $\square CK = \overline{EG}^2$ (1. 33. 171.).

Ma i compimenti $AH = EH$ (1. 43. 187.) contenuti da' lati $KH = HC = GE$, & $GH = HL = FG$; però sono gli uguali compimenti $AH + EH = 2EG \times FG$; e perchè $\square AE = \overline{FE}^2 = \square CK +$

 $+ \square$

$+\square GK+\square AH+\square EH$ (*Ass.* 9. 106.), sarà (*Ass.* 1. 91.), $\overline{FE}^2=\overline{GE}^2+\overline{FG}^2+2FG\times EG$, che era ec.

DIMOSTRAZIONE II.

214. Della data $FE=a$ sieno le parti $EG=b$, & $FG=c$, sarà (*Ass.* 9. 106.) $a=b+c$, e quadrando (*Alg.* 41.) sarà $aa=bb+cc+2bc$, che era ec.

COROLLARIO.

215. Dalla prima dimostrazione con chiara evidenza ricavasi, che dentro il quadrato AE, le figure GL, CK formate d' intorno alla diagonale FB, sono anche quadrati.

E dalla seconda dimostrazione ben si diduce, che il quadrato di qualunque differenza $a-b$, o sia di quantità composta da una parte positiva a, e da altra negativa $-b$, contenga i quadrati positivi dell' una, e dell' altra parte; conciossiachè a multiplicato per $a=aa$, & $-b\times-b=bb$; Ma il doppio rettangolo è negativo, perchè $+a\times-b=-ab$, & $-b\times+a=-ab$; laonde sarà il quadrato $=aa-2ab+bb$.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA V. (*Fig.* 105.)

216. Se la retta AB viene segata a mezzo in C, e disugualmente in D, egli è il rettangolo delle parti disuguali col quadrato della parte di mezzo, uguale al quadrato della metà di AB, cioè $AD\times BD+\overline{CD}^2=\overline{BC}^2=\frac{\overline{AB}^2}{4}$.

DIMOSTRAZIONE I.

Sia $\square CE=\overline{BC}^2$, la cui diagonale BF, & DG parallela al lato BE, segante la diagonale in H; quindi per H sia tirata $OK=AB$, e sua parallela, e congiunta AK parallela alla DH (133. 171.), sarà per lo precedente corollario GL quadrato della retta CD; però $\square GL=\overline{CD}^2$; e perchè (1. 43. 197.) i compimenti $CH=HE$, si ottiene, aggiugnendo il quadrato DO (*Ass.* 2. 92.), $CH+DO=HE+DO$; vuolsi dire $CO=DE=$

AL

AL (175.); quindi aggiugnendo il □CH, farà (*Ass.* 2.) □AL+ +□CH=□DE+□CH, che vale a dire, AH=MNX gnomone (*Def.* 2. 119.); ma BD=DH (1. 34 172.); però □AH= =AD×BD; laonde (*Ass.* 1. 91.) AD×BD=MNX gnomone, ed aggiunto il □GL=$\overline{CD}^2$, farà AD×BD, +$\overline{CD}^2$=$\overline{BC}^2$= $=\frac{\overline{AB}^2}{4}$=□CE=MNX+□GL, che era ec.

Dimostrazione II. Generalissima.

217. Della quantità a, la metà $\frac{a}{2}$; ma dividendo a disugualmente, sia tra le due metà, differenza $=c$, farà la parte maggiore $=\frac{a}{2}+c$, e la parte minore $\frac{a}{2}-c$, lo cui rettangolo $\frac{a+c}{2}\times\frac{a-c}{2}$ $=\frac{aa}{4}-cc$, al quale aggiunto il quadrato cc della differenza, si ottiene $\frac{aa}{4}-cc+cc=\frac{aa}{4}$ quadrato della metà.

PROPOSIZIONE VI.

Teorema VI. (*Fig.* 106.)

218. Se la retta linea AD viene segata a mezzo in C, e per diritto giunta le sia altra retta BD, il rettangolo contenuto da tutta la composta, e dalla aggiunta, ed insieme il quadrato della metà, sono uguali al quadrato della linea composta dalla metà, e dalla aggiunta: vuolsi dire AB×BD+$\overline{DC}^2$=$\overline{CB}^2$.

Dimostrazione I.

Sia CE il quadrato di CB composta della metà colla aggiunta; però □CE=$\overline{CB}^2$, di cui la diagonale BF segata in H da DG parallela di CF, e finalmente sia per H condotta la linea OK parallela ad AB, dal cui punto A proceda AK parallela al lato CL, e che incontri in K la tirata OK, farà nel quadrato DO (2. 4. 213.) il lato BD=BO; ed inoltre □AO= =AB×BD, per le rette OB=BD. Inoltre egli è □GL=$\overline{DC}^2$, e per questo essendo eziandio □AL=□CH=□HE, compi-

menti

menti (1. 43. 187.), esser dee (*Ass.* 2. 92.) □AH═□CH ═+□HE, e giugnendo DO quadrato, sia □AO, cioè AB×BD═MNX gnomone, e giugnendo □GL═$\overline{DC}^2$, sia AB×BD+$\overline{DC}^2$═MNX+□GL═□CE═$\overline{CB}^2$, che era ec.

Dimostrazione II. Generalissima.

219. $\frac{a}{2}$ è metà di a, alla quale aggiugnendo c, sarà la composta quantità $a+c$, di cui il rettangolo nell' aggiunta c, egli è $=ac+cc$, ed aggiugnendo il quadrato $\frac{aa}{4}$ della metà, si ottiene $\frac{aa}{4}+ac+cc$ quadrato di $\frac{a}{2}+c$, quantità formata dalla metà di a, e dalla aggiunta c.

Proposizione VII.

Teorema VII. (*Fig.* 107.)

220. Se la retta linea AB, come aggrada, recidasi in C, i quadrati di tutta la linea, e di una sua parte, sono uguali al doppio rettangolo da tutta, e dalla medesima parte formato insieme con il quadrato dell' altra parte, cioè $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2AB\times BC+\overline{AC}^2$.

Dimostrazione I.

Di tutta AB sia il quadrato AE═$\overline{AB}^2$, la cui diagonale BF segata in H da CG parallela ad AF, e quindi venga per H condotta KL ad AB parallela, sarà (2. 4. 215. *Corol.*) □CK═$\overline{BC}^2$, & □GL═$\overline{AC}^2$. Inoltre (1. 43. 187.) i compimenti AH═HE, e giugnendo □CK, gli è (*Ass.* 2. 92.) □AK═□CE; e raddoppiando si ottiene 2□AK═□AK+□CE═$\overline{CB}^2$+MNX gnomone; ma □AK═AB×BC; sarà sostituendo (*Ass.* 13. 110.) 2AB×BC═$\overline{BC}^2$+MNX, ed aggiugnendo □GL═$\overline{AC}^2$, sarà 2AB×BC+$\overline{AC}^2$═$\overline{BC}^2$+MNX+□GL; ma MNX+□GL═□AE═$\overline{AB}^2$; si ottiene sostituendo $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2AB\times BC+\overline{AC}^2$, che era ec.

Di-

Dimostrazione II. Generalissima.

221. Della quantità a sia una parte $=b$, sarà l'altra $=a-b$, e la somma de' quadrati di tutta a, e di una sua parte $a-b$, sarà $=2aa-2ab+bb$. Ma il doppio rettangolo di a, e di $a-b$ egli è $2aa-2ab$, al quale aggiugnendo il quadrato bb dell'altra omessa parte b, si ottiene la somma $2aa-2ab+bb$ uguale all'altra già ritrovata.

PROPOSIZIONE VIII.

Teorema VIII. (*Fig.* 108.)

222. Se una retta linea AB venga segata, come più aggrada in C, il quadruplo rettangolo contenuto da tutta, e da un suo segmento, col quadrato dell' altro segmento, è uguale al quadrato della retta linea composta da tutta, e dal prescelto segmento.

Dimostrazione.

Si prolunghi la retta AB in D, che sia BD=BC segmento eletto; sia formato il $\square AE=\overline{AD}^2$, la cui diagonale FD dalle rette linee CG, BS, parallele al lato AF, venga segata in H, & R, pe' quali punti siano condotte KL, OT parallele al lato AD: essere deono, nelle costruite parallelogramme figure (1. 34. 172.), le linee rette BC=BD=CQ=TL ec., siccome eziandio AC=HL=GH=EK ec.; quindi (175.) uguali sono i quattro quadrati $CR+RK+OB+QI=4CR$, nel quadrato CK compresi. E così uguali sono i quattro rettangoli $AQ+TH+HS+$ $+SK=4AQ$, contenuti ne' due supplementi uguali AH, HE; ma egli è lo gnomone $MNX=\square CK+\square AH+\square HE=$ $=4AQ+4CR$, ed un rettangolo $AQ+\square CR=\square AR$; dunque $4AR=4AQ+4CR$; laonde $4\square AR=MNX$ gnomone: e perchè rettangolo $AR=AB\times BC$, sarà $4AB\times BC=MNX$ gnomone, e giugnendo il comune quadrato $GL=\overline{AC}^2$, si ottiene $4AB\times BC+\overline{AC}^2=MNX+\square GL=\square AE=\overline{AD}^2$; vuolsi dire $4AB\times BC+\overline{AC}^2=\overline{AD}^2$.

DIMOSTRAZIONE II.

223. Della quantità a divisa, come piace, sia una parte $=b$, sarà la rimanente $=a-b$. Il quadruplo rettangolo di $a\times b$, sarà $=4ab$, al quale aggiunto il quadrato $aa-2ab+bb$ della rimanente parte $a-b$, sarà la somma $=aa+2ab+bb$ quadrato della quantità $a+b$ composta di a, e di una sua parte b.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA IX. (*Fig.* 109.)

224. Se la retta linea AB viene segata a mezzo in C, e disugualmente in D, i quadrati, che da disuguali segmenti si formano, sono doppi del quadrato della metà, insieme col quadrato della intermedia porzione, che è quanto a dire $\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=2\times\overline{AC}^2+2\times\overline{CD}^2$.

DIMOSTRAZIONE.

Dal punto C di mezzo si erga alla data AB, (1. 11. 125.) la perpendicolare CE$=$CA$=$CB; onde esser deono (1. 4. 115.) EA$=$EB ipotenuse de' due isosceli rettangoli triangoli ACE, BCE, ne' quali sopra le medesime ipotenuse (163.) semiretti sono gli angoli A, B, ed i due in E, il quale perciò è retto. Si alzi da D la perpendicolare DF, perciò (155.) parallela alla CE, e tirisi FG parallela ad AB, sarà nel triangolo rettangolo FGE (163.) anche semiretto lo angolo GFE$=$GEF semiretto; quindi GE$=$GF (1. 6. 118.), e così nel triangolo rettangolo BDF essendo semiretto l'angolo B, sarà (163.) semiretto anche lo angolo in F su la ipotenusa BF, perciò BD$=$DF. Tutto ciò dimostrato, egli è $\overline{AC}^2=\overline{CE}^2$; quindi $\overline{AC}^2+\overline{CE}^2=2\overline{AC}^2=\overline{AE}^2$ (1. 47. 195.). Così essendo $\overline{GF}^2=\overline{GE}^2$, sarà $\overline{GF}^2+\overline{GE}^2=2\overline{GF}^2=2\overline{CD}^2=\overline{EF}^2$; però $\overline{AE}^2+\overline{EF}^2=2\overline{AC}^2+2\overline{CD}^2$; ma tirando AF, egli è $\overline{AF}^2=\overline{AE}^2+\overline{EF}^2$ (1. 47. 195.); però esser dee (*Ass.* 1. 91.) $2\overline{AC}^2+2\overline{CD}^2=\overline{AF}^2=\overline{AD}^2+\overline{DF}^2$, ne' triangoli AEF, ADF rettangoli; ma si è dimostrato DF$=$BD, sarà sostituendo, $\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=2\overline{AC}^2+2CD^2$, che era ec.

DIMOSTRAZIONE II.

225. Sia data la quantità $=2a$, che divisa a mezzo, sarà sua metà $=a$. La medesima data quantità venga disugualmente divisa, e sia tra la maggiore parte, e minore, la semidifferenza $=b$; dunque la parte maggiore sarà $a+b$, lo cui quadrato $=aa+2ab+bb$; sarà eziandio la parte minore (202.) $=a-b$, suo quadrato $=aa-2ab+bb$, e la somma de' due quadrati viene ad essere $aa+2ab+bb+aa-2ab+bb=2aa+2bb$ quantità doppia di $aa+bb$, somma de' quadrati della metà di a, e dell' eccesso della parte maggiore sopra l' altra metà, vuolsi dire della parte di mezzo.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA X. (*Fig.* 110.)

226. Se la retta AB sia recisa a mezzo in C, ed abbia a dirittura l' aggiunta d' altra retta BD, il quadrato di tutta la composta, insieme col quadrato della aggiunta, sono doppi del quadrato della metà, unito al quadrato dell' altra composta retta linea dalla metà, e dalla aggiunta. $\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=2\overline{AC}^2+2\overline{CD}^2$.

DIMOSTRAZIONE.

Si alzi dal punto C su la ABD la perpendicolare $CE=AC=BC$; per D si conduca la infinita FDG perpendicolare (162.) alla medesima ABD, si tiri EB fino in G (159.), segante amendue le parallele (155.) EC, FG, e si conducano le linee AE, AG, e pel punto E si tiri EF parallela alla CD: saranno (193.) retti i quattro angoli nel rettangolo CF, e come sopra sarà retto l' angolo (193.) AEB, e semiretti gli angoli sopra le tre ipotenuse (163.) AE, EB, BG; quindi $AE=EB$ (1. 4. 115.), & $BD=DG$ (1. 6. 118.); il perchè ne siegue, che essendo $\overline{AC}^2=\overline{EC}^2$, sarà $\overline{AC}^2+\overline{EC}^2=2\overline{AC}^2=\overline{AE}^2$ (1. 47. 195.), e nell' altro triangolo EFG rettangolo in F, ed isoscele pe' due angoli semiretti alla base EG, sarà $\overline{FG}^2=\overline{EF}^2$, e col medesimo raziocinio $\overline{FG}^2+\overline{EF}^2=2\overline{EF}^2=EG^2$ (1. 47. 195.); ma le rette $EF=CD$; dunque $\overline{EG}^2=2\overline{CD}^2$. E perchè si è dimostrato essere

sere

sere $\overline{AE}^2 = 2\overline{AC}^2$, ne siegue (*Ass.* 2. 92.) $2\overline{AC}^2 + 2\overline{CD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EG}^2 = \overline{AG}^2$ nel triangolo rettangolo AEG; ma $\overline{AG}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DG}^2$ nel triangolo rettangolo ADG; perciò (*Ass.* 1.) sarà $2\overline{AC}^2 + 2\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DG}^2$; ma sono le linee DG=DB, onde sostituendo, sarà $\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 2\overline{AC}^2 + 2\overline{CD}^2$, che era ec.

DIMOSTRAZIONE II.

227. La data quantità sia $=2a$, a cui aggiunta la quantità $=b$, sarà composta quantità $=2a+b$, lo cui quadrato colla aggiunta del quadrato di b, sarà $=4aa+4ab+2bb$, quantità doppia di $2aa+2ab+bb$, somma de' quadrati di a metà, & di $a+b$ composta dell' altra metà, e dell' aggiunta b.

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA I. (*Fig.* 111.)

228. Segare la data AB in H, di maniera che il quadrato di una parte AH sia uguale al rettangolo formato da tutta coll' altra parte BH.

RISOLUZIONE.

Sopra la data AB si formi il quadrato ABDC (1. 46. 190.), ed il prossimo lato AC si recida per mezzo in E (1. 10. 124.), e si conduca BE; il medesimo lato AC si prolunghi in F, che sia EF=EB. Si descriva sovra AF altro quadrato FH, il cui lato GH si prolunghi, finchè seghi CD in K, sarà H il punto desiderato.

DIMOSTRAZIONE.

Dacchè si è segata AC per mezzo in E, e le si è aggiunta a dirittura AF, sarà (2. 6. 218.) $CF \times AF + \overline{AE}^2 = \overline{EF}^2 = \overline{EB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AE}^2$ (1. 47. 195.), cioè $CF \times AF + \overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AE}^2$ (*Ass.* 1. 91.); però $CF \times AF = \overline{AB}^2$ (*Ass.* 3. 93.); e perchè $CF \times AF = \square CFGK$; però (*Ass.* 1. 91.) $\overline{AB}^2 = \square CFGK$, e togliendo il comune $\square AK$, rimane (*Ass.* 3. 93.) $\square FH = \square HD$; ed essendo BD=AB, egli è $\overline{AH}^2 = \square AB \times BH$, che era ec.

DIMOSTRAZIONE II.

Sieno $AB = AC = 2a$; dunque la ſua metà $AE = a$; $EF = EB = \sqrt{5aa}$ ipotenuſa del triangolo rettangolo EAB; dunque ſarà $EF - AE = AH = \sqrt{5aa} - a$, e perciò $BH = 2a - \sqrt{5aa} + a = 3a - \sqrt{5aa}$, e quadrando $AH = \sqrt{5aa} - a$, ſi ottiene il quadrato $5aa - 2a\sqrt{5aa} + aa = 6aa - \sqrt{20a^4}$. Si multiplichi adeſſo $BH = 3a - \sqrt{5aa}$ per tutta $AB = BD = HK = 2a$, ſarà prodotto $6aa - 2a\sqrt{5aa} = 6aa - \sqrt{20a^4}$, e come di ſopra ſi è ritrovato eſſer il valore del quadrato di AH; dunque $\overline{AH}^2 = \square AB \times BH$, che ec.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA XI. (*Fig.* 112.)

230. Negli ottuſangoli triangoli ABC, il quadrato di AC, lato oppoſto all' angolo ottuſo, è tanto maggiore dei due quadrati inſieme preſi, de' lati BA, BC, formanti l' angolo ottuſo, quanto è il valore del doppio rettangolo $AB \times BD$, formato da uno de' medeſimi lati, e dallo eſterno ſegmento determinato dal vertice B dello angolo ottuſo, e dal punto D, in cui dall' acuto C il perpendicolo cade (146.) $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BD$, o ſia $\overline{AC}^2 - 2AB \times BD = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

DIMOSTRAZIONE.

Si prolunghi un lato AB, che concorra in D col perpendicolo CD cadente dall' oppoſito angolo acuto C, ſarà (1. 47. 195.) nel triangolo rettangolo ADC, lo cui cateto AD ſegato rimane (4. 213.) nel punto B, il quadrato della ipotenuſa $\overline{AC}^2 = CD^2 + BD^2 + AB^2 + 2AB \times BD$, & (1. 47.) $\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2$; dunque ſoſtituendo (*Aſs.* 13. 110.) $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 + 2AB \times BD$, o ſia per antiteſi $\overline{AC}^2 - 2AB \times BD = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2$, che era ec.

DIMOSTRAZIONE II.

231. Sieno $AC = a$, $AB = b$, $BC = c$, $BD = m$, $AD = b + m$, ſaranno $\square AD = bb + 2bm + mm$, ma nel triangolo BDC rettangolo, $\square CD = cc - mm$, e così nel triangolo ADC rettangolo,

$\square CD = aa - bb - mm - 2bm$; dunque (*Ass.* 1. 191.) $aa - bb - mm - - 2bm = cc - mm$, e spurgando, e per antitesi $aa - 2bm = bb + cc$, che era ec.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA XII. (*Fig.* 113.)

232. Ne' triangoli acutangoli ABC il quadrato del lato AC opposto all' angolo B acuto, è minore di due quadrati de' lati rimanenti BC, BA, per la quantità del doppio rettangolo formato da un lato BA, e dal segmento BD, contenuto tra il punto B dell' angolo acuto, ed il punto D, in cui CD perpendicolo cade, cioè $\overline{AC}^2 + 2AB \times BD = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

DIMOSTRAZIONE.

Dacchè rimane AB segata in D, egli è (2. 7. 220.) $\overline{AD}^2 + + 2AB \times BD = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2$, giungasi $\overline{CD}^2$, sarà $\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 + + 2AB \times BD = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{AB}^2$, ma $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$ (1. 47. 195.); siccome $\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2$, però sostituendo, risulta $\overline{AC}^2 + 2AB \times BD = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, che era ec.

DIMOSTRAZIONE II.

233. Sieno dinominate $AC = a$, $AB = b$, $BC = c$, $BD = m$, $AD = b - m$, sarà $\square AD = bb + mm - 2bm$, e nel triangolo CDB rettangolo, $\square CD = cc - mm$, così nel triangolo CDA rettangolo, $\square CD = aa - bb - mm + 2bm$; quindi (*Ass.* 1. 191.) $aa - bb - - mm + 2bm = cc - mm$, e spurgando $aa - bb + 2bm = cc$, e per antitesi $aa + 2bm = cc + bb$, o sia $aa = cc + bb - 2bm$, che era ec.

PROPOSIZIONE XIV.

PROBLEMA II. (*Fig.* 114.)

234. Al dato rettilineo A formare un quadrato uguale.

RISOLUZIONE.

Si formi il rettangolo $BD = A$ rettilineo dato (1. 45. 189.): il maggior lato BE si prolunghi in F, che sia $EF = DE$, lato minore

nore (dacchè se fosse $BE = DE$, sarebbe risoluto il problema). Si divida BF a mezzo in G, e centro G, raggio FG, descrivasi il mezzo cerchio BHF: si prolunghi DE per fino alla circonferenza in H; dico EH essere il lato del quadrato, che si ricerca $\overline{EH}^2 = A$ rettilineo.

DIMOSTRAZIONE.

$\square BEF$, cioè $BE \times EF + \overline{GE}^2 = \overline{GF}^2$ (2. 5. 125.) si tiri GH raggio, sarà $\overline{GF}^2 = \overline{GH}^2$ (*Def.* 15. 22.); ma egli è (1. 47. 195.) $\overline{GH}^2 = \overline{EH}^2 + \overline{GE}^2$; però (*Ass.* 1. 91.) $BE \times EF + \overline{GE}^2 = \overline{EH}^2 + \overline{GE}^2$, e togliendo il comune $\overline{GE}^2$, rimane $BE \times EF$, cioè $\square BD = \overline{EH}^2 = A$, che era ec.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA XIII. (*Fig.* 115.)

235. Se nel triangolo isoscele ABF, dal verticale angolo F, una retta linea cade alla base AB, sarà il suo quadrato, insieme col rettangolo de' segmenti dal perpendicolo formati, uguale al quadrato di uno degli uguali lati AF, o sia BF, cioè $\overline{FC}^2 + AC \times BC = \overline{AF}^2$.

DIMOSTRAZIONE.

Primo caso. Sia la cadente FC perpendicolare alla base AB; dunque $\overline{FC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AF}^2$ (1. 47. 195.); ma le rette $AC = BC$ (117.); dunque $\overline{CA}^2 = CA \times CB$, e sostituendo (*Ass.* 13. 110.), risulta $\overline{FC}^2 + CA \times CB = \overline{AF}^2 = \overline{BF}^2$ (*Fig.* 116.).

Secondo caso. La cadente FC sia obliqua alla base AB, sarà il punto C ben diverso dal punto D, in cui (142.) dal verticale angolo F il perpendicolo cade. Rimane adunque la retta AB disugualmente recisa da C, ed ugualmente da D (117.); laonde (2. 5. 216.) egli è $AC \times BC + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2$, ed aggiugnendo il comune $\overline{DF}^2$, si ottiene $AC \times BC + \overline{CD}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{DF}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AF}^2$ (1. 47. 195.): ma $\overline{FC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DF}^2$; dunque sostituendo, risulta $\overline{FC}^2 + AC \times BC = \overline{AF}^2$, che era ec.

DEGLI ELEMENTI DI EUCLIDE.

LIBRO TERZO.

DEFINIZIONE I.

236. UGuali cerchi sono quelli, che hanno i diametri, o i raggi uguali.

DEFINIZIONE II.

237. La retta linea dicesi toccare il cerchio, qualora toccandolo prolungata nol sega (46).

DEFINIZIONE III.

238. E si vuol dire, che si tocchin que' cerchi tra loro, i quali toccandosi, pur non si segano.

DEFINIZIONE IV.

239. Si nomano equidistanti dal centro le linee rette, quante volte le perpendicolari a quelle dal centro dismesse, uguali sono tra loro, e quelle si dicono più lontane, alle quali maggior perpendicolo cade.

DEFINIZIONE V. (*Fig.* 117.)

240. Porzione, o sia segmento del cerchio è una figura mistilinea compresa dalla corda, e dall' arco dalla corda reciso (27.); dicesi maggiore il segmento, se in esso il centro si trova, quale è FAB; ma l' altro ABE, in cui il centro non vi è, si appella minore.

DEFINIZIONE VI. (*Fig.* 117.)

241. Angolo del segmento è il mistilineo FAB dall' arco AF, e dalla corda BA contenuto.

DEFINIZIONE VII. (*Fig* 118.)

242. Angolo nel ſegmento egli è l'angolo B, o ſia ABD, la cui cima B inſiſte alla circonferenza, ed i lati co' punti eſtremi A, D, ſi connettono co' punti eſtremi della corda AD.

DEFINIZIONE VIII. (*Fig.* 119.)

243. Ma dove le rette linee AB, DB, formanti lo angolo inſiſtono ſopra una porzione di circonferenza, diceſi l'angolo poſarſi, ed inſiſtere ſopra quell'arco.

DEFINIZIONE IX. (*Fig.* 120.)

244. Settore del cerchio è una miſtilinea figura contenuta da due raggi, e dall'arco da quelli reciſo, come gli è il ſettore ABD.

DEFINIZIONE X.

245. Simili porzioni di cerchio, quelle ſono, che angoli uguali ricevono, o ſoſtentano.

LEMMA.

Teorema. (*Fig.* 121.)

246. Se la linea retta AB viene ſegata in A, e riſegata in B, dall'arco di un cerchio AEB, e dal punto D locato in mezzo della retta, ſi erga la perpendicolare DH infinita, queſta paſſa per lo centro C del cerchio AEB.

DIMOSTRAZIONE.

Si conducano le due rette CA, CB, le quali eſſendo raggi del medeſimo cerchio AEB, ſono uguali tra loro, ed è iſoſcele il triangolo ABC. Ma dal punto D locato in mezzo della ſua baſe AB ſi erge la perpendicolare DH; dunque DH paſſa (117.) per lo angolo verticale C, centro del cerchio AEB, che era ec.

Co-

COROLLARIO I. (*Fig.* 121.)

247. Che se per E, punto della retta HCDE comune alla circonferenza, ed alla retta HCD, si conduce FM parallela alla corda AB, sarà la cadente HE eziandio perpendicolare alla FEM (129. 153.), e passerà per lo centro C, tanto più, che prolungati in F, M, i raggi CA, CB su la base FM, sarà isoscele il triangolo FCM per gli angoli uguali in A, & F, ed uguali in B, & M esterni, ed interni, su le basi FM, AB; perciò (16. 118.) FC=MC. Da ciò nasce, che la retta HE perpendicolare ad FM nel punto E comune, solo alla retta FM, ed al cerchio AEB, passerà sempre necessariamente la medesima HE per lo centro del medesimo cerchio.

COROLLARIO II. (*Fig.* 121.)

248. La retta linea FM insistente ad angoli retti al raggio CE nel punto E estremo del raggio istesso, anche è tangente in E del cerchio (237.), perchè lo tocca nel solo punto E, e tutta cade di fuori; conciossiachè il mentovato triangolo FCM, e qualunque altro, che formerassi, rimane dalla perpendicolare CE diviso in due triangoli rettangoli CEF, CEM; laonde CE sarà la minima tra tutte (142.) le altre cadenti dal punto C su la retta FM; tanto più, che essendo sempre (164.) acuti gli angoli F, M, e retti in E, saranno (1. 19. 135.) i lati CF > CE, così CM > CE; dunque (28.) essendo il raggio CE misura della distanza di tutti i punti A, E, B, della circonferenza, dal centro suo C, vengono i punti F, M, a cadere fuori del cerchio, lontani per le rispettive lunghezze FA, MB; però avverandosi tutto ciò di qualunque altro punto F, M, fuorichè di E, dimostrato rimane, che la tangente del cerchio è perpendicolare al raggio nel punto E del contatto, ed al contrario la retta FM perpendicolare al raggio nel punto E, suo estremo, è una tangente del cerchio in E.

PRO-

PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA I. (*Fig.* 122.)

249. Del dato cerchio ABF ritrovare il centro C.

RISOLUZIONE.

Si tiri qualunque sia corda AB, la quale venga (1. 10. 124.) segata a mezzo in D, e per D si alzi la infinita EF perpendicolare (1. 11. 125.) alla corda AB, la retta EF, terminata da punti E, F della circonferenza, dividasi a mezzo in C, e sarà C del dato cerchio il centro desiderato.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè dalla retta EF, segata a mezzo in D, e ad angoli retti, rimane la corda AB, nella perpendicolare EF il centro del dato cerchio si trova (246.); dunque (*Def.* 17. 24.) EF è un diametro, il cui punto C di mezzo (25.) è il centro del cerchio, che era ec.

COROLLARIO I. (*Fig.* 124.)

250. Se fossero prese due corde diverse AB, LZ, gli ritrovati diametri DR, FG, da loro medesimi ne mostrerebbero il centro C, perchè nell' unico punto, e centro C, segare si deono (24.).

COROLLARIO II.

251. Dunque la sezione di due diametri è il centro del cerchio.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA I. (*Fig.* 123.)

252. Se nella circonferenza del cerchio, due punti E, F sien presi, la tirata corda EF tutta caderà dentro del cerchio.

DIMOSTRAZIONE.

Sopra EF dal centro A si dimetta (1. 12. 126.) il perpendicolo

colo AB, si conducano i due raggi AE, AF, e da qualunque altro punto C la obliqua AC si dimetta.

E perchè AB è perpendicolare alla corda EF, sarà minore di AE=AF (142); ma il raggio AE è misura della distanza della circonferenza dal centro; dunque il punto B della minore AB su la retta EF, cade dentro del cerchio. Inoltre nel triangolo ABC egli è (164.) acuto lo angolo ACB; però ottuso il suo supplemento ACE (18.), e nel triangolo ECA il lato AE opposto all' angolo ottuso, è maggiore del lato AC opposto all' angolo acuto E; laonde il punto C della corda EF, estremo di AC<AE, non giugne alla circonferenza, ma cade dentro del cerchio. Dunque della corda EF i due soli punti estremi E, F sono nella circonferenza, e tutti gli altri caggiono dentro del cerchio, che era ec.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA II. (*Fig.* 125.)

253. Se una retta linea CD dal centro C cadente su la retta AB, la sega a mezzo in D, ivi anche la sega ad angoli retti.

Secondo. E recidendola ad angoli retti, eziandio a mezzo la tronca.

DIMOSTRAZIONE.

Si conducano i due raggi CA, CB, sarà isoscele il triangolo ACB su la base AB; e perchè dalla cadente CD segata rimane, per ipotesi, a mezzo, DA=DB, per lo comune lato CD, e per gli uguali raggi CA, CB sono scambievolmente equilateri i due triangoli ADC, BDC rettangoli in D (*Def.* 10. 15.), perchè uguali sono ivi gli angoli da' raggi uguali sottesi (105.).

Secondo. Dall' angolo verticale C cade il perpendicolo CD sopra la base AB; questa adunque divisa a mezzo rimane (117.) nel punto D.

PRO-

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA III. (*Fig.* 126.)

254. Se due rette linee GR, CD, non passano per lo centro A del cerchio DRC, e si segano in F, non mai segherannosi a mezzo.

DIMOSTRAZIONE.

Dal centro A al punto F della comun sezione, si tiri la retta AF; e perchè GR, CD si suppongono linee diverse, e dal punto A in F un sol perpendicolo cade (142.) su la GR, se sia GF=FR (3. 3. 253.), non potrà essere AF perpendicolare alla retta CD, essendo (*Def.* 11. 16.) ottuso lo angolo AFC>>AFG retto; dunque si tiri AB perpendicolare alla CD, sarà (3. 3. 253.) DB=BF+FC; dunque DB+BF>FC, cioè FD>>FC. Che se la cadente AF a niuna delle corde è perpendicolare, col medesimo raziocinio si dimostra essere FG>FR; dunque se due corde non per lo centro si segano in F, una sola potrà rimanere a mezzo segata, ma non mai amendue.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA IV. (*Fig.* 127.)

255. Se due cerchi si segano tra di loro, non hanno il medesimo centro.

DIMOSTRAZIONE.

Si conduca la retta BE infinita, che seghi amendue i cerchi BDA in A, B, LFE in L, E; dunque sarà BA corda del cerchio BDA, la quale divisa a mezzo ne venga in M: quindi tirato ne sia ad angoli retti il diametro CD; sarà altresì del cerchio LFE la retta LE corda, la quale divisa a mezzo in N, abbia per N la perpendicolare retta GF. Sono pertanto le due linee DC, FG, perpendicolari alla medesima retta BE, e perciò (155.) parallele tra loro, che non si congiungono mai (*Def.* 35. 73.); ma il centro del cerchio ADB si ritrova in CD (246.), ed

m il

il centro del cerchio EFL nell' altra parallela GF risiede; quindi come diverse sono le parallele CD, FG, così diversi sono i centri de' due dati cerchi.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA V. (*Fig.* 128.)

256. Se due cerchi DCH, ACL si toccano in dentro, aver non possono un centro comune.

DIMOSTRAZIONE.

Per lo punto C del contatto, verso l' opposita plaga B, si tiri la retta CEB, che seghi amendue i cerchi ne' punti E, & B; e perchè i cerchi non si toccano da per tutto, altrimenti sarebbono uguali (*Ass.* 9. 99.), sarà del maggior cerchio ACL, la corda CB>CE, corda del minor cerchio BCH; dunque dividendo a mezzo, si ottiene $\frac{CB}{2} > \frac{CE}{2}$, però diversi sono i punti di mezzo G, & F, essendo comune il principio C. Per G si conduca la perpendicolare DH infinita, e per F, altra simile perpendicolare AL, nelle quali (246.) i centri de' rispettivi cerchi si trovano; ma AL, DH perpendicolari alla medesima retta CB (155.), e parallele tra loro, non si congiungono mai (75.); dunque come le due parallele AL, DH avere non possono alcun punto comune, così non mai fia, che i due dati cerchi abbiano centro comune.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA VI. (*Fig.* 129. *n.* 1.)

257. Se nel diametro AD di un cerchio AGK si prende un punto F, che non sia il centro E, e da F caggiano al cerchio quante rette, FB, FC ec. piace,

Primo. Sarà di tutte la maggiore FA, che passa pel centro.

Secondo. Minima la rimanente FD.

Terzo. Delle altre la più vicina a quella, che passa pel centro, sempre è maggiore della più lontana.

Quar-

Quarto. Inoltre non più che due posson cadere uguali tra loro, dalle due bande del diametro AD.

DIMOSTRAZIONE.

Primo. Si conducano BE, CE, GE, KE ec., tutte al centro E; e perchè EA=EB (*Def.* 15. 22.), aggiuntavi la comune EF, saranno FA=FE+EB; ma nel triangolo BEF, sono FE+EB>FB (1. 20. 136.); dunque FA>FB; e così dimostrasi FA>FC>FG ec.

Secondo. ED=EK; ma EK<EF+FK (1. 20. 136.); dunque (*Ass.* 1. 91.) ED=EF+FD<EF+FK, e togliendo la comune EF, rimane FD<FK, e così di ogni altra dimostrasi.

Terzo. Ne' due triangoli FEG, FEC vi sono due lati FE, EG scambievoli a due lati FE, EC, ma l'angolo FEC>FEG; dunque (1. 24. 140.) la base FC>FG base.

Quarto. Dal punto D, o sia A, si prendano gli archi DG=DK, ne' due triangoli FEG, FEK formati, tirando le rette EG=EK raggi, e le rette FG, FK, sono uguali due lati a due lati per lo comune EF; e gli angoli FEG, FEK da' lati uguali compresi, sono uguali tra loro; conciossiachè (30.) misurati dagli archi uguali DG, DK: laonde (1. 4. 115.) la base FG=FK base; locchè succeder non puote, se dalle due bande del punto D non si prendono archi uguali, perchè disuguali presi gli archi, disuguali saranno gli angoli al centro E (44.), e però disuguali gli oppositi lati (140.); dunque se nel diametro ec., che ec.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA VII. (*Fig.* 129. *n.* 2.)

258. Se dal punto D fuori del cerchio esistente si conducano più rette linee DL, DB, DA ec.

Primo. Delle quali una DB, che passa pel centro, sarà la massima.

Secondo. E le altre alla concava (5.) circonferenza sono minori, e minori, come più caggion lontane dalla retta DB.

Terzo

Terzo. Ma delle loro esterne porzioni terminate dalla convessa (5.), la minima è DG terminata dal punto D, e dal diametro GB.

Quarto. Delle altre quella è maggiore, che più lontana cade da questa.

Quinto. E non più che due posson cadere uguali dal punto D, e sono le equidistanti dalla DB.

DIMOSTRAZIONE.

Primo. Si tirino i raggi CA, CF, e per $CA=CB$, sarà (*Ass.* 2. 92.) $DC+CA=DC+CB=DB$; ma nel triangolo ADC (1. 20. 136.), $DC+CA>DA$; dunque $DB>DA$.

Secondo. Ne' due triangoli ADC, FDC, sono due lati DC, CA scambievoli a due lati DC, CF; ma l' angolo ACD è maggiore dell' angolo FCD; dunque la base $AD>FD$ base (1. 24. 140.).

Terzo. Le due $CG+GD<CE+ED$ (1. 20. 136.); dunque tolti gli uguali raggi CE, CG, restano $GD<ED$, e così delle altre più vicine alla DB.

Quarto. Le due rette $CE+ED<CH+HD$ (1. 21. 137.); tolti adunque gli uguali raggi CE, CH, restano $DE<DH$ (*Ass.* 3. 93.).

Quinto. Ove si prendano due archi uguali BL, BA, rimangono uguali i supplementi GL, GA, e però uguali gli angoli DCL, DCA, misurati da quelli, ma uguali sono scambievolmente i lati DC, CL, & DC, CA, a cagione de' due raggi CL, CA, e del comune DC; dunque le basi DL, DA parimente sono uguali (1. 4. 115.).

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA VIII. (*Fig.* 130.)

259. Se da un punto locato dentro del cerchio ABD vi caggiono alla circonferenza più di due rette tra loro uguali, il punto C sarà il centro.

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Sieno le cadenti CD=CA=CB; laonde tirate le rette AB, AD, si dividano a mezzo in H, & O, pe' quali punti, e per lo punto C, le rette FK, LM si tirino. E perchè ne' due triangoli CHA, CHD vi sono tre lati scambievolmente uguali a tre lati, perchè il lato CH è comune; sono gli angoli in H uguali, come quelli, che da' lati uguali CA, CD vengono sottesi (105.); perciò sono retti (*Def.* 10. 15.). Laonde LM, che sega la corda AD ad angoli retti, ed a mezzo, deve essere un diametro (246.). Col ragionamento medesimo si fa vedere, che FK ad angoli retti insiste alla retta AB in O, dove fu divisa per mezzo, locchè ne dimostra dover essere FK altro diametro, il quale col primo LM segandosi in C, rimane evidente, che C sia centro del cerchio (251.).

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA IX. (*Fig.* 131.)

260. Il cerchio da cerchio segato non viene in più, che in due punti.

DIMOSTRAZIONE.

Colla retta AB si congiungano i diversi centri A del cerchio DCE, & B del cerchio DCF, e supponendo fatta una loro sezione in C, si conducano al punto C, ad amendue i cerchi comune, i rispettivi raggi AC, BC; e perchè da' punti estremi A, B della retta AB, sono costituiti al punto C due rette linee AC, BC, raggi de' dati cerchi, non è più possibile, che dalla plaga C si possano i medesimi raggi, o i loro uguali in altro punto insieme accozzare (1. 7. 121.); laonde fuori di C non possono i dati cerchi avere da quella banda altro punto comune, ed in quello segarsi: il perchè dalla plaga C nel solo punto C i dati cerchi si segano.

Inoltre su la retta AB si formino (1. 23. 139.) alla adversa plaga di C due angoli, uno BAD=BAC, altro ABD=ABC, ed i due triangoli ABC, ABD avranno due angoli uguali a due an-

angoli ſopra la baſe AB; dunque (1. 26. 150.) hanno gli altri due lati uguali a due lati, AD=AC, & BD=BC, e perciò egli è AD un raggio del cerchio DCE, ſiccome BD raggio del cerchio DCF. Si congiungono adunque co' loro eſtremi punti in D, dalla adverſa plaga D i due riſpettivi raggi AD=AC, & BD=BC, e per queſto anche in D a ſegare ſi tornano i cerchi DCE, DCF. Ma col medeſimo raziocinio (1. 7. 21.) dimoſtraſi, che non ſi poſſono dalla plaga D ſegare i dati cerchi, fuori che in D, ove ſolamente ſi uniſcono i loro raggi; dunque ec.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA X. (*Fig.* 132.)

261. Se due cerchi ABC, ADE dentro ſi toccano in A, la retta, che paſſa pe' loro centri F, K, ove ſia prolungata, va a ferire al contatto.

DIMOSTRAZIONE.

Per uno de' centro K al punto A del contatto, ſi conduca la retta AK, e nell'eſtremo punto A (162.), ſi erga la perpendicolare GAH, ſarà GH tangente del cerchio ADE (248.), E perchè il medeſimo punto A è comune anche al cerchio ABC, ſi conduca da A al ſuo centro F il raggio AF, ſarà queſto perpendicolare alla tangente GH (247. 248.), ma alla retta GH nel ſolo punto A una ſola perpendicolare può cadere (142.). Dunque AK, AF, perpendicolari amendue alla retta GH, nel punto A, ſono una ſola retta linea FKA, che paſſa pe' due centri F, K, e va a ferire nel punto A del contatto, che ec.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA XI. (*Fig.* 133.)

262. Se due cerchi AF, AK ſi toccan di fuori in A, la retta linea CD, che congiugne i loro centri C, D, paſſa per lo contatto A.

Di-

DIMOSTRAZIONE.

Dal centro C al contatto A si conduca il raggio CA, a cui nel punto A (162.) si alzi la perpendicolare GAH, alla quale dal medesimo punto A verso l'opposta parte K si erga (1. 11. 126.) altra perpendicolare AD; passerà questa (247.) per lo centro D del cerchio AK, e perchè alla retta GA si congiungono in A due rette linee CA, DA, ed ivi formano due angoli retti GAC, GAD, esser deono (1. 14. 130.) CA, DA una retta linea sola, che congiugne i due centri C, D, e passa per lo contatto A, che era ec.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA XII. (*Fig.* 134.)

263. Il cerchio da cerchio, sì dentro, che fuori, toccato non viene, che in un solo punto.

DIMOSTRAZIONE.

Per gli centri F, K de' dati cerchi AB, AD, si conduca la retta linea infinita FK; passerà questa (3. 11. 261.) per lo contatto A, d'onde si tiri GAH perpendicolare alla medesima FA, sarà il punto A (247. 248.) il solo contatto della retta GH col cerchio AB, ed insieme col cerchio AD. Ma la retta FA secante non puote avere altro, che un punto solo comune da quella banda (5.), col cerchio AB, e col cerchio AD; dunque toccandosi dentro i cerchi, non mai si toccano in punti diversi, ma in un solo punto A comune, e determinato a due cerchi AB, AD, alla tangente GH, ed alla secante FA.

Che se poscia il cerchio AN tocca di fuori, si produca FA, che dovrà (3. 12. 262.) concorrere in C, centro del toccante cerchio AN, e perchè il raggio CA, non ha di comune (248.) colla tangente GH, che il punto A, ed il raggio FA dell'opposto cerchio AB, non ha di comune, che il medesimo punto A, colla stessa tangente GH, che passa di mezzo tra dati cerchi, gli quali perciò avere non possono altro comune punto, che A, in cui da fuori si tocchino, che era ec.

PRO-

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA XIII. (*Fig.* 135.)

264. Nel cerchio, le uguali rette AB, CD, hanno uguali distanze dal centro E.

Secondo. Ed all' incontro le equidistanti dal centro sono uguali tra loro.

DIMOSTRAZIONE.

Le uguali AB, CD, si seghino a mezzo in F, K, sarà FA$=$$=$DK (*Ass.* 7. 97.); quindi $\overline{FA}^2=\overline{DK}^2$ (*Alg.* 98.). Ma sono uguali i condotti raggi AE, DE (*Def.* 15. 22.): perciò $\overline{AE}^2=$$=\overline{DE}^2$; ma le rette EF, EK caggiono ad angoli retti sovra le linee AB, DC (3. 3. 253.): dunque ne' triangoli rettangoli AFE, DKE egli è $\overline{AF}^2+\overline{FE}^2=\overline{AE}^2=\overline{DE}^2=\overline{DK}^2+\overline{KE}^2$; dunque (*Ass.* 1. 91.) $\overline{AF}^2+\overline{FE}^2=\overline{DK}^2+\overline{KE}^2$, ma $\overline{AF}^2=\overline{DK}^2$; dunque (*Ass.* 3. 93.) $\overline{FE}^2=\overline{KE}^2$; il perchè FE$=$KE, distanze uguali (3. *Def.* 4. 239.); laonde AB, CD sono equidistanti dal centro E.

Secondo. Se poi si suppongono uguali (52.) le distanze FE, KE; allora a cagione degli angoli retti in F, K, (3. 3. 253.) si dimostra col medesimo raziocinio in maniera consimile espresso, che sieno AF$=$DK; dunque (*Ass.* 6. 96.) le loro doppie AB$=$DC, che ec.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA XIV. (*Fig.* 136.)

265. Nel cerchio ABC il diametro AG è la maggiore di tutte le altre corde, le quali tra loro sono maggiori, come più vicine caggiono al centro.

DIMOSTRAZIONE.

Sieno BL più lontana, RC più vicina del diametro AG, però la distanza FI$>$FE (3. *Def.* 4. 239.); perciò dalla maggiore FI si recida FK$=$FE (1. 3. 114.), e per K si tiri MH perpendicolare alla FI (1. 11. 126.); dunque MH$=$RC (3. 14. 264.). Si

con-

conducano adesso gli raggi FM, FB, FL, FH, che nel triangolo FMH sono $FM+FH>MH$ (1. 20. 136.); ma (24.) $AG=FM+FH$; dunque $AG>MH$; però $AG>RC=MH$. Inoltre ne' due triangoli HFM, LFB, due lati sono uguali a due lati, perchè quattro raggi; ma l'angolo contenuto $HFM>LFB$; dunque la base (1. 24. 140.) $MH=RC>BL$, che era ec.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA XV. (*Fig.* 138.)

266. La linea GH tirata allo estremo punto B del diametro, o raggio AB ad angoli retti, cade fuori del cerchio.

Secondo. Nel luogo tra la linea retta, e l'arco altra retta linea non cade.

Terzo. L'angolo del mezzo cerchio è maggiore d'ogni angolo acuto rettilineo, ed il rimanente è minore.

DIMOSTRAZIONE.

La prima parte fu dimostrata al numero 248., dalla quale per necessità le altre ne seguono.

PROPOSIZIONE XVII.

PROBLEMA II. (*Fig.* 137.)

267. Da un dato punto A fuori del cerchio EB tirare al medesimo una tangente.

RISOLUZIONE *al num.* 296.

Dal centro C al punto A si tiri la retta CA, che seghi il cerchio in E. Quindi dal medesimo centro C col raggio CA si descriva altro cerchio AD; dal punto E si alzi ED perpendicolare alla AC (1. 11. 126.), si conduca CD, che in B recida il cerchio EB. Finalmente si tiri AB, questa sarà la desiderata tangente.

DIMOSTRAZIONE.

Ne' due triangoli ABC, DEC vi sono due lati CA, CB scambievoli a' due lati CD, CE (1. *Def.* 15. 22.), i quali comprendono lo stesso angolo ACD, perciò (1. 4. 115.) uguali sono le basi BA, DE, ed uguali gli angoli DEC, ABC, opposti a' lati uguali CD, CA; ma DEC, per costruzione è retto; dunque ABC è retto ancora: però (248.) AB è tangente ec., che ec.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA XVI. (*Fig.* 138.)

268. Se una linea GH tocca il cerchio in B, e dal centro A si tira il raggio AB al punto del contatto, sarà AB perpendicolare alla tangente.

DIMOSTRAZIONE.

Dal punto B si prendano due uguali archi BC, BF, e si conduca la corda CF, la quale è parallela alla tangente GH (247. 248.); ma la corda CF viene segata ad angoli retti dal raggio AB per lo arco CF diviso a mezzo in B, onde uguali riescono gli angoli BAC, BAF, come si è dimostrato (246.); dunque dal medesimo raggio AB viene in B segata ad angoli retti la tangente GH parallela alla corda CF (1. 29. 153.), che era ec.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA XVII. (*Fig.* 138.)

269. Se dal punto B del contatto alla tangente GH si erge la perpendicolare BA, sarà in essa il centro del cerchio.

La dimostrazione di questo teorema si trova distesa nel lemma al principio di questo libro, e ne' suoi corollari a' numeri 246. 247.

PRO-

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA XVIII. (*Fig.* 139.)

270. Lo angolo BCD al centro è doppio dell' angolo BAD alla circonferenza (44. 45.), ove amendue insistano sul medesimo arco BD.

DIMOSTRAZIONE.

Pel punto A tirato il diametro AF vada a ferire nel sottendente arco BD: e però nell' isoscele triangolo ABC, uguali angoli si oppongono a due raggi CA, CB, e lo esterno angolo BCF al centro è uguale a due medesimi interni uguali angoli CAB, CBA; adunque BCF al centro è doppio dell' angolo CAB, vuolsi dire FAB alla circonferenza. In simigliante maniera si dimostra, che anche DCF al centro sia doppio dell' angolo DAF alla circonferenza: adunque lo intero angolo BCD al centro, sarà doppio dello intero angolo BAD alla circonferenza.

Vada inoltre dal punto A il diametro (*Fig.* 141.) AF a ferire in qualunque sia punto della circonferenza; sempre nel triangolo isoscele ACD (*Def.* 15. *lib.* 1. *prop.* 32. 160.) lo esterno angolo DCF sarà uguale a due uguali angoli CAD, CDA; dunque lo angolo FCD al centro è doppio del solo angolo FAD alla circonferenza. Similmente nell' isoscele ABC lo esterno angolo BCF è uguale a due interni uguali angoli FAB, & ABC; il perchè è doppio del solo FAB, il quale sottratto da FAD, siccome FCB da FCD, metà da metà, e doppio da doppio, rimangono BCD al centro doppio di BAD alla circonferenza, che era. ec.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA XIX. (*Fig.* 142.)

