

UC-NRLF



\$B 561 689

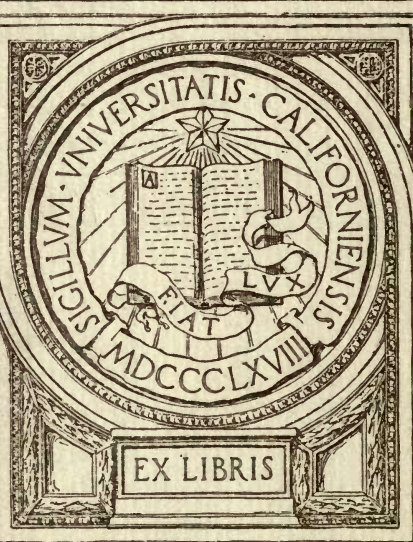
Grundriss
der
theoretischen Astronomie

VON
Dr. J. Frischau

Dritte Auflage



VERLAG VON WILHELM ENGELMANN IN LEIPZIG



EX LIBRIS



GRUNDRISS
DER
THEORETISCHEN ASTRONOMIE

UND DER
GESCHICHTE DER PLANETENTHEORIEN

VON
JOHANNES FRISCHAUF

DRITTE, VERMEHRTE AUFLAGE

MIT 22 FIGUREN IM TEXT;

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1922

TO VNU
ANATOMIAO

QB355

F73

1922

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung vorbehalten.

Vorwort zur ersten Auflage.

Die freundliche Aufnahme, welche meine vor drei Jahren erschienene »Theorie der Bewegung der Himmelskörper« erfuhr, und die Aufforderung von Seite der Verlagshandlung zur Bearbeitung einer neuen Auflage ermunterten mich, dieselbe durch eine Reihe von Arbeiten aus dem Gebiete der theoretischen Astronomie, mit welchen ich mich mehrere Jahre hindurch beschäftigt hatte, zum vorliegenden »Grundriß« zu ergänzen. Übrigens habe ich den unter dem oben erwähnten Titel erschienenen Teil, dessen Inhalt hauptsächlich in der Gaußschen Bahnbestimmung aus drei Orten und der Olbersschen Methode besteht, durch weitläufigere Ausführung der Zwischenrechnungen, Erläuterung einzelner dunkler Stellen, Vermehrung der Beispiele und Anmerkungen vollständig umgearbeitet. In den hinzugefügten Partien ist die Gaußsche Bahnbestimmung aus vier Orten, die Bahnbestimmungen aus einer größeren Reihe von Beobachtungen, die Berücksichtigung der Korrekturen und der Störungen und endlich die Geschichte der Planetentheorien gegeben. Die Aufnahme der Gaußschen Bahnbestimmung aus vier Orten konnte um so leichter geschehen, da ich bereits in meiner Th. d. B. die Bahnbestimmung aus drei Orten nach dieser Methode umgeformt hatte. Die Berechnung der speziellen Störungen nach Encke dürfte auch in nichtastronomischen Kreisen, in welchen sie vielleicht wenig bekannt sein dürfte, Beachtung finden. Hinsichtlich der Geschichte der Planetentheorien habe ich mir zum Zweck gesetzt, die leider so wenig bekannte Entdeckungsgeschichte der Keplerschen Gesetze weiteren Kreisen zugänglich zu machen und

in das Studium der Keplerschen Werke, welches gegenwärtig durch die treffliche Gesamtausgabe von Chr. Frisch sehr erleichtert ist, einzuführen. Für das Verständniß dieser Entdeckungsgeschichte ist jedoch auch die Darstellung der Theorien von Ptolemäus und Kopernikus unerläßlich. Über die Würdigkeit der Aufnahme dieses Theiles war ich nicht einen Moment im Zweifel; ich glaube sogar, daß diese Partien dem Interessantesten in der Geschichte der Wissenschaften anzureihen seien.

Getreu der ursprünglichen Bestimmung meiner Th. d. B., dieses Buch Studierenden der mathematischen Physik zu widmen, habe ich manches für den Fachastronomen Interessante absichtlich unterdrückt. Solches kann leicht aus den Quellen oder Zeitschriften nachgelesen werden.

Die dem Inhaltsverzeichnisse — dessen Bearbeitung ich Herrn Albert v. Ettingshausen, Assistent der Physik an der hiesigen Universität, verdanke — beigegebene Literaturangabe bezieht sich nur auf die bei der Ausarbeitung dieses Buches benutzten Schriften.

Bei der Korrektur fand ich überdies an den Herren Albert v. Ettingshausen und Johann Gerst die freundlichste Unterstützung, wofür ich ihnen meinen innigsten Dank ausspreche.

Graz, im März 1871.

J. Frischauf.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die vorliegende zweite Auflage schließt sich in der Anlage vollkommen der ersten an. Da dieser Grundriß hauptsächlich für den ersten Unterricht in theoretischer Astronomie bestimmt ist und als solcher seinerzeit großen Beifall und allgemeine Zustimmung gefunden hat, so wurden im ersten und zweiten Teile im Haupttexte keine wesentlichen Änderungen vorgenommen, sondern nur zum Zwecke des leichteren Verständnisses einzelne Stellen erweitert.

Dagegen wurde für diese beiden Teile der Anhang bedeutend vermehrt. Besonders möge auf drei große Zusätze hingewiesen werden, die auch für Fachastronomen Interesse besitzen dürften. Der erste betrifft die Lösung der Aufgaben bezüglich der Bewegung eines Himmelskörpers in einer Hyperbel durch die Einführung der Hyperbelfunktionen, die der Verfasser bereits in Nr. 2980 (1890) der »Astronomischen Nachrichten« im Umriss mitgeteilt hat. Es ist geradezu auffallend, daß die Hyperbelfunktionen gegenwärtig in der theoretischen Physik, trotzdem daß seit nahezu zwanzig Jahren in der technischen Mechanik davon ein umfassender Gebrauch gemacht wird, fast gar keine Verwendung finden. Es wäre sehr wünschenswert, und es würde auch vollauf genügen, wenn, wie es hier im Anhang geschehen ist, in den Lehrbüchern der Analysis auf einigen Seiten die Definitionen und Hauptsätze der Hyperbelfunktionen mitgeteilt würden, mittels welcher dann nach der Lösung einer Reihe von Aufgaben für die Ellipse die auf die Hyperbel bezüglichen fast ohne Rechnung nur abgeschrieben werden können. Statt dessen quält man sich, nachdem man die Ellipsenaufgaben gelöst hat, neuerdings mit analytischen Entwicklungen für die Hyperbel, in denen dann statt der kompensierten durchsichtigen Hyperbelfunktionen, durch welche die

vollständige Analogie der Ellipsen- und Hyperbelsätze und Aufgaben ersichtlich wird, unbequeme logarithmische Ausdrücke vorkommen. Die zweite größere Note des Anhanges enthält die Verbesserung der Gaußschen Größen P und Q bei der Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen für die erste Hypothese. An den drei von Gauß in der »Theoria motus« gegebenen Beispielen wurde der Nutzen dieser Verbesserung der Größen P und Q erprobt. Ein dritter größerer Zusatz gibt eine sehr einfache Ableitung der Gibbsschen Ausdrücke für die Dreiecksverhältnisse, ohne Benützung der Theorie der »Vektoren«, sowie deren Verwendung zur Bahnbestimmung.

Trotz der günstigen Anzeigen der ersten Auflage, von denen besonders die des Herrn Geh. Reg.-Rats Dr. F. R. Helmert in der »Zeitschrift für Mathematik und Physik« (19. Jahrgang) und jene im »Literarischen Centralblatt für Deutschland« (Jahrgang 1872) zu erwähnen sind, und wo in letzterer gesagt wird: »Der dritte historische Teil wird auch der jetzigen Schule von Astronomen sehr zu statten kommen,« hat der in Art. 16 (S. 37) vorgenommene Ersatz der Gleichung achten Grades durch eine andere, leichter zu lösende bisher keine Beachtung gefunden, wo bereits für deren Auflösung A. de Gasparis in den »Astronomischen Nachrichten« Nr. 1101 sogar eine allerdings nur wenig Nutzen gewährende Tafel gegeben hat. Abgesehen davon, daß aus der Gleichung (11) des Verfassers die Unbekannte x' viel leichter zu bestimmen ist und überdies eine der Aufgabe fremde Wurzel vermieden wird, als die Gaußsche x aus der Gleichung (IV) des Art. 141 der »Theoria motus«, so wird diese letztere Gleichung strenge genommen erst aus der des Verfassers erhalten.

Vielfach wurde in den Anzeigen der ersten Auflage der Wunsch geäußert, der Verfasser möge in einer neuen Ausgabe auch einzelne Probleme aus der Mechanik des Himmels, besonders Präzession, aufnehmen. Im Interesse der Wahrung des elementaren Charakters des Buches und der Beschränkung auf theoretische Astronomie ist dies wieder nicht

geschehen. Freunde dieser Untersuchungen und alle jene, die sich für spezielle Fragen aus der theoretischen Astronomie interessieren, mögen auf die ausführliche, von Herrn Dr. H. Buchholz besorgte zweite Auflage von Klinkerfues »Theoretische Astronomie« (Braunschweig 1899) verwiesen werden. Für die praktischen Berechnungen können die »Tafeln zur theoretischen Astronomie« von Julius Bauschinger (Leipzig 1901) mit bestem Erfolge benutzt werden.

Graz, im Februar 1903.

Johannes Frischauf.

Vorwort zur dritten Auflage.

Auch diese Auflage hat im Haupttexte nur geringe Änderungen erfahren, dagegen wurde die in der vorigen Auflage nur angedeutete Verwendung der Gibbsschen Ausdrücke der Dreiecksverhältnisse für die Bahnbestimmung ausführlich behandelt, zumal die daraus erhaltene Lösung der Aufgabe der Bahnbestimmung, welche wohl als »Gauß-Gibbssche« Methode bezeichnet werden darf, als die einfachste erklärt und den Rechnern empfohlen werden kann. Zur Erhaltung der Übersichtlichkeit wurde für diesen Teil der Erweiterungen ein erster Anhang gebildet, die Anmerkungen und Zusätze in einen zweiten und dritten Anhang gestellt.

Graz, im November 1921.

Johannes Frischauf.

Heidelberg, den 3. Oktober 1917.

Hochgeehrter Herr Professor!

Aus dem heutigen Heft der Leopoldina ersehen wir, daß Sie am 17. Sept. den achtzigsten Geburtstag feierten.

Wir möchten nicht versäumen, leider nachträglich, unseren herzlichsten Glückwunsch auszusprechen und mit dem Wunsche zu verbinden, daß Sie noch lange in »Frische« sich Ihres Lebensabendes erfreuen möchten.

Ihre wissenschaftlichen Arbeiten und besonders Ihre Schriften haben Ihnen einen dauernden Ehrenplatz in der Geschichte unserer Wissenschaft erworben. Es gibt wohl keinen deutschen Astronomen der jetzigen Generation, dem nicht Ihr prächtiger »Grundriß der theoretischen Astronomie« die erste Grundlage seiner Bildung gab, so daß wir uns alle als Ihre dankbaren Schüler betrachten.

I. A.: **Max Wolf** (m. p.)
Direktor der Bad. Sternwarte.

Herrn Professor Dr. Johannes Frischauf, Graz.

Inhalt.

Erster Teil.

Beziehungen zwischen den die Bewegungen der Himmelskörper um die Sonne bestimmenden Größen.

Erster Abschnitt.

Beziehungen hinsichtlich eines einzelnen Ortes in der Bahn.

Art,	Seite
1. Keplers Gesetze; Definitionen ¹⁾	1
2. Auflösung der Aufgabe: aus der wahren Anomalie die mittlere zu finden ²⁾ . Konstante der theoria motus ³⁾	3
3. Auflösung des Keplerschen Problems: aus der mittleren Anomalie die wahre und den Radiusvektor zu finden	6
4. Über die Bewegung in einer parabolischen Bahn ⁴⁾	7

Zweiter Abschnitt.

Beziehungen zwischen mehreren Orten in der Bahn.

5. Hilfssätze	9
6. Berechnung der Bahnelemente eines Himmelskörpers aus zwei Radienvektoren, dem Unterschied der zugehörigen wahren Anomalien und der Zwischenzeit	9
I. Für die Ellipse ⁵⁾ ; II. für die Parabel.	
7. Lambertsche Formeln für die Parabel ⁶⁾	18

Literatur.

- 1) Das erste und zweite Keplersche Gesetz ist enthalten in der »Astronomia nova . . . a Joanne Keplero« 1609 (gedruckt zu Heidelberg), das dritte Gesetz in des »Joannis Kepleri Harmonices mundi libri V, Lincii, 1619«. III. u. V. Band der Frischschen Ausgabe.
- 2) Eine andere Ableitung der Gleichung (7) gibt Möbius, Elemente der Mechanik des Himmels, Leipzig, 1843. Die hier gegebene Ableitung dieser Gleichung ist die Übertragung des Vorganges von Kepler.
- 3) Gauß, Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium, Hamburgi, 1809. (Deutsch von Haase, 1865.) Neue Ausgabe, 7. Bd. Gauß' Werke, Gotha, 1871. Über Gravitationsmaß und Gaußsches Massen- und Zeitmaß siehe Dr. Felix Auerbach, »Kanon der Physik«, Leipzig, 1899.
- 4) Olbers, Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Kometen zu berechnen. Zum erstenmal von F. v. Zach, Weimar, 1797, zum zweitenmal von Encke 1847 und zum drittenmal von Galle 1864, enthält nebst anderen Hilfstafeln die Barkersche Tafel in vollständiger Weise.
- 5) Lösung von Gauß. Eine genäherte Lösung dieser wichtigen Aufgabe enthält bereits Eulers Theoria motuum planetarum et cometarum, Berolini 1744, (Deutsch von Pacassi, Wien, 1781).
- 6) Encke, Berliner astronomisches Jahrbuch für 1883.

Art.	Seite
8. Berechnung des Parameters aus drei Orten eines Himmelskörpers; Ableitung einer für die Bahnbestimmung wichtigen Formel ⁷⁾	19

Dritter Abschnitt.

Beziehungen hinsichtlich eines einzelnen Ortes im Raume⁸⁾.

9. Definitionen: Knoten, Neigung der Bahn, Längen in der Bahn, Länge des Perihels, Elemente der Bewegung des Himmelskörpers. Heliozentrische Länge und Breite. Argument der Breite.	21
10. Relationen zwischen den heliozentrischen Größen und den Längen in der Bahn	24
11. Lage eines Punktes im Raume. Verwandlung der heliozentrischen Längen, Breiten und Distanzen in geozentrische und umgekehrt. Kurtierte Distanzen	25
12. Es wird gezeigt, wie sich die heliozentrischen Koordinaten direkt durch die wahre Anomalie und den Radiusvektor ausdrücken lassen	27

Vierter Abschnitt.

Beziehungen zwischen mehreren Orten im Raume⁹⁾.

13. Bestimmung der Länge des Knotens, der Neigung der Bahn und der Argumente der Breite aus zwei heliozentrischen Längen und Breiten	28
14. Beziehungen zwischen den Koordinaten und den Dreiecksflächen dreier (heliozentrischer) Orte eines Himmelskörpers	29

Zweiter Teil.

Bahnbestimmung der Planeten und Kometen.

Erster Abschnitt.

Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei geozentrischen Beobachtungen¹⁰⁾.

15. Für die Bestimmung der sechs Elemente der elliptischen Bewegung eines Himmelskörpers werden drei geozentrische Beobachtungen desselben, die zugehörigen Orte der Erde und die Beobachtungszeiten als gegeben vorausgesetzt. Die Unmöglichkeit einer unmittelbaren Lösung der Aufgabe nötigt dieselbe durch sukzessive Näherungen zu lösen,

7) Gauß, *Theoria motus*, art. 82.

8) Gauß, *Theoria motus*, zweiter Abschnitt des 1. B.

9) Gauß, *Theoria motus*, vierter Abschnitt des 1. B., und Encke, *Berl. astr. J. für 1854*.

10) Die einleitenden Bemerkungen des Art. 15 sind nach Gauß, *Theoria motus*, art. 115, 131–135, die Umformung der Gleichung (1) durch die Größen J und K

Art.	Seite
zu welchem Zwecke die Hilfsgrößen P und Q eingeführt werden	31
16. Fortsetzung; Berechnung der Bahnelemente mit Hilfe der kurtierten Distanzen	37
17. Erläuterung der Berechnung der Hilfsgrößen P und Q in den verschiedenen Hypothesen	40
18. Beispiel; Berechnung der Elemente des Planeten Juno	42

Zweiter Abschnitt.

Bestimmung einer parabolischen Bahn aus drei geozentrischen Beobachtungen nach der Methode von Olbers¹¹⁾.

19. Für die Bestimmung einer parabolischen Bahn genügt es, das Verhältnis der kurtierten Entfernung der ersten und dritten Beobachtung zu kennen, um mit Hilfe der Lambert'schen Formel diese Größe zu bestimmen	48
20. Ursprünglicher Ausdruck für die Olberssche Voraussetzung	50
21. Beispiel; Berechnung der Elemente des Kometen II, 1813	51

Dritter Abschnitt.

Bestimmung einer elliptischen Bahn aus vier geozentrischen Beobachtungen, von denen nur zwei vollständig sind¹²⁾.

22. Diese Bestimmung stützt sich auf die Berechnung der Hilfsgrößen P_1, P_2, Q_1, Q_2 , aus denen die kurtierten Entfernungen in den mittleren Beobachtungen und aus diesen die Elemente erhalten werden	53
---	----

Vierter Abschnitt.

Über die Vorbereitungsrechnungen bei Bahnbestimmungen¹³⁾.

23. Einleitung	58
24. I. Verwandlung von Rektaszension und Deklination in Länge und Breite und umgekehrt	58

nach Encke, Berl. astr. J. für 1854 (herausgegeben mit P. A. Hansens Abhandlung von J. Bauschinger in »Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften«, Nr. 141) gegeben. Die Einführung der Größen P und Q rührt von Gauß her. Die Lösung in dem Art. 16 ist dem Gaußschen Vorgange der Bahnbestimmung aus vier Orten angepaßt.

11) Olbers, Abhandlung . . . und Encke, Berl. astr. J. für 1833. Eine Umformung der Ausdrücke des ersten und dritten Radiusvektors und der zugehörigen Sehne hat Gauß gegeben, mitgeteilt auch in der deutschen Ausgabe der Theoria motus von Haase.

12) Gauß, Theoria motus, zweiter Abschnitt des 2. B.

13) Brünnow, Lehrbuch des sphärischen Astronomie, Berlin, 1852; zweite Auflage 1862, und Gauß, Theoria motus, zweiter Abschnitt, und Beispiel art. 150.

Art.	Seite
25. II. Parallaxe. Befreiung der Beobachtungen von derselben; Horizontalparallaxe	60
26. Methode von Gauß, die Parallaxe zu berücksichtigen ohne Kenntnis der Entfernung des Gestirnes von der Erde	63
27. III. Aberration des Lichtes. Tägliche und jährliche Aberration. Größter Wert derselben	65
28. Einfluß der Aberration auf die Länge und Breite eines Fixsternes. Jährliche Parallaxe	67
29. Berechnung der Aberration bei Gestirnen mit eigener Bewegung	70
30. IV. Präzession und Nutation. Definition: wahre und scheinbare Äquinoktialpunkte, Schiefe der Ekliptik usw., mittlere Länge, mittlere Schiefe der Ekliptik	71
31. Fortsetzung; mittlerer und scheinbarer Ort	73
32. Beispiel über die angegebenen Reduktionen	73

Fünfter Abschnitt.

Bahnbestimmungen aus einer größeren Reihe von Beobachtungen¹⁴⁾.

33. Ephemeriden; Berechnung derselben	77
34. Unterschied der beobachteten und berechneten Orte; Normalort	81
35. Verbesserung der Elemente eines Himmelskörpers aus späteren Beobachtungen: 1. vermittels der Entfernungen zweier Orte von der Erde; 2. vermittels der Elemente Knoten und Neigung. Modifikation für parabolische Bahnen	83

Sechster Abschnitt.

Bahnbestimmung mit Berücksichtigung der Störungen¹⁵⁾.

36. Erklärungen. Berechnung der speziellen Störungen durch die mechanischen Quadraturen bei kleinen Planeten und Kometen anwendbar; oskulierende Elemente	87
37. Enckesche Methode; Bestimmung der Störungen der Koordinaten	90
38. Formeln für die mechanischen Quadraturen	91

14) J. Bauschinger, Über das Problem der Bahnverbesserung, Veröffentlichungen des Königl. Astron. Rechen-Institutes zu Berlin. Nr. 23. Berlin, 1903.

15) Encke, Berl. astr. J. für 1837, 1838, 1857, 1858. Über die bei den Störungsrechnungen angewandte Quadratur vgl. Encke in den Berl. astr. J. für 1837, 1858, 1862 und Airy, Nautical Almanac für 1856. Nach einer Mitteilung Enckes sind diese Formeln der mechanischen Quadratur von Gauß.

Art.	Seite
39. Anwendung dieser Formeln auf die Berechnung der Störungen. Beispiel; Bestimmung der Störungen des Planeten Asia durch Jupiter	96
40. Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung	100
41. Bestimmung der oskulierenden Elemente	101

Dritter Teil.

Geschichte der Planetentheorien.

42. Einleitung. Planetenlauf; erste und zweite Ungleichheit .	102
---	-----

Erster Abschnitt.

Ältere Theorien¹⁶⁾.

43. Darstellung der Planetenbewegung mittels exzentrischen Kreises und des Epicykels. Optische und physische Gleichung, Mittelpunktsgleichung; deferierender Kreis. Punctum aequans	104
44. Genauigkeit dieser Theorie. Einfache Exzentrizität, gleiche Teilung der Exzentrizität	107
45. Bestimmung der Länge der Planeten; 1. obere Planeten, 2. untere Planeten, 3. Planet Merkur	111
46. Bestimmung der Breite der Planeten; 1. für die oberen Planeten; 2. unteren Planeten	114

- 16) Die homozentrischen Sphären des Eudoxus, des Kallipus und des Aristoteles. Mémoire, gelesen im lombardischen Institute zu Mailand am 26. November 1874 von G. V. Schiaparelli. Deutsch von W. Horn im Supplement des XXII. Jahrganges der »Zeitschrift für Mathematik und Physik«. Leipzig, 1877.

Κλαυδίου Πτολεμαίου Μαθηματικὴ Σύνταξις. Dieses unter dem Namen Almagest bekannte Werk enthält die gesamte Astronomie der Griechen zu den Zeiten des Ptolemäus, der im Mittelalter mit Aristoteles gleiches Ansehen hatte. Der Name Almagest stammt aus dem Arabischen. Die erste lateinische Übersetzung erschien 1515 zu Venedig. Das griechische Original mit dem Kommentar von Theon 1538 zu Basel. Eine prächtige Ausgabe (mit Anmerkungen von Delambre) griechisch und französisch ist die von M. Halma, Paris; der erste Band erschien 1813, der zweite 1816. Eine kritische Ausgabe der noch vorhandenen Werke des Ptolemäus bringt die Bibliotheca scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana. Erschienen ist von Vol. I Pars I (1898) und Pars II (1903), besorgt von J. L. Heiberg, enthaltend die ganze Syntaxis. Vol. II (1907) bringt die kleineren Schriften und eine phototypische Tafel. Im gleichen Verlage erschien auch eine deutsche Bearbeitung der Astronomie von Fr. Boll.

Gute und übersichtliche Darstellungen des Almagest sind enthalten in:

- 1) Riccioli, B. G., Almagestum novum 2 vol. Bononiae 1651; brauchbar für die gesamte Literatur.
- 2) Tacquet, A., Astronomia, in dessen Opera mathematica nach seinem Tode in Antwerpen 1869 (und 1707) herausgegeben.
- 3) Delambre, M., Histoire de l'Astronomie ancienne, tome second, Paris, 1817. Das erste Compendium zum Almagest ist des Peurbach Theoricæ novae planetarum, etc., Venet. 1488, von welchem zahlreiche Ausgaben existieren.

Zweiter Abschnitt.
Neuere Theorien.

Art.	Seite
a) Kopernikus.	
47. Dreifache Bewegung der Erde. Die drei Formen der Planetenbewegung ¹⁷⁾	115
b) Tycho Brahe und Kepler ¹⁸⁾ .	
48. Prutenische Tafeln; anfänglich geringer Anhang des kopernikanischen Systems ¹⁹⁾	118
49. Kepler; Geschichte; sein Geheimnis des Weltbaues ²⁰⁾	119
50. Tycho Brahe; Geschichte; sein System ²¹⁾	122

-
- 17) Copernicus, N., De revolutionibus orbium coelestium libri VI, Norimbergae 1543. Ausgabe sämtlicher Werke des Kopernikus von Baranowsky (mit polnischer Übersetzung), Warschau, 1854. Eine neue Ausgabe De revolutionibus orbium coelestium libri VI und der Narratio prima von Rheticus hat 1873 die Thorner Kopernikus-Gesellschaft veranstaltet. Kurze Darstellungen dieses Systems sind in Rhaeticus, G. J., Narratio de libris revolutionum Copernici auch der Basler Ausgabe des Kopernikus (1566) und dem Keplerschen Prodomus beifügt. In letzterem Werke befindet sich auch die Schrift Maestlins: De dimensionibus orbium et sphaerarum coelestium juxta tabulas prutenicas ex sententia Nicolai Copernici, welche eine recht übersichtliche Darstellung dieses Systems enthält.
- 18) Über Kopernikus, Tycho und Kepler vgl. Delambre, Histoire de l'Astronomie moderne, tome premier, Paris, 1821. Apelt, E. F., 1) Die Reformation der Sternkunde, Jena, 1852, und 2) »Die Epochen der Geschichte der Menschheit. Erster Band, zweite Ausgabe, Jena, 1851, Band 1«, für die Entdeckungsgeschichte des ersten Gesetzes, 3) »J. Keplers astronomische Weltansicht, Leipzig, 1849«. Enthält eine ausführliche Darstellung der Harmonices mundi. 4) Göbel, Über Keplers astronomische Anschauungen und Forschungen, Halle, 1871. Zusammenstellung der wichtigsten, auf die Entdeckungsgeschichte bezüglichen Stellen aus Keplers Werken, mit Erläuterungen und verbindendem Texte. 5) Reuschle, Kepler und die Astronomie, Frankfurt, 1871. Übersichtliche Darstellung der Leistungen Keplers, seine Beziehungen zu den Vorgängern und Nachfolgern. Eine vorzügliche, namentlich für Kulturhistoriker sehr interessante Schrift. 6) Günther, Kepler, Galilei. Berlin, 1896. Deren Leben und Wirken, auf Grundlage eines reichen Materials.
- 19) Reinhold, E., Prutenicae tabulae coelestium motuum, Vitebergae, 1551. Diese Tafeln waren dem Herzog Albrecht von Preußen gewidmet, von welcher Widmung sie den Namen tragen.
- 20) Kepler, J., Prodomus dissertationum cosmographicarum, continens mysterium cosmographicum de admirabili proportione orbium coelestium: deque causis coelorum numeris, magnitudinis, motuumque periodicorum genuinis et propriis, demonstratum per quinque regularia corpora geometrica . . . a M. Joanne Keplero, Tübingae, 1596; zum zweiten Male mit Keplers Anmerkungen 1621 in Frankfurt herausgegeben. Dieses Werk enthält die leitende Idee zu den astronomischen Bestrebungen Keplers.
- 21) Tycho Brahe, Astronomiae instauratae progymnasmata. De mundi aetherei recentioribus phaenomenis liber secundus. Begonnen 1588 (auf der Uranienburg), beendet 1603 (in Prag). Astronomiae instauratae Mechanica, 1598. Die tychohnische Astronomie ist auch enthalten in Longomontanus, Chr. S., Astronomia Danica, Amsterodami 1622, und Riccioli, Almagestum novum.

Art.	Seite
51. Die Beobachtungen des Planeten Mars. <i>Astronomia nova</i> ²²⁾	124
52. Erster Versuch Keplers einer Marstheorie; Bestimmung der Länge der Knoten, der Neigung; Reduktion der Orte des Mars auf den wahren Sonnenort; stellvertretende Hypothese	125
53. Bestimmung der Erdbahn; Beweis der gleichen Teilung der Exzentrizität	129
54. Entdeckung des zweiten Keplerschen Gesetzes	132
55. Bestimmung der Mittelpunktsgleichung mittelst dieses Gesetzes	134
56. Bestimmung der Figur der Marsbahn aus den Entfernungen des Mars von der Sonne; dieselbe stellt sich zunächst als ein Oval dar; Auffindung der wahren Form dieser Bahn — erstes Keplersches Gesetz	136
57. Verbesserung der Marselemente; Rudolfinische Tafeln ²³⁾	141
58. <i>Harmonices mundi</i> ²⁴⁾	141
59. Entdeckung des dritten Gesetzes	143
60. Schluß. Keplers naturphilosophische Spekulationen	145

Dritter Abschnitt.

Zum Problem der Bahnbestimmung.

61. Geschichtliche Entwicklung; Bestimmung einer Kreisbahn; Anwendung auf die Bestimmung der Elemente des Uranus ²⁵⁾	147
62. Bahnbestimmung der Ceres; Gauß, <i>Theoria motus</i> ²⁶⁾ , Gibbs ²⁷⁾	149
63. Bestimmung einer parabolischen Bahn, Olbers ²⁸⁾	150

Erster Anhang.

I. Reihenentwicklungen für die Dreiecksflächen und deren Verhältnisse	152
II. Die Gibbsschen Ausdrücke für die Dreiecksverhältnisse	157

22) *Astronomia nova* . . . a Joanne Keplero. Dieses für die theoretische Astronomie so wichtige Werk ist in fünf Teile abgeteilt. Der erste Teil ist rein theoretischer Natur und behandelt die Hilfsmittel der Darstellung der Ungleichheiten durch den exzentrischen Kreis und Epicykel; der Hauptinhalt dieses Teiles wurde in Art. 56, S. 136, und am Schlusse des Art. 47, S. 115, benutzt. Der zweite Teil enthält die Materien der Art. 51 und 52. Der dritte Teil enthält die Bestimmung der Erdbahn, das zweite Gesetz und die Bestimmung der Mittelpunktsgleichung des Art. 55. Der vierte Teil enthält das erste Gesetz; der fünfte Teil beweist unter anderen den wichtigen Satz, daß die Knotenlinie der Marsbahn genau durch den wahren Sonnenort geht.

23) *Tabulae Rudolphinae*, Ulmae, 1627.

24) *Harmonices mundi libri V*, Lincii, 1619.

25) Bohnenberger, J. G. F., *Astronomie*, Tübingen, 1811.

26) Gauß, Vorwort zur *Theoria motus*.

27) J. Willard Gibbs, On the determination of elliptic orbits from three complete observations. *National Academy of sciences*. Vol. IV. Eighth memoir.

28) Olbers, Abhandlung. Erster und zweiter Abschnitt.

	Seite
III. Die Gibbsche Methode der Bahnbestimmung	163
IV. Gauß-Gibbsche Methode	165
V. Zusammenstellung der Formeln zur Bahnbestimmung . . .	180

Zweiter Anhang.

Anmerkungen und Zusätze	187
-----------------------------------	-----

Dritter Anhang.

Zur Variation der geozentrischen Distanzen	235
--	-----



Erster Teil.

Beziehungen zwischen den die Bewegungen der Himmelskörper um die Sonne bestimmenden Größen.

Erster Abschnitt.

Beziehungen hinsichtlich eines einzelnen Ortes in der Bahn.

1.

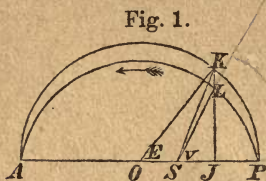
Betrachtet man die Planeten als mathematische Punkte und berücksichtigt man bloß die Anziehung der Sonne, so geschieht die Bewegung derselben nach folgenden Gesetzen:

- I. Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem (gemeinsamen) Brennpunkte sich der Mittelpunkt der Sonne befindet.
- II. Die von der Sonne nach dem Planeten gezogene Gerade überstreicht der Zeit proportionale Flächen.
- III. Die Würfel der großen Achsen zweier Planeten verhalten sich wie die Quadrate ihrer Umlaufzeiten.

Diese Gesetze sind von Kepler (geb. 1571, gest. 1630) gefunden worden.

Berücksichtigt man die Anziehung des Planeten auf die Sonne, so ist der Würfel der großen Achse dem Produkte aus dem Quadrate der Umlaufzeit mit der Summe der Massen der Sonne und des Planeten proportional.

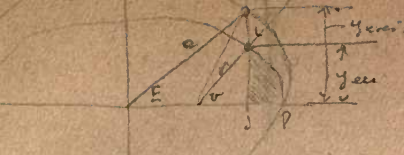
Es stelle die Ellipse der Figur (Fig. 1) die Bahn eines Planeten vor, im Brennpunkte S sei die Sonne. Ist AP die große Achse der Ellipse, so ist der dem Brennpunkte S näher liegende Punkt P zugleich derjenige Punkt der Bahn, in welchem der Planet der Sonne am nächsten kommt; der Punkt P wird daher das



Perihelium oder die Sonnennähe genannt. Im anderen Endpunkte A ist der Planet von der Sonne am weitesten entfernt, der Punkt A wird daher das Aphelium oder die Sonnenferne genannt. Beide Punkte heißt man Apsiden, und die Gerade AP , sobald nur ihre Lage berücksichtigt wird, die Apsidenlinie.

Ist O der Mittelpunkt der Ellipse, $AO = OP = a$ die halbe große Achse, $OS = ae$, so heißt e die Exzentrizität. Die kleinste Entfernung des Planeten von der Sonne ist daher $SP = OP - OS = a(1 - e)$, die größte $SA = OA + SO = a(1 + e)$, daher die mittlere $= a =$ der halben großen Achse. In der mittleren Entfernung befindet sich der Planet, wenn er durch den einen oder den anderen Endpunkt der kleinen Achse geht.

Befindet sich der Planet im Punkte L seiner Bahn, so heißt die Gerade $SL = r$ der Radius Vektor, und der Winkel $PSL = v$ die wahre Anomalie des Planeten. Dieser Winkel wird vom Perihelium im Sinne der Bewegung des Planeten (in der Figur durch einen beigesetzten Pfeil ausgedrückt) von 0 bis 360° gezählt. Die beiden Größen r und v sind die Polarkoordinaten des Planeten in bezug auf die Sonne als Anfangspunkt (Pol) und die Apsidenlinie als Grundlinie (Achse).



$$\frac{y \cos v}{y \sin v} = \frac{a}{b}$$

3

2.

Aus der wahren Anomalie v die Zeit t , in welcher sie vom Planeten beschrieben wird, zu finden.

Ist U die Umlaufszeit des Planeten, so verhält sich t zu U wie der Sektor PSL zur Fläche der ganzen Ellipse. Flächen
 Um das letztere Verhältnis zu berechnen, bedient man sich des sogenannten exzentrischen Kreises, der in der Ebene der Ellipse über der großen Achse AP als Durchmesser beschrieben wird. Eine vom Punkte L auf die Gerade AP gefällte Senkrechte LJ treffe den Kreis in K . Der Winkel POK heißt die exzentrische Anomalie und wird mit E bezeichnet.

Nun ist $SJ = OJ - OS$, d. h.

$$(1) \quad r \cos v = a \cos E - ae.$$

$$\begin{aligned} r + r \cos v &= a(1 - e) \\ r + ae \cos E &= ae \\ r &= a - ae \cos E \end{aligned}$$

Aus der Polargleichung der Ellipse

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}$$

folgt, wenn man den Wert von $r \cos v$ aus (1) in diese Gleichung setzt,

$$(2) \quad r = a - ae \cos E.$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man durch Addition und Subtraktion

$$r(1 + \cos v) = a(1 - e)(1 + \cos E)$$

$$r(1 - \cos v) = a(1 + e)(1 - \cos E).$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2} v &= \frac{1}{2}(1 + \cos v) \\ \sin \frac{1}{2} v &= \frac{1}{2}(1 - \cos v) \end{aligned}$$

Zieht man aus diesen Gleichungen die Quadratwurzel aus, so erhält man

$$(3) \quad \sqrt{r} \cos \frac{1}{2} v = \sqrt{a(1 - e)} \cos \frac{1}{2} E$$

$$(4) \quad \sqrt{r} \sin \frac{1}{2} v = \sqrt{a(1 + e)} \sin \frac{1}{2} E.$$

Durch Division und Multiplikation erhält man

$$(5) \quad \tan \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{1}{2} E$$

$$(6) \quad r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E.$$

Aus der Gleichung (6) folgt

$$r \sin v : a \sin E, \text{ d. i. } LJ : KJ = \sqrt{1 - e^2} : 1, \quad \text{z. e. } \sqrt{1 - e^2} : e =$$

d. h. die Ordinate in der Ellipse verhält sich zur Ordinate des exzentrischen Kreises wie die kleine Halbachse $b = a\sqrt{1 - e^2}$ zur großen a . Zieht man eine zweite (unendlich nahe) Ordinate, so findet dasselbe Verhältniß zwischen den dadurch bestimmten Trapezen statt, mithin erhält man, wenn die ganzen Flächen in Trapeze zerlegt werden,

$$P JL : P JK = b : a = G : \pi a^2,$$

wo G die Fläche der Ellipse bedeutet. Ebenso ist, wenn S einen beliebigen Punkt der Geraden AP bedeutet, das Verhältniß der Dreiecke

$$S JL : S JK = b : a,$$

mithin das Verhältniß der Sektoren

$$S PL : S PK = G : \pi a^2;$$

daraus folgt

$$U : t = G : S PL = \pi a^2 : S PK.$$

Es ist aber $S PK = \overset{\text{Bogen}}{\text{OPK}} - \overset{\text{Sektor}}{\text{OSK}}$
 $= \frac{1}{2} OP \cdot PK - \frac{1}{2} OS \cdot JK = \frac{1}{2} a \cdot aE - \frac{1}{2} ae \cdot a \sin E,$

also $U : t = 2\pi : E - e \sin E;$

setzt man ferner $\frac{2\pi}{U} = \mu$, so wird

$$(7) \quad \mu t = E - e \sin E.$$

Die Größe $\mu t = M$ heißt die mittlere Anomalie, die Größe μ ist die mittlere Bewegung in der Zeiteinheit.

Aus v erhält man nach (5) die exzentrische Anomalie E und damit nach (7) die mittlere Anomalie M oder die Zeit t .

Aus dem Vorhergehenden ist ersichtlich, daß

$$\text{für } t = 0, \quad M = E = v = 0 \quad \text{ist,}$$

$$\text{» } t = \frac{1}{2} U, \quad M = E = v = 180^\circ \quad \text{»}$$

$$\text{» } 0 < t < \frac{1}{2} U, \quad M < E < v \quad \text{»}$$

$$\text{» } U > t > \frac{1}{2} U, \quad M > E > v \quad \text{»}$$

In der Gleichung (7) ist der Hilfswinkel E in Teilen des Halbmessers auszudrücken, drückt man jedoch $\frac{2\pi}{U}$ und $e \sin E$ im Gradmaße aus, so kann auch E in Graden beibehalten werden¹⁾.

Aus dem Verhältnisse der Fläche der Ellipse zur Fläche des Kreises $= \sqrt{1 - e^2} : 1$ folgt

$$G = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} = \pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p}.$$

Der Ausdruck $\pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p} : U$ stellt die in der Zeiteinheit vom Radius Vektor beschriebene Fläche, d. i. die Flächengeschwindigkeit, dar.

Sind m, m' die Massen zweier Planeten, die Masse der Sonne $= 1$ gesetzt, a, a' ihre mittleren Entfernungen, U, U' ihre Umlaufzeiten, so ist nach dem verbesserten dritten Keplerschen Gesetze

$$a^3 : a'^3 = U^2 (1 + m) : U'^2 (1 + m'),$$

es ist daher $\frac{a^{\frac{3}{2}}}{U \sqrt{1 + m}}$, also auch $\frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{U \sqrt{1 + m}}$ für alle Planeten konstant.²⁾ Bezeichnet man mit k den Wert dieser Konstante, so wird die Flächengeschwindigkeit $= \frac{k}{2} \sqrt{1 + m} \sqrt{p}$, die mittlere Bewegung $\mu = k \sqrt{1 + m} : a^{\frac{3}{2}}$.

Die Größe k heißt die Konstante der *theoria motus*, Gauß bestimmt deren Wert aus der Bewegung der Erde. Als Einheit der Distanzen wird die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, als Zeiteinheit der mittlere Sonnentag angenommen. Mit den Werten

$$U = 365.2563835, \quad m = \frac{1}{334710} = 0.0000028192$$

erhält man

$$\log k = 8.2355814414$$

$$k = 0.01720209895. \text{)}$$

anomalistisch

3.

Die umgekehrte, unter dem Namen des Keplerschen Problems berühmte Aufgabe, nämlich »aus der mittleren Anomalie die wahre und den Radius Vektor zu finden«, kommt in der Anwendung weit häufiger vor.

Zunächst ist die Gleichung $E = M + e \sin E$ nach E aufzulösen. Die Auflösung kann entweder durch Reihen oder indirekt durch Versuche bewerkstelligt werden. Man beginnt mit einem Näherungswert E_0 und rechnet nun

$$E_1 = M + e \sin E_0$$

$$E_2 = M + e \sin E_1$$

$$E_3 = M + e \sin E_2$$

.

.

.

so lange, bis man keine verschiedenen Werte von E erhält als E_0 kann man, wenn kein anderer Näherungswert bekannt ist, M annehmen. Aus zwei Näherungswerten kann man durch die *regula falsi* einen genaueren Wert erhalten.⁴⁾

Beispiel. Es sei $M = 332^\circ 28' 32''.11$, $e = 0.2451028$, daher $\log e$ in Sekunden $= 4.7037734$.

Setzt man $E_0 = 332^\circ$, so erhält man

$$E_1 = 325^\circ 53', \quad E_2 = 324^\circ 36'$$

$$E_3 = 324^\circ 22' 26'', \quad E_4 = 324^\circ 17' 42''$$

$$E_5 = 324^\circ 16' 47'', \quad E_6 = 324^\circ 16' 36'' \text{ usw.}$$

bis man schließlich $E = 324^\circ 16' 33''.30$ erhält.

Nimmt man die *regula falsi* zu Hilfe, so erhält man aus $a = 325^\circ 53'$ $\alpha = 324^\circ 36'$. Setzt man ferner $a' = 324^\circ$, so wird $\alpha' = 324^\circ 13'.5$; aus welchen Werten man nach⁴⁾ erhält

$$w = 324^\circ 13'.5 + 3'.3 = 324^\circ 16'.8,$$

welcher Wert, wie man ersieht, dem wahren Werte von E

schon ziemlich nahe kommt. Mittelst Tafeln (Bauschinger, Tafel X—XIV) wird diese Rechnung sehr gekürzt.

Ist nun $\log a = 0.4223802$, so erhält man nach (2) und (5) der Art. 2

$$\log r = 0.3260215, \quad v = 315^\circ 2' 0''.76.$$

Ebenso kann man aus den Gleichungen (1) und (6) oder (3) und (4) des Art. 2 die Größen r und v erhalten.

4.

Die Kometen bewegen sich in Bahnen, die man in erster Annäherung als Parabeln betrachten kann. Der am Schlusse von Art. 2 gefundene Ausdruck für die Flächen- geschwindigkeit gestattet eine Anwendung des zweiten und dritten Keplerschen Gesetzes auf die Bewegung eines Him- melskörpers in einer Parabel.

Ist der Bogen PL ein Stück einer Parabel, so ist das Flächenstück JPL der Parabel $= \frac{2}{3}JP \cdot JL$.

Die Polargleichung der Parabel ist

$$r = \frac{p}{1 + \cos v} = \frac{p}{2 \cos \frac{1}{2}v^2}.$$

Die in der Zeit t vom Radius Vektor durchstrichene Fläche SPL

$$\begin{aligned} &= \frac{k}{2} \sqrt{1+m} \sqrt{p} t = \text{Dreieck } SJL + \frac{2}{3}JPL \\ &= \frac{1}{2}SJ \cdot LJ + \frac{2}{3}JP \cdot JL. \end{aligned}$$

Nun ist

$$JL = r \sin v = p \tan \frac{1}{2}v, \quad SJ = r \cos v = \frac{p}{2}(1 - \tan \frac{1}{2}v^2),$$

$$JP = SP - SJ = \frac{p}{2} \tan \frac{1}{2}v^2.$$

Setzt man $\frac{p}{2} = q$, so ist q die kleinste Entfernung des Kometen von der Sonne, und es wird

$$(8) \quad \frac{k \sqrt{1+m}}{\sqrt{2}q^{\frac{3}{2}}} t = \tan \frac{1}{2}v + \frac{1}{3} \tan \frac{1}{2}v^3.$$

Für die Kometen setzt man immer $m = 0$.

Multipliziert man die Gleichung (8) mit 75 und setzt

$$\frac{75k}{\sqrt{2}} = C, \log C = 9.9601277182,$$

so geht die Gleichung (8) über in

$$(8^*) \quad \frac{Ct}{q^{\frac{3}{2}}} = 75 \operatorname{tang} \frac{1}{2}v + 25 \operatorname{tang} \frac{1}{2}v^3.$$

Die Größe $\frac{C}{q^{\frac{3}{2}}} = \mu$ heißt mittlere tägliche Bewegung, die Größe $\frac{C}{q^{\frac{3}{2}}}t = M$ mittlere Anomalie des Kometen. Aus t erhält man v und umgekehrt aus v die Zeit t . Die Barkersche Tafel (Bauschinger, Tafel XV und XVI) gibt für den Wert von v , welchen man für die Parabel in der Regel von 0 bis $\pm 180^\circ$ zählt, die Größe M und umgekehrt.

Beispiel. Für $\log q = 0.08469$ erhält man
 $\log \mu = 9.83309$.

Ist nun, wenn die Perihelzeit $T = \text{Mai } 19.5175$ ist, für April 14.54694 desselben Jahres die wahre Anomalie zu berechnen, so ist $t = -34.97056$ Tage, und man erhält

$$\log M = n 1.37680$$

und damit aus der Barkerschen Tafel

$$v = -34^\circ 12' 52'' = 325^\circ 47' 8''.$$

Aus v erhält man $\log r = 0.12400$.

Zweiter Abschnitt.

Beziehungen zwischen mehreren Orten in der Bahn.

5.

Hilfssätze: Bedeuten A, B, C drei beliebige Winkel, so ist
 I. $\sin A \sin(B-C) + \sin B \sin(C-A) + \sin C \sin(A-B) = 0$,
 II. $\cos A \sin(B-C) + \cos B \sin(C-A) + \cos C \sin(A-B) = 0$,
 wie man durch Entwicklung von $\sin(B-C) \dots$ unmittelbar findet.

6.

Es seien $r, v; r', v'$ die Polarkoordinaten zweier Orte eines Himmelskörpers in der Bahn, t die Zeit, welche derselbe braucht, um vom ersten Ort zum zweiten zu gelangen; aus $r, r', v' - v, t$ die Elemente des Planeten in der Bahn zu bestimmen.

I. Für die Ellipse.

Aus den Gleichungen

$$\sqrt{r} \sin \frac{1}{2} v = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E$$

$$\sqrt{r} \cos \frac{1}{2} v = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E$$

$$\sqrt{r'} \sin \frac{1}{2} v' = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{1}{2} E'$$

$$\sqrt{r'} \cos \frac{1}{2} v' = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{1}{2} E'$$

folgt

$$(1) \begin{cases} \sqrt{rr'} \sin \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v' = a \sqrt{1-e^2} \sin \frac{1}{2} E \cos \frac{1}{2} E' \\ \sqrt{rr'} \cos \frac{1}{2} v \sin \frac{1}{2} v' = a \sqrt{1-e^2} \cos \frac{1}{2} E \sin \frac{1}{2} E' \\ \sqrt{rr'} \sin \frac{1}{2} v \sin \frac{1}{2} v' = a(1+e) \sin \frac{1}{2} E \sin \frac{1}{2} E' \\ \sqrt{rr'} \cos \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v' = a(1-e) \cos \frac{1}{2} E \cos \frac{1}{2} E'. \end{cases}$$

Setzt man Kürze halber $v' - v = 2f$, $E' - E = 2g$, $E' + E = 2G$, so erhält man aus den Gleichungen (1) durch Subtraktion der beiden ersteren und Addition der beiden letzteren

$$(2) \quad \sqrt{rr'} \sin f = a \sqrt{1-e^2} \sin g$$

$$(3) \quad \sqrt{rr'} e \cos = a \cos g - a \cos Gf.$$

Aus $r = a - ae \cos E$, $r' = a - ae \cos E'$ folgt
 $r' + r = 2a - 2ae \cos g \cos G = 2a \sin g^2 + 2 \cos f \cos g \sqrt{rr'}$,
 indem statt $ae \cos G$ aus (3) der Wert $a \cos g - \sqrt{rr'} \cos f$
 gesetzt wird; woraus dann

$$a = \frac{r + r' - 2 \cos f \cos g \sqrt{rr'}}{2 \sin g^2},$$

oder
$$a = \frac{r + r' - 2 \cos f \sqrt{rr'} + 4 \cos f \sin \frac{1}{2} g^2 \sqrt{rr'}}{2 \sin g^2}.$$

Setzt man, wenn $\cos f$ positiv ist,

$$r + r' - 2 \cos f \sqrt{rr'} = 4 \cos f \sqrt{rr'} l,$$

oder

$$(4) \quad l = \frac{r + r'}{4 \cos f \sqrt{rr'}} - \frac{1}{2},$$

so wird

$$(5) \quad a = \frac{2(l + \sin \frac{1}{2} g^2) \cos f \sqrt{rr'}}{\sin g^2}$$

und

$$\sqrt{a} = \pm \frac{\sqrt{2(l + \sin \frac{1}{2} g^2) \cos f \sqrt{rr'}}}{\sin g},$$

wo das obere oder untere Zeichen stattfindet, je nachdem
 $\sin g$ positiv oder negativ ist.

Ist aber $\cos f$ negativ, so setze man

$$r + r' - 2 \cos f \sqrt{rr'} = -4 \cos f \sqrt{rr'} L$$

oder

$$(4^*) \quad L = \frac{r + r'}{-4 \cos f \sqrt{rr'}} + \frac{1}{2}$$

und es wird

$$(5^*) \quad a = \frac{-2(L - \sin \frac{1}{2} g^2) \cos f \sqrt{rr'}}{\sin g^2}.$$

Sind τ , τ' die Zeiten, welche seit dem Durchgange durch
 das Perihel verflossen sind, also $\tau' - \tau = t$; so ist, die
 Masse des Planeten gleich Null gesetzt,

$$\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} \tau = E - e \sin E, \quad \frac{k}{a'^{\frac{3}{2}}} \tau' = E' - e \sin E', \text{ also}$$

$$\begin{aligned} \frac{k t}{a^{\frac{3}{2}}} &= E' - E - e (\sin E' - \sin E) \\ &= 2g - 2e \sin g \cos G. \end{aligned}$$

Setzt man statt $e \cos G$ den Wert aus (3), so wird

$$\frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - \sin 2g + 2 \cos f \sin g \frac{\sqrt{rr'}}{(a)}.$$

Substituiert man für \sqrt{a} den Wert und setzt der Kürze wegen

$$6) \quad \frac{kt}{2^{\frac{3}{2}} \cos f^{\frac{3}{2}} (rr')^{\frac{3}{4}}} = m,$$

so wird

$$(7) \quad \pm m = (l + \sin \frac{1}{2}g^2)^{\frac{1}{2}} + (l + \sin \frac{1}{2}g^2)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3} \right),$$

wo für m das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $\sin g$ positiv oder negativ ist.

Ist $\cos f$ negativ, so setze man

$$(6^*) \quad \frac{kt}{2^{\frac{3}{2}} (-\cos f)^{\frac{3}{2}} (rr')^{\frac{3}{4}}} = M,$$

und man erhält

$$(7^*) \quad \pm M = -(L - \sin \frac{1}{2}g^2)^{\frac{1}{2}} + (L - \sin \frac{1}{2}g^2)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3} \right),$$

wo das obere Zeichen gilt für $\sin g$ positiv, das untere für $\sin g$ negativ. —

Zuerst ist die Gleichung (7) oder (7*) nach g aufzulösen.

Es sei zunächst g nicht sehr groß*); in diesem Falle kann $\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}$ in eine Reihe nach Potenzen von $\sin \frac{1}{2}g^2$ entwickelt werden.

Es ist

$$2g = 4 \cdot \frac{1}{2}g, \quad \sin g = 2 \sin \frac{1}{2}g \cos \frac{1}{2}g = 2 \sin \frac{1}{2}g \sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2}g^2}, \\ \sin 2g = 2 \sin g \cos g = 4 \sin \frac{1}{2}g \sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2}g^2} - 8 \sin \frac{1}{2}g^3 \sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2}g^2}.$$

Berücksichtigt man, daß

$$(1 - x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \dots \\ u = \sin u + \frac{1}{3} \frac{1}{2} \sin u^3 + \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 2 \cdot 4} \sin u^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} \sin u^7 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{9 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \sin u^9 + \dots$$

*) Bis 30° ungefähr.

ist, so erhält man

$$\begin{aligned} 2g &= 4 \sin \frac{1}{2}g + \frac{2}{3} \sin \frac{1}{2}g^3 + \frac{3}{10} \sin \frac{1}{2}g^5 + \frac{5}{28} \sin \frac{1}{2}g^7 + \frac{35}{88} \sin \frac{1}{2}g^9 + \dots \\ \sin 2g &= 4 \sin \frac{1}{2}g - 10 \sin \frac{1}{2}g^3 + \frac{7}{2} \sin \frac{1}{2}g^5 + \frac{3}{4} \sin \frac{1}{2}g^7 + \frac{1}{3} \sin \frac{1}{2}g^9 + \dots \\ 2g - \sin 2g &= \frac{3}{2} \sin \frac{1}{2}g^3 - \frac{1}{5} \sin \frac{1}{2}g^5 - \frac{1}{7} \sin \frac{1}{2}g^7 - \frac{2}{9} \sin \frac{1}{2}g^9 - \dots \\ \sin g^3 &= 8 \sin \frac{1}{2}g^3 - 12 \sin \frac{1}{2}g^5 + 3 \sin \frac{1}{2}g^7 + \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}g^9 + \dots \end{aligned}$$

Bezeichnet man der Kürze halber $\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}$ mit X und setzt $\sin \frac{1}{2}g^2 = x$, so wird

$$X = \frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{5}x - \frac{1}{14}x^2 - \frac{1}{36}x^3 - \dots}{1 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots}$$

Bezeichnet man den Zähler von X mit Z , den Nenner mit N , so wird

$$X = \frac{Z}{N} = \frac{1}{N:Z}.$$

Entwickelt man $N:Z$ in eine Reihe nach Potenzen von x , so erhält man

$$\begin{aligned} N:Z &= \frac{3}{4} - \frac{9}{10}x + \frac{9}{175}x^2 + \frac{26}{875}x^3 + \dots \\ &= \frac{3}{4} - \frac{9}{10}(x - \xi); \end{aligned}$$

wenn

$$\xi = \frac{2}{35}x^2 + \frac{5}{1875}x^3 + \dots$$

oder

$$a) \xi = [8.75696]x^2 + [8.5187]x^3 + \dots,$$

wo die eingeklammerten Zahlen Logarithmen sind, gesetzt wird. Es wird daher

$$X = \frac{1}{\frac{3}{4} - \frac{9}{10}(x - \xi)}.$$

Setzt man diesen Ausdruck von X in die Gleichung (7) und bedenkt man, daß, wenn g nicht groß ist, nur das obere Zeichen stattfindet, so erhält man

$$m = (l + x)^{\frac{1}{2}} + \frac{(l + x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4} - \frac{9}{10}(x - \xi)}.$$

Setzt man

$$\frac{m}{(l + x)^{\frac{1}{2}}} = y,$$

so wird

$$x = \frac{m^2}{y^2} - l,$$

$$\frac{3}{4} - \frac{9}{10}(x - \xi) = \frac{1}{9} \left(\frac{5}{6} + l + \xi - \frac{m^2}{y^2} \right),$$

also

$$y = 1 + \frac{\frac{1}{9} m^2}{y^2 \left(\frac{5}{6} + l + \xi - \frac{m^2}{y^2} \right)} = 1 + \frac{\frac{1}{9} m^2}{\left(\frac{5}{6} + l + \xi \right) \left(y^2 - \frac{m^2}{\frac{5}{6} + l + \xi} \right)}$$

oder

$$y = 1 + \frac{\frac{1}{9} h}{y^2 - h}, \text{ wo } \beta) h = \frac{m^2}{\frac{5}{6} + l + \xi}$$

gesetzt wird.

Die Gleichung für y entwickelt, gibt

$$\gamma) y^3 - y^2 - h y - \frac{1}{9} h = 0.$$

Diese Gleichung hat eine positive Wurzel.⁵⁾

Aus der Gleichung $y = 1 + \frac{m^2}{y^2 \left(\frac{5}{6} - \frac{9}{10}(x - \xi) \right)}$ folgt, daß, wenn die Zeit t im Verhältnis zur Umlaufzeit als eine kleine Größe erster Ordnung betrachtet wird, $y - 1$ nahe $= \frac{4}{3} m^2$ eine kleine Größe zweiter Ordnung ist. Setzt man näherungsweise

$$y = 1 + \frac{4}{3} m^2 = 1 + \frac{1}{6} \frac{(kt)^2}{(rr')^{\frac{3}{2}} \cos f^3}, \quad \frac{1}{y^2} = 1 - \frac{8}{3} m^2,$$

so beträgt der Fehler eine kleine Größe vierter Ordnung. Diese Ordnung wird nicht geändert, wenn $\cos f = 1$, $rr' = r^2 = r'^2$ gesetzt wird, wenn die Exzentrizität e als kleine Größe erster Ordnung betrachtet werden kann, der Unterschied $r' - r$ daher als kleine Größe zweiter Ordnung. Es ist daher mit einem Fehler vierter Ordnung

$$y = 1 + \frac{1}{6} \frac{(kt)^2}{r^3} = 1 + \frac{1}{6} \frac{(kt)^2}{r'^3}.$$

Mit einem Fehler sechster Ordnung ist

$$x = m^2 - l - \frac{8}{3} m^4.$$

Die Auflösung der Gleichung (7) geschieht nun auf folgende Art: Für die erste Annäherung rechne man nach $\alpha)$ ξ mit dem Näherungswert $x = m^2 - l$ (genauer $x = m^2 - l - \frac{8}{3} m^4$), erhält damit nach $\beta)$ h und nach $\gamma)$ y , aus y

rechne man x ; mit diesem Werte x wird ξ neuerdings berechnet, usw. Die Bauschinger Tafel XIX gibt für das Argument $h \log y^2$, Tafel XX für $x \xi$.

Aus x erhält man g ; ist g gefunden, so hat man nach Gleichung (5)

$$a = \frac{2(l+x) \cos f \sqrt{rr'}}{\sin g^2} = \frac{2m^2 \cos f \sqrt{rr'}}{y^2 \sin g^2} = \frac{k^2 t^2}{4y^2 r r' \cos f^2 \sin g^2}.$$

Aus der Gleichung (2), d. h. aus

$$a\sqrt{1-e^2} \sin g = \sqrt{rr'} \sin f \text{ und } \sqrt{p} = \sqrt{a(1-e^2)} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}},$$

folgt mit Berücksichtigung der vorhergehenden Gleichung

$$(8) \quad \sqrt{p} = \frac{y r r' \sin 2f}{kt},$$

mithin

$$y = k\sqrt{pt} : r r' \sin 2f,$$

d. h. y ist das Verhältnis des elliptischen Sektors zwischen den beiden Radien Vektoren und dem durch dieselben bestimmten Dreiecke.

Die Größen m , $(l+x)^{\frac{1}{2}}$, $(l+x)^{\frac{3}{2}} X$ sind daher beziehungsweise der Sektorfläche (zwischen den Radien Vektoren und dem elliptischen Bogen), der Dreiecksfläche (zwischen den Radien Vektoren und der Chorde), der Segmentfläche (zwischen dem Bogen und der Chorde) proportional.

Ist p gefunden, so erhält man aus den Gleichungen für r und r'

$$e \cos v = \frac{p}{r} - 1$$

$$e \cos v' = \frac{p}{r'} - 1.$$

Setzt man $v' = v + (v' - v) = v + 2f$ und entwickelt $\cos(v + 2f)$, so wird

$$(9) \quad e \sin v = \left(\frac{p}{r} - 1\right) \cot 2f - \left(\frac{p}{r'} - 1\right) \operatorname{cosec} 2f$$

$$e \cos v = \frac{p}{r} - 1,$$

aus welchen Gleichungen e und v und damit auch v' erhalten werden.

Die mittleren Anomalien M und M' erhält man aus

$$(10) \quad \begin{aligned} \operatorname{tang} \frac{1}{2} E &= \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tang} \frac{1}{2} v \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2} E' &= \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tang} \frac{1}{2} v' \end{aligned}$$

$$(11) \quad \begin{aligned} M &= E - e \sin E \\ M' &= E' - e \sin E'. \end{aligned}$$

Die mittlere tägliche Bewegung μ wird erhalten aus

$$(12) \quad \mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{M' - M}{t}.$$

Ist g groß, so läßt sich die Gleichung (7) oder (7*) sicher und leicht durch Versuche auflösen; sicher, weil $\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}$ sich genau mittels trigonometrischer Tafeln berechnen läßt; leicht, weil dieser Fall nur bei bereits näherungsweise bekannten Bahnen vorkommt, wo also ein Näherungswert von g schon gegeben ist. In diesem Falle bestimmt man dann aus (5) oder (5*) die Größe a , hierauf aus (2) die Größe $\sqrt{1-e^2}$ und aus beiden die Größe p ; die übrige Rechnung ist genau so wie in dem früheren Falle.

Um l sicher und bequem zu berechnen, setze man auf der linken Seite der Gleichung mit l

$$\cos f = 1 - 2 \sin \frac{1}{2} f^2,$$

damit wird

$$l = \frac{\sin \frac{1}{2} f^2}{\cos f} + \frac{(\sqrt{r'} - \sqrt{r})^2}{4\sqrt{r r'} \cos f};$$

setzt man

$$\sqrt[4]{\frac{r'}{r}} = \operatorname{tang} (45^\circ + w),$$

so wird

$$l = \frac{\sin \frac{1}{2} f^2}{\cos f} + \frac{\operatorname{tang} 2w^2}{\cos f},$$

und ebenso

$$L = -\frac{\sin \frac{1}{2} f^2}{\cos f} - \frac{\operatorname{tang} 2w^2}{\cos f}.$$

Beispiel. Es sei $\log r = 0.3307925$, $\log r' = 0.3222617$,
 $v' - v = 7^\circ 34' 49''.87$, $t = 21.934433$ Tage.

Man erhält:

$$w = -8' 26''.46, \quad l = 0.0011202067, \quad \log m^2 = 7.2735971.$$

Setzt man zunächst $\xi = 0$, so wird $h = 0.0022501$ und damit $\log y = 0.0010815$, woraus $x = 0.0007480399$ folgt. ξ ist in diesem Falle verschwindend. Aus x folgt

$$g = 3^\circ 8' 4''.226 \text{ und damit } \log a = 0.4223804.$$

Aus (8) folgt $\log p = 0.3954732$ und damit aus (9) und (10)

$$\log e = 9.3893483, \text{ in Sekunden } \log e = 4.7037734.$$

$$v = 310^\circ 56' 9''.39, \quad v' = 318^\circ 30' 59''.26.$$

Statt der Exzentrität e führt Gauß den spitzen Winkel φ ein, wo $\sin \varphi = e$ ist; aus p und φ erhält man a sehr bequem nach der Formel $a = p : \cos \varphi^2$.

Damit erhält man auch bequemere Formeln zur scharfen Berechnung von v aus E und E aus v . Es ist nach Art. 2, (3), (4) und (6)

$$\sqrt{r} \sin \frac{1}{2}(v - E) = \frac{1}{2} \sqrt{a} (\sqrt{1 + e} - \sqrt{1 - e}) \sin E,$$

setzt man $\sin \varphi = \cos(90^\circ - \varphi)$, so wird

$$(10^*) \quad \sin \frac{1}{2}(v - E) = \sqrt{\frac{a}{r}} \sin \frac{1}{2} \varphi \sin E = \sqrt{\frac{r}{a} \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi}{\cos \varphi}} \sin v.$$

Für dieses Beispiel ist

$$\varphi = 14^\circ 11' 16''.47 \text{ und daraus } \log a = 0.4223802.$$

Die Übereinstimmung der beiden Werte von $\log a$ dient als Kontrolle der Rechnung; für den letzteren braucht man l nicht mit dieser Genauigkeit zu rechnen, welche der erste erfordert.

Aus den wahren Anomalien und der Exzentrität erhält man

$$\begin{aligned}
 E &= 320^\circ 52' 19''.16, & E' &= 327^\circ 8' 27''.64 \\
 M &= 329^\circ 44' 2''.84, & M' &= 334^\circ 45' 38''.02 \\
 M' - M &= 18095''.18.
 \end{aligned}$$

Aus $\log a$ erhält man die mittlere tägliche Bewegung $\mu = 824''.9663$, also in der Zeit t beträgt die mittlere Bewegung $18095''.17$. Die Übereinstimmung mit $M' - M$ dient als Kontrolle der Rechnung.⁶⁾

II. Für die Parabel.

Aus $r = \frac{q}{\cos \frac{1}{2} v^2}$, $r' = \frac{q}{\cos \frac{1}{2} v'^2}$ erhält man

$$\sqrt{\frac{1}{q}} \cos \frac{1}{2} v = \frac{1}{\sqrt{r}}, \quad \sqrt{\frac{1}{q}} \cos \frac{1}{2} v' = \frac{1}{\sqrt{r'}}$$

und daraus, indem man $v' = v + 2f$ setzt,

$$\begin{aligned}
 13) \quad & \sqrt{\frac{1}{q}} \sin \frac{1}{2} v = \frac{\cot f}{\sqrt{r}} - \frac{\operatorname{cosec} f}{\sqrt{r'}} \\
 & \sqrt{\frac{1}{q}} \cos \frac{1}{2} v = \frac{1}{\sqrt{r}},
 \end{aligned}$$

aus welchen Gleichungen q , v und v' erhalten werden. Aus

$$\begin{aligned}
 14) \quad & \frac{C}{q^{\frac{3}{2}}} \tau = 75 \operatorname{tang} \frac{1}{2} v + 25 \operatorname{tang} \frac{1}{2} v^3 \\
 & \frac{C}{q^{\frac{3}{2}}} \tau' = 75 \operatorname{tang} \frac{1}{2} v' + 25 \operatorname{tang} \frac{1}{2} v'^3
 \end{aligned}$$

erhält man τ und τ' , d. i. die Zeiten, welche seit dem Durchgange durch das Perihel verfloßen sind; aus diesen und den Beobachtungszeiten erhält man die Zeit des Durchganges des Himmelskörpers durch das Perihel. Die Übereinstimmung dieser beiden Zeiten dient als Kontrolle der Rechnung.