271. Gli angoli BAD, BFD, nella porzione istessa del cerchio sono uguali tra loro.

Vuolsi dire, che sono uguali gli angoli opposti alla medesima corda, o insistenti sul medesimo arco (242. 243.) nel cerchio istesso. Di-

DIMOSTRAZIONE.

Al centro C si conducano i raggi BC, DC, dunque per la precedente lo angolo BCD è doppio tanto di BAD, quanto di BFD; dunque BAD=BFD (*Ass.* 7. 97.).

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA XX. (*Fig.* 143.)

272. Ne' quadrilateri ABDC inscritti nel cerchio, gli angoli opposti A+D, siccome B+C, sono uguali a due retti.

DIMOSTRAZIONE.

Agli angoli opposti si conducano le rette AD, BC, e saranno nel triangolo ABC i tre angoli interni $A+m+n=180°$ (1. 32. 160.); ma $m=o$, sul medesimo arco AB insistenti (3. 21. 271.); di più egli è $n=x$ sul medesimo arco AC insistenti. $D=o+x$ (*Ass.* 9. 106.); quindi sostituendo, sarà $A+D=180°$. Nella stessa maniera dimostrasi degli altri due opposti angoli $B+C=180°$, che ec.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA XXI. (*Fig.* 144.)

273. Sopra la retta AB costituir non si possono alla medesima banda due segmenti, AGB, ADB, di cerchio, simili tra di loro, ed uguali.

DIMOSTRAZIONE.

Seghisi a mezzo la retta AB (1. 10. 124.) nel punto C; quindi si erga la perpendicolare CH, nella quale preso qualunque punto F per centro, col raggio FA, descrivasi l'arco AGB, il quale certamente passerà per B, a cagione degli angoli retti in C, e delle uguali linee CA, CB, e del comune lato CF, deono essere (1. 4. 115.) ne' triangoli FCA, FCB uguali le basi FA, FB, però raggi del medesimo cerchio AGB, la cui circonferenza non solo per A dee passare, ma ancora per B; quindi di prendasi altro centro E (dacchè dal medesimo centro F col medesimo raggio AF il nuovo arco tutto caderebbe sul primo (10.) arco AGB), e col raggio EA descrivasi altro arco ADB, il quale nella stessa maniera dee passare per B. Sono adunque su la medesima AB due segmenti AGB, ADB costituiti, e disuguali (99.) tra loro. Dal punto A si conduca la retta linea AGD, che seghi amendue gli archi, in D lo esterno, ed in G lo interno, e si conducano le rette BG, BD; e perchè del triangolo BDG si è prolungato il lato DG in A, sarà (1. 16. 132.) lo esterno angolo AGB maggiore dello interno, ed opposto angolo ADB; dunque le disuguali porzioni AGB, ADB di cerchio non capendo angoli uguali, non sono simili (3. *Def.* 10. 245.), ma ben dissimili tra di loro ec., che ec.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA XXII. (*Fig.* 145.)

274. Sopra le uguali rette linee simili segmenti di cerchio sono anche uguali tra loro.

DIMOSTRAZIONE.

Sopra la retta AB si formi alla circonferenza qualunque angolo E, e qualunque angolo F sopra l' altra uguale corda, e retta GD, e perchè si suppongono simili le porzioni AEB, GFD, uguali sono gli angoli E, & F, e dacchè sarebbono sempre uguali i medesimi angoli E, F, ove si fosse fatto (1. 23. 139.) allo angolo BAE, uguale lo angolo DGF, nelle simili porzioni AEB, GFD (3. *Def.* 10. 245.). Suppongasi ciò eseguito, ed i due triangoli AEB, GFD avranno due angoli E=F, & A=G, ed i lati AB=GD; dunque (1. 26. 150.) AE=GF, & EB=FD; laonde (*Ass.* 8. 98.) gli uguali triangoli si adattano tra di loro AB sopra GD, AE sopra GF, & EB sopra FD, e de' due archi simili si adattano i due punti A con G, gli altri due B con D, & E con F; anzi come si muteranno gli angoli uguali A, & G, così si cangieranno di sito gli uguali angoli F, E, le cui cime sempre si adatteranno; il perchè i due archi AEB, GFD, con tutti i loro punti, adattandosi con esattezza (101.), ono uguali tra loro, che era ec. PRO-

PROPOSIZIONE XXV.

PROBLEMA III. (*Fig.* 146.)

275. Essendo dato lo arco ADB, compiere il suo intero cerchio.

RISOLUZIONE.

Oltre i due estremi punti A, B dell'arco dato, prendasi in esso altro punto D, che fatto centro, con opportuno raggio DF, arbitrario, descrivasi il cerchio EGH, il quale segato venga in E, & F da altro arco descritto dal centro A, raggio AF==DF; ed inoltre segato in H, & G da altro arco, centro B, raggio BG=DF descritto (così anche si risolve il problema di trovare il centro C, lo cui cerchio passi per tre dati punti A, D, B). Si conducano le due rette EF, HG segantesi in C; sarà C il desiderato centro, dal quale raggio CA descrivesi il cerchio ABD.

DIMOSTRAZIONE.

Si conducano le due rette DA, DB, e perchè dagli estremi punti A, D, e dagli altri D, B, estremi delle due corde DA, DB, si sono fatte le sezioni di archi, restano le medesime corde DA dalla retta EF, & DB dalla retta HG divise a mezzo, e ad angoli retti, come si costruisce, e dimostrasi al numero 124. Il perchè (246.) nelle rette EF, HG ritrovare si dee il centro del cerchio, anzi nella loro sezione ec. (250. 251.), che ec.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA XXIII. (*Fig.* 147.)

276. Ne' cerchi uguali gli uguali angoli G, H a' centri, ed A, D alle circonferenze (44. 45.), sopra gli uguali archi BIC, EPF insistono (243.).

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Si conducano le rette BC, EF. E perchè de' cerchi uguali (3. *Def.* 1. 236.), uguali sono i raggi GB, HE ec., ed i contenuti angoli G, H si suppongono uguali, saranno ne' triangoli GBC, HEF uguali le basi (1. 4. 115.) BC, EF, le quali essendo corde degli archi BIC, EPF, questi sono uguali tra loro; però agli uguali angoli ne' cerchi uguali, uguali archi si oppongono tanto al centro (102.), che alla circonferenza, che era ec.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA XXIV. (*Fig.* 147.)

277. Ne' cerchi uguali gli angoli A, D alla circonferenza, & G, H a' centri, che insistono sopra uguali archi BIC, EPF, sono uguali tra loro.

DIMOSTRAZIONE.

Si conducano le corde BC, EF, le quali deono essere uguali tra loro (101.); laonde a cagione degli uguali raggi GB, GC, HE, HF, sono scambievolmente equilateri i due triangoli isosceli GBC, HEF; dunque all'incontro delle basi uguali, uguali sono gli angoli G, H a'centri (105.); ma gli angoli A, D alla circonferenza, sono (3. 20. 270.) metà degli uguali angoli al centro; dunque (*Ass.* 7. 97.) sono anche uguali tra loro, che ec.

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA XXV. (*Fig.* 147.)

278. Ne' cerchi uguali, da corde uguali, uguali archi sono recisi, i maggiori con i maggiori, ed i minori con i minori.

DIMOSTRAZIONE.

A' centri G, H de' dati cerchi DH, AG, e dagli estremi punti delle uguali date corde EF, BC, si conducano i raggi HE, HF, GB, GC, tutti e quattro uguali, perchè raggi di cerchi uguali; laonde sono scambievolmente equilateri i due triangoli

goli GBC, HEF, ed uguali gli angoli H, G alle uguali basi opposti; dunque (30.) uguali sono gli archi EPF, BIC, misure di angoli uguali, che era ec.

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA XXVI. (*Fig.* 147.)

279. Ne' cerchi uguali gli uguali archi BIC, EPF, da uguali corde, BC, EF, sono sottesi.

DIMOSTRAZIONE.

A' rispettivi centri G, H si formino gli angoli BGC, EHF, certamente uguali tra loro, perchè misurati (30.) da uguali archi BIC, EPF; ma gli angoli uguali sono compresi da lati uguali, raggi di cerchi uguali; laonde (1. 4. 115.) uguali sono le basi BC, EF, corde di archi, nella data ipotesi uguali, che era ec.

PROPOSIZIONE XXX.

PROBLEMA IV. (*Fig.* 148.)

280. Dividere a mezzo in D, la data circonferenza ADB.

RISOLUZIONE.

Da' punti estremi A, B dell' arco dato, come centri, e con arbitrario raggio si facciano due opposte sezioni di archi E, F, pe' quali punti si conduca la retta EF, la quale in D segherà a mezzo il dato arco.

DIMOSTRAZIONE.

Si conduca la corda BA, la quale (usando le dimostrazioni 124. 126.), rimane dalla retta EF segata a mezzo in C, e ad angoli retti; dunque (246.) in EF si trova il centro del cerchio ADB, il quale ritrovato (3. 25. 275.) sia K, si conducano i raggi AK, BK, rimane dalla retta EF; o sia perpendicolo KC nel triangolo isoscele ABK, diviso a mezzo l' angolo K, però gli angoli DKA=DKB; quindi gli Archi DA=DB, misure di angoli uguali, che ec.

PRO-

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA XXVII. (*Fig.* 149.)

281. Lo angolo BAC nel mezzo cerchio BADC, è retto.

Secondo. Lo angolo B nel ſegmento maggiore CFA (240.), è acuto.

Terzo. Nel minore ADC, lo angolo D è ottuſo.

DIMOSTRAZIONE.

Si conduca il raggio EA, e ſono formati i due triangoli iſoſceli AEB, AEC, pe' raggi EB=EA=EC; dunque ne' mentovati triangoli ſono (1. 5. 116.) gli angoli $n=m$, & $r=x$, ma (1. 32. 160.) nel triangolo ABC, ſono gli angoli $m+n+$ $+r+x=180°$, e ſoſtituendo n per l' uguale m, & r pel ſuo uguale x, ſarà $2n+2r=180°$, e dividendo per 2, ne riſulta $n+$ $+r=90°=$BAC angolo nel mezzo cerchio.

Secondo. $n+r=90°$, dunque $m=n=n+r-r=m+r-r=90°-r$, angolo acuto (35.) nel ſegmento maggiore CFA.

Terzo. Nel quadrilatero ABCD, ſono gli angoli B+D=180° (3. 22. 272.), ed eſſendoſi già dimoſtrato B<90°, ſarà perciò l' angolo D>90°, cioè ottuſo l' angolo contenuto nel ſegmento minore ADC ſu la corda AC, che era ec.

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA XXVIII. (*Fig.* 150.)

282. Se una retta GH tocca il cerchio in B, e da B ſi tiri una corda BE, queſta colla tangente forma uguali angoli agli angoli degli oppoſti ſegmenti.

DIMOSTRAZIONE.

Primo. Dal punto B del contatto, ſi erga BA perpendicolare alla tangente GH, ſarà AB un diametro (3. 19. 269.); epperò tirata la corda AE, ſi forma l' angolo AEB retto (3. 31. 281.): dunque nel triangolo ABE, gli altri due rimanenti angoli EAB+ABE=90° (163.), ma ABE+EBH=90°; dunque

(*Ass.* 1. 91.) EAB+ABE=ABE+EBH, e spurgando i comuni (*Ass.* 3. 93.), rimane EAB=EBH, angolo della porzione EDB maggiore.

Secondo. Nel quadrilatero EABF gli angoli EAB+F=180° (3. 22. 272.); ma (129.) gli angoli ABG+ABE+EBH=180°==EBG+EBH=EAB+F. Ma EBH=EAB, come si è dimostrato, però traendone cose uguali, rimane EBG=F, angolo nello opposto segmento BFE, che era ec.

PROPOSIZIONE XXXIII.

PROBLEMA V. (*Fig.* 151.)

283. Sopra la data BE descrivere una porzione di cerchio, in cui l'angolo, che vi cape, sia =M, angolo dato.

RISOLUZIONE.

Se lo angolo M è acuto, si formi al punto B estremo, lo angolo EBH=M (1. 23. 139.); quindi per B si erga BA perpendicolare alla BH; la data BE si divida a mezzo in D, d'onde si alzi la indefinita perpendicolare DC, che seghi in C la retta BA: dico C essere il centro, da cui col raggio BC descritto ne viene il segmento BAE desiderato.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè BH è perpendicolare al raggio BC, anche è tangente del cerchio (248.), & BCA è un diametro. Ma BE si è divisa per mezzo in D, e quindi si è alzata la infinita perpendicolare DC; perciò (246.) anche in essa vi è il centro del medesimo cerchio, che passa per B, e per E, punti equidistanti dal punto C, dove si segano i due diametri ritrovati; dunque (250. 251.) il punto C è il centro del cerchio, che descritto col raggio BC, passa per B, & E, nel cui segmento BEO vi cape (3. 32. 282.) lo angolo uguale allo angolo EBH=M, angolo dato, e di più insistente sopra la data corda BE.

Se poi lo angolo fosse ottuso, si operi col supplemento acuto, come sopra, che lo adverso segmento BEL contiene un ottuso angolo uguale al dato.

Final-

Finalmente se l' angolo fosse retto, sopra la data linea BE si formi un mezzo cerchio, i cui angoli tutti (3. 31. 231.) sono retti.

PROPOSIZIONE XXXIV.

PROBLEMA VI. (*Fig.* 152.)

284. Da un dato cerchio recidere una porzione BAE, in cui si contenga un angolo uguale al dato angolo M.

RISOLUZIONE, E DIMOSTRAZIONE.

Si tiri qualunque raggio BC, al cui estremo punto B si erga la perpendicolare BH, la quale (248.) sarà tangente del cerchio. Sopra BH si formi lo angolo HBE=M, angolo dato (1. 23. 139.), e la retta BE sega il cerchio descritto col raggio BC dal centro C nel punto E, e nell' adverso segmento BEA vi cape un angolo uguale al dato angolo M=HBE (3. 32. 282.) che era ec.

PROPOSIZIONE XXXV.

TEOREMA XXIX. (*Fig.* 153.)

285. Se nel cerchio due rette BF, CL si segano in O, il rettangolo formato da' segmenti di una, è uguale al rettangolo de' segmenti dell' altra, cioè $BO \times OF = CO \times OL$.

DIMOSTRAZIONE.

Alle due corde BF, CL, dal centro A si conducano le perpendicolari AD, AR: si tirino i raggi AC, AB, e finalmente la retta AO; e perchè BF è segata à mezzo in D (3. 3. 253.), e non a mezzo in O, sarà (2. 5. 216.) $\square BOF + \overline{DO}^2 = \overline{DB}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2$ (198.). $\square BOF + \overline{DO}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2$, così $\square COL + \overline{OR}^2 = \overline{CR}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AR}^2$. $\square COL + \overline{OR}^2 + \overline{AR}^2 = \overline{AC}^2$; ma $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$ de' raggi; dunque (*Ass.* 1. 91.) $\square BOF + \overline{DO}^2 + \overline{AD}^2 = \square COL + \overline{OR}^2 + \overline{AR}^2$: ma (1. 47.) $\overline{DO}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AO}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{AR}^2$, sottraendo (*Ass.* 3. 93.) rimane $\square BOF = \square COL$, che ec.

PRO-

PROPOSIZIONE XXXVI.

TEOREMA XXX. (*Fig.* 154.)

286. Se fuori del cerchio ſia preſo un punto B, dal quale nel cerchio medeſimo caggiano due rette linee BC, che ſeghi, & BF, che tocchi il cerchio, ſarà il rettangolo $BC \times BO$, compreſo da tutta la ſegante BC terminata dalla concava in C, e dallo eſterno ſegmento BO per fino alla conveſſa circonferenza (5) in O, uguale al quadrato della tangente BF, cioè $BC \times BO$, oppure $\square CBO = \overline{BF}^2$.

Secondo. Anzi di tutte le ſeganti ſono i rettangoli CBO, DBN uguali tra loro.

DIMOSTRAZIONE.

Dal centro A, alla ſegante BC, ſi dimetta la perpendicolare AL, ſarà $CL = OL$ (3. 3. 253.): ſi conducano i due raggi AO, & AF; quindi per eſſere alla CO, diviſa a mezzo in L, aggiunta la retta linea OB, ſarà (2. 6. 218.) $\square CBO + \overline{LO}^2 = \overline{BL}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AL}^2$ (1. 47.); perciò $\square CBO + \overline{LO}^2 + \overline{AL}^2 = \overline{AB}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{BF}^2$; ma $\overline{AF}^2 = \overline{AO}^2 = \overline{LO}^2 + \overline{AL}^2$, ſottraendo quelli, rimane $\square CBO = \overline{BF}^2$, che era ec.

Secondo. Se poi ſi conduce qualunque altra ſegante DNB, ſarà $\square DBN = \overline{BF}^2 = \square CBO$.

PROPOSIZIONE XXXVII.

TEOREMA XXXI. (*Fig.* 155.)

287. Se dal punto B fuori del cerchio ſi conducano le due rette linee BC, che ſeghi, & BD, che al cerchio pervenga, e ſia come ſopra, $BC \times BO = \overline{BD}^2$, ſarà BD tangente del cerchio.

DIMOSTRAZIONE.

Si conduca la tangente BF (3. 17. 267.), e gli due raggi AF, AD; e dacchè BF tocca, & BC ſega il cerchio, gli è (3. 36. 286.) $BC \times BO = \overline{BF}^2$, ma per ipoteſi $BC \times BO = \overline{BD}^2$, ne ſiegue (*Aſs.* 1. 91.) eſſere $\overline{BF}^2 = \overline{BD}^2$; laonde i loro lati eſſer

deono

deono uguali, cioè BF=BD; ma uguali sono i due raggi AF, AD, e comune è il lato AB; dunque sono scambievolmente equilateri i due triangoli ABD, ABF, ed uguali (105.) hanno gli angoli D, F dal medesimo lato AB sottesi; il perchè essendo lo angolo F retto, anche l' uguale angolo D esser dee retto, e la DB perpendicolare al raggio AD, tangente (247. 248.) del cerchio in D, che era ec.

Corollario.

288. Dunque dall' esterno punto B, al medesimo cerchio DCF, due tangenti BF, BD, caggiono uguali tra loro, e da bande diverse.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

Problema. (*Fig.* 156.)

289. Ritrovare la linea x, lo cui quadrato xx sia uguale alla differenza de' dati quadrati aa, cc.

Risoluzione I.

Questo problema è il medesimo, che in effetti da quadrato sottrarre quadrato, e tutta la soluzione dipende dalla proposizione trentesimaprima di questo libro (*n.* 281.): vuolsi dire, che si ricerca $xx=aa-cc$, cioè $x=\sqrt{aa-cc}$, supponendo $a>c$, acciocchè sia possibile il problema, altrimenti immaginario sarebbe, ed impossibile affatto. Prendasi dunque la retta DF$=a$, ed a mezzo dividasi in E, e col raggio EF il mezzo cerchio DKF venga descritto. Centro D collo spazio $=c$ si faccia una sezione in K, su la circonferenza DKF, e si conducano le due corde DK, FK; dico essere FK$=x=\sqrt{aa-cc}$, cioè $\overline{FK}^2=xx=$ $=aa-cc$.

Dimostrazione.

E perchè DK è un raggio preso $=c$, ed il diametro DF$=a$, ove dicasi FK$=x$, essendo nel mezzo cerchio (3. 31. 281.) retto l' angolo K, sarà nel triangolo rettangolo FKD, $\overline{DF}^2=\overline{DK}^2+$ $+\overline{FK}^2$ (1. 47. 195.), e sostituendo i valori $aa=cc+xx$, e per antitesi $xx=aa-cc$, e traendo la radice quadrata, risulta $x=$ $=\sqrt{aa-cc}=$FK, che era ec. Ri-

RISOLUZIONE II. (*Fig.* 157.)

Che se mai molti fossero i quadrati cc, nn ec. da sottrarsi da quadrati aa, bb ec. si ottiene anche facilmente $FK = x = \sqrt{aa+bb-cc-nn}$, concíossiachè sommando insieme (196.) i due quadrati aa, bb, cioè ritrovando $m = \sqrt{aa+bb} = DF$; quindi $z = \sqrt{cc+nn} = DK$; sopra $DF = m$ si formi il mezzo cerchio DKF. Col raggio $DK = z$ si trovi il punto K, e si conducano DK, FK, dico essere $FK = x$ ricercata.

DIMOSTRAZIONE.

Nel triangolo rettangolo DKF, gli è (195.) $\overline{DK}^2 + \overline{FK}^2 = \overline{DF}^2$, e sostituendo i valori, sarà $zz + xx = mm$, e per antitesi $xx = mm - zz$, e riponendo i valori loro, fia $xx = aa + bb - cc - nn$, e traendo la quadrata radice $x = \sqrt{aa+bb-cc-nn}$, che era ec.

PROPOSIZIONE XXXIX.

TEOREMA. (*Fig.* 158.)

290. Tutte le parallele linee, sieno secanti, sieno tangenti, che cadono in un cerchio, comprendono tra di loro archi uguali.

Secondo. E se uguali archi comprendono, le cadenti linee son parallele.

DIMOSTRAZIONE.

Il diametro KL, e la tangente NR, che tocca il cerchio in B, sieno le due parallele; epperò si tiri il diametro BCA il quale sarà perpendicolare ad amendue le parallele KL, NR; (3. 19. 269.) dunque BK, BL sono archi uguali, perchè quadranti; e così AK, AL due altri uguali quadranti, compresi tra le due altre parallele KL, DE adversa tangente, e perchè perpendicolare al diametro istesso BA. Ma sono anche parallele tra loro DE, NR parallele alla medesima KL (1. 30. 157.), dunque sommando a due a due gli uguali quadranti, saranno uguali, anzi mezzi cerchi, i composti archi AKB, ALB.

Inoltre sieno tirate le corde FG, HM parallele alle altre; però si conducano gli raggi CH, CM, siccome CF, CG; dacchè

chè sono retti gli angoli in P (3. 3. 253.), sono eziandio PH==PM; siccome comune il perpendicolo CP, ed uguali i raggi CH, CM, ne' due triangoli HPC, MPC; per la qual causa (105.) gli angoli HCB=MCB; laonde uguali gli archi BH, BM, loro misure (3. 26. 276.), ed uguali gli compimenti KH, LM, e similmente dimostrasi AF=AG archi; siccome KF==LG, e sommando (*Ass.* 2. 92.) riescono gli archi FH=GM (*Fig.* 159.).

Secondo. Finalmente si suppongano uguali gli archi GM, FH, tra le corde FG, HM, queste saran parallele; conciossiachè tirando a due opposti punti la corda FM, saranno nel cerchio GMH uguale a se stesso, uguali (3. 27. 277.) gli alterni angoli FMH, MFG, insistenti sopra uguali archi FH, GM; però le corde FG, HM, son parallele (1. 27. 151.), che era ec.

PROPOSIZIONE XL.

TEOREMA. (*Fig.* 139.)

291. Lo angolo BAD alla circonferenza è misurato dalla metà dello arco BFD, a cui insiste.

DIMOSTRAZIONE.

Dal centro C si tirino i due raggi CB, CD, sarà lo angolo BCD al centro, dall' arco BD misurato (30.), ma lo angolo A alla circonferenza (3. 20. 270.) è una metà dell' angolo C al centro; dunque lo angolo A, o sia BAD alla circonferenza, è misurato dalla metà dell' arco BD, a cui insiste (30.), che era ec.

PROPOSIZIONE XLI.

TEOREMA. (*Fig.* 160.)

292. Se nel cerchio prolungasi in B la corda DF, e si conduca in F qualunque altra corda FG, lo angolo GFB in parte fuori del cerchio, è misurato dall'arco $\frac{DFEG}{2}$, residuo dell' arco DG, sottratto dal cerchio.

Di-

DIMOSTRAZIONE.

Perchè su la retta DB cade la retta FG, sono gli angoli in F uguali alla somma di due retti, uguale 180°, mezzo cerchio loro misura. Ma lo angolo GFD viene misurato dalla metà dell' arco GD; dunque il supplemento GFD viene misurato dalla metà dell'arco GFD, supplemento dell' arco GD al cerchio; vuolsi dire $\frac{GD}{2}+\frac{GFD}{2}=180°$, che era ec.

PROPOSIZIONE XLII.

TEOREMA. (*Fig.* 151.)

293. Nel cerchio i due angoli FBE, HBE, formati dalla tangente FBH, e dalla corda EB, sono misurati ciascuno dal mezzo arco tra i suoi lati compreso.

DIMOSTRAZIONE.

Lo angolo FBE è uguale (3. 32. 282.) allo angolo, che si forma nello adverso segmento EBL, la cui misura è la metà dell' arco BOE, su cui insiste (291.); dunque dell'uguale angolo FBE, ne sarà misura il medesimo arco $\frac{BOE}{2}$. E perchè lo angolo HBE è uguale allo angolo, che si forma nello adverso segmento EOB, sarà loro comune misura la metà dello angolo ELB, che era ec.

PROPOSIZIONE XLIII.

TEOREMA. (*Fig.* 160.)

294. Lo angolo ABD, lo cui vertice B cade fuori del cerchio, e gli due lati in E, & F feriscono la convessa, o al contatto, viene misurato dalla metà dell' arco GD, il quale sia differenza tra due compresi archi EF convesso, & AD concavo.

DIMOSTRAZIONE.

Primo. Tutti e due i lati feghino il cerchio in E, A, & in F, D; per F punto nella conveſſa ſi tiri FG parallela all'altro lato BA, ſaranno (290.) uguali i due archi EF, & AG; e perciò ſarà lo arco GD differenza tra il concavo AD, ed il conveſſo EF. E perchè tra due parallele AB, GF cade la retta BFD, ſono uguali gli angoli GFD eſterno, & B interno (1. 29. 153.); ma lo angolo GFD è miſurato dal ſemiarco GD (291.), laonde anche il ſuo uguale angolo B miſurato viene dal ſemiarco GD, il quale è differenza tra gli archi compreſi AD concavo, & EF conveſſo (*Fig.* 161.).

Secondo. Il ſolo lato BD ſeghi il cerchio, però tirata FG parallela ad AB, ſono uguali gli archi AF, AG (290.), uguali gli angoli GFD, FBA (153.) eſterno, ed interno; però amendue miſurati dal ſemiarco GD (291.) (*Fig.* 162.).

Terzo. Amendue tocchino il cerchio in A, D, però da un contatto D ſi tiri DG parallela all' altro lato, e tangente BA, ſaranno uguali gli archi AD, AG (290.), ed uguali gli angoli x, & ABD (1. 29. 153.) eſterno, ed interno; dunque amendue miſurati dalla metà dello ſteſſo arco GD (293.), il quale è differenza tra il concavo arco AGD, ed il conveſſo AD.

PROPOSIZIONE XLIV.

TEOREMA. (*Fig.* 163.)

295. Se due corde AL, DF ſi ſegano in B dentro il cerchio, lo angolo in B è miſurato dalla ſemiſomma de' due archi, ſu cui inſiſtono da amendue le parti, e lati; v. g. lo angolo ABD=FBL è miſurato dagli archi $\frac{AD+FL}{2}$.

DIMOSTRAZIONE.

Per un punto F de' quattro eſtremi, ſi tiri la infinita EFC parallela all' altro lato AL, ſaranno (290.) gli archi FL=EA; ed aggiugnendo il comune arco AD, ſarà AD+FL=AD+EA==ED. Ma lo arco ED colla ſua metà miſura lo angolo EFD, però il ſuo uguale eſterno (153.) angolo ABD, dal medeſimo ſemiarco ED è miſurato. Pongaſi intanto nella ſomma AD+ +EA=ED in vece di EA il ſuo uguale FL (110.), ne riſulta AD+FL=ED, miſure dello angolo ABD colla loro metà; dunque $\frac{ED}{2} = \frac{AD}{2} + \frac{FL}{2}$, cioè i ſemiarchi AD, FL, compreſi fra i lati dello angolo ABD=FBL, ſono miſura del medeſimo angolo. Inoltre perchè lo angolo DFC è miſurato dalla metà degli archi (292.) EF+FL+LD; ma (290.) ſono tra le parallele EF, AL gli archi FL=EA, ſarà ſoſtituendo EF+EA+LD= =FA+LD, colla loro metà $\frac{FA+LD}{2}$ miſura dello angolo DFC= =DBL=ABF, i primi interno, ed eſterno (153.), ed i ſecondi alla cima (131.).

PROPOSIZIONE XLV.

PROBLEMA. (*Fig.* 164.)

296. Da un punto F, fuori del cerchio BA, tirare la tangente FB.

RISOLUZIONE.

Il centro C, ed il dato punto F ſi connettano con la retta linea CF, ſu la quale deſcrivaſi un mezzo cerchio CBF, che ſeghi in B il dato cerchio. Si tiri BF, che ſarà la tangente deſiderata.

DIMOSTRAZIONE.

Dacchè tirando il raggio BC, ſarà retto lo angolo CBF nel mezzo cerchio CBF (3. 31. 28.1.); però BF perpendicolare al raggio CB, tocca il cerchio in B (247. & 248.), che era ec.

DEGLI

DEGLI ELEMENTI DI EUCLIDE.

LIBRO QUARTO.

DEFINIZIONE I.

297. La figura rettilinea nella rettilinea figura inscritta si dice, quando di quella ogni angolo tocca ogni lato di questa, entro la quale si inscrive.

DEFINIZIONE II.

298. In simigliante maniera la rettilinea figura, alla figura rettilinea si circoscrive, quando della circoscritta i lati toccano gli angoli tutti di quella, a cui l' altra si circoscrive.

DEFINIZIONE III.

299. La rettilinea figura dentro del cerchio, dicesi inscritta, qualora tutti gli angoli della inscritta toccano la circonferenza del cerchio.

DEFINIZIONE IV.

300. La rettilinea figura al cerchio d' intorno è circoscritta, quando di quella ogni lato viene a toccare la circonferenza di questo.

DEFINIZIONE V.

301. Similmente nella rettilinea figura, il cerchio descrivasi, quando la circonferenza tutti tocca i lati di quella.

DEFINIZIONE VI.

302. E circoscritto alla rettilinea figura il cerchio si noma, quando colla sua circonferenza tocca tutti gli angoli della figura.

De-

DEFINIZIONE VII.

La retta linea diceſi accomodata nel cerchio, quando gli eſtremi punti di quella ſi trovano nella circonferenza.

DEFINIZIONE VIII.

304. Delle regolari figure (49.) aventi ciaſcheduna uguali gli angoli, e lati, ſi nomano pentagono, quella, che ne ha cinque; eſagono, che ne ha ſei; ettagono di ſette; ottagono di otto; novagono di nove; decagono di dieci ec.

PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA I. (*Fig.* 165.)

305. Nel dato cerchio ABC adattare una linea AC uguale alla data D, non maggiore del diametro.

RISOLUZIONE, E DIMOSTRAZIONE.

Se la data linea D è uguale al diametro, ne ſiegue, che ogni tirato diametro riſolve la queſtione.

Ma ſe D è minore, allora nella circonferenza, preſo il centro A, col raggio $=$D, ſi ſeghi in C la medeſima circonferenza, ſi tiri la retta AC, e ſarà l'adattata AC$=$D linea data, ſiccome l'operazione il dimoſtra.

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA II. (*Fig.* 166.)

306. Nel dato cerchio inſcrivere un triangolo ABC equiangolo ad altro dato triangolo DEF.

RISOLUZIONE.

Al dato cerchio ſi tiri la tangente GAH (3. 17. 267.) (296.), e nel punto A del contatto ſi formi l'angolo HAC$=$E (1. 23. 139.), poſcia ſi formi altro angolo GAB$=$F, e ſi tiri BC, che il triangolo ABC è equiangolo al dato triangolo DEF.

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Perchè la corda AC cade nel punto A del contatto della retta GH, lo angolo HAC=ABC, angolo nello adverso segmento ABC (3. 32. 282.). Similmente gli angoli GAB=ACB: ma per costruzione sono gli angoli HAC=E, & GAB=F; dunque (110.) ABC=E, & ACB=F; laonde anche il terzo angolo BAC=D terzo angolo (167.).

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA III. (*Fig.* 167.)

307. Al dato cerchio circoscrivere un triangolo equiangolo al triangolo dato DEF.

RISOLUZIONE.

Si prolunghi in G, & H il lato EF, e nel dato cerchio sopra qualunque raggio IL nel punto I, e centro, si formi (1. 23. 139.) lo angolo KIL=DFH; così MIL=DEG; quindi per li tre punti KML si conducano tre tangenti, cioè a' rispettivi raggi IK, IM, IL, si conducano le tre perpendicolari, ciascuna a ciascuno (3. 18. 268.), e sieno AC, AB, BC, le quali concorreranno a' punti A, B, C, e formato rimane il triangolo ABC equiangolo al dato DEF.

DIMOSTRAZIONE.

Nel quadrilatero BMIL, gli angoli in M, & L per la fatta costruzione, sono retti (3. 18. 268.), formati da raggi IM, IL, e dalle tangenti AB, BC: dunque i rimanenti angoli B, & MIL, sono (168.) uguali a due retti, però uguali a due angoli DEF+DEG; ma per costruzione MIL=DEG: dunque i residui angoli (*Ass.* 3. 93.) B=DEF, e così dimostrasi degli altri A, & D, siccome C=DFE (167.), ed acciocchè scrupolo non sopravvenga, che le tirate tangenti non forse concorrano insieme, si avverta, che li tre angoli formati nel centro I, sono i supplementi de' tre angoli del triangolo DEF, nel quale dar non si possono due angoli retti, o due ottusi (164.), ma sempre

due

due acuti, sono perciò di questi due acuti angoli per necessità (41.) ottusi i supplementi loro. Dunque nel centro I sempre due angoli saranno ottusi KIL, MIL: laonde i lòro compimenti C, B sono acuti sopra la retta BC, alla quale perciò inclinate sono, ed oblique le due AC, AB, però in C, & B si segano.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA IV. (*Fig.* 168.)

308. Nel dato triangolo ABC inscrivere un cerchio.

RISOLUZIONE.

Li due angoli A, B si dividan per mezzo (1. 9. 123.) colle rette AF, BF segantesi in F, e dal punto F si dimettano le rette linee FD, FG, FE perpendicolari alli rispettivi lati AC, AB, BC. Finalmente centro F, spazio FD, si tiri il cerchio, che toccherà i tre lati ne' tre punti D, E, G.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè l'angolo FAD si è fatto uguale all'angolo FAG, ed in D, G, gli angoli sono retti, ed il lato AF è comune a due triangoli FAD, FAG, ed opposto ad uno degli angoli uguali. Dunque in tutt'altro sono uguali i triangoli istessi (1. 26. 150.): però FD=FG, ma ne' due triangoli FBG, FBE col discorso medesimo si dimostra FG=FE, ne siegue (*Ass.* 1. 91.) FD==FG=FE; e perciò F è il centro del cerchio (3. 16. 266.), che passa pe' punti D, E, G, ed in essi tocca da dentro il triangolo dato, che ec.

PROPOSIZIONE V.

PROBLEMA V. (*Fig.* 146.)

309. D'intorno al dato triangolo ADB descrivere un cerchio.

RISOLUZIONE.

Si prendano dei tre angoli A, B, D i tre punti come dati, ed il problema risolvasi come nel libro terzo prop. 25. al n. 275. viene eseguito, e dimostrato, che ec. PRO-

PROPOSIZIONE VI.

PROBLEMA VI. (*Fig.* 169.)

310. Nel dato cerchio inſcrivere un quadrato ABCD.

RISOLUZIONE.

Si conduca un diametro AC, a cui ad angoli retti inſiſta l' altro diametro BD. Si conducano le quattro corde AB, BC, CD, AD, dalle quali ſarà formato il quadrato ABCD.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè ſono retti i quattro angoli nel centro E, uguali eſſer deono (30.) i quattro archi AB, BC ec., anzi ſono quattro quadranti (31.) del medeſimo cerchio, però (3. 29. 279.) uguali le loro corde AB, BC ec., e perchè tutti e quattro i triangoli AEB, AED ec., ſono iſoſceli (*Def.* 15. 22.), e rettangoli, hanno uguali gli angoli ſemiretti (163.); dunque retti ſono i compoſti angoli A, B, C, D, ciaſcuno da due ſemiretti formato. Il perchè la figura ABCD è equilatera, e rettangola, però è un quadrato (1. *Def.* 30. 68.)

PROPOSIZIONE VII.

PROBLEMA VII. (*Fig.* 170.)

311. Al dato cerchio ABCD circoſcrivere un quadrato.

RISOLUZIONE.

Nel cerchio dato ſi conducano due diametri AC, BD, ſegantiſi ad angoli retti, e pe' punti A, B, C, D, quattro tangenti ſi tirino (3. 17. 267.), che tra di loro concorrano ne' punti E, F, G, H, e ſarà circoſcritto il quadrato EFGH.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè ſono uguali i quattro quadranti, e li due mezzi cerchi BAD, BCD, ſon parallele GF, AC, HE, così da altra parte parallele eziandio tra di loro GH, BD, FE (290.); ma nel

nel parallelogrammo AD lo angolo in L è retto; dunque retto in H, anzi retti gli angoli in D, & A (193.), e tutti li rimanenti angoli G, F, E, H, sono retti, ma (1. 34. 172.) HE=GF=AC, & AC=BD=GH=FE; dunque (*Ass.* 1. 91.) HE=EF=FG=GH; laonde la figura HF è un quadrato perfetto, perchè formato di quattro angoli retti, e di quattro lati uguali (1. *Def.* 30. 68.), che ec.

PROPOSIZIONE VIII.

PROBLEMA VIII. (*Fig.* 170.)

312. Nel dato quadrato GE inscrivere un cerchio.

RISOLUZIONE.

Li due prossimi lati GH, GF si seghino (1. 10. 124.) a mezzo in B, A, pe' quali punti si conducano BD parallela al lato GH, & AC parallela al lato GF (1. 31. 158.), segherannosi nel punto L, quale preso per centro, e col raggio LA il ricercato cerchio descrivasi, che toccherà il quadrato ne' punti A, B, C, D.

DIMOSTRAZIONE.

Conciossiachè nel quadrato GE sono uguali i quattro suoi lati, e retti gli angoli (68.), anche retti sono gli angoli in A, C, B, D, esterno, ed interno, per le tirate parallele (1. 29. 153.): ma tra le equidistanti linee, uguali sono i perpendicoli (75.): dunque AC=GF=GH=BD; laonde AC=BD, ed uguali le loro metà GA=GB=LA=LB=LC=LD; quindi centro L, spazio LA, il cerchio passa per punti A, B, C, D, e tocca in quelli i quattro lati del quadrato.

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA IX. (*Fig.* 169.)

313. Al dato quadrato ABCD circoscrivere un cerchio.

RI-

RISOLUZIONE.

Si conducano le due diagonali AC, BD, che si recidano in E; quindi preso per centro il punto E, col raggio EB, il descritto cerchio passerà eziandio pe' punti A, D, C.

DIMOSTRAZIONE.

Ne' due triangoli ABC, ADC, che hanno due lati DA, DC, uguali tra loro, e a due lati AB, BC, & AC è base comune, sono (105.) gli angoli ACB=ACD=CAD=CAB, anzi per gli angoli A, C retti, sono i quattro mentovati angoli (163.), tutti e quattro uguali, perchè semiretti alla base. E lo stesso dimostrasi ne' due triangoli BAD, BCD, cioè essere i quattro angoli su la base BD uguali, perchè semiretti; dunque i due triangoli AED, BEC, sopra le basi AD=BC (68.), hanno gli angoli uguali; quindi (1. 6. 118.) uguali hanno i lati EA=EB==EC=ED; il perchè centro E, spazio EB, il descritto cerchio eziandio passa pe' punti C, D, A.

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA X. (*Fig.*171.)

314. Formare un triangolo isoscele ABC, nel quale ciascun angolo alla base BC sia doppio dell' angolo A verticale.

RISOLUZIONE.

Si tiri qualunque sia retta AB, la quale dividasi in D, che il quadrato della porzione maggiore AD sia uguale (2. 11. 231.) al rettangolo AB×BD, di tutta colla porzione minore. Poscia dal centro A col raggio AB si descriva il cerchio BCE, in cui si tiri la corda BC=AD (4. 1. 305.): si conduca AC, e sarà ABC il triangolo desiato.

DIMOSTRAZIONE.

Si descriva la retta DC, ed il cerchio ADCF (3. 25. 275.), che passi pe' tre punti A, D, C; e perchè □ABD=$\overline{AD}^2$=$\overline{BC}^2$, sarà BC tangente del cerchio CDAF, (3. 37. 287.) che segato

 viene

viene dalla ſua corda DC, e perciò l' angolo BCD=DAC, angolo nell' adverſo ſegmento DFC (3. 32. 282.), ed aggiuntovi il comune angolo DCA, ſarà lo angolo BCA=DAC+DCA; ma li due lati AB=AC (1. *Def.* 15. 22.); perciò (1. 5. 116.) eſſer deono ſu la baſe BC gli angoli BCA=CBA ; ma BCA==DAC+DCA; dunque (*Aſs.* 1. 91.) CBA=DAC+DCA, ed eſſendo (1. 32. 160.) lo eſterno angolo BDC=DAC+DCA interni oppoſti, ne ſiegue, che gli angoli CBA=BDC ; dunque (1. 6. 118.) BC=DC=DA per coſtruzione, il perchè gli angoli A=DCA, ed eſſendo BCA=CBA=A+DCA, ſarà tanto BCA, quanto CBA (angoli alla baſe BC) doppio del ſolo verticale angolo A nel triangolo ABC, che ec.

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA XI. (*Fig.* 172.)

315. Nel dato cerchio inſcrivere un pentagono EFGHL regolare (304.).

RISOLUZIONE.

Sopra quale ſiaſi linea ſi formi un triangolo iſcoſcele ABC (4. 10. 314.), lo cui angolo verticale A ſia la metà dell' angolo C, o ſia B alla baſe; quindi nel dato cerchio ſi inſcriva il triangolo FHL equiangolo al formato ABC (4. 2. 306.), e ſi ſeghino a mezzo (1. 9. 123.) gli angoli H, L alla baſe colle rette LGHE, e ſi tirino cinque rette linee, che connettano i punti E, F, G, H, L, che quelle formeranno in ſcritto il pentagono deſiderato.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè li due angoli L, H ſono ſegati a mezzo, la metà di ciaſcuno di loro è uguale al vertical angolo HFL; dunque gli angoli HFL=HLG=GLF=FHE=EHL, ed uguali gli archi, ſu quali inſiſtono (3. 26. 276.), de' quali uguali ſono le corde HL, HG, GF, FE, EL; laonde il deſcritto pentagono gli è equilatero, ed equiangolo eziandio : concioſſiachè ciaſcuno de' cinque angoli E, F, G, H, L inſiſte ſopra di uguale

arco

arco triplice di uno de' già dimostrati uguali archi LH, HG, GF, FE, EL, che era ec.

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA XII. (*Fig.* 173.)

316. Al dato cerchio circoscrivere un pentagono regolare AKLMG (304.).

RISOLUZIONE.

Suppongasi nel dato cerchio inscritto (4. 11. 315.) il pentagono regolare HBCDE, pe' quali punti si tirino altrettante tangenti del cerchio, concorrenti tra loro in A, K, L, M, G. Or queste tangenti formano il pentagono desiderato.

DIMOSTRAZIONE.

Si conducano le rette FB, FK, FC, FL, FD ec., e formati ne vengono i due triangoli KFB, KFC scambievolmente equilateri; dacchè oltre il comune lato FK, sono BF=CF (1. *Def.* 15. 22.), ed ancora CK=BK (288.); dunque (105.) uguali sono gli angoli BFK=CFK, BKF=CKF; laonde K è il doppio dell' angolo CKF, e lo angolo CFB doppio di CFK, e con simile raziocinio dimostransi uguali gli angoli in L, e tutto L doppio di CLF, e tutto lo angolo CFD doppio di CFL; ma CFB =CFD, perchè (30.) misurati da uguali (4. 11. 315.) archi CB, CD; dunque uguali le loro metà (*Ass.* 7. 97.), cioè gli angoli CFK, CFL, e per gli angoli retti (3. 18. 268.) in C, i due triangoli FCK, FCL, alla comune base CF, hanno due angoli uguali, però (1. 26. 150.) CK=CL, vuolsi dire per la stessa ragione (*Ass.* 1. 91.) BK=CK=CL=DL=DM=BA ec.; laonde prendendole a due a due, sia AK=KL=LM ec.; onde il pentagono gli è equilatero; ma alla comune base CF sono opposti uguali angoli CKF, CLF; il perchè sono uguali (*Ass.* 6. 96.) i loro già dimostrati doppi angoli K, L, e parimente dimostrasi A=K=L=M ec., e con ciò all'intorno del cerchio si è descritto un pentagono equilatero, ed equiangolo.

Co-

COROLLARIO. (*Fig.* 173.)

317. Nel pentagono regolare (e lo ſteſſo di ogni regolare figura di lati diſpari), ſe dividesi qualunque angolo M colla linea BM, queſta paſſa pel centro, e divide a mezzo in B l'oppoſto lato (247.) AK, ed a perpendicolo vi cade. E ſe dal mezzo B ſi erga MB perpendicolare, queſta paſſa pel centro, e va a ferire nell' adverſo angolo M, ed a mezzo il divide; imperocchè i due angoli verticali MFL, LFK, ſi ſono dimoſtrati uguali a due verticali angoli KFA, AFG, ne' quattro uguali iſoſceli: ma nel triangolo iſoſcele GFM è diviſo a mezzo il verticale angolo GFM dal perpendicolo FE; dunque gli angoli KFL+LFM+BFK=HFB+HFE+EFM, però gli archi BCDM =BHEM (31.), ſono due mezzi cerchi; laonde BFM è una linea retta, e diametro del cerchio inſcritto.

DEFINIZIONE. (*Fig.* 174.)

318. Nelle regolari figure, i cui lati ſono di numero diſpari, della retta linea BFL, che divide a mezzo lo angolo B, ed a mezzo, e ad angoli retti l' oppoſto lato DE, la porzione, e perpendicolo FL cadente dal centro ſul lato, ſi nomina raggio retto, ma l' altra porzione FB raggio obliquo s' appella.

DEFINIZIONE. (*Fig.* 175.)

319. Nelle regolari figure aventi i lati per numero pari, la medeſima retta linea, o è vera diagonale AD, che a mezzo recide gli angoli oppoſti, oppure è doppio raggio retto LGM.

PROPOSIZIONE XIII.

PROBLEMA XIII. (*Fig.* 173.)

320. Nel dato regolare pentagono AKLMG inſcrivere un cerchio.

RISOLUZIONE.

Si ſeghino a mezzo (1. 9. 123.) qualunque de' due angoli L, M, colle linee LF, MF, ſeganteſi in F, d' onde ſi tirino le rette FA, FA, FK, FG, come ancora le perpendicolari FC al lato KL ec.: centro F col raggio FC, il cerchio descritto, toccherà il pentagono ne' punti H, B, C, D, E.

DIMOSTRAZIONE.

Li due triangoli KLF, MLF hanno due lati KL=LM, comune il lato LF, e da uguali lati, uguali gli angoli FLK, FLM contenuti: dunque le basi KF=FM, e gli angoli FKL==FML (1. 4. 115.); però FML=FLM (*Ass.* 7. 97.) =FLK (per costruzione)=FKB (*Ass.* 3. 93.), saranno (*Ass.* 1. 91.) tutti gli angoli FKL=FLK=FKA=FAK ec. su lati KA=KL=LM ec.; dunque li triangoli KFA, KFL sono isosceli (1. 6. 118.), ed uguali (1. 26. 150.): laonde sopra le uguali basi da verticali angoli F (147.) uguali cadono i perpendicoli FB=FC ec., il perchè centro F, raggio FB descritto un cerchio, dee quello passare pe' punti C, D, E, H rimanenti, ne' quali dal medesimo cerchio il dato pentagono viene toccato.

PROPOSIZIONE XIV.

PROBLEMA XIV. (*Fig.* 174.)

321. D' intorno al dato regolare pentagono descrivere un cerchio.

RISOLUZIONE.

O che si dividano a mezzo qualunque de'due angoli B, D, o due lati BA, DE, le condotte linee BL, GD si segano in F centro, d' onde col raggio FD descritto il cerchio, passa pe' punti A, B, C, D, E, del pentagono dato.

DIMOSTRAZIONE.

Dacchè le due rette linee BL, GD, segano a mezzo i due angoli B, D, oppure ad angoli retti, sorgono da punti G, L, in cui a mezzo recisi, restano i due lati BA, DE, ne siegue, che F, sezione delle due rette BL, GD, sia (317.) il punto, o centro del pentagono, e cerchio da inscriversi, o circoscriversi, conciosiachè FB=FD; dunque centro F, raggio BF il descritto cerchio passa pe' punti A, B, C ec., che ec. Co-

Corollario.

322. Nasce quindi, che ogni regolare figura inscriver si puote, e circoscrivere al cerchio, ed il cerchio alla regolare figura.

PROPOSIZIONE XV.

Problema XV. (*Fig.* 175.)

323. Nel dato cerchio inscrivere un esagono regolare.

Risoluzione.

Comunque piace un diametro AD, si conduca, e centro D, collo spazio DG, raggio del dato cerchio, altro cerchio, o arco CGE si descriva, che seghi il primo ne' punti C, E, pe' quali, e per lo centro G si tirino li due diametri CF, EB, e le sei corde DE, EF, FA, AB ec., deono formare lo esagono desiderato.

Dimostrazione.

Perchè dal centro G del dato cerchio ACE sono condotti i raggi GE=GD=GC (1. *Def.* 15. 22.); così dal centro D del cerchio EGC, DE=GD=DC (*Def.* 15. 22.); perciò (*Ass.* 1. 91.) sarà GE=GC=GD=DE=DC; laonde li due triangoli EGD, DGC sono equilateri, però equiangoli, e gli angoli DGE=$=$DGC$=60°=\frac{180°}{3}$, uguale ciascuno alla terza parte di due retti (161.). Ma sopra la linea EB vi cade la retta CG, e sarà li due angoli EGC+CGB=180° (1. 13. 128.); dunque lo angolo CGB=180°−100°=60°, perciò uguali a ciascuno degli altri due angoli EGD, DGC: quindi al vertice (1. 15. 131.) uguali sono gli opposti angoli BGA, AGF, FGE; vuolsi dire, che tutti sei gli angoli nel centro G uguali sono tra loro, e contenuti da lati uguali (*Def.* 15. 22.), il perchè (1. 4. 115.) uguali sono le basi, cioè lati del formato esagono AB=BC==CD=DE=EF=FA; ma sono isosceli i mentovati triangoli; dunque (1. 5. 116.) alle loro basi, uguali sono gli angoli GAF, GAB ec., e perciò prendendoli a due a due, formati vengono

uguali

uguali angoli F=A=B ec. onde la coſtruita figura è un eſagono regolare, che era ec.