Beispiel. Es sei $\log r = 0.13896$, $\log r' = 0.11068$, $v' - v = 12^\circ 11' 35''$, $t = -14,04929$ Tage.

Man erhält

$$\log q = 0.08469, \quad v = -40^\circ 5' 16'', \quad v' = -27^\circ 53' 41''.$$

Aus v erhält man $\tau = -41.968$ Tage.

$$- \quad v' \quad - \quad - \quad - \quad 27.918 \quad -$$

7.

Für die Bestimmung einer parabolischen Bahn ist eine unter dem Namen der Lambertschen Gleichung bekannte Formel von großer Wichtigkeit.

Nach den Gleichungen (14) ist, wegen $r' - r = t$,

$$\begin{aligned} \frac{Ct}{q^{\frac{3}{2}}} &= 75 \left(\tan \frac{1}{2} v' - \tan \frac{1}{2} v + 25 \left(\tan \frac{1}{2} v'^3 - \tan \frac{1}{2} v^3 \right) \right) \\ &= 25 \left(\tan \frac{1}{2} v' - \tan \frac{1}{2} v \right) \left(3 + \tan \frac{1}{2} v^2 + \tan \frac{1}{2} v \tan \frac{1}{2} v' \right. \\ &\quad \left. + \tan \frac{1}{2} v'^2 \right). \end{aligned}$$

$$\text{Da } 1 + \tan \frac{1}{2} v \tan \frac{1}{2} v' = \frac{\cos f}{\cos \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v'}, \quad 1 + \tan \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{\cos \frac{1}{2} v^2},$$

$$1 + \tan \frac{1}{2} v'^2 = \frac{1}{\cos \frac{1}{2} v'^2}, \quad \tan \frac{1}{2} v' - \tan \frac{1}{2} v = \frac{\sin f}{\cos \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v'} \text{ ist;}$$

so folgt

$$\frac{Ct}{q^{\frac{3}{2}}} = \frac{25 \sin f}{\cos \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v'} \left(\frac{\cos f}{\cos \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v'} + \frac{1}{\cos \frac{1}{2} v^2} + \frac{1}{\cos \frac{1}{2} v'^2} \right).$$

$$\text{Setzt man für } C \text{ den Wert } \frac{75k}{\sqrt{2}}, \text{ ferner aus } r = \frac{q}{\cos \frac{1}{2} v^2},$$

$$r' = \frac{q}{\cos \frac{1}{2} v'^2} \text{ die Werte } \frac{1}{\cos \frac{1}{2} v} = \sqrt{\frac{r}{q}}, \quad \frac{q}{\cos \frac{1}{2} v'} = \sqrt{\frac{r'}{q}}, \text{ so wird}$$

$$(15) \quad \frac{kt}{\sqrt{2} q^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin f \sqrt{rr'}}{3q^2} (\cos f \sqrt{rr'} + r + r').$$

Bedeutet s die Sehne zwischen dem ersten und zweiten Orte, so ist

$$s^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos 2f = (r + r')^2 - 4rr' \cos f^2$$

$$4rr' \cos f^2 = (r + r')^2 - s^2 = (r + r' + s)(r + r' - s).$$

Setzt man $r + r' + s = m^2$, $r + r' - s = n^2$, so wird

$$(16) \quad \begin{aligned} r + r' &= \frac{1}{2} (m^2 + n^2) \\ 2 \cos f \sqrt{rr'} &= \pm mn, \end{aligned}$$

wo das obere Zeichen stattfindet, wenn $\cos f$ positiv, das untere Zeichen, wenn $\cos f$ negativ ist.

Nun ist

$$\begin{aligned} \sin f^2 &= \sin \frac{1}{2}(v' - v)^2 = (\sin \frac{1}{2}v' \cos \frac{1}{2}v - \cos \frac{1}{2}v' \sin \frac{1}{2}v)^2 \\ &= \cos \frac{1}{2}v^2 + \cos \frac{1}{2}v'^2 - 2 \cos \frac{1}{2}(v' - v) \cos \frac{1}{2}v \cos \frac{1}{2}v' \\ &= \frac{q}{r} + \frac{q}{r'} - \frac{2q \cos f}{\sqrt{rr'}} = q \frac{r + r' - 2 \cos f \sqrt{rr'}}{rr'}, \end{aligned}$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichungen (16)

$$(17) \quad 2 \sin f \sqrt{rr'} = (m \mp n) \sqrt{2q}.$$

Substituiert man die Werte von $r + r'$, $\cos f \sqrt{rr'}$, $\sin f \sqrt{rr'}$ in die Gleichung (15), so erhält man

$$2kt = \frac{1}{3} (m^3 \mp n^3),$$

oder, indem man statt m und n die Werte setzt,

$$(18) \quad 6kt = (r + r' + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r + r' - s)^{\frac{3}{2}},$$

welche Gleichung die Lambertsche Formel heißt, wiewohl sie bereits von Euler angegeben wurde. Das obere Zeichen wird genommen, wenn $2f = v' - v$ kleiner als 180° ist, das untere, wenn $2f$ größer als 180° ist. In der Regel findet nur der erste Fall statt.

8.

Es seien $r, v; r', v'; r'', v''$ drei Orte eines Himmelskörpers in der Bahn, so ist

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos v$$

$$\frac{p}{r'} = 1 + e \cos v'$$

$$\frac{p}{r''} = 1 + e \cos v''.$$

Multipliziert man diese Gleichungen resp. mit $\sin(v' - v'')$, $\sin(v'' - v)$, $\sin(v - v')$ und addiert man, so wird zufolge der Formel II. des Art. 5.

$$\begin{aligned} & \frac{p}{r} \sin(v' - v'') + \frac{p}{r'} \sin(v'' - v) + \frac{p}{r''} \sin(v - v') \\ &= \sin(v' - v'') + \sin(v'' - v) + \sin(v - v'). \end{aligned}$$

Multipliziert man mit $rr'r''$ und setzt Kürze halber

$$\begin{aligned} v' - v &= 2f'', & v'' - v &= 2f', & v - v' &= 2f, \\ rr' \sin 2f'' &= n'', & rr'' \sin 2f' &= n', & r'r'' \sin 2f &= n, \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned} p &= \frac{rn - r'n' + r''n''}{n - n' + n''} \\ &= \frac{rr'r''(\sin 2f - \sin 2f' + \sin 2f'')}{n - n' + n''}; \end{aligned}$$

berücksichtigt man ferner, daß

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha + \beta) &= 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) (\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \\ &\quad - \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)) = 4 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{\beta}{2} \end{aligned}$$

ist, so wird

$$(19) \quad p = \frac{4rr'r'' \sin f \sin f' \sin f''}{n - n' + n''}.$$

In diesem Ausdrucke sind $\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{2}n'$, $\frac{1}{2}n''$ die Flächen der Dreiecke bzw. zwischen dem zweiten und dritten, dem ersten und dritten, dem ersten und zweiten Radius Vektor; der Nenner ist daher die doppelte Dreiecksfläche, welche durch die drei Orte des Himmelskörpers im Raume bestimmt ist. Wegen

$$rn : r'n' : r''n'' = \sin 2f : \sin 2f' : \sin 2f''$$

folgt: Sind die Winkel $2f$ und $2f''$ spitz ($2f'$ kann dann spitz oder stumpf sein), so können rn , $r'n'$, $r''n''$ als die drei Seiten eines Dreieckes betrachtet werden, deren gegenüberliegende Winkel $2f$, $180^\circ - 2f'$, $2f''$ sind.

Aus dem obigen für p gefundenen Ausdrucke läßt sich eine Formel für $\frac{n+n''}{n'}$ ableiten, welche in der Folge von Wichtigkeit ist.

Sind nämlich t, t', t'' die Zwischenzeiten bzw. zwischen dem zweiten und dritten, dem ersten und dritten, dem ersten und zweiten Orte, und setzt man

$$kt = \vartheta, \quad kt' = \vartheta', \quad kt'' = \vartheta'',$$

so ist zufolge Gleichung (8) des Art. 6

$$\sqrt{p} = \frac{yn}{\vartheta}, \quad \sqrt{p} = \frac{y'n''}{\vartheta''},$$

also

$$p = \frac{yy''nn''}{\vartheta\vartheta''},$$

wo die Bedeutung von y und y'' klar ist. Durch Gleichstellung dieses Wertes von p mit dem in Gleichung (19) erhält man

$$n - n' + n'' = \frac{4rr' \sin f \sin f' \sin f'' \vartheta \vartheta''}{yy''nn''}.$$

Da

$$\begin{aligned} nn'' &= r' r'' \sin 2f \cdot r r' \sin 2f'' \\ &= 4r r' r'' \sin f \cos f \sin f'' \cos f'' \end{aligned}$$

ist, so wird

$$n - n' + n'' = \frac{\sin f' \vartheta \vartheta''}{yy'' r' \cos f \cos f''} = \frac{n' \vartheta \vartheta''}{2yy'' r r' r'' \cos f \cos f' \cos f''},$$

$$(20) \quad \frac{n + n''}{n'} = 1 + \frac{\vartheta \vartheta''}{2yg'' r r' r'' \cos f \cos f' \cos f''} \cdot 7)$$

Dritter Abschnitt.

Beziehungen hinsichtlich eines einzelnen Ortes im Raume.

9.

Um den Ort eines Himmelskörpers im Raume in Beziehung auf einen gegebenen Punkt angeben zu können, ist zuerst die Kenntnis der Lage der Bahnebene gegen eine bekannte Ebene und die der Apsidenlinie in der Bahnebene erforderlich. Denkt man sich um den Mittelpunkt der Sonne eine Kugelfläche beschrieben, so werden sich auf dieser die Bahn des Himmelskörpers als ein größter Kreis, die von dem Mittelpunkte der Sonne nach dem Himmelskörper gezogenen Geraden als Punkte darstellen. Wenn die zu be-

stimmenden Ebenen und Geraden nicht durch die Sonne selbst hindurchgehen, so sollen dieselben durch parallel durch den Mittelpunkt der Sonne gelegte Ebenen und Gerade ersetzt werden.

Die Ebene der Bahn eines Himmelskörpers schneidet im allgemeinen die Ebene der Erdbahn oder Ekliptik; diese Durchschnittslinie heißt die Knotenlinie; die Durchschnittspunkte der erwähnten Kugelfläche mit der Knotenlinie heißen Knoten, derjenige, wo der Planet von der südlichen Gegend in die nördliche Gegend der Ekliptik übergeht, heißt der aufsteigende, der andere der absteigende Knoten, in diesem geht der Himmelskörper von der nördlichen Gegend der Ekliptik in die südliche über. Die Lage der Knoten wird durch ihren nach der Ordnung der Zeichen gezählten Abstand von dem Frühlings-Aequinoxtium bezeichnet, d. i. die Länge des Knotens.

Es sei (Fig. 2) $\mathcal{V}\Omega E$ ein Teil der Ekliptik, $\mathcal{V}_0\Omega P$ ein Teil der Bahn des Himmelskörpers, \mathcal{V} der Frühlingspunkt

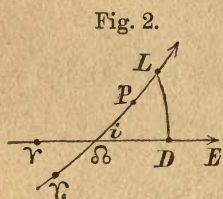


Fig. 2.

(die Richtung der Bewegung ist durch beigesetzte Pfeile bezeichnet). Der sphärische Winkel $E\Omega P$ stellt den Winkel der Bahn und Ekliptik vor, dieser Winkel heißt die Neigung der Bahn des Himmelskörpers gegen die Ekliptik oder

einfach die Neigung der Bahn; die Neigung wird von 0 bis 180° gezählt. Bezeichnet in der Figur Ω den aufsteigenden Knoten, so stellt der Bogen $\mathcal{V}\Omega$ die Länge des aufsteigenden Knotens dar. Wird dieser Bogen in der Bahn von Ω aus entgegengesetzt der Richtung der Bewegung des Himmelskörpers abgetragen, so erhält man dadurch den Punkt \mathcal{V}_0 ; die von diesem Punkt in der Richtung der Bewegung gezählten Bogen werden Längen in der Bahn

genannt. Ist daher P das Perihel (eigentlich die Projektion des Perihels), so heißt $\mathcal{V}_0 P$ die Länge des Perihels.

In Figur 2 ist daher

$$\begin{aligned}\mathcal{V}\Omega &= \Omega = \text{Länge des aufsteigenden Knotens,} \\ \sphericalangle E\Omega P &= i = \text{Neigung der Bahn,} \\ \mathcal{V}_0 P &= \Pi = \text{Neigung des Perihels.}\end{aligned}$$

Ist L ein Ort des Himmelskörpers, v die wahre, M die mittlere Anomalie desselben, so heißt $\Pi + v$ die wahre, $\Pi + M$ die mittlere Länge des Himmelskörpers in der Bahn. Die sieben Größen: 1) mittlere Länge für einen bestimmten Zeitpunkt, 2) mittlere Entfernung, 3) Exzentrizität, 4) Länge des Perihels, 5) Länge des aufsteigenden Knotens, 6) Neigung der Bahn, 7) Masse des Himmelskörpers heißen die Elemente der Bewegung des Himmelskörpers. Bei der Parabel vertritt die Zeit des Periheldurchganges die Stelle des ersten Elementes. Statt des Elementes in 2) wird die Distanz im Perihel genommen. Bei den Kometen und den kleinen Planeten setzt man die Masse immer gleich Null.

Die Lage eines Punktes z. B. L , an der Oberfläche der Kugel wird am einfachsten durch den Abstand desselben von der Ekliptik, d. i. die Breite, und durch den Abstand des Fußpunktes des Perpendikels auf die Ekliptik von dem Frühlingspunkt, d. i. die Länge, bestimmt. Es sei also der Bogen LD senkrecht auf $\mathcal{V}E$, so heißt $\mathcal{V}D = l$ die Länge, $DL = b$ die Breite [des Punktes L . Die Breite wird von beiden Seiten der Ekliptik an bis 90° gezählt, oberhalb (d. i. in der nördlichen Region) der Ekliptik positiv, unterhalb negativ gezählt. Da der Mittelpunkt der Sonne als Mittelpunkt der Kugel angenommen wurde, so nennt man l und b heliozentrische Länge und Breite. Bezeichnet

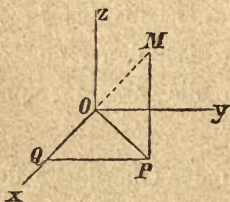
man den Bogen ΩL mit u , so heißt u das Argument der Breite, dabei ist $u = \Pi - \Omega + v$.

Aus der obigen Zählweise folgt, daß für $i < 90^\circ$ die Größen $l - \Omega$ und u , für $i > 90^\circ$ die Größen $l - \Omega$ und $360^\circ - u$ in demselben Quadranten liegen.

10.

Die Lage eines Punktes im Raume wird entweder durch die Abstände desselben von drei sich einander unter rechten Winkeln schneidenden Ebenen, d. i. durch rechtwinklige Koordinaten oder durch den Abstand von einem gegebenen Anfangspunkt und durch zwei Winkel, d. i. durch Polarkoordinaten, bestimmt. Ist der Punkt O der Koordinatenanfang der Achsen OX , OY , OZ , ferner $MP \perp XY$, $PQ \perp OX$, so stellen die drei Strecken

Fig. 3.



$OQ = x$, $PQ = y$, $MP = z$ die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes M dar. Der Punkt M kann auch bestimmt werden: 1) durch die (absolut genommene) Distanz $OM = r$, durch den Winkel $XOP = l$ gezählt von der positiven x -Achse an gegen die positive y -Achse von 0 bis 360° und durch den Winkel $MOP = b$ gezählt von 0 bis $\pm 90^\circ$, je nachdem der Punkt M auf der positiven oder negativen Seite der x -Achse liegt. 2) Durch die Distanz $OM = r$, durch den Winkel $XOM = u$ gezählt von 0 bis 360° und durch den Winkel $MQP = i$ der Ebene MOQ mit der Ebene XY gezählt von 0 bis 180° . Zwischen diesen Koordinaten findet folgender Zusammenhang statt:

1) Aus $MP = OM \sin b$, $OP = OM \cos b$, $OQ = OP \cos l$, $PQ = OP \sin l$ folgt

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & x = r \cos b \cos l \\
 & y = r \cos b \sin l \\
 & z = r \sin b.
 \end{aligned}$$

2) Aus $OQ = OM \cos u$, $MQ = OM \sin u$, $PQ = MQ \cos i$, $MP = MQ \sin i$ folgt

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & x = r \cos u \\
 & y = r \sin u \cos i \\
 & z = r \sin u \sin i.
 \end{aligned}$$

Ist die Gerade OX die Linie nach dem aufsteigenden Knoten, die Ebene XY die Ekliptik, MOX die Ebene der Bahn des Himmelskörpers, so sind die Polarkoordinaten l und b (sowie u und i) mit den Größen $l - \Omega$ und b (sowie u und i) des vorigen Artikels identisch, man erhält daher durch Gleichstellung der beiden Systeme von x, y, z folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \cos b \cos (l - \Omega) = \cos u \\
 (4) \quad & \cos b \sin (l - \Omega) = \sin u \cos i \\
 (5) \quad & \sin b = \sin u \sin i.
 \end{aligned}$$

11.

Es sei der Mittelpunkt der Sonne der Koordinatenanfang, die Ekliptik die xy -Ebene, die positive x -Achse sei nach dem Frühlingspunkt, die positive y -Achse nach dem Punkt 90° Länge, die positive z -Achse nach dem Nordpol der Ekliptik gerichtet. Sind daher l, b, r die heliozentrische Länge, Breite und Distanz eines Punktes von der Sonne, x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten desselben auf das vorhin erwähnte Achsensystem bezogen, so drücken die Gleichungen (1) des vorigen Artikels unmittelbar den Zusammenhang der heliozentrischen rechtwinkligen und Polarkoordinaten aus.

Sind L , B , R die heliozentrische Länge, Breite und Distanz des Mittelpunktes der Erde von der Sonne, Y , X , Z die rechtwinkligen Koordinaten, so ist analog

$$X = R \cos B \cos L, \quad Y = R \cos B \sin L, \quad Z = R \sin B.$$

Denkt man sich durch den Mittelpunkt der Erde ein dem früheren Achsensystem paralleles Achsensystem gelegt, so sollen durch λ und β die geozentrische Länge und Breite, durch \mathcal{A} die Distanz des Punktes von dem Mittelpunkte der Erde bezeichnet werden. Sind ξ , η , ζ die rechtwinkligen geozentrischen Koordinaten dieses Punktes, so ist

$$(6) \quad \begin{aligned} \xi &= \mathcal{A} \cos \beta \cos \lambda \\ \eta &= \mathcal{A} \cos \beta \sin \lambda \\ \zeta &= \mathcal{A} \sin \beta, \end{aligned}$$

und es ist

$$\begin{aligned} x &= X + \xi \\ y &= Y + \eta \\ z &= Z + \zeta. \end{aligned}$$

Die Größe $r \cos b$ ist die Projektion der Distanz des Punktes von der Sonne auf die Ekliptik und heißt kurtierte Distanz von der Sonne. Ebenso heißt $\mathcal{A} \cos \beta = \varrho$ die kurtierte Distanz des Punktes von der Erde.

Die Breite B der Erde ist nahe gleich Null und wird daher gewöhnlich vernachlässigt; unter dieser Voraussetzung erhält man für die heliozentrischen Koordinaten die Ausdrücke

$$(7) \quad \begin{aligned} r \cos b \cos l &= x = \varrho \cos \lambda + R \cos L \\ r \cos b \sin l &= y = \varrho \sin \lambda + R \sin L \\ r \sin b &= z = \varrho \tan \beta. \end{aligned}$$

Vermittelst dieser Ausdrücke kann man die heliozentrischen Längen, Breiten und Distanzen in geometrische verwandeln, und umgekehrt.

Aus $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ oder

$r^2 = (\rho \cos \lambda + R \cos L)^2 + (\rho \sin \lambda + R \sin L)^2 + \rho^2 \tan^2 \beta^2$,
folgt durch Entwicklung der Quadrate

$$(8) \quad r^2 = R^2 + 2R \cos(\lambda - L) \rho + \sec^2 \beta^2 \rho^2.$$

12.

Die heliozentrischen Koordinaten für das Achsensystem des vorigen Artikels lassen sich unmittelbar durch r und v ausdrücken. Setzt man in den Gleichungen (1) des Art. 10 $l = l - \Omega + \Omega$, so wird

$$x = r \cos b \cos(l - \Omega) \cos \Omega - r \cos b \sin(l - \Omega) \sin \Omega,$$

$$y = r \cos b \sin(l - \Omega) \cos \Omega + r \cos b \cos(l - \Omega) \sin \Omega,$$

und berücksichtigt man Gleichungen (3), (4), (5), so wird

$$x = r \cos u \cos \Omega - r \sin u \sin \Omega \cos i,$$

$$y = r \sin u \cos \Omega \cos i + r \cos u \sin \Omega,$$

$$z = r \sin u \sin i.$$

Setzt man

$$\cos \Omega = l \sin A$$

$$- \sin \Omega \cos i = l \cos A,$$

$$\sin \Omega = m \sin B$$

$$\cos \Omega \cos i = m \cos B,$$

$$\sin i = n,$$

wo l, m, n positiv genommen werden, so wird

$$x = lr \sin(A + u)$$

$$(9) \quad y = mr \sin(B + u)$$

$$z = nr \sin u.$$

Da $u = \Pi - \Omega + v$ ist, so sind x, y, z unmittelbar durch r und v ausgedrückt, wenn

$$\mathfrak{A} = \Pi - \Omega + A$$

$$\mathfrak{B} = \Pi - \Omega + B$$

$$\mathfrak{C} = \Pi - \Omega$$

gesetzt wird; es wird dann nämlich

$$(10) \quad \begin{aligned} x &= lr \sin (\mathfrak{A} + v) \\ y &= mr \sin (\mathfrak{B} + v) \\ z &= nr \sin (\mathfrak{C} + v). \end{aligned}$$

Diese Formeln sind dann sehr bequem, wenn mehrere Orte zu rechnen sind.

Beispiel: Es sei

$$\Omega = 171^{\circ} 7' 53''.84, \quad i = 13^{\circ} 6' 54''.20.$$

Man erhält

$$A = 261^{\circ} 21' 33''.86, \quad B = 170^{\circ} 53' 52''.92, \\ \log l = 9.9997341, \quad \log m = 9.9888016, \quad \log n = 9.3558483.$$

Ist nun $II - \Omega = 241^{\circ} 9' 34''.06$, so wird

$$\mathfrak{A} = 142^{\circ} 31' 7''.92, \quad \mathfrak{B} = 52^{\circ} 3' 26''.98.$$

Hierbei dient die Gleichung (aus (10))

$$l^2 \sin \mathfrak{A}^2 + m^2 \sin \mathfrak{B}^2 + n^2 \sin \mathfrak{C}^2 = 1$$

als Kontrolle der Rechnung.

Für $v = 315^{\circ} 2' 0''.76$, $\log r = 0.3260215$ wird

$$\log x = 0.3219717, \quad \log y = 9.4063011, \quad \log z = 9.1272776.$$

Vierter Abschnitt.

Beziehungen zwischen mehreren Orten im Raume.

* 13.

Aus zwei heliozentrischen Orten l, b und l', b' im Raume, die Länge des aufsteigenden Knotens Ω , die Neigung der Bahn i und die Argumente der Breite u, u' zu bestimmen.

Aus den Gleichungen (4) und (5) des Art. 10 folgt durch Division

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} b &= \operatorname{tang} i \sin (l - \Omega) \\ \operatorname{tang} b' &= \operatorname{tang} i \sin (l' - \Omega). \end{aligned}$$

Setzt man $l' - \Omega = l - \Omega + l' - l$, so erhält man zur Bestimmung der Unbekannten Ω und i folgende Gleichungen

$$(1) \quad \begin{aligned} \operatorname{tang} i \sin (l - \Omega) &= \operatorname{tang} b \\ \operatorname{tang} i \cos (l - \Omega) &= \frac{\operatorname{tang} b' - \operatorname{tang} b \cos (l' - l)}{\sin (l' - l)}. \end{aligned}$$

Wachsen die heliozentrischen Längen mit der Zeit, so ist $i < 90^\circ$, im entgegengesetzten Falle ist $i > 90^\circ$.

Hat man Ω und i gefunden, so bestimmt man die Argumente der Breite nach den aus (3) und (4) des Art. 10 durch Division erhaltenen Formeln

$$(2) \quad \begin{aligned} \operatorname{tang} u &= \frac{\operatorname{tang} (l - \Omega)}{\cos i} \\ \operatorname{tang} u' &= \frac{\operatorname{tang} (l' - \Omega)}{\cos i}. \end{aligned}$$

Ist $i < 90^\circ$, so liegen $l - \Omega$ und u in demselben Quadranten.

> $i > 90^\circ$ > $360^\circ - u$ *

14.

Es seien $x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''$ drei heliozentrische Orte eines Himmelskörpers im Raume, so ist nach (10) des Art. 12

$$\frac{x}{r} = l \sin (\mathfrak{N} + v)$$

$$\frac{x'}{r'} = l \sin (\mathfrak{N} + v')$$

$$\frac{x''}{r''} = l \sin (\mathfrak{N} + v'')$$

Multipliziert man diese Gleichungen resp. mit $\sin (v' - v'')$, $\sin (v'' - v)$, $\sin (v - v')$ und addiert man, so erhält man mit Berücksichtigung der Formel I des Art. 5

$$\frac{x}{r} \sin (v' - v'') + \frac{x'}{r'} \sin (v'' - v) + \frac{x''}{r''} \sin (v - v') = 0$$

oder

$$x r' r'' \sin (v'' - v) - x' r r'' \sin (v'' - v) + x'' r r' \sin (v' - v) = 0.$$

Da $r'r'' \sin(v'' - v') = n, r'r'' \sin(v'' - v) = n', r'r' \sin(v' - v) = n''$ gesetzt wurde, so wird

$$nx - n'x' + n''x'' = 0, \text{ ebenso}$$

$$ny - n'y' + n''y'' = 0$$

$$nz - n'z' + n''z'' = 0. \text{ 8)}$$

Drückt man die heliozentrischen Koordinaten durch die geozentrischen aus, so wird gemäß der Ausdrücke (7) des Art. 11

$$(3) \quad n(\varrho \cos \lambda + R \cos L) - n'(\varrho' \cos \lambda' + R' \cos L') \\ + n''(\varrho'' \cos \lambda'' + R'' \cos L'') = 0$$

$$(4) \quad n(\varrho \sin \lambda + R \sin L) - n'(\varrho' \sin \lambda' + R' \sin L') \\ + n''(\varrho'' \sin \lambda'' + R'' \sin L'') = 0$$

$$(5) \quad n \varrho \tan \beta - n' \varrho' \tan \beta' + n'' \varrho'' \tan \beta'' = 0.$$

Zweiter Teil.

Bahnbestimmung der Planeten und Kometen.

Erster Abschnitt.

Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei geozentrischen Beobachtungen.

15.

Vernachlässigt man die Masse des Himmelskörpers, so sind bei einer elliptischen Bahn sechs Elemente zu bestimmen. Zu dieser Bestimmung müssen daher sechs von einander unabhängige Größen, welche von den Elementen abhängen, gegeben sein. Diese gegebenen Größen können nur von der Erde aus beobachtete Orte des Himmelskörpers sein, und da jede solche Ortsbestimmung zwei Daten, etwa Länge und Breite liefert, so sollen drei geozentrische Beobachtungen als gegeben betrachtet werden. Diese Beobachtungen dürfen keine zu große heliozentrische Bewegung umfassen, indem sonst Voraussetzungen, zu welchen man bei einer ersten Bahnbestimmung genötigt ist, nicht stattfinden.

Wären für zwei Beobachtungen außer den geozentrischen Längen und Breiten noch die Entfernungen des Himmelskörpers von der Erde gegeben, so könnte man daraus die heliozentrischen Längen, Breiten und Entfernungen des Himmelskörpers rechnen, und damit nach Art. 13 Neigung, Knoten und Argument der Breite, und dann nach Art. 6

die übrigen Elemente bestimmen. Wir versuchen daher zunächst die Bestimmung der Entfernungen des Himmelskörpers von der Erde.

Es bedeuten, wie früher

t, t', t'' die Zwischenzeiten zwischen bzw. der zweiten und dritten, ersten und dritten, ersten und zweiten Beobachtung,

$\lambda, \lambda', \lambda''$ die drei geozentrischen Längen des Himmelskörpers,

β, β', β'' dessen Breiten,

$\varrho, \varrho', \varrho''$ dessen kurtierte Entfernungen von der Erde,

L, L', L'' die heliozentrischen Längen der Erde,

R, R', R'' die Entfernungen der Erde von der Sonne.

Die Gleichungen (3), (4), (5) des Art. 14 sind linear nach $n\varrho, n'\varrho', n''\varrho''$; bestimmt man diese Größen, so wird jede in der Form

$$n\alpha + n'\alpha' + n''\alpha''$$

erhalten, wo $\alpha, \alpha', \alpha''$ gegebene Zahlen sind. Daraus folgt, daß wenn die Werte der Verhältnisse $n:n'$ und $n'':n'$ bekannt wären, man unmittelbar die Größen $\varrho, \varrho', \varrho''$ finden könnte. Nun ist

$$\frac{n}{n'} = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}'} \cdot \frac{y'}{y}, \quad \frac{n''}{n'} = \frac{\mathfrak{z}''}{\mathfrak{z}'} \cdot \frac{y'}{y''}.$$

Die Verhältnisse y, y', y'' weichen von der Einheit um kleine Größen der zweiten Ordnung ab, wenn die Zwischenzeiten t und t'' als kleine Größen erster Ordnung betrachtet werden. Man könnte daher versuchen, in erster Annäherung für die Verhältnisse $n:n'$ und $n'':n'$ die Verhältnisse $\mathfrak{z}:\mathfrak{z}'$ und $\mathfrak{z}'':\mathfrak{z}'$ zu setzen. Diese Voraussetzung ist jedoch unstatthaft; denn eliminiert man aus den Gleichungen (3), (4), (5) die Größen ϱ und ϱ'' , so erhält man

$$\begin{aligned}
 & nR (\operatorname{tang} \beta \sin (\lambda'' - L) - \operatorname{tang} \beta'' \sin (\lambda - L)) \\
 & - n'R' (\operatorname{tang} \beta \sin (\lambda'' - L') - \operatorname{tang} \beta'' \sin (\lambda - L')) \\
 (1) \quad & + n''R'' (\operatorname{tang} \beta \sin (\lambda'' - L'') - \operatorname{tang} \beta'' \sin (\lambda - L'')) \\
 & - n'\varrho' (\operatorname{tang} \beta \sin (\lambda'' - \lambda') - \operatorname{tang} \beta' \sin (\lambda'' - \lambda) \\
 & \quad + \operatorname{tang} \beta'' \sin (\lambda'' - \lambda)) = 0,
 \end{aligned}$$

welche Gleichung zur Bestimmung von ϱ' dient.

Diese Gleichung läßt sich durch die Einführung von Hilfsgrößen auf folgende Art umformen:

Es stelle (Fig. 4) S den Mittelpunkt der Sonne, T den Mittelpunkt der Erde und L den Ort des Planeten dar, ferner seien (Fig. 5) A, A', A'' die drei heliozentrischen

Fig. 4.

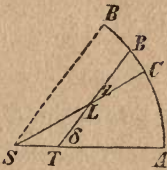
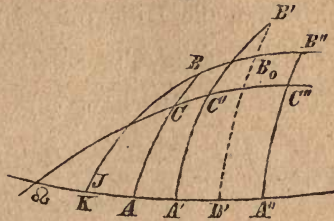


Fig. 5.



Orte der Erde auf der Himmelskugel, B, B', B'' die drei geozentrischen Orte des Himmelskörpers, C, C', C'' die heliozentrischen Orte desselben. Ist K der Durchschnittspunkt des größten Kreises durch die äußersten geozentrischen Orte des Himmelskörpers (d. i. durch die Punkte B, B'') mit der Ekliptik, so werde die Länge dieses Punktes mit K , die Neigung des eben erwähnten größten Kreises mit J bezeichnet. Dabei ist

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \operatorname{tang} \beta = \sin (\lambda - K) \operatorname{tang} J \\
 & \operatorname{tang} \beta'' = \sin (\lambda'' - K) \operatorname{tang} J,
 \end{aligned}$$

aus welchen Gleichungen (ähnlich wie in Art. 13) $\operatorname{tang} J$ und K erhalten werden, wobei $\operatorname{tang} J$ positiv genommen wird.

Durch Einführung der Hilfsgrößen J und K erhält man mit Berücksichtigung der Formel I des Art. 5, indem man für A , B , C bzw. $\lambda - K$, $\lambda'' - K$, $L - K$ setzt,

$$\begin{aligned} & \text{tang } \beta \sin(\lambda'' - L) - \text{tang } \beta' \sin(\lambda - L) \\ & = \text{tang } J \sin(\lambda'' - \lambda) \sin(L - K), \end{aligned}$$

und analoges für die übrigen Ausdrücke.

Die Gleichung (1) geht daher über in

$$\begin{aligned} & n R \sin(\lambda'' - \lambda) \sin(L - K) \text{tang } J \\ & - n' R' \sin(\lambda'' - \lambda) \sin(L' - K) \text{tang } J \\ (3) \quad & + n'' R'' \sin(\lambda'' - \lambda) \sin(L'' - K) \text{tang } J \\ & - n' \varrho' (\sin(\lambda'' - \lambda) \sin(\lambda' - K) \text{tang } J \\ & - \text{tang } \beta' \sin(\lambda'' - \lambda)) = 0. \end{aligned}$$

Führt man die Hilfsgröße β_0 ein durch die Gleichung

$$(4) \quad \text{tang } \beta_0 = \sin(\lambda' - K) \text{tang } J,$$

so folgt aus der Gleichung (3)

$$(5) \quad \frac{n' \sin(\beta' - \beta_0)}{\cos \beta_0 \text{tang } J} \cdot \frac{\varrho'}{\cos \beta'} = -n R \sin(L - K) + n' R' \sin(L' - K) - n'' R'' \sin(L'' - K).$$

Setzt man der Kürze halber

$$(6) \quad \frac{\sin(\beta' - \beta_0)}{\cos \beta_0 \text{tang } J} = a_0, \quad \frac{R \sin(L - K)}{a_0} = b, \quad \frac{R' \sin(L' - K)}{a_0} = c, \\ \frac{R'' \sin(L'' - K)}{a_0} = d,$$

so wird aus (5)

$$(7) \quad \frac{\varrho'}{\cos \beta'} = c - \frac{bn + dn''}{n'}.$$

Die Größe β_0 ist vermöge der Gleichung (4) die Breite des Durchschnittspunktes B_0 des Breitenkreises $[B'D']$ des zweiten Punktes B' mit dem erwähnten größten Kreise durch die beiden Punkte B und B'' .

Die Größe $\beta' - \beta_0$, in der Fig. 5 durch den Bogen $B_0 B'$ versinnlicht, hängt von der Krümmung des geozentrischen Weges $BB'B'$ ab, sie ist daher im allgemeinen eine kleine

Größe zweiter Ordnung, wenn die Linie $BB'B''$ eine kleine Größe der ersten Ordnung ist. Aus den Ausdrücken für a_0, b, c, d ersieht man, daß b und d kleine Größen der — 2ten, d. i. große Größen der zweiten Ordnung sind.

Daraus folgt unmittelbar die Unbrauchbarkeit der Verhältnisse $\vartheta : \vartheta'$ und $\vartheta'' : \vartheta'$ als Näherungswerte für die Verhältnisse $n : n'$ und $n'' : n'$. Denn würde man in der Gleichung (7) diese Näherungswerte setzen, so würde man in den Annahmen für $n : n'$ und $n'' : n'$ kleine Größen der zweiten Ordnung vernachlässigen, wodurch man dann, wegen der großen Faktoren b und d , die Größe ϱ' im allgemeinen mit einem endlichen Fehler behaftet erhalten würde.

Die Verhältnisse $n : n'$ und $n'' : n'$ lassen sich mit hinreichender Genauigkeit durch die Größe r' ausdrücken, wodurch dann die Gleichung (7) eine einzige Unbekannte (ϱ' oder r') enthält.

Gauß verfährt auf folgende Art.

Schreibt man die Gleichung (7) in der Form

$$\frac{\varrho'}{\cos \beta'} = c - \frac{bn + dn''}{n + n''} \cdot \frac{n + n''}{n'}$$

so können für diese Form Annahmen gemacht werden, welche zu einem brauchbaren Werte von ϱ' führen.

Setzt man in dem Faktor $\frac{bn + dn''}{n + n''}$ statt $\frac{n}{n''}$ das Verhältnis $\frac{\vartheta}{\vartheta''}$, so ist der Fehler im allgemeinen nur eine kleine Größe der ersten Ordnung; denn es ist

$$\Delta = \frac{bn + dn''}{n + n''} - \frac{b\vartheta + d\vartheta''}{\vartheta + \vartheta''} = \frac{(b-d)\vartheta\vartheta''(y'' - y)}{(\vartheta + \vartheta'')(y''\vartheta + y\vartheta'')}$$

Nun ist, weil R'' nahe $= R$ ist, $d - b$ nahe

$$= \frac{2R}{a_0} \sin \frac{1}{2}(L'' - L) \cos \left(\frac{L + L''}{2} - K \right),$$

also von der Ordnung $\frac{\sin \frac{1}{2}(L'' - L)}{a_0}$ d. i. von der Ordnung

— 1; $\vartheta \vartheta''$ von der Ordnung + 2, $y'' - y$ von der Ordnung + 2, — also der Zähler der Differenz \mathcal{A} eine kleine Größe der dritten Ordnung. Der Nenner von \mathcal{A} ist eine kleine Größe zweiter Ordnung, also die Differenz \mathcal{A} im allgemeinen von der ersten Ordnung.

Der Faktor $\frac{n+n''}{n'}$ ist nach Art. 8 Gleichung (20)

$$\frac{n+n''}{n'} = 1 + \frac{\vartheta \vartheta''}{2 r r' r'' y y'' \cos f \cos f' \cos f''}.$$

Da die Kosinuse der Winkel f, f', f'' von der Einheit ebenfalls nur um Größen zweiter Ordnung abweichen, so ist auf einen Fehler vierter Ordnung genau $\frac{n+n''}{n'} = 1 + \frac{\vartheta \vartheta''}{2 r r' r''}$. Die Verhältnisse $\frac{r}{r'}$, $\frac{r''}{r'}$ weichen, wenn man die Exzentrizität der Bahn als eine kleine Größe erster Ordnung betrachtet, von der Einheit bloß um kleine Größen zweiter Ordnung ab. Setzt man daher statt $\frac{\vartheta \vartheta''}{r r' r''}$ die Größe $\frac{\vartheta \vartheta''}{r'^3}$, so wird der Fehler von $\frac{n+n''}{n'}$ von der vierten Ordnung sein.

Faßt man das Vorhergehende zusammen, so erhält man schließlich folgendes Resultat: In der Gleichung

$$\frac{\varrho'}{\cos \beta'} = c - \frac{b \vartheta + d \vartheta''}{\vartheta + \vartheta''} \left(1 + \frac{\vartheta \vartheta''}{2 r'^3} \right)$$

ist der Fehler von ϱ' im allgemeinen nur eine kleine Größe der ersten Ordnung.

Setzt man die genauen Werte

$$\frac{n''}{n} = P, \quad \frac{n+n''}{n'} = 1 + \frac{Q}{2 r'^3},$$

so ist in aller Strenge

$$(8) \quad P = \frac{\vartheta''}{\vartheta} \cdot \frac{y}{y''}, \quad Q = \frac{\vartheta \vartheta'' r'^2}{y y'' r r'' \cos f \cos f' \cos f''}$$

$$(9) \quad \frac{\varrho'}{\cos \beta'} = c - \frac{b + dP}{1 + P} \left(1 - \frac{Q}{2 r'^3} \right).$$

Nimmt man in der Gleichung (9) für P und Q die Näherungswerte $\frac{\vartheta''}{\vartheta}$ und $\vartheta \vartheta''$, so wird die Größe ϱ' im allgemeinen mit einem Fehler erster Ordnung behaftet sein.⁹⁾

16.

Nach der Gleichung (8) des Art. 11 ist

$$r'^2 = R'^2 + 2R' \frac{\varrho'}{\cos \beta'} \cos \delta' + \frac{\varrho'^2}{\cos^2 \beta'},$$

wo $\cos \delta' = \cos \beta' \cos (\lambda' - L')$ ist, oder

$$r'^2 = R'^2 \sin^2 \delta' + \left(R' \cos \delta' + \frac{\varrho'}{\cos \beta'} \right)^2,$$

dabei bedeutet δ' den Bogen $A'B'$.

Setzt man $R' \sin \delta' = a'$, $R' \cos \delta' + \frac{\varrho'}{\cos \beta'} = x'$, so wird

$$(10) \quad r'^2 = a'^2 + x'^2, \quad \frac{\varrho'}{\cos \beta'} = x' - R' \cos \delta',$$

dabei bedeutet x' die Projektion von r' auf seine zugehörige geozentrische Entfernung; die Gleichung (9) geht über in

$$x' = R' \cos \delta' + c - \frac{b + dP}{1 + P} - \frac{b + dP}{1 + P} \cdot \frac{Q}{2(a'^2 + x'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

oder wenn

$R' \cos \delta' + c = e$, $e - \frac{b + dP}{1 + P} = \lambda$, $\frac{b + dP}{1 + P} \cdot \frac{Q}{2} = \mu$
gesetzt wird, in

$$(11) \quad x' = \lambda - \frac{\mu}{(a'^2 + x'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Um r' , d. i. $\sqrt{a'^2 + x'^2}$ bequem zu berechnen, setze man $\tan \alpha' = \frac{a'}{x'}$, so wird

$$\sqrt{a'^2 + x'^2} = r' = \frac{a'}{\sin \alpha'} = \frac{x'}{\cos \alpha'},$$

dabei bedeutet α' den Bogen $C'B'$.

Aus der Gleichung (11) wird die Unbekannte x' durch Versuche bestimmt, in der Regel ist x' von λ nicht sehr verschieden. Denn die hier durchgeführte Bahnbestimmung

kommt fast nur bei Asteroiden in Anwendung; bei diesen ist, Eros ausgenommen (für letzteren sinkt r^3 bis 1.5 herab), r^3 größer als 5.

Die Gleichung (11) läßt sich in eine für die Untersuchung der Wurzeln bequemere Form bringen. Multipliziert man mit $\frac{a'^3}{\mu}$ und setzt $\frac{x'}{a'} = \xi$, so wird

$$\frac{a'^3 \lambda}{\mu} - \frac{a'^4}{\mu} \xi = \frac{1}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} = \eta;$$

es bedeuten daher die Wurzeln von (11) die Werte ξ für die Durchschnittspunkte der beiden Kurven

$$\eta = \frac{a'^3 \lambda}{\mu} - \frac{a'^4}{\mu} \xi, \quad \eta = \frac{1}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die erste Kurve ist eine Gerade, welche die ξ -Achse im Punkte $\frac{\lambda}{a'}$, die η -Achse im Punkte $\frac{a'^3 \lambda}{\mu}$ schneidet; die zweite Kurve ist krummlinig, gegen die η -Achse symmetrisch, die ξ -Achse ist Asymptote. Für $\xi = 0$ ist $\eta = 1$ ein Maximum; für $\xi = \pm \frac{1}{2}$ ist je ein Wendepunkt, von $\xi = 0$ bis $\xi = \pm \frac{1}{2}$ ist die Kurve konkav, von $\xi = \pm \frac{1}{2}$ bis $\xi = \pm \infty$ konvex gegen die ξ -Achse. Das Zeichen von η ist positiv. Ordnet man die Gleichung (11), so fällt die Entscheidung des Zeichens von η weg. Man erhält daher für die Kurve

$$\eta = \frac{1}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{oder } \xi = \tan \alpha, \eta = \cos \alpha^3)$$

zwei gegen die ξ - und η -Achse symmetrische Äste, welche von jeder Geraden in zwei oder vier Punkten geschnitten werden. Nur für eine Gerade

$$\eta = a, \quad a \text{ absolut } > 1,$$

fallen die zwei Schnittpunkte im Unendlichen zusammen.

Beschränkt man sich auf positive Werte von ξ und η , so erhält man einen oder drei Schnittpunkte; im letzteren

Fälle sind jene auszuschließen, für welche $\varrho' : \cos \beta'$ sehr klein oder negativ wird.

Ist x' gefunden, so erhält man daraus r' und ϱ' . Dann erhält man aus

$$(12) \quad \begin{aligned} n'' &= nP, \quad \frac{n+n''}{n'} = 1 + \frac{Q}{2r'^3}, \\ \frac{n}{n'} &= \left(1 + \frac{Q}{2r'^3}\right) \frac{1}{1+P}, \quad \frac{n''}{n'} = \frac{n}{n'} P. \end{aligned}$$

Hat man die Größe ϱ' und die Verhältnisse $\frac{n}{n'}$, $\frac{n''}{n'}$ gefunden, so erhält man aus den Gleichungen (3) und (4) des Art. 14 die Größen ϱ und ϱ'' . Bequemer werden die Formeln, wenn man noch die Gleichung (5) desselben Artikels benutzt.

Eliminiert man nämlich aus den Gleichungen (3) und (4) die Größe $n''R'$, so erhält man

$$\begin{aligned} &n (\varrho \sin (\lambda - L'') + R \sin (L - L'')) \\ &- n' (\varrho' \sin (\lambda' - L'') + R' \sin (L' - L'')) \\ &+ n'' \varrho'' \sin (\lambda'' - L'') = 0. \end{aligned}$$

Eliminiert man aus dieser Gleichung und der Gleichung (5) die Größe $n''\varrho''$, so wird:

$$\begin{aligned} &n \varrho (\tan \beta \sin (\lambda'' - L'') - \tan \beta'' \sin (\lambda - L'')) \\ &- n' \varrho' (\tan \beta' \sin (\lambda'' - L'') - \tan \beta'' \sin (\lambda' - L'')) \\ &+ \tan \beta'' (nR \sin (L'' - L) - n'R' \sin (L'' - L')) = 0. \end{aligned}$$

Führt man für $\tan \beta$ und $\tan \beta''$ die Hilfsgrößen J und K ein, so wird der Koeffizient von $n\varrho$

$$\tan J \sin (\lambda'' - \lambda) \sin (L'' - K).$$

Setzt man im Koeffizienten von $n'\varrho'$

$$\begin{aligned} \tan \beta' &= \tan \beta_0 + \tan \beta' - \tan \beta_0 \\ &= \tan J \sin (\lambda' - K) + \frac{\sin (\beta' - \beta_0)}{\cos \beta' \cos \beta_0}, \end{aligned}$$

so geht derselbe über in

$$\tan J \sin (\lambda'' - \lambda') \sin (L'' - K) + \frac{\sin (\beta' - \beta_0)}{\cos \beta' \cos \beta_0} \sin (\lambda'' - L'').$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} & nR \sin(L'' - L) - n'R' \sin(L'' - L') \\ &= nR \sin(L'' - L) \left(1 - \frac{n'R' \sin(L'' - L')}{nR \sin(L'' - L)} \right). \end{aligned}$$

Setzt man

$$\begin{aligned} RR' \sin(L' - L) &= N'', & R'R'' \sin(L'' - L') &= N, \\ RR'' \sin(L'' - L) &= N', \end{aligned}$$

so wird

$$\frac{R' \sin(L'' - L')}{R \sin(L'' - L)} = \frac{N}{N'}.$$

Es ist daher

$$\begin{aligned} (13) \quad \varrho &= \left(\frac{\sin(\lambda'' - \lambda')}{\sin(\lambda'' - \lambda)} + \frac{a_0 \sec \beta'}{\sin(\lambda'' - \lambda)} \cdot \frac{\sin(\lambda'' - L')}{\sin(L'' - K)} \right) \cdot \frac{n'}{n} \varrho' \\ &+ \frac{R \sin(L'' - L)}{\sin(\lambda'' - \lambda)} \cdot \frac{\sin(\lambda'' - K)}{\sin(L'' - K)} \left(\frac{N}{N'} \cdot \frac{n'}{n} - 1 \right). \end{aligned}$$

Ebenso erhält man, indem man den ersten Ort mit dem dritten vertauscht:

$$\begin{aligned} (14) \quad \varrho'' &= \left(\frac{\sin(\lambda' - \lambda)}{\sin(\lambda'' - \lambda)} - \frac{a_0 \sec \beta'}{\sin(\lambda'' - \lambda)} \cdot \frac{\sin(\lambda - L)}{\sin(L - K)} \right) \cdot \frac{n'}{n''} \varrho' \\ &+ R'' \frac{\sin(L'' - L)}{\sin(\lambda'' - \lambda)} \cdot \frac{\sin(\lambda - K)}{\sin(L - K)} \left(\frac{N''}{N'} \cdot \frac{n'}{n''} - 1 \right). \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (13) und (14) erhält man ϱ und ϱ'' .

Ist ϱ , ϱ' , ϱ'' gefunden, so rechne man nach den Formeln (7) des Art. 11 und den analogen Formeln für den zweiten und dritten Ort, die heliozentrischen Längen, Breiten und Radien Vektoren des Himmelskörpers. Aus diesen Größen kann man die Elemente nach Art. 13 und Art. 6 rechnen.

17.

Wie man ersieht, setzt diese Methode voraus, daß die Werte von P und Q bekannt sind. Allein diese Größen sind unbekannt; aber man kann dafür als erste Hypothese die Näherungswerte $\frac{\mathcal{P}''}{\mathcal{P}}$ und $\mathcal{P}\mathcal{P}''$ setzen, und mit diesen

Werten führe man die Rechnung, jedoch nicht bis zum Schlusse, durch; sondern hat man die Größen r, r', r'' und u, u', u'' ermittelt, so rechne man nach Art. 6 aus

$$r, r'; u' - u = v' - v = 2f'' \text{ und } \mathcal{J}'' \text{ die Größe } y''$$

$$r, r''; u'' - u' = v'' - v' = 2f' \quad \mathcal{J}' \quad \mathcal{J} \quad y,$$

und damit neue Werte von P und Q nach den Formeln

$$P = \frac{\mathcal{J}''}{\mathcal{J}} \cdot \frac{y}{y''}, \quad Q = \frac{r'^2 \mathcal{J} \mathcal{J}''}{r r'' y y'' \cos f \cos f''}.$$

Mit diesen Werten von P und Q wird die Rechnung wiederholt, diese Wiederholung geschieht so oft, bis man Werte von P und Q bekommt, welche von den früheren gar nicht oder nur sehr wenig verschieden sind.

In dieser Hypothese, als der letzten, führe man die Rechnung mit den Größen $r, r', v' - v, \mathcal{J}'', y''$ und den Größen $r', r'', v'' - v', \mathcal{J}, y$ zu Ende. Die Übereinstimmung dient als Kontrolle. Sicherer verfährt man, namentlich bei ersten Bahnbestimmungen, wo die heliozentrische Bewegung in der Regel gering ist, wenn man in der letzten Hypothese aus den Größen $l, l'; b, b''; r, r''; v'' - v, \mathcal{J}'$ die Elemente der Bahn rechnet. Als Kontrolle der Rechnung berechne man den mittleren Ort aus den erhaltenen Elementen.

Bei diesen verschiedenen Hypothesen für die Größen P und Q ist es vorteilhaft, so viele Rechnungen als möglich von den Hypothesen unabhängig zu machen und auf unmittelbar gegebene Größen zurückzuführen. Die Größen $K, \text{tang } J, a_0, b, c, d, e, a' \dots$ hängen nur von den gegebenen Beobachtungsdaten ab, werden daher nur einmal gerechnet. Dasselbe gilt auch von den Koeffizienten von $\frac{n'}{n} \varrho', \frac{N'}{N'} \cdot \frac{n'}{n} - 1, \dots$ der Gleichungen (13) und (14).

Zusatz. Die Sicherheit dieser Rechnungen hängt hauptsächlich von der Bestimmung der Konstanten $\text{tang } J$ und K

und von der Größe des Bogens $B_0B' = \beta' - \beta_0$ ab. Fällt der erste geozentrische Ort mit dem dritten nahe zusammen, so kann man aus den Gleichungen (2) die Größen $\tan J$ und K nicht genau bestimmen. Liegen die drei geozentrischen Orte B, B', B'' nahe in einem größten Kreise, so ist der Bogen B_0B' eine kleine Größe höherer Ordnung als zweiter; die dargestellte Methode der Bahnbestimmung ist daher nicht anwendbar. Dieser Fall tritt dann immer ein, wenn die Neigung der Bahn sehr klein ist (oder nahe 180° beträgt).

18.

Zur Erläuterung dieser Methode soll folgendes von Gauß gegebene Beispiel dienen*). Für den Planeten Juno sind als Beobachtungen und zugehörige Erdorte gegeben:

	1804 Okt. 5.458644	
Beobachtungszeiten	17.421885	
auf den Pariser		
Meridian reduziert.	27.393077	
$\lambda = 354^\circ 44' 31''.60$	$\beta = -4^\circ 59' 31''.06$	
$\lambda' = 352^\circ 34' 22''.12$	$\beta' = -6^\circ 21' 55''.07$	
$\lambda'' = 351^\circ 34' 30''.01$	$\beta'' = -7^\circ 17' 50''.95$	
$L = 12^\circ 28' 27''.76$	$\log R = 9.9996826$	
$L' = 24^\circ 19' 49''.05$	$\log R' = 9.9980979$	
$L'' = 34^\circ 16' 9''.65$	$\log R'' = 9.9969678,$	

welche Größen auf das mittlere Frühlings-Äquinox 1805.0 bezogen sind. Damit erhält man

*) Eine Bahnbestimmung bei kleinen Zwischenzeiten (etwa 5–15 Tagen zwischen je zwei Beobachtungen) muß mit aller Schärfe siebenstelliger Logarithmen gerechnet werden. Bei größeren Zwischenzeiten reicht man auch mit sechsstelligen Logarithmentafeln aus.

$$\log \operatorname{tang} J = 9.8718259, \quad K = 1^\circ 28' 49''.34$$

$$\beta_0 = -6^\circ 34' 31''.394$$

$$\log a_0 = 7.6953221$$

$$b = 38.43487$$

$$c = 77.976545$$

$$\log d = 2.0352814$$

$$R' \cos \delta' = 0.8413488$$

$$e = 78.817894$$

$$\log a' = 9.7262084.$$

Setzt man

$$q = A q' \frac{n'}{n} + B \left(\frac{N}{N'} \cdot \frac{n'}{n} - 1 \right)$$

$$q'' = A'' q' \frac{n'}{n''} + B'' \left(\frac{N''}{N'} \cdot \frac{n'}{n''} - 1 \right),$$

so wird

$$\log A = 9.6317132$$

$$\log B = 0.3290193$$

$$\log A'' = 9.7331305$$

$$\log B'' = 0.6134162$$

$$\log N : N' = 9.6657486$$

$$\log N'' : N' = 9.7441299$$

$$\log \mathcal{S} = 9.2343285$$

$$\log \mathcal{S}'' = 9.3134303.$$

Alle diese Zahlen sind von den verschiedenen Hypothesen für P und Q unabhängig.

In erster Hypothese setze man:

$$\log P = 0.0791018,$$

$$\log Q = 8.5477588,$$

damit erhält man

$$\lambda = 2.189052$$

$$\log \mu = 0.1311211.$$

Nun löse man die Gleichung

$$x' = \lambda - \frac{\mu}{(a'^2 + x'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

nach x' auf. Für die kleinen Planeten liegt $r' = \sqrt{a'^2 + x'^2}$ ungefähr zwischen 2 und 3. Man setze nun $3 \log r' = 1.00$ und $3 \log r' = 1.30$: damit erhält man $x' = 2.054$ und $x' = 2.121$.

Substituiert man diese Werte in die obige Gleichung, so erhält man -0.0066 und -0.0613 als Fehler, und damit nach der *regula falsi* $x' = 2.0459$ als genaueren Wert, aus welchem $x' = 2.045902$ als definitiver Wert von x' erhalten wird.

Die reellen Wurzeln der vorigen Gleichung liegen bei $x_1 = -0.580$, $x_2 = +0.850$, $x_3 = 2.0459$; die positive Wurzel x_2 ist nahezu $R' \cos \delta'$, für diese wird ϱ' nahezu Null. Diese Wurzel bezieht sich auf den Endort und kommt bei Bahnbestimmungen mit kleinen Zwischenzeiten gewöhnlich vor. Der Grund liegt darin, daß die Erdorte, von denen aus die geozentrischen Richtungen des Planeten genommen werden, ebenfalls den drei Gleichungen (3), (4), (5) des Art. 14 genügen.

Wird diese Gleichung durch Wegschaffung der Quadratwurzel geordnet in

$$(x' - \lambda)^2 (a_1^2 + x'^2)^3 = \mu^2,$$

so kommt noch die reelle positive Wurzel $x_4 = +2.2928$ hinzu, die der Gleichung (11) fremd ist.

Mit dem definitiven Wert von x' wird erhalten

$$\log \varrho' = 0.0781403, \quad \log r' = 0.3251111$$

$$\log \varrho = 0.0651853, \quad \log \varrho'' = 0.0961795$$

$$l = 2^\circ 56' 7''.96$$

$$l' = 6^\circ 57' 15''.19$$

$$l'' = 10^\circ 22' 37''.72$$

$$\log \tan b = n 8.6769275 \quad \log r = 0.3299972$$

$$\log \tan b' = n 8.8013853 \quad \log r' = 0.3251113$$

$$\log \tan b'' = n 8.8835959 \quad \log r'' = 0.3212583.$$

Aus l , l'' , $\tan b$, $\tan b''$ erhält man

$$\Omega = 171^\circ 5' 46''.47$$

$$i = 13^\circ 2' 31''.68$$

und damit $\log \operatorname{tang} b' = n 8.8013852$. Die Übereinstimmung der beiden Werte von $\log r'$ und $\log \operatorname{tang} b'$ dient als Kontrolle.

Nun erhält man $u = 192^\circ 8' 36''.96$ und

$$u' - u = 2f'' = 4^\circ 6' 44''.53$$

$$u'' - u' = 2f = 3^\circ 29' 47''.09$$

$$u'' - u = 2f' = 7^\circ 36' 31''.62.$$

Aus r, r', f'' und \mathcal{J}'' erhält man $\log y'' = 0.0003191$.

Aus r', r'', f und \mathcal{J} erhält man $\log y = 0.0002285$.

Damit erhält man folgende Werte von P und Q

$$\log P = 0.0790112, \quad \log Q = 8.5476184,$$

dabei weicht $\log P$ von dem früheren um 906, $\log Q$ um 1404 Einheiten der siebenten Dezimale ab. Mit diesen neuen Werten von P und Q wiederhole man die Rechnung.

Es wird

$$\lambda = 2.192683, \quad \log \mu = 0.1309601$$

und damit

$$x' = 2.050484, \quad \log r' = 0.3260214$$

$$\log \varrho' = 0.0797892$$

$$\log \varrho = 0.0666582, \quad \log \varrho'' = 0.0979442$$

$$l = 2^\circ 55' 13''.71$$

$$l' = 6^\circ 55' 24''.83$$

$$l'' = 10^\circ 19' 56''.40$$

$$\log \operatorname{tang} b = n 8.6776066, \quad \log r = 0.3307925$$

$$\log \operatorname{tang} b' = n 8.8021271, \quad \log r' = 0.3260214$$

$$\log \operatorname{tang} b'' = n 8.8843618, \quad \log r'' = 0.3222617.$$

Aus $l, l'', \operatorname{tang} b, \operatorname{tang} b''$ erhält man

$$\Omega = 171^\circ 7' 53''.84$$

$$i = 13^\circ 6' 54''.20$$

und damit $\log \operatorname{tang} b' = 8.8021268$ als Kontrolle. Ferner wird $u = 192^\circ 5' 43''.45$ und

$$u' - u = 2f'' = 4^{\circ} 5' 51''.31$$

$$u'' - u' = 2f = 3^{\circ} 28' 58''.56$$

$$u'' - u = 2f' = 7^{\circ} 34' 49''.87$$

$$\log y = 0.0002270, \quad \log y'' = 0.0003172.$$

Damit erhält man folgende neue Werte von P und Q

$$\log P = 0.0790116, \quad \log Q = 8.5476326,$$

welche von den vorigen bzw. um 4 und 142 Einheiten der siebenten Dezimale abweichen. Diese Unterschiede sind so klein, daß eine nochmalige Wiederholung der Rechnung nicht mehr nötig ist. Der größere Unterschied in $\log Q$ hat, da $Q: r'^3$ nur eine kleine Größe zweiter Ordnung ist, auf die Rechnung keinen Einfluß.

Wegen der Kleinheit der heliozentrischen Bewegung rechne man aus $r, r', u'' - u$ und ϑ' die Elemente in der Bahn. Diese Berechnung ist im Beispiele des Art. 6 durchgeführt.

Aus u und v erhält man

$$u - v = \Pi - \Omega = 241^{\circ} 9' 34''.06.$$

Stellt man die gefundenen Elemente zusammen, so erhält man für den Planeten Juno folgende Elemente:

$$\text{Epoche 1804, Okt. 5.458644}$$

$$M = 329^{\circ} 44' 2''.84$$

$$\Pi = 312^{\circ} 17' 27''.90$$

$$\Omega = 171^{\circ} 7' 53''.84$$

$$i = 13^{\circ} 6' 54''.20$$

$$\varphi = 14^{\circ} 11' 16''.47$$

$$\mu = 824''.9663$$

$$\log a = 0.4223802.$$

Zur Kontrolle errechne man aus den erhaltenen Elementen den mittleren Ort. Die mittlere Bewegung zwischen der ersten und zweiten Beobachtung beträgt $\mu t'' = 9869''.27$

$= 2^{\circ}44'29''.27$, damit erhält man durch Addition zur Größe M die mittlere Anomalie

$$M' = 332^{\circ}28'32''.11,$$

und aus dieser nach Art. 3

$$E' = 324^{\circ}16'33''.30$$

$$v' = 315^{\circ}2'0''.76$$

$$\log r' = 0.3260215.$$

Aus v' erhält man u' und damit nach (1) und (2) des Art. 19 die heliozentrische Länge und Breite l' und b' . Aus l' , b' und r' erhält man nach (5) des Art. 11 die Koordinaten x' , y' , z' .

Aus r' und v' erhält man die Koordinaten x' , y' , z' auch nach Art. 12.

Aus den heliozentrischen Koordinaten erhält man die geozentrischen und damit

$$\lambda' = 352^{\circ}34'22''.22$$

$$\beta' = -6^{\circ}21'55''.08$$

$$\log \rho' = 0.0797895.$$

Der Fehler in λ' beträgt $0''.10$, der Fehler in β' beträgt $0''.01$. Man sieht, wie genau in diesem Beispiele die zweite Hypothese für P und Q die Beobachtungen darstellt. Bei größeren Zwischenzeiten, etwa von hundert Tagen, werden selbst bei einer völlig unbekanntem Bahn nur drei oder höchstens vier Hypothesen erforderlich sein. In diesem Falle besitzt man aber in der Regel bereits genäherte Elemente, aus welchen man sich die erste Hypothese für P und Q ableitet.

Zweiter Abschnitt.

Bestimmung einer parabolischen Bahn aus drei geozentrischen Beobachtungen nach der Methode von Olbers.

19.

Eliminiert man aus den Gleichungen (3), (4) und (5) des Art. 14 die Größen $n'q'$ und $n'R'^*$, so erhält man folgende Gleichung

$$\begin{aligned} & nq (\text{tang } \beta' \sin (\lambda - L') - \text{tang } \beta \sin (\lambda' - L')) \\ & + n''q'' (\text{tang } \beta'' \sin (\lambda'' - L') - \text{tang } \beta' \sin (\lambda' - L')) \\ & - nR \text{tang } \beta' \sin (L' - L) + n''R'' \text{tang } \beta' \sin (L' - L) = 0, \end{aligned}$$

oder indem man das Verhältniß $q'' : q$ bestimmt,

$$(1) \quad \frac{q''}{q} = \frac{n}{n''} \cdot \frac{\text{tang } \beta' \sin (\lambda - L') - \text{tang } \beta \sin (\lambda' - L')}{\text{tang } \beta'' \sin (\lambda'' - L') - \text{tang } \beta' \sin (\lambda' - L')} + \frac{(-nR \sin (L' - L) + n''R'' \sin (L' - L)) \text{tang } \beta'}{(\text{tang } \beta'' \sin (\lambda'' - L') - \text{tang } \beta' \sin (\lambda' - L')) n'' q}.$$

Das zweite Glied des Verhältnisses $\frac{q''}{q}$ ist

$$= \frac{\text{tang } \beta' R \sin (L' - L)}{q (\text{tang } \beta'' \sin (\lambda'' - L') - \text{tang } \beta' \sin (\lambda' - L'))} \left(\frac{R'' \sin (L'' - L')}{R \sin (L' - L)} - \frac{n}{n''} \right).$$

Nun ist

$$\frac{R'' \sin (L'' - L')}{R \sin (L' - L)} = \frac{R'R'' \sin (L'' - L')}{R R' \sin (L' - L)} = \frac{N}{N''}.$$

Die Verhältnisse $\frac{N}{N''}$, $\frac{n}{n''}$ weichen von den Verhältnissen $\frac{t}{t''} = \frac{\vartheta}{\vartheta''}$ der Zwischenzeiten nur um Größen der zweiten Ordnung ab. Der Faktor $\left(\frac{N}{N''} - \frac{n}{n''} \right)$ des zweiten Gliedes von $\frac{q''}{q}$ ist daher von der zweiten Ordnung; der Zähler des ersten Faktors dieses Gliedes, d. i. die Größe

$$= \text{tang } \beta' R \sin (L' - L)$$

ist eine kleine Größe erster Ordnung, der Nenner

$$= q (\text{tang } \beta'' \sin (\lambda'' - L') - \text{tang } \beta' \sin (\lambda' - L'))$$

*) Vgl. die Ableitung der Gleichung (13) des Art. 16.

ebenfalls von der ersten Ordnung; denn dieser Ausdruck reduziert sich durch Einführung von Hilfsgrößen J und K auf: $-\operatorname{tang} J \sin(L' - K) \sin(\lambda'' - \lambda')$. Der erste Faktor ist daher eine endliche Größe.

Es ist daher das zweite Glied des Verhältnisses $\frac{\varrho''}{\varrho}$ in der Gleichung (1) eine kleine Größe der zweiten Ordnung. Vernachlässigt man daher dieses Glied und setzt im ersten Gliede statt $\frac{n}{n''}$ die Größe $\frac{t}{t''} = \frac{\beta}{\beta''}$; so erhält man, bis auf einen Fehler zweiter Ordnung genau,

$$(2) \quad \frac{\varrho''}{\varrho} = \frac{t}{t''} \cdot \frac{\operatorname{tang} \beta' \sin(\lambda - L') - \operatorname{tang} \beta \sin(\lambda' - L')}{\operatorname{tang} \beta'' \sin(\lambda' - L') - \operatorname{tang} \beta' \sin(\lambda'' - L')},$$

oder $\varrho'' = M\varrho$, wo die Bedeutung von M klar ist.