COROLLARIO I.

324. Si è dimoſtrato il lato DE=GD raggio; dunque il raggio di ogni cerchio è lato dello eſagono in eſſo inſcritto.

COROLLARIO II.

325. E dacchè ſi è dimoſtrato ciaſcun angolo al centro FGA==60°, e l'arco AF, e miſura del medeſimo angolo (30.), ne ſiegue, che il raggio, o lato dell'eſagono applicato alla circonferenza recide un arco AF=60°.

COROLLARIO III. (*Fig.* 176.)

326. Facilmente divideſi in tre parti un quadrante AR, dacchè applicando da A il raggio in F, ſarà l'arco AF=60°; dunque FR=90°−60°=30°; poſcia applicando il raggio da R in Q, ſarà nella ſteſſa maniera AQ=30°; laonde FQ=30°==90°−30°−30°.

COROLLARIO IV. (*Fig.* 177.

327. E finalmente dentro del dato cerchio ſi deſcrive un triangolo equilatero colla ſuperiore coſtruzione, tirando un diametro AD, e centro D deſcritto il cerchio EGC col medeſimo raggio, li tre punti A, C, E ſono del triangolo equilatero; dacchè tirate le tre linee AC, AE, EC, ſono uguali, perocchè ciaſcuna è corda del doppio arco dell' eſagono.

COROLLARIO V.

328. Il lato EC del triangolo equilatero, recide la quarta parte MD del diametro AD perpendicolare ad eſſo; concioſſiachè per la fatta ſezione di archi da centri G, D la retta EC taglia a mezzo l'altra retta GD (124.); dunque MD $= \frac{1}{2}$ GD$= \frac{1}{4}$AD.

PRO-

PROPOSIZIONE XVI.

PROBLEMA XVI. (*Fig.*178.)

329. Nel dato cerchio descrivere un quindecagono regolare.

RISOLUZIONE.

S' inscriva nel dato cerchio il pentagono regolare, il cui lato AB (4. 11. 315.): quindi il triangolo equilatero (127.), il cui lato AC, l' arco BC si seghi a mezzo in E (280.), dico, BE, o sia EC è il lato del quindecagono, che applicato 15. volte alla circonferenza la compie.

DIMOSTRAZIONE I.

Pongasi tutto il cerchio $=15$. parti, l' arco AB ne contiene 3., e l' arco AC 5; dunque l' arco $BC=2$ delle medesime parti, onde $BE=\frac{1}{15}$ uguale alla quindicesima parte di tutto il cerchio.

DIMOSTRAZIONE II.

L' arco del pentagono $AB=\frac{360^\circ}{5}=72^\circ$, l' arco del triangolo equilatero $AC=\frac{360^\circ}{3}=120^\circ$; dunque l'arco $BC=120^\circ-72^\circ=$ $=48^\circ$; però la sua metà $BE=24$. Ma $24^\circ \times 15=360^\circ$; dunque BE è lato del quindecagono da inscriversi nel cerchio.

COROLLARIO. (*Fig.* 177.)

330. Con questo metodo istesso si vengono a descrivere entro del cerchio innumerabili regolari figure: se piace un ottagono, si divida a mezzo lo arco del quadrato, perchè $2\times4=8$; ove si voglia un decagono, dividasi a mezzo lo arco del pentagono ec. così per avere il lato del dodecagono, recidasi a mezzo in D lo arco EC del triangolo equilatero; e la metà DC anche dividasi a mezzo in B, e sarà la corda BD del dodecagono il lato, essendo $2\times2\times3=12$, ma perchè non intraviene lo stesso di tutte le regolari figure di qualunque sia numero de'lati; però occorrendo, si impieghi la seguente metodo. PRO-

PROPOSIZIONE XVII.

PROBLEMA XVII. (*Fig.* 174.)

331. Di tutte le regolari figure trovare lo angolo al centro, la somma di tutti gli angoli interni alla circonferenza, e ciascun angolo in essa.

RISOLUZIONE, E DIMOSTRAZIONE.

Sia F centro della figura, a cui da ogni angolo A, B ec. si tiri il suo raggio AF, BF ec., saranno formati tanti triangoli, ed uguali angoli verticali in F; ma la somma di tutti gli angoli (33.), che formare si possono ad un punto F d' intorno, sono uguali a quattro angoli retti $=360^\circ$; sarà adunque lo angolo AFB al centro uguale ad un quoziente, dividendo 360° per lo numero de' lati della figura, cioè per lo triangolo equilatero lo angolo al centro $=\frac{360^\circ}{3}=120^\circ$ pel quadrato $=\frac{360^\circ}{4}=90^\circ$. Per il pentagono $=\frac{360^\circ}{5}=72^\circ$ ec.

A trovar poi la somma di tutti gli angoli alla circonferenza, e ciascuno di quelli, già si è risoluto il problema (169. 170.). Dalla prima parte però nasce altra facil maniera di ritrovare lo angolo alla circonferenza $=180^\circ-\frac{360^\circ}{m}$, prendendo per m il numero de' lati della figura, vuolsi dire, che da due angoli retti sottraendo il ritrovato angolo al centro, nel residuo averassi lo angolo alla circonferenza; conciossiachè essendo d' ogni triangolo i tre angoli $=180^\circ$ (1. 32. 160.), toltone lo angolo F al centro nel triangolo AFB, sarà il residuo uguale alla somma degli angoli alla base AB (166.): ma si è dimostrato (315.) essere FBC=FBA=FAB; dunque prendendo un uguale per l' altro (*Ass.* 13. 110.), sarà lo angolo B, o sia $A=180^\circ-\frac{360^\circ}{m}$; quindi v. g. pel pentagono $A=180^\circ-\frac{360^\circ}{5}=108^\circ$, che ec.

COROLLARIO.

332. Dal ſuperiore problema formare ſi puote la Tavola degli angoli alla circonferenza, ed al centro di qualſiſia regolare figura in infinito, che quì ſi vede fino al quindecagono.

Angoli delle regolari Figure.

333. Lati delle Figure.	Somma di tutti gli angoli alla circonferenza.	Angoli alla circonferenza.	Angoli al centro.
III.	180°	60°	120°
IV.	360°	90°	90°
V.	540°	108°	72°
VI.	720°	120°	60°
VII.	900°	128° $\frac{4}{7}$	51° $\frac{3}{7}$
VIII.	1080°	135°	45°
IX.	1260°	140°	40°
X.	1440°	144°	36°
XI.	1620°	147° $\frac{3}{11}$	32° $\frac{8}{11}$
XII.	1800°	150°	30°
XIII.	1980°	152° $\frac{4}{13}$	27° $\frac{9}{13}$
XIV.	2160°	154° $\frac{2}{7}$	25° $\frac{5}{7}$
XV.	2340°	156°	24°

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA. (*Fig.* 179.)

334. Ogni regolare figura EBH è uguale al rettangolo LK, la cui base LM è uguale alla metà del perimetro della figura, e l'altezza LX=AC, raggio retto della data figura.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè ogni regolare figura si divide in tanti triangoli BAD ec., le cui cime siano tutte nel centro A della figura, e di ciascun triangolo, la base ella è un lato BD della figura; essendo uguali tutti i raggi AB, AD, ed uguali tutti i lati BD, DH ec. della figura, e basi de' triangoli, ciascuna di ciascheduno, ne siegue, che tutti i triangoli sono uguali tra loro, alla somma de' quali è uguale la intera figura (*Ass.* 9. 106.); ma ogni triangolo ABD (179. 180.) egli è uguale al prodotto del suo perpendicolo, o sia raggio retto (318.) AC×BC metà della base. Dunque prendendo di tutti i lati della figura, le metà, che sono basi di altrettanti triangoli; vuolsi dire della somma di tutte le basi, e lati della figura, prendendone la metà, che sia la linea LM, e sollevando ad angoli retti la linea LX=CA, ed il parallelogrammo KL compiendo, sarà formato un rettangolo LK=△ABD×y, prendendo y per lo numero de' triangoli, e semibasi, o semilati della figura compresi nella linea LM, base del rettangolo LK.

DEFINIZIONE.

335. Se il lato d'un poligono infinitamente s'impicciolisce, vuolsi dire, se v. g. i lati di una regolare figura, tutti ugualmente divisi vengono per metà, o in tre parti ec., e quelle metà si tornino a similmente dividere, oppur siano le terze parti ec., e così tornando a dividere in infinito, a tal picciolezza ridotte vengono quelle parti, che minor cosa nel genere di linea concepir non si possa, si dicano quelle infinitamente piccoli lati.

DEFINIZIONE.

336. È la regolare figura, i cui uguali lati per uguali divisioni, infinite volte replicate, hanno sì fatti lati infinitamente piccoli, avere gli deono anche per numero infiniti; laonde infinitilatere figure si possono appellare.

DEFINIZIONE.

337. E perchè l'incidenza di due qualunque siano piccioli lati, sempremai esser dee (1. *Def.* 8. 10.) un angolo rettilineo, vogliono perciò le infinitilatere figure essere concepute, e nominate anche infinitangole per numero, cioè di lati, e di angoli infiniti.

DEFINIZIONE.

338. Si concepisca pertanto, ed appellisi il cerchio una regolare figura di lati infinitamente piccioli, e di angoli per numero infiniti, che è quanto a dire; il cerchio è un regolare poligono infinitangolo, ed infinitilatero.

DEFINIZIONE.

339. Raggio retto del cerchio egli è il proprio suo raggio (1. *Def.* 15. 22.), perchè nè minore avere ne puote, nemmeno maggiore, perchè cade perpendicolarmente sopra ciascuno degli infinitamente piccoli lati della figura.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA. (*Fig.* 180.)

340. Il cerchio nella sua piana superficie è uguale ad un rettangolo BD, la cui base BC sia uguale alla metà della circonferenza, e l'altezza BA uguale al raggio del medesimo cerchio.

DIMOSTRAZIONE.

Dacchè (338.) il cerchio è un poligono regolare, lo cui raggio retto (339.) egli è il suo semidiametro istesso, e raggio AB, chiaramente ne siegue (334.), che il rettangolo BD, la la cui bafe BC è uguale alla femicirconferenza, e l' altezza AB è lo fteffo raggio del cerchio, effer dee la piana fuperficie ABCD rettangola uguale alla piana fuperficie del cerchio, che era ec.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA. (*Fig.* 180.)

341. La fuperficie d' un cerchio è uguale ad un triangolo rettangolo DEC, lo cui cateto DE è uguale a tutta la circonferenza, e l' altro cateto CD è uguale al raggio del medefimo cerchio.

DIMOSTRAZIONE.

Si divida per mezzo in A la bafe DE, e fu le perpendicolari CD, BA fi compia il rettangolo AC, certamente uguale (340.) al piano del cerchio; ma al rettangolo iftefso AC è uguale il triangolo EDC coftituito nella medefima altezza BA, e nella doppia bafe DE (1. 41. 185.); dunque il triangolo EDC al dato cerchio è uguale, che era ec.

ANNOTAZIONE I.

342. Quefto celebre teorema è di Archimede, quafi nella maniera medefima dimoftrato, fe i principj fi riguardano, affume egli due poligoni fimili, e regolari, uno infcritto, altro circofcritto nel cerchio. Divide pofcia, e torna a dividere i lati, cioè tanto li multiplica, e gli impicciolifce, che chiara ne appare la via a concepire, che i minimi lati di due poligoni, picciolifsimi divenuti, fi riducono ad effere lo fteffo, che circonferenza del cerchio, o fia (338.) d' un poligono regolare di lati, e di angoli infiniti.

ANNOTAZIONE II.

343. Belliffime, e del tutto geometriche fono de' due ultimi precedenti teoremi le anneffe dimoftrazioni; ma fi ritrovano i Geometri tutti intenti, e faticati a difcogliere il nodo Gordiano, per cui Aleffandro non bafta, vogliam dire, che tutta confifte la difficoltà in ritrovare una retta linea DE uguale, geometri-

metricamente a tutta la circonferenza del cerchio, lo cui raggio AB : o almeno trovare la esatta proporzione razionale tra il raggio, e tra la circonferenza dal proprio cerchio, locchè avuto, tosto otterrassi la linea DE uguale alla semicirconferenza del cerchio, oppure a tutta, e su la metà formandone un rettangolo, o su tutta un triangolo rettangolo, prendendo il raggio per l'altezza perpendicolare, coll'uso della proposizione 42. del primo libro, formar se ne puote del triangolo un uguale rettangolo. A trovare poi il quadrato uguale a' mentovati rettilinei, epperò anche al cerchio, è una costruzione fatta al lib. 2. pr. 14. num. 234., oppure da eseguirsi per la prop. 13. del lib. 6., ritrovando tra i due lati del rettangolo, o tra un cateto, ed altro semicateto del triangolo la media proporzionale, lo cui quadrato è uguale alle due rettilinee figure, ed al cerchio.

ANNOTAZIONE.

344. Il celebratissimo Archimede fu quello, che in razionali numeri intieri, ed in minimi termini ritrovò la proporzione tra il raggio, e la semicirconferenza, cioè tra il diametro, e la circonferenza del cerchio essere :: 7 : 22 prossima però, non geometrica esatta.

Che però dato il diametro $FB = 56$ parti uguali, volendo ritrovare una linea retta prossimamente uguale alla circonferenza del cerchio, ed in quanto al senso molto esatta, si instituisca la proporzione $7 : 22 :: 56 : x = 176$.

Per ritrovare adesso il piano del cerchio, si prenda la metà della circonferenza $AD = \frac{176}{2} = 88$, e la metà del diametro $\frac{56}{2} = 28 = AB$ raggio, e si multiplichino insieme, che sarà il piano del cerchio $= 88 \times 28 = \square BD = 2464$ piccoli quadrati, lo cui lato di ciascuno è una parte cinquantesimasesta del diametro FB; oppure tutta la circonferenza si multiplichi per lo raggio, ed il prodotto $176 \times 28 = 4928$ diviso per 2, deve restituire il ritrovato rettangolo $= 2464 = \triangle EDC$ rettangolo, uguale al piano del cerchio.

In altra maniera.

Per ritrovare la proffima quadratura del cerchio, lo cui diametro $BF=56$, e'l fuo quadrato $\overline{BF}^2=3136$, inftituifcono la proporzione a dirittura, fenza avere riguardo alla circonferenza, cioè $14:11::\overline{BF}^2:\overline{x}$, piano del cerchio, ed avendo $\overline{BF}^2=3136$, farà $14:11::3136:x=2464$, piano ritrovato altrimenti di fopra.

DEGLI ELEMENTI DI EUCLIDE.

LIBRO QUINTO.

DEFINIZIONE I.

345. LA minore grandezza dicasi parte summultiplice della grandezza maggiore, quante le volte questa da quella esattamente misurata rimane.

346. Si nomano aliquote quelle parti, le quali con tale esattezza misurano, che non avanza residuo; e sono aliquote simili, ove ugual numero di volte misurano, come il 3 del 15, ed il 4 del 20, che 5 volte replicate misurano: il perchè subquintuple sono vocate. Altre poi subduple, subtriple ec., se due volte replicare si deono, o veramente tre ec.

Parti aliquante sono quelle, che misurano, ma qualche residuo ci avanza; e sono simili, qualora ugual numero di volte misurano, ed il residuo è uguale; tali sono il 2 del 7, ed il 4 del 14, che replicate tre volte ci avanzano i residui $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

DEFINIZIONE II.

347. Multiplice si denomini la quantità maggiore, che dalla minore misurata ne viene.

348. Sono equimultiplici le maggiori quantità, che ugual numero di volte le loro parti contengono; così il 18 del 6, ed il 21 del 7.

DEFINIZIONE III.

349. Ragione è un ordine, o sia rispetto scambievole tra due quantità del genere istesso in ciò, che alla quantità s' appartiene.

DEFINIZIONE IV.

350. Proporzione è una somiglianza di ragioni.

DEFINIZIONE V.

351. Quelle quantità hanno ragione tra loro, che multiplicate superare si possono scambievolmente.

DEFINIZIONE VI.

352. Nella ragione medesima sono le quantità, la prima alla seconda, e la terza alla quarta, ove gli equimultiplici (348.) della prima, e terza ugualmente mancano, o pareggiano, o eccedono gli equimultiplici della seconda, e quarta, prendendo a piacere i multiplicatori.

ANNOTAZIONE.

Il sapientissimo Galileo nel principio del quinto Dialogo dice: e chi è quell'ingegno tanto felice, il quale abbia certezza, che allora quando le quattro grandezze sono proporzionali, gli ugualmente multiplici si accordano sempre; quindi poscia conchiude: parmi questo di Euclide piuttosto un teorema da dimostrarsi, che una definizione da premettersi; per questo (premettendo quanto sopra, tale materia insegna il medesimo Galileo colle seguenti parole; allora noi diremo quattro grandezze esser fra loro proporzionali, cioè aver la prima alla seconda la stessa proporzione, che ha la terza alla quarta, quando la prima sarà uguale alla seconda, e la terza ancora sarà uguale alla quarta, ovvero quando la prima sarà tante volte multiplice della seconda, quante volte precisamente la terza è multiplice della quarta) necessaria cosa è il servirsi di lumi più chiari, e spezialmente dell'uso delle frazioni nel nostro algorismo trattate, per ben intendere le superiori definizioni, e le seguenti, e tutta la scienza delle proporzioni; quindi alle seguenti opportune cognizioni, e chiare, fa d'uopo rivolgere il pensiero.

DE-

DEFINIZIONE.

353. Ogni ragione consiste tra due quantità, o sieno termini, de' quali il primo espresso è antecedente, e suo conseguente il termine secondo, che siegue.

Dove intanto tra due termini della ragione si ha riguardo alla differenza, sottraendone dal maggiore il minore, come tra 5, e 2, fra quali la differenza $=5-2=3$, Aritmetica tale ragione si appella, e sono simili quelle ragioni, ove tra loro termini, la differenza medesima regnare si vede, come 13, 7, & 18, 12, o generalmente a, $a+x$, & b, $b+x$ crescenti; oppure a, $a-x$, & b, $b-x$ decrescenti ragioni simili.

Il perchè alle prime si aggiugne, e nelle seconde sottraesi dalle antecedenti la medesima differenza x per ottenere i conseguenti; quindi di tali ragioni simili, il confronto espresso con questi tre punti :· proporzione aritmetica nominare si vuole.

DEFINIZIONE VII.

354. Quelle quantità, che sono nelle ragioni medesime, cioè simili, si domandino proporzionali.

DEFINIZIONE.

355. Dove all'incontro tra termini delle ragioni contemplasi la loro uguaglianza $b=b$, o la multiplicità $3b$ dell' antecedente verso b conseguente, o finalmente la sottomultiplicità dell' antecedente b verso $3b$ suo conseguente (345. 348.): generalmente la multiplicità di mb verso b, o sottomultiplicità di b verso mb, prendendo m per qualsivoglia intero multiplicatore, sempre Geometrica la ragione si appella; comunemente espressa con due punti locati in mezzo de' termini, come $mc:c$:

E dacchè dividendo uno per l' altro termine, tosto (*Alg.* 63.) nel valore (generalmente $=m$) della frazione $\frac{mc}{c}=m$, conoscesi la determinata multiplicità m, o sottomultiplicità $\frac{c}{mc}$ del numeratore verso il denominatore, e si distinguono gli equimultiplici

tiplici $\frac{ma}{a}$, $\frac{mc}{c}$, ed equisottomultiplici $\frac{a}{ma}$, $\frac{c}{mc}$ da quelli, che non lo sono, come $\frac{ma}{a}$, $\frac{nc}{c}$, quindi nasce, che ogni frazione $\frac{ma}{a}$, $\frac{c}{nc}$ è una ragione Geometrica, $ma : a$, $c : nc$, prendendo il numeratore per antecedente, e 'l divisore per conseguente, ed il valore m, o sia n dalla frazione; per nome, ed esponente della ragione $m = \frac{ma}{a} = ma : a$, & $\frac{c}{nc} = c : nc$, nome $= n$; quindi si vede, che sono due scritture diverse, ma esprimono la cosa medesima $\frac{a}{ma}$, $a : ma$; oppure $\frac{6}{12} = 6 : 12$, nome $= \frac{1}{2}$: o sia $\frac{12}{6} = 12 : 6$, nome $= 2$. E si avverta, come pel nome multiplicando l' antecedente, producesi il conseguente $a : ma = a : m \times a$, & $6 : 12 = 6 : 2 \times 6$. Per ritrovare questo numero multiplicatore, si rovesci la frazione quoziente, e per l' antecedente il conseguente dividasi.

Definizione, e Corollario.

356. Simili, cioè uguali geometriche ragioni sono $ma : a$, $mc : c$, i cui antecedenti ma, mc sono equimultiplici de' loro conseguenti a, c, che m volte contengono, oppure $a : a$, $c : c$, che si contengono una volta, o finalmente $a : ma$, & $c : mc$, li cui sottomultiplici antecedenti a, & c uguali volte m contenuti vengono da conseguenti ma, mc, o al contrario. Tutto ciò è lo stesso, che il dire, quelle sono uguali ragioni geometriche, e simili, che hanno lo stesso nome, cioè tutte le uguali frazioni $\frac{ma}{a} = \frac{mc}{c} = m$ comune valore, o sia $\frac{12}{4} = \frac{6}{2} = 3$, valore comune, e nome; laonde sia la stessa cosa diversamente scritta $\frac{ma}{a} = \frac{mc}{c} = ma : a = mc : c$; così $\frac{12}{4} = \frac{6}{2} = 12 : 4 = 6 : 2$; e generalmente, ove sia $\frac{a}{x} = \frac{c}{y}$, è lo stesso, che $a : x = c : y$.

357. Con simile opposito raziocinio disuguali geometriche ragioni dissimili esser deono quelle, i cui antecedenti non sono equimultiplici, e nemmeno equisottomultiplici de' conseguenti loro, o veramente, come insegna il Galileo nel citato quinto dialogo, quando la prima grandezza sarà alquanto più grande di quel, che ella dovrebbe essere, per avere alla seconda la medesima proporzione, che ha la terza alla quarta, allora voglio, che convenghiamo di dire, che la prima abbia maggior proporzione alla seconda, di quella, che ha la terza alla quarta, ed allora i termini sono sproporzionali, come (supponendo $m>n$) sarebbono $ma:a$, & $nc:c$, oppure $12:4$, & $6:3$; vuolsi dire, che disuguali sono le ragioni di nome diverso, cioè disuguali le frazioni $\frac{12}{4}>\frac{6}{3}$, & $\frac{ma}{a}>\frac{nc}{c}$, essendo diversi nomi, e valori $3>2$, & $m>n$; quindi è, che solamente sono diverse scritture, ma le medesime cose esprimenti $\frac{12}{4}>\frac{6}{3}$, cioè $12:4>6:3$. Generalmente $\frac{ma}{a}>\frac{nc}{c}$, cioè $ma:a>nc:c$, & $m>n$, oppure se egli è $\frac{a}{x}>\frac{b}{y}$, sarà $a:x>b:y$; però il 12 dice maggior ragione al 4 contenuto tre volte, di quel che il 6 dice al 3, che due sole volte contienlo, e così ma dice maggior ragione ad a, che $nc:c$, quando il multiplicatore m è maggiore dell' altro multiplicatore n.

Definizione.

358. La già operata somiglianza, e confronto di uguali geometriche ragioni (356.) appellare si vuole geometrica proporzione (350.), come sarebbe $a:x=c:y$, vuolsi dire $\frac{a}{x}=\frac{c}{y}$; egli è però di maggior uso in vece del segno $=$ frapporre quattro punti $::$ infra le due uguali ragioni, per esprimere la geometrica proporzione $a:x::c:y$, della quale sono appellati a primo termine, e primo antecedente; x secondo termine, e primo conseguente; c terzo termine, e secondo antecedente; y quarto termine, e secondo conseguente; inoltre a primo, &

y

y quarto, sono termini estremi. x secondo, & c terzo sono termini medii. Finalmente a, c antecedenti omologi; siccome x, y conseguenti omologi tra di loro.

COROLLARIO I.

359. E dacchè la proporzione geometrica $a:x::c:y$, cioè $a:x=c:y$, nasce (356) da due uguali frazioni $\frac{a}{x}$, & $\frac{c}{y}$, ne siegue, che ogni proporzione geometrica $a:x=c:y$ si riduce in una equazione algebraica di due uguali frazioni $\frac{a}{x}=\frac{c}{y}$ dividendo gli antecedenti pe' conseguenti, o pure $\frac{x}{a}=\frac{y}{c}$, dividendo i conseguenti pei propri antecedenti.

COROLLARIO II.

360. E perchè dividendo cose uguali per cose uguali (*Alg.* 88.) uguali quozienti si ottengono, chiaramente ne siegue, che di due equazioni algebraiche $a=x$, & $c=y$, ne nasce una proporzione geometrica $a:c::x:y$; perchè dividendo una equazione per l'altra, si forma ne' quozienti l'equazione $\frac{a}{c}=\frac{x}{y}$; che è quanto a dire (356.) $a:x::c:y$, oppure $a:c::x:y$. Egli è questo un Corollario per noi di moltissimo uso.

COROLLARIO III.

361. Dunque necessità vuole, che avendo disuguali frazioni $\frac{a}{x}>\frac{b}{y}$, da esse ne nascono disuguali ragioni $a:x>b:y$, la ragion maggiore $a:x$ dalla maggior frazione $\frac{a}{x}$, e la minore dalla minore $\frac{b}{y}$, onde furono generate, e sempre prendendo i numeratori per antecedenti, e i divisori per conseguenti.

Ne nasce da ciò, che di due disuguali ragioni, dividendo gli antecedenti per i conseguenti loro, si ottengono due disuguali frazio-

frazioni. Se egli è $a:x > b:y$, si formano $\frac{a}{x} > \frac{b}{y}$, la frazione maggiore dalla maggiore ragione, e la minore dalla minore.

Divisione delle Ragioni.

362. Razionali ragioni sono quelle, i cui termini sono come numero a numero $a:b::7:4$.

Irrazionali poi, e sorde si appellano, ove incommensurabili hanno i termini loro, o i nomi delle ragioni $3:\sqrt{6}$, & $a:\sqrt{2aa}$, come fu dimostrato (*Alg.* 9.)

363. Ragioni di ugualità si nomano, dove ogni antecedente è uguale al suo conseguente. Supponendo (360.) $a=x$, & $c=y$, saranno ragioni, e proporzione di ugualità $a:x::c:y$, o pure $5:5::10:10$.

364. Ragioni di maggiore disuguaglianza si dicono tutte, ove lo antecedente è maggiore del suo conseguente $8:5$, & $3a:a$, eppure $ma:a$. Al contrario di minore disuguaglianza sono le ragioni, ove lo antecedente è minore del conseguente $7:15$, o sia $3a:9a$.

365. Sesquialtere sono quelle, lo cui antecedente contiene il suo conseguente una volta, e mezzo, come $3:2$. Sesquiterze, ove una volta contienlo, ed un terzo $::4:3$, Sesquiquarta $::5:4$, ec., rovesciandole poi sono Subsesquialtere $::2:3$. Subsesquiterze $::3:4$, ec.

Delle uguali ragioni, e simili, e disuguali, e dissimili abbastanza se n'è ragionato ne' precedenti numeri 356. 357. 361., anzi con lume sì fatto intendere si potrà la Definizione seguente di Euclide.

DEFINIZIONE VIII.

366. Ove tra gli equimultiplici quello della prima eccede quello della seconda, ma il multiplice della terza non eccede quello della quarta, allora la prima grandezza dice alla seconda maggior ragione, che la terza alla quarta.

ANNOTAZIONE.

367. Di certo si avvèra quanto asserisce Euclide; ma non già sempre,

ſempre, nè con tutti i multiplicatori. Sieno $3:6$, & $4:12$ diſuguali ragioni, perchè diſuguali frazioni (357. 361.) $\frac{3}{6} > \frac{4}{12}$, cioè $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ (*Alg.* 69.) ſi multiplichino gli antecedenti per 7, ed i conſeguenti per 3, ſarà $3 \times 7 > 3 \times 6$; ma $4 \times 7 < 3 \times 12$, come vien definito da Euclide; ma in vece de' multiplicatori 3, & 7 ſi prendano 2, & 10, o qualunque altro numero al 10 ſuperiore, non più avverato ſi vede quanto definito viene da Euclide; conciofſiachè $3 \times 10 > 2 \times 6$, e parimente $4 \times 10 > 2 \times 12$, e pure le ragioni $3:6$, & $4:12$ ſono diſſimili, e diſuguali, eſſendo come $\frac{3}{6} > \frac{4}{12}$, così (361) $3:6 > 4:12$. A tentone adunque biſogna andare trovando que' multiplicatori, che il giuoco fanno riuſcire.

Il perchè ad avere certa, e determinata ſcienza delle uguali, e diſuguali ragioni, e determinare qual ſia maggiore, quale minore, e quanto lo eccesſo oltre a quanto ſi è dimoſtrato (356. 357. 359. 361.) al ſeguente Problema l'occhio rivolgaſi.

PROPOSIZIONE.

PROBLEMA.

368. Delle date ragioni determinare quali ſieno uguali, o diſuguali. Di queſte riconoſcere la maggiore, e ſtabilirne la differenza, ed uguagliarle ove biſogna.

RISOLUZIONE I.

Lo antecedente d'ogni ragione pel ſuo conſeguente dividaſi, quelle ſono uguali ragioni, dalle quali formate vengono uguali frazioni (356.), e quelle ſono diſuguali ragioni, da cui diſuguali frazioni ne naſcono (357. 361.)

RISOLUZIONE II.

Le diſuguali ragioni ſono diſuguali frazioni (357. 361.). Il perchè riducendole a comune denominatore (*Alg.* 69.) ſi valutino tra di loro, e quella, il cui numeratore è maggiore

(*Alg.* 70.)

(*Alg.* 70.) sarà maggior frazione, lo cui numeratore, ed antecedente, al suo conseguente, dice maggior ragione, che lo antecedente della minor frazione al suo conseguente. Avendo $3:6$, & $4:12$, sarà $\frac{3}{6}$, & $\frac{4}{12}$, e riducendo (*Alg.* 65.), si ottiene $\frac{6}{12} > \frac{4}{12}$; Dunque (361.) $3:6 > 4:12$.

RISOLUZIONE III.

Avendole ridotte a comune denominatore, si sottragga dal più grande numeratore il numeratore più piccolo, ed al residuo soscrivasi il comun divisore, ed in quella frazione sarà trovata la differenza delle ragioni. Però da $\frac{6}{12}$ sottraendo $\frac{4}{12}$, sarà differenza, e residuo $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Uguagliarle poscia volendo, si sottragga dallo antecedente della ragion maggiore la differenza trovata, e lo avanzo sarà legittimo antecedente d' una ragione uguale. Perciò da $\frac{3}{6}$ sottraendo $\frac{1}{6}$, sarà $\frac{3-1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, cioè $2:6::4:12$.

Lo stesso si ottiene, al numeratore della ragion minore la differenza trovata aggiugnendo; quindi $\frac{3}{6} = \frac{4+2}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, cioè $3:6::6:12$.

Componimento delle Ragioni.

369. O che una frazione (dicasi omai ragione geometrica) multiplicata venga per altra, o altre ragioni, o pure divisa, egli è questo un componimento di ragioni: e la ragione, che ne risulta, composta si nomi, o multiplicata. Se componesi multiplicando (*Alg.* 75.) antecedenti tra loro, e tra loro i conseguenti, come $\frac{a}{x} \times \frac{c}{y} = \frac{ac}{xy}$, cioè $\frac{\begin{matrix} a:x \\ c:y \end{matrix}}{ac:xy}$, si appelli $ac:xy$ multiplicata diretta di $a:x$, e di $c:y$, che componenti ragioni si appellano.

370. Ma se componesi dividendo (*Alg.* 76.) per $\frac{c}{y}$ la ragione

$\frac{a}{x}$, che vale $\frac{\frac{a}{cx}}{y} = \frac{ay}{cx} = ay:cx$; Tale formata ragione $ay:cx$ si dinomini pure composta diretta di $a:x$ (i cui termini nelle loro sedi si stanno), e reciproca, o inversa di $c:y$, il cui antecedente c divien conseguente, ed il conseguente y in antecedente si cangia.

COROLLARIO I.

371. Il nome adunque della diretta composta ragione egli è un prodotto de' nomi delle ragioni, che la compongono; avendo $ma:a$, nome$=m$, $nc:c$, nome$=n$, $rx:x$, nome$=r$, componendo direttamente fia $mnracx:acx$, nome$=mnr=\frac{mnracx}{acx}$.

COROLLARIO II.

372. All' opposto ove componesi con inversa maniera, cioè reciprocamente, e dividendo (370.), allora il nome della composta ragione egli è un quoziente provenuto dalla divisione del nome della diretta per lo nome della inversa ragione, perciò componendo direttamente le due ragioni, $ma:a$, $nc:c$, sarà composta ragione diretta $mnac:ac$; quindi compongasi reciprocamente la ragion $rx:x$, ne risulta (*Alg.* 76.) $\frac{mnac}{ac} : \frac{rx}{x} =$ $= \frac{\frac{mnac}{racx}}{x} = \frac{mnacx}{racx} = \frac{mn}{r}$, nome della composta ragione diretta, ed inversa, in cui delle componenti ragioni dirette il nome mn diviso rimane per r, nome della componente inversa ragione, che reciproca ancora si appella.

Nel libro sesto num. 534. dimostraremo la pratica di queste dirette, ed inverse ragioni.

COROLLARIO III.

373. Chiaramente ne siegue eziandio, che se sono due, ed uguali le dirette componenti ragioni co' termini loro $a:x$, & $a:x$, la composta ragione $aa:xx$, sarà quadrata di ciascuna delle due componenti, e riferendo alli termini omologi, perchè aa è il quadrato dell'antecedente a, ed xx quadrato del conseguente x,

pertanto

pertanto la ragione $aa:xx$ si appelli quadrata, o duplicata della ragione $a:x$, e questa $a:x$ subduplicata di $aa:xx$. Dacchè $a:x::\sqrt{aa}:\sqrt{xx}$, & $aa:xx::\overline{a}^2:\overline{x}^2$, ed anche il nome della composta ragione sarà il quadrato del nome della ragion componente, come ad occhio si manifesta, $a:x$ nome m, $a:x$ nome m, sarà $aa:xx$ nome mm, così $9:25::\overline{3}^2:\overline{5}^2$, & $3:5::\sqrt{9}:\sqrt{25}$.

COROLLARIO IV.

374. Ma se tre sono le uguali componenti ragioni, o questa duplicata con sua radice, la composta ragione triplicata si appella, o cubica, e 'l suo nome composto, e triplicato, cioè cubo del componente nome, e così $a:x$ nome m, $a:x$ nome m, $a:x$ nome m, $a^3:x^3$ nome m^3; quindi egli è $a^3:x^3$ in ragion triplicata di $a:x$, cioè come i cubi di questi, & $a:x$ in ragione subtriplicata di $a^3:x^3$, cioè come $\sqrt[3]{a^3}:\sqrt[3]{x^3}$; così $8:216::2^3:6^3$, & $2:6::\sqrt[3]{8}:\sqrt[3]{216}$.

ANNOTAZIONE.

375. Ed avvertasi intanto, che altro è dupla, tripla ragione, ec. (364.), altro duplicata, triplicata, ec., quella è due volte, o tre maggiore, questa è quadrata, cubica, ec.

Divisione delle Proporzioni.

376. Primieramente ne giova il dire, che sieno le proporzioni altre non continue, ed interrotte, nelle quali il conseguente non può esser antecedente del termine, che lo siegue $3:12::2:8$, ed interrotta non essendo egli $3:12::12:2$; Dacchè $\frac{3}{12}<\frac{12}{2}$; Laonde non sono uguali ragioni (356.).

377. Continue proporzioni poi sono quelle, in cui ogni termine è antecedente di quel, che lo siegue, e conseguente di chi lo precede; laonde il primo non può esser conseguente, se niun altro il precede, e l' ultimo non può essere antecedente, perchè non ha altro termine dopo di se; quindi essendo in proporzione continua a, b, c, d, ec., sarà $a:b::b:c::c:d::d:f$. Quando occorre, che i termini delle continue proporzioni sono più di 3, o 4, vengono dette progressioni, o serie; le geometriche

triche con questo segno $\div\!\!\cdot$ indicate, e le aritmetiche con quest' altro $\div$

Corollario.

378. Si vede pertanto, che di una proporzione continua di tre termini a, b, c, formar se ne puote una come interrotta di 4, replicando il termine di mezzo, $a : b :: b : c$, ed al contrario qualunque interrotta di quattro termini, avente la medesima quantità per secondo, e terzo termine, si riduce in una continua di tre, essendo $a : b :: b : c$, sarà in proporzione continua $\div\!\!\cdot\, a : b : c$, e perciò con minor numero di tre termini proporzione aver non si puote; onde Euclide.

Definizione IX.

379. La proporzione in tre soli termini per lo meno consiste.

Generi diversi delle Proporzioni.

380. Nel primo genere sono le aritmetiche proporzioni, nelle quali dati i tre termini, la differenza tra il primo, e secondo, è alla differenza tra il secondo, e terzo, come il primo termine è al suo uguale. Il perchè nelle proporzioni aritmetiche la differenza è sempre uguale $\div\, 3, 5, 7$ differenza $= 2$.

381. Le geometriche formano il secondo genere, in cui di tre termini, sono le differenze tra il primo, e secondo, e tra il secondo, e terzo, come il primo termine al secondo $\div\!\!\cdot\, 2 : 6 : 18$ prima differenza $= 4$, seconda $= 12$, però $2 : 6 :: 4 : 12$; quindi le differenze de' termini geometrici sono proporzionali a' termini stessi.

382. Le proporzioni armoniche formano il terzo genere, delle quali dati i tre termini, sono le differenze fra il termine primo, e secondo, e fra il secondo, e terzo, come il termine primo, e al terzo. Come $3 : 4 : 6$ sono in proporzione armonica, o sia musica, dacchè $1 : 2 :: 3 : 6$.

Da' numeri in aritmetica proporzione continua facilmente gli armonici termini si ritrovano, multiplicando di quelli il primo col secondo, poscia col terzo, indi il secondo col terzo, e i tre prodotti sono armonici, $\div\, 2, 3, 4$ aritmetici, ed armonici

2×3, 2×4, 3×4, cioè 6, 8, 12. $\div$ 2.4.6 aritmetici, ed armonici 8, 12, 24,

Intanto per avere franco possesso, e legittimo libero uso, e maneggio delle geometriche ragioni, e proporzioni, quasi unico scopo di questo libro, gli è d'uopo de' seguenti Teoremi avere la scienza.

PROPOSIZIONE.

TEOREMA.

383. Se una geometrica proporzione $a:x::c:y$ si multiplica, o si divide in una ragione, o tutta per n, o veramente in una ragione per n, e l' altra per r, sempre rimane la proporzione medesima del medesimo nome, e sia $=m$.

DIMOSTRAZIONE I.

Dunque (359.) sarà $\frac{a}{x}=\frac{c}{y}=m$ comune valore, ma sotto, e sopra multiplicando per n una, o amendue le frazioni, o una per n, e l' altra per r, il valore mai non si muta (*Alg.* 63. 64.); essendo $\frac{an}{nx}=\frac{cn}{ny}=\frac{ar}{rx}=\frac{a}{x}=\frac{c}{y}=\frac{nrm}{nr}=m$; dunque (356.) $an:nx::cn:ny::ar:rx::a:x::c:y$, nome $\frac{nrm}{nr}=m$.

DIMOSTRAZIONE II.

E se egli è $\frac{an}{nx}=\frac{cn}{ny}=\frac{ar}{rx}=\frac{nrm}{nr}$, spurgando per n, e per r le frazioni, si ottiene $\frac{a}{x}=\frac{c}{y}=m$, cioè $a:x::c:y$, nome m, che era, ec.

PROPOSIZIONE.

TEOREMA.

384. Di qualunque proporzione geometrica multiplicando gli antecedenti per n quantità intera, si multiplica per n il valore m

della

della proporzione; multiplicando all'incontro per n i conseguenti, per n si divide il nome m, sempre mantenendosi geometrica proporzione, come che di altro nome.

DIMOSTRAZIONE I.

Suppongasi $a:x::c:y$, sarà (359.) $\frac{a}{x}=\frac{c}{y}=\frac{m}{1}$, si multiplichino per n gli antecedenti, cioè i numeratori (*Alg.* 74.), sarà $\frac{an}{x}=\frac{cn}{y}=mn$, cioè (356.) $an:x::cn:y$, nome mn.

DIMOSTRAZIONE II.

Le uguali frazioni $\frac{a}{x}=\frac{c}{y}=\frac{m}{1}$, si multiplichino per n ne' divisori, (che è dividere) (*Alg.* 78.), sarà $\frac{a}{nx}=\frac{c}{ny}=\frac{m}{n}$. Quindi (356.) $a:nx::c:ny$ nome $\frac{m}{n}$. Che era, ec.

PROPOSIZIONE.

TEOREMA.

385. Le ragioni geometriche, o diciam frazioni (356.) sono tra loro in ragione composta diretta degli antecedenti, e numeratori, ed inversa de' conseguenti, e divisori.

DIMOSTRAZIONE.

Sieno $a:x$, & $c:y$, cioè $\frac{a}{x}$, $\frac{c}{y}$, saranno tra loro $\frac{a}{x}:\frac{c}{y}::ay:cx$; imperocchè multiplicando la prima ragione per x, indi per y, senza mutarne il valore (383.) si ottiene, $ay:cx::ay:cx$, che val a dire essere $a:x$, & $c:y$ in ragione composta diretta degli antecedenti a, c, che non mutano sedi, e reciproca de' conseguenti x, y, che cangiano luogo (370.). Che era, ec.

COROLLARIO I.

386. Dunque le ragioni geometriche, o frazioni aventi lo stesso

ſteſſo antecedente, o numeratore, ſono in ragione reciproca de' loro conſeguenti, e diviſori. Eſſendo $a:x$, & $a:y$, ſaranno $\frac{a}{x}:\frac{a}{y}::ay:ax$, e dividendo pel comune a, ſaranno $\frac{a}{x}:\frac{a}{y}$ $::y:x$ ragione inverſa, $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}::4:3$.

Corollario II.

387. E le ſteſſe ragioni, o frazioni del medeſimo conſeguente, e diviſore ſono come i loro antecedenti, e numeratori, ove ſia $a:x$, & $c:x$, ſaranno $::a:c$, perocchè eſſendo $\frac{a}{x}:\frac{c}{x}::ax:cx$, dividendo queſta ragione ſeconda per x, riſulta $\frac{a}{x}:\frac{c}{x}::a:c$ (383.). $\frac{3}{5}:\frac{4}{5}::3:4$, ragione diretta.

Proposizione.

Teorema.

388. Ogni ragione geometrica, o ſia frazione è a ſe medeſima roveſciata in ragion duplicata del primo antecedente al primo conſeguente.

Dimostrazione.

Sia ragion data $a:x$, cioè $\frac{a}{x}$, e roveſciandola divenga $x:a$, cioè $\frac{x}{a}$, dico ſarà $\frac{a}{x}:\frac{x}{a}::aa:xx$; perocchè eſſendo le ragioni $a:x$, $x:a$ in ragion compoſta diretta degli antecedenti, ed inverſa de' conſeguenti (385.), ſaranno $::aa:xx$, cioè $\frac{a}{x}:\frac{x}{a}::aa$ $:xx$, che era, ec.

Corollario.

389. Data la ragione $6:2$, in cui lo antecedente ſia multiplice del ſuo conſeguente (347.), ſarà a ſe medeſima rivoltata,

$2:6$, come 9 quadrato del nome 3 alla unità: perocchè $\frac{6}{2}:\frac{2}{6}$ $::36:4::9:1$; Ma roveſciando $\frac{2}{6}:\frac{6}{2}::4:36::1:9$; quindi $\frac{1}{8}:\frac{8}{1}::1:64$, e così $\frac{1}{3}$ egli è una nona parte di 3, ed $\frac{1}{10}$ è una centeſima parte di 10, ec.

DEFINIZIONE X.

390. Ove ſieno tre quantità proporzionali, la prima alla terza dice ragion duplicata della prima alla ſeconda. Se ſono quattro, la prima alla quarta dice ragion triplicata della prima alla ſeconda, e ſempre un grado di più per fino, che la proporzione continueraſſi.

ANNOTAZIONE.

391. Poteva Euclide a buona equità locare queſta ſua definizione tra i ſuoi Teoremi, e più difficili a dimoſtrare, altramente capire non ſi puote, e concedere, che ſia vera la aſſerzione della ragion duplicata, ec. Si rivochi a memoria quanto ſi è ſtabilito a' numeri 373. 374., che la duplicata ragione ſia di quadrato a quadrato, e la triplicata di cubo a cubo. Giova pertanto come di paſſaggio dimoſtrare la Definizione preſente, riſerbandoci in altro luogo il produrla come generale Teorema.

DIMOSTRAZIONE.

Dacchè ſi ſuppone $\div\, a:b:c$, ſarà (5. 1. 401.) $bb=ac$, ſi multiplichi la equazione (*Alg.* 90.) per a, ſi ottiene $abb=aac$, e riſolvendo da a per c, ne riſulta $a:c::aa:bb$, che ec.

Secondo. Sia $\div\, a:b:c:x$, dee eſſere $\div\, a:b:c$; laonde (5. 1. 401.) $ac=bb$, & $c=\frac{bb}{a}$, ſoſtituiſcaſi il valore di c, ſarà $\div\, a:b:\frac{bb}{a}:x$, quindi $ax=\frac{b^3}{a}$, e multiplicando l'equazione (*Alg.* 88.) per aa, riſulta $a^3x=ab^3$, e riſolvendo (401.), ſi ottiene $a:x::a^3:b^3$, che, ec. E ſe ſono $\div\, a, b, c, x, y$, ſarà $a:y::a^4:b^4$.

DEFI-

DEFINIZIONE XI.

392. Le omologhe quantità del medesimo nome nelle ragioni sono gli antecedenti tra loro, e tra loro li conseguenti.

DEFINIZIONE XII.

393. Alterna, o permutata ragione egli è un ordinare i termini omologi fra di loro, l'antecedente all'antecedente, il conseguente al conseguente: ove sia $a:x::c:y$, sarà alternando $a:c::x:y$.

DEFINIZIONE XIII.

394. Inversa reciproca, e rovesciata ragione è tramutare li conseguenti in antecedenti, onde questi divengono conseguenti. Se gli è $a:x::c:y$, sarà invertendo $x:a::y:c$.

DEFINIZIONE XIV.

395. Composizione della ragione è un ordinare l'antecedente, e conseguente, sommati insieme al solo conseguente, vuolsi dire, che egli è un ordinare le somme delle due ragioni a' respettivi due conseguenti, o pure ordinare le somme de' termini omologi a' termini dell' una, o dell' altra ragione; se sia $a:x::c:y$, sarà componendo $a+x:x::c+y:y$. Oppure $a+x:c+y::x:y$. O veramente $a+c:x+y::a:x::c:y$. Laonde si vede essere questo un sommare, non già un multiplicare.

DEFINIZIONE XV.

396. Divisione della ragione egli è un paragonare al conseguente lo eccesso dell' antecedente sopra del conseguente suo proprio. O veramente (che è lo stesso) egli è un confrontare a' conseguenti le differenze dagli antecedenti tra i conseguenti, o vero un ordinare le differenze de' termini omologi ai termini della seconda ragione, ove sia $a:x::c:y$, sarà dividendo $a-x:x::c-y:y$; cioè alternando $a-x:c-y::x:y$; ed in altre maniere indicate, che si dimostreranno essere legittime al num. 405. Intanto ben si vede essere questa operazione un sottrarre, non già un dividere.

Definizione XVI.

397. Conversione di ragione egli è un ordinare lo antecedente al proprio eccesso sopra del conseguente, o veramente (che è lo stesso) è un ordinare agli antecedenti le differenze, che nascono, traendo dagli antecedenti i suoi conseguenti: ovvero ordinare le differenze tra termini omologi a' termini corrispondenti della prima ragione. Se sia $a:x::c:y$, sarà per conversion di ragione $a:a-x::c:c-y$, cioè alternando, ed invertendo $a-x:c-y::a:c$, ed anche in altre maniere legittime dimostrate al num. 406. Si vede pertanto essere questa anche una sottrazione tra termini proporzionali.

Definizione XVII.

398. Uguaglianza, o sia ugualità di ragioni è quando sono più quantità per numero uguali a due a due nella stessa ragione, e prendere allora la prima, e l'ultima di queste, e di quelle; o pure egli è un prendere gli estremi termini, lasciati quelli di mezzo.

Definizione XVIII.

399. Ordinata proporzione si appella quando delle date uguali ragioni sempre con ordine li conseguenti si fanno essere antecedenti delle altre ragioni. Essendo $a:b::c:d$, & $b:x::d:y$, sarà ordinando $a:x::c:y$.

Definizione XIX.

400. Perturbata proporzione si nomina, dove di due, o di più date ragioni si paragona il conseguente della prima ad altra quantità; ma qualsivoglia altra quantità allo antecedente della seconda ragione. Se sia $a:b::d:y$, & $b:x::c:d$, sarà perturbando $a:x::c:y$.

Annotazione.

Si omettono le sei prime proposizioni di questo libro, siccome ancora le altre due ventesima, e ventesima prima come inutili, e solamente intruse per dimostrare le altre, lo che eseguiremo senza di quelle.

quelle. Per compiere intanto le vuote ſedi, giova molto il ſoſtituirne altre di molto uſo, e che più generale delle proporzioni rendono la ſcienza; la prima, e la ſeconda ſono fondamento di tutte le leggi delle proporzioni; nelle ſeguenti terza, quarta, quinta, e ſeſta ſi dimoſtrano li modi di argomentare invertendo, componendo, dividendo, e per converſion di ragione definiti bensì, ma per legittimi non dimoſtrati.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

401. Ogni proporzione geometrica ſi riduce in una equazione algebraica, in cui uguali ſono i prodotti de' termini eſtremi (362.), e de' medii. Cioè ſe quattro quantità ſono geometricamente proporzionali, il prodotto degli eſtremi è uguale al prodotto de' medii.

Secondo. Ogni equazione algebraica riſolveſi in una proporzione geometrica, in cui da un prodotto gli eſtremi ne naſcono, e dall' altro prodotto i termini medii.

DIMOSTRAZIONE.