Nach Art. 11 ist, zufolge der Gleichung (8),

$$(3) \quad r^2 = R^2 + 2R \cos(\lambda - L) \varrho + \sec^2 \beta \varrho^2;$$

ebenso

$$(4) \quad r''^2 = R''^2 + 2R'' \cos(\lambda'' - L'') M\varrho + \sec^2 \beta'' M^2 \varrho^2.$$

Bedeutet s die Sehne zwischen dem ersten und dritten Orte des Himmelskörpers, so ist

$$\begin{aligned} s^2 &= (x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2 \\ &= x''^2 + y''^2 + z''^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2(xx'' + yy'' + zz'') \\ &= r^2 + r''^2 - 2(xx'' + yy'' + zz''). \end{aligned}$$

Setzt man statt $x, y, z; x'', y'', z''$ ihre Werte durch die geozentrischen Koordinaten ausgedrückt, so erhält man

$$(5) \quad s^2 = r^2 + r''^2 - 2RR'' \cos(L'' - L) - 2(RM \cos(\lambda'' - L) + R'' \cos(\lambda - L')) \varrho - 2(\cos(\lambda'' - \lambda) + \operatorname{tang} \beta \operatorname{tang} \beta'') M\varrho^2.$$

Ist t' die Zwischenzeit zwischen der ersten und dritten Beobachtung, so folgt nach der Lambertschen Formel

$$(6) \quad 6kt' = (r + r'' + s)^{\frac{3}{2}} \mp (r + r'' - s)^{\frac{3}{2}}.$$

Denkt man sich aus den Gleichungen (3), (4), (5) die Werte von r', r'', s in die Lambertsche Gleichung (6) ge-

setzt, so geht diese in eine Gleichung über, welche bloß die Unbekannte ϱ enthält. Aus dieser Gleichung hat man daher diese Unbekannte zu bestimmen. Diese Bestimmung geschieht am einfachsten durch Versuche. Man nimmt für ϱ einen Wert an, rechnet damit nach (3), (4), (5) die Größen r , r'' , s und sieht, ob der Lambertschen Formel (6) genügt wird. Man ändert nun ϱ so lange, bis die Gleichung (6) erfüllt wird. Aus zwei Annahmen für ϱ , welche bereits der Wahrheit ziemlich nahe kommen, erhält man durch die *regula falsi* einen genauen Wert von ϱ . Aus ϱ erhält man $\varrho'' = M\varrho$. Die Bauschinger-Tafeln XXII und XXIV dienen zur Abkürzung der Rechnung.

Mit den Größen ϱ , ϱ'' und den geozentrischen Längen und Breiten rechne man r , l , b ; r'' , l'' , b'' und hierauf nach Art. 13 und Art. 6 die Bahnelemente.

Mit den gefundenen Elementen rechne man den Ort des Himmelskörpers zur Zeit der mittleren Beobachtung. Stimmt dieser mit dem beobachteten überein, so ist die Rechnung beendet; weicht aber der berechnete Ort von dem beobachteten um mehr als die möglichen Beobachtungsfehler ab, so verändere man die Größe M so lange, bis die Darstellung des mittleren Ortes innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler gelingt.

20.

Wie man ersieht, besteht der Nerv dieser Methode, welche ausschließlich bei Kometenbahnen angewendet wird, in der Bestimmung des Verhältnisses $\varrho'' : \varrho$ und in der Anwendung der Lambertschen Formel. Für das Verhältnis $\varrho'' : \varrho$ wurde die Annahme gemacht, daß man für $n'' : n$ und $N'' : N$ das Verhältnis der Zwischenzeiten setzen könne; diese Annahme ist, wie man aus $n'' : n = r \sin(v' - v) : r'' \sin(v'' - v')$

ersieht, identisch mit der Voraussetzung, daß die Sehnen der Kometenbahn und der Erdbahn zwischen den äußersten Beobachtungen von den mittleren Radien Vektoren in dem Verhältnisse der Zeiten geschnitten werden. Lambert hatte bereits dieses Verhältniß $\varrho : \varrho''$ bestimmt; statt aber die Aufgabe weiter analytisch zu behandeln, wie Olbers getan, der dadurch diese höchst einfache Methode der Berechnung einer Knotenbahn erhielt, kehrte Lambert wieder zur Konstruktion zurück.

21.

Zur Erläuterung dieser Methode soll ein von Gauß gegebenes Beispiel dienen*). Für den zweiten Kometen vom Jahre 1813 hat man folgende Angaben.

Mittlere Göttinger Zeit	Länge	Breite
1813 April 7.55002	$\lambda = 271^\circ 16' 38''$	$\beta = + 29^\circ 2' 0''$
14.54694	$\lambda' = 266^\circ 27' 22''$	$\beta' = + 22^\circ 52' 18''$
21.59931	$\lambda'' = 256^\circ 48' 8''$	$\beta'' = + 9^\circ 53' 12''$
$L = 197^\circ 47' 41''$	$\log R = 0.00091$	
$L' = 204^\circ 38' 45''$	$\log R' = 0.00175$	
$L'' = 211^\circ 31' 25''$	$\log R'' = 0.00260.$	

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \log M &= 9.75799, & 6 kt' &= 1.4501 \\ r &= \sqrt{1.00420 + 0.56981 \varrho + 1.30810 \varrho^2} \\ r'' &= \sqrt{1.01205 + 0.81092 \varrho + 0.33805 \varrho^2} \\ s &= \sqrt{0.05765 - 0.22389 \varrho + 0.42612 \varrho^2}. \end{aligned}$$

Nun suche man (durch passende Wahl von ϱ) die Werte von r , r'' , s so zu bestimmen, daß der Gleichung

$$(r + r'' + s)^{\frac{3}{2}} - (r + r'' - s)^{\frac{3}{2}} - 6 kt' = X = 0$$

*) Für Kometenbahnen genügt häufig eine fünfstellige Rechnung.

genügt wird. Setzt man $\varrho = 1$, so wird $r = 1.70$, $r'' = 1.57$, $s = 0.51$ und $X = +1.27$; also ist ϱ zu groß. Setzt man $\varrho = \frac{1}{2}$, so wird $r = 1.26$, $r'' = 1.23$, $s = 0.23$ und $X = -0.35$; also ist ϱ zu klein. Aus den beiden Werten für X schließt man, daß ϱ nahe $= 0.6$ ist. Man erhält nun mit den Werten $\varrho = 0.60$ und $\varrho = 0.65$

$\varrho = 0.60$	$\varrho = 0.65$
$r = 1.34797$	$r = 1.38830$
$r'' = 1.27290$	$r'' = 1.29690$
$s = 0.27700$	$s = 0.30358$
$X = -0.1055$	$X = +0.0598$

und damit $\varrho = 0.632\dots$ Rechnet man nun mit $\varrho = 0.632$ und $\varrho = 0.637$, so wird

$\varrho = 0.632$	$\varrho = 0.637$
$r = 1.37364$	$r = 1.37770$
$r'' = 1.28824$	$r'' = 1.29065$
$s = 0.29386$	$s = 0.29656$
$X = -0.0125$	$X = +0.0022$

und damit

$$\varrho = 0.63625,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} \log \varrho &= 9.80364, & \log \varrho'' &= 9.56163 \\ l &= 225^\circ 4' 22'', & \log \operatorname{tang} b &= 9.42381, & \log r &= 0.13896 \\ l'' &= 223^\circ 6' 55'', & \log \operatorname{tang} b'' &= 8.69316, & \log r'' &= 0.11068. \end{aligned}$$

Da $l > l''$ ist, so ist $i > 90^\circ$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} i &= 98^\circ 58' 57'' \\ \Omega &= 42^\circ 40' 8'' \\ u &= 164^\circ 57' 1'', & u'' &= 177^\circ 8' 36''. \end{aligned}$$

Damit erhält man nach Art. 6

$$\begin{aligned} II &= 247^\circ 42' 25'' \\ \log q &= 0.08469. \end{aligned}$$

Für die Perihelzeit T erhält man

aus $v \dots T = \text{April } 49.518$

aus $v'' \dots T = \text{April } 49.517$

also im Mittel $T = \text{Mai } 18.5175.$

Berechnet man mit diesen Elementen den mittleren Kometenort (vgl. Art. 4), so findet man

$$\lambda' = 266^\circ 27' 15'', \quad \beta' = + 22^\circ 52' 18''.$$

Die Länge stimmt bis auf $7''$, die Breite vollkommen mit der Beobachtung überein.¹¹⁾

Dritter Abschnitt.

Bestimmung einer elliptischen Bahn aus vier geozentrischen Beobachtungen, von denen nur zwei vollständig sind.

22.

Die im ersten Abschnitte dargestellte Methode, eine elliptische Bahn zu bestimmen, ist — wie bereits im Art. 17 erwähnt wurde — in manchen Fällen nicht anwendbar. In solchen Fällen kann man aus vier Längen und zwei Breiten die Bahn bestimmen.

Es seien also vier geozentrische Beobachtungen gegeben, der Bequemlichkeit der Rechnung halber werden die vier Längen und die beiden mittleren Breiten benützt; die äußersten Breiten sind nicht erforderlich, dienen jedoch schließlich als Kontrolle der Rechnung. Die Bedeutung der Buchstaben ist hier dieselbe, wie im ersten Abschnitte; d. h. es sind also

$$\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

$$\beta, \beta_1, \beta_2, \beta_3$$

die Längen und Breiten des Himmelskörpers usw., t_{01}, t_{02}, \dots
die Zwischenzeiten zwischen der ersten und zweiten, ersten

und dritten, . . . Beobachtung. Analog ist die Bedeutung von

$$n_{01}, n_{02}, \dots \text{ und } y_{01}, y_{02}, \dots$$

als doppelte Dreiecksflächen und Verhältnisse des elliptischen Sektors zum zugehörigen Dreiecke.

Nach Art. 14 Gleichung (3) und (4) ist:

$$\begin{aligned} n_{12} (\varrho \cos \lambda + R \cos L) - n_{02} (\varrho_1 \cos \lambda_1 + R_1 \cos L_1) \\ + n_{01} (\varrho_2 \cos \lambda_2 + R_2 \cos L_2) = 0, \\ n_{12} (\varrho \sin \lambda + R \sin L) - n_{02} (\varrho_1 \sin \lambda_1 + R_1 \sin L_1) \\ + n_{01} (\varrho_2 \sin \lambda_2 + R_2 \sin L_2) = 0. \end{aligned}$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen die Größe ϱ , so erhält man

$$(1) \quad n_{12} (R \sin(L - \lambda) - n_{02} (\varrho_1 \sin(\lambda_1 - \lambda) + R_1 \sin(L_1 - \lambda)) \\ + n_{01} (\varrho_2 \sin(\lambda_2 - \lambda) + R_2 \sin(L_2 - \lambda)) = 0.$$

Ebenso folgt aus der zweiten, dritten und vierten Beobachtung, indem man aus denselben Gleichungen des Art. 14 die Größe ϱ_3 eliminiert,

$$(2) \quad n_{23} (\varrho_1 \sin(\lambda_1 - \lambda_3) + R_1 \sin(L_1 - \lambda_3)) \\ - n_{13} (\varrho_2 \sin(\lambda_2 - \lambda_3) + R_2 \sin(L_2 - \lambda_3)) + n_{12} R_3 \sin(L_3 - \lambda_3) = 0.$$

Die Gleichung (1) läßt sich umformen in

$$\begin{aligned} n_{12} R \sin(L - \lambda) - n_{02} \sin(\lambda_1 - \lambda) \cos \beta_1 \left(\frac{\varrho_1}{\cos \beta_1} + \frac{R_1 \sin(L_1 - \lambda)}{\cos \beta_1 \sin(\lambda_1 - \lambda)} \right) \\ + n_{01} \sin(\lambda_2 - \lambda) \cos \beta_2 \left(\frac{\varrho_2}{\cos \beta_2} + \frac{R_2 \sin(L_2 - \lambda)}{\cos \beta_2 \sin(\lambda_2 - \lambda)} \right) = 0 \end{aligned}$$

oder in

$$\begin{aligned} \frac{n_{12}}{n_{01}} \cdot \frac{R \sin(L - \lambda)}{\cos \beta_2 \sin(\lambda_2 - \lambda)} - \frac{n_{02}}{n_{01}} \cdot \frac{\cos \beta_1 \sin(\lambda_1 - \lambda)}{\cos \beta_2 \sin(\lambda_2 - \lambda)} \left(\frac{\varrho_1}{\cos \beta_1} + \frac{R_1 \sin(L_1 - \lambda)}{\cos \beta_1 \sin(\lambda_1 - \lambda)} \right) \\ + \frac{\varrho_2}{\cos \beta_2} + \frac{R_2 \sin(L_2 - \lambda)}{\cos \beta_2 \sin(\lambda_2 - \lambda)} = 0. \end{aligned}$$

Setzt man analog mit der Gleichung (10), Art. 15

$$\frac{\varrho_1}{\cos \beta_1} + R_1 \cos \delta_1 = x_1, \quad \frac{\varrho_2}{\cos \beta_2} + R_2 \cos \delta_2 = x_2,$$

so geht diese Gleichung über in

$$\frac{n_{12}}{n_{01}} \nu + \frac{n_{02}}{n_{01}} \mu_1 (x_1 + b_1) + x_2 + x_2 = 0,$$

wo der Kürze halber

$$\frac{R_1 \sin(L_1 - \lambda)}{\cos \beta_1 \sin(\lambda_1 - \lambda)} - R_1 \cos \delta_1 = b_1$$

$$\frac{R \sin(L - \lambda)}{\cos \beta_2 \sin(\lambda_2 - \lambda)} = \nu, \quad \frac{\cos \beta_1 \sin(\lambda_1 - \lambda)}{\cos \beta_2 \sin(\lambda_2 - \lambda)} = \mu_1$$

$$\frac{R_2 \sin(L_2 - \lambda)}{\cos \beta_2 \sin(\lambda_2 - \lambda)} - R_2 \cos \delta_2 = x_2$$

gesetzt wird. Setzt man $\frac{n_{12}}{n_{01}} = P_1$, so ist nach der Gleichung (12), Art. 15

$$\frac{n_{01}}{n_{02}} = \left(1 + \frac{Q_1}{2r_1^3}\right) \frac{1}{1 + P_1},$$

also

$$\frac{n_{02}}{n_{01}} = \frac{1 + P_1}{1 + \frac{Q_1}{2(a_1^2 + x_1^2)^{\frac{3}{2}}}},$$

wo die Bedeutung von Q_1 klar ist.

Man erhält daher

$$P_1 \nu - \mu_1 (x_1 + b_1) \frac{1 + P_1}{1 + \frac{Q_1}{2(a_1^2 + x_1^2)^{\frac{3}{2}}}} + x_2 + x_2 = 0.$$

Setzt man außerdem

$$-x_2 - P_1 \nu = c_1, \quad \mu_1 (1 + P_1) = d_1,$$

so erhält man

$$(3) \quad x_2 = c_1 + \frac{d_1 (x_1 + b_1)}{1 + \frac{Q_1}{2(a_1^2 + x_1^2)^{\frac{3}{2}}}}.$$

Auf dieselbe Art erhält man aus der Gleichung (2), indem man

$$\frac{R_2 \sin(L_2 - \lambda_3)}{\cos \beta_2 \sin(\lambda_2 - \lambda_3)} - R_2 \cos \delta_2 = b_2$$

$$\frac{R_3 \sin(L_3 - \lambda_3)}{\cos \beta_1 \sin(\lambda_1 - \lambda_3)} = \nu_3, \quad \frac{\cos \beta_2 \sin(\lambda_2 - \lambda_3)}{\cos \beta_1 \sin(\lambda_1 - \lambda_3)} = \mu_2$$

$$\frac{R_1 \sin(L_1 - \lambda_3)}{\cos \beta_1 \sin(\lambda_1 - \lambda_3)} - R_1 \cos \delta_1 = x_1,$$

ferner

$$-x_1 - \nu_3 P_2 = c_2, \quad \mu_2 (1 + P_2) = d_2,$$

wo $P_2 = \frac{n_{12}}{n_{23}}$ ist, setzt

$$(4) \quad x_1 = c_2 + \frac{d_2(x_2 + b_2)}{1 + \frac{Q_2}{2(a_2^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

Der Gang der Rechnung ist nun derselbe wie im ersten Abschnitte: man rechnet zuerst die Konstanten $a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha_1, \alpha_2, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_3$; hierauf verschafft man sich aus den genauen Werten

$$P_1 = \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta_{01}} \cdot \frac{y_{01}}{y_{12}}, \quad P_2 = \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta_{23}} \cdot \frac{y_{23}}{y_{12}},$$

$$Q_1 = \frac{\vartheta_{01} \vartheta_{12} r_1^2}{y_{01} y_{12} r r_2 \cos f_{01} \cos f_{02} \cos f_{12}}, \quad Q_2 = \frac{\vartheta_{12} \vartheta_{23} r_2^2}{y_{12} y_{23} r_1 r_3 \cos f_{12} \cos f_{13} \cos f_{23}}$$

in der ersten Hypothese die Werte

$$P_1 = \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta_{01}}, \quad P_2 = \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta_{23}}, \quad Q_1 = \vartheta_{01} \vartheta_{12}, \quad Q_2 = \vartheta_{12} \vartheta_{23}, \quad ^{3, 6)}$$

rechnet damit c_1, d_1, c_2, d_2 und löst dann die Gleichungen (3) und (4) nach x_1 und x_2 auf.

Diese Auflösung geschieht durch Versuche. Man erhält in der Regel schon Näherungswerte, wenn man $Q_1 = Q_2 = 0$ setzt, wodurch

$$x_1 = \frac{c_2 + d_2(b_2 + c_1) + d_1 d_2 b_1}{1 - d_1 d_2}, \quad x_2 = \frac{c_1 + d_1(b_1 + c_2) + d_1 d_2 b_2}{1 - d_1 d_2}$$

erhalten wird. Bei Asteroiden kann man $r_1^3 = r_2^3 = 20$, also statt d_1, d_2

$$\frac{d_1}{1 + \frac{Q_1}{40}}, \quad \frac{d_2}{1 + \frac{Q_2}{40}}$$

setzen, wodurch die Genauigkeit erhöht wird.

Ist nun ξ_1 ein Näherungswert von x_1 , so setze man diesen in (3), erhält daraus $x_2 = \xi_2$, welcher Wert in (4) gesetzt $x_1 = X_1$ gibt. Wiederholt man nun die Rechnung mit $x_1 = \xi_1 + \nu_1$, so erhalte man $x_2 = \xi_2 + \nu_2$ und $x_1 = X_1 + N_1$. Aus diesen Angaben erhält man nach der *regula falsi**)

*) Es sind nämlich $A = \xi_1 - X_1$ und $A' = \xi_1 + \nu_1 - (X_1 + N_1)$ die Fehler der ersten und zweiten Substitution. Die Änderungen der Unbekannten x_1 und x_2 sind bzw. ν_1 und ν_2 .

$$x_1 = \xi_1 + \frac{\nu_1(\xi_1 - X_1)}{N_1 - \nu_1}, \quad x_2 = \xi_2 + \frac{\nu_2(\xi_1 - X_1)}{N_1 - \nu_1}.$$

Aus x_1 und x_2 erhält man q_1, q_2 und damit (wie im ersten Abschnitte) die heliozentrischen Orte $r_1, r_2; l_1, l_2; b_1, b_2$; damit die Differenz der wahren Anomalien $v_2 - v_1 = u_2 - u_1$, woraus dann folgt, wegen

$$\begin{aligned} \frac{n_{12}}{n_{01}} &= P_1 = \frac{r_2 \sin(v_2 - v_1)}{r \sin(v_1 - v)}, \\ \frac{n_{02}}{n_{12}} &= \frac{r \sin(v_2 - v)}{r_1 \sin(v_2 - v_1)} = \frac{1 + P_1}{P_1 \left(1 + \frac{Q_1}{2r_1^3}\right)} \\ (5) \quad r \sin(v_1 - v) &= \frac{r_2 \sin(v_2 - v_1)}{P_1} \text{ und} \\ r \sin(v_2 - v) &= \frac{1 + P_1}{P_1 \left(1 + \frac{Q_1}{2r_1^3}\right)} r_1 \sin(v_2 - v_1), \end{aligned}$$

oder, da $v_2 - v = v_2 - v_1 + (v_1 - v)$ ist,

$$(6) \quad r \cos(v_1 - v) = \frac{r_1(1 + P_1)}{P_1 \left(1 + \frac{Q_1}{2r_1^3}\right)} - \cot(v_2 - v_1) \frac{r_2 \sin(v_2 - v_1)}{P_1}.$$

Aus den Gleichungen (5) und (6) erhält man r und $v_1 - v$.

Ebenso erhält man r_3 und $v_3 - v_2$ aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} (7) \quad r_3 \sin(v_3 - v_2) &= \frac{r_1 \sin(v_2 - v_1)}{P_2} \\ (8) \quad r_3 \cos(v_3 - v_2) &= \frac{r_2(1 + P_2)}{P_2 \left(1 + \frac{Q_2}{2r_2^2}\right)} - \cot(v_2 - v_1) \frac{r_1 \sin(v_2 - v_1)}{P_2}. \end{aligned}$$

Nun bestimme man, wie im ersten Abschnitte, neue verbesserte Werte von P_1, P_2, Q_1, Q_2 ; in letzter Hypothese führe man die Berechnung der Elemente zu Ende. Ist die heliozentrische Bewegung sehr klein, so kann man aus $r, r_3, v_3 - v, t_{03}$ die Elemente in der Bahn rechnen.

Mit den erhaltenen Elementen berechne man die beiden äußersten Orte; man ersieht dann, mit welchem Grade der Genauigkeit die äußersten Breiten durch die gefundenen Elemente dargestellt werden.

Vierter Abschnitt.

Über die Vorbereitungsrechnungen bei Bahnbestimmungen*).

23.

In den drei ersten Abschnitten wurde die Voraussetzung gemacht, daß die zur Bahnbestimmung verwendeten Beobachtungen die wahren geozentrischen Orte (Länge und Breite) des Himmelskörpers seien. Die Beobachtungen, wie sie unmittelbar gegeben sind, sind scheinbare Rektaszensionen und Deklinationen; es sind daher eine Reihe von Vorbereitungsrechnungen nötig, um dieselben in geozentrische Länge und Breite zu verwandeln. Es soll daher hier zunächst die Theorie dieser Rechnung gegeben werden.

I. Verwandlung von Rektaszension und Deklination in Länge und Breite und umgekehrt.

24.

Es seien α , δ die Rektaszension und Deklination, λ , β die Länge und Breite eines Sternes, ε die Schiefe der Ekliptik.

Die hierher gehörigen Formeln werden auf folgende Art erhalten. Sind x_0 , y_0 , z_0 die heliozentrischen Koordinaten eines Punktes in bezug auf die Ekliptik als xy -Ebene; x , y , z die Koordinaten in bezug auf den Äquator als xy -Ebene (die x -Achse für beide Systeme nach dem Frühlingspunkte gerichtet), so ist, wenn ε die Schiefe der Ekliptik bedeutet,

$$x_0 = x$$

$$y_0 = y \cos \varepsilon + z \sin \varepsilon$$

$$z_0 = z \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon.$$

*) In diesem Abschnitte sind im Texte die neuen jetzt angenommenen Werte der Konstanten mitgeteilt, während in den aus der *Theoria motus* entlehnten Beispielen die zu Gauß' Zeiten gültigen Konstanten verwendet wurden.

$$x = x_0$$

$$y = y_0 \cos \varepsilon - z_0 \sin \varepsilon$$

$$z = y_0 \sin \varepsilon + z_0 \cos \varepsilon$$

Drückt man analog wie im Art. 10 die rechtwinkligen Koordinaten durch die Polarkoordinaten aus, so erhält man aus diesen beiden Systemen die bezüglichlichen Verwandlungsformeln von Rektaszension und Deklination in Länge und Breite und umgekehrt.

1) Gegeben sei α, δ ; man bestimme λ, β .

$$\cos \lambda \cos \beta = \cos \alpha \cos \delta$$

$$\sin \lambda \cos \beta = \sin \delta \sin \varepsilon + \cos \delta \cos \varepsilon \sin \alpha$$

$$\sin \beta = \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon \sin \alpha.$$

Setzt man

$$\cos \delta \sin \alpha = m \sin M$$

$$\sin \delta = m \cos M,$$

so wird

$$\sin \lambda \cos \beta = m \sin(M + \varepsilon),$$

$$\sin \beta = m \cos(M + \varepsilon).$$

M wird in demjenigen Quadranten genommen, für welchen m positiv ist. Als Kontrolle der Rechnung kann die Gleichung

$$\text{tang} \beta = \sin \lambda \cot(M + \varepsilon)$$

benutzt werden.

2) Gegeben sei λ, β ; man bestimme α, δ .

$$\cos \alpha \cos \delta = \cos \lambda \cos \beta$$

$$\sin \alpha \cos \delta = -\sin \beta \sin \varepsilon + \cos \beta \sin \lambda \cos \varepsilon$$

$$\sin \delta = \sin \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \sin \lambda \sin \varepsilon.$$

Setzt man

$$\sin \beta = n \sin N$$

$$\cos \beta \sin \lambda = n \cos N,$$

so wird

$$\sin \alpha \cos \delta = n \cos(N + \varepsilon)$$

$$\sin \delta = n \sin(N + \varepsilon).$$

Als Kontrolle der Rechnung kann die Gleichung

$$\operatorname{tang} \delta = \sin \alpha \operatorname{tang} (N + \epsilon).$$

benutzt werden.

II. Parallaxe.

25.

Unter Parallaxe eines Planeten oder Kometen versteht man die Ortsveränderung, welche der Himmelskörper erleidet, wenn man denselben statt vom Mittelpunkte der Erde von einem Punkte der Oberfläche der Erde aus beobachtet. Die Erde kann man, wegen der Kleinheit der Parallaxe, als eine Kugel betrachten.

Man denke sich ein Koordinatensystem, in welchem der Äquator die xy -Ebene, der Mittelpunkt der Erde der Koordinaten-Anfangspunkt ist. Die positive x -Achse sei nach dem Frühlingspunkte, die positive y -Achse nach dem Punkte 90° Rektaszension gerichtet. Sind X, Y, Z die Koordinaten des Beobachtungsortes, so ist

$$X = \varrho \cos \varphi \cos \Theta, \quad Y = \varrho \cos \varphi \sin \Theta, \quad Z = \varrho \sin \varphi,$$

wo ϱ den Radius der Erde, φ die geographische Breite und Θ die Sternzeit des Beobachtungsortes bedeutet.

Sind x, y, z die Koordinaten des Himmelskörpers; α, δ die Rektaszension und Deklination, Δ die Entfernung vom Ursprunge, so ist

$$x = \Delta \cos \delta \cos \alpha, \quad y = \Delta \cos \delta \sin \alpha, \quad z = \Delta \sin \delta.$$

Legt man durch den Beobachtungsort ein zweites paralleles Achsensystem, sind x', y', z' die Koordinaten und $\alpha', \delta', \Delta'$ die mit der Parallaxe behaftete Rektaszension, Deklination und Entfernung des Himmelskörpers, so ist

$$x' = \Delta' \cos \delta' \cos \alpha', \quad y' = \Delta' \cos \delta' \sin \alpha', \quad z' = \Delta' \sin \delta'.$$

Aus $x = x' + X$, $y = y' + Y$, $z = z' + Z$ folgt

$$(1) \quad \mathcal{A}' \cos \delta' \cos \alpha' = \mathcal{A} \cos \delta \cos \alpha - \varrho \cos \varphi \cos \Theta$$

$$(2) \quad \mathcal{A}' \cos \delta' \sin \alpha' = \mathcal{A} \cos \delta \sin \alpha - \varrho \cos \varphi \sin \Theta$$

$$(3) \quad \mathcal{A}' \sin \delta' = \mathcal{A} \sin \delta - \varrho \sin \varphi.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man α' , δ' , \mathcal{A}' aus α , δ , \mathcal{A} und umgekehrt. Bequemer ist es aber, unmittelbar $\alpha' - \alpha$, $\delta' - \delta$ zu bestimmen.

Multipliziert man (1) mit $-\sin \alpha$, (2) mit $+\cos \alpha$ und addiert die Produkte, so erhält man

$$\mathcal{A}' \cos \delta' \sin (\alpha' - \alpha) = -\varrho \cos \varphi \sin (\Theta - \alpha).$$

Multipliziert man (1) mit $+\cos \alpha$, (2) mit $+\sin \alpha$ und addiert die Produkte, so erhält man

$$\mathcal{A}' \cos \delta' \cos (\alpha' - \alpha) = \mathcal{A} \cos \delta - \varrho \cos \varphi (\Theta - \alpha).$$

Dividiert man die beiden letzten Gleichungen, so wird

$$\text{tang} (\alpha' - \alpha) = \frac{-\varrho \cos \varphi \sin (\Theta - \alpha)}{\mathcal{A} \cos \delta - \varrho \cos \varphi \cos (\Theta - \alpha)}.$$

Setzt man $\cos (\alpha' - \alpha) = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)$, so geht die vorletzte Gleichung über in

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' \cos \delta' &= \mathcal{A} \cos \delta - \varrho \cos \varphi \cos (\Theta - \alpha) \\ &+ 2 \mathcal{A}' \cos \delta' \sin^2 \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha) \\ &= \mathcal{A} \cos \delta - \varrho \cos \varphi \cos (\Theta - \alpha) \\ &+ \mathcal{A}' \cos \delta' \sin (\alpha' - \alpha) \text{tang} \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha) \\ &= \mathcal{A} \cos \delta - \varrho \cos \varphi (\cos (\Theta - \alpha) \\ &+ \sin (\Theta - \alpha) \text{tang} \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)) \\ &= \cos \delta - \varrho \cos \varphi \frac{\cos (\Theta - \frac{1}{2} (\alpha + \alpha'))}{\cos \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)}. \end{aligned}$$

Setzt man der Kürze halber

$$m \sin \gamma = \sin \varphi$$

$$m \cos \gamma = \cos \varphi \frac{\cos (\Theta - \frac{1}{2} (\alpha + \alpha'))}{\cos \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha)},$$

so wird

$$A' \cos \delta' = A \cos \delta - \varrho m \cos \gamma$$

$$A' \sin \delta' = A \sin \delta - \varrho m \sin \gamma;$$

woraus ähnlich wie früher folgt

$$\text{tang}(\delta' - \delta) = \frac{-\frac{\varrho \sin \varphi}{\sin \gamma} \sin(\gamma - \delta)}{A - \frac{\varrho \sin \varphi}{\sin \gamma} \cos(\gamma - \delta)}.$$

Die Größe A' wird nicht benötigt.

Die Größen $\alpha' - \alpha$, $\delta' - \delta$ sind in der Regel sehr klein; man kann dann statt der Tangenten die Bogen setzen. Bezeichnet man die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne mit R , so ist

$$\frac{\varrho}{A} = \frac{\varrho : R}{A : R}.$$

$\varrho : R$ ist der Sinus des Winkels, unter welchem der Radius der Erde von der Sonne aus erscheint, d. i. die Horizontalparallaxe der Sonne; bezeichnet man dieselbe mit π , so ist

$$\frac{\varrho}{R} = \sin \pi = \pi, \text{ da } \pi = 8''.80 \text{ ist.}$$

Die Größe A drückt man immer in Teilen von R aus und bezeichnet diese Zahl mit A , so daß man statt $\frac{\varrho}{A}$ die Größe $\frac{\pi}{A}$ setzen kann. Berücksichtigt man ferner, daß $\frac{a}{b+x} = \frac{a}{b}$ ist, wenn x gegen b sehr klein ist, so erhält man für die Größen $\alpha' - \alpha$, $\delta' - \delta$ die Ausdrücke

$$\alpha' - \alpha = -\frac{\pi \cos \varphi \sin(\Theta - \alpha)}{A \cos \delta}$$

$$\text{tang} \gamma = \frac{\text{tang} \pi}{\cos(\Theta - \alpha)}$$

$$\delta' - \delta = -\frac{\pi \sin \varphi \sin(\gamma - \delta)}{A \sin \gamma},$$

wenn man außerdem statt $\Theta - \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$ die Größen $\Theta - \alpha$

setzt. Die letzteren Ausdrücke erhält man etwas einfacher, wenn man in $\Delta' \cos \delta' \cos (\alpha' - \alpha)$ die Größe $\cos (\alpha' - \alpha) = 1$ setzt. Da π in Sekunden ausgedrückt ist, so erhält man dadurch $\alpha' - \alpha$, $\delta' - \delta$ unmittelbar in Sekunden ausgedrückt.

Der Winkel $\Theta - \alpha$ ist der Stundenwinkel der Beobachtung; für den Meridian ist derselbe $= 0$, also

$$\alpha' - \alpha = 0, \quad \gamma = \varphi, \quad \delta' - \delta = -\frac{\pi \sin (\varphi - \delta)}{\Delta}.$$

Setzt man in den gefundenen Ausdrücken statt der Rektaszension und Deklination die Länge und Breite des Gestirns, und nimmt man statt Θ und φ die daraus nach Art. 24 berechnete Länge l und Breite b des Beobachtungsortes, so erhält man die Ausdrücke für die Parallaxe in Länge und Breite.

26.

Die im vorigen Artikel erhaltenen Ausdrücke für die Parallaxe setzen die Entfernung Δ des Gestirns als bekannt voraus, für eine erste Bahnbestimmung kann daher diese Reduktion nicht durchgeführt werden.

Will man dennoch die Parallaxe berücksichtigen, so kann man sich der folgenden (von Gauß gegebenen) Methode bedienen.

Gauß führt nämlich statt des Beobachtungsortes den Durchschnittspunkt F der von dem Beobachtungsorte nach dem Gestirne gezogenen Richtungslinie mit der Ekliptik ein.

Es seien l , b , ρ die Länge, Breite und Distanz des Beobachtungsortes auf den Mittelpunkt der Erde bezogen.

λ , β , Δ die Länge, Breite und Distanz des Gestirnes in bezug auf den Beobachtungsort.

L, B, R die heliozentrische Länge, Breite und Distanz des Mittelpunktes der Erde.

L', B', R' dieselben Größen des Punktes F , wo also $B' = 0$ ist.

$A + \delta$ die Distanz des Gestirnes vom Punkte F .

Nun bestimme man die rechtwinkligen Koordinaten ξ, η, ζ des Beobachtungsortes in bezug auf die Sonne als Koordinatenanfang und ein Achsensystem wie in Art. 11. Diese Bestimmung kann auf zweifache Art durchgeführt werden:

1) Man gehe von der Sonne zum Punkte F und von F zum Beobachtungsort, man erhält für die Koordinaten ξ, η, ζ die Werte

$$\begin{aligned}\xi &= R' \cos L' + \delta \cos \beta \cos \lambda \\ \eta &= R' \sin L' + \delta \cos \beta \sin \lambda \\ \zeta &= \quad \quad + \delta \sin \beta.\end{aligned}$$

2) Man gehe von der Sonne zum Mittelpunkte der Erde und von diesem Punkte zum Beobachtungsort, man erhält dadurch

$$\begin{aligned}\xi &= R \cos B \cos L + \varrho \cos b \cos l \\ \eta &= R \cos B \sin L + \varrho \cos b \sin l \\ \zeta &= R \sin B \quad \quad + \varrho \sin b.\end{aligned}$$

Durch Gleichstellung dieser Ausdrücke ergibt sich durch eine ähnliche Rechnung wie im vorigen Artikel, wenn man statt $\cos B, \cos(L' - L)$ die Einheit, statt $\sin B, \sin(L' - L)$ die Bogen $B, L' - L$ setzt,

$$\begin{aligned}R' &= R + \pi \cos b \cos(l - L) - \mu \cos(\lambda - L) \\ L' - L &= \frac{\pi \cos b \sin(l - L) - \mu \sin(\lambda - L)}{R'},\end{aligned}$$

wo $\mu = (RB + \pi \sin b) \cot \beta$ ist.

Behält man in R' die Größen π und μ in Sekunden bei, so ist

$$R' = R + \frac{\pi \cos b \cos (l - L) - \mu \cos (\lambda - L)}{206265}.$$

Die Größe $\delta = \frac{\cos \beta}{\mu}$ wird dadurch $= \frac{\mu}{206265 \cos \beta}$.

Da das Licht die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne in 498.5 Sekunden zurücklegt, so braucht es, um die Distanz δ zurückzulegen, die Zeit

$$\tau = 498.5 \delta = \frac{498.5^2 \mu}{206265 \cos \beta};$$

diese Zeit muß zur Beobachtungszeit addiert werden, um die entsprechende Zeit für den Punkt F' zu erhalten.

Beispiel

$\lambda = 345^\circ 45'$, $\beta = -4^\circ 59'.5$, $l = 24^\circ 29'$, $b = 46^\circ 53'$
 $L = 12^\circ 29'$, $B = +0''.49$, $\log R = 9.9995$, $\pi = 8''.6$.

Daraus folgt $\log \mu = n 1.8891$, und damit

$$\log \pi \cos b \cos (l - L) \sin 1'' = 5.4452$$

$$\log \mu \cos (\lambda - L) \sin 1'' = n 6.5536$$

$$\text{Zahl} = +0.0000279, \quad \text{Zahl} = +0.0003577$$

$$R' - R = +0.0003856.$$

$$\log \frac{\pi \cos b \sin (l - L)}{R'} = 0.0875, \quad \log \frac{\mu \sin (\lambda - L)}{R'} = 1.3732$$

$$\text{Zahl} = +1''.22, \quad \text{Zahl} = +23''.61$$

$$L' - L = -22''.39;$$

Reduktion der Zeit = -0.19 Sekunden, also verschwindend.

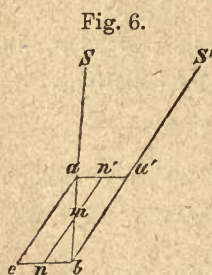
III. Aberration des Lichtes.

27.

Unter Aberration versteht man jene scheinbare Ortsveränderung, welche ein Gestirn infolge der Bewegung der Erde und der endlichen Geschwindigkeit des Lichtes erleidet.

Die Ortsveränderung, welche infolge der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne entsteht, heißt die jährliche, jene Ortsveränderung, welche infolge der Achsendrehung der Erde entsteht, die tägliche Aberration; wegen der Kleinheit der letzteren soll hier nur die erstere behandelt werden. Bei dieser Untersuchung genügt es, die Erdbahn als einen Kreis mit dem Radius $R =$ der mittleren Entfernung vorauszusetzen.

Es sei (Fig. 6) S ein Stern in der Richtung baS ; legt



das Licht den Weg ab zurück, während die Erde*) den Weg cb macht, so muß das Fernrohr in die Lage ca gebracht werden, so daß a das Objektiv und c das Okular vorstellt: denn in dieser Lage bleibt das Licht beständig in der Achse des Fernrohres. Ist nämlich das Fernrohr in

die parallele Lage nn' gekommen und ist m der Durchschnitt der Geraden nn' und ab , so folgt

$$am : ab = cn : cb$$

oder $am : cn = ab : cb =$ Verhältnis der Geschwindigkeiten des Lichtes und der Erde.

Ist daher $ba' \parallel ca$, so sieht man den Stern in der Richtung ba' etwa in S' ; es erleidet daher der Stern eine Ortsveränderung, welche gleich ist dem Winkel $\Theta = SbS' = aba'$. Der größte Wert dieses Winkels ist bestimmt durch

$$\text{tang } \Theta = \frac{cb}{ab},$$

d. i. durch das Verhältnis der Geschwindigkeiten der Erde

*) D. i. der Mittelpunkt der Erde, in welchem das Auge des Beobachters vorausgesetzt wird.

und des Lichtes; setzt man für diese ihre Werte, so erhält man $\Theta = 20''.47$.

28.

Um den Einfluß der Aberration auf die Länge und Breite eines Fixsternes zu bestimmen: sei L die heliozentrische Länge des Punktes c , $L+w$ die Länge des Punktes b ; τ die Zeit, während der die Erde von c nach b gelangt oder das Licht den Weg ab zurücklegt, μ die Geschwindigkeit des Lichtes, $l = ca = ba'$ die Länge des Fernrohres. Es seien ferner

λ, β die wahre, durch die Richtung ba ,

λ', β' die scheinbare, durch die Richtung $ca \parallel ba'$ bestimmte Länge und Breite des Sternes.

Man lege durch den Punkt c ein Achsensystem, in welchem (wie in Art. 11) die x -Achse nach dem Frühlingspunkte, die y -Achse nach dem Punkte 90° Länge gerichtet ist, und bestimme die Koordinaten des Punktes a . Dieses kann auf zweifache Art geschehen.

1) Man erhält unmittelbar

$$l \cos \beta' \cos \lambda', \quad l \cos \beta' \sin \lambda', \quad l \sin \beta'$$

als Koordinaten von a .

2) Man gehe von c zum Punkt b und von b zum Punkt a .

Da die Gerade cb (als Tangente an die Erdbahn im Punkte c) mit der x -Achse den Winkel $90^\circ + L$ bildet, so sind

$$cb \cos(90^\circ + L), \quad cb \sin(90^\circ + L), \quad 0$$

oder, wegen $cb = Rw$,

$$-Rw \sin L, \quad Rw \cos L, \quad 0$$

die Koordinaten des Punktes b .

Ferner sind, wegen $ab = \mu\tau$,

$$\mu\tau \cos \beta \cos \lambda, \quad \mu\tau \cos \beta \sin \lambda, \quad \mu\tau \sin \beta$$

die Koordinaten von a in bezug auf b als Anfang.

Es sind daher

$$\begin{aligned} & - R w \sin L + \mu \tau \cos \beta \cos \lambda \\ & + R w \cos L + \mu \tau \cos \beta \sin \lambda \\ & \mu \tau \sin \beta \end{aligned}$$

die Koordinaten von a in bezug auf c als Anfang.

Man erhält daher durch Gleichstellung dieser Werte

$$\begin{aligned} l \cos \beta' \cos \lambda' &= \mu \tau \cos \beta \cos \lambda - R \sin L w \\ l \cos \beta' \sin \lambda' &= \mu \tau \cos \beta \sin \lambda + R \cos L w \\ l \sin \beta' &= \mu \tau \sin \beta. \end{aligned}$$

Der Quotient $\frac{w}{\tau}$ ist die Winkelgeschwindigkeit der Erde um die Sonne. Ist die Sekunde die Zeiteinheit, so folgt, da die tägliche Bewegung der Erde um die Sonne $= \frac{360^\circ}{365.2564} = 59' 8''.2$ beträgt, für die Bewegung in einer Zeitsekunde $= \frac{59' 8''.2}{86400} = 0''.041067$, welche Größe hier in Teile des Halbmessers zu verwandeln ist.

Aus den obigen Gleichungen folgt auf die bekannte Weise

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= \frac{R}{\mu} \cdot \frac{w}{\tau} \cos(L - \lambda) \sec \beta \\ \beta' - \beta &= \frac{R}{\mu} \cdot \frac{w}{\tau} \sin(L - \lambda) \sin \beta. \end{aligned}$$

Da $\frac{R}{\mu} =$ Anzahl der Zeitsekunden, in welcher das Licht die Entfernung R zurücklegt $= 498.5$ Sekunden (nach Pariser Konferenz 1896), so ist

$$\frac{R}{\mu} \cdot \frac{w}{\tau} = 498.5 \times 0''.041067 = 20''.47 = C^*),$$

*) Die Konstante C ist mit dem in Art. 27 erhaltenen größten Werte von θ identisch. Denn Rw und $\mu\tau$ sind die gleichzeitigen Wege der Erde und des Lichtes, also ihr Quotient das Verhältnis der Geschwindigkeiten.

welcher Ausdruck in Sekunden beibehalten wird, um $\lambda' - \lambda$
 $\beta' - \beta$ unmittelbar in Sekunden zu erhalten. Es ist dahe

$$\lambda' - \lambda = 20''.47 \cos(L - \lambda) \sec \beta$$

$$\beta' - \beta = 20''.47 \sin(L - \lambda) \sin \beta.$$

Zusatz 1. Man denke sich an der Himmelskugel ein Koordinatensystem; den wahren Ort λ, β des Sternes als Koordinatenanfang, die Berührungsebene an die Kugel als xy -Ebene, die x -Achse parallel zur Ekliptik. Die Koordinaten ξ, η des Punktes λ', β' werden

$$\xi = (\lambda' - \lambda) \cos \beta = C \cos(L - \lambda)^*$$

$$\eta = \beta' - \beta = C \sin(L - \lambda) \sin \beta.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\frac{\xi^2}{C^2} + \frac{\eta^2}{(C \sin \beta)^2} = 1,$$

d. h. der scheinbare Ort λ', β' eines Sternes beschreibt um den wahren Ort λ, β auf der Himmelskugel in einem Jahre eine Ellipse, deren Achsen $2C, 2C \sin \beta$ sind.

Zusatz 2. Unter jährlicher Parallaxe der Fixsterne versteht man jene Ortveränderung, welche die Sterne erleiden, indem man sie statt von der ruhenden Sonne von der um letztere sich bewegenden Erde aus beobachtet.

Sind λ, β, A die heliozentrische; λ', β', A' die geozentrische Länge, Breite und Distanz eines Sternes, so ist

$$A' \cos \beta' \cos \lambda' = A \cos \beta \cos \lambda - R \cos L$$

$$A' \cos \beta' \sin \lambda' = A \cos \beta \sin \lambda - R \sin L$$

$$A' \sin \beta' = A \sin \beta,$$

woraus folgt

$$\lambda' - \lambda = -D \sin(L - \lambda) \sec \beta$$

$$\beta' - \beta = D \cos(L - \lambda) \sin \beta,$$

*) Ist l der Bogen eines Parallelkreises, L der zugehörige des größten Kreises, φ der Abstand beider Kreise, so ist $l = L \cos \varphi$.

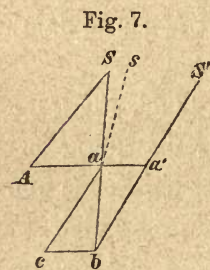
wo $D = \sin D = \frac{R}{J}$ gesetzt wurde. Die Größe D heißt die jährliche Parallaxe der Fixsterne.

Setzt man in den Formeln für die Aberration statt L die Größe $90^\circ + L$, statt C die Größe C , so erhält man die Ausdrücke für die Parallaxe. Der Verlauf der beiden Erscheinungen ist also im allgemeinen derselbe, nur sind sie um ein Vierteljahr verschieden.

Die Erscheinung der Aberration wurde von dem englischen Astronomen James Bradley beim Suchen nach der Parallaxe der Fixsterne entdeckt und erklärt.

29.

Hat das Gestirn eine eigene Bewegung, wie dies bei den Planeten und Kometen der Fall ist, so geschieht die Berechnung der Aberration anders.



Es seien (Fig. 7) S, A die Orte des Himmelskörpers und des Objektivs zur Zeit T ; s, a die bzw. Orte zur Zeit t , wo $t - T$ die Zeit ist, während welcher das Licht den Weg Sa , die Erde den Weg Aa zurücklegt. Der Lichtstrahl SA trifft das Objektiv nicht, sondern der Strahl Sa ; damit dieser in das Auge des Beobachters kommt, muß das Fernrohr die Richtung ca haben, wo $cb = aa'$ der Weg der Erde in der Zeit ist, während das Licht den Weg ab zurücklegt. Ist t' die Zeit, zu welcher das Licht das Okular b erreicht, d. h. Beobachtungszeit, so ist, weil man innerhalb der kleinen Zeit $t' - T$ die Bewegung der Erde geradlinig und gleichförmig betrachten kann und das Licht eine konstante Geschwindigkeit hat

$$Aa : aa' = t - T : t' - t$$

$$Sa : ab = t - T : t' - t,$$

also $Aa : aa' = Sa : ab$, und da $\sphericalangle AaS = a'ab$ ist, so folgt

$$Sa \parallel a'b \text{ oder } ac;$$

d. h.: Der scheinbare Ort des Gestirnes zur Zeit t' ist gleich dem wahren Orte zur Zeit T . Setzt man $Sb = A$, so ist die Zeit $\tau = t' - T$, welche das Licht braucht, um den Weg A zurückzulegen = $498^s.5 A$, also

$$T = t' - 498^s.5 A.$$

Daraus ergeben sich folgende Regeln der Berücksichtigung der Aberration:

- 1) Man nehme statt der Beobachtungszeit t' die Zeit T .
- 2) Man befreie den beobachteten Ort von der durch die Formeln des Art. 28 bestimmten Fixsternaberration, wodurch man die Richtung ba erhält; diese Richtung ist diejenige, in welcher man den wahren Ort S des Gestirnes zur Zeit T von dem Orte b der Erde zur Zeit t' erblickt. Diese Methode ist bei einer ersten Bahnbestimmung die bequemste.

IV. Präzession und Nutation.

30.

Unter Präzession und Nutation versteht man den Inbegriff aller Veränderungen, welche der Äquator und die Ekliptik in ihren Lagen erleiden. Diese Veränderungen sind eine Folge der Anziehung des Mondes, der Sonne und der größeren Planeten auf die abgeplattete und um ihre Achse rotierende Erde. Diese Veränderungen sind theils (hauptsächlich) der Zeit proportional, theils periodisch; erstere heißen Präzession, letztere Nutation.

Die Präzession besteht in dem Zurückgehen der Nachtgleichenpunkte und der Veränderung der Schiefe der Ekliptik; dieses Zurückweichen beträgt im Jahre $1750 + t$ die Größe

$$l' = 50''.211 + 0''.000244 t,$$

also von 1750 bis $1750 + t$

$$l = 50''.211 t + 0''.000122 t^2.$$

Der Winkel des Äquators von $1750 + t$ mit der Ekliptik von $1750 + t$ ist

$$\varepsilon = 23^\circ 28' 18''.0 - 0''.484 t,$$

dieser Winkel heißt die mittlere Schiefe der Ekliptik.

Die Präzession der Nachtgleichen, wodurch die Längen der Sterne um dieselbe Größe zunehmen, wurde von Hipparch (130 v. Chr.) durch Vergleichung mit den 150 Jahre älteren Beobachtungen des Timocharis entdeckt.

Die Nutation enthält die periodischen Veränderungen; dieselbe hängt hauptsächlich von der Länge des Mondsknotens ab; die Veränderungen der Länge eines Sternes und der Schiefe der Ekliptik sind resp.

$$\Delta\lambda = -17''.2 \sin \Omega, \quad \Delta\varepsilon = +9''.2 \cos \Omega,$$

wo Ω die Länge des aufsteigenden Knotens des Mondes bedeutet. Da die Knotenlinie des Mondes innerhalb 19 Jahren einen Umlauf macht, so ist die Wirkung der Nutation ähnlich jener der Aberration. Die Nutation wurde ebenfalls von Bradley entdeckt.

Man nennt die Durchschnittspunkte des wahren Äquators mit der wahren Ekliptik zur Zeit t die wahren oder scheinbaren Äquinoktialpunkte, den Winkel derselben Ebenen die wahre oder scheinbare Schiefe der Ekliptik, die von dem wahren Frühlingspunkte gezählten Längen die wahren oder scheinbaren Längen. Befreit man die Längen von der Nutation und ebenso die Schiefe der Ekliptik, so erhält man die mittleren Längen und die mittlere Schiefe der Ekliptik. Die mittleren Längen der Sterne werden daher von dem Frühlingspunkte des oben bestimmten

Äquators mit der Ekliptik zur Zeit $1750 + t$ gezählt; dieser Punkt heißt das mittlere Frühlingsäquinoktium von $1750 + t$.

31.

Man kann die Veränderungen der Lage der Sterne in Länge und Breite in die entsprechenden Veränderungen der Rektaszension und Deklination verwandeln. Durch die Beobachtung erhält man die scheinbare mit Aberration und Parallaxe behaftete Rektaszension und Deklination des Gestirnes.

Ist das Gestirn ein Fixstern, so befreit man die Beobachtung von der Aberration und Nutation, wodurch man die mittlere Rektaszension und Deklination zur Zeit der Beobachtung erhält. Vermittels der bekannten Präzession kann man diese mittlere Position auf ein bestimmtes Äquinoktium und den zugehörigen Äquator beziehen. In dieser Weise sind die Fixsternverzeichnisse angelegt.

Ist das Gestirn ein Planet, so befreit man die Beobachtung von der Parallaxe, wodurch man den scheinbaren geozentrischen Ort erhält; diese Position befreit man noch von der Aberration und Nutation, wodurch man den mittleren Ort zur Zeit der Beobachtung erhält, welchen man wieder auf ein bestimmtes Äquinoktium reduzieren kann.

Die zur Bahnbestimmung zu verwendenden Beobachtungen müssen auf ein gemeinsames mittleres Äquinoktium und die zugehörige mittlere Grundebene (Äquator oder Ekliptik) bezogen werden.

32.

Um die im vorhergehenden angegebenen Reduktionen zu erläutern, mögen dieselben an den Beobachtungen des Beispielles des Art. 18 vorgenommen werden. Für den Planeten Juno gibt Gauß (Theoria motus, art. 150) folgende Daten:

Mittlere Zeit von Greenwich	Scheinbare Rektaszension	Scheinbare Deklination
1804 Okt. 5 10 ^h 51 ^m 6 ^s	357° 10' 22".35	— 6° 40' 8"
17 9 ^h 58 ^m 10 ^s	355° 43' 45".30	— 8° 47' 25"
27 9 ^h 16 ^m 41 ^s	355° 11' 10".95	— 10° 2' 28".

Aus den Sonnentafeln*) findet man für dieselben Zeiten:

Datum	Scheinbare Länge der Sonne	Abstand von der Erde	Breite der Sonne
Okt. 5	192° 28' 53".72	0.9988839	— 0".49
17	204° 20' 21".54	0.9953968	+ 0".79
27	214° 16' 52".21	0.9925340	— 0".15

Nutation	Scheinbare Schiefe der Ekliptik
+ 15".43	23° 27' 59".48
+ 15".51	59".26
+ 15".60	59".06

Da die Entfernungen des Planeten von der Erde unbekannt sind, so kann man die Beobachtungen nicht unmittelbar von der Parallaxe und Aberration befreien. Man verwandle zunächst die scheinbaren Rektaszensionen und Deklinationen mit Anwendung der scheinbaren Schiefe der Ekliptik (nach Art. 24, Gl. (1) und (2)) in scheinbare Längen und Breiten, wodurch man erhält:

Datum	Scheinbare Länge der Juno	Scheinbare Breite der Juno
Okt. 5	354° 44' 54".27	— 4° 59' 31".59
17	352° 34' 44".51	— 6° 21' 56".25
27	351° 34' 51".57	— 7° 17' 52".70.

*) Statt der Sonnentafeln bedient man sich gegenwärtig des Berliner astronomischen Jahrbuches. Auf Seite 1 die Reduktionselemente: Schiefe der Ekliptik, Präzession und Nutation. Auf den Seiten 2—21 der Sonnenephemeride findet man die Länge, Breite und den Abstand der Sonne.

Addiert man zu den Sonnenlängen 180° und verwandelt man die Breiten in die entgegengesetzten, so erhält man die Erdorte.

Nun bestimme man nach denselben Formeln für die drei Beobachtungen die Länge und Breite des Beobachtungsortes.

Für Greenwich ist $\varphi = 51^\circ 28' 39''$; da die Beobachtungen im Meridiane angestellt sind, so sind die Rektaszensionen der Juno gleich den Sternzeiten der Beobachtungen.

Man erhält für den Beobachtungsort

Datum	Länge	Breite
Okt. 5	$24^\circ 29'$	$46^\circ 53'$
17	$23^\circ 25'$	$47^\circ 24'$
27	$23^\circ 1'$	$47^\circ 36'$

Nun nehme man nach Art. 26 die den Erdorten entsprechenden Punkte F' ; man erhält

Datum	$L' - L$	$R' - R$	Reduktion der Zeit
Okt. 5	$- 22''.39$	$+ 0.0003856$	$- 0^s.19$
17	$- 27''.21$	$+ 0.0002329$	$- 0^s.12$
27	$- 35''.82$	$+ 0.0002085$	$- 0^s.12.$

Die Reduktion der Zeit ist also verschwindend.

Nun ziehe man von den Längen der Erde die Nutation ab und reduziere dann dieselben auf ein mittleres Frühlingsäquinoktium; Gauß wählt das für den Anfang des Jahres 1805. Die jährliche Präzession beträgt im Jahre 1804: $50''22$, also bis zum Beginn des Jahres 1805 beträgt dieselbe für die drei Beobachtungen bzw. $11''.87$, $10''.23$, $8''.86$, welche Größen zu den Längen dazu addiert werden, weil dieselben mit der Zeit wachsen.

Die Aberration berücksichtigt man nach der in Art. 29 2) angegebenen Methode: man befreit die Beobachtungen von der Fixsternaberration, diese beträgt für die Längen bzw. $+ 19''.12$, $+ 17''.11$, $+ 14''.82$; für die Breite $- 0''.53$, $- 1''.18$, $- 1''.75$, welche Größen von den Beobachtungen subtrahiert werden. Für die Erdorte sind nun die Beobachtungszeiten, für die Junoorte die um die Lichtzeit 493^s Δ verminderten Zeiten zu nehmen. Man vernachlässigt in erster Hypothese diese Reduktion der Zeit und führt bei der Berechnung der Werte von P und Q in letzter Hypothese die verbesserten Zwischenzeiten ein.

Bringt man nun an die Beobachtungen sämtliche hier angegebene Korrekturen an, so erhält man die in Art. 18 gegebenen Daten. Die Beobachtungszeiten gibt man in Dezimalteilen eines Tages statt in Stunden, Minuten und Sekunden an. Für diese Verwandlung dient die Bau-schinger-Tafel III.

Bei der Methode des ersten Abschnittes erhält man unmittelbar die drei Distanzen des Planeten von der Erde. Rechnet man mit den gefundenen Werten der ersten Hypothese

$$\log \frac{e}{\cos \beta} = 0.06685, \log \frac{e'}{\cos \beta'} = 0.08083, \log \frac{e''}{\cos \beta''} = 0.09971$$

die Korrekturen der Zeiten, so erhält man, da $493^s = 0.005706$ Tage ist:

$$- 0.006655, - 0.006873, - 0.007179 \text{ Tage};$$

und damit die verbesserten Zeiten

$$\text{Okt. 5. } 451989$$

$$17. 415012$$

$$27. 385898,$$

woraus

$$t'' = 11.963023, \log \mathcal{J}'' = 9.3134223$$

$$t = 9.970886, \log \mathcal{J} = 9.2343153$$

folgt. Berechnet man mit diesen Werten die zweite Hypothese von P und Q , so erhält man

$$\log P = 0.0790164, \log Q = 8.5475972,$$

mit welchen Werten die zweite Hypothese (und ebenso, wenn nötig, die folgenden) gerechnet wird. Dadurch ist auf alle Korrekturen der Beobachtungen Rücksicht genommen.

Zusatz. Bei der Methode des dritten Abschnittes erhält man unmittelbar $\frac{q_1}{\cos \beta_1}$ und $\frac{q_2}{\cos \beta_2}$. Für die erste und vierte Beobachtung erhält man q, q_3 aus den bereits bekannten Werten r und r_3 .

Es ist nämlich

$$\frac{q}{\cos \beta} = x - R \cos \delta, \quad x = \sqrt{r^2 - R^2 \sin^2 \delta},$$

wo $\cos \delta = \cos \beta \cos(\lambda - L)$ ist.

Setzt man

$$\frac{R \sin \delta}{r} = \sin \varphi,$$

so wird

$$x = r \cos \varphi, \quad \frac{q}{\cos \beta} = r \cos \varphi - R \cos \delta.$$

Ebenso findet man die Distanz $\frac{q_3}{\cos \beta_3}$.

Fünfter Abschnitt.

Bahnbestimmungen aus einer größeren Reihe von Beobachtungen.

33.

Zur Vergleichung der Beobachtungen mit den aus den zugehörigen Elementen berechneten Orten eines Himmelskörpers bedient man sich einer Ephemeride, d. i. einer

Tafel, welche die in konstanten Intervallen berechneten Orte des Himmelskörpers enthält. Vermittels einer solchen über die ganze Zeit der Beobachtungsreihe sich erstreckenden Ephemeride kann man sich durch Interpolation jeden Ort leicht verschaffen. Für die größeren Planeten rechnet man die Ephemeriden für das ganze Jahr, für die kleinen Planeten meist nur für den Monat der Opposition, weil sie um diese Zeit der Erde am nächsten, und daher am besten zu beobachten sind.

Um eine Ephemeride zu berechnen, bestimmt man die mittlere Anomalie der ersten Position, addiert dann fortgesetzt die dem Intervalle entsprechende mittlere Bewegung hinzu, wodurch man die mittleren Anomalien der sämtlichen Positionen erhält. Aus den mittleren Anomalien bestimme man nach Art. 3 die exzentrischen und aus diesen die wahren Anomalien und Radienvektoren nach den Gleichungen (3), (4) des Art. 2, oder nach den Gleichungen (1) und (6)

$$\begin{aligned} r \cos v &= a(\cos E - e) \\ r \sin v &= a \cos \varphi \sin E. \end{aligned}$$

Aus r und v können unmittelbar die auf den Äquator bezogenen heliozentrischen Koordinaten erhalten werden.

Denn sind x_0, y_0, z_0 die heliozentrischen Koordinaten eines Punktes in bezug auf die Ekliptik als xy -Ebene; x, y, z die Koordinaten in bezug auf den Äquator als xy -Ebene (die x -Achse für beide Systeme nach dem Frühlingspunkte gerichtet), so ist, wenn ε die Schiefe der Ekliptik bedeutet,

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \cos \varepsilon - z_0 \sin \varepsilon \\ z &= y_0 \sin \varepsilon + z_0 \cos \varepsilon. \end{aligned}$$

Nun ist nach Art. 12

$$x_0 = r \cos u \cos \Omega - r \sin u \sin \Omega \cos i$$

$$y_0 = r \sin u \cos \Omega \cos i + r \cos u \sin \Omega$$

$$z_0 = r \sin u \sin i.$$

Substituiert man diese Werte in den obigen Gleichungen, so erhält man, wenn

$$a \sin A = \cos \Omega$$

$$a \cos A = -\sin \Omega \cos i$$

$$b \sin B = \sin \Omega \cos \varepsilon$$

$$b \cos B = \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon$$

$$c \sin C = \sin \Omega \sin \varepsilon$$

$$c \cos C = \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon,$$

$$\mathfrak{A} = A + \Pi - \Omega$$

$$\mathfrak{B} = B + \Pi - \Omega$$

$$\mathfrak{C} = C + \Pi - \Omega$$

gesetzt wird,

$$x = ar \sin (\mathfrak{A} + v)$$

$$y = br \sin (\mathfrak{B} + v)$$

$$z = cr \sin (\mathfrak{C} + v).$$

Vgl. Art. 12.

Zur bequemeren Berechnung von

$$b \cos B \quad \text{und} \quad c \cos C$$

setze man

$$\text{tang } \psi = \frac{\text{tang } i}{\cos \Omega},$$

so wird

$$b \cos B = \frac{\sin i}{\sin \psi} \cos (\psi + \varepsilon)$$

$$c \cos C = \frac{\sin i}{\sin \psi} \sin (\psi + \varepsilon).$$

Allein die Berechnung von r und v ist für die Koordinaten überflüssig; man kann dieselben unmittelbar durch die exzentrische Anomalie ausdrücken.

Denn jeder Ausdruck von der Form $kr \sin(K + v)$ geht durch Substitution von $r \sin v$, $r \cos v$ über in

$$ak \cos K \cos \varphi \sin E + ak \sin K (\cos E - e).$$

Bestimmt man l , L , λ durch die Gleichungen:

$$l \sin L = ak \sin K$$

$$l \cos L = ak \cos \varphi \cos K$$

$$\lambda = -el \sin L = -eak \sin K,$$

so wird

$$kr \sin(K + v) = l \sin(L + E) + \lambda,$$

wo l , L , λ konstant sind. Die Größe r rechnet man, falls man dieselbe benötigt, nach der Formel

$$r = a - ae \cos E.$$

Sind nun X , Y , Z die geozentrischen Koordinaten der Sonne (welche den heliozentrischen der Erde gleich und entgegengesetzt sind), so erhält man die geozentrische Rektaszension, Deklination und Distanz des Himmelskörpers aus

$$A \cos \delta \cos \alpha = x + X$$

$$A \cos \delta \sin \alpha = y + Y$$

$$A \sin \delta = z + Z.$$

Die Größen α , δ sind auf den mittleren Äquator bezogen, auf welchen sich die Elemente Π , Ω , i beziehen, und auf welchen man auch die Koordinaten X , Y , Z beziehen muß. Es sind daher die Größen α , δ noch auf den scheinbaren Äquator zu beziehen; man füge daher die Präzession bis zur Zeit der Position und die für dieselbe Zeit stattfindende Nutation hinzu. Diese Rechnung kann sehr bequem mit Hilfe der in den Berliner astronomischen Jahrbüchern gegebenen Tafeln ausgeführt werden*).

*) Auf S. 22—41 findet man die auf das mittlere Äquinoktium bezogenen Sonnenkoordinaten X , Y , Z ; auf S. 312—337 die für die Reduktion vom mittleren Äquinoktium auf das scheinbare erforderlichen Hilfstabellen. Die nähere Einrichtung ist in den Jahrbüchern selbst angegeben.

Bei der wirklichen Berechnung der Ephemeriden ist es nicht nötig, alle Positionen direkt zu rechnen; sondern bei den kleinen Planeten z. B. genügt es, dieselben von vier zu vier Tagen (für die Mitternacht) zu rechnen und die Zwischenpositionen zu interpolieren.

34.

Um nun einen beobachteten Ort mit Hilfe einer Ephemeride zu vergleichen, bestimme man zunächst nach den Ausdrücken

$$\alpha' - \alpha = -\frac{\pi}{\Delta} \cos \varphi \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \delta}$$

$$\delta' - \delta = -\frac{\pi}{\Delta} \sin \varphi \frac{\sin(\gamma - \delta)}{\sin \gamma}$$

$$\text{tang } \gamma = \frac{\text{tang } \varphi}{\cos(\theta - \alpha)}$$

die Parallaxe; durch Subtraktion von dem beobachteten Orte erhält man den geozentrischen Ort. In der Regel wird die Parallaxe, oder das Produkt derselben mit der Distanz Δ , von dem Beobachter angegeben. Ist dieses nicht der Fall, so muß man sich aus der angegebenen mittleren Zeit der Beobachtung die Sternzeit ableiten: dieses geschieht dadurch, daß man die mittlere Zeit in Sternzeitintervall verwandelt und die dem Beobachtungs-orte entsprechende Sternzeit des Mittags dazu addiert. Die Sternzeit des Mittags ist gleich der Rektaszension der mittleren Sonne zur Zeit des Mittags. Damit kann dann die Parallaxe berechnet werden. Hilfsgrößen dazu gibt Bauschinger in Tafel XXXII.

Ist die Beobachtungszeit t , so bestimme man durch Interpolation mit dem Argumente $T = t - 498^s.5 \Delta$ die Position der Ephemeride; diese mit dem von der Parallaxe befreiten Orte verglichen, gibt den Fehler der Ephemeride

zur Zeit T , d. i. den Unterschied: Beobachtung — Rechnung.