Se gli è $a:x::c:y$, ſarà (356.) $\frac{a}{x}=\frac{c}{y}$, e togliendo l'iſomeria (*Alg.* 105.), ſi ottiene il prodotto degli eſtremi $ay=cx$ prodotto de' medii; ſe foſſe $\div a:c:x$, cioè $a:c::c:x$, però $ax=cc$.

Secondo. Ove ſia $ay=cx$, dividendo (*Alg.* 88.) per x, indi per y, riſulta $\frac{a}{x}=\frac{c}{y}$, vuolſi dire (356.) $a:x::c:y$.

Finalmente eſſendo $ax=cc$, dividaſi (*Alg.* 88.) per x, quindi per c, ne naſce $\frac{a}{c}=\frac{c}{x}$, cioè $a:c::c:x$, che vale $\div a:c:x$ (378.); dunque ec.

PRO-

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA II.

402. Se di quattro quantità a, x, b, y la prima a, alla seconda x, dice maggior ragione, che la terza b alla quarta y, il prodotto ay degli estremi, sarà maggiore del prodotto bx de' termini medii.

Secondo. Se la prima b dice minor ragione alla y, che la terza a alla quarta x, il prodotto bx degli estremi è minore del prodotto ay de' medii.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo per ipotesi $a:x>b:y$, sarà (361.) $\frac{a}{x}>\frac{b}{y}$; epperò (*Alg.* 72., & *Geom.* 357.) $ay>bx$.

Secondo. Se sia $b:y<a:x$, sarà $\frac{b}{y}<\frac{a}{x}$; quindi $bx<ay$ (*Alg.* 72. & *Geom.* 357.).

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA III.

403. Se quattro quantità sono proporzionali $a:x::c:y$, anche alternando, ed anche invertendo (393. 394.) sono proporzionali.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo $a:x::c:y$, sarà (5. 1. 401.) $ay=cx$, e risolvendo da a per c, ne risulta $a:c::x:y$ ragione alterna (393.).

Secondo. Se poscia l' equazione $ay=cx$ si discioglie (5. 1. 401.) da x per a, ne nasce $x:a::y:c$ ragione inversa (394.).

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA IV.

404. Se sono quattro proporzionali termini, saranno proporzionali eziandio componendo (395.). Di-

DIMOSTRAZIONE.

Dacchè $a:x::c:y$, sarà (5. 1. 401.) $ay=cx$, ed aggiugnendo a tutta l' equazione il prodotto xy de' conseguenti; risulta $ay+xy=cx+xy$, cioè $\overline{a+x}\times y=\overline{c+y}\times x$, e risolvendo $a+x:c+y::x:y$, oppure $a+x:x::c+y:y$, o sia $x:y::a+x:c+y$; parimente invertendo la prima ragione risulta $a+x:c+y::a:c$, o sia alternando, ne nasce $a+c:x+y::c:y$, e quindi quattro diverse maniere di comporre la medesima data proporzione, variando legittimamente in otto diversi modi la sua scrittura.

Proporzione.	*Composizione di ragione.*		*Uguali prodotti de' medii, ed estremi.*
$a:x::c:y$ $a:c::x:y$	Prima.	$a+x:c+y::x:y$.	$ay+xy=cx+xy$.
$x:a::y:c$ $x:y::a:c$	Seconda.	$a+x:c+y::a:c$.	$ac+cx=ac+ay$.
$a:c::x:y$ $a:x::c:y$	Terza.	$a+c:x+y::c:y$.	$ay+cy=cx+cy$.
$c:a::y:x$ $c:y::a:x$	Quarta.	$a+c:x+y::a:x$.	$ax+cx=ax+ay$,

che era ec.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA V.

405. Se è vera la Geometrica proporzione $a:x::c:y$, anche sarà proporzione (396.) dividendo.

DIMOSTRAZIONE.

Dalla data ipotesi ne nasce (5. 1. 401.) la equazione $ay=cx$, dalla quale sottraendo xy, prodotto de' conseguenti, rimane $ay-xy=cx-xy$, cioè $\overline{a-x}\times y=\overline{c-y}\times x$, e risolvendo sarà $a-x:x::c-y:y$, oppure $a-x:c-y::x:y$. Inoltre invertendo, o alternando la prima proporzione dalle sue varie scritture, e col sottrarre dalla data equazione i nuovi prodotti de' nuovi conseguenti, ne nascono le seguenti sei maniere legittime, e principali

cipali della divisione di ragione, il cui legittimo operare anche dimostrasi dalle annesse equazioni, nelle quali i prodotti degli estremi sono uguali a' prodotti de' medii. Avvertendo, che sempre si dee tenere $ay=cx$, ovvero $-ay=-cx$ prima ipotesi, che in quanto poi agli altri membri delle medesime equazioni sono identici in tutte e tre queste proposizioni, quarta, quinta, e sesta, che era ec.

Proporzione.		*Divisioni di ragione.*	*Prodotti uguali.*
$a:x::c:y$ $a:c::x:y$	Prima.	$a-x:c-y::x:y.$	$ay-xy=cx-xy.$
$x:a::y:c$ $x:y::a:c$	Seconda.	$x-a:y-c::a:c.$	$cx-ac=ay-ac.$
$x:y::a:c$ $x:a::y:c$	Terza.	$x-y:a-c::y:c.$	$cx-cy=ay-cy.$
$y:x::c:a$ $y:c::x:a$	Quarta.	$y-x:c-a::x:a.$	$ay-ax=cx-ax.$
$a:c::x:y$ $a:x::c:y$	Quinta.	$a-c:x-y::c:y.$	$ay-cy=cx-cy.$
$c:a::y:x$ $c:y::a:x$	Sesta.	$c-a:y-x::a:x.$	$cx-ax=ay-ax$

che era, ec.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA VI.

406. Se quattro quantità formano la Geometrica proporzione $a:x::c:y$ sono anche proporzionali per conversion di ragione.

DIMOSTRAZIONE.

Dunque (5. 1. 401.) $ay=cx$, la quale sottraggasi dall' altra equazione $ac=ac$, ne rimane $ac-ay=ac-cx$, cioè $a\times\overline{c-y}=c\times\overline{a-x}$, e risolvendo $a:a-x::c:c-y$, o sia invertendo, ed alternando $a-x:c-y::a:c$. La prima data proporzione $a:x::c:y$ si inverta, diviene $x:a::y:c$, e per conversione di ragione, sarà $x-a:y-c::x:y$, e calcolando come nella superiore proposizione, ne nascono sei conversioni di ragione da una data proporzione.

Da

Da quattro termini a, x, c, y della proporzione nascono sei prodotti ax, ac, ay, cx, xy, cy, li quali ad uno ad uno sottratti dalla primitiva equazione $ay=cx$, formano le sei formole della divisione della ragione, ma da ciascuno di que' prodotti sottraendo l'una, e l'altra delle parti dell'equazione $ay=cx$, ne provengono sei equazioni, che risolute ne donano le sei formole della conversion di ragione.

Proporzione.	*Conversioni di ragione.*		*Prodotti uguali.*
$a:x::c:y$ $a:c::x:y$	Prima.	$a-x:c-y::a:c$.	$ac-cx=ac-ay$.
$x:a::y:c$ $x:y::a:c$	Seconda.	$x-a:y-c::x:y$.	$xy-ay=xy-cx$.
$x:y::a:c$ $x:a::y:c$	Terza.	$x-y:a-c::x:a$.	$ax-ay=ax-cx$.
$y:x::c:a$ $y:c::x:a$	Quarta.	$y-x:c-a::y:c$.	$cy-cx=cy-ay$.
$a:c::x:y$ $a:x::c:y$	Quinta.	$a-c:x-y::a:x$.	$ax-cx=ax-ay$.
$c:a::y:x$ $c:y::a:x$	Sesta.	$c-a:y-x::c:y$.	$cy-ay=cy-cx$.

Si avverta, che questi tre ultimi teoremi renduti più generali si deono ritenere con franchezza, perchè di molto uso in tutte le matematiche facoltà, nel rendere le dimostrazioni più gradite, e più chiare.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA VII.

407. Le quantità uguali $a=b$ sono nella stessa ragione ad altra quantità x; ed anche x alle uguali a, b, avrà la stessa ragione.

DIMOSTRAZIONE.

Dacchè $a=b$ sarà (*Alg.* 43.) dividendo per x l'equazione $\frac{a}{x}=\frac{b}{x}$; quindi (356.) $a:x::b:x$, inoltre invertendo (53. 403.) $x:a::x:b$ nella stessa ragione, che ec.

PRO-

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA VIII.

408. Delle disuguali quantità $a>d$, la maggiore a dice alla medesima x ragion maggiore che d; ed x minor ragione alla maggiore a, che alla minore d.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo $a>d$, ove amendue per la medesima quantità x vengano divise, saranno (*Alg.* 70.) le frazioni $\frac{a}{x}>\frac{d}{x}$, come $a>d$; (387.) dunque $a:x>d:x$ (357.); inoltre dividasi x per $a>d$, si ottengono le due (*Alg.* 70.) frazioni $\frac{x}{a}<\frac{x}{d}$ :: $d<a$ (386.); il perchè $x:a<x:d$, che era ec.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA IX.

409. Se le quantità a, b alla medesima x hanno la stessa ragione, saranno uguali tra loro, ed eziandio uguali saranno, se la medesima x dice loro la stessa ragione.

DIMOSTRAZIONE.

Dacchè per ipotesi $a:x::b:x$, sarà $ax=bx$ (5. 1. 401.), e dividendo la equazione tutta per x (*Alg.* 49.), rimane $a=b$; e perche si suppone eziandio $x:a::x:b$, sarà $ax=bx$, & $a=b$, che era ec.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA X.

410. Delle quantità a, d, quella è maggiore, che dice ad x maggior ragione, e quella è minore, a cui x dice ragion maggiore.

Di-

DIMOSTRAZIONE.

Supponendosi $a : x > d : x$, sarà (361.) $\frac{a}{x} > \frac{d}{x}$, ma (387.) $\frac{a}{x} > \frac{d}{x} :: a > d$, oppure dividendo per x, sempre gli è $a > d$.

Se si suppone $x : a < x : d$, sarà $\frac{x}{a} < \frac{x}{d}$; ma (386.) $\frac{x}{a} < \frac{x}{d} ::$ $d < a$ reciprocamente; dunque $d < a$, & $a > d$, che ec.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA XI.

411. Le ragioni $a : x$, & $c : y$, uguali alla stessa ragione $b : d$, oppure uguali alle uguali ragioni $b : d :: m : n$, sono uguali tra loro.

DIMOSTRAZIONE.

Per ipotesi gli è $a : x :: b : d$, dunque (401.) $ad = bx$, e dividendo (*Alg.* 49.) l'equazione per a, rimane $d = \frac{bx}{a}$.

Ma gli è per ipotesi $c : y :: b : d$, perciò $cd = by$, & $d = \frac{by}{c}$, e paragonando i due valori di d, si ottiene $\frac{bx}{a} = \frac{by}{c}$, e dividendo per b, e togliendo le frazioni, risulta $ay = cx$, e risolvendo (5. 1. 401.) ne nasce $a : x :: c : y$; di più essendo $a : x :: b : d$, sarà per la prima dimostrata parte, e per ipotesi $b : d :: m : n$, sarà $a : x :: m : n$; ma si suppone $c : y :: m : n$; dunque $a : x :: c : y$, che era, ec.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA XII.

412. Se sono quante si voglia proporzionali grandezze, sarà come uno antecedente al suo conseguente, così la somma degli antecedenti tutti, alla somma di tutti gli conseguenti.

DIMOSTRAZIONE.

Sieno $a:b::c:d::e:f$, sarà adunque per la terza composizione delle due prime ragioni $a+c:b+d::c:d::e:f$. Si cancelli la ragione $c:d$, sarà $a+c+e:b+d+f::e:f::c:d::a:b$ (4. 404.) che era ec.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA XIII.

413. Se sono $a^{1a}:x^{2a}::c^{3a}:y^{4a}$; ma $c^{3a}:y^{4a}>b^{5a}:r^{6a}$, sarà $a^{1a}:x^{2a}>b^{5a}:r^{6a}$.

DIMOSTRAZIONE

Essendo $a:x::c:y$, sarà (359.) $\frac{a}{x}=\frac{c}{y}$, e dacchè si suppone $c:y>b:r$, egli è (361.) $\frac{c}{y}>\frac{b}{r}$; quindi (*Ass.* 13. 110.) sostituendo il valore di $\frac{c}{y}$, ne risulta $\frac{a}{x}>\frac{b}{r}$; il perchè (361.) $a:x>$ $>b:r$, ec.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA XIV.

414. Di quattro quantità proporzionali $a:x::c:y$, se lo antecedente $a>c$ omologo antecedente, sarà anche il conseguente $x>y$ suo omologo conseguente; se $a=c$, anche $x=y$, se $a<c$, parimente $x<y$.

DIMOSTRAZIONE.

Dacchè si suppone $a:x::c:y$, sarà alternando (403.) $a:c::x:y$ vuolsi dire $a:c=x:y$, (355. 356. 358.); dunque come a è maggiore, o uguale, o minore di c, così, e nella stessa ragione x è maggiore, o uguale, o minore di y, che era ec.

PRO-

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA XV.

415. Le simili parti aliquote (346.) de' termini delle ragioni, sono come gli omologi loro.

DIMOSTRAZIONE.

Sia la data ragione $a:x$, e sieno de' termini, parti aliquote $\frac{a}{n}$, & $\frac{x}{n}$, per la stessa misura $=n$, certamente aliquote simili. Ma gli è $a:x::\frac{a}{n}:\frac{x}{n}$ nella stessa ragione (383.), che era ec.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA XVI.

416. Se quattro grandezze sono proporzionali $a:x::c:y$, anche *vicissim*, cioè permutando, od alternando, saranno $a:c::x:y$ proporzionali, come si è dimostrato (403.).

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA XVII.

417. Se le grandezze composte (395.) sono proporzionali, anche divise, rimangono proporzionali.

DIMOSTRAZIONE.

Si supponga $a+x:x::c+y:y$, sarà (5. 1. 401.) $ay+xy=cx+$ $+xy$. Sottraggasi da tutta l'equazione la quantità medesima xy, si ottiene $ay-xy=cx-xy$, quindi (5. 5. 405.) (*Dimostrazione*) $a-x:x::c-y:y$, che era ec.

PROPOSIZIONE XVIII.

418. Se dividendo egli è $a-x:x::c-y:y$, sarà componendo $a+x:x::c+y:y$.

Di-

Dimostrazione.

Perchè dalla data proporzione risulta l' equazione (401.) $ay-xy=cx-xy$, se gli aggiunga $2xy$, ne proviene $ay+xy=cx+xy$; laonde (5. 4. 404. *Dimostrazione*) $a+x:x::c+y:y$, componendo, che era ec.

Proposizione XIX.

Teorema XIX.

419. Se il tutto al tutto, come la parte alla parte sarà il rimanente al rimanente, come il tutto al tutto.

Dimostrazione.

Del tutto a sia parte x, sarà la rimanente parte $=a-x$, del tutto c sia parte y, sarà rimanente parte $=c-y$; e perchè si suppone $a:c::x:y$, sarà per la prima conversione delle ragioni (5. 6. 406.) $a-x:c-y::a:c$, che era ec.

Proposizione XX.

Teorema XX.

420. Se una proporzione $a:x::c:y$ da altra proporzione $m:n::r:t$ multiplicata venga, o divisa, termine con termine corrispondente, ed omologo; non meno i prodotti termini, che i quozienti, saranno proporzionali.

Dimostrazione.

Dacchè $a:x::c:y$, sarà (5. 1. 401.) $ay=cx$, ma egli è $m:n::r:t$, dunque altresì $mt=nr$, e multiplicando le due equazioni, risulta $amty=cnrx$, cioè $am\times ty=cr\times nx$, e dissolvendo si ottiene $am:nx::cr:ty$, proporzionali prodotti de' termini omologi.

Inoltre delle date proporzioni si prenda qual piace $a:x::c:y$, e si divida co' termini corrispondenti dell' altra $m:n::r:t$, si ottiene $\frac{a}{m}:\frac{x}{n}::\frac{c}{r}:\frac{y}{t}$; imperocchè dividendo l' equazione $ay=cx$

per

per l' equazione $mt = nr$, risulta $\frac{ay}{mt} = \frac{cx}{nr}$, cioè $\frac{a}{m} \times \frac{y}{t} = \frac{c}{r} \times \frac{x}{n}$, e risolvendo $\frac{a}{m} : \frac{x}{n} :: \frac{c}{r} : \frac{y}{t}$, che ec.

DEFINIZIONE.

421. Multiplicazione delle ragioni è un ordinare i prodotti delle ragioni a' quadrati de' termini omologi, o alternando ordinare i prodotti degli omologi a' quadrati de' termini delle ragioni.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA XXI.

422. Se quattro quantità sono proporzionali $a : x :: c : y$, anche multiplicando le ragioni (*Def. n.* 421.) sono proporzionali.

DIMOSTRAZIONE.

Sia $a : x :: c : y$, ma alternando $a : c :: x : y$, cioè $x : y :: a : c$, la quale si multiplichi per la proporzione $a : c :: a : c$, sarà la precedente $ax : cy :: aa : cc$, i prodotti delle ragioni, come i quadrati degli antecedenti; inoltre la prima proporzione si alterni, sarà $a : c :: x : y$, la quale si multiplichi per la identica $x : y :: x : y$, risulta per la proposizione 20, $ax : cy :: xx : yy$; i prodotti de' termini delle ragioni, come i quadrati de' conseguenti.

Secondo. La data proporzione $a : x :: c : y$, si scriva $c : y :: a : x$, che si multiplichi per la identica $a : x :: a : x$, sarà (420.) $ac : xy :: aa : xx$.

Finalmente la esposta proporzione $a : x :: c : y$, si multiplichi per la identica proporzione $c : y :: c : y$, sarà per la precedente $ac : xy :: cc : yy$, i prodotti de' termini omologi, come i quadrati de' termini sì della prima, che della seconda ragione.

ANNOTAZIONE.

423. Da questo utile, e generale teorema, ne nasce molta facilità nel dimostrare con evidenza, e brevità, molte, e difficili proposizioni, sì nel progresso di questo trattato, che in tutte le altre

altre matematiche facoltà, e di presente per darne un saggio; giova applicarlo a formare legittima dimostrazione del celebre teorema dell' incomparabile Galileo; che i gravi corpi per libero tratto cadenti in giù, o spinti all' insu, scorrono spazi, quelli accellerati, e questi ritardati nelle ragioni de' quadrati de' tempi trascorsi. E per darne chiara idea allo studioso Leggitore, forse non ancora versato nelle matematiche scienze, egli è da sapere, che il vero moto locale (che che ne sia delle intrinseche sue cagioni), in riguardo alla lunghezza, o sia quantità dello spazio trascorso, viene, come da due essenziali annesse condizioni, o qualità, misurato dalla velocità del mobile, e dal tempo, cioè durazione del movimento, combinate, e multiplicate insieme; conciosiachè un corpo senza velocità alcuna, non può scorrere spazio veruno, e dal suo luogo non si diparte, e con reciproca maniera, quantunque si concepisca capace il corpo di qualunque velocità, se non la applica, e adopera in un dato tempo, per minimo che sia, nemmeno dal suo luogo si muove. Egli è adunque lo spazio trascorso un prodotto del tempo, e delle velocità insiememente multiplicate; laonde volgarmente diciamo, che se un Corriero vassene con velocità da fare cinque miglia in ogni ora, speditamente sappiamo, che in tre ore avrà scorsa la strada di miglia $3 \times 5 = 15$. Gli spazi adunque sono in ragione composta dei tempi, e delle velocità. E nulla importa, che le velocità sieno equabili, o disuguali, con ordine proporzionale, o senza ordine alcuno, perchè sempre lo spazio trascorso è uguale alla somma de' particolari prodotti, formati dalle diverse velocità, multiplicate ciascuna pel tempo a se corrispondente. Per esempio, uno, che viaggia con diverse velocità procedendo; in due ore faccia quattro miglia l'ora, in cinque ore, tre miglia per ora, in sette ore, sei miglia l'ora, sarà tutto lo spazio trascorso di miglia $= 2 \times 4 + 5 \times 3 + 7 \times 6 = 8 + 15 + 42 = 65$ miglia in ore 14.

Sieno pertanto dinominati uno spazio $= S$, ed il suo corrispondente tempo $= T$, e la annessa velocità $= V$, sarà generale equazione $S = TV$.

Sia altro spazio $= s$, ed il tempo $= t$, e la velocità $= u$, ne nasce altra generale equazione $s = tu$, dalle quali ne proviene

viene la geometrica proporzione $s : tu :: S : TV$, ed alternando $s : S :: tu : TV$.

Si dee intanto avvertire, che le velocità, ed i tempi hanno relazioni diverse tra loro, dacchè i tempi dal principio del moto, regolaramente succedono, un istante dopo l'altro; e però loro somme vanno crescendo sempre, e coll'ordine istesso; ma le velocità non sempre così, perocchè nei moti equabili gli gradi di velocità sono sempre gli stessi, ne' moti irregolari non hanno legge determinata. Solamente ne' moti locali uniformemente accelerati, o ritardati, vanno crescendo i gradi della velocità, o minorando, come un dopo l'altro, accumulando si vanno gli istanti del tempo consecutivamente. Conciosiachè dove un grave corpo liberamente caggia per un tratto di luogo, che impedimento non rechi, senza dubbio dalla propria gravezza sospinto in giù nel primo istante di tempo si acquista il primo, e minimo grado di velocità corrispondente alla propria gravezza, la quale perseverando costante in se stessa, nel secondo minimo tempo, fa che il grave corpo si acquisti uguale, secondo grado di velocità; così nel minimo tempo il terzo simile grado di velocità viene acquistato, ed in simigliante maniera nel quarto tempo, il quarto grado di velocità, nel quinto, il quinto ec. Ad acquistare si viene dal corpo grave perfino che duri del medesimo corpo il cadere all'ingiù, e così gli va perdendo spinto all'insu. Sono adunque proporzionali i tempi alle corrispondenti velocità, cioè $t : 2t :: u : 2u$, $2t : 3t :: 2u : 3u$, $3t : 4t :: 3u : 4u$, ed alternando $t : u :: 2t : 2u :: 3t : 3u :: 4t : 4u$ ec. Si dinomini adesso $=T$ la somma di tutti gli antecedenti, che sono i tempi, e la somma di tutti gli conseguenti, che sono le rispettive velocità, sia $=V$, sarà (412.) come un antecedente al suo conseguente, così la somma di tutti gli antecedenti alla somma di tutti i conseguenti, vuolsi dire $t : u :: T : V$; dunque pel nostro teorema presente, sarà $tu : TV :: tt : TT$, ma si è dimostrato essere $s : S :: tu : TV$, dunque per l'undecima proposizione $s : S :: :: tt : TT$, gli spazi trascorsi in duplicata ragione, cioè come i quadrati de' tempi, ne' gravi, che liberamente vanno all'ingiù, e nella inversa de' quadrati dei tempi, ove sono sospinti in su.

PRO-

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA XXII.

424. Se sono tre quantità a, b, x, e tre altre c, d, y, le quali a due a due, e nella stessa ragione sien prese, sarà per ordinata proporzione (399.) la prima a alla terza x, come la quarta c alla sesta y, cioè $a:x::c:y$.

DIMOSTRAZIONE.

Sarà adunque $a:b::c:d$, però (401.) $ad=bc$; $b:x::d:y$, quindi (401.) $by=dx$, e multiplicando le due equazioni $abdy=$ $=bdcx$, e dividendo per lo comune divisore bd, rimane $ay=cx$, e risolvendo $a:x::c:y$, che ec.

Se fossero più di tre, lo stesso raziocinio replicando, il medesimo si dimostra.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA XXIII.

425. Se sono tre, o più grandezze a, b, x, ec., ed altre di ugual numero c, d, y, che si prendano a due a due, e nella ragione medesima con perturbata proporzione (400.), saranno per uguaglianza, quale la prima a, alla terza x, tale la quarta c, alla sesta y, cioè $a:x::c:y$.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo perturbata la proporzione, sarà $a:b::d:y$, e (5. 1. 401.) $ay=bd$; $b:x::c:d$, e (5. 1. 401.) $bd=cx$, però (*Ass.* 1. 91.) $ay=cx$, e risolvendo, sarà $a:x::c:y$.

Secondo. Se poscia fossero più di tre le quantità a, b, d, x, ed altrettante c, f, g, y, e si perturbasse in questa maniera $a:b::g:y$, d'onde risulta (401.) $ay=bg$; $b:d::f:g$; il perchè si ottiene $bg=df$; $d:x::c:f$, dalla quale ne nasce $df=cx$, tanto proviene (*Ass.* 1. 91.) $ay=cx$, e dissolvendo $a:x::c:y$.

Terzo. Inoltre perturbando le medesime quantità in questa foggia diversa $a:b::g:y$, $b:d::c:f$, $d:x::f:g$, si multiplichino

chino tutti gli omologi, ſarà $abd:bdx::gfc:gfy$ (5. 20. 420.); dividaſi la prima ragione pel comun diviſore bd, e la ſeconda per gf, ſi ottiene ancora $a:x::c:y$. Che era, ec.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA XXIV.

426. Se dalle date ſei quantità a, x, b, y, c, d, gli è la prima a alla ſeconda x, come la terza b, alla quarta y, e la quinta c alla ſeconda x, come la ſeſta d alla quarta y, ſaranno $a+c$ prima, e quinta inſieme alla ſeconda x, come $b+d$ terza, e ſeſta, alla quarta y, cioè $a+c:x::b+d:y$, ed anche $a-c:x::b-d:y$. Finalmente $c-a:x::d-b:y$.

DIMOSTRAZIONE.

Ove delle date ſei quantità a, x, b, y, c, d, egli è per ipoteſi $a:x::b:y$, ſarà (5. 1. 401.) $ay=bx$: Inoltre $c:x::d:y$, ne riſulta altresì $cy=dx$, e ſommando inſieme le due equazioni $ay+cy=bx+dx$, cioè $y\times\overline{a+c}=x\times\overline{b+d}$, e riſolvendo, ſarà $a+c:x::b+d:y$.

E ſuppoſto quanto di ſopra, ſarà anche la prima meno la quinta alla ſeconda, come la terza meno la ſeſta alla quarta. Conciosſiachè dalla prima equazione ſottraendone la ſeconda, rimane $ay-cy=bx-dx$, e con altra Scrittura ſarà $y\times\overline{a-c}=x\times\overline{b-d}$, e diſſolvendo $a-c:x::b-d:y$.

Finalmente anche la quinta meno la prima, ſarà alla ſeconda, come la ſeſta meno la terza, e alla quarta. Perocchè ſottraendo l' equazione prima $ay=bx$ dalla ſeconda $cy=dx$, ne rimane $cy-ay=dx-bx$, cioè $y\times\overline{c-a}=x\times\overline{d-b}$, e riſolvendo $c-a:x::d-b:y$, che era, ec.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA XXV.

427. Se quattro quantità ſono proporzionali, la maſſima, e la minima inſieme, ſono maggiori delle rimanenti.

DIMOSTRAZIONE.

Siano quattro quantità geometricamente proporzionali $a : x :: c : y$, delle quali sia la massima a, & y sia la minima, laonde dee essere $x > y$, e tutto multiplicando per $c - y$, sarà $x \times \overline{c-y} > y \times \overline{c-y}$, cioè $cx - xy > cy - yy$, e per antitesi $cx + yy > cy + xy$, e dividendo per y, ne risulta $\frac{cx}{y} + y > c + x$, ma per essere $a : x :: c : y$, sarà $a = \frac{cx}{y}$, però sostituendo risulta $a + y > c + x$. Che era, ec.

Avvertimento del Signor Vincenzò Viviani, ultimo Discepolo del Galileo.

Fin quì si son posti tutti i Teoremi del V. Libro, datici da Euclide, eccettuatine il terzo, il quinto, e 'l sesto intorno alle ugualmente multiplici, i quali per esser Lemmi d' altri, quì diversamente provati, e non aver uso altrove, ci è parso ben di tralasciare come inutili. Ma perchè alcuni degl' Interpreti d'Euclide conobbero, che per l' intelligenza d' Archimede, d' Apollonio, e d' altri gravi Autori classici, era necessaria la cognizione ancora d' altre proposizioni supposte da essi, come se note fossero per mezzo degli elementi, e queste per la maggior parte furono poi dimostrate da Pappo Alessandrino, e altre dal Campano; perciò i medesimi Interpreti le aggregarono al numero di quelle del V. Libro. Di quì è, che noi ancora (affinchè per la scienza più elementare delle proporzioni non s' abbia da ricorrere ad altro Autore) non mancheremo di aggiugnerle, dimostrandole come fanno essi Pappo, e Campano, ma coll' ordine tenuto dal Padre Clario, diligentissimo, e dottissimo Commentatore di tutti gli Elementi d' Euclide.

LEMMA, ED AVVERTIMENTO.

428. Per potere con facilità dimostrare le Proposizioni seguenti, fa d' uopo rivocare alla memoria quanto si è dimostrato nelle due proposizioni prima, e seconda di questo libro. Nella

prima

prima si è veduto, che di quattro quantità proporzionali, il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medii; e perchè la uguaglianza anche rovesciata sostiensi, dacchè tanto è dire $ay = cx$, che $cx = ay$; perciò risolvendo la equazione in una geometrica proporzione, senza riserva fare, si puote incominciando da qualunque termine, che piace, purchè si servi la legge di prendere da una parte della equazione i due termini estremi, e dall'altra parte i due medii. Non così universale è la legge del secondo teorema delle quantità nomate dal Galileo sproporzionali, conciosiachè si è dimostrato, che se la prima alla seconda ha maggiore proporzione, che la terza alla quarta, allora il prodotto degli estremi è maggiore del prodotto de' medii, ma non già al rovescio il prodotto de' medii maggior di quel degli estremi: conciosiachè il maggiore non può prendersi che per maggiore, ed il suo minor per minore. Se sia $ay > bx$, non possiamo dire $bx > ay$; ma bensì al rovescio, e legittimamente $bx < ay$. Essendo $9 > 4$, si dee, rivoltando, dire, $4 < 9$.

Da sì chiare verità ne nasce la sicura maniera di risolvere i disuguali prodotti ne' quattro termini sproporzionali, cioè di osservare il primo preso termine, se si trova locato dalla parte maggiore, o dalla parte minore. Se è dalla parte maggiore, sempre le due prime quantità dicono maggiore proporzione, che le due rimanenti terza, e quarta. Ma se il primo termine viene preso dalla parte minore, sempre allora delle quattro sproporzionali quantità, la prima alla seconda, dice minore proporzione, che la terza alla quarta; sia per esempio; $a : x > b : y$, sarà pel secondo mentovato teorema $ay > bx$. In questo confronto di disuguali prodotti, incominciando dal prodotto maggiore ay, la risoluzione può farsi nelle seguenti maniere, $a : x > b : y$, e alternando $a : b > x : y$, o pure $y : x > b : a$; finalmente $y : b > x : a$; ma incominciando dal minore prodotto bx, gli scioglimenti saranno $b : y < a : x$, ed alternando $b : a < y : x$; similmente $x : y < a : b$, & $x : a < y : b$; lo che si dimostra ad evidenza, dacchè essendo per ipotesi il prodotto degli estremi $ay > bx$ prodotto de' medii, in tutte e quattro le prime risoluzioni si avvera $ay > bx$; ed essendo per ipotesi $bx < ay$, in tutte e quattro le rimanenti soluzioni si avvera $bx < ay$.

Queste

Queste regole così ordinate, e limitate si possono liberamente adattare, e porre in uso nella quarta proposizione del comporre le quantità in tutte e quattro le dimostrate maniere, e nella quinta proposizione delle sei divisioni di ragione, e nella sesta delle sei conversioni delle ragioni.

I principianti possono per maggior loro chiarezza formarsi co' numeri le quattro quantità sproporzionali, che troveranno tutto avverato; prendendo per esempio $5:2>6:3$, e quindi $5\times3>6\times2$, cioè $15>12$, e di tali numeri farne le dimostrate otto risoluzioni, che sempre si troverà $5\times3>6\times2$, & $6\times2<5\times3$.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA XXVI.

429. Se la prima alla seconda ha maggior proporzione, che la terza alla quarta, e convertendosi la seconda alla prima, avrà proporzion minore, che la quarta alla terza.

DIMOSTRAZIONE.

Sia $a:x>b:y$, sarà (402.) $ay>bx$, e risolvendo da x locato nel prodotto minore (428) convertendo, sarà $x:a<y:b$. Che era, ec.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA XXVII.

430. Se la prima alla seconda ha maggior proporzione, che la terza alla quarta, e permutandosi la prima alla terza, avrà maggior proporzione, che la seconda alla quarta.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè si suppone $a:x>b:y$, sarà (402.) $ay>bx$, e risolvendo da a esistente nel prodotto maggiore, dee essere, alternando, $a:b>x:y$.

PRO-

PROPOSIZIONE XXVIII.

TEOREMA XXVIII.

431. Se la prima alla ſeconda ha maggior proporzione, che la terza alla quarta, componendoſi ancor la prima, e la ſeconda alla ſeconda avrà proporzion maggiore, che la terza, e la quarta alla quarta.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè egli è $a:x>b:y$, ſarà (402.) $ay>bx$, e da queſti diſuguali prodotti aggiungendo lo ſteſſo prodotto xy de' conſeguenti, ne riſulta $ay+xy>bx+xy$, cioè $\overline{a+x}\times y>\overline{b+y}\times x$; e riſolvendo da $a+x$ locato nel maggiore prodotto (426), ne riſulta $a+x:x>b+y:y$. Che era, ec.

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA XXIX.

432. Se la prima, e la ſeconda alla ſeconda ha maggior proporzione, che la terza, e la quarta alla quarta, ancor dividendoſi la prima alla ſeconda, avrà maggior proporzione, che la terza alla quarta.

DIMOSTRAZIONE.

Sia per ipoteſi $a+x:x>b+y:y$, quindi $ay+xy>bx+xy$, e ſottraendo da amendue le parti $2xy$, ſarà $ay-xy>bx-xy$, cioè $\overline{a-x}\times y>\overline{b-y}\times x$, e riſolvendo da $a-x$ nel prodotto maggiore (428.), ſarà $a-x:x>b-y:y$. Che era, ec.

PROPOSIZIONE XXX.

TEOREMA XXX.

433. Se la prima, e la ſeconda alla ſeconda ha maggiore proporzione, che la terza, e la quarta alla quarta, ſarà convertendo la prima, e la ſeconda alla prima di minore proporzione, che la terza, e la quarta alla terza.

DIMO-

DIMOSTRAZIONE.

Perchè si suppone $a+x:x>b+y:y$, sarà (402.) $ay+xy>bx+xy$, e cancellando il comune xy, ed aggiugnendo ab, prodotto degli antecedenti, ne risulta $ab+ay>ab+bx$, vuolsi dire $\overline{b+y}\times a>\overline{a+x}\times b$, e risolvendo da $a+x$ locato nel prodotto minore, ne nasce $a+x:a<b+y:b$. Che era, ec.

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA XXXI.

434. Se la prima alla terza ha maggiore proporzione, che la seconda alla quarta, avrà ancora la prima alla terza proporzion maggiore, che la prima, e la seconda alla terza, ed alla quarta.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo $a:b>x:y$ sproporzione alternata dalla prima sproporzione $a:x>b:y$, e dimostrata legittima nella superiore proposizione 27., sarà (402.) $ay>bx$, e come sopra aggiugnendo il prodotto ab, ne risulta $ab+ay>ab+bx$, cioè $\overline{b+y}\times a>$ $>\overline{a+x}\times b$, e risolvendo da a esistente nel prodotto maggiore, si ottiene $a:b>a+x:b+y$. Che era, ec.

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA XXXII.

435. Se tutta a tutta ha maggiore proporzione che la parte levata all'altra levata parte, avrà la rimanente alla rimanente, maggiore proporzione, che tutta a tutta.

DIMOSTRAZIONE.

Del tutto a sia levata parte x, e del tutto b la levata parte sia y, saranno le rimanenti parti $a-x$, & $b-y$. E perchè si suppone $a:b>x:y$, sarà per la prima conversione della ragione $a-x:b-y>a:b$ (406.). Che era, ec.

PRO-

PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA XXXIII.

436. Se ſiano tre grandezze omogenee, ed altrettante pur omogenee, e la proporzione della prima delle prime alla ſeconda, ſia maggior della proporzione della prima delle ſeconde alla ſeconda, e la proporzione della ſeconda delle prime alla terza, ſia pur maggiore della proporzione della ſeconda delle ſeconde alla terza; ancora per l'ugualità in tal proporzione ordinata, avrà la prima delle prime alla terza, maggior proporzione, che la prima delle ſeconde alla ſua terza.

DIMOSTRAZIONE.

Sieno le tre prime grandezze a, m, x.

Sieno le tre ſeconde grandezze b, r, y, ſe ſarà $a:m>b:r$, perciò $ar>bm$, e ſe inoltre ſarà $m:x>r:y$, perciò $my>rx$. Si multiplichino i prodotti, maggior col maggiore, minor col minore, ſarà $amry>bmrx$, ſi divida per mr, ne naſcono i reſidui $ay>bx$, e riſolvendo da a nel prodotto maggiore, perchè nato da due quantità maggiori, riſulta $a:x>b:y$. Che era, ec.

PROPOSIZIONE XXXIV.

TEOREMA XXXIV.

437. Se ſaranno tre grandezze omogenee, ed altrettante pur omogenee, e la prima alla ſeconda nel primo ordine abbia maggior proporzione, che la ſeconda alla terza nel ſecondo, e la ſeconda alla terza nel primo abbia maggior proporzione, che la prima alla ſeconda nel ſecondo; ancora per l'ugualità in tal proporzione perturbata, avrà la prima alla terza nel prim' ordine, maggior proporzione, che la prima alla terza nel ſecondo.

DIMOSTRAZIONE.

Sieno a, m, x le tre grandezze del primo ordine, e del ſecondo b, r, y, dee eſſere conperturbata proporzione (400.) $a:m>r:y$; dunque $ay>mr$ (402.). Inoltre $m:x>b:r$, perciò

ciò $mr > bx$ (402.) : che se ay è maggiore di mr, ed mr è maggiore di bx, molto più sarà $ay > bx$, e risolvendo da a esistente nel prodotto maggiore (428.), si ottiene $a : x > b : y$, con perturbata ragione. Che era, ec.

Fin quì si avanzano i più celebri Commentatori d' Euclide, come sono il Padre Clavio, ed il Commandino. Sembra però necessario colla seguente aggiunta, rendere più ampia la scienza delle proporzioni.

PROPOSIZIONE XXXV.

TEOREMA XXXV.

438. Se sono quattro quantità in proporzione geometrica continua, o non continua $a : x :: c : y$, sarà $a^{1a} : y^{4a} :: aa$ quadrato della prima : cx prodotto de' termini medii. Di più $a^{1a} : y^{4a} :: cx : yy$, prodotto de' medii al quadrato della quarta.

Inoltre il prodotto de' medii è proporzionale di mezzo tra i quadrati de' termini estremi, cioè $\div\!\!\div\, aa : cx : yy$, se i termini sono quattro; ma essendo tre, il prodotto degli estremi è medio proporzionale tra i quadrati dei medesimi estremi. Essendo $\div\!\!\div\, a : b : c$, sarà $\div\!\!\div\, aa : ac : cc$, ed ancora $\div\!\!\div\, a : \sqrt{ac} : c$.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè si suppone $a : x :: c : y$, sarà (401.) $ay = cx$, e multiplicando la equazione (*Alg.* 88.) per a, si ottiene $aay = acx$, e risolvendo da a per y, risulta $a : y :: aa : cx$. Inoltre si multiplichi per y la equazione $ay = cx$ (*Alg.* 88.), se ne forma $ayy = cxy$, e disciogliendo da a per y, ne proviene $a : y :: cx : yy$; ma gli era $a : y :: aa : cx$; dunque (5. 11. 411.) $aa : cx :: cx : yy$, vuolsi dire (378.) $\div\!\!\div\, aa : cx : yy$. Che era, ec.

Finalmente si supponga essere $\div\!\!\div\, a : b : c$, sarà (*Propos.* 1. 401.) $bb = ac$, e traendo la quadrata radice (*Alg.* 88.), risulta $b = \sqrt{ac}$. Sostituiscasi questo valore di b nella esposta proporzione, diviene $\div\!\!\div\, a : \sqrt{ac} : c$, e quadrando la proporzione (per se multiplicandola), si ottiene $\div\!\!\div\, aa : ac : cc$. Che era, ec.

PRO-

PROPOSIZIONE XXXVI.

TEOREMA XXXVI.

439. Se di qualunque prodotto, uno, o tutti i multiplicatori per altre quantità vengan divisi, sarà l' unità al divisore, o al prodotto de' divisori, come il prodotto de' fratti al prodotto degli interi. Finalmente sarà l' unità al divisore come il quoziente al diviso intero prodotto.

DIMOSTRAZIONE I.

Dividasi a per m, e la frazione $\frac{a}{m}$ si multiplichi per x, multiplicatore anche della intera quantità a, saranno i due prodotti $\frac{a}{m} \times x$, cioè $\frac{ax}{m}$, ed ax; sarà $1 : m :: \frac{ax}{m} : ax$, conciosiachè multiplicando medii, ed estremi, si ottengono i prodotti $\frac{max}{m} = ax$, come si vede spurgando sotto, e sopra la prima parte per m (401.)

DIMOSTRAZIONE II.

Del prodotto ax il multiplicatore a si divida per m, sarà $\frac{a}{m}$, ed il multiplicatore x si divida per r, sarà $\frac{x}{r}$, le quali frazioni multiplicate insieme ne danno $\frac{ax}{mr}$, prodotto de' fratti; dico sarà $1 : mr :: \frac{ax}{mr} : ax$; perchè multiplicando medii, ed estremi, si ottengono gli uguali prodotti $\frac{mrax}{mr} = ax$, come si vede spurgando sotto, e sopra per mr la prima parte.

DIMOSTRAZIONE III.

E perchè ordinando la proporzione $1 : c :: \frac{ax}{c} : ax$, ove (5. 1. 401.) si multiplichino i medii, e gli estremi, si ottiene una equazione di uguali prodotti $ax = \frac{acx}{c}$; dacchè spurgando la seconda parte sotto, e sopra per c, ne proviene $ax = ax$. Dunque ec.

Corollario.

440. Se amendue a, ed x fossero divisi per la medesima quantità m, sarebbe l' unità al quadrato di m, come il prodotto fratto $\frac{ax}{mm} : ax$ prodotto intiero. Da questo ne siegue, che se un rettangolo numerico, o lineare formato da due quantità a, ed x, ne dia il prodotto $ax = 48$, supponendo $a = 8$, ed $x = 6$, ove dividasi od a, od x, v. g. per 2, sarà $\frac{ax}{2}$ la metà di 48. Così $\frac{ax}{3}$ la terza parte di 48, perchè $\frac{8}{2} \times 6 = \frac{8 \times 6}{2} = 24 = \frac{48}{2}$, e parimente si avvera di tutti gli altri numeri, o linee, delle quali se ne farà espressa dimostrazione nella Proposizione prima del seguente sesto Libro.

Ma se si dividono tutti e due i multiplicatori 8, e 6, il primo v. g. per 2, il secondo per 3, sarà il prodotto di questi fratti $= \frac{1}{2 \times 3}$ del prodotto degl' intieri, cioè $\frac{1}{6}$ di 48, perchè $\frac{8}{2} \times \frac{6}{3} = 8 = \frac{48}{6}$.

Finalmente se d' un quadrato aa si divide un lato per m, sarà il quadrato del diviso, o sia fratto lato $\frac{a}{m} = \frac{1}{mm}$ dello intiero, e prendendo perciò $a = 12$, sarà suo quadrato $aa = 144$, ma il quadrato di $\frac{a}{2} = \frac{12}{2}$ sarà $\frac{1}{4}$ di $aa = 144$, ed il quadrato di $\frac{a}{3}$, sarà $\frac{1}{9}$ di 144, ed il quadrato di $\frac{a}{4}$ sarà $\frac{1}{16}$ di 144, ec.

$\frac{12}{2} = 6$, ed il quadrato di $6 = 36 = \frac{144}{4}$. $\frac{12}{3} = 4$ suo quadrato $= 16 = \frac{144}{9}$. $\frac{12}{4} = 3$ suo quadrato $= 9 = \frac{144}{16}$. $\frac{12}{6} = 2$ suo quadrato $= 4 = \frac{144}{36}$.

PRO-

PROPOSIZIONE XXXVII.

TEOREMA XXXVII.

441. Se sono quante, e come si voglia quantità a, b, c, x, y, la ragion della prima a all' ultima y è composta delle ragioni tutte intermedie tra di loro multiplicate (369. 371.), cioè $a^{1a} : y$ ultima :: $abcx$ prodotto di tutti gli antecedenti : $bcxy$ prodotto de' conseguenti.

DIMOSTRAZIONE.

Sieno pure disuguali le date ragioni, o sieno uguali interrotte, o continue come si voglia $a : b$, $b : c$, $c : x$, $x : y$, sempre multiplicando (369. 371.) direttamente, nasce $abcx : bcxy$ ragione composta di tutte le intermedie; ma $a : y :: abcx : bcxy$, perciocchè multiplicando medii, ed estremi, uguali prodotti $abcxy = abcxy$ si vengono ad ottenere.

Questo generalissimo teorema dimostra universalmente la definizione X. di questo libro. Il Padre Taquet nel suo Euclide libro quinto, circa la fine della terza parte, ne stabilisce una molto ingegnosa dimostrazione, e asserisce non essere ancora stato generalmente dimostrato per qualsivoglia grandezze il presente utilissimo Teorema, quantunque molti si sien ingegnati a farlo, almeno ne' numeri, come Teone, Eudocio, e Vitellione, cita inoltre Gregorio da San Vincenzo celebre Geometra, che bisogno avendone, lo vuole, e sel prende per un assioma. Leggasi però il Galileo nel fine del Dialogo quinto, ed ivi conoscerassi quanto sia difficile il dimostrare questo teorema. Peraltro si vede, che nostro metodo usando molto facile, e quasi alla mano la dimostrazione riesce.

DELLE PROGRESSIONI, O SERIE GEOMETRICHE.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA I.

442. Nelle ſerie geometriche $\div a:b:c:d:f:g:h$, i termini per uguali intervalli tra loro diſtanti ſono proporzionali, e così anche del medio.

DIMOSTRAZIONE.

Si prendano a, h eſtremi, & c, f equidiſtanti dal medio d, o da' medeſimi eſtremi, ſarà $a:c::f:h$; imperocchè eſſendo (377.) nella ragione medeſima, ne riſulta $a:b::f:g$, $b:c::g:h$; Dunque per ordinata uguaglianza (5. 22. 424.) ſarà $a:c::f:h$. Inoltre eſſendo (377.) $a:b::d:f$, $b:c::f:g$, $c:d::g:h$, ſarà ordinatamente (5. 22. 424.) $a:d::d:h$, cioè $\div a:d:h$, (378.), e così dimoſtraſi $\div b:d:g$, ec.

443. Dunque i prodotti de' termini equidiſtanti dagli eſtremi, comprendendo anche il quadrato del medio, nelle ſerie geometriche, ſono ſempre uguali; $ah = bg = cf = dd$.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA II.

444. In ogni progreſſione geometrica il ſecondo termine è uguale al prodotto del primo termine (355.) multiplicato pel nome, il terzo uguale al primo multiplicato pel quadrato del nome, il quarto uguale al primo multiplicato pel cubo del nome, ec. Ovvero ciaſcun termine è uguale al prodotto del precedente multiplicato col nome della ragione.

DIMOSTRAZIONE.

Dacchè (355.) col nome m della ragione multiplicando il primo termine a, il conſeguente ma ne viene formato, ove queſto per antecedente ſi prenda (377.), e per lo medeſimo nome mul-

multiplicato rimanga, si viene a formare il prodotto mma, termine terzo, il quale multiplicato per m, ne dona m^3a, termine quarto, cioè $\div\!\div\, a : ma : mma : m^3a$, ec., nella quale serie si vede essere il secondo termine un prodotto del nome multiplicato per a, il quale primo termine multiplicato per mm, quadrato del nome, forma nel prodotto il termine terzo, ed il quarto multiplicato col cubo m^3, e così in infinito, ec.

Quindi si apre la via di risolvere moltissime questioni appartenenti alle geometriche serie, come per esempio volendo ritrovare qualunque termine di una serie, il cui primo termine egli è a, ed il nome m, e sia c il numero esprimente la sede del termine istesso, verbi grazia il decimo, il quindicesimo, sarà detto termine della sede c generalmente uguale ad am^{c-1}.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA III.

445. In tutte le geometriche serie egli è il primo termine al secondo come la somma di tutti i termini, togliendone l'ultimo, e alla medesima somma de' termini tutti, trattone il primo.

DIMOSTRAZIONE.

Facciasi pure primo termine $= a$,
Secondo termine $= b$,
Ultimo termine $= f$,
Somma de' termini tutti $= x$.
Dunque sarà somma di tutti gli antecedenti $= x - f$,
E somma di tutti i conseguenti $= x - a$.

E perchè le geometriche serie tutte sono simili ragioni, nelle quali (5. 12. 412.) egli è un antecedente al suo conseguente, come la somma di tutti gli antecedenti alla somma di tutti i conseguenti, vuolsi dire $a : b :: x - f : x - a$. Il primo termine al secondo, come la somma de' termini tutti, togliendone l'ultimo, che non è antecedente alla medesima somma, toltone il primo, che non è conseguente, che era, ec.

PRO-

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA IV.

446. In tutte le ſerie geometriche egli è il primo termine meno il ſecondo, al ſecondo :: il primo meno l'ultimo, alla ſomma di tutti i termini, meno il primo, cioè $a-b:b::a-f:x-a$.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè dal ſuperiore Teorema egli è $a:b::x-f:x-a$, ſarà multiplicando medii, ed eſtremi $bx-bf=ax-aa$, e per antiteſi $-bf=ax-bx-aa$, ed aggiugnendo ab ad ambedue le parti, ſarà $ab-bf=ax-aa+ab-bx$, cioè $\overline{a-f}\times\overline{b}=\overline{a-b}\times\overline{x-a}$, e riſolvendo ſarà $a-b:b::a-f:x-a$.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA V.

447. Nelle progreſſioni geometriche $\div$ a, b, c, d, e, f. Il ſecondo termine meno il primo, è al primo :: l' ultimo meno il primo è alla ſomma di tutta la ſerie mutilata del termine ultimo, cioè $b-a:a::f-a:x-f$.

DIMOSTRAZIONE.

La ſuperiore equazione $ax-aa=bx-bf$ ſi riduca per antiteſi, e ſia $-aa=bx-bf-ax$, ed a queſta ſi aggiunga il comune af, ſarà $af-aa=bx-ax+af$, cioè $\overline{a}\times\overline{f-a}=\overline{b-a}\times\overline{x-f}$, e riſolvendo, ne naſce $b-a:a::f-a:x-f$, che era ec.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA VI.

448. Nelle ſimili progreſſioni $\div$ a, b, c, d, f la ſomma di tutti i termini è uguale al quadrato aa del primo termine diminuito del prodotto bf, formato dal ſecondo b, ed ultimo f, ed

il

il residuo diviso per lo avanzo del primo termine a, sottrattone il secondo b, cioè facendo la somma $= x$, sarà $x = \frac{aa-bf}{a-b}$.

DIMOSTRAZIONE.

Da che per lo terzo Teorema in tutte le simili serie egli è $a:b::x-f:x-a$, sarà multiplicando medii, ed estremi (420.) $ax-aa=bx-bf$, e per antitesi (*Alg.* 97.) $ax-bx=aa-bf$, e dividendo per $a-b$ (*Alg.* 49.) $x=\frac{aa-bf}{a-b}$.

COROLLARIO.

449. Si possono dunque sommare in quantità finite le decrescenti in infinito geometriche serie; dacchè avendo $\div\, 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8}$, ec. in infinito, sarà l' ultimo termine $f=0$, perchè infinitamente piccolo, a cui altro minore non si può prendere, altrimenti voi proseguite la serie; l' ultimo termine adunque è zero, che minuir non si puote, però $f=0$, quindi $bf=0$, però sarà $x=\frac{aa-bf}{a-b}=\frac{aa}{a-b}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{1}=2$ (*Alg.* 76.) data la serie $\div\, 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27}$ ec. sarà somma sua $x=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=$ $=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}$.

COROLLARIO.

450. E quel, che dimostrato rimane, e pur sembra un paradosso, egli è, che la infinita serie $\div\, \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8}$ ec. $=1$, e l' altra $\div\, \frac{1}{3} : \frac{1}{9}$, ec. $=\frac{1}{2}$, è così, perchè la serie $\div\, 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ ec. $=$ $=2$, essendo $=1$ il primo termine, saranno tutti gli altri $=1$, e dove l' altra $=1+\frac{1}{2}$. Col medesimo raziocinio si ritrova di tutte le quantità.

PRO-

PROPOSIZIONE VII.

PROBLEMA I.

451. Continuare una ſerie Geometrica.

RISOLUZIONE.

Primo. Se ſi ha il primo termine a collo eſponente m, ſi continua la ſerie, come nel num. 444., cioè $\div a : ma : m^2a : m^3a : m^4a$, ec.

Secondo. Se ſi hanno primo, e ſecondo termine ſolamente $\div a : b :$ ec., ſi trova il terzo dividendo pel primo a il quadrato bb del ſecondo termine ec., e ſarà $\div a : b : \frac{bb}{a} : \frac{b^3}{aa} : \frac{b^4}{a^3}$ ec. (444.).

Terzo. Se ſono dati tre termini, ſi multiplichino ſecondo, e terzo, ed il prodotto ſi divida pel primo, e ſi ottiene il quoziente per quarto, e così il quinto, avendo $\div a, b, c$, ſarà $a, b, c, \frac{bc}{a}, \frac{cc}{a}, \frac{bcc}{aa}$ ec.

PROPOSIZIONE VIII.

PROBLEMA II.

452. Dati il primo termine a, ed m nome della ſerie, ritrovare qualunque termine di nominata ſede.

RISOLUZIONE.

Perchè (444.) il nome è tal poteſtà, quale è termine della ſerie -1, cioè nel terzo termine il nome è quadrato, nel quarto è cubo ec.; però ove ſi voglia v. gr. il termine ſettimo, ſi prenda la ſeſta poteſtà del nome m, che ſarà $= m^6$, qual poteſtà ſi multiplichi pel primo termine a, ed am^6, ſarà il ſettimo termine deſiderato. Sia $a = 3$, ed $m = 2$, ſarà $m^6 = 64$; laonde $3 \times 64 = 592$, ſarà il ſettimo termine della ſerie, di cui termine primo $= 3$, ed eſponente $= 2$.

PRO-

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA III.

453. Di una geometrica ſerie, eſſendo dati il primo, il ſecondo, e l'ultimo termine, ritrovare la ſomma de' termini tutti.

RISOLUZIONE.

Sia la deſiderata ſomma $=x$, primo termine $=a$, ſecondo termine $=b$, l'ultimo $=f$, e perchè (442. 448.) $x=\frac{aa-bf}{a-b}$, ſi quadri il primo termine a, dal ſuo quadrato aa ſottraggaſi bf prodotto del ſecondo nell' ultimo, ed il reſiduo $aa-bf$, ſi divida per $a-b$, che il quoziente $\frac{aa-bf}{a-b}$ ne darà x ſomma deſiderata; v. g. ſieno $a=3$ primo termine, $b=6$ ſecondo termine, $f=192$ ultimo termine, ſarà la ſomma $x=\frac{aa-bf}{a-b}=\frac{9-1152}{3-6}=\frac{1143}{3}=$ $=381$, e perchè $m=\frac{b}{a}=\frac{6}{3}=2$, ſarà la ſerie $\div a=3:b=6:$ $:12:24:48:96:f=192$; & $x=381$.

RISOLUZIONE II.

Uſando poſcia la Propoſizione ſeſta (448.), ſi riſolve il problema di ritrovare la ſomma x de' termini tutti, concioſiachè ſottraendo dalla ſomma x l' ultimo termine f, avraſſi la proporzione $b-a:a::f-a:x-f$; quindi equazione ſi ottiene, per la quale ſi ritroverà il valore della ſomma $x=\frac{bf-aa}{b-a}$, ſe la ſerie è creſcente, oppure $x=\frac{aa-bf}{a-b}$, ove la ſerie ſia decreſcente.

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA IV.

454. Eſſendo dati il primo termine, e l' ultimo, ed eziandio il numero di tutti i termini della ſerie, ritrovare il nome, che regna.

RISOLUZIONE.

Suppongasi il primo termine $=a$, così l'ultimo $=f$, e de' termini il numero $=n$, sarà il nome m ricercato quello, che elevato a tal potestà, quale è il numero de' termini meno l'unità, quindi multiplicando il primo termine a, formerà (444.) l'ultimo termine $=am^{n-1}$, il quale essendo lo stesso, che f, ne nasce la equazione $am^{n-1}=f$, e dividendo per a, e traendone la radice $n-1$, si ottiene il valore del nome $m=\sqrt[n-1]{\frac{f}{a}}$, v. g. sieno $a=7$, $f=189$, $n=4$, $n-1=3$; quindi $m=\sqrt[3]{\frac{189}{7}}=\sqrt[3]{27}=3$.

COROLLARIO.

455. All' incontro dati il primo termine $a=7$, e l' ultimo $f=189$, e l' esponente $m=3$, si trova n numero de' termini, dividendo l' ultimo termine f per lo primo a; onde sia nel dato caso presente $\frac{f}{a}=\frac{189}{7}=27$ quoziente, e perchè egli è noto il nome $m=3$ radice della potestà cubica 27, sarà il numero de' termini $n=3+1=4$.

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA V.

456. Avendo il nome m, l' ultimo termine f, & n numero de' termini, trovare il termine primo z.

RISOLUZIONE.

Perchè l'ultimo termine f è composto dal primo ricercato z, multiplicato per la potestà del nome m tale, quale è de' termini il numero $n-1$ (444.), sarà $zm^{n-1}=f$; dunque $z=\frac{f}{m^{n-1}}$, v. g. sia $f=320$, & $m=2$, & $n=7$, sarà il primo termine $z=\frac{320}{64}=5$ essendo 64 la potestà $n-1=7-1=6$, cioè la sesta potestà di $m=2$, perchè i termini sono 7.

PRO-

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA VI.

457. Dati il nome $=m$, il numero de' termini $=n$, e la somma della progressione $=x$, trovare ciascheduno de' termini.

RISOLUZIONE.

Siano $m=2$, & $n=7$, & $x=635$, la più spedita maniera essendo il ritrovare il termine primo a, dal quale per mezzo delle congrue potestà del nome, i rimanenti termini a formare si vengono; e per altra parte di due serie del medesimo nome essendo la somma dell'una alla somma dell'altra, come il primo termine al primo, ed il secondo al secondo ec.; perciò si faccia una serie conosciuta di termini uguali n, e del medesimo nome m, come sarebbe $\div$ 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, la cui somma $=127$, questi termini si piglino per antecedenti, i termini della ricercata come conseguenti, che sarà la somma degli antecedenti alla somma de' conseguenti, come qualunque antecedente al suo conseguente, perciò $127 : 1 :: 635 : a = \frac{635}{127} = 5$. Così si potrebbero trovare gli altri termini tutti ad uno ad uno; ma avendo il primo ricercato 5, ed il nome 2, sarà tutta la serie, $\div$ 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, somma $=635$.

PROPOSIZIONE XIII.

PROBLEMA VII.

458. Dati il primo termine, il nome, e la somma di tutta la serie, trovare l'ultimo termine, e ciaschedun altro termine intermedio.

RISOLUZIONE.

Perchè (448. 453.) abbiamo la somma già conosciuta $x = \frac{bf-aa}{b-a}$, oppure $x = \frac{aa-bf}{a-b}$, togliendone l'assimetria, si ottiene ne $ax-bx=aa-bf$; oppure $bx-ax=bf-aa$; quindi $bf=bx+aa-ax$; laonde ſarà l'ultimo termine $f=\frac{bx+aa-ax}{b}$.

Per avere nelle deſcreſcenti ſerie, ſi divide il primo pel nome, e nelle creſcenti multiplicare ſi dee; quindi per avere l'ultimo termine, ſi quadri il primo, e ſi multiplichi il ſecondo colla ſomma, di queſte due quantità ſe ne faccia una ſomma $aa+bx$, dalla quale ſottraggaſi il prodotto della ſomma x multiplicata col primo termine a, il reſiduo dividaſi pel ſecondo termine b., ed il quoziente ſarà il termine ultimo, fino a cui procedendo coll'uſo del primo, e del nome, ſi troveranno gli altri termini tutti.

DELLE PROGRESSIONI ARITMETICHE.

459. Generalmente ſi oſſervi, che i termini della aritmetica proporzione poſſono il ſecondo creſcere ſopra il primo, ed il quarto ſopra il terzo, ove la differenza aggiunta al primo forma il ſecondo termine, ed aggiunta al terzo, forma il quarto, come ſarebbe, ſe foſſe la differenza $=n$, nella proporzione $a\,.\,.\,a+n:\cdot d.\ d+n$, o nella progreſſione $\div a\,.\,a+n, a+2n, a+3n$, ec., e queſte ſi dicono creſcenti. Al contrario decreſcenti ſono appellate, ove la differenza viene ſottratta, come ſarebbe nella proporzione $a\,.\,a-n:\cdot d\,.\,d-n$, in cui il primo termine è maggior del ſecondo, quanto il terzo è maggiore del quarto, o veramente nella progreſſione $\div a, a-n, a-2n, a-3n$ ec., in cui quanto il primo è maggior del ſecondo; altrettanto il ſecondo è maggiore del terzo, e queſto è maggiore del quarto ec.

Intanto per poter in appreſſo con una medeſima eſpreſſione comprendere le creſcenti progreſſioni, ed inſieme le decreſcenti, ſembra, che giovi omettere le enunciazioni di termine primo, ed ultimo, e ſolamente indicare quelli col carattere di maſſimo, e di minimo; conciofiachè da quanto ſi è detto, ocularmente ſi vede, che nelle progreſſioni finite creſcenti $\div a\,.\,a+n, a+2n; a+3n, a+4n$, minimo termine ſi è il primo a, e maſſimo l'ultimo $a+4n$. All'oppoſto nelle decreſcenti maſſimo termine

mine è il primo, ed il minimo ſempre è l' ultimo termine; dacchè nella progreſſione $\div a+4n$, $a+3n$, $a+2$, $a+n$, a, maſſimo termine è il primo $a+4n$, ed il minimo, e l'ultimo termine a; così nell' altra decreſcente progreſſione $\div a$, $a-n$, $a-2n$, $a-3n$, $a-4n$ maſſimo termine è il primo a, ed è minimo l'ultimo termine $a-4n$.

Quindi naſce, che ſe il primo è termine maſſimo, la progreſſione è decreſcente, e ſe il primo è minimo, la progreſſione è creſcente, ed all' incontro, ove ſi ſappia, che l' ultimo termine è minimo, la progreſſione è decreſcente, ma è creſcente, ſe l' ultimo termine è maſſimo.

PROPOSIZIONE I.

Teorema I.

460. In tutte le proporzioni $a \,.\, c :\cdot d \,.\, f$ aritmetiche, e progreſſioni $\div a$, c, d, e, f, la ſomma degli eſtremi è uguale alla ſomma de' termini medii. Inoltre la ſomma degli eſtremi è uguale alla ſomma de' termini da loro equidiſtanti, ed al doppio del termine di mezzo, ſe 'l numero de' termini è diſpari.

Dimostrazione

E primieramente ſuppongaſi la proporzione creſcente, ſarà $a+n=c$, e così $d+n=f$, e ſoſtituendo queſti valori, la data proporzione $a \,.\, c :\cdot d \,.\, f$, ſarà tramutata in queſt' altra $a \,.\, a+n :\cdot d \,.\, d+n$, e ſommando medii, ed eſtremi $a+n+d=a+n+d$ ſomme uguali.

Che ſe foſſe creſcente, ſarebbe $a-n=c$, & $d-n=f$, e ſoſtituendo queſti valori, ſi ottiene $a \,.\, a-n :\cdot d \,.\, d-n$, in cui ſono uguali le ſomme de' medii, e degli eſtremi; così parimente ſe della data progreſſione a è maſſimo termine, ſaranno gli altri $c=a-n$, & $d=a-2n$ ec., e la progreſſione $\div a$, c, d, e, f diviene $\div a$, $a-n$, $a-2n$, $a-3n$, $a-4n$, in cui la ſomma degli eſtremi $2a-4n=a-n+a-3n$, ſomma degli equidiſtanti, e ciaſcuna di queſte ſomme è uguale al doppio termine di mezzo $a-2n+a-2n=2a-4n$.

E ſe a foſſe minimo termine, lo ſteſſo dimoſtraſi mutando della differenza n il ſegno $-$ nel ſegno $+$. PRO-

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA I.

461. Avendo tre termini di qualunque proporzione aritmetica continua, o interrotta, ritrovare il quarto, o avendone due, ritrovare il terzo.

RISOLUZIONE.

Si sommino insieme il secondo, ed il terzo, quindi dalla somma il primo termine si sottragga; che nel residuo si avrà il quarto termine desiderato.

DIMOSTRAZIONE.

Sia $a.c:\cdot d.x$, sarà (460.) $a+x=c+d$, e per antitesi $x=$ $=c+d-a$, così avendo $5.8:\cdot 11.x$, sarà $x=8+11-5=14$.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA II.

462. In tutte le aritmetiche progressioni, il massimo termine y è uguale al minimo termine a, più il prodotto della differenza n multiplicata per $b-1$, cioè per b numero de' termini mutilato dell' unità, cioè $y=a+bn-n$.

DIMOSTRAZIONE.

La data progressione sia $\div\ a,\ a+n,\ a+2n,\ a+3n,\ a+4n$, di cinque termini, che però $b=5$, e mutilato dell' unità, sarà $b-1=5-1=4$, e multiplicando per n, risulta $bn-n=5n-n=4n$, ed aggiugnendo a, sarà $y=a+bn-n=a+4n$, che era ec.

COROLLARIO I.

463. Dunque in tutte le aritmetiche progressioni il minimo termine a è uguale al massimo y, più la differenza, dettrattone il prodotto del numero de' termini b, multiplicato per la differenza n, conciosiachè per lo superiore teorema essendo $y=a+bn-n$, sarà per antitesi il minimo termine $a=y+n-bn$.

Co-

COROLLARIO II.

464. Dunque generalmente nelle aritmetiche progressioni la somma degli estremi, cioè del minimo a, e del massimo y sarà sempre $=2a+bn-n$; conciosiachè avendo $y=a+bn-n$ termine massimo, aggiugnendo a minimo termine ad amendue le parti, risulta $a+y=a+a+bn-n=2a+bn-n=2y+n-bn$.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA III.

465. In tutte le aritmetiche progressioni sottraendo dal massimo y il minimo termine a, e dividendo il residuo pel numero de' termini tutti b, mutilato dell'unità, cioè per $b-1$, si conseguisce nel quoziente la differenza n.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè egli è (462.) $y=a+bn-n$, sottraendone a, si ottiene $y-a=a+bn-n-a=bn-n$, valore del massimo termine, da cui il minimo termine sia sottratto; ma gli è questo residuo $bn-n=$ $=\overline{b-1}\times n$; perciò sarà $y-a=\overline{b-1}\times n$, e dividendo per $b-1$, sarà $\frac{y-a}{b-1}=n$, differenza nella progressione regnante, che era ec., però.

COROLLARIO.

466. Egli è valore in tutte le aritmetiche progressioni della differenza $n=\frac{y-a}{b-1}$.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA IV.

467. In tutte le aritmetiche progressioni sottraendo il minimo dal massimo termine, e dividendo il residuo per la differenza; nel quoziente accresciuto dell'unità, si ottiene il numero de' termini $=b$.

DIMOSTRAZIONE.

Dacchè (465.) $y-a=bn-n$ valore del reſiduo del maſſimo, ſottraendone il minimo termine, ove tale reſiduo venga diviſo per la differenza n, ſarà il quoziente $\frac{y-a}{n}=b-1$, al quale quoziente aggiunta la unità; ſi hà la ſomma $\frac{y-a}{n}+1=b$ numero de' termini della data progreſſione.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA V.

468. In tutte le aritmetiche progreſſioni la ſomma x de' termini tutti è uguale alla ſomma di due termini eſtremi $a+y$ multiplicata per $\frac{b}{2}$, metà del numero de' termini della progreſſione, vuolſi dire $x=\frac{ab+by}{2}$.

DIMOSTRAZIONE.

Sia $\div a, c, d, h, o, m, r, y$, oppure $\div y, m, r, l, h, d, c, a$, ſarà (460.) $a+y=c+r=d+m=h+l$; ma queſte uguali ſomme formate da' termini preſi a due a due, ſono la metà del numero b de' termini tutti, dunque prendendone una $a+y$, e multiplicandola per la metà del numero de' termini, nel prodotto ſi ottiene la ſomma de' termini tutti; perciò ſarà $x=\frac{ab+by}{2}$, che ec.

COROLLARIO I.

469. E perchè (464.) la ſomma de' due termini eſtremi ſi è dimoſtrata uguale alla quantità $2a+bn-n$, perciò di tutte le ſomme x delle ſerie aritmetiche, ſarà formola generale $x=\frac{b}{2}\times\overline{2a+bn-n}$, cioè $x=\frac{2ab+bbn-bn}{2}$.

Co-

COROLLARIO II.

470. Similmente essendo (463.) $a = y + n - bn$, ove aggiungasi il massimo termine y, sarà somma degli estremi $a + y = 2y + n - bn$, e multiplicando per $\frac{b}{n}$, si ottiene altro valore della somma x de' termini tutti $x = \frac{2by + bn - bbn}{2}$.

COROLLARIO III.

471. Che se nel corollario superiore egli è $x = \frac{2by + bn - bbn}{2}$ e nell' altro (469.) primo corollario $x = \frac{2ab + bbn - bn}{2}$, paragonando i due valori di x, si ha $\frac{2by + bn - bbn}{2} = \frac{2ab + bbn - bn}{2}$, cioè $2by + bn - bbn = 2ab + bbn - bn$ equazione generale di molto uso nelle aritmetiche serie.

COROLLARIO IV.

472. Dunque dividendo la somma x della progressione per la somma $a + y$ de' termini estremi, nel quoziente si ottiene $\frac{b}{2}$ metà del numero de' termini, conciosiachè essendo $x = \frac{b}{2} \times \overline{a + y}$, dividendo l' equazione per $a + y$, sarà $\frac{b}{2} = \frac{x}{a + y}$, epperò

COROLLARIO V.

. Il numero de' termini b è uguale al quoziente, dividendo la doppia somma della progressione per la somma de' termini estremi, conciosiachè per lo corollario superiore essendo $\frac{b}{2} = \frac{x}{a + y}$, e multiplicando per 2, sarà $b = \frac{2x}{a + y}$.

COROLLARIO VI.

Inoltre (461. & 465.) $y=a+bn-n$, oppure $y-a=bn-n$, ne siegue per antitesi $bn=y+n-a$, e dividendo per n, risulta $b=\frac{y+n-a}{n}$; dunque il numero de' termini d' una progressione è uguale al quoziente, dividendo per la differenza n, il residuo, che avanza dal sottrarre il minimo termine a dal massimo termine y unito alla differenza n.

COROLLARIO VII.

473. E paragonando i due valori del numero de' termini b ritrovati ne' due ultimi superiori corollarii, si ottiene l' equazione generale $\frac{2x}{a+y}=\frac{y+n-a}{n}$, e riducendo ne nasce $2nx=yy+ny-ay+ay+an-aa$, e spurgando $2nx=yy+ny+an-aa$.

PROPOSIZIONE VII.

PROBLEMA II.

474. Tra due date quantità a, y ritrovare quanti piace termini medii aritmetici.

RISOLUZIONE.

Perchè de' termini dati uno sarà minimo a, e l'altro massimo y, si sottragga a da y, per avere il residuo $y-a=m$, e supponendo, che si vogliano quattro termini medii, però dividasi m per $4+1=5$, e sarà $\frac{m}{5}=\frac{y-a}{5}$ differenza tra li sei termini della progressione, la quale sarà $\div a$, $a+\frac{m}{5}$, $a+\frac{2m}{5}$, $a+\frac{3m}{5}$, $a+\frac{4m}{5}$, $a+\frac{5m}{5}=y$.

Di-

DIMOSTRAZIONE.

Perchè profeguendo la ferie, farebbe il termine maffimo $y = a + \frac{5m}{5} = a + m$, ma fi è fatto $y - a = m$; dunque $y = a + m$, che era ec.

RISOLUZIONE II.

Perchè il maffimo termine y è uguale al minimo termine a, coll'aggiunta della differenza $y-a$, che vi corre tra il maffimo, ed il minimo termine, perciò in vece di diftribuire ne' termini fuffeguenti al primo la differenza m, fi prenda l'uguale $y-a$, ed allora la ferie di fopra diviene in tutto, e per tutto uguale alla feguente : a, $a + \frac{y-a}{5}$, $a + \frac{2y-2a}{5}$, $a + \frac{3y-3a}{5}$, $a + \frac{4y-4a}{5}$, $a + \frac{5y-5a}{5}$, cioè $\div a$, $\frac{4a+y}{5}$, $\frac{3a+2y}{5}$, $\frac{2a+3y}{5}$, $\frac{a+4y}{5}$, y.

COROLLARIO.

475. Dunque apparifce chiaro il metodo di ritrovare tra a, & y quanti medii termini piace, cioè fe fi vogliono quattro termini medii dopo a, farà il fecondo termine $\frac{4a+y}{4+1} = \frac{4a+y}{5}$, ed il terzo termine $\frac{3a+2y}{5}$, e così fino all' ultimo $\frac{5a+5y-5a}{5} = y$, fe foffero dati $a=7$, & $y=22$, farà la ferie $\div 7$, $\frac{4 \times 7 + 22}{5}$, $\frac{3 \times 7 + 2 \times 22}{5}$, $\frac{2 \times 7 + 3 \times 22}{5}$, $\frac{7 + 4 \times 22}{5}$, y, cioè $\div 7, 10, 13, 16, 19, 22$.

PROPOSIZIONE VIII.

PROBLEMA III.

476. Conofcendo il primo, e l'ultimo termine, cioè il maffimo, ed il minimo di una progreffione aritmetica, ritrovare la differenza regnante, ove fappiafi il numero de' termini della fteffa progreffione.

Ri-

Risoluzione.

Si sottragga il minimo dal massimo, ed il residuo $y-a$ si divida per $b-1$, numero de' termini mutilato dell' unità, e nel quoziente si ottiene la differenza.

Dimostrazione.

Perchè (462.) egli è $y=a+bn-n$, sarà per antitesi $bn-n=y-a$, e dividendo per $b-1$, risulta $n=\frac{y-a}{b-1}$, che era ec. Sieno $a=2$, & $y=17$, & $b=6$, sarà $n=\frac{17-2}{6-1}=\frac{15}{5}=3$, e la serie $\div$ 2, 5, 8, 11, 14, 17.

PROPOSIZIONE IX.

Problema IV.

477. Dato un termine massimo, o minimo, e data la differenza n, che regna in una progressione aritmetica, ritrovare qual sede occupa nella serie una quantità data, termine di detta serie.

Risoluzione I.

Suppongasi dato il minimo termine a, e la data quantità prendasi per massimo termine y, considerando la serie continuata fino alla quantità suddetta, sarà dunque la ricercata sede della medesima quantità uguale al quoziente, sottraendo da quella unità alla differenza n, il primo termine a, dividendo il residuo per la medesima differenza n.

Dimostrazione.

Perchè egli è (462.) $y=a+bn-n$, sarà per antitesi $bn=y+$ $+n-a$, e dividendo per n, risulta $b=\frac{y+n-a}{n}$ numero de' termini da a fino alla data quantità y, che occupa la sede beesima. Della serie superiore si cerchi del termine dato 14, la sede sarà $b=\frac{14+3-2}{3}=\frac{15}{3}=5$, cioè il 14 si trova nel quinto luogo.

Ri-

RISOLUZIONE II.

Se poi il termine dato è y massimo, allora la quantità data si prenda per minimo termine a, e per avere la sua sede, al massimo termine y s'aggiunga la differenza, e dalla somma sottraggasi la data quantità a, che sarà $b = \frac{y+n-a}{n}$, come sopra. Epperò della medesima rivoltata serie $\div$ 17, 14, 11, 8, 5, 2, ricercando qual luogo sia occupato dall' $8=a$, sarà $b = \frac{17+3-8}{3}$ $= \frac{12}{3} = 4$, vuolsi dire, che nella serie il termine 8 si trova nel quarto luogo, che se mai il valore di b non riuscisse un numero intiero, allora il termine proposto non si appartiene a quella serie.

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA V.

478. Essendo dati la differenza n, ed il massimo termine y, o il minimo termine a, ed il numero b de' termini, ritrovare il minimo a, dato y, o il massimo y, essendo dato il minimo a.

RISOLUZIONE I.

Suppongasi colla differenza, e numero de' termini dato il minimo a, si aggiunga ad a il prodotto bn della differenza multiplicata pel numero de' termini, e dalla somma la differenza sottraggasi, che nel residuo si ottiene il massimo termine y.

DIMOSTRAZIONE.

Da quanto si è operato, ne risulta precisamente $y = a + bn - n$, come si dimostrò (462.) sia $a=5$, $n=3$, & $b=8$, sarà $y = 5 + 8 \times 3 - 3 = 26$, e la serie $\div$ 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26.

RISOLUZIONE II.

Suppongasi dato il massimo y, e si ricerchi il minimo $a = y + n - bn$ (463.), però al dato massimo y si aggiunga la differenza, e dalla somma sottraggasi bn prodotto della differenza multiplicata

tiplicata pel numero de' termini, che nel (463.) quoziente si ottiene il minimo termine a, essendo date $y=26$, $n=3$, $b=8$, sarà il minimo termine $a=26+3-8\times3=29-24=5$, e la serie come ec. ÷ 26, 23, 20, 17, 14, 11, 8, 5.

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA VI.

479. Essendo dato il primo termine a, la differenza n, & b numero de' termini, ritrovare la somma x de' termini tutti.

RISOLUZIONE.

Si multiplichi la differenza n per b, numero de' termini, ed al prodotto bn si aggiunga il minimo termine a, e dalla somma $a+bn$ sottraggasi la differenza n, che il residuo sarà il massimo termine $y=a+bn-n$ (462.), che se poi il termine dato non fosse a minimo, ma bensì y massimo, per ritrovare a, si aggiunga al massimo dato y la differenza n, e dalla somma $y+n$ sottraggasi bn prodotto della differenza multiplicata pel numero de' termini, che nel residuo si avrà il minimo termine $a=y+n-bn$. Avendo dunque il primo, ed ultimo termine si multiplichi la loro somma per $\frac{b}{2}$ metà del numero de' termini, e si ottiene $x=\frac{b}{2}\times\overline{a+y}=\frac{ab+by}{2}$, che ec.

RISOLUZIONE II.

Avendo il minimo termine a, si duplichi, e si aggiunga al suo doppio il prodotto bn, e dalla somma sottraggasi la differenza n, quindi si multiplichi tale residuo per $\frac{b}{2}$ metà del numero de' termini, ed il prodotto sarà la somma x.

Avendo poi il massimo termine y, al suo doppio si aggiunga la differenza n, e quindi sottraggasi bn, e similmente questo residuo si multiplichi per $\frac{b}{2}$, che si otterrà sempre x somma desiderata, come si è dimostrato ne' numeri 469., 470., e 471.

Sieno

Sieno $b=7$, $n=2$, avendo $a=3$, sarà $y=3+14-2=15$, & $a+y=18$, però multiplicando 18 per $\frac{b}{2}=\frac{7}{2}$, si ottiene la somma $x=\frac{126}{2}=63$.

Avendo poi $y=15$, sarà $a=15+2-14=3$, e l' operazione si fa come sopra, e sarà della serie $\div$ 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, la somma $x=3+5+7+9+11+13+15=63$.

Più facilmente colla seconda risoluzione si ritrova x, dacchè come sopra avendo il minimo termine $a=3$, si prende il doppio 6, a cui si aggiunga $14=bn$, e la somma 20 si multiplichi per $b=7$, e dal prodotto 140 sottraggasi $bn=14$, ed il residuo 126 dividasi per metà, ed otterrassi 63 somma desiderata.

Ma avendo y, bisogna duplicarlo, ed aggiugnerli la differenza, e dalla somma sottrarne il prodotto bn, e quindi multiplicare il residuo per $\frac{b}{y}$, che si avrà x, somma, che si ricerca.

RISOLUZIONE III.

Sia dato il minimo termine a, dunque (469.) sarà $x= =\frac{2ab+bbn-bn}{2}$, però il doppio $2a$ si multiplichi per b, al quale prodotto $2ab=42$ si aggiunga il prodotto bbn, che nasce dal quadrato di b multiplicato per la differenza, e si avrà la somma $42+98=140$, da cui sottraggasi $bn=14$, formato dalla differenza multiplicata pel numero de' termini, che la metà del residuo 126 sarà 63, somma ricercata.

Ove si abbia il massimo termine $y=15$ il suo doppio 30 si multiplichi per $b=7$, ed al prodotto $2by=210$ si aggiunga $14= =bn$ prodotto della differenza pel numero de' termini. Dalla somma $224=2by+bn$ si sottragga $98=bbn$, prodotto del quadrato del numero de' termini multiplicato per la differenza, che la metà del residuo $\frac{126}{2}$ sarà 63 somma desiderata, perchè si è dimostrato (470.) essere la somma de' termini $x=\frac{2by+bn-bbn}{2}$ $=\frac{210+14-98}{2}=\frac{126}{2}=63$.

PRO-

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA VII.

480. Ritrovare le formole generali per la risoluzione di tutte le questioni appartenenti alle progressioni aritmetiche.

RISOLUZIONE.

Supponendo come sopra le denominazioni, minimo termine $=a$, termine massimo $=y$, loro somma $=a+y$, differenza regnante $=n$, numero de' termini $=b$, somma de' termini $=x$, saranno delle suddette quantità i propri valori $a=y+n-bn$ (*num.* 463.) $y=a+bn-n$ (462.) $a+y=2a+bn-n=2y+n-bn$ (464.) $b=\frac{y+n-a}{n}$ (*Prop.* 6. *Corol.* 6. *num.* 472.) $b=\frac{2x}{a+y}$ (*Prop.* 6. *Cor.* 5. *num.* 472.) $n=\frac{y-a}{b-1}$ (466.) $x=\frac{ab+by}{2}$ (468.) $x=\frac{2ab+bbn-bn}{2}=\frac{2by+bn-bbn}{2}$ (469. 470.) $a=\frac{2x+bn-bbn}{2b}$ $y=\frac{2x+bbn-bn}{2b}$.

Dalle quali quantità prendendo quella, che occorre per incognita, usando i loro valori, e l'equazioni esposte, si risolve qualunque sia proposta questione, come vedremo negli esempli seguenti, che sono tanti problemi.

PROBLEMA I.

481. Un uomo si adoperò per giorni dodeci a raccogliere polvere d'oro nelle rive d'un fiume, il primo giorno ne ritrovò per il valore di 5. lire, nel seguente giorno alcune lire di più, e così in appresso ugualmente crescendo fin all'ultimo giorno, che ne ebbe per lire 27., si ricerca quanto ne ritrovò in ogni giorno, e quanto in tutto.

RISOLUZIONE.

Dunque sono minimo termine $=a=5$, termine massimo $y=27$, & $b=12$.

Per

Per ritrovare la differenza 12 si ripigli il suo valore $n = \frac{y-a}{b-1}$, e sostituendo i conosciuti valori, diviene $n = \frac{27-5}{12-1} = \frac{22}{11} = 2$. Finalmente se si vuole alla prima la somma $x = \frac{ab+by}{2} = \frac{60+324}{2} = \frac{384}{2} = 192$, e la serie tutta sarà ∺ 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27.

Problema II.

482. Un altro similmente nel primo giorno guadagnò 5. lire, nel secondo 8., e così accrescendo di giorno in giorno, nell'ultimo il suo guadagno fu di lire 35., si domanda di quanti giorni fu il suo travaglio, e quanto l'intero fatto guadagno.

Risoluzione.

Sono intanto minimo termine $a = 5$, termine massimo $y = 35$, differenza $n = 8 - 5 = 3$, e però prendendo (462.) il valore di $y = 35 = a + bn - n$, e sostituendo i valori delle quantità conosciute, risulta $35 = 5 + 3b - 3$, e per antitesi $3b = 35 + 3 - 5$, e dividendo per 3, risulta $b = \frac{35+3-5}{3} = \frac{33}{3} = 11$., numero de' giorni delle fatte ricerche.

Per ritrovare poi la somma di tutti gli undici termini della progressione, si prenda l'equazione $x = \frac{2ab+bbn-bn}{2} = \frac{110+363-33}{2} = \frac{440}{2} = 220 = 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29 + 32 + 35$.

Problema III.

483. Dieci Sargenti ritornarono al Campo colle fatte reclute; il secondo condusse 2 uomini più del primo, il terzo 2 più del secondo, e così ordinatamente crescendo per fino all'ultimo, si sa, che tutte le reclute furono 120., e si ricerca il numero distinto degli uomini arrollati da ciascun de' Sargenti.

RISOLUZIONE.

Si vede, che la queſtione dipende dal conoſcere le reclute fatte dal primo Sargente, che formano il primo termine a, e però prendendo (480.) la equazione $a = \frac{2x + bn - bbn}{2b}$, e ſostituendo i reſpettivi valori di $b = 10$, ed $n = 2$, ed $x = 120$, ne riſulta $a = \frac{240 + 20 - 200}{20} = 3 = a$. Se piace adeſſo di avere l'ultimo termine y, a dirittura ſi prenda l' equazione $y = a + bn - n = 3 + 20 - 2 = 21$, e la progreſſione ſarà ÷ 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21. Somma 120.

PROBLEMA IV.

484. Un Mercatante conſegnò ad un ſuo figlio un capitale di mercanzíe, ordinandogli, che andaſſe a mercantare alle fiere, aſſicurandolo, che gli avrebbe laſciato tutto il guadagno per ſuo capitale; il giovine eſſendo andato a dodeci fiere conſecutive, trovò, che nella prima avea lucrato lire quattrocento, nella ſeconda guadagnò qualche coſa di più, ed egualmente creſcendo nella terza, e nella quarta ec., l' ultima volta fatto il ſolito guadagno, avea in tutto lire 23000., ſi ricerca quanto foſſe il primo capitale, ed avendolo reſtituito, quanto rimaneſſe in proprietà ſua al figlio.

RISOLUZIONE.

Per riſolvere il preſente Problema fa d'uopo di oſſervare, che tutti i guadagni fatti formano la ſerie aritmetica, dalla quale rimane eſtraneo il capitale del padre, il quale ſi trova immerſo, e confuſo nell' intera ſomma x di tutta la ſerie, dicaſi il primo capitale, che ſia z, ſarà $x + z = 23000$, ed avendo il numero de' termini $b = 12$, ed il primo termine $a = 400$, fa d'uopo ritrovare l' ultimo termine y non conoſciuto, e parimente la differenza n. Sembra, che maniera più facile a riſolvere la queſtione, ſia il prendere la equazione $x = \frac{ab + by}{2}$, ed aggiugnendo z da

amen-

amendue le parti, sarà $x+z=23000=\frac{ab+by}{2}+z$, e riducendo si ottiene $46000=4800+12y+2z$, e spurgando, e per antitesi fia $12y=41200-2z$, e dividendo per 2, risulta $6y=$ $=20600-z$, e dividendo per 6, sarà $y=\frac{20600-z}{6}$.

Si prenda l'altra equazione $y=a+bn-n=400+12n-n$, cioè $y=400+11n$, e paragonando questi due valori di y, ne nasce l'equazione $400+11n=\frac{20600-z}{6}$, e multiplicando per 6, sarà $2400+66n=20600-z$, e spurgando $66n=18200-z$, quindi $n=\frac{18200-z}{66}$: Equazione finale, che ci dimostra essere z quantità arbitraria. Prendasi adunque $z=5000$, sarà $n=$ $=\frac{13200}{66}=200$, e sostituendo questo valore di n nella superior equazione $y=a+bn-n=400+2400-200$, sarà $y=2600$, e quindi $x=\frac{ab+by}{2}=\frac{4800+31200}{2}=18000$., somma de' fatti guadagni, a cui aggiunte le lire 5000., primo capitale somministrato dal padre, formano l'intera somma di lire 23000.

Problema V.

485. Due Amici, un da Torino, altro dalle parti di Roma, lontani 420. miglia si partirono lo stesso giorno per abboccarsi insieme. Quello da Roma nel secondo giorno fece un miglio di più, che nel primo, nel terzo un miglio di più, che nel secondo, e così in appresso. L'altro da Torino fece nel secondo giorno tre miglia più, che nel primo, e così ogni giorno tre miglia più, che nel dì precedente. Dopo 7. giorni s'incontrarono a mezzo cammino. Si domanda quanti miglia fece in ciascun giorno quello proveniente da Roma, ed anche l'altro partitosi da Torino.

Risoluzione.

Perchè s'incontrano a mezzo cammino, nel settimo giorno compiuto, chiaramente si vede, che ciascun di loro in 7. giorni

fece

fece miglia 210., somma uguale delle due progressioni diverse; dunque per quello di Roma si ha, somma $x=210$, numero de' termini $b=7$, differenza $n=1$, e non sapendosi nè il massimo, nè il minimo termine, per ritrovare il primo, e minimo termine a, si prenda la equazione (480.), nella quale y non comparisce, vuolsi dire $x=\frac{2ab+bbn-bn}{2}$, cioè sostituendo i valori, e togliendo la frazione, sarà $2x=2ab+bbn-bn$, cioè $420=14a+49-7$, e spurgando sarà $14a=378$, e dividendo per 14, risulta $a=\frac{378}{14}=27$ miglia fatte nel primo giorno dal Romano, che però nell'ultimo giorno ne camminò 33, e la sua serie fu $\div 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33$, tutta $=210$.

Pel Torinese avendo $n=3$, sarà trattando la medesima equazione $a=\frac{2x+bn-bbn}{2b}=\frac{420+21-147}{14}=21$ miglia fatte nel primo giorno, e tutta la sua serie $\div 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39$, la cui somma $=210$.

PROBLEMA VI.

486. Due Compagni avevano borsa comune, che si divisero in parti uguali, volendo giuocare ognuno separatamente da se. Il primo per otto giorni continui vinse ciascuna volta la medesima somma di danaro; ma al contrario il secondo perdette altra somma, sempre però la medesima quantità. Si sa, che il danaro del secondo alla fine del terzo giorno era la metà di quello, che aveva il primo nella penultima sera; terminato il quinto giorno, il secondo aveva la terza parte del primo. Fatti i loro conti trovarono, che dell' intera borsa aveano perduto lire 1600. Si domanda quanto avessero da prima, quanto giornalmente vincesse il primo, e quanto perdesse il secondo, e quanto nell' ultimo giorno avesse acquistato il primo, e quanto avesse perduto il secondo.

RISOLUZIONE.

Il Problema rimane intrigato, non sapendosi altro, se non che sono due serie aritmetiche, una crescente, e l' altra decrescente,

amendue

amendue continenti nove termini, compresovi per primo la metà della borsa, e però a distrigarsene giova in questo, e ne' simili casi di chiamare il primo termine $= a$ (nomando tutta la borsa $2a$) l'accrescimento, o sia differenza del primo $= n$, e la perdita del secondo $= r$, e saranno le due serie $\div a . a + n . a + 2n . a + 3n . a + 4n . a + 5n . a + 6n . a + 7n . a + 8n . \div a . a - r . a - 2r . a - 3r . a - 4r . a - 5r . a - 6r . a - 7r . a - 8r$.

E perchè il primo de' Compagni dopo il settimo giorno avea $a + 7n$, quantità doppia di $a - 3r$ danaro avanzato all'altro Compagno nel terzo giorno; ne nasce l'equazione $a + 7n = 2a - 6r$, e spurgando, e per antitesi, risulta $6r = a - 7n$, d'onde $r = \frac{a - 7n}{6}$. Si ricavi altro valore di r, dallo essersi in ultimo tra tutti e due ritrovata la perdita di lire 1600.; laonde $2a = 2a + 8n - 8r + 1600.$, e però $8r = 8n + 1600$, e dividendo per 8, si ottiene $r = n + 200$. Adunque $n + 200 = \frac{a - 7n}{6}$, e quindi togliendo la frazione, sarà $6n + 1200 = a - 7n$, ed $n = \frac{a - 1200}{13}$. Ma nel quinto giorno terminato il giuoco, il primo avea il triplo dell'altro, a cui rimaneva lo avanzo $a - 5r$, perciò si ottiene altra equazione $a + 5n = 3a - 15r$. Si sostituisca il valore di $r = n + 200$; e sia $a + 5n = 3a - 15n - 3000$, e spurgando, e per antitesi, ne risulta $20n = 2a - 3000$, e dividendo per 2 tutta la equazione, risulta $10n = a - 1500$, ed $n = \frac{a - 1500}{10}$. Si paragoni coll'altro valore di n, si ottiene $\frac{a - 1500}{10} = \frac{a - 1200}{13}$, e togliendo le frazioni, sarà $13a - 19500 = 10a - 12000$, e spurgando, sia $3a = 7500$, e dividendo per 3, sarà $a = 2500$, e la borsa comune di $2a = 5000$. Il ritrovato valore di a si sostituisca nel valore di n, e risulta $n = 100$, qual valore sostituito in r, si troverà $r = 300$. E perciò de' due Compagni, il primo ogni giorno guadagnò 100 lire, ed il secondo ne perdè 300, e le due progressioni si possono avere in numeri, sostituendo nelle già esposte i valori di a, di n, e di r. Che era ec.

PRO-

PROBLEMA VII.

487. Due Viaggianti si partirono dal medesimo luogo per andare tutti e due ad una Città. Il primo fece in tutti li giorni equabilmente 16. miglia; ma il secondo camminò 4 miglia nel primo giorno, nel secondo 7, e sempre crescendo nella stessa maniera fin all'ultimo giorno, nel quale pervennero tutti e due nell' istesso momento alla mentovata Città. Si domandano il numero de' giorni impiegati, e quante miglia facesse in ciascun giorno il secondo, e quante in tutto.

RISOLUZIONE.

Dicasi d il numero delle miglia impiegate dal primo in ciascun giorno, e però nel presente caso $d=16$. Sia $=b$ il numero de' giorni impiegati, o siano termini della progressione del secondo. Adunque il numero delle miglia scorse dal primo deve essere $=bd$, e deve essere ancora in riguardo al secondo lo stesso numero $x = \frac{2ab+bbn-bn}{2} = bd$, e dividendo per b, e multiplicando per 2, risulta $2d = 2a + bn - n$, e per antitesi $bn = 2d + n - 2a$, e dividendo per n, si ottiene $b = \frac{2d+n-2a}{n} = \frac{32+3-8}{3} = 9$, giorni ricercati, e termini della progressione del secondo, e però $\div 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 + 25 + 28 = 144 = 9 \times 16$. Che era, ec.

PROBLEMA VIII.

488. Un Rivenditore per alcuni giorni vendendo, e comprando guadagnò 168 lire, e non altro si ricorda, che giorno per giorno, il fatto lucro fu di accrescimento uguale; di più, che tra il primo, e l' ultimo giorno guadagnò lire 28. Si desidera sapere il lucro fatto nel primo, ed in ogni altro giorno, e la differenza da un giorno all' altro, ed insieme il numero de' giorni.

RISOLUZIONE.

Dacchè sono incogniti i fatti guadagni nel primo, ed ultimo giorno,

giorno, cioè i termini a minimo, ed y massimo, ed eziandio la differenza n, ed il numero de' termini b, e solamente si sa la somma degli estremi $a+y=28$, e la somma de' termini tutti $x=168$; perciò si trovi primieramente il valore di b dalla sua (480.) equazione $b=\frac{2x}{a+y}=\frac{336}{28}=12$. Dunque 12 furono li giorni del mercato fatto. E perchè $a+y=2a+bn-n=28$, sostituendo il valore di $b=12$, sarà $2a+12n-n=28$, e spurgando egli è $2a+11n=28$, cioè $2a=28-11n$, e dividendo per 2, ne risulta $a=\frac{28-11n}{2}$, questione indeterminata, perchè dalla differenza n incognita, non se ne può ricavare preciso valore, onde rimane arbitraria, ed a volere a quantità positiva, bisogna, che il suo valore $\frac{28-11n}{2}$ sia maggior dello zero, cioè $\frac{28-11n}{2}>0$, e multiplicando per 2, sarà $28>11n$, e dividendo per 11 sia $n<\frac{28}{11}$.

Prendasi l'arbitraria $n=2$, sarà il minimo termine $a=\frac{28-22}{2}=3$, quindi $y=25$ è la serie $\div 3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.23.25$, ed i termini tutti $x=168$. Prendasi adesso $n=4$, sarà $a=\frac{28-44}{2}=\frac{-16}{2}=-8$, e la serie sarà $\div -8, -4, 0, +4, +8, +12, +16, +20, +24, +28, +32, +36, = 168$, ed $a+y=-8+36=+28$, come fu proposto. Ma rimane evidente, che ne' primi giorni perdette, oppure de' fatti guadagni pagò debiti, che aveva.

PROBLEMA IX.

489. Due Amici fecero alcune spese per otto giorni consecutivi, il primo regolatamente spese la terza parte del giorno precedente, ma il secondo in ogni giorno scemò 3 lire, e nell' ottavo giorno amendue spesero ugualmente; si sa, che nel quarto giorno il primo spese 27 volte più del secondo, si ricercano le spese di tutti due in ciascun giorno.

Riso-

RISOLUZIONE.

Chiaramente si vede, che le fatte spese sieno di specie diverse, e che le prime formano una serie geometrica, le seconde una serie aritmetica, amendue decrescenti, delle quali il nome, e la differenza sono la medesima quantità $n = 3$. E perchè tutte le serie decrescenti divengono crescenti, incominciando da termini ultimi, perciò sia la comune ottava spesa, che si prende come prima $= a$. Si avverta però, che i termini quarti divengono quinti, rovesciando la serie. Ella è adunque la quinta spesa fatta dal primo $= n^4 a$, e la corrispondente fatta dal secondo $= a + 4n$ (444. 459.), la quale è ventisette volte minore dell' altra, che però ne nasce l' equazione $27 \times \overline{a+4n} = n^4 a$, e sostituendo i valori $n = 3$, ed $n^4 = 81$, sarà $27a + 324 = 81a$, e riducendo $54a = 324$, e dividendo per 54, si ottiene $a =$
$= \frac{324}{54} = 6$; dunque nell' ottavo giorno amendue spesero 6 lire, e le due serie proposte sono $\div 13122 . 4374 . 1458 . 486 . 162 . . 54 . 18 . 6 \div 27 . 24 . 21 . 18 . 15 . 12 . 9 . 6$. Delle quali si avvera, che il primo quarto termine 486 sia ventisette volte maggiore di 18, altro termine quarto.

PROBLEMA X.

490. Due Mercatanti fratelli andarono ugual numero di volte a diversi mercati colle loro mercatanzie. Il maggiore la prima volta guadagnò lire 45, la seconda volta alquante lire di più, e così in tutti gli altri mercati, ugualmente crescendo. Da altra parte il fratello minore fece molto guadagno nel primo mercato, ma negli altri andò scemando, di maniera che nel seguente il lucro fu la metà del precedente. Si sa, che il primo guadagno del maggiore fu 5 lire più del quinto guadagno del Cadetto; ma nel quarto giorno fu 5 lire di meno di quello, che il Cadetto guadagnò nel medesimo mercato. Finalmente la somma di tutti i guadagni fatti dal maggiore furono uguali al primo fatto dal minore. Si ricercano i distinti, e quanti per numero fossero i fatti guadagni dall' uno, e dall' altro fratello.

RISOLUZIONE.

Sono adunque i diversi termini ricercati distribuiti in due serie, una aritmetica, che contiene i guadagni fatti dal maggiore fratello, ed è crescente: l'altra geometrica in ragione subdupla decrescente, che del Cadetto i fatti guadagni comprende. Egli è adunque del maggiore fratello il primo termine $a = 45$, differenza ignota $= n$; quindi (459.) il quarto guadagno del maggiore $= 45 + 3n$, e supponendosi la somma di tutti gli fatti guadagni $= x$, uguale al primo, e massimo del Cadetto, saranno del medesimo, il secondo $= \frac{x}{2}$, il terzo $= \frac{x}{4}$, il quarto $= \frac{x}{8}$, ed il quinto $= \frac{x}{16}$; laonde per le date condizioni sarà prima equazione $45 - 5$, cioè $40 = \frac{x}{16}$, e riducendo risulta $640 = x$ primo guadagno del Cadetto, e somma di tutti del maggiore.