Die Beobachtungen sind nämlich trotz aller Sorgfalt mit unvermeidlichen kleinen Beobachtungsfehlern behaftet; es wird daher eine aus drei oder vier Beobachtungen gerechnete Bahn nicht alle übrigen Beobachtungen genau darstellen, sondern es werden sich Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung zeigen. Diese Unterschiede werden bei den späteren Beobachtungen um so mehr wachsen, je kleiner das Bahnstück ist, welches die Beobachtungen, aus denen die Bahn gerechnet wurde, umfassen.

Hat man daher eine größere Reihe von Beobachtungen, so wird man aus diesen eine Bahn zu bestimmen suchen, welche sich allen Beobachtungen möglichst genau anschließt. Die Mittel, wodurch ein solcher Anschluß erreicht wird, sind folgende:

Man bestimmt für die ganze Reihe der Beobachtungen den Unterschied zwischen Beobachtung und Rechnung: es sei B der beobachtete, R der berechnete Ort. Der Unterschied $B - R$ läßt sich, wenn die Zeit t klein ist, als Funktion der Zeit t durch eine Reihe darstellen

$$B - R = a + bt + ct^2 + \dots,$$

wo a, b, c, \dots konstant sind, und, wenn die Elemente der Bahn nicht zu ungenau sind, in der Form $B - R = a + bt$.

Es seien nun d_1, d_2, \dots, d_n die den Beobachtungszeiten t_1, t_2, \dots, t_n entsprechenden Unterschiede. Zählt man die Zeiten t_1, \dots, t_n vom arithmetischen Mittel T derselben, so ist

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n = 0;$$

der dem arithmetischen Mittel T entsprechende Fehler wird (wegen $t = 0$)

$$a = \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{n}.$$

Berechnet man für die Zeit T den Ort R , so ist $R + a$ der von den Beobachtungsfehlern möglichst befreite Ort; denn man kann voraussetzen, daß in der Summe $d_1 + d_2 + \dots + d_n$ die in den Größen d_1, d_2, \dots, d_n enthaltenen Beobachtungsfehler sich größtenteils aufheben. Diese Untersuchung macht man sowohl für die Rektaszension als auch für die Deklination; man erhält auf diese Art eine aus mehreren Orten abgeleitete Position, welche man einen Normalort nennt.

Bei den kleinen Planeten und Kometen können Beobachtungen, die einen Zeitraum von zehn bis dreißig Tagen umfassen, zu einem Normalort vereinigt werden. Für die erste Erscheinung (Opposition), wo die Beobachtungen selten einen Zeitraum von mehr als hundert Tagen umfassen, genügt es, aus denselben drei oder vier Normalorte mit möglichst nahe gleichen Zwischenzeiten zu bilden und aus denselben nach den in den ersten drei Abschnitten gegebenen Methoden die Bahn zu bestimmen.

35.

Ist ein Planet in zwei oder mehreren Oppositionen beobachtet worden, so sind die im ersten und dritten Abschnitte angegebenen Methoden nicht mehr anwendbar: allein in diesem Falle besitzt man aus der ersten Opposition bereits ziemlich genaue Elemente, und die nächsten Oppositionen werden dann hauptsächlich zur Verbesserung dieser Elemente benutzt.

Aus der ersten Opposition nehme man einen oder zwei möglichst entfernte Normalorte, aus jeder folgenden Opposition (da man in denselben den Planeten nicht so oft beobachtet) einen Normalort; nun bestimmt man die Bahn auf folgende Art:

Man wähle zwei möglichst genaue und hinreichend (um eine oder mehrere Oppositionen) entfernte Normalorte L, L' . Man kann nun die Elemente als Funktionen der (unbekannten) zu diesen beiden Normalorten zugehörigen Entfernungen des Himmelskörpers von der Erde betrachten. Für die Orte L, L' rechne man aus den genäherten Elementen die Entfernungen D, D' von der Erde. Um die wahren Entfernungen zu bestimmen, bilde man die drei Hypothesen

I.	II.	III.
D	$D + d$	D
D'	D'	$D' + d'$,

wo d und d' kleine Änderungen sind, die bis auf 0.001 genommen werden dürfen. Man bestimme nun für diese drei Hypothesen der Entfernungen und der Orte L, L' drei Elementensysteme und berechne mit diesen die übrigen Normalorte. Es seien

I.	II.	III.
$M,$	$M + \alpha,$	$M + \beta$
$M',$	$M' + \alpha',$	$M' + \beta'$

die berechneten Normalwerte, wobei die einzelnen Längen und Breiten besonders bezeichnet gedacht werden. Die zugehörigen beobachteten Orte seien N, N', \dots

Sind $D + x \cdot d, D' + y \cdot d'$ die wahren Entfernungen, so sind die damit berechneten Beobachtungen

$$M + \alpha x + \beta y^*)$$

$$M' + \alpha' x + \beta' y$$

*) Ist nämlich α die Änderung einer von D und D' abhängigen Größe, welche der Änderung d von D entspricht, so entspricht der Änderung dx die Änderung αx . Analoges gilt für die Änderungen von D' . Der gleichzeitigen Änderung von D und D' entspricht die Summe der Änderungen. — Interpolation nach zwei Argumenten.

welche den Größen N, N', \dots gleich sind. Man erhält daher Gleichungen von der Form

$$N - M = \alpha x + \beta y$$

$$N' - M' = \alpha' x + \beta' y$$

Aus einem Normalort erhält man zwei solche Gleichungen; hat man mehrere Orte, so kann man nach der Methode der kleinsten Quadrate¹²⁾ die wahrscheinlichsten Werte von x, y bestimmen. Aus den verbesserten Distanzen oder durch Interpolation bestimme man die verbesserten Elemente; denn diese stellen sich ebenfalls in der Form dar

$$M + \alpha x + \beta y.$$

Diese Methode stellt die beiden Orte L und L' vollkommen, die übrigen, wenn mehrere sind, möglichst genau dar. Die Orte L, L' müssen möglichst fehlerfrei sein, weil deren Fehler in die Elementenbestimmung, also auch in die Darstellung der übrigen Orte übergehen.

Diese Methode setzt außerdem voraus, daß man die zweiten Potenzen von $x d$ und $y d'$ vernachlässigen kann. Erhält man für x und y Werte, die mehrere Einheiten betragen, so wiederhole man diese Rechnung, wobei man die durch die erste Rechnung erhaltenen Distanzen als erste Hypothese nimmt.

Statt der Entfernungen D, D' des Himmelskörpers von der Erde kann man sich auf ganz analogem Wege der Elemente Ω und i bedienen. Die hierhergehörige Methode ergibt sich aus der Lösung der folgenden Aufgabe:

»Aus dem geozentrischen Orte und der Lage der Bahnebene, d. i. Knoten und Neigung, den heliozentrischen Ort zu bestimmen.«

Legt man die x -Achse in die Knotenlinie, so hat man die Gleichungen (indem man in den Gleichungen (7) des

Art. 11 statt l, L bzw. $l - \Omega, L - \Omega$ setzt und die Formeln des Art. 10 berücksichtigt)

$$(1) \quad r \cos u - R \cos(L - \Omega) = A \cos \beta \cos(\lambda - \Omega)$$

$$(2) \quad r \sin u \cos i - R \sin(L - \Omega) = A \cos \beta \sin(\lambda - \Omega)$$

$$(3) \quad r \sin u \sin i = A \sin \beta.$$

Eliminiert man aus den Gleichungen (1) und (2) die Größe R , so erhält man

$$(4) \quad r \cos u \sin(L - \Omega) - r \sin u \cos i \cos(L - \Omega) \\ = A \cos \beta \sin(L - \lambda).$$

Durch Elimination von A aus den Gleichungen (3) und (4) folgt

$$(5) \quad \tan u = \frac{\sin(L - \Omega) \sin \beta}{\cos i \cos(L - \Omega) \sin \beta + \sin i \sin(L - \lambda) \cos \beta}.$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt durch Elimination von A

$$(6) \quad r = \frac{R \sin(L - \lambda)}{\sin u \cos i \cos(\lambda - \Omega) - \cos u \sin(\lambda - \Omega)}.$$

Ist β positiv, so liegt u zwischen 0° und 180° ,

» » negativ, » » » 180° » 360° .

Für $\beta = 0$ ist $u = 0$ oder 180° zu nehmen, so daß r positiv wird.

Die Rechnung ist so wie im vorigen Falle, indem man statt der Größen D, D' die Elemente Ω, i setzt.

Zusatz 1. Bei einer parabolischen Bahn kann man die Elemente auch als Funktionen des Verhältnisses der kurtierten Entfernungen der Orte L und L' betrachten. Man rechnet nun aus zwei Annahmen dieses Verhältnisses — wovon die eine M aus den genäherten Elementen erhalten wird, die andere $M + m$ ist, wo m eine kleine Änderung ist, — Elemente.

Mit diesen beiden Elementensystemen vergleicht man die übrigen Beobachtungen und bestimmt dadurch das wahr-

scheinlichste Verhältnis $M + x \cdot m$, aus welchem (oder durch Interpolation) man die zugehörigen Elemente findet.

Zusatz 2. Bei ganz genauen Rechnungen kann man die Änderungen der berechneten Orte durch die Differentialformeln der Elemente darstellen und damit die Korrekturen der Elemente nach der Methode der kleinsten Quadrate ermitteln.¹³⁾

Sechster Abschnitt.

Bahnbestimmung mit Berücksichtigung der Störungen.

36.

Die in den früheren Abschnitten dargestellten Bahnbestimmungen berücksichtigen nur die gegenseitige Anziehung der Sonne und des Himmelskörpers; dadurch erhält man als relative Bahn des Himmelskörpers um die Sonne einen Kegelschnitt, in dessen einem Brennpunkte sich die Sonne befindet. Vermöge der allgemeinen Anziehung weicht die wirkliche Bewegung der Himmelskörper von der unter der obigen Voraussetzung bestimmten Bewegung ab, welche Abweichung man unter dem Namen Störungen begreift.

Es soll nun die Bewegung eines Himmelskörpers, welcher der gestörte heißt, bestimmt werden, wenn außer der Sonne noch ein anderer störender Himmelskörper einwirkt (Problem der drei Körper).

Um die relative Bewegung des gestörten Himmelskörpers um die Sonne zu erhalten, bringe man die auf die Sonne wirkende Kraft im entgegengesetzten Sinne an Sonne und Himmelskörper an. Es seien nun, wenn k^2 die Masse der Sonne ist, deren Mittelpunkt als Koordinaten-Anfang gesetzt wird:

x, y, z, mk^2 die Koordinaten und Masse des gestörten
 $x', y', z', m'k^2$ » » » » » störenden
 Himmelskörpers, ρ deren Distanz; dabei ist

$$\rho^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2.$$

Zerlegt man die Einwirkungen in drei Komponenten nach den Koordinatenrichtungen, und nimmt die Kräfte positiv, wenn sie die Koordinaten des bewegten Punktes zu vergrößern, negativ, wenn sie dieselben zu verkleinern suchen, so sind für die x -Richtung

$-k^2 \frac{x}{r^3}, +m'k^2 \frac{x'-x}{\rho^3}$ die auf den gestörten Himmelskörper
 $+mk^2 \frac{x}{r^3}, +m'k^2 \frac{x'}{r'^3}$ » » die Sonne
 wirkenden beschleunigenden Kräfte, also

$$-k^2(1+m)\frac{x}{r^3} + m'k^2\left(\frac{x'-x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3}\right)$$

die in der x -Richtung wirkende Kraft, welche $+\frac{d^2x}{dt^2}$ ist.

Man erhält daher

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{x}{r^3} = m'k^2\left(\frac{x'-x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3}\right),$$

ebenso

$$(1) \quad \frac{d^2y}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{y}{r^3} = m'k^2\left(\frac{y'-y}{\rho^3} - \frac{y'}{r'^3}\right)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{z}{r^3} = m'k^2\left(\frac{z'-z}{\rho^3} - \frac{z'}{r'^3}\right).$$

Sind mehrere störende Himmelskörper vorhanden, so bleiben die linken Teile dieser Gleichungen ungeändert; rechts erhält man für jeden störenden Himmelskörper ein ähnliches Glied, deren Summe die in dieser Achsenrichtung wirkende störende Kraft ist.

Aus den Gleichungen (1) hat man x, y, z als Funktionen der Zeit t zu bestimmen. Die direkte Lösung überschreitet die Kräfte der gegenwärtigen Analysis, man ist daher gezwungen, die Aufgabe sukzessive durch Reihen-

entwicklungen zu lösen. Man kann entweder unmittelbar die heliozentrischen Koordinaten durch die Zeit ausdrücken, d. i. die Störungen der Koordinaten entwickeln, oder die Aufgabe auch dadurch lösen, daß man die Voraussetzung macht: die Bewegung des gestörten Himmelskörpers geschieht in einem Kegelschnitt, dessen Elemente veränderlich sind, in welchem jedoch der Ort und die Geschwindigkeit des Himmelskörpers zur Zeit t nach den Regeln der Bewegung im Kegelschnitte mit den zur Zeit t geltenden Elementen bestimmt wird (Methode der Variation der Konstanten). Statt der Reihenentwicklungen bedient man sich gegenwärtig bei den kleinen Planeten und Kometen meist des Verfahrens der Berechnung der speziellen Störungen durch die mechanischen Quadraturen. Zu diesem Ende teilt man das Zeitintervall, für welches die Störungen zu bestimmen sind, in eine Anzahl gleicher Teile; für den Anfang T des Zeitintervalles seien die oskulierenden Elemente, d. h. die Elemente, aus welchen für die Zeit T der berechnete Ort und die Geschwindigkeit des Himmelskörpers mit dem wirklichen Orte und der wirklichen Geschwindigkeit übereinstimmt, gegeben. Man bestimmt nun aus den störenden Kräften für die einzelnen Teile des Zeitintervalles die Geschwindigkeiten der Elemente und leitet aus diesen durch die mechanische Quadratur die zugehörigen Elemente ab.

Kürzer ist die Rechnung, wenn man statt der Störungen der Elemente die Störungen der Koordinaten bestimmt. Letztere Methode wurde zuerst von Bond in Cambridge und unabhängig von Encke in Berlin angegeben; von letzterem jedoch in einer für die Anwendung höchst bequemen Form, weshalb die Methode gegenwärtig die Enckesche Methode heißt.

Es seien zur Zeit t : x, y, z die wahren (gestörten) Koordinaten, x_0, y_0, z_0 die für dieselbe Zeit mit den zur Zeit T oskulierenden Elementen gerechneten Koordinaten; setzt man

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta, \quad z = z_0 + \zeta,$$

so kann man die Störungen ξ, η, ζ auf folgende Art bestimmen.

Es ist, wenn man die gegenseitige Einwirkung der Sonne und des gestörten Himmelskörpers allein berücksichtigt:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{dt^2} + k^2(1+m) \frac{x_0}{r_0^3} &= 0 \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} + k^2(1+m) \frac{y_0}{r_0^3} &= 0 \\ \frac{d^2 z_0}{dt^2} + k^2(1+m) \frac{z_0}{r_0^3} &= 0. \end{aligned}$$

Subtrahiert man von den Gleichungen (1) die Gleichungen (2), so erhält man

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = m' k^2 \left(\frac{x' - x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3} \right) + (1+m) k^2 \left(\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} \right),$$

und analog für die übrigen Gleichungen.

Um $\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3}$ bequemer zu berechnen, setze man es

$$= \frac{1}{r_0^3} \left(x_0 + \xi - \xi - x \frac{r_0^3}{r^3} \right) = \frac{1}{r_0^3} \left(\left(1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right) x - \xi \right).$$

Nun ist

$$r^2 = (x_0 + \xi)^2 + (y_0 + \eta)^2 + (z_0 + \zeta)^2$$

oder

$$r^2 = r_0^2 + 2x_0\xi + 2y_0\eta + 2z_0\zeta + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

$$\frac{r^2}{r_0^2} = 1 + 2 \frac{(x_0 + \frac{1}{2}\xi)\xi + (y_0 + \frac{1}{2}\eta)\eta + (z_0 + \frac{1}{2}\zeta)\zeta}{r_0^2}$$

$$= 1 + 2q,$$

wo

$$q = \frac{x_0 + \frac{1}{2}\xi}{r_0^2} \xi + \frac{y_0 + \frac{1}{2}\eta}{r_0^2} \eta + \frac{z_0 + \frac{1}{2}\zeta}{r_0^2} \zeta$$

ist.

Aus $\frac{r^2}{r_0^2} = 1 + 2q$ folgt $\frac{r_0^3}{r^3} = (1 + 2q)^{-\frac{3}{2}}$, oder

$$\begin{aligned} \frac{r_0^3}{r^3} &= 1 - 3q + \frac{3 \cdot 5}{1 \cdot 2} q^2 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} q^3 + \dots \\ &= 1 - 3q \left(1 - \frac{5}{2} q + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 3} q^2 - \dots \right), \end{aligned}$$

Setzt man

$$f = 3 \left(1 - \frac{5}{2} q + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 3} q^2 - \dots \right).$$

so wird $1 - \frac{r_0^3}{r^3} = fq$, und daraus folgt

$$\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} = \frac{1}{r_0^3} (fqx - \xi).$$

Mithin ist

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = m' k^2 \left(\frac{x' - x}{\rho^3} - \frac{x'}{r'^3} \right) + (1 + m) \frac{k^2}{r_0^3} (fqx - \xi),$$

ebenso

$$(3) \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} = m' k^2 \left(\frac{y' - y}{\rho^3} - \frac{y'}{r'^3} \right) + (1 + m) \frac{k^2}{r_0^3} (fqq - \eta)$$

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = m' k^2 \left(\frac{z' - z}{\rho^3} - \frac{z'}{r'^3} \right) + (1 + m) \frac{k^2}{r_0^3} (fqz - \zeta).$$

§3.

Aus den Gleichungen (3) erhält man durch die mechanische Quadratur die Größen ξ , η , ζ . Zu diesem Ende mögen zunächst die hierzu nötigen Formeln entwickelt werden.

Die Auswertung eines bestimmten Integrals einer Funktion (als Differentialquotient betrachtet) durch gegebene Funktionswerte wird allgemein als »mechanische Quadratur« bezeichnet. Für den vorliegenden Zweck werden die Funktionswerte in gleichen Intervallen der unabhängigen Veränderlichen berechnet, vorausgesetzt; zur Ableitung der nötigen Formeln wird die zu integrierende Funktion durch eine ganze Funktion (d. i. arithmetische Reihe höherer Ordnung) ersetzt. Je höher der Grad derselben ist, desto genauer wird der Wert des Integrals erhalten.

I. Es sei $f(x)$ eine stetige Funktion von x . In der Reihe der Werte

$$f(a), f(a+w), f(a+2w), \dots f(a+nw), \dots$$

läßt sich jede der drei Zahlen $f(a + \overline{n-1} \cdot w)$, $f(a + nw)$, $f(a + \overline{n+1} \cdot w)$ genau darstellen durch die Formel

$$f(x) = \alpha + \beta \frac{v}{w} + \gamma \left(\frac{v}{w}\right)^2,$$

indem man $x = a + nw + v$ setzt.

Denn setzt man $v = -w, 0, +w$, so wird

$$f(a + \overline{n-1} \cdot w) = \alpha - \beta + \gamma$$

$$f(a + nw) = \alpha$$

$$f(a + \overline{n+1} \cdot w) = \alpha + \beta + \gamma,$$

daraus folgt

$$\alpha = f(a + nw)$$

$$2\beta = f(a + nw) - f(a + \overline{n-1} \cdot w) + f(a + \overline{n+1} \cdot w) - f(a + nw)$$

$$2\gamma = f(a + \overline{n+1} \cdot w) - f(a + nw) - (f(a + nw) + f(a + \overline{n-1} \cdot w)).$$

Bequemer werden die Ausdrücke, wenn man die Differenzen der Funktionswerte einführt. Setzt man

$$f(a + \overline{n+1} \cdot w) - f(a + nw) = f'(a + \overline{n + \frac{1}{2}} \cdot w)$$

$$f'(a + \overline{n + \frac{1}{2}} \cdot w) - f'(a + \overline{n - \frac{1}{2}} \cdot w) = f''(a + nw) \text{ usw.},$$

so wird

$$2\beta = f'(a + \overline{n - \frac{1}{2}} \cdot w) + f'(a + \overline{n + \frac{1}{2}} \cdot w)$$

$$2\gamma = f''(a + nw).$$

Es ist daher für $x = a + nw + v$

$$f(x) = f(a + nw) + \frac{1}{2} (f'(a + \overline{n - \frac{1}{2}} \cdot w) + f'(a + \overline{n + \frac{1}{2}} \cdot w)) \frac{v}{w} + \frac{1}{2} f''(a + nw) \left(\frac{v}{w}\right)^2,$$

welche Formel für $v = -w, 0$ und $+w$ vollkommen richtig ist.

Allein auch für jeden, zwischen $a + \overline{n - \frac{1}{2}} \cdot w$ und $a + \overline{n + \frac{1}{2}} \cdot w$ liegenden Wert von x läßt sich $f(x)$ durch

diese Formel mit großer Genauigkeit darstellen, wenn die Werte $f(a)$, $f(a+w)$, . . . $f(a+nw)$ näherungsweise als Glieder einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung betrachtet werden können.

II. Es sei nun das Integral $\int f(x) dx$ zwischen den Grenzen $a + \frac{1}{2}w$ und $a + n + \frac{1}{2} \cdot w$ zu finden.

Es ist das unbestimmte Integral

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \left(\alpha + \beta \frac{v}{w} + \gamma \left(\frac{v}{w} \right)^2 \right) dv \\ &= w \left(\alpha \frac{v}{w} + \frac{1}{2} \beta \left(\frac{v}{w} \right)^2 + \frac{1}{3} \gamma \left(\frac{v}{w} \right)^3 \right), \end{aligned}$$

also innerhalb der Grenzen $\frac{v}{w} = -\frac{1}{2}$ bis $\frac{v}{w} = +\frac{1}{2}$, d. h. von $x = a + n - \frac{1}{2} \cdot w$ bis $x = a + n + \frac{1}{2} \cdot w$

$$\begin{aligned} \int_{a + n - \frac{1}{2} \cdot w}^{a + n + \frac{1}{2} \cdot w} f(x) dx &= w \left(\alpha + \frac{1}{2} \gamma \right) \\ &= w \left(f(a + nw) + \frac{1}{24} f''(a + nw) \right). \end{aligned}$$

Setzt man in dieser Gleichung $n = 1, 2, 3, \dots, n$, und addiert die erhaltenen Gleichungen, so wird

$$\begin{aligned} \int_{a + \frac{1}{2}w}^{a + n + \frac{1}{2} \cdot w} f(x) dx &= w \{ f(a+w) + f(a+2w) + \dots + f(a+nw) \\ &+ \frac{1}{24} (f''(a+w) + f''(a+2w) + \dots + f''(a+nw)) \}. \end{aligned}$$

Führt man die Summenreihen ein und bezeichnet die Glieder der ersten Summenreihe, von welcher

$$f(a), f(a+w), \dots$$

die Differenzen sind, mit $'f$, die Glieder der zweiten Summenreihe mit $''f$, . . . , so ist konsequent mit der früheren Bezeichnung

$$'f(a + n + \frac{1}{2} \cdot w) - 'f(a + n - \frac{1}{2} \cdot w) = f(a + nw).$$

Setzt man in dieser Gleichung $n = 1, 2, \dots, n$ und addiert die erhaltenen Gleichungen, so wird

$$f'(a + \overline{n + \frac{1}{2} \cdot w}) - f'(a + \frac{1}{2} \cdot w) = f(a + w) \\ + f(a + 2w) + \dots + f(a + nw);$$

ebenso ist

$$f''(a + \overline{n + \frac{1}{2} \cdot w}) - f''(a + \frac{1}{2} \cdot w) = f''(a + w) \\ + f''(a + 2w) + \dots + f''(a + nw).$$

Es ist daher

$$(1) \int_{a + \frac{1}{2}w}^{a + \overline{n + \frac{1}{2} \cdot w}} f(x) dx = w (f'(a + \overline{n + \frac{1}{2} \cdot w}) + \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} f'(a + \overline{n + \frac{1}{2} \cdot w}) \\ - f'(a + \frac{1}{2}w) - \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} f'(a + \frac{1}{2}w)).$$

Das Anfangsglied einer summierten Reihe ist willkürlich; betrachtet man $f'(a + \frac{1}{2}w)$ als Anfangsglied der ersten Summenreihe, so ist es am bequemsten, dasselbe so zu bestimmen, daß

$$f'(a + \frac{1}{2}w) + \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} f'(a + \frac{1}{2}w) = 0$$

wird, also

$$f'(a + \frac{1}{2}w) = -\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} f'(a + \frac{1}{2}w)$$

wird; in diesem Falle erhält man

$$(2) \int_{a + \frac{1}{2}w}^{a + \overline{n + \frac{1}{2} \cdot w}} f(x) dx = w (f'(a + \overline{n + \frac{1}{2} \cdot w}) + \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} f'(a + \overline{n + \frac{1}{2} \cdot w})).$$

III. Bezeichnet man den Wert des gefundenen Integrals mit $F(a + \overline{n + \frac{1}{2} \cdot w})$, so werden aus der Reihe der Funktionswerte

$$\dots f(a - w), f(a), f(a + w), f(a + 2w), \dots f(a + nw), \dots$$

und den zugehörigen Differenzen nach der Formel (2) die Integrale

$$\dots F(a - \frac{1}{2}w), F(a + \frac{1}{2}w), F(a + \frac{3}{2}w), \dots F(a + \overline{n + \frac{1}{2} \cdot w}) \dots$$

bekannt. Aus diesen Werten erhält man wieder

$$\int_a^{a + \overline{n + 1 \cdot w}} f(x) dx^2 = \int_a^{a + \overline{n + 1 \cdot w}} F(x) dx.$$

Nach Gleichung (1) gibt $w'f(a + \overline{n + \frac{1}{2}} \cdot w)$ integriert:

$$w^2 ("f(a + \overline{n + 1} \cdot w + \frac{1}{2} f(a + \overline{n + 1} \cdot w) - "f(a) - \frac{1}{2} f(a));$$

$$\frac{w}{24} f''(a + \overline{n + \frac{1}{2}} \cdot w) \text{ gibt integriert: } \frac{w^2}{24} (f(a + \overline{n + 1} \cdot w) - f(a)),$$

also

$$(3) \int_a^{a + \overline{n + 1} \cdot w} f(x) dx^2 = w^2 ("f(a + \overline{n + 1} \cdot w) + \frac{1}{12} f(a + \overline{n + 1} \cdot w) - "f(a) - \frac{1}{12} f(a)).$$

Die Formeln (1) und (3) gelten auch, wenn n gebrochen ist, d. h. in dem Sinne, daß es gleichgültig ist, ob man sich aus den für ganze n erhaltenen Integralen den Wert des Integrals für ein gebrochenes n interpoliert oder die für letzteres n interpolierten Glieder der Summenreihen benutzt.

Subtrahiert man von dem Integral in (3) das Integral

$$\int_a^{a + \frac{1}{2} w} f(x) dx^2,$$

so erhält man

$$\int_a^{a + \overline{n + 1} \cdot w} f(x) dx^2 = w^2 ("f(a + \overline{n + 1} \cdot w) + \frac{1}{12} f(a + \overline{n + 1} \cdot w) - "f(a + \frac{1}{2} \cdot w) - \frac{1}{12} f(a + \frac{1}{2} \cdot w)).$$

Die Glieder $"f(a + \frac{1}{2} w)$, $f(a + \frac{1}{2} w)$ sind durch Interpolation zu bestimmen. Es ist für die Interpolation in die Mitte

$$\begin{aligned} "f(a + \frac{1}{2} w) &= "f(a) + \frac{1}{2} f'(a + \frac{1}{2} w) - \frac{1}{8} f''(a + w) + \frac{1}{16} f'''(a + \frac{3}{2} w) \\ f(a + \frac{1}{2} w) &= f(a) + \frac{1}{2} f'(a + \frac{1}{2} w) - \dots, f'(a + \frac{3}{2} w) \\ &= f'(a + \frac{1}{2} w) + \dots \end{aligned}$$

Für den Beginn der ersten Summenreihe wurde

$$'f(a + \frac{1}{2} w) = -\frac{1}{24} f''(a + \frac{1}{2} w)$$

gesetzt. Führt man diese Werte ein, so erhält man

$$\int_{a+\frac{1}{2}w}^{a+\overline{n+1}\cdot w} f(x) dx = w^2 \left(f(a+\overline{n+1}\cdot w) + \frac{1}{12} f(a+\overline{n+1}\cdot w) - f(a) + \frac{1}{24} f(a+w) \right).$$

Bestimmt man das willkürliche Anfangsglied der zweiten Summenreihe dergestalt, daß

$-f(a) + \frac{1}{24} f(a+w) = 0$, also $f(a) = \frac{1}{24} f(a+w)$ ist; so wird

$$(4) \int_{a+\frac{1}{2}w}^{a+\overline{n+1}\cdot w} f(x) dx^2 = w^2 \left(f(a+\overline{n+1}\cdot w) + \frac{1}{12} f(a+\overline{n+1}\cdot w) \right).$$

Das Hauptglied der Formel (4), nämlich

$$w^2 f(a + \overline{n+1}\cdot w),$$

ist aus den Werten der ursprünglichen Reihe $f(a)$, $f(a+w)$, \dots , $f(a+nw)$ bekannt; dieses Glied ist bereits ein Näherungswert des zweiten Integrals. Aus dem Gange der ursprünglichen Reihe bis zum Gliede $f(a+nw)$ läßt sich auch ein Schluß auf $f(a+\overline{n+1}\cdot w)$ machen, also das Integral, (wenn $f(a+\overline{n+1}\cdot w)$ nicht mehr gegeben ist) mit großer Genauigkeit erhalten, da ein Fehler in der Annahme des letzteren Gliedes durch den Faktor $\frac{1}{12}$ noch sehr vermindert wird.¹⁴⁾

39.

Um nun die Störungen ξ , η , ζ zu erhalten, setze man den Anfang derselben auf den Oskulationspunkt und bezeichne diesen mit $a + \frac{1}{2}w$. Man rechne nun nach den Gleichungen (3) des Art. 37 für die Zeiten a und $a+w$ die Werte von $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, \dots , indem man in den rechten Teilen dieser Gleichungen $\xi = \eta = \zeta = 0$ setzt. Bezeichnet man $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ mit $f(a+nw)$, so erhält man dadurch $f(a)$, $f(a+w)$ und damit $f'(a + \frac{1}{2}w)$. Nun erhält man Werte für $f'(a + \frac{1}{2}w)$,

" $f(a)$, und mit diesen kann man durch Fortsetzung der Summenreihen die Werte von ξ für $t = a$ und $t = a + w$ erhalten.

Genau auf demselben Wege erhält man für die Zeiten $t = a$ und $t = a + w$ genäherte Werte von η und ζ . Nun berechne man mit den genäherten Werten von ξ, η, ζ neuerdings ihre zweiten Differentialquotienten nach den Formeln (3) des Art. 37, wodurch man dann genauere Werte für ξ, η, ζ erhält. Die Rechnung wird so oft wiederholt, bis man keine verschiedenen Werte erhält. Die Fortsetzung für die weiteren Argumente hat nach dem obigen keine Schwierigkeit.

Beispiel. Für den Planeten Asia sind die Störungen, welche derselbe von 1868 Januar 22 an durch den Planeten Jupiter erleidet, zu bestimmen.

Es werde $w = 20$ Tage, $m' = \frac{1}{1047.88}$ und $m = 0$ gesetzt.

Für die Rechnung ist es bequemer, gleich $w^2 f(a + nw)$ zu berechnen. Es ist in Einheiten der siebenten Dezimale $\log(w^2 m' k^2) = 3.05291 = \log m_0'$.

Mit den zur Zeit 1868 Jan. 22 oskulierenden Elementen des Planeten Asia erhält man

1868	Arg.	x_0	y_0	z_0	$\log r_0$
Jan. 12	a	- 2.5620	+ 1.0545	- 0.2063	0.4438
Febr. 1	$a + w$	2.6077	0.8693	0.1902	0.4402
- 21	$a + 2w$	2.6387	0.6791	0.1731	0.4362
März 12	$a + 3w$	- 2.6543	+ 0.4850	- 0.1549	0.4318.

Für den Planeten Jupiter hat man für dieselben Zeiten

x'	y'	z'	$- m_0' \frac{x'}{r'^3}$	$- m_0' \frac{y'}{r'^3}$	$- m_0' \frac{z'}{r'^3}$
+ 4.8100	- 1.2759	- 0.1041	- 44.06	+ 11.69	+ 0.95
4.8448	1.1222	0.1054	44.44	10.30	0.97
4.8748	0.9673	0.1067	44.83	8.89	0.98
+ 4.9001	- 0.8116	- 0.1078	- 45.14	+ 7.48	+ 0.99.

Damit erhält man, indem man für Jan. 12 und Febr. 1 zunächst $\xi, \eta, \zeta = 0$ setzt, folgende genäherte Werte:

Arg.	$\log \varrho$	$w^2 \frac{d^2 \xi}{dt^2}$	$w^2 \frac{d^2 \eta}{dt^2}$	$w^2 \frac{d^2 \zeta}{dt^2}$
a	0.8883	- 26.04	+ 5.99	+ 1.20
$a + w$	0.8873	- 26.10	+ 5.40	+ 1.18,

aus welchen Werten durch Bildung der Summen und Differenzen nach (4) des Art. 38 erhalten werden

Arg.	ξ	η	ζ
a	- 3.3	+ 0.7	+ 0.2
$a + w$	- 3.3	+ 0.8	+ 0.2.

Mit diesen Werten rechne man neuerdings die Ausdrücke $w^2 \frac{d^2 \xi}{dt^2} \dots$, wodurch man die verbesserten Werte

Arg.	$w^2 \frac{d^2 \xi}{dt^2}$	$w^2 \frac{d^2 \eta}{dt^2}$	$w^2 \frac{d^2 \zeta}{dt^2}$
a	- 26.07	+ 6.00	+ 1.21
$a + w$	- 26.13	+ 5.41	+ 1.19

erhält, welche von den vorigen beinahe nicht verschieden sind. Aus diesen konstruiert man sich folgende Tafel

Arg.	" f	' f	f	f'
		für ξ		
a	- 1.09		- 26.07	
		0.00		- 0.06
$a + w$	- 1.09		- 26.13	
		- 26.13		
$a + 2w$	- 27.22			
		für η		
a	+ 0.25		+ 6.00	
		+ 0.02		- 0.59
$a + w$	0.27		+ 5.41	
		+ 5.43		
$a + 2w$	+ 5.70			

Arg.	"f	'f für ξ	f	f'
a	+ 0.05	0.00	+ 1.21	- 0.02
a + w	+ 0.05	+ 1.19		
a + 2w	+ 1.24			

Aus diesen Angaben ersieht man unmittelbar, daß $f(a + 2w)$ für ξ , η , ζ bzw. von -26.2 , $+4.8$, $+1.2$ (indem man die ersten Differenzen anbringt) nicht sehr verschieden sein werden, woraus durch Anwendung der Formel (4) des Art. 38 für $a + 2w$ folgt

$$\xi = -29.4, \quad \eta = +6.1, \quad \zeta = +1.3.$$

Damit erhält man

$$\log \varrho = 0.8860, \quad w^2 \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -26.52, \quad w^2 \frac{d^2 \eta}{dt^2} = +4.89,$$

$$w^2 \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = +1.11,$$

welche Werte von den obigen so wenig verschieden sind, daß eine Wiederholung der Rechnung überflüssig ist. Durch Fortsetzung der ersten und zweiten Summenreihe erhält man

Arg.	"f	'f für ξ	f	f'
a + 2w	- 27.22	- 52.65	- 26.52	- 0.39
a + 3w	- 79.87			
		für η		
a + 2w	+ 5.70	+ 10.32	+ 4.89	- 0.52
a + 3w	+ 16.02			
		für ζ		
a + 2w	+ 1.24	+ 2.30	+ 1.11	- 0.08
a + 3w	+ 3.54			

Man sieht nun, daß $f(a + 3w)$ für ξ, η, ζ bzw. von

$$-27.2, \quad +4.4, \quad +1.0$$

nicht sehr verschieden sein kann: denn aus dem Gange der Differenzen f' ersieht man, daß $f(a + 3w) - f(a + 2w)$ für ξ, η, ζ ungefähr bzw.

$$-0.7, \quad -0.5, \quad -0.1$$

sein dürfte. Damit erhält man für $a + 3w$

$$\xi = -82.2, \quad \eta = +16.4, \quad \zeta = +3.6,$$

mit welchen Werten

$$\log \varrho = 0.8845, \quad w^2 \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -27.18, \quad w^2 \frac{d^2 \eta}{dt^2} = 4.40,$$

$$w^2 \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = +1.00$$

erhalten wird. Auf diese Art wird die Rechnung fortgesetzt.

Nach denselben Regeln werden die Störungen von $a + \frac{1}{2}w$ an zurück für die Argumente

$$a, \quad a - w, \quad a - 2w, \dots$$

bestimmt.

40.

Berücksichtigt man nur die Störungen erster Ordnung, so kann man

$$q = \frac{x_0}{r_0^2} \xi + \frac{y_0}{r_0^2} \eta + \frac{z_0}{r_0^2} \zeta, \quad f = 3$$

und

$$\frac{x' - x}{\varrho^3} = \frac{x' - x_0}{\varrho_0^3}, \dots$$

setzen.

Allein die Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung ist mit nicht viel mehr Arbeit verbunden, da man in $x_0 + \frac{1}{2}\xi, \dots, x' - x, \dots$ und ϱ nur die genäherten Werte von ξ, η, ζ einzuführen hat. Den genauen Wert von $\log f$ erhält man aus der Tafel XXVI von Bauschinger.

Bei der Berechnung der speziellen Störungen nach der angegebenen Methode wurde die Voraussetzung gemacht, daß für den Anfang der Störungen die oskulierenden Elemente bekannt sind. Allein diese Elemente setzen die Kenntnis der Störungen voraus; man kann daher die oskulierenden Elemente und die zugehörigen Störungen nur durch abwechselnd wiederholte Verbesserungen bestimmen.

Man betrachtet die nach den vorigen Abschnitten aus den Beobachtungen erhaltenen Elemente als oskulierend für eine gewisse Zeit T , am besten für die Mitte des Zeitraumes, den die Beobachtungen, aus welchen die Elemente erhalten wurden, umfassen.

Mit diesen Elementen rechne man für die Beobachtungen die Störungen der Koordinaten und aus diesen die Störungen des geozentrischen Ortes (Länge und Breite). Man findet die Störung des geozentrischen Ortes, indem man denselben zuerst mit den Koordinaten x_0, y_0, z_0 und dann mit den Koordinaten $x = x_0 + \xi, y = y_0 + \eta, z = z_0 + \zeta$ rechnet; der Unterschied der beiden Orte ist die Störung des geozentrischen Ortes.

Nun befreie man die Beobachtungen von den Störungen und rechne aus diesen von den Störungen befreiten Orten neue Elemente. Mit diesen wiederholt man die Störungsrechnungen und die Berechnung neuer Elemente so oft, bis kein Unterschied stattfindet. In der Regel genügt eine Wiederholung der Berechnung der Störungen und der oskulierenden Elemente.

Dritter Teil.
Geschichte der Planetentheorien.

Einleitung.

42.

Der Unterschied zwischen Fixsternen und Planeten war schon in frühester Zeit bekannt: Fixsterne nannte man diejenigen Himmelskörper, welche ihre gegenseitige Stellung am Himmel nicht verändern, während man Planeten, d. i. irrende Sterne, diejenige nannte, welche ihre Stellung am Himmel verändern. Im Altertum zählte man sieben Planeten: Sonne, Mond, Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn. Durch die fortgesetzte Bestimmung der Orte eines Planeten auf der Himmelskugel kann man ein Bild seines Laufes erhalten. Die Beobachtungen lehren, daß sowohl dieser Lauf als auch die einzelnen Vorgänge desselben höchst verwickelter Natur sind.

Man hatte bereits im Altertum erkannt, daß die Unregelmäßigkeiten im Planetenlauf von zweierlei Natur sind, welche man daher mit den Namen der ersten und zweiten Ungleichheit bezeichnete. Der erste Versuch einer Erklärung dieser Erscheinungen geschah auf Grundlage der Ideen der griechischen Naturphilosophie. Nach diesen galt die Kugel als der vollkommenste Körper, die Kreislinie als die vollkommenste Linie. Man dachte sich daher die Welt als eine Kugel, in deren Mittelpunkte sich der Mittelpunkt

der ruhenden Erde befindet, und suchte die Bewegung der Planeten durch die Zusammensetzung gleichförmiger Bewegungen in Kreisen darzustellen, ohne daß man sich um die physischen Ursachen derselben kümmerte, höchstens an die Stelle von Kräften die festen Sphären oder Firmamente setzte.

Um in Kürze das Wesen dieser beiden Ungleichheiten zu bezeichnen, mag hier nur an die elliptische Bewegung der Planeten um die Sonne erinnert werden. Die Unterschiede, welche dadurch entstehen, daß die Bewegung der Planeten nicht in Kreisen, sondern in Ellipsen geschieht, bildeten die erste Ungleichheit. Die zweite Ungleichheit hat darin ihren Grund, daß wir die Beobachtungen der Gestirne auf der Erde, welche sich selbst um die Sonne bewegt, anstellen. Alle die jetzt als scheinbar erkannten Ortsveränderungen der Planeten, welche durch die jährliche Bewegung der Erde entstehen und welche sich hauptsächlich in den Stillständen und rückläufigen Bewegungen äußern, bildeten die zweite Ungleichheit. Die erste Ungleichheit äußert sich wieder in den Ungleichmäßigkeiten der zweiten Ungleichheit; z. B. in der Verschiedenheit der Zeiten zwischen den Konjunktionen und Oppositionen, Größe des Bogens der rückläufigen Bewegung, usw.

Unvermischt mit der zweiten Ungleichheit zeigt sich die erste in der Bewegung der Sonne und des Mondes um die Erde, bei letzterem hatte jedoch bereits Ptolemäus (wegen der bedeutenden Störungen durch die Sonne) eine dritte Ungleichheit, die Evektion, hinzugefügt.

Secundo
in ep. 4
cart.

Erster Abschnitt.
 Ältere Theorien.

43.

Die Notwendigkeit einer Erklärung und Darstellung der Planetenbewegung wurde bereits von Plato betont. Sein Schüler Eudoxus von Cnidus (geb. 408, gest. um 355 v. Chr. *) löste diese Aufgabe, soweit sie sich auf die zweite Ungleichheit bezog, durch die homozentrischen Sphären. Jeder Himmelskörper ist in dem Äquator einer Sphäre, welche um ihre Pole rotiert, befestigt; die Pole dieser Sphäre werden von einer zweiten, ebenfalls um ihre Pole rotierenden Sphäre getragen, usw. Durch passende Wahl der Stellung der Pole und der Rotationsgeschwindigkeiten konnten die Bewegungen im großen und ganzen dargestellt werden, wenn für Sonne und Mond je drei Sphären, für jeden Planeten vier Sphären angenommen wurden. Durch diese Theorie wurden die Längen von Jupiter und Saturn und teilweise von Merkur ziemlich gut dargestellt; weniger war dies bei Venus, am schlechtesten bei Mars der Fall; für die Breiten genügte jedoch diese Theorie. Eine Reform derselben wurde von Callipus durch Vermehrung der Sphären der einzelnen Planeten bewerkstelligt.¹⁵⁾

Die erste auch für die Berechnung der Planetenörter anwendbare Theorie wurde von den Alexandrinern Astro-

*) Eudoxus, durch den Spartaner Argesilaus an den ägyptischen König Nectanabis empfohlen, wurde von Chonuphis (Priester von Heliopolis) in die Geheimnisse der ägyptischen Wissenschaften eingeweiht, wobei er auch Daten über die Zeitdauer der Bewegungsmomente (Dauer der Rückläufe usw.) erhielt. Nach den Zeugnissen der Alten stand Eudoxus in dem Rufe eines bedeutenden Geometers, dessen Arbeiten zum großen Teile bei der Zusammenstellung der Elemente durch Euklid aufgenommen wurden.

nomen, deren berühmteste Vertreter Hipparch (um 130 v. Chr.) und Claudius Ptolemäus (um 150 n. Chr.) waren, aufgestellt. In des letzteren *Almagest*, einer Sammlung mathematischer und astronomischer Schriften, ist diese Theorie streng geometrisch durchgeführt.

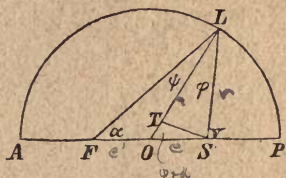
Die erwähnten Astronomen bedienten sich zur Darstellung des Planetenlaufes zweier Hilfsmittel: des exzentrischen Kreises für die erste Ungleichheit, des Epizykels für die zweite Ungleichheit. Es soll daher hier die Theorie dieser beiden Hilfsmittel gegeben werden.

I. Exzentrischer Kreis.

Es sei (Fig. 8) O der Mittelpunkt des exzentrischen Kreises, a dessen Radius. Der Punkt S im Inneren des exzentrischen Kreises sei der Mittelpunkt der Welt, in dem durch die beiden Punkte S und O bestimmten Durchmesser AP (der Apsidenlinie des exzentrischen Kreises) habe der Punkt F die Eigenschaft, daß von demselben aus die Bewegung eines Punktes L im Umfang des exzentrischen Kreises gleichförmig erscheint, so daß die vom Punkte F nach L gezogenen Geraden in gleichen Zeiten gleiche Winkel bilden. Diese Geraden schneiden daher einen aus dem Punkte F als Mittelpunkt mit dem Radius $= a$ beschriebenen Kreis in gleichen Bogen. Dieser Kreis heißt der Äquant, der Punkt F der Ausgleichspunkt oder das *punctum aequans*.

Der Winkel $PSL = v$, welchen die Gerade SL mit der Apsidenlinie bildet, heißt die wahre Anomalie, der Winkel $PFL = \alpha$, welchen die Gerade FL mit der Apsidenlinie bildet, heißt die mittlere Anomalie des exzentrischen

Fig. 8.



mean anomaly

Kreises; beide Winkel werden im Sinne der Bewegung von 0 bis 360° gezählt*).

Ist $OS = ae$, $FO = ae'$, also $FS = a(e + e')$, so heißt e die Exzentrizität des exzentrischen Kreises, e' die Exzentrizität des Äquanten, $e + e'$ die ganze Exzentrizität.

Der Winkel $OLS = \varphi$ heißt die optische Gleichung *Conomale*

» » $FLO = \psi$ » » physische » *Conomy*

Die Summe $\varphi + \psi = FLS = v - \alpha$ heißt die Mittelpunktsgleichung.

Sind die Elemente a , e , e' gegeben, so kann man für die mittlere Anomalie α den wahren Ort des Punktes L berechnen.

Denn aus dem Dreiecke FLO erhält man, aus

$$\sin \psi = e' \sin \alpha,$$

den Winkel ψ .

Aus dem Dreiecke OLS erhält man, da Winkel $SOL = \psi + \alpha$ ist, den Winkel φ und die Distanz $SL = r$.

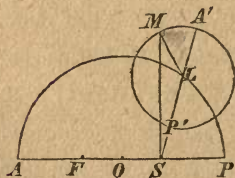
Aus φ , ψ und α folgt: $v = \alpha + \varphi + \psi$.

Umgekehrt kann man aus v und r die mittlere Anomalie α bestimmen.

II. Epizykel.

Um den Punkt L (Fig. 9) als Mittelpunkt beschreibt im ptolemäischen System der Planet M einen Kreis, dieser Kreis heißt der Epizykel. Die vom Punkte S nach dem Mittelpunkte L des Epizykels gezogene Gerade bestimmt den Durchmesser $A'P'$, d. i. die wahre Apsiden-

Fig. 9.



*) Ursprünglich, etwa bis Euler, zählte man die Anomalien vom Punkte A (Apogeum, Aphel), hier sollen die Anomalien immer vom Punkte P (Perigeum, Perihel) gezählt werden.

linie des Epizykels. Ein darauf senkrechter Durchmesser wird der mittlere Durchmesser genannt.

Der Punkt A' heißt das wahre Apogeum des Epizykels.

» » P' » » » Perigeum » »

In Verbindung mit dem Epizykel wird der exzentrische Kreis deferierender Kreis genannt.

Einem im Punkte S befindlichen Auge erscheint (bei ruhendem Punkte L) die Bewegung des Punktes M im oberen Teile des Epizykels rechtläufig, im unteren rückläufig.

44.

Um die Genauigkeit zu prüfen, mit welcher die erste Ungleichheit dargestellt werden kann, möge die Entwicklung der Größen r und v sowohl für die Ellipse als für den exzentrischen Kreis in Reihen nach Potenzen der Exzentrizität gegeben werden.

Hilfssätze.

1) Ist b klein, so folgt aus

$$\text{tang } \varphi = \frac{b \sin u}{1 - b \cos u}$$

$$\varphi = b \sin u + \frac{1}{2} b^2 \sin 2u + \dots$$

develop by eq. up to b^2 + replace all b by φ

2) Ist

$$\text{tang } x = a \text{ tang } y,$$

wo a nahe = 1 ist, so folgt

$$\text{tang } (x - y) = \frac{(a-1) \text{ tang } y}{1 + a \text{ tang } y^2} = \frac{2(a-1) \sin y \cos y}{2 \cos y^2 + 2a \sin y^2}$$

oder

$$\text{tang } (x - y) = \frac{\frac{a-1}{a+1} \sin 2y}{1 - \frac{a-1}{a+1} \cos 2y},$$

also

$$x = y + \frac{a-1}{a+1} \sin 2y + \frac{1}{2} \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^2 \sin 4y + \dots$$

3) Ist h sehr klein, so ist

$$\sin(x+h) = \sin x + \cos x \cdot h$$

$$\cos(x+h) = \cos x - \sin x \cdot h,$$

indem man $\cos h = 1$, $\sin h = h$ setzt.

I. Bezeichnet man für die Ellipse die mittlere Anomalie ebenfalls mit α , so ist nach Art. 2

$$E = \alpha + e \sin E,$$

also bis auf einen Fehler zweiter Potenz von e

$$E = \alpha + e \sin \alpha,$$

und bis auf einen Fehler dritter Potenz von e

$$E = \alpha + e \sin(\alpha + e \sin \alpha),$$

oder nach 3)

$$E = \alpha + e \sin \alpha + \frac{1}{2} e^2 \sin 2\alpha.$$

Aus $\tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$ folgt nach 2)

$$\frac{v}{2} = \frac{E}{2} + b \sin E + \frac{1}{2} b^2 \sin 2E + \dots,$$

wo $b = \frac{\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e}} = \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{e} = \frac{1}{2}e + \frac{1}{8}e^3 + \dots$ ist.

Substituiert man statt E den obigen Wert, so erhält man bis auf einen Fehler dritter Potenz von e

$$(1) \quad v = \alpha + 2e \sin \alpha + \frac{5}{4} e^2 \sin 2\alpha.$$

Aus $\frac{r}{a} = 1 - e \cos E$ folgt, wegen

$$\cos E = \cos(\alpha + e \sin \alpha) = \cos \alpha - e \sin \alpha^2,$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{r}{a} &= 1 - e \cos \alpha + e^2 \sin \alpha^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2} e^2 - e \cos \alpha - \frac{1}{2} e^2 \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

II. Für den exzentrischen Kreis ist

$$\sin \varphi = e \sin v, \quad \sin \psi = e' \sin \alpha.$$

Daraus folgt bis auf einen Fehler dritter Ordnung

$$\varphi = e \sin v, \quad \psi = e' \sin \alpha,$$

oder

$$\varphi = e \sin(\alpha + \varphi + \psi) = e \sin \alpha + e \cos \alpha \cdot (\varphi + \psi).$$

Setzt man im letzten Gliede $\varphi + \psi = (e + e') \sin \alpha$, so erhält man

$$(3) \quad \varphi + \psi = v - \alpha = (e + e') \sin \alpha + \frac{1}{2} e(e + e') \sin 2\alpha.$$

Projiziert man (Fig. 8) den Radiusvektor SL auf die Gerade OL , so erhält man

$$r \cos \varphi = a - ae \cos E.$$

Setzt man in $\frac{a}{\cos \varphi}$ für $\frac{1}{\cos \varphi} = 1 + \frac{1}{2} \varphi^2 = 1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \alpha$, in $\frac{ae \cos E}{\cos \varphi}$ für $\cos \varphi = 1$, $E = \alpha + e' \sin \alpha$, so erhält man

$$(4) \quad \frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{4}(e^2 + 2ee') - e \cos \alpha - \frac{1}{4}(e^2 + 2ee') \cos 2\alpha.$$

Vergleicht man den exzentrischen Kreis

$$e = 0.11332, \quad e' = 0.07232^*)$$

mit der Ellipse für $e = 0.093$, so erhält man als Fehler der wahren Anomalie:

$$\text{Ellipse} - \text{Kreis} = 1'.2 \sin \alpha + 1'.1 \sin 2\alpha,$$

also im Maximum ungefähr (2) Der Fehler von $(r:a)$ ist jedoch, wie aus den Formeln (2) und (3) unmittelbar erhellt, sehr bedeutend.

Für $e' = 0$ ist der exzentrische Kreis mit dem Äquanten identisch, und man hat, wenn $e = 2\varepsilon$ gesetzt wird,

$$v = \alpha + 2\varepsilon \sin \alpha + 2\varepsilon^2 \sin 2\alpha$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos \alpha - \varepsilon^2 \cos 2\alpha.$$

Für eine Ellipse mit der Exzentrizität $e = \varepsilon$ beträgt der Unterschied in v

*) Dieser Kreis ist bei Keplers Untersuchung der Marsbahn von großer Wichtigkeit; $e = 0.093$ ist der wahre Wert der Exzentrizität des Mars zu Keplers Zeiten.

$$\text{Ellipse} - \text{Exzenter} = -\frac{3}{4}e^2 \sin 2\alpha,$$

also für $\alpha = 45^\circ, 135^\circ, \dots$ ein Maximum.

Man nennt diesen Fall »Einfache Exzentrizität«.

Nach dieser Voraussetzung wurden die Orte der Sonne berechnet. Man hatte bereits damals die Unregelmäßigkeit der jährlichen Sonnenbewegung erkannt, z. B. um vom Frühlingspunkte zum Herbstpunkte zu gelangen, braucht nach Ptolemäus die Sonne 186 Tage 11 Stunden, während sie vom Herbstpunkt zum Frühlingspunkt 178 Tage 18 Stunden benötigt. Selbst in den Teilen dieser Bogen der Ekliptik wurden Unterschiede bemerkt. Wegen der Kleinheit der Exzentrizität $e = 0.0168$ beträgt der größte Fehler dieser Hypothese nur $43''$.

Eine von S parallel mit der Geraden OL (oder FL) gezogene Gerade bestimmt die mittlere Sonne*). Die Richtungen von O nach L und von S nach der mittleren Sonne sind daher einander parallel.

Für $e' = e$ »gleiche Teilung der Exzentrizität« wird:

$$v = \alpha + 2e \sin \alpha + e^2 \sin 2\alpha$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{3}{4}e^2 - e \cos \alpha - \frac{3}{4}e^2 \cos 2\alpha.$$

Diese Konstruktion wurde bei den Planeten, mit Ausnahme des Merkur, angewendet.

Der Unterschied Ellipse — Exzenter beträgt

$$\text{in } v: +\frac{1}{4}e^2 \sin 2\alpha$$

$$\text{» } \frac{r}{a}: -\frac{1}{4}e^2(1 - \cos 2\alpha).$$

Für $\alpha = 45^\circ, 135^\circ, \dots$ ist der Unterschied von v , und für $\alpha = 90^\circ, 270^\circ$ der von $\frac{r}{a}$ ein Maximum.

*) Diese mittlere Sonne ist nicht identisch mit der mittleren Sonne, welche uns zum Maß der Zeit dient; letztere bewegt sich im Äquator gleichförmig und geht mit der, durch die mittlere Anomalie bestimmten, ersten mittleren Sonne gleichzeitig durch den Frühlingspunkt.

Für den Planeten Mars ist $e = 0.093$; also die größten Unterschiede von v und $\frac{r}{a}$ bzw. $\pm 7'.5$ und -0.00432 .

45.

Bestimmung der Länge der Planeten.

Die Bewegung des Planeten in Länge ist zusammengesetzt aus der Bewegung des Mittelpunktes des Epizykels im exzentrischen Kreise und des Planeten im Umfange des Epizykels; die Regeln der Berechnung sind jedoch verschieden für die oberen Planeten (Mars, Jupiter, Saturn) und unteren Planeten (Venus und Merkur).

Bei der Längenbestimmung werden die Ebene des exzentrischen Kreises und des Epizykels in der Ekliptik liegend vorausgesetzt.¹⁶⁾

1) Bei den oberen Planeten hatte man beobachtet, daß im Mittel jeder Planet in seiner siderischen Umlaufszeit zu demselben Punkt des Tierkreises zurückkehrt; d. h., daß die erste Ungleichheit von dem Orte der Sonne unabhängig ist. Der Mittelpunkt L des Epizykels bewegt sich daher in der siderischen Umlaufszeit des Planeten im Umfange des exzentrischen Kreises von der gleichen Teilung der Exzentrizität derart, daß, für die Erde als Mittelpunkt der Welt im Punkte S , diese Bewegung vom Punkt (F) aus gleichförmig erscheint.

Die zweite Ungleichheit hängt von der Stellung des Planeten gegen die Sonne ab. Geht die Linie nach der mittleren Sonne durch den Planeten, so findet eine mittlere Konjunktion oder Opposition des Planeten mit der Sonne statt*). Zur Zeit der mittleren Konjunktion befindet

*) Ein Gestirn ist in Konjunktion oder Opposition mit der Sonne, wenn der Längenunterschied bzw. 0 oder 180° beträgt; die heliozentrische Länge des Gestirnes ist dann gleich der geozentrischen.

sich der Planet im wahren Apogeum, zur Zeit der mittleren Opposition im wahren Perigeum des Epizykels; es verschwindet daher die zweite Ungleichheit.

Die Bewegung des Planeten M im Epizykel geschieht nun derart, daß der Winkel $A'LM$ gleich ist dem Überschusse der (mittleren Sonnenbewegung in der Ekliptik über die (wahre) Bewegung des Punktes L für die seit der mittleren Konjunktion verfllossene Zeit.

Daraus folgt, indem man zu beiden Bewegungen die gemeinschaftliche Länge zur Zeit der mittleren Konjunktion addiert:

Länge der (mittleren Sonne — wahre Länge des Punktes $L =$ Winkel $A'LM$; d. i. die Gerade LM ist parallel zu der vom Punkte S nach der mittleren Sonne gezogenen Geraden.

Für die Berechnung des Ortes M sei die Lage der Apsidenlinie des exzentrischen Kreises, die Exzentrizität, das Verhältnis der Radien der beiden Kreise und die mittlere Länge des Punktes L gegeben.

Man bestimme die mittlere Anomalie = mittlere Länge — Länge des Perihels und aus dieser nach Art. 43 die wahre Anomalie und die Größe $SL = r$, wobei $OL = 1$ gesetzt wird.

In dem Dreiecke SLM rechne man nun aus SL , LM und dem eingeschlossenen Winkel die Distanz SM und den Winkel LSM ; dieser zur Länge des Punktes L hinzuaddiert, gibt die Länge des Planeten M .¹⁷⁾

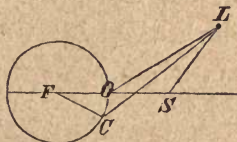
2) Bei den unteren Planeten hatte man beobachtet, daß sie im Mittel mit der Sonne zugleich zu demselben Punkt des Tierkreises zurückkehren und daß die zweite Ungleichheit von dem Orte der Sonne unabhängig ist.

Für die Venus gilt dieselbe Berechnungsmethode der Länge wie bei den oberen Planeten; jedoch mit dem Unterschiede, daß die Bewegung des Mittelpunktes des Epizykels identisch ist mit der Bewegung der mittleren Sonne, wogegen sich der Planet in der synodischen Umlaufszeit (= 583 Tage) im Epizykel gleichförmig herumbewegt.

3) Für den Planeten Merkur (derselbe bereitete, wegen der bedeutenden Exzentrizität = $\frac{1}{3}$, den alten Astronomen größere Schwierigkeiten) wurde eine besondere Theorie gegeben.

Um den Punkt F (Fig. 10) beschreibe man mit dem Radius ae einen Kreis, welcher also durch den Punkt O , welcher das *punctum aequans* ist, geht. Von O aus bewegt sich der Mittelpunkt C des deferierenden Kreises entgegengesetzt der Bewegung der Himmelskörper derart, daß der Winkel OFC gleich der mittleren Anomalie des Planeten ist. Die mittlere Länge des Mittelpunktes des Epizykels ist gleich der Länge der mittleren Sonne.

Fig. 10.



Beschreibt man aus C mit dem Radius des deferierenden Kreises einen Kreis, welcher die unter der Richtung der mittleren Anomalie gezogene Gerade OL im Punkte L schneidet, so ist L der Mittelpunkt des Epizykels. Dazu kommt noch die Bewegung des Planeten im Epizykel, welche in der synodischen Umlaufszeit (= 116 Tage) einen Umlauf beträgt.

Die Theorie des Planeten Merkur unterscheidet sich von der für die übrigen Planeten:

1) Durch die einfache Exzentrizität.

2) Der Mittelpunkt des deferierenden Kreises ist nicht fest, sondern bewegt sich auf einem Kreise, dessen Radius = ae und dessen Mittelpunkt das frühere *punctum aequans* ist.¹⁸⁾

Bestimmung der Breite der Planeten.

1) Für die oberen Planeten. Hinsichtlich der Breite dieser Planeten hat man folgende Erscheinungen beobachtet: Die Breiten sind sowohl nördlich als südlich, die nördlichen Breiten sind häufiger als die südlichen; die größten nördlichen Breiten sind untereinander verschieden; dasselbe gilt auch von den südlichen; letztere sind größer als erstere. Während eines siderischen Umlaufes verschwinden die Breiten zweimal.

Durch das Weltzentrum S sei eine auf die Apsidenlinie senkrechte Gerade gezogen — die Knotenlinie des exzentrischen Kreises; der Ebene desselben gebe man eine solche (feste) Neigung gegen die Ekliptik, daß der größere Teil des exzentrischen Kreises nördlich, der kleinere also südlich liegt. Liegt der Mittelpunkt des Epizykels in einem Knoten des exzentrischen Kreises, so fällt die Ebene des Epizykels mit der Ekliptik zusammen; die Breite des Planeten verschwindet. Während der Bewegung des Mittelpunktes des Epizykels vom aufsteigenden Knoten bis zum Apogäum A neigt sich dessen Ebene langsam, so daß das Apogäum des Epizykels sich nach Süden, daß Perigäum nach Norden wendet; dabei bleibt der mittlere Durchmesser parallel zur Ekliptik. Am größten ist diese Schwankung im höchsten Punkte des exzentrischen Kreises, d. i. im Punkte A . Von diesem Punkte bis zum absteigenden Knoten vermindert sich diese Schwankung nach demselben Gesetze. Bei der weiteren Bewegung des Mittelpunktes des Epizykels nähert sich dessen Apogäum nach Norden, also das Perigäum nach Süden.

2) Für die unteren Planeten wird die Breite durch eine veränderliche Neigung der Ebene des deferierenden

Kreises gegen die Ekliptik und durch Schwankungen der Ebene des Epizykels um dessen mittleren Durchmesser und dessen Apsidenlinie erklärt.

Zweiter Abschnitt.
Neuere Theorien.

a) Kopernikus.

47.

Die Planetentheorie des Ptolemäus hat sich beinahe vierzehn Jahrhunderte erhalten, dieselbe war die herrschende bei allen gebildeten Völkern. Die Geistesschätze der Griechen in der Astronomie wurden im Mittelalter hauptsächlich durch die Araber erhalten; in Deutschland geschah die Begründung der Astronomie im fünfzehnten Jahrhundert durch Peurbach und Regiomontanus, welche in der Wiederherstellung des bei den Griechen eingenommenen Standpunktes und des Verständnisses des *Almagestes* bestand.

Erst mit dem Ende des Mittelalters trat eine große Revolution der Sternkunde durch Nikolaus Kopernikus (geb. 1475, gest. 1543) ein. Kopernikus zeigte in seinem Werke *De revolutionibus orbium coelestium*, welches 1543 zu Nürnberg erschien, daß sich die Erscheinungen der Bewegungen der Gestirne viel einfacher erklären lassen, wenn man die Bewegung der Erde voraussetzt. Die Idee der Einheit und Einfachheit der Natur dürfte ihn besonders zu dieser Annahme geführt haben — weniger die Schriften der Alten, indem die daselbst (von Aristarch v. Samos, Nicetas, Philolaus u. a.) gegebenen Andeutungen über die Bewegung der Erde, weil damit nicht eine Erklärung der Erscheinungen der Bewegungen der Himmelskörper ver-

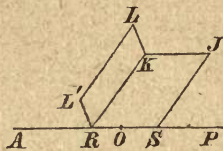
bunden wurde, ziemlich spurlos vorübergehen mußten. Zu diesem Zwecke gab Kopernikus der Erde drei Bewegungen: 1) Eine Achsendrehung, um die tägliche Umdrehung der Himmelskugel, 2) eine jährliche Bewegung der Erde mit einer schiefen Lage der Erdachse gegen die Ekliptik, um die jährliche Bewegung der Sonne und die Schiefe der Ekliptik, 3) eine langsame Bewegung der Pole der Erdachse um die Pole der Ekliptik, um die Erscheinung der Präzession der Nachtgleichen zu erklären.

Für die jährliche Bewegung der Erde um die Sonne setzte Kopernikus, übereinstimmend mit Ptolemäus, die einfache Exzentrizität voraus.

Für die Erklärung der ersten Ungleichheit der Planetenbewegung (die zweite Ungleichheit fiel infolge der jährlichen Bewegung der Erde weg) bediente sich Kopernikus der Epizykeln.

Es sei (Fig. 11) S der Mittelpunkt der Welt, als welcher von Kopernikus der Mittelpunkt der Erdbahn, d. i. der mittlere Sonnenort, angenommen wurde.

Fig. 11.



Die Gerade AP sei die Apsidenlinie. Um den Punkt S bewege sich in der Entfernung $SJ = a$ der Mittelpunkt J des größeren Epizykels vom Halbmesser $JK = \frac{3}{2}ae$, um den Punkt J bewege sich der Mittelpunkt K des kleineren Epizykels vom Halbmesser $KL = \frac{1}{2}ae$, und im Umfang des letzteren der Planet L derart, daß die Winkel der Geraden SJ , JK , KL mit der Apsidenlinie AP bzw.:

$$\alpha, 180^\circ, 2\alpha$$

sind, wo α die mittlere Anomalie bedeutet.

Zieht man die Gerade KR parallel zur Geraden JS und macht $SO = ae$, so ist $SR = \frac{3}{2}ae$ und $RO = \frac{1}{2}ae$;

d. h. die Bewegung ist dieselbe, wenn sich der Punkt K um den Punkt R und der Planet L um den Punkt K bewegt.