E perchè evvi la condizione, che il quarto lucro del maggiore sia 5 lire meno del quarto lucro del Cadetto, sarà nuova equazione $45 + 3n = \frac{x}{8} - 5$, cioè $50 + 3n = \frac{x}{8}$, e riducendo sia $400 + 24n = x = 640$, e quindi colle usate regole $n = 10$ differenza degli accresciuti guadagni del maggiore.

Per ritrovare adesso il numero de' termini $= b$, si paragonino insieme (480.) le due canoniche equazioni, e valori di y, e sarà terza equazione $a + bn - n = \frac{2x + bbn - bn}{2b}$, e togliendo le frazioni, risulta $2ab + 2bbn - 2bn = 2x + bbn - bn$, e riducendo, sarà $bbn + 2ab - bn = 2x$, e ponendo i valori di $n = 10$, ed $a = 45$, sarà $10bb + 90b - 10b = 1280$, e dividendo per 10, sarà $bb + \frac{806}{10} = \frac{1280}{10}$, e riducendo, si ottiene $bb + 8b = 128$, equazione quadratica affetta, per la cui risoluzione si aggiunga ad amendue le parti il 16 quadrato del 4 metà di 8, e sarà $b6 + 8b + 16 = 128 + 16 = 144$, e traendo la radice quadrata da amendue le parti, risulta $b + 4 = 12$, e per antitesi $b = \pm 12 - 4 = 8$. Otto adunque furono i diversi fatti guadagni, e sono le due ſerie ÷ 45, 55, 65, 75, 85, 95, 105, 115, e ſomma = 640, del maggiore. ÷ 640, 320, 160, 80, 40, 20, 10, 5. Somma 1275 del Cadetto.

Di queſte due ritrovate ſerie il primo termine 45 della prima, eccede di 5 il quinto termine 40 della ſeconda. Il quarto termine 75 della prima, è minore di 5 del quarto termine 80 della ſeconda ſerie. Finalmente la ſomma di tutti i termini della prima è uguale al 640, primo termine della ſeconda ſerie. Lo che, ec.

DEGLI

DEGLI ELEMENTI DI EUCLIDE.

LIBRO SESTO.

DEFINIZIONE I. (*Fig.* 181.)

491. SImili Figure si nomano quelle, che uno con uno uguali hanno gli angoli tutti, e proporzionali i lati, che sono d'intorno agli angoli uguali ABC, DEF.

ANNOTAZIONE. (*Fig.* 181.)

492. Questo segno ∽ esprime la somiglianza delle figure, le quali, ove triangoli sieno, più in acconcio sarebbe il dire, che proporzionali hanno que' lati, che si oppongono agli angoli uguali, e quegli sempre prendere per omologi. Delle figure ABC, DEF triangoli simili, perchè uguali si suppongono gli angoli $m=m$, ed $n=n$, ed $o=o$, sono proporzionali i lati intorno agli angoli uguali, però come si oppongono agli angoli uguali, e non altrimenti, e perciò gli uguali angoli ne dimostrano quali sieno gli omologi lati, che si veggiono a quelli essere opposti; laonde si avverano tutte le proporzioni seguenti.

$A^mC : A^oB :: D^mF : D^oE$, o sia $A^mC : D^mF :: A^oB : D^oE$.
$A^mC : C^nB :: D^mF : F^nE$, cioè $A^mC : D^mF :: C^nB : F^nE$.
$C^nB : A^oB :: F^nE : D^oE$, o pure $C^nB : F^nE :: A^oB : D^oE$.

Ed ecco essere gli uguali angoli la vera scorta, e sicura a determinare omologi que' lati, che a' medesimi angoli uguali si veggiono opposti.

DEFINIZIONE II.

493. Reciproche sono appellate quelle figure, ove nell' una, e nell' altra vi sono gli antecedenti termini, e i conseguenti delle ragioni. Vuolsi dire, che in una figura vi sono gli estremi, e nell' altra li termini medii della proporzione. (370.)

ANNO-

ANNOTAZIONE. (*Fig.* 182.)

494. Se delle due parallelogramme figure M, ed N si avvera la proporzione AB : BC : : BD : BE, o pure invertendo BC : AB : : BE : BD, od alternando BC : BE : : AB : BD, nelle quali sempre da una figura si sono presi gli estremi, e dall' altra i termini medii delle proporzioni, sono reciproche le stesse figure. Ma diretta sarebbe la ragione delle medesime figure, se avessimo la proporzione BD : AB : : BC : BE.

DEFINIZIONE III.

495. Con estrema, e media ragione segata si noma la retta linea, quando sia tutta ad una parte, come questa parte alla rimanente.

DEFINIZIONE IV.

496. Altezza della figura egli è il perpendicolo dal vertice condotto alla base. (56.)

DEFINIZIONE V.

497. La ragione si dice composta di ragioni, quando de' termini delle ragioni insiememente multiplicati, altra ragione si forma. (369. 374.)

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA I. (*Fig.* 183.)

498. I triangoli ABC, EBC, ed eziandio i parallelogrammi RB, DB, aventi la medesima altezza BC, sono tra loro come le proprie basi AB : BE.

DIMOSTRAZIONE.

Del triangolo ABC sieno base $AB = a$, altezza $BC = b$, sarà (180.) il triangolo, $\triangle ABC = \frac{ab}{2}$. Del triangolo EBC sieno base $EB = c$, e la comune altezza $BC = b$, sarà per la stessa ragione il il triangolo $\triangle$ EBC $= \frac{bc}{2}$; e perchè si è dimostrato $\triangle$ ABC $= \frac{ab}{2}$, si ottiene (360.) $\triangle$ ABC : $\triangle$ EBC :: $\frac{ab}{2} : \frac{bc}{2}$ :: $a : c$ :: AB : EB loro basi.

Inoltre avendo multiplicata per 2 la prima proporzione, ne siegue, che i parallelogrammi doppii (1. 41. 185.) de' triangoli saranno come le basi, vuolsi dire $\square$RB$\square$DB :: $a : c$ :: AB : EB basi.

Si prendano le altezze diverse AB $= a$, & EB $= c$, e sia comune la base BC $= b$. De' triangoli CBA, CBE, o sia de' parallelogrammi BR, BD, saranno sempre col medesimo raziocinio dimostrati essere tra di loro come le altezze $a : c$, dividendo la proporzione di sopra esposta per la comune base BC $= b$.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA II. (*Fig.* 184.)

499. Primo. Se nel triangolo ABC si tira DE parallela alla base BC, i lati AB, AC rimangono segati in parti proporzionali AD : DB :: AE : EC, e componendo AB : DB :: AC : EC.

Secondo. E se saranno recisi i lati in proporzionali segamenti, sarà la segante DE parallela alla base BC.

Terzo. Le parallele DE, BC sono proporzionali a' lati AD, AB, ed agli altri AE, AC de' due formati triangoli ADE, ABC.

DIMOSTRAZIONE.

Si conducano le rette linee BE, CD, e perchè li due triangoli ADE, BDE hanno comune il vertice, e perciò comune l'altezza cadente dal vertice, e sul lato AB, che le due basi AD, DB contiene; però (6. 1. 498.) $\triangle$ ADE : $\triangle$ BDE :: AD : DB, e così ragionando gli è $\triangle$ ADE : $\triangle$ CED :: AE : EC; ma (1. 37. 177.) $\triangle$ BDE $=$ $\triangle$ CED su la comune base DE, e tra le parallele DE, BC; quindi (5. 7. 407.) $\triangle$ ADE : BDE :: $\triangle$ ADE : $\triangle$ CED. Laonde (6. 1. 498.) AD : DB :: AE : EC, o sia componendo (5. 4. 404.) AB : DB :: AC : EC, oppure AB : AD :: AC : AE proporzionali parti de' due lati AB, AC, ec.

Secondo. Se gli è AD : DB : : AE : EC, si conducano DE, BE, CD; ma (*Prop. preced.*) AD : DB : : △ ADE : △ BDE; siccome AE : EC : : △ ADE : △ CDE; dunque (5. 11. 411.) △ ADE : : △ BDE : : △ ADE : △ CDE; quindi (5. 9. 409.) △ BDE = △ △ CDE. Sono intanto quei due uguali triangoli su la medesima base DE; dunque (1. 39. 183.) tra le medesime parallele DE, BC. (*Fig.* 185.)

Terzo. Dal punto D sia condotta DF parallela al lato AC, ed essendo DE, BC parallele altresì, esser deono DE = FC (1. 34. 172.) quindi per la prima già dimostrata parte gli è AD : BD : : FC : BF, e componendo (5. 4. 404.) AB : BD : : BC : BF, e permutando (5. 6. 406.) AB : BC : : BD : BF, ma è parimente BD : BF : : AD : DE = FC. Dunque (5. 11. 411.). AB : BC : : AD : DE, cioè AB : AD : : BC : DE. Ma egli è AB : AD : : AC : AE, però (5. 11. 411.) AC : AE : : BC : DE; ma co' lati proporzionali li due triangoli ADE, ABC per le parallele DE, BC hanno uguali gli angoli *m* = *m*, ed *n* = *n* esterno, ed interno, e 'l terzo angolo è comune; dunque sono simili figure i triangoli ADE, ABC mentovati, che era ec.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA III. (*Fig.* 186.)

500. Se del triangolo ABD lo angolo BAD segato viene per mezzo dalla retta AC, questa recide nel punto C la base BD in parti proporzionali ai lati del triangolo istesso BC : CD : : BA : AD.

Secondo. E se la base BD dalla retta AC cadente dallo opposto angolo A, segata rimane in parti proporzionali a' rimanenti lati, deve essere lo angolo A in parti uguali diviso.

DIMOSTRAZIONE.

Dal punto D si tiri DE parallela alla AC, che in E concorra col lato prolungato BAE segante le parallele AC, ED. (1. 31. 158.). E perchè tra due parallele AC, ED cade la retta AD, sono gli angoli alterni (1. 29. 153.) CAD = ADE; ma per ipotesi CAD = CAB = AED esterno, ed interno, saranno ADE = = AED,

=AED, ed il triangolo ADE è isoscele (1. 6. 118.), ed i lati AE=AD. Intanto essendo AC parallela alla base DE del triangolo BDE, sarà (6. 2. 502.) BC : CD :: BA : AD=AE.

Secondo. Da altra parte suppongasi BC : CD :: BA : AD, ove si tiri DE parallela ad AC, e si prolunghi BA in E, risulta parimente (499.) BC : CD :: BA : AE; ma si suppone BC : CD :: BA : AD; perciò BA : AE :: BA : AD; onde AE=AD (*Lib.* 5. 9. 409.), ed il triangolo ADE è isoscele, su la cui base DE sono gli angoli E=ADE, (1. 5. 116.) ma ADE=DAC suo alterno, come CAB=E esterno, ed interno (1. 29. 153.). Per questo ne siegue essere gli angoli E=ADE=DAC=CAB (*Ass.* 1. 91.), e lo angolo BAD a mezzo diviso dalla retta AC. Che era ec.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA IV. (*Fig.* 187.)

501. Se due triangoli ABC, AFG scambievolmente sono equiangoli, hanno proporzionali i lati, che gli uguali angoli formano, e quei lati sono omologi, che agli angoli uguali si trovano opposti.

DIMOSTRAZIONE.

Se avendo gli angoli uguali A=A, B=F, C=G, hanno altresì li respettivi lati parimente uguali, si vede essere quelli nelle ragioni medesime di uguaglianza (363), ed in tutto uguali i due triangoli ABC, AFG, e simili in tutto.

Sieno pertanto disuguali, e dal maggior lato AB si recida la porzione AD=AF, lato omologo di AB, a' quali si oppongono uguali angoli C, G. Per D si tiri DE parallela alla base BC, che seghi in E lo altro lato AC del triangolo ABC, (1. 31. 158.) sarà l'angolo ADE=B=F (1. 29. 153.). Laonde i due triangoli ADE, AFG, ne' lati AF, AD, formati uguali, hanno due angoli uguali A=A, ADE=F : E, se fia d'uopo, anche il terzo angolo AED=C (1. 29. 153.)=G terzo angolo. Però in tutto altro sono uguali tra loro (1. 26. 150.), ed i lati DE=FG, AE=AG. Intanto per lo triangolo AFG prendasi (*Ass.* 13. 110.) il suo il suo in tutto uguale ADE, la cui base DE è parallela alla base BC del triangolo ABC, tra quali triangoli (492. 499.) le seguenti proporzioni si avverano.

$$A^nF = A^nD : A^mG = A^mE :: A^nB : A^mC$$
$$F^oG = D^oE : F^nA = D^nA :: B^oC : B^nA$$
$$G^oF = E^oD : G^mA = E^mA :: C^oB : C^mA.$$

Dalle quali ocularmente si scorge, che i lati d' intorno agli angoli uguali sono nelle stesse ragioni, ed omologi sono que'lati, che si oppongono agli angoli uguali.

Corollario I. (*Fig.* 187.)

502. Dunque due triangoli simili ABC, AFG adattare si possono sempre l'uno sopra l'altro, di maniera che accozzando tra loro due angoli uguali A con A, e l'omologo lato AF su l'omologo AB, si adatteranno gli altri due omologi lati AG, AC, e la base FG sarà parallela alla base BC.

Corollario II. (*Fig.* 188.)

503. Nel triangolo ABC caggiono le rette DE alla base BC parallele, e dall'opposto angolo A, sono dimesse le rette AK, queste segano, e segate rimangono per le parallele nelle stesse ragioni de' lati AB, AC, BC, e loro segmenti; conciosiachè essendo le prime ragioni AD : DB :: AE : EC, anche ne' simili triangoli AKB, AHD, siccome AKC, AHE, egli è AH : HK :: AD : DB :: AE : EC; così AH : HD :: AK : KB; AH : HE :: AK : KC ec.

E nella stessa maniera dimostrasi, essendo molte le cadenti AK, e molte le seganti DE.

Corollario III. (*Fig.* 189.)

504. Se per un punto C, tra due parallele AD, EB costituito, tirate vengono due rette linee, vuolsi dire, se due rette linee AB, DE terminate da due parallele si segano in C, proporzionali sono i loro segmenti a quelli ancora, che recisi rimangono dalle medesime parallele; conciosiachè sono equiangoli i due triangoli ACD, BCE, avendo uguali gli alterni angoli $o = o$, & $n = n$, ed anche uguali gli angoli alla cima c; per lo

che

che $C^{a}A : C^{n}B :: C^{o}D : C^{o}E$. Similmente $C^{a}A : A^{c}D :: C^{n}B : B^{c}E$; quindi ancora $C^{o}D : A^{c}D :: C^{o}E : B^{c}E$.

Corollario IV. (*Fig.* 190.)

505. Di moltissimo uso egli è il corollario, che i perpendicoli CD, GF de' triangoli simili, cadenti dagli uguali angoli C, G, sono come le basi, sopra cui caggiono, e come gli altri omologi lati de' triangoli istessi ABC, ERG; conciosiachè per gli acuti angoli A=E, e pe' retti in D, F, son simili i due triangoli ACD, EFG, e per gli acuti B, R, sono simili gli altri due CDB, GFR; quindi CD : GF : : CA : GE, & CD : GF : : CB : GR; ma AB : ER : : CB : GR; perciò CD : GF : : AB : ER : : CA : GE : : CB : : GR.

Corollario V. (*Fig.* 191.)

506. Se nel triangolo ABC inscritto nel cerchio da qualunque angolo B, all' opposto lato AC si dimette la perpendicolare BD, ed il diametro BF; sarà il perpendicolo BD ad un lato BC, come l' altro BA al diametro BF; conciosiachè tirata la corda AF, formato rimane il triangolo BAF simile al triangolo BDC, a cagione de' due angoli retti in D, & A (3. 31. 281.), e degli acuti C=F, su la medesima corda BA (3. 21. 271.), però equiangoli (167. ec.), e simili; quindi $B^{o}D : B^{r}C :: A^{o}B : B^{r}F$, o alternando (5. 16. 416.) BD : BA : : BC : BF.

Corollario VI. (*Fig.* 192. 193.)

507. Se la infinita retta EF sega in C ad angoli retti lo diametro AB (prolungata ove abbisogni) di un cerchio, e nella EF si prende qualsisia punto E fuori del cerchio, e si conduce AE, che lo seghi in D, sarà la corda AD al diametro AB : : : : AC : AE; perocchè condotta la corda BD, compiuto ne viene il triangolo ADB, equiangolo all' altro ACE, avendo oltre i retti in C, & D (3. 31. 281.) comune lo angolo A (165.) il perchè sono simili, e si avvera $A^{o}D : A^{r}B :: A^{o}C : A^{r}E$.

Corollario VII. (*Fig.* 194.)

508. E se la retta EF segasse il diametro AB in B, punto suo

estremo, allora EF sarebbe tangente, e li due B, C, sarebbono un punto solo; quindi AB=AC, e però il diametro AB. Sarebbe proporzionale di mezzo alle AD, AE, perchè essendo AD : AB : : AC=AB : AE, cioè ∺ AD : AB : AE.

Corollario VIII. (*Fig.* 195.)

509. Se in due cerchi interiormente toccantisi, dal punto A del contatto, si conducono il diametro ACB (che sarà comune) (3. 11. 261.), e le corde AED ec. sono proporzionali i diametri, le corde, e le lor differenze, dacchè tirate la corda CE nel minore, e l' altra BD nel maggiore cerchio, i due triangoli AEC, ADB, avendo oltre gli angoli retti in E, & D (3. 31. 281.), anche comune lo acuto in A, sono (165.) equiangoli, e simili, anzi per li due angoli in E, & D retti esterno, ed interno (1. 29. 153.), sono parallele le basi EC, BD, e perciò (6. 2. 499.) AC : AB : : AE : AD, diametri, e corde; AC : : CB : : AE : ED, lor differenze; AC : CE : : AB : BD, diametri colle altre corde; ma egli è per la prima parte anche AC : : AB : : AF : AG; dunque (5. 11. 411.) AE : AD : : AF : AG, corde tra loro; ma AC : CB : : AF : FG; quindi AE : ED : : AF : FG differenze.

Corollario IX. (*Fig.* 188.)

510. Quindi nasce la facile dimostrata maniera di segare in quante parti piace, ed uguali la data retta DE, prendendone altrettante KK a capriccio nella sua parallela BC, pe' cui estremi trovati punti B, C, e pe' punti D, E, tirando due rette, che si congiungano in A, d' onde si conducano le linee AK, AK ec. a' punti K presi nella retta BC, che rimane DE in H, H segata in parti uguali, e tante per numero, quante prese ne furono sopra BC.

Corollario X. (*Fig.* 196.)

511. Si misurano facilmente le altezze DE, prendendo nel piano un punto A, e più avanti alzando un perpendicolo BC, tale, che il visuale raggio AC, diritto si vada al punto E, oppure sia l' ombra ECA; che sarà AB : BC : : AD : DE; laonde

(5.

(5. 1. 401. , *& Alg.* 88.) $DE = \frac{BC \times AD}{AB}$. Sieno AB=2, BC=3, AD=40 piedi misurati, sarà $DE = \frac{120}{2} = 60$ simili piedi.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA V. (*Fig.* 187.)

512. Se due triangoli ABC, AFG hanno i lati proporzionali, hanno eziandio uguali gli angoli opposti ai lati omologi.

DIMOSTRAZIONE.

Se i due triangoli sono scambievolmente equilateri, sono altresì (105.) scambievolmente equiangoli, ed uguali hanno quegli angoli, che sono opposti a' lati uguali, però omologi.

Se sono disuguali i loro omologi lati AB>AF, deono essere (5. 14. 414.) perciò AC>AG, BC>FG.

Si recida pertanto dal maggiore AB la porzione AD=AF, così da AC si tronchi AE=AG, omologi dagli omologi, e si conduca DE, e per ipotesi, e costruzione, sarà AB : AC :: AF= =AD : AG=AE, vuolsi dire alternando AB : AD :: AC : AE, e dividendo (5. 5. 405.), risulta BD : AD :: CE : AE; dunque DE, BC sono parallele (6. 2. 499.); ma AF : FG :: AB : BC per ipotesi; ed inoltre (6. 2. 499.) AB : BC :: AD : DE, sarà (5. 11. 411.) AF : FG :: AD : DE; intanto per costruzione egli è AF=AD, dunque (5. 14. 414.) esser dee FG=DE. Sono adunque scambievolmente equilateri i due triangoli AFG, ADE (105.), ed uguali hanno gli angoli ADE=F, opposti a'lati uguali AE, AG; così AED=G opposti a' lati uguali AD, AF, e finalmente A=A, all' incontro de' lati DE=FG, ma gli angoli B=ADE esterno, ed interno (1. 29. 153.); dunque essendo ADE=F, sarà (*Ass.* 1. 91.) B=F, angoli opposti a' lati omologi AC, AG, e così parimente dimostrasi C=AED=G, angoli opposti a lati omologi AB, AF. Finalmente gli angoli A=A opposti agli omologi lati BC, FG, che era ec.

PRO-

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA VI. (*Fig.*187.)

513. Se due triangoli ABC, AFG hanno un angolo A=A, e proporzionali i lati agli angoli stessi d'intorno, i triangoli sono simili.

DIMOSTRAZIONE.

Usando il raziocinio medesimo della preterita dimostrazione, ove suppongasi AB>AF, sarà AC>AG, essendo dato AB : AF : : AC : AG; recisi adunque da' maggiori lati AB, AC a' loro omologi minori AD=AF, AE=AG, sarà per costruzione, ed ipotesi AB : AF=AD : : AC : AG=AE, cioè AB : AD : : AC : : AE, e dividendo (5. 5. 405.) si ottiene BD : AD : : CE : AE; dunque (6. 2. 499.) condotta la retta DE, sarà parallela alla base BC; e dacchè i due triangoli AFG, ADE hanno due lati uguali a due lati, ed i contenuti angoli A=A, sarà (1. 4. 115.) la base FG=DE base, e lo angolo G=AED=C, e lo angolo A comune a tutti e tre i triangoli; il perchè il triangolo ABC è equiangolo col triangolo AFG (*Ass.* 1. 91.); sono adunque simili tra di loro (6. 4. 501.) i due dati triangoli ABC, AFG, ed hanno i lati proporzionali, che era ec.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA VII. (*Fig.*181.)

514. Se due triangoli ABC, DFE, hanno lo angolo B=E, e proporzionali i lati AB : AC : : DE : DF intorno agli altri due angoli A, D; e gli altri due angoli C, F siano della medesima specie, cioè o tutti e due ottusi, o ambidue acuti, saranno equiangoli essi triangoli, e conseguentemente simili tra di loro.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo gli angoli C, F, tutti e due acuti, o tutti e due ottusi, per l'ipotesi, sarà pure l'angolo A=D; perciocchè se fosse uno di essi BAC maggiore dell'altro D; allora costituito (1.

23.

23. 139.) l'angolo BAL=D, essendo d'ipotesi, B=E, sarebbe ancora BLA=F (167.): onde essendo equiangoli i triangoli BAL, EDF, sarebbe (6. 4. 501.) AB : AL :: DE : DF, ma d'ipotesi abbiamo AB : AC :: DE : DF; epperò (5. 11. 411.) sarà AB : AL :: AB : AC; laonde (5. 9. 409.) AL=AC, e lo angolo ALC=C (1. 5. 116.), perciò (1. 17. 133.) amendue acuti; onde l'angolo conseguente BLA sarà ottuso; ed essendosi dimostrato BLA=F, sarebbe ancora ottuso l'angolo F, quando l'angolo C si è dimostrato acuto; per la qual cosa non sarebbero tutti e due acuti, o tutti e due ottusi, lo che è contro l'ipotesi; non è adunque lo angolo BAC disuguale all'angolo D; epperò sarà BAC=D, ed i lati intorno a questi angoli sono proporzionali d'ipotesi AB : AC :: DE : DF; dunque per l'antecedente proposizione sono simili i due triangoli ABC, DEF, lo che ec.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA VIII. (*Fig.* 197.)

515. Se nell'ortogono triangolo ABC dal retto angolo B caggia su la base AC la perpendicolare BD, rimane il triangolo reciso in due triangoli BDA, BDC simili al tutto, e fra di loro simili ancora.

DIMOSTRAZIONE.

Li due triangoli BDA, ABC, oltre gli angoli retti in B, & D, hanno comune lo acuto angolo A; dunque (165.) sono equiangoli, però (6. 4. 501.) sono simili; parimente li due triangoli BDC, ABC, oltre gli angoli retti in D, & B, hanno comune lo angolo C; quindi (165.) sono equiangoli, e simili (6. 4. 501.). Finalmente i due triangoli BDA, BDC si sono dimostrati equiangoli col triangolo ABC; però (*Ass.* 1. 91.) sono equiangoli tra di loro, e simili (6. 4. 501.), che era ec.

COROLLARIO I. (*Fig.* 197.)

516. Daechè i due triangoli BDA, ABC equiangoli, hanno i retti angoli D=B=*r*, e comune lo angolo A=*m*, e residui angoli C=ABD, cioè *o*=*o*, e così da altra parte ne' due triangoli

goli equiangoli BDC, ABC, eſſer dee lo angolo $CBD = m = A$, e con ciò lo angolo retto B rimane diviſo in due angoli o, m, ciaſcuno uguale allo angolo o, m, o ſia C, A de' triangoli collaterali; quindi è, che ſi avverano (492.) le ſeguenti proporzioni a cagione della ſomiglianza loro.

Ne' due triangoli BDA, ABC.

$A^rC : B^mC :: A^rB : B^mD$; quindi $AC \times BD = BC \times AB$ (5. 1. 401.). $A^oB : B^mC :: A^oD : B^mD$ (6. 4. 501.) $A^rC : A^oB :: A^rB : A^oD$, vuolſi dire (378.) $\div\div$ $AC : AB : AD$; però il cateto AB è proporzionale di mezzo tra la ipotenuſa AC, ed il ſottopoſto ſegmento AD, nella ipotenuſa, dal perpendicolo BD formato. Ed egli è queſto un corollario di moltiſſimo uſo.

Ne' due triangoli ABC, BDC.

$A^rC : A^oB :: B^rC : B^oD$; $A^oB : B^mC :: B^oD : D^mC$ (6. 4. 501.) $A^rC : B^mC :: B^rC : C^mD$, che vale (378.) $\div\div$ $AC : BC : CD$; quindi anche l' altro cateto BC è proporzionale di mezzo tra la ipotenuſa AC, ed il ſegmento CD a ſe ſottopoſto.

Ne' triangoli BDA, BDC.

$A^rB : A^oD :: B^rC : B^oD$; $A^rB : B^mD :: B^rC : C^mD$ (6. 4. 501.); $A^oD : B^mD :: B^oD : C^mD$, cioè (378.) $\div\div$ $AD : BD : CD$; laonde il perpendicolo BD è proporzionale di mezzo tra li due ſegmenti AD, CD nella ipotenuſa formati. Egli è queſto un eccellentiſſimo corollario, da cui naſcono le proprietà, e la equazione al cerchio; e tutte e tre le ſopra ritrovate continue proporzioni oſſervare ſi vogliono con eſattezza.

COROLLARIO II. (*Fig.* 198.)

517. Se da qualunque punto D ſul diametro AC di un cerchio, o ſia mezzo cerchio ABC alzata ne viene la perpendicolare BD, onde rimanga reciſa in B la circonferenza, ſarà BD proporzionale di mezzo tra ſegmenti AD, CD (516.) formati nel diametro iſteſſo; perocchè conducendo le due corde BA, BC, egli è retto (3. 31. 281.) il formato angolo B; perciò $\div\div$ $AD : BD : CD$, nel triangolo rettangolo ABC.

Co-

Corollario III. (*Fig.* 198.)

518. Ed il quadrato della corda BC è uguale al rettangolo ACD da tutto il diametro AC, e dal sottoposto segmento CD contenuto; conciosiachè (516.) essendo $\div$ AC : BC : CD, sarà (5. 1. 401.) $\overline{BC}^2 = AC \times CD$, così $\overline{AB}^2 = CA \times AD$.

Corollario IV. (*Fig.* 198.)

519. E di varie corde CB, CE, sono i quadrati, come i propri sottoposti segmenti CD, CF, conciosiacosachè essendo (518.) $\overline{CB}^2 = AC \times CD$; siccome $\overline{CE}^2 = AC \times CF$, sarà (360.) $\overline{CB}^2 : \overline{CE}^2 :: AC \times CD : AC \times CF$, e dividendo per AC (383.) $\overline{CB}^2 : \overline{CE}^2 :: CD : CF$.

PROPOSIZIONE IX.

Problema I. (*Fig.* 199.)

520. Dalla data retta linea AB segarne la dinominata parte AD.

Risoluzione.

Dal punto A, si conduca la infinita retta AF, e supposto, che si voglia $AD = \frac{1}{3} AB$, si prendano sopra AF a piacere tre uguali parti AG, GC, CF, si conduca la retta BF, a cui parallela la retta GD dal punto G, termine della prima porzione (1. 31. 158.) sarà AD la desiderata terza parte di AB.

Dimostrazione.

Perchè nel triangolo ABF la retta GD alla base BF è parallela, sarà (6. 2. 499.) AG : AF :: AD : AB, mà si è fatta $AG = \frac{1}{3} AF$, dunque $AD = \frac{1}{3} AB$ (5. 14. 414.), che era ec.

PRO-

PROPOSIZIONE X.

Problema II. (*Fig.* 200.)

521. Recidere la non ſegata AB in ſimil maniera di AC.

Risoluzione.

Nel punto A della data AB ſi traſporti la retta AC, come ella è ſegata in F, H; e condotta la retta CB ſi tirino HG, FD parallele alla medeſima, e rimane AB ſegata come AC.

Dimostrazione.

Nel triangolo AGH, alla cui baſe HG è parallela la retta DF (1. 30. 157.), egli è (6. 2. 499.) AF : AD :: FH : DG, e nel triangolo ABC, AH : AG :: HC : GB; ma (5. 18. 418.) AH : : AG :: AF : AD :: FH : DG; perciò (5. 11. 411.) AF : AD :: FH : : DG :: HC : GB; laonde AB ſegata rimane nelle ragioni medeſime della retta linea AC da prima ſegata, che era ec.

Corollario. (*Fig.* 201.)

522. Quindi agevolmente la non ſegata AB recider ſi puote nella ragione data di AF : FC, tirando dal punto A della retta AB con qualunque angolo la infinita AC, da cui reciſe le parti AF=AF, & FC=FC, dal ritrovato punto C al dato punto B ſi conduca la retta CB, e da F la parallela FD, che nel triangolo ABC ſarà (6. 2. 499.) AD : DB :: AF : FC.

PROPOSIZIONE XI.

Problema III. (*Fig.* 202.)

523. Alle date due rette AD, AF, ritrovare una terza proporzionale.

Risoluzione I.

Si formi qualunque ſia angolo rettilineo A, ed in uno de' lati AC ſi recida AD=AD data, e primo termine della proporzione. Nell' altro lato AB ſi ſeghi AF=AF dato ſecondo termine;

Quin-

quindi consecutivamente oltre AD si prenda DC=AF secondo dato termine istesso; si conduca FD, a cui parallela, per lo punto B (1. 31. 158.) si tiri BC; sarà FB terza desiderata proporzionale dopo AD, AF.

Dimostrazione.

Essendosi nel triangolo ABC la base BC tirata parallela alla segante DF, sarà (6. 2. 499.) AD : CD : : AF : FB; ma CD=AF; però sostituendo sia AD : AF : : AF : FB, che è quanto a dire (378.) $\div$ AD : AF : FB, che era ec.

Risoluzione II. (*Fig.*203.)

Ove più torna in acconcio, e adoperare volendo la sola squadra, risolvesi facilmente il problema, tirando due rette linee, che si seghino ad angoli retti in A, le due date rette sieno AF, AC, alle quali si tronchino su due lati dell' angolo retto CAF le uguali porzioni AF, AC, e si conduca CF, a cui la perpendicolare FB, se AC è primo termine della proporzione, che AB sarà il terzo; ovvero ad FC la perpendicolare CM, se il primo termine è AF, e sarà AM il terzo; dacchè nel triangolo rettangolo CFB, egli è (516.) $\div$ AC : AF : AB, e nel triangolo rettangolo FCM $\div$ AF : AC : AM.

Risoluzione III. (*Fig.*204.)

Se il primo termine AC è maggiore del secondo AF riesce molto in acconcio formare sopra AC il mezzo cerchio AFC, e nel punto A (4. 1. 305.) applicare la corda AF uguale al secondo termine AF; da F sul diametro AC si dimetta il perpendicolo FD, sarà il sottoposto segmento AB la terza desiata proporzionale; conciosiachè essendo $AC \times AB = \overline{AF}^2$ (518.), sarà (5.1.401.) $\div$ AC : AF : AB.

Corollario.

524. Con una di queste tre risoluzioni costruire si puote geometricamente la formola, o sia equazione algebraica $x = \frac{bb}{a}$, e ritrovare il valore di x terza proporzionale dopo a, & b; sieno

no, data $AC=a$, data $AF=b$, sarà la ricercata $AB=x$; conciosiachè essendo $\div a:b:x$, cioè $\div AC:AF:AB$, sarà (5. 1. 401.) $ax=bb$, e dividendo per a, si ottiene $x=\frac{bb}{a}=AB$, terza ritrovata proporzionale.

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA IV. (*Fig.*205.)

525. Date tre linee A, B, C, ritrovare la quarta x proporzionale.

RISOLUZIONE.

Supponendosi $A:B::C:x$, si faccia qualunque angolo rettilineo DAE, dal cui vertice A si tronchi la porzione $AB=A$; quindi sul medesimo lato consecutivamente $BD=B$. Dal vertice A sull' altro lato AE si prenda $AC=C$, e si conduca la retta BC, che congiunga gli opposti punti B, C; dal punto D si tiri DE parallela alla retta BC, che sarà $CE=x$ quarta proporzionale.

DIMOSTRAZIONE.

Nel triangolo ADE alla base DE è parallela BC; però (499.) $AB:BD::AC:CE$, cioè $A:B::C:x$, che era ec.

COROLLARIO I.

526. Quindi geometricamente si costruisce la formola, ed equazione algebraica $x=\frac{bc}{a}$; dacchè facendo $AB=a$, $BD=b$, $AC=c$, e la ritrovata $CE=x$, sarà $AB:BD::AC:CE$, e sostituendo i valori, egli è $a:b::c:x$, e multiplicando medii, ed estremi, fia $ax=bc$, e dividendo per a, ne risulta $x=\frac{bc}{a}$.

COROLLARIO II.

527. Da ciò nasce la regola di ritrovare la quarta proporzionale, ed incognita x, avendo tre date quantità a, b, c; fare

fare, che sia $a:b::c:x$; locchè ad eseguire si vuole multiplicare il termine b secondo, con c terzo, e dividere il prodotto bc per lo primo termine a, e sarà il ritrovato quoziente $\frac{bc}{a}=x$ quarta desiderata quantità; conciosiachè ove egli è $a:b::c:x$, sarà come sopra $ax=bc$, & $x=\frac{bc}{a}$.

Questa regola a' numeri applicata, si nomina aurea, o del tre. Che se fossero due li numeri dati, per ritrovare il terzo si usi il precedente problema, cioè si multiplichi il secondo b per se stesso; il prodotto quadrato bb si divida pel primo a, e si ottiene nel quoziente il terzo termine $x=\frac{bb}{a}$.

PROPOSIZIONE XIII.

PROBLEMA V. *(Fig. 206.)*

528. Alle due date rette linee BC, AB, ritrovare BD proporzionale di mezzo.

RISOLUZIONE I.

Si conduca la infinita AM, dalla quale recidasi AB=AB data; quindi consecutivamente BC=BC data, e tutta la composta AC sia un diametro, su cui si descriva la circonferenza ADC, di un mezzo cerchio, che in D sia segato dal perpendicolo BD, che sarà proporzionale di mezzo tra AB, BC.

DIMOSTRAZIONE.

Dal punto B del diametro AC si è alzata la perpendicolare BD; però (517.) $\div$ AB : BD : BC, che era ec.

RISOLUZIONE II. *(Fig. 207.)*

Forse più acconciamente si risolve il problema, e si trova la media proporzionale BD, usando il corollario al num. 518.; però sopra la maggiore AC delle due date AC, AD, si descriva un mezzo cerchio AFC. Si recida dal diametro AC la porzione AD=AD data, da D si alzi il perpendicolo FD, si tiri la corda

AF

AF, sarà proporzionale di mezzo; conciosiachè essendo (518.) $AC \times AD = \overline{AF}^2$, sarà (5. 1. 401.) $\div$ AC : AF : AD.

COROLLARIO. (*Fig.* 208.)

529. Con questo metodo si trova facilmente del quadrato aa la parte m quadrata $=\frac{aa}{m}$. Sia $AC=a$, $AD=\frac{a}{m}$, sarà $\overline{AB}^2 = \frac{aa}{m} = a \times \frac{a}{m}$, e sarà $AB = x = \sqrt{\frac{aa}{m}}$; v. g. $=\sqrt{\frac{aa}{3}}$, ove $m=3$, e questa geometrica costruzione sovente intraviene.

Se costruir si vuole la equazione $x=\sqrt{\frac{2cc}{3}}$, senza quadrare il divisore 3, si prenda $AC=2c$, sopra AC si recida $AD=\frac{c}{3}$, si tiri la perpendicolare DB, poscia la corda AB, che sarà $=x$ desiderata; dacchè $\overline{AB}^2 = AC \times AD$, e sostituendo i valori, sarà $xx = 2c \times \frac{c}{3}$, cioè $xx = \frac{2cc}{3}$, e traendo la quadrata radice, si ottiene $x = \sqrt{\frac{2cc}{3}}$.

Più facile di tutte è la costruzione dell' equazione $x=\sqrt{ac}$; dacchè prendendo $AC=a$ maggiore, $AD=c$ minore, oppure $AC=c$ maggiore, & $AD=a$ minore, alzando il perpendicolo DB, sarà la corda $AB=x=\sqrt{ac}$, e sarà $\div a : x : c$, perchè multiplicando si ottiene $xx=ac$, & $x=\sqrt{ac}$.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA IX. (*Fig.* 209.)

530. Degli uguali parallelogrammi AH, EM, aventi un angolo BED uguale all' angolo ACH, sono in reciproca analogía i lati, che gli uguali angoli formano, cioè HC : DE :: EB : AC.

Secondo. E se reciprochi sono i lati d' intorno agli angoli uguali, saranno uguali i parallelogrammi AH=EM.

DIMOSTRAZIONE.

Dagli angoli H=D si dimettano li perpendicoli $HF=m$, $DG=n$ su su le basi AC$=c$, BE$=b$. Sono □AH$=mc$, & □EM$=nb$ (176.); ma per ipotesi abbiamo □AH$=$□EM; però $mc=nb$, e dividendo per c, risulta $m=\frac{nb}{c}$. Inoltre i due triangoli rettangoli HFC, EGD, sono simili, per gli uguali angoli acuti in E, & C (165. 501.); perciò facendo HC$=a$, DE$=d$, si ottiene (6. 4. 501.) $a:m::d:n$, e multiplicando (401.) $dm=an$, e dividendo per d, gli è $m=\frac{an}{d}$, e paragonando i due valori di m, risulta $\frac{nb}{c}=\frac{an}{d}$, e riducendo sia $bd=ac$, e risolvendo, sarà $a::d::b:c$; vuolsi dire HC : DE : : EB : AC reciprocamente.

Secondo. Suppongasi, che de' lati HC, AC del □AH, la ragione $a:c$ sia reciproca della ragione $b:d$ de' lati EB, DE del □EM, sarà (493.) $a:b::d:c$; quindi (401.) $ac=bd$, cioè HC×AC$=$EB×DE, che vale □AH$=$□AM, che era ec.

Corollario.

531. Dunque di quattro multiplicatori a, b, c, d, formanti uguali prodotti $ac=bd$; oppure di due prodotti ac, bd uguali tra loro sono i termini delle due ragioni reciproci tra loro istessi (493.); vuolsi dire, che la ragione di $b:d$ è reciproca della ragione di $a:c$, dalla quale formatane la proporzione $b:d::a:c$ reciproca, o inversa; diretta si rende (494.) trasportando il terzo termine a nel primo luogo, e formando $a:b::d:c$, in cui (5. 1. 401.) il prodotto de' medii è uguale al prodotto de' termini estremi. Non così nelle ragioni reciprocamente ordinate, vuolsi dire nelle proporzioni inverse $b:d::a:c$, nelle quali i prodotti de' termini delle ragioni sono uguali tra loro, dalla ragione $b:d$ si forma $bd=ac$ prodotto d' altra ragione $a:c$; quindi ove nella stessa diretta proporzione $a:b::d:c$ per trovare il quarto termine c si multiplicano secondo, e terzo, e si divide il prodotto pel primo, onde nasce $c=\frac{bd}{a}$; con opposita legge nelle ragioni reciproche, o sia inversa proporzione $b:d::a:c$, si ottiene il quarto termine c, multiplicando insieme primo b col secondo d, e pel terzo termine a, dividendo il prodotto

bd, che in tutti e due i casi ugualmente risulta $c=\frac{bd}{a}$. E questo è il fonte della pratica regola degli aritmetici, che nelle proporzioni, o regole del tre inverse per ottenere il quarto proporzionale multiplicano il primo termine col secondo, e dividono il prodotto pel terzo, e nel quoziente ottengono il quarto non conosciuto.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA X. (*Fig.* 210.)

532. Degli uguali triangoli ABC, ADE aventi un angolo BAC=DAE, sono reciproci i lati comprendenti gli angoli uguali AB$=a$: AD$=d$: : AE$=b$: AC$=c$.

Secondo. E supposti gli angoli uguali, e la reciproca analogía de' lati, esser deono uguali i triangoli.

DIMOSTRAZIONE.

Si rivochino le denominazioni superiori, e sarà $\triangle ABC=\frac{mc}{2}$, $\triangle ADB=\frac{nb}{2}$, ma gli triangoli si suppongono uguali, però $\frac{mc}{2}=\frac{nb}{2}$, e multiplicando per 2, si ottiene $mc=nb$, & $m=\frac{nb}{c}$ e perchè ne' due triangoli rettangoli AGD, AFB, e simili per li due uguali angoli acuti A, A, egli è (505.) $a:m::d:n$, ma $md=na$, e dividendo per d, sia $m=\frac{na}{d}$. Si paragonino li due valori di m, si ottiene $\frac{nb}{c}=\frac{na}{d}$, e riducendo $bd=ac$, e risolvendo $a:d::b:c$, cioè AB : AD : : AE : AC, che era ec.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA XI. (*Fig.* 211.)

533. Se quattro linee sono proporzionali, il rettangolo contenuto dalle due estreme è uguale al rettangolo delle due di mezzo.

Se-

Secondo. E di uguali rettangoli $ac = bd$ proporzionali sono i lati $a : b :: d : c$.

DIMOSTRAZIONE.

Gli è per ipotesi $a : b :: d : c$; dunque (401.) $ac = bd$.

Secondo. Essendo $ac = bd$, sarà (401.) $a : b :: d : c$, che era ec.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA XII. (*Fig.* 212.)

534. Se tre linee sono proporzionali $\div a : b : c$, sia il rettangolo $ac = bb$ quadrato della media.

Secondo. E se $ac = bb$, sarà $\div a : b : c$.

DIMOSTRAZIONE.

Supponendosi $\div a : b : c$, sarà (378.) $a : b :: b : c$, però (6. 16. 533.) $ac = bb$.

Secondo. E per la medesima proposizione essendo $ac = bb$, sarà $a : b :: b : c$, vuolsi dire $\div a : b : c$ (378.).

COROLLARIO I.

535. Dunque per un rettangolo ac, sostituire si puote un quadrato bb, a quello uguale, anzi per ogni parallelogrammo ac prendendo a per base, & c per altezza sostituire si puote l'uguale quadrato bb, e per ogni triangolo $\frac{ac}{2}$ formato da $\frac{a}{2}$ semibase, e da c altezza intera, oppure dalla base a, e dalla semialtezza $\frac{c}{2}$, sostituire si puote un quadrato dd al triangolo uguale. Come poscia si trovino de' parallelogrammi, e de' triangoli gli uguali quadrati, che sia $ac = bb$, & $\frac{ac}{2} = dd$, i cui lati b, & d sono proporzionali di mezzo tra le basi, e tra le altezze, ne' parallelogrammi, e tra le basi, e semialtezze, od altezze, e semibasi ne' triangoli, gli è un problema risoluto in più modi (6. 13. 529.).

Co-

COROLLARIO II.

536. Generalmente ogni ragione di due linee $a:c$, o pure di quattro proporzionali $a:b::d:c$, ridurre si puote in una proporzione continua di tre termini, trovando alli due termini a, c, o sia b, d la proporzionale di mezzo $=x=\sqrt{bd}$ (6. 13. 529.), o nel primo caso $x=\sqrt{ac}$, e sarà sempre $\div\, a:x:c$; dacchè avendo nel primo caso $x=\sqrt{ac}$, sarà $xx=ac$. Nel secondo $x=\sqrt{bd}$, sarà $xx=bd$; ma $ac=bd$; dunque sostituendo $xx=ac$, però $\div\, a;x:c$; quindi è, che analiticamente non meno, che in quantità geometriche si puote per qualsivoglia rettangolo ac sostituire il suo uguale quadrato bb, xx, ec.

COROLLARIO III. (*Fig.* 213.)

537. Conciosiachè ogni rettilinea figura in tanti triangoli divider si puote, quanti ha lati meno due; dacchè il primo triangolo, e l'ultimo, due lati della figura esiggono, ciascuno per se; da ciò ne proviene, che qualunque rettilineo ABCDE prender si puote per un quadrato aa, bb ec. uguale a tutti i quadrati, a cui sono ridotti (535.) i triangoli dal risoluto rettilineo formati, ed usando la seguente metodo non molto laboriosa, tale geometrica operazione riesce.

RIDURRE UN DATO RETTILINEO IN UN QUADRATO aa. (*Fig.* 213. 214.)

538. Dall' angolo A del dato rettilineo ABCDE a tutti gli angoli C, D, ec., fuori che a' due collaterali, si conducano le rette linee AC, AD ec., e sarà il rettilineo diviso in tanti triangoli meno due de' suoi lati, come questo in tre, perchè è pentagono, e sono 1, 2, 3. Sul lato AD comune a due triangoli 1, 2 dagli opposti angoli E, C si dimettano i perpendicoli Ee, Cc, e si divida AD per mezzo. Sopra di altro piano su la infinita RG si alzi la perpendicolare FZ infinita, e da F verso R si prenda la porzione FD$=\frac{AD}{2}$, e da F verso G si trasporti FE$=$ $=$Ee, e sopra la composta DE un mezzo cerchio descrivasi, che

che seghi in H la retta FZ, sarà $\overline{FH}^2 = \triangle$ ADE (535.)

Secondo. Verso G da F si prenda FC $=$ C*c* altezza del triangolo 2, la cui semibase essendo la presa parte FD, perciò si formi sul diametro DC un mezzo cerchio, che seghi in L la retta FZ, sarà $\overline{FL}^2 = \triangle$ ADC.

Terzo. Su la base AC del triangolo 3 si dimetta la perpendicolare B*b*, e recisa $FA = \frac{AC}{2}$, semibase; si trasporti FB $=$ B*b* altezza, e sul diametro AB si descriva un mezzo cerchio, che seghi FZ in N, sarà $\overline{FN}^2 = \triangle\ 3$. Dunque il rettilineo ABCDE $=$ $= \overline{FH}^2 + \overline{FL}^2 + \overline{FN}^2$.

Quarto. Per sommare insieme (*Fig.* 215.) questi quadrati, si formi un angolo retto co' due lati FN, FH, e si tiri l'ipotenusa HN ec., come al num. 196., o pure si faccia d'infiniti lati lo angolo retto RFZ, ne' cui lati si prendano FN $=$ FN, ed FH $=$ FH, e si tiri HN, a cui uguale si prenda FD, e nell'altro lato FL $=$ FL, che la retta DL tirando, si è in essa ottenuto il lato del quadrato uguale al rettilineo dato $\overline{DL}^2 =$ ABCDE. Conciosiachè (1. 47. 195.) abbiamo $\overline{HN}^2 = \overline{FH}^2 + \overline{FN}^2$; ma $\overline{DL}^2 = \overline{HN}^2 + \overline{FL}^2$, essendo FD $=$ HN; dunque egli è $\overline{DL}^2 =$ $= \overline{FH}^2 + \overline{FL}^2 + \overline{FN}^2 =$ ABCDE rettilineo dato $= aa$, nomando DL $= a$.

Corollario IV.

539. Applicando poscia alle linee (sieno tre $\div a : c : y$, sieno quattro $a : x :: c : y$ proporzionali) quanto si è generalmente dimostrato nel quinto libro (391. 438.), egli è vero, che di tre la prima all'ultima, come il quadrato della prima al quadrato della seconda $a : y :: aa : cc$. Delle quattro poi $a : x :: c : y$ egli è la prima all'ultima, come il quadrato della prima al rettangolo delle intermedie x, c, però $a : y :: aa : cx$, lo che nel quinto libro (438.) dimostrasi, e dal superiore Corollario dipende.

Annotazione.

540. Le fino ad ora spiegate, e da spiegarsi connessioni delle quantità geometriche, ed algebraiche, e tutte ancora le trasformazioni delle medesime quantità, sono sì necessarie ad un geo-

metra, e si vogliono con tal diligenza osservare, che ben sovente senza di quelle chicchessia colle ale tarpate si trova, e poco, o nulla innalzare si puote.

Corollario V. (*Fig.* 197.)

541. Dallo stesso Teorema nasce la metodo di misurare la linea DC, sia per voragine, o fiume accessibile dalla sola sponda D, lo che ad eseguire, si disegni da D all' opposto di C la infinita AD, e si innalzi in D il perpendicolo DB (ove fa d'uopo, usando le scale) constituiscasi in B una squadra, lo cui lato sia diritto, e stabile nella visuale linea BC, e l' altro lato riguardi in A su la linea CDA, sono cognite le rette $AD = a = 2$ $DB = b = 20$, sarà conosciuta $DC = x$; essendo $\div a : b : x$, però $ax = bb$, e dividendo per a, risulta $x = \frac{400}{2} = 200 = AC = \frac{bb}{a}$, vuolsi dire, che si quadri la lunghezza del perpendicolo DB, il suo quadrato per AD si divida, e sarà $DC = \frac{\overline{DB}^2}{AD}$, cioè $AD : DB :: DB : DC$.

Corollario VI.

542. Col medesimo calcolo appunto si eseguisce, e dimostrasi la regola del tre numerica, cioè di ritrovare il terzo proporzionale a due numeri dati, ovveramente ritrovare il quarto numero (527.) ove secondo, e terzo sono il medesimo replicato (378.): essendo v. g. $\div 3 : 9 : x$, o sia $3 : 9 :: 9 : x$, per avere il ricercato numero x, si quadri il 9, cioè si multiplichi 9 per 9, ed il prodotto quadrato si divida pel primo termine 3, che sarà il quoziente $\frac{81}{3} = x = 27 = \frac{9^2}{3} = \frac{9 \times 9}{3}$. E la superiore formula $x = \frac{bb}{a}$, ne porge la regola generale per tutti li numeri, supponendo a primo termine, e numero; b secondo, ed x terzo, o sia a primo, b secondo, b terzo, ed x quarto, che è lo stesso.

PRO-

PROPOSIZIONE XVIII.

PROBLEMA VI. (*Fig.* 216.)

543. Sopra una data retta linea AB costituire un rettilineo ABCD simile, e similmente formato come EFGM.

RISOLUZIONE.

Il dato rettilineo EFGM in tanti triangoli EGF, EGM, ec. (537.) risolvasi, e supponendo, che la data AB si elegga per lato omologo ad EF, si faccia in A lo angolo BAC = FEG, come in B lo angolo ABC = EFG (1. 23. 139.), saranno uguali i rimanenti angoli ACB, EGF (167.), e però simili i due triangoli ABC, EFG (6. 4. 501.). Laonde AB : BC : : EF : FG lati proporzionali d' intorno B, ed F angoli uguali AC : BC : : EG : FG, come pure AC : AB : : EG : EF. Inoltre sul lato AC nel punto A si formi lo angolo CAD = GEM, e nel punto C lo angolo ACD = EGM, e saranno formati gli equiangoli triangoli ADC, EMG, e però simili (6. 4. 501.): e perchè simili hanno i lati proporzionali DC : AC : : MG : EG; ma si è dimostrato AC : BC : : EG : FG; dunque ordinando (5. 22. 424.) DC : BC : : MG : FG lati proporzionali d' intorno agli uguali angoli interi C, G, e dacchè altresì AD : AC : : ME : EG, e sopra si è dimostrato AC : AB : : EG : EF, sarà ordinando (5. 22. 424.) AD : AB : : ME : EF lati proporzionali d' intorno agli interi angoli A, E, e così degli altri dimostrasi; il perchè de' due rettilinei i lati sono proporzionali; ma sono uguali gli angoli da' proporzionali lati compresi; conciossiachè per costruzione si sono fatti B = F, D = M, e le porzioni ACD = EGM, ed ACB = EGF; perciò sommando saranno gl' interi C = G, e così degli altri dimostrasi; e perciò i due rettilinei sono simili, onde su la data AB si è costruito ec., che era ec.

COROLLARIO I. (*Fig.* 216.)

544. Sono pertanto i perimetri, o sia contorni delle simili figure, come qualunque AB : EF suo omologo; dacchè essendo

AB

AB : EF :: BC : FG :: CD : GM :: AD : EM, sarà (5. 12. 412. AB + BC + CD + AD : EF + FG + GM + EM :: AB : EF.

COROLLARIO II. (*Fig.* 216.)

545. Ed inoltre de' perimetri le parti continenti ugual numero di omologi lati sono come un omologo al suo omologo lato; perocchè essendo AB : EF :: BC : FG :: CD : GM, sarà aggregando (5. 12. 412.) AB + BC + CD : EF + FG + GM :: AB : EF ec.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA XIII. (*Fig.* 217.)

546. Li simili triangoli AGB, CHD sono in duplicata (373.) ragione de' lati omologi.

Secondo. E de' perpendicoli omologi eziandio.

DIMOSTRAZIONE.

Da due uguali angoli G, H alle opposite basi AB $= a$, CD $= c$ si dimettano i due perpendicoli omologi (perchè cadenti da angoli uguali), e sieno GE $= b$, HF $= d$, sarà dunque (505.) $a : b :: c : d$; dunque (5. 21. 422.) $ab : cd :: aa : cc :: bb : dd$. Si divida la prima ragione per 2, sarà $\frac{ab}{2} : \frac{cd}{2} :: aa : cc :: bb : dd$, cioè $\triangle$ ABG : $\triangle$ CDH :: $\overline{AB}^2 : \overline{CD}^2 :: \overline{GE}^2 : \overline{HF}^2$. Che era ec.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA XIV. (*Fig.* 218.)

547. Le simili rettilinee figure AD, FM si dividono in simili triangoli R $\backsim$ N, X $\backsim$ L, Y $\backsim$ K, ec., ed uguali per numero.

Secondo. Ed omologi alle intere figure.

Terzo. Le quali sono tra loro in ragion duplicata de' lati omologi.

DIMOSTRAZIONE.

Si prendano due uguali angoli A, F, da' quali si dividano i rettilinei in triangoli R, X, Y, ec., ed N, L, K ec., e perchè essendo

essendo (491. 492.) OF : OM :: EA : ED, e lo angolo O=E, per ipotesi, ne siegue, che (6. 6. 513.) simili sono i due triangoli N, R; il perchè lo angolo FMO=ADE; ma si suppone tutto lo angolo M=D; dunque li residui angoli FMH=ADC; ma egli è (491.) MH : MO :: DC : DE, e ne' triangoli N ∽ R MO : MF :: DE : DA, sarà ordinando (5. 22. 424.) MH : MF :: DC : DA lati omologi, che comprendono uguali angoli FMH, ADC; quindi simili sono i due triangoli L, X (6. 6. 513.). In oltre essendo gli angoli G=B, ed i lati proporzionali ad essi d'intorno, per ipotesi, (491.) sarà GF : GH :: BA : BC, però (6. 6. 513.) sono i due triangoli K ∽ Y, e così di tutti gli altri corrispondenti, i quali sempre saranno uguali di numero (537.), avendo i simili rettilinei ugual numero di lati.

Secondo. Perchè si sono dimostrati i triangoli N ∽ R, L ∽ X, K ∽ Y, sarà (6. 19. 546.) N : R :: $\overline{MO}^2 : \overline{DE}^2$. Così L : X :: $\overline{MH}^2 : \overline{DC}^2$. Parimente K : Y :: $\overline{GH}^2 : \overline{BC}^2$; ma (545.) sono i lati MO+MH+GH : DE+DC+BC :: MO : DE. Dunque multiplicando questa proporzione per se medesima (5. 20. 420., sarà $\overline{MO}^2 + \overline{MH}^2 + \overline{GH}^2 : \overline{DE}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{BC}^2 :: \overline{MO}^2 : \overline{DE}^2 :: \triangle N + \triangle L + \triangle K : \triangle R + \triangle X + \triangle Y :: \triangle N : \triangle R$ suo omologo.

Terzo. Cioè come il quadrato del lato MO al quadrato dell' omologo lato DE. Che era, ec.

Corollario I. (*Fig.* 219.)

548. Le regolari figure del medesimo nome, così circoscritte, siccome inscritte ne' cerchi, essendo simili, e similmente poste, tra loro sono in ragion duplicata de' loro lati AB, AD, come sono li triangoli equilateri tra di loro, i pentagoni, gli esagoni, ec., non meno che i quadrati.

Corollario II. (*Fig.* 219.)

549. E perchè si risolvono in tanti triangoli simili ABC, ADC, prendendo li raggi GB, CD per lati omologi, sono le suddette figure in ragion duplicata de' raggi de' cerchi, in cui sono inscritte, o circoscritte.

Corol.

COROLLARIO III. (*Fig.* 219.)

550. Ed in vece de' lati prendendo i proporzionali perpendicoli CF, CO, che raggi retti si nomano (318.), sono altresì le mentovate regolari figure, come i quadrati de' raggi retti. (6. 19. 546.)

COROLLARIO IV.

551. Ma sono i cerchi tanti regolari poligoni di lati infiniti (338.), de' quali i raggi retti sono i semidiametri loro, o sia raggi, perciò tutti gli cerchi sono tra di loro come i quadrati de' propri semidiametri, o de' diametri loro.

COROLLARIO V.

552. Da ciò nasce, che la generale espressione della ragione di due qualsivoglia simili rettilinei, o cerchi, ella è : : *aa* : *bb*, intendendo per *a*, & *b* due lati omologi tra uguali angoli contenuti, o due raggi retti, se sono regolari, o due diametri de' cerchi.

COROLLARIO VI.

553. Avendo perciò la ragione di due lati omologi, o raggi : : *a* : *b* : : 2 : 5, tosto si ha la ragione delle figure simili, e de' cerchi : : *aa* : *bb* : : 4 : 25, ed avendo la ragione delle figure : : *aa* : : *bb* : : 4 : 25, tosto traendo la quadrata radice, si ottiene la ragione subduplicata de' lati omologi, e raggi : : *a* : *b* : : 2 : 5.

COROLLARIO VII.

554. E non solo de' quadrati, ma di tutte le simili rettilinee figure si avvera quanto fu dimostrato (391. 438. 539.); vuolsi dire, che se sono tre linee proporzionali ÷ *a* : *b* : *x*, deve il rettilineo *aa* su la prima descritto, essere al rettilineo simile *bb* su la seconda : : *a* prima : *x* terza, o sia *a* : *x* : : *aa* : *bb*.

COROLLARIO VIII.

555. Dal fonte medesimo ne proviene la util maniera, e facile di accrescere similmente un rettilineo, o minuirlo quanto si

si vuole, cioè in ragione data di $a:b$, e questa ragione riducendo in tre termini proporzionali (536.), col trovare la media $x = \sqrt{ab}$, sarà intanto $\div\, a:x:b$, però su la ritrovata x, come lato omologo ad a (6. 18. 543.) un simile rettilineo $xx \backsim aa$, e sarà $aa:xx::a:b$ ragione data, che sia $4:9$, sarà $x = \sqrt{4 \times 9} = 6$, però avendo un rettilineo sul lato 4, facendone altro simile sul lato 6 omologo, saranno $::16:36::4:9::4^2:6^2$.

Corollario IX.

556. Quindi come si è dimostrato de' quadrati (440.), forza egli è, che generalmente si avveri di tutte le simili figure, che avendo un rettilineo, o cerchio, e formandone altro simile sul doppio lato, sarà quadruplo il secondo del primo; sul triplo lato sarà 9 volte maggiore ec. sul mezzo lato, sarà $\frac{1}{4}$ del primo; su la terza parte del lato, sarà $\frac{1}{9}$ del primo; ed è molto crasso l'errore di quelli, che prendono i rettilinei nella ragione de' lati omologi, siccome di molto va errato chi prende la duplicata proporzione per dupla.

Corollario X.

557. E dallo stesso teorema nasce la pratica de' misuratori delle figure, che avendo misurato un poligono con una determinata scala divisa in 10 trabuchi, o in altro numero, e trovato che sia, v. g. tavole 560, per ritrovare la misura del poligono istesso colla medesima scala, ma divisa altrimenti, v. g. in 5 trabuchi, e parti uguali si instituisce la proporzione, non già $10:5::560:x$, ma quadrare si dee la ragion delle scale, dicendo $\overline{10}^2:\overline{5}^2$, cioè $100:25::560:x = 140$.

PROPOSIZIONE XXI.

Teorema XV. (*Fig.* 220.)

558. Gli rettilinei A, B simili al rettilineo C, eziandio sono simili tra di loro.

Dimo-

Dimostrazione.

Egli è questo un assioma (91.), pure si dimostri. Dacchè per ipotesi A $\backsim$ C, & B $\backsim$ C, amendue A, & B sono equiangoli (491.) fra di loro (*Ass.* 1. 91.), perchè equiangoli al terzo C, e però hanno i lati proporzionali, come col terzo C, così tra di loro (5. 11. 411.), però sono simili (6. 4. 501.)

Proposizione XXII.

Teorema XVI. (*Fig.* 221.)

559. Se quattro linee a, b, c, d sono proporzionali, anche i simili rettilinei, e similmente sopra di esse costituiti, sono proporzionali.

Secondo. E se tali rettilinei sono proporzionali, anche lo sono le rette, su cui sono descritti.

Dimostrazione.

Per ipotesi $a:b::c:d$; ma per essere i rettilinei costituiti similmente sopra di esse, deono le medesime quattro linee essere lati omologi, nella cui duplicata ragione (6. 20. 547.) sono i costituiti rettilinei. Adunque quadrando, cioè multiplicandola per se stessa la proporzione $a:b::c:d$, sarà $aa:bb::cc:dd$ (5. 20. 426.)

Secondo. Essendo li rettilinei $aa:bb::cc:dd$, sarà $aadd=bbcc$ (5. 1. 401.), ed estraendo le quadrate radici (*Alg.* 88.), sarà $ad=bc$, e risolvendo si otterrà $a:b::c:d$ (401.). Che era ec.

Proposizione XXIII.

Teorema XVII. (*Fig.* 222.)

560. Gli equiangoli parallelogrammi X, Y.

Secondo. E di triangoli $\frac{X}{2}$, $\frac{Y}{2}$ aventi un angolo A = A angolo, sono tra di loro in ragione composta de' lati comprendenti gli angoli uguali.

Terzo. E sono in ragione composta delle basi, ed altezze.

Dimo-

DIMOSTRAZIONE.

Dagli angoli F, K agli uguali A, A contigui si dimettano le perpendicolari FM$=m$, KR$=n$ su le basi rispettive AG$=c$, AL$=d$, saranno X$=mc$, Y$=nd$. E perchè li due triangoli AMF, ARK rettangoli, hanno gli angoli A$=$A, sono (165.) equiangoli, però simili (6. 4. 501.), ed i lati omologi AF$=a$, AK$=b$ sono proporzionali $::m:n$, cioè $a:b::m:n$; si multiplichino gli antecedenti per c, e gli conseguenti per d (383.), si ottiene $ac:bd::mc:nd::$X$:$Y (369.) parallelogrammi $::ac$ $:bd$ in ragione composta di $a:b$, & $c:d$, lati comprendenti gli angoli uguali. Terzo, ed eziandio $::mc:nd$ ragione composta di $c:d$ basi, ed $m:n$ altezze.

Secondo. Si divida per 2 la ragione X$:$Y, sarà $\frac{X}{2}::\frac{Y}{2}$, cioè $\triangle$ AFG$:\triangle$ AKL$::ac:bd::mc:nd$ in ragione composta de' lati agli angoli uguali d'intorno, ed eziandio nella composta delle altezze, e basi. Che era ec.

Intendasi però, che senza avere riguardo agli angoli uguali, generalissimamente si avvera X$:$Y$::mc:nd::\frac{X}{2}:\frac{Y}{2}$ in composta ragione delle basi, ed altezze (175. 179.). Perocchè X$=$ $=mc$, & Y$=nd$, onde X$:$Y$::mc:nd$. (360.)

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA XVIII. (*Fig.* 223.)

561. In ogni parallelogrammo CD li parallelogrammi EH, GM, d'intorno al diametro AB, sono simili tra di loro, ed all' intero CD.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè FH è parallela alla base BC del triangolo ABC, sarà (6. 2. 499.) AH$:$HF$=$AE$::$AC$:$CB$=$AD; e sostituendo AH$:$ AE$::$AC$:$AD, lati proporzionali d'intorno al comune angolo A, ed agli uguali AHF, & C. Dunque (491.) CD $\backsim$ EH. Inoltre i due triangoli AFH, BFG aventi le basi sopra le parallele

AC, DB sono simili (504.); onde si ottiene (6. 4. 501.) HA$=$$=$FE : FH :: GB$=$FM : FG, e sostituendo sarà FE : FH :: FM : FG, lati proporzionali d' intorno agli uguali angoli EFH, GFM opposti al vertice, & AHF, FGB alterni; dunque GM $\backsim$ EH $\backsim$ DC (6. 21. 558.), che era ec.

PROPOSIZIONE XXV.

PROBLEMA VII. *(Fig. 224.)*

562. Costruire il rettilineo X$=$Y, & $\backsim$ Z, dati.

RISOLUZIONE.

Alla base AB del rettilineo Z, si applichi il rettangolo BC$=$Z (1. 45. 189.); quindi al lato AC nel medesimo angolo retto BAC si adatti il rettangolo CD$=$Y, sarà BAD una retta linea, essendo retti i due angoli in A (1. 14. 130.). Alle due AB, AD, si trovi EF proporzionale di mezzo (6. 13. 528.), e sopra la ritrovata EF si costruisca il rettilineo X simile, e similmente formato col rettilineo Z (6. 18. 543.); dico sarà X$=$Y.

DIMOSTRAZIONE.

Si sono fatte per costruzione le due figure X $\backsim$ Z, e perchè si è fatto $\div$ AB : EF : AD, egli è (554.) Z : X :: AB : AD, ma (6. 1. 498.) □BC : □CD :: AB : AD; quindi (5. 11. 411.) Z : : X :: □BC : □CD, ed alternando sarà Z : □BC :: X : □CD, ma per costruzione Z$=$□BC; dunque la figura X$=$□CD, ed essendosi fatto □CD$=$Y, sarà (*Ass.* 1. 91.) X$=$Y, che era ec.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA XIX. *(Fig. 223.)*

563. Se dal parallelogrammo DC, il parallelogrammo EH recidasi al tutto simile, e similmente formato, col quale abbia il comune angolo A, esser devono ambedue i parallelogrammi DC, EH al diametro istesso d' intorno.

Di-

D I M O S T R A Z I O N E.

Dal medesimo punto A, ai due opposti angoli F, B de' parallelogrammi EH, DC, si tirino i due diametri AF, AB, che esser deono una retta linea sola, comune diametro a tutte e due le figure, le quali essendo simili, divise rimangono in simili triangoli (6. 20. 547.) AFH, ABC, però essendo inoltre la base FH parallela alla base BC, sarà AH : HF :: AC : CB, lati d'intorno agli uguali angoli AHF, ACB (6. 4. 501., & 491.), ma agli omologi lati FH, BC, opporre si deono angoli uguali FAH, BAC, li quali hanno per ipotesi, in una retta linea AC i due lati AH, AC; dunque gli altri due lati AF, AB cadenti dall' altra banda F, B, sono in una retta linea adattati (*Ass.* 8. 98.): ella è adunque AFB una sola retta linea, comune diametro a due parallelogrammi EH, DC, che era ec.

A N N O T A Z I O N E.

Perchè le proposizioni 27., 28., 29., dimostrate da Euclide in questo libro, non sono al Geometra di molta utilità; perciò si omettono, sostituendone tre altre di molto uso.

P R O P O S I Z I O N E XXVII.

T E O R E M A XX. di TOLOMEO. (*Fig.* 229.)

564. In qualunque quadrilatero ABCD inscritto nel cerchio il rettangolo AC×BD delle due diagonali, è uguale ai due rettangoli AB×CD+AD×BC, formato ciascuno da due oppositi lati.

D I M O S T R A Z I O N E.

Da un angolo A alla diagonale BD si dimetta la linea AE, che formi lo angolo BAE uguale allo angolo CAD; il perche sono equiangoli, e simili i due triangoli ABE, ACD, avendo i due formati angoli uguali, ed uguali gli altri due ABE, ACD su la medesima corda AD (3. 21. 271.); quindi AB : BE :: :: AC : CD; laonde (6. 16. 533.) AB×CD=AC×BE.

Inoltre a' due uguali angoli BAE, CAD si aggiunga il comune CAE, saranno uguali i composti due angoli BAC, DAE;

ed

ed essendo uguali ancora i due angoli ACB, ADE, insistenti sopra la stessa corda AB, sono equiangoli, e simili i due triangoli ADE, ACB (6. 4. 501.); e per questo sarà AD : DE : : AC : : CB; quindi (6. 16. 533.) AD$\times$CB$=$AC$\times$DE, ma (2. 1. 207.) AC$\times$BD$=$AC$\times$BE$+$AC$\times$DE; dunque (*Ass.* 1. 91.) AC$\times$BD$=$ $=$AB$\times$CD$+$AD$\times$BC, che era ec.

PROPOSIZIONE XXVIII.

Problema VIII.° di Herttenstein. (*Fig.* 230.)

565. Ad una data inaccessibile linea AB, tirare una parallela LK.

Risoluzione.

Scelgasi comodo sito C, d' onde vengano disegnati i due visuali raggi CA, CB, e si stabiliscano a piacere due punti, E, nel raggio CA, e D, in CB. Si conducano da que' due punti due visuali rette linee DF, parallela alla retta AC, & EF all' altra BC parallela, le quali nel punto F concorrano insieme. Da' punti medesimi D, E si conducano altri due visuali raggi DA, EB, da' quali segate rimangono le parallele EF, DF, nei punti G, H, per i quali conducasi la infinita retta linea KGHL, che sarà parallela alla data AB.

Dimostrazione.

Perchè la retta AD cade tra due parallele DF, AC, sono uguali gli angoli alterni GDH, HAL (1. 29. 153.), ed uguali al vertice H gli angoli AHL, DHG (1. 15. 131.), il perchè (167.) sono equiangoli i due triangoli HGD, HLA, epperò (6. 4. 501.) simili; onde sia GD : GH : : LA : LH, e ne' simili triangoli GHF, LHE, egli è GH : FH : : LH : EH, perciò ordinando (5. 22. 424.) GD : FH : : LA : EH; ma ne' triangoli BKG, EHG, parimente simili, abbiamo BK : KG : : EH : GH, e nei triangoli GKD, HGF simili, egli è KG : GD : : GH : GF, sarà ordinando BK : GD : : EH : GF; ma si è dimostrato essere GD : : FH : : LA : EH, perturbando (5. 23. 425.) risulta BK : FH : : : LA : GF :, e perchè ne' triangoli FHG $\backsim$ CKL, si ha FH : CK : :

: : GF

:: GF : CL, ed ordinando si ottiene BK : CK :: LA : CL; dunque (6. 2. 499.) la retta LK segante i due lati AC, BC del triangolo ABC, in parti proporzionali, essere dee parallela alla data base AB, che era quanto eseguire si dovea, e dimostrare.

PROPOSIZIONE XXIX.

PROBLEMA IX. (*Fig.* 230.)

566. Misurare la distanza di due inaccessibili punti A, B, o sia retta linea AB.

RISOLUZIONE.

Coll' uso del superiore problema in comodo sito conducasi LK parallela ad AB, e si ritrovi il valore della non misurabile lontananza LA ne' due triangoli simili HGD, HLA, facendo $GH = a$, $GD = b$. Inoltre $LH = c$, $CL = n$, $LK = d$, $AB = x$, lo cui valore sarà uguale al prodotto di GD, LH, LK multiplicati insieme, e diviso per GH, CL multiplicati insieme, aggiugnendo al quoziente $\frac{GD \times LH \times LK}{GH \times CL}$ la quantità GL, cioè si faccia un prodotto delle tre date GD, LH, LK, il quale sia diviso per lo prodotto delle due GH, CL, ed aggiungasi al quoziente la lunghezza LK, e questa formata somma sarà la estensione della retta AB.

DIMOSTRAZIONE.

Ne' due triangoli HGD $\backsim$ HLA, egli è (6. 4. 501.) $a : b :: c : \frac{bc}{a} = LA$; quindi $CA = n + \frac{bc}{a}$, e perchè nel triangolo ABC, alla base AB è parallela LK, sarà (6. 2. 499.) $n : d :: n + \frac{bc}{a} : d + \frac{bcd}{an} = AB$; vuolsi dire $AB = \frac{GD \times LH \times LK}{GH \times CL} + LK$, che era ec.

PRO-

PROPOSIZIONE XXX.

PROBLEMA X. (*Fig.* 225.)

567. Segare in C una data retta linea AB, terminata secondo la estrema ragione, e di mezzo.

RISOLUZIONE.

Sopra la retta data AB il quadrato BE si descriva, e si compia la figura, come nella proposizione undecima del secondo libro (228.), in guisa che sia il quadrato AD uguale al rettangolo CH, cioè $\overline{AC}^2 = \Box AB \times BC$, che la retta AB sarà segata in C, dal lato DF, nell' estrema, e media ragione.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè di costruzione egli è $\Box AB \times BC = \overline{CA}^2$, sarà (6. 17. 534.) AB : AC : : AC : CB; vuolsi dire $\div$ AB : AC : CB (378. *Def.* 3. 495.) lo che ec.

PROPOSIZIONE XXXI.

TEOREMA XXI. (*Fig.* 226.)

568. In tutti i triangoli rettangoli ABC qualunque sia rettilinea figura, o circolare, descritta sopra la ipotenusa AC, è uguale per superficie alle due simili figure, e similmente formate sui due cateti BA, BC.

DIMOSTRAZIONE I.

Perchè tutte le figure si riducono in tanti quadrati (537. 552.), e con tale espressione prender si possono; perciò dall' angolo retto B dimettendo il perpendicolo BD, ove facciasi $AC = a$, sarà aa espressione di qualunque figura; $AB = b$, sarà bb la simil figura; $BC = c$, sarà cc la figura simile; sia altresì $AD = x$, sarà $CD = a - x$, e perchè si deve dimostrare $aa = bb + cc$, si osservi essere (6. 8. 515.) $\div$ AC : AB : AD, cioè $\div\ a : b : x$; quindi (5. 1. 401.) $ax = bb$. Di più $\div$ CA : CB : CD, cioè $\div\ a : c : a - x$; d' onde (5. 1. 401.) $aa - ax = cc$. Si sommino tra di loro queste

due

due equazioni, si otterrà $ax+aa-ax=bb+cc$, e spurgando risulta $aa=bb+cc$, cioè la figura aa formata su la ipotenusa $a=AC$; è uguale alle due simili figure $bb+cc$ formate su due cateti $BA=b$, $BC=c$, che era ec.

DIMOSTRAZIONE II.

Conciosiachè egli si avvera (6. 8. 515. 516.) $\div AC:AB::AD$, e sostituendo i valori di $AC, AB \div a:b:AD$, sarà (524.) $AD=\frac{bb}{a}$; parimente $\div CA:CB:DC$, e sostituendo, sarà $\div a:c:DC$; perciò (524.) $DC=\frac{cc}{a}$, ma gli è $AC=AD+DC$; dunque sostituendo i valori $a=\frac{bb}{a}+\frac{cc}{a}$, e togliendo la isomeria (*Alg.* 105.) $aa=bb+cc$, come sopra.

DIMOSTRAZIONE III.

Essendo $a:b::b:x$, sarà $x=\frac{bb}{a}$ (524.), di più $a:c::c:a-x$, si ottiene, sostituendo il trovato valore di x, $a:c::c:a-\frac{bb}{a}$; quindi (5. 1. 401.) $aa-\frac{abb}{a}=cc$, cioè $aa-bb=cc$, e per antitesi $aa=bb+cc$, come si è già dimostrato.

DIMOSTRAZIONE IV.

Ne' due simili triangoli ABD, BDC, si avvera (516.) $B:x::c:BD=\frac{cx}{b}$: parimente $\div x:BD:a-x$; dunque (528.) $BD=\sqrt{ax-xx}$, e paragonando i due valori di BD, sarà $\sqrt{ax-xx}=\frac{cx}{b}$, e quadrando (*Alg.* 39. 88.) risulta $ax-xx=\frac{ccxx}{bb}$, e dividendo per x, e multiplicando per bb, avremo $abb-bbx=ccx$, e per antitesi $abb=ccx+bbx$, e dividendo per x $\frac{abb}{x}=cc+bb$, ma (516.) egli è $\div x:b:a$; però $a=\frac{bb}{x}$, e sostituendo fia $aa=bb+cc$.

Ed-

Ed ecco per vie diverse, che alla medesima verità si perviene. Intanto molta lode si merita Euclide per avere col teorema presente renduto generalissimo, e ad ogni figura ampliato il Pitagorico teorema de'quadrati (1. 47. 195.)

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA XXII. (*Fig.* 227.)

569. Se due triangoli ABC, DEC, avendo i lati proporzionali AB : AC :: DC : DE, e gli omologi lati paralleli si accozzano insieme nel comun punto C, sono le loro basi BC, CE in una retta linea BE.

DIMOSTRAZIONE.

Cadendo la retta AC tra le due parallele AB, DC, forma uguali gli angoli alterni (1. 29. 153.) A=ACD; così DC cadendo tra le parallele AC, DE, egli è D=ACD; però (*Ass.* 1. 91.) A=D, a cui d'intorno essendo proporzionali i lati, sono (6. 6. 513.) simili i triangoli stessi; d'onde B=DCE, angoli opposti a' lati omologi AC, DE, e sommando le due equazioni, ed aggiugnendo il comun angolo ACB, si ottiene A+B+ +ACB=ACD+DCE+ACB, ma la prima somma ella è =180°, che sono due angoli retti (1. 32. 160.); sarà perciò la somma seconda ACD+DCE+ACB, nel medesimo punto C, uguale a due retti; il perchè le concorrenti rette linee CE, CB, sono una retta linea sola (1. 14. 130.), che era ec.

PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA XXIII. (*Fig.* 228.)

570. In tutti gli uguali cerchi ABC, DEH gli angoli F, G, a' centri.

Secondo. Siccome gli angoli B, & E alla circonferenza.

Terzo. E parimente i settori AFC, DGH, sono tra loro come gli archi AC, DH, sopra de' quali insistono.

Di-

Dimostrazione.

Perchè i cerchi si suppongono uguali, uguali sono i loro raggi (3. *Def.* 1. 236.) AF, DG; quindi gli sottoposti archi AC, DH, sono (30.) regolata misura degli angoli F, G a' centri, e per questo si avverano le equazioni tra misurata cosa, e misure. F=AC, G=DH; laonde (360.) F : G : : AC : DH.

Secondo. E perchè gli angoli B, & E alla circonferenza, misurati sono dalla metà de' rispettivi archi sottendenti AC : DH, (3. 40. 291.) sarà $B=\frac{AC}{2}$ $E=\frac{DH}{2}$; laonde (360. 383.) B : E : : : : $\frac{AC}{2}$: $\frac{DH}{2}$: : AC : DH : : F : G (5. 11. 411.).

Terzo. I settori AFC, DGH sono piane figure contenute da' raggi, e dagli archi, ma negli uguali cerchi, uguali sono i raggi, ed uguali gli angoli mistilinei FAC, GDH; dunque sono i settori in ragione composta de' lati comprendenti gli angoli uguali (6. 23. 560.), perchè sono i settori triangoli equiangoli alle basi, ed archi AC, DH; quindi egli è AFC : DGH : : FA×AC : GD×DH, e dividendo per FA=GD (383.), sarà AFC : DGH : : AC : DH, settore a settore, come proprio arco al proprio arco, che era ec.

PROPOSIZIONE XXXIV.

Problema XI. (*Fig.* 231.)

571. Formare un triangolo isoscele AGP uguale al quadrato BD, e che abbia un angolo uguale al dato angolo QMR.

Risoluzione.

Nel punto A del lato AB del quadrato BD, si formi lo angolo BAG=M, se si vuole su la base AP lo angolo BAG=M =APG; ma se piace averlo alla cima G, si formi l'angolo BAG=OMS compimento della metà OMR del dato angolo QMR. Sul lato GA dal punto A, si erga la perpendicolare AH, che in H concorra col disteso lato EB, e sopra tutta EH si formi il mezzo cerchio ENH, che seghi in N il lato AB prolungato infinitamente, su cui sieno prese le uguali porzioni AC=CP=

$=$BN. Dal punto C si innalzi la perpendicolare CG, che in G rincontri il lato AG, si conduca GP, e sarà costruito il triangolo AGP desiderato.

DIMOSTRAZIONE I.

Si conduca GL parallela al lato AB, avrassi il rettangolo CL$=$AC$\times$CG$=\triangle$AGP (*Ass.* 6. 96.), essendo tanto il rettangolo CL (1. 41. 185.), quanto il triangolo AGP, (6. 1. 498.) doppi dello stesso triangolo ACG; e perchè (517.) EB : BN :: BN : BH, cioè sostituendo gli uguali AB : AC :: AC : BH; ma nei triangoli ABH $\backsim$ ACF $\backsim$ ACG, AC : CG :: BH : AB; dunque ordinando (5. 22. 424.) AB : CG :: AC : AB; quindi $\overline{AB}^2=\square$AC$\times$CG$=\triangle$AGP, lo cui angolo in A nel primo caso, oppure in G nel secondo caso è uguale al dato angolo QMR; conciosiachè essendo l' angolo GAP$=$OMS, sarà nel triangolo rettangolo ACG (165.) il rimanente acuto AGC$=$OMQ$=\frac{1}{2}$QMR, ed essendo GPA$=$OMS, sarà nel triangolo rettangolo PCG il rimanente acuto PGC$=$OMR$=\frac{1}{2}$QMR; dunque lo intéro AGP$=$QMR dato.

DIMOSTRAZIONE II.

AB$=$BE$=a$. $\overline{AB}^2=aa=$BD. BN$=$AC$=$CP$=m$. CG$=c$. AC$\times$CG$=cm$; sarà ne' simili triangoli GCA, ABH. $c : m :: a :$ BH$=\frac{am}{c}$, e nel semicerchio ENH; $a : m :: m :$ BH$=\frac{mm}{a}$, e paragonando BH, sarà $\frac{am}{c}=\frac{mm}{a}$, e dividendo per m, risulta $\frac{a}{c}=\frac{m}{a}$, e togliendo le frazioni, sarà $aa=cm$, cioè $\overline{AB}^2=$AC$\times$CG, che era ec.

RISOLUZIONE ALGEBRAICA. (*Fig.* 232.)

Suppongasi risoluto il problema, e nello angolo M il triangolo TVM rettangolo in V, sia uguale alla metà del dato quadrato; perciò sarà MT lato del ricercato triangolo isoscele, & MV semibase. Prendasi adunque nella retta linea MZ un punto R, e conducasi RQ parallela al perpendicolo TV, e facciasi il dato quadrato $=aa$, MR$=b$, RQ$=c$, MV$=x$; esser dee

(6.

(6. 2. 499.) $b : c :: x : VT = \frac{cx}{b}$; perciò $\triangle MVT = \frac{MV}{2} \times MT = \frac{x}{2} \times \frac{cx}{b} = \frac{cxx}{2b}$ (182.); dunque sarà l'equazione $\frac{cxx}{2b} = \frac{aa}{2}$, e riducendo, sarà $cxx = aab$, e dividendo per c, risulta $xx = \frac{aab}{c}$, e traendo la quadrata radice, si ottiene $x = \sqrt{\frac{aab}{c}}$.

Per costruire geometricamente, e ritrovare la quantità x, primieramente si faccia (6. 12. 525.) $c : a :: a : d = \frac{aa}{c}$, quindi sostituendo, sarà $x = \sqrt{bd}$.

Inoltre si ritrovi la quantità r media tra b, & d, facendo $\div b : r : d$ (6. 13. 528.), ed avrassi $rr = bd$, & $r = \sqrt{bd} = x$.

ANNOTAZIONE.

Nella fine del libro quarto si sono con Archimede stabiliti due teoremi (340. 341.), ne' quali si prova l' uguaglianza del piano del cerchio ad un rettangolo, o ad un triangolo, de' quali l'altezza si è il raggio, e la base la semicirconferenza nel primo caso, o tutta la circonferenza nel secondo, ma questa è la fin ad ora non superata difficoltà il ritrovare una retta linea uguale ad una data circonferenza, o dato arco di un cerchio; tanto più, che nemmeno si sa quale sia la proporzione tra il raggio, o sia tra il diametro, e la circonferenza del cerchio; il perchè sia tanto difficile la quadratura del cerchio, cioè il trovare una rettilinea figura uguale ad un cerchio.

Fin dalla prima antichità i più nobili ingegni d' intorno alla quadratura del cerchio s' affaticarono, ma tutti in vano, niente però di meno il celebre Greco Geometra Ippocrate Chio, fu il primo a quadrare alcune curvilinee porzioni di cerchio, volgarmente chiamate lunole, o lunette contenute dal quadrante AGB di un dato cerchio, e dalla semicirconferenza di altro cerchio, lo cui diametro sia la corda AB dello stesso quadrante, come dimostrasi.

PRO-

PROPOSIZIONE XXXV.

TEOREMA XXIV. (*Fig.* 233.)

572. Le due lunole AGBF, BDCE, come sopra descritte, sono uguali al rettangolo triangolo isoscele ABC, che nel dato cerchio descrivesi sul diametro suo AC.

DIMOSTRAZIONE.

Sia nel dato diametro AC descritto il mezzo cerchio ABC, e ritrovato avendo il punto B di 90° (32.), si conducano le due corde BA, BC, uguali tra loro certamente, perchè sottese ad uguali quadranti (279.). Ne' punti H, & I, si dividano a mezzo le medesime corde AB, BC, su le quali descritti vengano due mezzi cerchi AFB, BEC, i cui punti estremi A, B, C, saranno comuni colla circonferenza del mezzo cerchio AGBDC. E perchè sopra l'ipotenusa AC del triangolo ABC, rettangolo in B, si è descritto un cerchio ABC, e sopra i due cateti AB, BC, altri due cerchi AFB, BEC, sarà (6. 31. 568.) tutto il cerchio del diametro AC, uguale a' due cerchi co' diametri AB, BC; dunque dividendo per 2, sarà de' mezzi cerchi ABC=AFB+BEC, ma alle tre figure sono comuni i segmenti ABG, BCD, certamente uguali (274.), perchè da uguali archi, e da uguali corde compresi; togliendo queste uguali quantità, uguali residui rimangono. Tolgasi adunque dal quadrante AGBK, e dal mezzo cerchio AFB il comune segmento ABG, rimane il triangolo AKB=AGBF, lunola soprapposta; così dal quadrante CDBK, e dal mezzo cerchio BEC, togliendo il comun segmento BCD, uguali residui rimangono, △BKC=BDCE, lunola a se soprapposta; dunque triangolo rettangolo ABC=AGBF+BDCE, lunole: e perchè KA=KC=KB, sarà $\frac{AC}{2}$= KB=KC, ed in K essendo retti gli angoli, pel punto B del novantesimo grado, ove compiasi il quadrato sopra i due lati uguali KB, KC, in angolo retto K locati, questo sarà uguale al triangolo ABC, e perciò uguale alle due lunole AFB+BEC.

PROBLE-

PROBLEMI

Dipendenti dall' uso delle proporzioni.

PROBLEMA I.

Si trovino due numeri, la cui somma sia alla loro differenza $::m:n$.

RISOLUZIONE.

Numeri ricercati siano x, & y; dunque $x+y:x-y::m:n$, e multiplicando (401.), ne nasce $mx-my=nx+ny$, e per antitesi $mx-nx=my+ny$, e dividendo per $m-n$, $x=\frac{my+ny}{m-n}$, e rimane y arbitraria, ed indeterminata la questione.

Prendasi $y=8$, $m=5$, $n=3$, sarà $m-n=5-3=2$; quindi $x=\frac{40+24}{2}=\frac{64}{2}=32$, e si avvera la proporzione $40:24::$ $::5:3$.

PROBLEMA II.

Un Ladro rubba, e fugge con velocità da fare miglia $=a$ in un' ora. Dopo ore c, il Padrone lo siegue con velocità, da fare miglia b in un' ora, si ricerca in quante ore il Ladro è sopraggiunto, ed a quante miglia di strada.

RISOLUZIONE.

Miglia fatte dal Ladro, al cui termine è raggiunto $=x$; che se il Ladro in un' ora cammina per miglia $=a$, in quante ore farà miglia x? cioè $a:1::x:\frac{x}{a}=$ tempo del ladro. Così se il Padrone cammina miglia b in un' ora, miglia x in quanto tempo le farà? cioè $b:1::x:\frac{x}{b}$, tempo della corsa del Padrone, al quale aggiugnendo il tempo c del suo trattenimento, si avrà una somma de' tempi, uguale al tempo della fuga del Ladro; d'onde de ne naſce l' equazione de' tempi uguali $\frac{x}{a}=\frac{x}{b}+c$, e multiplicando per a, e quindi per b, riſulta $bx=ax+abc$, e per antiteſi $bx-ax=abc$, e dividendo per $b-a$, ſarà $x=\frac{abc}{b-a}$, equazione ultimata, per la cui legittima ſoluzione è neceſſario, che b ſia maggiore di a, come è naturale, che chi raggiugne, cammina più veloce di chi è raggiunto. Sieno $a=3$, $b=5$, $c=4$; ſarà $b-a=2$: però $x=\frac{3\times5\times4}{2}=\frac{60}{2}=30$ miglia di cammino. Ma il ladro fuggì per il tempo $=\frac{x}{a}=\frac{30}{3}=10$ ore, ed il padrone per ore $\frac{x}{b}=\frac{30}{5}=6$, e tanto ſi fanno 30 miglia in 10 ore da chi ne cammina 3 miglia l' ora, come 30 miglia in 6 da chi ne corre 5 in ogni ora: giacchè $3\times10=5\times6=30$.

PROBLEMA III. (*Fig.* 234.)

Uno ſi muove da A verſo B veloce sì, che deſcrive tutta la ſtrada $AB=m$ nel tempo a. Nel medeſimo iſtante parteſi altro da B verſo A con velocità da deſcrivere AB nel tempo b, ſi dimanda il punto C del loro incontro.

RISOLUZIONE.

Perchè tutta la ſtrada $AB=m$, nominando $AC=x$, rimane $BC=m-x$; e ſe A cammina tutta m nel tempo a, la parte x in che tempo ſarà traſcorſa? vuolſi dire $m:a::x:\frac{ax}{m}$, tempo, che il mobile da A perviene in C. Similmente ſe il mobile da B deſcrive tutta m nel tempo b; $m-x=BC$, ſarà deſcritta nel tempo $\frac{bm-bx}{m}$, termine quarto proporzionale dopo $m:b::m-x:$ ec., e ſupponendoſi partiti amendue nel medeſimo tempo, uguali ſaranno i ritrovati tempi fino allo ſcambievol incontro; che però ne naſce l' equazione $\frac{ax}{m}=\frac{bm-bx}{m}$; ed omettendo il comune

deno-

denominatore m, si ottiene $ax=bm-bx$, cioè $ax+bx=bm$, e dividendo per $a+b$, sarà $x=\frac{bm}{a+b}$. Sia $a=15$. $b=10$, ed $m=$ $=300$, sarà $x=\frac{3000}{25}=120$ miglia $=AC$; quindi $BC=180$; d'onde si vede, che gli spazi AC, BC sono nella ragione inversa de' tempi, in cui ciascuno cammina tutta AB; dacchè $15:10$, sono nella ragione inversa di $120:180$, cioè $15:10::180:120$.

PROBLEMA IV.

Due si muovono dal medesimo punto A verso B; il primo con velocità da trascorrere tutta $AB=a$ nel tempo b; il secondo con maggiore velocità descrive a nel minor tempo c; che però in B giunto si ferma pel tempo $=d$; quindi colla medesima velocità ritorna da B verso A; si cerca il luogo C del loro incontro.

RISOLUZIONE.

Si prenda per data $AC=x$, sarà $BC=a-x$; dunque se la via a nel tempo b viene descritta, la via x sarà descritta nel tempo $\frac{bx}{a}$ dal mobile primo. Inoltre, se l'altro mobile descrive a nel tempo c, camminerà la parte $a-x$ nel tempo $\frac{ac-cx}{a}$, il quale di più ha trascorso AB nel tempo c, si è fermato in B pel tempo d, ed è tornato in C nel mentre, che il primo mobile è camminato da A in C nel tempo $\frac{bx}{a}$; che però nasce l'equazione $\frac{bx}{a}=\frac{ac-cx}{a}+c+d$, e riducendo a comune denominatore, che si omette, risulta $bx=ac-cx+ac+ad$, e per antitesi, e spurgando, sarà $bx+cx=2ac+ad$, e dividendo per $b+c$, risulta $x=\frac{2ac+ad}{b+c}$.

Sieno $a=600$, $b=20$, $c=10$, $d=1$, sarà $x=\frac{12600}{30}=$ $=420=AC$, e $BC=a-x=180$ miglia. Quindi il tempo impiegato

piegato dal mobile colla velocità b, sarà $\frac{bx}{a} = \frac{8400}{600} = 14$ giorni, ed il tempo impiegato dal più veloce $c = \frac{ac - cx}{a} = \frac{6000 - 4200}{600} = \frac{1800}{600} = 3$ giorni: dunque il mobile primo, e più tardo camminando 30 miglia al giorno, in 14 giorni scorse la via $x = 420$ miglia, e nel medesimo tempo il più veloce camminò tutta $AC = a$ in 10 giorni, facendo 60 miglia al giorno, si fermò un giorno, che sono 11, e ritornando da B in C in 3 giorni (che in tutto sono 14), rifece la strada $BC = a - x = 180$ miglia $= 3 \times 60$, nel termine del quattordicesimo giorno, nel quale momento l' altro giugne in C, venendo da A.

PROBLEMA V.

Un vaso pieno di acqua resta vuoto nel tempo di un' ora, aprendo il suo primo foro: per il secondo si vuota nel tempo di un' ora, e mezzo, e per il terzo foro in tre ore; si cerca in quanto tempo si verserà tutta l' acqua, aprendo tutti e tre insieme i fori.

SOLUZIONE.

Capacità del vaso $= a$; tempo ricercato $= x$. Facciasi $1 : a :: x : ax$; $1\frac{1}{2} : a :: x : \frac{ax}{1\frac{1}{2}} = \frac{2ax}{3}$; $3 : a :: x : \frac{ax}{3}$; perciò sarà
Acqua, che sorte dal primo foro nel tempo $x = ax$.
Acqua, che sorte dal secondo foro nel tempo $x = \frac{2ax}{3}$.
Acqua, che sorte dal terzo foro nel tempo $x = \frac{ax}{3}$: E perchè dalle date condizioni esser dee $a = ax + \frac{2ax}{3} + \frac{ax}{3}$, togliendo le frazioni sarà $3ax + 2ax + ax = 3a$, cioè $6ax = 3a$, e dividendo per $3a$, risulta $2x = 1$, e dividendo per 2 coefficiente di x, ne nasce il tempo ricercato $x = \frac{1}{2}$, che vuolsi dire, che in

mezza

mezza ora il vaso a rimane vuoto, sortendone l' acqua per tutte e tre le aperture.

PROBLEMA VI.

Da una botte piena di vino ne cavo una misura $= a$, e la riempio di acqua, poscia ne cavo altra misura $= b$, e la riempio di acqua. In terzo luogo cavo altra misura $= c$, e di nuovo la riempio di acqua; qual cosa fatta ritrovo aver nella botte uguale quantità di vino, e di acqua; dimando quanto vi era di vino nella botte prima delle cavate.

Quantità del vino nella botte $= x$.

Avrò dopo la prima cavata nella botte, di vino $= x - a$, ed avrò di acqua $= a$. Seconda volta cavo dalla botte la quantità b di misto: ora per sapere in quel misto b quanto vi sia di vino, dico. Se $x : x - a :: b : \frac{bx - ba}{x}$; dunque nella seconda cavata perdo di vino $\frac{bx - ab}{x}$, qual quantità di vino sottraggo dalla quantità rimasta nella botte prima della seconda cavata, ed avrò nella botte dopo le due cavate di vino $= x - a - \frac{bx + ab}{x} =$
$= \frac{xx - ax - bx + ab}{x}$.

Per sapere ora quanta acqua vi sia cavata nella quantità del misto b, dirò se $x : a :: b : \frac{ab}{x}$ quarto termine ricercato uguale alla quantità dell' acqua uscita nel misto b, qual quantità sottraggo dalla quantità dell' acqua esistente nella botte $= a$, ed avrò per residuo $a - \frac{ab}{x} = \frac{ax - ab}{x}$, e riempio di nuovo la botte di acqua della quantità $= b$, così avrò nella botte di acqua $= \frac{bx + ax - ab}{x}$.

Saravvi adunque dopo due cavate di fluido nella botte

Vino puro $= \frac{xx - ax - bx + ab}{x}$,

Ed acqua pura $= \frac{bx + ax - ab}{x}$; colle quali quantità di vino, e

 di

di acqua, nuovamente la botte è ripiena. Quindi si faccia dalla botte la terza cavata di misto $= c$.

Intanto per sapere, quanto vino vi sia nel misto c, si dica, se nel misto b si è preso vino $\frac{bx-ab}{x}$, quanto nel misto c, cioè $b : \frac{bx-ab}{x} :: c$, e riducendo a comune denominatore il primo antecedente, ed omettendo il denominatore, cioè multiplicando per x (*lib. V.* 383.), sarà $bx : bx-ab :: c : \frac{bcx-abc}{bx} = \frac{cx-ac}{x}$, uguale alla parte del vino cavato nel misto c.

Per sapere quant'acqua vi sia cavata nel misto c; dirò, se nel misto b ho perso $\frac{ab}{x}$, quanto in c, e serbando la medesima regola di sopra, avrò $bx : ab :: c : \frac{abc}{bx} = \frac{ac}{x}$, quale sarà la parte dell'acqua uscita nel misto c.

Ora sottraggo dal vino rimasto nella botte dopo la seconda cavata, cioè $\frac{xx-ax-bx+ab}{x}$, la quantità uscita nel misto c, ed avrò $\frac{xx-ax-bx+ab-cx+ac}{x}$, totale del vino rimasto nella botte, e cavando dalla quantità dell'acqua rimasta nella botte dopo la seconda cavata $= \frac{bx+ax-ab}{x}$ la quantità uscita nel misto c, avrò $\frac{bx+ax-ab-ac}{x}$, ed aggiungendovi la quantità c di acqua, che ho messo nella botte dopo le tre cavate per riempirla, avrò $\frac{bx+ax-ab-ac+cx}{x}$. Mi sarà dunque rimasto nella botte di vino $= \frac{xx-ax-bx+ab-cx+ac}{x}$, e di acqua $= \frac{bx+ax-ab-ac+cx}{x}$, quali due quantità sono uguali; perciò avrò questa equazione $xx-ax-bx+ab-cx+ac = bx+ax-ab-ac+cx$, cioè $xx-2ax-2bx-2cx = -2ab-2ac$, ed aggiungendo il quadrato di $-a-b-c$, sarà $xx-2ax-2bx-2cx+$

+ aa

$+aa+bb+cc+2ab+2ac+2bc=aa+bb+cc+2ab+2ac+$ $+2bc-2ab-2ac$, e spurgando, ed estraendo la radice quadrata, sarà $x-a-b-c=\pm\sqrt{aa+bb+cc+2bc}$, e per antitesi si ottiene $x=a+b+c\pm\sqrt{aa+bb+cc+2bc}$.

Per avere la quantità posta sotto il segno radicale quadrabile la paragono ad un quadrato, per cavarne il valore di a, sarà $aa+bb+cc+2bc=tt+aa-aat$, e per antitesi, $2at=tt-bb-$ $-cc-2bc$, e dividendo per $2t$, sarà $a=\frac{tt-bb-cc-2bc}{2t}$.