Zieht man die Gerade $RL' = \frac{1}{2}ae$ parallel mit der Geraden KL , so sind LL' , KR , JS einander parallel; d. h. man kann auch den Punkt L' um den Punkt R' und den Planeten L um den Punkt L' sich bewegen lassen.

Diese drei von Kopernikus unter den Namen 1) *Epicepicyclus*, 2) *Eccentrepicyclus*, 3) *Eccentri eccentricus* angegebenen Formen der Planetentheorie, geben also denselben Ort des Planeten. Dieselben wurden unmittelbar bei den Planeten, mit Ausnahme Merkurs, angewendet; letzterer erforderte wegen der großen Exzentrizität eine besondere Theorie.

Setzt man $SL = r$ und bezeichnet man den Winkel PSL mit v , so erhält man durch Projektion auf ein durch den Punkt S gelegtes rechtwinkliges Achsensystem, für welches die Gerade AP die x -Achse ist, die Gleichungen

$$\begin{aligned} r \cos v &= a \cos \alpha - \frac{3}{2}ae + \frac{1}{2}ae \cos 2\alpha \\ r \sin v &= a \sin \alpha + \frac{1}{2}ae \sin 2\alpha, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} r \cos(v - \alpha) &= a - ae \cos \alpha \\ r \sin(v - \alpha) &= 2ae \sin \alpha, \end{aligned}$$

und damit

$$\text{tang}(v - \alpha) = \frac{2e \sin \alpha}{1 - e \cos \alpha},$$

also bis auf Glieder zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} v &= \alpha + 2e \sin \alpha + e^2 \sin 2\alpha \\ \frac{r}{a} &= 1 + e^2 - e \cos \alpha - e^2 \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Hinsichtlich der wahren Anomalien ersetzen sich, bis auf Glieder zweiter Ordnung der Exzentrizität (einschließlich) die kopernikanische Theorie und der exzentrische Kreis mit gleicher Teilung der Exzentrizität. Vgl. Art. 44.

Die Breite der Planeten wird bei Kopernikus durch ähnliche Schwankungen wie bei Ptolemäus erklärt.

b) Tycho Brahe und Kepler

48.

Das kopernikanische System hatte anfänglich viele Gegner gefunden, wozu mancherlei Veranlassung war. Erstens war der unmittelbare Gewinn für die berechnende Astronomie gering; denn die Basis der kopernikanischen Planetentheorie waren größtenteils die alten Beobachtungen, auf welchen der Almagest des Ptolemäus beruhte, nur einige wenige Beobachtungen von Kopernikus selbst und drei Nürnberger Beobachtungen des Planeten Merkur von Bernhard Walther und Johann Schoner wurden noch verwendet. Die von Erasmus Reinhold nach dieser Theorie berechneten prutenischen Tafeln wichen zu Keplers Zeiten von dem beobachteten Orte um Grade ab, so daß sich die Richtigkeit der Theorie nicht prüfen ließ und das Ansehen des Almagest bei der Unduldsamkeit der religiösen Parteien dadurch fast gar nicht erschüttert wurde.

Der Einwurf, daß die Fixsterne keine jährlichen Parallaxen zeigen, konnte, unter Hinweisung auf die Kleinheit derselben, wegen der Ungenauigkeit der Beobachtungen der damaligen Zeit, noch leicht zurückgewiesen werden.

Außerdem machte das Verständnis des kopernikanischen Werkes den Zeitgenossen bedeutende Schwierigkeiten; denn früher hatte man vorausgesetzt, daß jede beobachtete Bewegung eines Körpers demselben auch wirklich zukomme, während Kopernikus die Stillstände und rückläufigen Bewegungen für Schein erklärte, entstanden durch die Bewegung der Erde. Man warf dem neuen Systeme vor, daß es die Begriffe von Ruhe und Bewegung verwirre. Von

diesem Vorwurfe wurde es erst durch Galilei durch die Einführung des Begriffes der relativen Bewegung gereinigt. Außerdem lieferte Galilei durch die vermittels seines Fernrohres erhaltenen Entdeckungen: der Mondberge, Sonnenflecken, Jupitertrabanten (ein Abbild der Planeten), Venusphasen und die Auflösung der Milchstraße in Sterne, Belege für das kopernikanische Weltsystem.

Das größte Verdienst für das kopernikanische System gebührt jedoch Kepler.

49.

Johannes Kepler, geb. 1571 zu Weil im Württembergischen, war berufen, der eigentliche Reformator der theoretischen Astronomie zu werden. Von Tübingen, wo ihn sein Lehrer Mästlin in das kopernikanische System einführte, wurde er nach vollendeten Studien den steirischen Ständen als Lehrer der Mathematik und Moral für das protestantische Gymnasium in Graz empfohlen. Unterstützt von einer fast divinatorischen Erfindungsgabe vereint mit einem eisernen Fleiße und einer unbegrenzten Vorliebe für alles Geheimnisvolle und Wunderbare, gelang es Kepler, die wahren Gesetze der Planetenbewegung zu entdecken. Dabei ist es höchst beachtenswert, daß Kepler dieselben hauptsächlich zum Zwecke der Begründung seiner kosmischen Ideen, welche in einer Vereinigung der pythagoräischen Vorstellungen mit den christlichen Ideen seiner Zeit bestanden, entdeckte. Dieser mystische Zug seines Geistes tritt am deutlichsten in seinem bereits 1596 erschienenen Erstlingswerke (*Prodromus . . .*) hervor.

Anfänglich suchte Kepler ein Gesetz zwischen den Entfernungen der Planeten von der Sonne, jedoch ohne Erfolg; nun versuchte er auf geometrischem Wege das Geheimnis

des Weltbaues zu ergründen. Das Krumme ist ein Bild Gottes, in der Kugel selbst ist durch den Mittelpunkt, die Oberfläche und die Gleichheit der Beschaffenheit zwischen Mittelpunkt und Oberfläche die Dreieinigkeit versinnlicht. Bei der Erschaffung der Welt wurde zuerst die alles umfassende Fixsternensphäre nach dem Vollkommensten in der Geometrie, dem Bilde der Kugel, geschaffen. Das Vollkommenste nach der Kugel sind die fünf regulären Körper. Diese hatten schon bei den Pythagoräern eine kosmologische Bedeutung. Es bedeutete nämlich ein Würfel die Erde, das Ikosaëder den Himmel, die Pyramide das Feuer, die beiden übrigen die Luft und das Wasser. Das Planetensystem ist daher nach der Idee der fünf regulären Körper gebildet. Dieser Grundgedanke wird nun auf folgende Art durchgeführt: Jedem regulären Körper läßt sich eine Kugel umschreiben und einschreiben. Die sechs Planetensphären bilden fünf Zwischenräume, zwischen welche man die fünf regulären Körper so einschalten kann, daß — die Sonne als gemeinsamer Mittelpunkt der Sphären und regulären Körper vorausgesetzt — jedem dieser Körper eine Sphäre um- und einbeschrieben ist.

Da jedoch die Bewegung der Planeten nicht in Kreisen geschieht, in deren Mittelpunkt sich die Sonne befindet, sondern in exzentrischen Bahnen, so gab Kepler den Sphären (ähnlich wie Peurbach) eine solche Dicke, als der Unterschied der größten und kleinsten Entfernung des Planeten von der Sonne beträgt.

Die Aufeinanderfolge ist derart: Saturn, Kubus, Jupiter, Tetraëder, Mars, Dodekaëder, Erde, Ikosaëder, Venus, Oktaëder, Merkur. Dabei ist die Saturnsphäre dem Würfel umschrieben, die Jupitersphäre dem Würfel einbeschrieben und dem Tetraëder umschrieben, usw.

Die Anordnung war nun so, daß z. B. die innere Oberfläche der Saturnsphäre dem Würfel einbeschrieben war, und ebenso bei den übrigen Planeten.

Setzt man den Halbmesser der umschriebenen Kugel = 1000, so ist der Halbmesser der einbeschriebenen Kugel im

Kubus	577
Tetraëder	333
Dodekaëder	795
Ikosaëder	795
Oktaëder	577.

Beschreibt man in das von den vier mittleren Seiten des Oktaëders gebildete Quadrat einen Kreis, so ist dessen Halbmesser = 707.

Für die aus der Theorie des Kopernikus folgenden Werte der Entfernungen der Planeten vom Mittelpunkte der Erdbahn ergibt sich:

$$\text{Setzt man } \left. \begin{array}{l} \text{Saturn} \\ \text{Jupiter} \\ \text{Mars} \\ \text{Erde} \\ \text{Venus} \end{array} \right\} \begin{array}{l} = 1000, \text{ so} \\ \text{ist die größte} \\ \text{Entfernung} \\ \text{von} \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{Jupiter} \\ \text{Mars} \\ \text{Erde} \\ \text{Venus} \\ \text{Merkur} \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} (635) \\ 333 \\ 757 \\ 794 \\ (723) \end{array} \right\} *).$$

Mit Ausnahme der Planeten Jupiter und Merkur sind die Abweichungen von den obigen Zahlen geringe; Kepler schob diese Unterschiede auf die mangelhafte Theorie des Kopernikus, namentlich auf die ungenauen Exzentrizitäten; er konnte das mit Recht tun: denn zu seiner Zeit betrug die Abweichung der prutenischen Tafel für den Mars 3° , für die Venus 5° , für Merkur sogar 10° oder 11° . Kepler

*) Aus den tychonischen Beobachtungen folgen die Zahlen: 608, 336, 737, 742, 654, welche von den neueren Angaben nicht viel abweichen.

hatte die sichere Überzeugung, daß seine Ideen des Weltbaues nach den regulären Körpern mit den richtig bestimmten Entfernungen und Exzentrizitäten übereinstimmen würden. Es handelte sich also um genauere Werte für diese Größen; allein für diese waren genauere Beobachtungen nötig als diejenigen waren, auf welche Kopernikus seine Theorie gegründet hatte. Zum Glücke für Keplers reformatorische Bestrebungen war gleichzeitig in der Beobachtungskunst ein riesiger Fortschritt gemacht worden durch den dänischen Astronomen Tycho Brahe.

50.

Tycho Brahe, geb. 1546, stammte aus einem alten dänischen Geschlechte. Schon in frühester Jugend sich mit Astronomie beschäftigend, erkannte er die Ungenauigkeit der Beobachtungen als die eigentliche Quelle der Fehler der astronomischen Tafeln, und faßte daher den Plan, auf Grundlage sorgfältiger Beobachtungen neue astronomische Tafeln zu rechnen. Die Mißachtung der Wissenschaften durch den dänischen Adel bewog ihn zu einer Reise nach Deutschland, wo er mit den meisten Astronomen seiner Zeit Bekanntschaft machte. Auf einer zweiten Reise hielt er sich längere Zeit beim Landgrafen Wilhelm IV. von Hessen auf, welcher ebenfalls durch Vereinfachung der astronomischen Instrumente eine größere Genauigkeit der Beobachtungen anstrebte. Nach seiner Rückkehr nach Dänemark ließ ihm der König Friedrich II., welcher durch den Landgrafen Wilhelm auf Tycho aufmerksam gemacht war, auf der Insel Hween ein mit allen Hilfsmitteln versehenes Observatorium »Uranienburg« errichten.

Mit Hilfe zahlreicher Schüler wurde in dem Zeitraume von 21 Jahren ein großes Fixsternverzeichnis angelegt, fort-

gesetzte Beobachtungen der Sonne, des Mondes, der Planeten und Kometen angestellt. Es wurden die Instrumentalfehler mit Hilfe der Beobachtungen bestimmt, und die Korrekturen der Beobachtungen ermittelt.

Nach dem Tode Friedrichs II. wurde Tycho durch die Intrigen des Ministers Walkendorf gezwungen, sein Vaterland zu verlassen. Er folgte nun einem Rufe des Kaisers Rudolf II. nach Prag, welches nun der Sitz der Astronomie wurde. Hier sollten vor allem aus den Beobachtungen neue astronomische Tafeln gerechnet werden, zu welcher Arbeit fast alle mathematischen Kräfte der damaligen Zeit aufgeboden wurden; auch Kepler, welcher durch sein Geheimnis des Weltbaues bereits die Aufmerksamkeit der astronomischen Welt auf sich gelenkt hatte, wurde hierzu von Tycho eingeladen. Kepler, ohnedies durch die Religionsverfolgung bedrängt, kam gegen Ende Januar 1600 nach Prag. Hier hatte Tycho mit Hilfe des Longomontanus bereits die Theorie der Sonne und des Mondes vollendet und machte sich eben an die Bearbeitung der Planeten, als er plötzlich (1601) starb.

Das System, nach welchem Tycho die Bewegungen der Planeten darstellen wollte, war ein Übergang vom ptolemäischen zum kopernikanischen. Tycho setzt die ruhende Erde als Weltzentrum voraus, läßt um dieselbe in einem exzentrischen Kreise mit einfacher Exzentrizität die Sonne bewegen und um diese in der ersten kopernikanischen Form (*Epicypicyclus*) die Planeten, wobei sogar mit Ausnahme des Planeten Mars dasselbe Verhältnis der Radien der Epicykeln angenommen wurde. Außerdem bezog man im tycho-nischen Systeme die Beobachtungen nicht auf den wahren Sonnenort, sondern auf den mittleren, d. i. den Mittelpunkt der Erdbahn.

Kepler, nach Tycho's Tode zum Leiter der kaiserlichen Sternwarte ernannt, hatte nun dessen astronomische Aufgaben übernommen. Da Longomontanus sich gerade mit den Arbeiten über den Planeten Mars beschäftigte, so begann Kepler seine Untersuchungen mit diesem Planeten. Man hatte für denselben bereits eine Theorie erdacht, welche die Längen in der Bahn auf ungefähr 12' darstellte, nur mit den Breiten ging es ziemlich schlecht.

Der Planet Mars ist ganz geeignet, für eine richtige Theorie die Grundlage zu liefern. Die verhältnismäßig kurze Umlaufszeit (nahezu zwei Jahre) gestattet bei ihm als oberem Planeten eine Verfolgung an allen Punkten seiner Bahn in einem Zeitraum von wenig Jahren. Die bedeutende Exzentrizität der Marsbahn $= \frac{1}{11}$ und die Nähe des Planeten zur Erde zur Zeit der Opposition bewirkt, daß die Unrichtigkeit einer falschen Annahme in der Figur der Bahn augenblicklich hervortreten mußte. Dem Kepler standen die zahlreichen Beobachtungen Tycho's zu Gebote. Diese umfaßten einen Zeitraum von 16 Jahren, waren auf die ganze Bahn gleichförmig verteilt und dabei von einer großen Genauigkeit, auf höchstens 2' unsicher. Für die späteren Zeiten bediente sich Kepler teils eigener, teils der ebenfalls vortrefflichen Beobachtungen des David Fabricius.

Die Bemühungen Keplers in betreff des Planeten Mars führten ihn schließlich zur Entdeckung seiner beiden ersten Gesetze, welche in dem Werke: »*Astronomia nova aītiολογητος, seu Physica coelestis tradita commentariis de motibus stellae Martis, ex observationibus G. V. Tychonis Brahe . . . 1609*« enthalten sind.

Die Schwierigkeiten dieser Untersuchungen bestanden darin, daß zwei Aufgaben: die Auffindung der Bewegungs-

gesetze und die Bestimmung der Elemente des Mars zugleich gelöst werden mußten. Für jede Annahme der Bewegungsgesetze mußten die Elemente meist neu bestimmt werden; für die Richtigkeit der Annahme und der daraus gefolgerten Elemente diente die Darstellung solcher Beobachtungen, aus welchen die Elemente nicht gerechnet waren, als Kontrolle. Dabei mußte die Übereinstimmung von Beobachtung und Rechnung so weit geführt werden, daß der Unterschied zwischen Beobachtung und Rechnung den größten zulässigen Beobachtungsfehler nicht überstieg.

52.

Kepler folgte bei seinen Untersuchungen anfangs noch den Ideen des Ptolemäus, Kopernikus und Tycho. Zunächst suchte er die Lösung der Frage der ersten Ungleichheit, die Bestimmung der Elemente der Marsbahn; für die Bewegung wurden die früheren Gesetze vorausgesetzt.

Bei der Bestimmung der Elemente können die auf die Lage der Bahn bezüglichen getrennt von den übrigen bestimmt werden; Kepler begann daher seine Untersuchungen mit der Bestimmung der Lage der Marsbahn, d. i. mit der Bestimmung der Knoten und der Neigung.

I. Ist der Planet zur Zeit der Opposition im Knoten, so ist dessen Breite gleich Null und die beobachtete geozentrische Länge = der heliozentrischen Länge = der Länge des Knotens. Kepler findet für die Länge des aufsteigenden Knotens $\Omega = 46\frac{1}{3}^\circ$. Den absteigenden Knoten findet Kepler auf der entgegengesetzten Seite der Sonne, also um 180° verschieden.

II. Die Neigung bestimmt Kepler direkt aus solchen Beobachtungen des Planeten Mars, für welche sich die Erde in der Knotenlinie der Marsbahn befand. Ist σ nämlich

der Unterschied der geozentrischen Länge des Mars und des Knotens, β die beobachtete Breite, so wird die Neigung i erhalten aus:

$$\operatorname{tang} i = \frac{\operatorname{tang} \beta}{\sin \sigma}.$$

Ist zugleich $\sigma = 90^\circ$, d. h. die Sonne mit dem Planeten in Quadratur, so ist $i = \beta$, d. h. die beobachtete Breite = der Neigung der Bahn. Auch eine Beobachtung dieser Art fand Kepler in dem tychonischen Nachlasse. Kepler findet auf diese Art, und durch zwei andere Methoden bestätigend, für die Neigung den Wert

$$i = 1^\circ 50'.$$

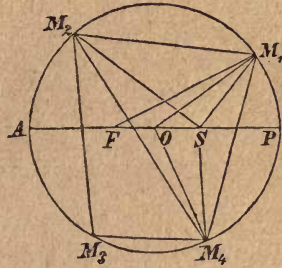
Durch die Vergleichung einer größeren Anzahl von Beobachtungen erhält Kepler das wichtige Resultat: 1) Die Knotenlinie der Marsbahn geht nicht durch den mittleren Sonnenort (durch den wahren bestätigt er am Schlusse) und hat eine konstante Lage; 2) die Neigung ist unveränderlich. Es gibt daher keine Schwankungen der exzentrischen Bahnen.

III. Kepler reduzierte nun die auf den Mittelpunkt der Erdbahn bezogenen Längen des Planeten Mars auf den wahren Ort der Sonne; denn letztere ist das Zentrum der Welt, nicht der leere Mittelpunkt der Erdbahn.

Von zwölf Oppositionen des Planeten Mars (1580 bis 1604) wählte Kepler vier aus (die von den Jahren 1587, 1591, 1593, 1595); für diese vier Orte waren gegeben: a) Die vier wahren Längen in der Bahn. b) Die vier mittleren Längen in der Bahn, deren Differenzen man, da die mittlere Bewegung durch die Umlaufszeit bekannt war, genau kannte. Infolge der Ungenauigkeit der ersten mittleren Länge konnte man dieselben mit einem konstanten Fehler voraussetzen. c) Die beobachteten (geozentrischen) Breiten.

Es seien (Fig. 12) M_1, M_2, M_3, M_4 die vier Orte des Planeten in der Bahn, S sei der Mittelpunkt der Sonne, ASP die Apsidenlinie. Kepler suchte nun eine Bahn unter der Voraussetzung, daß erstens die vier Punkte $M_1 \dots M_4$ in einem Kreise, dessen Mittelpunkt O ist, liegen, zweitens die Bewegung des Planeten von dem Punkte F aus gleichförmig erscheint, wobei die Punkte F, O, S in der Apsidenlinie liegen. Die letztere Annahme wird dadurch gefordert, daß die Bewegung am schnellsten ist, wenn das Gestirn der Sonne am nächsten ist.

Fig. 12.



Die Auflösung geschieht indirekt. Es werde die Lage der Apsidenlinie und die erste mittlere Anomalie, also die Winkel

$$PSM_1, PFM_1$$

als bekannt vorausgesetzt*).

Man setze $FS = c$, und rechne aus den Dreiecken $FSM_1, FSM_2, FSM_3, FSM_4$, in welchem die Seite FS und die Winkel an derselben bekannt sind, die Entfernungen SM_1, SM_2, SM_3, SM_4 in Teilen von c .

Aus den Dreiecken SM_1M_2 und SM_1M_4 erhält man den Winkel M_1 des Vierecks $M_1M_2M_3M_4$ und analog die Winkel M_2, M_3, M_4 . Sollen die vier Punkte $M_1 \dots M_4$ in einem Kreise liegen, so muß daher

$$1) \quad M_1 + M_3 = M_2 + M_4 = 180^\circ.$$

Da der Punkt O als Mittelpunkt des Kreises vorausgesetzt wird, so ist Winkel $M_1OM_4 = 2M_1M_2M_4$, der

*) Näherungswerte waren von Tycho angegeben.

letztere Winkel ist durch die Teile M_1M_2S und SM_2M_4 bekannt. Bestimmt man im Dreiecke SM_1M_4 die Seite M_1M_4 , so kann man im gleichschenkligen Dreiecke OM_1M_4 den Radius $OM_1 = OM_4$ in Teilen von c und den Winkel OM_1M_4 rechnen; mithin auch c in Teilen des Radius angeben. Da Winkel $OM_1S = OM_1M_4 - SM_1M_4$ ist, so kann man im Dreiecke OSM_1 die Seite OS und den Winkel OSM_1 bestimmen; nun ist Winkel

$$2) \quad OSM_1 = 180^\circ - PSM_1.$$

Man ändert nun die Lage der Geraden AP , d. h. den Winkel PSM_1 und die erste mittlere Anomalie, d. h. den Winkel PFM_1 so lange, bis die Bedingungen 1) und 2) erfüllt sind¹⁹⁾.

Nach siebenzig Versuchen erhielt Kepler eine Kreisbahn; dabei war, $OP = OA = 1$ gesetzt:

$$FO = 0.07232, \quad OS = 0.11332,$$

also die ganze Exzentrizität = 0.18564, die Hälfte = 0.09282.

Kepler nannte diese Bahn die stellvertretende Hypothese, dieselbe stellte (vgl. Art. 44) die Längen in der Bahn auf ungefähr 1' bis (2') dar, also bis auf die Genauigkeit der tychonischen Beobachtungen; sie gibt aber den Radiusvektor falsch.

Ungeachtet der guten Darstellung der Längen in der Bahn (von den Breiten macht Kepler keine Erwähnung) verwarf Kepler diese exzentrische Kreisbahn; dazu bewogen ihn die unmittelbaren Bestimmungen der Entfernungen des Mittelpunktes der Bahn von dem Mittelpunkte der Welt (d. i. der Sonne). Kepler bestimmt aus solchen Beobachtungen, wo der Planet in der Nähe des Aphel und Perihel war (mit Zuziehung der tychonischen Daten für die Entfernung der Erde von der Sonne) die größte und kleinste

Entfernung des Mars von der Sonne und daraus die Exzentrizität.²⁶⁾ Er findet hierbei e nahe $= 0.09$, welcher Wert von $e = 0.11332$ sehr verschieden ist, mit dem Werte $\frac{1}{2}(e + e') = 0.09282$ nahe übereinstimmt. Kepler versuchte nun die gleiche Teilung mit der Exzentrizität $= 0.09282$. Diese Voraussetzung gab in den Anomalien von ungefähr 45° , 135° , . . . einen Fehler von $8'$ bis $9'$ *). Diese acht Minuten waren für Kepler der Beweis der Unrichtigkeit der exzentrischen Kreisbahn mit gleicher Exzentrizität.

Der stellvertretenden Hypothese bediente sich Kepler zur Berechnung der wahren Anomalie, woher er ihr auch diesen Namen gab.

53.

Mit der Erkenntnis der Unhaltbarkeit der im vorigen Artikel erwähnten Hypothesen für die Marsbahn trat ein Wendepunkt in den Arbeiten Keplers ein; er folgte von nun an nur mehr seinen eigenen Ideen. Zunächst versuchte nun Kepler die Lösung der Frage der zweiten Ungleichheit, und da diese ihren Grund in der Bewegung der Erde hat, so suchte Kepler eine genaue Bestimmung der Erdbahn.

Die Notwendigkeit der Lösung dieser Aufgabe für die weiteren Untersuchungen über die Marsbewegung hatte er bereits bei der Widerlegung der stellvertretenden Hypothese erkannt.

Tycho hatte die Sonnenbahn als einen exzentrischen Kreis mit dem Mittelpunkt als *punctum aequans* vorausgesetzt. Durch die Bestimmung der größten Mittelpunkts- gleichung $\varphi = 2^\circ 34'$ erhielt er die Exzentrizität

$$\sin \varphi = e = 0.03584, \quad \text{die Hälfte} = 0.01792.$$

*) Da dieser Wert der Exzentrizität von dem wahren sehr wenig abweicht, so genügt für die Fehlerschätzung der Unterschied der Glieder der zweiten Potenz, wie er in Art. 44 angegeben ist.

Kepler hatte bereits in seinem »Geheimnis des Weltbaues« die Ansicht geäußert, daß, wenn die Erde nach der kopernikanischen Ansicht ein Planet ist, die gleiche Teilung stattfinden müßte. Als nun Tycho an Kepler schrieb, daß sich die Erdbahn (aus den Beobachtungen der oberen Planeten) zu verengern und erweitern scheine, kam Kepler unmittelbar zur Ansicht, daß ihr Mittelpunkt nicht das *punctum aequans* sein könne.

Kepler suchte nun eine unabhängige Bestimmung der Elemente der Erdbahn und bediente sich hierzu der Beobachtungen des Planeten Mars.

Es sei (Fig. 13) der Planet Mars mehrmals in demselben Punkte M seiner Bahn beobachtet worden.²¹⁾ Zur Zeit der ersten Beobachtung sei die Erde im Punkte E_1 . Ist N die Projektion des Ortes M auf die Ekliptik, so sind, wenn man die heliozentrische Länge des Punktes M oder N und die Länge der Sonne kennt*), im Dreiecke SE_1N die sämtlichen Winkel bekannt, also das Verhältnis

$$SE_1 : SN$$

gegeben.

Nach Ablauf eines siderischen Marsjahres befinde sich die Erde im Punkte E_2 , man erhält dadurch wieder das Verhältnis

$$SE_2 : SN; \text{ usw.}$$

Man kann daher die Distanzen SE_1 , SE_2 , .. in Teilen der Distanz SN bestimmen.

*) Die heliozentrische Länge des Mars erhält man hinreichend genau aus der stellvertretenden Hypothese, die Länge der Sonne durch die Beobachtung.

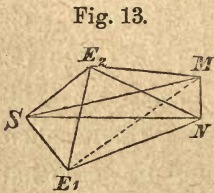


Fig. 13.

1) Sind (Fig. 14) zwei Distanzen SE_1 , SE_2 und deren Lage gegeben, so erhält man — die Lage der Apsidenlinie AP der Erdbahn (aus den tycho-nischen Bestimmungen) als bekannt vorausgesetzt — die Elemente der Erdbahn auf die folgende Art: Im Dreiecke SE_1E_2 bestimme man die Sehne E_1E_2 und den Winkel bei E_1 . Zieht man vom Mittelpunkte O die Gerade $OB \perp E_1E_2$, ferner $SD \perp E_1E_2$, $SC \parallel E_1E_2$, so erhält man im Dreiecke SE_1D die Seiten $SD = CB$ und E_1D und damit

$$SC = DB = E_1B - E_1D.$$

Im Dreiecke SOC kennt man die Seite SC und den Winkel OSC , weil die Lagen der Geraden E_1E_2 und AP bekannt sind, man erhält daher die Seite OC und OS .

Aus $OB = OC + SD$ und E_1B erhält man den Radius $OE_1 = OE_2$ und damit die Exzentrizität

$$e = \frac{OS}{OE_1}.$$

2) Sind (Fig. 15) drei Distanzen SE_1 , SE_2 , SE_3 und deren Lage gegeben, so kann man aus denselben sämtliche Elemente der Erdbahn bestimmen. In dem Dreiecke SE_1E_2 rechne man die Seite E_1E_2 , analog E_2E_3 , E_3E_1 . Nun bestimme man den Winkel $E_1E_3E_2$; da dieser $= \frac{1}{2}$ Winkel E_1OE_2 ist, so kann man im Dreiecke OE_1E_2 den Radius $OE_1 = OE_2$ und den Winkel OE_1E_2 berechnen. Damit erhält man den Winkel $OE_1S = \text{Winkel } SE_1E_2 - OE_1E_2$, wodurch im Dreiecke OSE_1 die beiden Seiten und der eingeschlossene

Fig. 14.

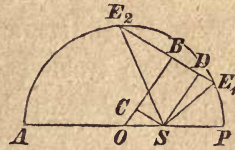
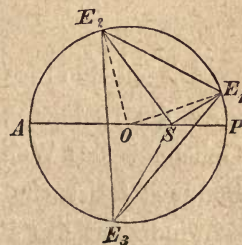


Fig. 15.



Winkel bekannt sind. Aus dem Dreiecke OSE_1 erhält man die Größe und Richtung der Seite OS .

Kepler fand nach diesen Methoden für die Exzentrizität im Mittel den Wert: $e = 0.01800$, also ungefähr den halben Wert der Entfernung des *punctum aequans* von der Sonne nach dem tychonischen System. Damit war die gleiche Teilung der Exzentrizität für die Erdbahn nachgewiesen.

Zusatz. Ist die Erdbahn bekannt, so kennt man im Dreiecke SE_1E_2 der Fig. 13 die Seiten SE_1 , SE_2 und den Winkel E_1SE_2 . Man kann daher die Seite E_1E_2 und die Winkel bei E_1 und E_2 rechnen. Da der Winkel SE_1N der beobachtete Längenunterschied zwischen Mars und Sonne ist, so ist der Winkel E_2E_1N und analog der Winkel E_1E_2N bekannt: man kann daher im Dreiecke E_1E_2N die Seiten E_1N und E_2N berechnen. Man kann nun aus dem Dreiecke SE_1N oder SE_2N die Seite SN und die Lage dieser Linie, d. i. die Projektion der Entfernung von der Sonne und die heliozentrische Länge des Mars bestimmen.

In dem Dreiecke E_1MN ist der Winkel bei $E_1 =$ der beobachteten Breite, man erhält daher die Distanz MN . Aus dieser und der Distanz SN erhält man den Winkel $NSM =$ der heliozentrischen Breite des Mars und die Distanz SM des Planeten von der Sonne.

54.

Die leitende Idee für die weiteren Untersuchungen Keplers über die Bewegung des Mars lieferte ihm die bereits im Geheimnis des Weltbaues ausgesprochene Ansicht, daß die Sonne die Ursache der Planetenbewegung ist, also die Geschwindigkeit des Planeten von seiner Entfernung von der Sonne abhängig ist. Die Kraft, welche den Planeten kreisförmig bewegt, nimmt nämlich mit der Entfernung ab; denn

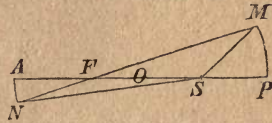
sie verbreitet sich (ähnlich wie das Licht) auf einen größeren Raum. Dieser Gedanke führte ihn zunächst zur Entdeckung seines zweiten Gesetzes, welches also der Zeit nach das erste ist.

Die Ableitung geschieht bei Kepler auf die folgende Art:

1) Die Zeit, welche der Planet braucht, um gleiche und unendlich kleine Bogen des exzentrischen Kreises zu beschreiben, sind der Entfernung des Planeten von der Sonne proportional. Für die Orte des Planeten in der Nähe des Perihel und Aphel wird dies im Sinne der ptolemäischen Theorie so bewiesen:

Es sei (Fig. 16) MFN eine durch das *punctum aequans* F gezogene Gerade, welche mit der Apsidenlinie PA einen sehr kleinen Winkel bildet, so werden die Bogen PM und AN in gleichen Zeiten zurückgelegt. Da für die Bogen MP und AN die Sehnen gesetzt werden können und $\triangle PMF \sim \triangle ANF$ ist, so ist

Fig. 16.



oder

$$PM \cdot SP = AN \cdot SA.$$

Ist $PM = ms$, $AN = ns$ und t die Zeit, in welcher der Bogen PM oder AN zurückgelegt wird, so sind die Zeiten, in welcher ein Bogen s in der Nähe des Perihels und Aphels zurückgelegt werden, bzw. $\frac{t}{m}$ und $\frac{t}{n}$; also ihr Verhältnis = $SP : SA$.

Diesen für die Apsiden gefundenen Satz dehnt Kepler auf alle Punkte der Bahn aus und folgert:

2) Die Summe der Zeiten, in welcher ein endlicher Bogen beschrieben wird, ist also proportional der Summe

der Entfernungen, d. i. der Fläche, welche der Radiusvektor durchstreift (zweites Keplersches Gesetz).

Das Gesetz ist richtig, die Ableitung aber falsch, dieselbe gilt nur für die Apsiden, welche Punkte hier Kepler nur berücksichtigt.²²⁾

Kepler ist sich dieses Fehlers, wenn für die Summen der Entfernungen die Flächen gesetzt werden, bewußt; er hält jedoch an der Richtigkeit des zweiten Gesetzes fortwährend fest, da es, wie im nächsten Artikel bewiesen wird, durch die Bewegung der Erde um die Sonne bestätigt wird.

Zusatz. Sind w und w' die den Bogen PM und AN zugehörigen Winkel, so ist

$$PM = SP \cdot w, \quad AN = SA \cdot w,$$

woraus mit Zuziehung von $PM \cdot SP = AN \cdot SA$ folgt

$$w : w' = \overline{SA^2} : \overline{SP^2},$$

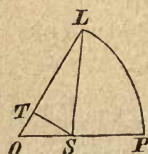
welche Gleichung für alle Punkte der Bahn gültig ist; denn sie enthält das zweite Gesetz.

55.

Durch das zweite Gesetz wird zum erstenmal an die Stelle der bis jetzt festgehaltenen geometrischen Auffassung der planetarischen Bewegung die mechanische (als Ausfluß der bewegenden Kraft der Sonne) gesetzt.

Dieses Gesetz gibt für die Bewegung eines Himmelskörpers in einer Kreisbahn nachstehende Bestimmung der Mittelpunktsgleichung und des Radiusvektors.

Fig. 17.



1) Die Fläche SPL (Fig. 17) ist das Maß der mittleren Anomalie, denn dieselbe ist der Zeit proportional.

Der Winkel $POL = E$ ist die exzentrische Anomalie.

Die Fläche des Dreiecks SLO ist das Maß des Überschusses der exzentrischen Anomalie über die mittlere.

Der Winkel $\varphi = SLO$, d. i. die optische Gleichung, ist der Überschuß der wahren Anomalie über die exzentrische.

Ist t die seit dem Durchgange durch das Perihel verflossene Zeit, U die Umlaufszeit des Planeten, so ist

$$\begin{aligned} \text{Fläche } SPL &: a^2\pi = t : U \\ \text{Fläche } SPL &= \text{Fläche } OPL - \triangle OSL \\ &= \frac{1}{2}a^2E - \frac{1}{2}a^2e \sin E, \end{aligned}$$

also

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{U}t = \text{mittlere Anomalie} = \alpha.$$

2) Projiziert man den Radiusvektor SL auf die Gerade OL , so erhält man

$$\begin{aligned} r \cos \varphi &= a - ae \cos E \\ r \sin \varphi &= ae \sin E, \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} r &= (a - ae \cos E) \sec \varphi \\ \text{tang } \varphi &= \frac{e \sin E}{1 - e \cos E} \end{aligned}$$

folgt. Außerdem ist $v = E + \varphi$.

Aus diesen Gleichungen folgt

$$v = \alpha + 2e \sin \alpha + \frac{3}{2}e^2 \sin 2\alpha + \dots$$

Die Differenz: Ellipse — Kreis = $-\frac{1}{4}e^2 \sin 2\alpha^*$, also im Maximum wieder ungefähr 8' (welchen Fehler, s. nächste Seite, auch Kepler bei der Vergleichung der tychonischen Beobachtungen fand). Der Fehler ist (bis auf Glieder zweiter Ordnung) von gleicher Größe, aber entgegengesetztem Zeichen, wie bei der Hypothese der gleichen Teilung der Exzentrizität.

Für die Erde ist diese Differenz verschwindend; um das neue Gesetz auch durch die Bewegung des Mars zu kon-

*) Vgl. die Note des Art. 52.

trollieren, ermittelte Kepler aus den Beobachtungen des Mars in der Nähe des Perihels und Aphels neue Werte für die Lage der Apsidenlinie, Perihelzeit, mittlere Entfernung und Exzentrizität der Marsbahn. Die Vergleichung der tychonischen Beobachtungen gab wieder Unterschiede in den Längen, die im Maximum auf ungefähr 8' stiegen.

56.

Nachdem alle Versuche, unter Voraussetzung des exzentrischen Kreises, die Marsbahn aus den beobachteten Längen zu bestimmen, mißlungen waren, suchte Kepler vermittels der Entfernungen des Mars von der Sonne die Figur der Bahn zu bestimmen.

Zu diesem Ende rechnete er drei Distanzen außer den Oppositionen; die eine in der Nähe der mittleren Entfernungen, die beiden anderen nahe am Aphel. Das Resultat war folgendes:

aus der Kreishyp. berechnete Entfernungen	aus den Beob.
1.48539	1.47750
1.63883	1.63100
1.66605	1.66255.

Die Fehler betragen bzw. 789, 783, 350 Einheiten der fünften Dezimale.

Weil die wahren Distanzen kleiner sind, als die aus der Kreishypothese berechneten, so folgerte Kepler: Die Bahn des Planeten ist kein Kreis, sondern eine Art von Oval, welches sich in den Apsiden an den Kreis anschließt, gegen die mittleren Entfernungen zu von dem Kreise immer mehr abweicht. Für diese Ovalform gibt sogar Kepler Gründe; die Konstruktion dieser ovalförmigen Kurve (mit einem breiteren Ende im Aphel und einem spitzeren im Perihel)

und die Lösung der Aufgabe: die Größe der Ovalfläche zu bestimmen, sowie dieselbe in Teile nach gegebenem Verhältnisse zu teilen, machten ihm große Schwierigkeiten. Beide Aufgaben wurden nur näherungsweise auf folgende Art gelöst:

1) Die Punkte der Ovallinie werden durch Verbindung der stellvertretenden Hypothese des Art. 52 III. mit der der gleichen Teilung erhalten. Die stellvertretende Hypothese bestimmt die wahre Lage des Radiusvektors. Beschreibt man aus der Mitte O der ganzen Exzentrizität FS (der Fig. 8) mit der mittleren Entfernung als Halbmesser einen Kreis und zieht den Radius ON unter dem Winkel der mittleren Anomalie, so stellt die Distanz SN die wahre Größe des Radiusvektors dar. Zieht man daher von S unter der wahren Lage des Radiusvektors eine Gerade und schneidet auf ihr $SL = SN$ ab, so ist der Punkt L der Ort des Planeten in der Ovale. Aus dieser Konstruktion folgt

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2 - 2a^2e \cos \alpha + a^2c^2 \\ &= (a - ae \cos \alpha)^2 + a^2e^2 \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos \alpha + \frac{1}{2}e^2 \sin^2 \alpha;$$

$$\text{Ellipse} - \text{Ovale} = \frac{1}{2}e^2 \sin^2 \alpha.$$

2) Für die Quadrierung und Teilung der Ovale (von der Sonne aus) bediente sich Kepler einer Ellipse, deren größte Breite des sichelförmigen Randes, den sie vom exzentrischen Kreis abschneidet, $0.00858a$ beträgt; denn von dieser Größe war die größte Breite der durch die Ovallinie abgeschnittenen Sichel.

Als jedoch Kepler die nach der Ovalhypothese berechneten Distanzen des Mars von der Sonne mit den aus den Beobachtungen erhaltenen verglich, fand er sie zu klein,

und zwar in der Nähe der mittleren Entfernung um 660 Einheiten der fünften Stelle. Ebense hatte sein astronomischer Freund David Fabricius, dem er diese letzteren Untersuchungen mitgeteilt hatte, aus der Vergleichung der berechneten (geozentrischen) Orte mit den Beobachtungen geschlossen, daß die Ovalhypothese die Distanzen zu kurz gäbe. Kepler war jedoch bereits mit der Verbesserung seiner Theorie beschäftigt, als er von Fabricius diese Nachricht erhielt; diese Verbesserung, die ihn schließlich zur wahren Figur der Marsbahn führte, bot sich ihm auf folgendem Wege dar.

Für den in Art. 55 erwähnten Wert der Exzentrizität $e = 0.09264$ ist die optische Gleichung φ , entsprechend der größten Mittelpunktsleichung, bestimmt durch

$$\text{tang } \varphi = e, \text{ also } \varphi = 5^\circ 18'.$$

Durch einen glücklichen Zufall geriet Kepler auf die Sekante dieses Winkels $= 1.00429$, welche von der Einheit um 0.00429 abweicht. Ungefähr dieselbe Größe beträgt in der Nähe der mittleren Entfernungen der Fehler von $\frac{r}{a}$ im exzentrischen Kreise. »Setzt man daher in der mittleren Entfernung statt der Sekante der optischen Gleichung den Radius, so erhält man den wahren Wert.« Dieses für die Anomalien von nahe $= 90^\circ$ oder 270° gefundene Resultat dehnte Kepler auf alle Punkte der Bahn aus; er schloß ganz allgemein, daß man durch die Multiplikation des aus dem exzentrischen Kreise erhaltenen Radiusvektors mit dem Kosinus der optischen Gleichung die wahre Distanz erhält; d. h. daß

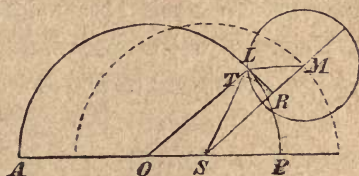
$$r = a - ae \cos E$$

ist.²³⁾ Dieses Resultat bestätigt Kepler durch die Vergleichung mit einer Reihe von Distanzen, welche er aus den tychonischen Beobachtungen erhalten hatte.

Nachdem das Gesetz für die Größe des Radiusvektors gefunden war, handelte es sich um die Bestimmung der Lage desselben; diese mußte so gewählt werden, daß das obige empirisch gefundene Gesetz nicht gestört würde. Dazu bot sich für Kepler zunächst folgendes dar:

Es sei (Fig. 18) O der Mittelpunkt des exzentrischen Kreises, OS die Exzentrizität. Beschreibt man aus S mit demselben Radius einen Kreis, und aus einem beliebigen Punkt M des Umfanges des letzteren mit dem Radius $= OS$ einen Epicykel, so schneidet dieser den exzentrischen Kreis im Punkte L derart, daß das Viereck $OSML$ ein Parallelogramm

Fig. 18.



ist, wie man unmittelbar ersieht, wenn man die Gerade SL zieht. Ein aus dem Punkte O als Mittelpunkt beschriebener exzentrischer Kreis kann daher durch einen aus S mit demselben Halbmesser beschriebenen Kreis und einen Epicykel ersetzt werden, wenn der Radius des Epicykels gleich ist der Exzentrizität.

Ist nun $\sphericalangle POL = E =$ exzentrischen Anomalie — bestimmt nach Art. 55 —, so ist $\sphericalangle LMS = E$, also $SR = SM - RM = a - ae \cos E = r$, wenn $LR \perp SM$ ist.

Der Planet hat sich daher mit seinem Perihel in dem zur Sonne gerichteten Durchmesser des Epicykels von seiner anfänglichen Entfernung $p = a - ae$ um die Größe $q = ae(1 - \cos E)$ entfernt.

Beschreibt man nun aus dem Punkte S mit dem Radius SR einen Kreis, welcher die Gerade OL im Punkte T schneidet, so stellt ST die Größe und Lage des Radiusvektors dar.

Als jedoch Kepler diese Bestimmung der Lage mit der stellvertretenden Hypothese verglich, fand er Unterschiede von $4' - 5\frac{1}{2}'$; er war nun selbst bereit, das obige richtige Gesetz der Distanzen fallen zu lassen.

Nun kehrte Kepler wieder zur Ellipse zurück, da er sich dieser Linie bereits bei der Ovalhypothese als Hilfsmittel bedient hatte, er setzte jedoch gemäß den früheren Bestimmungen für die Marsbahn eine Ellipse, deren größte Breite des sichelförmigen Randes, welchen dieselbe vom exzentrischen Kreis abschneidet, $0.00429a$ beträgt*).

Kepler beweist nun, daß gerade in der Ellipse, wenn sich im Brennpunkte die Sonne befindet,

$$r = a - ae \cos E$$

ist; die Lage des Radiusvektors ist dann bestimmt durch

$$r \cos v = a \cos E - ae.$$

Der Fehler der vorigen Lagenbestimmung hatte, wie Kepler selbst bemerkt, seinen Grund darin, daß statt des Durchschnittspunktes der Senkrechten vom Punkte L auf die Apsidenlinie mit dem Kreisbogen RT (d. i. des Punktes der Ellipse) der Punkt T als Ort des Planeten genommen wird.

Statt des Verhältnisses der elliptischen Flächen setzt Kepler (genau nach dem in Art. 2 durchgeführten Wege) das entsprechende Verhältnis der Flächen des exzentrischen Kreises.

Auf diese Art erhielt Kepler das wichtige Resultat: »Die Bahn des Mars ist eine Ellipse, in deren einem Brennpunkte sich der Mittelpunkt der Sonne befindet.«

*) Für die obige Exzentrizität beträgt der genaue Wert dieser Breite $0.00431a$.

57.

Schließlich beschäftigte sich Kepler mit einer Verbesserung der Marselemente, namentlich mit der genaueren Bestimmung von Knoten und Neigung, welche für die Darstellung der Breiten von besonderer Wichtigkeit sind. Trotz aller Sorgfalt konnten letztere nur bis auf 4'—5' dargestellt werden. Kepler schob diese Unterschiede auf die Fehler der Beobachtungen, auf die Refraktion und Parallaxe.

Diese beiden Gesetze wandte Kepler auch auf die übrigen Planeten an, und bestimmte unter Voraussetzung dieser Gesetze deren Bahnelemente. Auf Grundlage dieser neuen Elemente und der tychonischen Beobachtungen der Fixsterne und des Mondes wurden die rudolfinischen Tafeln (erschieden 1627) berechnet; die ersten astronomischen Tafeln, die sich auf die wahre Planetentheorie gründeten. Das Bedürfnis nach neuen, richtigeren Tafeln hatte sich immer mehr gesteigert; denn im Jahre 1625 betrug die Abweichung des Mars von den prutenischen Tafeln nahe 5°. Den Namen trugen die Tafeln von dem Gönner der Astronomie Kaiser Rudolf II. (gest. 1612). Der Anfang zu diesen Tafeln geschah bereits durch Tycho: die theoretischen Arbeiten Keplers, die traurigen Verhältnisse des dreißigjährigen Krieges hatten das Erscheinen derselben so lange verzögert.

58.

Durch die Bestimmung der genaueren Bahnelemente der Planeten aus den tychonischen Beobachtungen wurde die in Art. 49 angeführte Idee des Geheimnisses des Weltbaues nach den fünf regulären Körpern nicht bestätigt.

Die Aufsuchung des Grundes dieser Abweichung führte Keplern zur Harmonie der Welt, dargestellt in dessen

»*Harmonices mundi*, .. *Lincii 1619*«, in welcher sein drittes Gesetz enthalten ist²⁴⁾.

Den Ausgang dieser Untersuchungen bildete seine bereits im »Geheimnis des Weltbaues« ausgesprochene Ansicht, daß im Sonnensystem (soweit es ihm bekannt war) Gesetz und Ordnung herrsche, daß die Anzahl der Planeten und die Anordnung ihrer Bahnen bestimmten Gesetzen unterworfen sei und daß die Bewegungen in bestimmten, zum System gehörigen Ursachen ihren Grund haben. Durch das Gesetz der fünf regulären Körper ist nur die Anordnung des Planetensystems im großen und ganzen gegeben, also die Urform des ruhenden Systems; die Bewegung in den einzelnen Intervallen ist durch die Harmonien der Welt (des Himmels) geregelt, — der Bewegung zuliebe mußten die den fünf regulären Körpern entsprechenden Entfernungen etwas geändert werden, so daß gewisse Unterschiede von der Darstellung nach der Idee der fünf Körper eintreten müssen.

Diese beiden Prinzipien stehen durch die regulären Vierecke in Verbindung. In den fünf regulären Körpern kommen nur das Dreieck, Viereck und Fünfeck vor, ebenso geben nur die Teilungen einer Saite nach den Zahlen 2, 3 und 5 Konsonanzen.

Die Harmonien, wodurch die Bewegungen der Planeten im besonderen bestimmt sind, sind nur in den täglichen heliozentrischen Winkelbewegungen ausgedrückt; — in den täglichen Wegstücken deshalb nicht, weil diese den Entfernungen umgekehrt proportional sind, und letztere den fünf Körpern und nicht den Harmonien angepaßt sind.

Man kann die täglichen Winkelbewegungen gleichsam als Töne betrachten, deren Schwingungszahl gleich ist der Anzahl der Sekunden der Winkelbewegung. Ändert sich daher die tägliche Winkelbewegung, so ändert sich der Ton;

der Planet wird daher bei seiner Bewegung ein gewisses Tonintervall durchlaufen.

Die täglichen Winkelbewegungen ändern sich mit den Entfernungen des Planeten von der Sonne; sind nämlich w, w' die täglichen Winkelbewegungen für die Zeiten t, t' , die zugehörigen Entfernungen r, r' , so ist nach dem zweiten keplerischen Gesetze

$$r^2 w = r'^2 w',$$

wenn die Größen $r, r'; w, w'$ innerhalb eines Tages als konstant angesehen werden. Daraus folgt

$$r : r' = \sqrt{w'} : \sqrt{w}.$$

Aus dem Verhältnisse der größten und kleinsten täglichen Winkelbewegung kann man das Verhältniß der kleinsten und größten Entfernungen bestimmen, und damit erhält man die Exzentrizität

$$= \frac{r' - r}{r' + r} = \frac{1 - r : r'}{1 + r : r'},$$

wo r die kleinste und r' die größte Entfernung bedeutet.

59.

Die Harmonien sind nach Kepler in der Planetenbewegung in folgender Weise ausgedrückt:

1) Sind die Verhältnisse der langsamsten Bewegung eines Planeten zu seiner schnellsten, d. h. das Intervall seines tiefsten Tones zum höchsten, von kleinen Unreinheiten abgesehen, bei den Planeten mit Ausnahme von Erde und Venus harmonisch.

Denn aus den tychonischen Beobachtungen ergeben sich nahezu folgende Verhältnisse:

Für Saturn $\frac{4}{5}$ = große Terz, für Jupiter $\frac{5}{8}$ = kleine Terz; für Mars $\frac{3}{2}$ = Quinte, für Erde $1\frac{5}{8}$ = Halbton, für Venus $2\frac{4}{5}$ = Diesis, für Merkur $1\frac{5}{2}$ = Oktave mit kleiner Terz.

2) Sind auch die Extreme der täglichen Bewegung je zweier Planeten harmonisch. Diese Vergleichung kann auf doppelte Weise durchgeführt werden.

a) Man bestimmt das Intervall der langsamsten Bewegung eines oberen Planeten zur schnellsten des nächst unteren: »divergierendes Intervall«.

b) Man bestimmt das Intervall der schnellsten Bewegung des oberen Planeten zur langsamsten des nächst unteren: »konvergierendes Intervall«.

Für beide Arten von Intervallen erhält man wieder aus den tychonischen Beobachtungen nahezu harmonische Zahlen; dadurch ist es möglich, daß sämtliche Planeten zusammenklingen.

Durch die Harmonien in 1) ist, wie im vorigen Artikel erwähnt wurde, die Exzentrizität, und durch diese die Form der Bahn bestimmt. Ebenso läßt sich aus dem Intervalle des Tones, welches ein Planet bei seiner Bewegung durchläuft, das Verhältnis seiner Entfernungen $r : r' = \sqrt{w' : w}$ bestimmen; man kann daher auch die Entfernung r in Teilen einer bestimmten r' , etwa gleich der mittleren, angeben. Sind daher die Verhältnisse der mittleren Entfernungen der Planeten zu irgendeiner mittleren bekannt, so kann man die Entfernung r in Teilen dieser mittleren Entfernung angeben.

Aus den fünf regulären Körpern lassen sich die genauen Werte der Verhältnisse der mittleren Entfernungen nicht bestimmen, die wahren Werte folgen aus den Harmonien: es müssen sich daher aus den mittleren täglichen Winkelbewegungen der Planeten, welche zu den mittleren Entfernungen gehören, diese Verhältnisse bestimmen lassen. Dazu ist nötig, daß das Gesetz zwischen den mittleren täglichen Winkelbewegungen (oder Umlaufszeiten) und den

mittleren Entfernungen bekannt ist; in diesem Gesetze ist die Verbindung der beiden Prinzipie des Weltbaues nach den fünf regulären Körpern und nach den Harmonien ausgedrückt.

Zunächst war es gewiß, daß die Umlaufszeit eines Planeten von seiner mittleren Entfernung abhängt; daß der größeren Umlaufszeit die größere Entfernung entspricht, daß jedoch das Verhältnis kein einfaches ist, sondern das der Umlaufzeiten größer ist. Kepler erklärte dies dadurch, daß die Umlaufszeit des entfernteren Planeten einerseits durch den größeren Raum, den der Planet zu durchlaufen hat, andererseits durch die Abnahme der Sonnenkraft in der Entfernung vergrößert wird. Es war eine glückliche Idee, die ihn bestimmte, die verschiedenen Potenzen der Umlaufzeiten und mittleren Entfernungen miteinander zu vergleichen. Kepler spricht das gefundene Gesetz im 3. Kapitel des fünften Buches der Harmonien folgendermaßen aus: »Es ist ganz gewiß, daß das Verhältnis der periodischen Umlaufzeiten genau das einundeinhalbfache*) des Verhältnisses der mittleren Entfernungen der Planeten, d. i. der Planetensphären selbst, ist.«

60.

Durch Umkehrung der gefundenen Resultate erhält Kepler folgendes Axiom: Die Weltakkorde und die Harmonien sind der Zweck des Welterschöpfers, die Größe (bestimmt durch die fünf regulären Körper) und die Form (bestimmt durch die Exzentrizitäten) der Bahnen sind das Mittel dazu.

Diese ganze Untersuchung Keplers bezweckte eine Zusammenfassung des Sonnensystems als eines wohlgeordneten

*) Älterer Ausdruck für die $1\frac{1}{2}$ te Potenz eines Verhältnisses.

Ganzen, d. i. als Kosmos, also eine Zurückführung der Elemente der Planeten und ihrer Bewegungen auf mathematische Verhältnisse. Von den Elementen waren für ihn die auf die Lage der Bahn und auf die Epoche bezüglichen durch den Zufall, die auf die Größe und Form der Bahn bezüglichen durch die Harmonien bestimmt. Diese Idee wird in folgender Weise verwirklicht:

Für einen einzelnen Planeten findet die Harmonie in den Punkten seiner Apsidenlinie statt; damit eine Gesamtharmonie möglich ist, durften für die einzelnen Planeten nur solche Harmonien gewählt werden, welche den fünf Körpern angepaßt sind, d. h. es mußten den Planeten bestimmte mittlere Bewegungen zugeteilt werden; diese hängen daher von den mittleren Entfernungen ab. Umgekehrt können aus dem Gesetze der Harmonien die mittleren Entfernungen und Exzentrizitäten bestimmt werden.²⁵⁾

Das Verständnis der keplerischen Gesetze erhielt sich hauptsächlich in England, wo sie nicht nur durch neue Beobachtungen bestätigt wurden, sondern wo man Untersuchungen über die infolge der allgemeinen Anziehung verursachten Störungen anstellte. Durch Newtons Entdeckung der allgemeinen Anziehung fanden die keplerischen Gesetze einerseits ihren innern Zusammenhang, als auch andererseits die zur Darstellung der Planetenbewegung nötige Ergänzung. Am Kontinente wurden die von Kepler zur Erklärung der Erscheinung erdachten Kraftkreise zur Wirbeltheorie ausgebildet, welche Theorie sich bis Ende des achtzehnten Jahrhunderts erhielt.²⁶⁾

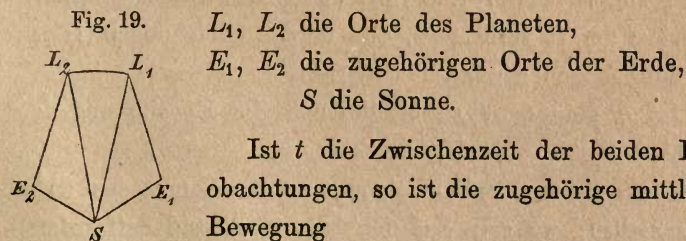
Dritter Abschnitt.
Zum Problem der Bahnbestimmung.

61.

Wie bereits im Art. 57 erwähnt wurde, verdankt man Keplern die erste genauere Bestimmung der Bahnelemente der Erde und der fünf größeren Planeten. Diese Bestimmung war, nach der Erkenntnis der wahren Bewegungsgesetze, insofern von keiner großen Schwierigkeit, da man mit Zuziehung der ältesten Beobachtungen genaue Werte für die mittleren täglichen Bewegungen erhielt, und andererseits für die übrigen Elemente aus dem reichen Schatze der tychonischen Beobachtungen die zur Bestimmung eines jeden Elementes passendsten Beobachtungen ausgewählt werden konnten. Selbst die Entdeckung des Planeten Uranus (im Jahre 1781 durch W. Herschel) förderte das Problem der Bahnbestimmung der Planeten nicht weiter, da man vermöge der Kleinheit der Exzentrizität und der Neigung der Bahn durch die Voraussetzung einer kreisförmigen Bahn, deren Ebene mit der Ekliptik zusammenfällt, bereits hinreichend genäherte Elemente erhielt.

Man kann nämlich in diesem Falle aus zwei beobachteten Längen die Elemente: mittlere Entfernung und Epoche bestimmen.

Es seien (Fig. 19)



$$= \frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}} = \text{Winkel } L_1 S L_2,$$

wo $a = SL_1 = SL_2$ die mittlere Entfernung bedeutet.

Aus den Dreiecken SE_1L_1 , SE_2L_2 folgt, wenn $SE_1 = R_1$, Winkel $E_1L_1S = L_1$, $L_1E_1S = E_1$, usw. und $E_1SE_2 = S$ gesetzt wird,

$$(1) \quad \sin L_1 = \frac{R_1 \sin E_1}{a}, \quad \sin L_2 = \frac{R_2 \sin E_2}{a};$$

$$(2) \quad \frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}} = S + E_1 + E_2 + L_1 + L_2 - 360^\circ.$$

Man muß nun die Größe a so bestimmen, daß den Gleichungen (1) und (2) genügt wird.

Für den Planeten Uranus wird diese Lösung dadurch vereinfacht, daß a gegen R_1 oder R_2 sehr groß ist; man kann daher in (1) statt der Sinusse die Bogen setzen, und erhält dadurch

$$L_1 = \frac{R_1 \sin E_1}{a \sin 1''}, \quad L_2 = \frac{R_2 \sin E_2}{a \sin 1''}$$

$$\frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}} = S + E_1 + E_2 - 360^\circ + \frac{R_1 \sin E_1 + R_2 \sin E_2}{a \sin 1''},$$

oder, wenn

$$S + E_1 + E_2 - 360^\circ = \alpha, \quad \frac{R_1 \sin E_1}{\sin 1''} + \frac{R_2 \sin E_2}{\sin 1''} = \beta, \quad \alpha^{\frac{1}{2}} = x,$$

wobei α und k in Sekunden auszudrücken ist, gesetzt wird,

$$\alpha x^3 + \beta x = kt.$$

Vermittels der *regula falsi* kann man diesen erhaltenen Wert x derart verbessern, daß er den Gleichungen (1) und (2) vollkommen genügt.

Ist a gefunden, so erhält man die Epoche aus dem Winkel E_1SL_1 oder E_2SL_2 .

Die genauere Bahnbestimmung konnte man bis dahin aufschieben, wo man aus den häufigeren und entfernten

Beobachtungen die passendsten auswählen konnte. Diese Bestimmung wurde außerdem durch das Auffinden älterer Beobachtungen des Uranus erleichtert.

62.

Ungleich größere Schwierigkeiten verursachte die Bahnbestimmung des ersten Asteroiden Ceres. Dieser Planet wurde am 1. Januar 1801 von Piazzi in Palermo bei der Beobachtung von Fixsternen entdeckt und bis zum 11. Februar beobachtet. Hier handelte es sich zum ersten Male um die Lösung der Aufgabe: »Die Bahn eines Himmelskörpers aus Beobachtungen, die keinen großen Zeitraum umfassen, ohne jede hypothetische Voraussetzung zu bestimmen.«

Karl Friedr. Gauß (geb. 1777, gest. 1855), der sich bereits vor der Entdeckung der Ceres mit dem eben genannten Problem beschäftigt hatte, bestimmte nun für die Ceres eine Bahn, welche die ganze Reihe der Piazzischen Beobachtungen (andere waren nicht vorhanden) höchst befriedigend darstellte. Die erste heitere Nacht der nächsten Erscheinung, in der man den Planeten suchte, gab denselben an dem berechneten Orte.

Aus den ursprünglichen Methoden, welche Gauß zur Berechnung der Ceresbahn angewandt hatte, entwickelte sich infolge fortgesetzter Untersuchungen dessen »*Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*«.

Die weiteren Bemühungen bezüglich der erwähnten Hauptaufgabe der theoretischen Astronomie waren teils auf die Vereinfachung der dabei erforderlichen Rechnungen, teils auf einen genaueren Ausgang für eine erste Hypothese gerichtet. Als bedeutendsten Fortschritt in letzterer Be-

ziehung müssen die einfachen und dabei sehr genauen Näherungsausdrücke, die J. W. Gibbs für die Dreiecksverhältnisse $n:n':n''$ gegeben hat, erwähnt werden.

63.

Nicht geringer waren die Schwierigkeiten, welche sich vor der Aufstellung der Olberschen Methode der Bahnbestimmung der Kometen entgegenstellten. Obgleich man bei den Kometenbahnen (mindestens in erster Annäherung) mit der Parabel²⁷⁾ ausreicht — also ein Element weniger zu bestimmen hat —, so wird dieser Vorteil durch den Umstand, daß man, wegen der kurzen Sichtbarkeit dieser Himmelskörper, sich die Beobachtungen nicht willkürlich auswählen kann, sondern diejenigen benutzen muß, welche der Zufall darbietet, bei weitem aufgewogen. Man wurde daher bei den Kometen zu der unmittelbaren Lösung des Problems, »eine parabolische Bahn zu bestimmen«, gedrängt.

Die erste Lösung des eben genannten Problems gab Newton, wodurch man jedoch erst (auf dem Wege der Konstruktion) nach ziemlich mühsamen und zahlreichen Versuchen die gesuchten Elemente erhält. Die direkte analytische Lösung würde zu ganz unauflösbaren Gleichungen führen; man zog es daher vor, auf indirektem Wege die Aufgabe analytisch zu lösen. La Caille bediente sich des Verfahrens, für drei Beobachtungen durch Versuche die beiden äußersten Distanzen des Kometen von der Erde derart zu bestimmen, daß der mittleren Beobachtung durch die daraus erhaltenen Elemente genügt wird. Das ziemlich mühsame Verfahren der Bestimmung zweier Unbekannten suchten Boscovich, Lambert, Euler durch Voraussetzungen über die Bewegung der Kometen zu vereinfachen: 1) daß das Stück der Kometenbahn zwischen den äußersten

Bewegungen geradlinig sei und vom Kometen gleichförmig durchlaufen werde; 2) daß die Sehne vom mittleren Radiusvektor im Verhältnisse der Zeiten geschnitten werde.²⁸⁾ Durch diese Voraussetzungen würde allerdings die Aufgabe auf die Auflösung einer Gleichung mit einer Unbekannten zurückgeführt; allein entweder waren die erhaltenen Elemente zu ungenau oder die Lösung dieser Gleichung noch immer sehr schwierig. Selbst die vollkommeneren Lösungen von La Grange und La Place erforderten so mühsame Rechnungen, daß für die praktische Durchführung wenig gewonnen war. Erst durch Wilhelm Olbers (geb. 1758, gest. 1840) wurde vermittels der in Art. 20 erwähnten Voraussetzungen jene Lösung der Aufgabe gegeben, welche in theoretischer und praktischer Hinsicht jeder Forderung genügte, und die bis jetzt noch nicht durch eine vollkommene Methode verdrängt wurde.²⁹⁾

Erster Anhang.

I. Reihenentwicklungen für die Dreiecksflächen und deren Verhältnisse.

1. Die Differentialgleichungen für die Bewegung eines Himmelskörpers (als Massenpunkt betrachtet) um die Sonne, können auch dadurch integriert werden, daß man die Koordinaten als Potenzreihen nach der Zeit voraussetzt. Nimmt man $1:k = 58 \cdot 13244088$ mittlere Sonnentage als Zeiteinheit, so erhält man für die Bewegung des Massenpunktes x, y, z die Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3} = 0, \quad x = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots$$

und analog für y und z ; dabei ist

$$A_0 = x, \quad A_1 = \frac{dx}{dt}, \quad \dots \quad A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n x}{dt^n}, \quad \text{für } t = 0.$$

Mittels der obigen Bewegungsgleichung können A_2, A_3, \dots durch A_0 und A_1 ausgedrückt werden. Nimmt man als Zeitanfang die Zeit der mittleren Beobachtung, sind

$$\begin{array}{lll} x, y, z & \text{die Koordinaten für } t = -\mathcal{P}'' \\ x', y', z' & \text{»} & \text{»} & t = 0 \\ x'', y'', z'' & \text{»} & \text{»} & t = \mathcal{P}, \end{array}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} x'' &= A_0 \alpha_0'' + A_1 \alpha_1'' \\ x &= A_0 \alpha_0 + A_1 \alpha_1 \\ \alpha_0'' &= 1 - s \frac{\mathcal{P}^2}{2!} - s' \frac{\mathcal{P}^3}{3!} + (s^2 - s'') \frac{\mathcal{P}^4}{4!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (4ss' - s''') \frac{\mathcal{J}^5}{5!} - s^3 \frac{\mathcal{J}^6}{6!} \\
 \alpha_1'' = \mathcal{J} & \left(1 - s \frac{\mathcal{J}^2}{3!} - 2s' \frac{\mathcal{J}^3}{4!} + (s^2 - 3s'') \frac{\mathcal{J}^4}{5!} \right. \\
 & \left. + (6ss' - 4s'') \frac{\mathcal{J}^5}{6!} - s^3 \frac{\mathcal{J}^6}{7!} \right),
 \end{aligned}$$

wenn

$$s = \frac{1}{r^3}, \quad s' = \frac{ds}{dt}, \quad \dots \quad \text{für } t = 0$$

gesetzt wird, in α_0'' die Glieder mit $e^{\mathcal{J}^6}$, in α_1'' die mit $e^{\mathcal{J}^7}$ vernachlässigt werden. α_0 und α_1 werden aus α_0'' und α_1'' erhalten, indem man \mathcal{J} durch $-\mathcal{J}''$ ersetzt.

Die zugehörigen Werte von y und y'' werden erhalten, indem man A_0, A_1 mit B_0, B_1 vertauscht, wo

$$B_0 = y, \quad B_1 = \frac{dy}{dt} \quad \text{für } t = 0.$$

Nimmt man die Bahnebene als xy -Ebene, so ist

$$n = r'r'' \sin(v'' - v') = x'y'' - x''y'$$

$$n' = rr'' \sin(v'' - v) = xy'' - x''y';$$

setzt man für x, y, x'', y'' die obigen Ausdrücke, so wird

$$n = (A_0B_1 - A_1B_0) \alpha_1''$$

$$n' = (A_0B_1 - A_1B_0) (\alpha_0 \alpha_1'' - \alpha_0'' \alpha_1),$$

wo

$$A_0B_1 - A_1B_0 = x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} = \sqrt{p};$$

damit wird

$$n = \mathcal{J} \sqrt{p} U, \quad n' = \mathcal{J}' \sqrt{p} V,$$

$$U = 1 - \frac{1}{3!} u_2 - \frac{1}{1 \cdot 2} \sigma_1 u^3 + \frac{1}{5!} (1 - 6\sigma_2) u^4$$

$$+ \frac{1}{5!} (\sigma_1 - 4\sigma_3) u^5 - \frac{1}{7!} u^6,$$

$$V = 1 - \frac{1}{3!} v^2 - \frac{1}{1 \cdot 2} \sigma_1 f v^3 + \frac{1}{5!} (1 - (1 + 5f^2) \sigma_2) v^4$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{1}{5!} (2\sigma_1 - (3 + 5f^2) \sigma_3) f v^5 - \frac{1}{7!} v^6.$$

$$u = \mathcal{J} : r_1^{\frac{3}{2}}, \quad v = \mathcal{J}' : r'^{\frac{3}{2}};$$

$$f = \frac{\mathcal{J} - \mathcal{J}''}{\mathcal{J}'}, \quad \text{also } \mathcal{J} = \frac{1 + f\mathcal{J}'}{2}, \quad \mathcal{J}'' = \frac{1 - f\mathcal{J}'}{2};$$

$$\frac{ds}{dt} = s^{\frac{3}{2}}\sigma_1, \frac{1}{2!} \frac{d^2s}{dt^2} = s^2\sigma_2, \frac{1}{3!} \frac{d^3s}{dt^3} = s^{\frac{5}{2}}\sigma_3, \dots$$

letztere Ausdrücke für $t = 0$ genommen.

$$n'' = \mathcal{J}'' \sqrt{p} U'',$$

wo U'' aus U erhalten wird, indem man $-\mathcal{J}''$ statt \mathcal{J} setzt.

Die Bezeichnungen $f, \sigma_1, \sigma_2, \dots$ wurden von P. Harzer*) eingeführt. Harzer setzt außerdem

$$\frac{\mathcal{J}'}{r_1^{\frac{3}{2}}} = 2\nu,$$

da f bei der Bahnbestimmung meist klein ist, so sind $\mathcal{J}':r_1^{\frac{3}{2}}, \mathcal{J}'':r_1^{\frac{3}{2}}$ von ν nicht sehr verschieden. Diese Größe kann daher als Haupttypus der kleinen Größen erster Ordnung angesehen werden.

2. Ein bemerkenswerter Näherungsausdruck für die Dreiecksfläche wird erhalten durch

$$\left(\frac{r'}{r}\right)^3 = 1 - (1-f)\sigma_1\nu + (1-f)^2\sigma_2\nu^2 - \dots,$$

$$\left(\frac{r'}{r''}\right)^3 = 1 + (1+f)\sigma_1\nu + (1+f)^2\sigma_2\nu^2 + \dots,$$

$$\left(\frac{r'^2}{r r''}\right)^3 = 1 + 2f\sigma_1\nu + (2(1+f^2)\sigma_2 - (1-f^2)\sigma_1^2)\nu^2 + \dots,$$

$$\left(\frac{r'}{\sqrt{r r''}}\right)^3 = 1 + f\sigma_1\nu + ((1+f^2)\sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)\nu^2 + \dots,$$

$$\frac{\mathcal{J}'^2}{(\sqrt{r r''})^3} = \nu^2 + \frac{1}{2}f\sigma_1\nu^3 + \frac{1}{4}((1+f_2)\sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma_1^2)\nu^4 + \dots,$$

$$\frac{\mathcal{J}'^4}{(r r''^2)^3} = \nu^4 + f\sigma_1\nu^5 + \dots$$

Setzt man $r_0 = \sqrt{r r''}$, $\omega' = \mathcal{J}':r_0^{\frac{3}{2}}$,
so wird

$$n' = \mathcal{J}' \sqrt{p} \left(1 - \frac{\omega'^2}{3!} + \frac{\omega'^4}{5!} - \dots\right) = \mathcal{J}' \sqrt{p} \frac{\sin \omega'}{\omega'},$$

wo nur Glieder mit $\sigma_2\nu^4, \sigma_1^2\nu^4, \dots$ vernachlässigt sind. $\sin \omega':\omega'$ ist das Verhältnis des Dreieckes zum Sektor bei der kreisförmigen Bewegung mit dem Radius r_0 .

*) Publikation der Sternwarte in Kiel IX. 1901.

Wegen

$$\frac{1}{2}(\alpha + b) - \sqrt{\alpha b} = \frac{1}{2}(\sqrt{\alpha} - \sqrt{b})^2,$$

kann mit gleichem Grade der Genauigkeit und Übereinstimmung des Gliedes mit σ_2 gleich $+\frac{8}{15}\sigma_2\nu^4$ im obigen Verhältnis

$$r_0 = \frac{1}{2}(r + r'') \text{ oder } \frac{1}{r_0^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r''^3}\right)$$

gesetzt werden; für die letztere Annahme fällt das Glied mit $\sigma_1^2\nu^4$ weg.

$$n = \mathcal{J}\sqrt{p} \frac{\sin \omega}{\omega}, \quad \omega = \mathcal{J} : r_0^{\frac{3}{2}},$$

r_0 wird aus r' , r'' gerechnet; das erste Fehlerglied des Faktors $\sin \omega : \omega$ ist $+\frac{1}{3!}(1+f)^4\sigma_2\nu^4$.

3. Durch Division erhält man

$$\frac{n}{n'} = \frac{1+f}{2} \frac{U}{V},$$

welchen Ausdruck man in eine Potenzreihe nach ν entwickeln kann.

$$\begin{aligned} \text{Wird} \quad & \frac{1 - a_2\nu^2 + a_4\nu^4 + a_5\nu^5 - a_6\nu^6}{1 - b_2\nu^2 + b_4\nu^4 + b_5\nu^5 - b_6\nu^6} \\ & = 1 + c_2\nu^2 + c_3\nu^3 + c_4\nu^4 + c_5\nu^5 + c_6\nu^6 \end{aligned}$$

gesetzt, so ist

$$\begin{aligned} c_2 &= b_2 - a_2, \quad c_3 = b_3 - a_3, \quad c_4 = a_4 - b_4 + b_3(b_2 - a_2) \\ c_5 &= a_5 - b_5 + b_2(b_3 - a_3) + b_3(b_2 - a_2) \\ c_6 &= b_6 - a_6 + b_2(a_4 - b_4) + b_3(b_3 - a_3) + (b_2^2 - b_4)(b_2 - a_2). \end{aligned}$$

Damit wird mit Vernachlässigung der Glieder mit $e\nu^6, \dots$

$$\frac{n}{n'} = \frac{1+f}{2} (1 + (1-f)W)$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{6}(3+f)\nu^2 - \frac{1}{12}(1-4f-f^2)\sigma_1\nu^3 \\ &+ \left(\frac{1}{3!60}(75+7f-15f^2-3f^3) + \frac{1}{6!0}(5-7f+15f^2\right. \\ &\quad \left.+ 3f^3)\sigma_2\right)\nu^4 \\ &- \left(\frac{1}{3!60}(17-122f-12f^2+18f^3+3f^4)\sigma_1\right)\nu^5 \\ &+ \frac{1}{3!0}(1-6f+4f^2-6f^3-f^4)\sigma_3 \\ &+ \frac{3+f}{15120}(427-132f-54f^2+12f^3+3f^4)\nu^6. \end{aligned}$$

Für die Näherungswerte nach 2 wird

$$\frac{n}{n'} = \frac{1+f \sin \omega}{2} \cdot \frac{\sin \omega'}{\omega} = \frac{1+f}{2} \frac{\omega'}{\sin \omega'} \cdot \frac{\omega}{\sin \omega},$$

mit dem ersten Fehlergliede

$$-\frac{1-f^2}{60} (15 + 11f + 5f^2 + f^3) \sigma_2 \nu^4.$$

Das Verhältnis $n':n'$ wird aus $n:n'$ erhalten, indem man f und ν durch $-f$ und $-\nu$ ersetzt.

4. Aus

$$M = E - e \sin E, \quad r = a - ae \cos E,$$

erhält man

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{r\sqrt{a}}, \quad \frac{d^2E}{dt^2} = -\frac{1}{r^2\sqrt{a}} \frac{dr}{dt}, \text{ usw.};$$

dabei ist

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\sqrt{a}}{r} e \sin E, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{ae}{r^3} (\cos E - e) = \frac{e \cos v}{r^2},$$

also

$$r^3 \frac{d^2r}{dt^2} = p - r;$$

aus dieser Gleichung folgt, daß der dritte, vierte, .. Differentialquotient von r durch den ersten und zweiten ausgedrückt werden können.

Durch Differenziation der obigen Gleichung erhält man

$$r^3 \frac{d^3r}{dt^3} + 3r^2 \frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{dr}{dt} = 0;$$

also wenn r durch $s = 1:r^3$ ausgedrückt wird,

$$s''' = -ss' + 5 \frac{s's''}{s} - \frac{40}{9} \frac{s'^3}{s^2};$$

damit

$$\sigma_3 = -\frac{1}{6} \sigma_1 + \frac{5}{3} \sigma_1 \sigma_2 - \frac{20}{27} \sigma_1^3, \text{ usw.}$$

$$\sigma_1 = -\frac{3e \sin v'}{\sqrt{1+e \cos v'}}, \quad 2\sigma_2 = \frac{12e^2 - 3e \cos v' - 15e^2 \cos v'^2}{1+e \cos v'}.$$

II. Die Gibbsschen Ausdrücke für die Dreiecksverhältnisse.

Bricht man in den Reihenentwicklungen der Koordinaten des Himmelskörpers mit den Gliedern mit t^4 ab, sind drei Orte (x, y, z) , (x', y', z') , (x'', y'', z'') gegeben, so erhält man zur Bestimmung der fünf Koeffizienten A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 folgende sechs Gleichungen

$$\begin{aligned}x &= A_0 - \mathcal{J}'' A_1 + \mathcal{J}''^2 A_2 - \mathcal{J}''^3 A_3 + \mathcal{J}''^4 A_4 \\x' &= A_0 \\x'' &= A_0 + \mathcal{J} A_1 + \mathcal{J}^2 A_2 + \mathcal{J}^3 A_3 + \mathcal{J}^4 A_4 \\-\frac{x}{r^3} &= 2 A_2 - 6 \mathcal{J}'' A_3 + 12 \mathcal{J}''^2 A_4 \\-\frac{x'}{r'^3} &= 2 A_2 \\-\frac{x''}{r''^3} &= 2 A_2 + 6 \mathcal{J} A_3 + 12 \mathcal{J}^2 A_4.\end{aligned}$$

Aus diesen sechs Gleichungen können die Koeffizienten A_0, \dots, A_4 eliminiert werden. Setzt man die Werte von A_0 und A_2 in die erste und dritte, so wird A_1 eliminiert, indem man die erste mit \mathcal{J} , die dritte mit \mathcal{J}'' multipliziert und dann addiert; man erhält

$$\begin{aligned}\mathcal{J}x + \mathcal{J}''x'' &= \mathcal{J}'x' - \frac{1}{2}\mathcal{J}\mathcal{J}'\mathcal{J}''\frac{x'}{r'^3} + \mathcal{J}\mathcal{J}'\mathcal{J}''(\mathcal{J} - \mathcal{J}'')A_3 \\&\quad + \mathcal{J}\mathcal{J}'\mathcal{J}''(\mathcal{J}^2 - \mathcal{J}\mathcal{J}'' + \mathcal{J}''^2)A_4;\end{aligned}$$

setzt man den Wert von A_2 in die vierte und sechste Gleichung, so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{x'}{r'^3} - \frac{x}{r^3} &= -6 \mathcal{J}'' A_3 + 12 \mathcal{J}''^2 A_4 \\ \frac{x'}{r'^3} - \frac{x''}{r''^3} &= 6 \mathcal{J} A_3 + 12 \mathcal{J}^2 A_4,\end{aligned}$$

woraus

$$6 \mathcal{J}\mathcal{J}'\mathcal{J}'' A_3 = (-\mathcal{J} - \mathcal{J}'')\mathcal{J}'\frac{x'}{r'^3} + \mathcal{J}^2\frac{x}{r^3} - \mathcal{J}''^2\frac{x''}{r''^4}$$

$$12 \vartheta \vartheta' \vartheta'' A_4 = \vartheta \left(\frac{x'}{r^3} - \frac{x}{r^3} \right) + \vartheta'' \left(\frac{x'}{r^3} - \frac{x''}{r'^3} \right)$$

erhalten wird; setzt man diese Werte in die obige Gleichung und ordnet man nach x , x' , x'' , so erhält man

$$\begin{aligned} \vartheta x + \vartheta'' x'' &= \vartheta' x' \left(1 - \frac{3 \vartheta \vartheta'' + \vartheta^2 + \vartheta''^2}{12 r'^3} \right) \\ - \vartheta x \frac{\vartheta \vartheta'' - \vartheta^2 + \vartheta''^2}{12 r^3} &- \vartheta'' x'' \frac{\vartheta \vartheta'' + \vartheta^2 - \vartheta''^2}{12 r''^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \vartheta \left(1 + \frac{B}{r^3} \right) x - \vartheta' \left(1 - \frac{B'}{r'^3} \right) x' + \vartheta'' \left(1 + \frac{B''}{r''^3} \right) x'' &= 0, \\ 12 B &= \vartheta \vartheta'' - \vartheta^2 + \vartheta''^2, \quad 12 B' = \vartheta \vartheta'' + \vartheta^2 - \vartheta''^2, \\ 12 B'' &= 3 \vartheta \vartheta'' + \vartheta^2 + \vartheta''^2 = 5 \vartheta \vartheta'' + (\vartheta - \vartheta'')^2. \end{aligned}$$

In gleicher Weise erhält man

$$\begin{aligned} (2) \quad \vartheta \left(1 + \frac{B}{r^3} \right) y - \vartheta' \left(1 - \frac{B'}{r'^3} \right) y' + \vartheta'' \left(1 + \frac{B''}{r''^3} \right) y'' &= 0 \\ (3) \quad \vartheta \left(1 + \frac{B}{r^3} \right) z - \vartheta' \left(1 - \frac{B'}{r'^3} \right) z' + \vartheta'' \left(1 + \frac{B''}{r''^3} \right) z'' &= 0, \end{aligned}$$

welche drei Gleichungen zusammen die Gibbssche Fundamental-(Vektoren-)Gleichung enthalten.

Setzt man

$$N = \vartheta \left(1 + \frac{B}{r^3} \right), \quad N' = \vartheta' \left(1 - \frac{B'}{r'^3} \right), \quad N'' = \vartheta'' \left(1 + \frac{B''}{r''^3} \right),$$

so folgt aus dem Vergleich mit den Gleichungen des Art. 14, daß

$$N : N' : N'' = n : n' : n''.$$

Durch Einführung der Größe f erhält man

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{48} (1 - 4f - f^2) \vartheta'^2, \quad B' = \frac{1}{48} (5 - f^2) \vartheta'^2, \\ B'' &= \frac{1}{48} (1 + 4f - f^2) \vartheta'^2. \end{aligned}$$

2. Um die Genauigkeit der Gibbsschen Ausdrücke zu prüfen, stelle man deren Fehler in Potenzreihen nach ν dar; diese Entwicklung soll hier ebenfalls bis auf die Glieder

sechster Ordnung durchgeführt werden, aber mit Vernachlässigung der mit e multiplizierten Glieder sechster Ordnung.

Setzt man in dem Gibbsschen Ausdrücke

$$\frac{1 + \frac{B}{r^3}}{1 - \frac{B'}{r'^3}} = 1 + \frac{B}{r^3} + \frac{B'}{r'^3} + \frac{B^2}{r^6} + \frac{BB'}{r^3 r'^3} + \frac{B'^3}{r'^6} + \frac{BB'^2}{r^3 r'^6},$$

für $(r' : r)^3$ den Wert

$$1 - (1 - f) \sigma_1 \nu + (1 - f)^2 \sigma_2 \nu^2 - (1 - f)^3 \sigma_3 \nu^3,$$

so erhält man zugehörige Reihenentwicklung von $N : N'$.

Damit erhält man für den Unterschied

$$\frac{n}{n'} - \frac{N}{N'} = m$$

$$m = -f F_2(f) (1 - 6 \sigma_2) \nu^4 - F_1(f) \sigma_1 \nu^5 + F_3(f) \sigma_3 \nu^5 + F_0(f) \nu^6,$$

$$F_2(f) = \frac{1 - f^2}{360} (9 - f^2)$$

$$F_1(f) = \frac{1 - f^2}{1440} (9 - 144f + 6f^2 + 16f^3 + f^4)$$

$$F_3(f) = \frac{1 - f^2}{120} (3 - 18f + 32f^2 + 2f^3 - 3f^4)$$

$$F_0(f) = \frac{(3 + f)(1 - f^2)}{60480} (-21 - 264f + 242f^2 + 24f^3 - 29f^4).$$

Der Unterschied

$$\frac{n''}{n'} - \frac{N''}{N'} = m''$$

wird aus m erhalten, indem man $-f$ und $-\nu$ statt f und ν setzt.

3. Aus den Werten r, r', r'' können σ_1 und σ_2 und damit σ_3, \dots auf folgende Art bestimmt werden. Es ist

$$\left(\frac{r'}{r}\right)^3 = 1 - (1 - f) \sigma_1 \nu + (1 - f)^2 \sigma_2 \nu^2 - (1 - f)^3 \sigma_3 \nu^3 + \dots$$

$$\left(\frac{r''}{r''}\right)^3 = 1 + (1 + f) \sigma_1 \nu + (1 + f)^2 \sigma_2 \nu^2 + (1 + f)^3 \sigma_3 \nu^3 + \dots$$

Setzt man in diese Gleichungen für σ_3, \dots ihre Werte durch σ_1 und σ_2 ausgedrückt, so erhält man zwei Gleichungen, aus welchen σ_1 und σ_2 bestimmt werden können. Die Auflösung dieser Gleichungen kann auf folgende Art geschehen. Bezeichnet man mit α und β die Näherungswerte von σ_1 und σ_2 , wenn in den obigen Gleichungen die Glieder mit ν^3, \dots vernachlässigt werden, d. h. ist

$$\left(\frac{r'}{r}\right)^3 = 1 - (1-f)\alpha\nu + (1-f)^2\beta\nu^2$$

$$\left(\frac{r'}{r''}\right)^3 = 1 + (1+f)\alpha\nu + (1+f)^2\beta\nu^2$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\left(\left(\frac{r'}{r''}\right)^3 - 1\right)(1-f)^2 + \left(1 - \left(\frac{r'}{r}\right)^3\right)(1+f)^2}{(1-f^2)\nu}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{\left(\left(\frac{r'}{r''}\right)^3 - 1\right)(1-f) - \left(1 - \left(\frac{r'}{r}\right)^3\right)(1+f)}{(1-f^2)\nu^2}$$

oder

$$\alpha = \frac{A''^2 \left(\left(\frac{r'}{r''}\right)^3 - 1\right) + A^2 \left(1 - \left(\frac{r'}{r}\right)^3\right)}{2AA''\nu}$$

$$\beta = \frac{A'' \left(\left(\frac{r'}{r''}\right)^3 - 1\right) - A \left(1 - \left(\frac{r'}{r}\right)^3\right)}{4AA''\nu^2},$$

so setze man die genauen Werte in der Form

$$\sigma_1 = \alpha + a_1\nu + a_2\nu^2 + \dots$$

$$\sigma_2 = \beta + b_1\nu + b_2\nu^2 + \dots$$

in die obigen Bestimmungsgleichungen und bestimme daraus die Koeffizienten $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$. Man erhält dann

$$\omega = \frac{\alpha}{3} - 10\frac{\alpha}{3}\beta + 40\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3$$

gesetzt, für $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots$ folgende Werte

$$\sigma_1 = \alpha + \frac{1}{2}(1-f^2)\omega\nu^2 + \dots$$

$$\sigma_2 = \beta + f\omega\nu + \dots$$

$$\sigma_3 = -\frac{1}{2}\omega + \frac{5}{3}f\alpha\omega\nu + \dots$$

$f \pm$		f positiv			f negativ		
f	F_2	F_1	F_3	F_0	F_1	F_3	F_0
0.00	5.3979	4.796	5.398	4.018 _n	4.796	5.398	4.018 _n
0.01	5.3979	4.720	5.371	4.070 _n	4.860	5.424	3.957 _n
0.02	5.3978	4.628	5.344	4.116 _n	4.916	5.449	3.886 _n
0.03	5.3975	4.512	5.317	4.157 _n	4.966	5.473	3.800 _n
0.04	5.3972	4.353	5.288	4.194 _n	5.010	5.497	3.691 _n
0.05	5.3967	4.100	5.258	4.228 _n	5.051	5.520	3.544 _n
0.06	5.3962	3.426	5.228	4.258 _n	5.087	5.542	3.318 _n
0.07	5.3956	3.859 _n	5.197	4.286 _n	5.121	5.564	2.811 _n
0.08	5.3948	4.232 _n	5.165	4.312 _n	5.152	5.585	2.900
0.09	5.3940	4.429 _n	5.132	4.336 _n	5.180	5.605	3.351
0.10	5.3931	4.563 _n	5.099	4.358 _n	5.207	5.626	3.568
0.11	5.3921	4.665 _n	5.065	4.379 _n	5.232	5.645	3.713
0.12	5.3909	4.747 _n	5.030	4.398 _n	5.256	5.664	3.821
0.13	5.3897	4.816 _n	4.992	4.416 _n	5.278	5.682	3.908
0.14	5.3884	4.874 _n	4.954	4.432 _n	5.299	5.700	3.981
0.15	5.3870	4.926 _n	4.917	4.448 _n	5.319	5.718	4.043
0.16	5.3854	4.971 _n	4.877	4.462 _n	5.337	5.734	4.097
0.17	5.3838	5.012 _n	4.837	4.476 _n	5.355	5.750	4.145
0.18	5.3821	5.048 _n	4.797	4.489 _n	5.371	5.766	4.188
0.19	5.3802	5.082 _n	4.756	4.501 _n	5.387	5.781	4.226
0.20	5.3783	5.112 _n	4.715	4.512 _n	5.402	5.796	4.262
0.21	5.3762	5.141 _n	4.673	4.522 _n	5.417	5.810	4.295
0.22	5.3741	5.167 _n	4.632	4.532 _n	5.431	5.824	4.326
0.23	5.3718	5.191 _n	4.590	4.541 _n	5.444	5.838	4.354
0.24	5.3694	5.214 _n	4.550	4.549 _n	5.456	5.851	4.381
0.25	5.3669	5.235 _n	4.510	4.558 _n	5.468	5.864	4.406

Da in der Praxis f als eine kleine Größe, (mindestens erster Ordnung) angesehen werden kann, ω ebenfalls meistens klein ist, so würde es genügen, falls nur Glieder sechster Ordnung in m und m'' berücksichtigt werden,

$$\sigma_1 = \alpha, \quad \sigma_3 = -\frac{1}{2}\omega$$

zu setzen. Es ist aber zweckmäßig, anzusetzen

$$\sigma_1 = \alpha + \frac{\omega}{2} \nu^2, \quad \sigma_2 = \beta + f\omega\nu, \quad \sigma_3 = -\frac{\omega}{2} + 10f\frac{\alpha}{3}\frac{\omega}{2}\nu.$$

Die Logarithmen der in Einheiten der siebenten Stelle gegebenen Größen $F_2(f)$, $F_1(f)$, $F_3(f)$, $F_0(f)$ werden aus beifolgender Tafel entnommen.

$F_1(f)$ wird Null für $f = 0.063$, $F_0(f)$ wird Null für $f = -0.074$. In den Bereichen dieser Wurzeln interpoliert man die betreffenden Zahlen statt der Logarithmen. In Einheiten der fünften Stelle ist

f	$F_1(f)$	f	$F_0(f)$
+ 0.05	+ 126	- 0.06	- 21
+ 0.06	+ 27	- 0.07	- 6
+ 0.07	- 72	- 0.08	+ 8
+ 0.08	- 171	- 0.09	+ 22

Für $f = 0$, fallen die Fehlerglieder mit ν^4 weg, die mit ν^5 werden für $n:n'$ und $n'':n'$ gleich, aber entgegengesetzt.

Zusatz. Die Ableitung der Gibbsschen Ausdrücke erfordert nicht die Annahme, daß der Ort (x', y', z') von dem der Anfang der Zeit gezählt wird, der Zeit nach der mittlere ist; der Zeit nach kann die Aueinanderfolge der drei Orte auch sein

$$(x', y', z'), \quad (x, y, z), \quad (x'', y'', z'')$$

oder

$$(x, y, z), \quad (x'', y'', z''), \quad (x', y', z');$$

im ersten Falle ist: \mathcal{J} positiv, \mathcal{J}'' negativ, f positiv,
 „ zweiten „ „ \mathcal{J} negativ, \mathcal{J}'' positiv, f negativ.
 Bei gleichen Zwischenzeiten ist $f = \pm 3$, die Glieder mit
 ν^4 fallen ebenfalls weg.

III. Die Gibbssche Methode der Bahnbestimmung.

1. Gibbs verwendet die drei Gleichungen (1), (2), (3) unmittelbar zur Bestimmung der (heliozentrischen und geozentrischen) Entfernungen des Himmelskörpers. Als Unbekannte werden am zweckmäßigsten (wie in Art. 16, (10)) Größen q , q' , q'' benutzt,

$$q = \frac{e}{\cos \beta} + R \cos \delta, \quad \cos \delta = \cos \beta \cos(\lambda - L),$$

$$x = \cos \beta \cos \lambda \left(q - R \cos \delta + \frac{R \cos L}{\cos \beta \cos \lambda} \right)$$

$$y = \cos \beta \sin \lambda \left(q - R \cos \delta + \frac{R \sin L}{\cos \beta \sin \lambda} \right)$$

$$z = \sin \beta (q - R \cos \delta),$$

$$r^2 = q^2 + p^2, \quad p = R \sin \delta;$$

ebenso für den zweiten und dritten Ort.

Diese Größen q , q' , q'' werden aus den Gleichungen (1), (2), (3) auf folgende Art bestimmt. Es seien q , q' , q'' Näherungswerte für diese Größen, $q + \Delta q$, $q' + \Delta q'$, $q'' + \Delta q''$ die verbesserten Werte, so müssen letztere den drei Gleichungen (1), (2), (3) genügen. Dabei entwickelt man (wie in Note 4), 4 angegeben ist) nach Potenzen Δq , $\Delta q'$, $\Delta q''$; in der Regel begnügt man sich mit den ersten Potenzen, oder berücksichtigt die zweiten nur näherungsweise. Für N , N' , N'' wähle man die Form

$$N = A \left(1 + \frac{B}{r^3} \right), \quad N' = 1 - \frac{B'}{r'^3}, \quad N'' = A'' \left(1 + \frac{B''}{r''^3} \right),$$

indem man die obigen Ausdrücke durch \mathcal{J}' dividiert und $\mathcal{J} = A\mathcal{J}'$, $\mathcal{J}'' = A''\mathcal{J}'$ setzt.

Aus der Ableitung der Gibbsschen Ausdrücke $n:n'$ und $n'':n'$, oder aus dem Umstande, daß deren Glieder mit ν^4 gleich, aber entgegengesetzt sind, die Unterschiede $x'' - x, \dots$ von der ersten Ordnung sind, folgt, daß diese zuletzt erhaltenen Gleichungen einschließlich der Glieder mit ν^4 genau sind.

Für den Anfang der Rechnung setzt man die Bewegung als kreisförmig mit dem Radius r voraus, dadurch enthält jede der obigen drei Gleichungen nur diese Unbekannte. Für einen kleinen Planeten setze man in eine dieser Gleichungen $\log r = 0.3$ und $\log r = 0.4$, dann kann man aus zugehörigen Resultaten durch Interpolation — die auch eine Extrapolation werden kann — $\log r$ nahezu auf zwei Dezimalen richtig erhalten. Mit diesem Werte $\log r$ werden die Ausgangswerte q, q', q'' berechnet. Gibbs erzielt zwar beim Ceresbeispiel mit dem Ausgange $\log r = 0.516$ (Mittel der mittleren Entfernungen von Mars und Jupiter) ein gutes Resultat; aber nur deshalb, weil infolge der verhältnismäßig großen Zwischenzeiten ein Unterschied zwischen kleinen und großen Zahlen kaum gemacht werden kann. Bei wirklich kleinen Zwischenzeiten ist diese Methode praktisch unbrauchbar. Denn der Koeffizient von $\Delta q'$ ist von der Summe der Koeffizienten von Δq und $\Delta q''$ nur um Größen zweiter Ordnung verschieden; der Nenner dieser Unbekannten daher sehr klein (beim Juno-Beispiel für $\log r = 0.333$ ist er 0.000041), und wird durch fehlerhafte Annahme von q, q', q'' sehr beeinflusst. Gleiches gilt von den Zählern von $\Delta q, \Delta q', \Delta q''$. Von einer Zusammenstellung der hieher gehörigen Formeln kann daher abgesehen werden*).

*) Eine solche mit ausführlicher Erläuterung der Unbrauchbarkeit dieser Bestimmung hat der Verfasser in seiner Schrift »Die Gauß-Gibbssche Methode...«, Leipzig, 1905, gegeben.

IV. Gauß-Gibbssche Methode.

1. Die Gibbsschen Ausdrücke für $n:n'$ und $n'':n'$ geben für diese Größen das erste Fehlerglied von vierter Ordnung nach ν , dasselbe von gleicher Größe und entgegengesetzten Zeichen und überdies mit dem Faktor f und einem kleinen Koeffizienten. In Wirklichkeit ist daher die Ordnungszahl ihrer Fehler eine kleine Größe höherer Ordnung als vierter, und da die Gibbsschen Ausdrücke überaus einfach sind, so lassen sie sich auch mit großem Vorteil auf die in Art. 15, 16 gegebene Gaußsche Methode anwenden, wodurch für die erste Hypothese die Genauigkeit der Gibbsschen Ausdrücke mit der Leichtigkeit der Ausführung der Rechnung nach Gauß vereint werden kann. In Übereinstimmung mit dem daselbst gelehrtten Vorgange verfährt man auf folgende Art. Setzt man in die Gleichung (7) des Art. 15

$$\frac{q'}{\cos \beta'} = c - b \frac{n}{n'} - d \frac{n''}{n'}$$

für $n:n'$ und $n'':n'$ die Gibbsschen Näherungswerte, so erhält man

$$\frac{q'}{\cos \beta'} = c - \frac{(Ab + A''d)r'^3 + ABb(r':r)^3 + A''B''d(r':r'')^3}{r'^3 - B'}$$

oder nach Ausführung der Division

$$\frac{q'}{\cos \beta'} = c - (Ab + A''d) - \frac{C + S}{r'^3 - B'}$$

$$C = (Ab + A''d)B', \quad S = ABb(r':r)^3 + A''B''d(r':r'')^3,$$

also

$$(11^*) \quad q' = D - \frac{C + S}{r'^3 - B'}$$

$$r'^2 = p'^2 + q'^2, \quad p' = R' \sin \delta',$$

$$D = c - (Ab + A''d) + R' \cos \delta'$$

ist mit dem Werte λ der Gleichung (11) des Art. 16 erster Hypothese identisch.

Um die Genauigkeit dieser Gleichung zu prüfen, möge eine Abschätzung des ersten Fehlergliedes für q' bei den kleinen Planeten mitgeteilt werden. Dieses beträgt

$$fF_2(f)(b-d)(1-6\sigma_2)\nu^4.$$

Wird $F_2(f)$ durch $f:40$ ersetzt, für $6\sigma_2$ der größte negative Wert $-9e$, etwa $=-3$, gesetzt, so wird dieses Fehlerglied

$$\frac{f}{10}(b-d)\nu^4,$$

wobei dieser Koeffizient von ν^4 in der Praxis kaum die Einheit erreicht. Selbst für das Gaußsche Juno-Beispiel, wo $b=38.43$, $d=108.46$, also $d-b=70$ mit b oder d von gleicher Ordnung erscheint, $f=0.091$, wird dieser vergrößerte Koeffizient 0.64 (der genaue beträgt 0.26); für Pallas nur 0.023.

Hypothesen von S . In erster setzt man $r=r'=r''$ und erhält damit

$$S_0 = ABb + A''B'd,$$

dabei wird $C+S_0=\mu'$, die Gleichung (11*) wird mit der Bestimmungsgleichung der Größe $x'=q'$ der »verbesserten« ersten Gaußschen Hypothese identisch. Diese Annahme bewirkt für q' einen Fehler

$$\frac{(1-f^2)}{24}((1-f^2)(b-d) - 4f(b+d))\sigma_1\nu^3;$$

also, wenn \mathcal{J} , \mathcal{J}'' nicht sehr verschieden sind, von der Ordnung drei. Günstig wirkt auch der Umstand, daß in der Praxis B' von B und B'' , also auch C von S ungefähr das Fünffache ist.

Die Gleichungen (12) des Art. 16 werden in erster Hypothese ersetzt durch

$$\frac{n}{n'} = \frac{A\left(1 + \frac{B}{r'^3}\right)}{1 - \frac{B'}{r'^3}}, \quad \frac{n''}{n'} = \frac{A''\left(1 + \frac{B''}{r'^3}\right)}{1 - \frac{B'}{r'^3}},$$

deren Fehler ist (nach Gaußscher Schätzung) von der Ordnung vier; die Sicherheit wird noch dadurch erhöht, daß — abgesehen von der Kleinheit von B und B'' — in der Praxis diese Größen positiv sind; damit rechnet man nach den Gleichungen (13) und (14) ϱ und ϱ'' und daraus r und r'' ; deren Sicherheit hängt nur von der Sicherheit der Größe ϱ' ab.

Mit den erhaltenen Werten von r , r' , r'' wird die zweite Hypothese von S berechnet, wobei man, falls eine ganz unbekannte Bahn zu bestimmen ist, an die Zwischenzeiten die Korrektur wegen Aberration anbringt, womit man die genauen Werte von A , A' , B , B' , B'' erhält.

Mit dem erhaltenen Werte S der zweiten Hypothese wird die Gleichung (11*) neuerdings aufgelöst, wodurch man die zusammengehörigen Werte q' , r' , ϱ' der zweiten Hypothese erhält. Mit dem Werte r' dieser Hypothese und den Werten r und r'' aus der ersten Hypothese werden

$$\frac{n}{n'} = \frac{A \left(1 + \frac{B}{r^3}\right)}{1 - \frac{B'}{r'^3}}, \quad \frac{n''}{n'} = \frac{A'' \left(1 + \frac{B''}{r''^3}\right)}{1 - \frac{B'}{r'^3}}$$

gerechnet und dann in Verbindung mit dem Werte ϱ' der zweiten Hypothese zur Bestimmung von ϱ und ϱ'' und damit von r und r'' verwendet.

Aus den erhaltenen Werten r , r' , r'' der zweiten Hypothese wird die dritte Hypothese von S , und daraus werden die Werte von r , r' , r'' der dritten Hypothese bestimmt; usw.

Die Gleichung (11*) wird durch Versuche aufgelöst. Bei einer ganz unbekanntem Bahn eines kleinen Planeten vernachlässigt man zunächst B' und setzt $r'^3 = 10$ und $r'^2 = 20$, womit man die beiden Werte

$$D - \frac{C + S_0}{10}, \quad D - \frac{C + S_0}{20}$$

für q' erhält, mit welchen man die Lösung zunächst nach

der Regula falsi beginnt. Für die weitere Verbesserung verwendet man zweckmäßiger die Newtonsche Methode. Ist q' ein Näherungswert und setzt man

$$f(q') = D - \frac{C+S}{r'^3 - B'} - q'$$

$$- f'(q') = 1 - 3r' q' \frac{C+S}{(r'^3 - B')^2},$$

so ist

$$q' + \frac{f(q')}{-f'(q')}$$

der verbesserte Wert.

Ist q' bereits auf die ersten drei bedeutenden Stellen genau, so kann für diese und für die folgenden Hypothesen von S der damit etwa vierstellig berechnete Wert von $-f'(q')$ beibehalten werden.

Berücksichtigt man die zweiten Potenzen der Verbesserung von q' und setzt man

$$h = \frac{f(q')}{-f'(q')},$$

so ist der genauere Wert von q'

$$q' + h + \frac{f''(q')}{-f'(q')} \frac{h^2}{2},$$

$$f''(q') = \frac{3(C+S)}{(r'^3 - B')^2} \left(r' + \frac{q'^2}{r'} - \frac{6(r' q')^2}{r'^3 - B'} \right),$$

oder, wenn $\frac{1}{r'^3 - B'} = \frac{1}{r'^3} + \frac{B'}{r'^6}$ gesetzt wird,

$$f''(q') = -\frac{3r'(C+S)}{(r'^3 - B')^2} \left(\left(\frac{q'}{r'} \right)^2 \left(5 + 6 \frac{B'}{r'^3} \right) - 1 \right).$$

Werden überdies die Zeiten wegen Aberration verbessert, sind $B' + \Delta B'$, $C + \Delta C$, $D + \Delta D$, $S + \Delta S$ die neuen Werte von B' , C , D , S , so ist der neue Ausgangswert $q' + \Delta q'$ bestimmt durch

$$-f'(q') \Delta q' = \Delta D - \frac{\Delta C + \Delta S}{r'^3 - B'} - \frac{C+S}{(r'^3 - B')^2} \Delta B'.$$

Sind q' , r' die Werte der Hypothese S , ist S' die darauf folgende Hypothese, so wird für diese die Auflösung der Gleichung (11*) mit dem Werte

$$q' + \frac{S - S'}{-f'(q')(r'^3 - B')}$$

begonnen.

Die Rechnung der Hypothesen mit S wird so lange wiederholt, bis die Unterschiede in $\log r'$ hinreichend klein werden. Zwei Hypothesen genügen gewöhnlich, drei selbst beim Gaußschen Ceres-Beispiel. Die vollständige Durchführung dieser Rechnung entspricht der »ersten Gibbsschen« Hypothese.

2. Die Gauß-Gibbssche Methode liefert die Grundlagen der einzelnen Hypothesen, als welche auch die Näherungswerte von $n:n$ und $n':n'$ angesehen werden können, bereits nach Erhalt von r, r', r'' , während nach Gauß — abgesehen von der um eine Ordnung höheren Genauigkeit der Gleichung (11*) gegenüber der Gleichung (11) am Ausgange der Hypothesenrechnungen — noch die Größen f, f', f'', y, y'' benötigt werden. Ein weiterer Vorteil der Rechnung ist auch darin begründet, daß nach Berechnung des allen Hypothesen für S gemeinsamen Ausdruckes D keine Größe als Unterschied großer Zahlen erhalten wird.

3. Die Konvergenz der Hypothesen für S möge an den Gaußschen Beispielen der Theoria Motus Juno, Pallas und Ceres erläutert werden. Für eine genaue Beurteilung der Konvergenz müssen entweder in allen Hypothesen S die (wegen Aberration) unkorrigierten oder korrigierten Zeiten beibehalten werden; es darf also nicht die erste Hypothese S mit den unkorrigierten, die zweite und die folgenden mit den korrigierten Zeiten gerechnet werden.

I. Beim Planeten Juno genügt die zweite Hypothese von S . Denn der Wert von $\log r'$ weicht von dem der dritten Hypothese nur um drei Einheiten der siebenten Stelle ab.

II. Beim Pallas-Beispiel gibt die erste Hypothese S die Werte $\log r, \log r', \log r''$ mit Unterschieden — 3997, — 1367,

+ 850 von den definitiven (dritten) Gaußschen, während sie für die Gaußsche erste Hypothese — 16062, — 2188, + 13778 Einheiten der siebenten Stelle betragen; wobei allerdings für die dritte Gaußsche Hypothese die Zeiten korrigiert wurden. Für die zweite Hypothese S betragen diese Unterschiede + 99, + 27, + 101.

III. Beim Ceres-Beispiel, das auch als Leistungsprobe der Gaußschen Methode angesehen werden kann, sind $\varrho:r^{\frac{3}{2}} = 0.52$, $\varrho'':r''^{\frac{3}{2}} = 0.55$ kleine Größen erster Ordnung, $c = 1.10\dots$, $b = -3.11\dots$, $d = 2.04\dots$

groß zweiter Ordnung; bei den letzteren findet ein Übergang vom Negativen zum Positiven statt, wodurch die Abschätzung der Ordnung der Größen illusorisch wird. Für dieses Beispiel gibt P. Harzer durch differentiellen Anschluß an die Beobachtungen folgende definitive Werte

$$\begin{aligned} \log r &= 0.4282785 && \text{daraus folgt} \\ \log r' &= 0.4132812 && \log n:n' = 9.7512420 \\ \log r'' &= 0.4062010, && \log n'':n'' = 9.7768747. \end{aligned}$$

Die Abweichungen von diesen Werten in Einheiten der siebenten Stelle betragen für die I., II., III. Hypothese von S

	I.	II.	III.
$\log r$	+ 7543	+ 903	+ 292
$\log r'$	— 8815	— 1199	— 267
$\log r''$	— 22172	— 3090	+ 96

während sie bei Gauß für die I., II., III. Hypothese von P und Q betragen

$\log r$	— 41149	— 8988	— 2056
$\log r'$	+ 18086	+ 3441	+ 705
$\log r''$	— 32702	— 9965	— 2687

4. Wenn bei größeren Zwischenzeiten \mathfrak{S} und \mathfrak{S}'' die Gibbsschen Ausdrücke nicht ausreichen, so rechnet man mit den bisher erhaltenen Werten r, r', r'' , wie in Art. 16 und 17 angegeben ist, die Größen f, f', f'' und y, y'' , damit

$$P = \frac{\mathfrak{S}'' y}{\mathfrak{S} y''}, \quad Q = \frac{\mathfrak{S} \mathfrak{S}'' r'^2 : r r''}{y y'' \cos f \cos f' \cos f''}$$

$$\frac{n}{n'} = \frac{1}{1+P} \left(1 + \frac{Q}{2r^3} \right), \quad \frac{n''}{n'} = \frac{n}{n'} P,$$

als genaue Werte zu r, r', r'' zugehörig.

Eine Abkürzung dieser Rechnung kann, wie in Note (10) 3. mitgeteilt ist, durch Berechnung der Größen f, f', f'' aus dem Dreiecke mit den Seiten $rn, r'n', r''n''$ erzielt werden.

Die Verbesserung der Werte r, r', r'' kann nun auf zweierlei Art geschehen:

1) Mit den erhaltenen Werten P und Q werden (nach den Gleichungen (11), (12), (13), (14) des Art. 16) neue Werte von $(\varrho', \varrho, \varrho'')$ oder (r', r, r'') gerechnet; d. h. es wird das gewöhnliche Gaußsche Verfahren der Bestimmung der Entfernungen aus P und Q eingeschlagen.

2) Die Verbesserung der erhaltenen Werte r, r', r'' oder q, q', q'' kann auch auf differentiellem Wege geschehen, indem den drei Bewegungsgleichungen durch die richtigen Werte $q + \Delta q, q' + \Delta q', q'' + \Delta q''$ genügt wird, wobei für $n:n'$ und $n'':n'$ die vorigen durch P und Q bestimmten Ausdrücke benutzt werden, für die Differentialquotienten von $n:n'$ und $n'':n'$ die strengen Ausdrücke durch die Gibbsschen ersetzt werden. Da aber, wie bereits erwähnt wurde, die drei Gleichungen (3), (4), (5) des Art. 14 (nach Division durch n') wegen der Kleinheit des Nenners und Unsicherheit der Rechnung nicht geeignet sind, so benutze man die Gleichungen (7) des Art. 15, (13) und (14) des Art. 16. Die Aufstellung (30) und Auflösung dieser Glei-

chungen nach Δq , $\Delta q'$, $\Delta q''$ erscheint aber deshalb in der Regel überflüssig, weil die erhaltenen Werte P und Q von jenen, welche den genauen Werten r , r' , r'' entsprechen, nur wenig abweichen. Es genügt daher die aus P und Q erhaltenen genaueren Werte $n:n'$ und $n'':n'$ in die Gleichungen (7) des Art. 15, (13) und (14) des Art. 16 einzusetzen, um definitive Werte von ϱ' , ϱ , ϱ'' zu erhalten, mit welchen dann die Berechnung der Elemente vorgenommen wird. Bei großer Zwischenzeit der ersten und dritten Beobachtung wird diese Verbesserung der Entfernungen nötigenfalls wiederholt.

5. Für das Ceres-Beispiel erhält man aus den Werten r , r' , r'' der dritten Hypothese S

$$f = 15^{\circ}39'32''.58, \quad f'' = 15^{\circ}48'9''.44,$$

welche von den definitiven Harzerschen nur um $-1''.55$ und $-1''.85$ abweichen. Damit wird

$$\log \frac{n}{n'} = 9.7512451, \quad \log \frac{n''}{n'} = 9.7768770,$$

die damit berechneten Werte von $\log r$, $\log r'$, $\log r''$ weichen von den definitiven Harzers um $+21$, -11 , $+6$ Einheiten der siebenten Stelle ab. Wiederholt man die Rechnung mit der erwähnten Abkürzung der Berechnung von f , f'' (die Abweichungen von den definitiven betragen $0'.0$, $-0'.1$), so erhält man Werte von $\log n:n'$ und $\log n'':n'$, die von den definitiven um $+5$ und -1 Einheiten der siebenten Stelle abweichen; die daraus berechneten Werte von $\log r$, $\log r'$, $\log r''$ weichen von den definitiven um -3 , $+4$, $+4$ Einheiten ab.

Wird gleich die erste Verbesserung derart ausgeführt, daß man die Größen f , f'' aus dem Dreiecke mit den Seiten

$$a = \frac{r}{r'} \frac{n}{n'}, \quad b = \frac{r''}{r'} \frac{n''}{n'}, \quad c = 1,$$

wo r, r', r'' die Werte der dritten Hypothese für S ,

$$\log \frac{n}{n'} = 9.7513081, \quad \log \frac{n''}{n'} = 9.7769427$$

die aus ihnen gerechneten Gibbsschen Werte bedeuten, bestimmt; so erhält man zwar

$$f = 15^{\circ}39'37''.6, \quad f'' = 15^{\circ}48'17''.4,$$

damit Werte für $\log r, \log r', \log r''$, die von den definitiven Harzerschen um $+40, -11, +42$ abweichen. Die Wiederholung der Rechnung gibt aber genau dieselben Werte wie vorher.

Zur Würdigung dieser Art der Bestimmung der drei heliozentrischen Entfernungen r, r', r'' sollen noch die Abweichungen der Logarithmen der Werte von Gauß IV. interpolierter (End-) Hypothese und der Harzerschen Spezial-Methode (S. 96) mitgeteilt werden. Diese betragen in Einheiten der siebenten Stelle

	Gauß	Harzer
$\log r$	— 7	+ 6
$\log r'$	— 5	— 7
$\log r''$	— 23	— 22

6. Diese umständliche, größtenteils sechsstellig auszuführende Berechnung der verbesserten Dreiecksverhältnisse kann aber mit Rücksicht darauf, daß eine einheitliche Bahnbestimmung (nicht Verbesserung einer Bahn) aus drei Beobachtungen nur eine mäßige Zwischenzeit — bei kleinen Planeten in der Regel unter hundert Tage — umfaßt, dadurch umgangen werden, daß man die Verbesserungen m und m'' der Gibbsschen Dreiecksverhältnisse (in Potenzreihen nach ν entwickelt) mittels der erhaltenen Näherungswerte r, r', r'' berechnet. Die dazu nötigen Formeln und Tabellen sind auf S. 6—9 mitgeteilt. Zur Ausführung dieser

Rechnung mag folgendes bemerkt werden. Der Näherungswert β der Größe σ_2 — der wichtigsten dieser Verbesserung — wird als Quotient zweier Größen erhalten, dessen Dividend eine kleine Größe dritter Ordnung ist, die aus den endlichen Werten r, r', r'' (ohne Zuziehung kleinerer Faktoren) gerechnet werden muß; der Nenner wird unmittelbar als kleine Größe zweiter Ordnung erhalten und ist sicher, wenn auch r' nur in den ersteren Stellen sicher ist. Etwas sicherer ist die Bestimmung des Zählers von α als kleine Größe zweiter Ordnung. Aus den Werten

$$\left(\frac{r'}{r''}\right)^3 - 1, \quad 1 - \left(\frac{r'}{r}\right)^3$$

rechnet man α und β mit fünfstelligen Logarithmen. Sind aber $\log r, \log r', \log r''$ auch nur um wenige Einheiten der fünften Stelle unsicher, so kann — trotz teilweiser Fehler tilgung (vgl. Zweiter Anhang, Nr. 10)3) — durch das Verschwinden der sicheren Anfangsstellen bei der Berechnung der Zahlen von α und β unter ungünstigen Umständen in $\log \alpha$ kaum die dritte Stelle, in $\log \beta$ kaum die zweite Stelle der Mantisse mit Sicherheit verbürgt werden. Für die Berechnung von $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ aus den Werten α und β genügen drei- oder höchstens vierstellige Logarithmen. Durch diesen Umstand wird diese Verbesserung der Gibbsschen Ausdrücke der Dreiecksverhältnisse auf kleine Werte von ν (etwa bis $\nu = 1:4$) beschränkt, und dadurch erscheint auch die Berücksichtigung der höheren Potenzen von ν überflüssig.

Nach Bestimmung der Verbesserungen m und m'' werden die verbesserten Werte von $\log n:n'$ und $\log n'':n'$ nach der Formel

$$\log(a+h) = \log a + M \frac{h}{a}$$

$$M = 0.4343 \quad \log M = 9.6378$$

berechnet.

Die Verbesserungen m und m'' kann man bei hinreichender Genauigkeit von r, r', r'' als konstant ansehen, d. h. ob man sie mit den genauen oder mit den nur näherungsweise bekannten Werten r, r', r'' rechnet.

Setzt man die strengen Ausdrücke

$$\frac{n}{n'} = \frac{n}{n'} \text{ Gibbs} + m, \quad \frac{n''}{n'} = \frac{n''}{n'} \text{ Gibbs} + m'',$$

so geht die Gleichung (11*) über in

$$(11^{**}) \quad q' = D' - \frac{C+S}{r'^3 - B'}, \quad D' = D - (bm + dm'').$$

Die Bestimmung der Größe q' aus dieser Gleichung geschieht auf die folgende Art: Mit den zuletzt aus der Hypothese S erhaltenen Werten r, r', r'' wird ein neuer Hypothesenwert S' gerechnet; ist q' der zu S und D , $q' + \Delta q'$ der zu S' und D' zugehörige Wert, so ist

$$\begin{aligned} -f'(q') \Delta q' &= -(bm + dm'') + \frac{S - S'}{r'^3 - B'} \\ -f'(q') &= 1 - 3r'q' \frac{C+S}{(r'^3 - B')^2}. \end{aligned}$$

Damit erhält man die Verbesserung von $\log r'$

$$\Delta \log r' = M \frac{q'}{r'^2} \Delta q'.$$

Mit den Werten $\log r$ und $\log r''$ der Hypothese S und dem soeben erhaltenen Werte $\log r' + \Delta \log r'$ werden die Gibbsschen Ausdrücke $n:n'$ und $n'':n'$ gerechnet und diesen die Verbesserungen m und m'' hinzugefügt; damit werden die definitiven Werte q und q'' gerechnet. Aus den Unterschieden Δq und $\Delta q''$ erhält man

$$\Delta \log r = M \frac{q}{r^2} \Delta q, \quad \Delta \log r'' = M \frac{q''}{r''^2} \Delta q''$$

für die zu den Werten $\log r$ und $\log r''$ der Hypothese S hinzuzufügenden Verbesserungen.

S' muß genau gerechnet werden; für die Berechnung von $\Delta q', \Delta \log r', \Delta \log r, \Delta \log r''$ nach den obigen Glei-

chungen genügen vierstellige Logarithmen. Für das Pallas-Beispiel erhält man aus den Gaußschen Daten für die zweite Hypothese S

$$\log r = 0.3631059, \quad \log r' = 0.3507164, \\ \log r'' = 0.3369435.$$

Die Zähler von α und β werden bzw. 0.04506 und -0.002632 . Aus α und β folgt

$$\sigma_1 = 0.513, \quad \sigma_2 = -0.070, \quad \sigma_3 = -0.239.$$

Damit werden die Posten von

m		m''
- 47.7	} Einheiten der siebenten Stelle	+ 47.7
+ 6.3		+ 18.7
- 4.7		+ 22.2
- 0.9		+ 0.3
- 47		+ 89

Damit wird der verbesserte Wert $\log r' = 0.3507151$, mit diesem und den beiden obigen Werten $\log r$ und $\log r''$ werden die Gibbsschen Ausdrücke

$$\log n : n' = 9.7572962, \quad \log n'' : n' = 9.6480110$$

gerechnet und ihnen -35 , $+87$ Einheiten der siebenten Stelle beigefügt. Damit erhält man

$$\log r = 0.3630917, \quad \log r'' = 0.3369484.$$

Von den definitiven Gaußschen weichen diese Werte um $+40$, $+43$, $+52$ Einheiten der siebenten Stelle ab, von den Harzerschen um $+13$, $+3$, $+15$. Die Verschiedenheit dieser Unterschiede der einzelnen Rechnungs-Methoden ist in der Unsicherheit der Rechnung bei kleinen Zwischenzeiten (vgl. den nächsten Absatz) begründet.

7. Bei nicht zu großen, etwa bis 30 Tage (besonders nicht sehr verschiedenen) Zwischenzeiten je zweier aufeinander folgender Beobachtungen reicht die Gauß-Gibbsche Methode

(Gibbs erster Hypothese) zur definitiven Bahnbestimmung eines kleinen Planeten völlig aus. Bei Zwischenzeiten von nur 10 bis 20 Tagen je zweier Beobachtungen macht sich die Unsicherheit der Rechnung bei jeder Methode unangenehm geltend. Denn abgesehen von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern läßt sich für die Konstante D der Gleichung (11*) bei dem Gaußschen Beispiel Juno selbst bei sorgfältigst geführter siebenstelliger Rechnung kaum die fünfte Dezimale sicher bestimmen. Denn ein Fehler von nur je einer Einheit in den Logarithmen von b, c, d kann in D einen Fehler von vier Einheiten, in $\log r'$ von zwei Einheiten der fünften Dezimale bewirken.

8. Hinsichtlich des Einflusses der Beobachtungsfehler mag bemerkt werden, daß P. Harzer bei Voraussetzung fehlerfreier Erdorte und eines Fehlers von $1''$ für die geozentrischen Beobachtungen als wahrscheinlichen Fehler von $\log r, \log r', \log r''$ für das Juno-Beispiel 5967, für das Pallas-Beispiel 238 Einheiten der siebenten Dezimale erhält.

Die Rücksichtnahme auf die unvermeidlichen Beobachtungsfehler gestattet die Ausdehnung der Gauß-Gibbsschen Methode (ohne die im vorigen mitgeteilte Verbesserung — sogenannte zweite Hypothese —) sicher für eine Zwischenzeit von 60 Tagen der ersten und dritten Beobachtung. Bei einer Bahnbestimmung aus Einzelbeobachtungen kann die Anwendbarkeit auf eine noch größere Zwischenzeit angesetzt werden.

9. Durch die Gauß-Gibbssche Methode dürfte wohl die Grenze an Genauigkeit und Bequemlichkeit der Rechnung erreicht worden sein, die bei einer ersten Bahnbestimmung gefordert werden kann. Besonders rühmt W. Fabritius (»Astronomische Nachrichten« Nr. 3061 und Nr. 3065, Bd. 128, 1891) die Verwendung der Gibbsschen Ausdrücke der Drei-

ecksverhältnisse sowohl zur Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen, als auch aus vier Beobachtungen und der parabolischen Bahnen. Fabritius erklärt: »Bei Kometen mit bedeutender heliozentrischer Bewegung brachte diese Methode konvergierende Resultate, wo andere Methoden divergierende ergaben«.

Eine Steigerung der Genauigkeit der ersten Haupthypothese — entsprechend der »ersten Gibbsschen« — könnte für größere Werte von f allenfalls dadurch versucht werden, daß man den Gibbsschen Ausdrücken das erste Fehlerglied

$$\mp f F_2(f)(1 - 6\sigma_2)\nu^4$$

beifügt, dabei für σ_2 den Näherungswert β setzt.

Die dadurch gesteigerte Genauigkeit lohnt aber nicht die Mehrrechnung, so daß es am zweckmäßigsten erscheint, erst, nachdem die Gibbssche Näherung erschöpft ist, die zugehörige Verbesserung zu rechnen.

Das günstigste Resultat der Verwendung der Gaußschen Fundamentalgleichung (7) des Art. 15 erhält man mit den Gibbsschen Ausdrücken beinahe zu gleichen Zwischenzeiten, wo f dann als kleine Größe höherer Ordnung erscheint. Die Fehlerglieder der Dreiecksverhältnisse vierter und fünfter Ordnung fallen weg, und wegen der Kleinheit des Koeffizienten $F_0 = \frac{1}{960}$ ($\frac{1}{8}$ von F_1 , $\frac{1}{24}$ von F_3) werden ϱ' und auch ϱ und ϱ'' mit einem Fehler fünfter Ordnung erhalten. Die Frage nach dem besten Ausgange zur Bestimmung der Entfernung der mittleren Beobachtung bei einer ersten Bahnbestimmung muß zu Gunsten der ersten Gauß-Gibbsschen Hypothese S , welche mit der »verbesserten« ersten Gaußschen zusammenfällt, beantwortet werden. Wiewohl dies bereits in Note 10), 2 genügend begründet erscheint, so mögen dennoch, da vielfach die irrige Ansicht herrscht,

als ob (namentlich bei nahezu gleichen Zwischenzeiten) die Enckeschen Annahmen für die Dreiecksverhältnisse das günstigste Resultat liefern, die Fehler der beiden Bestimmungsarten der Entfernung der mittleren Beobachtung mit einander verglichen werden. Zu diesem Zwecke müssen die größten Fehlerglieder von

$$\frac{bn}{n'} + \frac{dn'}{n'}$$

d. h. die Glieder mit $\sigma_1 \nu^3$ und ν^4 angeführt werden.

Das Glied mit $\sigma_1 \nu^3$ ist beiden Bestimmungsarten gemeinsam und bewirkt in der Entfernung der mittleren Beobachtung — f als kleine Größe erster Ordnung vorausgesetzt — einen Fehler vierter Ordnung.

Das Glied mit ν^4 bewirkte bei Gibbs nach S. 164 einen Fehler vierter Ordnung.

Für die Enckesche Bestimmung wird das Fehlerglied mit ν^4 , wenn näherungsweise b und d durch $\frac{1}{2}(b+d)$ ersetzt werden, und f^2 vernachlässigt wird, $\frac{5}{8}(b+d)\nu^4$, also eine kleine Größe zweiter Ordnung und dabei unabhängig von f .

Zusatz. Andere Annahmen, indem man als Ausgang zur Bestimmung der Dreiecksverhältnisse die Ausdrücke von I, 3 S. 155 benutzt, berücksichtigen zwar das von σ_1 und σ_2 freie (bei Gibbs sehr kleine) Glied mit ν^4 ; haben aber den Nachteil, daß sie erstens zu einer transzendenten Gleichung für die Bestimmung von r' (oder q') führen, zweitens, daß in der Praxis die Fehlerglieder mit $\sigma_2 \nu^4$ (die größten) ungleich größer als bei Gibbs werden. Das Verhältnis der Fehlerglieder mit $\sigma_2 \nu^4$ dieser Annahme zur Gibbsschen ist für $n:n'$

$$\frac{15 + 11f + 5f^2 + f^3}{9f - f^3};$$

z. B. bei Pallas ($f = 0.1268$) das 14.5- und 12-fache, bei Ceres ($f = -0.03056$) das 53.3- und 55.8-fache der bezüglichen Gibbsschen.

V. Zusammenstellung der Formeln zur Bahnbestimmung.

I. Gegeben sind für die drei Beobachtungen: die scheinbaren Rektaszensionen α und Deklinationen δ und die Beobachtungszeiten; diese werden, auf Berliner Zeit reduziert, in Teile des Tages verwandelt, als solche mit t bezeichnet, und für sie aus »Berliner Astronomisches Jahrbuch« die Sonnenorte (Länge, Breite und $\text{Log } R$) entnommen, die Sonnenlängen werden durch Hinzufügung von $\pm 180^\circ$ in Erdlängen L , die Sonnenbreiten durch Änderung ihrer Zeichen in die entgegengesetzten, in Erdbreiten, verwandelt. Die scheinbaren Rektaszensionen α und Deklinationen δ werden auf das gemeinsame Koordinatensystem für den Jahresanfang durch Hinzufügung der Größen $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ bezogen, dabei ist

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= -(f + g \tan \delta \sin(G + \alpha) + h \sec \delta \sin(H + \alpha)), \\ \Delta\delta &= -(g \cos(G + \alpha) + h \sin \delta \cos(H + \alpha) + i \cos \delta);\end{aligned}$$

die Größen f, g, h, i, G, H werden ebenfalls aus »Berliner Astronomisches Jahrbuch« entnommen. Mit der mittleren Schiefe der Ekliptik für den Jahresanfang werden sie nach Art. 24, 1) in Länge λ und Breite β verwandelt, welch letztere Rechnung auch mit sechsstelligen Logarithmen ausgeführt werden darf.

Vielfach werden bei ersten Bahnbestimmungen Parallaxe und Sonnenbreite vernachlässigt; man kann aber diese Korrekturen streng berücksichtigen, wenn man jede Be-

obachtung nach Art. 26 auf ihren locus fictus F' bezieht.

Damit erhält man folgende Daten:

$$\begin{aligned} t & \lambda \beta L \log R \\ t' & \lambda' \beta' L' \log R' \\ t'' & \lambda'' \beta'' L'' \log R''. \end{aligned}$$

II. In den nachfolgenden Formeln werden die früheren Bezeichnungen der Art. 15, 16, . . . beibehalten und nur einige selbstverständliche Änderungen, z. B. n statt $n:n'$, N statt $N:N'$. . . vorgenommen.

$$\tan J \sin(\lambda - K) = \tan \beta$$

$$\tan J \cos(\lambda - K) = \frac{\tan \beta'' - \tan \beta \cos(\lambda'' - \lambda)}{\sin(\lambda'' - \lambda)}$$

$$\text{Kontrolle } \tan J \sin(\lambda'' - K) = \tan \beta''.$$

$$\tan \beta_0 = \tan J \sin(\lambda' - K)$$

$$a_0 = \frac{(\tan \beta' - \tan \beta_0) \cos \beta'}{\tan J}$$

$$b = \frac{R \sin(L - K)}{a_0}, \quad c = \frac{R' \sin(L' - K)}{a_0}, \quad d = \frac{R'' \sin(L'' - K)}{a_0}.$$

$$f = \frac{t'' - t' - (t' - t)}{t'' - t}, \quad \mathcal{J}' = k(t'' - t), \quad \log k = 8.2355814$$

$$A = \frac{1+f}{2}, \quad A'' = \frac{1-f}{2}, \quad B' = \frac{1}{48}(5 - f^2) \mathcal{J}'^2$$

$$B = \frac{1}{48}(1 - 4f - f^2) \mathcal{J}'^2, \quad B'' = \frac{1}{48}(1 + 4f - f^2) \mathcal{J}'^2,$$

$$\text{Kontrolle } AB + B' + A''B'' = \frac{1}{8}(1 - f^2) \mathcal{J}'^2.$$

$$c' = c - (Ab + A''d).$$

Die Rechnung dieser Hilfsgrößen wird siebenstellig ausgeführt, für B , B' , B'' genügen selbstverständlich sechsstellige und bei sehr kleinen Zwischenzeiten sogar fünfstellige Logarithmen. Die noch folgende Rechnung darf auch sechsstellig ausgeführt werden.

$$\cos \delta = \cos \beta \cos(\lambda - L), \quad R \sin \delta = p, \quad R \cos \delta,$$

wo $0 < \delta < 180^\circ$ ist, und ebenso für den zweiten und dritten Ort.

$$D = c' + R' \cos \delta', \quad C = (Ab + A''d) B'$$

$$N = \frac{R' \sin(L'' - L')}{R \sin(L'' - L)}, \quad N'' = \frac{R' \sin(L' - L)}{R'' \sin(L'' - L)}$$

$$M = \frac{\sin(\lambda'' - \lambda')}{\sin(\lambda'' - \lambda)} + \frac{a_0 \sec \beta'}{\sin(\lambda'' - \lambda)} \frac{\sin(\lambda'' - L')}{\sin(L' - K)}$$

$$M'' = \frac{\sin(\lambda' - \lambda)}{\sin(\lambda'' - \lambda)} - \frac{a_0 \sec \beta'}{\sin(\lambda'' - \lambda)} \frac{\sin(\lambda - L)}{\sin(L - K)}$$

$$M_1 = \frac{R \sin(L'' - L) \sin(\lambda'' - K)}{\sin(\lambda'' - \lambda) \sin(L'' - K)}, \quad M_1'' = \frac{R'' \sin(L' - L) \sin(\lambda - K)}{\sin(\lambda'' - \lambda) \sin(L - K)}$$

III. Erste Hypothese für S.

$$S = AbB + A''dB''$$

$$q' = D - \frac{C+S}{r'^3 - B'}, \quad r'^2 = p'^2 + q'^2.$$

Diese Gleichung wird durch Versuche (S. 20) aufgelöst.

$$q' = q' : \cos \beta' + R' \cos \delta'.$$

$$n = \frac{A(1+B:r'^3)}{1-B':r'^3}, \quad n'' = \frac{A''(1+B'':r'^3)}{1-B':r'^3}$$

$$q = \frac{M}{n} q' + M_1 \left(\frac{N}{n} - 1 \right), \quad q'' = \frac{M''}{n''} q' + M_1'' \left(\frac{N''}{n''} - 1 \right)$$

$$q = q : \cos \beta + R \cos \delta, \quad q'' = q'' : \cos \beta'' + R'' \cos \delta''$$

$$r^2 = p^2 + q^2, \quad r''^2 = p''^2 + q''^2.$$

Zweite und dritte Hypothese für S.

Bei einer noch ganz unbekanntem Bahn werden zuerst die Beobachtungszeiten bezüglich der Aberration verbessert. Statt der Zeit t wird $t - \Delta t$ genommen, wo

$$\Delta t = Tq : \cos \beta \quad \log T = 7.76118 - 10,$$

in Einheiten des mittleren Tages, $\log T = 5.99676 - 10$, wenn 58.13244 mittlere Tage als Zeiteinheit gewählt wird.