Facciasi $t=100$, $b=4$, $c=6$, avremo $a=49\frac{1}{2}$,

Inoltre sarà $x=a+b+c\pm\sqrt{aa+bb+cc+2bc}$, cioè

$$x=\frac{99+8+12}{2}\pm\sqrt{\frac{9801+64+144+192}{4}}$$

$$x=\frac{99+8+12\pm\sqrt{9801+64+144+192}}{2};\text{ vuolsi dire}$$

$$x=\frac{99+8+12+101}{2},\text{ cioè } x=110;$$

Avrò dunque nella botte, tutto vino, la quantità 110.

PROVA.

Vino esistente nella botte $=110$, ne cavo la misura $a=$ $=49\frac{1}{2}$, mi rimane $60\frac{1}{2}=60\frac{55}{110}$; d'indi cavo la quantità uscita nella cavata di b, e sarà $110:60\frac{1}{2}::4:\frac{242}{110}$, cioè $2\frac{22}{110}$, e mi rimane $=58\frac{33}{110}$, da quale quantità ne sottraggo la quantità uscita nel misto c, la quale ritrovasi formando la proporzione $4:2\frac{22}{110}::6:3\frac{33}{110}$; avrò dunque perduto di vino nella cavata $c=3\frac{33}{110}$. Perciò vino rimasto nella botte $=58\frac{33}{110}-3$ $\frac{33}{110}=55$. Acqua posta nella botte $=a+b+c$, sarà $=59\frac{1}{2}$, ne sottraggo la quantità cavata nel misto b, che è $=\frac{ab}{x}=$

$=198$

$=\frac{198}{110}=1\frac{4}{5}$, rimarrà $59\frac{1}{2}-1\frac{4}{5}=57\frac{7}{10}$, dal qual residuo ne sottraggo l'acqua uscita nel misto c, la quale è $\frac{ac}{x}=\frac{297}{110}=$ $=2\frac{7}{10}$, ed il residuo sarà $57\frac{7}{10}-2\frac{7}{10}=55$. Mi è dunque rimasto nella botte, di vino $=55$, di acqua $=55$. Capacità della botte $=110$.

PROBLEMI GEOMETRICI LINEARI.

PROBLEMA VII. (*Fig.* 235. I.ª)

Nel dato triangolo ABC iscrivere un quadrato KGHL.

RISOLUZIONE.

Dal punto verticale dell' angolo A si dimetta AE perpendicolare alla base BC, che dal supposto quadrato KGHL col lato GH parallelo alla base BC venga segata nel punto D.

Sieno AE $=a$, EB $=b$, EG $=c$; sarà BC $=b+c$. Sia AD $=x$, sarà ED $=a-x=$ GH $=$ a ciascun lato del quadrato.

Per ritrovare uno de' suddetti lati, si faccia ne' simili triangoli AEB, ADG, AE : EB : : AD : DG, cioè $a:b::x:\frac{bx}{a}=$ DG.

E ne' triangoli AEC, ADH, AE : EC : : AD : DH, cioè $a:c$ $::x:\frac{cx}{a}=$ DH; e perchè GH $=$ DG $+$ DH $=$ DE, prendendo i valori di quelle linee, sara l' equazione $\frac{bx}{a}+\frac{cx}{a}=a-x$, e multiplicando per a, sarà $bx+cx=aa-ax$, e per antitesi si ottiene $ax+bx+cx=aa$, e dividendo per $a+b+c$, risulta $x=\frac{aa}{a+b+c}$.

COSTRUZIONE. (*Fig.* 235. II.ª)

Si formi qualunque rettilineo angolo R, ed in un lato si prenda RM $=$ AE $+$ BC $=a+b+c$, e quindi appresso MO $=a=$ AE. Nell' altro lato recidasi RN $=a=$ AE. Si tiri la retta MN, a cui

però

però la parallela OT, sarà NT$=x=$AD (527.), o pure si risolva, col Corollario, al num. 529., formando sopra la retta RM$=a+b+c$ un mezzo cerchio, in cui si applichi la corda RF$=a$, e dal punto F si dimetta il perpendicolo FI, sarà RI$=$ $=x=$AD ricercata.

PROBLEMA VIII. (*Fig.* 236. I.ª)

Nel dato mezzo cerchio AMB ritrovare il punto M, d'onde tirata la corda MA, all' estremità A del diametro AB, sia la corda MA al diametro AB$::m:n$.

RISOLUZIONE.

Suppongasi già ritrovato il punto M, d' onde si dimetta MP ordinata, cioè perpendicolare al diametro, e si tirino la corda MA, ed il raggio MC, e siano il diametro AB$=2a$; che però il raggio$=a$, suo quadrato$=aa$. La porzione AP$=x$, suo quadrato $=xx$. Residuo CP$=a-x$, suo $\square=aa-2ax+xx$; quindi PM$=\sqrt{2ax-xx}$. AM$=\sqrt{2ax}$; e ritrovata la corda AM, si faccia la proporzione AM : AB$::m:n$, cioè $\sqrt{2ax}:2a::m:n$, e multiplicando medii, ed estremi, sarà $n\sqrt{2ax}=2am$, e quadrando tutta l' equazione (*Alg.* 107.) $nn\times 2ax=4aamm$, cioè $2nnax=$ $=4mmaa$, e dividendo per $2nna$, sarà $x=\frac{4mmaa}{2nna}$, e spurgando per $2a$ si ottiene $x=\frac{2mma}{nn}$.

Sia $m=2$, sarà $n>m$, come AB$>$AM; però $n=3$, risulta il valore della parte ricercata AP$=x=\frac{2\times 4a}{9}=\frac{4}{9}\,2a=\frac{4}{9}$AB Diametro.

COSTRUZIONE GEOMETRICA.

Il Diametro del dato mezzo cerchio si divida in 9 parti uguali, che sarà $\frac{2a}{9}$ ciascuna parte. Nel termine delle quattro parti, dal punto A, sarà il punto P, ed AP$=\frac{4}{9}\,2a=x$. Si alzi da P la perpendicolare PM, che seghi la circonferenza in M punto ricer-

ricercato, d' onde tirato MA, sarà quella corda al Diametro :: 2 : 3.

PROBLEMA IX. (*Fig.* 236. II.ª)

Essendo data per sito, e grandezza la retta linea AB, ritrovare il punto M, d' onde dimessa l' ordinata MP perpendicolare ad AB, sia il △ APM : △ BPM; o sia □ APM : □ BPM :: $m : n$.

RISOLUZIONE.

Si avverta, che su le medesime basi, ed altezze essendo i triangoli metà de' rettangoli, sono sempre nelle stesse ragioni (*lib.* 1. *p.* 41. 185., & 383.). Che però la soluzione è la medesima per i due rettangoli, e per i due triangoli. Intanto sieno AB $= a$, AP $= x$, PB $= a - x$, PM $= y$; saranno □ APM $= xy$, □ BPM $= ay - xy$, △ APM $= \frac{xy}{2}$, △ BPM $= \frac{ay - xy}{2}$. Che però $xy : ay - xy :: m : n$; si multiplicano medii, ed estremi, si otterrà $nxy = may - mxy$; si divida per y, sarà $nx = ma - mx$, e per antitesi, risulta $nx + mx = ma$, e dividendo per $n + m$, si ottiene $x = \frac{ma}{n+m}$; rimanendo l' incognita y arbitraria., perchè svanita da se.

Si prendano a piacere $m = 3$, ed $n = 5$, sarà $x = \frac{3a}{5+3} = \frac{3a}{8} = \frac{3}{8}a$.

COSTRUZIONE GEOMETRICA.

La data AB si divida in 8 parti uguali, sarà P punto, e termine della terza ottava parte; si alzi quindi alla data AB la perpendicolare PM, come piace sotto, o sopra, e di lunghezza infinita, che ogni suo punto sarà M, ed ogni porzione sarà PM $= y$ arbitraria; in tutti i casi, ed ogni suo punto soddisfarà al Problema, sì de' triangoli, che de' rettangoli.

PRO-

PROBLEMI GEOMETRICI PIANI.

SOLUZIONE, E COSTRUZIONE GENERALE.

Nella prima parte, dal num. 111., fino al num. 116. abbiamo date le regole per risolvere i Problemi quadratici affetti; ma col solo uso del calcolo algebraico: di presente però rimane più facile la costruzione geometrica; dacchè non fa d' uopo quadrare l' equazione, o sterminare il secondo termine, ma si costruisce tal quale dalla data questione proviene. Rinnovando dunque quanto nell'Algebra si è detto al num. 115., che quattro siano le formule quadratiche affette.

I. $xx - ax = bb$.
II. $xx + ax = bb$.
III. $xx - ax = -bb$.
IV. $xx + ax = -bb$. Riducendole a cifra se ne formino di presente due Classi.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{I.} & xx - ax - bb = o. \\ \text{II.} & xx + ax - bb = o.\end{array}\right\}\text{Prima Classe.}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{III.} & xx - ax + bb = o. \\ \text{IV.} & xx + ax + bb = o.\end{array}\right\}\text{Seconda Classe.}$$

Tutte le equazioni della prima Classe, nelle quali ridotte a cifra, il terzo termine è negativo, senza avere alcun riguardo al termine secondo, se negativo sia, o positivo, si costruiscano nella seguente universale maniera.

COSTRUZIONE DELLA PRIMA CLASSE. (*Fig.* 237. I.ª)

Si prenda la retta AC $= \frac{a}{2}$ metà della quantità coefficiente di x nel termine secondo. Centro C col raggio CA si descriva il cerchio AEF, a cui dal punto A si erga la tangente AB perpendicolare al raggio CA (*Lib.* 3. 18. 268.), e sia AB $= \sqrt{bb} = b$ uguale alla quadrata radice del termine terzo, quantità conosciuta. Per lo punto B, e per lo centro C si tiri la secante BCF, fino alla concava periferia in F, sarà sempre BE da B alla convessa in E valore di x, ed altro valore sarà BF: con questa legge, che per lo canone I., valor primario, e positivo egli è BF $=$

$= + x$;

$=+x$; ma valor ſecondario negativo egli è BE$=-x$. Pel Canone poi II. BE è valore poſitivo, e BF negativo.

DIMOSTRAZIONE.

Sia BE$=x$, ſarà BE$+$CE$+$CF$=$BF$=x+a$, eſſendoſi preſo il raggio $=\frac{a}{2}$, e la tangente AB$=b$; ſarà (*Lib.* 3. 36. 286.) $\overline{BA}^2=BE\times BF$, cioè $bb=ax+xx$, e riducendo a cifra $xx+ax-bb=o$, Canone ſecondo.

Sia BF$=x$, ſarà BE$=x-a$; dunque avraſſi $xx-ax=bb$, e riducendo a cifra $xx-ax-bb=o$ Canone primo. Che era ec.

COSTRUZIONE DELLA SECONDA CLASSE. (*Fig.* 237. II.ª)

Si prenda la metà della conoſciuta quantità del ſecondo termine, che ſarà $\frac{a}{2}=AC$, con qual raggio ſi deſcriva, centro C, il cerchio AEF, di cui la tangente AB$=\sqrt{bb}=b$, e per B ſi erga ad AB la perpendicolare BF, che proceda per le parti del centro C, ſegherà il cerchio nella conveſſa in E, e nella concava in F, o ſolamente lo toccherà, o nè lo ſegherà, nè lo toccherà.

In queſto ultimo caſo la ſoluzione è impoſſibile. Nel ſecondo caſo toccando il cerchio in un punto, i due valori di x ſi riducono in un ſolo, e nel primo i due valori di x, ſaranno BE, & BF.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè ſi ſono preſi CA$=\frac{1}{2}a$, ed AB$=b$; condotta CD parallela alla tangente BA, e tirati i raggi CE, CF, ſarà (3. 3. 253.) DF$=$DE$=\sqrt{\frac{aa}{4}-bb}$; poichè CE$=$CA$=\frac{a}{2}$, e CD$=$AB$=b$, e $\overline{DE}^2=\overline{CE}^2-\overline{CD}^2=\frac{aa}{4}-bb$ (198.); ed eſſendo BD$=$AC$=\frac{1}{2}a$, ſarà BF$=$BD$+$DF$=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{aa}{4}-bb}$

è BE

e $BE = BD - DE = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$; quindi pel canone III. egli è $BF = x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$; dacchè per antitesi risulta $x - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, e quadrando sarà $xx + \frac{aa}{4} - ax = \frac{aa}{4} - bb$, e spurgando, e riducendo a cifra, si ottiene $xx - ax + bb = o$, canone III.; ed anche $BE = x = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$; conciossiachè per antitesi sarà $x - \frac{a}{2} = - \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, e quadrando sia $xx + \frac{aa}{4} - ax = \frac{aa}{4} - bb$, e spurgando, e riducendo a cifra sarà $xx - ax + bb = o$, canone III., nel quale tutti e due i valori sono positivi $+ x$.

Dimostrazione del Canone IV.

Facciasi $BE = - x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, sarà per antitesi $- x - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, e quadrando $xx + \frac{aa}{4} + ax = \frac{aa}{4} - bb$, e spurgando, e riducendo a cifra, $xx + ax + bb = o$, canone IV. Inoltre si faccia $BF = - x = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, e per antitesi, $- x - \frac{a}{2} = - \sqrt{\frac{aa}{4} - bb}$, e quadrando risulta $xx + \frac{aa}{4} + ax = \frac{aa}{4} - bb$, e spurgando, e riducendo a cifra, $xx + ax + bb = o$ canone IV., in cui tutti due i valori di x sono negativi, e falsi $- x$, non già, che siano impossibili; ma che prender si vogliono alla parte contraria.

Corollario.

Da tutto ciò ne siegue, che nella classe seconda in amendue i canoni III., e IV. se $\frac{a}{2} > b$, la questione proposta ha due diversi valori di x, ed il cerchio dalla perpendicolare BF sarà reciso in E, ed F. Se poi $\frac{a}{2} = b$, il cerchio avrà per tangente la perpendicolare BF, e i due valori di x saranno uguali tra loro. Finalmente se $\frac{a}{2} < b$, la perpendicolare BF caderà fuori del cerchio, ed il Problema proposto non può avere soluzione alcuna.

PROBLEMA X. (*Fig.* 238. I.ª)

Nel dato mezzo cerchio adattare la retta PM nel punto P perpendicolare al diametro AB, di maniera che PM colla porzione AP formino una lunghezza uguale alla data retta linea b.

RISOLUZIONE.

Sieno raggio DA$=a$, DP$=x$, sarà AP$=a-x$, e nel triangolo rettangolo DPM, sarà PM$=\sqrt{aa-xx}$; dunque AP+PM$=$ $=b$, cioè $a-x+\sqrt{aa-xx}=b$, e per antitesi (*Alg.* 97.) $\sqrt{aa-xx}=b+x-a$, e quadrando, risulta $aa-xx=bb+aa+$ $+xx-2ab+2bx-2ax$, e spurgando, $2xx+2bx-2ax+bb-$ $-2ab=o$, e dividendo per 2 si ottiene $xx+bx-ax-ab+$ $+\frac{bb}{2}=o$, equazione, che dalle quantità date puote appartenere a canoni diversi; imperocchè se sarà dalle date quantità $ab>\frac{bb}{2}$, cioè $2ab>bb$, e dividendo per b, $2a>b$. Di più $bx>$ $>ax$, e dividendo per x, $b>a$, l'equazione finale si appartiene al canone II.; dacchè trattate le cognite quantità a, & b, ne risulta $xx+bx-bb=o$.

Se poscia fosse $bx<ax$, & $ab<\frac{bb}{2}$, allora l'equazione sarebbe del canone III. $xx-bx+bb=o$.

Ma se $bx>ax$, & $ab<\frac{bb}{2}$, allora sarebbe del IV. canone $xx+bx+bb=o$, e per lo troppo essere $2a<b$, potrebbe anche la soluzione essere impossibile, ed il cerchio nè reciso, nè tocco dalla perpendicolare BF, nella costruzione superiore della seconda classe.

Final-

Finalmente se $bx<ax$, & $ab>\frac{bb}{2}$, allora
de dal canone I. $xx-bx-bb=o$. Laonde col
delle date quantità, che sono il raggio $=c$
e la data retta linea $=b$, tosto si detern
l'equazione appartiene.

PROBLEMA XI.

Essendo dato un mezzo cerchio ADEB, e
metro BA dato di fuori il punto C; ritrova
concava circonferenza, a cui da C tirata l
la convessa in D, sia DE corda interna a
mezzo cerchio $::m:n$.

RISOLUZIONE.

Siano diametro $AB=a$; porzione ester
$CB=a+b$, secante $CE=x$, e per la propri
3. 36. 286.) essendo $CE\times CD=CB\times CA$,
$CE:CB::CA:CD$, cioè $x:a+b::b:\frac{ab+bb}{x}=$
sendo $DE=CE-CD$, sarà $DE=x-\frac{ab-bb}{x}=$
esser dee $DE:AB::m:n$; cioè $\frac{xx-ab-bb}{x}$:
(383.) $xx-ab-bb:ax::m:n$, e multiplican
mi, $nxx-nab-nbb=max$, e dividendo per n c
sulta $xx-ab-bb=\frac{max}{n}$, e per antitesi $xx-\frac{m}{}$
appartiene al canone I.

PROBLEMA XII.

Si dee costruire un triangolo rettangolo,
l'eccesso del cateto maggiore BC sopra il m
ipotenusa AC sopra il maggior cateto BC.

RISOLUZIONE.

Eccesso del maggiore ſopra il cateto minore $BC-AB=a$, Eccesso dell' ipotenuſa ſopra il cateto maggiore $AC-BC=b$; Sia cateto maggiore $=BC=x$, ſuo $\square=xx$. Dunque il cateto minore $AB=x-a$, ſuo $\square=xx+aa-2ax$. E l' ipotenuſa $AC=x+b$, ſuo $\square=xx+bb+2bx$. Dunque (*Lib.* 1.47.195.) $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2+\overline{AB}^2$, cioè $xx+bb+2bx=xx+xx+aa-2ax$, e riducendo a cifra, $xx-2ax-2bx+aa-bb=o$, cioè $xx-2ax+aa=o$, equazione, in cui eſſendo il ſecondo termine $-2bx-bb$ negativo, ſe $a>b$, ſi appartiene al canone III.; ma ſe $a<b$ s' appartiene al canone I.. Se finalmente $a=b$, la equazione diverrà, ſoſtituendo a per b, $xx-2ax-2ax+aa-aa=o$, cioè ſpurgando $xx-4ax=o$; vale a dire $xx=4ax$, ed $x=4a$, e farà l' ipotenuſa $x+b=5a$, ed il minore cateto $x-a=3a$, che è il primo Pitagorico triangolo, che in numeri intieri formare ſi poſſa, la cui ipotenuſa ſi è 5. parti, il maggior cateto 4., ed il minore 3., d' onde $\overline{5}^2=\overline{4}^2+\overline{3}^2$, cioè $25=16+9$.

TRAT-

TRATTATO DE' SOLIDI.

DEFINIZIONE I. (*Fig.* 243. II.ª)

1. Il solido corpo è quello, che ha lunghezza AD, larghezza DC, ed altezza DF.

DEFINIZIONE II. (*Fig.* 247.)

2. I termini del solido sono le superficie CG, GB, GF, ec. ovvero una superficie sola (*Fig.* 244.).

DEFINIZIONE III. (*Fig.* 272.)

3. La retta linea AB nomasi retta, o sia perpendicolare al piano CEFH, quando con tutte le rette linee CAF, DAG, EAH, che la incontrano in A, e sono nel soggetto piano, forma retti gli angoli CAB, DAB, ec.

DEFINIZIONE IV. (*Fig.* 273.)

4. Il piano FGA, è retto, cioè perpendicolare al piano FGE, quando in uno de' piani le tirate rette linee BC perpendicolari al comune taglio FCG de' piani medesimi, saranno perpendicolari anche all' altro piano, come sono le due rette BC, DC formanti lo angolo retto BCD.

DEFINIZIONE V. (*Fig.* 256.)

5. Inclinazione della linea retta ad un piano è quando dal sublime termine C della retta inclinata linea CB, viene dimessa altra linea CA perpendicolare al medesimo piano FE; quindi dal punto A, in cui il perpendicolo cade, si tiri per esso piano la linea AB, che formando in A lo angolo (*Def.* 3. *num.* 3.) retto, forma in B lo angolo acuto ABC, che dicesi angolo d'inclinazione, oppure misura della inclinazione fatta dalla obliqua CB sopra il piano FE.

DEFINIZIONE VI. (*Fig.* 243. I.ª)

6. Inclinazione di un piano BD ad altro piano BF, egli è l' angolo acuto ABC, o sia DEF, formato da due piani BD, BF, nel comun segamento BE de' medesimi piani.

DEFINIZIONE VII.

7. Il piano al piano è detto similmente inclinarsi, che l' altro all' altro, quando gli angoli delle inclinazioni sono uguali tra loro.

DE-

DEFINIZIONE VIII. (*Fig.*261.)

8. I piani GHDC, ed FEAB sono paralleli; vuolsi dire equidistanti tra loro, quando sempre conservano le uguali distanze GF, DA ec., e però ampliati quanto si vuole, non mai si congiungono insieme.

DEFINIZIONE IX.

9. Solide figure simili sono quelle, che vengono contenute (*Def. II. n.* 2.) da simili piani, uguali di numero, e similmente locati.

DEFINIZIONE X.

10. Simili solide figure, ed uguali sono quelle, che si contengono da' piani simili, ed uguali di numero, e di grandezza.

DEFINIZIONE XI. (*Fig.*240.)

11. Angolo solido in A è la inclinazione di più che di due rette linee non esistenti nel medesimo piano, e che si congiungano nel medesimo punto A.

Ovvero angolo solido è un incontro di più angoli piani nel comune punto A; purchè loro somma sia minore di quattro retti; altrimenti formerebbono una piana superficie, come fu dimostrato nel primo libro al num. 33.

DEFINIZIONE XII. (*Fig.*241.)

12. La piramide è una figura solida, compresa da' piani, la quale da un piano si riduce ad un punto solo; vuolsi dire, che la piramide è un solido corpo BCDA, compreso da un piano, e base BDC, e da' triangoli BCA, BDA, CDA concorrenti nel vertice A.

DEFINIZIONE XIII. (*Fig.*243.I.°)

13. Il prisma è una solida figura, da' piani compresa, e de' quali due, che sono opposti, sono simili, uguali, e paralleli, ma gli altri sono parallelogrammi.

Cioè il prisma è un solido corpo generato da qualunque piano ABC, che sempre parallelo a se stesso, scorra per lungo la medesima retta AD, e si fermi in DEF. Il piano generante, che scorre, forma le due simili basi, e dal numero de' suoi lati il prisma si dice triangolare, quadrato, ec.. I lati poi AB, AC, BC del generante piano, quanti sono per numero, formano altrettanti parallelogrammi ABED, ADFC, CBEF, dai quali il solido chiuso ne viene.

COROLLARIO. (*Fig.*243.II.°)

14. E perchè, dove il generante piano ABCD è un parallelogrammo, che scorra per la linea DF, allora il solido generato,

viene

viene da tutte le parti compreso da parallelogrammi piani, a due a due opposti tra loro uguali, e paralleli; viene perciò tale corpo denominato parallelepipedo, rettangolo, se il generante piano è un rettangolo; ma obliquangolo, se è una romboide il generante piano.

Definizione XIV. (*Fig.* 244.)

15. La sfera è una solida figura da una sola superficie curva compresa, e si concepisce generata dal mezzo cerchio, che si aggira d'intorno allo immobile suo diametro, fin a tanto che la semicirconferenza ritorni al medesimo luogo, dal quale cominciò a muoversi.

Definizione XV.

16. Asse della sfera è quella retta linea AB, o sia lo immobile diametro, intorno a cui il generante mezzo cerchio ACB fece lo intero giro.

Definizione XVI.

17. Il centro della sfera è il medesimo, che il centro del mezzo cerchio.

Definizione XVII.

18. Il diametro della sfera è ogni retta linea, che passa per lo centro, e dall'una, e dall'altra parte, e terminata dalla superficie della sfera.

Definizione XVIII. (*Fig.* 245.)

19. Il cono ABD è una figura compresa, quando stando fermo un lato del triangolo rettangolo, di quelli, che sono d'intorno all'angolo retto, il triangolo si gira, fin tanto che di nuovo sia riportato al medesimo luogo, dal quale cominciò a muoversi, e se la linea retta, che sta ferma, è uguale all'altro lato, che si gira d'intorno all'angolo retto, il cono sarà rettangolo, ovvero ortogonio; ma se è minore, sarà ottusiangolo, e se è maggiore, sarà acutangolo.

Defi-

DEFINIZIONE XIX.

20. L' asse del cono è la linea retta, che sta ferma, d' intorno alla quale il triangolo si gira.

DEFINIZIONE XX.

21. Ma la base è il cerchio descritto dalla linea retta, che si gira.

DEFINIZIONE XXI. (*Fig.* 246.)

22. Il cilindro è una figura DCFE compresa, quando stando fermo un lato AB del parallelogrammo ADCB ortogonio, il parallelogrammo si giri, insino a tanto che di nuovo torni al medesimo luogo, dal quale cominciò a muoversi.

DEFINIZIONE XXII.

23. L' asse del cilindro è la linea retta, che sta ferma, d' intorno alla quale il parallelogrammo si gira.

DEFINIZIONE XXIII.

24. La base, sono i cerchi descritti dalli due lati opposti, che si girano.

DEFINIZIONE XXIV.

25. I coni, e cilindri simili sono quegli, de' quali gli assi, e diametri delle basi hanno la medesima proporzione.

DEFINIZIONE XXV. (*Fig.* 247.)

26. Il cubo è una figura solida CH, contenuta da sei quadrati uguali.

La spiegatura del cubo, espressa si vede nella *Fig.* 248.

DEFINIZIONE XXVI. (*Fig.* 241.)

27. Il tetraedro, o piramide regolare, è una figura solida, compresa da quattro triangoli uguali, ed equilateri.

Nella *Figura* 242. si vede espressa la spiegatura del tetraedro.

DE-

Definizione XX

28. L'ottaedro è una figura solida compre
uguali, ed equilateri.

Il disegno de' triangoli di sua superficie,
ra 256.

Definizione XX

29. Il dodecaedro è una figura solida, che è
ci pentagoni uguali, equilateri, ed equiango
piano si mirano nella *Fig.* 253.

Definizione XX

30. L'icosaedro è una figura solida, che
ti triangoli uguali, ed equilateri, la cui spie
la *Fig.* 255.

Avvertiment

Essendovi molti teoremi nell' undecimo libr
to difficili a dimostrarsi per astratta teoria, al
perando le linee, ed i piani opportuni; per
sime verità, prender si deono come assiomi.

Assioma I.

31. Della retta linea MD, non mai la p
sere stesa sopra il piano EF, e l'altra parte I
blime, conciosiachè gli angoli MBC, CBD,
te MB dirittamente (*Post.* 2. 86. *lib.* 1.), ne
MBC due rette linee MB, BC.

Assioma II.

32. Ogni triangolo rettilineo è tutto in u
essendo una figura piana; e perciò comunque
CD si seghino insieme, saranno sempre nel n

Assioma III.

33. Se due piani si segano tra di loro, il

mm

è una linea retta, perciocchè essendosi definita la piana super-
ficie generata dal flusso di una retta linea (*lib.* 1. *def.* 7. *n.* 9.), perciò ogni sezione di due piani è la medesima retta linea genitrice de' piani.

ASSIOMA IV. (*Fig.* 258.)

34. Se una linea retta EF è perpendicolare in E a due rette linee AB, CD segantesi in E, sarà EF anche perpendicolare al piano, che passa per le medesime rette linee; locchè chiaramente si vede, per essere le dette rette nel medesimo piano (*num.* 32.)

Ciò però non si avvera, qualora EF fosse perpendicolare alla sola AB; dacchè il piano ADBC potrebbe girarsi intorno allo asse AB, e però sempre EF conservarsi perpendicolare alla linea AB, e non già al piano; dunque acciocchè EF sia perpendicolare al piano ADBC, è necessario, che alla cadente EF siano perpendicolari almeno tre rette linee esistenti nel piano istesso, o veramente due, che si seghino tra di loro nel medesimo piano.

ASSIOMA V. (*Fig.* 259.)

35. Se una linea retta EF è perpendicolare a tre rette linee AE, DE, BE, che convengono nel punto E, saranno le convenienti tre rette linee in un medesimo piano; rimane dimostrato dal numero superiore.

ASSIOMA VI. (*Fig.* 260.)

36. Se due rette linee AB, CD, sono perpendicolari al medesimo piano EF, sono anche parallele tra loro; conciosiachè tirando la retta BD, a quella sono perpendicolari le date AB, CD (*n.* 3.); perciò sono parallele tra loro (*Lib.* 1. *n.* 77.).

ASSIOMA VII.

37. Ogni angolo solido è contenuto da' piani angoli, de' quali la somma è minore a quattro angoli retti. Conciosiachè quattro angoli retti $=360^{\circ}$ formano un perfetto piano d'intorno ad un punto, centro del cerchio, che si descrive da quel punto, come suo centro (*lib.* 1. 129.).

As-

ASSIOMA VIII.

38. Qualsivoglia solido corpo, sia cubo
nel suo valore, in riguardo alla propria soli
nel prodotto della base GFEH, multiplicat
GC=FB=EA=HD; laonde nominando della l
$=a$, larghezza GH$=b$, sarà (175.) base GFE
mando l' altezza del solido, GC=BF ec. $=c$
sta per la base ab, otterrassi del corpo la so
onde a, b, c sono le tre dimensioni del co
se GC=GH=GF$=a$, sarebbe il solido un c

ASSIOMA IX.

39. E perchè qualsivoglia obliquangola fig
dotto (175. *lib.* 1.) della base nella sua alte
così de' rombi, che delle romboidi; perciò
rallelepipedo da rombi, o da romboidi com
nella sua altezza, è uguale al prodotto della
se $=a$ multiplicata per b, larghezza perpend
della base ab multiplicato per c, perpendicol
po, il quale sempre sia $=abc$.

COROLLARIO.

40. Quindi è, che del cubo AHCF, ave
qualunque sia FG$=a=5$, si ottiene la solidi
do, cioè cubando il suo lato, e sarà cubo A
$=5\times5\times5=125$; perciò a^3, o sia 125, nomi
te 5, si dice lato del cubo, o veramente r

PROPOSIZIONI

TEOREMA.

41. Il solido cubo a^3, lo cui lato a veng
ti m, & x, è uguale al cubo m^3 di una pa
x^3 dell' altra parte, e di più a tre parallelep
se il quadrato mm, & x per altezza, cioè
te con più $3mxx$, triplice parallelepipedo co
ta base xx, e dall' altezza m.

DIMOSTRAZIONE.

Sia $a = m + x$; dunque quadrando, sarà (*Alg.* 41. 88.) $aa = mm + 2mx + xx$; quindi cubando (*Alg.* 41. 88.), sarà $a^3 = m^3 + 3mmx + 3mxx + x^3$, che era ec.

ANNOTAZIONE.

42. Quando si tratta di ritrovare la radice cubica (*Alg.* 57.), questo appunto si cerca di ritrovare il lato del cubo proveniente dalle tre dimensioni, o dalla triplice multiplicazione di quel suo lato.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA II. (*Fig.* 261.)

43. Ogni parallelepipedo DF, ove diviso venga da un piano, che passa per le corrispondenti diagonali AC, EG delle sue opposite basi, viene diviso in due uguali prismi triangolari ACF, EGD.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè le opposite basi, superiore BD, inferiore FH, sono due simili, ed uguali parallelogrammi (*n.* 38.), rimangono dalle corrispondenti diagonali AC, & EG divise in quattro uguali triangoli (*lib.* 1. 34. 172.) $ABC = FGE = ACD = EGH = ab$, prendendo per a le uguali basi, e per b la metà delle altezze de' triangoli, ma del parallelepipedo DF sono uguali le quattro altezze $BF = AE = CG = DH = c$; dunque multiplicando il triangolo $EGF = ab$ per altezza $GC = c$, si ottiene il solido prisma $ACF = abc$, e multiplicando il triangolo $EGH = ab$ per la medesima altezza $GC = c$, si ottiene l'altro solido prisma triangolare $EGD = abc = ACF$, altro prisma triangolare, che era quanto ec.

COROLLARIO I. (*Fig.* 243, I.ª)

44. Da quì nasce, che per trovare la solidità di un prisma triangolare, fa d'uopo multiplicare il piano ab della sua base per l'altezza c, ed il prodotto abc sarà il valore del prisma. Quindi

Quindi è, che lo stesso valore si ottiene, se un parallelogrammo AF si piglia per base del prisma, la di cui lunghezza FC$=c$. La larghezza CA$=a$; onde base ADFC$=ac$ si multiplica per b, semialtezza del prisma, si ritrova lo stesso valore del medesimo prisma AEC$=abc$.

COROLLARIO II.

45. Ed adoprando il medesimo raziocinio, chiaramente si vede, che tutti i prismi, e parallelepipedi, e coni, e piramidi, e qualunque sieno altri solidi, che hanno la medesima base, e la medesima altezza, sono uguali tra di loro rispettivamente.

COROLLARIO III.

46. Se poscia un prisma ha per base un pentagono, o esagono ec., si trova la loro solidità, multiplicando il raggio retto per la metà de' lati della base, e questo prodotto, uguale a tutta la base (*Lib.* 4. 18. 334.), coll' essere multiplicato per l' altezza del prisma, si ottiene in questo ultimo prodotto la sua solidità.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA III. (*Fig.*263.)

47. Tutti li prismi triangolari ACFD contengono tre uguali piramidi ABCF, EDBF, BCDF.

DIMOSTRAZIONE.

Sono uguali le due piramidi BEDF, FABC, come quelle, che hanno le uguali basi ABC, DEF triangoli uguali, e basi del prisma, ed hanno inoltre la stessa altezza, essendo amendue situate tra i piani paralleli ABC, DEF; ma la piramide BCDF è uguale alla piramide BCAF, come quelle, che hanno uguali le basi CDF, CAF, triangoli nati dalla divisione del rettangolo AD per la diagonale CF; e sono nella medesima altezza comune nel punto B. Dunque tutte e tre le piramidi sono uguali tra loro (*l.* 1. *Ass.* 1. 91.); epperò tutto il prisma ACFD contiene in se tre uguali piramidi triangolari.

COROLLARIO I.

48. Dunque tutti li prismi di base poligona potendosi dividere in tanti prismi triangolari della medesima altezza, e questi ciascuno in tre piramidi uguali, ne avviene, sommando, che ogni prisma di base poligona è triplo della piramide avente la medesima base, e la medesima altezza.

COROLLARIO II.

49. E perchè i cilindri sono prismi di tanti lati, ed angoli, ed i coni sono piramidi di tanti lati, ed angoli, quanti ne contengono i cerchi, che sono basi loro, ed i cerchi sono poligoni di lati, ed angoli infiniti (*Lib.* 4. *ec.*), ne siegue da ciò, che prendendo i cilindri per prismi infinitangoli, ed i coni per piramidi infinitangole, egli è nella stessa maniera ogni cilindro tre volte maggiore del cono, ove abbiano la medesima base, e la medesima altezza; però il cono è il terzo del cilindro.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA IV. (*Fig.* 264.)

50. Le solide simili figure della medesima specie tra loro, ove hanno la medesima altezza, sono in ragion delle basi.

Secondo. Ed ove si trovano avere le basi medesime, sono in ragion delle altezze.

DIMOSTRAZIONE I.

Del solido AB, e del solido CD sieno le altezze EB$=$FD$=a$, e perchè si suppongono diverse le basi, sia della base AE del solido AB, lunghezza AH$=c$, larghezza EH$=b$ (39.); dunque base AE$=bc$, epperò il solido AB$=abc$ (38. 39. 40.).

Del solido CD sia di sua base lunghezza CG$=m$: larghezza (*num.* 39.) FG$=n$, sarà sua base CF$=mn$: quindi il solido CD$=amn$; dunque delle due ritrovate equazioni una proporzione formando, sarà solido AB : CD :: $abc : amn$, e dividendo la seconda ragione, per lo comune divisore a, si ottiene AB : CD :: $bc : mn$ :: base AE : CF base.

Di-

Sieno uguali le basi de' due solidi, che ridotte ad un quadrato $=aa$, perchè rettilinei uguali (538.), saranno le basi AE$=$CF$=aa$. Sieno le diverse altezze nel solido AB, altezza $=$BE$=b$, sarà tutto il solido AB$=aab$.

Del solido CD, sia l'altezza FD$=m$, sarà solido CD$=aam$; dunque per le due ritrovate equazioni sarà solido AB : CD solido :: $aab : aam$, e dividendo la seconda ragione per lo comune divisore aa, ne risulta AB : CD :: $b : m$ :: altezza EB : altezza FD.

COROLLARIO.

51. Dunque tutte le solide figure della medesima specie prese, sono uguali tra loro, ove abbiano uguali le basi AE$=$CF$=aa$, ed uguali le altezze EB$=$FD$=b$; conciosiachè essendo (38.) solido AB$=aab$, e solido CD$=aab$, sarà AB$=aab=$CD; vuolsi dire uguali sono le figure solide della medesima specie, ove uguali hanno le basi, ed altezze.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA V. (*Fig.* 264.)

52. I solidi parallelepipedi AB, CD simili, e così i prismi, piramidi, coni, cilindri ec., sono in triplicata ragione, cioè come i cubi de' lati omologi.

DIMOSTRAZIONE.

Siano del solido AB, della base, lunghezza AH$=a$, larghezza EH$=c$; del solido altezza EB$=m$; del solido CD, sieno lunghezza CG, della base $=b$, larghezza GF$=d$; del solido altezza FD$=f$; e perchè sono simili solidi, hanno i lati omologi proporzionali, cioè ne' simili piani EA, FC, sarà $a:b::c:d$; onde $d=\frac{bc}{a}$, e ne' simili piani BH, GD, parimente sarà $c:d::$ $::m:f$, e sostituendo il valore di d, sarà $c:\frac{bc}{a}::m:f$, d'onde de $f = \frac{bcm}{ac} = \frac{bm}{a}$. Ma i solidi AB$=acm$, & CD$=bdf = \frac{bbdm}{a} =$ $= \frac{b^3cm}{aa} =$CD.

Però AB : CD : : $acm : \frac{b^3cm}{aa}$, e dividendo la seconda ragione per lo comune cm, e multiplicandola per aa, si ottiene AB : : CD : : $a^3 : b^3$, che era ec.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA VI. (*Fig.* 266.)

53. La superficie de' parallelepipedi, ed anche de' prismi, qualunque sieno, ma retti, eccettuatene le basi superiore, ed inferiore, è uguale al rettangolo BC, la cui base BD sia uguale al perimetro HE della base del solido, e l' altezza DC del rettangolo uguale all' altezza AH del solido.

DIMOSTRAZIONE.

Sia il solido prisma AE, il cui perimetro della base $=a$; vuolsi dire, che si suppone un esagono regolare. Sia l' altezza del solido AH$=b$; dunque per costruzione egli è DB$=a$, & DC$=b$: ma la somma de' sei lati multiplicati per l' altezza del solido formano sei rettangoli (*lib.* 2. *prop.* 1.) uguali al rettangolo BC, la cui base sia uguale a' sei lati del perimetro HE, e la cui altezza DC$=$AH$=b$; sarà dunque la superficie del solido, toltene le due basi, uguale al rettangolo BC, che è quanto a dire superficie del solido $=6ab=$BD$\times$DC, che era ec.

COROLLARIO I.

54. Che se i solidi fossero obliqui, cioè romboidi, o rombi; allora la superficie del solido è uguale ad un rettangolo, che uguaglii il piano di que' parallelogrammi, che eretti chiudono il solido; locchè facilmente si può eseguire con quanto si è dimostrato sì nel primo, che nel sesto libro.

Co-

COROLLARIO II.

55. E perchè il cubo, comprese le sue basi, viene chiuso da sei quadrati uguali; perciò la intera superficie sua è uguale ad un rettangolo, la cui base sia sestupla del lato del cubo, e l'altezza del rettangolo uguale al lato istesso del cubo.

COROLLARIO III.

56. E bramando avere de' mentovati solidi la superficie intera, compresevi anche le basi, si puote usare quanto si è dimostrato nel Libro sesto a' num. 538. 539., e così ridurre le due basi in un quadrato, diciamo cc; quindi prendendo l' altezza $DC=b$ del ritrovato rettangolo si faccia la proporzione $\div b:c:m=DF$. Questa linea ritrovata DF si aggiunga alla base BD, e su la composta BF coll' altezza $DC=b$, il nuovo rettangolo si compie, e sarà uguale a tutta la superficie del solido corpo: conciosiachè essendo le due basi superiore, ed inferiore nel solido formate, uguali al quadrato cc, ed instituita la proporzione $\div b:c:m$, cioè $DC:c::c:DF$, sarà (401.) $cc=DC \times DF$.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA VII. (*Fig.* 267.)

57. La superficie d' una piramide retta ABE è uguale al triangolo rettangolo HGI, la cui base GI sia uguale al perimetro della base del solido, e l' altro cateto GH uguale al perpendicolo, che dal vertice della piramide cade alla base di uno de' suoi triangoli, supponendoli tutti simili, ed uguali, ed escludendo dalla superficie il regolare poligono formante la base del solido.

DIMOSTRAZIONE.

Perchè si suppongono simili, ed uguali i triangoli ABD, BDE, ec. della piramide, e l'altezza del triangolo HGI, ella è GH uguale all' altezza del triangolo BDE; saranno $\triangle HGI : \triangle BDE :: GI : DE$; ma quanti lati ha la base del solido, tanti uguali triangoli chiudono il solido istesso, sieno v. g. sei, sarà $DE : GI :: 1 : 6$; dunque il solo triangolo HGI è uguale a sei triangoli BDE, vuolsi dire a tutta la superficie della piramide retta, toltone il regolare piano, che forma sua base.

Annotazione.

58. E bramando avere anche nella superficie compresa la base, si osservi il corollario terzo precedente, num. 56.

Corollario.

59. E perchè un cono retto considerare si dee come una piramide di lati infiniti, ed un cilindro come un prisma di lati parimente infiniti, perciò tanto il cono, quanto il cilindro sono uguali nella loro superficie, il cono ad un triangolo, ed il cilindro ad un rettangolo, de' quali la base sia una linea retta uguale alla circonferenza del cerchio, base del solido, e l'altezza per la superficie del cono sia il suo lato, e per la superficie del cilindro sia l' altezza del solido istesso.

PROPOSIZIONE VIII.

Teorema VIII. (*Fig.* 268.)

60. Ogni emisfero è uguale a due terzi della solidità del cilindro, in cui è inscritto, cioè ove mezza sfera, e cilindro abbiano la stessa base, e la medesima altezza.

Dimostrazione.

Nel quadrato ABCD, centro C, sia inscritto il quadrante DGB, e condotta la diagonale CA, e si concepisce la figura rivolgersi d' intorno allo immobile lato, ed asse CD, saranno formati i solidi corpi; dal quadrato un cilindro, dal quadrante una mezza sfera, e dal triangolo DCA un cono retto, ed avranno tutti e tre i solidi la medesima altezza CD, e la medesima base BC=AD.

Perlochè recidendoli tutti e tre con tanti piani paralleli alla base, di maniera che formati vengano tanti solidi, de' quali l'altezza sia minima, cioè piccola infinitamente, saranno i tagli uguali per numero in tutte e tre le solide figure; sia un taglio indicato da qualunque retta EH; sarà EH semidiametro del troncato cilindro EG dello emisfero, & EF del cono: quali tre raggi sono

sono i generatori di tre cerchi, del cilindro, dell'emisfero, e del cono; e perchè minime, ed uguali sono le altezze, saranno le tre recise solidità minime, del cilindro, dell' emisfero, e del cono, come cerchio raggio CG=EH=CD, come cerchio raggio EG, come cerchio raggio EF; cioè (551.) :: $\overline{CG}^2$ :: $\overline{EG}^2$ :: $\overline{EF}^2$; ma nel triangolo CDA, alla cui base DA è parallela EF, egli è (*Lib. 6. prop. 2.*) CD : DA :: CE : EF, ed essendo per costruzione CD=DA, sarà CE=EF; dunque sostituendo saranno gli elementi de' tre solidi, cioè le loro minime fatte sezioni del cilindro, dell' emisfero, e del cono :: $\overline{CG}^2$ :: $\overline{EG}^2$ :: $\overline{CE}^2$; e dacchè (568.) il cerchio raggio CG=EG+CE, prendendo questi come raggi de' propri cerchi, nel triangolo rettangolo CEG, sommando tutte le sezioni fatte, saranno cilindro, base CG = emisfero + cono, basi EG+ +CE (50.); ma il cono è una terza parte del cilindro (49.); dunque resta all' emisfero essere uguale a due terze parti del cilindro, ove abbiano uguali basi, ed altezze, che era ec.

Corollario I.

61. E dacchè multiplicando per 2 lo emisfero, la sfera intera si viene a formare, ed essendo cilindro ad emisfero :: 3 : 2, sarà cilindro alla sfera :: 6 : 4 :: 3 : 2. Ella è adunque la sfera uguale a due terze parti del cilindro, ove abbiano uguali basi ed altezze.

Corollario II. (*Fig.* 269.)

62. Quindi avviene, che la scodella, lo cui taglio BGDAF rimane avanzo del cilindro, avendone tolto lo emisfero, ed ella è $=\frac{1}{3}$ del cilindro; ma il cono $=\frac{1}{3}$ dello stesso cilindro; dunque scodella, e cono sono uguali tra loro.

Proposizione IX.

Teorema IX. (*Fig.* 270.)

63. Le sfere sono tra loro per solidità, come i cubi de' loro diametri.

Di-

DIMOSTRAZIONE.

Sieno cerchio AFB$=cc$, suo diametro AB$=a$, cerchio CED$=dd$, suo diametro CD$=b$; e perchè multiplicando il diametro AB$=a$ per lo cerchio AFB$=cc$, sarà formato il cilindro $=acc$ della medesima base, ed altezza colla sfera, diametro AB (60.); e multiplicando il diametro CD$=b$ col cerchio suo CED$=dd$, si forma un cilindro bdd della medesima base, ed altezza colla sfera, diametro CD; ma ciascuna sfera è due terzi del suo cilindro, in cui è inscritta; perciò sfera AB $=\frac{2acc}{3}$, e sfera CD$=\frac{2bdd}{3}$, (61); dunque sfera AB : sfera CD $::\frac{2acc}{3}:\frac{2bbd}{3}::acc:bdd$ (383. *lib.* 5.) ma il cerchio cc al cerchio dd, come li quadrati $aa:bb$ de' loro diametri (551.), sarà $cc:dd::aa:bb$, e sostituendo di sopra questa seconda per la sua prima ragione, si ottiene sfera AB : sfera CD $::a^3:b^3$, che era ec.

COROLLARIO.

64. Colla maniera medesima dimostrare si puote, che i prismi, le piramidi, i cilindri, ed i coni, simili tra di loro sono, come i cubi, cioè in triplicata ragione delle corrispondenti loro dimensioni, o lati, o diametri ec.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA X. (*Fig.* 271.)

65. La superficie di una mezza sfera AED, è uguale a quella di un cilindro ABCD, in cui quella sia inscritta, cioè aventi la medesima base, ed altezza.

DIMOSTRAZIONE.

Supponendo, che il cilindro AC, ed il cono BFC abbiano la medesima base, ed altezza, perciò coll' emisfero ancora si facciano FA$=$FE$=$AB$=$CD$=a$, circonferenza de' cerchi AD$=$BC$=b$, saranno cerchi AD$=$BC$=\frac{ab}{2}$; sarà adunque il cilindro

AC

AC$=\frac{aab}{2}$; e lo emisfero AEB$=\frac{2}{3}\times\frac{aab}{2}=\frac{2a}{6}$

perchè il cono è uguale ad $\frac{1}{3}$ del cilindro, fa

$\times\frac{aab}{2}=\frac{aab}{6}$.

Di presente considerando la mezza sfera A
ta da una infinità di minimi coni, le cui b
superficie dell' emisfero, e nel suo centro F
rire le vertici di que' minimi coni. Sarà la l
desima cosa, che lo emisfero; dunque il loro va
ma perchè l' altezza del cono BFC è la med
za di ciascun di quegli infiniti coni, essendo I
no il cono BFC, e quegli infiniti coni, com
a dire, come il cerchio BC, base del cono I
ficie dell' emisfero formata dalle basi di que'
que sarà la proporzione $\frac{aab}{6}:\frac{aab}{3}::\frac{ab}{2}:x$ su
sfero, e multiplicando medii, ed estremi, si o
e spurgando, sarà $x=ab$ superficie del cilindr
za del cui cerchio, e sua base $=b$, e l' altez
era ec.

Corollario I.

66. E perchè il rettangolo ab ha per sua b
ferenza del massimo cerchio, e base dell' emi
tezza la linea $=a$ uguale all' altezza, cioè rag
emisfero, ne siegue da ciò, che la superficie
uguale alla quantità $2ab$, che vale a dire $2a$
raggio gli è uguale a tutto il diametro AD,
perciò la superficie della sfera è uguale ad un
mato dalla circonferenza rettificata dal suo m
dal proprio asse, o diametro.

COROLLARIO II.

67. Ma essendo il massimo cerchio dell' emisfero uguale alla metà del rettangolo contenuto dal raggio, e dall' intera circonferenza, ne siegue, che la superficie dell' emisfero $= ab$ sia doppia del suo gran cerchio, e base $= \frac{ab}{2}$, e tutta la superficie della sfera essendo (66.) $2ab$, ne nasce, che la superficie della sfera sia quadrupla del suo massimo cerchio $= \frac{ab}{2}$.

COROLLARIO III.

68. Sono poi i cerchi, come i quadrati de' loro diametri (*Lib.* 6. 551.), e dove si duplichi la radice, quadruplo sarà il quadrato (440.); perciò la superficie di una sfera è uguale ad un cerchio formato col doppio suo raggio, che vale a dire la superficie della sfera è uguale ad un cerchio, il cui raggio sia il diametro, ed asse della sfera.

IL FINE.

INDICE

DELLA SECONDA PARTE.

Errori di Algebra.				*Correzioni.*
Pag. 36.	lin. ult.	multiplicatore comune	-	multiplicatore non comune
62.	24.	$-a^3c$	-	$-3a^3c$
63.	14.	$a-\sqrt{ax-xx}$	-	$a-\sqrt{ax-xx}=x$
127.	20.	del coefficiente	-	della metà del coefficiente

Errori di Geometria.				*Correzioni.*
Pag. 188.	lin. 4.	ſerie, ſi divide	-	ſerie il ſecondo, ſi divide
201.	2.	la differenza 12	-	la differenza in 12.

Errori delle Tavole	*Correzioni.*
Nella Tavola VII. fig. 224. in vece di A	B
in vece di B	A
Nella Tav. VIII. fig. 266. a rimpetto di H	E