Mit den verbesserten Zeiten werden f und \mathcal{S}' , damit A, A'', B, B'', C, D neu berechnet; dann der Wert S in zweiter Hypothese

$$S = AbB \left(\frac{r'}{r}\right)^3 + A''dB'' \left(\frac{r''}{r''}\right)^3$$

gesetzt, die Gleichung

$$q' = D - \frac{C+S}{r'^3 - B'}, \quad r'^2 = p'^2 + q'^2$$

aufgelöst.

$$n = \frac{A(1+B:r^3)}{1-B':r'^3}, \quad n'' = \frac{A''(1+B'':r''^3)}{1-B'':r''^3},$$

die übrigen Formeln sind dieselben wie in der ersten Hypothese. Mit den erhaltenen Werten r, r', r'' wird die dritte Hypothese für S gerechnet, usw.

IV. Ableitung der Elemente.

$$\begin{aligned} r \cos b \cos(l-L) &= \varrho \cos(\lambda-L) + R \\ r \cos b \sin(l-L) &= \varrho \sin(\lambda-L) \\ r \sin b &= \varrho \tan \beta \end{aligned}$$

und den entsprechenden Formeln des dritten Ortes werden $l, \tan b, r; l', \tan b'', r''$ erhalten.

$$\begin{aligned} \tan i \sin(l-\Omega) &= \tan b \\ \tan i \cos(l-\Omega) &= \frac{\tan b'' - \tan b \cos(l''-l)}{\sin(l''-l)} \\ \text{Kontrolle } \tan i \sin(l''-\Omega) &= \tan b'' \\ \tan u &= \frac{\tan(l-\Omega)}{\cos i}, \quad \tan u'' = \frac{\tan(l''-\Omega)}{\cos i}. \end{aligned}$$

Aus $u'' - u, r, r''$ werden die Elemente in der Bahn nach Art. 6 gerechnet. Zunächst wird y' (das Verhältnis des Sektors zum Dreieck) bestimmt. Die dazu nötigen Formeln und Tafeln gibt Bauschinger in Tafel XIX und XX (eventuell bei kleinen Zwischenzeiten auch XXI). Dann ist

$$\begin{aligned} p &= \left(\frac{y' r r'' \sin 2f'}{y'}\right)^2, \quad u'' - u = 2f' \\ e \sin v &= \left(\frac{p}{r} - 1\right) \cot 2f' - \left(\frac{p}{r} - 1\right) \operatorname{cosec} 2f' \end{aligned}$$

$$e \cos v = \frac{p}{r} - 1, \quad v'' = v + 2f'$$

$$e = \sin \varphi, \quad a = p : \cos \varphi^2$$

$$\tan \frac{1}{2} E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{1}{2} v = \tan (45^\circ - \frac{1}{2} \varphi) \tan \frac{1}{2} v,$$

ebenso E'' .

$$M = E - e \sin E, \quad \text{ebenso } M''.$$

$$\log e^{\text{sec}} = \log e + 5.3144251.$$

$$\mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{M'' - M}{t'' - t}. \quad \log k^{\text{sec}} = 3.5500066.$$

Verbesserung der Dreiecksverhältnisse.

Beträgt für einen kleinen Planeten die Zwischenzeit der ersten und dritten Beobachtung mehr als 60 Tage, so verbessere man, bevor die Elemente gerechnet werden, nach den in 4) S. 169—173, und 6) S. 173—174 gelehrtten Methoden die Verhältnisse n und n'' und damit die heliozentrischen und geozentrischen Entfernungen.

1) Für Zwischenzeiten bis 100 Tage. Aus r, r', r'' der letzten Hypothese S rechnet man die Gibbsschen Verhältnisse n und n'' ; die diesen hinzuzufügenden Verbesserungen m und m'' werden erhalten

$$v = \frac{3'}{2r'^{\frac{3}{2}}},$$

$$\alpha = \frac{A''^2 \left(\left(\frac{r'}{r''} \right)^3 - 1 \right) + A^2 \left(1 - \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \right)}{2AA''v},$$

$$\beta = \frac{A'' \left(\left(\frac{r'}{r''} \right)^3 - 1 \right) - A \left(1 - \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \right)}{4AA''v^2},$$

$$\omega = \frac{\alpha}{3} - 10 \frac{\alpha}{3} \beta + 40 \left(\frac{\alpha}{3} \right)^3,$$

$\sigma_1 = \alpha + \frac{\omega}{2} \nu^2, \quad \sigma_2 = \beta + f\omega\nu, \quad \sigma_3 = -\frac{\omega}{2} + 10f\frac{\alpha}{3}\frac{\omega}{2}\nu,$
 $m = -fF_2(f)(1 - 6\sigma_2)\nu^4 - F_1(f)\sigma_1\nu^5 + F_3(f)\sigma_3\nu^5 + F_0(f)\nu^6;$
 m'' wird aus m erhalten, indem man $-f$ und $-\nu$ statt f
 und ν setzt.

Die Logarithmen der in Einheiten der siebenten Stelle gegebenen Größen $F_2(f)$, $F_1(f)$, $F_3(f)$, $F_0(f)$ werden aus der Tafel S. 8 entnommen.

$$\log(n + m) = \log n + M \frac{m}{n}, \quad \log M = 9.6378$$

$$\log(n'' + m'') = \log n'' + M \frac{m''}{n''}.$$

Die Verbesserung der Größen q , q' , q'' (oder r , r' , r'') ist auf S. 168 mitgeteilt.

2) Für Zwischenzeiten über 100 Tage. Ist eine ganz unbekannte Bahn zu bestimmen, so rechne man wie in 1). Für die Berücksichtigung der Glieder höherer als sechster Ordnung rechne man nach Note 10) 3, die halben Dreieckswinkel f , f'' , damit die Verhältnisse y , y'' und damit P und Q , woraus wie in 4 S. 169 angegeben ist, verbesserte Werte von q' , q , q'' erhalten werden.

Zusatz. In den Fällen 1 und 2 besitzt man meistens genäherte Elemente, man kann daher die Verbesserung der Dreiecksverhältnisse gleich am Beginne der Rechnung in die Bahnbestimmung einbeziehen. Aus e und v' rechnet man (höchstens vierstellig)

$$\sigma_1 = -\frac{3e \sin v'}{\sqrt{1 + e \cos v'}}, \quad 2\sigma_2 = \frac{12e^2 - 3e \cos v' - 15e^2 \cos v'^2}{1 + e \cos v'},$$

$$\sigma_3 = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_1}{3} + 10 \frac{\sigma_1 \sigma_2}{3 \cdot 2} - 20 \left(\frac{\sigma_1}{3}\right)^3,$$

damit m und m'' . In der Gleichung zur Bestimmung von q' wird die Größe $D' = D - (bm + dm'')$ statt D benutzt. Die

Gibbsschen Dreiecksverhältnisse werden dann (wie angegeben ist) verbessert und aus diesen mit Zuziehung der Größe q' die Größen q und q'' bestimmt.

Für eine parabolische Bahn mit nicht zu kleinen Werten von r , r' , r'' kann der Gibbssche Ausdruck

$$\frac{n}{n''} = \frac{A(1 + B:r^3)}{A''(1 + B':r''^3)}$$

dazu benutzt werden, um mittels der Gleichung (1) des Art. 19 eine zweite Hypothese des Verhältnisses $q'' : q$ zu erhalten, nachdem aus der ersten Hypothese (Gleichung (2)) genäherte Werte von r , r' , r'' und q bekannt sind.

Zweiter Anhang.

Anmerkungen und Zusätze.

1) S. 5. Um einen in Teilen des Halbmessers gegebenen Winkel $= x$ in Graden $= x^\circ$ auszudrücken, verfährt man auf folgende Art:

$$x : x^\circ = 2\pi : 360^\circ,$$

$$\text{also } x = \frac{2\pi}{360} \cdot x^\circ = \frac{2\pi}{360 \cdot 60} \cdot x' = \frac{2\pi}{360 \cdot 60^2} \cdot x'', \text{ wo } x^\circ, x', x''$$

der Winkel ist, bzw. in Graden, Minuten, Sekunden ausgedrückt. $\frac{2\pi}{360 \cdot 60^2}$ ist der in Teilen des Halbmessers ausgedrückte Bogen für den Zentriwinkel $= 1''$, dieser Bogen ist sehr nahe $= \sin 1''$. Es ist daher

$$x = x'' \cdot \sin 1'', \quad x'' = x : \sin 1'' = 206264.81 x.$$

In der Gleichung $M = E - e \sin E$ sind M und E in Teilen des Halbmessers ausgedrückt. Um diese Gleichung auf das Gradmaß zu beziehen, denke man sich M und E in Sekunden beibehalten und e in Sekunden ausgedrückt, was durch Multiplikation mit der Zahl 206264.81 geschieht. Um M unmittelbar in Sekunden zu erhalten, braucht man nur in dem Ausdrucke für $M = \frac{k \sqrt{1+m}}{a^{\frac{3}{2}}} t$ die Zahl k in Sekunden auszudrücken, wodurch man

$$k = 3548''.18761, \quad \log k = 3.5500066$$

erhält.

2) Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetze wird die Wechselwirkung der Masse m_1 auf die in der Entfernung r befindliche Masse m_2 ausgedrückt durch

$$-\frac{Cm_1m_2}{r^2},$$

wo C eine Konstante ist.

Zur Bestimmung der physikalischen Dimension*) von C muß bemerkt werden, daß für die obige Kraft die Dimension $[mlt^{-2}]$ ist, wo m , l , t die drei Einheiten für Masse, Länge und Zeit bedeuten. Aus der Gleichheit der Dimension verschiedener Kraftausdrücke erhält man für C die Dimension $[m^{-1}l^3t^{-2}]$.

Im Sonnensystem werden die Massen der Himmelskörper in Teilen der Sonnenmasse M ausgedrückt; die Masse eines Himmelskörpers also in der Form mM . Die Bewegungsgleichungen werden (nach Art. 36)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + CM(1+m)\frac{x}{r^3} = 0, \text{ ebenso für } y \text{ und } z;$$

durch Integration folgt

$$\sqrt{\frac{CM(1+m)}{a^3}}(t - \tau) = E - e \sin E.$$

Bedeutet U die Umlaufszeit, so ist also

$$CM = \frac{4\pi^2 a^3}{(1+m)U^2} = k^2;$$

in den obigen Bewegungsgleichungen ist daher CM durch k^2 zu ersetzen.

Durch passende Wahl der Masseneinheit kann die Masse der Sonnen $= k^2$ gesetzt werden. Um diese Masseneinheit zu bestimmen, möge zunächst der Zahlenwert von C im absoluten Maßsystem (Zentimeter, Sekunden und Gramm) bestimmt werden.

*) D. i. Produkt der Potenzen der drei Grundeinheiten, auf welche die Maßzahl einer physikalischen Größe bezogen wird. Statt dieser Benennung sollte wohl eine passendere — etwa abgeleitete Einheit oder bloß Einheit — eingeführt werden. Das Ungeeignete der Benennung »Dimension« tritt um so greller hervor, wenn man z. B. (Everett) der Dimension des Winkels (Bogen: Halbmesser) oder der Totalkrümmung $= 0$ setzt.

Die Anziehung der Erde beträgt an ihrer Oberfläche 980.6 Kräfteinheiten. Betrachtet man die Erde als Kugel vom Radius R und der mittleren Dichte d , so ist

$$R = 6.3646 \times 10^8 \text{ cm, } d = 5.6;$$

$$980.6 = C - \frac{\frac{4}{3} \pi R^3 d}{R^2},$$

$$C = 6.568 \times 10^{-8} [\text{gr}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2}].$$

Um C auf das Maß der *Theoria motus* in Länge und Zeit zu reduzieren, ist:

Mittlere Entfernung der Erde von der Sonne

$$\frac{6.3646 \times 10^8}{\sin \theta} \text{ cm, } \theta = 8.848;$$

$$1 \text{ Tag} = 24 \times 60^2 \text{ sec};$$

man muß daher die vorige Zahl für C mit

$$\left(\frac{\sin \theta}{6.3646 \times 10^8} \right)^3 \left(\frac{1}{24 \times 60^2} \right)^{-2} = 2.286 \times 10^{-30}$$

multiplizieren, wodurch man erhält

$$C = 1.5015 \times 10^{-37},$$

wobei die Masseneinheit das Gramm ist.

$$CM = k^2, \quad k = 0.0172 \dots$$

$$M = \frac{k^2}{C} = k^2 \frac{10^{37}}{1.5015} \text{ Gramm.}$$

Nimmt man $10^{37} : 1.5015$ Gramm als Masseneinheit, so ist die Maßzahl der Sonnenmasse

$$M = k^2.$$

Die beschleunigende Kraft der Sonne ist daher

$$-\frac{k^2(1+m)}{r^2}.$$

Nimmt man als Zeiteinheit $1:k$ mittlere Sonnentage, wo

$$1:k = 58.13244088,$$

so wird die Beschleunigung

$$- \frac{1+m}{r^2},$$

also gleich Eins, wenn m vernachlässigt werden kann und $r = 1$ gesetzt wird.

3) Neue genauere Bestimmungen von U und m der Erde würden einen genaueren Wert von k ergeben; so ist nach Newcomb

Dauer des siderischen Jahres 365.25636042 mittlere Tage, also kleiner;

$$\text{Masse Erde} + \text{Mond} = \frac{1}{329390},$$

also größer als der Gaußsche Wert. Dennoch wird in den astronomischen Rechnungen die Gaußsche Konstante beibehalten. Deren Wert bezieht sich dann auf einen idealen Planeten, dessen mittlere Entfernung von der Sonne als Längeneinheit angenommen wird, dessen Umlaufzeit und Masse gleich jenen der Gaußschen Erdwerte sind; für die mittlere Entfernung a der Erde folgt dann nach den obigen genaueren Bestimmungen $a = 1.000000030$. Bauschinger nimmt in seinen Tafeln $\log a = 0.00000010$.

4) Zur Auflösung der in der theoretischen Astronomie vorkommenden Gleichungen vom höheren Grade oder transcendenten werden hauptsächlich die *regula falsi* und die Newtonsche Methode benutzt. Beide beruhen darauf, daß für die stetige Funktion X von x , deren Wurzeln zu bestimmen sind, der Unterschied der Funktionswerte $X(b) - X(a)$ dem Unterschiede $b - a$ proportional gesetzt werden kann, wenn $b - a$ klein ist.

In der Regel ist bei einer Gleichung nur eine Wurzel — bei mehreren Gleichungen nur ein System zusammen-

gehöriger Werte der Unbekannten —, deren Wert beiläufig bekannt ist, zu bestimmen.

1. *Regula falsi*. Ist $X = 0$ eine Gleichung zur Bestimmung der Unbekannten x , w eine bestimmte Wurzel, a, a' zwei Näherungswerte von w , so sei für

$$\begin{array}{ll} x = w & X = 0 \\ x = a & X = A \\ x = a' & X = A'. \end{array}$$

Sind $a - w, a' - w$ klein, so gilt näherungsweise

$$a - w : a' - w = A : A',$$

woraus

$$(1) \quad w = a - \frac{A(a - a')}{A - A'} = a' - \frac{A'(a' - a)}{A' - A}$$

folgt. Es ist vorteilhaft, die Näherungen a und a' so zu wählen, daß die Wurzel w zwischen dieselben fällt.

In der Anwendung tritt häufig der Fall ein, daß

$$X = c + f(x) - x$$

ist, wo $f(x)$ die Unbekannte x enthält, dabei aber klein ist und für geringe Änderungen von x sich wenig ändert. In diesem Falle ist es zweckmäßig, das obige Verfahren etwas zu modifizieren.

Sind nämlich a und a' zwei Näherungswerte von w , so sind

$$\alpha = c + f(a), \quad \alpha' = c + f(a')$$

zwei genauere Werte von w , und $A = \alpha - a, A' = \alpha' - a'$ die Fehler.

Aus

$$a - w : a' - w = \alpha - a : \alpha' - a'$$

folgt

$$\alpha - w : \alpha' - w = \alpha - a : \alpha' - a',$$

und daraus folgt

$$(2) \quad w = \alpha - \frac{A(\alpha - \alpha')}{A - A'} = \alpha' - \frac{A'(\alpha' - \alpha)}{A' - A}.$$

Für a' nimmt man in diesem Falle gewöhnlich die Größe α , dann ist

$$A = \alpha - a, \quad A' = \alpha' - \alpha$$

und

$$(3) \quad w = \alpha' - \frac{(\alpha' - \alpha)^2}{\alpha' - \alpha - (\alpha - a)}.$$

2. Statt der *regula falsi* kann man auch die Newtonsche Methode anwenden. Setzt man

$$w = a + h,$$

so ist näherungsweise

$$(4) \quad \begin{aligned} X(w) &= X(a) + X'(a)h = 0, \\ h &= -\frac{X(a)}{X'(a)}, \quad w = a - \frac{X(a)}{X'(a)}. \end{aligned}$$

Für die Gleichung (11) des Art. 16 erhält man, diese Methode auf das Beispiel des Art. 18 angewendet,

$$X = \lambda - \frac{\mu}{r'^3} - x', \quad X' = -\left(1 - \frac{3\mu x'}{r'^5}\right)$$

$$\begin{aligned} a &= 2.054, \quad X(a) = -0.0066, \quad X'(a) = -0.8245 \\ w &= 2.04600 \text{ als genaueren Wert.} \end{aligned}$$

Wiederholt man mit diesem Werte als a die Rechnung, so wird

$$\begin{aligned} X(a) &= -0.000078, \quad X'(a) = -0.8034 \\ w &= 2.045903. \end{aligned}$$

3. Mit erhöhter Genauigkeit kann h aus

$$X(w) = X(a) + X'(a)h + X''(a)\frac{h^2}{2} = 0$$

bestimmt werden. Zur Auflösung dieser Gleichung mag bemerkt werden: Die Wurzeln der Gleichung

$$ah^2 + bh + c = 0,$$

wo c gegen b klein ist,

$$h = -\frac{b \pm b \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}}{2a}$$

entwickle man näherungsweise nach

$$\sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}} = 1 - \frac{2ac}{b^2} - 2\left(\frac{ac}{b^2}\right)^2 - \dots,$$

$$h_1 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}, \quad h_2 = -\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{ac^2}{b^3},$$

wovon für die vorliegende Aufgabe nur h_1 (die absolut kleine Wurzel) zu brauchen ist, die auch aus der obigen Gleichung erhalten wird, indem man

$$h = -\frac{c}{b} - \frac{ah^2}{b}$$

setzt und in das zweite Glied für h den Näherungswert $c:b$ einsetzt*).

Auf die gegebene Gleichung angewendet, erhält man

$$h = -\frac{X(a)}{X'(a)} - \frac{X''(a) h^2}{X'(a) 2},$$

oder $h = h_0 + h'$

$$h_0 = -\frac{X(a)}{X'(a)}, \quad h' = -\frac{X''(a) h_0^2}{X'(a) 2}.$$

4. Ist x eine Wurzel der Gleichung

$$(1) \quad f(x, a, b, c, \dots) = 0$$

für eine gegebene Annahme der Konstanten a, b, c, \dots , so kann für die Konstanten $a + \Delta a, b + \Delta b, c + \Delta c, \dots$, wo $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \dots$ kleine Änderungen sind, die zu obiger Wurzel x zugehörige Wurzel $x + \Delta x$ der Gleichung

$$(2) \quad f(x + \Delta x, a + \Delta a, b + \Delta b, c + \Delta c, \dots) = 0$$

näherungsweise mittels der Gleichung

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right) \Delta a + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right) \Delta b + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right) \Delta c + \dots = 0$$

erhalten werden.

Bei hinreichender Kleinheit von $\Delta a, \Delta b, \Delta c \dots$ kann der erhaltene Wert $x + \Delta x$ als definitive Wurzel betrachtet werden; ist dies nicht der Fall, so wird die Auflösung der Gleichung (2) mit dem erhaltenen Werte $x + \Delta x$ begonnen.

*) Die wiederholte Einsetzung des erhaltenen Wertes von h liefert die höheren Potenzen der Entwicklung der obigen Quadratwurzel.

5. Diese beiden Methoden lassen sich auch auf Gleichungen mit mehreren Unbekannten anwenden.

Sind zur Bestimmung von x , y , z drei Gleichungen

$$(1) \quad U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0$$

gegeben, sind x_0 , y_0 , z_0 zusammengehörige Näherungswerte von x , y , z , so setze man

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta, \quad z = z_0 + \zeta;$$

führt man diese Werte in die drei Gleichungen (1) ein, so erhält man

$$(2) \quad \begin{cases} 0 = U_0 + A\xi + B\eta + C\zeta + \left\{ \begin{array}{l} \text{Glieder mit} \\ \xi^2, \eta^2, \zeta^2 \\ \xi\eta, \xi\zeta, \eta\zeta. \end{array} \right. \\ 0 = V_0 + A'\xi + B'\eta + C'\zeta + \\ 0 = W_0 + A''\xi + B''\eta + C''\zeta + \end{cases}$$

U_0 , V_0 , W_0 sind die Werte von U , V , W ; A , B , C , ... deren partielle Differentialquotienten für das Wertsystem x_0 , y_0 , z_0 .

Vernachlässigt man in den Gleichungen (2) die Glieder zweiter Ordnung, so erhält man für ξ , η , ζ Näherungswerte ξ_0 , η_0 , ζ_0 . Berechnet man mit diesen die Glieder zweiter Ordnung in (2), so seien U' , V' , W' deren Beträge. Bestimmt man wieder aus den Gleichungen (2) die Werte von ξ , η , ζ , indem man die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt und U' , V' , W' statt U_0 , V_0 , W_0 setzt, sind ξ' , η' , ζ' die daraus erhaltenen Werte, so sind

$$\xi = \xi_0 + \xi', \quad \eta = \eta_0 + \eta', \quad \zeta = \zeta_0 + \zeta'$$

die genaueren Werte von ξ , η , ζ .

Bei dieser Bestimmung wird der Nenner der Unbekannten nur einmal berechnet; für die Berechnung der Zähler können Teile der Rechnung für die beiden Systeme der Unbekannten beibehalten werden.

Mit den erhaltenen Werten $x_0 + \xi$, $y_0 + \eta$, $z_0 + \zeta$ als verbesserte Werte x_0 , y_0 , z_0 wird die Rechnung wiederholt.

Diese Wiederholung wird so oft vorgenommen, bis die Werte ξ , η , ζ verschwindend klein ausfallen.

Zur Rechnung nach der Newtonschen Methode mag noch bemerkt werden: Bei den späteren Wiederholungen genügt es in der Regel, die Größen $X(a)$, U_0 , V_0 , W_0 neu zu rechnen, die früheren Werte von $X'(a)$, sowie der Koeffizienten A , B , C , ... können beibehalten und die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt werden. Die Größen $X(a)$, U_0 , V_0 , W_0 sind bei den Wiederholungen in der Regel genau — etwa mit siebenstelligen Tafeln — zu berechnen; für $X'(a)$, sowie für die Koeffizienten A , B , C , ... und für die Glieder zweiter Ordnung genügen fünfstellige, ja sogar vierstellige Tafeln, überdies können für die Berechnung der letzteren Größen statt der genauen Funktions-Ausdrücke auch Näherungs-Ausdrücke genommen werden.

5) S. 13. Ist h klein, so läßt sich die positive Wurzel y der kubischen Gleichung γ) durch folgende Reihe darstellen

$$y = 1 + \frac{1}{9}h - \frac{11}{81}h^2 + \frac{241}{729}h^3,$$

$$\log y = [9.683542]h - [9.93341]h^2 + [0.3281]h^3,$$

wo die eingeklammerten Zahlen Logarithmen sind. Man setzt y in der Form

$$y = 1 + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \dots$$

voraus und bestimmt die Koeffizienten A , B , C , ... derart, daß der Gleichung γ) identisch genügt wird. Für größere Werte von h , etwa von 0.02 an, kann man sich nach dieser Reihe Näherungswerte von y verschaffen, und dann vermittels der *regula falsi* den genauen Wert aus der kubischen Gleichung bestimmen.

6) S. 17. Näherungsweise kann diese Aufgabe auf folgende Art gelöst werden.

Es ist die doppelte Dreiecksfläche

$$rr' \sin(v' - v) = ab (\sin(E' - \sin E) - e (\sin E' - \sin E)),$$

die doppelte Sektorsfläche

$$kt\sqrt{p} = ab(E' - E - e(\sin E' - E)) = ab(M' - M);$$

also ihr Verhältnis (indem man für $\sin(E' - E)$ die Reihe setzt),

$$1 - \frac{1}{3!} \frac{(E' - E)^3}{M' - M} + \frac{1}{5!} \frac{(E' - E)^5}{M' + M} - \dots$$

Mit Vernachlässigung der Glieder mit $e(E' - E)^3$ ist

$$E' - E = M' - M + e \cos \frac{E + E'}{2} (E' - E),$$

$$E' - E = \frac{M' - M}{1 - e \cos \frac{E + E'}{2}},$$

also das obige Verhältnis

$$1 - \frac{1}{3!} \frac{(M' - M)^2}{\left(1 - e \cos \frac{E + E'}{2}\right)^3} + \frac{1}{5!} \frac{(M' - M)^4}{\left(1 - e \cos \frac{E + E'}{2}\right)^5} - \dots$$

Mit Vernachlässigung von Gliedern mit $e(E' - E)^2$ wird

$$r_0 = \frac{r + r'}{2} = a \left(1 - e \cos \frac{E + E'}{2}\right),$$

also das obige Verhältnis, $\mathcal{J} = kt$ gesetzt,

$$1 - \frac{1}{3!} \frac{\mathcal{J}^2}{r_0^3} + \frac{1}{5!} \frac{\mathcal{J}^4}{r_0^5} - \dots = \frac{\sin \omega}{\omega}, \quad \omega = \frac{\mathcal{J}}{r_0^{\frac{3}{2}}},$$

mit Vernachlässigung von Gliedern mit $e \frac{\mathcal{J}^4}{r_0^5}$; d. h. bei dieser Genauigkeit kann man zur Bestimmung des Flächenverhältnisses die Bewegung als kreisförmig mit dem Radius r_0 betrachten.

Mit gleichem Grade von Genauigkeit kann, wegen

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2,$$

$$r_0 = \sqrt{rr'} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{r_0^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r'^3} \right)$$

gesetzt werden.

Für $r_0 = \sqrt{rr'}$ wird

$$\sin(v' - v) = \sqrt{\frac{p}{r_0}} \sin \omega,$$

also näherungsweise

$$v' - v = \sqrt{\frac{p}{r_0}} \omega (1 + \frac{1}{6} e \cos v_0 \omega^2);$$

mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$v' - v = (1 + \frac{1}{2} e \cos v_0) \omega,$$

mit gleichem Grade von Genauigkeit ist ω das Mittel von $E' - E$ und $v' - v$. Für das Beispiel des Art. 6 erhält man als Werte von $\log r_0$

$$0.3265481, \quad 0.3265271, \quad 0.3264643,$$

damit für $\log y$ als Näherungswerte

$$0.0010805, \quad 0.0010807, \quad 0.0010817,$$

welche von den genauen um

$$+10, \quad +8, \quad -2$$

Einheiten der siebenten Stelle abweichen.

Beschränkt man sich auf die zwei ersten Glieder und setzt

$$\frac{rr' \sin(v' - v)}{g} = \sqrt{p'},$$

so wird

$$\sqrt{p} = \sqrt{p'} \left(1 + \frac{\sqrt{rr'} \sin(v' - v)^2}{6p'} \right)$$

$$p = p' + \frac{1}{3} \sqrt{rr'} \sin(v' - v)^2,$$

welche beide letzten Formeln mit den Eulerschen übereinstimmen. Für das obige Beispiel erhält man

$\log p$ resp. 0.3954878 und 0.3954854,
welche von dem genauen um 146 und 122 Einheiten der
siebenten Stelle abweichen.

7) S. 21. Bei Anwendung der Hyperbelfunktionen zur
Lösung von Aufgaben bezüglich der Bewegung in einer
Hyperbel erhält man ganz analoge Ausdrücke jenen des
ersten und zweiten Abschnittes für die Ellipse.

1. Als Hyperbelfunktionen werden definiert:

$$\begin{aligned}\text{Sin } x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Cos } x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,\end{aligned}$$

oder

$$\text{Sin } x = \frac{1}{i} \sin xi, \quad \text{Cos } x = \cos xi.$$

Diese Funktionen haben daher die Periode $2\pi i$.

$$\text{Tan } x = \frac{\text{Sin } x}{\text{Cos } x}, \quad \text{usw.}$$

Daraus folgt: Ist x positiv, so ist $\text{Sin } x$ positiv und wächst
mit x von 0 bis ∞ . Ist x positiv oder negativ, so ist $\text{Cos } x$
positiv und wächst mit (absolut) x von 1 bis ∞ .

Für große positive Werte von x wachsen $\text{Sin } x$ und $\text{Cos } x$
wie $\frac{1}{2} e^x$.

$$\text{Sin } (x \pm y) = \text{Sin } x \text{Cos } y \pm \text{Cos } x \text{Sin } y$$

$$\text{Cos } (x \pm y) = \text{Cos } x \text{Cos } y \pm \text{Sin } x \text{Sin } y,$$

also

$$1 = \text{Cos } x^2 - \text{Sin } x^2.$$

Ist $\text{Sin } x = z$, so heißt $x = \text{Arc Sin } z$ usw.

$$\text{Arc Sin } x = \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$\text{Arc Cos } x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$$

$$\text{Arc Tan } x = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

$$d \text{ Sin } x = \text{Cos } x dx, \quad d \text{ Cos } x = -\text{Sin } x dx,$$

$$d \text{ Tan } x = \frac{dx}{\text{Cos}^2 x}, \quad d \text{ Cotg } x = -\frac{dx}{\text{Sin}^2 x},$$

$$d \text{ Arc Sin } x = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad d \text{ Arc Cos } x = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$d \text{ Arc Tan } x = \frac{dx}{1-x^2}, \quad d \text{ Arc Cotg } x = -\frac{dx}{x^2-1}.$$

Wird

$$\text{Sin } x = \tan y, \text{ also } \text{Cos } x = \frac{1}{\cos y}, \text{ Tan } x = \sin y$$

gesetzt, so heißt y der Lambertsche transcendente Winkel.

Aus

$$\begin{aligned} e^x &= \text{Sin } x + \text{Cos } x = \frac{\sin y + 1}{\cos y} \\ &= \frac{\sin y + \sin \frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right) \end{aligned}$$

folgt

$$x = \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right). *$$

2. Der Nachweis der Analogie der Lösungen der Bewegungsaufgaben für die Ellipse und Hyperbel wird auf

Fig. 20.



*) Die Logarithmen in diesen Formeln sind selbstverständlich natürliche.

folgende Art geliefert: Ist (Fig. 20) O der Mittelpunkt des Kegelschnittes, P das Perihel, S der Brennpunkt (mit der Sonne), L der Ort des Himmelskörpers, so ist mit Rücksicht auf das Vorzeichen der Flächen

$$\text{Sektor } SPL = \text{Sektor } OPL - \text{Dreieck } OSL.$$

Setzt man

$$OL = u, \quad \text{Winkel } POL = \omega,$$

so ist der doppelte Sektor OPL

$$S = \int u^2 d\omega,$$

wo für die Ellipse oder Hyperbel

$$\frac{u^2 \cos^2 \omega}{a^2} \pm \frac{u^2 \sin^2 \omega}{b^2} = 1,$$

also

$$S = ab \int \frac{dx}{1 \pm x^2}, \quad z = \frac{a}{b} \tan \omega.$$

Für die Ellipse setze man

$$z = \tan E,$$

dann wird

$$S = abE;$$

und aus der Gleichung der Ellipse (indem man $u^2 \cos^2 \omega$, $u^2 \sin^2 \omega$ bestimmt)

$$u \cos \omega = a \cos E, \quad u \sin \omega = b \sin E,$$

woraus unmittelbar

$$r \cos v = a \cos E - ae, \quad r \sin v = b \sin E$$

folgt.

Da die doppelte Dreiecksfläche

$$OSL = ae \cdot u \sin \omega = abe \sin E$$

ist, so folgt für die doppelte Fläche des Sektors SPL

$$ab(E - e \sin E).$$

Aus dem Ausdrucke $k\sqrt{1+m}Vpt$ für die doppelte Fläche des Sektors PSL erhält man, wenn die Masse m vernachlässigt wird,

$$k\sqrt{pt} = \frac{kb}{\sqrt{a}} t;$$

es ist daher

$$E - e \sin E = \frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

Für die Hyperbel setze man

$$z = \mathfrak{Z}an E,$$

dann wird

$$S = abE,$$

$$u \cos \omega = a \mathfrak{C}os E,$$

$$u \sin \omega = b \mathfrak{S}in E = r \sin v,$$

$$r \cos v = a(e - \mathfrak{C}os E).$$

Für die Hyperbel ist es zweckmäßiger, die Flächen, sowie die Größen ω , E , v für positive Ordinaten von L positiv, für negative Ordinaten negativ zu nehmen. In diesem Sinne wird die obige Flächengleichung

$$\text{Sektor } SPL = \text{Dreieck } OSL - \text{Sektor } OPL,$$

woraus dann (analog wie bei der Ellipse) für den doppelten Sektor SPL

$$ab(e \mathfrak{S}in E - E),$$

$$e \mathfrak{S}in E - E = \frac{kt}{a^{\frac{3}{2}}}$$

folgt.

Die Größen ω , v , E werden positiv und negativ von 0 bis α , von 0 bis $180^\circ - \alpha$, von 0 bis ∞ genommen, wo α den spitzen Winkel, für welchen $\cos \alpha = 1:e$, bedeutet.

Aus der Gleichung zwischen r , E und v folgt

$$\mathfrak{C}os E = \frac{e + \cos v}{1 + e \cos v}, \quad r = a(e \mathfrak{C}os E - 1),$$

$$\sqrt{r} \sin \frac{1}{2} v = \sqrt{a(e+1)} \mathfrak{S}in \frac{1}{2} E,$$

$$\sqrt{r} \cos \frac{1}{2} v = \sqrt{a(e-1)} \mathfrak{C}os \frac{1}{2} E.$$

Auch die Gleichungen jener für die Ellipse gegebenen Lösung der fundamentalen Aufgabe des Art. 6 des zweiten

Abschnittes erleiden nur jene Änderungen, welche die geringen Unterschiede der Eigenschaften der Kreis- und Hyperbelfunktionen bedingen. Die Gleichungen (5) und (5*), (7) und (7*) dieses Art. werden für die Hyperbel

$$a = \frac{2(l - \text{Sin } \frac{1}{2}g^2) \cos f \sqrt{rr'}}{\text{Sin } g^2}$$

$$a = - \frac{2(L + \text{Sin } \frac{1}{2}g^2) \cos f \sqrt{rr'}}{\text{Sin } g^2}$$

$$m = (l - \text{Sin } \frac{1}{2}g^2)^{\frac{1}{2}} + (l - \text{Sin } \frac{1}{2}g^2)^{\frac{3}{2}} \frac{\text{Sin } 2g - 2g}{\text{Sin } g^3}$$

$$M = -(L + \text{Sin } \frac{1}{2}g^2)^{\frac{1}{2}} + (L + \text{Sin } \frac{1}{2}g^2)^{\frac{3}{2}} \frac{\text{Sin } 2g - 2g}{\text{Sin } g^3},$$

wo $l, m; L, M$ dieselbe Bedeutung haben wie in Art. 6; das doppelte Zeichen in den beiden letzten Gleichungen fällt weg, da $\text{Sin } g$ immer positiv ist, wenn man, wie dies gewöhnlich geschieht, die Neigung der Bahn von 0 bis 180° zählt, wodurch die Unterscheidung von direkter und retrograder Bewegung entfällt.

Setzt man

$$\text{Sin } \frac{1}{2}g^2 = z, \quad \frac{\text{Sin } 2g - 2g}{\text{Sin } g^3} = Z,$$

so erhält man für die Entwicklung von Z und für die Auflösung der obigen Gleichungen in z Ausdrücke, die aus jenen des Art. 6 hervorgehen, indem man x mit $-z$ vertauscht. Die übrigen Formeln dieses Artikels bleiben unverändert.

3. Für $a = b$ wird $E = \omega$; die Ellipse ist dann eine Kreislinie, die Hyperbel gleichseitig. Setzt man überdies $a = 1$, so werden die Koordinaten des Punktes L

Ellipse	Hyperbel
$x = \cos \omega$	$x = \text{Cos } \omega$
$y = \sin \omega$	$y = \text{Sin } \omega$

$$S = \omega.$$

Die Hyperbelfunktionen $\text{Cos } \omega$ und $\text{Sin } \omega$ werden in analoger Weise an der gleichseitigen Hyperbel $a = 1$ versinnlicht, wie die Kreisfunktionen $\cos \omega$ und $\sin \omega$ an einem Kreise mit dem Radius 1; dabei bedeutet ω den doppelten Sektor POL .

Aus $x^2 - y^2 = 1$ folgt, daß $1, y, x$ als die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks erscheinen, wo der der Ordinate gegenüberliegende spitze Winkel der Lambertsche transcendente Winkel ist.

4. Von den Tafelwerken über Hyperbelfunktionen mögen erwähnt werden:

A. Forti, »*Tavole dei logaritmi de' numeri e delle funzioni circolari ed iperboliche*« (Torino—Firenze—Milano, 1870). Links die siebenstelligen Logarithmen der Kreisfunktionen mit dem Argumente φ^o , rechts die der Hyperbelfunktionen, wo $\tan \varphi = \sin \tau = \text{Tan } \omega$ gesetzt ist, τ der Lambertsche transcendente Winkel ist; außerdem ist links φ , in Teilen des Halbmessers, rechts ω und $\log \omega$ angesetzt. Die wenigen Zahlen, die der Verfasser prüfte, waren meistens in der letzten Stelle fehlerhaft. In seinen sechsstelligen »*Nuove tavole delle funzioni iperboliche*« (Roma, 1892) gibt er für die Funktionen

$$\text{Sin } \omega, \text{ Cos } \omega, \text{ Tan } \omega,$$

mit ω als Argument, auf der linken Seite die gemeinen Logarithmen, auf der rechten deren Zahlenwerte und überdies den Lambertschen transcendenten Winkel. Sonderbarerweise verbürgt der Autor selbst für seine Zahlen im allgemeinen nur die fünfte Stelle.

E. Lampe hat auf Grundlage einer sorgfältigen Prüfung dieses Tafelwerkes (»Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin im Jahre 1897«) nachgewiesen, daß die sechste Stelle als unsicher zu betrachten ist.

Dr. W. Ligowski gibt in seinen »Tafeln der Hyperbelfunktionen und der Kreisfunktionen« (Berlin, 1890) diese Werte mit Wechsel des Intervalles und der Anzahl der Stellen. Mit Benutzung des zum Argumente zugehörigen, auf zwei bzw. drei Dezimalstellen der Sekunde angegebenen Lambertschen transcendenten Winkels lassen sich auch die siebenstelligen Logarithmen der Hyperbelfunktionen ermitteln.

Die Auflösung der Aufgaben zur Bestimmung eines Hyperbelortes erfordert mittels dieser Tafeln kaum mehr Zeit als die eines Ortes in einer Ellipse. Für die Bestimmung der Größe E aus der mittleren Anomalie M wird zunächst mittels der Tafeln der Hyperbelfunktionen S. 58 u. ff. fast ohne Rechnung für den Wert E die Stelle zwischen zwei aufeinanderfolgenden Tafelwerten ermittelt und daraus mittels *regula falsi* E auf vier Dezimalstellen genau erhalten. Die Verbesserung dieses Wertes E_0 wird dann am leichtesten nach der Newtonschen Methode durchgeführt. Aus den Tafeln bestimmt man den genauen Wert des zu E_0 gehörigen transcendenten Winkels, rechnet damit

$$\text{genau} \quad A = e \mathfrak{S}in E_0 - E_0 - M$$

$$\text{näherungsweise} \quad B = e \mathfrak{C}os E_0 - 1,$$

dann ist

$$E_0 - \frac{A}{B}$$

der verbesserte Wert von E . Für die weiteren Daten der Ortsbestimmung kann auch der verbesserte Wert des transcendenten Winkels benutzt werden.

8) S. 24. Die Koordinaten der drei heliozentrischen Orte genügen der Gleichung der Bahnebene, also Gleichungen

$$Ax + By + Cz = 0$$

$$Ax' + By' + Cz' = 0$$

$$Ax'' + By'' + Cz'' = 0.$$

Bestimmt man aus zwei derselben die Verhältnisse $A : C$, $B : C$ und setzt diese Werte in die dritte, so erhält man nach x , x' , x'' geordnet

$$x(y'x' - y'z'') - x'(y''x - yz'') + x''(y'x - yz') = 0.$$

Nun ist $y'x' - y'z''$ die doppelte Projektion des Dreiecks $SL'L''$ auf die yx -Ebene, usw. Dividiert man diese Gleichung durch den Kosinus des Neigungswinkels der Bahnebene mit der yz -Ebene, so erhält man

$$nx - n'x' + n''x'' = 0.$$

Ebenso erhält man die beiden anderen Gleichungen, wenn man nach y , y' , y'' und z , z' , z'' ordnet.

Es ist klar, daß diese drei Gleichungen, wenn für n , n' , n'' ihre geometrischen Ausdrücke $r'r'' \sin(v'' - v')$, ... gesetzt werden, dieselbe identische Gleichung geben. Diese Identität hört auf, wenn für die Verhältnisse $n : n' : n''$ andere, aus den Bewegungsgesetzen herrührende Ausdrücke gewählt werden und die heliozentrischen Größen x , y , z , ... durch den geozentrischen und Erdorte ersetzt werden, wie dies in Art. 15 geschieht.

9) S. 29. Zu Art. 15. 1. Die Gleichungen (3), (4), (5) des Art. 14 werden identisch erfüllt, wenn

$$e = e' = e'' = 0, \text{ also } r = R, r' = R', r'' = R''$$

gesetzt wird, woraus

$$\frac{n}{n'} = \frac{N}{N'}, \quad \frac{n''}{n'} = \frac{N''}{N'},$$

wo N , N' , N'' , die auf die Erdorte bezüglichen doppelten Dreieckflächen bedeuten, folgt.

2. Für drei Winkel $L - K$, $L' - K$, $L'' - K$ findet die Gleichung statt

$$\sin(L - K) \sin(L'' - L') - \sin(L' - K) \sin(L'' - L) + \sin(L'' - K) \sin(L' - L) = 0;$$

mit R , R' , R'' multipliziert und durch a_0 dividiert erhält man

$$bN - cN' + dN'' = 0 \\ c - b \frac{N}{N'} - d \frac{N''}{N'} = 0.$$

Damit kann die Gleichung (7) des Art. 15 auch auf die Form gebracht werden

$$\frac{\varrho'}{\cos \beta} = b \left(\frac{N}{N'} - \frac{n}{n'} \right) + d \left(\frac{N''}{N'} - \frac{n''}{n'} \right),$$

woraus wieder (wie oben) ein Wert $\varrho' = 0$ folgt, wenn für $N:N'$, $N'':N'$, $n:n'$, $n'':n'$ die genauen Werte gesetzt werden, hingegen wird ein Wert ϱ' nahe gleich 0 erhalten, wenn für $n:n'$ und $n'':n'$ nur Näherungswerte, für $N:N'$ und $N'':N'$ aber die genauen gesetzt werden. Dieser Wert ϱ' bezieht sich auf den Erdort der mittleren Beobachtung.

3. Mit der Genauigkeit der ersten Gaußschen Hypothese folgt aus

$$\frac{bn + dn''}{n + n''} = \frac{b\vartheta + d\vartheta''}{\vartheta + \vartheta''} = \frac{bN + dN''}{N + N''} = \frac{cN'}{N + N''}, \\ \frac{\varrho'}{\cos \beta'} = c - \frac{cN'}{N + N''} \cdot \frac{n + n''}{n'} = c - c \frac{1 + \frac{\vartheta \vartheta''}{2r'^3}}{1 + \frac{\vartheta \vartheta''}{2R'^3}}, \\ \frac{\varrho'}{\cos \beta'} = c \frac{\vartheta \vartheta''}{2} \left(\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r'^3} \right).$$

Da $\varrho' : \cos \beta'$ positiv ist, so folgt aus dieser Gleichung:

$$\text{Ist } c \text{ positiv, so ist } r' > R', \\ \text{» } c \text{ negativ, » » } r' < R';$$

für c positiv sind $\sin(L' - K)$, $\sin(\beta' - \beta_0)$ gleich,

» c negativ » $\sin(L' - K)$, $\sin(\beta' - \beta_0)$ entgegengesetzt

bezeichnet; im ersten Falle liegen die Punkte B' und A' auf den entgegengesetzten, im zweiten Falle auf derselben Seite des größten Kreises durch die Punkte B und B'' .

Diese Folgerung bildet das Lambertsche Theorem, betreffend den scheinbaren Lauf eines Kometen; in obiger Gleichung ausgedrückt erklärt Gauß in seinem mehrere Jahre vor Erscheinen der *Theoria motus* verfaßten Aufsatz »Summarische Übersicht der zur Bestimmung der Bahnen der beyden neuen Hauptplaneten angewandten Methoden« (F. v. Zach. *Monatliche Korrespondenz*. 20. Bd., 1809) für die erste Annäherung: »Diese Formel ist der wichtigste Theil der ganzen Methode und ihre erste Grundlage«.

4. Der gemeinsame Nenner von $n\varrho : \cos \beta$, $n'\varrho' : \cos \beta'$, $n''\varrho'' : \cos \beta''$ ist der sechsfache Inhalt der Pyramide, deren Spitze der Mittelpunkt einer Kugelfläche mit dem Radius Eins, deren Grundfläche das Dreieck der drei geozentrischen Orte des Himmelskörpers auf dieser Kugelfläche ist. Dieser Inhalt wird Null: erstens, wenn die drei geozentrischen Orte in einem größten Kreise liegen; zweitens, wenn zwei Orte (etwa der erste und zweite) zusammenfallen, also der Zwischenlauf eine Schleife bildet — was auch als spezieller Fall des ersten angesehen werden kann.

Im ersten Falle können die drei Gleichungen (3), (4), (5) des Art. 14 durch $\varrho = \varrho' = \varrho'' = 0$ identisch erfüllt werden.

Im zweiten Falle wird der Nenner identisch gleich Null, die Gleichungen (3), (4), (5) des Art. 14 gehen über in

$$\begin{aligned} (n\varrho - n'\varrho') \cos \lambda + n''\varrho'' \cos \lambda'' &= A \\ (n\varrho - n'\varrho') \sin \lambda + n''\varrho'' \sin \lambda'' &= B \\ (n\varrho - n'\varrho') \tan \beta + n''\varrho'' \tan \beta'' &= C, \end{aligned}$$

woraus nur $n\varrho - n'\varrho'$ und $n''\varrho''$ bestimmt werden können.

Aus den beiden ersten folgt

$$\begin{aligned}
 -n''\varrho'' \sin(\lambda'' - \lambda) &= nR \sin(L - \lambda) - n'R' \sin(L' - \lambda) \\
 &\quad + n''R'' \sin(L'' - \lambda) \\
 (n\varrho - n'\varrho') \sin(\lambda'' - \lambda) &= nR \sin(L - \lambda'') - n'R' \sin(L' - \lambda'') \\
 &\quad + n''R'' \sin(L'' - \lambda'').
 \end{aligned}$$

Sind \mathcal{P} und \mathcal{P}'' klein, so sind die Zähler von ϱ'' und $\frac{n}{n'}\varrho - \varrho'$ kleine Größen der zweiten Ordnung, deren Nenner von der ersten. Abgesehen von der Unbestimmtheit von ϱ und ϱ' , werden für ϱ , ϱ' , ϱ'' kleine Werte erhalten, die sich bei einem kleinen Planeten auf die Erdorte beziehen würden.

5. Um die Ordnungszahl des Koeffizienten von $n'\varrho'$ der Gleichung (1) des Art. 15 zu bestimmen, setze man

$$\begin{aligned}
 \tan \beta &= \tan \beta' - b_1 \mathcal{P}'' + b_2 \mathcal{P}''^2 - \dots \\
 \tan \beta'' &= \tan \beta' + b_1 \mathcal{P} + b_2 \mathcal{P}^2 + \dots \\
 \lambda &= \lambda' - l_1 \mathcal{P}'' + l_2 \mathcal{P}''^2 - l_3 \mathcal{P}''^3 + \dots \\
 \lambda'' &= \lambda' + l_1 \mathcal{P} + l_2 \mathcal{P}^2 + l_3 \mathcal{P}^3 + \dots \\
 \sin \alpha &= \alpha - \frac{1}{6} \alpha^3 + \dots
 \end{aligned}$$

Damit erhält man für diesen Koeffizienten

$$\mathcal{P} \mathcal{P}' \mathcal{P}'' \left(\frac{1}{2} \tan \beta' l_1^3 - b_1 l_2 + b_2 l_1 \right) + \dots$$

Die Größe a_0 wird aus diesem Koeffizienten durch Division mit $\sin(\lambda'' - \lambda) = l_1 \mathcal{P}' + \dots$ erhalten, sie hat daher die Form $A \mathcal{P} \mathcal{P}''$, kann aber durch die Kleinheit des Koeffizienten A auf eine Größe dritter und noch höherer Ordnung herabsinken.

10) S. 37. Über die Genauigkeit der Größen P und Q .

1. Zu dieser theoretischen Fehlerbestimmung, wie sie Gauß gegeben hat, mag bemerkt werden: Zwei kleine (oder große) Größen derselben Ordnung haben eine endliche Zahl als Verhältnis. Ist x eine kleine Größe erster Ordnung,

so ist ax^n eine kleine Größe der n ten Ordnung, wenn a endlich ist. Die Ordnung der Summe oder Differenz zweier kleiner Größen verschiedener Ordnung wird durch die geringere Ordnung der beiden Größen bestimmt. Die Ordnung des Produktes oder Quotienten zweier kleiner Größen ist die Summe oder Differenz der Ordnungszahlen der beiden Größen.

Ist $U = u + u'$, $V = v + v'$, wo u und v Näherungswerte von U , V sind, also u' , v' deren Fehler; so ist der Fehler

$$UV - uv = uv' + vu' + u'v' \text{ nahe} = uv' + vu',$$

wenn man das sehr kleine Produkt $u'v'$ der Fehler vernachlässigt.

Die Ordnungszahl des Fehlers des Produktes UV , wenn dafür uv gesetzt wird, ist daher durch die Ordnungszahl von $uv' + vu'$ bestimmt.

Wendet man diesen Satz auf

$$UV = \frac{bn + dn''}{n + n''} \cdot \frac{n + n''}{n'}$$

an, so ist $U = \frac{bn + dn''}{n + n''}$ eine kleine Größe der -2 ten Ordnung, der Fehler v' eine Größe der vierten Ordnung, also uv' eine kleine Größe der zweiten Ordnung. $V = \frac{n + n''}{n'}$ ist von der nullten Ordnung, der Fehler u' von der ersten Ordnung, also das Produkt vu' von der ersten Ordnung. Der Fehler von UV ist daher von der ersten Ordnung, da die Summe von kleinen Größen erster und zweiter Ordnung eine Größe erster Ordnung ist.

Als kleine Größen erster Ordnung werden nach Gauß bei der Bahnbestimmung eines kleinen Planeten die auf der Kugelfläche vom Halbmesser gleich Eins in der Zwischen-

zeit von der ersten zur dritten Beobachtung zurückgelegten heliozentrischen und geozentrischen Wege und der Exzentrizität der Bahn vorausgesetzt. Besonders werden als solche Größen die Werte von

$$\frac{\vartheta}{r'^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\vartheta''}{r''^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\vartheta'}{r'^{\frac{3}{2}}}$$

betrachtet.

Bei Kometen kann einer mäßigen heliozentrischen Bewegung eine bedeutende geozentrische und umgekehrt bei kleinen Zwischenzeiten entsprechen.

Diese theoretische Fehlerschätzung von $\varrho' : \cos \beta'$ findet in der Praxis glücklicherweise nicht statt, denn sonst wäre die Bahnbestimmung eines Asteroiden eine sehr mühsam ausführbare Rechnung. Diese scheinbare Nichtübereinstimmung von Theorie und Praxis in der Ordnungsbestimmung des Fehlers von $\varrho' : \cos \beta'$ rührt daher, daß die Ordnungszahl einer kleinen Größe durch einen beigefügten Faktor $a < 1$ erhöht werden kann, und die Differenz zweier kleiner Größen derselben Ordnung eine Größe höherer Ordnung sein kann.

In den meisten Fällen der Praxis kann der Unterschied $(\vartheta - \vartheta'') : r'^{\frac{3}{2}}$ als eine kleine Größe zweiter Ordnung vorausgesetzt werden.

Beim Ceres-Beispiel, das als Leistungsprobe der Gaußschen Methode angesehen werden kann, erscheinen $\vartheta : r'^{\frac{3}{2}} = 0.52$, $\vartheta'' : r''^{\frac{3}{2}} = 0.55$ als kleine Größen erster Ordnung, auch noch $\vartheta' : r'^{\frac{3}{2}} = 1.1$; dagegen

$$b = -3.11\dots, \quad c = 1.10\dots, \quad d = 2.04\dots$$

als groß zweiter Ordnung; hierbei findet ein Übergang vom Negativen zum Positiven statt, wodurch die Abschätzung der Ordnung der Größen illusorisch wird. Dennoch findet,

besonders begünstigt durch die nahezu gleichen Werte ϑ , ϑ'' und die kleine Exzentrizität = 0.08, noch eine verhältnismäßig rasche Konvergenz der Hypothesen für P und Q statt.

2. Übrigens läßt sich auch in der ersten Gaußschen Hypothese die Genauigkeit der Bestimmung von $\varrho' : \cos \beta'$ um mindestens eine Ordnung steigern.

Für den Unterschied S. 35

$$\frac{(b-d)\vartheta\vartheta''(y''-y)}{(\vartheta+\vartheta'')(y''\vartheta+y\vartheta'')}$$

erhält man einen Näherungswert, indem man im Zähler

$$y'' = 1 + \frac{1}{6} \frac{\vartheta''^2}{r'^3}, \quad y = 1 + \frac{1}{6} \frac{\vartheta^2}{r'^3}$$

setzt, im Nenner

$$y'' = y = 1.$$

Damit wird dieser Unterschied näherungsweise

$$\frac{1}{6} \frac{(b-d)\vartheta\vartheta''(\vartheta''-\vartheta)}{\vartheta'r'^3},$$

ist also verschwindend, wenn ϑ nahezu = ϑ'' ist, was in der Praxis, wo für eine Bahnbestimmung meistens eine Auswahl von Beobachtungen vorhanden ist, häufig stattfindet.

Eine Verbesserung der Größe Q für die erste Hypothese wird dadurch erzielt, daß man beachtet, daß wegen

$$r = r' - \alpha\vartheta'', \quad r'' = r' + \alpha\vartheta, \quad \alpha = \frac{dr}{dt} \text{ für } t = 0,$$

$$rr'' \text{ nahe} = r'^2 + \alpha(\vartheta - \vartheta''),$$

$$\frac{r'^2}{rr''} = 1 - \frac{\alpha}{r'^2} (\vartheta - \vartheta'')$$

bei nicht sehr verschiedenen ϑ und ϑ'' (mit einem Fehler dritter Ordnung) gleich 1 gesetzt werden kann; $yy'' \cos f \cos f''$ wird näherungsweise gerechnet, indem man

$$y = 1 + \frac{\vartheta^2}{6r'^3}, \quad 2f = \frac{\vartheta}{r'^{\frac{3}{2}}}, \dots$$

setzt; damit wird

$$\begin{aligned}
 yy'' \cos f \cos f' \cos f'' &= 1 - \frac{B'}{r'^3}, \\
 B' &= \frac{1}{2} (5 \vartheta \vartheta'' + (\vartheta - \vartheta'')^2) \\
 &= \frac{1}{48} (5 \vartheta'^2 - (\vartheta - \vartheta'')^2) \text{ nahe } = \frac{5}{48} \vartheta'^2, \\
 Q &= \frac{\vartheta \vartheta''}{1 - B' : r'^3}.
 \end{aligned}$$

Die Gleichung (11) geht dadurch über in

$$\begin{aligned}
 (11') \quad x' &= \lambda - \frac{\mu'}{r'^3 - B'}, \quad r'^2 = x'^2 + a'^2, \\
 \lambda &= e - \frac{b \vartheta + d \vartheta''}{\vartheta'}, \quad \mu' = \left(\frac{b \vartheta + d \vartheta''}{\vartheta'} - \frac{1}{3} (b - d) \frac{\vartheta - \vartheta''}{\vartheta'} \right) \frac{\vartheta \vartheta''}{2}.
 \end{aligned}$$

Für die Berechnung der Verhältnisse $n:n'$ und $n'':n'$ aus den Gleichungen (12) genügt es

$$P = \frac{\vartheta''}{\vartheta} \left(1 + \frac{1}{6} \frac{(\vartheta - \vartheta'') \vartheta'}{r'^3} \right), \quad Q = \frac{\vartheta \vartheta''}{1 - B' : r'^3}$$

zu setzen. Diese Berechnungsart kann als verbesserte erste Gaußsche Hypothese bezeichnet werden.

Für das Juno-Beispiel beträgt der Unterschied in $\log r'$ + 9100 beider »unverbesserten« und - 200 Einheiten der siebenten Stelle bei der »verbesserten« ersten Hypothese von jenem der zweiten.

Die obige Verbesserung von $bn + dn'':n + n''$ ist gleichwertig mit der Annahme einer kreisförmigen Bewegung vom Radius r' in der Zwischenzeit zur genäherten Bestimmung der Verhältnisse $n:n'$ und $n'':n'$ bei Vernachlässigung der Glieder mit $\vartheta'' \dots$, welche mit der »Enckeschen« Annahme

$$\frac{n}{n'} = \frac{\vartheta}{\vartheta'} \left(1 + \frac{1}{6} \frac{(2\vartheta + \vartheta'') \vartheta''}{r'^3} \right), \quad \frac{n''}{n'} = \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \left(1 + \frac{1}{6} \frac{(\vartheta + 2\vartheta'') \vartheta}{r'^3} \right)$$

zusammenfällt. Setzt man in den zweiten Posten

$$2\vartheta + \vartheta'' = 3\vartheta, \quad \vartheta + 2\vartheta'' = 3\vartheta'',$$

so erhält man die Gaußsche erste Hypothese.

3. Zur Berechnung der Dreiecksverhältnisse aus der Gaußschen Größe P und Q

$$P = \frac{\mathfrak{J}'' y}{\mathfrak{J} y''}, \quad Q = \frac{\mathfrak{J} \mathfrak{J}'' r'^2 : r r''}{y y'' \cos f \cos f' \cos f''}$$

mag bemerkt werden: Die gegebenen Werte \mathfrak{J} , \mathfrak{J}' , \mathfrak{J}'' werden zur Berechnung der Glieder nullter, r , r' , r'' der Glieder zweiter, f , f' , f'' der Glieder vierter Ordnung der Dreiecksverhältnisse benötigt. Letzteres erhellt daraus, daß nur in Gliedern zweiter Ordnung $\cos f$, $\cos f'$, $\cos f''$ vorkommen, und bei der Berechnung von h und h'' (Art. 6) nur in $m^2 l$ und $m''^2 l''$ die Werte von $\sin \frac{1}{2} f^2$ und $\sin \frac{1}{2} f''^2$. Die Sicherheit einer Hypothese von P und Q hängt daher hauptsächlich von der Genauigkeit der Werte r , r' , r'' ab. Sind daher diese Größen bereits soweit genau, daß damit die Dreiecksverhältnisse mit einer Genauigkeit, welche siebenstellige Tafeln gestatten, erhalten werden, so kann deren Berechnung als abgeschlossen erklärt werden.

Eine Abkürzung der von Gauß vorgeschlagenen Berechnung der Größen f , f' , f'' , wie in Art. 16 und 17 angegeben ist, wird dadurch erzielt, daß man $2f$, $180^\circ - 2f'$, $2f''$ als die Winkel des Dreiecks mit den gegenüberliegenden Seiten nr , $n'r'$, $n''r''$ oder

$$\frac{r}{r'} \frac{n}{n'} = a, \quad 1 = c, \quad \frac{r''}{r'} \frac{n''}{n'} = b, \quad a + b + c = 2s$$

betrachtet, wobei für $r:r'$, $r'':r'$, $n:n'$, $n'':n'$ die eben erhaltenen Werte verwendet werden.

Man erhält daraus

$$\tan f = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \quad \tan f'' = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

$$\cot f' = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

Bei dieser Rechnung werden, da $s - c$ eine kleine Größe zweiter Ordnung ist, a , b genauer (etwa sechsstellig) berechnet; ist $s - c$ berechnet, so kann die weitere Be-

rechnung von f , f' , f'' vier- oder fünfstellig ausgeführt werden.

4. Die Gleichungen (13) und (14) des Art. 16, die Encke zur Bestimmung von ϱ und ϱ'' durch ϱ' vorgeschlagen hat, haben vor jenen, von ϱ' freien, den Vorzug, daß nur bei ϱ' aber nicht bei ϱ und ϱ'' eine Unsicherheit der Rechnung zufolge des Umstandes der Bestimmung einer Größe durch eine Differenz zweier großer Zahlen eintritt*).

Da die Ordnungszahl der Fehler von $n:n'$ und $n'':n'''$ um zwei Einheiten höher ist als jene von r' , so hat auf die Ordnungszahl der Fehler von ϱ und ϱ'' nur der Posten mit ϱ' Einfluß. Zur Beurteilung dieser Teilfehler von ϱ' und ϱ'' sollen die Koeffizienten von ϱ' näherungsweise bestimmt werden.

$$\frac{\sin(\lambda'' - \lambda')}{\sin(\lambda'' - \lambda)} = \frac{\lambda'' - \lambda'}{\lambda'' - \lambda} = \frac{\vartheta}{\vartheta'} \frac{1 + \frac{l_2}{l_1} \vartheta}{1 + \frac{l_2}{l_1} (\vartheta - \vartheta'')} = \frac{\vartheta}{\vartheta'} \left(1 + \frac{l_2}{l_1} \vartheta'' \right)$$

$$\frac{\sin(\lambda' - \lambda)}{\sin(\lambda'' - \lambda)} = \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \frac{1 - \frac{l_2}{l_1} \vartheta''}{1 + \frac{l_2}{l_1} (\vartheta - \vartheta'')} = \frac{\vartheta''}{\vartheta'} \left(1 - \frac{l_2}{l_1} \vartheta \right).$$

Mit Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung ist

$$\frac{n}{n'} = \frac{\vartheta}{\vartheta'}, \quad \frac{n''}{n'''} = \frac{\vartheta''}{\vartheta'};$$

setzt man $a_0 = A \vartheta \vartheta''$, so werden diese Koeffizienten von ϱ und ϱ'' bezüglich

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{l_2}{l_1} \vartheta'' \right) \left(1 + \frac{A \vartheta''}{l_1} \sec \beta' \frac{\sin(\lambda'' - L'')}{\sin(L'' - K)} \right) \\ & \left(1 - \frac{l_2}{l_1} \vartheta \right) \left(1 - \frac{A \vartheta}{l_1} \sec \beta' \frac{\sin(\lambda - L)}{\sin(L - K)} \right), \end{aligned}$$

*) Auch Gauß bestimmt bei seinem Vorgange die heliozentrischen Entfernungen der ersten und dritten Beobachtung aus der mittleren ohne neue Unsicherheit.

also näherungsweise von der Form

$$1 + B\vartheta'' \quad \text{und} \quad 1 - B\vartheta.$$

Die Größen ϱ und ϱ'' (oder r und r'') werden daher mit gleicher Sicherheit erhalten wie ϱ' (oder r').

Aus der Form der Gleichungen (13) und (14) und der Art der Berechnung von r aus ϱ folgt: Ist v der Fehler von r' , so können die Fehler der berechneten Werte r und r'' (mit Vernachlässigung der kleinen Größen höherer Ordnung) in der Form vorausgesetzt werden

$$v(1 - \alpha\vartheta''), \quad v(1 + \alpha\vartheta),$$

wo $\alpha\vartheta, \alpha\vartheta''$ klein sind, mindestens der Ordnung Eins. Von gleicher Ordnung und Form sind die Fehler der Argumente der Breite, die Fehler von $\cos f, \cos f', \cos f''$ sind um zwei Ordnungen höher.

Damit kann die Frage der Konvergenz der Gaußschen Hypothesen für die in der Praxis am häufigsten vorkommenden Bahnbestimmungen beantwortet werden; dabei wird vorausgesetzt

$$b, c, d \text{ groß zweiter, } b - d \text{ erster Ordnung,} \\ \vartheta': r'^{\frac{3}{2}}, \quad (\vartheta - \vartheta''):\vartheta', \quad e \text{ klein erster Ordnung;}$$

die Gaußsche erste (unverbesserte) Hypothese liefert dann r' (also auch r und r'') mit einem Fehler zweiter Ordnung.

Ist μ die Ordnungszahl der Fehler von r, r', r'' einer Hypothese P und Q, P' und Q' die nächste Hypothese, so haben auf die Ordnungszahl des Fehlers von

$$P' = \frac{\vartheta''}{\vartheta} \frac{y}{y''}, \quad y = 1 + \frac{\vartheta^2}{6(r'r'')^{\frac{3}{2}} \cos f^3} + \dots$$

nur die Glieder mit $\vartheta^2, \vartheta''^2$ Einfluß; der Fehler von P' ist daher von der Ordnung $\mu + 3$, dieser bewirkt auf ϱ' einen Fehler der Ordnung $\mu + 2$. In dem Quotienten $r:r'$ und

$r'' : r'$ tilgen sich die Fehler der Ordnung μ , in dem Produkte $r r'' : r'^2$ die der Ordnung $\mu + 1$, wie aus

$$\frac{r + v(1 - \alpha \vartheta'')}{r' + v} \cdot \frac{r'' + v(1 + \alpha \vartheta')}{r' + v}$$

näherungsweise

$$= \frac{r r''}{r'^2} \left(1 + v \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r''} - \frac{2}{r'} \right) + \alpha v \left(\frac{\vartheta'}{r''} - \frac{\vartheta''}{r} \right) \right)$$

ersichtlich ist; die Fehler von $\cos f$, $\cos f'$, $\cos f''$ sind von der Ordnung $\mu + 2$. Der Fehler von Q' ist daher von der Ordnung $\mu + 4$, sein Fehler-Einfluß auf ϱ' (oder r') von der Ordnung $\mu + 2$.

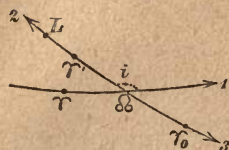
Aus der Form der Fehler der berechneten Werte r, r', r'' folgt überdies, daß trotz der Ungenauigkeit von r, r', r'' die nach 3. bestimmten Winkel f, f', f'' mit gleichem Grade von Genauigkeit wie nach Art. 16 und 17 erhalten werden.

5. Die Gaußsche Methode der Bahnbestimmung setzt die Entwickelbarkeit der Verhältnisse $n : n'$ und $n'' : n'$ nach Potenzreihen der Unterschiede der Anomalien (etwa $\vartheta : r'^{\frac{3}{2}}$, $\vartheta'' : r'^{\frac{3}{2}}$) bei Beschränkung auf eine geringe Gliederzahl voraus. Für drei auf einander folgende Oppositionen eines kleinen Planeten ist diese Methode daher ebensowenig anwendbar, als etwa die auf nur drei oder vier Glieder beschränkten Sinus- oder Cosinus-Reihen für ein Argument über 1 bei einer vorgeschriebenen Genauigkeit auf sieben oder noch mehr Stellen.

11) S. 22. Direkte und retrograde Bewegung. Statt die Neigung der Bahn nach Gauß von 0 bis 180° zu zählen, zählt man dieselbe auch von 0 bis 90° und unterscheidet zwischen direkter und retrograder Bewegung. Ist die Neigung der Bahn größer als 90°, so nimmt man

das Supplement der Neigung, fügt aber hinzu, daß die Bewegung retrograde sei, während man sie in dem anderen Falle (wo $i < 90^\circ$ ist) direkte nennt. In diesem Falle

Fig. 21.



werden die Längen in der Bahn von einem Punkte \mathcal{V}' (Fig. 21) gezählt, welcher in der Richtung der Bewegung des Himmelskörpers ebensoweit entfernt ist wie der aufsteigende Knoten vom Frühlingsäquinoktium. Die

Längen in der Bahn werden in einer der Bewegung entgegengesetzten Richtung gezählt*). Ist nun \mathcal{V}_0 der fiktive Frühlingspunkt in der Bahn nach der Gaußschen, \mathcal{V}' der fiktive Frühlingspunkt nach der älteren (gewöhnlichen) Zählung; bedeuten i , Ω , \mathcal{A} Neigung, Länge des Knotens, Länge in der Bahn nach der Gaußschen, i' , Ω' , \mathcal{A}' dieselben Größen nach der älteren Zählung, so findet folgender Zusammenhang statt

$$i + i' = 180^\circ, \quad \Omega = \Omega', \quad \mathcal{A} + \mathcal{A}' = 2\Omega.$$

Für die Längen des Perihels hat man daher $\Pi + \Pi' = 2\Omega$. Ist u das Argument der Breite, d. i. die Entfernung des Himmelskörpers vom Knoten, v die wahre Anomalie, d. i. die Entfernung vom Perihel, beide Größen in der Richtung der Bewegung gezählt, so ist

$$u = \Omega' - \mathcal{A}' = \mathcal{A} - \Omega, \quad v = \Pi' - \mathcal{A}' = \mathcal{A} - \Pi.$$

Für das in Art. 21 gegebene Beispiel hat man $i' = 81^\circ 1' 3''$, $\Pi' = 197^\circ 37' 51''$, muß aber den Zusatz machen »Bewegung retrograde«.

*) In der Fig. 21 bedeutet: Pfeil 1 die Richtung der Bewegung der Erde, Pfeil 2 die Richtung der Bewegung des Himmelskörpers, Pfeil 3 die Richtung der Zählung nach der älteren (gewöhnlichen) Methode.

12) Methode der kleinsten Quadrate. Es seien aus den n Gleichungen

$$v_1 = m_1 + a_1x + b_1y + c_1z = 0$$

$$v_2 = m_2 + a_2x + b_2y + c_2z = 0$$

$$v_n = m_n + a_nx + b_ny + c_nz = 0,$$

wo m_1, m_2, \dots, m_n durch Beobachtung erhalten werden, die Unbekannten x, y, z (deren Anzahl der Einfachheit halber gleich drei gesetzt wurde) zu bestimmen.

Wären die beobachteten Größen m_1, m_2, \dots, m_n vollkommen genau, so könnte man aus dreien dieser Gleichungen die Unbekannten x, y, z bestimmen; die übrigen $n - 3$ Gleichungen werden für diese Werte der Unbekannten vollkommen erfüllt. Wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler werden die Größen m_1, m_2, \dots, m_n nicht vollkommen genau sein, es kann daher durch ein System von Werten x, y, z nicht sämtlichen obigen Gleichungen genügt werden.

In diesem Falle bestimmt man die Unbekannten derart, daß allen Gleichungen möglichst genügt wird; man erreicht dieses, indem man die Summe

$$S = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$$

zu einem Minimum macht. Dazu ist erforderlich, daß

$$\frac{dS}{dx} = 0, \quad \frac{dS}{dy} = 0, \quad \frac{dS}{dz} = 0$$

wird, welche Gleichungen entwickelt geben

$$[aa]x + [ab]y + [ac]z + [am] = 0$$

$$[ab]x + [bb]y + [bc]z + [bm] = 0$$

$$[ac]x + [bc]y + [cc]z + [cm] = 0,$$

wo

$$[aa] = a_1a_1 + a_2a_2 + \dots + a_na_n$$

$$[ab] = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \text{ usw. ist.}$$

Auf dieselbe Weise verfährt man, wenn mehr als drei Unbekannte vorhanden sind.

Im vorigen wurde die stillschweigende Voraussetzung gemacht, daß alle (beobachteten) Größen m_1, m_2, \dots, m_n von gleicher Genauigkeit sind. Ist jedoch eine Beobachtung von größerer Genauigkeit, so sagt man: »die Beobachtung hat ein größeres Gewicht«. Um diesen Umstand in Rechnung zu ziehen, kann man sich die zugehörige Gleichung so oft angesetzt denken, als ihr größeres Gewicht beträgt.

Sind daher (auf irgend eine Einheit bezogen)

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

die Gewichte der Beobachtungen

$$m_1, m_2, \dots, m_n,$$

so mache man die Summe

$$S = p_1v_1^2 + p_2v_2^2 + \dots + p_nv_n^2$$

zu einem Minimum.

Da die Unbekannten aus der Bedingung, daß die Summe S der Quadrate der Fehler v_1, v_2, \dots, v_n ein Minimum wird, bestimmt werden, so heißt diese Bestimmung »Methode der kleinsten Quadrate«.

Für eine Unbekannte ist

$$[paa]x + [pam] = 0.$$

Ist $a_1 = a_2 = \dots = a_n = -1$, sind ferner die Gewichte aller Beobachtungen gleich, so ist

$$x = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{n},$$

d. i. das arithmetische Mittel.

13) S. 156. Über das Problem der Bahnverbesserung mögen folgende neuere Arbeiten angeführt werden.

P. Harzer in der erwähnten »Publikation der Sternwarte in Kiel. XI«. Es wird die Lösung der Aufgabe geliefert: Zu den Näherungswerten dreier geozentrischer Entfernungen die Verbesserungen zu finden, die eine strenge Darstellung der Beobachtungen bewirken. Diese Aufgabe wird für die Ellipse, für eine nahezu parabolische Bahn und für die Parabel gelöst.

J. Bauschinger in Nr. 23 »Veröffentlichungen des Königlichen Astronomischen Rechen-Institutes zu Berlin«. 1903. Der Verfasser liefert: I. Die Differentialquotienten der geozentrischen Rektaszension und Deklination nach den Elementen. II. Die Variation der geozentrischen Distanzen. In I wird die Grundform der Differentialquotienten entwickelt, wo die die Neigung, Knoten und Distanz Perihel vom Knoten ersetzenden Hilfsgrößen naturgemäß auftreten; aus der Grundform werden die Schönfeldschen und Tintjenschen Formeln — letztere in Strenge — hergeleitet. Zur Abteilung II. In Art. 35 werden die Differentialquotienten der zur Bahnverbesserung verwendeten Orte des Himmelskörpers empirisch bestimmt, da die streng entwickelten Formeln zu kompliziert erscheinen. Bauschinger erklärt mit Recht das gewöhnliche Verfahren: »ein in praxi recht wirksames, selten fehlschlagendes Mittel, das aber doch mühsam und analytisch roh ist«; er empfiehlt daher statt dessen solche Entwicklungen nach Potenzen der Zeit, die zu rechnerisch brauchbaren sich gestalten. S. Tintjen hat im Berliner Astronomischen Jahrbuch 1878 (»Über Verbesserung von Planetenbahn-Bestimmungen und einige dabei zulässige Abkürzungen«) dieses Verfahren zuerst mitgeteilt, dasselbe wird von Bauschinger erweitert; es kann aber ohne

besondere Mehrrechnung noch zu einem genaueren Abschluß gebracht werden. (Dritter Anhang.)

14) S. 101. Setzt man $f(x)$ in der Form voraus

$$f(x) = \alpha + \beta \frac{v}{w} + \gamma \left(\frac{v}{w}\right)^2 + \delta \left(\frac{v}{w}\right)^3 + \varepsilon \left(\frac{v}{w}\right)^4,$$

wo $x = a + nw + v$ ist, so erhält man durch passende Bestimmung von $\alpha, \dots, \varepsilon$ für

$$\frac{v}{w} = -2, -1, 0, +1, +2$$

die Werte

$$\begin{aligned} f(a + \overline{n-2} \cdot w), \quad f(a + \overline{n-1} \cdot w), \quad f(a + \overline{n} \cdot w), \\ f(a + \overline{n+1} \cdot w), \quad f(a + \overline{n+2} \cdot w), \end{aligned}$$

und alle in der Nähe von $a + nw$ liegenden Funktionswerte, wenn man $f(x)$ als das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe vierter Ordnung betrachten kann. Aus den fünf Werten folgt

$$\alpha = f(a + nw)$$

$$\begin{aligned} \beta = \frac{1}{2}(f'(a + \overline{n + \frac{1}{2}} \cdot w) + f'(a + \overline{n - \frac{1}{2}} \cdot w)) \\ - \frac{1}{12}(f'''(a + \overline{n + \frac{1}{2}} \cdot w) + f'''(a + \overline{n - \frac{1}{2}} \cdot w)) \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}f''(a + nw) - \frac{1}{24}f^{IV}(a + nw)$$

$$\delta = \frac{1}{12}(f'''(a + \overline{n + \frac{1}{2}} \cdot w) + f'''(a + \overline{n - \frac{1}{2}} \cdot w))$$

$$\varepsilon = f^{IV}(a + nw).$$

Die weitere Entwicklung ist so wie in Art. 38.

Damit erhält man

$$\int_{a + \frac{1}{2}w}^{a + n + \frac{1}{2}w} f(x) dx = w \left(f(a + \overline{n + \frac{1}{2}} \cdot w) + \frac{1}{24} f'(a + \overline{n + \frac{1}{2}} \cdot w) - \frac{1}{576} f'''(a + \overline{n + \frac{1}{2}} \cdot w) \right),$$

$$\int_{a + \frac{1}{2}w}^{a + \overline{n+1}w} f(x) dx^2 = w^2 \left(f'(a + \overline{n+1}w) + \frac{1}{2} f(a + \overline{n+1}w) - \frac{1}{2} f''(a + \overline{n+1}w) \right);$$

wobei

$$\begin{aligned} f'(a + \frac{1}{2}w) &= -\frac{1}{2} f''(a + \frac{1}{2}w) + \frac{1}{5} \frac{7}{60} f'''(a + \frac{1}{2}w), \\ f''(a) &= \frac{1}{2} f'(a + w) - \frac{1}{5} \frac{7}{60} (f'''(a) + 2f'''(a + 20)) \end{aligned}$$

zur Bildung der ersten und zweiten Summenreihe als Anfangswerte angesetzt werden.

Aus den Funktionswerten kann man auch die Werte der Differentialquotienten bestimmen.

Denn es ist

$$\frac{df(x)}{dx} = \beta \frac{1}{w} + \gamma \frac{2v}{w^2} + \delta \frac{3v^2}{w^3} + \varepsilon \frac{4v^3}{w^4}.$$

Für $v = 0$, d. h. für $x = a + nw$, soll der Differentialquotient mit $f'_0(a + nw)$ bezeichnet werden. Es ist daher

$$\begin{aligned} wf'_0(a + nw) &= \frac{1}{2} (f'(a + \overline{n + \frac{1}{2}} \cdot w) + f'(a + \overline{n - \frac{1}{2}} \cdot w)) \\ &\quad - \frac{1}{2} (f'''(a + \overline{n + \frac{1}{2}} \cdot w) + f'''(a + \overline{n - \frac{1}{2}} \cdot w)), \end{aligned}$$

und ebenso

$$w^2 f''_0(a + nw) = f''(a + nw) - \frac{1}{2} f^{IV}(a + nw), \text{ usw.}$$

Zusatz. Bei der obigen Integration fallen die Glieder mit den ungeraden Potenzen nach v von $f(x)$ weg. Der Fehler des Integrals ist daher von gleicher Ordnung, ob man für $f(x)$ eine Funktion von geradem Grade oder des nächsthöheren ungeraden wählt.

15) S. 146. Aus diesen Grundsätzen entwickelte sich die sogenannte Sphärentheorie. Die Weltspähre wird in neun konzentrische durchsichtige Sphären geteilt; in den ersten sieben befanden sich die Planeten, Mond, Sonne, Merkur usw., in der achten waren die Fixsterne, die neunte, das *primum mobile*, umschloß die übrigen und erteilte ihnen

die zur Darstellung der Erscheinung nötigen Bewegungen. Der Widerspruch der festen Sphären mit der epizyklischen Bewegung der Planeten wurde erst durch Peurbach (1423—1461) dadurch gelöst, daß er den Sphären eine solche Dicke gab, daß der Planet mit samt seinem Epizykel zwischen der äußeren und inneren Fläche eingeschlossen war. Durch Tycho, welcher die Kometen als kosmische Körper erkannte, wurde die Ansicht der festen Sphären zerstört.

16) Der Unterschied zwischen der Länge in der Bahn und der heliozentrischen Länge, d. i. die Größe $u - (l - \Omega)$, heißt die Reduktion auf die Ekliptik.

Aus

$$\text{tang } u = \frac{\text{tang } (l - \Omega)}{\cos i}$$

folgt nach 2) des Art. 44 wegen der Kleinheit von i

$$u - (l - \Omega) = \frac{\text{tang } \frac{1}{2} i^2}{\sin 1''} \cdot \sin 2(l - \Omega).$$

Das Maximum $= \frac{\text{tang } \frac{1}{2} i^2}{\sin 1''}$ beträgt für den Planeten Mars 52".8. Kepler findet die Reduktion kleiner als 1'.

Die alten Astronomen vernachlässigten die Reduktion und rechneten die Länge so, als ob die Bewegung des Planeten in der Ekliptik geschehe.

17) S. 112. Bestimmung der Bahnelemente der oberen Planeten nach Cl. Ptolemäus.

Für die Elemente des exzentrischen Kreises, d. i. der Exzentrizität und der Lage der Apsidenlinie dienen die Längen zur Zeit der Opposition.

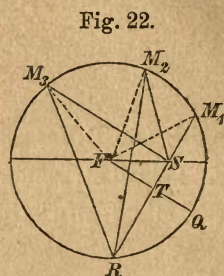
Gegeben sind: Drei wahre Längen zur Zeit der Opposition und die zugehörigen mittleren Bewegungen.

1. Unter der Voraussetzung der »einfachen Exzentrizität«.

Es seien (Fig. 22) M_1, M_2, M_3 drei Orte eines oberen Planeten im exzentrischen Kreise, der Mittelpunkt F das *punctum aequans*.

Die Winkel M_1SM_2, M_2SM_3 sind die wahren Bewegungen von der ersten zur zweiten, zweiten zur dritten Beobachtung, während die Winkel M_1FM_2, M_2FM_3 die zugehörigen mittleren Bewegungen sind.

Setzt man $\alpha = 1$, und verlängert man SM_1 bis zum Punkte R und zieht RM_2, RM_3 , so kann man aus den Dreiecken SRM_2, SRM_3 die Seiten RM_2, RM_3 durch RS und damit $\sphericalangle RM_2M_3$ bestimmen. Dadurch wird der Bogen M_1QR und damit RT und FT , wo T die Mitte von M_1R ist, bekannt. Bestimmt man außerdem RS aus RM_2 oder RM_3 , so erhält man $ST = RS - RT$, und damit FS und $\sphericalangle FST$; wodurch die Exzentrizität und die Lage der Apsidenlinie bekannt ist.



2. Für die »gleiche Teilung der Exzentrizität« kann man in erster Annäherung die Elemente nach 1. bestimmen.

Man bezeichne mit M den Durchschnittspunkt des Äquanten mit der Geraden FL der Fig. 8, so kann man aus den genäherten Elementen den Winkel LSM bestimmen. Diese Rechnung wird für jeden der drei Orte durchgeführt, dadurch erhält man den Fall 1.

Nach dieser Methode findet Ptolemäus für den Planeten Mars $e = 0.10, \quad \Pi = 295^\circ 30'$.

Das Verhältnis des Radius des Epizykels zum Radius des Exzenters wird durch eine Beobachtung außerhalb der Opposition bestimmt.

18) S. 111. Die Rechnung für die Bestimmung des Punktes L stellt sich so: Man bestimmt die Sehne OC , hierauf im Dreieck COL , in welchem Winkel $COL = 90^\circ + 2\alpha$ ist, die Seite OL und schließlich im Dreieck OSL die $SL = r$ und Winkel $OSL = 180^\circ - v$.

19) S. 126. Diese Bedingungen sind in der Tat hinreichend. Denn wird der Gleichung 1) genügt, so liegen die vier Punkte M_1, \dots, M_4 in einem Kreise, d. h. je zwei Grade SM_1 und FM_1, \dots, SM_4 und FM_4 schneiden sich in Punkten M_1, \dots, M_4 , die in dem Umfang eines Kreises liegen. Wird der Gleichung 2) genügt, so liegen die Punkte F, O, S in einer Geraden, wo O der Mittelpunkt des Kreises ist. Der Winkel OM_1S kann nämlich doppelt gerechnet werden, zunächst aus

$$OM_1S = OM_1M_4 - SM_1M_4$$

und aus $O'M_1, SM_1$ und $O'SM_1 = 180^\circ - PSM_1$, wo O der Durchschnittspunkt der Geraden M_1O mit der Geraden FS ist. Ist nun der Punkt O' mit dem Punkt O identisch, so müssen die beiden Werte von OM_1S übereinstimmen, wenn man $O'M_1 = \text{Radius des Kreises}$ setzt. Da im Kreisviereck $M_1 \dots M_4$ nun $OM_1 = OM_4 = \text{dem Radius}$ ist, so ist O der Mittelpunkt desselben.

20) S. 129. Diese Rechnung ist bei Kepler so geführt: Die heliozentrische Breite folgt aus

$$\sin b = \sin i \sin u.$$

a) Ist der Planet mit der Sonne in Opposition, so ist

$$r = \frac{R \sin \beta}{\sin(\beta - b)}.$$

b) Für Beobachtungen außerhalb der Opposition erhält man r aus

$$r \cos b \sin (l - \lambda) = R \sin (L - \lambda).$$

Für R nimmt Kepler einmal den Wert aus den tycho-nischen Elementen, und dann den Wert $R = 1$; dadurch erhält er Grenzwerte für die Exzentrizität e , welche ihn zum Verwerfen der stellvertretenden Hypothese veranlaßten.

21) S. 130. Daß bei den oberen Planeten diese Erscheinung eintreten muß, erhellt aus folgendem:

Ist (Fig. 13) N die Projektion eines oberen Planeten M auf die Ebene der Erdbahn, S das *punctum aequans*, E_1 und E_2 die Orte der Erde für denselben Punkt M des Planeten, so folgt: Ist S der Mittelpunkt der Erdbahn, so wird Winkel $E_1NS = E_2NS$, wenn Winkel $E_1SN = E_2SN$ ist; ist aber S nicht der Mittelpunkt der Erdbahn, so sind die beiden ersteren Winkel voneinander verschieden, wenn auch letztere Winkel einander gleich sind.

Um die angegebene Lage für den Planeten Mars zu erhalten, berücksichtige man, daß in seiner siderischen Umlaufzeit = 687 Tage die Erde 2 Umläufe — $52^\circ 54'$ zurücklegt. Beobachtet man daher den Mars in solcher Lage, daß

$$E_1SN = 21^\circ 27', 42^\circ 54', \dots$$

ist, so wird nach bzw. ein, zwei, . . . Umläufen Winkel $E_2SN = E_1NS$ sein. Für Mars stieg der Unterschied der Winkel E_1NS und E_2NS bis auf 2° .

22) S. 131. Sind r, r' zwei Distanzen, α, α' die Winkel derselben mit ihren Tangenten an die Bahn, t, t' die Zeiten, in welchen die unendlich kleinen Bogen $l = l'$ beschrieben werden, so ist in Strenge

$$lr \sin \alpha : l' r' \sin \alpha' = t : t',$$

oder

$$t : t' = r \sin \alpha : r' \sin \alpha'.$$

Der Fehler der Ableitung besteht darin, daß Kepler statt des Verhältnisses $r \sin \alpha : r' \sin \alpha'$ das Verhältnis $r : r'$ setzt, dann aber das Verhältnis $lr : l' r'$ für das Verhältnis der Flächen nimmt; beide Fehler heben sich im Resultate auf. Für die Apsidenlinie ist, wegen $\alpha = \alpha' = 90^\circ$, $t : t' = r : r'$.

23) S. 131. Projiziert man den exzentrischen Kreis orthogonal auf eine Ebene, welche durch die Apsidenlinie geht und deren Neigung ε durch $\sin \varepsilon = e$ bestimmt ist, so ist die Neigung der Projektion des Radiusvektors im exzentrischen Kreise gleich der optischen Gleichung φ .

Denn ist M die Projektion des Punktes L des exzentrischen Kreises, so erhält man aus dem durch die Geraden SP , SL , SM bestimmten Dreikante, wenn $\sphericalangle LSM = \lambda$ gesetzt wird, und v die wahre Anomalie des exzentrischen Kreises bedeutet,

$$\sin \lambda = \sin v \sin \varepsilon = e \sin v = \sin \varphi,$$

d. h. $\lambda = \varphi$. Die Punkte M bilden eine Ellipse als Projektion des exzentrischen Kreises. Vgl. Art. 2.

24) S. 141. Der Ursprung der Harmonie der Welt — sich äußernd in einer Tonmythe — ist bei den Pythagoräern zu finden. In Platos Republik heißt es: »Auf jeder der acht Weltsphären (Fixsternsphäre, . . . Mondsphäre. Vgl. Anm. 13) sitzt eine Sirene, die, mit herumbewegt, einen Ton von sich gibt; alle acht Töne fließen zusammen zu einem übereinstimmenden Einklang.« Cl. Ptolemäus hatte sogar eine Harmonik verfaßt, von deren 3. Buche (vom

3. Kap. an) Kepler eine Übersetzung liefert und seine Resultate mit denen des Ptolemäus vergleicht. Tycho füllte den Weltraum mit Luft, welche von den kreisenden Weltkörpern erschüttert, die Töne erzeugt. Kepler ist gegen die Ansicht einer musikalischen Harmonie, weil keine Musik des Weltraumes existiert und die Bewegung der Himmelskörper keine so heftige ist, daß man sie hören könnte. Die Harmonien können daher nur vermittels des Lichtes, d. i. in den sichtbaren Bewegungen der Himmelskörper wahrgenommen werden.

25) S. 146. Aus den tychonischen Beobachtungen ist die schnellste und langsamste Winkelbewegung eines jeden Planeten gegeben; durch geringe Änderungen dieser Zahlen erhält man harmonische Verhältnisse für die Vergleichenungen 1) und 2) des Art. 59. Umgekehrt: Ist das Gesetz der Harmonien gegeben, so erhält man aus dem Verhältnisse der schnellsten und langsamsten Bewegung die Exzentrizität und die mittlere Bewegung. Aus den Verhältnissen der mittleren Bewegungen erhält man nach dem dritten Gesetze die Verhältnisse der mittleren Entfernungen. Die mittleren Bewegungen bestimmt Kepler dadurch, daß er vom geometrischen Mittel aus der schnellsten und langsamsten Bewegung den halben Unterschied zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel derselben Zahlen abzieht. Ist daher g die größte, k die kleinste Winkelgeschwindigkeit, so ist die mittlere

$$\mu = \sqrt{gk} - \frac{1}{2} \left(\frac{g+k}{2} - \sqrt{gk} \right).$$

26) S. 146. Die Zeit zwischen Kepler und Newton lieferte für die theoretische Astronomie kaum einen Fortschritt. In Deutschland wirkte der Verfall der Kultur in-

folge des dreißigjährigen Krieges und die religiöse Un-
duldsamkeit gegen die kopernikanische Lehre der Erdbe-
wegung hindernd für das Verständnis der Keplerschen Ge-
setze. Von den wichtigsten Arbeiten aus dieser Zeit mögen
erwähnt werden:

Ismaelis Bullialdi *Astronomia Philolaica. Opus novum, in quo motus Planetarum per novam et veram Hypothesim demonstratur . . .* (Parisiis, 1645). Beruht auf kopernikanischer Weltanschauung. Der Planetenweg wird zwar als elliptisch vorausgesetzt, aber statt des zweiten Keplerschen Gesetzes wird angenommen: In einem Brennpunkt S ist die Sonne, vom anderen F aus erscheint die Bewegung des Planeten L als gleichförmig-einfache elliptische Hypothese. Da Boulliaud Nachfolger fand, möge der Vergleich dieser Hypothese mit der Keplerschen angeführt werden. Aus dem Dreiecke FSL (vgl. Fig. 1 des Art. 1), wo F der zweite Brennpunkt, $SFL = \alpha$ die mittlere Anomalie ist, erhält man

$$r^2 = (2a - r)^2 + 4a^2e^2 - 4(2a - r)ae \cos \alpha$$

$$r = a \frac{1 - 2e \cos \alpha + e^2}{1 - e \cos \alpha}$$

$$\sin(v - \alpha) = \frac{2ae}{r} \sin \alpha.$$

Vernachlässigt man die Glieder mit e^3 , so folgt

$$r : a = 1 - e \cos \alpha + e^2 \sin^2 \alpha$$

$$v = \alpha + 2e \sin \alpha + e^2 \sin 2\alpha;$$

also der Wert von $r : a$ übereinstimmend mit dem Keplerschen, v mit dem für den exzentrischen Kreis.

Philippi Lansbergii *Tabulae motuum coelestium perpetuae; ex omnium temporum observationibus constructae, temporumque omnium observationibus consentientes. Item,*

novae et genuinae motuum coelestium Theoricae; et Astronomicarum observationum Thesaurus. Middelburgi Zelandiae, 1633. Lansberg (geb. 1561, gest. 1632) verfaßte ein geometrisches Werk (über Dreieck und Kreis) und mehrere astronomische, von welchen die erwähnten Tafeln sein Hauptwerk bilden. Eine Gesamtausgabe erschien 1663 unter dem Titel: Philippi Lansbergii, Astronomi celeberrimi, opera omnia. Im Vorwort (1632, im 71. Jahre seines Alters) erklärt Lansberg, daß er an den Tafeln, die im Gegensatz zu den neueren in alphonsinischer Form konstruiert sind, 44 Jahre gearbeitet habe, daß die Nichtübereinstimmung der rudolphinischen Tafeln mit dem Himmel ihn zu deren Herstellung veranlaßt habe, daß seine Tafeln mit den Beobachtungen der früheren Jahrhunderte in wunderbarer Weise übereinstimmen, was durch den beigegebenen Thesaurus erwiesen werde. Die Theorie stützt Lansberg auf kopernikanischer Weltanschauung, aber für den Planetenweg wird der exzentrische Kreis angenommen. Diese Tafeln fanden anfangs große Anerkennung, ihre Fehler gegenüber den rudolphinischen wurden dennoch bald erkannt. Besonders trat der Engländer Jeremias Horrox, trotzdem die Lansbergschen Tafeln den Vorübergang der Venus vor die Sonne 1639 richtig, die rudolphinischen aber unrichtig angaben, zugunsten der Theorie und der Tafeln Keplers auf. Horrox, geb. 1619 zu Toxteth (Lancashire, gest. am 5. Januar 1641 (Jul. St.)), begann seine Studien 1663 mit den Werken von Lansberg, Tycho und Kepler, stellte bereits 1635 seine ersten Beobachtungen an, trat 1636 in Verbindung mit seinem astronomischen Freunde Wilhelm Crabtree (der wenige Tage nach ihm starb). Horrox schätzte anfangs die Werke des Lansberg sehr, fand aber bald Widersprüche der Beobachtungen mit den Tafeln und in den Hypothesen,

während er bei Kepler die Hypothesen widerspruchsfrei und mit der Natur übereinstimmend erkannte und die innerhalb gewisser Grenzen bleibenden Fehler der rudolphinischen Tafeln auf die nicht hinreichend genau bestimmten Elemente schob. Der Venusvorübergang vor der Sonne (24. Nov. 1639) wurde von ihm 1640 beschrieben und von Hevel 22 Jahre später herausgegeben. Dadurch wurde man auf Horrox aufmerksam, und 30 Jahre nach dessen Tode wurden von Johannes Wallis die Entwürfe zu einer verbesserten Astronomie, die Beobachtungen und Briefe an Crabtree als »Jeremiae Horoccii opera posthuma« (London, 1673) herausgegeben. Deren wichtigster Teil S. 1—239 ist betitelt: »Astronomia Kepleriana defensa et promota«. Im Interesse des Ansehens der ganz verfehlten Lansbergschen Tafeln gegenüber der richtigen Theorie Keplers bedauert Wallis das Erscheinen nach erst 30 Jahren. Zur Würdigung der Leistungen des Horrox mögen die Schlußworte der »Epistola Nuncupatoria« hier angeführt werden: »Mit so wenig Jahren, so geringen Hilfsmitteln, so großen entgegenstehenden Schwierigkeiten hat Horrox so große Fortschritte gemacht. Was hätte er bei langem Leben, mit dem Nötigsten versehen, unterstützt durch den Rat gelehrter Männer, geleistet? Inzwischen erfreuen wir uns an dem, was wir besitzen.«

Der Jesuit G. B. Riccioli gibt in seinen zwei Hauptwerken *Almagestum novum* (Bononiae, 1651) und *Astronomia reformata* (Bononiae, 1665) viele mit Mühe und Fleiß zusammengestellte Daten. Er versucht die Widerlegung der kopernikanischen Lehre der Erdbewegung (führt dagegen 77 Gründe und selbst Fallversuche an), spricht sich aber trotzdem über die Arbeiten Keplers, besonders über die gute Darstellung der Marsbewegung durch die rudol-

phinischen Tafeln höchst anerkennend aus (Et sane plurimum in hoc Keplero debet Astronomia).

Der Jesuit Andreas Tacquet, durch seine präzise kritische Darstellung in den fünf Büchern über Zylinder und Ringe bekannt, behandelt Kepler und Boulliaud im sechsten und achten Buche seiner »Astronomia«. Im ersteren wird gesagt: Ihre Hypothese, mit großem Scharfsinn erdacht und mit höchster Mühe ausgeführt, gefällt mir nicht: 1. Wegen der vorausgesetzten Erdbewegung. 2. Wegen der Zweiteilung der Exzentrizität, die man, wenn es anders geht (was gewiß möglich ist), vermeiden muß. 3. Wegen der Schwierigkeit und nichtgeometrischen Art (»ageometriam«) der Rechnung, ein Grund, der mir allein genügt, daß ich den Kreis der Ellipse vorziehe, da es das Ziel der Hypothesen ist, daß die Bewegungen der Gestirne in Zahlen ausgedrückt werden. Im achten Buche wird gesagt; Kepler und Boulliaud haben auch dieses Neue eingeführt, daß sie für den kreisförmigen Weg der Planeten die Ellipse setzten. Aber durch Kreise werden die Bewegungen der Himmelskörper bequemer dargestellt als durch Ellipsen. Deshalb habe ich die Ellipsen am Himmel, die die Kreise so sehr verdrängen sollen, weder je geliebt, noch liebe ich sie jetzt (nec amavi unquam, nec adhuc amo).

27) Tycho und Kepler hatten aus den kleinen Parallaxen der Kometen den Schluß gezogen, daß ihr Abstand größer als der des Mondes ist; wegen ihren vorübergehenden Erscheinungen glaubte Kepler für den sichtbaren Weg die Gerade annehmen zu dürfen. Diesen hat Johannes Hevel (1611—1687) zum Teil gekrümmt gegen das Weltzentrum konkav, als parabolisch gelegentlich hyperbolisch bezeichnet. Sein Schüler Georg Samuel Dörfel ergänzte

diese Hypothese in seinen »Astronomischen Beobachtungen des großen Cometen 1680 und 1681« (Plauen 1681) dahin: »Ob nicht dieses (und der andern) Cometen Bewegungslinie eine solche Parabel sei, dero Focus in das Centrum der Sonne zu setzen?«

28) S. 151. Betrachtet man das Bahnstück des Kometen als eine vom Kometen gleichförmig durchlaufene Gerade, so gilt dies auch von den Projektionen auf die Koordinatenachsen. Es ist daher

$$x' - x : x'' - x' = t'' : t.$$

Schafft man die Brüche weg und setzt $t + t'' = t'$, so wird

$$tx - t'x' + t''x'' = 0,$$

und ebenso

$$ty - t'y' + t''y'' = 0$$

$$tz - t'z' + t''z'' = 0,$$

welche Gleichungen aus den in Art. 15 gemachten Voraussetzungen hervorgehen, die für die praktische Berechnung nicht recht zulässig sind.

29) S. 151. Eine deutsche Ausgabe mit Anmerkungen der »J. H. Lamberts Abhandlungen zur Bahnbestimmung der Cometen« gibt J. Bauschinger in »Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften«, Nr. 133. Aus Bauschingers Geschichte der Bahnbestimmung möge als Ergänzung zu Art. 20 und 63 bemerkt werden, daß Du Séjour 1779 eine Methode geliefert hat, welche mit der Olbersschen identisch ist, ohne daß der Autor selbst den Wert seiner Arbeit erkannte.

30) S. 152. Diese Gleichungen zur Verbesserung von q, q', q'' werden erhalten: Es seien $r, r', r''; q, q', q''; \varrho, \varrho', \varrho''$

zusammengehörige Werte, $n : n'$ und $n'' : n'$ die aus ihnen gerechneten genauen Dreiecksverhältnisse. Man rechne (S. 153)

$$c - b \frac{n}{n'} - d \frac{n''}{n'} - \frac{e'}{\cos \beta'} = U$$

$$\frac{n'}{n} M e' + M_1 \left(\frac{n'}{n} \cdot \frac{N}{N'} - 1 \right) - e = V$$

$$\frac{n'}{n''} M'' e' + M_1'' \left(\frac{n'}{n''} \cdot \frac{N''}{N'} - 1 \right) - e'' = W;$$

deren Differentialien werden, wenn für $n : n'$ und $n'' : n'$ die Gibbsschen Ausdrücke gewählt werden, wegen

$$d \frac{n}{n'} = - \frac{n}{n'} (Q dq + Q' dq'), \quad d \frac{n'}{n} = \frac{n'}{n} (Q dq + Q' dq')$$

$$d \frac{n''}{n'} = - \frac{n''}{n'} (Q'' dq'' + Q' dq'), \quad d \frac{n''}{n''} = \frac{n''}{n''} (Q'' dq'' + Q' dq')$$

$$Q = \frac{3 B q}{\left(1 + \frac{B}{r^3}\right) r^5}, \quad Q' = \frac{3 B' q'}{\left(1 - \frac{B'}{r'^3}\right) r'^5}, \quad Q'' = \frac{3 B'' q''}{\left(1 + \frac{B''}{r''^3}\right) r''^5},$$

$$U_1 = b \frac{n}{n'} Q \Delta q + \left(\left(c - \frac{e'}{\cos \beta'} \right) Q' - 1 \right) \Delta q' + d \frac{n''}{n'} Q'' \Delta q''$$

$$V_2 = \left((e + M_1) Q - \cos \beta \right) \Delta q + \left((e + M_1) Q' + \frac{n'}{n} M \cos \beta' \right) \Delta q'$$

$$W_1 = \left((e'' + M_1'') Q' + \frac{n'}{n''} M'' \cos \beta' \right) \Delta q' + \left((e'' + M_1'') Q'' - \cos \beta'' \right) \Delta q'',$$

mit Vernachlässigung von $V \Delta q, \dots$

Die Verbesserungen $\Delta q, \Delta q', \Delta q''$ sind aus den Gleichungen

$$U + U_1 = 0, \quad V + V_1 = 0, \quad W + W_1 = 0$$

zu bestimmen.

Nach dem Vorgange auf S. 152 und 153 werden die Glieder mit Q, Q', Q'' vernachlässigt; was in der Praxis deshalb gestattet ist, weil für die Bestimmung der Dreiecksverhältnisse r, r', r'' nur zur Berechnung kleiner Größen zweiter Ordnung benötigt werden.

Dritter Anhang.

Zur Variation der geozentrischen Distanzen.

1. Aus den Gleichungen

$$r \cos b \cos l = x = \varrho \cos \beta \cos \lambda + R \cos L$$

$$r \cos b \sin l = y = \varrho \cos \beta \sin \lambda + R \sin L$$

$$r \sin b = z = \varrho \sin \beta \quad (\varrho \text{ die geozentrische Distanz})$$

erhält man durch Differentiation

$$dx = \cos b \cos l dr - r \cos b \sin l dl - r \sin b \cos l db$$

$$dy = \cos b \sin l dr + r \cos b \cos l dl - r \sin b \sin l db$$

$$dz = \sin b dr + r \cos b db;$$

daraus folgt

$$r \cos b dl = \cos l dy - \sin l dx$$

$$r \sin b db = \cos b dr - (\cos l dx + \sin l dy)$$

$$r \cos b d\lambda = dz - \sin b dr$$

$$r db = \cos b dz - \sin b (\cos l dx + \sin l dy)$$

$$dr = \sin b dz + \cos b (\cos l dx + \sin l dy);$$

analog für den geozentrischen Ort, wenn R , L als konstant angesehen werden,

$$\varrho \cos \beta d\lambda = \cos \lambda dy - \sin \lambda dx$$

$$\varrho d\beta = \cos \beta dz - \sin \beta (\cos \lambda dx + \sin \lambda dy)$$

$$d\varrho = \sin \beta dz + \cos \beta (\cos \lambda dx + \sin \lambda dy).$$

2. Bei der Variation der geozentrischen Distanzen verwendet man in der Regel den ersten und dritten Ort der zu verbessernden Bahn. Sind λ , β und λ'' , β'' die beiden beobachteten Orte (oder Normalorte), ϱ und ϱ'' (oder q und q'') die aus den Elementen gerechneten genäherten Distanzen,

so werden die genauen durch $q + dq$ und $q'' + dq''$ (wo $dq = dq$, $dq'' = dq''$) bezeichnet: λ , β und λ'' , β'' werden als konstant betrachtet. Dann ist

$$\begin{aligned} dx &= \cos \beta \cos \lambda dq & dx'' &= \cos \beta'' \cos \lambda'' dq'' \\ dy &= \cos \beta \sin \lambda dq & dy'' &= \cos \beta'' \sin \lambda'' dq'' \\ dz &= \sin \beta dq & dz'' &= \sin \beta'' dq'' \\ r dr &= q dq & r' dr' &= q'' dq''. \end{aligned}$$

Ein dritter Ort — gleichgültig, ob derselbe ein Zwischenort oder ein außerhalb liegender ist — sei durch (λ', β') gegeben. Dessen heliozentrische Koordinaten x' , y' , z' sind gegeben durch

$$\begin{aligned} x' &= nx + n'x'', \quad \text{analog } y', z'; \\ dx' &= ndx + n'dx'' + xdn + x'dn'', \quad \text{usw.}, \end{aligned}$$

wo n und n'' die zwei Dreiecksverhältnisse sind. Ist $(x'y'z')$ der aus den zu verbessernden Elementen berechnete Ort, $x' + dx'$, $y' + dy'$, $z' + dz'$ der aus den wahren durch $q + dq$, $q'' + dq''$ bestimmte Ort, so sind in dx' , dy' , dz' , auch die Differentialien dn und dn'' durch dq und dq'' auszudrücken. Allein die streng genauen Formeln für dn und dn'' sind (vgl. 8) sehr kompliziert und mühsam zu berechnen. Berücksichtigt man, daß in der Gleichung für dx' (ebenso für dy' und dz') die Koeffizienten von dq und dq'' in den Gliedern $ndx + n'dx''$ von den nullten, in den Gliedern von $xdn + x'dn''$ aber von der zweiten Ordnung — also im Verhältnis zu der ersteren klein sind — so genügt es zur Bestimmung von dn und dn'' für n und n'' Näherungsausdrücke zu verwenden.

3. Tietjen, der dieses gekürzte Verfahren nur für den Fall einer einzigen Erscheinung, besonders wenn sich die Beobachtungen nur über einen kurzen Zeitraum erstrecken (»bei Zwischenzeiten, die nur reichlich einen Monat um-

fassen*) empfiehlt, benützt für das Verhältnis Sektor : Dreieck die Formel

$$y = 1 + \frac{\vartheta^2}{6r_0^3}, \quad r_0 = \frac{1}{2}(r + r'),$$

und setzt für die drei Werte r , r' , r'' die Gleichung

$$\vartheta r' = \vartheta r + \vartheta'' r'' \quad \text{oder} \quad r' = Ar + A'' r''$$

voraus.

Aus

$$r = r' - \alpha \vartheta'' + \beta \vartheta''^2, \quad r'' = r' + \alpha \vartheta + \beta \vartheta^2$$

folgt

$$\vartheta r + \vartheta'' r'' = \vartheta (r' + \beta \vartheta \vartheta''), \quad \beta = \frac{1}{2} \frac{e \cos \nu'}{r'^2};$$

in der Gleichung

$$r' = Ar + A'' r''$$

wird daher das Glied mit $e \vartheta \vartheta''$ vernachlässigt.

Aus dem Ausdrücke für y folgt, daß zur Darstellung der von dn und dn'' Größen vierter Ordnung vernachlässigt werden.

Bei Tietjen, der überdies den Ort (x', y', z') als zwischenliegenden Normalort voraussetzt, ist diese Interpolation von r' für die Differentialien von n und n'' gestattet; weniger ist dies der Fall bei einer Extrapolation, d. i. wenn eine gegebene Bahnbestimmung durch eine spätere oder (was wohl selten der Fall ist) durch eine erst nachträglich bekannt gewordene frühere Beobachtung derselben Erscheinung verbessert werden soll. Bauschinger setzt den Ort (x', y', z') außerhalb liegend voraus — was bei dieser Art der Bahnverbesserung in der Regel der Fall ist —. Für die Dreiecksverhältnisse benützt er die Gibbsschen Ausdrücke; zur Bestimmung von dn und dn'' entwickelt er die Dreiecksflächen — oder was gleichwertig ist — die Dreiecksverhältnisse nach Potenzen je von r und r'' allein und deren Differentialquotienten. Werden die Glieder mit den

zweiten Differentialquotienten vernachlässigt, so erhält man zwei Gleichungen von der Form

$$An + Bn = C + \frac{D}{r^3}$$

$$A''n + B''n = C'' + \frac{D''}{r'^3},$$

aus welchen dn und dn'' bestimmt werden; der Grad der Genauigkeit ist aber nicht höher als bei Anwendung der Tietzjenschen Ausdrücke.

4. Bei Verwendung der Gibbsschen Ausdrücke der Dreiecksverhältnisse erhält man in den Gleichungen für $x' = nx + n''x''$, y' , z' , wenn in

$$\left(1 - \frac{B'}{r'^3}\right)n = A\left(1 + \frac{B}{r^3}\right), \quad \left(1 - \frac{B'}{r'^3}\right)n'' = A''\left(1 + \frac{B''}{r'^3}\right)$$

$$r' = Ar + A''r''$$

oder $\frac{1}{r'^3} = \frac{A}{r^3} + \frac{A''}{r''^3} \left(\text{Fehler } (1 - y^2) \frac{\sigma_2 \nu^2}{r'^3}\right)$ gesetzt wird, Fehler der Ordnung ν^5 , $e\nu^4$.

Durch Differentiation folgt für die Gibbsschen Ausdrücke

$$\left(1 - \frac{B'}{r'^3}\right)dn = -3B'n \frac{dr'}{r'^4} - 3AB \frac{dr}{r^4}$$

$$\left(1 - \frac{B'}{r'^3}\right)dn'' = -3B'n'' \frac{dr'}{r'^4} - 3A''B'' \frac{dr''}{r''^4}.$$

Werden für r' die obigen Näherungswerte gesetzt, so erhält man bzw.

$$\left(1 - \frac{B'}{r'^3}\right)dn = -3A\left(\frac{B}{r^4} + \frac{B'n}{r'^4}\right)dr - 3A''B'n \frac{dr''}{r'^4}$$

$$\left(1 - \frac{B'}{r'^3}\right)dn'' = -3AB'n'' \frac{dr}{r'^4} - 3A''\left(\frac{B'n''}{r'^4} + \frac{B''}{r''^4}\right)dr'';$$

$$\left(1 - \frac{B'}{r'^3}\right)dn = -3A(B + B'n) \frac{dr}{r^4} - 3A''B'n \frac{dr''}{r'^4}$$

$$\left(1 - \frac{B'}{r'^3}\right)dn'' = -3AB'n'' \frac{dr}{r^4} - 3A''(B'' + B'n'') \frac{dr''}{r''^4};$$

letztere Formeln sind etwas bequemer. Für die Anwendung setze man sie in der Form an

$$\left(1 - \frac{B'}{r'^3}\right) dn = -3A(B + B'n \frac{q dq}{r^5} - 3A''B'n \frac{q'' dq''}{r''^5})$$

$$\left(1 - \frac{B'}{r'^3}\right) dn'' = -3AB'n'' \frac{q dq}{r^5} - 3A''(B'' + B'n'') \frac{q'' dq''}{r''^5}.$$

Da für einen außerhalb liegenden Normalort (x', y', z') F absolut in der Regel zwischen 1 und 3 liegt, so ist B' die kleinste der drei Zahlen B, B', B'' , wodurch der Einfluß einer fehlerhaften Annahme für r' vermindert wird.

5. Eine Steigerung der Genauigkeit in den Werten dx', dy', dz' bietet hinsichtlich der Glieder $ndx + n''dx''$ usw. keine Schwierigkeit, da aus den zu verbessernden Elementen die Werte n und n'' mit beliebiger Genauigkeit erhalten werden können. Anders verhält es sich mit den Gliedern $x dn + x'' dn''$ usw., welche ebenfalls durch dq und dq'' auszudrücken sind. Zu diesem Zwecke müssen genauere Ausdrücke für n und n'' als Funktionen von r, r', r'' gewählt werden, ferner noch eine Gleichung aufgestellt werden, aus der dr^k in einer dem genaueren Ansatz von n und n' entsprechenden Genauigkeit durch dr und dr'' erhalten wird.

Wird den Gibbsschen Ausdrücken das erste Verbesserungsglied U mit ν^4 hinzugefügt, wobei für σ_2 der Näherungswert β (S. 160) gesetzt wird, so erhält man mit einem Fehler der Ordnung $\epsilon\nu^5$

$$n = n \text{ Gibbs} + u, \quad n'' = n'' \text{ Gibbs} - u,$$

$$u = \frac{f(q-f^2)}{720} \frac{\vartheta'^2}{r'^3} \left(\frac{f^2-1}{8} \frac{\vartheta'^2}{r'^3} - 3 \left(A \left(\frac{r'}{r} \right)^3 + A'' \left(\frac{r'}{r''} \right)^3 - 1 \right) \right)$$

$$du = \frac{f(q-f^2)}{80} \frac{\vartheta'^2}{r'^3} \left(\left(1 - \frac{f^2-1}{12} \frac{\vartheta'^2}{r'^3} \right) \frac{dr'}{r'^4} - \left(A \frac{dr}{r^4} + \frac{A'' dr''}{r''^4} \right) \right),$$

welche Verbesserungen den obigen Gibbsschen Ausdrücken für n, n'' und dn, dn'' hinzuzufügen sind.

Vermittels der Gibbsschen Ausdrücke der Dreiecksverhältnisse wird auch eine hinreichend genaue Beziehung der Größen dr , dr' , dr'' erhalten.

Bedeutet n , n'' die genauen Werte der Dreiecksverhältnisse, so folgt aus den Gleichungen $x' = nx + n''x''$, ebenso für y' und z'

$$r'^2 = n^2 r^2 + n''^2 r''^2 + 2nn''(xx'' + yy'' + zz'').$$

Setzt man für n und n'' die Gibbsschen Ausdrücke, so wird

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{B'}{r'^3}\right)^2 r'^2 &= A^2 \left(1 + \frac{B}{r^3}\right)^2 r^2 + A''^2 \left(1 + \frac{B''}{r''^3}\right)^2 r''^2 \\ &+ 2AA'' \left(1 + \frac{B}{r^3}\right) \left(1 + \frac{B''}{r''^3}\right) (xx'' + yy'' + zz''). \end{aligned}$$

Hinsichtlich der Genauigkeit dieser Gleichung mag bemerkt werden: sind n , n'' die Gibbsschen Ausdrücke, so wird mit Beziehung des Gliedes u mit v^4

$$x' = nx + n''x'' + u(x - x''), \quad x'' - x = \frac{dx'}{dt} \mathcal{J}' + \dots$$

$$x' = x' \text{ Gibbs} - u \frac{dx'}{dt} \mathcal{J}' + \dots$$

$$r'^2 = r'^2 \text{ Gibbs} - 2u \mathcal{J}' \left(x' \frac{dx'}{dt} + y' \frac{dy'}{dt} + z' \frac{dz'}{dt} \right) + \dots$$

$$= r'^2 \text{ Gibbs} - u \frac{d(r'^2)}{dt} \mathcal{J}' + \dots;$$

also deren Fehler von der Ordnung ϵv^5 .

Durch Differentiation folgt

$$d \left(\left(1 - \frac{B'}{r'^3}\right) r' \right)^2 = 2 \left(1 + \frac{B'}{r'^3} - 2 \frac{B'^2}{r'^6} \right) r' dr'$$

$$d \left(\left(1 + \frac{B}{r^3}\right) r \right)^2 = 2 \left(1 - \frac{B}{r^3} - 2 \frac{B^2}{r^6} \right) r dr;$$

für den Ausdruck $xx'' + yy'' + zz''$ und sein Differential folgt

$$\begin{aligned} xx'' + yy'' + zz'' &= rr' \cos(v'' - v) = rr' \cos(CC''), \\ d(xx'' + yy'' + zz'') &= r'' \cos(BC'') dq + r \cos(B'C) dq'', \end{aligned}$$

$$\cos(BC'') = \cos \beta \cos b'' \cos(\lambda - l'') + \sin \beta' \sin b''$$

$$\cos(B''C) = \cos \beta'' \cos b \cos(\lambda'' - l) + \sin \beta'' \sin b,$$

dabei bedeuten B, B' und C, C'' die geozentrischen und heliozentrischen Orte des Himmelskörpers auf der Kugel mit dem Radius Eins der Fig. 5 des Art. 15. Damit wird

$$\left(1 + \frac{B'}{r'^3} - 2\left(\frac{B'}{r'^3}\right)^2\right) r' dr' = Q dq + Q' dq'',$$

$$Q = A^2 \left(1 - \frac{B}{r^3} - 2\left(\frac{B}{r^3}\right)^2\right) q$$

$$+ AA'' \left(1 + \frac{B''}{r''^3}\right) r'' \left(\left(1 + \frac{B}{r^3}\right) \cos(BC'') - 3 \frac{B}{r^3} \cos(CC'') \frac{q}{r} \right)$$

$$Q'' = A''^2 \left(1 - \frac{B''}{r''^3} - 2\left(\frac{B''}{r''^3}\right)^2\right) q''$$

$$+ AA'' \left(1 + \frac{B}{r^3}\right) r \left(\left(1 + \frac{B''}{r''^3}\right) \cos(B''C) - 3 \frac{B''}{r''^3} \cos(CC'') \frac{q''}{r''} \right).$$

Mit Vernachlässigung der Größen $(B:r^3)^2, \dots$ die in den Koeffizienten von dn und dn'' nur Größen sechster Ordnung liefern, wird

$$\frac{r' dr'}{1 - \frac{B'}{r'^3}} = Q dq + Q' dq'',$$

$$Q = \frac{A^2}{1 + \frac{B}{r^3}} q + AA'' \left(1 + \frac{B''}{r''^3}\right) r''$$

$$\left(\left(1 + \frac{B}{r^3}\right) \cos(BC'') - 3 \frac{Bq}{r^3 r} \cos(CC'') \right)$$

$$Q'' = \frac{A''^2}{1 + \frac{B''}{r''^3}} q'' + AA'' \left(1 + \frac{B}{r^3}\right) r$$

$$\left(\left(1 + \frac{B''}{r''^3}\right) \cos(B''C) - 3 \frac{B''}{r''^3} \frac{q''}{r''} \cos(CC'') \right).$$

Damit erhält man für die Gibbsschen Ausdrücke

$$- \frac{dn}{3n} = \left(\frac{Bq}{\left(1 + \frac{B}{r^3}\right) r^5} + \frac{B'Q}{r'^5} \right) dq + \frac{B'Q''}{r'^5} dq''$$

$$-\frac{dn''}{3n''} = \frac{B'Q}{r'^5} dq + \left(\frac{B''q''}{\left(1 + \frac{B''}{r''^3}\right)r'^5} + \frac{B'Q''}{r'^5} \right) dq'',$$

welche Ausdrücke der Voraussetzung, daß x' , y' , z' genau einschließlich der Glieder mit ν^4 sind, entsprechen.

Aus dn Gibbs + du , dn'' Gibbs - du erhält man die geforderten Differentialien der Dreiecksverhältnisse mit einer Genauigkeit, welche der Annahme derselben mit einem Fehler der Ordnung $\epsilon\nu^5$ entspricht. Eine weitere Steigerung an Genauigkeit ist ohne bedeutende Mehrrechnung nicht möglich.

6. Setzt man nun die Werte dx , dx'' , . . . dn , dn'' , ausgedrückt durch dq und dq'' , in die drei Gleichungen

$$dx' = n dx + n'' dx'' + x dn + x'' dn''$$

usw., so erhält man dx' , dy' , dz' linear durch dq und dq'' ausgedrückt; setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen

$$e' \cos \beta' d\lambda' = \cos \lambda' dy' - \sin \lambda' dx'$$

$$e' d\beta' = \cos \beta' dz' - \sin \beta' (\cos \lambda' dx' + \sin \lambda' dy'),$$

wo $d\lambda'$, $d\beta'$ die Unterschiede sind, welche aus dem Vergleich Beobachtung - Rechnung des zu verbessernden Ebenensystemes erhalten wurden, so nehmen diese die Form an

$$\cos \beta' d\lambda' = A dq + A'' dq''$$

$$d\beta' = B dq + B'' dq'',$$

aus welchen beiden Gleichungen dq und dq'' erhalten werden. Sind mehrere Normalorte (λ' , β') vorhanden, so werden diese Größen nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt.

7. Für mehr als eine Erscheinung (Opposition eines kleinen Planeten) läßt sich diese Abkürzung der Rechnung nicht anwenden. Denn für die nächste Opposition (x' , y' , z') steigt, wenn etwa $\vartheta' = 1$ angenommen wird, f bis -13 oder noch höher. In den Reihenentwicklungen für die Dreiecksverhältnisse wurden zugleich mit ν auch $(1 + f)\nu$,

$(1 - f)\nu$ und allenfalls noch 2ν als kleine Größen erster Ordnung angesehen. Setzt man für $\mathcal{J}' = 1$ $\nu = \frac{1}{6}$, so wird für $1 - 6\sigma_2 = \pm 1$, das Fehlerglied mit ν^4 (absolut) 0.8. Für größere Werte der Exzentrizität kann $1 - 6\sigma_2$ bis 4, also das Fehlerglied mit ν^4 bis 3 ansteigen. In diesem Falle muß man wohl das in Art. 35 auseinandergesetzte empirische Verfahren anwenden, das aber in der Regel selbst bei mehr als drei Erscheinungen eines kleinen Planeten noch zum Ziele führt.

8. Übrigens wird eine Abkürzung der Rechnung des in Art. 35 mitgeteilten Verfahrens dadurch erzielt, daß man zum Teile die Differentialien der Elemente, welche den partiellen Änderungen dq und dq'' entsprechen, rechnet*). Diese Rechnung wird vier- oder höchstens fünfstellig ausgeführt. Zunächst mögen einige den Hypothesen II und III gemeinsame Formeln zusammengestellt werden.

1) Sind λ, β konstant, so folgt aus den Gleichungen in 2

$$dq = dq, \quad r dr = q dq;$$

$$dl = \frac{\cos \beta \sin(\lambda - l) dq}{r \cos b},$$

wegen

$$q \cos \beta \sin(\lambda - l) + R \sin(L - l) = 0,$$

$$dl = \frac{R}{r \cos b} \sin(l - L) \frac{dq}{q};$$

$$db = \frac{R \sin \beta \cos(l - L)}{r^2} dq = \frac{R}{r} \sin b \cos(l - L) \frac{dq}{q}.$$

2) Ist M_0 die mittlere Anomalie der Epoche, \mathcal{J} die von ihr gezählte Zeit, so folgt aus

*) Für parabolische Bahnen kann diese differenzielle Berechnung vollständig geführt werden, wie dies Dr. A. O. Leuschner mit Erfolg in seinen »Beiträge zur Kometenbahnbestimmung« (Berlin, 1897) nachgewiesen hat.

$$M = M_0 + \frac{\mathfrak{J}}{a^{\frac{3}{2}}} = E - e \sin E,$$

$$r = a - ae \cos E, \quad \tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2},$$

$$\frac{dr}{a} = \tan \varphi \sin v dM_0 + \left(\tan \varphi \sin v \mathfrak{J} - \frac{2}{3} \frac{r}{a} a^{\frac{3}{2}} \right) d\mu \\ - \cos \varphi \cos v d\varphi,$$

$$dv = \cos \varphi \left(\frac{a}{r} \right)^2 (dM_0 + \mathfrak{J} d\mu) + \left(\frac{p}{r} + 1 \right) \cos \varphi \sin v d\varphi.$$

Ferner ist

$$\frac{da}{a} = -\frac{2}{3} \frac{d\mu}{\mu}, \quad \frac{dp}{p} = \frac{da}{a} - 2 \tan \varphi d\varphi.$$

3) Ist K der Modulus der briggischen Logarithmen, so folgt aus

$$d \log \text{brigg } x = K \frac{dx}{x}, \quad \frac{dx}{x} = \frac{d \log \text{brigg } x}{K},$$

um $\frac{dx}{x}$ in Bogensekunden auszudrücken, wird durch $\sin 1''$ dividiert; es ist daher

$$\left(\frac{dx}{x} \right)'' = \frac{d \log \text{brigg } x}{K \sin 1''},$$

$$\log K = 9.63778, \quad \log \frac{1}{K \sin 1''} = 5.67665.$$

Für die zweite Hypothese II wird ϱ in $\varrho + d\varrho$ verändert, ϱ'' , also auch r'' , l'' , b'' bleiben konstant. Aus

$$\tan b = \tan i \sin (l - \Omega), \quad \tan b'' = \tan i \sin (l'' - \Omega)$$

folgt durch logarithmische Differentiation

$$\frac{db}{\sin b \cos b} = \frac{di}{\sin i \cos i} + \cot (l - \Omega) (dl - d\Omega)$$

$$0 = \frac{di}{\sin i \cos i} + \cot (l'' - \Omega) \cdot d + \Omega;$$

$$d\Omega = \frac{\sin (l - \Omega) \sin (l'' - \Omega)}{\sin (l'' - l)} \left(\frac{-db}{\sin b \cos b} + \cot (l - \Omega) dl \right)$$

$$= -\frac{\sin (l'' - \Omega) \sin (L - \Omega)}{\sin (l'' - l)} \frac{R}{r \cos b} \frac{d\varrho}{\varrho},$$

$$di = \sin i \cos i \cot (l'' - \Omega) d\Omega.$$

Aus

$$\cos u = \cos b \cos (l - \Omega), \quad \cos u'' = \cos b'' \cos (l'' - \Omega)$$

folgt durch logarithmische Differentiation

$$\tan u du = \tan b db + \tan (l - \Omega) (dl - d\Omega)$$

$$\tan u'' du'' = -\tan (l'' - \Omega) d\Omega;$$

wegen $\tan u \cos i = \tan (l - \Omega)$, ist $\frac{\tan b}{\tan u} = \sin i \cos (l - \Omega)$,

$$du = \sin i \cos (l - \Omega) db + \cos i (dl - d\Omega)$$

$$du'' = -\cos i d\Omega;$$

$$d(u'' - u) = -\sin i \cos (l - \Omega) db - \cos i dl,$$

$$\sin i \cos b = \frac{\sin b \cos i}{\sin (l - \Omega)};$$

setzt man für dl , db die Werte, so wird

$$d(u'' - u) = -\frac{R \cos i}{r \cos b} (\sin b^2 \cos (l - L) \cot (l - \Omega) \\ + \sin (l - L)) \frac{dq}{q}$$

$$du = du'' - d(u'' - u), \quad d(u'' - u) = d2f'.$$

Für die dritte Hypothese III wird der erste Ort mit dem dritten vertauscht; damit wird

$$d\Omega = \frac{\sin (l - \Omega) \sin (L'' - \Omega)}{\sin (l'' - l)} \frac{R''}{r'' \cos b''} \frac{dq''}{q''},$$

$$di = +\sin i \cos i \cot (l - \Omega) d\Omega,$$

$$du = -\cos i d\Omega,$$

$$d(u'' - u) = \frac{R'' \cos i}{r'' \cos b''} (\sin b''^2 \cos (l'' - L'') \cot (l'' - \Omega) \\ + \sin (l'' - L'')) \frac{dq''}{q''}.$$

Bis hierher bietet die Berechnung der Differentialen nach den strengen Formeln keine Schwierigkeit; für deren Fortsetzung müßte man bei einer elliptischen Bahn zunächst aus (7) des Art. 6 $\frac{dg}{dr}$ (oder $\frac{dg}{dq}$) bestimmen; diese Rechnung

wird so kompliziert, daß die direkte Berechnung vorzuziehen ist.

Gehören der »erste und dritte Ort«, welche zur Bahnbestimmung verwendet werden, verschiedenen Erscheinungen an, so wird die Berechnung der Elemente a, e, p aus den Werten $r, r'', u'' - u$ der Hypothesen II und III direkt nach Art. 6, S. 11, zu Ende geführt.

Gehören aber der erste und dritte Ort derselben Erscheinung an, so rechnet man die Größe y , wozu sechsstellige Rechnung genügt, auch dann, wenn die Elementenberechnung siebenstellig geführt wird. Aus y wird p nach

$$vp = y \frac{r r'' \sin 2f'}{g'}$$

siebenstellig gerechnet, wodurch dp erhalten wird.

Als weitere verwendbare Differentialien mögen noch folgen: Aus den Gleichungen

$$e \cos v = \frac{p}{r} - 1, \quad e \cos v'' = \frac{p}{r''} - 1$$

folgt

$$-e \sin v dv + \cos v de = \frac{p}{r} \left(\frac{dp}{p} - \frac{dr}{r} \right) = m$$

$$-e \sin v'' dv + \cos v'' de = \frac{p}{r''} \frac{dp}{p} + e \sin v'' d(v'' - v) = n$$

$$\sin 2f' \cos \varphi d\varphi = m \sin v'' - n \sin v$$

$$\sin 2f' \sin \varphi dv = m \cos v'' - n \cos v,$$

wo m und n in Bogensekunden auszudrücken sind. Bei kleinen Werten von e und f' ist dv nur unsicher zu bestimmen.

Aus dp und $d\varphi$ werden nach 2) da, dM_0, dv erhalten.

Register.

- Aberration 65.
Aphelium 2.
Apogeum 107.
Apsidenlinie 2.
Argument der Breite 24.
Ausgleichspunkt 105.
- Bewegung:**
 direkte 216.
 retrograde 216.
- Bond 80.
Boscovich 150.
Bradley 70.
Breite 23.
- Ceres 172.
- Deferierender Kreis 107.
Deklination 58.
- Ekliptik 22.
Elemente des Planeten 23.
Ellipse 1.
Encke 89.
Ephemeride 77.
Epizykel 105.
Erdbahn 130.
Eudoxus 104.
Euler 19, 150.
Evektion 103.
Exzentrischer Kreis 3, 105.
- Fabricius, David 124.
Fabritius, W. 177.
Fixsterne 102.
- Flächengeschwindigkeit 5.
Forti-Tafeln 203.
Frühlingspunkt 22.
- Galilei 119.
Gauß:
 Ceresbahn 149.
 Bahn aus drei Beobachtungen 31.
 Bahn aus vier Beobachtungen 53.
 Konstante 5, 190.
Gibbs 157.
Gravitation 146, 153.
- Harmonien 142.
Harzer 154.
Herschel 147.
Hipparch 72, 105.
Horizontalparallaxe 62.
Horrox 230.
Hyperbel:
 Funktionen 198—204.
Hypothese, stellvertretende 128.
- Jahr 5.
Juno 42.
- Kepler:**
 Entdeckung des ersten 140.
 > des zweiten 133.
 > > dritten Gesetzes 145.
 Problem 6.
 Knotenlinie 22.

- Konjunktion 111.
 Kopernikus 115.
 Kreisbahn 147.
 Kurtierte Distanz 26.

 La Caille 150.
 La Grange 151.
 Lambert:
 Formel 19.
 Transzendenter Winkel 199.
 Lampe 203.
 Länge 23, 111.
 La Place 151.
 Ligowski-Tafeln 204.
 Longomontanus 123.

 Mästlin 119.
 Mars 124.
 Merkur 113.
 Mittelpunktsgleichung 106.
 Mittlere Bewegung 4, 8.

 Neigung 22.
 Newton 150.
 Normalort 83.
 Nutation 71.

 Olbers 151.
 Opposition 111.
 Optische Gleichung 106.
 Ovallinie 137.

 Pallas 176.
 Parabel 7.
 Parallaxe 60.
 › jährliche 69.

 Perigeum 107.
 Perihelium 2.
 Peurbach 120.
 Physische Gleichung 106.
 Planeten:
 obere, untere 111.
 Präzession 71.
 Primum mobile 222.
 Prutenische Tafeln 118.
 Ptolemäus 105.
 Punctum aequans 105.

 Quadratur, mechanische 91.

 Radiusvektor 2.
 Reduktion auf die Ekliptik 72.
 Regula falsi 190.
 Reinhold Erasmus 118.
 Rektaszension 58.
 Retrograde Bewegung 179.
 Rudolfinische Tafeln 141.

 Schiefe der Ekliptik 72.
 Sphärentheorie 222.
 Störungen, spezielle 87.

 Tycho 122.

 Ungleichheit 102.
 Uranus 147.

 Variation der Konstanten 89.
 Venus 113.

 Wirbeltheorie 146.

14 DAY USE
RETURN TO DESK FROM WHICH BORROWED

LOAN DEPT.

RENEWALS ONLY—TEL. NO. 642-3405

This book is due on the last date stamped below, or
on the date to which renewed.

Renewed books are subject to immediate recall.

AUG 15 1969 7 II

REC. CIR. MW 1 '76

LD21A-60m-6,'69
(J9096s10)476-A-32

General Library
University of California
Berkeley

593442

QB355
F143
1922

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

